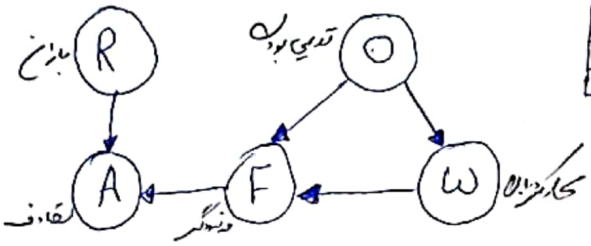
Bayes Nets

سوال اول)



O	P(O)
+	۰٫۵
−	۰٫۵

O	ω	P(ω|O)
+	+	۰٫۹
+	−	۰٫۱
−	+	۰٫۲
−	−	۰٫۸

R	P(R)
+	۰٫۲
−	۰٫۸

F	R	A	P(A|F,R)
+	+	+	۰٫۹
+	+	−	۰٫۱
+	−	+	۰٫۷
+	−	−	۰٫۳
−	+	+	۰٫۴
−	+	−	۰٫۶
−	−	+	۰٫۱
−	−	−	۰٫۹

O	ω	F	P(F|O,ω)
+	+	+	۰٫۹
+	+	−	۰٫۱
+	−	+	۰٫۶
+	−	−	۰٫۴
−	+	+	۰٫۷
−	+	−	۰٫۳
−	−	+	۰٫۲
−	−	−	۰٫۸

الف) $P(O)$ → join O → $P(O,\omega)$ → Sum O → $P(\omega)$

$P(\omega|O)$

O	ω	P(O,ω)
+	+	۰٫۴۵
+	−	۰٫۰۵
−	+	۰٫۱
−	−	۰٫۴

ω	P(ω)
+	۰٫۵۵
−	۰٫۴۵

ب) $P(+o,-\omega,+f,-r,+a) = P(+o)\,P(-\omega|+o)\,P(+f|+o,-\omega)\,P(-r|+o,-\omega,+f)\,P(+a|+o,-\omega,+f,-r)$ (chain rule)

حالا: $P(x_1,x_2,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i|\text{parents}(x_i)) \Rightarrow P(+o)\,P(-\omega|+o)\,P(+f|+o,-\omega)\,P(-r)\,P(+a|+f,-r)$

$۰٫۵ \times ۰٫۱ \times ۰٫۶ \times ۰٫۸ \times ۰٫۷ = ۰٫۰۱۶۸$

ج) ۱- می‌خواهیم ببینیم که $A \perp O \mid F$ این رابطه که بیانگر این است که با شرط داشتن میزسنگ خودرو یا حتی کیفیت دل مقادیر خودرو مستقل می‌شود یا خیر!

به این مدل می‌گویم Casual chain

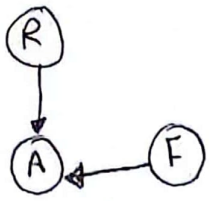
بطور کلی $X \perp Y \mid Z$ یعنی $\forall x,y,z: P(x|y,z) = P(x|z)$

در این مدل O و A به شرط داشتن F از هم مستقل می‌شوند.

در اینجا داریم $P(A|F,O) = P(A|F)$

(وقتی پدر A را می‌دانیم، دیگر نیازی به داشتن O نیست تا شرایط را از آن هم اطلاع داریم!)

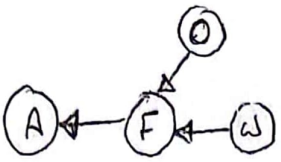
۲ـ (X) میخواهیم ببینیم که $F \perp\!\!\!\perp R \mid A$ این رابطه برقرار است یا خیر؟



در این مدل F و R به تنهایی از هم مستقل هستند ولی به شرط دانستن A به هم وابسته می‌شوند!

