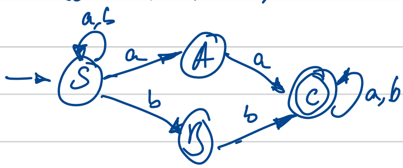
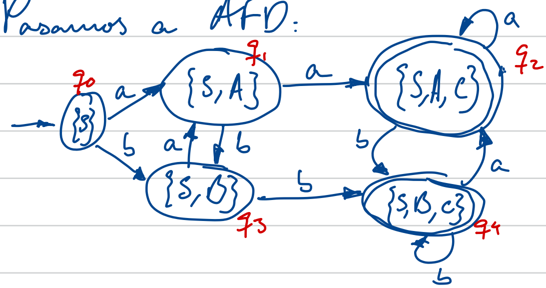
Ejercicio 3: Encontrar el AFD minimal para el siguiente lenguaje:

$$(a+b)^*(aa+bb)(a+b)^*$$

Primero construimos un AFND



- Pasamos a AFD:



- Sabemos que dos estados son distinguibles si:

i) $q_i \in F$ y $q_j \notin F$
$q_i \notin F$ y $q_j \in F$

ii) $(\delta(q_i,a), \delta(q_j,a))$ es distinguible para $a \in A$

- Primer método:

	q_1	X			
F	q_2	X	X		
	q_3	X	X	X	
F	q_4	X	X		X
		q_0	q_1	q_2 (F)	q_3

● Primer paso (i)
● Segundo paso (ii)

	q_0	q_1
a	q_1	q_2
b	q_3	q_3

→ Hemos visto que es distinguible entonces q_0 q_1 también lo es.

	q_0	q_3
a	q_1	q_1
b	q_3	q_4

→ Distinguible entonces q_0 q_3 también lo es.

	q_1	q_3
a	q_2	q_1
b	q_3	q_4

→ Dist.

	q_4	q_2
a	q_2	q_2
b	q_4	q_4

} No es distinguible.

Segundo método:

$P_0: \{\overbrace{q_0, q_1, q_3}^{A}\}$ distinguibles de $\{\overbrace{q_2, q_4}^{B}\}$

	δ	a	b
(A)	q_0	q_1 (A)	q_5 (A)
(A)	q_1	q_2 (B)	q_3 (A)
(B)	q_2	q_2 (B)	q_4 (B)
(A)	q_3	q_1 (A)	q_4 (B)
(B)	q_4	q_2 (B	q_4 (A

• Si se encuentra que van a particiones distintas entonces serán distinguibles

$P_1: \underset{A}{\{q_0\}}, \underset{B}{\{q_1\}}, \underset{C}{\{q_3\}}, \underset{D}{\{q_2, q_4\}}$

Este algoritmo nos permite comprobar si un autómata sea minimal

• Gramáticas libres del contexto

Queremos resolver el problema de la pertenencia de una palabra al lenguaje generado por una gramática libre de contexto.

1. Quitamos las producciones inconexas e infinitamente recursivas (producciones inútiles)

$S \to aA \mid \cancel{B}$

$\cancel{B \to bB}$

$A \to a$

$\cancel{C \to c}$

2. Quitamos las producciones nulas.

(Del tipo $A \to \varepsilon$)

3. Quitamos las producciones unitarias.

(Del tipo $A \to B$)

4. Buscamos la forma normal de Chomsky.

(Para que queden las reglas en la forma $\begin{cases} A \to BC \\ A \to a \end{cases}$

5. Buscamos la forma normal de Greibach

(Para que queden las reglas en la forma $A \to a\alpha$, $\alpha \in V^*$

• Ejemplo: $\begin{cases} S \to AB \\ A \to \varepsilon \\ B \to aC \\ C \to \varepsilon \end{cases}$

En el caso en el que tengamos distintas consecuencias en las reglas tendremos que poner todas las producciones accesibles de forma recursiva.

Sol. $\begin{cases} S \to AB \mid B \\ B \to aC \mid a \end{cases}$

• Ejemplo: 1. Quitar símbolos que no alcanzan terminales.
Último ejercicio del 4b 2. Quitar símbolos inalcanzables desde S.

$S \to aAb \mid \cancel{cHB} \mid \cancel{CH}$
$A \to d\cancel{BH} \mid eeC$
$B \to ff \mid D$
$C \to g\cancel{FB} \mid ah$
$D \to i$
$\cancel{E \to gF}$
$\cancel{F \to dcGGG \mid cF}$
$\cancel{G \to kF}$
$\cancel{H \to Hkm}$

1: $V_t = \{D, B, C, A, S\}$

Símbolos que generan terminales. (Bastará con que una de las reglas llegue a un terminal)

$V - V_t = \{E, F, G, H\}$

• Eliminamos las reglas que no nos sirven

2: • Eliminamos los símbolos inalcanzables desde S.

