

## 3. Dynamika

### 3.1. Równania ruchu członu

Analizując dynamikę układu wieloczłonowego zajmiemy się zależnościami pomiędzy siłami działającymi na układ a ruchem układu pod wpływem tych sił. Rozważania rozpoczniemy od omówienia równań ruchu pojedynczego członu.

#### 3.1.1. Ruch członu w przestrzeni

Ruch postępowy członu sztywnego  $i$  względem inercjalnego<sup>1</sup> układu odniesienia  $\pi_0$  jest opisany równaniem Newtona:

$$\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_{C_i}, \quad (3.1)$$

gdzie  $\mathbf{F}_i$  oznacza wypadkową siłę zewnętrzną działającą na człon  $i$ ,  $m_i$  – masę członu, a  $\mathbf{r}_C$  jest wektorem wodzącym środka masy członu w inercjalnym układzie odniesienia.

Przypomnijmy przyjętą umowę, że pominięcie oznaczenia układu odniesienia w zapisie wektora oznacza, iż jego współrzędne są zapisane w układzie  $\pi_0$ .

Równanie Eulera opisuje ruch obrotowy członu sztywnego  $i$  względem inercjalnego układu odniesienia  $\pi_0$ :

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{J}_{C_i}^{(0)} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{0,i} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{0,i} \mathbf{J}_{C_i}^{(0)} \boldsymbol{\omega}_{0,i}, \quad (3.2)$$

gdzie  $\mathbf{M}_i$  jest wypadkowym momentem sił liczonym względem środka masy członu,  $\mathbf{J}_{C_i}^{(0)}$  jest macierzą bezwładności wyznaczoną względem środka masy członu i kierunków osi układu  $\pi_0$ , a  $\boldsymbol{\omega}_{0,i}$  jest prędkością kątową członu względem układu  $\pi_0$ .

Korzystanie z równania (3.2) jest dość niewygodne, gdyż wraz z obracaniem się członu względem układu  $\pi_0$  zmienia się macierz bezwładności  $\mathbf{J}_{C_i}^{(0)}$ . Równanie to można przepisać do układu lokalnego, związanego z członem  $i$ , w którym macierz bezwładności  $\mathbf{J}_{C_i}^{(i)}$  (wyznaczona względem układu  $\pi_i$ ) jest stała. Można wykazać, że równanie Eulera zachowa swoją postać, zmieni się tylko układ odniesienia, w którym zapisywane są wielkości wektorowe:

$$\mathbf{M}_i^{(i)} = \mathbf{J}_{C_i}^{(i)} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{0,i}^{(i)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{0,i}^{(i)} \mathbf{J}_{C_i}^{(i)} \boldsymbol{\omega}_{0,i}^{(i)}. \quad (3.3)$$

Należy wyraźnie podkreślić, że w powyższym równaniu prędkości i przyspieszenia są obliczane względem inercjalnego układu odniesienia  $\pi_0$ , a jedynie zapisywane w układzie  $\pi_i$  związanym z członem.

#### 3.1.2. Ruch płaski i płaski układ sił

Równanie Newtona i równanie Eulera, omówione w poprzednim punkcie, dotyczą przestrzennego ruchu członu. W naszych dalszych rozważaniach ograniczymy się do płaskich układów wieloczłonowych, dlatego obecnie sformułujemy warunki, przy których ruch członu

---

<sup>1</sup> Przypomnijmy, że inercjalny układ odniesienia to taki układ, w którym spełniona jest pierwsza zasada dynamiki Newtona, głosząca, że jeśli na punkt materialny działa zerowa siła wypadkowa, to porusza się on ruchem jednostajnym prostoliniowym względem układu odniesienia.

jest płaski. Przypomnijmy, że ruchem płaskim nazywamy ruch, podczas którego wszystkie punkty ciała poruszają się w płaszczyznach równoległych do pewnej nieruchomej płaszczyzny, zwanej płaszczyzną kierującą.

Przyjmijmy założenie, że środek masy członu leży w płaszczyźnie kierującej, linia działania wypadkowej siły przyłożonej do członu również leży w tej płaszczyźnie, a wypadkowy moment, liczony względem środka masy, jest prostopadły do płaszczyzny kierującej. Dla ułatwienia zapisu wzorów przyjmijmy także, że oś  $z_0$  układu inercjalnego  $\pi_0$  jest prostopadła do płaszczyzny kierującej. Analogiczne założenie poczynimy wobec osi układu  $\pi_i$ , związanego z członem  $i$ . Zgodnie z przyjętymi założeniami, wektory wypadkowej siły i momentu można zapisać w następujący sposób:

$$\mathbf{F}_i = [F_{x_i} \quad F_{y_i} \quad 0]^T, \quad \mathbf{M}_i = [0 \quad 0 \quad M_{z_i}]^T. \quad (3.4)$$

Chcemy, aby pod wpływem płaskiego układu sił i momentów (3.4) człon poruszał się ruchem płaskim, zatem przyspieszenie liniowe środka masy członu oraz prędkość i przyspieszenie kątowe członu możemy zapisać jako:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{C_i} = [\ddot{x}_i \quad \ddot{y}_i \quad 0]^T, \quad \boldsymbol{\omega}_{0,i}^{(0)} = \boldsymbol{\omega}_{0,i}^{(i)} = [0 \quad 0 \quad \dot{\varphi}_i]^T, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{0,i}^{(0)} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{0,i}^{(i)} = [0 \quad 0 \quad \ddot{\varphi}_i]^T, \quad (3.5)$$

gdzie przez  $x_i$  oraz  $y_i$  oznaczyliśmy współrzędne liniowe środka masy członu, a przez  $\varphi_i$  kąt obrotu związanego z członem układu  $\pi_i$  względem układu  $\pi_0$ .

Podstawiając (3.4) i (3.5) do równania Newtona (3.1), otrzymamy:

$$m_i \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_i} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Jak widać, przy przyjętych założeniach dotyczących wypadkowej siły, ostatnie z trzech powyższych równań skalarnych jest tożsamością i można je pominąć podczas analizy ruchu płaskiego członu.

Podstawiając (3.4) i (3.5) do równania Eulera (i wprowadzając tradycyjne oznaczenia momentów głównych i dewiacyjnych występujących w macierzy bezwładności), uzyskamy:

$$\begin{bmatrix} J_{x_i} & -J_{xy_i} & -J_{xz_i} \\ -J_{yx_i} & J_{y_i} & -J_{yz_i} \\ -J_{zx_i} & -J_{zy_i} & J_{z_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi}_i & 0 \\ \dot{\varphi}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{x_i} & -J_{xy_i} & -J_{xz_i} \\ -J_{yx_i} & J_{y_i} & -J_{yz_i} \\ -J_{zx_i} & -J_{zy_i} & J_{z_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{z_i} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Powyższe równanie można uporządkować, otrzymując:

$$\begin{bmatrix} -J_{xz_i} \ddot{\varphi}_i + J_{yz_i} \dot{\varphi}_i^2 \\ -J_{yz_i} \ddot{\varphi}_i - J_{xz_i} \dot{\varphi}_i^2 \\ J_{z_i} \ddot{\varphi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{z_i} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Przeanalizujemy dwa pierwsze, spośród powyższych trzech, równań skalarnych. Równania te nie są tożsamościami i nie można ich „bezkarnie” usunąć z matematycznego opisu ruchu członu, o ile momenty bezwładności nie spełniają pewnych dodatkowych warunków. Przepiszmy omawiane równania w postaci układu dwóch równań liniowych względem  $\ddot{\varphi}_i$  i  $\dot{\varphi}_i^2$ :

$$\begin{bmatrix} J_{xz_i} & -J_{yz_i} \\ J_{yz_i} & J_{xz_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_i \\ \dot{\phi}_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Z powyższego układu równań wynika, że wielkości  $\ddot{\phi}_i$  i  $\dot{\phi}_i^2$  będą niezerowe jedynie wtedy, gdy macierz układu równań będzie osobliwa. Obliczmy zatem wyznacznik tej macierzy i przyrównajmy go do zera:

$$\det \begin{bmatrix} J_{xz_i} & -J_{yz_i} \\ J_{yz_i} & J_{xz_i} \end{bmatrix} = J_{xz_i}^2 + J_{yz_i}^2 = 0. \quad (3.10)$$

Z równania (3.10) wynika bardzo istotny wniosek, że człon poddany działaniu płaskiego układu sił i momentów (3.4) porusza się ruchem płaskim (3.5) jedynie wtedy, gdy momenty dewiacyjne  $J_{xz_i}$  i  $J_{yz_i}$  są zerowe:

$$J_{xz_i} = J_{yz_i} = 0. \quad (3.11)$$

Zauważmy, że jeśli zerowe momenty dewiacyjne wstawimy do wzoru (3.8), to dwa pierwsze równania skalarnie staną się tożsamościami, zatem będzie można je pomijać i rozpatrywać tylko trzecie równanie skalarnie.

Z przeprowadzonego przez nas rozumowania wynika, że jeśli momenty dewiacyjne  $J_{xz_i}$  i  $J_{yz_i}$  nie będą zerowe, to zaistnieje sprzeczność pomiędzy założeniem o płaskości sił i momentów działających na człon a założeniem o płaskości ruchu. Spostrzeżenie to ma ważne konsekwencje w analizie układów złożonych z wielu członów. Zazwyczaj płaski ruch członu wynika z więzów nałożonych nań przez pary kinematyczne, które tworzy on z innymi członami układu. Jeśli warunek (3.11) nie jest spełniony, to działające na człon reakcje więzów nie stanowią płaskiego układu<sup>1</sup> sił i momentów. Do identycznego wniosku dochodzimy, kiedy środki mas wszystkich członów mechanizmu nie leżą w tej samej płaszczyźnie, gdyż wtedy wzajemne oddziaływanie członów nie spełnia warunku (3.4).

Podczas analizy mechanizmów płaskich składowe siły reakcji działające poza płaszczyznę ruchu i składowe momenty reakcji działające w tej płaszczyźnie są zwykle pomijane. Ich wielkość (przy braku tarcia) nie ma bowiem wpływu na położenia, prędkości i przyspieszenia członów mechanizmu. Jeśli jednak wszystkie składowe reakcji w parach kinematycznych są dla nas istotne (np. kiedy chcemy oszacować obciążenia łożysk mechanizmu), a momenty bezwładności członu nie spełniają warunku (3.11) lub mechanizm jest poddany przestrzennemu obciążeniu zewnętrznemu, to analizę dynamiczną mechanizmu płaskiego musimy przeprowadzić metodami właściwymi dla mechanizmów przestrzennych<sup>2</sup>.

O powyższych uwagach warto pamiętać, gdyż w naszych dalszych rozważaniach, dotyczących mechanizmów płaskich, składowe siły czynnych i reakcji prostopadłe do płaszczyzny ruchu oraz składowe momenty równoległe do tej płaszczyzny będziemy pomijać.

<sup>1</sup> Oczywiście, jeśli płaski mechanizm poddamy przestrzennemu obciążeniu (kiedy siłą  $F_z$  lub momenty  $M_x$  lub  $M_y$  będą niezerowe), to reakcje w jego parach kinematycznych też będą przestrzenne.

<sup>2</sup> Warto wiedzieć, że jeśli w mechanizmie występują więzy nadmiarowe, to niektórych reakcji więzów nie da się wyznaczyć bez uchylenia założenia o nieodkształcalności członów.

### 3.1.3. Równania ruchu członu na płaszczyźnie (we współrzędnych absolutnych)

Rozważmy pojedynczy człon na płaszczyźnie, opisany przez trzy współrzędne absolutne  $\mathbf{q}_i = [\mathbf{r}_i^T \ \varphi_i]^T$ . Przyjmijmy założenie, że początek lokalnego układu odniesienia  $\pi_i$ , związanego z członem  $i$ , pokrywa się ze środkiem masy członu. Jest to założenie o tyle istotne, że pozwoli nam na uproszczenie zapisu równań ruchu. Zwróćmy uwagę, że prowadząc rozważania dotyczące kinematyki mechanizmów nie zakładaliśmy niczego na temat położenia początku układu lokalnego (pojęcie masy i środka masy w kinematyce nie jest istotne). Należy podkreślić, że przyjęte przez nas dodatkowe założenie nie zmienia w żadnym punkcie rozważań dotyczących kinematyki.

Przyjmijmy jeszcze jedno bardzo istotne założenie, że układ globalny  $\pi_0$  jest układem inercjalnym. W zagadnieniach kinematyki nie rozważaliśmy sił działających na człony, założenie o inercjalności układu globalnego nie było zatem istotne, teraz ma ono jednak kluczowe znaczenie.

Uwzględniając przyjęte założenia oraz wyniki rozważań z poprzedniego punktu, równania płaskiego ruchu postępowego i obrotowego członu sztywnego możemy zapisać łącznie w formie macierzowej:

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & J_{z_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \\ \ddot{\varphi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_i} \\ M_{z_i} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_i, \quad (3.12)$$

gdzie przez  $\mathbf{M}_i$  oznaczono tzw. macierz masową członu, a przez  $\mathbf{Q}_i$  – siłę uogólnioną działającą na człon.

Należy podkreślić, że siła uogólniona jest wyznaczana względem środka masy członu, tzn.  $F_{x_i}$  oraz  $F_{y_i}$  oznaczają składowe (w układzie globalnym  $\pi_0$ ) wypadkowej siły zewnętrznej o linii działania przechodzącej przez środek masy, a  $M_{z_i}$  oznacza wypadkowy moment sił zewnętrznych obliczany względem środka masy.

## 3.2. Równania ruchu płaskiego układu członów swobodnych. Obliczanie sił uogólnionych

Zamiast pojedynczego członu na płaszczyźnie, rozważymy teraz układ składający się z wielu członów. Rozważać będziemy jedynie *człony swobodne*, czyli takie, które nie tworzą z innymi par kinematycznych. Układ wielocłonowy opiszemy przez współrzędne absolutne i sformułujemy równania ruchu. Zajmiemy się także problemem obliczania sił uogólnionych w kilku technicznie ważnych przypadkach, np. sił grawitacji oraz sił w elementach sprężysto-tłumiących.

### 3.2.1. Równania ruchu płaskiego układu członów swobodnych we współrzędnych absolutnych

Rozważmy układ  $n$  członów swobodnych na płaszczyźnie. Przyjmijmy, że do opisu położenia i orientacji członów wybrano współrzędne absolutne. Równania ruchu (3.12) napisane osobno dla każdego członu można zestawić w jedno równanie macierzowe, opisujące układ  $n$  członów:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad (3.13)$$

gdzie:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_n \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Warto zwrócić uwagę, że wśród sił zgromadzonych w wektorze  $\mathbf{Q}$  znajdują się zarówno siły zewnętrzne, pochodzące spoza układu członów, jak i siły, którymi człon działa na siebie nawzajem, czyli siły wewnętrzne. Przykładem sił zewnętrznych mogą być oddziaływania grawitacyjne, natomiast siła w nieważkiej<sup>1</sup> sprężynie łączącej dwa człony układu może być przykładem sił wewnętrznych.