به این مدل Common effect گوییم

۳ـ (X) بررسی برقراری رابطه مقابل $F \perp\!\!\!\perp A \mid O, W$



خب اینجا طبق رابطه روبه‌رو نمی‌توان گفت به شرط دانستن W و O $(*)\ P(A \mid F, O, W) \neq P(A \mid F)$

F و A از هم مستقل می‌شوند چون با دانستن F ، W و O به هم وابسته می‌شوند و بطور کلی رابطه (*) برقرار نیست. بطور شهودی هم می‌توان گفت که W و O خودشان باعث F می‌شوند پس اگر آنها را بدانیم با اینکه آنها را ندانیم احتمال خواسته شده جوابش فرق خواهد کرد

۴ـ (✓) $P(R \mid F) = P(R)$ هر دو این رابطه‌ها برقرار هستند و $P(F \mid R) = P(F)$ به اصطلاح احتمال بارش باران از فرسودگی خودرو مستقل است و بالعکس

شماتیک

(چون می‌توان گفت هیچکدام علت یا معلول دیگری هم نیست و به طور مستقل از هم در شماتیک حضور دارند و رابطه‌ای با هم ندارند پس مستقل می‌شوند.)

د) $P(O \mid -a)$: ① $\boxed{P(O) \quad P(W \mid O) \quad P(R) \quad P(-a \mid F, R) \quad P(F \mid O, W)}$

راه 1: Choose W: $\begin{matrix} P(W \mid O) \\ P(F \mid O, W) \end{matrix} \xrightarrow{\times} P(W, F \mid O) \xrightarrow{\Sigma} f_1(F \mid O)$

② $\boxed{P(O) \quad P(R) \quad P(-a \mid F, R) \quad f_1(F \mid O)}$

Choose F: $\begin{matrix} P(-a \mid F, R) \\ f_1(F \mid O) \end{matrix} \xrightarrow{\times} P(-a, F \mid R, O) \xrightarrow{\Sigma} f_2(-a \mid R, O)$

③ $\boxed{P(O) \quad P(R) \quad P(-a \mid R, O)}$

Choose R: $\begin{matrix} P(R) \\ P(-a \mid R, O) \end{matrix} \xrightarrow{\times} P(R, -a \mid O) \xrightarrow{\Sigma} P(-a \mid O)$

④ $\boxed{P(O) \quad P(-a \mid O)}$

finish with O: $\begin{matrix} P(O) \\ P(-a \mid O) \end{matrix} \xrightarrow{\times} P(O, -a) \xrightarrow{\text{normalize}} P(O \mid -a)$ ✓

$$P(O|-a) = \frac{P(O,-a)}{P(-a)} = \alpha\, P(O,-a) = \alpha \sum_{\omega,F,R} P(O,\omega,F,R,-a)$$

$$= \alpha \sum_{\omega,F,R} P(O)\,P(\omega|O)\,P(F|O,\omega)\,P(R|O,\omega,F)\,P(-a|O,\omega,F,R)$$

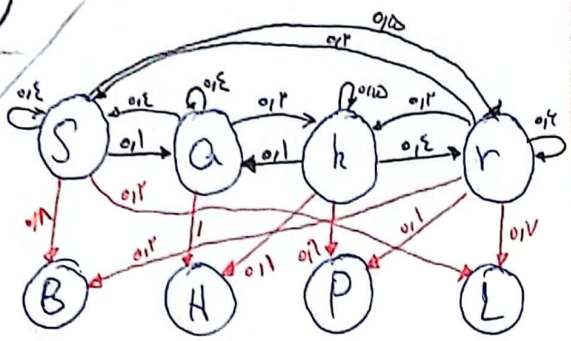
$$= \alpha \sum_{\omega,F,R} P(O)\,P(\omega|O)\,P(F|O,\omega)\,P(R)\,P(-a|F,R)$$

$$= \alpha\, P(O) \sum_{R} P(R) \sum_{\omega} P(\omega|O) \sum_{F} P(F|O,\omega)\,P(-a|F,R)$$

