

## 2. Kinematyka

### 2.1. Zadania kinematyki – sformułowanie

#### *Omówienie zadań kinematyki*

Jak wiadomo, dla celów analizy kinematycznej można wybrać różne współrzędne. Wybór ten decyduje między innymi o możliwości rozwiązania zadania w formie symbolicznej albo numerycznej, ma wpływ na efektywność rozwiązywania zadań oraz na prostotę bądź złożoność modelu kinematyki.

Przedstawimy teraz algorytm analizy kinematycznej mechanizmów we współrzędnych absolutnych. Współrzędne te są bardzo często wykorzystywane w programach komputerowych dokonujących analizy kinematycznej w sposób automatyczny. Rozważania ograniczymy do mechanizmów płaskich, gdyż analiza kinematyczna mechanizmów płaskich i przestrzennych różni się jedynie stopniem skomplikowania równań wykorzystywanych w obliczeniach, nie ma jednak istotnych różnic w samej metodzie postępowania.

Formułowane zadania analizy kinematycznej mają na ogół istotny sens techniczny. Obliczeń kinematycznych dokonuje się już podczas procesu projektowania mechanizmu, lecz często także i potem – podczas eksploatacji, np. gdy konieczne jest odpowiednie sterowanie urządzeniem. W ogólnym przypadku zadanie kinematyki polega na wyznaczeniu pewnych parametrów (tzn. położeń, prędkości, przyspieszeń wybranych punktów lub członów mechanizmu), gdy dane są inne parametry.

Analiza kinematyczna może dotyczyć tylko położeń i orientacji członów mechanizmu, lecz może także polegać na wyznaczaniu prędkości lub przyspieszeń. W kinematyce mechanizmów rozróżnia się trzy typowe rodzaje zadań: *zadanie o położeniach*, *zadanie o prędkościach* i *zadanie o przyspieszeniach*.

*Zadanie o położeniach* polega na wyznaczeniu położeń i orientacji wszystkich lub niektórych członów mechanizmu, gdy ruch mechanizmu zdefiniowany jest w sposób jednoznaczny, np. przez narzucenie położenia i orientacji niektórych członów. *Zadanie o prędkościach* polega na wyznaczeniu prędkości wszystkich lub niektórych członów mechanizmu, gdy ruch mechanizmu określony jest jednoznacznie także co do prędkości. *Zadanie o przyspieszeniach* polega na wyznaczeniu przyspieszeń niektórych lub wszystkich członów mechanizmu, gdy ruch mechanizmu jest określony jednoznacznie również co do przyspieszeń.

Podstawą metody formułowania i rozwiązywania powyższych zadań jest zapisanie ich analitycznie w formie równań więzów holonomicznych, krępujących współrzędne opisujące mechanizm. Z punktu widzenia metod numerycznych i algorytmów obliczeniowych, rozwiązanie zadań kinematyki sprowadza się do analizy i rozwiązywania równań więzów. Zapis zadań w formie równań więzów powoduje także, że opracowane metody i zależności mają charakter ogólny, tzn. powstałe algorytmy można wykorzystać do analizy mechanizmów o dowolnej strukturze i z dużą dowolnością w definiowaniu rodzajów ruchu, jaki mają realizować. Co więcej, większość z nich zapisana jest w formie, która pozwala na łatwe oprogramowanie i budowę ogólnego programu komputerowego.

Zastosowanie współrzędnych absolutnych sprawia, że ruch układu członów zapisany jest zawsze we współrzędnych, które opisują położenie i orientację swobodnych (nieskrępowanych więzami) członów na płaszczyźnie lub w przestrzeni. Liczba współrzędnych absolutnych opisujących układ  $n$  członów na płaszczyźnie jest zawsze równa  $3n$ , natomiast w przestrzeni  $6n$ , jeśli macierz rotacji wyrażona jest jako funkcja trzech kątów obrotu (np. kątów Eulera). Liczba współrzędnych absolutnych nie zależy od tego, jakie pary kinematyczne występują w układzie, ile ich jest, ani od tego, czy człony tworzą otwarte, czy zamknięte łańcuchy kinematyczne. Ograniczenia nakładane przez pary kinematyczne zapisywane są przez równania więzów, które nazywać będziemy *więzami kinematycznymi*<sup>1</sup>. Każdej parze  $i$ -tej klasy odpowiada układ  $i$  równań więzów nakładanych na współrzędne przez tę parę kinematyczną. Liczba równań więzów kinematycznych jest równa sumarycznej liczbie stopni swobody we wszystkich parach kinematycznych. Konsekwencją zapisu położenia i orientacji członów mechanizmu we współrzędnych absolutnych jest, między innymi, duża liczba równań więzów, prosta postać wyrazów występujących w obliczeniach oraz przede wszystkim niezależność metody postępowania od struktury mechanizmu. Ponadto położenie, prędkość i przyspieszenie liniowe punktów, a także orientacja oraz prędkość i przyspieszenie katowe członów, w sposób mało skomplikowany zależą od współrzędnych absolutnych i ich pochodnych.

### **Matematyczny zapis zadań kinematyki**

Zajmijmy się teraz sformułowaniem zadań kinematyki w formie równań. Zapiszemy je w postaci ogólnej, pokazującej jedynie charakter zależności między współrzędnymi absolutnymi i ich pochodnymi względem czasu. Zależności niezbędne do efektywnego<sup>2</sup> sformułowania zadań kinematyki, dla mechanizmów składających się z typowych par kinematycznych, wyprowadzone zostaną później.

Więzy nakładane na współrzędne absolutne przez wszystkie pary kinematyczne występujące w mechanizmie, zapisywane są w formie układu równań więzów holonomicznych o znanej już postaci ogólnej:

$$\Phi^K = \Phi^K(\mathbf{q}) = \mathbf{0}_{m \times 1} . \quad (2.1)$$

Więzy kinematyczne mają charakter więzów *materialnych*, wyrażają bowiem fakt istnienia realnych par kinematycznych.

Jak wiemy, klasa pary kinematycznej mówi o tym, ile stopni swobody odbiera ona układowi członów. Dlatego liczba równań więzów opisujących parę kinematyczną jest równa klasie tej pary (w przypadku więzów zapisanych w formie równań wektorowych każdą składową wektora liczymy osobno). Zwróćmy uwagę, że jeśli liczba par kinematycznych  $V$  klasy jest równa  $p_5$  oraz liczba par kinematycznych IV klasy jest równa  $p_4$ , to liczba równań skalarnych w równaniu wektorowym (2.1)  $m$  jest równa  $2p_5 + p_4$ . Zatem rozpatrywany układ

<sup>1</sup> Warto podkreślić, że w mechanice analitycznej mianem *więzów kinematycznych* określa się więzy krępujące prędkości układu. Tutaj określenie to będzie używane w zupełnie innym znaczeniu – więzów wyrażających istnienie par kinematycznych (w rozpatrywanych przez nas przypadkach będą one miały charakter ograniczeń krępujących jedynie współrzędne układu).

<sup>2</sup> *Efektywne* sformułowanie zadań kinematyki rozumiemy tu jako napisanie równań więzów w postaci szczegółowej, odnoszącej się do konkretnego mechanizmu i umożliwiającej ich rozwiązanie.

ma  $w = 3n - 2p_5 - p_4$  stopni swobody. Jest to wynik zgodny ze wzorem Grüblera dla mechanizmów płaskich podanym w p. 1.3.1.

Zależności podane wyżej są prawdziwe pod warunkiem, że wszystkie więzy są niezależne w sensie definicji podanej w p. 1.3.2 (w punkcie tym omówiono też niektóre sytuacje, gdy warunek ten nie jest spełniony). Wiadomo, że jest tak wtedy, gdy w każdym analizowanym punkcie  $\mathbf{q}$  zachodzi:

$$\text{rank}(\Phi_q^K(\mathbf{q})) = m. \quad (2.2)$$

W dalszym ciągu będziemy zakładać, że warunek (2.2) jest spełniony w całym obszarze określoności wektora  $\Phi^K(\mathbf{q})$ .

Dla określenia konfiguracji układu (położenia i orientacji członów) w sposób jednoznaczny, czyli dla sformułowania zadania kinematyki, konieczne jest zdefiniowanie w dodatkowych i niezależnych warunków. Zadania kinematyki formułuje się wprowadzając pojęcie więzów kierujących  $\Phi^D$ , określających wymagany ruch układu członów. Więzy kierujące definiują ruch układu i są na ogół funkcjami czasu oraz współrzędnych układu wieloczłonowego. Więzy te mają najczęściej charakter więzów *niematerialnych* (choć dla potrzeb analizy kinematycznej charakter tych więzów jest nieistotny).

Rozwiązanie zadania o położeniach wymaga wyznaczenia wektora współrzędnych absolutnych  $\mathbf{q}$ , będącego rozwiązaniem układu nieliniowych równań algebraicznych o postaci:

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} \Phi^K(\mathbf{q}) \\ \Phi^D(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{w \times 1} \end{bmatrix}_{3n \times 1}. \quad (2.3)$$

Wektor  $\Phi^D(\mathbf{q}, t)$  odpowiada za określenie więzów kierujących. Układ (2.3) na ogół wynika wprost z technicznej definicji zadania kinematyki.

Jeżeli liczba więzów kierujących jest równa liczbie stopni swobody ( $w$ ), to liczba równań ( $m + w$ ) w układzie (2.72) jest równa liczbie współrzędnych absolutnych ( $N = 3n$ ), opisujących układ wieloczłonowy. Konsekwentnie przyjmujemy w dalszym ciągu, że pełny układ równań (2.72) stanowi układ równań niezależnych, tzn. dla wszystkich konfiguracji mechanizmu (niezależnie od czasu) spełniony jest warunek:

$$\text{rank}(\Phi_q(\mathbf{q}, t)) = N = 3n. \quad (2.4)$$

Z układu równań (2.3) otrzymuje się także zapis zadań kinematyki o prędkościach i o przyspieszeniach. Różniczkując równanie więzów (2.3) względem czasu uzyskujemy zależności, pozwalające na wyznaczenie prędkości i przyspieszeń uogólnionych, czyli wektorów  $\dot{\mathbf{q}}$  i  $\ddot{\mathbf{q}}$ . Po jednokrotnym różniczkowaniu uzyskujemy zależność dla prędkości:

$$\dot{\Phi}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{q}, t) = \Phi_q \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t = \begin{bmatrix} \Phi_q^K \\ \Phi_q^D \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_t^D \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.5)$$

Zadanie o prędkościach można zatem sprowadzić do rozwiązania układu równań liniowych:

$$\Phi_q \dot{\mathbf{q}} = -\Phi_t = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\Phi_t^D \end{bmatrix}_{3n \times 1}. \quad (2.6)$$

Zależność dla przyspieszeń otrzymujemy po kolejnym zróżniczkowaniu równań więzów (por. równanie (1.16)):

$$\begin{aligned}\ddot{\Phi}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) &\equiv \Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} + \left( \Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right)_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + 2\Phi_{\mathbf{tq}} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{tt}} \equiv \\ &\equiv \begin{bmatrix} \Phi_{\mathbf{q}}^K \\ \Phi_{\mathbf{q}}^D \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \left( \Phi_{\mathbf{q}}^K \dot{\mathbf{q}} \right)_{\mathbf{q}} \\ \left( \Phi_{\mathbf{q}}^D \dot{\mathbf{q}} \right)_{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + 2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_{\mathbf{tq}}^D \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_{\mathbf{tt}}^D \end{bmatrix} = \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Jak widać, zadanie o przyspieszeniach można sprowadzić do rozwiązywania układu równań liniowych:

$$\Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} = \Gamma = - \left( \Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right)_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - 2\Phi_{\mathbf{tq}} \dot{\mathbf{q}} - \Phi_{\mathbf{tt}} \equiv \begin{bmatrix} \Gamma^K \\ \Gamma^D \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} - \left( \Phi_{\mathbf{q}}^K \dot{\mathbf{q}} \right)_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \\ - \left( \Phi_{\mathbf{q}}^D \dot{\mathbf{q}} \right)_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - 2\Phi_{\mathbf{tq}}^D \dot{\mathbf{q}} - \Phi_{\mathbf{tt}}^D \end{bmatrix}_{3n \times 1}. \quad (2.8)$$

Układy równań (2.6) i (2.8) stanowią z punktu widzenia algebry układy równań liniowych względem odpowiednio wektora prędkości złączowych  $\dot{\mathbf{q}}$  i wektora przyspieszeń  $\ddot{\mathbf{q}}$ , o ile w pierwszym przypadku znany jest wektor  $\mathbf{q}$  oraz wektory  $\mathbf{q}$  i  $\dot{\mathbf{q}}$  w drugim. Należy zwrócić uwagę, że macierz współczynników w równaniach (2.6) i (2.8) jest macierzą Jacobiego równań więzów (2.3). Na ogół zależy ona od współrzędnych uogólnionych  $\mathbf{q}$ .

Rozwiązanie kolejnych zadań kinematyki wymaga rozwiązania zadań wcześniejszych. Na ogół rozwiązanie zadania o prędkościach poprzedzane jest przez rozwiązanie zadania o położeniach, natomiast rozwiązanie zadania o przyspieszeniach wymaga wcześniejszego rozwiązania zadań o prędkościach i o położeniach.

## 2.2. Obliczanie położenia, prędkości i przyspieszenia punktu oraz członu

Jak wiadomo, do opisu położenia i orientacji członu na płaszczyźnie wystarcza układ trzech współrzędnych. Jako współrzędne te można wybrać współrzędne początku dowolnego układu odniesienia związanego z członem, wyrażone w globalnym układzie odniesienia, oraz kąt, który tworzy ten układ z globalnym układem odniesienia – rysunek 2.1. Układ odniesienia związany z członem nazywa się, w zgodzie z przyjętym dotąd nazewnictwem, układem lokalnym. Wektor określający położenie i orientację lokalnego układu odniesienia  $\pi_i$  związanego z członem i w układzie globalnym  $\pi_0$  (rys. 2.1) ma postać:

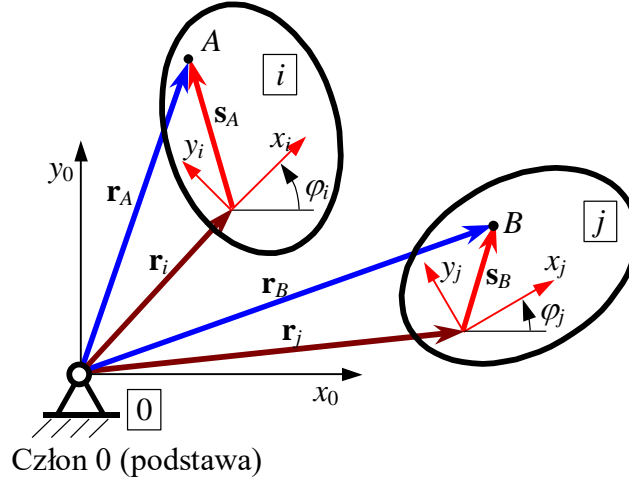
$$\mathbf{q}_i = [x_i \quad y_i \quad \varphi_i]^T = [\mathbf{r}_i^T \quad \varphi_i]^T. \quad (2.9)$$

Wektor o współrzędnych opisujących położenie i orientację członu i według wzoru (2.9) nazywa się wektorem współrzędnych absolutnych członu. Jeśli mechanizm składa się z  $n$  członów to wektor współrzędnych opisujących położenie i orientację wszystkich członów ma wymiar  $N = 3n$ :

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_n^T]^T. \quad (2.10)$$

Wektor współrzędnych w postaci (2.10) nazywa się wektorem *współrzędnych absolutnych* układu członów. Słowo „absolutne” sygnalizuje fakt, że położenie i orientacja dowolnego członu określone jest względem globalnego układu odniesienia. Oznacza także, że

dla określenia położenia oraz orientacji układu lokalnego  $\pi_i$ , związanego z członem  $i$ , względem układu globalnego  $\pi_0$ , wystarcza znajomość tylko współrzędnych  $\mathbf{q}_i$ , nie jest natomiast konieczna znajomość współrzędnych innych członów.



Rysunek 2.1. Opis położenia i orientacji członu we współrzędnych absolutnych

Rozpatrzmy punkt  $A$ , którego położenie w lokalnym układzie  $\pi_i$  jest opisane przez wektor  $\mathbf{s}_A^{(i)}$ . Przyjmijmy, że  $A$  nie jest punktem członu  $i$ , tzn. może przemieszczać się względem lokalnego układu odniesienia.

Jeśli znane są wartości współrzędnych absolutnych członu  $i$  oraz ich pochodne względem czasu, to parametry kinematyczne punktu  $A$  można obliczyć wykorzystując zasady dodawania wektorów zapisanych w różnych układach odniesienia oraz reguły różniczkowania wektorów. Położenie punktu  $A$  w układzie globalnym dane jest wzorem:

$$\mathbf{r}_A^{(0)} = \mathbf{r}_i^{(0)} + \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} . \quad (2.11)$$

Pochodna zupełna względem czasu wektora wodzącego wyraża się wzorem (wykorzystano wzór (1.20)):

$$\frac{d\mathbf{r}_A^{(0)}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_A^{(0)} = \dot{\mathbf{r}}_i^{(0)} + \frac{d(\mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)})}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_i^{(0)} + \dot{\mathbf{R}}_i \mathbf{s}_A^{(i)} + \mathbf{R}_i \dot{\mathbf{s}}_A^{(i)} = \dot{\mathbf{r}}_i^{(0)} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} \dot{\varphi}_i + \mathbf{R}_i \dot{\mathbf{s}}_A^{(i)} . \quad (2.12)$$

Wzór na przyspieszenie punktu  $A$  na płaszczyźnie można otrzymać, wykonując operację różniczkowania zależności (2.12) względem czasu i uwzględniając zależność  $\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega} = -\mathbf{I}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}_A^{(0)}}{dt^2} &= \frac{d(\dot{\mathbf{r}}_i^{(0)} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} \dot{\varphi}_i + \mathbf{R}_i \dot{\mathbf{s}}_A^{(i)})}{dt} = \\ &= \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} + \mathbf{R}_i \ddot{\mathbf{s}}_A^{(i)} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} \ddot{\varphi}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} \dot{\varphi}_i^2 + 2\boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_i \dot{\mathbf{s}}_A^{(i)} \dot{\varphi}_i . \end{aligned} \quad (2.13)$$

W dalszym ciągu, dla uproszczenia zapisu wzorów, będziemy pomijać wskaźnik „0” w oznaczeniu wektorów wodzących i macierzy rotacji. Umowa taka ma szczególne znaczenie dla prostoty zapisu wzorów we współrzędnych absolutnych, ponieważ współrzędne te określają położenie i orientację członu względem globalnego układu odniesienia.

