

DYNAMIKA UKŁADÓW WIELOCZŁONOWYCH

Treść wykładu

Janusz Frączek, Marek Wojtyra

Warszawa 2009

Ostatnia modyfikacja 20 kwietnia 2021 r.

Zaliczenie przedmiotu

Przedmiot jest podzielony na wykład, ćwiczenia oraz zajęcia laboratoryjne. Obecność na wykładach jest zalecana i może być kontrolowana.

Obecność na zajęciach laboratoryjnych jest obowiązkowa i kontrolowana. Jeśli przyczyny losowe uniemożliwią uczestnictwo w zajęciach, to braki należy nadrobić z inną grupą laboratoryjną. W ciągu semestru dopuszcza się jedną (nieodpracowaną) nieobecność.

W trakcie semestru wydawane są dwie prace domowe, których oddanie jest obowiązkowe. Prace podlegają ocenie, można za nie zdobyć łącznie 7 punktów (D).

Na ostatnim wykładzie w semestrze odbywa się sprawdzian końcowy, za który można zdobyć do 18 punktów (S).

Do zaliczenia przedmiotu konieczne jest odbycie zajęć laboratoryjnych oraz oddanie prac domowych. Ocena końcowa z przedmiotu (K) jest uzależniona od łącznej liczby zdobytych punktów w sposób przedstawiony w poniższej tabeli.

$D+S \in$	$\langle 0, 15 \rangle$	$\langle 15, 17 \rangle$	$\langle 17, 19 \rangle$	$\langle 19, 21 \rangle$	$\langle 21, 23 \rangle$	$\langle 23, 25 \rangle$
$K =$	2	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5

Sprawdzian poprawkowy jest przeprowadzany w drugim tygodniu letniej sesji egzaminacyjnej. Zaległości związane z zadaniami domowymi należy rozliczyć wcześniej.

Na sprawdzianie poprawkowym można zdobyć 8 punktów (P). Ocena końcowa wystawiana osobom, które przystąpiły do tego sprawdzianu nie może być większa niż 4, a jej zależność od liczby zdobytych punktów określono w tabeli poniżej.

	$P \in$	$\langle 0, 4 \rangle$	$\langle 4, 5 \rangle$	$\langle 5, 6 \rangle$	$\langle 6, 7 \rangle$	$\langle 7, 8 \rangle$
jeśli $D \leq 5$	$K =$	2	3	3	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$
jeśli $D > 5$	$K =$	2	3	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	4

Zalecana literatura

1. Frączek J., Wojtyra M.: *Kinematyka układów wieloczłonowych. Metody obliczeniowe*. WNT, 2008.
2. Wojtyra M., Frączek J.: *Metoda układów wieloczłonowych w dynamice mechanizmów. Ćwiczenia z zastosowaniem programu ADAMS*. OWPW, 2007.
3. Nikravesh P.E.: *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*. Prentice Hall, 1988.
4. Haug E.J.: *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems. Volume I: Basic Methods*, Allyn and Bacon, 1989.
5. Garcia de Jalon J., Bayo E.: *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems*. Springer-Verlag, 1994.

Wstęp

Zajęcia mają na celu zapoznanie studentów z podstawami teoretycznymi oraz praktyką stosowania metod obliczeniowych kinematyki i dynamiki mechanizmów, zwanych metodą układów wieloczłonowych. Jako układy wieloczłonowe rozumie się układy ciał (członów), których liczba może być różna (od kilku do kilku tysięcy), połączonych ze sobą w różny sposób i mogących się poruszać na skutek różnych wymuszeń. Układem wieloczłonowym może być np. model samochodu, w którym członami są elementy zawieszenia, silnika, nadwozia, ale także model człowieka, w którym członami są elementy układu kostno-szkieletowego. Są to różne układy, ale sposób ich analizy jest wspólny. Wzrost zainteresowania analizą takich układów zaowocował opracowaniem w ostatnich kilkudziesięciu latach, w wielu ośrodkach na świecie, wydajnych algorytmów oraz pakietów komputerowych dużej skali, umożliwiających zautomatyzowanie badań symulacyjnych dużych układów wieloczłonowych.

Wykład podzielony jest na cztery części. Pierwszą z nich poświęcono przypomnieniu niezbędnych wiadomości o funkcjach wektorowych, a także zagadnieniom doboru współrzędnych opisujących układ wieloczłonowy oraz równaniom więzów krępujących współrzędne. Druga część wykładu dotyczy analizy kinematycznej mechanizmów płaskich we współrzędnych absolutnych. Nacisk kładziony jest na systematyczność postępowania i zautomatyzowanie procesu obliczeń. Trzecią część wykładu poświęcono analizie dynamicznej mechanizmów. Przedstawiono równania ruchu układu wieloczłonowego oraz metody rozwiązywania zagadnienia dynamiki. W części czwartej omówiono metody numeryczne całkowania równań różniczkowych i różniczkowo-algebraicznych, wykorzystywane w obliczeniach symulacyjnych układów wieloczłonowych.

1. Funkcje wektorowe, współrzędne i równania więzów

1.1. Przypomnienie wiadomości z matematyki i TMM

1.1.1. Funkcje wektorowe i ich pochodne

Przez pochodną wektora \mathbf{a} względem czasu (oznaczaną tradycyjnie za Newtonem kropką nad symbolem wektora) rozumiemy dalej wektor $\dot{\mathbf{a}}$, który powstaje przez zróżniczkowanie współrzędnych wektora \mathbf{a} względem czasu. Wszędzie gdzie wykonujemy operację różniczkowania zakładamy, że jest ona wykonywalna.

Pochodną wektora względem czasu definiuje się wzorem:

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt} \mathbf{a} = \left[\frac{d}{dt} a_1 \quad \frac{d}{dt} a_2 \quad \cdots \quad \frac{d}{dt} a_n \right]^T = [\dot{a}_1 \quad \dot{a}_2 \quad \cdots \quad \dot{a}_n]^T. \quad (1.1)$$

Zachodzą następujące związki (α i β są skalarami i nie zależą od czasu t):

$$\frac{d(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b})}{dt} = \alpha \dot{\mathbf{a}} + \beta \dot{\mathbf{b}}, \quad \frac{d(\mathbf{a}^T \mathbf{b})}{dt} = \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{b} + \mathbf{a}^T \dot{\mathbf{b}}, \quad \frac{d}{dt}(\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}) = \tilde{\dot{\mathbf{a}}} \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{b}}. \quad (1.2)$$

Podobnie definiuje się pochodną macierzy względem czasu $\dot{\mathbf{A}}_{m \times n}$:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{d}{dt} \mathbf{A} = \left[\frac{d}{dt} a_{ij} \right]. \quad (1.3)$$

Dla operacji różniczkowania macierzy zachodzą wzory (α i β są skalarami i nie zależą od czasu t):

$$\frac{d}{dt}(\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) = \alpha \dot{\mathbf{A}} + \beta \dot{\mathbf{B}}, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{B} + \mathbf{A} \dot{\mathbf{B}}. \quad (1.4)$$

Podstawowe znaczenie dla dalszych rozważań mają wzory określające pochodne wektorów względem wektorów. Jeśli Φ jest skalarom i jest funkcją wektora N -wymiarowego $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_N]^T$, to przez pochodną Φ względem \mathbf{q} (oznaczoną jako $\Phi_{\mathbf{q}}$) rozumiemy wektor wierszowy, określony następująco:

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial q_N} \right]. \quad (1.5)$$

Jeśli przyjmiemy, że Φ jest funkcją wektorową określoną następująco:

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\mathbf{q}) \\ \Phi_2(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ \Phi_m(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

to $m \times N$ wymiarową macierz oznaczoną $\Phi_{\mathbf{q}}$ i zdefiniowaną wzorem:

$$\Phi_q = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_N} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_N} \end{bmatrix}_{m \times N} . \quad (1.7)$$

będziemy nazywać *macierzą Jacobiego* albo *różniczką funkcji (odwzorowania)* Φ . Macierz ta odgrywa fundamentalną rolę w analizie kinematycznej mechanizmów i będzie wielokrotnie wykorzystywana w dalszym wykładzie.

PRZYKŁAD 1.1

Zadanie

Należy obliczyć macierz Jacobiego funkcji wektorowej zadanej wzorem:

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\mathbf{q}) \\ \Phi_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi - c \\ r \sin \varphi - h \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie: } \mathbf{q} = [r \quad \varphi]^T. \quad (a)$$

Rozwiązanie

Macierz Jacobiego odwzorowania Φ ma postać:

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_2} \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (b)$$

Z punktu widzenia dalszych zastosowań ważną rolę pełnią następujące wzory:

$$(\mathbf{a}^T \mathbf{b})_q = \mathbf{b}^T \mathbf{a}_q + \mathbf{a}^T \mathbf{b}_q, \quad (1.8)$$

$$(\mathbf{B} \mathbf{q})_q = \mathbf{B}, \quad (1.9)$$

gdzie \mathbf{a} i \mathbf{b} są wektorami wymiaru m , wektor \mathbf{q} ma wymiar N , natomiast \mathbf{B} jest macierzą prostokątną wymiaru $m \times N$ (\mathbf{a} i \mathbf{b} zależą od \mathbf{q} , natomiast \mathbf{B} nie zależy od \mathbf{q}).

Zależności te można udowodnić stosując proste reguły różniczkowania sum i iloczynów funkcji oraz reguły rachunku macierzowego. Przykładowo zależność (1.8) wynika wprost z następujących rachunków:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}^T \mathbf{b})_q &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\sum_{i=1}^m a_i b_i \right) = \sum_{i=1}^m \left((a_i)_q b_i + a_i (b_i)_q \right) = \sum_{i=1}^m (a_i)_q b_i + \sum_{i=1}^m a_i (b_i)_q = \\ &= \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial q_1} b_i \quad \sum_{i=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial q_2} b_i \quad \dots \quad \sum_{i=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial q_N} b_i \right] + \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial b_i}{\partial q_1} a_i \quad \sum_{i=1}^m \frac{\partial b_i}{\partial q_2} a_i \quad \dots \quad \sum_{i=1}^m \frac{\partial b_i}{\partial q_N} a_i \right] = \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned}
&= [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m] \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial q_1} & \frac{\partial a_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial q_N} \\ \frac{\partial a_2}{\partial q_1} & \frac{\partial a_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial a_2}{\partial q_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_m}{\partial q_1} & \frac{\partial a_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial a_m}{\partial q_N} \end{bmatrix} + [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_m] \begin{bmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial q_1} & \frac{\partial b_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial b_1}{\partial q_N} \\ \frac{\partial b_2}{\partial q_1} & \frac{\partial b_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial b_2}{\partial q_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial b_m}{\partial q_1} & \frac{\partial b_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial b_m}{\partial q_N} \end{bmatrix} = \\
&= \mathbf{b}^T \mathbf{a}_q + \mathbf{a}^T \mathbf{b}_q .
\end{aligned}$$

Przyjmijmy, że pewna funkcja wektorowa Φ jest złożoną funkcją czasu, czyli że współrzędne wektora \mathbf{q} , a w konsekwencji współrzędne wektora Φ , zależą do czasu, tzn.:

$$\Phi(\mathbf{q}(t), t) = [\Phi_1(\mathbf{q}(t), t) \quad \Phi_2(\mathbf{q}(t), t) \quad \dots \quad \Phi_m(\mathbf{q}(t), t)]^T. \quad (1.11)$$

Pochodną zupełną funkcji (odwzorowania) Φ względem czasu oblicza się następująco, korzystając ze wzorów na różniczkowanie funkcji złożonej wielu zmiennych:

$$\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi_q \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t, \quad (1.12)$$

gdzie:

$$\Phi_t = \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \quad \dots \quad \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \right]^T. \quad (1.13)$$

Wzór (1.12) można wykorzystać także dla obliczenia drugiej pochodnej zupełnej względem czasu funkcji Φ . Zauważmy najpierw, że $\dot{\Phi}$ jest funkcją zmiennych \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ i t :

$$\dot{\Phi} = \dot{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (1.14)$$

Różniczkując zależność (1.14), tak jak funkcję złożoną, otrzymujemy:

$$\ddot{\Phi} = \frac{d^2 \Phi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \dot{\Phi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \dot{\Phi}_q \dot{\mathbf{q}} + \dot{\Phi}_{\dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\Phi}_t. \quad (1.15)$$

Podstawiając zależność (1.12) do wzoru (1.15) i wykonując działania otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_q \dot{\mathbf{q}} + \dot{\Phi}_{\dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\Phi}_t &= (\Phi_q \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t)_q \dot{\mathbf{q}} + (\Phi_q \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t)_{\dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} + (\Phi_q \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t)_t = \\
&= (\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{iq} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_q \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{qt} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{tt} = \Phi_q \ddot{\mathbf{q}} + (\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} + 2\Phi_{tq} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{tt}.
\end{aligned} \quad (1.16)$$

W powyższych obliczeniach wykorzystano fakt, że wektor Φ_t nie zależy od $\dot{\mathbf{q}}$, uwzględniono zależność (1.9) oraz wykonano operację zamiany kolejności różniczkowania. Wymienione zależności mają następującą postać:

$$\Phi_{i\dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}_{m \times n}, \quad (\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_{\dot{\mathbf{q}}} = \Phi_q, \quad \Phi_{qt} = \Phi_{tq}. \quad (1.17)$$

Czytelnik zechce zwrócić uwagę, że macierze współczynników przy wektorze $\dot{\mathbf{q}}$ według wzoru (1.12) i przy wektorze $\ddot{\mathbf{q}}$ we wzorze (1.16) są identyczne. W obu przypadkach macierzą współczynników jest bowiem macierz Jacobiego odwzorowania Φ , zdefiniowana wzorem (1.7). Fakt ten wykorzystuje się w algorytmach analizy kinematycznej układów wieloczłonowych. Niektóre operacje różniczkowania macierzy zilustrujemy na przykładach.

PRZYKŁAD 1.2

Zadanie

Funkcja Φ opisana jest wzorem:

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\mathbf{q}, t) \\ \Phi_2(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi - c \\ r \sin \varphi - (a + b t^2) \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie: } \mathbf{q} = [r \quad \varphi]^T. \quad (\text{a})$$

Zakładając, że wektor \mathbf{q} zależy od czasu, należy obliczyć pochodne zupełne względem czasu – pierwszą $\dot{\Phi}$ i drugą $\ddot{\Phi}$.