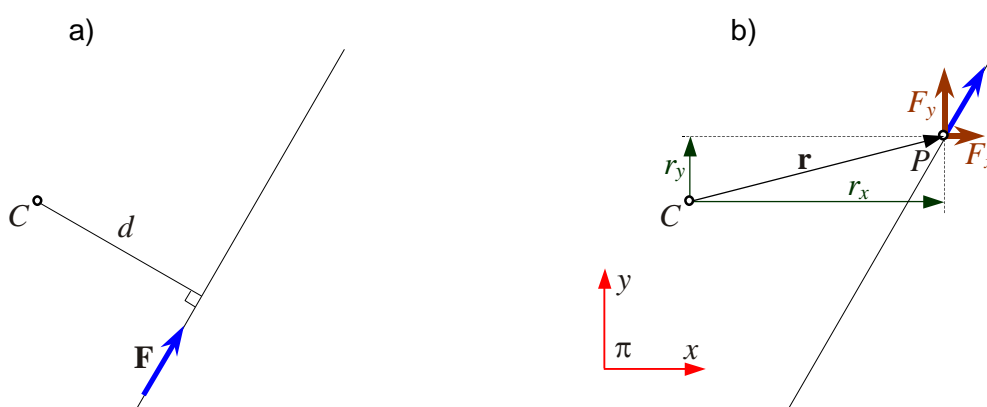
### 3.2.2. Obliczanie sił uogólnionych

Po prawej stronie równań ruchu układu członów występuje wektor sił uogólnionych  $\mathbf{Q}$ . Zajmiemy się teraz wyznaczeniem elementów tego wektora dla typowych sił i momentów działających na układ wielocłonowy. Jak wiemy, wektor  $\mathbf{Q}$  składa się z trój-elementowych wektorów  $\mathbf{Q}_i$ , odpowiadających poszczególnym członom układu. Dwa pierwsze elementy wektora  $\mathbf{Q}_i$  to składowe (wyrażonego w układzie  $\pi_0$ ) wektora wypadkowej siły działającej na człon  $i$ . Trzeci element wektora  $\mathbf{Q}_i$  to działający na człon  $i$  wypadkowy moment sił, obliczony względem środka masy.

#### Obliczanie momentu siły

Warto być może przypomnieć, jak w przypadku płaskim oblicza się moment siły względem wybranego punktu. Rozważmy pokazaną na rysunku 3.1a siłę  $\mathbf{F}$ , o linii działania nieprzechodzącej przez punkt  $C$ . Moment siły  $\mathbf{F}$  względem punktu  $C$  definiujemy jako iloczyn ramienia  $d$ , czyli odległości punktu  $C$  od linii działania siły, i modułu siły  $\mathbf{F}$ :

$$M = \pm d |\mathbf{F}|. \quad (3.15)$$



Rysunek 3.1. Obliczanie momentu siły

<sup>1</sup> Bardzo często elementów układu wielocłonowego takich jak sprężyny, tłumiki itp. nie traktujemy jako osobnych członów, lecz jako specjalnego rodzaju siły działające pomiędzy członami układu. Uproszczenie takie jest zazwyczaj uzasadnione, gdyż masy tych elementów są zwykle znacznie mniejsze niż masy łączonych przez nie członów. Oczywiście, jeśli np. masy elementów składowych amortyzatora są znaczące, to można je traktować jako osobne człony układu.

Jeśli, tak jak na rysunku 3.1a, wektor siły  $\mathbf{F}$  „wskazuje” kierunek obrotu względem punktu  $C$  przeciwny do kierunku obrotu wskazówek zegara, to moment siły jest dodatni, w przeciwnym przypadku moment jest ujemny.

Korzystanie ze wzoru (3.15) i pracochłonne ustalanie znaku momentu nie jest zbyt wygodne, szczególnie w skomputeryzowanych obliczeniach. W algebraicznej reprezentacji współrzędne wektora  $\mathbf{F}$  zapisywane są w pewnym układzie odniesienia  $\pi$ . W tym samym układzie można wyznaczyć współrzędne wektora  $\mathbf{r}$ , poprowadzonego od punktu  $C$  do dowolnego punktu  $P$  na linii działania siły  $\mathbf{F}$ . Jeśli, jak pokazano na rysunku 3.1b, siłę  $\mathbf{F}$  przesuniemy wzdłuż jej linii działania do punktu  $P$ , a następnie rozłożymy na dwie składowe w kierunkach  $x$  i  $y$  układu odniesienia, to moment siły  $\mathbf{F}$  względem punktu  $C$  będziemy mogli obliczyć, dwukrotnie korzystając ze wzoru (3.15), jako sumę momentów pochodzących od obu jej składowych:

$$M = r_x F_y - r_y F_x. \quad (3.16)$$

Powyższy wzór, odwołujący się do współrzędnych wektorów  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{F}$  w przyjętym układzie odniesienia jest w zastosowaniach znacznie wygodniejszy od (3.15), nie wymaga bowiem kłopotliwego niekiedy wyznaczania wielkości  $d$  oraz ustalania znaku obliczonego momentu (zmiana zwrotu siły powoduje zmianę znaku jej składowych, jest zatem automatycznie uwzględniana we wzorze na moment). Warto zauważyć, że równanie (3.16) daje wyniki zgodne z tym, co uzyskalibyśmy w przypadku przestrzennym, obliczając moment siły jako iloczyn wektorowy ramienia  $\mathbf{r} = [r_x \ r_y \ 0]^T$  i siły  $\mathbf{F} = [F_x \ F_y \ 0]^T$ :

$$\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{r}} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_y \\ 0 & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Wzór (3.16) odwołuje się nie do wektorów  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{F}$  zapisanych w zwartej formie, lecz bezpośrednio do ich współrzędnych. Nie jest to zbyt wygodne, ale niedogodności tej można uniknąć, korzystając z następującej tożsamości:

$$M = r_x F_y - r_y F_x = \begin{bmatrix} -r_y & r_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r})^T \mathbf{F}. \quad (3.18)$$

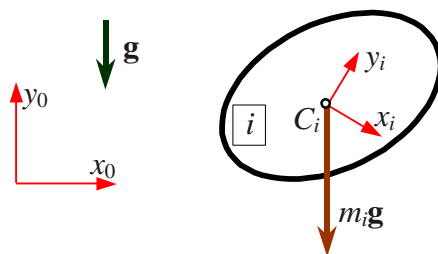
W niniejszym opracowaniu, obliczając moment siły, najczęściej będziemy korzystać z powyższej zależności.

### Sila grawitacji

Zajmiemy się teraz sposobem uwzględniania siły grawitacji w wektorze sił uogólnionych. Linia działania siły grawitacji przechodzi przez środek masy członu, jej moment liczony względem środka masy jest więc zerowy. Działającą na człon siłę uogólnioną obliczamy zatem jako:

$$\mathbf{Q}_i^G = \begin{bmatrix} m_i \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

gdzie  $m_i$  oznacza masę członu  $i$ , a  $\mathbf{g}$  jest wektorem przyspieszenia ziemskiego zapisanym w układzie  $\pi_0$ .



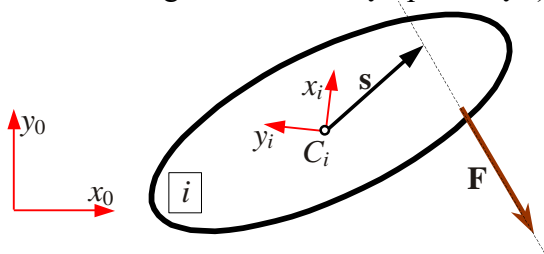
Rysunek 3.2. Siła grawitacji

### ***Dowolna siła działająca na człon***

Rozważmy teraz dowolną siłę  $\mathbf{F}$  działającą na człon  $i$ . Niech wektor  $\mathbf{s}$ , którego współrzędne są wyrażone w lokalnym, związanym z członem układzie odniesienia  $\pi_i$ , wyznacza położenie dowolnego punktu na linii działania siły  $\mathbf{F}$ . Obliczając działającą na człon siłę uogólnioną  $\mathbf{Q}_i$  musimy uwzględnić, że moment siły  $\mathbf{F}$  względem środka masy członu (początku układu  $\pi_i$ ) może nie być zerowy, zatem:

$$\mathbf{Q}_i^F = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_i \mathbf{s}^{(i)})^T \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_i \mathbf{s}^{(i)})^T \end{bmatrix} \mathbf{F}. \quad (3.20)$$

W powyższym wzorze  $\mathbf{R}_i$  oznacza macierz kosinusów kierunkowych, transformującą współrzędne wektora  $\mathbf{s}$  z układu  $\pi_i$  do  $\pi_0$  (współrzędne wektora  $\mathbf{F}$  są zapisane w układzie globalnym  $\pi_0$ , którego oznaczenie – zgodnie z umową – pominięto).



Rysunek 3.3. Dowolna siła działająca na człon

### ***Dowolny moment działający na człon***

Rozpatrzmy człon obciążony tzw. *czystym momentem*, czyli układem sił o wypadkowej równej zero, lecz o niezerowym wypadkowym momencie  $M$  (można łatwo wykazać, że w przypadku zerowej wypadkowej siły, moment układu sił liczony względem dowolnego punktu jest zawsze taki sam). W analizowanej sytuacji siła uogólniona działająca na człon jest opisana bardzo prostym wzorem:

$$\mathbf{Q}_i^M = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ M \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

### ***Siła wzajemnego oddziaływania dwóch członów***

W praktyce inżynierskiej często mamy do czynienia z sytuacją, gdy dwa człony rozpatrywanego układu działają na siebie wzajemnie pewną siłą  $\mathbf{F}$ , co schematycznie zilustrowano na rysunku 3.4. Oddziaływanie między członami może pochodzić na przykład od łączącej człony sprężyny lub od tłumika zamocowanego do obu członów, ale może też

mieć zupełnie inny charakter, np. oddziaływań elektromagnetycznych. Przyjmijmy założenie, że linia działania siły przechodzi przez związany z członem  $i$  punkt  $A$  oraz przez punkt  $B$ , związany z członem  $j$ . Wektor  $\mathbf{d}$  o początku w punkcie  $A$  i końcu w punkcie  $B$  możemy obliczyć, wykorzystując następujący wzór:

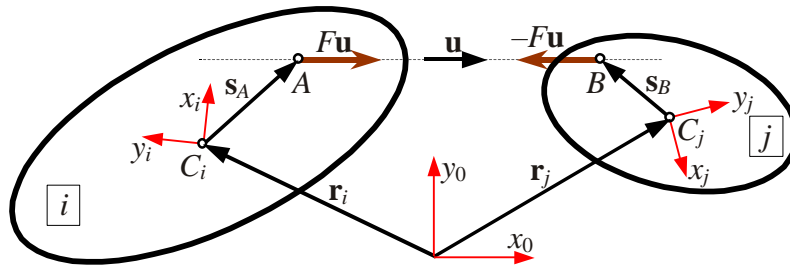
$$\mathbf{d} = \mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} - \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)}, \quad (3.22)$$

gdzie – jak zwykle – przez  $\mathbf{R}_i$  oraz  $\mathbf{R}_j$  oznaczono odpowiednie macierze kosinusów kierunkowych, a przez  $\mathbf{s}_A$  i  $\mathbf{s}_B$  wektory wodzące punktów  $A$  i  $B$  w lokalnych układach odniesienia.

Wersor  $\mathbf{u}$  obliczymy, dzieląc wektor  $\mathbf{d}$  przez jego długość:

$$\mathbf{u} = \mathbf{d}/d, \quad (3.23)$$

$$d = |\mathbf{d}| = \sqrt{\mathbf{d}^T \mathbf{d}}. \quad (3.24)$$



Rysunek 3.4. Siła wzajemnego oddziaływania dwóch członów

Siłę  $\mathbf{F}_{ji}$ , którą człon  $j$  działa na  $i$ , możemy teraz wyrazić jako iloczyn wersora  $\mathbf{u}$  i wartości  $F$ :

$$\mathbf{F}_{ji} = F \mathbf{u}. \quad (3.25)$$

Analogiczny wzór, lecz ze zmienionym znakiem, wyrażać będzie siłę działającą na człon  $j$  ( $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} = -F \mathbf{u}$ ). Warto zauważyć, że – zgodnie z rysunkiem 3.4 – przyciąganiu się członów odpowiada dodatnia wartość  $F$  (a zatem odpychaniu – wartość ujemna).

Siły uogólnione działające na człon  $i$  oraz  $j$  można obliczyć, korzystając ze wzorów (3.20) i (3.25), w następujący sposób:

$$\mathbf{Q}_i^C = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)})^T \end{bmatrix} \mathbf{u} F, \quad \mathbf{Q}_j^C = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)})^T \end{bmatrix} (-\mathbf{u} F). \quad (3.26)$$

### Siły w sprężynach i tłumikach

Zastanówmy się jeszcze, jak – w istotnych technicznie przypadkach sprężyny i tłumika – jest obliczana wartość  $F$  siły wzajemnego oddziaływania dwóch członów.

Wartość siły z jaką jest rozciągana sprężyna rozpięta pomiędzy punktami  $A$  i  $B$  obliczamy jako:

$$F = k(d - d_0), \quad (3.27)$$

gdzie  $k$  oznacza sztywność sprężyny,  $d$  jest odległością między punktami  $A$  i  $B$  w rozpatrywanej chwili (zob. wzory (3.22) i (3.24)), natomiast  $d_0$  oznacza odległość między punktami  $A$  i  $B$ , przy której sprężyna ma długość swobodną.



Zauważmy, że kiedy odległość  $d$  jest większa od  $d_0$ , sprężyna jest rozciągana, a zatem człony  $i$  oraz  $j$  przyciągają się nawzajem, a wartość  $F$  jest większa od zera. Podobnie gdy  $d < d_0$ , człony się odpychają i  $F < 0$ .

Proporcjonalną do prędkości siłę tłumienia można obliczyć jako:

$$F = c \dot{d}, \quad (3.28)$$

gdzie  $c$  jest współczynnikiem tłumienia.

I tym razem można zauważyć, że gdy człony się oddalają ( $\dot{d} > 0$ ), siła tłumienia przyciąga je do siebie i wartość  $F$  jest większa od zera.

Pozostaje jeszcze problem obliczenia wielkości  $\dot{d}$ . Różniczkowanie zależności (3.22) i (3.24) wymagałoby żmudnych obliczeń i prowadziło do skomplikowanych zależności. Rachunki można nieco uprościć, wyznaczając najpierw prędkości punktów  $A$  i  $B$  względem globalnego układu odniesienia:

$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_i + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} \dot{\phi}_i, \quad \mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_j + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} \dot{\phi}_j, \quad (3.29)$$

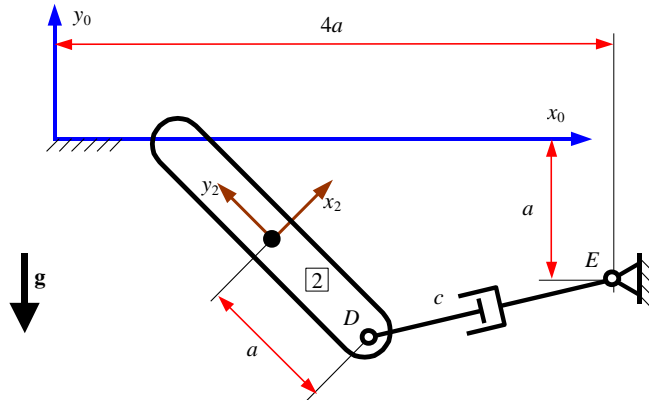
a następnie obliczając różnicę prędkości punktów  $B$  i  $A$  oraz rzutując otrzymany wektor na kierunek wersora  $\mathbf{u}$ :

$$\dot{d} = \mathbf{u}^T (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A). \quad (3.30)$$

### PRZYKŁAD 3.1

#### Zadanie

Na rysunku przedstawiono ruchomy człon mechanizmu, połączony z nieruchomą podstawą nieważkim tłumikiem (tłumienie proporcjonalne do prędkości). Na rozpatrywany człon działa siła grawitacji oraz siła tłumienia. Początek układu lokalnego  $\pi_2$  umieszczono w środku masy członu, a związany z podstawą układ globalny  $\pi_0$  jest układem inercyjnym. Położenie członu w układzie globalnym opisuje wektor współrzędnych absolutnych  $\mathbf{q}_2$ , natomiast prędkość członu – wektor  $\dot{\mathbf{q}}_2$ . Należy wyznaczyć wektor sił uogólnionych działających na człon.



Dane:

$a = 1$  (m),  $c = 10$  (N s/m),  $\mathbf{g}^{(0)} = [0 \ -10]^T$  (m/s<sup>2</sup>),  $m_2 = 3$  (kg),  $\mathbf{q}_2 = [1/\sqrt{2} \ -1/\sqrt{2} \ \pi/4]^T$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_2 = [-1 \ \sqrt{2} \ 2]^T$  (liniowe współrzędne absolutne wyrażone są w metrach, a współrzędna kątowa – w radianach).