Przyjmijmy teraz, że  $A$  jest punktem członu  $i$  (czyli nie porusza się względem układu  $\pi_i$ ). Wektor wodzący tego punktu można zapisać, w zgodzie z powyższą umową, w sposób następujący:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} . \quad (2.14)$$

Prędkość punktu  $A$  członu  $i$  otrzymujemy ze wzoru (2.12), przyjmując  $\dot{\mathbf{s}}_A^{(i)} = \mathbf{0}$ :

$$\frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{d(\mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)})}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{R}}_i \mathbf{s}_A^{(i)} = \dot{\mathbf{r}}_i + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} \dot{\varphi}_i. \quad (2.15)$$

Punkt  $A$  należy do członu  $i$ , zatem  $\dot{\mathbf{s}}_A^{(i)} = \ddot{\mathbf{s}}_A^{(i)} = \mathbf{0}$ . Przyspieszenie punktu  $A$  można obliczyć, stosując następujący wzór (ponownie wykorzystano zależność  $\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega} = -\mathbf{I}$ ):

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_A}{dt^2} = \frac{d(\dot{\mathbf{r}}_i + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} \dot{\varphi}_i)}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}_i + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} \ddot{\varphi}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} \dot{\varphi}_i^2. \quad (2.16)$$

Zależności określające prędkość i przyspieszenie kątowe członu względem globalnego układu odniesienia we współrzędnych absolutnych są trywialne (pomijamy wskaźniki „0”):

$$\omega_i = \dot{\varphi}_i, \quad \varepsilon_i = \ddot{\varphi}_i. \quad (2.17)$$

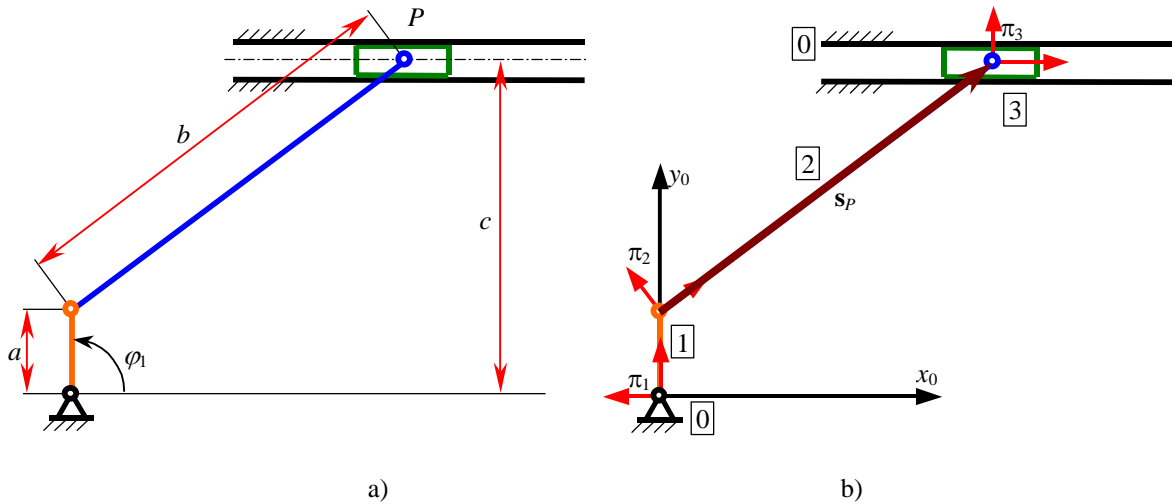
Z powyższych wzorów wynika, że dla określenia położenia, prędkości i przyspieszenia dowolnego punktu  $A$  należącego do członu  $i$  potrzebna jest jedynie znajomość współrzędnych absolutnych  $\mathbf{q}_i$  (2.9) tego członu oraz ich pochodnych względem czasu. Te same dane wystarczą do obliczenia orientacji, prędkości i przyspieszenia kąowego członu  $i$ . Współrzędne innych członów nie występują bowiem w równaniach (2.14) ÷ (2.17).

Jednocześnie jest oczywiste, że jeśli znany jest wektor (2.10) oraz jego pochodne względem czasu dla wszystkich członów mechanizmu, to ze wzorów (2.11) ÷ (2.17) można wyznaczyć dowolny parametr kinematyczny (położenie, prędkość, przyspieszenie) określający ruch każdego z członów mechanizmu.

## PRZYKŁAD 2.1

### Zadanie

Na rysunku przedstawiono mechanizm korbowo-wodzikowy. Należy napisać wektor współrzędnych absolutnych dla tego mechanizmu.



### Rozwiązanie

Na rysunku b) przedstawiono numerację członów mechanizmu. Kolejność numeracji nie ma znaczenia. Z każdym członem związano układy odniesienia, tak jak na rysunku. Wektor współrzędnych absolutnych ma postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= [\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \mathbf{q}_3^T]^T = [x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1 \mid x_2 \quad y_2 \quad \varphi_2 \mid x_3 \quad y_3 \quad \varphi_3]^T = \\ &= [\mathbf{r}_1^T \quad \varphi_1 \mid \mathbf{r}_2^T \quad \varphi_2 \mid \mathbf{r}_3^T \quad \varphi_3]^T. \end{aligned} \quad (a)$$

Należy podkreślić, że sposób związania z członami lokalnych układów odniesienia jest zupełnie dowolny. W naszym przykładzie początki lokalnych układów pokrywają się wprawdzie z osiami par kinematycznych, ale wcale tak być nie musi. Szczególny sposób wprowadzenia układów lokalnych podyktowany jest chęcią uproszczenia obliczeń prowadzonych „na papierze”, w kolejnych przykładach (staramy się, aby możliwe często mnożyć i dodawać zera). Podczas obliczeń z użyciem komputera nie miałby on znaczenia.

## PRZYKŁAD 2.2

### Zadanie

Wymiary  $a$ ,  $b$  i  $c$  mechanizmu z poprzedniego przykładu są dane. Znane są również wektory  $\mathbf{q}_2$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_2$  i  $\ddot{\mathbf{q}}_2$ . Należy obliczyć położenie, prędkość i przyspieszenie punktu  $P$  w układzie globalnym.

$$\text{Dane: } a = 1 \text{ (m)}, b = 5 \text{ (m)}, c = 4 \text{ (m)}, \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \arctg \frac{3}{4} \end{bmatrix}^T, \dot{\mathbf{q}}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \ddot{\mathbf{q}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^T.$$

Współrzędne liniowe odmierzane są w metrach, kątowne w radianach, a czas w sekundach.

### Rozwiązanie

Wektor  $\mathbf{s}_p$ , związany z członem 2, ma współrzędne  $\mathbf{s}_p^{(2)} = [b \ 0]^T$ . Położenie punktu  $P$  obliczamy, korzystając ze wzoru (2.14):

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_p^{(2)}. \quad (\text{a})$$

Prędkość punktu  $P$  można obliczyć ze wzoru (2.15):

$$\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{\mathbf{r}}_2 + \dot{\mathbf{R}}_2 \mathbf{s}_p^{(2)} = \dot{\mathbf{r}}_2 + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_p^{(2)} \dot{\varphi}_2, \quad (\text{b})$$

natomiast przyspieszenie ze wzoru (2.16):

$$\ddot{\mathbf{r}}_p = \ddot{\mathbf{r}}_2 + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_p^{(2)} \ddot{\varphi}_2 - \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_p^{(2)} \dot{\varphi}_2^2. \quad (\text{c})$$

Pozostało jeszcze podstawienie danych liczbowych:

$$\mathbf{r}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ (m)}, \quad (\text{d})$$

$$\dot{\mathbf{r}}_p = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (m/s)}, \quad (\text{e})$$

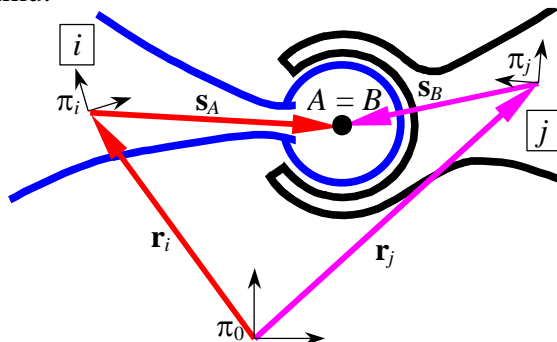
$$\ddot{\mathbf{r}}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} - \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 0^2 = \begin{bmatrix} -3/4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (m/s}^2\text{)}. \quad (\text{f})$$

## 2.3. Pary kinematyczne i równania więzów

Równania więzów nakładanych przez podstawowe typy par kinematycznych w mechanizmach płaskich zapisuje się we współrzędnych absolutnych szczególnie łatwo. W rozdziale tym przedstawimy szczegółowo sposób formułowania równań więzów dla pary obrotowej, postępowej i postępowo-obrotowej. Będą to tylko trzy wybrane przykłady równań więzów. Należy mieć świadomość, że w przypadku bardziej złożonych par kinematycznych może zaistnieć konieczność sformułowania równań więzów innych niż opisane tutaj. Metoda postępowania pozostanie jednak niezmienniona.

### Para obrotowa

Równanie więzów opisujące parę obrotową klasy V, pokazaną na rys. 2.2, wyraża fakt, że punkt  $A$ , związany z członem  $i$ , pokrywa się z punktem  $B$ , związanym z członem  $j$  (oba punkty mają jednakowe współrzędne w układzie globalnym) we wszystkich konfiguracjach mechanizmu.



Rysunek 2.2. Para obrotowa V klasy

Wektorowe równanie więzów ma następującą postać:

$$\Phi^{K\bullet} \equiv \mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} - (\mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)}) = \mathbf{0} . \quad (2.18)$$

Wyrażenie  $\mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)}$  opisuje położenie punktu  $A$  w układzie globalnym. Wektor wodzący  $\mathbf{r}_i$  poprowadzony jest od początku układu globalnego  $\pi_0$  do początku układu lokalnego  $\pi_i$ , a wektor  $\mathbf{s}_A^{(i)}$  od początku układu  $\pi_i$  do punktu  $A$ . Macierz rotacji  $\mathbf{R}_i$  służy do transformacji współrzędnych wektora  $\mathbf{s}_A^{(i)}$  do układu globalnego. Indeks  $j$  oznacza te same wielkości ale dla punktu  $B$  i członu  $j$ . Warunek (2.18) oznacza zatem, że położenia punktów  $A$  i  $B$  pokrywają się w każdej chwili. Zatem jedyny ruch względny, jaki mogą wykonywać człony wynika z obrotu wokół osi przechodzącej przez punkt  $A = B$ . Równanie (2.18) jest równoważne dwóm równaniom skalarnym.

### Para postępową

Na rysunku 2.3 pokazano w jednym z rzutów parę postępową, którą tworzą człony  $i$  oraz  $j$ . Jak zawsze z członem  $i$  związany jest lokalny układ odniesienia  $\pi_i$ , a z członem  $j$  – układ  $\pi_j$ . Z członem  $i$  związany jest (stały w układzie  $\pi_i$ ) wektor wodzący  $\mathbf{s}_A^{(i)}$  punktu  $A$ , leżącego na osi  $l$ , równoległej do kierunku ruchu względnego w parze kinematycznej. Z członem  $j$  związany jest wektor wodzący  $\mathbf{s}_B^{(j)}$  punktu  $B$ , leżącego na osi  $l$ , a także wektor  $\mathbf{v}^{(j)}$  prostopadły do osi  $l$  (stałe w układzie  $\pi_j$ ).

Warunek na to, aby człony  $i$  oraz  $j$  tworzyły parę postępową zapiszemy w formie dwóch równań skalarnych. Równanie pierwsze stanowi zapis faktu, że para postępową uniemożliwia względny obrót lokalnych układów odniesienia  $\pi_i$  oraz  $\pi_j$ :

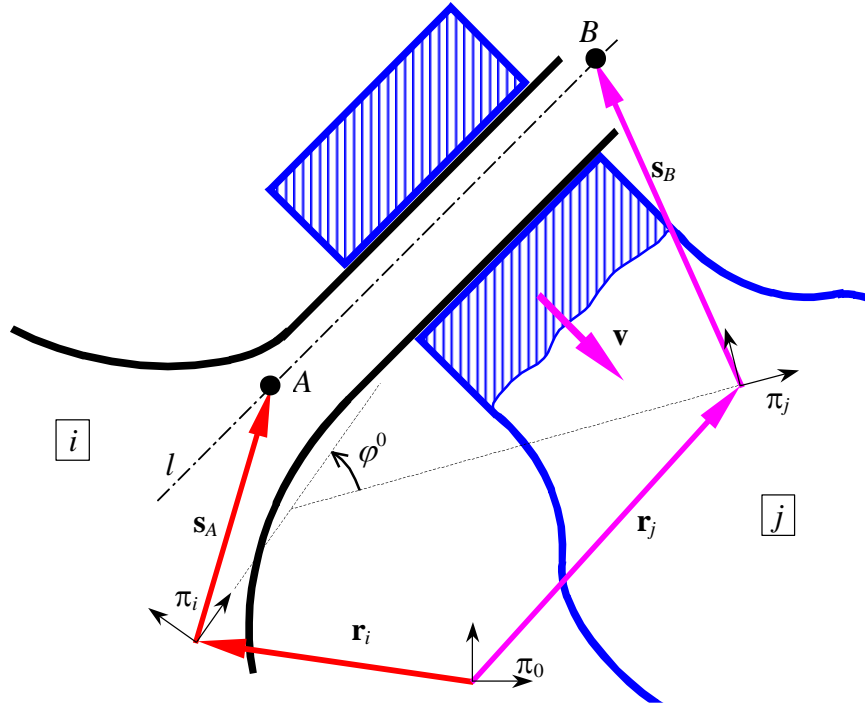
$$\Phi^{K\angle} \equiv \varphi_i - \varphi_j - \varphi^0 = 0 , \quad (2.19)$$

gdzie  $\varphi^0$  oznacza stały kąt względny między układami odniesienia członów, który ma być zachowany w trakcie ruchu członów tworzących parę kinematyczną.

Drugie równanie stanowi zapis warunku, że punkt  $B$  może się poruszać względem punktu  $A$  jedynie wzdłuż osi  $l$ , która stanowi oś przesuwu pary. Jeśli  $\mathbf{v}$  jest dowolnie



wybrany wektorem lokalnym o stałych współrzędnych w układzie  $\pi_j$  i takim, że jest on prostopadły do osi pary  $l$ , to drugie równanie nakłada ograniczenie, że wektor kierunkowy osi  $l$ , o początku w punkcie  $A$  i końcu w punkcie  $B$  musi być stale, niezależnie od konfiguracji mechanizmu, prostopadły do wektora  $\mathbf{v}$ .



Rysunek 2.3. Para postępową V klasy

Warunek prostopadłości wektorów  $\mathbf{d}$ , poprowadzonego od punktu  $A$  do  $B$  oraz wektora  $\mathbf{v}$  można zapisać w postaci:

$$\Phi^{K\uparrow} \equiv \mathbf{d}^T \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}^T \mathbf{d} = 0, \quad (2.20)$$

gdzie wektor  $\mathbf{d}$  można obliczyć w następujący sposób:

$$\mathbf{d} \equiv \mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} - (\mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)}). \quad (2.21)$$

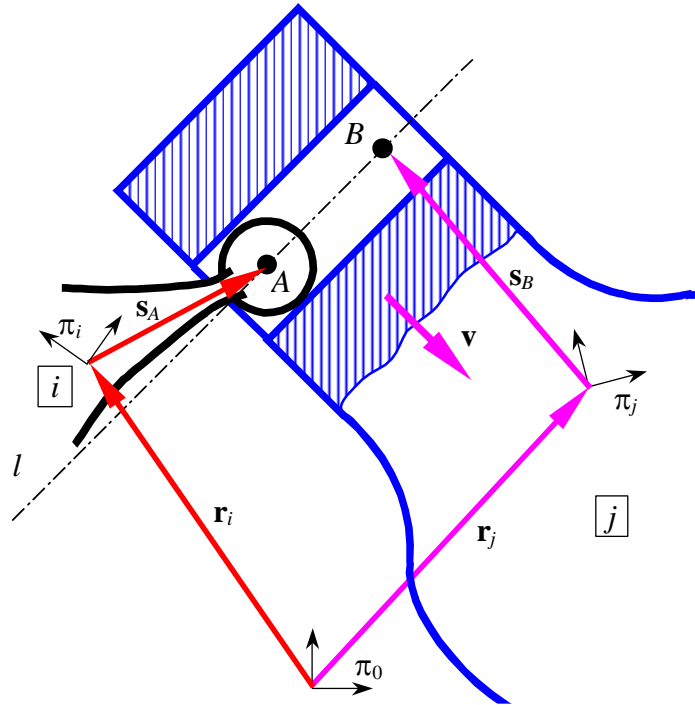
Podstawiając (2.21) do (2.20), otrzymuje się następujące równanie więzów:

$$\begin{aligned} \Phi^{K\uparrow} &\equiv (\mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} - \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)})^T \mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)} \equiv (\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T (\mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} - \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)}) \equiv \\ &\equiv (\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)}) + (\mathbf{v}^{(j)})^T \mathbf{s}_B^{(j)} = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Parę postępową można zatem matematycznie opisać poprzez dwa skalarne równania więzów (2.19) i (2.22).

### Para postępowo-obrotowa

W podobny sposób można postąpić, zapisując równania więzów krępujących ruch członów tworzących parę postępowo-obrotową IV klasy, pokazaną na rys. 2.4 (przypominamy, że para IV klasy ma 2 lokalne stopnie swobody). Z członami tworzącymi parę kinematyczną zwiążmy punkty i wektory w taki sposób, jak uczyniliśmy to w przypadku pary postępowej, z tą jedynie różnicą, że punkt  $A$  należy umieścić na osi obrotu członu  $i$  względem  $j$  (w wypadku pary postępowej położenie punktu  $A$  można było wybrać dowolnie), a oś  $l$  należyć związać z członem  $j$ .