Rozwiązanie

Macierze Jacobiego $\Phi_{\mathbf{q}}$ i pochodnych cząstkowych Φ_t są równe:

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_2} \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \Phi_t = \begin{bmatrix} 0 \\ -2bt \end{bmatrix}_{2 \times 1}. \quad (\text{b})$$

Aby obliczyć $\dot{\Phi}$ należy podstawić obie macierze do wzoru (1.12):

$$\dot{\Phi} = \Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2bt \end{bmatrix}. \quad (\text{c})$$

Obliczmy teraz iloczyn macierzy Jacobiego i wektora prędkości:

$$\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} \end{bmatrix}_{2 \times 1}. \quad (\text{d})$$

Zrózniczkujemy powyższy iloczyn względem wektora współrzędnych:

$$(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \dot{\varphi} & -\dot{r} \sin \varphi - r \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \cos \varphi \dot{\varphi} & \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} \end{bmatrix}_{2 \times 2}. \quad (\text{e})$$

Pozostałe różniczkowania wykonać znacznie łatwiej:

$$\Phi_{tq} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2 \times 2}, \quad \Phi_{tt} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2b \end{bmatrix}_{2 \times 1}. \quad (\text{f})$$

Obliczenie $\ddot{\Phi}$ sprowadza się do podstawienia powyższych macierzy do wzoru (1.16):

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi} &= \Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} + (\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + 2\Phi_{tq} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{tt} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin \varphi \dot{\varphi} & -\dot{r} \sin \varphi - r \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \cos \varphi \dot{\varphi} & \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2b \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{g})$$

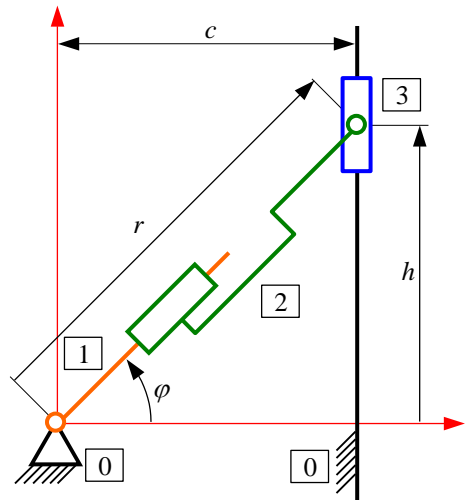
PRZYKŁAD 1.3

Zadanie

Pokazany na rysunku mechanizm opisany jest przez współrzędne r oraz φ . Położenie członu 3, opisane jest przez wielkość h , która jest zadaną funkcją czasu t : $h(t) = a + b t^2$.

Należy:

1. Sformułować zależności (równania więzów), które spełniać muszą współrzędne r oraz φ .
2. Wyznaczyć ograniczenia nałożone na pochodne współrzędnych r oraz φ względem czasu (\dot{r} i $\dot{\varphi}$).
3. Wyznaczyć ograniczenia nałożone na drugie pochodne współrzędnych r oraz φ względem czasu (\ddot{r} i $\ddot{\varphi}$).



Rozwiązanie

Współrzędne r oraz φ muszą spełniać następujący układ równań:

$$\begin{cases} r \cos \varphi - c = 0 \\ r \sin \varphi - (a + b t^2) = 0 \end{cases} \quad (a)$$

Ograniczenia nakładane na pochodne współrzędnych względem czasu uzyskujemy, różniczkując równania (a):

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} = 0 \\ \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} - 2bt = 0 \end{cases} \quad (b)$$

Zauważmy, że powyższy układ równań można zapisać w formie macierzowej (uzyskany wynik warto porównać z równaniem (c) z poprzedniego przykładu):

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2bt \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2 \times 1} \quad (c)$$

Kolejne różniczkowanie pozwala na wyznaczenie więzów nałożonych na drugie pochodne współrzędnych względem czasu:

$$\begin{cases} \ddot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \ddot{\varphi} - \dot{r} \sin \varphi \dot{\varphi} - \dot{r} \sin \varphi \dot{\varphi} - r \cos \varphi \dot{\varphi}^2 = 0 \\ \ddot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \ddot{\varphi} + \dot{r} \cos \varphi \dot{\varphi} + \dot{r} \cos \varphi \dot{\varphi} - r \sin \varphi \dot{\varphi}^2 - 2b = 0 \end{cases} \quad (d)$$

Zauważmy, że powyższy układ równań można zapisać w formie macierzowej (uzyskany wynik warto porównać z równaniem (g) z poprzedniego przykładu):

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin \varphi \dot{\varphi} & -\dot{r} \sin \varphi - r \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \cos \varphi \dot{\varphi} & \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2b \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2 \times 1} \quad (e)$$

Jeśli przyjmiemy, że \mathbf{A} jest macierzą, której elementy są funkcjami wielkości skalarnej q ($a_{ij} = a_{ij}(q)$), to pochodną cząstkową macierzy \mathbf{A} względem skalaru q (nie definiuje się pochodnej macierzy względem wektora!) obliczamy, różniczkując cząstkowo każdy z jej elementów:

$$\mathbf{A}_q = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial q} & \frac{\partial a_{12}}{\partial q} & \dots & \frac{\partial a_{1N}}{\partial q} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial q} & \frac{\partial a_{22}}{\partial q} & \dots & \frac{\partial a_{2N}}{\partial q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{m1}}{\partial q} & \frac{\partial a_{m2}}{\partial q} & \dots & \frac{\partial a_{mN}}{\partial q} \end{bmatrix}_{m \times N} \quad (1.18)$$

Podczas analizy kinematycznej lub dynamicznej mechanizmów szczególnie często oblicza się pochodną cząstkową macierzy kosinusów kierunkowych $\mathbf{R}(\varphi)$ względem kąta obrotu φ . Warto zauważyć, że – w tym szczególnym przypadku – operację różniczkowania można zastąpić operacją mnożenia przez stałą macierz $\mathbf{\Omega}$:

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \mathbf{\Omega} \mathbf{R}(\varphi). \quad (1.19)$$

Pochodną zupełną macierzy kosinusów kierunkowych względem czasu oblicza się w następujący sposób:

$$\dot{\mathbf{R}}(\varphi) = \frac{d\mathbf{R}(\varphi)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{R}(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{\Omega} \mathbf{R}(\varphi) \dot{\varphi}. \quad (1.20)$$

1.1.2. Metoda Newtona rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych

W analizie kinematycznej mechanizmów jeden z najczęściej napotykanym problemem polega na konieczności rozwiązania nieliniowego układu równań algebraicznych postaci:

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}_{m \times 1}, \quad (1.21)$$

gdzie $\Phi(\mathbf{q}, t)$ jest pewną funkcją wektora \mathbf{q} o wymiarze N oraz zmiennej czasu t . Wartości funkcji $\Phi(\mathbf{q}, t)$ są wektorem o wymiarze m .

Zazwyczaj (1.21) jest układem równań nieliniowych, dla którego liczba równań jest równa liczbie niewiadomych ($N = m$). Najczęściej jest to także układ o dużych rozmiarach (wartości N są duże).

Wyznaczenie rozwiązania \mathbf{q}_0 , które spełnia układ równań (1.21) nie zawsze jest zadaniem łatwym. Niekiedy zdarza się, że równanie to można rozwiązać symbolicznie (analitycznie). Metoda rozwiązywania symbolicznego (w formie gotowych wzorów) jest korzystna z wielu względów. Przedstawia rozwiązanie w formie zamkniętego wzoru, co pozwala np. na badanie cech jakościowych równania – poszukiwania maksimów, asymptot etc. w sposób analityczny. Rozwiązanie symboliczne układu równań algebraicznych udaje się jednak jedynie w przypadku prostych mechanizmów o niewielkiej liczbie członów albo dla mechanizmów o szczególnej strukturze. Dlatego rozwiązań równania (1.21) poszukuje się z reguły numerycznie.

Jedną z najskuteczniejszych i najbardziej rozpowszechnionych metod numerycznych znajdowania rozwiązania układu (1.21) jest *metoda Newtona*, nazywana także *metodą Newtona-Raphsona* lub *metodą stycznych*. Jest to metoda iteracyjna. Stosując ją przyjmujemy założenie, że istnieje co najmniej jedno rozwiązanie \mathbf{q}_0 układu (1.21) i że w otoczeniu punktu \mathbf{q}_0 spełniony jest warunek:

$$N = m = \text{rank}(\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})), \quad (1.22)$$

gdzie \mathbf{q} należy do otoczenia punktu \mathbf{q}_0 .

Sposób korzystania z metody Newtona zostanie zilustrowany najpierw na przykładzie jednego równania z jedną niewiadomą, a następnie rozszerzony na przypadek układu równań z wieloma niewiadomymi.

Metoda Newtona dla równania z jedną niewiadomą

Założmy, że dane jest pojedyncze nieliniowe równanie algebraiczne zapisane w formie:

$$\Phi(x) = 0. \quad (1.23)$$

Będziemy poszukiwać rozwiązania tego równania metodą numeryczną. Funkcję Φ można rozwinąć w szereg Taylora w otoczeniu pewnego punktu x^i z dokładnością do pierwszej pochodnej, zakładając, że reszta szeregu jest małą wyższego rzędu (może być pominięta):

$$\Phi(x^i + \Delta x) \approx \Phi(x^i) + \frac{\partial \Phi(x^i)}{\partial x} \Delta x = \Phi(x^i) + \Phi_x(x^i) \Delta x. \quad (1.24)$$

Zakładając, że wartość x^{i+1} powinna spełniać równanie (1.23) (x^i jest pewnym przybliżeniem wstępnym), zależność (1.24) można przyrównać do zera, przyjmując że $\Delta x = x^{i+1} - x^i$. Uzyskujemy równanie w następującej formie:

$$\Phi(x^{i+1}) \approx \Phi(x^i) + \Phi_x(x^i) \cdot (x^{i+1} - x^i) = 0 \quad (1.25)$$

albo w postaci:

$$x^{i+1} = x^i - \frac{\Phi(x^i)}{\Phi_x(x^i)}. \quad (1.26)$$

Pisząc równanie (1.24) odrzuciliśmy małe wyższego rzędu, przez co równość musieliśmy zastąpić równością przybliżoną. Z tego powodu wielkość x^{i+1} nie będzie dokładnym rozwiązaniem równania (1.23), a jedynie jego przybliżeniem.

Warto zauważyć, że wzór (1.26) można stosować jedynie wtedy, gdy pochodna funkcji Φ w punkcie x^i jest niezerowa. Założenie o niezerowości pochodnej zapisaliśmy wcześniej, w formie równania (1.22) (w przypadku funkcji jednej zmiennej zachodzi $N = m = 1$).

Jeśli przyjąć, że x^i oznacza wartości zmiennych w kolejnych iteracjach, to wzór (1.26) określa schemat iteracyjny Newtona pojedynczego równania dla algebraicznego z jedną niewiadomą. Algorytm rozwiązania równania (1.23) metodą iteracyjną Newtona można zapisać w trzech krokach:

- Krok 1:** Wybór przybliżenia początkowego (startowego) x^0 . Sprawdzenie, czy przybliżenie to spełnia równanie (1.23) zadaną dokładnością ε . Jeśli tak, to x^0 jest szukanym rozwiązaniem.
- Krok 2:** Kolejne iteracje – obliczenie przybliżenia x^1 ze wzoru (1.26) na podstawie przybliżenia x^0 . Sprawdzenie, czy przybliżenie to spełnia równanie (1.23) z dokładnością ε . Jeśli tak, to x^1 jest szukanym rozwiązaniem; a jeśli nie, to na podstawie x^1 ze wzoru (1.26) oblicza się x^2 , a następnie ponownie sprawdza warunek, czy równanie (1.23) jest spełnione zadaną dokładnością ε . Czynność tę powtarza się dla kolejnych kroków i , obliczając x^{i+1} , aż do momentu, gdy równanie nieliniowe (1.23) spełnione jest z dokładnością ε (tzn. gdy zachodzi warunek $|\Phi(x^{i+1})| \leq \varepsilon$).
- Krok 3:** Jeśli algorytm w kroku 2 nie przynosi rozwiązania w zadanej liczbie iteracji, to następuje awaryjne zakończenie postępowania.

PRZYKŁAD 1.4

Zadanie

Rozwiązać metodą Newtona-Raphsona równanie $f(x) \equiv x^2 - 2 = 0$, przyjmując przybliżenie startowe $x^0 = 1$.

Rozwiązanie

Obliczamy pochodną funkcji:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad (a)$$

Wykonując kolejne kroki iteracji, otrzymujemy:

i	$f(x^i)$	$f'_x(x^i)$	x^{i+1}
0	-1.0000	2.0000	1.5000
1	0.2500	3.0000	1.4167
2	0.0069	2.8333	1.4142
3	0.0000	2.8284	1.4142

PRZYKŁAD 1.5

Zadanie

Napisać program (w środowisku MATLAB-a) służący do rozwiązania zadania z poprzedniego przykładu, przyjmując, że dopuszczalna liczba iteracji wynosi 25. Następnie przeprowadzić obliczenia dla przybliżeń startowych x^0 wynoszących 100, 1 i 0. Przeanalizować uzyskane wyniki.

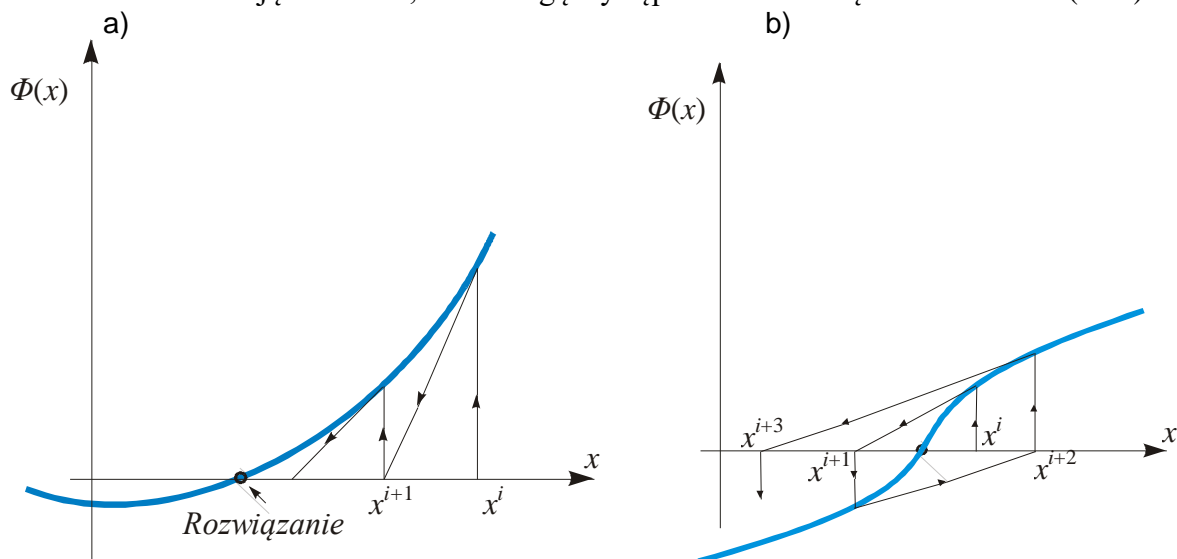
Rozwiązanie

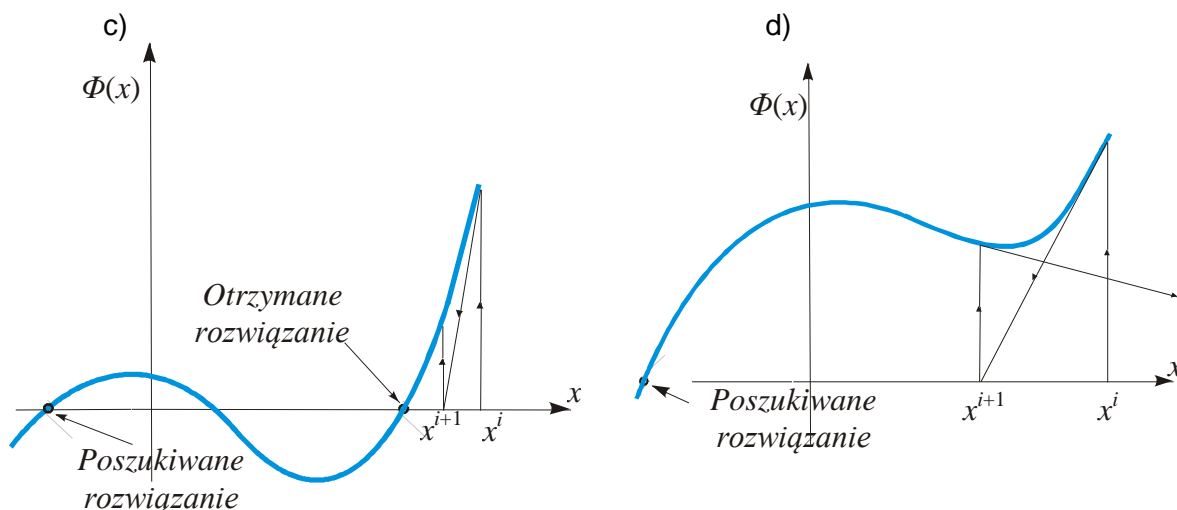
Oto program w MATLAB-ie:

```
x=1; % Przybliżenie startowe
W=[]; % Tablica do zapisu wyników
eps=1e-10; % Dokładność rozwiązania
F=1; % Podstawienie dowolnej liczby większej od eps
iter=1; % Licznik iteracji
while ( (norm(F)>eps) && (iter < 25) )
    F=x^2-2; %Obliczanie funkcji
    Fx=2*x; %Obliczanie pochodnej
    x=x-F/Fx; %Obliczanie kolejnego przybliżenia
    W(iter,:)= [iter F Fx x]; %Zapisywanie wyników pośrednich
    iter=iter+1;
end
disp(' i f(xi) fx(xi) xi+1');
disp(W); %Drukowanie wyników
```

