Uzupełnienie materiałów do przedmiotu *dynamika układów wieloczłonowych I*

(fragmenty materiałów do przedmiotu *podstawy robotyki I*)

1 Dynamika członu sztywnego

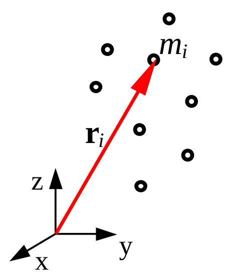
1.1 Rozkład masy członu

Rozpatrzmy zbiór N punktów materialnych. Niech $\mathbf{r}_i$ oznacza wektor wodzący punktu i, a m_i jego masę. *Moment statyczny* zbioru punktów materialnych względem przyjętego układu odniesienia definiuje się w następujący sposób:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_x & S_y & S_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i m_i & \sum_{i=1}^{N} y_i m_i & \sum_{i=1}^{N} z_i m_i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i m_i \ . \tag{1.1}$$

Całkowitą masę zbioru punktów oblicza się sumując masy wszystkich punktów materialnych:

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i \ . \tag{1.2}$$



Rysunek 1.1. Zbiór punktów materialnych.

Środek masy zbioru punktów materialnych, to punkt przestrzeni, którego położenie opisane jest wektorem $\mathbf{r}_C$, zdefiniowanym następująco:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\mathbf{S}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \ . \tag{1.3}$$

Zauważmy, że jeśli początek układu odniesienia, w którym wykonujemy obliczenia umieścimy w środku masy, to w tak przyjętym układzie promień-wektor środka masy będzie oczywiście zerowy. Z równania (1.3) wynika zatem, że moment statyczny liczony względem środka masy jest zerowy. Z faktu tego będziemy niejednokrotnie korzystać, upraszczając postać wyprowadzanych równań.

Macierz momentów bezwładności zbioru punktów materialnych względem przyjętego układu odniesienia zdefiniowana jest następująco:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \left(\begin{bmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{bmatrix} m_i \right) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{N} \left(\begin{bmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix} m_i \right) = -\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{r}}_i \tilde{\mathbf{r}}_i m_i \,. \tag{1.4}$$

Momenty J_x, J_y i J_z noszą nazwę *głównych* momentów bezwładności lub momentów bezwładności względem osi, natomiast momenty J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}, J_{yx}, J_{zx} i J_{zy} nazywane są *dewiacyjnymi* momentami bezwładności. Warto zwrócić uwagę, że macierz bezwładności jest symetryczna, ponieważ spełnione są równości: $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{xz} = J_{zx}$ i $J_{yz} = J_{zy}$.

Człon sztywny jest zbiorem nieskończenie wielu punktów materialnych o infinitezymalnej masie, których względne położenie pozostaje niezmienne (odległości pomiędzy punktami są stałe).

Dla liczby punktów materialnych N dążącej do nieskończoności i masach punktów materialnych dążących do zera, wzory definiujące położenie środka masy oraz momenty bezwładności przybierają postać sum całkowych. Dla członu sztywnego wzory te można zatem przepisać w postaci:

$$\mathbf{S} = \int_V \mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})\mathrm{d}V = \int_m \mathbf{r}\,\mathrm{d}m, \tag{1.5}$$

$$m = \int_V \rho(\mathbf{r})\mathrm{d}V = \int_m \mathrm{d}m, \tag{1.6}$$

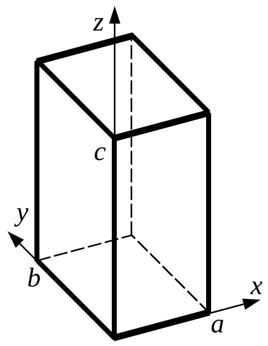
$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m}\int_V \mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})\mathrm{d}V = \frac{1}{m}\int_m \mathbf{r}\,\mathrm{d}m, \tag{1.7}$$

$$\mathbf{J} = -\int_V \tilde{\mathbf{r}}\,\tilde{\mathbf{r}}\,\rho(\mathbf{r})\mathrm{d}V = -\int_m \tilde{\mathbf{r}}\,\tilde{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}m\,. \tag{1.8}$$

W powyższych wzorach całkowanie odbywa się po całej objętości członu V (mamy zatem do czynienia z całką potrójną). Przez $\rho(\mathbf{r})$ oznaczono gęstość członu (masę przypadającą na jednostkę objętości) w punkcie wskazywanym przez wektor wodzący $\mathbf{r}$. Często, dla skrócenia zapisu, iloczyn gęstości i różniczki objętości zastępuje się różniczką masy, a całkowanie po objętości zamienia na całkowanie po masie. My też tak postąpiliśmy.

Zauważmy, że jeżeli układ odniesienia, w którym wykonujemy obliczenia zwiążemy z członem, to położenie środka masy oraz momenty bezwładności obliczone w tym układzie będą wielkościami stałymi (bo wektor wodzący punktu należącego do członu jest stały w układzie z tym członem związanym).

PRZYKŁAD



Zadanie

Obliczyć położenie środka masy i macierz bezwładności prostopadłościanu o jednorodnej gęstości, masie m i wymiarach a, b oraz c.

Rozwiązanie

Najpierw obliczymy gęstość prostopadłościanu:

$$\rho = \frac{m}{abc} = const$$

Współrzędną x_C środka masy w przyjętym układzie odniesienia obliczymy wprost z definicji:

$$x_C = \frac{1}{m}\int_V x\rho\,\mathrm{d}V = \frac{\rho}{m}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c} x\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{\rho}{m}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} cx\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{\rho}{m}\int_{x=0}^{a} bcx\,\mathrm{d}x = \frac{\rho}{m}abc\frac{a}{2} = \frac{a}{2}\cdot$$

Podobnie policzymy pozostałe współrzędne środka masy, otrzymując:

$$\mathbf{r}_C = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Podczas obliczania głównych momentów bezwładności potrzebna nam będzie znajomość całek następującej postaci:

$$\int_V x^2\rho\,\mathrm{d}V = \rho\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c} x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \rho abc\frac{a^2}{3} = \frac{1}{3}ma^2\cdot$$

Podczas obliczania momentów dewiacyjnych potrzebne będą całki następującej postaci:

$$\int_V xy\rho\,\mathrm{d}V = \rho\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c} xy\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \rho\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} cxy\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \rho c\frac{b^2}{2}\int_{x=0}^{a} x\,\mathrm{d}x = \rho c\frac{b^2}{2}\cdot\frac{a^2}{2} = \frac{1}{4}\rho abc\,ab = \frac{1}{4}mab\cdot$$

Po podstawieniu obliczonych całek do wzoru na macierz bezwładności, otrzymujemy poszukiwany wynik:

$$\mathbf{J} = m\begin{bmatrix} \frac{b^2+c^2}{3} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2+c^2}{3} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2+b^2}{3} \end{bmatrix}.$$

Z członem sztywnym układ odniesienia można związać na nieskończenie wiele różnych sposobów. Stajemy zatem przed problemem określenia zależności pomiędzy momentami bezwładności członu obliczonymi względem różnych układów odniesienia.