$$= \alpha\, P(O) \sum_{R} P(R) \sum_{\omega} P(\omega|O)\, f_1(-a|O,\omega,R)$$

$$= \alpha\, P(O) \sum_{R} P(R)\, f_2(-a|O,R)$$

$$= \alpha\, P(O)\, f_3(-a|O)$$



HMM

الف)

$$A = \begin{array}{c} \\ S \\ a \\ h \\ r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S & a & h & r \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰٫۴ & ۰٫۱ & ۰ & ۰٫۵ \\ ۰٫۲ & ۰٫۴ & ۰٫۴ & ۰ \\ ۰ & ۰٫۱ & ۰٫۵ & ۰٫۴ \\ ۰٫۲ & ۰ & ۰٫۲ & ۰٫۶ \end{bmatrix} \end{array}$$

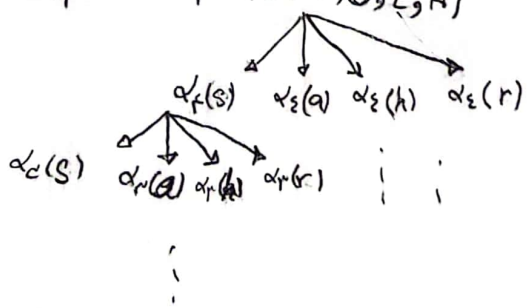
$$B = \begin{array}{c} \\ S \\ a \\ h \\ r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B & H & P & L \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰٫۸ & ۰ & ۰ & ۰٫۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰٫۱ & ۰٫۹ & ۰ \\ ۰٫۲ & ۰ & ۰٫۱ & ۰٫۷ \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\pi = [۰٫۵ \quad ۰٫۱ \quad ۰٫۲ \quad ۰٫۲]$$

ب)

$O = \{B, B, L, H\}$ — بیایید احتمال را محاسبه کنیم — $T = ۴$ ، $N = ۴$

$P(O = B,B,L,H)$



$$\alpha_t(j) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{t-1}(i)\, a_{ij}\, b_j(O_t)$$

$t = ۲,۳,۴$ ، $N = ۴$

$$\alpha_1(j) = \pi_j\, b_j(O_1) \qquad N = ۴$$

$$a_{ij} = P(j|i) \qquad b_j(O_t) = P(O_t|j)$$

$$\Rightarrow P(O = B,B,L,H) = \alpha_4(S) + \alpha_4(a) + \alpha_4(h) + \alpha_4(r)$$

$O_{t=1} = B \quad O_{t=2} = B \quad O_{t=3} = L \quad O_{t=4} = H$

$\alpha_1(S) = p(S)\,p(B|S)$ $\alpha_1(a) = p(a)\,p(B|a)$ $\alpha_1(h) = p(h)\,p(B|h)$ $\alpha_1(r) = p(r)\,p(B|r)$

$= 0.6 \times 0.8$ $= 0.3 \times 0$ $= 0.1 \times 0$ $= 0.3 \times 0.7$

$= 0.4$ $= 0$ $= 0$ $= 0.21$

$\alpha_2(S) = \alpha_1(S)\,p(S|S)\,p(B|S) + \alpha_1(a)\,p(S|a)\,p(B|S) + \alpha_1(h)\,p(S|h)\,p(B|S) + \alpha_1(r)\,p(S|r)\,p(B|S)$

$= 0.4 \times 0.3 \times 0.8 + 0 + 0 + 0.01 \times 0.4 \times 0.8$

$= 0.096 + 0.0032 = \underline{0.0992}$

$\alpha_2(a) = \alpha_1(a)\,p(a|a)\,p(B|a) + \alpha_1(S)\,p(a|S)\,p(B|a) + \alpha_1(h)\,p(a|h)\,p(B|a) + \alpha_1(r)\,p(a|r)\,p(B|a)$