Obliczenia dla przybliżenia startowego $x^0 = 0$ nie powiodły się. Zauważmy, że pochodna funkcji w tym punkcie jest zerowa, a w takim przypadku metoda Newtona zawodzi.

Ilustrację graficzną metody Newtona przedstawiono na rysunku. 1.1. Rysunek 1.1a ukazuje sytuację, gdy metoda Newtona-Raphsona działa bez problemów, natomiast rysunki 1.1b do 1.1d ilustrują trudności, które mogą występować w rozwiązaniu równania (1.23).





Rysunek 1.1. Metoda Newtona znajdowania pierwiastków równania nieliniowego:

- a) ilustracja metody Newtona,
- b) przypadek metody rozbieżnej w okolicy punktu przegięcia,
- c) przypadek wielu rozwiązań,
- d) przypadek metody rozbieżnej w okolicy lokalnego ekstremum

W większości przypadków problemów ze zbieżnością metody Newtona można uniknąć, dobierając lepsze (czyli bliższe poszukiwanemu rozwiązaniu) przybliżenie startowe. Pomocne bywa też zwiększenie liczby dopuszczalnych iteracji. Jest oczywiste, że metoda Newtona-Raphsona zawodzi, gdy rozwiązanie równania nie istnieje, a zwiększanie liczby iteracji i zmienianie przybliżenia startowego nic w takiej sytuacji nie zmienia.

PRZYKŁAD 1.6

Zadanie

Modyfikując program z poprzedniego przykładu, podjąć próbę rozwiązania równania $f(x) \equiv x^2 + 2 = 0$ metodą Newtona-Raphsona.

Rozwiązanie

Modyfikacji wymaga tylko jedna linia programu:

```
F=x^2+2; %Obliczanie funkcji
```

Niezależnie od wybranego przybliżenia startowego oraz od przyjętej liczby dopuszczalnych iteracji, rozwiązania nie udaje się znaleźć.

Warto wiedzieć, że właściwy dobór przybliżenia startowego ma znaczący wpływ na wyniki obliczeń metodą Newtona-Raphsona. O ile jest to możliwe, staramy się, by przybliżenie startowe znajdowało się w bliskim otoczeniu poszukiwanego rozwiązania. Wybór przybliżenia dalekiego od poszukiwanego rozwiązania może prowadzić do zaskakujących, niepożądanych wyników obliczeń.

PRZYKŁAD 1.7

Zadanie

Rozwiązać metodą Newtona-Raphsona następujące równanie:

$$f(x) \equiv x^5 - 18x^4 + 105x^3 - 210x^2 + 104x - 192 = 0.$$

Jako przybliżenie startowe przyjąć następujące wartości: 2.3, 2.4, 2.5 oraz -2.

(a)

Rozwiązanie

Przed wykonaniem obliczeń zauważmy, że równanie (a) ma trzy pierwiastki rzeczywiste i dwa zespolone, funkcję $f(x)$ można bowiem zapisać tak:

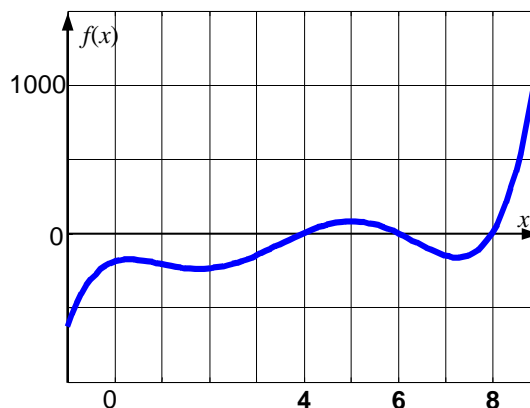
$$f(x) \equiv (x^2+1)(x-4)(x-6)(x-8). \quad (b)$$

Pochodna funkcji $f(x)$ dana jest wzorem:

$$f_x(x) = 5x^4 - 72x^3 + 315x^2 - 420x + 104. \quad (c)$$

Rozwiązania numeryczne poszukiwane są metodą N-R. Napisanie krótkiego programu w MATLAB-ie ułatwia pracę.

```
x=2.3; % Przybliżenie startowe
W=[]; % Tablica do zapisu wyników
eps=1e-10; % Dokładność rozwiązania
F=1; % Podstawienie dowolnej liczby większej od eps
iter=1;
while ( norm(F)>eps) && (iter < 25) )
    F=x^5-18*x^4+105*x^3-210*x^2+104*x-192; %Obliczanie funkcji
    Fx=5*x^4-72*x^3+315*x^2-420*x+104; %Obliczanie pochodnej
    x=x-F/Fx; %Obliczanie kolejnego przybliżenia
    W(iter,:)= [iter F Fx x]; %Zapisywanie wyników pośrednich
    iter=iter+1;
end
disp(' i f(xi) fx(xi) xi+1 ');
disp(W); %Drukowanie wyników
```



Uzyskiwane rozwiązanie numeryczne silnie zależy od przyjętego przybliżenia startowego.

Dla przybliżenia startowego $x^0 = 2.3$ otrzymujemy:

i	$f(x^i)$	$f_x(x^i)$	x^{i+1}
1	-225.5154	68.2465	5.6044
2	49.2756	-97.3819	6.1104
3	-16.8824	-157.3285	6.0031
4	-0.4624	-148.2987	6.0000
5	-0.0005	-148.0003	6.0000
6	-0.0000	-148.0000	6.0000

Dla przybliżenia startowego $x^0 = 2.4$ otrzymujemy:

i	$f(x^i)$	$f_x(x^i)$	x^{i+1}
1	-218.0506	80.9600	5.0933
2	77.6296	-11.9706	11.5784
3	20430.8	15571.0	10.3
4	6446.0	6627.9	9.3
5	1970.8	2913.4	8.6
6	561.3	1374.0	8.2
7	1327	759.1	8.01
8	18.249	555.7431	8.0011
9	0.5712	521.1374	8.0000
10	0.0006	520.0012	8.0000
11	0.0000	520.0000	8.0000

Dla przybliżenia startowego $x^0 = 2.5$ otrzymujemy:

i	$f(x^i)$	$f_x(x^i)$	x^{i+1}
1	-209.3438	93.0625	4.7495
2	71.7692	45.2239	3.1625
3	-126.4677	149.0143	4.0112
4	1.5204	135.1390	4.0000
5	-0.0049	136.0027	4.0000
6	-0.0000	136.0000	4.0000

Jak widać, dla trzech bliskich sobie przybliżeń startowych otrzymano trzy różne wyniki.

Dla przybliżenia startowego $x^0 = -2$ nie uzyskuje się zbieżności po 25 iteracjach i proces poszukiwania rozwiązania zostaje przerwany.

Metoda Newtona dla układu równań nieliniowych

Istota algorytmu iteracyjnego Newtona w zastosowaniu do rozwiązania układu nieliniowych równań algebraicznych (1.21) pozostaje taka sama jak dla funkcji jednej zmiennej. Funkcję wektorową lewych stron punkcie \mathbf{q}^i można rozwinąć w szereg Taylora w otoczeniu pewnego punktu \mathbf{q}^i z dokładnością do pierwszej pochodnej zakładając, że norma reszty szeregu jest małą wyższego rzędu (może być pominięta):

$$\Phi(\mathbf{q}^i + \Delta \mathbf{q}) \approx \Phi(\mathbf{q}^i) + \frac{\partial}{\partial q_1} \Phi(\mathbf{q}^i) \Delta q_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial q_N} \Phi(\mathbf{q}^i) \Delta q_N = \Phi(\mathbf{q}^i) + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}^i) \Delta \mathbf{q}. \quad (1.27)$$

Zakładając, że wektor \mathbf{q}^{i+1} powinien spełniać układ równań (1.21) (\mathbf{q}^i jest pewnym przybliżeniem wstępnym), zależność (1.27) można przyrównać do zera, przyjmując że $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}^{i+1} - \mathbf{q}^i$. Uzyskujemy równanie w następującej formie:

$$\Phi(\mathbf{q}^{i+1}) \approx \Phi(\mathbf{q}^i) + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}^i)(\mathbf{q}^{i+1} - \mathbf{q}^i) = \mathbf{0} \quad (1.28)$$

albo w postaci równoważnej:

$$\mathbf{q}^{i+1} = \mathbf{q}^i - \Phi_{\mathbf{q}}^{-1}(\mathbf{q}^i) \Phi(\mathbf{q}^i). \quad (1.29)$$

Pisząc równanie (1.27) odrzuciliśmy małe wyższego rzędu, przez co równość musieliśmy zastąpić równością przybliżoną. Z tego powodu wielkość \mathbf{q}^{i+1} nie będzie dokładnym rozwiązaniem równania (1.21), a jedynie jego przybliżeniem.

Postępowanie w rozwiązywaniu układu nieliniowych równań algebraicznych postaci (1.21) jest podobne do procedury opisanej w krokach od 1 do 3 w przypadku równania z jedną zmienną. Różnica polega na tym, że rachunki według wzoru rekurencyjnego (1.29) wymagają działań na macierzach. Stąd na przykład, operacji dzielenia przez pochodną we wzorze (1.26) odpowiada formalnie operacja mnożenia przez macierz odwrotną do macierzy pochodnych (macierzy Jacobiego). Procedura opisana w krokach od 1 do 3 kończy się sukcesem w k -tym kroku, jeśli norma $\|\Phi(\mathbf{q}^k)\| \leq \varepsilon$ (jest to tzw. kryterium stopu) w liczbie iteracji mniejszej niż dopuszczalna.

Obliczanie macierzy odwrotnej jest procesem kosztownym numerycznie, rozwiązanie układu równań liniowych jest nieco mniej złożone obliczeniowo. Dlatego w zastosowaniach praktycznych zazwyczaj nie oblicza się macierzy odwrotnej, występującej we wzorze (1.29), lecz rozwiązuje się układ równań liniowych względem $\Delta \mathbf{q}$:

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}^i) \Delta \mathbf{q} = -\Phi(\mathbf{q}^i), \quad (1.30)$$

a następnie oblicza kolejne przybliżenie $\mathbf{q}^{i+1} = \mathbf{q}^i + \Delta \mathbf{q}$.

Procedurę Newtona-Raphsona dla przypadku wielu zmiennych zilustrujemy na przykładzie.

PRZYKŁAD 1.8

Zadanie

Rozwiązać metodą Newtona-Raphsona poniższy układ równań (opisujący mechanizm z przykładu 1.3):

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\mathbf{q}) \\ \Phi_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi - c \\ r \sin \varphi - h \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2 \times 1}, \quad \text{gdzie: } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} r & \varphi \end{bmatrix}^T. \quad (\text{a})$$

Przyjąć jako przybliżenie startowe $\mathbf{q}^0 = \begin{bmatrix} r^0 & \varphi^0 \end{bmatrix}^T$.

Dane: $c = 3$ (m), $h = 4$ (m), $r^0 = 4$ (m), $\varphi^0 = \pi/4$ (rad).

Rozwiązanie

Rozpocniemy od obliczenia macierzy Jacobiego:

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (\text{b})$$

Następnie posłużymy się prostym programem w MATLAB-ie:

```
c=3; % Wymiar charakterystyczny mechanizmu
h=4; % Zadana wartosc wspolrzecznej
q=[4 pi/4]'; %Przyblizenie startowe
eps=1e-10; % Dokladnosc rozwiazania
F=ones(2,1); % Wektor zlozony z dwuch jedynek
iter=1; % Licznik iteracji
while ( norm(F)>eps) && (iter < 25) )
    r=q(1); fi=q(2); % Nadanie czytelnych nazw elementom wektora q
    F=[r*cos(fi)-c;
        r*sin(fi)-h]; % Wektor lewych stron ukladu rownan
    Fq=[cos(fi) -r*sin(fi);
        sin(fi) r*cos(fi)]; % Macierz Jacobiego
    q=q-Fq\F; % Kolejna iteracja
    iter=iter+1;
end
q %Drukowanie wynikow
```

Łatwo przekonać się, że uzyskiwane wyniki są zgodne z rozwiązaniem analitycznym

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 5 & \arctg(4/3) \end{bmatrix}^T.$$

W wielu podręcznikach analizy numerycznej znaleźć można stosowne twierdzenia, określające matematyczne warunki, jakie musi spełniać lokalnie funkcja Φ i jej pochodne, aby metoda Newtona była zbieżna. Ze względu na dość skomplikowany zapis matematyczny nie będziemy tu ich omawiać. Ograniczymy się jedynie do nieprecyzyjnej uwagi, że jeśli bieżący punkt \mathbf{q}^i jest dostatecznie bliski punktowi \mathbf{q}_0 i jeśli macierz Jacobiego oraz jej odwrotność (która musi istnieć) spełniają pewne ogólne ograniczenia, to wartości punktów obliczane ze wzoru (1.29) zbiegają bardzo szybko (kwadratowo) do rozwiązania \mathbf{q}_0 .