Niech $\mathbf{r}$ oznacza wektor wodzący pewnego punktu A, natomiast $\mathbf{s}$ – wektor o początku w środku masy członu (punkt C) i końcu w punkcie A. Przy tak przyjętych oznaczeniach możemy napisać oczywistą zależność:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \mathbf{s}\,. \tag{1.9}$$

Rysunek 1.2. Obliczanie momentów bezwładności względem
a) przesuniętego układu odniesienia, b) obróconego układu odniesienia

Powyższą zależność możemy wykorzystać podczas obliczania macierzy bezwładności:

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= -\int_m \tilde{\mathbf{r}}\,\tilde{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}m = -\int_m (\tilde{\mathbf{r}}_C + \tilde{\mathbf{s}})(\tilde{\mathbf{r}}_C + \tilde{\mathbf{s}})\,\mathrm{d}m = -\int_m \tilde{\mathbf{r}}_C\tilde{\mathbf{r}}_C\,\mathrm{d}m - \int_m \tilde{\mathbf{r}}_C\tilde{\mathbf{s}}\,\mathrm{d}m - \int_m \tilde{\mathbf{s}}\tilde{\mathbf{r}}_C\,\mathrm{d}m - \int_m \tilde{\mathbf{s}}\tilde{\mathbf{s}}\,\mathrm{d}m = \\ &= -\tilde{\mathbf{r}}_C\tilde{\mathbf{r}}_C\int_m \mathrm{d}m - \tilde{\mathbf{r}}_C\int_m \tilde{\mathbf{s}}\mathrm{d}m - \int_m \tilde{\mathbf{s}}\mathrm{d}m\,\tilde{\mathbf{r}}_C - \int_m \tilde{\mathbf{s}}\tilde{\mathbf{s}}\,\mathrm{d}m\,.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Jak wiadomo, moment statyczny liczony względem środka masy jest zerowy, co można zapisać w formie równania:

$$\int_m \mathbf{s}\,\mathrm{d}m = \mathbf{0}\,. \tag{1.11}$$

Macierz stowarzyszona z wektorem zerowym jest również zerowa, zatem równanie (1.10) można znacznie uprościć. Zauważmy też, że ostatnia całka w tym równaniu jest po prostu macierzą bezwładności członu liczoną względem układu odniesienia o początku w środku masy. Oznaczając tę macierz przez $\mathbf{J}_C$ możemy równanie (1.10) przepisać w znacznie prostszej postaci:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_C - m\tilde{\mathbf{r}}_C\tilde{\mathbf{r}}_C\,. \tag{1.12}$$

Jeżeli znamy macierz bezwładności obliczoną względem pewnego układu, to – korzystając z powyższego równania – możemy obliczyć macierz bezwładności względem dowolnego innego układu o takiej samej orientacji osi. Zastanówmy się teraz, jak obliczyć macierz bezwładności względem inaczej zorientowanego układu.

Rozważmy dwa układy odniesienia π_0 i π_1, o wspólnym początku w środku masy członu, lecz o różnej orientacji. Wektor wodzący dowolnego punktu A można zapiać zarówno w jednym, jak i w drugim układzie odniesienia. Zależność pomiędzy współrzędnymi wektora w tych układach dana jest wzorem:

$$\mathbf{s}^{(0)} = \mathbf{R}_1^0\mathbf{s}^{(1)}. \tag{1.13}$$

Przyjmijmy, że dana jest macierz bezwładności[1] $\mathbf{J}_C^{(1)}$ liczona względem układu π_1. Zależność (1.13) można wstawić do równania definiującego macierz $\mathbf{J}_C^{(0)}$, a następnie wykorzystać łatwą do udowodnienia[2] $\tilde{\mathbf{a}}^{(0)} = \mathbf{R}_1^0\tilde{\mathbf{a}}^{(1)}\mathbf{R}_1^{0^\mathrm{T}}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_C^{(0)} &= -\int_m \tilde{\mathbf{s}}^{(0)}\tilde{\mathbf{s}}^{(0)}\mathrm{d}m = -\int_m \mathbf{R}_1^0\tilde{\mathbf{s}}^{(1)}\mathbf{R}_1^{0^\mathrm{T}}\mathbf{R}_1^0\tilde{\mathbf{s}}^{(1)}\mathbf{R}_1^{0^\mathrm{T}}\mathrm{d}m = \\ &= \mathbf{R}_1^0\left(-\int_m \tilde{\mathbf{s}}^{(1)}\tilde{\mathbf{s}}^{(1)}\mathrm{d}m\right)\mathbf{R}_1^{0^\mathrm{T}} = \mathbf{R}_1^0\mathbf{J}_C^{(1)}\mathbf{R}_1^{0^\mathrm{T}}\,.\end{aligned} \tag{1.14}$$

Jak widać, powyższy wzór pozwala na obliczenie macierzy bezwładności względem obróconego układu odniesienia.

W najbardziej ogólnym przypadku interesuje nas zarówno przesunięcie, jak i obrót układu odniesienia, względem którego obliczamy macierz bezwładności. Niech układ π_0 będzie usytuowany dowolnie, natomiast układ π_1 niech ma początek w środku masy członu

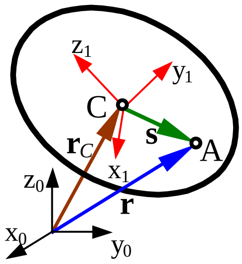
---

[1] Poprzez indeks „(1)” w oznaczeniu macierzy bezwładności sygnalizujemy, że jest ona liczona względem kierunków osi układu π_1. W wypadku wektorów identyczny symbol oznacza co innego: że współrzędne wektora zapisane są w układzie π_1.