Rysunek 2.4. Para postępowo-obrotowa IV klasy

Można zauważyć, że równanie więzów opisujące parę postępowo-obrotową ma postać identyczną z równaniem (2.22). Warunek ten oznacza bowiem, że wektor  $\mathbf{d}$  musi pozostawać prostopadły do wektora  $\mathbf{v}$  w każdej konfiguracji mechanizmu. Zatem punkt  $A$  może przemieszczać się wzdłuż prostej  $l$ , co odpowiada ruchowi postępowemu w parze kinematycznej. W wypadku pary postępowo-obrotowej nie obowiązuje warunek (2.19), dzięki czemu możliwy jest obrót członu  $i$  względem  $j$  wokół punktu  $A$ .

Analiza równań więzów (2.18) ÷ (2.22) dla trzech typów par kinematycznych prowadzi do ważnego wniosku. Otóż, jeśli mechanizm składa się z  $n$  członów, których położenia opisane są wektorem współrzędnych uogólnionych (2.10), to równania więzów opisujące ograniczenia nakładane na człony przez pary obrotowe albo posuwiste zależą w sposób jawny jedynie od współrzędnych uogólnionych członów tworzących te pary kinematyczne. Przykładowo równanie (2.18) opisuje zależność tylko pomiędzy współrzędnymi  $\mathbf{q}_i$  oraz  $\mathbf{q}_j$ . Pozostałe współrzędne wektora  $\mathbf{q}$  nie występują jawnie w równaniu (2.18). Podobnie równania pary postępowej nakładają ograniczenia tylko na współrzędne uogólnione  $\mathbf{q}_i$  oraz  $\mathbf{q}_j$ . Można sformułować wniosek ogólniejszy – jeśli parę kinematyczną tworzą tylko dwa człony:  $i$  oraz  $j$ , to – bez względu na szczegółową postać więzów – ich równania nakładają ograniczenia jedynie na współrzędne uogólnione  $\mathbf{q}_i$  oraz  $\mathbf{q}_j$ .

### ***Zapis ogólny równań więzów opisujących pary kinematyczne***

Równania więzów możemy zapisać w sposób pokazany powyżej dla wszystkich par kinematycznych występujących w mechanizmie. Więzy pochodzące od par kinematycznych będziemy nazywać w skrócie więzami kinematycznymi i oznaczać literą „ $K$ ” (zob. przypis na str. 35). Równania więzów kinematycznych dla wszystkich par występujących w układzie członów możemy zapisać w ogólnej formie:

$$\Phi^K(\mathbf{q}) = \mathbf{0} . \quad (2.23)$$

Równanie (2.23) to powtórzenie napisanego już na samym wstępie równania (2.1), tym razem jednak wiemy już dokładnie, czym są współrzędne absolutne i jaka jest szczegółowa postać równań więzów dla omawianych wcześniej par kinematycznych.

### PRZYKŁAD 2.3

#### Zadanie

Dla mechanizmu z przykładu 2.1 należy napisać równania więzów kinematycznych. Należy też sprawdzić, czy wektor współrzędnych  $\mathbf{q}^*$  spełnia równania więzów.

Dane:  $a = 1$  (m),  $b = 5$  (m),  $c = 4$  (m),  $\mathbf{q}^* = [0 \ 0 \ \pi \ -1 \ 0 \ \arctg(4/3) \ 2 \ 4 \ 0]^T$ . Współrzędne liniowe odmierzane są w metrach, a kątowe w radianach.

#### Rozwiązanie

Przystępując do rozwiązywania zadania skorzystamy z wyników uzyskanych w przykładzie 2.1, w którym ponumerowaliśmy człony oraz wprowadziliśmy globalny i lokalne układy odniesienia (zob. rysunek w przykładzie 2.1), a także zapisaliśmy wektor współrzędnych absolutnych (równania (a) w przykładzie 2.1).

Człony 0 (podstawa) i 1 (korba) tworzą parę obrotową. Parę obrotową tworzą także człony 1 i 2 (korbowód) oraz 2 i 3 (wodzik). Równania więzów opisujących parę obrotową dane są wzorem (2.18). We wzorze tym występują stałe wielkości  $\mathbf{s}_A^{(i)}$  i  $\mathbf{s}_B^{(j)}$ . Ich wartości, podane w poniższej tabeli, wynikają z danych postawionego zadania oraz z przyjętego rozmieszczenia układów odniesienia.

$i$	$j$	$\mathbf{s}_A^{(i)}$	$\mathbf{s}_B^{(j)}$
0	1	$[0, 0]^T$	$[0, 0]^T$
1	2	$[a, 0]^T$	$[0, 0]^T$
2	3	$[b, 0]^T$	$[0, 0]^T$

Człony 3 i 0 tworzą parę postępową. Równania więzów opisujących parę postępową dane są wzorami (2.19) i (2.22). We wzorach tych występują stałe wielkości  $\varphi^0$ ,  $\mathbf{v}^{(j)}$ ,  $\mathbf{s}_A^{(i)}$  i  $\mathbf{s}_B^{(j)}$ . Wartości parametrów opisujących parę postępową, podane w poniższej tabeli, wynikają z danych postawionego zadania oraz z przyjętego rozmieszczenia układów odniesienia. Punkty A i B można przyjąć dowolnie (na osi ruchu względnego).

$i$	$j$	$\varphi^0$	$\mathbf{v}^{(j)}$	$\mathbf{s}_A^{(i)}$	$\mathbf{s}_B^{(j)}$
3	0	0	$[0, 1]^T$	$[0, 0]^T$	$[0, c]^T$

Więzy kinematyczne, nałożone na człony układu przez pierwszą parę obrotową, można zapisać w postaci (należy pamiętać, że  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$  oraz  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{I}_{2 \times 2}$ ):

$$\Phi_1^{K*}(\mathbf{q}) \equiv \mathbf{s}_A^{(0)} - (\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_B^{(1)}) = \mathbf{0}_{2 \times 1}. \quad (\text{a})$$

Więzy krepujące układ członów i pochodzące od drugiej pary obrotowej (między członami 1 i 2) mają postać:

$$\Phi_2^{K*}(\mathbf{q}) \equiv \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)} - (\mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_B^{(2)}) = \mathbf{0}_{2 \times 1}. \quad (\text{b})$$

Natomiast więzy pochodzące od trzeciej pary obrotowej (między członami 2 i 3) mają formę:

$$\Phi_3^{K*}(\mathbf{q}) \equiv \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_A^{(2)} - (\mathbf{r}_3 + \mathbf{R}_3 \mathbf{s}_B^{(3)}) = \mathbf{0}_{2 \times 1}. \quad (\text{c})$$

Równania więzów odpowiadające parze kinematycznej postępowej między członami 3 i 0 można zapisać w formie następujących równań (należy pamiętać, że  $\varphi_0 = 0$ ):

$$\Phi_4^K(\mathbf{q}) \equiv \begin{bmatrix} \Phi_4^{K\angle} \\ \Phi_4^{K\uparrow} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_3 - \varphi^0 \\ (\mathbf{v}^{(0)})^T (\mathbf{s}_B^{(0)} - \mathbf{r}_3 - \mathbf{R}_3 \mathbf{s}_A^{(3)}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2 \times 1}. \quad (\text{d})$$

Czytelnik zechce zwrócić uwagę, że w równaniach więzów od (a) do (d) występują jedynie współrzędne absolutne członów, które tworzą parę kinematyczną opisywaną przez dane równanie. Współrzędne absolutne innych członów w danym równaniu nie występują. Np. równanie (d) nakłada ograniczenia jedynie na współrzędne uogólnione członu 3, a pozostałe współrzędne w równaniu się nie pojawiają.

Równania więzów kinematycznych, opisujących wszystkie pary kinematyczne mechanizmu, można zapisać w zbiorczej formie:

$$\Phi^K(\mathbf{q}) \equiv \begin{bmatrix} \Phi_1^{K*}(\mathbf{q}) \\ \Phi_2^{K*}(\mathbf{q}) \\ \Phi_3^{K*}(\mathbf{q}) \\ \Phi_4^{K\angle}(\mathbf{q}) \\ \Phi_4^{K\uparrow}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}_{8 \times 1} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{s}_A^{(0)} - (\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_B^{(1)}) \\ \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)} - (\mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_B^{(2)}) \\ \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_A^{(2)} - (\mathbf{r}_3 + \mathbf{R}_3 \mathbf{s}_B^{(3)}) \\ \varphi_3 - \varphi^0 \\ (\mathbf{v}^{(0)})^T (\mathbf{s}_B^{(0)} - \mathbf{r}_3 - \mathbf{R}_3 \mathbf{s}_A^{(3)}) \end{bmatrix}_{8 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{8 \times 1}. \quad (\text{e})$$

Pozostało jeszcze podstawienie danych liczbowych:

$$\Phi_1^{K*}(\mathbf{q}^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (f)$$

$$\Phi_2^{K*}(\mathbf{q}^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (g)$$

$$\Phi_3^{K*}(\mathbf{q}^*) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (h)$$

$$\Phi_4^{K\downarrow}(\mathbf{q}^*) = 0 - 0 = 0, \quad (i)$$

$$\Phi_4^{K\uparrow}(\mathbf{q}^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (j)$$

Jak widać, wektor współrzędnych  $\mathbf{q}^*$  spełnia równania więzów kinematycznych. Warto zauważyć, że konfiguracja opisana przez wektor  $\mathbf{q}^*$  nie odpowiada tej z rysunku w przykładzie 2.1.

## 2.4. Równania więzów kierujących

Więzy przedstawione w p. 0 mają charakter materialny, a opisujące je równania wynikają z faktu, że człony mechanizmu nie mogą poruszać się swobodnie, gdyż tworzą pary kinematyczne. Więzy takie nazwano więzami kinematycznymi. Więzy kierujące stanowią matematyczny zapis warunków, jakie nakładamy na ruch układu członów definiując zadanie kinematyki. Na ogół mają one charakter niematerialny. Przyjmijmy bardzo istotne założenie, że więzy te zawsze można sprowadzić do więzów nakładanych tylko na położenie i orientację. Nie będziemy rozpatrywać więzów, które nakładają ograniczenia na prędkości lub przyspieszenia, gdy nie można ich sprowadzić do więzów na położenia lub orientacje. Założenie to można wyrazić precyzyjnie: definicja ruchu mechanizmu będzie ograniczona do równań więzów holonomicznych.

Istnieje wiele możliwości definiowania więzów kierujących. Ograniczymy się tylko do niektórych z nich, spotykanych najczęściej w analizie kinematycznej mechanizmów płaskich. Większość zagadnień można sprowadzić do następujących rodzajów więzów kierujących:

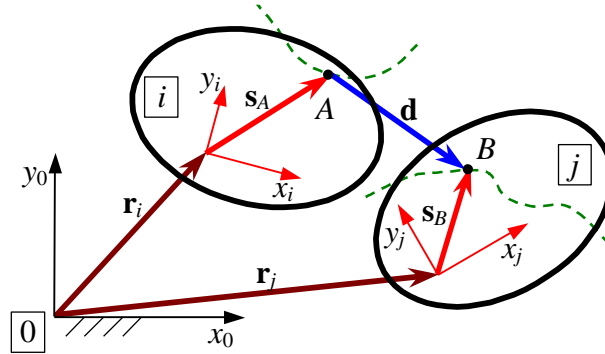
- Wektor między punktami  $A$  i  $B$  należącymi do dwóch różnych członów jest zadany jako funkcja czasu  $\mathbf{f}_{AB}(t)$ .
- Orientacja członu  $i$  względem członu  $j$  (kąt obrotu układu  $\pi_i$  względem  $\pi_j$ ) jest zadana jako funkcja czasu  $\theta_{i,j}(t)$ .
- Ruchy względne w niektórych parach kinematycznych są zadane jako funkcje czasu.

W zadaniach praktycznych często spotyka się wszystkie wymienione powyżej rodzaje więzów jednocześnie. Zdarzają się też nieco inne warianty powyższych więzów, np. gdy ruch względny punktów  $A$  i  $B$  jest zadany w jednym z układów lokalnych, a nie w układzie globalnym. Nierzadko także funkcje  $\mathbf{f}_{AB}$  i  $\theta_{i,j}$  zależą nie tylko od czasu, lecz także od współrzędnych absolutnych.

Zaprezentowaną dalej metodę postępowania z wybranymi, przykładowymi więzami kierującymi można stosować do dowolnych holonomicznych więzów kierujących.

### Przemieszczenie względne dwóch punktów

Więzy kierujące tego typu definiujemy, formułując wymaganie, aby współrzędne wektora  $\mathbf{d}$  między punktem  $A$  członu  $i$  oraz punktem  $B$  członu  $j$  były równe wektorowej funkcji czasu  $\mathbf{f}_{AB}(t)$ .



Rysunek 2.5. Ruch względny punktów na płaszczyźnie

Kiedy wektor  $\mathbf{d}$  zadany jest w globalnym układzie odniesienia, więzy kierujące mają postać:

$$\Phi^{D^*} \equiv \mathbf{d} - \mathbf{f}_{AB}(t) \equiv \mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} - (\mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)}) - \mathbf{f}_{AB}(t) = \mathbf{0}. \quad (2.24)$$

Równanie wektorowe (2.24) jest równoważne dwóm równaniom skalarnym.

Jeśli współrzędne wektora  $\mathbf{d}$  określone są względem układu odniesienia związanego z członem  $i$ , to równanie więzów kierujących ma następującą postać, którą otrzymujemy po wykonaniu prostych działań na macierzach rotacji (zmieniamy oznaczenie więzów, dla odróżnienia od poprzedniego przypadku):

$$\Phi^{D^o} \equiv \mathbf{d}^{(i)} - \mathbf{f}_{AB}(t) \equiv \mathbf{R}_i^T \mathbf{d} - \mathbf{f}_{AB}(t) = \mathbf{R}_i^T (\mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)}) - (\mathbf{R}_i^T \mathbf{r}_i + \mathbf{s}_A^{(i)}) - \mathbf{f}_{AB}(t) = \mathbf{0}. \quad (2.25)$$

Zwróćmy uwagę, że równanie więzów definiujących ruchu punktu  $B$  członu  $j$  po trajektorii zadanej względem globalnego układu odniesienia funkcją  $\mathbf{f}_B(t)$  jest szczególnym przypadkiem równania (2.24):

$$\Phi^{D^*} \equiv \mathbf{r}_B - \mathbf{f}_B(t) \equiv \mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} - \mathbf{f}_B(t) = \mathbf{0}. \quad (2.26)$$

### Orientacja względna dwóch członów

Często stawiamy wymaganie, by orientacja członu  $i$  względem członu  $j$  zmieniała się w sposób opisany przez skalarną funkcję czasu  $\theta_{j,i}(t)$ . Wymaganie takie narzuca ograniczenia na współrzędne  $\varphi_i$  oraz  $\varphi_j$ , określające orientację interesujących nas członów względem układu globalnego. Równania więzów kierujących mają bardzo prostą postać:

$$\Phi^{D^\angle} \equiv \varphi_i - \varphi_j - \theta_{j,i}(t) = 0. \quad (2.27)$$

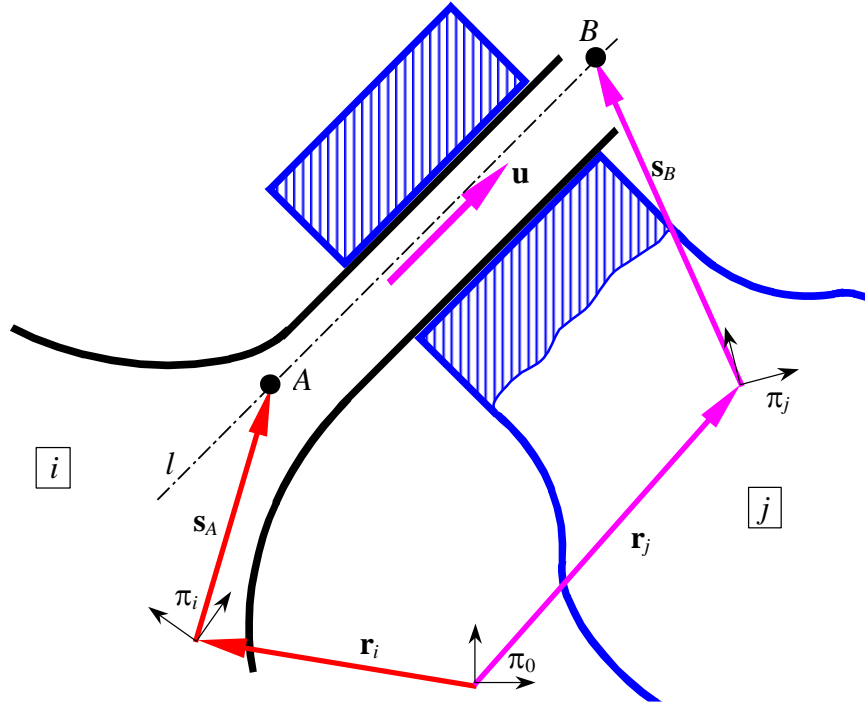
### Obrót względny w parze obrotowej

Gdy mechanizm zawiera obrotowe pary kinematyczne, zadanie kinematyki formułuje się często stawiając wymaganie, by względny kąt obrotu w parze kinematycznej był znaną skalarną funkcją czasu  $\theta(t)$ . Łatwo zauważyć, że zadany ruch względny w parze obrotowej można opisać równaniem więzów kierujących (2.27).