#### Rozwiązanie

Wyznaczenie sił działających na człon rozpoczniemy od obliczenia sił grawitacji. Wykorzystamy wzór (3.19), uzyskując:

$$\mathbf{Q}_2^G = \begin{bmatrix} m_2 \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Nieco bardziej złożone jest obliczenie działającej na człon siły pochodzącej od tłumika. Linia działania tej siły przechodzi przez punkty  $D$  i  $E$ . Współrzędne punktu  $E$  są stałe w układzie globalnym i zgodnie z danymi zadania wynoszą  $\mathbf{r}_E^{(0)} = [4a \ -a]^T$ . Współrzędne punktu  $D$  są zmienne w układzie globalnym  $\pi_0$ , lecz stałe w układzie lokalnym  $\pi_2$ :  $\mathbf{s}_D^{(2)} = [0 \ -a]^T$ . Wektor  $\mathbf{d}$ , o początku w punkcie  $D$  i końcu w punkcie  $E$ , można zatem obliczyć tak (wzór (3.22)):

$$\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{r}_E^{(0)} - \mathbf{r}_2^{(0)} - \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_D^{(2)}. \quad (\text{b})$$

Wersor kierunkowy działającej na człon siły tłumienia obliczamy, dzieląc wektor  $\mathbf{d}$  przez jego długość (wzory (3.23) i (3.24)):

$$\mathbf{u}^{(0)} = \frac{\mathbf{d}^{(0)}}{\sqrt{(\mathbf{d}^{(0)})^T \mathbf{d}^{(0)}}}. \quad (\text{c})$$

Wartość siły w elemencie tłumiącym, zgodnie ze wzorem (3.28), jest proporcjonalna do prędkości oddalania się (wtedy jest dodatnia) lub zbliżania się (wtedy siła jest ujemna) punktów  $D$  i  $E$ . Prędkość tę obliczmy, rzutując różnicę prędkości punktów  $E$  i  $D$  (względem układu globalnego) na kierunek wersora  $\mathbf{u}$  (wzory (3.29) i (3.30)):

$$\dot{d} = (\mathbf{u}^{(0)})^T (\mathbf{0} - \dot{\mathbf{r}}_2^{(0)} - \Omega \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_D^{(2)} \dot{\phi}_2). \quad (\text{d})$$

Pochodzącą od elementu tłumiącego siłę przyłożoną do członu 2 w punkcie  $D$  obliczamy, mnożąc jej wersor kierunkowy przez wartość (wzory (3.25) i (3.28)):

$$\mathbf{F}_D^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)} c \dot{d}. \quad (\text{e})$$

Wyznaczając siłę uogólnioną działającą na rozpatrywany człon musimy uwzględnić fakt, że linia działania siły  $\mathbf{F}_D$  nie przechodzi przez środek masy członu, zatem jej moment względem środka masy jest niezerowy. Obliczając moment uwzględniamy, że punkt  $D$  znajduje się zawsze na linii działania siły  $\mathbf{F}_D$  i wykorzystujemy wzór (3.26):

$$\mathbf{Q}_2^D = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ (\Omega \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_D^{(2)})^T \end{bmatrix} \mathbf{F}_D^{(0)}. \quad (\text{f})$$

Ostatecznie wektor sił uogólnionych działających na człon obliczamy, sumując siły pochodzące od grawitacji z siłami pochodzącymi od tłumika:

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^G + \mathbf{Q}_2^D. \quad (\text{g})$$

Pozostaje podstawienie danych liczbowych:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_2^G &= [0 \ -30 \ 0]^T, \\ \mathbf{d}^{(0)} &= \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - \sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2.5858 \\ 0.4142 \end{bmatrix} \text{ (m)}, \\ \mathbf{u}^{(0)} &\approx \frac{\begin{bmatrix} 2.5858 \\ 0.4142 \end{bmatrix}}{\sqrt{\begin{bmatrix} 2.5858 & 0.4142 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.5858 \\ 0.4142 \end{bmatrix}}} = \frac{\begin{bmatrix} 2.5858 \\ 0.4142 \end{bmatrix}}{\sqrt{2.5858^2 + 0.4142^2}} \approx \begin{bmatrix} 0.9874 \\ 0.1582 \end{bmatrix}, \\ \dot{d} &\approx [0.9874 \ 0.1582] \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \cdot 2 = \\ &= [0.9874 \ 0.1582] \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{bmatrix} \approx -0.8564 \text{ (m/s)}, \\ \mathbf{F}_D^{(0)} &\approx \begin{bmatrix} 0.9874 \\ 0.1582 \end{bmatrix} \cdot 10 \cdot (-0.8564) \approx \begin{bmatrix} -8.4560 \\ -1.3546 \end{bmatrix} \text{ (N)}, \\ \mathbf{Q}_2^D &\approx \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8.4560 \\ -1.3546 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8.4560 \\ -1.3546 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -8.4560 \\ -1.3546 \\ -6.9371 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{(N)} \\ \text{(N)} \\ \text{(Nm)} \end{matrix}, \\ \mathbf{Q}_2 &\approx \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8.4560 \\ -1.3546 \\ -6.9371 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -8.4560 \\ -31.3546 \\ -6.9371 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{(N)} \\ \text{(N)} \\ \text{(Nm)} \end{matrix}. \end{aligned}$$

### 3.3. Równania ruchu płaskiego układu członów nieswobodnych. Reakcje więzów

Rozważmy teraz układ składający się z wielu członów *nieswobodnych*, czyli tworzących z innymi pary kinematyczne. Układ wielocłonowy opiszemy przez współrzędne absolutne i sformułujemy równania ruchu. Szczególną uwagę poświęcimy problemowi wyznaczania sił i momentów reakcji więzów w parach kinematycznych układu.

#### 3.3.1. Równania ruchu płaskiego układu członów nieswobodnych we współrzędnych absolutnych

Rozważmy układ  $n$  członów nieswobodnych. Równania ruchu układu mają postać taką samą jak (3.13), tym razem jednak spośród sił uogólnionych wydzielimy siły reakcji więzów  $\mathbf{W}$ , nakładanych na ruch członów przez pary kinematyczne:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{W}, \quad (3.31)$$

gdzie:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{W}_n \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Współrzędne absolutne układu są zależne, muszą bowiem spełniać równania więzów. Zatem do powyższego układu równań różniczkowych należy jeszcze dołączyć układ równań algebraicznych:

$$\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (3.33)$$

Istnieje związek pomiędzy równaniami więzów (3.33) a siłami reakcji więzów  $\mathbf{W}$ , występującymi w równaniu (3.31). Sformułowaniem i omówieniem odpowiednich zależności zajmiemy się w kolejnym punkcie. Obecnie, by móc zapisać równania ruchu układu członów nieswobodnych w ich ostatecznej formie, wzór określający związek pomiędzy reakcjami więzów  $\mathbf{W}$  a równaniami więzów (3.33) podamy bez wyprowadzenia:

$$\mathbf{W} = \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (3.34)$$

gdzie przez  $\Phi_q$  oznaczono macierz Jacobiego równań więzów (3.33), a przez  $\boldsymbol{\lambda}$  wektor tzw. nieoznaczonych mnożników Lagrange'a.

Podstawiając zależność (3.34) do (3.31), otrzymujemy równania ruchu układu członów nieswobodnych w ich najczęściej spotykanej formie:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}. \quad (3.35)$$

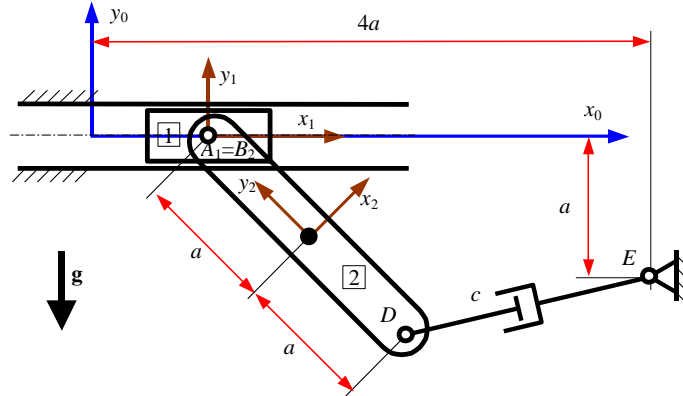
Trzeba pamiętać, że wraz z równaniami ruchu (3.35), wyrażającymi zależność przyspieszeń członów układu od ich masy i sił działających na układ, należy rozpatrywać równania więzów (3.33), wyrażające ograniczenia nałożone na ruch członów poprzez istnienie par kinematycznych tworzonych przez człony układu.

Równania ruchu układu wielocłonowego zostaną bardziej szczegółowo omówione w punkcie 3.4, poświęconym zadaniu prostemu dynamiki.

## PRZYKŁAD 3.2

### Zadanie

Na rysunku przedstawiono mechanizm płaski o dwóch członach i dwóch stopniach swobody. Na człony mechanizmu działa siła grawitacji oraz siła pochodząca od elementu tłumiącego (tłumienie proporcjonalne do prędkości). Mechanizm jest opisany przez współrzędne absolutne  $\mathbf{q}$ , położenie i orientację układów odniesienia pokazano na rysunkach. Początki układów lokalnych  $\pi_1$  i  $\pi_2$  umieszczono w środkach mas członów, układ globalny  $\pi_0$  jest układem inercyjnym.



Należy wyprowadzić równania opisujące:

- więzy kinematyczne  $\Phi(\mathbf{q})$  nałożone na współrzędne  $\mathbf{q}$ ,
- macierz Jacobiego  $\Phi_q(\mathbf{q})$ ,
- wektor prawych stron  $\Gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  w równaniu przyspieszeń,
- macierz masową  $\mathbf{M}$  układu wielocłonowego,
- wektor sił uogólnionych  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , działających na układ wielocłonowy.

Dane:

$a = 1$  (m),  $m_1 = 5$  (kg),  $J_1 = 2$  (kg m<sup>2</sup>),  $m_2 = 3$  (kg),  $J_2 = m_2 a^2/3$ ,  $c = 10$  (N s/m),  $\mathbf{g}^{(0)} = [0 \ -10]^T$  (m/s<sup>2</sup>).

### Rozwiązanie

#### Równania więzów

Zacznijmy od sformułowania równań więzów. Człony 1 (suwak) i 0 (podstawa) tworzą parę postępową. Równania więzów opisujących parę postępową zapiszemy korzystając ze znanych wzorów, w których występują stałe wielkości  $\varphi^0$ ,  $\mathbf{v}^{(0)}$ ,  $\mathbf{s}_A^{(1)}$  i  $\mathbf{s}_B^{(0)}$ . Wartości parametrów opisujących parę postępową, podane w poniższej tabeli, wynikają z danych postawionego zadania oraz z przyjętego rozmieszczenia układów odniesienia. Punkty A i B można przyjąć dowolnie (na osi ruchu względnego).

$\varphi^0$	$\mathbf{v}^{(0)}$	$\mathbf{s}_A^{(1)}$	$\mathbf{s}_B^{(0)}$
0	$[0, 1]^T$	$[0, 0]^T$	$[100, 0]^T$

Człony 1 (suwak) i 2 (wahadło) tworzą parę obrotową. Parę obrotową opisują równania więzów, w których występują stałe wielkości  $\mathbf{s}_A^{(1)}$  i  $\mathbf{s}_B^{(2)}$ . Ich wartości, podane w poniższej tabeli, wynikają z danych postawionego zadania oraz z przyjętego rozmieszczenia układów odniesienia.

$\mathbf{s}_A^{(1)}$	$\mathbf{s}_B^{(2)}$
$[0, 0]^T$	$[0, a]^T$

Dla uniknięcia wątpliwości, zapiszmy wektor współrzędnych absolutnych  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{q} \equiv [\mathbf{r}_1^T \ \varphi_1 \ \mathbf{r}_2^T \ \varphi_2]^T. \quad (\text{a})$$

Równania więzów odpowiadające postępowej parze kinematycznej pomiędzy członami 1 i 0 można zapisać w formie następujących zależności (należy pamiętać, że  $\varphi_0 \equiv 0$ ):

$$\Phi^P(\mathbf{q}) \equiv \begin{bmatrix} \Phi^{K\downarrow} \\ \Phi^{K\uparrow} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 - \varphi^0 \\ (\mathbf{v}^{(0)})^T (\mathbf{s}_B^{(0)} - \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2 \times 1}. \quad (\text{b})$$

Więzy krepujące współrzędne absolutne, wynikające z istnienia pary obrotowej pomiędzy członami 1 i 2 mają postać:

$$\Phi^O(\mathbf{q}) \equiv \Phi^{K^*}(\mathbf{q}) \equiv \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)} - (\mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_B^{(2)}) = \mathbf{0}_{2 \times 1}. \quad (\text{c})$$

Równania więzów opisujących wszystkie pary kinematyczne mechanizmu, można zapisać w zbiorczej formie:

$$\Phi(\mathbf{q}) \equiv \begin{bmatrix} \Phi^P(\mathbf{q}) \\ \Phi^O(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \Phi^{K\angle}(\mathbf{q}) \\ \Phi^{K\uparrow}(\mathbf{q}) \\ \Phi^{K\bullet}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}_{4 \times 1} \equiv \begin{bmatrix} \varphi_1 - \varphi^0 \\ (\mathbf{v}^{(0)})^T (\mathbf{s}_B^{(0)} - \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)}) \\ \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)} - (\mathbf{r}_2 + \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_B^{(2)}) \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix}_{4 \times 1}. \quad (d)$$

#### Macierz Jacobiego

Macierz Jacobiego obliczymy różniczkując równania (d) względem współrzędnych wektora  $\mathbf{q}$ . Wygodnie jest skorzystać z ogólnych wzorów na niezerowe elementy macierzy Jacobiego. W wypadku rozpatrywanego mechanizmu macierz ta ma postać:

$$\Phi_q(\mathbf{q}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 & \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 \\ -(\mathbf{v}^{(0)})^T & -(\mathbf{v}^{(0)})^T \Omega \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)} & \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} & \Omega \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)} & -\mathbf{I}_{2 \times 2} & -\Omega \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_B^{(2)} \end{bmatrix}_{4 \times 6}. \quad (e)$$

#### Wektor $\Gamma$

Obliczenie wektora  $\Gamma$  jest zazwyczaj pracochłonne, dlatego wygodnie jest skorzystać z gotowych wzorów, wyprowadzonych dla typowych więzów kinematycznych. W wypadku rozpatrywanego mechanizmu wektor ten ma postać (uwzględniono, że  $\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{0}$ ,  $\varphi_0 \equiv 0$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_0 \equiv \mathbf{0}$ ,  $\dot{\varphi}_0 \equiv 0$  i  $\mathbf{R}_0 \equiv \mathbf{I}_{2 \times 2}$ ):

$$\Gamma \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ -(\mathbf{v}^{(0)})^T \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)} \dot{\varphi}_1^2 \\ \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)} \dot{\varphi}_1^2 - \mathbf{R}_2 \mathbf{s}_B^{(2)} \dot{\varphi}_2^2 \end{bmatrix}_{4 \times 1}. \quad (f)$$

#### Macierz masowa

Macierz masową układu wielocłonowego uzyskujemy zestawiając w odpowiedni sposób masy członów oraz momenty bezwładności względem osi przechodzących przez środki mas członów (w naszym zadaniu wielkości te są dane):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix}_{6 \times 6}. \quad (g)$$

#### Siła uogólniona

Wyznaczenie sił działających na człony mechanizmu rozpoczniemy od obliczenia sił grawitacji:

$$\mathbf{Q}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^G \\ \mathbf{Q}_2^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \mathbf{g} \\ 0 \\ m_2 \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix}_{6 \times 1}. \quad (h)$$

Obliczając działającą na wahadło siłę  $\mathbf{Q}_2^D$ , pochodzącą od elementu tłumiącego, skorzystamy z wzorów (b)÷(f) z przykładu 3.1. Ostatecznie wektor sił uogólnionych działających na mechanizm obliczamy, sumując siły pochodzące od grawitacji z siłami pochodzącymi od elementu tłumiącego:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^G \\ \mathbf{Q}_2^G + \mathbf{Q}_2^D \end{bmatrix}_{6 \times 1}. \quad (i)$$

---

### PRZYKŁAD 3.3

#### Zadanie

Napisać procedurę, która dla zadanych wielkości  $\mathbf{q}$  i  $\dot{\mathbf{q}}$  wykonuje obliczenia według wzorów wyprowadzonych w poprzednim przykładzie. Obliczyć  $\Phi(\mathbf{q})$ ,  $\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})$ ,  $\Gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  dla  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^* \equiv [0 \ 0 \ 0 \ 1/\sqrt{2} \ -1/\sqrt{2} \ \pi/4]^T$  i  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^* \equiv [-(1+\sqrt{2}) \ 0 \ 0 \ -1 \ \sqrt{2} \ 2]^T$ .