[2] Dowód: $\tilde{\mathbf{a}}^{(0)}\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{R}_1^0\left(\tilde{\mathbf{a}}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}\right) = \mathbf{R}_1^0\tilde{\mathbf{a}}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{R}_1^0\tilde{\mathbf{a}}^{(1)}\mathbf{R}_1^{0^\mathrm{T}}\mathbf{b}^{(0)} = \left(\mathbf{R}_1^0\tilde{\mathbf{a}}^{(1)}\mathbf{R}_1^{0^\mathrm{T}}\right)\mathbf{b}^{(0)}$ dla dowolnego $\mathbf{b}^{(0)}$.

(chcemy skorzystać z faktu, że moment statyczny liczony w układzie π_1 jest zerowy). Transformacja współrzędnych dowolnego punktu z układu π_1 do π_0 dana jest wzorem:

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{r}_C^{(0)} + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{s}^{(1)}. \tag{1.15}$$



Rysunek 1.3. Obliczanie momentów bezwładności względem dowolnego układu odniesienia.

Macierz bezwładności członu liczona względem układu π_0 dana jest wzorem (pomijamy szczegóły wyprowadzenia, takie same jak w wypadku poprzednich wzorów):

$$\mathbf{J}^{(0)} = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{J}_C^{(1)} \mathbf{R}_1^{0^\mathrm{T}} - m \tilde{\mathbf{r}}_C^{(0)} \tilde{\mathbf{r}}_C^{(0)}. \tag{1.16}$$

Powyższe równanie jest uogólnieniem znanego z mechaniki klasycznej twierdzenia Steinera. Warto zwrócić uwagę na to, że istotną rolę odgrywa fakt, że układ π_1 ma początek w środku masy członu. Gdyby był usytuowany dowolnie, to uzyskane wzory miałyby bardziej skomplikowaną postać. Momenty bezwładności obliczane względem układu o początku w środku masy noszą nazwę *centralnych* momentów bezwładności.

Jeżeli znamy macierz bezwładności obliczoną względem dowolnego układu, to korzystając z wzoru (1.16) (po prostych przekształceniach) możemy wyznaczyć macierz bezwładności względem układu o początku w środku masy. Kolejny raz korzystając ze wzoru (1.16) możemy obliczyć macierz bezwładności względem dowolnego innego układu odniesienia.

PRZYKŁAD

Zadanie

Dla prostopadłościanu z poprzedniego przykładu obliczyć macierz bezwładności względem układu o początku w jego środku masy.

Rozwiązanie

Obliczając macierz bezwładności posłużymy się uogólnieniem twierdzenia Steinera i skorzystamy z faktu, że w układzie odniesienia o początku w wierzchołku prostopadłościanu znamy macierz bezwładności $\mathbf{J}$ i położenie środka masy $\mathbf{r}_C$. Podstawiając do wzoru, otrzymujemy:

$$\mathbf{J}_C = \mathbf{J} + m\tilde{\mathbf{r}}_C\tilde{\mathbf{r}}_C = m\begin{bmatrix} \frac{b^2+c^2}{3} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2+c^2}{3} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2+b^2}{3} \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} 0 & -\frac{c}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} & 0 & -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} & \frac{a}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{c}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} & 0 & -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} & \frac{a}{2} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= m\begin{bmatrix} \frac{b^2+c^2}{3} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2+c^2}{3} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2+b^2}{3} \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} -\frac{b^2+c^2}{4} & \frac{ab}{4} & \frac{ac}{4} \\ \frac{ab}{4} & -\frac{a^2+c^2}{4} & \frac{bc}{4} \\ \frac{ac}{4} & \frac{bc}{4} & -\frac{a^2+b^2}{4} \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} \frac{b^2+c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2+c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+b^2}{12} \end{bmatrix}.$$

1.2 Równania ruchu członu

Wyprowadzimy teraz równania Newtona i Eulera, opisujące zależność przyspieszenia liniowego i kątowego członu sztywnego od sił i momentów działających na człon.

Isaac Newton sformułował drugą zasadę dynamiki, czyli prawo ruchu punktu materialnego o masie m, wiążące przyspieszenie punktu z działającą nań siłą $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} \,. \tag{1.17}$$

W powyższym wzorze przez $\mathbf{r}$ oznaczono wektor wodzący punktu materialnego w inercjalnym układzie odniesienia, czyli takim, w którym spełniona jest pierwsza zasada dynamiki, głosząca, że jeśli na punkt materialny nie działa żadna siła lub działa układ sił wzajemnie się równoważących, to punkt ten porusza się względem układu odniesienia ruchem jednostajnym prostoliniowym lub pozostaje w spoczynku (będącym skądinąd szczególnym przypadkiem ruchu jednostajnego)[1].

Rozpatrzmy teraz zbiór N punktów materialnych. Dla każdego z nich można napisać równanie ruchu w następującej postaci:

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij} = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \,. \tag{1.18}$$

W powyższym wzorze $\mathbf{F}_i$ oznacza siłę zewnętrzną działającą na punkt i, natomiast $\mathbf{F}_{ij}$ oznacza siłę z jaką punkt j działa na punkt i, czyli siłę wewnętrzną w rozpatrywanym zbiorze punktów. Siły zewnętrzne są miarą oddziaływania rozpatrywanego zbioru punktów z obiektami do tego zbioru nienależącymi. Siły wewnętrzne to miara oddziaływania pomiędzy punktami z rozpatrywanego zbioru. Charakter tych oddziaływań (elektryczne, grawitacyjne, sprężyste itd.) nie jest istotny.

Równania ruchu (1.18) dla wszystkich N punktów można zsumować stronami, uzyskując:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \,. \tag{1.19}$$

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki, oddziaływanie punktu i na j jest takie samo, jak oddziaływanie punktu j na i, lecz przeciwnie skierowane:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \,. \tag{1.20}$$

Wynika stąd, że podwójna suma z równania (1.19) jest zerowa (występują w niej zarówno siły $\mathbf{F}_{ij}$, jak i $\mathbf{F}_{ji}$, dla wszystkich możliwych kombinacji i oraz j). Równanie (1.19) upraszcza się zatem do postaci:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \,. \tag{1.21}$$

[1] Oto piękny (?) przykład zdania wielokrotnie złożonego. Pomyślmy, jakie to szczęście, że nie musimy dokonywać rozbioru gramatycznego tego zdania.

