מודלים לא ליניאריים בחקר ביצועים - תרגיל בית 7

10 במאי 2021

הנחיות להגשה

- הגשת התרגיל היא עד יום ראשון, 30.5.21, בשעה 12:00 בצהריים.
- יש להגיש שני קבצים עם שם קובץ HW##_ID1_ID2:
  - PDF המכיל את תשובותיכם כולל קודים ופלטים.
  - ZIP המכיל את כל הקודים.

שאלה 1

הוכיחו את קריטריון האפיגרף: תהי $C \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה. אז פונקציה $f: C \to \mathbb{R}$ היא קמורה אם"ם $\operatorname{epi}(f)$ קבוצה קמורה.

שאלה 2

הוכיחו או הפריכו את קמירות הקבוצות הבאות:

א. $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \min\left\{\mathbf{x}_1, -\mathbf{x}_2, \ldots, (-1)^{n+1}\mathbf{x}_n\right\} \leq 1\right\}$.

ב. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - y \leq 0\right\}$.

ג. $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}_1^2 \leq \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3,\ \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \geq 0\right\}$.

ד. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|\}$ עבור $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ קבועים.

ה. $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + 1)(2\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_3 + 2)(3\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 + 3) \geq 1\right\} \cap \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \geq -\frac{1}{3}\right\}$.

שאלה 3

הוכיחו או הפריכו את קמירות הפונקציות הבאות. ביחרו שבעה מתוך עשרת הסעיפים. בונוס של חמש נקודות על כל עשרת הסעיפים.

א. $f(x, y) = -\sqrt{xy}$ בתחום $\mathbb{R}^2_+$.

הכוונה: תוכלו להשתמש באי־שוויון קושי־שוורץ.

ב. $f(x, y) = \left(x^2 + y^2 - 1\right)^2$ בתחום $\mathbb{R}^2$.

ג. $f(x, y) = \left(x^2 + y^2 - 1\right)^2$ בתחום $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 1\right\}$.

ד. $f(\mathbf{x}) = (\|\mathbf{x}\| - 1)^3$ בתחום $\mathbb{R}^n$.

ה. $f(\mathbf{x}) = (\|\mathbf{x}\| + 1)^4$ בתחום $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_1 \geq \sqrt{n}\}$.

ו. $f(x)=\begin{cases}x\ln(x), & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$ בתחום $\mathbb{R}_+$.

הכוונה: הוכיחו את טענתכם בתחום $\mathbb{R}_{++}$ והשתמשו בכך בשביל להוכיח את טענתכם בתחום $\mathbb{R}_+$.

ז. $f(x,y,z)=\sqrt{2x^2+6y^2+9z^2+4xy+6xz+12yz+6x+12y+18z+26}$ ב־$\mathrm{dom}(f)$ ומיצאו תחום זה.

ח. $f(\mathbf{x})=(\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|-\|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|)^2$ בתחום $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\colon \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|\geq\|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|\}$ עבור $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ כלשהם.

ט. $f(\mathbf{x})=\frac{1}{1+\min\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n\}}$ בתחום $\mathbb{R}^n_+$.

הכוונה: בטאו את f כמקסימום על פני פונקציות.

י. $f(\mathbf{x})=\frac{\mathbf{x}_1^4}{\mathbf{x}_2^2}+\frac{\mathbf{x}_2^4}{\mathbf{x}_1^2}+2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2-\min\left\{\ln(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2),\ln\left(2\mathbf{x}_1+\frac{1}{2}\mathbf{x}_2\right)\right\}$ בתחום $\mathbb{R}^2_{++}$.

הכוונה: השתמשו בפונקציה $\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{t}$ בתחום $t>0$ אותה ראיתם בהרצאה.

שאלה 4

בשאלה זו נוכיח את קמירות הפונקציות מסוג log-sum-exp ב־$\mathbb{R}^n$. תהי $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $f(\mathbf{x})=\log\left(e^{\mathbf{x}_1}+e^{\mathbf{x}_2}+\ldots+e^{\mathbf{x}_n}\right)$.

א. הוכיחו כי $\nabla^2 f(\mathbf{x})=\mathrm{diag}(\mathbf{w})-\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ עבור $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$ כך ש־$0\leq\mathbf{w}_i\leq 1$ לכל $1\leq i\leq n$.

ב. הוכיחו לפי הגדרה כי $\nabla^2 f(\mathbf{x})\succeq 0$.

הכוונה: עבור $0\neq\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ הפעילו את אי־שוויון קושי־שוורץ על הווקטורים $\left(\sqrt{\mathbf{w}_1}\mathbf{v}_1,\ldots,\sqrt{\mathbf{w}_n}\mathbf{v}_n\right)$ ו־$\left(\sqrt{\mathbf{w}_1},\ldots,\sqrt{\mathbf{w}_n}\right)$.

ג. הוכיחו כי הפונקציה $\phi\colon\mathbb{R}_-\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי $\phi(t)=-\ln(-t)$ קמורה ולא יורדת בתחום הגדרתה.

ד. הוכיחו כי $f(\mathbf{x})=-\ln\left(-\ln\left(\sum_{i=1}^{m}e^{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}+\mathbf{b}_i}\right)\right)$ עבור $\mathbf{a}_i\in\mathbb{R}^n$ וקטורים ו־$\mathbf{b}_i\in\mathbb{R}$ לכל $1\leq i\leq m$ קמורה בתחום $\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\colon\sum_{i=1}^{m}e^{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}+\mathbf{b}_i}<1\right\}$.

שאלה 5

נתונה $f\colon\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}$ המוגדרת על־ידי

$$f(\mathbf{x})=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i}.$$

כלומר, f מחשבת את הממוצע ההנדסי של איברי הווקטור $\mathbf{x}$.

א. הוכיחו באמצעות אי־שוויון הגרדיאנט ש־f קעורה בתחום $\mathbb{R}^n_{++}$.

ב. השתמשו בסעיף הקודם בשביל להוכיח לפי הגדרה ש־f קעורה בתחום $\mathbb{R}^n_+$. כלומר, בחרו $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n_+$ כלשהם וחלקו למקרים אפשריים.

שאלה 6

נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=\sqrt{6x^2+14y^2+8xy-2x+2y+\frac{7}{17}}.$$

האם יש ל־f נקודות מינימום גלובלי? אם כן - מיצאו אותן, אם לא - הסבירו מדוע.

הכוונה: מיצאו ראשית את תחום ההגדרה המפורש של f.