

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Институт компьютерных наук и прикладной математики

Кафедра вычислительной математики и программирования

Курсовой проект по курсу «Численные методы»
«Вычисление несобственных интегралов численными методами»

Студент: И. П. Моисеенков
Преподаватель: Д. Е. Пивоваров
Группа: М8О-308Б-19
Дата: 04.06.2022
Оценка:
Подпись:

Москва, 2022

1 Теоретические сведения

Определённый интеграл называется несобственным, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий.

1. Область интегрирования является бесконечной - интеграл 1 рода.
2. Подынтегральная функция является неограниченной в окрестности некоторых точек области интегрирования - интеграл 2 рода.

Несобственный интеграл 2 рода можно свести к интегралу 1 рода с помощью замены переменной. Поэтому в данной работе будем рассматривать несобственные интегралы 1 рода

1. Сведение к определенному интегралу

Рассмотрим преобразование из мат анализа, выполненное с помощью замены переменной:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)dt \text{ при } ab > 0$$

Можем разложить несобственный интеграл на сумму интегралов.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-A} f(x)dx + \int_{-A}^B f(x)dx + \int_B^{+\infty} f(x)dx \text{ при } -A < 0 \text{ и } B > 0$$

Первый и последний интегралы можем преобразовать с помощью формулы выше. Так мы можем посчитать каждый из этих трех интегралов (например, методом прямоугольников) и сложить получившиеся результаты.

2. Предельный переход

Запишем предельный переход для несобственного интеграла 1 рода:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Будем вычислять правый интеграл (например, методом прямоугольников) до тех пор, пока следующее слагаемое не станет меньше заданного эпсилон.

2 Исходный код

```
1 INF = 1e10
2
3
4 def f(x):
5     """
6     Function to integrate
7     """
8     return 1. / (1 + x**2)
9
10
11 def integrate_rectangle_method(f, l, r, h):
12     """
13     Stolen from lab 3.5
14     Calculate integral  $f(x)dx$  at interval  $[l; r]$  using rectangle method with step=h
15     """
16     result = 0
17     cur_x = l
18     while cur_x < r:
19         result += h * f((cur_x + cur_x + h) * 0.5)
20         cur_x += h
21     return result
22
23
24 def integrate_with_definite_integral(f, l, r, h=0.01, eps=1e-6):
25     """
26     Calculate improper integral (type 1) transforming to definite integrals
27     """
28
29     def f_new(t):
30         return (1. / t ** 2) * f(1. / t)
31
32     result = 0
33     if r == INF:
34         new_r = max(eps, l)
35         result += integrate_rectangle_method(f_new, eps, 1. / new_r - eps, h)
36     else:
37         new_r = r
38     if l == -INF:
39         new_l = min(-eps, r)
40         result += integrate_rectangle_method(f_new, 1. / new_l + eps, -eps, h)
41     else:
42         new_l = l
43     if new_l < new_r:
44         result += integrate_rectangle_method(f, new_l, new_r, h)
45     return result
46
47
```

```

48 def integrate_lim(f, l, r, h=0.1, eps=1e-6):
49     """
50     Calculate improper integral  $f(x)dx$  (type 1) using limit transition.
51     Returns: integral result, number of iterations
52     """
53     result = 0
54     iters = 0
55     if r == INF:
56         finish = False
57         cur_x = max(l, 0)
58         while not finish:
59             iters += 1
60             new_result = result + h * f((cur_x + cur_x + h) * 0.5)
61             cur_x += h
62             if abs(new_result - result) < eps:
63                 finish = True
64             result = new_result
65     else:
66         result += integrate_rectangle_method(f, 0, r, h)
67     if l == -INF:
68         finish = False
69         cur_x = min(0, r)
70         while not finish:
71             iters += 1
72             new_result = result + h * f((cur_x - h + cur_x) * 0.5)
73             cur_x -= h
74             if abs(new_result - result) < eps:
75                 finish = True
76             result = new_result
77     else:
78         result += integrate_rectangle_method(f, l, 0, h)
79     return result, iters
80
81
82 if __name__ == '__main__':
83     a = -INF
84     b = INF
85     h = 0.1
86     eps = 1e-3
87     print('Transforming to definite intrgral')
88     res_definite = integrate_with_definite_integral(f, a, b, h, eps)
89     print('Integral =', res_definite)
90     print()
91
92     print('Limit method')
93     res_limit, iters_limit = integrate_lim(f, a, b, h, eps)
94     print('Integral =', res_limit)
95     print('Iterations:', iters_limit)
96     print()

```

3 Результат работы программы

Для примера будем вычислять следующий интеграл: $\int_l^r \frac{1}{1+x^2}$

1. $l = 3, r = \infty$

Transforming to definite integral
Integral = 0.3277407823690935

Limit method
Integral = 0.32075031473059007
Iterations: 99701

2. $l = -\infty, r = -9$

Transforming to definite integral
Integral = 0.11954685365990542

Limit method
Integral = 0.10965722035305618
Iterations: 99101

3. $l = -\infty, r = 10$

Transforming to definite integral
Integral = 3.08832958701484

Limit method
Integral = 3.042588970590539
Iterations: 31624

4. $l = -\infty, r = \infty$

Transforming to definite integral
Integral = 3.2867676296096793

Limit method
Integral = 3.140960222545892
Iterations: 63248

4 Выводы

Выполнив данную работу, я познакомился с численными методами решения несобственных интегралов:

1. Сведение к сумме определенных интегралов
2. Предельный переход

Я реализовал два этих метода и протестировал их работу на разных функциях с разными пределами интегрирования. Полученные значения были довольно близки к ответам, полученным аналитически.