Wybrane problemy praktyczne stosowania metody Newtona

W zastosowaniach praktycznych występują niekiedy przypadki, w których metoda Newtona zawodzi. Niektóre z nich wynikają ze szczególnych własności układu równań nieliniowych (1.21), inne są spowodowane złym doбором parametrów w procedurze Newtona. Metoda Newtona jest szczególnie wrażliwa na dobór przybliżenia początkowego, które nie może być zbyt dalekie od poszukiwanego rozwiązania. Wyodrębnimy poniżej dwa typowe przypadki analizy, w których metoda Newtona zawodzi lub daje różne wyniki, zależnie od doboru przybliżenia startowego.

Przypadek pierwszy może wystąpić w sytuacji, gdy nie istnieje rozwiązanie układu równań lub występuje próba rozwiązania układu, gdy nie jest spełniony warunek (1.22), dotyczący rzędu macierzy Jacobiego. W przypadku prostego mechanizmu brak zbieżności

metody Newtona, wynikający z błędnego sformułowania zadania kinematyki, można łatwo wykryć i zinterpretować. Natomiast w ogólnym przypadku analizy mechanizmu o skomplikowanej strukturze, wykrycie niepoprawnego sformułowania zadania kinematyki (np. zadania, które nie posiada rozwiązania) może być trudne. Zatem brak zbieżności procedury Newtona, przy różnych wartościach przybliżeń startowych, może być – między innymi – sygnałem nieistnienia rozwiązania zadania kinematyki.

Drugi z istotnych przypadków szczególnego zachowania procedury Newtona może wynikać z faktu, że układ równań (1.21) posiada wiele rozwiązań. Zależnie od wyboru przybliżenia startowego można otrzymać różne wyniki.

PRZYKŁAD 1.9

Zadanie

W mechanizmie rozważanym w przykładach 1.3 i 1.8 znana jest tym razem wartość współrzędnej r . Należy obliczyć wartości pozostałych współrzędnych (φ i h), stosując metodę Newtona-Raphsona i przyjmując różne przybliżenia początkowe. Obliczenia należy przeprowadzić dla $r = 4$ (m), a następnie dla $r = 2$ (m). Wyniki obliczeń należy zinterpretować.

Rozwiązanie

Możemy wykorzystać układ równań z poprzedniego przykładu, zamieniając jednak elementy wektora niewiadomych \mathbf{q} :

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\mathbf{q}) \\ \Phi_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi - c \\ r \sin \varphi - h \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2 \times 1}, \quad \text{gdzie: } \mathbf{q} = [\varphi \quad h]^T. \quad (\text{a})$$

Następnie wyprowadzamy wzory na elementy macierzy Jacobiego (pamiętając, że wektor \mathbf{q} jest inny niż w poprzednim przykładzie):

$$\Phi_q(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial h} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \sin \varphi & 0 \\ r \cos \varphi & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{b})$$

W dalszych obliczeniach wykorzystamy napisany uprzednio program, modyfikując jedynie kilka linii:

```
r=4; % Zadana wartosc wspolrzednej
|
q=[pi/4 1]'; %Przyblizenie startowe
|
fi=q(1); h=q(2); % Nadanie czytelnych nazw elementom wektora q
|
Fq=[-r*sin(fi) 0;
    r*cos(fi) -1]; % Macierz Jacobiego
```

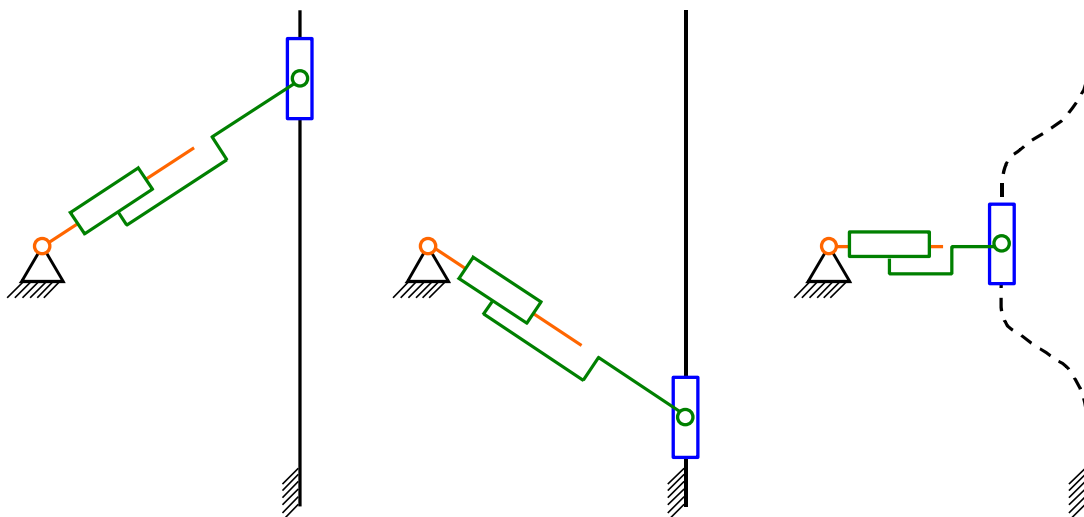
Wykonując obliczenia dla $r = 4$ i dla przybliżenia startowego $\mathbf{q}^0 = [\pi/4 \quad 1]^T$ uzyskujemy rozwiązanie:

$$\mathbf{q} \approx [0.7227 \quad 2.6458]^T. \quad (\text{c})$$

Natomiast dla $r = 4$ i dla przybliżenia startowego $\mathbf{q}^0 = [-\pi/4 \quad -1]^T$ otrzymujemy:

$$\mathbf{q} \approx [-0.7227 \quad -2.6458]^T. \quad (\text{d})$$

Uzyskane rozwiązania odpowiadają dwu różnym konfiguracjom mechanizmu. Zilustrowano je na poniższych rysunkach (schemat lewy i środkowy).



Wykonując obliczenia dla $r = 2$ i dla dowolnych przybliżeń startowych nie uzyskujemy rozwiązania w zadanej liczbie iteracji (nawet, jeśli ją zwiększymy). Łatwo bowiem zauważyć, że nie istnieje taka konfiguracja mechanizmu, w której r jest mniejsze od c (zob. rysunek w przykładzie 1.3 i prawy schemat powyżej). Nie istnieje zatem rozwiązanie układu równań algebraicznych, co prowadzi do braku zbieżności obliczeń metodą Newtona.

Warto podkreślić, że rozważny tu przykład jest banalny (można bez problemu znaleźć rozwiązania analityczne), a rezultaty obliczeń są łatwe do interpretacji. W praktyce jednak, gdy rozważamy duże układy równań, opisujące skomplikowane mechanizmy przestrzenne, nie zawsze łatwo jest określić przyczynę kłopotów ze zbieżnością obliczeń. Odnalezienie wszystkich konfiguracji mechanizmu spełniających postawione zadanie również może być problemem.

Na zakończenie przedstawimy najważniejsze wnioski dotyczące numerycznej metody Newtona rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych, użyteczne w zastosowaniach praktycznych:

1. Zbieżność metody i szybkość tej zbieżności zależy bardzo mocno od tego, jak blisko rozwiązania zadano przybliżenie startowe. Dobór właściwego przybliżenia początkowego (startowego) jest, w wielu przypadkach zagadnieniem kluczowym w zastosowaniach metody.
2. Jeśli w trakcie obliczeń macierz Jacobiego staje się osobliwa lub jest źle uwarunkowana, to metoda na ogół zawodzi; w niektórych przypadkach można ominąć punkt osobliwości poprzez zmianę przybliżenia początkowego.
3. Brak zbieżności metody Newtona w zadanej liczbie iteracji wynika najczęściej ze źle wybranego położenia startowego, ze źle uwarunkowanej macierzy Jacobiego albo z nieistnienia rozwiązania układu równań.
4. Rozwiązanie wyznaczone metodą Newtona może być jednym z wielu rozwiązań. Metoda nie daje możliwości wyznaczenia wszystkich rozwiązań.
5. Kluczowym zagadnieniem w pracochłonności obliczeń jest wyznaczenie iloczynu macierzy odwrotnej do macierzy Jacobiego i wektora lewych stron układu równań. Są to na ogół obliczenia czasochłonne dlatego w niektórych przypadkach stosuje się *zmodyfikowaną metodę Newtona*, w której macierz Jacobiego wyznacza się co pewien krok obliczeń.

1.2. Dobór współrzędnych w opisie kinematyki mechanizmu

Wprowadzenie

Analiza kinematyczna mechanizmu polega na wyznaczaniu parametrów kinematycznych – położenia, prędkości i przyspieszeń określających ruch wszystkich członów mechanizmu względem wybranego układu odniesienia. Sposób zapisu równań kinematyki opisujących mechanizm, ich liczba i stopień komplikacji oraz efektywność obliczeń, zależy przede wszystkim od tego, jakich współrzędnych użyjemy do opisu położenia i orientacji członów mechanizmu w przestrzeni. Istnieją różne metody określania położenia i orientacji członów w przestrzeni; każda z nich ma pewne zalety i wady, widoczne podczas rozwiązywania zadań analizy kinematycznej. Na ogół decyzja o wyborze współrzędnych wynika z celu, w jakim dokonuje się analizy kinematycznej mechanizmu.

Będziemy dążyć do modelowania kinematyki mechanizmów w sposób systematyczny, który łatwo można zautomatyzować w obliczeniach komputerowych. W tego typu uniwersalnych algorytmach do obliczeń kinematycznych stosuje się zazwyczaj jeden z trzech rodzajów współrzędnych:

- współrzędne złączowe,
- współrzędne absolutne,
- współrzędne naturalne.

Należy zwrócić uwagę na kilka istotnych faktów dotyczących opisu kinematyki we wszystkich trzech rodzajach współrzędnych.

Po pierwsze warto podkreślić, że niezależnie od tego, jakich współrzędnych użyjemy, uniwersalny algorytm obliczeń kinematycznych będzie mniej wydajny od algorytmu wyspecjalizowanego, opracowanego dla potrzeb konkretnego mechanizmu. Zalety algorytmów uniwersalnych wynikają z możliwości automatyzacji postępowania, czyli zapisania ich w formie programów komputerowych.

Po drugie należy zauważyć, że w algorytmach ogólnych analizy kinematycznej rzadko udaje się opisać mechanizm za pomocą współrzędnych, które są niezależne od siebie nawzajem. Zazwyczaj dowolnie można wybrać wartości tylko części współrzędnych, a wybór ten narzuca wartości pozostałych. Ograniczenia narzucone na współrzędne nazywa się w mechanice więzami, a matematycznie zapisuje się w postaci równań więzów. Liczba i stopień skomplikowania równań więzów zależy od wyboru rodzaju współrzędnych opisujących mechanizm.

Po trzecie warto stwierdzić, że pewne rodzaje współrzędnych mają liczne zalety w implementacji komputerowej w algorytmach analizy kinematycznej ogólnego przeznaczenia, jednak są całkowicie nieprzydatne w obliczeniach dla prostych przypadków, szczególnie tych, które przeprowadzamy „na papierze”. Uwaga ta odnosi się przede wszystkim do współrzędnych absolutnych i naturalnych.

Współrzędne złączowe

Współrzędne złączowe są szczególnym przypadkiem *współrzędnych względnych*, czyli takich, które opisują położenie i orientację członu względem innych członów, a nie bezpośrednio względem globalnego układu odniesienia. Przez położenie i orientację członu

rozumie się położenie i orientację lokalnego układu odniesienia związanego z tym członem. Współrzędne złączowe są bardzo często wykorzystywane do opisu mechanizmu. Znajdują zastosowanie zarówno w uniwersalnych algorytmach obliczeń kinematycznych, jak też w obliczeniach przeprowadzanych „na papierze”, bez użycia maszyn cyfrowych dla konkretnych, prostych mechanizmów.

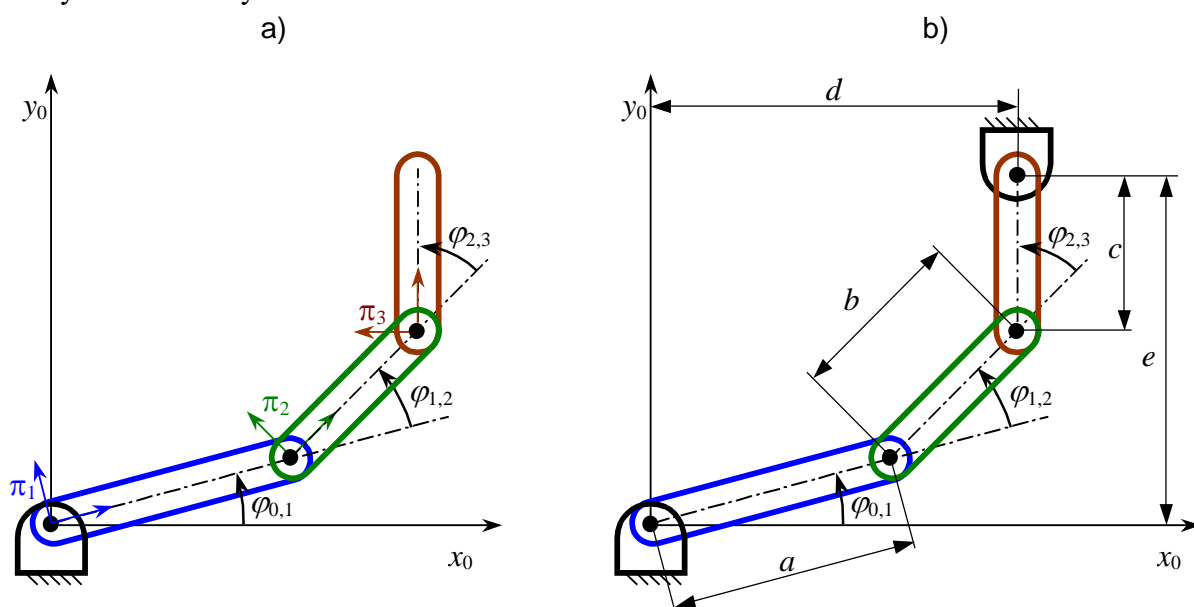
Współrzędne złączowe określają położenie wybranego członu względem innego członu, tworzącego z nim parę kinematyczną. Współrzednymi złączowymi są parametry odmierzające ruch względny w parach kinematycznych. Jeśli w płaskim łańcuchu kinematycznym człony są połączone parami obrotowymi, to jako współrzędne złączowe można wybrać kąty względne pomiędzy członami. Jeśli w łańcuchu występują pary przesuwne (postępowe), to jako współrzędne złączowe wybiera się względne przesunięcia członów.

Przykładem współrzędnych względnych w mechanizmach płaskich pokazanych na rys. 1.2a i 1.2b są kąty $\varphi_{0,1}$, $\varphi_{1,2}$ i $\varphi_{2,3}$. Wektor współrzędnych opisujących konfigurację mechanizmu można w obu przypadkach przedstawić jako:

$$\mathbf{q} = [\varphi_{0,1} \quad \varphi_{1,2} \quad \varphi_{2,3}]^T. \quad (1.31)$$

Znając współrzędne wektora \mathbf{q} można określić położenie dowolnego punktu każdego z członów mechanizmu w dowolnej rozpatrywanej chwili.

