Лабораторная работа N4

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h_x, h_y.

1.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $a > 0$,

$u(0,y,t) = \cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$,

$u(\pi,y,t) = (-1)^{\mu_1}\cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$,

$u(x,0,t) = \cos(\mu_1 x)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$,

$u(x,\pi,t) = (-1)^{\mu_2}\cos(\mu_1 x)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$,

$u(x,y,0) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y)$.

Аналитическое решение: $U(x,y,t) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$.

1). $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$.

2). $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$.

3). $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$.

2.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $a > 0$,

$u(0,y,t) = \cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$,

$u(\frac{\pi}{2}\mu_1, y, t) = 0$,

$u(x,0,t) = \cos(\mu_1 x)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$,

$u(x, \frac{\pi}{2}\mu_2, t) = 0$,

$u(x,y,0) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y)$.

Аналитическое решение: $U(x,y,t) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$.

1). $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$.

2). $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$.

3). $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$.

3.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $a > 0$,

$u(0,y,t)=\cosh(y)\exp(-3at)$,

$u(\frac{\pi}{4},y,t)=0$,

$u(x,0,t)=\cos(2x)\exp(-3at)$,

$u(x,\ln 2,t)=\frac{5}{4}\cos(2x)\exp(-3at)$,

$u(x,y,0)=\cos(2x)\cosh(y)$.

Аналитическое решение: $U(x,y,t)=\cos(2x)\cosh(y)\exp(-3at)$.

4.

$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a>0$,

$u(0,y,t)=\cosh(y)\exp(-3at)$,

$u(\frac{\pi}{4},y,t)=0$,

$u(x,0,t)=\cos(2x)\exp(-3at)$,

$u_y(x,\ln 2,t)=\frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at)$,

$u(x,y,0)=\cos(2x)\cosh(y)$.

Аналитическое решение: $U(x,y,t)=\cos(2x)\cosh(y)\exp(-3at)$.

5.

$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a>0$,

$u(0,y,t)=\sinh(y)\exp(-3at)$,

$u(\frac{\pi}{2},y,t)=-\sinh(y)\exp(-3at)$,

$u_y(x,0,t)=\cos(2x)\exp(-3at)$,

$u(x,\ln 2,t)=\frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at)$,

$u(x,y,0)=\cos(2x)\sinh(y)$.

Аналитическое решение: $U(x,y,t)=\cos(2x)\sinh(y)\exp(-3at)$.

6.

$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a>0$,

$u(0,y,t)=\sinh(y)\exp(-3at)$,

$u_x(\frac{\pi}{4},y,t)=-2\sinh(y)\exp(-3at)$,

$u_y(x,0,t)=\cos(2x)\exp(-3at)$,

$u(x,\ln 2,t)=\frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at)$,

$u(x,y,0)=\cos(2x)\sinh(y)$.

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x)\sinh(y)\exp(-3at)$.

7.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xy\sin t,$$
$u(0, y, t) = 0,$

$u(1, y, t) = y\cos t,$

$u(x, 0, t) = 0,$

$u(x, 1, t) = x\cos t,$

$u(x, y, 0) = xy$.

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = xy\cos t$.

8.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xy\sin t,$$
$u(0, y, t) = 0,$

$u(1, y, t) - u_x(1, y, t) = 0,$

$u(x, 0, t) = 0,$

$u(x, 1, t) - u_y(x, 1, t) = 0,$

$u(x, y, 0) = xy$.

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = xy\cos t$.

9.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x \sin y(\mu\cos\mu t + (a+b)\sin\mu t),$$
$u(0, y, t) = 0,$

$u(\frac{\pi}{2}, y, t) = \sin y\sin(\mu t),$

$u(x, 0, t) = 0,$

$u_y(x, \pi, t) = -\sin x\sin(\mu t),$

$u(x, y, 0) = 0$.

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \sin x\sin y\sin(\mu t)$.

1). $a = 1, b = 1, \mu = 1$.

2). $a = 2, b = 1, \mu = 1$.

3). $a = 1, b = 2, \mu = 1$.

4). $a = 1, b = 1, \mu = 2$.

10.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x \sin y(\mu\cos\mu t + (a+b)\sin\mu t),$$

$u(0, y, t) = 0,$

$u_x(\pi, y, t) = -\sin y \sin(\mu t),$

$u(x, 0, t) = 0,$

$u_y(x, \pi, t) = -\sin x \sin(\mu t),$

$u(x, y, 0) = 0$.

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \sin x \sin y \sin(\mu t)$.

1). $a = 1, b = 1, \mu = 1$.

2). $a = 2, b = 1, \mu = 1$.

3). $a = 1, b = 2, \mu = 1$.

4). $a = 1, b = 1, \mu = 2$.