$= 0 + 0.3 \times 0.1 \times 0 + 0 + 0.01 \times 0$

$= 0$

$\alpha_2(h) = \alpha_1(h)\,p(h|h)\,p(B|h) + \alpha_1(S)\,p(h|S)\,p(B|h) + \alpha_1(a)\,p(h|S)\,p(B|h) + \alpha_1(r)\,p(h|r)\,p(B|h)$

$= 0 + 0.2 \times 0 \times 0 + 0 + 0.01 \times 0.2 \times 0$

$= \underline{0}$

$\alpha_2(r) = \alpha_1(r)\,p(r|r)\,p(B|r) + \alpha_1(S)\,p(r|S)\,p(B|r) + \alpha_1(a)\,p(r|a)\,p(B|r) + \alpha_1(h)\,p(r|h)\,p(B|r)$

$= 0.01 \times 0.4 \times 0.7 + 0.3 \times 0.1 \times 0.7 + 0 + 0$

$= 0.0028 + 0.021 = \underline{0.0238}$

$\alpha_3(S) = \alpha_2(S)\,p(S|S)\,p(L|S) + \alpha_2(a)\,p(S|a)\,p(L|S) + \alpha_2(h)\,p(S|h)\,p(L|S) + \alpha_2(r)\,p(S|r)\,p(L|S)$

$= 0.0992 \times 0.3 \times 0.2 + 0 \times 0.1 \times 0.2 + 0 + 0.0238 \times 0.1 \times 0.2$

$= 0.005952 + 0.000476$

$= \underline{0.006428}$

$\alpha_3(a) = \alpha_2(a)\,p(a|a)\,p(L|a) + \alpha_2(S)\,p(a|S)\,p(L|a) + \alpha_2(h)\,p(a|h)\,p(L|a) + \alpha_2(r)\,p(a|r)\,p(L|a)$

$= 0 + 0.0992 \times 0.1 \times 0 + 0 + 0.0238 \times 0$

$= 0$

$\alpha_r(h) = \alpha_r(h)\,p(h|h)\,p(L|h) + \alpha_r(s)\,p(h|s)\,p(L|h) + \alpha_r(a)\,p(h|a)\,p(L|h) + \alpha_r(r)\,p(h|r)\,p(L|h)$

$= 0 \times 0.3 \times 0 + 0.0875 \times 0 + 0 \times 0.1 \times 0 + 0.0429 \times 0.1 \times 0$

$= 0$

$\alpha_r(r) = \alpha_r(r)\,p(r|r)\,p(L|r) + \alpha_r(s)\,p(r|s)\,p(L|r) + \alpha_r(a)\,p(r|a)\,p(L|r) + \alpha_r(h)\,p(r|h)\,p(L|r)$

$= 0.49 \times 0.7 \times 0.7 + 0.0875 \times 0.5 \times 0.7 + 0 + 0$

$= 0.0686 + 0.03125$

$= 0.09985$

$\alpha_3(s) = \alpha_2(s)\,p(s|s)\,p(H|s) + \alpha_2(a)\,p(s|a)\,p(H|\,) + \alpha_2(h)\,p(s|h)\,p(H|\,) + \alpha_2(r)\,p(s|r)\,p(H|\,)$

$= 0 + 0 + 0 + 0$

$= 0$

$\alpha_3(a) = \alpha_2(a)\,p(a|a)\,p(H|a) + \alpha_2(s)\,p(a|s)\,p(H|a) + \alpha_2(h)\,p(a|h)\,p(H|a) + \alpha_2(r)\,p(a|r)\,p(H|a)$

$= 0 + 0.0007 \times 0.1 + 0 + 0.0125 \times 1 \times 1$

$= 0.00077$

$\alpha_3(h) = \alpha_2(h)\,p(h|h)\,p(H|h) + \alpha_2(s)\,p(h|s)\,p(H|h) + \alpha_2(a)\,p(h|a)\,p(H|h) + \alpha_2(r)\,p(h|r)\,p(H|h)$