Mechanizm pokazany na rys. 1.2a stanowi otwarty łańcuch kinematyczny. W przypadku otwartych łańcuchów kinematycznych liczba współrzędnych złączowych jest równa liczbie stopni swobody mechanizmu. Współrzędne złączowe stanowią zatem minimalny układ współrzędnych opisujących położenie i orientację członów mechanizmu. Współrzędne złączowe opisujące łańcuch otwarty są więc niezależne i nie muszą spełniać żadnych dodatkowych zależności.



Rysunek 1.2 Współrzędne złączowe w otwartym i zamkniętym łańcuchu kinematycznym

Mechanizm pokazany na rys. 1.2a można połączyć obrotowo z podstawą, otrzymując mechanizm z rys. 1.2b. W ten sposób uzyskuje się mechanizm czworoboku przegubowego, będący zamkniętym łańcuchem kinematycznym. Jak wiadomo, liczba stopni swobody tego

układu, czyli ruchliwość, jest równa 1 (o ile układ ten może się w ogóle poruszać). W tym przypadku współrzędne kątowe $\varphi_{0,1}$, $\varphi_{1,2}$ i $\varphi_{2,3}$ są zależne, czyli muszą spełniać dodatkowe zależności, zwane równaniami więzów. Spostrzeżenie to można uogólnić na dowolne zamknięte łańcuchy kinematyczne, stwierdzając, że dla nich współrzędne złączowe są zależne.

W rozważanym przykładowym mechanizmie więzy narzucone na współrzędne wynikają z faktu, że człon 3 jest połączony z podstawą 0 przez parę kinematyczną. Równania więzów, które współrzędne złączowe muszą spełniać w każdej rozpatrywanej chwili, można zatem zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} a \cos \varphi_{0,1} + b \cos(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2}) + c \cos(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2} + \varphi_{2,3}) - d &= 0, \\ a \sin \varphi_{0,1} + b \sin(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2}) + c \sin(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2} + \varphi_{2,3}) - e &= 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Powyższe równania opisują więzy, które z punktu widzenia mechaniki określilibyśmy jako holonomiczne, skleronomiczne i dwustronne.

Mechanizm pokazany na rys. 1.2b ma jeden stopień swobody, zatem do opisanego jego konfiguracji wystarczy jedna współrzędna. Jako współrzędną niezależną można wybrać jeden z kątów $\varphi_{0,1}$, $\varphi_{1,2}$ i $\varphi_{2,3}$, dwa pozostałe uznając za zależne od niego. Wartości współrzędnych zależnych można wyznaczyć rozwiązując względem nich układ równań więzów (1.32), traktując współrzędną niezależną jako wielkość daną.

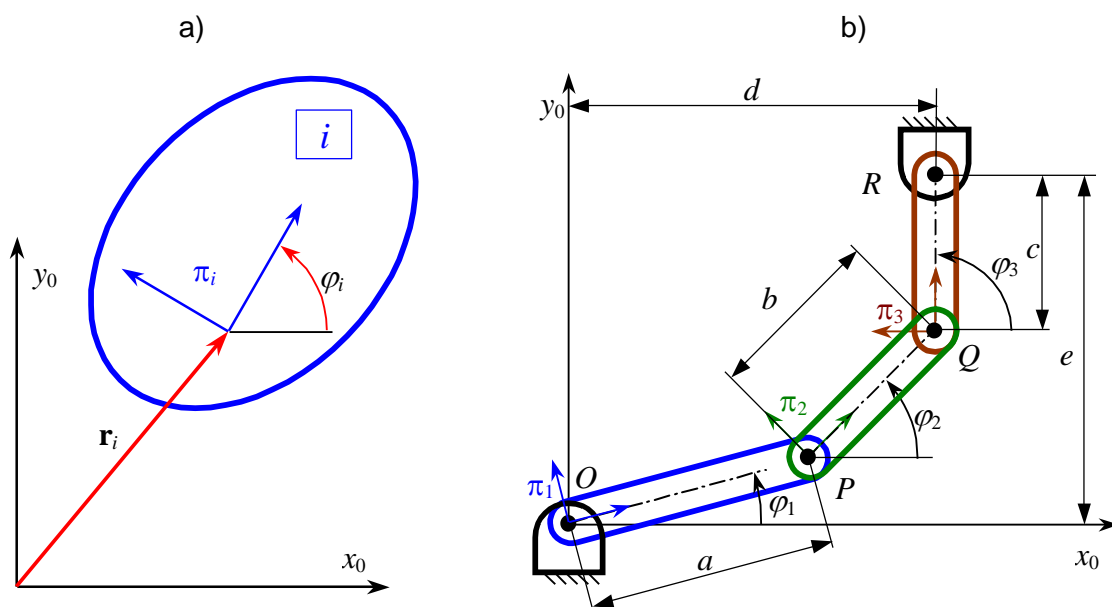
Należy wspomnieć, że kątowe współrzędne złączowe odmierzone są w niektórych sformułowaniach nie od osi układu odniesienia związanego z sąsiednim członem, ale od osi układu globalnego. Takie współrzędne złączowe będą nazywane w dalszym ciągu współrzędnymi złączowymi bezwzględными. Współrzędne te są w wielu przypadkach znacznie wygodniejsze w analizie kinematycznej mechanizmów, ich zastosowanie ogranicza się jednak wyłącznie do mechanizmów płaskich.

Współrzędne absolutne

Współrzędne absolutne należą do grupy *współrzędnych bezwzględnych*, czyli takich, które opisują położenie i orientację członu bezpośrednio względem globalnego układu odniesienia, a nie względem innych członów układu. Przez położenie i orientację członu rozumie się położenie i orientację lokalnego układu odniesienia związanego z tym członem. Współrzędne absolutne znajdują zastosowanie w uniwersalnych algorytmach obliczeń kinematycznych, natomiast ich przydatność w obliczeniach dotyczących prostych mechanizmów, prowadzonych bez pomocy komputera, jest niewielka.

Położenie oraz orientację lokalnego układu odniesienia π_i , związanego z członem i mechanizmu płaskiego, względem układu globalnego π_0 , można jednoznacznie określić podając współrzędne początku układu π_i w π_0 oraz kąt obrotu względnego między tymi układami (rys. 1.3a). Współrzędne początku układu π_i w π_0 zapisujemy w postaci wektora $\mathbf{r}_{0,i}^{(0)} = [x_i \quad y_i]^T$. Kąt obrotu względnego omawianych układów odniesienia oznaczmy przez $\varphi_{0,i}$. Współrzędne absolutne członu i można zapisać łącznie w postaci trójelementowego wektora (dla uproszczenia zapisu będziemy pomijać indeksy „0”):

$$\mathbf{q}_i = [\mathbf{r}_{0,i}^{(0)T} \quad \varphi_{0,i}]^T = [x_i \quad y_i \quad \varphi_i]^T. \quad (1.33)$$



Rysunek 1.3. Współrzędne absolutne członu i mechanizmu

Wektor współrzędnych absolutnych układu składającego się z wielu członów zestawia się z trójelementowych wektorów współrzędnych absolutnych poszczególnych członów. Mechanizm płaski składający się z n członów ruchomych jest zatem opisywany przez wektor współrzędnych absolutnych liczący $3n$ elementów. Wektor współrzędnych absolutnych opisujący mechanizm pokazany na rys. 1.3b ma następującą postać (mechanizm ma trzy człony ruchome, zatem $n = 3$):

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \mathbf{q}_3^T]^T = [x_1 \quad y_1 \quad \varphi_1 \mid x_2 \quad y_2 \quad \varphi_2 \mid x_3 \quad y_3 \quad \varphi_3]^T. \quad (1.34)$$

Tak zdefiniowany wektor współrzędnych wszystkich członów mechanizmu określa jednoznacznie położenie i orientację każdego członu. Współrzędne absolutne opisujące mechanizm są oczywiście zależne. Czworobok przegubowy ma jeden stopień swobody, a jest opisywany przez dziewięć współrzędnych. Zależności pomiędzy współrzędnymi można zatem zapisać w postaci ośmiu równań więzów.

Powyższe spostrzeżenie można uogólnić. Zauważmy, że liczba współrzędnych absolutnych byłaby równa liczbie stopni swobody układu członów jedynie wtedy, gdyby były to człony swobodne, czyli nie tworzyły żadnych par kinematycznych. Tylko wtedy współrzędne absolutne byłyby niezależne i nie zachodziłaby potrzeba formułowania równań więzów. Można zatem stwierdzić, że jeśli w rozpatrywanym układzie członów występują pary kinematyczne, to współrzędne absolutne opisujące ten układ są zależne. Konieczne jest zatem sformułowanie równań więzów, wynikających z faktu istnienia par kinematycznych. Zauważmy, że w przypadku stosowania współrzędnych absolutnych, równania więzów formułuje się zarówno dla zamkniętych, jak i otwartych łańcuchów kinematycznych.

Powróćmy do przykładowego mechanizmu z rys. 1.3b. Równania więzów, czyli zależności pomiędzy współrzędnymi wynikające z istnienia par kinematycznych, można zapisać w następujący sposób:

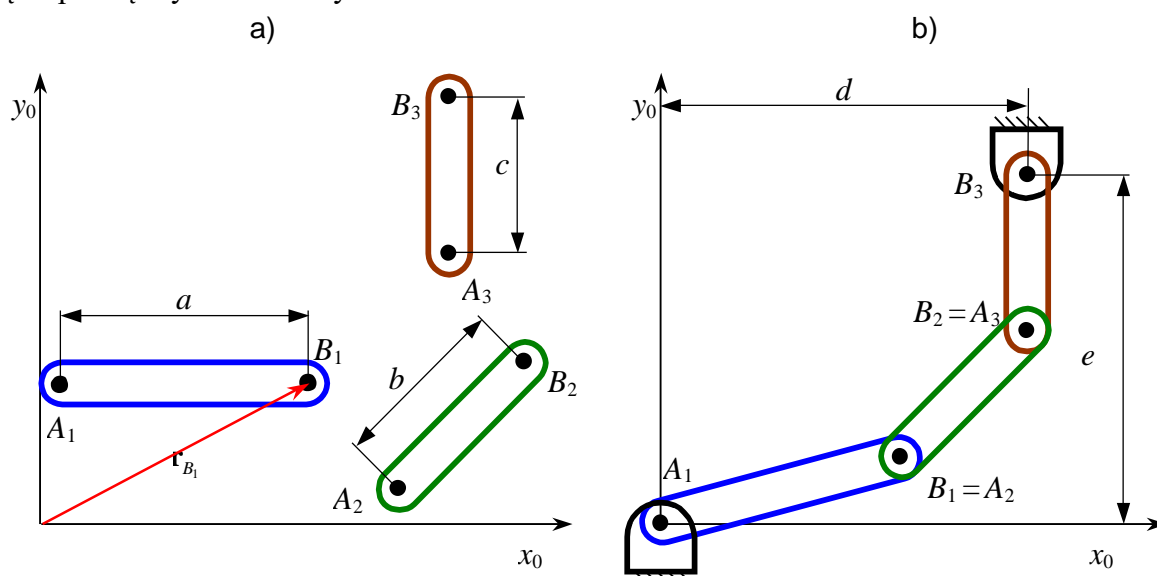
$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & x_1 + a \cos \varphi_1 - x_2 &= 0, & x_2 + b \cos \varphi_2 - x_3 &= 0, & x_3 + c \cos \varphi_3 - d &= 0, \\ y_1 &= 0, & y_1 + a \sin \varphi_1 - y_2 &= 0, & y_2 + b \sin \varphi_2 - y_3 &= 0, & y_3 + c \sin \varphi_3 - e &= 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Pierwsze dwa z powyższych równań wyrażają fakt istnienia pary obrotowej w punkcie¹ O , a kolejne w punktach P , Q i R . Równania więzów muszą być spełnione zawsze, dla każdego wektora współrzędnych absolutnych określających położenie i orientację członów. Powyższe równania opisują więzy, które z punktu widzenia mechaniki określilibyśmy jako holonomiczne, skleronomiczne i dwustronne.

Mechanizm pokazany na rys. 1.3b ma jeden stopień swobody, zatem do opisu jego konfiguracji wystarczy jedna współrzędna. Jedną² współrzędną absolutną można wybrać jako niezależną, osiem pozostałych uznając za zależne. Wartości współrzędnych zależnych można wyznaczyć rozwiązując układ równań więzów (1.35).

Współrzędne naturalne

Położenie i orientację członu na płaszczyźnie względem globalnego układu odniesienia można jednoznacznie określić podając współrzędne kartezjańskie w układzie globalnym dwóch niepokrywających się punktów sztywno związanych z tym członem. Inną możliwością określenia położenia i orientacji członu jest podanie współrzędnych kartezjańskich punktu oraz składowych wersora, kiedy punkt i wersor są sztywno związane z członem. Współrzędne globalne punktów bądź wersorów związanych z członem nazywane są współrzędnymi naturalnymi członu.



Rysunek 1.4. Współrzędne naturalne członów i mechanizmu

Punkty i wersory służące do opisu położenia oraz orientacji członu za pomocą współrzędnych naturalnych są nazywane punktami i wersorami bazowymi. Zazwyczaj punkty i wersory bazowe wybiera się w sposób szczególny, tak aby opisując mechanizm współrzędnymi naturalnymi łatwo było wyrazić fakt istnienia par kinematycznych. Pokażemy to na prostym przykładzie.

Rozważmy trzy człony pokazane na rys. 1.4a. Z każdym z nich związano dwa punkty, których współrzędne kartezjańskie w układzie globalnym określają jednoznacznie położenie

¹ Ściślej: pary obrotowej o osi przechodzącej przez punkt O .