### Przemieszczenie względne w parze postępowej

Więzy tego typu wynikają z narzucenia względnego przesunięcia w postępowej parze kinematycznej. Niech punkty  $A$  i  $B$  leżą na prostej  $l$ , równoległej do osi ruchu względnego, której wersor  $\mathbf{u}$  ma znane i stałe współrzędne w układzie odniesienia członu  $j$ . Warunek, że punkt  $B$  zmienia położenie względem punktu  $A$  wzdłuż osi  $l$  zgodnie z zadaną skalarną funkcją czasu  $f_{AB}(t)$  możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}\Phi^{D\uparrow} &\equiv (\mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} - \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)})^T \mathbf{R}_j \mathbf{u}^{(j)} - f_{AB}(t) \equiv \\ &(\mathbf{R}_j \mathbf{u}^{(j)})^T (\mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} - \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)}) - f_{AB}(t) = 0.\end{aligned}\quad (2.28)$$



Rysunek 2.6. Więzy kierujące w parze postępowej na płaszczyźnie

### Zapis ogólny równań więzów kierujących

Równania więzów kierujących różnego typu, opisujące ruch mechanizmu można zapisać w zbiorczej formie:

$$\Phi^D(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}.\quad (2.29)$$

Więzy kierujące powinny jednoznacznie opisywać ruch mechanizmu, zatem liczba równań (2.29) musi być równa liczbie stopni swobody mechanizmu. Jeśli liczba niezależnych więzów kierujących jest mniejsza od ruchliwości (rzeczywistej) mechanizmu, to jego ruch nie jest jednoznacznie określony przez nałożone więzy. W takiej sytuacji wyznaczenie ruchu mechanizmu wymaga rozwiązania zadania dynamiki (będzie o nim mowa nieco później).

### PRZYKŁAD 2.4

#### Zadanie

Dla mechanizmu z przykładu 2.1 należy napisać równania więzów kierujących, przyjmując, że kąt obrotu korby  $\varphi_1$  jest opisany zależnością:  $\varphi_1 = \theta(t) \equiv t^2 + \pi/2$  (rad).

Zadając kąt obrotu względnego w parze kinematycznej formułujemy więzy kierujące w postaci (2.27):

$$\Phi^{D\angle}(\mathbf{q}, t) \equiv \varphi_1 - \theta(t) = \varphi_1 - t^2 - \frac{\pi}{2} = 0_{1 \times 1}. \quad (a)$$

## 2.5. Macierz Jacobiego i inne macierze pochodnych cząstkowych

Rozwiązanie zadań kinematyki o położeniach, prędkościach i przyspieszeniach zdefiniowanych wstępnie w punkcie 2.1 wymaga wyznaczenia elementów macierzy Jacobiego oraz pochodnych równań więzów do drugiej pochodnej włącznie. Wzory określające te pochodne mają, w porównaniu z analizą kinematyczną mechanizmów we współrzędnych złączowych, szczególnie prostą formę. Wynika to z dwóch faktów:

- Współrzędne absolutne członu określają jego położenie i orientację względem układu globalnego w sposób niezależny od współrzędnych innych członów.
- Równania więzów dla wybranej pary kinematycznej krępują tylko współrzędne członów tworzących tę parę kinematyczną.

Obliczymy najpierw pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu równań więzów kinematycznych opisujących kolejno pary obrotowe, postępowe i postępowo-obrotowe, a następnie wyprowadzimy wzory dla pochodnych więzów kierujących. W obliczeniach pomocne będą wzory (1.8) i (1.19). Wobec poczynionej wyżej uwagi, wyznaczone pochodne będą zawierały tylko człony wynikające z różniczkowania względem wektorów  $\mathbf{q}_i$  oraz  $\mathbf{q}_j$ . Ponadto z faktu, że więzy kinematyczne nie zależą jawnie od czasu wynika, iż ich pochodne cząstkowe względem czasu są we wszystkich wypadkach równe zeru:

$$\Phi_t^K = \mathbf{0}, \quad \Phi_{q_i}^K = \Phi_{q_j}^K = \mathbf{0}, \quad \Phi_{tt}^K = \mathbf{0}. \quad (2.30)$$

### Więzy dla pary obrotowej

Pochodne cząstkowe więzów  $\Phi^{K\bullet}$ , opisanych równaniem (2.18), względem współrzędnych  $\mathbf{q}_i = [\mathbf{r}_i^T \ \varphi_i]^T$  oraz  $\mathbf{q}_j = [\mathbf{r}_j^T \ \varphi_j]^T$ , można zapisać macierzowo w sposób następujący:

$$\Phi_{\mathbf{r}_i}^{K\bullet} = \mathbf{I}_{2 \times 2}, \quad (2.31)$$

$$\Phi_{\varphi_i}^{K\bullet} = \Omega \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)}, \quad (2.32)$$

$$\Phi_{\mathbf{r}_j}^{K\bullet} = -\mathbf{I}_{2 \times 2}, \quad (2.33)$$

$$\Phi_{\varphi_j}^{K\bullet} = -\Omega \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)}. \quad (2.34)$$

Równania (2.31) do (2.34) stanowią potencjalnie niezerowe<sup>1</sup> wyrazy macierzy Jacobiego, odpowiadające więzom opisującym obrotową parę kinematyczną. Pozostałe wyrazy macierzy Jacobiego, odpowiadające pochodnym tych więzów względem innych współrzędnych uogólnionych są, zgodnie z wcześniejszymi uwagami, równe zeru.

<sup>1</sup> Wyrazy te określamy jako *potencjalnie niezerowe*, ponieważ w szczególnych wypadkach, np. dla  $\mathbf{s}_A^{(i)} = \mathbf{0}$ , niektóre z tych wyrazów mogą się zerować.

W obliczeniach iloczynów typu  $\Phi_q^{K\bullet}\dot{\mathbf{q}}$  dla więzów opisujących analizowaną parę kinematyczną, utworzoną przez człony  $i$  oraz  $j$ , niezerowe są jedynie składniki zawierające  $\dot{\mathbf{q}}_i$  oraz  $\dot{\mathbf{q}}_j$ , gdyż pozostałe pochodne współrzędnych mnożone są przez zerowe fragmenty macierzy Jacobiego. Iloczyn ten, po uwzględnieniu wzorów (2.31) do (2.34), ma postać:

$$\begin{aligned}\Phi_q^{K\bullet}\dot{\mathbf{q}} &= \Phi_{q_i}^{K\bullet}\dot{\mathbf{q}}_i + \Phi_{q_j}^{K\bullet}\dot{\mathbf{q}}_j = \Phi_{r_i}^{K\bullet}\dot{\mathbf{r}}_i + \Phi_{\phi_i}^{K\bullet}\dot{\phi}_i + \Phi_{r_j}^{K\bullet}\dot{\mathbf{r}}_j + \Phi_{\phi_j}^{K\bullet}\dot{\phi}_j = \\ &= \dot{\mathbf{r}}_i + \Omega\mathbf{R}_i\mathbf{s}_A^{(i)}\dot{\phi}_i - \dot{\mathbf{r}}_j - \Omega\mathbf{R}_j\mathbf{s}_B^{(j)}\dot{\phi}_j.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Różniczkując powyższe równanie, otrzymujemy:

$$\left(\Phi_q^{K\bullet}\dot{\mathbf{q}}\right)_{r_i} = \mathbf{0}_{2 \times 2}, \quad (2.36)$$

$$\left(\Phi_q^{K\bullet}\dot{\mathbf{q}}\right)_{\phi_i} = \Omega\mathbf{R}_i\mathbf{s}_A^{(i)}\dot{\phi}_i, \quad (2.37)$$

$$\left(\Phi_q^{K\bullet}\dot{\mathbf{q}}\right)_{r_j} = \mathbf{0}_{2 \times 2}, \quad (2.38)$$

$$\left(\Phi_q^{K\bullet}\dot{\mathbf{q}}\right)_{\phi_j} = -\Omega\mathbf{R}_j\mathbf{s}_B^{(j)}\dot{\phi}_j. \quad (2.39)$$

Korzystając z powyższych związków oraz z faktu, że pochodne cząstkowe względem pozostałych współrzędnych są zerowe, obliczymy wektor  $\Gamma^{K\bullet}$  (por. wzór (2.8)):

$$\begin{aligned}\Gamma_{2 \times 1}^{K\bullet} &= -\left(\Phi_q^{K\bullet}\dot{\mathbf{q}}\right)_q \dot{\mathbf{q}} = -\left(\Phi_q^{K\bullet}\dot{\mathbf{q}}\right)_{r_i} \dot{\mathbf{r}}_i - \left(\Phi_q^{K\bullet}\dot{\mathbf{q}}\right)_{\phi_i} \dot{\phi}_i - \left(\Phi_q^{K\bullet}\dot{\mathbf{q}}\right)_{r_j} \dot{\mathbf{r}}_j - \left(\Phi_q^{K\bullet}\dot{\mathbf{q}}\right)_{\phi_j} \dot{\phi}_j = \\ &= -\Omega\mathbf{R}_i\mathbf{s}_A^{(i)}\dot{\phi}_i^2 + \Omega\mathbf{R}_j\mathbf{s}_B^{(j)}\dot{\phi}_j^2.\end{aligned}\quad (2.40)$$

Podczas porządkowania wzorów przydatne będą następujące zależności:

$$\Omega\Omega = -\mathbf{I}_{2 \times 2}, \quad \Omega^T\Omega = \Omega\Omega^T = \mathbf{I}_{2 \times 2}, \quad \Omega^T = -\Omega. \quad (2.41)$$

Po uwzględnieniu pierwszej z powyższych tożsamości w równaniu (2.40), otrzymujemy:

$$\Gamma_{2 \times 1}^{K\bullet} = \mathbf{R}_i\mathbf{s}_A^{(i)}\dot{\phi}_i^2 - \mathbf{R}_j\mathbf{s}_B^{(j)}\dot{\phi}_j^2. \quad (2.42)$$

### Więzy dla pary postępowej i postępowo-obrotowej

Potencjalnie niezerowe elementy macierzy Jacobiego dla więzów  $\Phi^{K\angle}$ , opisanych równaniem (2.19) mają szczególnie prostą postać<sup>1</sup>:

$$\Phi_{r_i}^{K\angle} = \mathbf{0}_{1 \times 2}, \quad (2.43)$$

$$\Phi_{\phi_i}^{K\angle} = 1, \quad (2.44)$$

$$\Phi_{r_j}^{K\angle} = \mathbf{0}_{1 \times 2}, \quad (2.45)$$

$$\Phi_{\phi_j}^{K\angle} = -1. \quad (2.46)$$

Zwróćmy uwagę, że pochodne względem pozostałych współrzędnych są równe zero.

W obliczeniach iloczynów typu  $\Phi_q^{K\angle}\dot{\mathbf{q}}$  niezerowe są, podobnie jak i poprzednio, jedynie składniki zawierające  $\dot{\mathbf{q}}_i$  oraz  $\dot{\mathbf{q}}_j$ :

$$\Phi_q^{K\angle}\dot{\mathbf{q}} = \Phi_{q_i}^{K\angle}\dot{\mathbf{q}}_i + \Phi_{q_j}^{K\angle}\dot{\mathbf{q}}_j = \Phi_{r_i}^{K\angle}\dot{\mathbf{r}}_i + \Phi_{\phi_i}^{K\angle}\dot{\phi}_i + \Phi_{r_j}^{K\angle}\dot{\mathbf{r}}_j + \Phi_{\phi_j}^{K\angle}\dot{\phi}_j = \dot{\phi}_i - \dot{\phi}_j. \quad (2.47)$$

<sup>1</sup> Jak widać, pochodne względem  $\mathbf{r}_i$  i  $\mathbf{r}_j$  są zawsze zerowe; podano je wśród elementów „potencjalnie niezerowych” dla uniknięcia niejasności.



Jak widać, powyższe równanie nie zależy od współrzędnych układu wieloczołowego (jest jedynie funkcją ich pochodnych względem czasu), zatem jego pochodne cząstkowe względem tych współrzędnych są zerowe. Wynika stąd, że wektor<sup>1</sup>  $\Gamma_{\text{lxl}}^{\perp}$  jest zerowy:

$$\Gamma_{\text{lxl}}^{K\perp} = 0. \quad (2.48)$$

Różniczkowanie więzów  $\Phi^{K\uparrow}$ , danych wzorem (2.22), jest dość pracochłonne. Wyrazy macierzy Jacobiego można wyznaczyć ze wzorów:

$$\Phi_{\mathbf{r}_i}^{K\uparrow} = -(\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T, \quad (2.49)$$

$$\Phi_{\varphi_i}^{K\uparrow} = -(\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T \Omega \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)}, \quad (2.50)$$

$$\Phi_{\mathbf{r}_j}^{K\uparrow} = (\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T, \quad (2.51)$$

$$\Phi_{\varphi_j}^{K\uparrow} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)})^T \Omega \mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)} = -(\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T \Omega (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)}). \quad (2.52)$$

W powyższych równaniach wykorzystano znane reguły różniczkowania macierzy rotacji oraz wzór (2.40) na różniczkowanie iloczynu skalarnego.

Wyznaczając  $\Gamma^{K\uparrow}$  wykonamy dużo skomplikowanych rachunków, ostatecznie jednak uzyskamy stosunkowo prosty wzór. Obliczając iloczyn  $\Phi_q^{K\uparrow} \dot{\mathbf{q}}$  uwzględniamy tylko niezerowe pochodne:

$$\begin{aligned} \Phi_q^{K\uparrow} \dot{\mathbf{q}} &= \Phi_{\mathbf{q}_i}^{K\uparrow} \dot{\mathbf{q}}_i + \Phi_{\mathbf{q}_j}^{K\uparrow} \dot{\mathbf{q}}_j = \Phi_{\mathbf{r}_i}^{K\uparrow} \dot{\mathbf{r}}_i + \Phi_{\varphi_i}^{K\uparrow} \dot{\varphi}_i + \Phi_{\mathbf{r}_j}^{K\uparrow} \dot{\mathbf{r}}_j + \Phi_{\varphi_j}^{K\uparrow} \dot{\varphi}_j = \\ &= -(\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T \dot{\mathbf{r}}_i - (\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T \Omega \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} \dot{\varphi}_i + (\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T \dot{\mathbf{r}}_j - (\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T \Omega (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)}) \dot{\varphi}_j. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Wykonując żmudne rachunki, można wyznaczyć pochodne powyższego iloczynu konieczne w obliczeniach wyrażenia  $\Gamma^{K\uparrow}$ :

$$(\Phi_q^{K\uparrow} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{r}_i} = (\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T \Omega \dot{\varphi}_j, \quad (2.54)$$

$$(\Phi_q^{K\uparrow} \dot{\mathbf{q}})_{\varphi_i} = -(\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T \Omega \Omega \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} \dot{\varphi}_i + (\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T \Omega \Omega \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} \dot{\varphi}_j = (\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} (\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_j), \quad (2.55)$$

$$(\Phi_q^{K\uparrow} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{r}_j} = -(\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T \Omega \dot{\varphi}_j, \quad (2.56)$$

$$(\Phi_q^{K\uparrow} \dot{\mathbf{q}})_{\varphi_j} = (-\dot{\mathbf{r}}_i - \Omega \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} \dot{\varphi}_i + \dot{\mathbf{r}}_j - \Omega (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)}) \dot{\varphi}_j)^T \Omega \mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)}. \quad (2.57)$$

Wyrażenie  $\Gamma^{K\uparrow}$  można obliczyć teraz ze wzoru:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{lxl}}^{K\uparrow} &= -(\Phi_q^{K\uparrow} \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} = -(\Phi_q^{K\uparrow} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i - (\Phi_q^{K\uparrow} \dot{\mathbf{q}})_{\varphi_i} \dot{\varphi}_i - (\Phi_q^{K\uparrow} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{r}_j} \dot{\mathbf{r}}_j - (\Phi_q^{K\uparrow} \dot{\mathbf{q}})_{\varphi_j} \dot{\varphi}_j = \\ &= -(\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T \Omega \dot{\varphi}_j \dot{\mathbf{r}}_i - (\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} (\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_j) \dot{\varphi}_i + (\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T \Omega \dot{\varphi}_j \dot{\mathbf{r}}_j - \\ &\quad - (-\dot{\mathbf{r}}_i - \Omega \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} \dot{\varphi}_i + \dot{\mathbf{r}}_j - \Omega (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)}) \dot{\varphi}_j)^T \Omega \mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)} \dot{\varphi}_j. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Powyższe równanie można uprościć, wykorzystując zależności (2.41). Ostateczny wzór dla wyrażenia  $\Gamma^{K\uparrow}$ , uzyskany po dokładnym uporządkowaniu równania (2.58), ma zaskakująco prostą postać:

$$\Gamma_{\text{lxl}}^{K\uparrow} = (\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T (2\Omega (\dot{\mathbf{r}}_j - \dot{\mathbf{r}}_i) \dot{\varphi}_j + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \dot{\varphi}_j^2 - \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} (\dot{\varphi}_j - \dot{\varphi}_i)^2). \quad (2.59)$$

<sup>1</sup> W tym przypadku wektor kolumnowy ma tylko jeden wiersz.

Wyprowadzanie powyższych wzorów jest pracochłonne oraz wymaga dużo skupienia i uwagi. Jednakże zależności (2.30) ÷ (2.59) wyprowadza się jednokrotnie, obowiązują one bowiem dla wszystkich par kinematycznych odpowiedniego typu, niezależnie od ich umiejscowienia w łańcuchu kinematycznym.

### **Więzy kierujące dla przemieszczenia względnego punktów**

Obliczenia macierzy pochodnych cząstkowych względem współrzędnych odpowiadających równaniom więzów (2.24) nie wymagają szerszego komentarza. Więzy te mają postać analogiczną do równań (2.18) i wszystkie pochodne oblicza się w ten sam sposób.

Natomiast stwierdzenie dotyczące zerowych pochodnych cząstkowych względem czasu wyrażone wzorem (2.30), w przypadku więzów kierujących nie jest na ogół prawdziwe. Niezerowe wartości pochodnych względem czasu odpowiadające więzom (2.24) wynikają z różniczkowania funkcji  $\mathbf{f}_{AB}(t)$  zależnej od czasu:

$$\Phi_t^{D^*} = -(\mathbf{f}_{AB})_t, \quad \Phi_{tt}^{D^*} = -(\mathbf{f}_{AB})_{tt}, \quad \Phi_{tq}^{D^*} = \Phi_{qt}^{D^*} = \mathbf{0}_{2 \times N}. \quad (2.60)$$

Wynika stąd, że wektor  $\Gamma^{D^*}$  dla więzów (2.24) można otrzymać wykorzystując wzór (2.42) oraz powyższą zależność dla pochodnej  $\Phi_{tt}^{D^*}$ . Uwagi dotyczące obliczeń pochodnych stosują się także, w uproszczonej formie, do równań więzów zapisanych wzorami (2.26).