#### Rozwiązanie

Pierwsza część rozwiązania sprowadza się do zapisania wyprowadzonych wcześniej wzorów w formie procedury. Tekst procedury (*Macierze.m*) umieszczono w załączniku.

Druga część zadania sprowadza się do użycia procedury i wykonania obliczeń, w wyniku których otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{q}^*) &\approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1}, \quad \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}^*) \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0.7071 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0.7071 \end{bmatrix}_{4 \times 6}, \quad \Gamma(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.8284 \\ -2.8284 \end{bmatrix}_{4 \times 1}, \\ \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 6}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \\ 0 \\ -8.4560 \\ -31.3546 \\ -6.9371 \end{bmatrix}_{6 \times 1}. \end{aligned} \quad (a)$$


---

### 3.3.2. Równania więzów i reakcje więzów

Zajmiemy się teraz bardzo ważnym i dość trudnym problemem wyprowadzenia, podanej wcześniej bez dowodu, zależności (3.34) pomiędzy reakcjami więzów a równaniami więzów.

O układzie (3.33) założymy, że składa się on z równań niezależnych, czyli że więzy nadmiarowe nie pojawiają się w matematycznym opisie układu. Przyjmijmy też, że konfiguracja układu jest nieosobliwa. Innymi słowy zakładamy, że macierz Jacobiego równań więzów ma pełny rząd wierszowy. Przyjmijmy także założenie, że rozpatrujemy jedynie więzy idealne (gładkie), czyli pozbawione tarcia.

Układ wieloczłonowy jest opisany przez  $N = 3n$  współrzędnych absolutnych, a układ (3.33) składa się z  $m$  równań. O macierzy Jacobiego  $\Phi_{\mathbf{q}}$  założyliśmy, że ma ona pełny rząd wierszowy, zatem spośród jej kolumn możemy wybrać  $m$  w taki sposób, by utworzyły nieosobliwą podmacierz o rozmiarze  $m \times m$ . Dla uproszczenia zapisu wzorów założymy, bez zmniejszania ogólności rozważań, że pierwsze  $m$  kolumn macierzy Jacobiego tworzy nieosobliwą podmacierz  $\Phi_{\mathbf{u}}$  i zapiszmy macierz Jacobiego w postaci:

$$[\Phi_{\mathbf{q}}]_{m \times N} = \begin{bmatrix} [\Phi_{\mathbf{u}}]_{m \times m} & [\Phi_{\mathbf{v}}]_{m \times (N-m)} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Współrzędne absolutne zgromadzone w wektorze  $\mathbf{q}$  możemy podzielić na  $N-m$  współrzędnych niezależnych  $\mathbf{v}$  i  $m$  współrzędnych zależnych  $\mathbf{u}$  (dla założonych wartości współrzędnych niezależnych  $\mathbf{v}$  możemy wyznaczyć współrzędne zależne  $\mathbf{u}$ , rozwiązując względem nich układ równań więzów (3.33)). Jako współrzędne zależne  $\mathbf{u}$  wygodnie jest

wybrać te elementy wektora  $\mathbf{q}$ , które odpowiadają podmacierzy  $\Phi_{\mathbf{u}}$ . Nieosobliwość  $\Phi_{\mathbf{u}}$  gwarantuje, że dla zadanych wartości współrzędnych niezależnych  $\mathbf{v}$  będzie można obliczyć współrzędne zależne  $\mathbf{u}$ . Przyjęliśmy, dla wygody zapisu wzorów, że macierz  $\Phi_{\mathbf{u}}$  składa się z  $m$  pierwszych kolumn macierzy Jacobiego  $\Phi_{\mathbf{q}}$ , zatem jako współrzędne zależne wybierzemy pierwsze  $m$  elementów wektora  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{q}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{m \times 1} \\ \mathbf{v}_{(N-m) \times 1} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Różniczkując (3.33) względem czasu, a następnie uwzględniając (3.36) i (3.37), otrzymujemy:

$$\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \Phi_{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} + \Phi_{\mathbf{v}} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}_{m \times 1}. \quad (3.38)$$

Powyższe równanie możemy przekształcić do następującej, potrzebnej do dalszych rozważań, postaci:

$$\Phi_{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} = -\Phi_{\mathbf{v}} \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.39)$$

Z mechaniki wiadomo, że sumaryczna moc chwilowa rozwijana przez siły reakcji więzów idealnych jest zerowa. Moc chwilową obliczamy, mnożąc składową siły uogólnionej przez odpowiadającą jej składową prędkości uogólnionej. Sumę mocy chwilowych rozwijanych przez reakcje więzów gładkich można zatem obliczyć jako:

$$P = \mathbf{W}^T \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}_{(\mathbf{u})}^T \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{W}_{(\mathbf{v})}^T \dot{\mathbf{v}} = 0, \quad (3.40)$$

gdzie przez  $\mathbf{W}_{(\mathbf{u})}$  oznaczono reakcje odpowiadające współrzędnym  $\mathbf{u}$ , a przez  $\mathbf{W}_{(\mathbf{v})}$  – współrzędnym  $\mathbf{v}$  (dolne indeksy „ $(\mathbf{u})$ ” i „ $(\mathbf{v})$ ” nie oznaczają pochodnych cząstkowych!).

Powyższe równanie można przekształcić do postaci:

$$\mathbf{W}_{(\mathbf{u})}^T \dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{W}_{(\mathbf{v})}^T \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.41)$$

Macierz  $\Phi_{\mathbf{u}}$  ma rozmiar  $m \times m$  i jest nieosobliwa, zatem dowolny wektor wierszowy o wymiarze  $m$  może być przedstawiony jako kombinacja liniowa wierszy macierzy  $\Phi_{\mathbf{u}}$ . Możemy zatem napisać:

$$\mathbf{W}_{(\mathbf{u})}^T = \boldsymbol{\lambda}^T \Phi_{\mathbf{u}}, \quad (3.42)$$

gdzie przez  $\boldsymbol{\lambda}$  oznaczono współczynniki kombinacji liniowej.

Podstawiając (3.42) do (3.41), otrzymujemy:

$$\boldsymbol{\lambda}^T \Phi_{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{W}_{(\mathbf{v})}^T \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.43)$$

Jeśli do powyższego równania podstawimy zależność (3.39), to otrzymamy:

$$-\boldsymbol{\lambda}^T \Phi_{\mathbf{v}} \dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{W}_{(\mathbf{v})}^T \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.44)$$

Powyższe równanie obowiązuje dla dowolnego wektora prędkości niezależnych  $\dot{\mathbf{v}}$ . Stąd wniosek, że musi być spełniona następująca zależność:

$$\mathbf{W}_{(\mathbf{v})}^T = \boldsymbol{\lambda}^T \Phi_{\mathbf{v}}. \quad (3.45)$$

Zestawiając równania (3.42) i (3.45), otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{(\mathbf{u})}^T & \mathbf{W}_{(\mathbf{v})}^T \end{bmatrix} = \boldsymbol{\lambda}^T \begin{bmatrix} \Phi_{\mathbf{u}} & \Phi_{\mathbf{v}} \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Po dokonaniu transpozycji, uzyskujemy poszukiwaną zależność:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{(u)} \\ \mathbf{W}_{(v)} \end{bmatrix} = [\Phi_u \quad \Phi_v]^T \boldsymbol{\lambda} = \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (3.47)$$

Zinterpretujmy uzyskany wynik. Wykazaliśmy, że uogólnione siły reakcji więzów w parach kinematycznych można zapisać w postaci kombinacji liniowej kolumn transponowanej macierzy Jacobiego. Kolumny te wyznaczają w  $N$ -wymiarowej przestrzeni kierunki, w których mogą działać siły reakcji. Wektor współczynników kombinacji liniowej  $\boldsymbol{\lambda}$  odpowiada za wartości uogólnionych sił reakcji, działających w poszczególnych kierunkach. Elementy wektora  $\boldsymbol{\lambda}$  noszą nazwę nieoznaczonych mnożników Lagrange’a. Zauważmy, że znając konfigurację układu opisaną przez wektor  $\mathbf{q}$ , znamy także kierunki działania sił reakcji (macierz  $\Phi_q$ ), nie znamy natomiast wartości tych reakcji (wektor  $\boldsymbol{\lambda}$ ), gdyż zależą one – między innymi – od sił czynnych działających na układ. Wartości nieoznaczonych mnożników Lagrange’a obliczamy, rozwiązując równania ruchu układu wieloczłonowego.

Sformułowanie równania (3.47) było możliwe dzięki założeniu o gładkości więzów. Upraszczając rozważania można nieprecyzyjnie stwierdzić, że brak tarcia powoduje, iż kierunki działania reakcji więzów są prostopadłe (normalne) do kierunków ruchu względnego w parach kinematycznych, a zatem są znane, kiedy znana jest konfiguracja układu. Jeśli uwzględnia się tarcie w przegubach, to pojawiają się składowe uogólnionych sił reakcji równoległe (styczne) do kierunków ruchu względnego w parach kinematycznych. Na ogół zależność pomiędzy normalnymi i stycznymi składowymi reakcji w parze kinematycznej opisywana jest przez Coulombowski model tarcia. Uwzględnienie jej w obliczeniach wymaga wnikania w szczegóły konstrukcyjne technicznej realizacji par kinematycznych oraz przeprowadzania dodatkowych obliczeń iteracyjnych. Zagadnienie to przekracza jednak ramy niniejszego opracowania.

Należy jeszcze podkreślić, że zależność (3.47) w przypadku mechanizmów przestrzennych byłaby nieco bardziej skomplikowana, choć rozumowanie i interpretacja wyników pozostałyby takie same. Komplikacje spowodowane są tym, że orientację członu we współrzędnych absolutnych zapisuje się za pomocą trzech współrzędnych kątowych, np. trzech kątów Eulera  $zxz$ . W przypadku przestrzennego układu wieloczłonowego w równaniu (3.38), w wektorze  $\dot{\mathbf{q}}$  występowałyby pochodne kątów Eulera, natomiast w równaniu (3.40) zamiast  $\dot{\mathbf{q}}$  pojawiłby się wektor złożony z prędkości liniowych i kątowych kolejnych członów ( $[\dot{\mathbf{r}}_1^T \quad \boldsymbol{\omega}_1^{(1)T} \quad \dots \quad \dot{\mathbf{r}}_n^T \quad \boldsymbol{\omega}_n^{(n)T}]$ ). Wektor prędkości kątowej członu i wektor złożony z pochodnych kątów Eulera to dwa różne wektory. W prowadzonym rozumowaniu należałoby zatem uwzględnić zależność pomiędzy prędkością kątową członu a pochodnymi kątów Eulera opisujących orientację członu w przestrzeni. Obliczenia skomplikowałyby się nieznacznie, a w ich wyniku, w równaniu (3.47), zamiast macierzy Jacobiego równań więzów, pojawiłaby się pewna jej modyfikacja (fragmenty macierzy odpowiadające współrzędnym kątowym byłyby mnożone przez macierze transformujące pochodne kątów Eulera do prędkości kątowych).

Chwilę uwagi należy jeszcze poświęcić więzom nadmiarowym. Wiele rzeczywistych mechanizmów zawiera takie więzy, są one jednak eliminowane z matematycznego opisu, dzięki czemu macierz Jacobiego równań więzów ma pełny rząd wierszowy. Usunięcie nadmiarowych równań więzów nie zmienia kinematyki mechanizmu, wpływa natomiast na



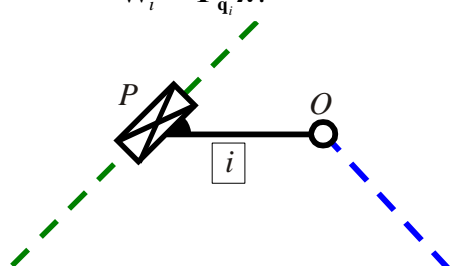
obliczane siły reakcji w parach kinematycznych. Należy mieć świadomość, że więzom usuniętym z matematycznego opisu układu (lecz pozostającym w układzie rzeczywistym!) przypisuje się arbitralnie zerowe reakcje. Odpowiednie reakcje więzów w rzeczywistym mechanizmie wcale nie muszą być zerowe! Gdyby przyjąć inne, niezerowe reakcje odpowiadające usuwanym więzom, to reakcje więzów pozostawionych w opisie układu również uległyby zmianie. W złożonym z członów sztywnych układzie wieloczłonowym z więzami nadmiarowymi zagadnienie wyznaczania reakcji nie ma bowiem jednoznacznego rozwiązania<sup>1</sup>. Jednoznaczne wyznaczenie sił reakcji wymaga uwzględnienia odkształcalności członów, co zmienia zasadniczo postać rozpatrywanego zagadnienia i wykracza poza ramy niniejszego opracowania.

### 3.3.3. Interpretacja fizyczna mnożników Lagrange’a

Zależność uogólnionej siły reakcji więzów  $\mathbf{W}$  od macierzy Jacobiego równań więzów  $\Phi_{\mathbf{q}}$  oraz nieoznaczonych mnożników Lagrange’a  $\lambda$  jest wyrażona przez równanie (3.47). Każdy element wektora  $\lambda$  odpowiada jednemu skalarnemu równaniu więzów. Zastanowimy się teraz, jaka jest fizyczna interpretacja elementów wektora  $\lambda$ .

#### *Uogólnione siły reakcji działające na człon*

Dla uproszczenia rozważań zajmijmy się najpierw członem  $i$ , który tworzy z innymi członami układu tylko dwie pary kinematyczne: postępową  $P$  i obrotową  $O$  (rysunek 3.5). Oznaczmy przez  $\mathbf{W}_i$  trzy składowe wektora uogólnionej siły reakcji  $\mathbf{W}$ , odpowiadające członowi  $i$ . Zgodnie z równaniem (3.47), wektor  $\mathbf{W}_i$  można obliczyć jako iloczyn odpowiadającego członowi  $i$  fragmentu transponowanej macierzy Jacobiego oraz mnożników Lagrange’a:

$$\mathbf{W}_i = \Phi_{\mathbf{q}_i}^T \lambda. \quad (3.48)$$


Rysunek 3.5. Człon oraz pary kinematyczne

Jak pamiętamy, w przypadku zastosowania współrzędnych absolutnych, macierz Jacobiego równań więzów składa się głównie z zer. Przyjeliśmy, dla uproszczenia rozważań, że człon  $i$  wchodzi w skład zaledwie dwóch par kinematycznych, zatem w wierszach  $\Phi_{\mathbf{q}_i}$  odpowiadających pozostałym parom układu występować będą wyłącznie zera (gdyż w opisujących pozostałe pary równaniach więzów współrzędne  $\mathbf{q}_i$  członu  $i$  nie pojawią się).

<sup>1</sup> Można w uproszczeniu stwierdzić, że mechanizm z więzami nadmiarowymi jest ruchomym odpowiednikiem nieruchomej, statycznie niewyznaczalnej konstrukcji. Arbitralne przyjęcie wartości niektórych spośród reakcji pozwala na wyznaczenie pozostałych reakcji z dostępnych równań równowagi. Liczba dowolnie przyjętych reakcji jest równa krotności statycznej niewyznaczalności konstrukcji (a w przypadku mechanizmu – liczbie więzów nadmiarowych). Wartości dowolnie przyjętych reakcji wpływają oczywiście na wartości pozostałych reakcji, wyznaczanych z równań równowagi.