² Ze względu na szczególne usytuowanie układu związanego z członem 1 (zob. rysunek i równania więzów), jako współrzędną niezależną trudno byłoby wybrać x_1 lub x_2 .

i orientację członu na płaszczyźnie. Wektor współrzędnych naturalnych omawianego układu trzech członów definiuje się następująco (wektor ten ma 12 elementów):

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{A_1}^T & \mathbf{r}_{B_1}^T & | & \mathbf{r}_{A_2}^T & \mathbf{r}_{B_2}^T & | & \mathbf{r}_{A_3}^T & \mathbf{r}_{B_3}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_{A_1} & y_{A_1} & x_{B_1} & y_{B_1} & | & x_{A_2} & y_{A_2} & x_{B_2} & y_{B_2} & | & x_{A_3} & y_{A_3} & x_{B_3} & y_{B_3} \end{bmatrix}^T. \quad (1.36)$$

Gdyby na współrzędne w wektorze \mathbf{q} nie nałożono dodatkowych warunków, oznaczałoby to możliwość poruszania się członów w sposób dowolny; co więcej – nie byłby spełniony warunek sztywności członów. Odległość pomiędzy punktami A_i oraz B_i ($i = 1, 2, 3$) jest stała, ponieważ mamy do czynienia z członami sztywnymi. Więzy wynikające z nieodkształcalności członów, narzucone na współrzędne naturalne, można zatem zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} (x_{B_1} - x_{A_1})^2 + (y_{B_1} - y_{A_1})^2 - a^2 &= 0, \\ (x_{B_2} - x_{A_2})^2 + (y_{B_2} - y_{A_2})^2 - b^2 &= 0, \\ (x_{B_3} - x_{A_3})^2 + (y_{B_3} - y_{A_3})^2 - c^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Jeśli rozpatrywany układ trzech członów ruchomych i podstawę połączymy parami kinematycznymi, to otrzymamy mechanizm czworoboku przegubowego, pokazany na rysunku 1.4b. Zauważmy, że punkty A_i oraz B_i zostały wybrane w sposób szczególny – umieszczono je w miejscach, w których znalazły się osie par kinematycznych. Dzięki temu łatwo jest napisać, wynikające z istnienia par kinematycznych, równania więzów nałożonych na współrzędne naturalne:

$$\begin{aligned} x_{A_1} &= 0, & x_{B_1} - x_{A_2} &= 0, & x_{B_2} - x_{A_3} &= 0, & x_{B_3} - d &= 0, \\ y_{A_1} &= 0, & y_{B_1} - y_{A_2} &= 0, & y_{B_2} - y_{A_3} &= 0, & y_{B_3} - e &= 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Łatwo spostrzec, że zależności (1.38) mają wyjątkowo prostą postać. Prosty rachunek pozwala zauważyć, że w rozpatrywanym przykładzie całkowita liczba współrzędnych jest równa 12, a liczba zależności, które muszą być spełnione przez te współrzędne wynosi 11. Jeśli podane równania są niezależne (nie powtarzają już raz nałożonych ograniczeń), to liczba stopni swobody jest równa 1. Równania (1.37) i (1.38) opisują więzy, które z punktu widzenia mechaniki określilibyśmy jako holonomiczne, skleronomiczne i dwustronne.

Powracając do rozważań ogólnych zauważmy, że metoda zapisu położenia i orientacji członów mechanizmu we współrzędnych naturalnych polega na określeniu punktów bazowych członów i zapisaniu równań więzów, które nakładają ograniczenia na wartości tych współrzędnych. Równania te muszą być spełnione w każdej chwili analizy kinematycznej. Łatwo spostrzec, że zapis we współrzędnych naturalnych jest szczególnie wygodny przy tworzeniu równań więzów nakładanych przez pary kinematyczne, mają one bowiem szczególnie prostą postać.

Należy podkreślić, że z każdym członem można wiązać więcej niż dwa punkty bazowe. Ich liczba może zależeć np. od liczby i rodzaju par kinematycznych jakie tworzy człon z innymi członami (łatwiej wtedy napisać równania więzów). Opis niektórych par kinematycznych staje się łatwiejszy, jeśli zamiast punktów użyjemy wersorów bazowych.

Porównanie współrzędnych

W poprzednich punktach omówiliśmy trzy rodzaje współrzędnych służących do opisu położenia i orientacji członów mechanizmu. Wybór rodzaju współrzędnych przynosi określone konsekwencje w analizie kinematycznej mechanizmu. Ma znaczący wpływ na wydajność i dokładność obliczeń, decyduje o możliwości zautomatyzowania analizy, a także wpływa na złożoność algorytmu i łatwość bądź trudność pisania programu komputerowego.

Jak się przekonaliśmy, płaski mechanizm czworoboku przegubowego można opisać za pomocą trzech współrzędnych łączowych albo dziewięciu współrzędnych absolutnych bądź dwunastu współrzędnych naturalnych. Jeśli zatem brać pod uwagę liczbę współrzędnych, to liczba współrzędnych łączowych jest bardzo mała w porównaniu z liczbą współrzędnych absolutnych i naturalnych. Ułatwia to zastosowanie tych współrzędnych do analiz nieskomplikowanych mechanizmów, prowadzonych często bez użycia komputera. Z drugiej strony – duża liczba współrzędnych absolutnych i naturalnych utrudnia stosowanie ich w prostych przypadkach, gdzie obliczenia prowadzimy bez użycia komputera.

W przypadku dowolnych mechanizmów (z pętlami kinematycznymi) współrzędne wszystkich omawianych rodzajów są zależne. Konieczne jest zatem formułowanie i rozwiązywanie równań więzów. Opisuując mechanizm płaskiego czworoboku przegubowego za pomocą współrzędnych łączowych napisaliśmy dwa skalarne równania więzów. Kiedy użyliśmy współrzędnych absolutnych, musieliśmy ułożyć osiem równań, a zastosowanie współrzędnych naturalnych wymagało sformułowania aż jedenastu związków.

Wydawać by się mogło, że ponownie współrzędne łączowe okazały się najlepsze. Tym razem jednak nie jest to wcale takie oczywiste. Zauważmy, że równania więzów (1.32) nakładane na współrzędne łączowe są dość skomplikowane. Ponadto, gdyby mechanizm składał się z większej liczby członów, należałoby się spodziewać jeszcze bardziej skomplikowanych zależności. Równania więzów (1.35) nałożonych na współrzędne absolutne są znacznie mniej złożone. Co więcej, gdyby w mechanizmie przybyło członów, postać równań nie uległaby żadnym zmianom. Pojawiłoby się jedynie więcej równań, opisujących kolejne pary kinematyczne. Najprostszą formę mają równania (1.37) i (1.38) wiążące współrzędne naturalne. One również nie uległyby zmianie, gdyby zwiększono liczbę członów mechanizmu.

Złożoność równań więzów jest bardzo istotnym czynnikiem. Równania te, podczas ich numerycznego rozwiązywania, są różniczkowane cząstkowo względem wszystkich występujących w nich współrzędnych. W przypadku współrzędnych łączowych w równaniu więzów mogą wystąpić nawet wszystkie współrzędne opisujące mechanizm. Różniczkowanie takich równań prowadzi do bardzo skomplikowanych zależności. W przypadku współrzędnych absolutnych i naturalnych w skalarным równaniu więzów pojawić się mogą tylko współrzędne opisujące jeden lub dwa człony ruchome, nienależnie od liczby członów, z której składa się analizowany układ. Zależności tego typu różniczkuje się zdecydowanie łatwiej.

Kolejną bardzo istotną cechą opisu w wybranych współrzędnych jest zależność, bądź niezależność metody postępowania od struktury kinematycznej analizowanego mechanizmu. Omawiany wcześniej mechanizm płaskiego czworoboku przegubowego zawiera cztery pary obrotowe. W przypadku współrzędnych absolutnych i naturalnych równania więzów opisywały wszystkie cztery pary. Inaczej było w przypadku współrzędnych łączowych. Równanie więzów dotyczyło tylko jednej pary kinematycznej, istnienie pozostałych trzech

zostało uwzględnione przez odpowiedni wybór współrzędnych. Problemem staje się więc podział par kinematycznych mechanizmu na te, które będą opisywane przez więzy i te, w których ruch względny będzie odmierzany przez współrzędne. To spostrzeżenie prowadzi do wniosku, że zastosowanie współrzędnych złączowych wymaga wcześniejszego przeanalizowania struktury mechanizmu i skutkuje podziałem par kinematycznych na dwie kategorie. Niewątpliwie utrudnia to zautomatyzowanie postępowania i napisanie programu komputerowego.

Kończąc rozważania możemy krótko stwierdzić, że wybierając rodzaj współrzędnych¹, jakich użyjemy do opisu mechanizmu, decydujemy praktycznie o tym, jak przebiegać będą obliczenia. Jeśli wybierzemy współrzędne złączowe, to będziemy mieli do czynienia z niewielką liczbą równań, ale algorytm postępowania będzie skomplikowany i dość trudny do zapisania w formie programu komputerowego do automatycznych obliczeń. Jeśli natomiast zdecydujemy się na współrzędne absolutne lub naturalne, to liczba równań będzie wprawdzie duża, lecz będą one miały stosunkowo prostą postać, a algorytm obliczeń będzie dość prosty i łatwy do zapisania w formie programu komputerowego.

1.3. Ruchliwość i więzy nadmiarowe. Niezależność więzów

1.3.1. Ruchliwość mechanizmów

Wzory strukturalne

Ruchliwością mechanizmu nazywa się liczbę stopni swobody tworzącego go łańcucha kinematycznego, obliczoną względem nieruchomego członu – podstawy. Jest to jedno z podstawowych pojęć dotyczących struktury mechanizmów.

Ruchliwość jest ważnym wskaźnikiem w analizie mechanizmów, ponieważ jest ona równa liczbie niezależnych warunków, jakie należy nałożyć na ruch mechanizmu, aby określić go w sposób jednoznaczny. Z punktu widzenia konstruktora jest ona równa liczbie niezależnych napędów, jakie należy zastosować w mechanizmie, aby móc w pełni nim sterować. Ruchliwość mechanizmu przestrzennego (w) wyznacza się często ze wzoru strukturalnego (wzoru Czebyszewa-Grüblera-Kutzbacha):

$$w = 6n - \sum_{i=1}^{i=5} i p_i, \quad (1.39)$$

gdzie: n – liczba członów mechanizmu, i – klasa pary kinematycznej, p_i – liczba par kinematycznych i -tej klasy.

Powyższy wzór obowiązuje dla mechanizmów przestrzennych. Gdyby żaden z n członów nie tworzył par kinematycznych, to łączna liczba stopni swobody układu wynosiłaby $6n$. Pary kinematyczne odbierają jednak stopnie swobody, zatem każda z nich zmniejsza ruchliwość o wielkość równą klasie pary.

¹ W praktyce, przystępując do budowy programu komputerowego i wybierając rodzaj współrzędnych, bierzemy pod uwagę nie tylko ich właściwości w obliczeniach kinematycznych, lecz także dynamicznych. Jednak na obecnym etapie rozważań zagadnieniami związanymi z dynamiką nie będziemy się zajmować.

Dla mechanizmów płaskich (czyli takich, w których wszystkie człony poruszają się równolegle do pewnej płaszczyzny) wzór strukturalny ma postać:

$$w = 3n - p_4 - 2p_5. \quad (1.40)$$

Wzór (1.40) otrzymuje się ze wzoru (1.39) przez odjęcie trzech stopni swobody dla każdego z członów i dla każdej pary kinematycznej oraz z pominięcia par kinematycznych klas od I do III, które w mechanizmach płaskich nie występują.

Wzorów na ruchliwość według zależności (1.40) i (1.39) nie można stosować bezkrytycznie. Istnieje wiele przykładów mechanizmów, dla których liczby otrzymane z powyższych zależności dają wynik niezgodny z rzeczywistością. Z tego powodu ruchliwość obliczoną z powyższych wzorów nazywa się niekiedy *ruchliwością teoretyczną*, w odróżnieniu od *ruchliwości rzeczywistej* mechanizmu.

Przedstawimy dwa typowe przypadki, w których wyniki otrzymane ze wzorów (1.39) oraz (1.40) są wątpliwe i wymagają komentarza.

Więzy nadmiarowe (bierne)

Przypadek pierwszy stanowi ilustrację faktu, że w mechanizmie mogą występować tzw. *więzy bierne*, które są szczególnym przypadkiem tzw. więzów *nadmiarowych*. Więzy bierne są to, w uproszczeniu, więzy wprowadzone przez niektóre pary kinematyczne lub związki geometryczne, które krępują stopnie swobody mechanizmu odebrane już przez inne pary lub związki. Ponieważ każdy z nałożonych więzów liczony jest we wzorach (1.40) i (1.39) dokładnie jeden raz – niezależnie od tego, czy jest powtórzeniem innych związków, czy też nie – omawiane wzory dają wyniki niezgodne z rzeczywistością.

Pojęcie więzów biernych zilustrujemy na przykładach. Na rysunku 1.5a pokazano mechanizm płaskiego czworoboku przegubowego. Jest to jeden z mechanizmów najczęściej cytowanych w piśmiennictwie poświęconym teorii maszyn i mechanizmów. Próba szacowania ruchliwości tego mechanizmu ze wzoru (1.39) daje wynik $w = 6 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = -2$. Tymczasem wydaje się oczywiste, że mechanizm może się poruszać, a określenie kąta obrotu członu 1 (korby) względem członu 0 (podstawy) jednoznacznie wyznacza konfigurację mechanizmu. Tym samym ruchliwość rzeczywista mechanizmu powinna być równa 1. Obliczenie ruchliwości ze wzoru (1.40) daje rezultat zgodny z intuicją $w = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 1$.

Z kolei na rysunku 1.5b pokazano odmianę mechanizmu czworoboku przegubowego z dodatkowym członem 4. Wobec wypisanych związków wymiarowych ruchliwość rzeczywista mechanizmu nie zmienia się i pozostaje równa 1. Tymczasem ze wzoru (1.40) wynika teraz, że ruchliwość jest równa $w = 3 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = 0$.

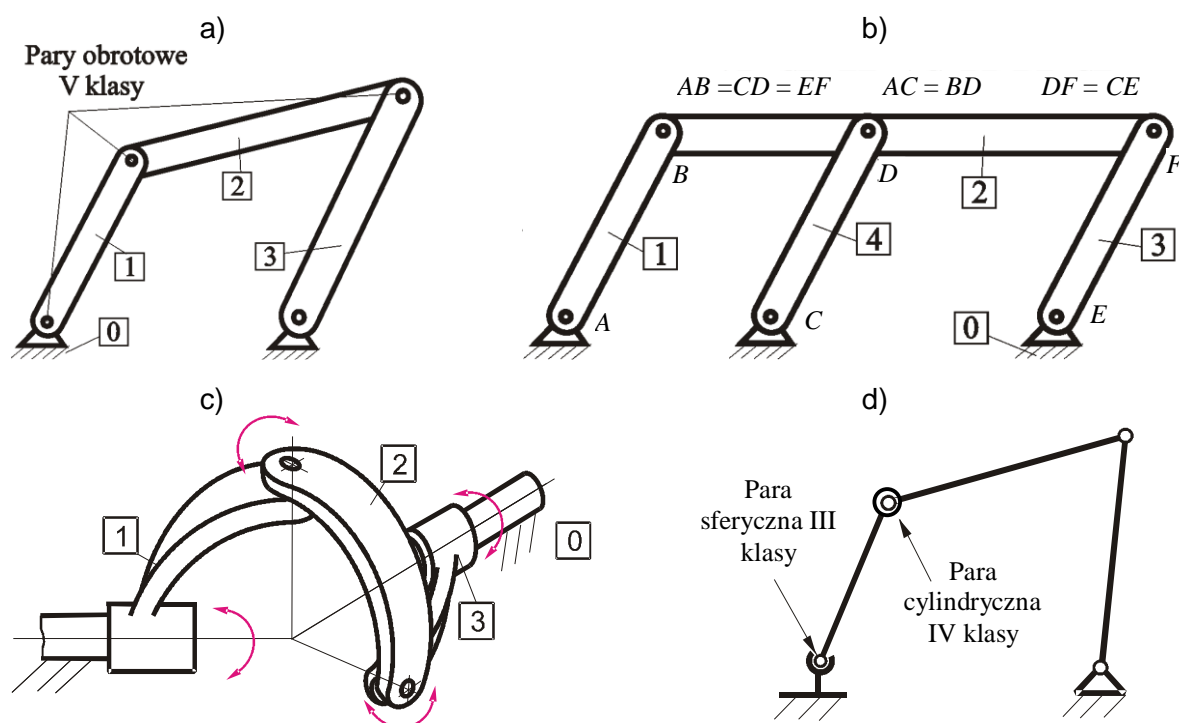
Przyczyną tych pozornych sprzeczności jest, w przypadku mechanizmu czworoboku z rysunku 1.5a, fakt, że obrotowe pary kinematyczne tego mechanizmu krępują wielokrotnie ruch członów w kierunku prostopadłym do płaszczyzny ruchu. Wzór (1.40) daje w tym przypadku wynik zgodny z rzeczywistością, ponieważ powstaje z odrzucenia więzów narzucających ruch mechanizmu w płaszczyźnie – zatem także więzów uwzględnianych wielokrotnie we wzorze (1.39). W przypadku mechanizmu z rysunku 1.5b wprowadzenie dodatkowego członu 4 nie ma wpływu na ruch mechanizmu, powiela jedynie istniejące już ograniczenia ruchu (członu 2 względem podstawy) – wprowadza zatem więzy bierne.