Osobnego komentarza wymagają obliczenia pochodnych równań więzów kierujących  $\Phi^{D^0}$  w postaci (2.25). Wyrazy macierzy Jacobiego możemy obliczyć ze wzorów:

$$\Phi_{\mathbf{r}_i}^{D^0} = -\mathbf{R}_i^T, \quad (2.61)$$

$$\Phi_{\varphi_i}^{D^0} = \mathbf{R}_i^T \Omega^T (\mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} - \mathbf{r}_i) = -\mathbf{R}_i^T \Omega (\mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} - \mathbf{r}_i), \quad (2.62)$$

$$\Phi_{\mathbf{r}_j}^{D^0} = \mathbf{R}_j^T, \quad (2.63)$$

$$\Phi_{\varphi_j}^{D^0} = \mathbf{R}_i^T \Omega \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)}. \quad (2.64)$$

Licząc iloczyn  $\Phi_q^{D^0} \dot{\mathbf{q}}$ , uwzględniamy tylko niezerowe bloki macierzy Jacobiego:

$$\begin{aligned} \Phi_q^{D^0} \dot{\mathbf{q}} &= \Phi_{\mathbf{q}_i}^{D^0} \dot{\mathbf{q}}_i + \Phi_{\mathbf{q}_j}^{D^0} \dot{\mathbf{q}}_j = \Phi_{\mathbf{r}_i}^{D^0} \dot{\mathbf{r}}_i + \Phi_{\varphi_i}^{D^0} \dot{\varphi}_i + \Phi_{\mathbf{r}_j}^{D^0} \dot{\mathbf{r}}_j + \Phi_{\varphi_j}^{D^0} \dot{\varphi}_j = \\ &= -\mathbf{R}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{R}_i^T \Omega (\mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} - \mathbf{r}_i) \dot{\varphi}_i + \mathbf{R}_i^T \dot{\mathbf{r}}_j + \mathbf{R}_i^T \Omega \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} \dot{\varphi}_j = \\ &= \mathbf{R}_i^T (\dot{\mathbf{r}}_j - \dot{\mathbf{r}}_i + \Omega \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} (\dot{\varphi}_j - \dot{\varphi}_i) - \Omega (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \dot{\varphi}_i). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Pochodne tego iloczynu konieczne w obliczeniach wyrażenia  $\Gamma^{D^0}$  można wyznaczyć ze wzorów:

$$(\Phi_q^{D^0} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{r}_i} = \mathbf{R}_i^T \Omega \dot{\varphi}_i, \quad (2.66)$$

$$(\Phi_q^{D^0} \dot{\mathbf{q}})_{\varphi_i} = -\mathbf{R}_i^T \Omega (\dot{\mathbf{r}}_j - \dot{\mathbf{r}}_i + \Omega \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} (\dot{\varphi}_j - \dot{\varphi}_i) - \Omega (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \dot{\varphi}_i), \quad (2.67)$$

$$(\Phi_q^{D^0} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{r}_j} = -\mathbf{R}_i^T \Omega \dot{\varphi}_i, \quad (2.68)$$

$$(\Phi_q^{D^0} \dot{\mathbf{q}})_{\varphi_j} = \mathbf{R}_i^T \Omega \Omega \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} (\dot{\varphi}_j - \dot{\varphi}_i) = -\mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} (\dot{\varphi}_j - \dot{\varphi}_i). \quad (2.69)$$

Obliczając wektor  $\Gamma^{D^0}$ , odpowiadający równaniu (2.25), uwzględniamy tylko niezerowe fragmenty iloczynu  $(\Phi_q^{D^0} \dot{q})_q \dot{q}$  oraz wzory (2.60), otrzymując:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2 \times 1}^{D^0} = -(\Phi_q^{D^0} \dot{q})_q \dot{q} + (f_{AB})_H = -(\Phi_q^{D^0} \dot{q})_{r_i} \dot{r}_i - (\Phi_q^{D^0} \dot{q})_{\phi_i} \dot{\phi}_i - (\Phi_q^{D^0} \dot{q})_{r_j} \dot{r}_j - (\Phi_q^{D^0} \dot{q})_{\phi_j} \dot{\phi}_j + (f_{AB})_H = \\ = -\mathbf{R}_i^T \Omega \dot{\phi}_i \dot{r}_i + \mathbf{R}_i^T \Omega (\dot{r}_j - \dot{r}_i + \Omega \mathbf{R}_j s_B^{(j)} (\dot{\phi}_j - \dot{\phi}_i) - \Omega (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \dot{\phi}_i) \dot{\phi}_i + \\ + \mathbf{R}_i^T \Omega \dot{\phi}_i \dot{r}_j + \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_j s_B^{(j)} (\dot{\phi}_j - \dot{\phi}_i) \dot{\phi}_j + (f_{AB})_H. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Powyższy wzór można uprościć, uwzględniając zależności (2.41), otrzymując po uporządkowaniu:

$$\Gamma_{2 \times 1}^{D^0} = \mathbf{R}_i^T (2\Omega (\dot{r}_j - \dot{r}_i) \dot{\phi}_i + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \dot{\phi}_i^2 + \mathbf{R}_j s_B^{(j)} (\dot{\phi}_j - \dot{\phi}_i)^2) + (f_{AB})_H. \quad (2.71)$$

### Więzy kierujące dla pary postępowej

Pochodne równań więzów kierujących  $\Phi^{D^\uparrow}$  (2.28), określających przemieszczenie względne w postępowej parze kinematycznej, oblicza się według wzorów wyprowadzonych już dla więzów postaci  $\Phi^{K^\uparrow}$  (2.22). Można bowiem zauważyć, że więzy te mają identyczną postać, jeśli pominąć funkcję czasu  $f_{AB}(t)$  i zauważyć, że wersor  $\mathbf{v}$  zastąpiono wersorem  $\mathbf{u}$ . Wynika stąd, że do obliczenia pochodnych omawianych więzów można wykorzystać wzory (2.49) ÷ (2.52), a także zależność (2.59), uzupełniając tę ostatnią o pochodne cząstkowe funkcji  $f_{AB}(t)$  względem czasu (równania analogiczne do (2.60), tym razem jednak dotyczące funkcji skalarnej, a nie wektorowej).

### Więzy kierujące dla pary obrotowej

Równania więzów kierujących  $\Phi^{D^\angle}$  (2.27), opisujących ruch względny w parze obrotowej, mają formę identyczną z więzami kinematycznymi  $\Phi^{K^\angle}$  dla pary postępowej (2.19). Jedyna różnica polega na tym, że tym razem zadana różnica orientacji jest wielkością zmienną w czasie. Wynika stąd, że dla obliczenia pochodnych można zastosować wyprowadzone wcześniej wzory (2.43) ÷ (2.46), a także zależność (2.48) uzupełnioną o wyrażenia zawierające pochodne funkcji  $\theta$  względem czasu, czyli  $\theta_{iq} \dot{q}$  i  $\theta_{tt}$ , liczone według wzorów analogicznych do (2.60).

### Macierze pochodnych więzów kinematycznych i kierujących

Na podstawie wyprowadzonych zależności, dla zbiorczych równań więzów kinematycznych  $\Phi^K$  i kierujących  $\Phi^D$ , określonych wzorami (2.23) i (2.29), można zestawić wyrażenia opisujące elementy macierzy Jacobiego  $\Phi_q^K$  i  $\Phi_q^D$  oraz wektorów  $\Gamma^K$  i  $\Gamma^D$ .

---

#### PRZYKŁAD 2.5

##### Zadanie

Dla mechanizmu z przykładów 2.1, 2.3 i 2.4 należy zapisać:

1. Układ równań więzów kinematycznych i kierujących,
2. Macierz Jacobiego,
3. Prawe strony układów równań opisujących zadania o prędkościach i przyspieszeniach.

Ponadto, dla współrzędnych  $q^*$ , prędkości  $\dot{q}^*$  i czasu  $t^*$  obliczyć wartości macierzy i wektorów wyznaczonych w punktach 2 i 3.

Dane:  $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pi \\ -1 & 0 & \arctg \frac{4}{3} \end{bmatrix}^T$ ,  $\dot{\mathbf{q}}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2\pi} \\ 0 & -\sqrt{2\pi} & \frac{\sqrt{2\pi}}{3} \\ -\frac{4\sqrt{2\pi}}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ ,  
 $t^* = \sqrt{\pi/2}$ . Współrzędne liniowe są odmierzane w metrach, kątowe w radianach, a czas w sekundach.

Rozwiązanie

Więzy kinematyczne zapisano już w formie równania (e) w przykładzie 2.3, natomiast równanie więzów kierujących opisuje wzór (a) z przykładu 2.4. W rezultacie układ równań więzów (2.72) dla analizowanego mechanizmu ma postać:

$$\Phi(\mathbf{q}, t) \equiv \begin{bmatrix} \Phi_1^{K*}(\mathbf{q}) \\ \Phi_2^{K*}(\mathbf{q}) \\ \Phi_3^{K*}(\mathbf{q}) \\ \Phi_4^{K\angle}(\mathbf{q}) \\ \Phi_4^{K\uparrow}(\mathbf{q}) \\ \Phi^{D\angle}(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix}_{9 \times 1} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{s}_A^{(0)} - (\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_B^{(1)}) \\ \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)} - (\mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_B^{(2)}) \\ \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_A^{(2)} - (\mathbf{r}_3 + \mathbf{R}_3 \mathbf{s}_B^{(3)}) \\ \varphi_3 - \varphi^0 \\ (\mathbf{v}^{(0)})^T (\mathbf{s}_B^{(0)} - \mathbf{r}_3 - \mathbf{R}_3 \mathbf{s}_A^{(3)}) \\ \varphi_1 - t^2 - \pi/2 \end{bmatrix}_{9 \times 1} = \mathbf{0}_{9 \times 1}. \quad (a)$$

Ogólne wzory na niezerowe elementy macierzy Jacobiego dla podanych więzów podano w rozdziale 2.5. W przypadku rozpatrywanego mechanizmu macierz ta ma postać:

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) \equiv \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{2 \times 2} & -\Omega \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_B^{(1)} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} & \Omega \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)} & -\mathbf{I}_{2 \times 2} & -\Omega \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_B^{(2)} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{I}_{2 \times 2} & \Omega \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_A^{(2)} & -\mathbf{I}_{2 \times 2} & -\Omega \mathbf{R}_3 \mathbf{s}_B^{(3)} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 & -(\mathbf{v}^{(0)})^T & -(\mathbf{v}^{(0)})^T \Omega \mathbf{R}_3 \mathbf{s}_A^{(3)} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 & \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix}_{9 \times 9} \quad (b)$$

Do rozwiązania zadania o prędkościach konieczna jest znajomość pochodnej cząstkowej równań więzów względem czasu (podczas obliczeń prędkości uogólnionych należy pamiętać o poprzedzeniu poniższego wektora znakiem minus). Niezerowe elementy wektora odpowiadają jedynie więzom kierującym:

$$\Phi_t(\mathbf{q}, t) \equiv \begin{bmatrix} \Phi_t^K \\ \Phi_t^D \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{8 \times 1} \\ -2t \end{bmatrix}_{9 \times 1}. \quad (c)$$

Wzory, pozwalające obliczyć elementy wektora  $\Gamma^K$  podano w p. 2.5. W przypadku rozpatrywanego mechanizmu wektor ten ma postać (uwzględniono, że  $\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{0}$ ,  $\varphi_0 \equiv 0$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_0 \equiv \mathbf{0}$ ,  $\dot{\varphi}_0 \equiv 0$  i  $\mathbf{R}_0 \equiv \mathbf{I}_{2 \times 2}$ ):

$$\Gamma^K \equiv \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_1 \mathbf{s}_B^{(1)} \dot{\varphi}_1^2 \\ \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)} \dot{\varphi}_1^2 - \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_B^{(2)} \dot{\varphi}_2^2 \\ \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_A^{(2)} \dot{\varphi}_2^2 - \mathbf{R}_3 \mathbf{s}_B^{(3)} \dot{\varphi}_3^2 \\ 0 \\ -(\mathbf{v}^{(0)})^T \mathbf{R}_3 \mathbf{s}_A^{(3)} \dot{\varphi}_3^2 \end{bmatrix}_{8 \times 1}. \quad (d)$$

Do obliczenia wektora  $\Gamma^D$  potrzebna jest znajomość macierzy  $(\Phi_q^D \dot{\mathbf{q}})_q$ ,  $\Phi_{\mathbf{q}}^D$  i  $\Phi_{tt}^D$ . Ze wzoru (c) wynika, że:

$$\Phi_{tt}^D \equiv [-2]_{1 \times 1}, \quad (e)$$

$$\Phi_{\mathbf{q}}^D = \mathbf{0}_{1 \times 9}. \quad (f)$$

Ostatni wiersz macierzy Jacobiego  $\Phi_{\mathbf{q}}$ , danej wzorem (b), jest równy  $\Phi_q^D$ , zatem:

$$(\Phi_q^D \dot{\mathbf{q}})_q \equiv ([\mathbf{0}_{1 \times 2} \quad 1 \quad \mathbf{0}_{1 \times 6}] \dot{\mathbf{q}})_q \equiv (\dot{\varphi}_1)_q \equiv \mathbf{0}_{1 \times 9}. \quad (g)$$

Wykorzystując trzy powyższe wzory, otrzymujemy jednoelementowy wektor  $\Gamma^D$ :

$$\Gamma^D \equiv -(\Phi_q^D \dot{\mathbf{q}})_q - 2\Phi_{\mathbf{q}}^D \dot{\mathbf{q}} - \Phi_{tt}^D \equiv -\mathbf{0}_{1 \times 9} \dot{\mathbf{q}} - 2 \cdot \mathbf{0}_{1 \times 9} \dot{\mathbf{q}} + 2 \equiv [2]_{1 \times 1}. \quad (h)$$

Ostatecznie wektor prawych stron w zadaniu o przyspieszeniach ma postać:

$$\Gamma \equiv \begin{bmatrix} \Gamma^K \\ \Gamma^D \end{bmatrix}_{9 \times 1}. \quad (i)$$

Pozostało jeszcze podstawienie danych liczbowych (uwaga: konfiguracja opisana przez współrzędne  $\mathbf{q}^*$  i czas  $t^*$  nie odpowiada tej z rysunku w przykładzie 2.1). Obliczając elementy macierzy Jacobiego skorzystamy z macierzy i wektorów wyznaczonych w przykładzie 2.3, pomijając tutaj szczegóły podstawień:

$$\Phi_q(\mathbf{q}^*) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (j)$$

Obliczenie wektora  $\Phi_t$  jest wyjątkowo łatwe:

$$\Phi_t(\mathbf{q}^*, t^*) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{8 \times 1} \\ -\sqrt{2\pi} \end{bmatrix}. \quad (k)$$

Na zakończenie policzmy elementy wektora  $\Gamma$ :

$$\Gamma(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*, t^*) = \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sqrt{2\pi}^2 \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sqrt{2\pi}^2 - \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{3} \right)^2 \\ \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{3} \right)^2 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} 0^2 \\ 0 \\ -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} 0^2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\pi \\ 0 \\ 2\pi/3 \\ 8\pi/9 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (l)$$

## 2.6. Zadania kinematyki – rozwiązanie

Zadania kinematyki zostały sformułowane już w punkcie 2.1 i zapisane matematycznie w dość ogólnej postaci – wzorów odnoszących się do współrzędnych  $\mathbf{q}$  i nałożonych na nie więzów  $\Phi$ . W kolejnych punktach przedstawiono szczegółowo postać więzów nakładanych na współrzędne absolutne oraz ich pochodne względem czasu. Zmierzając do omówienia algorytmu numerycznego i programu komputerowego do rozwiązywania zadań kinematyki, Przypomnimy tu najważniejsze ustalenia z punktu 2.1, uzupełniając niektóre informacje.

Równania więzów opisujących pary kinematyczne w układzie  $n$  członów można zapisać w ogólnej formie wyrażonej równaniem (2.23). Równania więzów kinematycznych w postaci (2.23) oraz równania więzów kierujących (2.29) stanowią pełny układ równań kinematyki mechanizmu, sformułowany w postaci ogólnej już w punkcie 2.1 (zob. równanie (2.3)), który dla wygody przypominamy poniżej:

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} \Phi^K(\mathbf{q}) \\ \Phi^D(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{w \times 1} \end{bmatrix}_{3n \times 1}. \quad (2.72)$$

Więzy (2.72) – krępujące współrzędne opisujące mechanizm – stanowią układ równań kinematyki, z których można wyznaczyć położenia (konfiguracje) układu dla dowolnej chwili. Wyznaczenie współrzędnych uogólnionych z równań (2.72) jest przedmiotem zadania

o położeniach. Z matematycznego punktu widzenia, równania (2.72) stanowią układ nieliniowych równań algebraicznych.

Wiele spotykanych w technice mechanizmów ma na tyle skomplikowaną strukturę kinematyczną, że nie udaje się znaleźć rozwiązania analitycznego układu (2.72). Zadanie kinematyki o położeniu można natomiast rozwiązać wykorzystując metody numeryczne. Nawet gdy istnieją rozwiązania analityczne, korzysta się często z metod numerycznych, gdyż jest to mniej pracochłonne (szczególnie, gdy ma się do dyspozycji odpowiedni program komputerowy). Wygodnym narzędziem do numerycznego znajdowania rozwiązań układu tego typu jest omówiona wcześniej metoda Newtona–Raphsona.

We wstępie (p. 2.1) pokazano już, że układ równań więzów nakłada także ograniczenia na prędkości i przyspieszenia uogólnione, co prowadzi do sformułowania zadań kinematyki o prędkościach i przyspieszeniach (zob. wzory (2.6) i (2.8) ):

$$\Phi_q \dot{q} = -\Phi_t = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times 1} \\ -\Phi_t^D \end{bmatrix}_{3n \times 1}, \quad (2.73)$$

$$\Phi_q \ddot{q} = \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma^K \\ \Gamma^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\Phi_q^K \dot{q})_q \dot{q} \\ -(\Phi_q^D \dot{q})_q \dot{q} - 2\Phi_{tq}^D \dot{q} - \Phi_{tt}^D \end{bmatrix}_{3n \times 1}. \quad (2.74)$$

W punktach 0 ÷ 2.5, dla wybranych par kinematycznych i więzów kierujących, przedstawiono detalicznie równania więzów oraz szczegółowe rachunki określające te pochodne cząstkowe, których znajomość jest konieczna w rozwiązaniu zadań kinematyki.

