מודלים לא ליניאריים בחקר ביצועים - תרגיל בית 3

12 באפריל 2021

שאלה 1

תהי $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ויהיו $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ו־$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. נגדיר את $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ על־ידי $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$. אז שאם f גזירה ברציפות אז $\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T \nabla f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$.

הכוונה: השתמשו בכלל השרשרת עבור פונקציות מרובות משתנים.

שאלה 2

מיצאו נוסחה מפורשת לחישוב הגרדיאנט וההסיאן של הפונקציות הבאות. ניתן להגדיר פונקציות, מטריצות וקטורי עזר בדומה למה שראינו בתרגול.

א. $f(x,y,z) = (x+2y-3z)^2 - e^{-2x+y-z}$.

ב. $f(x,y,z) = (x+y)^2 (y+z)^3 (z+x)^4$.

ג. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f(\mathbf{x}) = \ln\left(\left(\mathbf{c}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b})\right)^2 + 1\right)$ עבור $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ו־$\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

ד. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f(\mathbf{x}) = \ln\left(\sum_{j=1}^{n} e^{\mathbf{A}_j^T \mathbf{x} + \mathbf{b}_j}\right)$ עבור $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ו־$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ וכאשר $\mathbf{A}_j$ היא העמודה ה־j של $\mathbf{A}$.

שאלה 3

א. נתונות קבוצה סגורה $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ופונקציה רציפה $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. ידוע כי קיים סקלר $\alpha \in \mathbb{R}^n$ כך שהקבוצה $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon f(\mathbf{x}) \le \alpha\} \cap C$ חסומה ולא ריקה. הוכיחו כי

$$\underset{\mathbf{x}\in C}{\operatorname{argmin}} f(\mathbf{x}) \neq \emptyset.$$

ב. פונקציה $f\colon C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ עבור C קבוצה סגורה נקראת קוארסיבית ב־C אם לכל M קיים $R > 0$ כך שלכל $\mathbf{x} \in C$ המקיים $\|\mathbf{x}\| > R$ אז $f(\mathbf{x}) > M$. הוכיחו שאם f רציפה וקאורסיבית ב־C, אז

$$\underset{\mathbf{x}\in C}{\operatorname{argmin}} f(\mathbf{x}) \neq \emptyset.$$

שאלה 4

תהי $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2, & x \neq y \\ x^2 + y^2, & x = y \end{cases}.$$

הוכיחו שלכל $(0,0) \neq (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$ אז

$$\lim_{\alpha \to \pm\infty} f(\alpha x_0, \alpha y_0) = \infty ,$$

והוכיחו ש-f לא קוארסיבית.

שאלה 5

מיצאו את הנקודות הסטציונריות של הפונקציות הבאות וסווגו אותן (מינימום/מקסימום מקומי/מקומי ממש, גלובלי/גלובלי ממש או אוכף).

א. $f(x,y,z) = x^4 - 2x^2 + y^2 + 2yz + 2z^2$.

ב. $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

הכוונה: בשביל להקל על החישובים, ניתן להגדיר $u(x,y) = x^2 + y^2$ ו-$\phi(t) = te^{-t}$ ואז $f(x,y) = \phi(u(x,y))$. כמו כן מתקיים $\phi'(t) = e^{-1}(1-t)$.

ג. $f(x,y) = \frac{x+y}{3+x^2+xy+y^2}$.

הכוונה: בשביל להקל על החישובים, ניתן להגדיר $u(x,y) = x+y$ ו-$v(x,y) = 3 + x^2 + xy + y^2$. נגדיר $\phi(u,v) = \frac{u}{v}$ ואז $f(x,y) = \phi(u(x,y), v(x,y))$. כמו כן הסבירו מדוע $v(x,y) > 0$ לכל x, y.