Dla oszacowania ruchliwości rzeczywistej mechanizmu, w którym występują więzy bierne, postępuje się najczęściej w dwojaki sposób. W metodzie pierwszej przed przystąpieniem do obliczania ruchliwości mechanizmu stosuje się pewne uproszczenia jego struktury, polegające m.in. na usunięciu członów, których obecność nie wpływa na ruch mechanizmu. Takim uproszczeniem może być np. w przypadku mechanizmu z rysunku 1.5b odrzucenie członu 4. Zabieg taki nazywa się tworzeniem *schematu strukturalnego*. W metodzie drugiej mechanizm traktuje się zawsze jako przestrzenny, a wzór (1.39) uzupełnia o dodatkowy składnik, który uwzględnia liczbę więzów biernych (przy mocnym założeniu, że liczba ta jest znana). Ma on wtedy postać:

$$w' = w + b = 6n - \sum_{i=1}^{i=5} ip_i + b, \quad (1.41)$$

gdzie b oznacza liczbę więzów biernych, a w' jest ruchliwością rzeczywistą mechanizmu.

Należy podkreślić, że w ogólnym przypadku wykrycie więzów biernych w mechanizmie może być zadaniem trudnym. Dla przykładu na rysunku 1.5c pokazano mechanizm sferycznego czworoboku przegubowego. Zgodnie z powyższymi uwagami ruchliwość tego mechanizmu obliczona według wzoru (1.39) wynosi -2 , natomiast ruchliwość rzeczywista mechanizmu jest równa 1. Tym razem więzy bierne wynikają z warunku, że osie par obrotowych przecinają się w jednym punkcie. Są jednak trudniejsze do intuicyjnego wykrycia.



Rysunek 1.5. Różne warianty mechanizmu czworoboku przegubowego:
a) typowy mechanizm czworoboku z więzami biernymi,
b) mechanizm czworoboku z dodatkowym członem,
c) czworobok sferyczny,
d) schemat kinematyczny czworoboku bez więzów biernych

Obecność więzów biernych w mechanizmie ma także ważne konsekwencje praktyczne. Więzy te powodują konieczność dokładnego wykonania członów mechanizmu (mechanizm taki trudno zmontować), siły reakcji w połączeniach mogą być statycznie

niewyznaczalne, a w niedokładnie wykonanych połączeniach mogą pojawić się znaczne siły tarcia, co ma wpływ m.in. na niezawodność i zużycie mechanizmu. Są to powody, dla których często w konstrukcji mechanizmów dąży się do eliminacji więzów biernych¹. Mechanizmy pozbawione więzów biernych nazywa się *mechanizmami racjonalnymi*. Na rysunku 1.5d pokazano przykładowo schemat kinematyczny jednego z wariantów mechanizmu czworoboku przegubowego z rysunku 1.5a, w którym więzy nadmiarowe wyeliminowano przez wprowadzenie par kinematycznych innych klas w połączeniach członów. Ruchliwość tego mechanizmu zgodnie ze wzorem (1.39) jest równa $w = 6 \cdot 3 - 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 1$ i opowiada rzeczywistości. Zauważmy, że mechanizm z rysunku 1.5d można także wykorzystać dla potrzeb analizy kinematycznej mechanizmu z rysunku 1.5a. Ruch członów tego mechanizmu nie ulega zmianie, natomiast nie występują w nim więzy bierne.

Warto dodać, że obecność więzów nadmiarowych, omawiana dotychczas głównie z punktu widzenia struktury i kinematyki układu wielocłonowego, ma również istotny wpływ na kwestie związane z modelowaniem dynamiki układu. Okazuje się bowiem, że jeśli mechanizm z więzami nadmiarowymi modelujemy jako układ złożony z członów sztywnych, to niemożliwe staje się jednoznaczne określenie niektórych reakcji w przegubach mechanizmu² (mówiąc w uproszczeniu: potrafimy obliczyć wypadkową sił reakcji działających na człon, ale nie potrafimy jednoznacznie podzielić jej na reakcje w poszczególnych parach kinematycznych). Jedno z ćwiczeń laboratoryjnych jest poświęcone układom z więzami nadmiarowymi – warto zapoznać się z wprowadzeniem do tego ćwiczenia, zawiera ono bowiem istotne uzupełnienia podanych tu informacji.

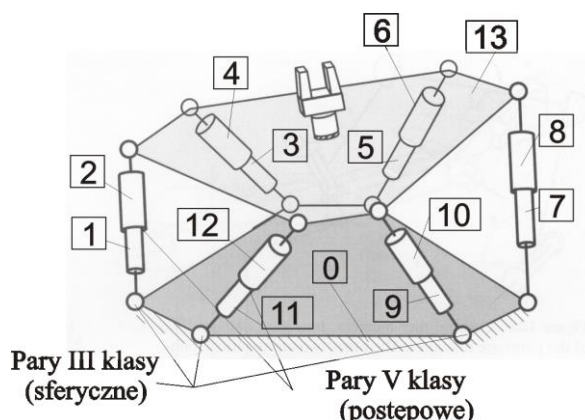
Ruchliwości lokalne

Drugi przypadek, w którym ruchliwość obliczona według wzoru Grüblera wymaga komentarza, wiąże się z obecnością w mechanizmach tzw. *ruchliwości lokalnych*. Z ruchliwością lokalną mamy do czynienia, kiedy pewne możliwości ruchu mechanizmu nie mają znaczenia dla sposobu jego działania i nie powinny być napędzane. Pojęcie ruchliwości lokalnych ilustruje przykład mechanizmu pokazanego na rysunku 1.6. Jest to jeden z wariantów tzw. platformy Stewarta – mechanizmu stosowanego m.in. w budowie symulatorów pojazdów i lotu. Górna część mechanizmu (platforma ruchoma) 13 połączona jest z podstawą 0 za pośrednictwem sześciu siłowników. Każdy z nich złożony jest z dwóch członów (cylindra oraz tłoka z tłoczyskiem) połączonych parą postępową V klasy. Każdy z sześciu siłowników połączony jest z platformą ruchomą i z podstawą parami kulistymi III klasy. Ruchliwość otrzymana ze wzoru Grüblera jest zatem równa $w = 6 \cdot 13 - 12 \cdot 3 - 6 \cdot 5 = 12$. Jest jednak widoczne, siłowniki mogą obracać się wokół własnych osi, nie zmieniając położenia i orientacji platformy ruchomej. Liczba napędów potrzebnych do prawidłowego działania

¹ Często – zazwyczaj ze względu na wytrzymałość konstrukcji – postępuje się odwrotnie, świadomie wprowadzając więzy bierne. Przykładem może być mocowanie drzwi na trzech lub czterech zawiasach, z których każdy jest parą obrotową (teoretycznie wystarczyłby jeden zawias). Oczywiście warunkiem działania drzwi jest współosiowość wszystkich zawiasów.

² Sprawa komplikuje się jeszcze bardziej, kiedy w parach kinematycznych występuje tarcie zależne od siły reakcji normalnej. Można wykazać, że w takiej sytuacji model o członach sztywnych nie daje możliwości jednoznacznego wyznaczenia symulowanego ruchu mechanizmu. Konieczne staje się tworzenie bardziej złożonych modeli, uwzględniających podatność członów. Kwestie te wykraczają jednak poza zakres niniejszego kursu.

platformy jest równa 6 tymczasem ruchliwość otrzymana ze wzoru (1.39) wynosi 12, ponieważ nie uwzględnia ruchliwości lokalnych siłowników.



Rysunek 1.6. Platforma Stewarta-Gougha i ruchliwości lokalne

Przedstawione ograniczenia w stosowaniu wzorów (1.39) i (1.40) nakazują ostrożność w obliczeniach liczby stopni swobody i powodują, że w praktyce inżynierskiej wzorów tych używa się rzadko.

1.3.2. Niezależność więzów

Twierdzenie o niezależności równań

Prezentując różne rodzaje współrzędnych stosowanych do opisu układu wieloczłonowego zasygnalizowaliśmy, że współrzędne \mathbf{q} opisujące układ na ogół nie są niezależne, lecz muszą spełniać pewne związki, zwane równaniami więzów. Równania te można zapisać symbolicznie w formie równania wektorowego o postaci:

$$\Phi(\mathbf{q}) \equiv \begin{bmatrix} \Phi_1(\mathbf{q}) \\ \Phi_2(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ \Phi_m(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \Phi_1(q_1, q_2, \dots, q_N) \\ \Phi_2(q_1, q_2, \dots, q_N) \\ \vdots \\ \Phi_m(q_1, q_2, \dots, q_N) \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{m \times 1}, \quad (1.42)$$

Występowanie więzów nadmiarowych w mechanizmie odpowiada sytuacji, w której ograniczenia na ruch członów nakładane przez pary kinematyczne kilkakrotnie odbierają tę samą możliwość ruchu. Z analogiczną sytuacją mamy do czynienia w przypadku równań więzów nałożonych na współrzędne opisujące układ wieloczłonowy. Niektóre z równań więzów mogą nakładać na współrzędne ograniczenia narzucone już przez inne równania. Mówiąc ściślej – równania więzów mogą być zależne. Nietrudno domyślić się, że zapisując równania więzów dla mechanizmu z więzami nadmiarowymi uzyskamy układ zależnych równań więzów. W analizie kinematycznej mechanizmów istotne jest posiadanie kryterium umożliwiającego stwierdzenie, czy układ równań (1.42) tworzą równania niezależne. Poświęćmy więc chwilę uwagi temu zagadnieniu.

Rozpatrzmy układ funkcji wektorowych $\Phi(\mathbf{q})$ określonych i ciągłych wraz z pochodnymi cząstkowymi w pewnym N -wymiarowym obszarze U :

$$\mathbf{Y} = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m]^T = [\Phi_1(\mathbf{q}) \ \Phi_2(\mathbf{q}) \ \cdots \ \Phi_m(\mathbf{q})]^T = \Phi(\mathbf{q}), \quad (1.43)$$

gdzie $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_N]^T \in U$.

Zajmiemy się przypadkiem, gdy wartości jednej z funkcji np. y_j są jednoznacznie określone przez układ wartości, które przybierają pozostałe funkcje: $(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m)$.

Niech U_0 oznacza zbiór układów wartości $(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m)$, odpowiadających wszystkim punktom \mathbf{q} obszaru U . Założymy, że w zbiorze U_0 określona jest zależność funkcyjna:

$$y_j = \varphi_j(y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m), \quad (1.44)$$

przy czym równanie to staje się tożsamością względem współrzędnych \mathbf{q} w obszarze U , gdy zamiast wszystkich y_i podstawimy funkcje (1.43). Jest istotne, że funkcja φ_j wśród swoich argumentów nie zawiera zmiennych \mathbf{q} . Gdy założenie to jest spełnione, mówimy, że w obszarze U funkcja y_j jest *zależna* od pozostałych funkcji (1.43).

Ogólnie funkcje y_1, y_2, \dots, y_m nazywamy *zależnymi* w obszarze U , jeśli choć jedna z nich zależy od pozostałych. Jeśli w obszarze U , lub jakimkolwiek obszarze w nim zawartym, nie zachodzi tożsamość postaci (1.44), to funkcje y_1, y_2, \dots, y_m nazywamy *funkcjami niezależnymi* w tym obszarze.

Podobnie równania układu (1.42) nazywamy *zależnymi*, jeśli zależne są lewe strony tych równań. Zależność układu równań oznacza innymi słowy, że jeśli spełnione są niektóre z równań w pewnym obszarze, to spełnione są równocześnie inne, zależne od nich. Fakt ten można nieprecyzyjnie wyrazić stwierdzeniem, że w pewnym obszarze niektóre z równań układu (1.42) stanowią „powtórzenie” innych.

Zilustrujemy to przykładem.

PRZYKŁAD 1.10

Zadanie

Dany jest układ równań:

$$\begin{aligned} y_1 &= q_1 + q_2 + q_3 = 0 \\ y_2 &= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 6 = 0 \\ y_3 &= q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3 + 3 = 0 \end{aligned} \quad (a)$$

Należy sprawdzić czy równania (a) są niezależne.

Rozwiązanie

Jak łatwo sprawdzić w całej 3-wymiarowej przestrzeni spełniona jest tożsamość:

$$y_2 = y_1^2 - 2y_3. \quad (b)$$

Zatem funkcje y_1, y_2, y_3 są zależne w sensie podanej wyżej definicji. Oznacza to, że jeśli współrzędne wektora \mathbf{q} spełniają równania 1 i 3, to spełniają także równanie 2. W istocie, w nieprecyzyjnym sformułowaniu, możemy uznać, że równanie 2 jest „powtórzeniem” równań 1 i 3.

Kwestię, czy układ równań (1.42) tworzą równania niezależne, rozstrzyga następujące twierdzenie.

Jeśli w pewnym punkcie \mathbf{q}_o zachodzą następujące warunki:

- spełnione jest równanie (1.42): $\Phi(\mathbf{q}_o) = \mathbf{0}$,
- rząd macierzy Jacobiego $\text{rank}(\Phi_q(\mathbf{q}_o))$ jest równy r ,

to liczba równań niezależnych w układzie (1.42) wynosi r . W szczególności, jeśli $r = m$, to wszystkie równania są niezależne. Jeśli natomiast $r < m$, to w pewnym otoczeniu punktu \mathbf{q}_o równania są zależne.

Z powyższego twierdzenia wynikają ważne wnioski:

1. Jeśli w punkcie \mathbf{q}_o spełnione jest równanie (1.42), to dla oceny, czy jest to układ równań zależnych wystarczy policzyć rząd (np. rząd wierszowy) macierzy Jacobiego $\Phi_q(\mathbf{q}_o)$. Otrzymana liczba wskazuje na liczbę równań albo funkcji niezależnych.
2. Otrzymany wynik dotyczy szacowania liczby równań niezależnych w punkcie \mathbf{q}_o i jego otoczeniu, zatem podane kryterium ma charakter lokalny. W ogólnym przypadku układ równań (1.42) może być układem równań zależnych w punkcie \mathbf{q}_o i niezależnych w punkcie \mathbf{q}_p (lub odwrotnie).