Równania (2.73) i (2.74) stanowią układy liniowych równań algebraicznych, odpowiednio względem prędkości  $\dot{q}$  i przyspieszeń  $\ddot{q}$ . Równania te można rozwiązać numerycznie, wykorzystując znane algorytmy, na przykład metodę Gaussa. Rozwiązanie kolejnych zadań kinematyki wymaga rozwiązania zadań wcześniejszych. Na ogół rozwiązanie zadania o prędkościach poprzedzane jest przez rozwiązanie zadania o położeniach, natomiast rozwiązanie zadania o przyspieszeniach wymaga wcześniejszego rozwiązania zadań o prędkościach i o położeniach.

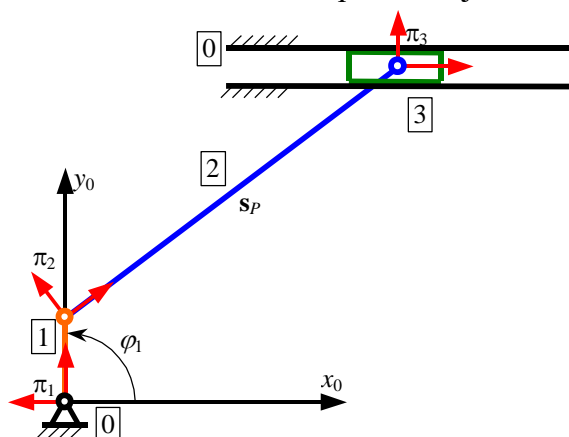
Współrzędne absolutne – ze względu na dużą ich liczbę – słabo nadają się do przeprowadzania obliczeń „na papierze”. Ze względu jednak na prostotę opisu par kinematycznych i na niezależność ich opisu od struktury analizowanego mechanizmu, współrzędne absolutne są predestynowane do stosowania ich w programach komputerowych. Algorytmowi programu przeznaczonego do automatycznego generowania układu równań więzów i rozwiązywania zadań kinematyki poświęcono osobny podrozdział 2.7. Warto wiedzieć, że algorytm obliczeń jest taki sam zarówno dla mechanizmów płaskich, jak i dla mechanizmów przestrzennych.

## PRZYKŁAD 2.6

### Zadanie

Dla mechanizmu z przykładu 2.1 należy rozwiązać zadania kinematyki o położeniach, prędkościach i przyspieszeniach, wiedząc, że kąt obrotu korby jest opisany zależnością podaną w przykładzie 2.4. Rozwiązania należy znaleźć dla czasu od  $t_0$  do  $t_K$  z krokiem  $\Delta t$ .

Dane:  $t_0 = 0$  (s),  $t_K = 1.5$  (s),  $\Delta t = 0.05$  (s).



## Rozwiązanie

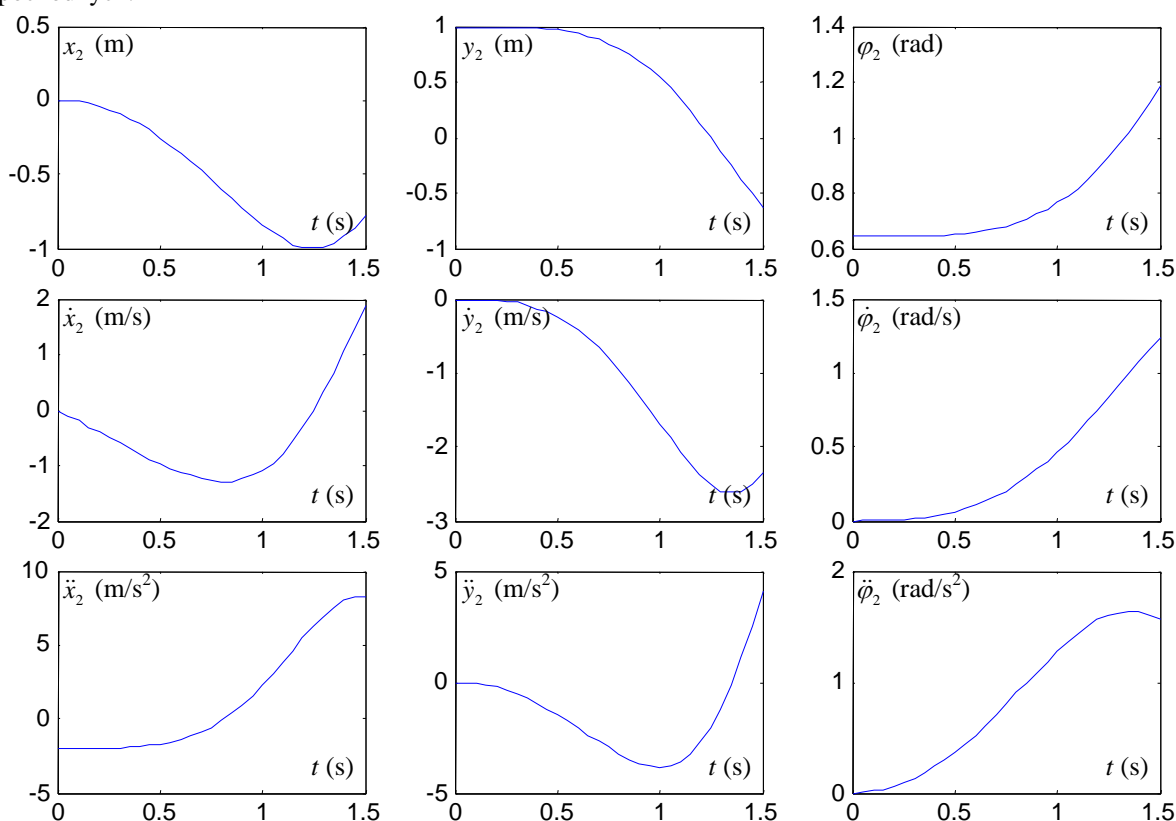
Tym razem, ze względu na ilość obliczeń, do efektywnego rozwiązania zadania niezbędny jest komputer. Przedstawimy tu jedynie algorytm programu, a wyniki obliczeń zaprezentujemy w formie wykresów. Nieliniowy układ równań algebraicznych, występujący w zadaniu o położeniu rozwiązywać będziemy oczywiście metodą Newtona–Raphsona.

Oto algorytm obliczeń:

1. Wczytaj oszacowanie początkowej konfiguracji  $\mathbf{q}$  oraz zainicjuj zmienne  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ .
2. Podstaw:  $t = t_0$ .
3. Oblicz przybliżenie startowe, podstawiając:  $\mathbf{q} = \mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \Delta t + \ddot{\mathbf{q}} \cdot (\Delta t)^2 / 2$ .
4. Oblicz  $\Phi(\mathbf{q}, t)$  według wzoru (a) z przykładu 2.5.
5. Oblicz macierz Jacobiego  $\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)$  według wzoru (b) z przykładu 2.5.
6. Rozwiąż układ równań liniowych  $\Phi_{\mathbf{q}} \Delta \mathbf{q} = -\Phi$ .
7. Podstaw  $\mathbf{q} = \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}$ .
8. Jeżeli miara „rozerwania więzów” (np.  $(\Phi)^T \Phi$ ) jest większa od dopuszczalnej, to powrót do punktu 4.
9. Oblicz  $\Phi_t(\mathbf{q}, t)$  według wzoru (c) z przykładu 2.5.
10. Oblicz macierz Jacobiego  $\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)$  (dla obliczonych w punkcie 7 wartości współrzędnych  $\mathbf{q}$ ).
11. Rozwiąż układ równań liniowych  $\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = -\Phi_t$ .
12. Oblicz wektor  $\Gamma(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$  według wzorów (d), (h), (i) z przykładu 2.5.
13. Rozwiąż układ równań liniowych  $\Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} = \Gamma$ .
14. Jeśli  $t$  jest mniejsze od  $t_K$ , to podstaw  $t = t + \Delta t$  i powrót do punktu 3.

Zauważmy, że w powyższym algorytmie obliczeń w punktach od 3 do 8 rozwiązywane jest zadanie o położeniu, w punktach od 9 do 11 – zadanie o prędkości, a w punktach 12 i 13 – zadanie o przyspieszeniu.

Wyniki obliczeń, uzyskane dla przybliżenia startowego w chwili  $t_0$  wynoszącego  $\mathbf{q} = \mathbf{0}_{9 \times 1}$ , przedstawiono na wykresach. Pokazano jedynie przebiegi współrzędnych absolutnych członu 2 i ich pochodnych.



## PRZYKŁAD 2.7

### Zadanie

Dla mechanizmu z przykładu 2.1 i więzów kierujących sformułowanych w przykładzie 2.4 należy w sposób analityczny rozwiązać zadanie kinematyki o położeniu i porównać rozwiązanie z wynikami uzyskanymi na drodze obliczeń numerycznych.

### Rozwiązanie

Przykładowy mechanizm jest bardzo prosty. Ponadto położenie lokalnych układów odniesienia dobrano w sposób szczególny, taki by ułatwiać prowadzenie obliczeń „na papierze”. Zadanie kinematyki rozwiązujemy analitycznie po to, aby sprawdzić poprawność obliczeń numerycznych. W wielu zadaniach praktycznych nie można w prosty sposób uzyskać rozwiązań analitycznych, nie ma zatem rozsądnej alternatywy dla metod numerycznych.

Rozpocznijmy od przypomnienia układu równań więzów kinematycznych i kierujących, sformułowanych w przykładach 2.3 i 2.4, a zapisanych łącznie w postaci wzoru (a) z przykładu 2.5:

$$\Phi(\mathbf{q}, t) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{s}_A^{(0)} - (\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_B^{(1)}) \\ \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)} - (\mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_B^{(2)}) \\ \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_A^{(2)} - (\mathbf{r}_3 + \mathbf{R}_3 \mathbf{s}_B^{(3)}) \\ \varphi_3 - \varphi^0 \\ (\mathbf{v}^{(0)})^T (\mathbf{s}_B^{(0)} - \mathbf{r}_3 - \mathbf{R}_3 \mathbf{s}_A^{(3)}) \\ \varphi_1 - t^2 - \pi/2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{9 \times 1}. \quad (a)$$

W rozpatrywanym przypadku równania więzów są na tyle proste, że można je zapisać w formie, w której współrzędne absolutne członów występują w sposób jawny (korzystamy z wektorów  $\mathbf{s}_A^{(0)}$ ,  $\mathbf{s}_B^{(1)}$  itd., zdefiniowanych w przykładzie 2.3):

$$\Phi(\mathbf{q}, t) \equiv \begin{bmatrix} -x_1 \\ -y_1 \\ x_1 + a \cos \varphi_1 - x_2 \\ y_1 + a \sin \varphi_1 - y_2 \\ x_2 + b \cos \varphi_2 - x_3 \\ y_2 + b \sin \varphi_2 - y_3 \\ \varphi_3 \\ c - y_3 \\ \varphi_1 - t^2 - \pi/2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{9 \times 1}. \quad (b)$$

Dzięki mało skomplikowanej strukturze kinematycznej mechanizmu i odpowiedniemu usytuowaniu lokalnych układów odniesienia uzyskany układ równań ma na tyle prostą postać, że łatwo można go rozwiązać analitycznie:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & x_2 &= a \cos \varphi_1, & x_3 &= x_2 + b \cos \varphi_2, \\ y_1 &= 0, & y_2 &= a \sin \varphi_1, & y_3 &= c, \\ \varphi_1 &= t^2 + \pi/2, & \varphi_2 &= \arcsin \frac{c - y_2}{b}, & \varphi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (c)$$

Przedstawione powyżej rozwiązanie analityczne można porównać z wynikami znalezionymi numerycznie w przykładzie 2.6. Wyniki porównań są krzepiące, uzyskano bowiem zgodność obliczeń numerycznych z analitycznymi.

## 2.7. Algorytm numeryczny i program komputerowy

W p. 2.1 ÷ 2.6 przedstawiono metodę analizy kinematycznej mechanizmów we współrzędnych absolutnych. W dotychczasowych rozważaniach wielokrotnie podkreślano



fakt, że opis kinematyki we współrzędnych absolutnych jest szczególnie predestynowany do budowy programu komputerowego do obliczeń kinematycznych.

Obecnie zajmujemy się omówieniem algorytmu obliczeń numerycznych wykonywanych w takim programie. Schemat postępowania jest taki sam w przypadku mechanizmów płaskich i przestrzennych. Rozważania rozpoczniemy od przedstawienia różnych wariantów zadań kinematyki. Potem przejdziemy do omówienia tych własności opisu we współrzędnych absolutnych, które czynią go szczególnie wygodnym w zastosowaniach numerycznych. Następnie przedstawimy algorytm programu komputerowego oraz przykłady procedur numerycznych, których można użyć do budowy takiego programu. Na końcu omówimy te z własności numerycznych algorytmu, które można wykorzystać w budowie programu komputerowego, by znacznie zwiększyć efektywność obliczeń.

### ***Warianty zadań kinematyki***

Zadanie analizy kinematycznej o położeniach, prędkościach i przyspieszeniach we współrzędnych absolutnych najczęściej stawia się w dwóch wariantach:

1. Zadana jest chwila  $t_0$ , a poszukujemy parametrów kinematycznych mechanizmu (wektorów uogólnionych położen  $\mathbf{q}(t_0)$ , prędkości  $\dot{\mathbf{q}}(t_0)$  i przyspieszeń  $\ddot{\mathbf{q}}(t_0)$ ) odpowiadających tej chwili. Zatem zadanie dotyczy pojedynczej konfiguracji mechanizmu.
2. Poszukujemy kolejnych położen, prędkości i przyspieszeń uogólnionych mechanizmu odpowiadających kolejnym chwilom  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ), z krokiem  $h_i = t_i - t_{i-1}$ . Krok  $h_i$  jest najczęściej stały, ale może być także wielkością zmienną. Mamy zatem do czynienia z zadaniem analogicznym do opisanego w wariantcie pierwszym, lecz postawionym wielokrotnie, w wybranych punktach pewnego przedziału czasu.

Zadania w obu wariantach dla mechanizmów o skomplikowanej strukturze rozwiązuje się najczęściej numerycznie.

Zazwyczaj obliczenia kinematyczne nie kończą się na wyznaczeniu współrzędnych absolutnych oraz ich pochodnych względem czasu. Zwykle jesteśmy zainteresowani nie samymi współrzędnymi absolutnymi, lecz raczej parametrami kinematycznymi wybranych punktów lub członów mechanizmu. Metodę obliczania położen, prędkości i przyspieszeń dowolnych punktów, a także orientacji oraz prędkości i przyspieszenia kąтового dowolnych członów, przedstawiono w p. 2.2. Na podkreślenie zasługuje fakt, że w przypadku współrzędnych absolutnych stosowane wzory mają szczególnie prostą postać.

### ***Własności współrzędnych absolutnych ułatwiające budowę programu***

Jedną z podstawowych korzyści, jakie daje analiza kinematyki we współrzędnych absolutnych, jest łatwość budowy ogólnego programu komputerowego do analizy mechanizmów o dowolnej strukturze kinematycznej. W budowie ogólnego programu komputerowego ważną rolę pełnią następujące własności opisu kinematyki we współrzędnych absolutnych:

1. Jeśli mechanizm składa się z typowych<sup>1</sup> par kinematycznych, to układając równania więzów kinematycznych  $\Phi^K$  możemy skorzystać z zamkniętych wzorów wyprowadzonych w p. 0. Obliczenia według tych wzorów wymagają jedynie znajomości aktualnych współrzędnych  $\mathbf{q}_i$  i  $\mathbf{q}_j$  członów  $i$  oraz  $j$ , tworzących parę kinematyczną, a także stałych (bo zadanych w układach lokalnych) współrzędnych wektorów pomocniczych  $\mathbf{s}_A^{(i)}$ ,  $\mathbf{s}_B^{(j)}$ ,  $\mathbf{u}^{(i)}$ ,  $\mathbf{v}^{(j)}$ ,  $\mathbf{w}^{(j)}$  itp. Odpowiednie wyrażenia dla macierzy Jacobiego  $\Phi_q^K$  oraz wektora  $\Gamma^K$  dla typowych par kinematycznych dane są w formie zamkniętych wzorów wyprowadzonych w p. 2.5. Obliczenia w zadaniu o przyspieszeniach wymagają dodatkowo znajomości wektorów prędkości uogólnionych  $\dot{\mathbf{q}}_i$  oraz  $\dot{\mathbf{q}}_j$  (które znajduje się rozwiązując wcześniej zadanie o prędkościach).

W obliczeniach dotyczących pary kinematycznej tworzonej przez członów  $i$  oraz  $j$  nie są potrzebne dane odnoszące się do innych członów. Ta właściwość opisu kinematyki we współrzędnych absolutnych ma fundamentalne znaczenie. Dzięki niej matematyczny opis pary kinematycznej jest zawsze taki sam, niezależnie od tego, jak liczny układ członów analizujemy, ani od tego, jak skomplikowana jest jego struktura.

Stosując opis kinematyki we współrzędnych absolutnych, można łatwo (w porównaniu zastosowaniem współrzędnych złączowych) przygotować program komputerowy, który dla danego typu pary kinematycznej, dla zadanych (na wejściu) wartości  $\mathbf{q}_i$ ,  $\mathbf{q}_j$ ,  $\mathbf{s}_A^{(i)}$ ,  $\mathbf{u}^{(i)}$ ,  $\mathbf{v}^{(j)}$ ,  $\mathbf{w}^{(j)}$  oraz  $\dot{\mathbf{q}}_i$  i  $\dot{\mathbf{q}}_j$  wyznacza (na wyjściu) współrzędne wektora lewych stron równań więzów  $\Phi^K$ , prawych stron  $\Gamma^K$  w równaniu przyspieszeń oraz elementy macierzy Jacobiego  $\Phi_q^K$ . Wyrażenia określające wielkości wyjściowe mają dla danego typu pary kinematycznej zawsze taką samą postać, niezależnie od tego, gdzie w mechanizmie para ta jest umiejscowiona..

2. Jeśli rozważania ograniczymy do typowych więzów kierujących zdefiniowanych w p. 2.4, to poprzednie rozważania pozostają słuszne także w odniesieniu do więzów kierujących. Można bowiem obliczyć wartości lewych stron równań więzów  $\Phi^D$ , elementów wektora  $\Gamma^D$  na podstawie zamkniętych wzorów wyprowadzonych w p. 2.4. Obliczenia te wymagają znajomości wektorów  $\mathbf{s}_A^{(i)}$ ,  $\mathbf{s}_B^{(j)}$ ,  $\mathbf{u}^{(i)}$ ,  $\mathbf{v}^{(j)}$  oraz współrzędnych  $\mathbf{q}_i$ ,  $\mathbf{q}_j$  i ich pochodnych  $\dot{\mathbf{q}}_i$  i  $\dot{\mathbf{q}}_j$ .

