Лабораторная работа 1

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением U(x,t). Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ,h .

1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ a > 0,$$

$$u(0,t) = 0,$$

$$u(1,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \sin(2\pi x).$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-4\pi^2 at)\sin(2\pi x)$.

2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ a > 0,$$

$$u(0,t) = 0,$$

$$u(1,t) = 1,$$

$$u(x,0) = x + \sin(\pi x).$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = x + \exp(-\pi^2 at)\sin(\pi x)$

3.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ a > 0,$$

$$u(0,t) = \exp(-at),$$

$$u(\pi,t) = -\exp(-at),$$

$$u(x,0) = \cos x.$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-at)\cos x$.

4.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ a > 0,$$

$$u_x(0,t) = \exp(-at),$$

$$u_x(\pi,t) = -\exp(-at),$$

$$u(x,0) = \sin x.$$
 Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-at)\sin x$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(\pi x),$$

$$u(0,t) = 0$$
,

$$u(1,t) = 0$$
,

$$u(x,0) = 0$$
.

Аналитическое решение: $U(x,t) = \frac{1}{\pi^2} (1 - \exp(-\pi^2 t)) \sin(\pi x)$.

6.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x (\cos t + \sin t),$$

$$u(0,t) = \sin t$$

$$u_{x}(\frac{\pi}{2},t) = -\sin t,$$

$$u(x,0)=0,$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \sin t \cos x$.

7.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0.5 \exp(-0.5t) \cos x,$$

$$u_x(0,t) = \exp(-0.5t),$$

$$u_x(\pi, t) = -\exp(-0.5t),$$

$$u(x,0) = \sin x$$
,

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-0.5t)\sin x$.

8.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu, \ a > 0, \ c < 0.$$

$$u_x(0,t) = \exp((c-a)t),$$

$$u(\frac{\pi}{2},t) = \exp((c-a)t),$$

$$u(x,0) = \sin x,$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp((c-a)t)\sin x$.

9

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x}, \ a > 0, \ b > 0.$$

$$u_x(0,t) - u(0,t) = -\exp(-at)(\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u_x(\pi, t) - u(\pi, t) = \exp(-at)(\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u(x,0) = \cos x,$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-at)\cos(x+bt)$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu, \ a > 0, \ b > 0, \ c < 0.$$

$$u_x(0,t) + u(0,t) = \exp((c-a)t)(\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u_x(\pi,t) + u(\pi,t) = -\exp((c-a)t)(\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u(x,0) = \sin x.$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp((c-a)t)\sin(x+bt)$.