

فصل ۴ - سوال ۱: دو جعبه ای حاوی ۵ مهره است که از آن ۵ نامگذاری شده اند. از این جعبه نمونه ای مرکب از ۲ مهره به تصادف به دست می آید.

$$f_{x_1, x_2} = P(x_1 = 1, x_2 = 1) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

برای همه حالات دیگر نیز همین حالت اتفاق می افتد پس ۵ × ۵ حالت از  $\frac{1}{25}$  داریم که شامل (۱,۱) و ... است. با مقادیر داده شده مقادیر میانی  $X$  عبارت است از:

$$\bar{X} = \{1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5\}$$

$$f(\bar{x}) = P(\bar{x} = 3) \Rightarrow (3,3), (1,5), (5,1), (2,4), (4,2) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

همچنین برای نقاط دیگر داریم:

$$f(\bar{x}) = P(\bar{x} = 2) \Rightarrow (1,3), (3,1), (2,2) = \frac{3}{25}$$

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$f(\bar{x})$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

میانی ها را به صورت جدول زیر نشان می دهیم:

$$E(\bar{X}) = (1 \times \frac{1}{25}) + (1.5 \times \frac{2}{25}) + (2 \times \frac{3}{25}) + (2.5 \times \frac{4}{25}) + (3 \times \frac{5}{25}) + (3.5 \times \frac{4}{25}) + (4 \times \frac{3}{25}) + (4.5 \times \frac{2}{25}) + (5 \times \frac{1}{25})$$

$$= \frac{1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 14 + 12 + 9 + 5}{25} = \frac{75}{25} = 3$$

$$E(\bar{X}^2) = (1^2 \times \frac{1}{25}) + (1.5^2 \times \frac{2}{25}) + (2^2 \times \frac{3}{25}) + (2.5^2 \times \frac{4}{25}) + (3^2 \times \frac{5}{25}) + (3.5^2 \times \frac{4}{25}) + (4^2 \times \frac{3}{25}) + (4.5^2 \times \frac{2}{25}) + (5^2 \times \frac{1}{25})$$

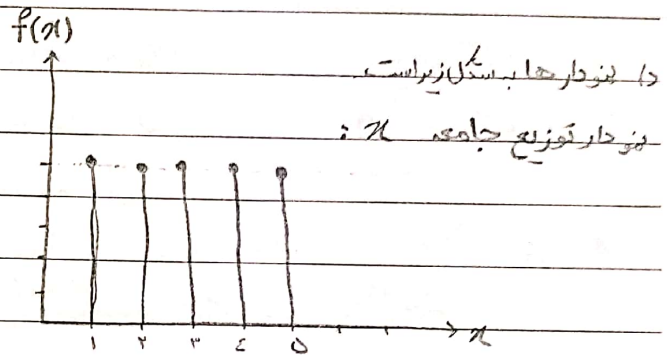
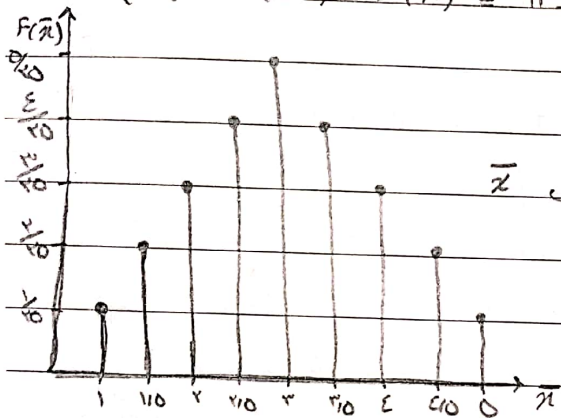
$$= \frac{1 + 4.5 + 12 + 25 + 45 + 56 + 48 + 40.5 + 25}{25} = \frac{250}{25} = 10$$

$$\text{Var}(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - E(\bar{X})^2 = 10 - (3)^2 = 10 - 9 = 1$$

$$E(X) = (1 \times \frac{1}{8}) + (2 \times \frac{1}{8}) + (3 \times \frac{1}{8}) + (4 \times \frac{1}{8}) + (5 \times \frac{1}{8}) = 3 \quad (ج)$$

$$E(X^2) = (1 \times \frac{1}{8}) + (2 \times \frac{1}{8}) + (9 \times \frac{1}{8}) + (16 \times \frac{1}{8}) + (25 \times \frac{1}{8}) = 11$$

$$Var(\bar{X}) = E(X^2) - E(X)^2 = 11 - (3)^2 = 11 - 9 = 2$$



۹) تعداد مکالمه های تلفنی که از طریق مرکزی انجام می شود به طور متوسط ۴ مکالمه در دقیقه است. احتمال تقریبی این که طی یک ساعت

حل: ۱) با جزئیات گفتن ۴، ۳، ۲، ۱ و ۰ تعداد مکالمات تلفنی در زمان  $t$  باشد نگاه به ازای هر دقیقه  $t$  مکالمه داریم

$$P(\sum_{i=1}^4 X_i \geq 20) = P(\bar{X} \geq \frac{20}{4}) = P(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{\frac{20}{4} - 4}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}}) = P(Z \geq 0.144) =$$

$$1 - P(Z < 0.144) = 1 - 0.17389 = 0.82611$$

۲۸) میانگین و انحراف معیار نمره های درس آمار دانشجویان یک دانشگاه به ترتیب ۷۲ و ۸ می باشد. دو نمونه تصادفی مستقل ۳۴

$$\Rightarrow P(2 < |\bar{X}_1 - \bar{X}_2| < 5) \quad \left. \begin{array}{l} n_1 = 34 \\ n_2 = 8 \end{array} \right\} \text{ حل:}$$

$$\xrightarrow{\text{قدر مطلق}} P(2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 5) + P(-5 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 < -2) \quad \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(0, \frac{1^2}{34} + \frac{1^2}{8})$$

$$\Rightarrow 2 P(\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{34} + \frac{1}{8}}} < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2) < \frac{5}{\sqrt{\frac{1}{34} + \frac{1}{8}}})$$

$$= 2 P(1.09 < Z < 2.172) = 2(P(Z < 2.172) - P(Z < 1.09)) =$$

$$2(0.9947 - 0.1442) = 0.841$$



Subject:

Year. Month. Day.