$= 0 \times 0.3 \times 0.1 + 0.0007 \times 0 \times 0.1 + 0 + 0.0429 \times 1 \times 0.1$

$= 0.00429$

تصحیح شد ← اشتباه تایپی بود ← اشتباه تایپی بود

$\alpha_3(r) = \alpha_2(r)\,p(r|r)\,p(H|r) + \alpha_2(s)\,p(r|s)\,p(H|r) + \alpha_2(a)\,p(r|a)\,p(H|r) + \alpha_2(h)\,p(r|h)\,p(H|r)$

$= 0 + 0 + 0 + 0$

$= 0$

finally: $P(O = B, B, L, H) = 0.00077 + 0.00429$

$= 0.00506$

خواسته سوال: $\gamma_2(s) = P(q_2 = s \mid O = \{B, B, L, H\})$

$= \alpha\, \alpha_2(s)\beta_2(s)$

ج) $\beta_2(i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, b_j(O_{t+1})\beta_{t+1}(j)$

$\underbrace{\alpha_2(s)\beta_2(s)}_{0{,}072 \times \boxed{}}$ $\quad \underbrace{\alpha_2(a)\beta_2(a)}_{0}$ $\quad \underbrace{\alpha_2(h)\beta_2(h)}_{0}$ $\quad \underbrace{\alpha_2(r)\beta_2(r)}_{0{,}026 \times \boxed{}}$

$\beta_2(s) = \sum_{j=1}^{N} a_{sj}\, b_j(O_3^{=L})\beta_3(j) = P(s|s)\,P(L|s)\,\beta_3(s)$ (*)

$\boxed{i=s,\ t=2}$

$+ P(a|s)\,\cancel{P(L|a)}^{0} \times \beta_3(a)$

$+ P(h|s)\,\cancel{P(L|h)}^{0} \times \beta_3(h)$

$+ P(r|s)\,P(L|r) \times \beta_3(r)$ (**)

$\beta_3(s) = \sum_{j=1}^{N} a_{sj}\, b_j(O_4^{=H})\,\cancel{\beta_4(j)}^{1} = P(s|s)\,\cancel{P(H|s)}^{0} \times 1$

$\boxed{i=s,\ t=3}$

$+ P(a|s)^{0{,}1}\,P(H|a)^{1} \times 1$

$+ \cancel{P(h|s)}^{0}\,P(H|h) \times 1$

$+ P(r|s)\,\cancel{P(H|r)}^{0} \times 1$

0,1

$\beta_3(r) = \sum_{j=1}^{N} a_{rj}\, b_j(O_4^{=H})\,\cancel{\beta_4(j)}^{1} = P(s|r)\,\cancel{P(H|s)}^{0} \times 1$

$\boxed{t=3,\ i=r}$

$\cancel{P(a|r)}^{0}\,P(H|a) \times 1$

$P(h|r)^{0{,}2}\,P(H|h)^{0{,}1} \times 1$

$P(r|r)\,\cancel{P(H|r)}^{0} \times 1$

0,2

*: $0{,}4 \times 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}008$

**: $0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}02 = 0{,}007$

$\oplus$: $\boxed{0{,}015}$

$$\beta_2(r) = \sum_{j=1}^{N} a_{rj}\, b_j(O_3 = L)\, \beta_3(j) = P(S|r)\,P(L|S)\,\beta_3(S) \quad (*)$$
$$+ P(a|r)\,P(L|a)\,\beta_3(a)$$
$$+ P(h|r)\,P(L|h)\,\beta_3(h)$$
$$+ P(r|r)\,P(L|r)\,\beta_3(r) \quad (**)$$