$S \to aAb$
$A \to eeC$
$B \to ff \mid D$
$C \to ah$
$D \to i$

J (abiertos)	V_s (cerrados)	T_s (terminal)
S	∅	∅
A	S	a, b
C	S, A	a, b, e
∅	S, A, C	a, b, e, h

Entonces $V_s = \{S, A, C\}$ y $T_s = \{a, b, e, h\}$

Después de quitar de las reglas aquellas que contienen un símbolo inalcanzable desde S:

$S \to aAb$
$A \to eeC$
$C \to ah$

3. Pasar a la forma normal de Chomsky.

- Procesamos las producciones (Terminales + variables y varios terminales) para que queden sólo variables

$S \to aAb$ ..... $S \to C_a A C_b$; $C_a \to a$; $C_b \to b$
$A \to eeC$ ..... $A \to C_e C_e C$; $C_e \to e$
$G \to ah$ ..... $G \to C_a C_h$; $C_h \to h$

- Pasamos las de +3 variables a 2 variables

$S \to C_a D_1$; $D_1 \to A C_b$; $C_a = a$ $C_h = h$
$A \to C_e D_2$; $D_2 \to C_e C$; $C_b = b$
$G \to C_a C_h$; $C_e = e$

Forma normal de Chomsky

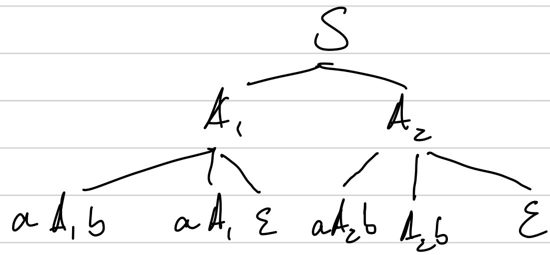
• Gramáticas Ambiguas (2 o más árboles de derivación generan la misma producción)

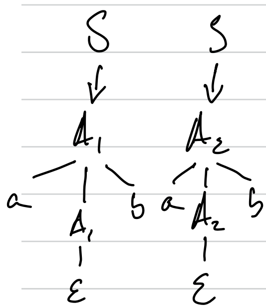
• Ejemplo:

$S \to A_1 \mid A_2$

$A_1 \to aA_1b \mid aA_1 \mid \varepsilon$

$A_2 \to aA_2b \mid A_2b \mid \varepsilon$





Es ambiguo. ¿Podemos encontrar una gramática no ambigua para este mismo lenguaje?

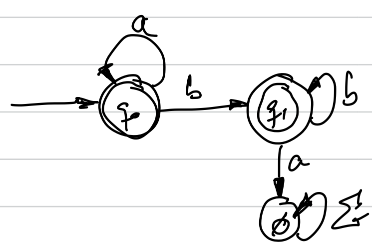
¿Es inherentemente ambigua?

Lenguaje: A_1: $L_1 = \{a^i b^j : i \geq j\}$

A_2: $L_2 = \{a^i b^j : i \leq j\}$

$L = L_1 \cup L_2 = \{a^* b^*\}$

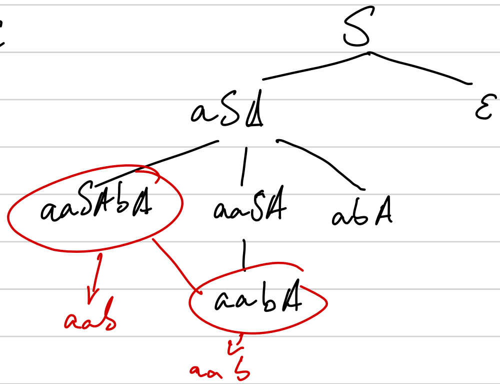
Autómata determinista asociado:



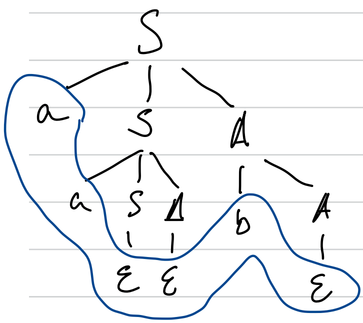
$S \to aS \mid bA \mid \varepsilon$
$A \to bA \mid \varepsilon$

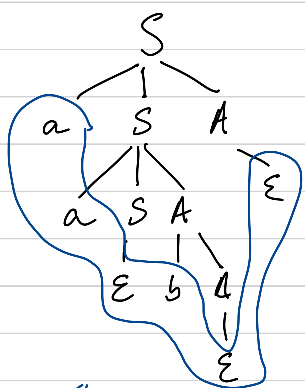
• Ejercicio 2: ¿Es ambigua esta gramática?

