מודלים לא לינאריים בחקר ביצועים — תרגיל בית 11

14 ביוני 2021

הנחיות להגשה

- הגשת התרגיל היא עד יום ראשון, 27.6.21, בשעה 12:00 בצהריים.
- יש להגיש שני קבצים עם שם קובץ HW##_ID1_ID2:
  - PDF המכיל את תשובותיכם כולל קודים ופלטים.
  - ZIP המכיל את כל הקודים.

שאלה 1

נתונה בעיית האופטימיזציה

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \quad & \mathbf{x}_1 - 4\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + 2\mathbf{x}_3 = -2 \\ & \|\mathbf{x}\|_2^2 \le 1. \end{aligned}$$

א. האם כל נקודת KKT של הבעיה היא בהכרח פתרון מיטבי?

ב. מיצאו את כל הפתרונות המיטביים של הבעיה באמצעות תנאי KKT.

שאלה 2

נתונה בעיית האופטימיזציה

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \quad & 2\mathbf{x}_1^2 + 3\mathbf{x}_2^2 + 4\mathbf{x}_3^2 + 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 - 8\mathbf{x}_1 - 4\mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \ge 0. \end{aligned}$$

קיבעו האם הנקודה $\left(\frac{17}{7}, 0, \frac{6}{7}\right)$ היא פתרון מיטבי של הבעיה.

שאלה 3

הציעו אלגוריתם לחישוב ההיטל האורתוגונלי על הקבוצה

$$C = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} \le \alpha,\ \mathbf{b}^T\mathbf{x} \le \beta\right\},$$

עבור $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ לא וקטורי האפס ו-$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. הניחו ש-$C$ לא ריקה. הוכיחו את נכונותו של האלגוריתם שהצעתם.

שאלה 4

נתונה בעיית האופטימיזציה

$$\begin{aligned}
\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & \frac{1}{2}\left\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\right\|^2+\frac{\lambda}{2}\sum_{i=2}^{n-1}\left(\mathbf{x}_i-\frac{1}{2}\mathbf{x}_{i-1}-\frac{1}{2}\mathbf{x}_{i+1}\right)^2 \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}_i\mathbf{x}_i^2\le 1
\end{aligned}$$

עבור $\lambda>0$, $\mathbf{s}\in\mathbb{R}^n$ ו־$\mathbf{p}\in\mathbb{R}^n_{++}$.

א. בתרגול כיתה 8 ראינו נוסחה למציאת ההיטל האורתוגונלי על קבוצת אילוצים זו. הוכיחו נכונות נוסחה זו. הסבירו מדוע השורש קיים ויחיד במקרים בהם הוא נדרש.

ב. ממשו פונקציית python המקבלת את הווקטורים $\mathbf{p},\mathbf{s}$ ופותרת את הבעיה באמצעות שיטת היטל הגרדיאנט עם גודל צעד קבוע $\frac{1}{1+4\lambda}$. נקודת ההתחלה היא $\mathbf{x}^0=\mathbf{s}$. את המשוואה בנעלם אחד, אותה צריך לפתור לצורך ביצוע ההיטל, יש לפתור באמצעות שיטת החציה. הפונקציה מופעלת באופן הבא:

```
x, fs = ex5(s, p, lambda, eps)
```

ותנאי העצירה הוא $\left\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\right\|\le\varepsilon$. שיטת החציה תעצור כאשר גודל הקטע הוא לכל היותר ε^2.

ג. צרפו סקריפ בשם script_ex5 המפעיל את הפונקציה מסעיף ב' על הבעיה הנוצרת על־ידי קטע הקוד הבא:

```
s = np.transpose(np.cos(np.linspace(0,2,100))+
        2*np.cos(np.linspace(3, 3, 100))+
        np.cos(np.linspace(2, 5, 100)))
s = s + np.random.randn(*s.shape)/10
p = (1/1000)*np.ones(100)
lam = 10
eps = 10^(-6)
```

הסקריפט יוצר שני תרשימים: בראשון רואים את רכיבי האות $\mathbf{s}$ לעומת רכיבי האות $\mathbf{x}$, ובשני רואים בסולם לוגריתמי את ערכי $f\left(\mathbf{x}^k\right)-f\left(\mathbf{x}^*\right)$ כאשר $f\left(\mathbf{x}^*\right)$ הוא הערך המיטבי של הבעיה המתקבל באמצעות CVXPY.

שאלה 5

נתונה בעיית האופטימיזציה

$$\begin{aligned}
\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & f\left(\mathbf{x}\right) \\
\text{subject to} \quad & g_i\left(\mathbf{x}\right)\le 0,\ \forall i=1,2,\ldots,m,
\end{aligned}$$

עבור f גזירה ברציפות וקמורה ו־$g_1,g_2,\ldots,g_m$ גזירות ברציפות וקמורות ממש. תהי $\mathbf{x}^*$ נקודה פיזיבילית של הבעיה. נניח שקיימים $\lambda_i\ge 0$ לכל $i=\{0\}\cup I\left(\mathbf{x}^*\right)$ כך שלא כולם מתאפסים המקיימים

$$\lambda_0\nabla f\left(\mathbf{x}^*\right)+\sum_{i\in I(\mathbf{x}^*)}\lambda_i\nabla g_i\left(\mathbf{x}^*\right)=0.$$

הוכיחו ש־$\mathbf{x}^*$ הוא פתרון מיטבי של הבעיה.

שאלה 6

יהי $a>0$. מיצאו את כל הפתרונות המיטביים של הבעיה

$$\max\left\{xyz\colon\ a^2x^2+y^2+z^2\le 1\right\}.$$