Oznacza to, że elementy wektora  $\lambda$ , inne niż  $\lambda^P$  – odpowiadające parze postępowej  $P$  oraz  $\lambda^O$  – odpowiadające parze obrotowej  $O$ , są w równaniu (3.48) mnożone przez zera. Jeśli przez  $\Phi^O$  oznaczmy równania więzów opisujące rozpatrywaną parę obrotową, a przez  $\Phi^P$  równania o opisujące parę postępową, to zależność (3.48) będziemy mogli przepisać w postaci:

$$\mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} \vdots \\ \lambda^O \\ \vdots \\ \lambda^P \\ \vdots \end{bmatrix} = (\Phi_{q_i}^O)^T \lambda^O + (\Phi_{q_i}^P)^T \lambda^P = \mathbf{W}_i^O + \mathbf{W}_i^P. \quad (3.49)$$

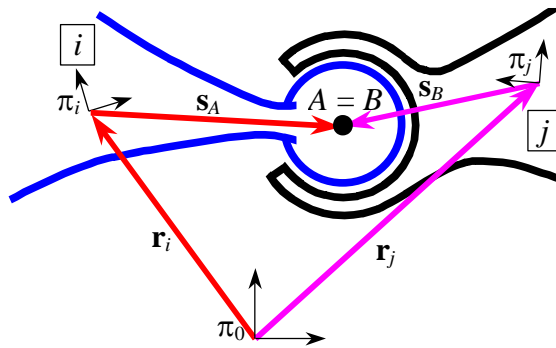
Z powyższego równania wynika, że uogólnioną siłę reakcji, działającą na człon  $i$ , można przedstawić w postaci sumy sił pochodzących od poszczególnych par kinematycznych. Poszczególne składniki tej sumy można w łatwy sposób wyodrębnić. Przedstawione rozumowanie można – bez istotnych zmian – powtórzyć dla dowolnej liczby par kinematycznych. Zauważmy, że gdyby człon  $i$  współtworzył nie dwie, lecz  $k$  par kinematycznych, to omawiana suma składałaby się nie z dwóch, lecz z  $k$  składników.

Wynik przeprowadzonego rozumowania umożliwia nam zajęcie się osobno każdym typem pary kinematycznej i dokonanie interpretacji fizycznej mnożników Lagrange’a odpowiadających danemu typowi pary.

### Para obrotowa

Rozważmy pokazaną na rysunku 3.6 parę obrotową, tworzoną przez człony  $i$  oraz  $j$ . Równania więzów  $\Phi^{K\bullet}$  opisujących tę parę sformułowano wcześniej, omawiając zagadnienia kinematyki. Korzystając z (3.49) oraz z wyprowadzonych wcześniej wzorów, opisujących potencjalnie niezerowe elementy macierzy Jacobiego dla pary obrotowej, możemy napisać:

$$\mathbf{W}_i^O = (\Phi_{q_i}^O)^T \lambda^O = (\Phi_{q_i}^{K\bullet})^T \lambda^O = [\Phi_{r_i}^{K\bullet} \quad \Phi_{\phi_i}^{K\bullet}]^T \lambda^O = [\mathbf{I}_{2 \times 2} \quad \Omega \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)}]^T \lambda^O = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ (\Omega \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)})^T \end{bmatrix} \lambda^O. \quad (3.50)$$



Rysunek 3.6. Para obrotowa

Porównując uzyskane równanie z zależnością (3.20) zauważamy, że dwuelementowy wektor mnożników Lagrange’a  $\lambda^O$ , odpowiadających parze obrotowej, możemy interpretować jako przyłożoną do członu  $i$  siłę o linii działania przechodzącej przez punkt A. Składowe siły  $\lambda^O = [\lambda_1^O \quad \lambda_2^O]^T$  są oczywiście zapisane w globalnym układzie odniesienia  $\pi_0$ .

Obliczając uogólnioną siłę reakcji działającą na człon  $j$ , uzyskujemy:

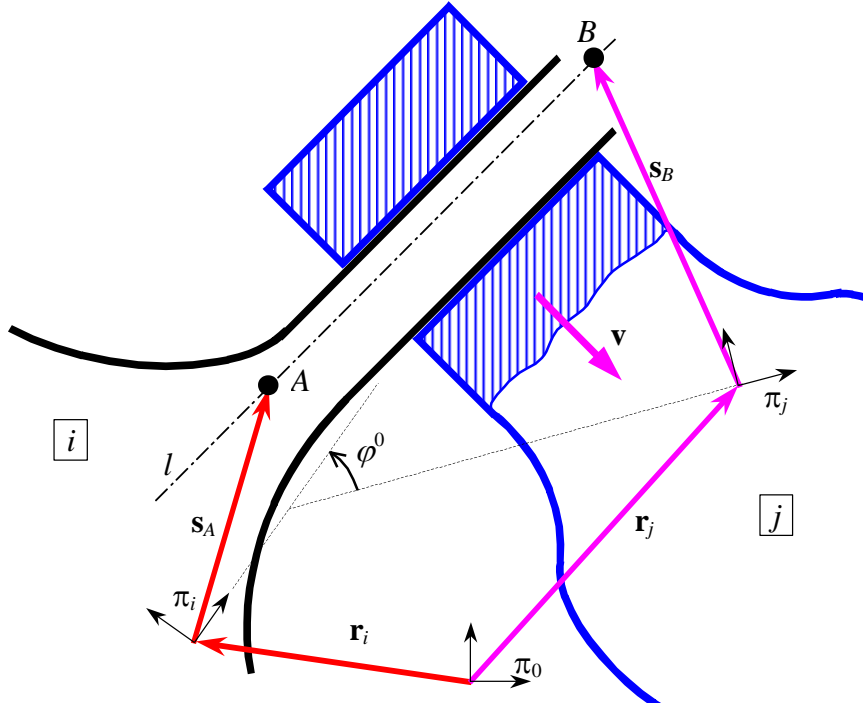
$$\mathbf{W}_j^O = (\Phi_{q_j}^{K\bullet})^T \lambda^O = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{2 \times 2} & -\Omega \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)} \end{bmatrix}^T \lambda^O = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ (\Omega \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)})^T \end{bmatrix} (-\lambda^O). \quad (3.51)$$

Z powyższego równania wynika, że człon  $j$  jest obciążony siłą  $(-\lambda^O)$  o linii działania przechodzącej przez punkt  $B$ . Zauważmy, że punkt  $B$  członu  $j$  pokrywa się z punktem  $A$  członu  $i$ , a siła działająca na człon  $j$  jest skierowana przeciwnie do siły działającej na człon  $i$ , uzyskany wynik jest zatem zgodny z III zasadą dynamiki Newtona.

### Para postępową

Rozważmy zilustrowaną na rysunku 3.7 parę postępową, przyjmując oznaczenia kątów i wektorów oraz formułując równania więzów tak samo, jak zrobiliśmy to omawiając kinematykę układów wieloczłonowych. Wykorzystując wzory na potencjalnie niezerowe elementy macierzy Jacobiego dla pary postępowej, możemy napisać:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i^P &= (\Phi_{q_i}^P)^T \lambda^P = \begin{bmatrix} \Phi_{q_i}^{K\angle} \\ \Phi_{q_i}^{K\uparrow} \end{bmatrix}^T \lambda^P = \begin{bmatrix} \Phi_{r_i}^{K\angle} & \Phi_{\varphi_i}^{K\angle} \\ \Phi_{r_i}^{K\uparrow} & \Phi_{\varphi_i}^{K\uparrow} \end{bmatrix}^T \lambda^P = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \\ -(\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T & -(\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})^T \Omega \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_1^P \\ \lambda_2^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} & -\mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)} \\ 1 & -(\Omega \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)})^T \mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^P \\ \lambda_2^P \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \lambda_1^P + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ (\Omega \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)})^T \end{bmatrix} (-\lambda_2^P \mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)}). \end{aligned} \quad (3.52)$$



Rysunek 3.7. Para postępową

Porównując powyższą zależność z równaniem (3.21) zauważamy, że mnożnik  $\lambda_1^P$  można interpretować jako moment działający na człon  $i$ . Interpretacja mnożnika  $\lambda_2^P$  wymaga nieco więcej wysiłku. Zauważmy, że drugi składnik sumy występującej w ostatecznej postaci równania (3.52) można interpretować jako działającą na człon  $i$  siłę  $(-\lambda_2^P \mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)})$  o linii

działania przechodzącej przez punkt  $A$ . Kierunek działania siły jest określony przez prostopadły do osi ruchu względnego w parze kinematycznej wersor<sup>1</sup>  $\mathbf{v}$  (o współrzędnych przeliczonych do układu  $\pi_0$ ), a za jej wartość odpowiada mnożnik  $(-\lambda_2^P)$ .

Możemy zatem stwierdzić, że reakcje w parze postępowej, działające na człon  $i$ , są zredukowane do momentu o wartości  $\lambda_1^P$  oraz siły o wartości  $(-\lambda_2^P)$ , której linia działania przechodzi przez punkt  $A$  i jest prostopadła do kierunku ruchu względnego w parze kinematycznej.

Obliczając uogólnioną siłę reakcji w parze postępowej, działającą na człon  $j$ , uzyskamy, po przekształceniach podobnych do wykonanych poprzednio:

$$\mathbf{W}_j^P = (\Phi_{q_j}^P)^T \boldsymbol{\lambda}^P = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} (-\lambda_1^P) + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ (\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} - \mathbf{r}_j))^T \end{bmatrix} (\lambda_2^P \mathbf{R}_j \mathbf{v}^{(j)}). \quad (3.53)$$

Zauważmy, że wyrażenie  $(\mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)} - \mathbf{r}_j)$  oznacza wektor o początku w środku masy członu  $j$  i końcu w punkcie  $A$ , należącym do członu  $i$  (współrzędne wektora są zapisane w układzie  $\pi_0$ ). Analizując powyższe równanie możemy zatem stwierdzić, że reakcje w parze postępowej, działające na człon  $j$  są zredukowane do momentu o wartości  $(-\lambda_1^P)$  oraz siły o wartości  $\lambda_2^P$ . Siła ta jest prostopadła do kierunku ruchu względnego w parze kinematycznej, a jej linia działania przechodzi przez punkt  $A$ , związany z członem  $i$ . Uzyskany wynik jest oczywiście zgodny z III zasadą dynamiki Newtona, zastosowaną do tworzących parę postępową członów  $i$  oraz  $j$ .

### Para postępowo-obrotowa

Nietrudno zauważyć, że interpretacja mnożnika Lagrange'a  $\lambda^{P-O}$ , odpowiadającego więzom opisującym parę postępowo-obrotową, jest taka sama jak interpretacja mnożnika  $\lambda_2^P$  w przypadku więzów opisujących parę postępową. Nie będziemy zatem powtarzać przeprowadzonych wcześniej rozważań.

---

### PRZYKŁAD 3.4

#### Zadanie

Mechanizm z przykładu 3.2 przyjmuje konfigurację opisaną przez wektor współrzędnych absolutnych  $\mathbf{q}^* = [0 \ 0 \ 0 \ 1/\sqrt{2} \ -1/\sqrt{2} \ \pi/4]^T$ . Zakładamy, że wektor mnożników Lagrange'a ma wartość  $\boldsymbol{\lambda}^* \approx [0 \ -68.1822 \ 13.5543 \ -18.1822]^T$ . Należy wyznaczyć uogólnione reakcje w parach kinematycznych, a następnie obliczyć wypadkową siłę i moment działające na człon 1.

#### Rozwiązanie

W czteroelementowym wektorze mnożników Lagrange'a dwa pierwsze elementy odpowiadają parze postępowej, a dwa kolejne parze obrotowej:

---

<sup>1</sup> W rozważaniach dotyczących kinematyki przyjmowaliśmy, że  $\mathbf{v}$  jest, prostopadłym do osi ruchu względnego w parze kinematycznej, wektorem o dowolnej, niezerowej długości. W obliczeniach sił reakcji znacznie wygodniej jest przyjąć, że długość ta jest jednostkowa, czyli że  $\mathbf{v}$  jest wersorem. Założenie to nie zmienia w niczym rozważań dotyczących kinematyki, uprości natomiast interpretację mnożników Lagrange'a.

$$\lambda_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} \lambda^P \\ \lambda^O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^P \\ \lambda_2^P \\ \lambda^O \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Jak wiemy, poszczególne mnożniki Lagrange'a można traktować jako składowe fizycznych reakcji działających na człon, np.  $\lambda^O$  to siła reakcji w parze obrotowej, o linii działania przechodzącej przez oś obrotu względnego, której składowe wyznaczono w globalnym układzie odniesienia. W rozpatrywanym obecnie zadaniu należy wyznaczyć reakcje uogólnione, czyli trójelementowe wektory, w których dwa pierwsze elementy odpowiadają wypadkowej sile o linii działania zawierającej środek masy członu (jej składowe wyrażone są w układzie globalnym), a trzeci element jest wypadkowym momentem liczonym względem środka masy członu (przypominamy, że – zgodnie z umową – początek lokalnego układu odniesienia członu pokrywa się z jego środkiem masy).

Uogólnione reakcje wyznaczamy, mnożąc transponowaną macierz Jacobiego przez wektor mnożników Lagrange'a. Macierz Jacobiego równań więzów dana jest wzorem ogólnym (e) z przykładu 3.2, natomiast jej wartości liczbowe dla  $\mathbf{q}^*$  dane są wzorem (a) z przykładu 3.3. Obecnie interesować nas będą tylko trzy pierwsze kolumny macierzy Jacobiego, odpowiadające członowi 1. Człon 1 (suwak) tworzy parę postępową z postawą mechanizmu i parę obrotową z członem 2 (wahadłem). Para postępową opisana jest równaniami więzów  $\Phi^P$ , a para obrotowa równaniami  $\Phi^O$  (zob. przykład 3.2). Uogólnione siły reakcji w parach kinematycznych działające na człon 1 są więc równe:

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} (\Phi^P)_{q_1}^T \\ (\Phi^O)_{q_1}^T \end{bmatrix}^T \lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \\ -(\mathbf{v}^{(0)})^T & -(\mathbf{v}^{(0)})^T \Omega \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} & \Omega \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)} \end{bmatrix}^T \lambda. \quad (b)$$

Wektor  $\mathbf{W}_1$  jest sumą działających na człon 1 reakcji w parze postępowej i obrotowej; można go rozłożyć na składową odpowiadającą reakcjom w parze postępowej i na składową odpowiadającą reakcjom w parze obrotowej:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= \begin{bmatrix} (\Phi^P)_{q_1}^T & (\Phi^O)_{q_1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^P \\ \lambda^O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} & -\mathbf{v}^{(0)} \\ 1 & -(\Omega \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)})^T \mathbf{v}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^P \\ \lambda_2^P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ (\Omega \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)})^T \end{bmatrix} \lambda^O = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} & -\mathbf{v}^{(0)} \\ 1 & -(\Omega \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)})^T \mathbf{v}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^P \\ \lambda_2^P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ (\Omega \mathbf{R}_1 \mathbf{s}_A^{(1)})^T \end{bmatrix} \lambda^O = \mathbf{W}_1^P + \mathbf{W}_1^O. \end{aligned} \quad (c)$$

Dwa pierwsze elementy wektorów  $\mathbf{W}_1^P$  i  $\mathbf{W}_1^O$  odpowiadają wypadkowym siłom o liniach działania zawierających środek masy członu, a ostatnie elementy tych wektorów odpowiadają momentom liczonym względem środka masy.

Na człon 1, prócz sił reakcji więzów, działa też siła ciężenia  $\mathbf{Q}_1^G$ , dana wzorem (h) z przykładu 3.2. Wypadkowa siła uogólniona działająca na człon jest zatem równa:

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{W}_1^P + \mathbf{W}_1^O + \mathbf{Q}_1^G. \quad (d)$$

Pozostaje podstawienie danych liczbowych.

