№ 2.7

$f(n) = 3n^2 - n + 4$

$g(n) = n\log n + 5$

$f(n) + g(n) = O(n^2)$

$f(n) + g(n) = 3n^2 - n + 4 + n\log n + 5 =$

$= \underbrace{3n^2}_{O(n^2)} + \underbrace{n\log n}_{O(n^2)} - \underbrace{n}_{O(n^2)} + \underbrace{9}_{O(n^2)} = O(n^2)$

$\frac{n\log n}{n^2} = \frac{\log n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

№ 2.10

```
def f(n):
    sum = 0
    for i in range(1, n+1):
        sum = sum + i
    ~~return~~
    return sum
```

- У найгіршому випадку for (цикл) виконуватиметься n разів. (Від i=1 до i=n) $f(n) = O(n)$
- Сума всіх натур. чисел від 1 до n

$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Приклад: $n = 5$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ $\qquad \frac{5(5+1)}{2} = \frac{30}{2} = 15$

• Оптимізувати можна, щоб обчисло-вались за константний час $O(1)$.
Використавши ф-лу $\frac{n(n+1)}{2}$

```
def f(n):
    return n*(n+1)//2
```

№2.11

• У ф-ції $g(n)$ є цикл for - виконується n р.

$i - O(1)$
$f(i) - O(i)$ $\Rightarrow O(1)+O(i) = O(i)$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} O(i) = O\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}}\Big) = O(n^2)$$

• $g(n) = \sum_{i=1}^{n} (i + f(i)) = \sum_{i=1}^{n} \left(i + \frac{i(i+1)}{2}\right) =$

$f(i) = \frac{i(i+1)}{2}$

$= \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n^3+6n^2+5n}{6} = \frac{n(n+1)(n+5)}{6}$$

• Замінити $f(i)$ на $\frac{i(i+1)}{2}$ $\Rightarrow g(n) = O(n)$

$g(n)$ замінити на $\frac{n(n+1)(n+5)}{6}$ – обчислювати без циклу $\Rightarrow O(1)$

№ 2.12

```
def h(n):
    return f(n)+g(n)
```

• $f(n) = O(n)$

$g(n) = O(n^2)$

$f(n) + g(n) = T(n)$

$T(n) = O(n) + O(n^2) = O(n^2)$

• $h(n) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+5)}{6} =$

$= \frac{3n(n+1) + n(n+1)(n+5)}{6} = \frac{n(n+1)(n+8)}{6}$

$n = 1$ $f(1) = 1$
$g(1) = 1 + f(1) = 2$
$h(1) = 3$

$\frac{1 \cdot 2 \cdot 9}{6} = 3$

$n = 2$ $f(2) = 3$
$g(2) = (1 + f(1)) + (2 + f(2)) = 2 + 5 = 7$
$h(2) = 10$

$\frac{2 \cdot 3 \cdot 10}{6} = 10$

• Для оптимізації спочатку потрібно $f(n)$ та $g(n)$ звести до формули, тоді $h(n)$ теж за до-помо

№2.13

a) $T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 1 \\ T(n-1) + O(1) & n > 1 \end{cases}$

$T(n) = T(n-1) + O(1) = T(n-2) + O(1) + O(1) =$

$= T(n-3) + O(1) + O(1) + O(1)$

$T(n) \overset{n=1}{=} T(1) + (n-1)\,O(1) = O(1) + (n-1)\,O(1) = O(n)$

$T(n) = O(n)$

б) $T(n) = \begin{cases} O(1) & n \leq a \\ T(n-a) + O(1) & n > a \end{cases}, \quad a > 1$

$T(n) = T(n-a) + O(1) = T(n-2a) + O(1) + O(1) =$

$= T(n-3a) + O(1) + O(1) + O(1)$

$T(n-ka) \leq O(1)$

$n - ka \leq a \Rightarrow k = \frac{n}{a}$

$T(n) = k\,O(1) = O\left(\frac{n}{a}\right)$

$T(n) = O(n)$

д) $T(n) = \begin{cases} O(1) & n \leq a, \quad a > 1 \\ aT(n-a) + O(1) & n > a \end{cases}$

$T(n) = a\,T(n-a) + O(1) = a[a\,T(n-2a) + O(1)] + O(1) =$

$= a^2 T(n-2a) + a\,O(1) + O(1)$

$T(n) = a^3 T(n-3a) + a^2 O(1) + a\,O(1) + O(1)$

$T(n) = a^k T(n-ka) + O(a^{k-1}) + \ldots + O(a) + O(1)$

$n - ka \leq a \qquad k = \frac{n}{a}$

$O(1+a+a^2+\dots+a^{k-1}) = O(a^k) = O(a^{\frac{n}{a}})$

$T(n) = O(a^{\frac{n}{a}})$

h) $T(n) = \begin{cases} O(n) & n \le 1 \\ aT(\frac{n}{a}) + O(n) & n > 1,\ a \ge 2 \end{cases}$

$T(n) = aT(\frac{n}{a}) + O(n)$

$O(n) = O(n^d)$, $d = 1$

$\log_b a \quad b = a \Rightarrow \log_a a = 1$

$d = 1$, $\log_a a = 1 \Rightarrow d = \log_a a$

$d = \log_b a$

$T(n) = O(n^d \log_n)$

$T(n) = O(n \log_n)$

№2.14

a) $\sum_{i=0}^{n} i = O(n)$

```
sum = 0
for i in range(0, n+1):
    sum += i
```

b) $\sum_{i=0}^{n} i^2 = O(n^2)$

```
sum = 0
for i in range(0, n+1):
    sum += i*i
```

c) $\sum_{i=0}^{n} a_i = O(n)$

```
sum = 0
for i in range(0; n+1): sum += a[i]
```

d) $\sum_{i=0}^{n} i! = O(n^2)$

```
sum = 0
for i in range(1, n+1):
    p = 1
    for i in range(1, i+1):
        p = p*i
    sum += p
```

e) $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+i} = O(n)$

```
p = 1
for i in range(1, n+1)
    p *= 1/(1+i)
return p
```

f) $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+i!} = O(n)$

```
p = 1
f = 1
for i in range(1, n+1):
    f *= i
    p *= 1/(1+f)
return p
```

g) $\prod_{i=1}^{n} \frac{a^i}{1+i!} = O(n)$

```
pr = 1
p = 1
f = 1
for i in range(1, n+1):
    p *= a
    f *= i
    pr *= p/(1+f)
return pr
```

h) $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+i^m} = O(n \cdot m)$

```
pr = 1
for i in range(1, n+1)
    p = 1
    for i in range(m):
        p *= i
    pr *= 1/(1+p)
return p
```

i) $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+i^i} = O(n^2)$

```
p = 1
for i in range(1, n+1):
    term = 1
    for j in range(i):
        term *= i
    p *= 1/(1+term)
return p
```