$i=r$

$t=2$

$*: 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}004$

$**: 0{,}6 \times 0{,}7 \times 0{,}02 = 0{,}084$

$0{,}004 + 0{,}084 = 0{,}088$

$\alpha_2(S)\beta_2(S) = 0{,}072 \times 0{,}015 = 0{,}00108$

$\alpha_2(r)\beta_2(r) = 0{,}026 \times 0{,}088 = 0{,}002288$

$\oplus \quad 0{,}003368$

$$\Rightarrow \gamma_2(S) = \frac{0{,}00108}{0{,}003368} = 0{,}32$$

$$v_t(j) = \max_{i=1}^{N} [v_{t-1}(i)\, a_{ij}]\, b_j(O_t) \; ; \; v_1(j) = \pi_j\, b_j(O_1)$$

$\delta_t(j)$

$O = \{B, B, L, H\}$

$v_1(S) = \pi_S\, b_S(B) = 0{,}25 \times P(B|S) = 0{,}25 \times 0{,}8 = 0{,}2$

$v_1(a) = \pi_a\, b_a(B) = 0{,}25 \times 0 = 0$

$v_1(h) = \pi_h\, b_h(B) = 0{,}25 \times 0 = 0$

$v_1(r) = \pi_r\, b_r(B) = 0{,}25 \times 0{,}2 = 0{,}05$

$bt_1(S) = 0$

$bt_1(a) = 0$

$bt_1(h) = 0$

$bt_1(r) = 0$

$bt_1 = S$

$$v_2(S) = \max_{1 \le i \le N} [v_1(i)\, a_{iS}]\, b_S(O_2 = B)$$

$i=S: \; v_1(S)\, a_{SS}\, b_S(B) = 0{,}2 \times 0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}064$

$i=a: \; v_1(a)\, a_{aS}\, b_S(B) = 0$

$i=h: \; v_1(h)\, a_{hS}\, b_S(B) = 0$

$i=r: \; v_1(r)\, a_{rS}\, b_S(B) = 0{,}05 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}05$

$\boxed{0{,}064}$

$bt_2(S) = S$

$V_2(a) = \max_{1 \le i \le N} [V_1(i)\, a_{ia}]\, b_a(O_2 = B)$ ⇒

$V_1(s)\, a_{sa}\, b_a(B) = 0$

$V_1(a)\, a_{aa}\, b_a(B) = 0$

$V_1(h)\, a_{ha}\, b_a(B) = 0$

$V_1(r)\, a_{ra}\, b_a(B) = 0$

(0)

$V_2(h) = \max_{1 \le i \le N} [V_1(i)\, a_{ih}]\, b_h(O_2 = B)$ ⇒

$V_1(s)\, a_{sh}\, b_h(B) = 0$

$V_1(a)\, a_{ah}\, b_h(B) = 0$

$V_1(h)\, a_{hh}\, b_h(B) = 0$

$V_1(r)\, a_{rh}\, b_h(B) = 0$

(0)

$V_2(r) = \max_{1 \le i \le N} [V_1(i)\, a_{ir}]\, b_r(O_2 = B)$ ⇒

$V_1(s)\, a_{sr}\, b_r(B) = 0{,}2 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}042$

$V_1(a)\, a_{ar}\, b_r(B) = 0$

$V_1(h)\, a_{hr}\, b_r(B) = 0$

$V_1(r)\, a_{rr}\, b_r(B) = 0{,}03 \times 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}024$

(0,042)

$bt_2(r) = s$

$bt_2 = s$

$V_2(s) = \max_{1 \le i \le N} [V_1(i)\, a_{is}]\, b_s(O_2 = L)$ ⇒

$V_1(s)\, a_{ss}\, b_s(L) = 0{,}4 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}084$

$V_1(a)\, a_{as}\, b_s(L) = 0$

$V_1(h)\, a_{hs}\, b_s(L) = 0$

$V_1(r)\, a_{rs}\, b_s(L) = 0{,}042 \times 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}0168$