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1^P &\approx \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -68.1822 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 68.1822 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{W}_1^O &\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13.5543 \\ -18.1822 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.5543 \\ -18.1822 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{S}_1 &\approx \begin{bmatrix} 0 \\ 68.1822 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13.5543 \\ -18.1822 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.5543 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (e)$$

Na zakończenie warto zwrócić uwagę, że przyjęte do obliczeń wartości mnożników  $\lambda^*$  prowadzą do wyników, które mają sens fizyczny. Zauważmy bowiem, że składowa  $y$  wypadkowej siły działającej na człon jest zerowa, co oznacza, że zerowe jest także przyspieszenie członu w kierunku osi  $y$  układu globalnego. Wypadkowy moment działający na człon jest również zerowy, a zatem przyspieszenie kątowe członu jest zerowe. Uzyskane wyniki są więc zgodne z więzami nakładanymi na ruch suwaka przez parę postępową, tworzoną przezeń z podstawą mechanizmu.

### 3.4. Zadanie proste dynamiki

#### 3.4.1. Sformułowanie zagadnienia dynamiki

Przez zagadnienie dynamiki dla układu wielocłonowego (zwane też zadaniem prostym dynamiki) rozumie się zadanie polegające na wyznaczeniu ruchu mechanizmu (położeń, prędkości i przyspieszeń) w zadanym przedziale czasu, kiedy dane są warunki początkowe<sup>1</sup> ( $\mathbf{q}(t=0) = \mathbf{q}^0$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t=0) = \dot{\mathbf{q}}^0$ ) oraz znane są siły<sup>2</sup> działające na układ.

Warto omówić różnice pomiędzy zagadnieniem kinematyki a zagadnieniem dynamiki dla układu wielocłonowego. W zagadnieniu kinematyki rozpatrujemy jedynie geometrię układu i czas, pomijając masy członów i działające na człony siły. Z matematycznego punktu widzenia zagadnienie kinematyki jest określone jedynie w dyskretnych chwilach, a obliczenia sprowadzają się do rozwiązania układu nieliniowych równań algebraicznych (zadanie o położeniach) oraz układów równań liniowych (zadania o prędkościach i przyspieszeniach).

W zadaniu dynamiki interesują nas związki pomiędzy ruchem układu a przyczynami, które ten ruch wywołały (czyli siłami działającymi na układ). Zadanie dynamiki jest określone w pewnym przedziale czasu, a nie w wybranych chwilach należących do tego przedziału. Od strony matematycznej rozwiązanie zagadnienia dynamiki sprowadza się do scałkowania układu równań różniczkowo-algebraicznych przy zadanych warunkach początkowych.

W praktycznych zagadnieniach, zarówno w przypadku zadań kinematyki, jak i dynamiki, ze względu na złożoność równań, nie stosuje się metod analitycznych, lecz metody numeryczne. Złożoność obliczeniowa zagadnienia dynamiki jest znacznie większa niż zadania kinematyki.

#### 3.4.2. Równania różniczkowo-algebraiczne opisujące układ wielocłonowy

W punkcie 3.3.1 sformułowaliśmy równania ruchu układu  $n$  członów nieswobodnych, opisanego przez  $N = 3n$  współrzędnych absolutnych zgromadzonych w wektorze  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}. \quad (3.54)$$

W powyższym układzie  $N$  równań występuje  $N+m$  niewiadomych ( $N$  elementów wektora przyspieszeń  $\ddot{\mathbf{q}}$  oraz  $m$  elementów wektora nieoznaczonych mnożników Lagrange'a  $\boldsymbol{\lambda}$ ). By uzyskać pełny opis układu wielocłonowego, do powyższego układu równań różniczkowych należy jeszcze dołączyć układ równań algebraicznych (3.33), czyli równania więzów:

$$\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (3.55)$$

Równania więzów nakładają ograniczenia nie tylko na współrzędne  $\mathbf{q}$ , lecz także na prędkości  $\dot{\mathbf{q}}$  i przyspieszenia  $\ddot{\mathbf{q}}$ . Postać tych ograniczeń uzyskujemy jedno- i dwukrotnie

<sup>1</sup> Zakładamy, że warunki początkowe są zgodne z więzami nałożonymi na układ wielocłonowy. W przeciwnym wypadku rozpoczynanie obliczeń nie miałoby sensu.

<sup>2</sup> Przez siły działające na układ rozumiemy np. siły grawitacji, siły napędowe, oddziaływania w łączących człony elementach takich jak sprężyny lub tłumiki itp. Należy podkreślić, że nieznane siły reakcji więzów są obliczane podczas rozwiązywania zadania dynamiki.

różniczkując równania więzów (szczegóły obliczeń omówiono, przedstawiając kinematykę układów wieloczłonowych):

$$\Phi_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}_{m \times 1}, \quad (3.56)$$

$$\Phi_q \ddot{\mathbf{q}} = \Gamma_{m \times 1}. \quad (3.57)$$

Zestawiając (3.54) i (3.57) uzyskujemy układ  $N+m$  równań różniczkowo-algebraicznych z  $N+m$  niewiadomymi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{N \times N} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{N \times 1} \\ -\lambda_{m \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{N \times 1} \\ \Gamma_{m \times 1} \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Należy podkreślić, że w wielu publikacjach dotyczących układów wieloczłonowych w powyższym równaniu pomija się znak minus występujący przy wektorze  $\lambda$ . Nie ma bowiem znaczenia, czy nieoznaczone mnożniki Lagrange'a zapiszemy jako  $\lambda$ , czy jako  $(-\lambda)$ . O tym, której wersji równania (3.58) użyto (z plusem, czy z minusem) musimy jednak pamiętać, kiedy wyznaczamy siły reakcji więzów, uwzględniając odpowiedni znak w równaniu (3.34).

### PRZYKŁAD 3.5

#### Zadanie

Ułożyć układ równań różniczkowo-algebraicznych, opisujących mechanizm z przykładu 3.2. Dla pewnej chwili  $t^*$ , w której współrzędne absolutne mają wartości  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^* \equiv [0 \ 0 \ 0 \ 1/\sqrt{2} \ -1/\sqrt{2} \ \pi/4]^T$ , a prędkości wynoszą  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^* \equiv [-(1+\sqrt{2}) \ 0 \ 0 \ -1 \ \sqrt{2} \ 2]^T$ , wyznaczyć wektor przyspieszeń  $\ddot{\mathbf{q}}^*$  i wektor mnożników Lagrange'a  $\lambda^*$ .

#### Rozwiązanie

Układ równań różniczkowo-algebraicznych opisujących mechanizm składa się z 6 równań ruchu i z 4 równań więzów dla przyspieszeń. Ma on następującą postać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{6 \times 6} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & \mathbf{0}_{4 \times 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{6 \times 1} \\ -\lambda_{4 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{6 \times 1} \\ \Gamma_{4 \times 1} \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Elementy macierzy  $\mathbf{M}$ ,  $\Phi_q$ ,  $\Gamma$  i  $\mathbf{Q}$  wyznaczono w przykładzie 3.2, a ich wartości liczbowe dla  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$  i  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^*$  obliczono w przykładzie 3.3. Układ (a) jest liniowy względem poszukiwanych przyspieszeń i mnożników Lagrange'a, zatem jego rozwiązanie nie nastręcza trudności.

Do obliczenia poszukiwanych przyspieszeń i mnożników wygodnie jest użyć procedury *MATLAB*-a (wykorzystując procedurę z przykładu 3.3 do wykonania większości obliczeń). Procedurę (*Uklad.m*) umieszczono w załączniku. Wyniki obliczeń są następujące:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}^* &\approx [2.7109 \ 0.0000 \ 0.0000 \ -7.3368 \ -4.3908 \ -10.2095]^T, \\ \lambda^* &\approx [0.0000 \ -68.1822 \ 13.5543 \ -18.1822]^T. \end{aligned} \quad (b)$$

W tym miejscu należy wspomnieć, że w teorii równań różniczkowo-algebraicznych (RRA) równania (3.58) nazywa się sformułowaniem o indeksie 1 (*index-1 formulation of DAE*). Klasyfikacji RRA i metodom ich rozwiązywania poświęcony jest osobny wykład. Dla kompletności niniejszego wywodu, w kolejnym punkcie, przedstawiony zostanie jedynie zarys problemu całkowania równań ruchu, wyłącznie na przykładzie sformułowania o indeksie 1. Warto jednak wiedzieć, że opracowano metody całkowania równań w innych sformułowaniach – można na przykład całkować układ złożony z równań (3.54) i (3.55) – będziemy mieli wtedy do czynienia ze sformułowaniem o indeksie 3.

### 3.4.3. Metody rozwiązywania zagadnienia dynamiki – zarys problemu

Rozwiązanie zagadnienia dynamiki sprowadza się do scałkowania układu równań różniczkowo-algebraicznych (3.58) przy zadanych warunkach początkowych  $\mathbf{q}^0$  i  $\dot{\mathbf{q}}^0$ . Warunki początkowe muszą być przyjęte w taki sposób, by spełnione były równania więzów dla położenia (3.55) i prędkości (3.56). Najprostszy sposób numerycznego całkowania mógłby polegać na tym, że w  $i$ -tym kroku obliczeń, odpowiadającym chwili  $t_i$ , rozwiązuje się układ (3.58) względem niewiadomych  $\ddot{\mathbf{q}}^i$  oraz  $\lambda^i$ , po czym oblicza się prędkości  $\dot{\mathbf{q}}$  i położenia  $\mathbf{q}$  w  $i+1$  kroku obliczeń:

$$\dot{\mathbf{q}}^{i+1} = \dot{\mathbf{q}}^i + \ddot{\mathbf{q}}^i \cdot \Delta t, \quad (3.59)$$

$$\mathbf{q}^{i+1} = \mathbf{q}^i + \dot{\mathbf{q}}^i \cdot \Delta t + \ddot{\mathbf{q}}^i \cdot (\Delta t)^2 / 2, \quad (3.60)$$

gdzie:  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ .

Omówiony powyżej schemat obliczeń (nazywany *jawnym schematem Eulera*) jest niewątpliwie bardzo prosty, ale w praktycznych zadaniach dotyczących symulacji układów wieloczłonowych nie jest używany. Zauważmy bowiem, że stosując przedstawiony schemat nie mamy wpływu na to, z jaką dokładnością spełnione są równania więzów dla położenia (3.55) i prędkości (3.56). W układzie równań (3.58) występują bowiem jedynie równania więzów dla przyspieszeń. Błędy numerycznego całkowania będą się kumulować, sprawiając, że więzy dla położenia (3.55) i prędkości (3.56) będą spełnione coraz mniej dokładnie. W omawianej tu prostej metodzie całkowania jedynym sposobem wpływania na wielkość błędów obliczeń jest odpowiedni dobór kroku całkowania  $\Delta t$  (zmiana kroku całkowania ma oczywisty wpływ na szybkość obliczeń). Jednak niezależnie od tego, jak mały krok  $\Delta t$  zostanie wybrany, po pewnej liczbie kroków całkowania, w wynikach obliczeń widoczne będzie „rozerwanie” więzów dla położenia i prędkości.

---

#### PRZYKŁAD 3.6

##### Zadanie

Napisać stałokrokową procedurę całkującą (bazującą na jawnym schemacie Eulera), która dla warunków początkowych  $\mathbf{q}(t=0) = \mathbf{q}^0 \equiv [0 \ 0 \ 0 \ 1/\sqrt{2} \ -1/\sqrt{2} \ \pi/4]^T$  i  $\dot{\mathbf{q}}(t=0) = \dot{\mathbf{q}}^0 \equiv \mathbf{0}_{6 \times 1}$  obliczy konfigurację i prędkości mechanizmu z poprzednich przykładów po upływie jednej sekundy. Dla różnych kroków całkowania  $\Delta t$  porównać dokładność, z jaką spełnione są równania więzów po upływie jednej sekundy.

##### Rozwiązanie

Algorytm obliczeń jest następujący:

1. Wczytaj czas początku ( $t_0$ ) i końca ( $t_K$ ) obliczeń, krok całkowania  $\Delta t$  oraz warunki początkowe  $\mathbf{q}^0$  i  $\dot{\mathbf{q}}^0$ .
2. Podstaw  $t = 0$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^0$  oraz  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^0$ .
3. Oblicz macierze  $\mathbf{M}$ ,  $\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\Gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  (wykorzystując procedurę z przykładu 3.3).
4. Rozwiąż układ równań  $\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_{\mathbf{q}}^T \\ \Phi_{\mathbf{q}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \Gamma \end{bmatrix}$ , wyznaczając  $\ddot{\mathbf{q}}$  i  $\lambda$ .
5. Podstaw:  $t = t + \Delta t$ ,  
 $\mathbf{q} = \mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}} \Delta t + \ddot{\mathbf{q}} (\Delta t)^2 / 2$ ,  
 $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{q}} \Delta t$ .
6. Jeśli  $t < t_K$ , to powróć do punktu 3.
7. Oblicz dokładność, z jaką współrzędne  $\mathbf{q}$  spełniają równania więzów  $\Phi(\mathbf{q})$ .
8. Wydrukuj wyniki obliczeń



Procedurę *Calcuj.m*, wykonującą obliczenia według przedstawionego algorytmu, umieszczono w załączniku.

Wyniki obliczeń podano w tabeli.

Krok całkowania $\Delta t$ (s)	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
Współrzędne $\mathbf{q}(t_K)$	$\begin{bmatrix} 0.6913 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.7722 \\ -1.0001 \\ 0.0790 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.6908 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.7720 \\ -0.9970 \\ 0.0811 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.6908 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.7720 \\ -0.9967 \\ 0.0813 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.6907 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.7720 \\ -0.9967 \\ 0.0813 \end{bmatrix}$
Prędkości $\dot{\mathbf{q}}(t_K)$	$\begin{bmatrix} 1.0649 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.4311 \\ -0.0528 \\ -0.6369 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.0634 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.4277 \\ -0.0519 \\ -0.6379 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.0633 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.4275 \\ -0.0518 \\ -0.6380 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.0633 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.4274 \\ -0.0518 \\ -0.6380 \end{bmatrix}$
Dokładność spełnienia równań więzów w chwili $t_K$ ( $\sqrt{\Phi^T \Phi}$ )	$3.769 \cdot 10^{-3}$	$3.846 \cdot 10^{-4}$	$3.854 \cdot 10^{-5}$	$3.854 \cdot 10^{-6}$
Czas wykonywania obliczeń (s)	0.023	0.21	1.56	15.2

Ilość wykonywanych obliczeń jest odwrotnie proporcjonalna do kroku całkowania  $\Delta t$ , nie dziwi zatem, że dziesięciokrotne zmniejszenie kroku całkowania owocuje dziesięciokrotnym wzrostem czasu obliczeń. Okazuje się także, że dokładność obliczeń jest proporcjonalna do kroku całkowania.

Wyniki uzyskane w przykładzie sugerują potrzebę stosowania w obliczeniach praktycznych wydajniejszych metod całkowania układu równań opisującego dynamikę mechanizmu.

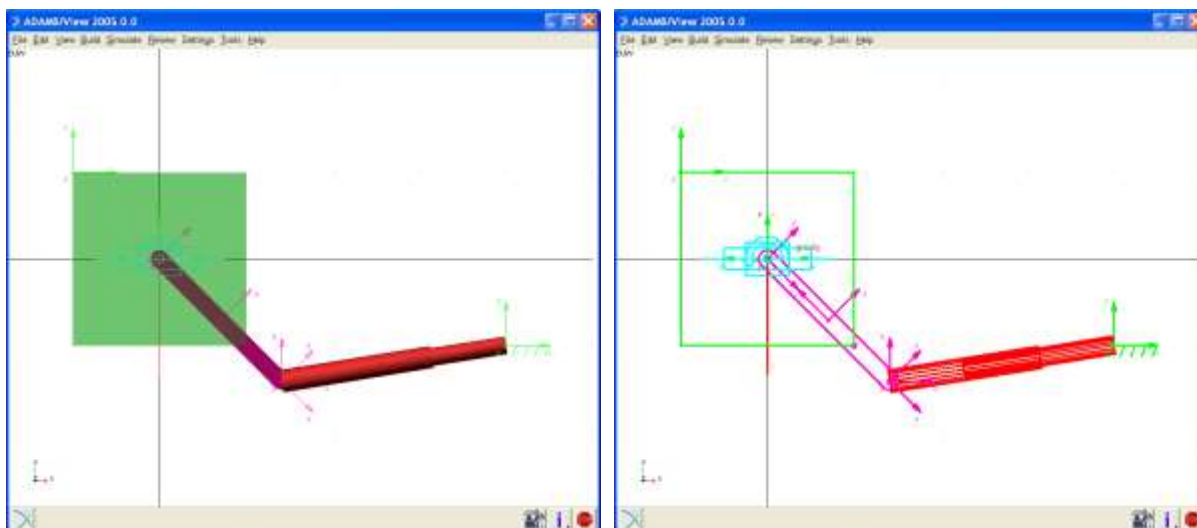
### PRZYKŁAD 3.7

#### Zadanie

Zbudować w *ADAMS*-ie model umożliwiający weryfikację wyników obliczeń wykonanych w poprzednim przykładzie.