Zatem, podobnie jak poprzednio, można przygotować program komputerowy, który dla zadanych (na wejściu) wartości  $\mathbf{q}_i$ ,  $\mathbf{q}_j$ , oraz  $\dot{\mathbf{q}}_i$  i  $\dot{\mathbf{q}}_j$  wyznacza (na wyjściu) współrzędne wektora lewych stron równań więzów  $\Phi^D$ , prawych stron  $\Gamma^D$  oraz elementy macierzy Jacobiego  $\Phi_q^D$  dla danego typu więzów kierujących. Wyrażenia określające wielkości wyjściowe mają bowiem dla konkretnych więzów kierujących zawsze tę samą postać.

3. W równaniach dotyczących więzów kierujących występuje dodatkowo konieczność obliczania wartości funkcji czasu oraz jej pochodnych. Jeśli rozważania ograniczymy do określonych postaci funkcji czasu, to do wyznaczenia wartości tych funkcji oraz ich pochodnych można przygotować program komputerowy, który w parametrach wejściowych zawiera czas i dane współczynniki, a na wyjściu oblicza żądane funkcje i ich pochodne.

---

<sup>1</sup> Jeżeli mamy do czynienia z parą kinematyczną inną niż omawiane w p. 0, to odpowiednie równania musimy wyprowadzić, ale robimy to tylko raz dla każdego typu pary kinematycznej. Wszystkie przedstawione dalej rozważania są słuszne dla dowolnej pary kinematycznej.

Dla przykładu można przyjąć, że funkcja  $f(t)$  (lub jej elementy w wypadku funkcji wektorowej) mają postać wielomianu stopnia  $n$ :

$$f(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i. \quad (2.75)$$

Nałożenie więzów kierujących według funkcji (2.75) wymaga jedynie określenia stopnia wielomianu, jego współczynników i aktualnej wartości czasu.

4. Często rozwiązanie zadań kinematyki, czyli wyznaczenie współrzędnych absolutnych i ich pochodnych jest wstępem do dalszych obliczeń. Zazwyczaj jesteśmy zainteresowani położeniem i orientacją wybranych członów lub punktów, a także ich prędkościami i przyspieszeniami. W punkcie 2.2 pokazano, że w przypadku zastosowania współrzędnych absolutnych równania wzory stosowane do obliczania interesujących nas parametrów kinematycznych są wyjątkowo proste. Obliczenie wielkości związanych z członem  $i$  wymaga jedynie znajomości współrzędnych  $\mathbf{q}_i$  i ich pochodnych  $\dot{\mathbf{q}}_i$  i  $\ddot{\mathbf{q}}_i$ . Informacje dotyczące pozostałych członów układu nie są tu potrzebne. Prostota omawianych wzorów wynika zatem z ich niezależności od struktury mechanizmu.

### ***Algorytm programu do analizy kinematycznej mechanizmów***

Z powyższych rozważań wynika, że dla mechanizmu o dowolnej strukturze, dla dowolnie wybranych typów par kinematycznych i dla szerokiej klasy więzów kierujących można napisać program komputerowy, który w sposób automatyczny ułoży równania więzów i rozwiąże zadania kinematyki o położeniach, prędkościach i przyspieszeniach. Obliczenia można realizować systematycznie, korzystając z jednokrotnie wyprowadzonych wzorów opisujących wybrane typy więzów kinematycznych lub kierujących. Dzięki zastosowaniu współrzędnych absolutnych, procedury programu są niezależne od struktury analizowanego łańcucha kinematycznego i liczby jego członów.

Omawiając program komputerowy skoncentrujemy się wyłącznie na obliczeniach. Pominiemy wiele kwestii istotnych z punktu widzenia informatyki (gospodarowanie pamięcią i deklaracje zmiennych, interfejs użytkownika i metodę wprowadzania danych, możliwości graficzne komputera i sposób prezentacji wyników, itd.), lecz nie dotyczących bezpośrednio kinematyki mechanizmów.

Swoje działanie program rozpoczyna od wczytania danych dotyczących struktury mechanizmu i jego wymiarów. Użytkownik musi dostarczyć informacji o tym, ile jest członów, jakie tworzą pary kinematyczne, jakie są wymiary charakterystyczne mechanizmu. Niezbędne jest także określenie wymaganego ruchu, czyli zadanie więzów kierujących i podanie czasu, dla którego należy przeprowadzić obliczenia<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Komercyjne programy umożliwiające analizę kinematyczną są zazwyczaj wyposażone w graficzny interfejs użytkownika, umożliwiający „narysowanie” członów mechanizmu oraz wskazanie, jakie pary kinematyczne człony te tworzą i jak są one umiejscowione. Tak zbudowany model zawiera oczywiście wszystkie dane geometryczne niezbędne do obliczeń kinematycznych. Użytkownik programu komercyjnego dysponuje zazwyczaj edytorem funkcji, pozwalającym na sformułowanie więzów kierujących. Oczywiście, do mniej rozbudowanych programów dane można wprowadzić w inny sposób, na przykład umieszczając niezbędne informacje (listę połączeń członów, współrzędne wektorów potrzebnych do opisu par kinematycznych) w pliku tekstowym, wczytywanym później przez program.

Najistotniejszą częścią programu są procedury umożliwiające automatyczne ułożenie układu równań więzów, a następnie – również automatyczne – jego rozwiązanie. Jak już wiemy, w każdej z rozpatrywanych chwil najpierw rozwiązywane jest zadanie o położeniach, dopiero potem zdania o prędkościach i przyspieszeniach.

Rozwiązanie zadania o położeniach wymaga odnalezienia wektora współrzędnych absolutnych  $\mathbf{q}$ , spełniającego równania więzów kinematycznych i kierujących (2.72) w rozpatrywanej chwili. Nieliniowy układ równań algebraicznych (2.72) rozwiązuje się stosując iteracyjną metodę Newtona–Raphsona (zob. punkt 1.1.2), umożliwiającą wyznaczanie coraz dokładniejszych przybliżeń  $\mathbf{q}^k$  rozwiązania ścisłego. Wzory pozwalające na obliczenie wartości wektora  $\Phi(\mathbf{q}^k)$  dla wybranych par kinematycznych podano w p. 0. W obliczeniach wykorzystuje się macierz Jacobiego równań więzów  $\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}^k)$ , którą można zbudować, składając odpowiednio jej fragmenty wyznaczone z wykorzystaniem wzorów podanych w p. 2.5. W każdym kroku iteracji Newtona–Raphsona zachodzi konieczność rozwiązania układu równań liniowych. Można w tym celu zastosować np. procedurę Gaussa.

Kolejnym etapem obliczeń, po uzyskaniu satysfakcjonująco dokładnego rozwiązania zadania o położeniu (dla danej chwili), jest rozwiązanie zadania o prędkości, a następnie o przyspieszeniach. Oba te zadania sprowadzają się do rozwiązania układów równań liniowych (2.73) i (2.74). Jak wiadomo, macierz współczynników w obu tych układach jest macierzą Jacobiego równań więzów  $\Phi_{\mathbf{q}}$ , oblicza się ją zatem tak samo jak w wypadku zadania o położeniach. Prawe strony, czyli wektory  $\Phi_t$  i  $\Gamma$  oblicza się według wzorów podanych w p. 2.5. Oba omawiane układy równań liniowych można rozwiązać stosując metodę Gaussa lub którąś z jej modyfikacji.

Po rozwiązaniu wszystkich trzech zadań kinematyki dla chwili  $t_i$ , program rozpoczyna obliczenia dla kolejnej chwili  $t_{i+1} = t_i + h$ . Jak wiadomo, wskazane jest, by przybliżenie startowe w metodzie Newtona–Raphsona było możliwie bliskie poszukiwanemu rozwiązaniu. Mając do dyspozycji rozwiązanie zadań kinematyki dla chwili  $t_i$ , wygodnie jest przyjąć przybliżenie startowe w chwili  $t_{i+1}$  równe trzem pierwszym wyrazom rozwinięcia wektora  $\mathbf{q}$  w szereg Taylora w otoczeniu czasu  $t_i$ :

$$\mathbf{q}^0(t_{i+1}) = \mathbf{q}(t_i) + \dot{\mathbf{q}}(t_i)h + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{q}}(t_i)h^2. \quad (2.76)$$

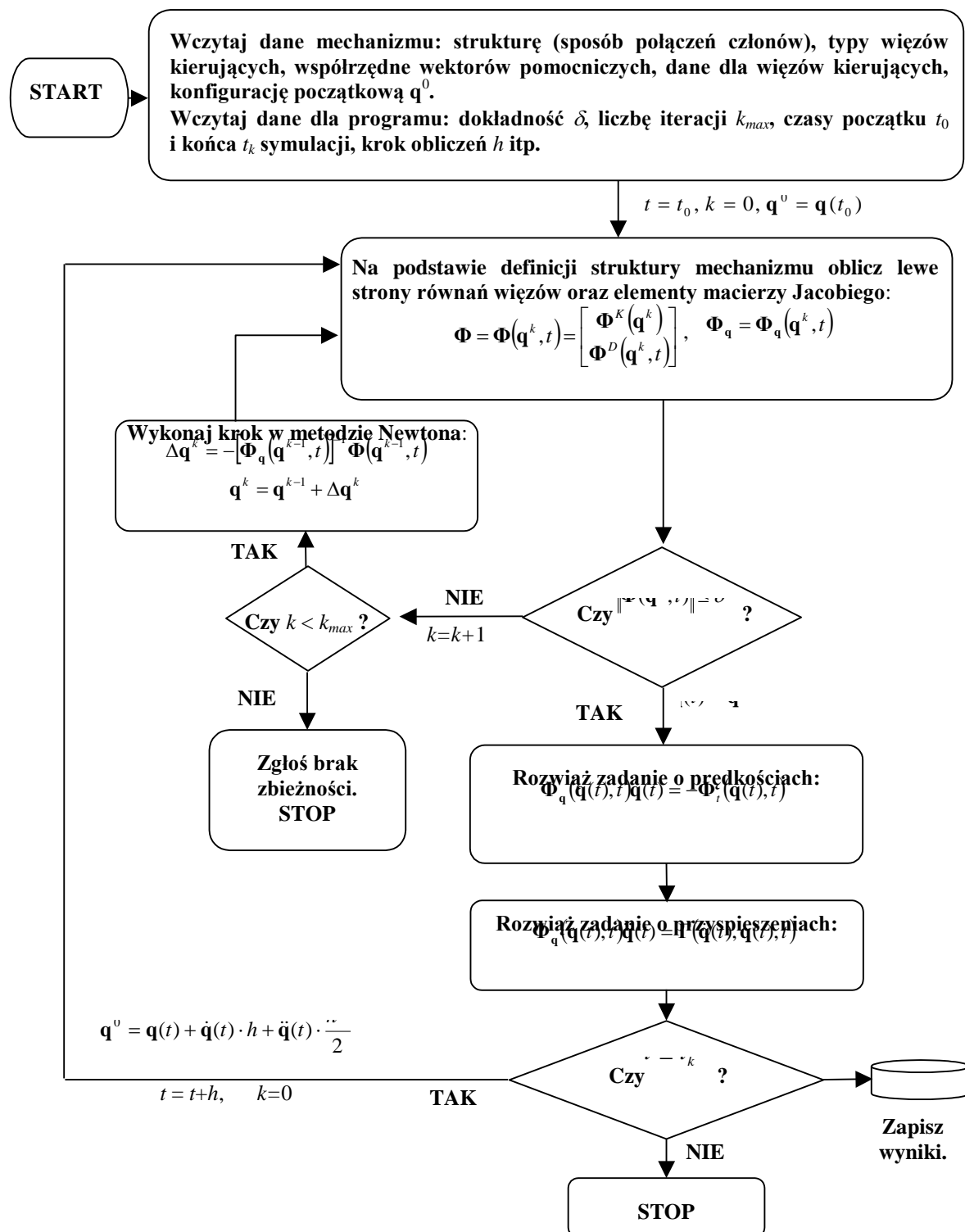
Powyższy wzór pozwala na wyznaczenie rozsądnego przybliżenia startowego we wszystkich rozpatrywanych chwilach prócz pierwszej –  $t_0$ . Dobór właściwego przybliżenia startowego w chwili  $t_0$  jest bardzo istotny, zatem użytkownik programu powinien mieć możliwość samodzielnego jego określania, np. w formie danych wejściowych do programu<sup>1</sup>.

Rozwiązanie zadań kinematyki we wszystkich zadanych chwilach  $t_i$  kończy działanie programu. Pozostaje jeszcze tylko zapisanie i prezentacja wyników obliczeń<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> W programach komercyjnych użytkownik zazwyczaj wprowadza dane, budując model w formie graficznej. Za przybliżenie startowe przyjmuje się wtedy wektor współrzędnych absolutnych opisujący konfigurację, w jakiej został „narysowany” mechanizm.

<sup>2</sup> Profesjonalne pakiety obliczeniowe dają wiele możliwości prezentacji wyników – w postaci wykresów, animacji, zbiorów danych wyjściowych itp. W mniej zaawansowanych programach zadowolić się musimy zapisaniem wyników liczbowych do pliku.

Na rysunku 2.7 przedstawiono schemat programu komputerowego do analizy kinematycznej mechanizmów, który ilustruje omówione etapy rozwiązywania zadań kinematyki.



Rysunek 2.7. Uproszczony schemat ogólnego programu komputerowego do analizy kinematycznej mechanizmów

Z przedstawionych powyżej rozważań wynika, że analiza kinematyczna mechanizmu we współrzędnych absolutnych nie różni się w koncepcji i sposobie postępowania się od analizy we współrzędnych złączowych (różnice tkwią jedynie w liczbie i stopniu komplikowania równań więzów). Podobnie jak poprzednio, rozwiązanie zadania o położeniach wymaga rozwiązywania układu równań nieliniowych w postaci (2.72), rozwiązanie zadań kinematyki o prędkościach i przyspieszeniach wymaga rozwiązania układów równań linowych w postaci (2.73) i (2.74).

### Przykładowy program

Przedstawimy teraz przykłady programów rozwiązujących zadania kinematyki. Będą one możliwie nieskomplikowane, jednakże – co łatwo będzie zauważyć – niezbyt wydajne numerycznie. Napisanie programów w sposób „oszczędzający liczbę operacji” spowodowałoby mniejszą ich przejrzystość, a tego chcemy uniknąć.

Napiszemy bardzo prosty program, który pozwoli jednak zilustrować najistotniejsze etapy obliczeń. Program będzie dotyczył analizy kinematycznej tylko jednego mechanizmu, rozpatrywanego w przykładach. Dzięki brakowi ogólności program będzie wyjątkowo mało skomplikowany.

Procedury będą pisane w środowisku MATLAB. Wszystkie pisane procedury postaramy opatrzyć dokładnymi opisami parametrów wejściowych i wyjściowych oraz możliwie szczegółowymi i komunikatywnymi komentarzami.

---

#### PRZYKŁAD 2.8

##### Zadanie

Napisać program rozwiązujący zadania kinematyki sformułowane w przykładzie 2.6.

##### Rozwiązanie

Program będzie się składał z siedmiu współpracujących procedur. Nadrzędną funkcję pełnić będzie procedura *KorbWodz*, która dla analizowanych chwil wywoływać będzie procedurę *NewRaph*, służącą do rozwiązywania zadania o położeniu w konkretnej chwili  $t^*$ , a następnie procedury *Predkosc* i *Przyspieszenie*, służące, jak łatwo się domyślić, do rozwiązywania zadań o prędkościach i przyspieszeniach. Procedura *Wiezy* będzie służyć do obliczania lewych stron równań więzów  $\Phi(\mathbf{q}^k, t^*)$  dla współrzędnych  $\mathbf{q}^k$  i czasu  $t^*$ . Do obliczania macierzy Jacobiego  $\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}^k)$  używana będzie procedura *Jakobian*. Procedura *Rot* będzie obliczała macierz kosinusów kierunkowych  $\mathbf{R}(\varphi)$ .