Spróbujemy uzasadnić, dlaczego rząd macierzy Jacobiego świadczy o liczbie niezależnych równań w układzie (1.42). Nie będzie to ścisły dowód twierdzenia, a jedynie prezentacja pewnej idei. Załóżmy, że jedna z funkcji w układzie (1.42), np. Φ_m , jest zależna od pozostałych: $\Phi_m = \varphi(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{m-1})$. Obliczmy macierz Jacobiego:

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial q_N} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial q_N} \end{bmatrix}. \quad (1.45)$$

Obliczając pochodne cząstkowe funkcji φ względem współrzędnej q_i , otrzymujemy: (dla $i = 1, \dots, N$):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_1} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_2} \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_i} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_{m-1}} \cdot \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial q_i}. \quad (1.46)$$

Jak widać, i -ty element w ostatnim wierszu macierzy Jacobiego można przedstawić jako kombinację liniową elementów znajdujących się w tej macierzy ponad nim. Powyższe równanie możemy napisać dla $i = 1, \dots, N$, za każdym razem uzyskując te same współczynniki kombinacji liniowej. A zatem wiersz macierzy Jacobiego, odpowiadający funkcji Φ_m , jest kombinacją liniową pozostałych wierszy tej macierzy. Współczynniki kombinacji liniowej są następujące:

$$\boldsymbol{\mu} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_{m-1}} \right]^T. \quad (1.47)$$

Wykazaliśmy zatem liniową zależność wierszy macierzy Jacobiego, a więc jej rząd jest mniejszy niż m .

PRZYKŁAD 1.11

Zadanie

Dany jest układ równań jak w przykładzie 1.10. Należy sprawdzić, czy jest to układ równań niezależnych w punkcie $\mathbf{q}_o = [1 \ -2 \ 1]^T$.

Rozwiązanie

Przypomnijmy układ równań:

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_1 + q_2 + q_3 \\ q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 6 \\ q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3 + 3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (\text{a})$$

Z poprzedniego przykładu wiadomo już, że funkcje tworzące składowe odwzorowania Φ są zależne. Sprawdzimy, czy fakt ten potwierdza podane wyżej twierdzenie. Rozpocznijmy od zbadania, czy współrzędne wektora \mathbf{q}_o spełniają układ równań:

$$\Phi(\mathbf{q}_o) = \begin{bmatrix} 1 - 2 + 1 \\ 1^2 + (-2)^2 + 1^2 - 6 \\ 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{b})$$

Wykazaliśmy, że układ równań $\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ jest spełniony w punkcie \mathbf{q}_o , ma zatem sens badanie zależności równań w otoczeniu tego punktu. Obliczmy więc macierz Jacobiego:

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2q_1 & 2q_2 & 2q_3 \\ q_2 + q_3 & q_1 + q_3 & q_1 + q_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{c})$$

Wyznacznik podanej macierzy dla dowolnie wybranych współrzędnych wektora \mathbf{q} , w tym także dla współrzędnych $\mathbf{q}_o = [1 \ -2 \ 1]^T$, jest równy 0, co można wykazać prostym rachunkiem (obliczając wyznacznik korzystamy z rozwinięcia Laplace'a):

$$\det(\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})) = 1 \cdot (2q_2(q_1 + q_2) - 2q_3(q_1 + q_3)) - 1 \cdot (2q_1(q_1 + q_2) - 2q_3(q_2 + q_3)) + \\ + 1 \cdot (2q_1(q_1 + q_3) - 2q_2(q_2 + q_3)) = 0, \quad (\text{d})$$

Badany układ jest zatem układem funkcji zależnych w każdym punkcie \mathbf{q} spełniającym równanie (a). Nie wiadomo jednak, ile równań w podanym układzie jest niezależnych. Łatwo sprawdzić, że w punkcie \mathbf{q}_o rząd macierzy jest równy 2:

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_o) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 1 \\ (-2) + 1 & 1 + 1 & 1 + (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{e})$$

$$\text{rank}(\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_o)) = 2. \quad (\text{f})$$

Na podstawie twierdzenia o niezależności równań wnioskujemy, że w otoczeniu punktu $\mathbf{q}_o = [1 \ -2 \ 1]^T$ dwa równania są niezależne, a trzecie jest od nich zależne.

Wyznaczanie liczby stopni swobody mechanizmu

Podane wyżej twierdzenie pozwala na wyznaczenie liczby niezależnych równań więzów. Można je zatem wykorzystać do obliczania liczby stopni swobody mechanizmu. Zauważmy, że jeżeli mechanizm jest opisany przez N współrzędnych zgromadzonych w wektorze \mathbf{q} , a na te współrzędne nałożono więzy w postaci danej równaniem (1.42), to dla mechanizmu w konfiguracji opisanej przez wektor \mathbf{q}_o , $N - \text{rank}(\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_o))$ współrzędnych możemy wybrać dowolnie, a pozostałe współrzędne wyznaczyć rozwiązując układ równań (1.42). Liczbę stopni swobody mechanizmu można zatem wyznaczyć korzystając ze wzoru:

$$w = N - \text{rank}(\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_o)). \quad (1.48)$$

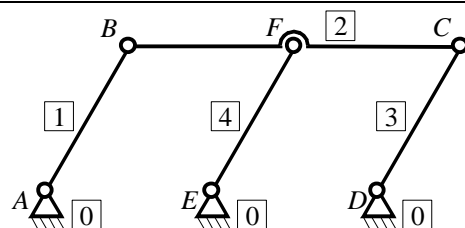
Warto zwrócić uwagę na następujące kwestie:

1. Powyższy wzór obowiązuje dla dowolnego rodzaju współrzędnych (złączowych, absolutnych, naturalnych) użytych do opisu mechanizmu.
2. Badanie rzędu macierzy Jacobiego równań więzów może stanowić metodę wykrywania więzów biernych i tym samym określania rzeczywistej ruchliwości mechanizmu. Należy podkreślić, że macierz Jacobiego równań więzów może mieć obniżony rząd, nie tylko z powodu występowania więzów nadmiarowych, ale także wskutek przyjmowania przez mechanizm pewnych szczególnych konfiguracji, zwanych położeniami osobliwymi. Jeśli współrzędne \mathbf{q}_o opisują osobliwą konfigurację mechanizmu, to szacowanie ruchliwości za pomocą wzoru (1.48) daje błędne rezultaty.
3. Wzór, podobnie jak twierdzenie, które posłużyło do jego sformułowania, obowiązuje w otoczeniu punktu \mathbf{q}_o , a zatem podane kryterium ma charakter lokalny. Warto jednak pamiętać, że występowanie więzów biernych jest cechą struktury mechanizmu, niezależną od jego chwilowej konfiguracji. Obliczenia według wzoru (1.48) powinny zatem dawać ten sam wynik w dowolnych (nieosobliwych) położeniach mechanizmu.

PRZYKŁAD 1.12

Zadanie

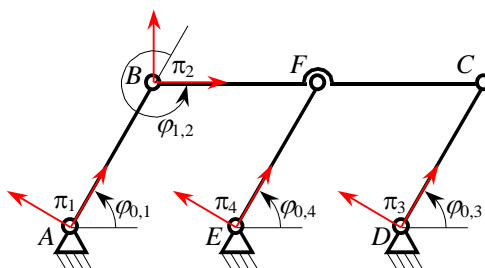
Obliczyć ruchliwość mechanizmu pokazanego na rysunku, wiedząc że jego wymiary są następujące: $AB = BF = FC = CD = DE = EF = AE = 1 \text{ m}$.



Rozwiązanie

Przyjmijmy, w sposób pokazany na rysunku, lokalne układy odniesienia oraz współrzędne opisujące mechanizm:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T = [\varphi_{0,1} \quad \varphi_{1,2} \quad \varphi_{0,3} \quad \varphi_{0,4}]^T. \quad (a)$$



Sformułujmy nałożone na współrzędne równania więzów, wynikające z istnienia par kinematycznych w punktach C i F:

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{0,1} + 2 \cos(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2}) - (2 + \cos \varphi_{0,3}) \\ \sin \varphi_{0,1} + 2 \sin(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2}) - \sin \varphi_{0,3} \\ \cos \varphi_{0,1} + \cos(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2}) - (1 + \cos \varphi_{0,4}) \\ \sin \varphi_{0,1} + \sin(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2}) - \sin \varphi_{0,4} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{4 \times 1}. \quad (b)$$

Różniczkując równania więzów, obliczmy macierz Jacobiego:

$$\Phi_q(\mathbf{q}) \equiv \begin{bmatrix} -\sin \varphi_{0,1} - 2 \sin(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2}) & -2 \sin(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2}) & \sin \varphi_{0,3} & 0 \\ \cos \varphi_{0,1} + 2 \cos(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2}) & 2 \cos(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2}) & -\cos \varphi_{0,3} & 0 \\ -\sin \varphi_{0,1} - \sin(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2}) & -\sin(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2}) & 0 & \sin \varphi_{0,4} \\ \cos \varphi_{0,1} + \cos(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2}) & \cos(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2}) & 0 & -\cos \varphi_{0,4} \end{bmatrix}_{4 \times 4}. \quad (c)$$

Przyjmijmy, że wartość współrzędnej $\varphi_{0,1}$ jest dana i wynosi α . Dzięki nieskomplikowanej strukturze mechanizmu łatwo jest wyznaczyć wartości pozostałych współrzędnych, uzyskując wektor \mathbf{q}_o , spełniający równania więzów (b):

$$\mathbf{q}_o = [\alpha \quad -\alpha \quad \alpha \quad \alpha]^T. \quad (d)$$

Macierz Jacobiego obliczona dla wektora \mathbf{q}_o ma następującą postać:

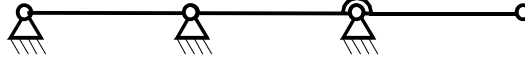
$$\Phi_q(\mathbf{q}_o) \equiv \begin{bmatrix} -\sin \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ \cos \alpha + 2 & 2 & -\cos \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & 0 & \sin \alpha \\ \cos \alpha + 1 & 1 & 0 & -\cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (e)$$

Dla dowolnej wartości kąta α powyższa macierz jest osobliwa. Łatwo bowiem zauważyć, że dodając trzecią i czwartą kolumnę do pierwszej, uzyskamy drugą kolumnę. Są one zatem liniowo zależne.

By sprawdzić, czy rząd macierzy Jacobiego wynosi 3, policzmy wyznacznik macierzy powstającej przez wykreślenie pierwszej kolumny i drugiej wiersza macierzy Jacobiego:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha \\ 1 & 0 & -\cos \alpha \end{bmatrix} = \sin^2 \alpha. \quad (f)$$

Powyższy wyznacznik jest różny od zera dla kątów α różnych od 0 i π . Uzyskane wyniki pozwalają podejrzewać, że konfiguracja mechanizmu opisana przez kąt α równy 0 lub π jest osobliwa. Jest tak w istocie. Osobliwą konfigurację mechanizmu (dla $\alpha = 0$) pokazano na poniższym rysunku.



Ustaliliśmy zatem, że kiedy mechanizm przyjmuje konfigurację nieosobliwą, macierz Jacobiego ma rząd równy 3. Możemy więc obliczyć ruchliwość mechanizmu, korzystając ze wzoru (1.48):

$$w = N - \text{rank}(\Phi_q(\mathbf{q}_o)) = 4 - 3 = 1. \quad (g)$$

Zauważmy, że powyższe obliczenie daje wynik zgodny z oczekiwaniami, natomiast obliczenie ruchliwości z wykorzystaniem wzoru strukturalnego dawałoby wynik błędny.

Detekcja i usuwanie nadmiarowych równań więzów

Podczas analizy kinematycznej będziemy rozwiązywać równania więzów o postaci (1.42). Będziemy korzystać z numerycznej metody Newtona-Raphsona. Działa ona pod warunkiem, że macierz Jacobiego obliczona dla rozwiązywanych równań jest nieosobliwa. Jak wiemy, mechanizm posiadający więzy nadmiarowe jest opisywany przez równania więzów, które są zależne. Macierz Jacobiego dla równań zależnych jest osobliwa (ma niepełny rząd wierszowy). Wynika stąd konieczność usunięcia z matematycznego opisu mechanizmu równań więzów zależnych, tak aby uzyskać macierz Jacobiego o pełnym rzędzie wierszowym (rzędzie równym liczbie wierszy macierzy).

Jedną z najbardziej znanych metod numerycznych rozwiązywania układów równań liniowych jest metoda Gaussa. Przypomnijmy, że podczas obliczeń metodą Gaussa (podczas eliminacji wprost) macierz układu równań przekształcana jest do postaci, w której poniżej głównej przekątnej występują wyłącznie zera. Metodę Gaussa można także wykorzystać do oceny, czy w układzie występują równania zależne, a także – jeśli występują – do podziału równań na zależne i niezależne. Załóżmy, że prostokątna macierz Jacobiego $[\Phi_q(\mathbf{q}_o)]_{m \times N}$ ma rząd r , przy czym $r < m$. Wtedy, jak wiemy, równania więzów (1.42) są zależne. Proces eliminacji wprost, z pełnym wyborem elementu głównego, prowadzony jest tak długo, jak

długo udaje się znaleźć niezerowy element główny. W wyniku obliczeń, po $r-1$ kroku eliminacji, uzyskuje się następującą macierz:

$$\left[\begin{array}{cccccc} \phi_{1,1}^{r-1} & \phi_{1,2}^{r-1} & \cdots & \phi_{1,r}^{r-1} & \phi_{1,r+1}^{r-1} & \cdots & \phi_{1,N}^{r-1} \\ 0 & \phi_{2,2}^{r-1} & \cdots & \phi_{2,r}^{r-1} & \phi_{2,r+1}^{r-1} & \cdots & \phi_{2,N}^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_{r,r}^{r-1} & \phi_{r,r+1}^{r-1} & \cdots & \phi_{r,N}^{r-1} \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]. \quad (1.49)$$

Za równania niezależne możemy uznać te z nieliniowych równań algebraicznych układu (1.42), które odpowiadają wierszom wyszukany w trakcie pełnego wyboru elementu głównego. Pozostałe równania więzów można usunąć z opisu mechanizmu, są one bowiem zależne od r równań pozostawionych w jego opisie.

Warto jednak pamiętać, że równań zależnych nie można wskazać w sposób jednoznaczny. Przykładowo, w najprostszym przypadku dwukrotnego powtórzenia tego samego równania, jako zależne można odrzucić zarówno pierwsze, jak i drugie z nich. Zastosowanie do macierzy Jacobiego algorytmu eliminacji Gaussa prowadzi do wyboru jednej z wielu możliwości.

Na zakończenie raz jeszcze podkreślamy fakt, że równania zależne wybiera się opisaną metodą dla określonej wartości wektora \mathbf{q}_0 i w jego otoczeniu. Jeśli wartość wektora \mathbf{q} zmieni się np. do wartości \mathbf{q}_s , to dokonany wybór może być błędny, tzn. w nowym punkcie macierz Jacobiego może być osobliwa. Także równania wybrane jako niezależne mogą być zależne w otoczeniu nowego punktu.