$S \to aSA \mid \varepsilon$
$A \to bA \mid \varepsilon$



Dibujamos el árbol





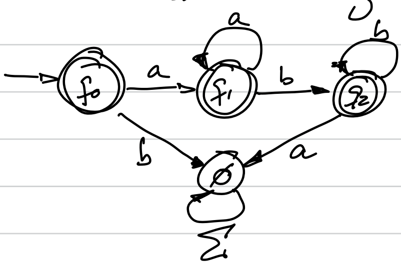
Como vemos la gramática es ambigua.

b) ¿Es inherentemente ambiguo?

Sacamos una ER: $A: L_A = \{ b^* \}$

$S: L_S = \{ (a a^* b^*)^* \}$

- Gramática no ambigua que genera este lenguaje:



- **Autómatas con pila:**

Están compuestos por los elementos de la tupla

$(Q, A, B, \delta, q_0, Z_0, F)$

En la pila podremos almacenar símbolos de B.

Un lenguaje viene dado por estados finales y/o pila vacía.

• Ejercicio 2: Construir un autómata con pila que acepte el siguiente lenguaje:
(rel. 5)

$$L = \{a^i b^i : i \geq 0\} \cup \{a^i : i \geq 0\} \cup \{b^i \geq 0\}$$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_F\}$ $\quad A = \{a, b\}$ $\quad B = \{Z_0, Z\}$

$F = \{q_2, q_3, q_F\}$

(Criterio de)
a) Estados finales: $\{q_F, q_2, q_3\}$

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_1, ZZ_0)(q_2, Z_0)\}$ $\quad \delta(q_2, a, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

$\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_3, Z_0)\}$ $\quad \delta(q_3, b, Z_0) = \{(q_3, Z_0)\}$

$\delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, ZZ)\}$
$\delta(q_1, b, Z) = \{(q_4, \varepsilon)\}$

$\delta(q_4, b, Z) = \{(q_4, \varepsilon)\}$
$\delta(q_4, \varepsilon, Z_0) = \{(q_F, \varepsilon)\}$

(Criterio de)

b) Pila vacía.

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_1, ZZ_0), (q_2, Z_0)\}$

$\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_3, Z_0)\}$

$\delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, ZZ)\}$

$\delta(q_1, b, Z) = \{(q_4, \varepsilon)\}$

$\delta(q_4, b, Z) = \{(q_4, \varepsilon)\}$

$\delta(q_4, b, Z_0) = \{(q_4, \varepsilon)\}$

$\delta(q_2, a, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta(q_3, b, Z_0) = \{(q_3, Z_0)\}$

$\delta(q_3, \varepsilon, Z_0) = \{(q_3, \varepsilon)\}$

• Pasar de un lenguaje independiente de contexto a un autómata con pila.

• Ejercicio 3: $V = \{S, T\}$ $S \to abS \mid cdT$
$T = \{a, b, c, d\}$ $T \to bT \mid b$

¿Cómo lo haremos?

$Q = \{q\}$, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, c, d, S, T\}$ ← símbolos de la pila
$q_0 = q$, $Z_0 = S$

$\delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, abS), (q, cdT)\}$

$\delta(q, \varepsilon, T) = \{(q, bT), (q, b)\}$

$\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon)\} = \delta(q, c, c) = \delta(q, d, d)$

• Ejercicio 4: Demostrar que el siguiente lenguaje es independiente del contexto y construir un APND.

$L_1 = \{a^p b^q : p, q \geq 1, \ p > q\}$

(1) $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_1, ZZ_0)\}$

(2) $\delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, ZZ)\}$

(3) $\delta(q_1, b, Z) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

(4) $\delta(q_2, b, Z) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

(5) $\delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_F, \varepsilon)\}$

(Al no tener la transición $\delta(q_2, \varepsilon, Z_0)$ controlamos el que $p > q$).

b) Para el criterio de pilas vacías conservamos (1...4).

$\delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_3, \varepsilon)\}$
$\delta(q_3, \varepsilon, Z) = \{(q_3, \varepsilon)\}$
$\delta(q_3, \varepsilon, Z_0) = \{(q_3, \varepsilon)\}$