Zauważmy, że suma po lewej stronie powyższego równania jest wypadkową siłą zewnętrzną **F**, działającą na zbiór punktów, natomiast wyrażenie po prawej stronie możemy uzyskać mnożąc sumaryczną masę zbioru punktów materialnych (wzór (1.6)) przez drugą pochodną wektora wodzącego środka masy, danego wzorem (1.7). Równane (1.21) można zatem przepisać w następującej postaci:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = m\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\ddot{\mathbf{r}}_i\right) = m\ddot{\mathbf{r}}_C . \tag{1.22}$$

Z powyższego równania wynika bardzo ważny wniosek: siły wewnętrzne w zbiorze punktów materialnych nie wpływają na ruch jego środka masy. Przyspieszenie środka masy zależy jedynie od wypadkowej siły zewnętrznej.

Jeżeli rozważany zbiór składa się z nieskończonej liczby punktów materialnych o nieskończenie małej masie, czyli jeśli tworzy człon sztywny, to w powyższych wzorach sumy należy zastąpić odpowiednimi całkami. W efekcie uzyskamy doskonale znane *równanie Newtona*, opisujące zależność przyspieszenia środka masy członu sztywnego od wypadkowej siły zewnętrznej działającej na człon:

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}_C . \tag{1.23}$$

Powróćmy raz jeszcze do rozpatrywanego zbioru N punktów materialnych. Równanie (1.18) można pomnożyć lewostronnie przez macierz stowarzyszoną z wektorem $\mathbf{r}_i$, otrzymując:

$$\tilde{\mathbf{r}}_i\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \tilde{\mathbf{r}}_i\mathbf{F}_{ij} = m_i\tilde{\mathbf{r}}_i\,\ddot{\mathbf{r}}_i . \tag{1.24}$$

Sumując równania (1.24) dla wszystkich punktów, otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{r}}_i\mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \tilde{\mathbf{r}}_i\mathbf{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{N} m_i\tilde{\mathbf{r}}_i\,\ddot{\mathbf{r}}_i . \tag{1.25}$$

W powyższym równaniu pierwsza suma po lewej stronie to wpadkowy moment sił zewnętrznych **M**, działających na rozpatrywane punkty materialne, obliczany względem początku przyjętego inercjalnego układu odniesienia. Moment ten możemy zapisać nieco inaczej, korzystając z faktu, że każdy wektor $\mathbf{r}_i$ można zapisać jako sumę wektora wodzącego środka masy zbioru punktów $\mathbf{r}_C$ oraz wektora $\mathbf{s}_i$ o początku w środku masy i końcu w punkcie i:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{r}}_i\mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{N} (\tilde{\mathbf{r}}_C + \tilde{\mathbf{s}}_i)\mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{r}}_C\mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{s}}_i\mathbf{F}_i = \tilde{\mathbf{r}}_C\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{s}}_i\mathbf{F}_i = \tilde{\mathbf{r}}_C\mathbf{F} + \mathbf{M}_C . \tag{1.26}$$

W powyższym wzorze **F** oznacza wypadkową siłę działającą na zbiór punktów o linii działania przechodzącej przez środek masy, natomiast $\mathbf{M}_C$ oznacza odpowiadający jej moment sił. Siła **F** i moment $\mathbf{M}_C$ stanowią więc obciążenie zredukowane do punktu C, będącego środkiem masy.

Zauważmy, że dla dowolnych punktów i oraz j spełnione jest następujące równanie (wektor $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ jest równoległy do wektora $\mathbf{F}_{ij}$):

$$\tilde{\mathbf{r}}_i\mathbf{F}_{ij} + \tilde{\mathbf{r}}_j\mathbf{F}_{ji} = (\tilde{\mathbf{r}}_i - \tilde{\mathbf{r}}_j)\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0} . \tag{1.27}$$

W podwójnej sumie w równaniu (1.25) występują wyrażenia typu (1.27) dla wszystkich kombinacji i oraz j, zatem suma ta jest zerowa, a równanie (1.25) upraszcza się do postaci:

$$\tilde{\mathbf{r}}_C \mathbf{F} + \mathbf{M}_C = \sum_{i=1}^{N} m_i \tilde{\mathbf{r}}_i \ddot{\mathbf{r}}_i \,. \tag{1.28}$$

Przy liczbie N dążącej do nieskończoności, gdy rozpatrywany zbiór punktów materialnych staje się członem sztywnym, w równaniu (1.28) sumę można zastąpić całką, uzyskując:

$$\tilde{\mathbf{r}}_C \mathbf{F} + \mathbf{M}_C = \int_m \tilde{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \, \mathrm{d}m \,. \tag{1.29}$$

Niech **r** oznacza wektor wodzący pewnego punktu A, natomiast **s** – wektor o początku w środku masy członu (punkt C) i końcu w punkcie A. Przy tak przyjętych oznaczeniach obowiązuje zależność (1.9), którą możemy wstawić do równania (1.29):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_C \mathbf{F} + \mathbf{M}_C &= \int_m \tilde{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \, \mathrm{d}m = \int_m (\tilde{\mathbf{r}}_C + \tilde{\mathbf{s}})(\ddot{\mathbf{r}}_C + \ddot{\mathbf{s}}) \mathrm{d}m = \int_m \tilde{\mathbf{r}}_C \ddot{\mathbf{r}}_C \, \mathrm{d}m + \int_m \tilde{\mathbf{r}}_C \ddot{\mathbf{s}} \, \mathrm{d}m + \int_m \tilde{\mathbf{s}} \ddot{\mathbf{r}}_C \, \mathrm{d}m + \int_m \tilde{\mathbf{s}} \ddot{\mathbf{s}} \, \mathrm{d}m = \\ &= \tilde{\mathbf{r}}_C \ddot{\mathbf{r}}_C \int_m \mathrm{d}m + \tilde{\mathbf{r}}_C \int_m \ddot{\mathbf{s}} \, \mathrm{d}m + \int_m \tilde{\mathbf{s}} \, \mathrm{d}m \, \ddot{\mathbf{r}}_C + \int_m \tilde{\mathbf{s}} \ddot{\mathbf{s}} \, \mathrm{d}m \,. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Moment statyczny obliczany względem środka masy jest zerowy, co wyrażono równaniem (1.11). Dwukrotnie różniczkując to równanie względem czasu otrzymujemy kolejny użyteczny wzór:

$$\int_m \ddot{\mathbf{s}} \, \mathrm{d}m = \mathbf{0} \,. \tag{1.31}$$

Uwzględniając (1.11), (1.31) oraz (1.6) w równaniu (1.30), otrzymujemy jego mniej skomplikowaną postać:

$$\tilde{\mathbf{r}}_C \mathbf{F} + \mathbf{M}_C = m \tilde{\mathbf{r}}_C \ddot{\mathbf{r}}_C + \int_m \tilde{\mathbf{s}} \ddot{\mathbf{s}} \, \mathrm{d}m \,. \tag{1.32}$$

Jeżeli w powyższym wzorze uwzględnimy równanie Newtona (1.23), to otrzymamy:

$$\mathbf{M}_C = \int_m \tilde{\mathbf{s}} \ddot{\mathbf{s}} \, \mathrm{d}m \,. \tag{1.33}$$

Wektor **s** (wektor wodzący punktu materialnego o masie dm) jest stały w układzie odniesienia związanym z członem, zatem jego pochodna wyraża się równaniem:

$$\dot{\mathbf{s}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{s} \,, \tag{1.34}$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}$ oznacza prędkość kątową członu względem inercjalnego układu odniesienia.