#### Rozwiązanie

Model należy przygotować samodzielnie, szczegóły jego budowy nie będą tu omawiane. Ograniczymy się jedynie do przeanalizowania wyników i czasu wykonywania obliczeń.



Wyniki obliczeń są zgodne z uzyskanymi w poprzednim przykładzie (dla  $\Delta t = 10^{-5}$  s). Obliczenia wykonane na tym samym komputerze przebiegają jednak znacznie (ok. 20 razy) szybciej. Należy pamiętać, że *ADAMS* traktuje analizowany mechanizm jako przestrzenny, liczba równań ruchu i równań więzów jest zatem znacznie większa. Ponadto podczas obliczeń oglądamy animację ruchu.

Zatem, dlaczego obliczenia trwają znacznie krócej? Otóż *ADAMS* wykorzystuje znacznie wydajniejsze procedury do całkowania układów równań różniczkowo-algebraicznych, pozwalające na uzyskanie dokładnych wyników przy stosunkowo niskim nakładzie obliczeń (szczególnie w porównaniu z procedurą stałokrokovą wykorzystywaną w poprzednim przykładzie). Ponadto do rozwiązywania układów równań liniowych (operacja taka wykonywana jest wielokrotnie podczas numerycznego całkowania) stosowane są procedury wykorzystujące fakt, że macierz masowa i macierz Jacobiego są macierzami rzadkimi (składają się głównie z zer). Nie bez znaczenia jest również to, że procedury *MATLAB*-a są interpretowane (przed ich wykonaniem nie dokonuje się kompilacji), co spowalnia obliczenia.

Wyniki uzyskane w tym i poprzednim przykładzie pokazują, dlaczego w praktycznych zagadnieniach, dotyczących często bardzo złożonych układów wieloczołonowych, właściwy dobór procedury całkującej ma kluczowe znaczenie dla szybkości i dokładności obliczeń.

Wyniki uzyskane w przykładzie uzasadniają potrzebę stosowania w obliczeniach praktycznych bardziej wyrafinowanych metod całkowania układu równań różniczkowo-algebraicznych, opisującego dynamikę mechanizmu.

Zastosowanie bardziej wydajnych metod całkowania – wykorzystujących na przykład algorytm Rungego-Kutty – pozwala na zmniejszenie czasu obliczeń (konieczne jest jedynie takie przeformułowanie równań, by całkowaniu podlegały równania różniczkowe pierwszego rzędu). Problem stopniowego „rozrywania się” więzów na poziomie położen i prędkości, wynikający z braku kontroli spełnienia równań (3.55) i (3.56), pozostaje jednak nierozwiązany. Jeśli w procesie całkowania uwzględnia się jedynie więzy dla przyspieszeń, problemy z więzami dla prędkości i położen są nieuchronne.

Zwiększenie wydajności obliczeń oraz problemy ze spełnieniem równań więzów dla położen i prędkości zilustrowano w kolejnym przykładzie.

---

### PRZYKŁAD 3.8

#### Zadanie

Rozwiązać ponownie zadanie z przykładu 3.6, tym razem stosując procedurę całkującą *ode45* dostępną w *MATLAB*-ie. Obliczenia wykonać dla czasu symulacji 1, 5, 10, 15 i 20 sekund.

## Rozwiązanie

Dysponujemy wyprowadzonymi w poprzednich przykładach wzorami pozwalającymi na obliczenie wektora przyspieszeń, kiedy dany jest czas, wektor współrzędnych i wektor prędkości, co można zwięźle zapisać w formie równania:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (\text{a})$$

Procedura całkująca *ode45* (tak jak i pozostałe procedury dostępne w *MATLAB*-ie) jest przeznaczona do całkowania układów równań różniczkowych pierwszego rzędu. Układ równań różniczkowych drugiego rzędu (a) należy zatem przekształcić do postaci równoważnego układu równań pierwszego rzędu. Jeśli przyjmiemy następujące podstawienia:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \mathbf{q}, \\ \mathbf{y}_2 &= \dot{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (\text{b})$$

to układ 6 równań drugiego rzędu (a) można zastąpić następującym układem 12 równań pierwszego rzędu:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{h}(t, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \end{bmatrix} = \mathbf{H}(t, \mathbf{Y}). \quad (\text{c})$$

Całkowanie z wykorzystaniem procedury *ode45* sprowadza się do wywołania jej z odpowiednimi argumentami:

$$[\mathbf{t}, \mathbf{Y}] = \text{ode45}(@\mathbf{H}, [\mathbf{t0}, \mathbf{tK}], \mathbf{Y0}),$$

przy czym funkcja *H* służy do obliczania wektora prawych stron w równaniu (c), parametr *t0* określa czas początkowy, a *tK* czas końcowy symulacji, natomiast wektor *Y0* zawiera warunki początkowe.

Warto jeszcze poświęcić chwilę obliczeniom wykonywanym przez procedurę *H*. Przebiegają one według następującego algorytmu:

1. Wczytaj aktualny czas *t* oraz wektor  $\mathbf{Y} = [\mathbf{q}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ .
2. Oblicz macierze  $\mathbf{M}$ ,  $\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\Gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  (wykorzystując procedurę z przykładu 3.3).
3. Rozwiąż układ równań  $\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_{\mathbf{q}}^T \\ \Phi_{\mathbf{q}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \Gamma \end{bmatrix}$ , wyznaczając  $\ddot{\mathbf{q}}$  i  $\lambda$ .
4. Podstaw  $\dot{\mathbf{Y}} = [\dot{\mathbf{q}}^T \quad \ddot{\mathbf{q}}^T]^T$ .

Procedurę *Calcuj\_ode45.m*, wykonującą obliczenia niezbędne do rozwiązania przykładu, umieszczono w załączniku. Wyniki obliczeń (dla czasu  $t_K = 1$  s) są następujące:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0.6907 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.7720 \\ -0.9967 \\ 0.0813 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 1.0633 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.4274 \\ -0.0518 \\ -0.6380 \end{bmatrix}.$$

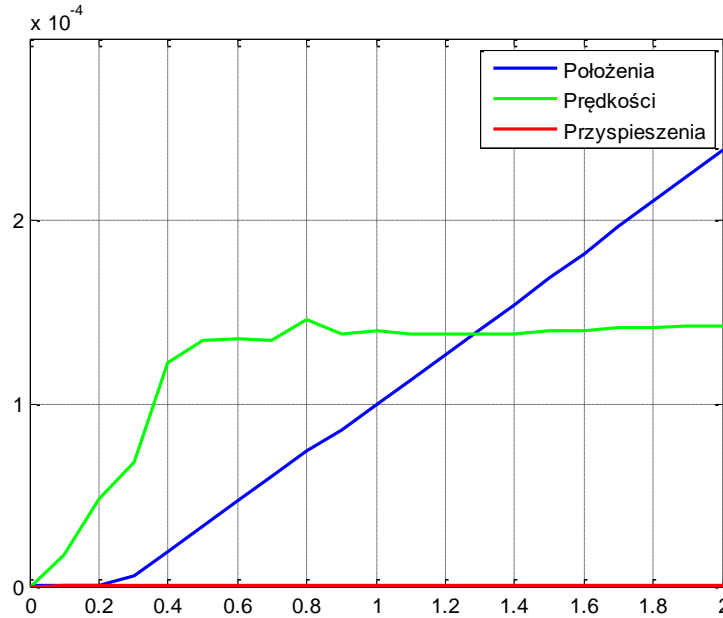
Obliczenia trwały 0.026 s, a uzyskana dokładność spełnienia równań więzów (dla czasu  $t_K = 1$  s) wyniosła  $\sqrt{\Phi^T \Phi} \approx 4.54 \cdot 10^{-5}$  (wykorzystano domyślne ustawienia procedury całkującej). Warto zauważyć, że w przykładzie 3.6 zbliżone wyniki i dokładność obliczeń uzyskano, stosując prymitywną metodę całkowania, w czasie ok. 60 razy dłuższym. Porównanie czasów obliczeń pokazuje, jak ważna jest kwestia odpowiedniego doboru procedury całkującej.

Wyniki obliczeń dla różnych wartości czasu końcowego  $t_K$  przedstawiono w tabeli.

$t_K$ (s)	Czas obliczeń (s)	Dokładność obliczeń $\sqrt{\Phi^T \Phi}$ w chwili $t_K$
1	0.026	$4.54 \cdot 10^{-5}$
5	0.054	$7.18 \cdot 10^{-4}$
10	0.074	0.015
15	0.096	0.023
20	0.114	0.031

Jak widać, dokładność spełnienia równań więzów maleje wraz ze wzrostem czasu symulacji, dlatego w praktycznych obliczeniach konieczne jest stosowanie metod stabilizacji więzów.

Procedurę *Calcuj\_ode45.m*, można zmodyfikować w taki sposób, by po zakończeniu całkowania równań ruchu wygenerowała wykresy, pozwalające śledzić dokładność spełnienia więzów na poziomie położenia, prędkości i przyspieszeń w zależności od czasu symulowanego ruchu mechanizmu. Poniższy rysunek przedstawia normy z lewych stron równań więzów dla położenia, prędkości i przyspieszeń obliczone dla kolejnych chwil symulacji.



Jak widać, więzy dla przyspieszeń spełnione są bardzo dokładnie (norma błędu jest rzędu  $10^{-15}$ , co odpowiada precyzji reprezentacji liczb w komputerze). Nie budzi to zdziwienia, gdyż na każdym kroku całkowania przyspieszenia wyznaczone z układu równań (3.58) są zgodne z więzami. W trakcie obliczeń nie są jednak kontrolowane więzy dla prędkości i położeń. Bardzo niewielkie niedokładności obliczanych przyspieszeń, całkowane w odpowiednio długim przedziale czasu, skutkują narastaniem błędów w obliczanych prędkościach oraz położeń. Zwiększająca się z czasem niedokładność spełnienia równań (3.56) i (3.55) nie ma wpływu na przebieg procesu obliczeniowego – „rozrywanie” więzów dla prędkości i położeń pozostaje „niewidoczne” dla procedury całkującej.

Warto też podkreślić, że w chwili początkowej wszystkie równania więzów – dla położeń, prędkości i przyspieszeń – są spełnione z bardzo dużą dokładnością. Dobór warunków początkowych zgodnych z więzami jest bowiem niezbędny dla powodzenia symulacji.

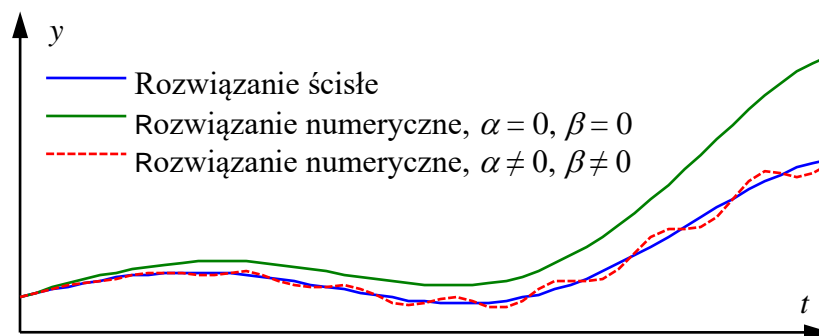
Przykłady 3.6 i 3.8 ilustrują dwa ważne zagadnienia. Po pierwsze widoczne jest, że dobór właściwej procedury całkującej ma kolosalny wpływ na szybkość i dokładność obliczeń. Po drugie, niezależnie od rodzaju wykorzystywanej procedury całkującej, błędy całkowania układu równań (3.58) kumulują się i dokładność spełnienia równań więzów (dla położeń i prędkości) maleje wraz ze wzrostem czasu symulacji.

W praktyce obliczeniowej, wykorzystując procedury do całkowania równań różniczkowych zwyczajnych (RRZ), dokonuje się tzw. stabilizacji więzów, polegającej – pisząc w dużym uproszczeniu – na tym, że podczas obliczeń numerycznych pod uwagę brane są nie tylko więzy dla przyspieszeń, lecz także dla prędkości i położeń. Jedną z możliwych metod stabilizacji więzów<sup>1</sup> jest metoda Baumgarte’a, w której układ równań (3.58) modyfikuje się do postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \Gamma - 2\alpha \cdot \Phi_q \dot{\mathbf{q}} - \beta^2 \cdot \Phi \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  oznaczają stałe większe od zera.

<sup>1</sup> Istnieje wiele innych metod stabilizacji więzów, np. metoda projekcji, polegająca – w uproszczeniu – na poprawianiu rozwiązań uzyskanych w procesie całkowania numerycznego, poprzez rzutowanie ich na powierzchnię więzów lub metoda rozszerzonego lagranżjanu, polegająca – w uproszczeniu – na dodaniu do równań ruchu dodatkowych sił, wymuszających na członach mechanizmu przyjmowanie konfiguracji zgodnych z więzami.



Rysunek 3.8. Schematyczne porównanie rozwiązania ścisłego z rozwiązaniem numerycznym

Zauważmy, że jeśli równania więzów dla położenia (3.55) i prędkości (3.56) są spełnione, to oba dodatkowe człony w równaniu (3.61) są zerowe. Modyfikacje wprowadzone do równania (3.58) służą do tego, żeby jednocześnie kontrolować spełnienie równań więzów na poziomie położenia, prędkości i przyspieszeń. Dzięki dodatkowym członom w równaniu (3.61), rozwiązanie numeryczne oscyluje wokół rozwiązania spełniającego ściśle równania więzów, co schematycznie zilustrowano na rysunku 3.8. Współczynniki  $\alpha$  i  $\beta$  dobiera się w taki sposób, by oscylacje rozwiązania były możliwie małe (często wybiera się<sup>1</sup>  $\alpha = \beta$ ).

Warto zauważyć, że w sformułowaniu Baumgarte'a drugie z równań (3.61) wymusza, by zerowa była pewna kombinacja liniowa (ze współczynnikami  $\beta^2$ ,  $2\alpha$  oraz 1) równań więzów dla położenia prędkości i przyspieszeń. Nie jest to równoznaczne wymuszeniu, by spełnione było każde z tych równań z osobna. Ceną płaconą za poprawę dokładności spełnienia więzów dla prędkości i położenia jest zatem pogorszenie dokładności spełnienia więzów dla przyspieszeń.

Mankamentem metody Baumgarte'a jest również wprowadzenie do matematycznego modelu układu wieloczłonowego tłumienia o czysto numerycznym charakterze (niewynikającym z fizyki modelowanego mechanizmu). Skutkuje to stopniową utratą energii mechanicznej analizowanego układu.

### PRZYKŁAD 3.9

#### Zadanie

Rozwiązać ponownie zadanie z przykładu 3.8, wprowadzając stabilizację więzów metodą Baumgarte'a, dla stałych  $\alpha = \beta = 5$ . Obliczenia wykonać dla czasu symulacji 1, 5, 10, 15 i 20 sekund.

#### Rozwiązanie

Algorytm obliczeń opisany w przykładzie 3.8 wymaga jedynie drobnej modyfikacji, dotyczącej obliczania wektora prawych stron w układzie równań liniowych:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{\Gamma} - 2\alpha \cdot \mathbf{\Phi}_q \dot{\mathbf{q}} - \beta^2 \cdot \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}.$$

Równie małych zmian wymaga procedura *MATLAB*-a, służąca do wykonywania obliczeń. Należy zmodyfikować jedynie funkcję *H*. Procedurę *Calcuj\_Baumgarte.m* umieszczono w załączniku.