مصطفی نصیری

فصل ۷.

۱۳ نمونه‌ای به اندازه ۲۵ لامپ روشنایی از یک دسته بزرگ لامپ‌های ۲۰ وات گرفته شده است و میانگین عمر لامپ‌های نمونه ۱۴۱.

$$\sigma = 20$$

$$n = 25$$

$$\bar{x} = 141$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow Z_{0.975} = 1.96$$

$$\mu \in \left( \bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= \left( 141 - (1.96) \frac{20}{\sqrt{25}}, 141 + (1.96) \frac{20}{\sqrt{25}} \right) = 141 \pm (1.96) \frac{20}{5}$$

$$\Rightarrow (133.12, 148.88)$$

۱۸ انحراف استاندارد طول عمر یک نمونه ۲۰ تایی از لامپ‌های الکتریکی ساخت یک کارخانه است. برای

$$n = 20$$

$$S = 10$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$$

$$\chi^2_{0.975}(19) = 28.9194$$

$$\chi^2_{0.025}(19) = 14.1884$$

$$\Rightarrow \sigma^2 \in \left( \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right) = \left( \frac{(20-1)(10)^2}{28.9194}, \frac{(20-1)(10)^2}{14.1884} \right) = (1293.49, 12997.4)$$

۲۴ دو ماشین A و B صابون‌های ۸ گرمی از یک ماده وابسته‌بندی می‌کنند. با استفاده از تجربیات گذشته این ماشین‌ها

$$\sigma_A = 0.14$$

$$\sigma_B = 0.15$$

$$\mu_A - \mu_B \in \left( \bar{x}_A - \bar{x}_B - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}, \bar{x}_A - \bar{x}_B + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} \right)$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

$$= (1118 - 1115 + 1.96 \sqrt{\frac{(0.14)^2}{10} + \frac{(0.15)^2}{10}}) = (-1.135, 0.145)$$

۳۲ یک جایگاه سوخت‌گیری برای کامیون‌ها، یادداشت‌های انواع داده‌ها با مشترکات را نگه‌داری کرده است.

$$\sigma = 10$$

$$n = 18$$

$$S = 2170$$

$$1 - \alpha = 0.99$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} = (219) \frac{2170}{\sqrt{18}} \approx 1187$$

Subject:

Year. Month. Day.

مصطفیٰ رضوی شہری

فصل ۸

۱۳) نسبت خانوادہ‌های ساکن در شهر مخصوصی که از کمپانی A ششبر می‌خرند ۰.۱۴ است. اگر از یک نمونه تصادفی ۱۰ خانوادہی ۳ یا کمتر

$$\alpha = P(X \in C | H_0 \text{ درست}) \Rightarrow P(X \leq 3 | P = 0.14) = 0.10548 \quad \left. \begin{array}{l} H_0: P = 0.14 \\ H_1: P < 0.14 \end{array} \right\} \text{ حل}$$

$$C = X | X \leq 3$$

$$P = 0.13 \Rightarrow \beta = P(X \notin C | H_1 \text{ درست}) = P(X > 3 | P = 0.13) = 1 - P(X \leq 3 | P = 0.13) = 1 - 0.14994 = 0.85006$$

$$P = 0.12 \Rightarrow \beta = P(X \notin C | H_1 \text{ درست}) = P(X > 3 | P = 0.12) = 1 - P(X \leq 3 | P = 0.12) = 1 - 0.13823 = 0.86177$$

$$P = 0.11 \Rightarrow \theta = P(X \notin C | H_1 \text{ درست}) = P(X > 3 | P = 0.11) = 1 - P(X \leq 3 | P = 0.11) = 1 - 0.11719 = 0.88281$$

۱۷) یک نمونه تصادفی ۸ تایی از یک نوع سیگار دارای حد متوسط نیکوتین ۱۸.۶ میلی‌گرم با انحراف معیار استاندارد ۰.۵

$$\chi^2_{1-\alpha}(n-1) = \chi^2_{0.99}(7) = 18.475 \quad \left. \begin{array}{l} H_0: \sigma^2 \leq 4 \\ H_1: \sigma^2 > 4 \end{array} \right\} \text{ حل}$$

$$\alpha = 0.01, S = 21.4, n = 8$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(8-1)(21.4)^2}{4} = 91.72$$

۱۳۳) دو نمونه تصادفی بمانند از دو جامعه نرمال مستقل دارای نتایج زیر است:  $S_1^2 = 9.2$  و  $S_2^2 = 5.4$

$$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \Leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \quad \text{حل}$$

$$F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1) = F_{0.01}(14, 10) = \frac{1}{F_{0.99}(10, 14)} = \frac{1}{3.742} = 0.2674$$

$$\Rightarrow F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \left(\frac{9.2}{5.4}\right)^2 = 1.52 \Rightarrow H_0 \text{ رد نمی‌شود} \quad 11.32$$