Różniczkując wektor **s** kolejny raz, otrzymamy:

$$\ddot{\mathbf{s}} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \mathbf{s} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{s} \,. \tag{1.35}$$

Występujący w równaniu (1.33) iloczyn $\tilde{\mathbf{s}} \ddot{\mathbf{s}}$ można zatem zapisać w następujący sposób:

$$\tilde{\mathbf{s}} \ddot{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{s}} \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{s}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{s} = -\tilde{\mathbf{s}} \tilde{\mathbf{s}} \dot{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\mathbf{s}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\mathbf{s}} \boldsymbol{\omega} \,. \tag{1.36}$$

Ze znanej tożsamości $\tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{w} + \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{w}} \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, po uwzględnieniu, że $\tilde{\mathbf{w}} \mathbf{w} = \mathbf{0}$, wynika następujący związek:

$$\tilde{\mathbf{s}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} (\tilde{\mathbf{s}} \boldsymbol{\omega}) + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \widetilde{(\tilde{\mathbf{s}} \boldsymbol{\omega})} \mathbf{s} + \widetilde{(\tilde{\mathbf{s}} \boldsymbol{\omega})} \tilde{\mathbf{s}} \boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{s}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} (\tilde{\mathbf{s}} \boldsymbol{\omega}) + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \widetilde{(\tilde{\mathbf{s}} \boldsymbol{\omega})} \mathbf{s} = \tilde{\mathbf{s}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} (\tilde{\mathbf{s}} \boldsymbol{\omega}) - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\mathbf{s}} (\tilde{\mathbf{s}} \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0} . \tag{1.37}$$

Ostatecznie, uwzględniając powyższe równanie, uzyskujemy zależność:

$$\tilde{\mathbf{s}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\mathbf{s}}\boldsymbol{\omega} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\mathbf{s}}\tilde{\mathbf{s}}\boldsymbol{\omega}. \tag{1.38}$$

Podstawiając (1.36) i (1.38) do równania (1.33), uzyskujemy:

$$\mathbf{M}_C = \int_m \tilde{\mathbf{s}}\ddot{\mathbf{s}}\,\mathrm{d}m = -\int_m \tilde{\mathbf{s}}\tilde{\mathbf{s}}\dot{\boldsymbol{\omega}}\,\mathrm{d}m - \int_m \tilde{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\mathbf{s}}\tilde{\mathbf{s}}\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}m = -\int_m \tilde{\mathbf{s}}\tilde{\mathbf{s}}\,\mathrm{d}m\,\dot{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}\int_m \tilde{\mathbf{s}}\tilde{\mathbf{s}}\,\mathrm{d}m\,\boldsymbol{\omega}. \tag{1.39}$$

W powyższym równaniu występują dwie identyczne całki. Definiują one macierz bezwładności względem środka masy, omawianą w rozdziale 1.1. Wyprowadzone równanie ruchu obrotowego, zwane *równaniem Eulera* można ostatecznie przepisać w następującej formie:

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{J}_C\dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{J}_C\boldsymbol{\omega}. \tag{1.40}$$

Przypomnijmy, że $\mathbf{M}_C$ oznacza wypadkowy moment układu sił zewnętrznych zredukowanego do środka masy członu. Zauważmy, że wszystkie obliczenia prowadziliśmy w inercjalnym układzie odniesienia π_0, względem którego rozpatrujemy ruch członu. Dla uproszczenia zapisu we wzorach pomijaliśmy oznaczenia układu odniesienia. Przepiszmy teraz równanie Eulera oznaczając układ odniesienia:

$$\mathbf{M}_C^{(0)} = \mathbf{J}_C^{(0)}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{01}^{(0)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}^{(0)}\,\mathbf{J}_C^{(0)}\boldsymbol{\omega}_{01}^{(0)}. \tag{1.41}$$

We wzorze występuje macierz $\mathbf{J}_C^{(0)}$, w której momenty bezwładności liczone są względem osi równoległych do osi układu inercjalnego. W trakcie ruchu orientacja członu względem układu inercjalnego zmienia się, zatem dla każdej chwili należy policzyć aktualną macierz $\mathbf{J}_C^{(0)}$. Dlatego stosowanie równania w postaci (1.41) nie zawsze jest wygodnie. Jak wiemy, macierz bezwładności obliczana względem układu odniesienia związanego z członem sztywnym jest stała. Przepiszmy zatem równanie (1.41) do układu π_1 związanego z członem, pamiętając, że prędkość i przyspieszenie kątowe obliczane są względem inercjalnego układu odniesienia π_0, a jedynie zapisywane w układzie π_1. Mnożąc lewostronnie równanie (1.41) przez odpowiednią macierz kosinusów kierunkowych, a następnie wykorzystując wzór (1.14) i zależność $\tilde{\mathbf{a}}^{(0)} = \mathbf{R}_1^0\tilde{\mathbf{a}}^{(1)}\mathbf{R}_1^{0\mathrm{T}}$ (dla $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}_{01}$), otrzymujemy:

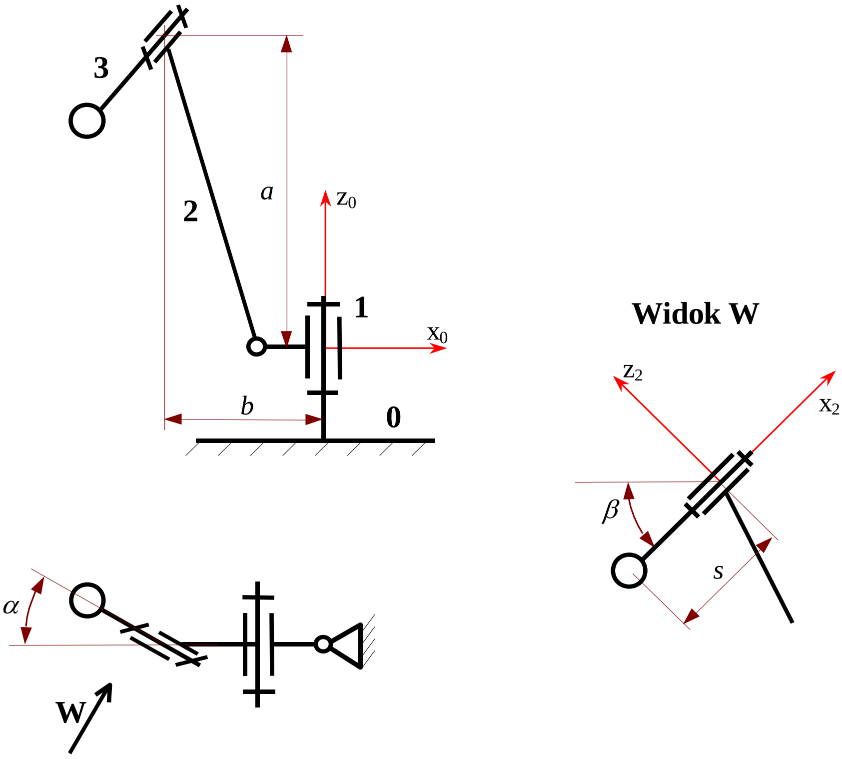
$$\begin{aligned}\mathbf{M}_C^{(1)} &= \mathbf{R}_0^1\mathbf{M}_C^{(0)} = \mathbf{R}_0^1\mathbf{J}_C^{(0)}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{01}^{(0)} + \mathbf{R}_0^1\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}^{(0)}\,\mathbf{J}_C^{(0)}\boldsymbol{\omega}_{01}^{(0)} = \\ &= \mathbf{R}_0^1\mathbf{J}_C^{(0)}\left(\mathbf{R}_0^{1\mathrm{T}}\mathbf{R}_0^1\right)\dot{\boldsymbol{\omega}}_{01}^{(0)} + \mathbf{R}_0^1\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}^{(0)}\left(\mathbf{R}_0^{1\mathrm{T}}\mathbf{R}_0^1\right)\mathbf{J}_C^{(0)}\left(\mathbf{R}_0^{1\mathrm{T}}\mathbf{R}_0^1\right)\boldsymbol{\omega}_{01}^{(0)} = \\ &= \left(\mathbf{R}_0^1\mathbf{J}_C^{(0)}\mathbf{R}_0^{1\mathrm{T}}\right)\left(\mathbf{R}_0^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_{01}^{(0)}\right) + \left(\mathbf{R}_0^1\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}^{(0)}\mathbf{R}_0^{1\mathrm{T}}\right)\left(\mathbf{R}_0^1\,\mathbf{J}_C^{(0)}\mathbf{R}_0^{1\mathrm{T}}\right)\left(\mathbf{R}_0^1\boldsymbol{\omega}_{01}^{(0)}\right) = \\ &= \mathbf{J}_C^{(1)}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{01}^{(1)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}^{(1)}\,\mathbf{J}_C^{(1)}\boldsymbol{\omega}_{01}^{(1)}.\end{aligned} \tag{1.42}$$

Jak widać, po zapisaniu wektorów w układzie odniesienia związanym z członem, postać równania Eulera jest dokładnie taka sama, jak w wypadku zapisania go w układzie inercjalnym. Tym razem jednak występująca w równaniu macierz bezwładności $\mathbf{J}_C^{(1)}$ jest wielkością stałą.

PRZYKŁAD

Zadanie

Na rysunkach przedstawiono w dwóch rzutach manipulator o trzech członach. Z podstawą 0 związany jest inercjalny układ odniesienia π_0, z członem 1 układ π_1, a z członem 2 układ π_2. Osie układów π_0 i π_1 pokrywają się w chwili przedstawionej na rysunkach.



Z członem 3 sztywno związana jest kula o masie $m = 10$ (kg) i momencie bezwładności względem średnicy $J = 0.16$ (kgm^2). Człon 1 porusza się względem podstawy 0 ze stałą prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}_{01}^{(0)} = [0,0,2]^T$ (rad/s). Człon 2 nie porusza się względem członu 1. Człon 3 (wraz z kulą) obraca się względem członu 2 ze stałą prędkością $n = 30$ (obr/min) wokół dodatniego kierunku osi x_2. Przyspieszenie ziemskie ma wartość $\mathbf{g}^{(0)} = [0, 0, -10]^T$ (m/s^2).

Policzyć siłę i moment, zredukowane do początku układu π_0, jakimi podstawa 0 oddziałuje na człon 1, równoważąc obciążenie wywołane ruchem i ciężarem kuli. Wynik podać w układzie π_0.

Wymiary manipulatora: $a = 1$ (m), $b = 0.5$ (m), $s = 0.4$ (m), $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

Rozwiązanie

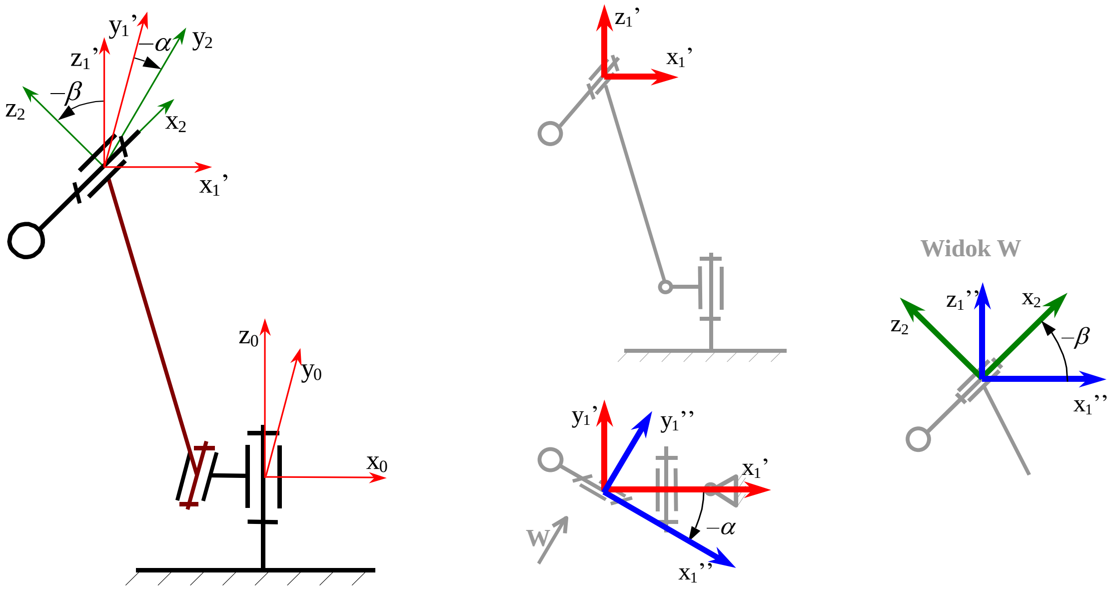
Obliczenie macierzy kosinusów kierunkowych $\mathbf{R}_2^1$