$bt_2(s) = s$

0,084

$V_2(a) = \max_{1 \le i \le N} [V_1(i)\, a_{ia}]\, b_a(O_2 = L)$ ⇒

$V_1(s)\, a_{sa}\, b_a(L) = 0{,}4 \times 0{,}3 \times 0$

$V_1(a)\, a_{aa}\, b_a(L) = 0$

$V_1(h)\, a_{ha}\, b_a(L) = 0$

$V_1(r)\, a_{ra}\, b_a(L) = 0$

(0)

$$v_3(h) = \max_{1\le i\le N} [v_2(i)\, a_{ih}]\, b_h(O_3 = L) \Rightarrow v_2(s)\, a_{sh}\, b_h(L) = 0$$

$$v_2(a)\, a_{ah}\, b_h(L) = 0$$

$$v_2(h)\, a_{hh}\, b_h(L) = 0$$

$$v_2(r)\, a_{rh}\, b_h(L) = 0$$

0

$$v_3(r) = \max_{1\le i\le N} [v_2(i)\, a_{ir}]\, b_r(O_3 = L) \Rightarrow v_2(s)\, a_{sr}\, b_r(L) = 0{,}064 \times 0{,}5 \times 0{,}7 = 0{,}0224$$

$$v_2(a)\, a_{ar}\, b_r(L) = 0$$

$$v_2(h)\, a_{hr}\, b_r(L) = 0$$

$$v_2(r)\, a_{rr}\, b_r(L) = 0{,}02 \times 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}0084$$

$bt_3(r) = s$ $\boxed{0{,}0224}$

$bt_3 = s$

$$v_4(s) = \max_{1\le i\le N} [v_3(i)\, a_{is}]\, b_s(O_4 = H)$$

$$\Rightarrow v_3(s)\, a_{ss}\, b_s(H) = 0$$

$$v_3(a)\, a_{as}\, b_s(H) = 0$$

$$v_3(h)\, a_{hs}\, b_s(H) = 0$$

$$v_3(r)\, a_{rs}\, b_s(H) = 0$$

0

$$v_4(a) = \max_{1\le i\le N} [v_3(i)\, a_{ia}]\, b_a(O_4 = H) \Rightarrow v_3(s)\, a_{sa}\, b_a(H) = 0{,}00512 \times 0{,}1 \times 1 = 0{,}0005\,12$$

$$v_3(a)\, a_{aa}\, b_a(H) = 0$$

$$v_3(h)\, a_{ha}\, b_a(H) = 0$$

$$v_3(r)\, a_{ra}\, b_a(H) = 0{,}0224 \times 0 = 0$$

$bt_4(a) = s$ 0,0005 12

$$v_4(h) = \max_{1\le i\le N} [v_3(i)\, a_{ih}]\, b_h(O_4 = H) \Rightarrow v_3(s)\, a_{sh}\, b_h(H) = 0{,}00512 \times 0 = 0$$

$$v_3(a)\, a_{ah}\, b_h(H) = 0$$

$$v_3(h)\, a_{hh}\, b_h(H) = 0$$

$$v_3(r)\, a_{rh}\, b_h(H) = 0{,}0224 \times 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}000448$$

0,000448

$bt_4(h) = r$

$$V_4(r) = \max_{1 \le i \le N} \left[V_3(i)\, a_{ir} \right] b_r(H) \Rightarrow V_3(s)\, a_{sr}\, b_r(H) = 0$$

$$V_3(a)\, a_{ar}\, b_r(H) = 0$$

$$V_3(h)\, a_{hr}\, b_r(H) = 0$$

$$V_3(r)\, a_{rr}\, b_r(H) = 0$$

0

$bt_4 = S$ $\qquad q^* = \arg\max_{i=1}^{N} V_4(i) = a$ $\qquad p^* = \max_{i=1}^{N} V_4(i) = 0{,}000512$

جواب : SSSa