Budowę programu rozpoczniemy od procedury *Rot*, gdyż znajduje się ona najniżej w hierarchii (nie odwołuje się do kolejnych procedur). Procedura *Rot* ma jeden argument wejściowy – kąt  $\varphi$ ; w wyniku jej działania obliczana jest macierz  $\mathbf{R}(\varphi)$ .

```
function R=Rot(fi)
% R=Rot(fi)
% Obliczanie macierzy rotacji - przypadek płaski (2x2)
% Wejście:
% fi - kat fi (w radianach).
% Wyjście:
% R - macierz kosinusów kierunkowych.

R=[cos(fi) -sin(fi);sin(fi) cos(fi)];
```

Aby nie komplikować procedur obliczeniowych, wymiary mechanizmu i opisujące go wektory pomocnicze (służące do opisu par kinematycznych) umieszczono w programie „na sztywno”. Dane liczbowe zaczerpnięto z tabel w przykładzie 2.3 i zapisano w skrypcie *Dane*.

```
% Dane.m - plik zawierający dane o wymiarach mechanizmu

a=1; b=5; c=4; % Wymiary mechanizmu:
sA0=[0;0]; sB1=[0;0]; % Para obrotowa 0-1
sA1=[a;0]; sB2=[0;0]; % Para obrotowa 1-2
sA2=[b;0]; sB3=[0;0]; % Para obrotowa 2-3
f0=0; v0=[0;1]; sA3=[0;0]; sB0=[0;c]; % Para postępową 3-0
```

Kolejnym krokiem będzie napisanie procedury *Wiezy*, obliczającej według wzorów (a) z przykładu 2.5 wartości równań więzów  $\Phi(\mathbf{q}^k, t^*)$  dla aktualnego przybliżenia rozwiązania  $\mathbf{q}^k$  oraz dla aktualnej chwili  $t^*$ . W przedstawionej dalej procedurze przepisanie wzorów poprzedzono nadaniem elementom wektora  $\mathbf{q}^k$  „czytelnych” nazw, co niewątpliwie zmniejsza wydajność programu, jednakże zwiększa jego przejrzystość.

```
function F=Wiezy(q,t)
% F=Wiezy(q,t)
% Procedura współpracująca z NewRaph.
% Służy do obliczania wartości funkcji opisujących więzy.
% Wejście:
% q - współrzędne absolutne układu wieloczołowego,
% t - aktualna chwila.
% Wyjście:
% F - wartości funkcji.

Dane; % Wczytanie danych o wymiarach mechanizmu i usytuowaniu par kinematycznych

% Przypisanie elementom wektora q czytelnych nazw
r1=q(1:2); fi1=q(3); r2=q(4:5); fi2=q(6); r3=q(7:8); fi3=q(9);

% Obliczenie macierzy kosinusów kierunkowych
Rot1=Rot(fi1); Rot2=Rot(fi2); Rot3=Rot(fi3);

% Równania więzów
F(1:2,1)=sA0-(r1+Rot1*sB1);
F(3:4,1)=r1+Rot1*sA1-(r2+Rot2*sB2);
F(5:6,1)=r2+Rot2*sA2-(r3+Rot3*sB3);
F(7,1)=fi3-f0;
F(8,1)=v0'*(sB0-r3-Rot3*sA3);
F(9,1)=fi1-t^2-pi/2;
```

Procedura *Jakobian* służyć będzie do obliczania według wzorów (b) z przykładu 2.5 macierzy Jacobiego  $\Phi_q(\mathbf{q}^k)$ . Podobnie jak w procedurze *Wiezy*, tu także wymiary mechanizmu i opisujące go wektory pomocnicze wpisano na stałe do procedury (te fragmenty są w obu procedurach identyczne). W zasadniczej części procedury do początkowo zerowej macierzy Jacobiego wpisywane są jej potencjalnie niezerowe elementy.

```
function Fq=Jakobian(q)
% Fq=Jakobian(q)
% Procedura współpracująca z NewRaph.
% Służy do obliczania macierzy Jacobiego równań więzów.
% Wejście:
% q - współrzędne absolutne układu wieloczołowego.
% Wyjście:
% Fq - obliczona macierz Jacobiego.

Dane; % Wczytanie danych o wymiarach mechanizmu i usytuowaniu par kinematycznych

Om=[0 -1;1 0]; % Stała macierz

% Przypisanie elementom wektora q czytelnych nazw
r1=q(1:2); fi1=q(3); r2=q(4:5); fi2=q(6); r3=q(7:8); fi3=q(9);

% Obliczenie macierzy kosinusów kierunkowych
Rot1=Rot(fi1); Rot2=Rot(fi2); Rot3=Rot(fi3);
```

```

% Macierz Jacobiego - początkowo zerowa
Fq=zeros(9,9);
% Macierz Jacobiego - wypełnianie niezerowych elementów
Fq(1:2,1:2)=-eye(2);
Fq(1:2,3)=-Om*Rot1*sB1;

Fq(3:4,1:2)=eye(2);
Fq(3:4,3)=Om*Rot1*sA1;
Fq(3:4,4:5)=-eye(2);
Fq(3:4,6)=-Om*Rot2*sB2;

Fq(5:6,4:5)=eye(2);
Fq(5:6,6)=Om*Rot2*sA2;
Fq(5:6,7:8)=-eye(2);
Fq(5:6,9)=-Om*Rot3*sB3;

Fq(7,9)=1;

Fq(8,7:8)=-v0';
Fq(8,9)=-v0'*Om*Rot3*sA3;

Fq(9,3)=1;

```

Procedura *NewRaph* oblicza rozwiązanie zadania kinematyki o położeniu metodą Newtona–Raphsona. Rozwiązanie poszukiwane jest dla konkretnej chwili  $t^*$  oraz dla zadanego przybliżenia startowego  $q^0$ . W każdym kroku iteracji wywoływane są procedury *Wiezy* i *Jakobian*. Dla uproszczenia programu arbitralnie podjęto decyzję o wymaganej dokładności przybliżonego rozwiązania oraz o maksymalnej liczbie iteracji. Pominęto również sprawdzanie, czy macierz Jacobiego nie jest osobliwa.

```

function q=NewRaph(q0,t)
% q=NewRaph(q0,t)
% Rozwiązanie układu równań metodą Newtona-Raphsona.
% Wejście:
%   q0 - przybliżenie startowe,
%   t - chwila, dla której poszukiwane jest rozwiązanie.
% Wyjście:
%   q - uzyskane rozwiązanie.
%
% Układ równań musi być wpisany w pliku Wiezy.m.
% Macierz Jacobiego układu równań musi być wpisana w pliku Jakobian.m.

q=q0;
F=Wiezy(q,t);
iter=1; % Licznik iteracji
while ( (norm(F)>1e-10) & (iter < 25) )
    F=Wiezy(q,t);
    Fq=Jakobian(q);
    q=q-Fq\F; % Fq\F jest równoważne inv(Fq)*F, ale mniej kosztowne numerycznie
    iter=iter+1;
end
if iter >= 25
    disp('BŁĄD: Po 25 iteracjach Newtona-Raphsona nie uzyskano zbieżności ');
    q=q0;
end

```

Procedura *Predkosc* jest bardzo prosta – rozwiązuje układ równań liniowych. Macierz układu równań (macierz Jacobiego) obliczana jest przez wywołanie procedury *Jakobian*. Wektor prawych stron obliczany jest według wzoru (c) z przykładu 2.5. Zadanie kinematyki o położeniu dla rozpatrywanej chwili musi być rozwiązane wcześniej, gdyż obliczone współrzędne układu wieloczołowego są danymi wejściowymi dla procedury *Predkosc*.

```

function dq=Predkosc(q,t)
% dq=Predkosc(q,t)
% Procedura do rozwiązywania zadania o prędkości.
% Zadanie o położeniu musi być rozwiązane wcześniej.
% Wejście:
%   q - współrzędne absolutne układu wieloczołowego,

```



```

% t - chwila, dla której poszukiwane jest rozwiązanie.
% Wyjście:
% dq - obliczone pochodne współrzędnych absolutnych względem czasu.

% Prawa strona układu równań liniowych - pochodne więzów względem czasu.
Ft=zeros(8,1);-2*t];

% Macierz układu równań
Fq=Jakobian(q);

% Obliczenie prędkości
dq=-Fq\Ft;

```

Procedura *Przyspieszenie* służy do rozwiązania kolejnego układu równań liniowych. Przed jej wywołaniem dla rozpatrywanej chwili muszą być rozwiązane zadania kinematyki o położeniu i prędkości. Podobnie jak procedury *Wiezy* i *Jakobian* przedstawioną dalej procedurę *Przyspieszenie* rozpoczęto wprowadzeniem danych opisujących wymiary mechanizmu i wektory pomocnicze (te fragmenty są we wszystkich trzech procedurach identyczne). W zasadniczej części procedury do obliczenia macierzy układu równań wykorzystywana jest procedura *Jakobian*, natomiast wektor prawych stron obliczany jest według wzorów (d), (h), oraz (i) z przykładu 2.5.

```

function d2q=Przyspieszenie(dq,q,t)
% d2q=Przyspieszenie(dq,q,t)
% Procedura do rozwiązywania zadania o przyspieszeniu.
% Zadania o położeniu i prędkości muszą być rozwiązane wcześniej.
% Wejście:
% q - współrzędne absolutne układu wieloczołowego,
% dq - pochodne współrzędnych absolutnych względem czasu,
% t - chwila, dla której poszukiwane jest rozwiązanie.
% Wyjście:
% d2q - obliczone drugie pochodne współrzędnych absolutnych względem czasu.

Dane; % Wczytanie danych o wymiarach mechanizmu i usytuowaniu par kinematycznych

% Przypisanie elementom wektora q czytelnych nazw
r1=q(1:2); fi1=q(3); r2=q(4:5); fi2=q(6); r3=q(7:8); fi3=q(9);

% Obliczenie macierzy kosinusów kierunkowych
Rot1=Rot(fi1); Rot2=Rot(fi2); Rot3=Rot(fi3);

% Przypisanie elementom wektora dq czytelnych nazw
dfi1=dq(3); dfi2=dq(6); dfi3=dq(9);

% Obliczenie wektora prawych stron
gam(1:2,1)=-Rot1*sB1*dfi1^2;
gam(3:4,1)=Rot1*sA1*dfi1^2-Rot2*sB2*dfi2^2;
gam(5:6,1)=Rot2*sA2*dfi2^2-Rot3*sB2*dfi2^2;
gam(7,1)=0;
gam(8,1)=-v0'*Rot3*sA3*dfi3^2;
gam(9,1)=2;

% Obliczenie macierzy układu równań
Fq=Jakobian(q);

% Obliczenie przyspieszenia (rozwiązanie układu równań)
d2q=Fq\gam;

```

W programie rozwiązującym zadanie kinematyki o położeniu nadrzędną rolę pełni procedura *KorbWodz*. Wyznacza ona chwile, dla których należy znaleźć rozwiązanie zadań kinematyki, a następnie znajduje te rozwiązania, odwołując się do procedury *NewRaph* (przybliżenie startowe obliczane jest na podstawie wyników z poprzednich chwil), a potem do procedur *Predkosc* i *Przyspieszenie*. Uzyskane wyniki zapisywane są w przeznaczonych do ich gromadzenia tablicach.

```

function [T,Q,DQ,D2Q]=KorbWodz()
% [T,Q,DQ,D2Q]=KorbWodz
% Rozwiązanie zadania kinematyki o położeniu, prędkości i przyspieszeniu
% dla mechanizmu korbowo-wodzikowego.
% Wyjście:

```

```

% T - tablica do zapisu kolejnych chwil,
% Q - tablica do zapisu rozwiązań zadania o położeniu w kolejnych chwilach,
% DQ - tablica do zapisu rozwiązań zadania o prędkości w kolejnych chwilach,
% D2Q - tablica do zapisu rozwiązań zad. o przyspieszeniu w kolejnych chwilach.

% Przybliżenie startowe (gdy brak rozwiązania z poprzedniej chwili)
q=zeros(9,1); dq=zeros(9,1); d2q=zeros(9,1);
lroz=0; % Licznik rozwiązań (służy do numerowania kolumn w tablicach z wynikami)
dt=0.05; % Odstęp pomiędzy kolejnymi chwilami

% Rozwiązywanie zadań kinematyki w kolejnych chwilach t
for t=0:dt:1.5
    % Zadanie o położeniu.
    % Przybliżeniem początkowym jest rozwiązanie z poprzedniej chwili,
    % powiększone o składniki wynikające z obliczonej prędkości i przyspieszenia.
    q0=q+dq*dt+0.5*d2q*dt^2;
    q=NewRaph(q0,t);

    dq=Predkosc(q,t); % Zadanie o prędkości

    d2q=Przyspieszenie(dq,q,t); % Zadanie o przyspieszeniu

    % Zapis do tablic gromadzących wyniki
    lroz=lroz+1;
    T(1,lroz)=t;
    Q(:,lroz)=q;
    DQ(:,lroz)=dq;
    D2Q(:,lroz)=d2q;
end

```

Opisany powyżej zestaw procedur pozwala na rozwiązanie zadań kinematyki o położeniu, prędkości i przyspieszeniu dla badanego mechanizmu korbowo-wodzikowego. Gdybyśmy chcieli np. zobaczyć wykresy przebiegu przyspieszeń  $\ddot{x}_2$  i  $\ddot{y}_2$ , to w oknie poleceń MATLAB-a wystarczy wpisać dwie komendy:

```

>> [T,Q,DQ,D2Q]=KorbWodz;
>> plot(T,D2Q(4:5,:))

```

### ***Niektóre aspekty numeryczne algorytmu analizy kinematycznej***

Na zakończenie zwrócimy uwagę na szczególną własność macierzy Jacobiego równań więzów, którą można wykorzystać w obliczeniach numerycznych. Otóż macierz Jacobiego równań więzów we współrzędnych absolutnych jest tzw. macierzą rzadką, to znaczy taką, która składa się głównie z zer. Zauważmy bowiem, że jeśli analizowany mechanizm składa się z  $n$  członów, to do jego opisu używa się  $6n$  współrzędnych absolutnych ( $3n$  w przypadku mechanizmów płaskich). Macierz Jacobiego składa się zatem z  $6n$  ( $3n$ ) kolumn. W każdym wierszu tej macierzy potencjalnie niezerowych jest jedynie 12 (6) elementów<sup>1</sup>, odpowiadających współrzędnym absolutnym dwóch członów tworzących parę kinematyczną opisywaną przez ten wiersz<sup>2</sup>. Nietrudno policzyć, że w przypadku mechanizmu o  $n$  członach niezerowe elementy macierzy Jacobiego stanowią nie więcej niż  $2/n$  jej zawartości. Następnie należy zauważyć, że w algorytmach analizy kinematycznej omówionych powyżej szczególnie często występuje konieczność rozwiązywania układów równań liniowych, w których macierzą współczynników jest macierz Jacobiego. Dotyczy to zwłaszcza algorytmu Newtona oraz zadania o prędkościach i zadania o przyspieszeniach. Macierz Jacobiego na ogół nie jest symetryczna.

<sup>1</sup> Lub o połowę mniej, jeśli para kinematyczna tworzona jest przez człon ruchomy z podstawą.

<sup>2</sup> Ściśle mówiąc, stwierdzenie to dotyczy wszystkich więzów kinematycznych i wybranych typów więzów kierujących. Można sobie bowiem wyobrazić więzy kierujące (abstrahując od ich sensu technicznego), krępujące wszystkie bez wyjątku współrzędne absolutne układu.

Powyższe spostrzeżenia pozwalają na znaczne zmniejszenie pracochłonności obliczeń numerycznych. Można bowiem zmodyfikować algorytm obliczeń tak, by wykorzystując informacje o umiejscowieniu zer w macierzy Jacobiego, uzyskać znaczną redukcję liczby wykonywanych operacji arytmetycznych. Można także zaoszczędzić miejsce w pamięci komputera, przechowując jedynie niezerowe fragmenty macierzy. Warto wiedzieć, że wszystkie profesjonalne programy do analizy kinematycznej, stosujące opis we współrzędnych absolutnych, wykorzystują fakt że macierz Jacobiego jest rzadka.

W bibliotekach numerycznych poświęconych rozwiązywaniu układów równań liniowych można znaleźć wiele algorytmów przeznaczonych do rozwiązywania równań liniowych o strukturze rzadkiej. Algorytmy te dzieli się zwykle na dwie grupy: na grupę metod bezpośrednich i grupę metod iteracyjnych. Metody bezpośrednie są na ogół odmianami metod eliminacji Gaussa, natomiast metody iteracyjne po wykonaniu skończonej liczby kroków dają rozwiązania przybliżone. Obliczenia z zastosowaniem procedur obu grup są najczęściej znacznie bardziej efektywne niż obliczenia z udziałem macierzy pełnych (dla macierzy o względnej liczbie elementów niezerowych typowej dla algorytmów omawianych w tej książce). Dodatkowy zysk wynika z oszczędności w gospodarowaniu pamięcią komputera (pamięta się tylko wielkości elementów niezerowych oraz ich miejsce w macierzy).

Dla przykładu omówimy sposób rozwiązywania układów równań liniowych o strukturze rzadkiej z zastosowaniem procedury o nazwie HARWELL. Jest ona wykorzystywana w niektórych programach komercyjnych poświęconych analizie kinematycznej mechanizmów we współrzędnych absolutnych<sup>1</sup>. Procedura ta należy do grupy metod bezpośrednich i realizuje algorytm rozwiązywania układów równań liniowych w czterech etapach.

- A. W pierwszym etapie określa się, które elementy macierzy współczynników równania liniowego są stale równe zero, a następnie oblicza się wartości niezerowych elementów macierzy współczynników (macierzą współczynników może być np. macierz Jacobiego równań więzów). Zakłada się, że w kolejnych krokach obliczeń, elementy niezerowe występują zawsze w tych samych wierszach i kolumnach macierzy (mają te same indeksy wierszowe i kolumnowe).
- B. W drugim etapie procedura przygotowuje „wzór” dalszych obliczeń, na podstawie informacji o położeniu niezerowych elementów. Jest to etap tzw. faktoryzacji symbolicznej (*symbolic factorization*). Polega on na dokonaniu rozkładu LU macierzy, z zastosowaniem odmiany algorytmu Gaussa i wykorzystaniem informacji o położeniu (numerach wierszy i kolumn) elementów niezerowych. W doborze elementu podstawowego wykorzystuje się strategię kompromisu pomiędzy dokładnością obliczeń i zachowaniem rzadkości w macierzach otrzymanych z rozkładu. Ten etap obliczeń jest pracochłonny i w obliczeniach iteracyjnych wykonywany jest zwykle jeden raz. Informacja o dokonanej symbolicznej faktoryzacji jest przechowywana w pamięci roboczej procedury i jest wykorzystywana w każdym z dalszych etapów obliczeń.
- C. Dokonuje się obliczeń macierzy LU dla konkretnych, aktualnych w danym kroku obliczeń, elementów macierzy współczynników. Ta czynność wykonywana jest wielokrotnie w trakcie symulacji.

---

<sup>1</sup> Procedura ta wykorzystywana jest np. w pakiecie obliczeniowym ADAMS.

D. Rozwiązuje się równanie liniowe dla znanej prawej strony i na podstawie faktoryzacji dokonanej w etapie C.

Obliczenia etapów C oraz D są wykonywane bardzo efektywnie. Ma to istotny wpływ na wydajność obliczeń, ponieważ te etapy są najczęściej wykonywane w trakcie symulacji. Powyższa procedura realizuje jedną z metod rozwiązywania układów równań liniowych z udziałem macierzy rzadkich i niesymetrycznych. W piśmiennictwie można znaleźć inne przykłady.

Omówiony wcześniej program komputerowy do analizy kinematycznej mechanizmów można zatem zmodyfikować, wprowadzając procedury numeryczne dla macierzy rzadkich, zwłaszcza tam, gdzie występuje konieczność rozwiązywania układów równań liniowych z udziałem macierzy Jacobiego. Z praktyki obliczeniowej wiadomo, że powoduje to wzrost wydajności obliczeniowej programu, w porównaniu z realizacją programu na macierzach pełnych. Korzyść z uwzględnienia w obliczeniach macierzy rzadkich jest na ogół tym większa, im większy jest rozmiar zadania.