Jeżeli układ π_1 (pokrywający się z π_0) zostanie obrócony o kąt $-\alpha$ wokół osi z, a następnie o kąt $-\beta$ wokół nowej osi y, to kierunki osi układu π_1 pokryją się z kierunkami osi układu π_2. Sekwencję obrotów pokazano na rysunku pomocniczym. Dla uproszczenia rysunku początek układu π_1 przesunięto tak, aby pokrywał się z początkiem układu π_2 (na rysunku przesunięty układ oznaczono przez π_1', a układ po pierwszym obrocie przez π_1''). Macierz $\mathbf{R}_2^1$ można zatem obliczyć następująco:

$$\mathbf{R}_2^1 = \mathbf{R}_z(-\alpha)\mathbf{R}_y(-\beta) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & 0 & \sin(-\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) \end{bmatrix}.$$

Macierz $\mathbf{R}_2^1$ jest stała.



Obliczenie macierzy kosinusów kierunkowych $\mathbf{R}_1^0$

Macierz $\mathbf{R}_1^0$ w chwili pokazanej na rysunku jest macierzą jednostkową. Układ π_1 obraca się względem układu π_0, zatem macierz $\mathbf{R}_1^0$ jest zmienna w czasie.

Obliczenie położenia środka masy kuli w układzie π_0

Niech wektor $\mathbf{r}_C$ będzie skierowany od początku układu π_0 do środka masy kuli. Niech wektor $\mathbf{r}_{12}$ będzie skierowany od początku układu π_1 do początku układu π_2, a wektor $\mathbf{s}$ od początku układu π_2 do środka masy kuli. Współrzędne wektorów $\mathbf{r}_{12}$ i $\mathbf{s}$ odczytać można wprost z rysunku:

$$\mathbf{r}_{12}^{(1)} = \begin{bmatrix} -b & 0 & a \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} ,$$

$$\mathbf{s}^{(2)} = \begin{bmatrix} -s & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} .$$

Współrzędne wektora $\mathbf{r}_C$ można zatem obliczyć następująco:

$$\mathbf{r}_C^{(0)} = \mathbf{R}_1^0 \left(\mathbf{r}_{12}^{(1)} + \mathbf{R}_2^1 \mathbf{s}^{(2)} \right) .$$

Obliczenie przyspieszenia środka masy kuli względem układu π_0

Prędkość środka masy kuli można obliczyć różniczkując wektor $\mathbf{r}_C$ względem czasu, pamiętając, że jedynie macierz $\mathbf{R}_1^0$ jest zmienna w czasie:

$$\dot{\mathbf{r}}_C^{(0)} = \dot{\mathbf{R}}_1^0 \left(\mathbf{r}_{12}^{(1)} + \mathbf{R}_2^1 \mathbf{s}^{(2)} \right) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}^{(0)} \mathbf{R}_1^0 \left(\mathbf{r}_{12}^{(1)} + \mathbf{R}_2^1 \mathbf{s}^{(2)} \right) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}^{(0)} \mathbf{r}_C^{(0)} .$$

Przyspieszenie środka masy kuli można obliczyć, wykonując kolejne różniczkowanie względem czasu i pamiętając, że macierz $\mathbf{R}_1^0$ jest zmienna, natomiast prędkość kątowa członu 1 względem 0 jest stała:

$$\ddot{\mathbf{r}}_C^{(0)} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}^{(0)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}^{(0)} \mathbf{R}_1^0 \left(\mathbf{r}_{12}^{(1)} + \mathbf{R}_2^1 \mathbf{s}^{(2)} \right) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}^{(0)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}^{(0)} \mathbf{r}_C^{(0)} .$$

Obliczenie prędkości kątowej kuli względem układu π_0

Niech $\boldsymbol{\omega}_{03}$ oznacza prędkość kątową kuli względem układu π_0, a $\boldsymbol{\omega}_{23}$ prędkość kątową kuli względem układu π_2. Wektor $\boldsymbol{\omega}_{23}$ utworzyć można na podstawie opisu w treści zadania:

$$\boldsymbol{\omega}_{23}^{(2)} = \begin{bmatrix} n\dfrac{\pi}{30} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \text{ (rad/s)} .$$

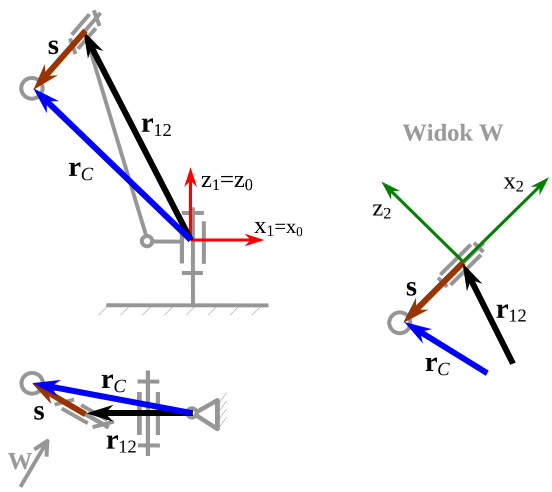
Wektor $\boldsymbol{\omega}_{03}$ obliczyć można tak:

$$\boldsymbol{\omega}_{03}^{(0)} = \boldsymbol{\omega}_{01}^{(0)} + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \boldsymbol{\omega}_{23}^{(2)} .$$

Obliczenie przyspieszenia kątowego kuli względem układu π_0.

