Analiza Matematyczna.

Zbadać monotoniczność ciągu $x_n = \sqrt{n^2+n} - n$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)} - (n+1)}{\sqrt{n^2+n} - n} = \frac{\sqrt{n^2+2n+1+n+1} - n+1}{\sqrt{n^2+n}-n} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{n^2+3n+2} - n+1\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(n^2+3n+2)(n^2+n)} - n\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+n} + n\sqrt{n^2+3n+2} - n^2 + n}{n} =$$

$$= \frac{\sqrt{n^4+n^3+3n^3+3n^2+2n^2+2n} - \sqrt{n^4+n^3} + \sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^4+3n^3+2n^2} - n^2 + n}{n}$$

$$= \frac{\sqrt{n^4+4n^3+5n^2+2n} - \sqrt{n^4+n^3} + \sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^4+3n^3+2n^2} - n^2+n}{n} > 1$$

ciąg jest rosnący

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{(n+1)^2+(n+1)} - (n+1) - \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) =$$

$$x_{n+1}-x_n = \sqrt{n^2+3n+2} - n - 1 - \sqrt{n^2+n} + \cancel{n} =$$

$$x_{n+1}-x_n = \left(\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2+n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+n}} - 1 =$$

$$= \frac{\cancel{n^2}+\overset{2n}{\cancel{3n}}+2-\cancel{n^2}-\cancel{n}}{\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+n}} - 1 = \frac{2n+2}{\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+n}} - 1$$

2) Zbadać monotoniczność

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

$$x_{n+1} - x_n = \left(\frac{1}{n+1+1} + \frac{1}{n+1+2} + \dots + \frac{1}{n+1+n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}\right) < 0$$

ciąg jest malejący

ad 3. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n^4}{2n^4+4n^3} = \frac{\frac{2n^2}{n^4} + \frac{3n^4}{n^4}}{\frac{2n^4}{n^4} + \frac{4n^3}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to 0}{\frac{2}{n^2}} + 3}{2 + \underset{\to 0}{\frac{4}{n}}} = \frac{3}{2}$$

ad 4. Obliczyć

$$\frac{(1+n)\cdot n}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\dots+n}{\sqrt{36n^2+14n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\dots+n}{n\sqrt{36+\underset{\to 0}{\frac{14}{n}}}} = \lim_{n\to\infty}$$

$$= \frac{1+n^2}{2n\sqrt{36+0}} = \frac{(1+n)\cancel{n}}{12\cancel{n}} = \frac{1+n}{12} = +\infty$$

ad 5. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2+1)^{453}}{(n^3+3n)^{302}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)^{453}}{\left(\frac{n^3}{n^2} + \frac{3n}{n^2}\right)^{302}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2+\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}})^{453}}{(\underset{\downarrow}{n} + \underset{0}{\frac{3}{n}})^{302}} = 2^{453}$$

$3n! = 1*2*3*4\cdot\dots\cdot(3n-4)(3n-3)$

$(3n-2)\,(3n-1) * 3n$

$(3n-3)! = 1*2*3\cdot 4\cdots(3n-4)(3n-3)$

$n!\,(n+1) = (n+1)!$

ad 6. $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!-(n-1)!}{(n+1)!+n!} =$$

$n! = (n-2)!\cdot(n-1)\cdot n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(n+1) - \frac{n!}{n}}{n!\,(n+1) + n!} =$$

$n! = 1*2*3*\dots*n$

$(n-1)! = 1*2*\dots*(n-3)*(n-2)*(n-1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(n+1-\frac{1}{n})}{n!\,(n+2)} = \frac{n^2+n-1}{n}\cdot\frac{1}{n+2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-1}{n}\cdot\frac{1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{n+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\,(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2\,(1+\frac{2}{n})} = 1$$

Zad 7. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{9\cdot 2^n + 3\cdot 3^{2n} + 14\cdot 5^n}$

$$\sqrt[n]{0+3\cdot 3^{2n}+0} \leq \sqrt[n]{9\cdot 2^n+3\cdot 3^{2n}+14\cdot 5^n} \leq \sqrt[n]{3\cdot 2^{2n}+3\cdot 3^{2n}+3\cdot 3^{nn}}$$

$$\sqrt[n]{3\cdot 3^{2n}} \leq \sqrt[n]{9\cdot 2^n+3\cdot 3^{2n}+14\cdot 5^n} \leq \sqrt[n]{9\cdot 9^{2n}}$$

$$\downarrow +\infty \qquad \downarrow +\infty \qquad \downarrow +\infty$$

Granica ciągu wynosi $+\infty$

Zad 8

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{4n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-1+2}{4n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-1}{4n-1}+\frac{2}{4n-1}\right)^{2n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{4n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{4n-1}\right)^{\frac{4n-1}{2}}\right]^{\frac{2}{4n-1}\cdot 2n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{4n-1}} = e^{\frac{1}{1}} = e^{1}$$

Zad 9

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2-2n}\right)^{n^2+3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n-2n}{n^2-2n}\right)^{n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n}{n^2-2n}+\frac{3n}{n^2-2n}\right) = \cancel{\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3n}{n^2-2n}\right)^{\frac{n^2-2n}{3n}}\right]^{\frac{n^2+3}{3n}}}$$

$$\cancel{\Rightarrow \lim_{n\to\infty} e^{\frac{(n^2-2n)\cdot(n^2+3)}{3n}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n^2-2n}{n^2-2n}+\frac{3n}{n^2-2n}\right)^{\frac{n^2-2n}{3n}}\right]^{\frac{3n}{n^2-2n}\cdot n^2+3} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+9n}{n^2-2n}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^3}{n^3}+\frac{9n}{n^3}}{\frac{n^2}{n^3}-\frac{2n}{n^3}}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+0}{0}} = e^{\infty}$$

Zad 10

Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\dots+\frac{n}{n+1}}$$

$$\sqrt{n\cdot\frac{1}{2}} \le \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\dots+\frac{n}{n+1}} \le \sqrt{n\cdot\frac{n}{n+1}}$$

Granica ciągu wynosi n.

~~Zad 1 (Zestaw 2)~~

~~Zbadać zbieżność szeregu:~~

$$\cancel{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}}$$

Kryterium d'Alemberta

Jeżeli granica ciągu $|a_{n+1}|/|a_n|$ istnieje i jest mniejsza od 1 to szereg jest $\sum a_n$ jest zbieżny jeżeli granica ta jest większa od 1, szereg jest rozbieżny

Dla rozbieżności szeregu wystarczy by istniała liczba N, że nierówność $|a_{n+1}|/|a_n| \geq 1$ była spełniona dla wszystkich n większych od N

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1 \Rightarrow$ szereg jest zbieżny

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1 \Rightarrow$ kryterium nie rozstrzyga

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1 \Rightarrow$ szereg jest rozbieżny

Kryterium Raabego

Jeżeli kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga czy dany szereg jest zbieżny lub rozbieżny, warto skorzystać z kryterium Raabego

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) > 1 \Rightarrow$ szereg $\sum a_n$ jest zbieżny

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) < 1 \Rightarrow$ szereg jest rozbieżny

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = 1 \Rightarrow$ kryterium nie rozstrzyga