Przyspieszenie kątowe jest pochodną prędkości kątowej względem czasu. Wykonując różniczkowanie uzyskujemy nieskomplikowane równanie, gdyż jedynie macierz $\mathbf{R}_1^0$ zmienia się w czasie:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{03}^{(0)} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{01}^{(0)} \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \boldsymbol{\omega}_{23}^{(2)} .$$



Budowa macierzy bezwładności kuli

Macierz bezwładności kuli obliczana w układzie π_3 związanym z kulą jest wielkością stałą. Położenie układu π_3 nie zostało zdefiniowane (można by go przyjąć np. w środku kuli i zorientować tak, aby oś x_3 pokrywała się z osią x_2), gdyż jak się dalej okaże, nie jest to konieczne. Niezależnie od przyjętej orientacji układu π_3 macierz bezwładności kuli względem jej środka masy i kierunków osi układu π_3 ma następującą postać (momenty główne są dane, momenty dewiacyjne są zerowe, ze względu na symetrię):

$$\mathbf{J}_C^{(3)}=\begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} = J\,\mathbf{I}_{3\times 3}.$$

Transformacja macierzy bezwładności do kierunków osi układu π_0

Nie wyznaczyliśmy wprawdzie macierzy kosinusów kierunkowych $\mathbf{R}_3^0$, ale do przeliczenia macierzy bezwładności do kierunków osi układu π_0 nie jest to niezbędne. Wykorzystamy fakt, że macierz bezwładności ma postać macierzy jednostkowej pomnożonej przez skalar. Należy podkreślić, że w ogólnym wypadku tak nie jest i wyznaczenie macierzy $\mathbf{R}_3^0$ byłoby konieczne. Oto obliczenia:

$$\mathbf{J}_C^{(0)} = \mathbf{R}_3^0 \mathbf{J}_C^{(3)} \mathbf{R}_3^{0^{\mathrm{T}}} = J\,\mathbf{R}_3^0 \mathbf{I}_{3\times 3} \mathbf{R}_3^{0^{\mathrm{T}}} = J\,\mathbf{R}_3^0 \mathbf{R}_3^{0^{\mathrm{T}}} = J\,\mathbf{I}_{3\times 3}.$$

Obliczenie siły działającej na kulę (równanie Newtona)

Znając przyspieszenie środka masy kuli względem inercjalnego układu odniesienia π_0 i wykorzystując równanie Newtona można obliczyć siłę $\mathbf{F}_N$, która musi być przyłożona do środka masy, aby uzyskał on to przyspieszenie:

$$\mathbf{F}_N^{(0)}=m\ddot{\mathbf{r}}_C^{(0)} .$$

Obliczenie momentu działającego na kulę (równanie Eulera)

Znając przyspieszenie kątowe i prędkość kątową kuli względem inercjalnego układu odniesienia π_0 oraz wykorzystując równanie Eulera można obliczyć moment $\mathbf{M}_E$ działający na kulę:

$$\mathbf{M}_E^{(0)} = \mathbf{J}_C^{(0)} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{03}^{(0)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{03}^{(0)} \mathbf{J}_C^{(0)} \boldsymbol{\omega}_{03}^{(0)}.$$

Obliczenie siły równoważącej ciężar kuli

Na kulę działa siła ciążenia, która musi być równoważona oddziaływaniem $\mathbf{F}_G$ manipulatora na kulę (przyłożonym w środku masy kuli). Oddziaływanie to jest równe co do modułu ciężarowi kuli i ma przeciwny zwrot:

$$\mathbf{F}_G^{(0)}=-m\mathbf{g}^{(0)} .$$

Obliczenie oddziaływania podstawy 0 na człon 1 manipulatora.

Aby obliczyć siłę (zredukowaną do początku układu π_0) i moment, jakimi podstawa 0 oddziałuje na człon 1, równoważąc obciążenie wywołane ruchem i ciężarem kuli należy układ sił $\mathbf{F}_N$ i $\mathbf{F}_G$ (przyłożonych w środku masy kuli) oraz momentu $\mathbf{M}_E$ zastąpić równoważnym układem siły $\mathbf{F}$ (przyłożonej w początku układu π_0) i momentu $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{F}^{(0)}=\mathbf{F}_N^{(0)} + \mathbf{F}_G^{(0)} ,$$

$$\mathbf{M}^{(0)} = \mathbf{M}_E^{(0)} + \tilde{\mathbf{r}}_C^{(0)}\left(\mathbf{F}_N^{(0)} + \mathbf{F}_G^{(0)}\right) .$$

Podstawienie danych liczbowych

$$\mathbf{R}_2^1=\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{6}/4 & 1/2 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.6124 & 0.5 & -0.6124 \\ -0.3536 & 0.866 & 0.3536 \\ 0.7071 & 0 & 0.7071 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_1^0=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{r}_{12}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}(\mathrm{m}),\quad \mathbf{s}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}(\mathrm{m}),\quad \mathbf{r}_C^{(0)} \approx \begin{bmatrix} -0.7449 \\ 0.1414 \\ 0.7172 \end{bmatrix}(\mathrm{m}),\quad \ddot{\mathbf{r}}_C^{(0)} \approx \begin{bmatrix} 2.9798 \\ -0.5657 \\ 0 \end{bmatrix}(\mathrm{m/s^2}),$$

$$\boldsymbol{\omega}_{23}^{(2)} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}(\mathrm{rad/s}),\quad \boldsymbol{\omega}_{03}^{(0)} \approx \begin{bmatrix} 1.9238 \\ -1.1107 \\ 4.2214 \end{bmatrix}(\mathrm{rad/s}),\quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{03}^{(0)} \approx \begin{bmatrix} 2.2214 \\ 3.8476 \\ 0 \end{bmatrix}(\mathrm{rad/s^2}),\quad \mathbf{J}_C^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.16 & 0 & 0 \\ 0 & 0.16 & 0 \\ 0 & 0 & 0.16 \end{bmatrix}(\mathrm{kg\,m^2}),$$

$$\mathbf{F}_N^{(0)} \approx \begin{bmatrix} 29.798 \\ -5.6569 \\ 0 \end{bmatrix} (\mathrm{N}), \quad \mathbf{M}_E^{(0)} \approx \begin{bmatrix} 0.3554 \\ 0.6156 \\ 0 \end{bmatrix} (\mathrm{N\,m}), \quad \mathbf{F}_G^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} (\mathrm{N}), \quad \mathbf{F}^{(0)} \approx \begin{bmatrix} 29.798 \\ -5.6569 \\ 100 \end{bmatrix} (\mathrm{N}), \quad \mathbf{M}^{(0)} \approx \begin{bmatrix} 18.5544 \\ 96.4803 \\ 0 \end{bmatrix} (\mathrm{N\,m}).$$