<sup>1</sup> Dotyczącą więzów część równania (3.61) można przepisać w postaci:

$$\ddot{\mathbf{\Phi}} + 2\alpha \dot{\mathbf{\Phi}} + \beta^2 \mathbf{\Phi} = \mathbf{0},$$

odpowiadającej równaniu liniowych drgań tłumionych. Dla  $\alpha = \beta$  tłumienie drgań opisanych powyższym równaniem ma wartość krytyczną.

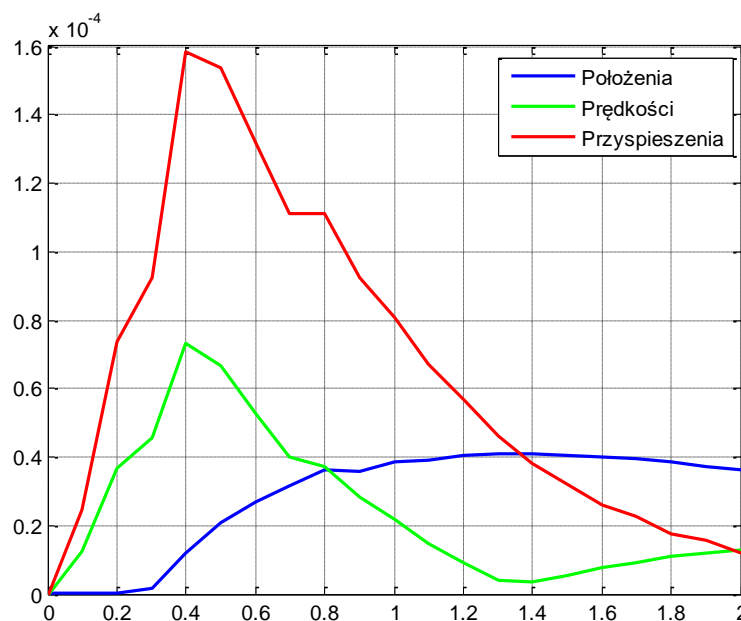
Wyniki obliczeń dla różnych wartości czasu końcowego  $t_K$  przedstawiono w tabeli.

$t_K$ (s)	Czas obliczeń (s)	Dokładność obliczeń $\sqrt{\Phi^T \Phi}$ w chwili $t_K$
1	0.027	$5.98 \cdot 10^{-7}$
5	0.068	$6.82 \cdot 10^{-8}$
10	0.105	$1.08 \cdot 10^{-8}$
15	0.126	$9.77 \cdot 10^{-11}$
20	0.145	$3.51 \cdot 10^{-12}$

Porównując uzyskane obecnie wyniki z rezultatami obliczeń w poprzednim przykładzie zauważamy, że za cenę niewielkiego wzrostu czasu obliczeń uzyskujemy rozwiązania, w których błąd spełnienia równań więzów nie wzrasta wraz z czasem symulacji.

Uważna analiza wyników pozwala zauważyć, że po pewnym czasie uzyskiwana dokładność spełnienia równań staje się coraz lepsza. Ten dosyć zaskakujący wynik łatwo jest wytłumaczyć. Otóż modelowany mechanizm składa się z suwaka, wahadła i tłumika, a jedyną siłą zewnętrzną działającą na układ jest grawitacja. Jak łatwo przewidzieć, niezależnie od przyjętych warunków początkowych, po pewnym czasie prędkości obserwowane w mechanizmie będą bliskie zeru. Jak wiemy, rozwiązanie uzyskiwane metodą Baumgarte'a oscyluje wokół rozwiązania ścisłego. Kiedy rozwiązanie ściśle ma wartość stałą, oscylacje po pewnym czasie wygasają, dzięki czemu uzyskiwane rozwiązanie staje się coraz bardziej dokładne. Gdyby rozwiązanie ściśle nie dążyło do wartości ustalonej, wygaszenie oscylacji nie byłoby obserwowane. Innymi słowy – gdyby modelowany mechanizm nie zatrzymywał się, podczas symulacji nie wzrastałaby dokładność spełnienia równań więzów.

Procedurę *Calkuj\_Baumgarte.m*, można zmodyfikować w taki sposób, by po zakończeniu całkowania równań ruchu wygenerowała wykresy, pozwalające prześledzić dokładność spełnienia więzów dla położań, prędkości i przyspieszeń w zależności od czasu symulowanego ruchu mechanizmu. Normy z lewych stron równań więzów, obliczone dla kolejnych chwil symulacji, pokazano na wykresie poniżej.



Jak widać, wprowadzenie stabilizacji więzów poskutkowało poprawą dokładności spełnienia więzów dla prędkości i położań, przy jednoczesnym pogorszeniu dokładności spełnienia więzów dla przyspieszeń. Ważne jest, że udało się powstrzymać tendencję do niekontrolowanego wzrostu niedokładności spełnienia równań więzów dla położań (por. wykresy w przykładzie 3.8).

Inną metodą pozwalającą na kontrolowanie wielkości błędów całkowania jest metoda podziału współrzędnych, którą omówimy tu bardzo pobieżnie. Zwróćmy uwagę, że w dotychczas omawianych algorytmach obliczeń całkowane były wszystkie współrzędne zgromadzone w wektorze  $\mathbf{q}_{N \times 1}$ . W metodzie podziału współrzędnych spośród elementów wektora  $\mathbf{q}$  wybiera się  $N-m$  współrzędnych niezależnych  $\mathbf{v}$  oraz  $m$  współrzędnych zależnych  $\mathbf{u}$  (pamiętajmy, że  $m$  jest liczbą równań więzów, o których założyliśmy, że są niezależne).

Całkowaniu podlegają tylko współrzędne niezależne  $\mathbf{v}$ , natomiast współrzędne  $\mathbf{u}$  oblicza się (w każdym kroku całkowania), wykorzystując równania więzów. Dzięki temu gwarantowane jest spełnienie równań więzów z wysoką dokładnością, odpowiadającą dokładności rozwiązania układu równań nieliniowych, opisujących kinematyczne zależności pomiędzy współrzędnymi. Mankamentem metody podziału zmiennych jest wysoki koszt numeryczny, związany z dokonywaniem podziału zmiennych, a następnie z wyznaczaniem współrzędnych zależnych.

Niektóre programy, np. ADAMS, do obliczeń wykorzystują procedury służące bezpośrednio do całkowania układów równań różniczkowo-algebraicznych (RRA). Metody całkowania RRA tym różnią się od metod całkowania RRZ, że równania algebraiczne są w nich traktowane jako szczególny rodzaj równań różniczkowych – taki, w którym nie występują pochodne. Mamy wtedy do czynienia z tzw. numerycznie sztywnym układem równań różniczkowych. Metody całkowania RRA zostaną omówione osobno, w dalszej części wykładu.

## 3.5. Załącznik – procedury *MATLAB*-a

### *Procedura „Macierze” (przykład 3.3)*

```
function [F,Fq,G,M,Q]=Macierze(q,dq)
%[F,Fq,G,M,Q]=Macierze(q,dq)
%
%Wejście:
% q(6,1) - wektor współrzędnych absolutnych
% dq(6,1) - wektor pochodnych współrzędnych absolutnych
%
%Wyjście:
% F(4,1) - lewe strony równań więzów
% Fq(4,6) - macierz Jacobiego
% G(4,1) - wektor gamma
% M(6,6) - macierz masowa
% Q(6,1) - wektor sił uogólnionych

% Wymiary mechanizmu:
a=1; % Długość wahadła
f0=0; v0=[0;1]; sA1=[0;0]; sB0=[100;0]; % Para postępową 1-0
sB2=[0;a]; % Para obrotowa 1-2 (sA1 zdefiniowane wcześniej)
rE0=[4*a;-a]; sD2=[0;-a]; % Punkty mocowania tłumika
% Stała macierz:
Om=[0 -1;1 0];
% Przyspieszenie ziemskie (wektor):
g=[0;-10];
% Współczynnik tłumienia:
c=10;
% Masy mechanizmu:
m1=5; J1=2; m2=3; J2=m2*a^2/3;

% Przypisanie elementom wektora q czytelnych nazw
r1=q(1:2); fi1=q(3); r2=q(4:5); fi2=q(6);
% Przypisanie elementom wektora dq czytelnych nazw
dr1=dq(1:2,1); dfi1=dq(3,1); dr2=dq(4:5,1); dfi2=dq(6,1);

% Obliczenie macierzy kosinusów kierunkowych
Rot1=Rot(fi1); Rot2=Rot(fi2);

% Lewe strony równań więzów
F(1,1)=fi1-f0;
F(2,1)=v0'*(sB0-r1-Rot1*sA1);
F(3:4,1)=r1+Rot1*sA1-(r2+Rot2*sB2);

% Macierz Jacobiego
Fq=zeros(4,6);
Fq(1,3)=1;
Fq(2,1:2)=-v0';
Fq(2,3)=-v0'*Om*Rot1*sA1;
Fq(3:4,1:2)=eye(2);
Fq(3:4,3)=Om*Rot1*sA1;
Fq(3:4,4:5)=-eye(2);
Fq(3:4,6)=-Om*Rot2*sB2;

% Wektor Gamma
G(1,1)=0;
G(2,1)=-v0'*Rot1*sA1*dfi1^2;
G(3:4,1)=Rot1*sA1*dfi1^2-Rot2*sB2*dfi2^2;

% Macierz masowa
M=zeros(6,6);
M(1,1)=m1; M(2,2)=m1; M(3,3)=J1;
M(4,4)=m2; M(5,5)=m2; M(6,6)=J2;
```



```

% Siły uogólnione - grawitacja
Q(1:2,1)=m1*g;
Q(3,1)=0;
Q(4:5)=m2*g;
Q(6)=0;

% Siły uogólnione - tłumik
d=rE0-r2-Rot2*sD2;
u=d/sqrt(d'*d);
dd=-u*(dr2+Om*Rot2*sD2*dfi2);
Q(4:6,1)=Q(4:6,1)+[eye(2); (Om*Rot2*sD2)']*u*c*dd;

```

### ***Procedura „Układ” (przykład 3.5)***

```

% Zadane współrzędne i prędkości
q=[0 0 0 1/sqrt(2) -1/sqrt(2) pi/4]';
dq=[-(1+sqrt(2)) 0 0 -1 sqrt(2) 2]';

% Obliczenie macierzy M, Fq, G i Q
[F,Fq,G,M,Q]=Macierze(q,dq);

% Macierz układu równań
A=[M,Fq';Fq,zeros(4,4)];

% Prawa strona układu równań
b=[Q;G];

% Obliczenie przyspieszeń i mnożników Lagrange'a
x=A\b;

% Drukowanie wyników
d2q=x(1:6,1)
Lambda=-x(7:10,1)

```

### ***Procedura „Calkuj” (przykład 3.6)***

```

function Calkuj(dt)
% Calkuj(dt)
% Całkowanie równań ruchu
% Stały krok dt, brak stabilizacji więzów

tic %Początek pomiaru czasu wykonywania obliczeń

% Przedział całkowania
t0=0; tK=1;

% Warunki początkowe
q0=[0 0 0 1/sqrt(2) -1/sqrt(2) pi/4]';
dq0=zeros(6,1);

% Całkowanie (bez stabilizacji więzów)
t=t0; q=q0; dq=dq0;
while t < tK
    [F,Fq,G,M,Q]=Macierze(q,dq); % Obliczenia dla aktualnych położenia i prędkości
    A=[M,Fq';Fq,zeros(4,4)]; % Macierz układu równań
    b=[Q;G]; % Prawa strona układu równań
    x=A\b; d2q=x(1:6,1); % Obliczenie przyspieszeń i mnożników Lagrange'a
    t=t+dt; % Wyznaczenie kolejnej chwili
    q=q+dq*dt+0.5*d2q*dt^2; % Obliczenie współrzędnych w kolejnej chwili
    dq=dq+d2q*dt; % Obliczenie prędkości w kolejnej chwili
end

```

```

% Drukowanie wyników dla czasu ruchu równego tK.
q__dq=[q dq]      % Położenie i prędkość w chwili tK
norm_F=norm(F)     % Miara rozerwania więzów po czasie tK

toc %Koniec pomiaru czasu wykonywania obliczeń

```

### ***Procedura „Calkuj\_ode45” (przykład 3.8)***

```

function Calkuj_ode45(tK)
% Calkuj_ode45
% Całkowanie równań ruchu metodą Rungego-Kutty - ode45
% Przedział czasu o długości tK
% Brak stabilizacji więzów

tic %Początek pomiaru czasu wykonywania obliczeń
% Przedział całkowania
t0=0; % t0 - początek, tK - koniec

% Warunki początkowe
q0=[0 0 0 1/sqrt(2) -1/sqrt(2) pi/4]';
dq0=zeros(6,1);
Y0=[q0;dq0];

% Całkowanie (bez stabilizacji więzów)
[t,Y]=ode45(@H,[t0,tK],Y0);

toc %Koniec pomiaru czasu wykonywania obliczeń

% Drukowanie wyników dla czasu ruchu równego tK.
n=size(Y,1);
qK=Y(n,1:6)'; dqK=Y(n,7:12)'; % Położenie i prędkość w chwili tK
q__dq=[qK dqK ] % Drukowanie
[F]=Macierze(qK,dqK); % Obliczenie lewej strony równań więzów
norm_F=norm(F) % Miara rozerwania więzów po czasie tK
end

function dY=H(t,Y)
%Funkcja podcałkowa
q=Y(1:6,:); % Czytelne nazwy położen i prędkości
dq=Y(7:12,:);
[F,Fq,G,M,Q]=Macierze(q,dq); % Obliczenia dla aktualnych położen i prędkości
A=[M,Fq';Fq,zeros(4,4)]; % Macierz układu równań
b=[Q;G]; % Prawa strona układu równań
x=A\b; % Obliczenie przyspieszeń i mnożników Lagrange'a
dY(1:6,1)=dq; % Obliczenie wektora prawych stron równania różniczkowego

dY(7:12,1)=x(1:6,1);
end

```

### ***Procedura „Calkuj\_Baumgarte” (przykład 3.9)***

```
function Calkuj_Baumgarte(tK)
% Calkuj_Baumgarte
% Całkowanie równań ruchu metodą Rungego-Kutty - ode45
% Stabilizacja więzów metodą Baumgarte'a
% (modyfikacje względem Calkuj_ode45 dotyczą tylko funkcji podcałkowej H)

tic %Początek pomiaru czasu wykonywania obliczeń
% Przedział całkowania
t0=0; % t0 - początek, tK - koniec

% Warunki początkowe
q0=[0 0 0 1/sqrt(2) -1/sqrt(2) pi/4]';
dq0=zeros(6,1);
Y0=[q0;dq0];

% Całkowanie
[t,Y]=ode45(@H,[t0,tK],Y0);

toc %Koniec pomiaru czasu wykonywania obliczeń

% Drukowanie wyników dla czasu ruchu równego tK.
n=size(Y,1);
qK=Y(n,1:6)'; dqK=Y(n,7:12)'; % Położenie i prędkość w chwili tK
q__dq=[qK dqK] % Drukowanie
[F]=Macierze(qK,dqK); % Obliczenie lewej strony równań więzów
norm_F=norm(F) % Miara rozerwania więzów po czasie tK
end

function dY=H(t,Y)
%Funkcja podcałkowa
alf=5;bet=5; % Współczynniki odpowiadające za stabilizację met.
               Baumgarte'a
q=Y(1:6,:); % Czytelne nazwy położeń i prędkości
dq=Y(7:12,:);
[F,Fq,G,M,Q]=Macierze(q,dq); % Obliczenia dla aktualnych położeń i prędkości
A=[M,Fq';Fq,zeros(4,4)]; % Macierz układu równań
b=[Q;G-2*alf*Fq*dq-bet^2*F]; % Prawa strona układu równań (z uwzględnieniem
                               stabilizacji więzów)
x=A\b; % Obliczenie przyspieszeń i mnożników Lagrange'a
dY(1:6,1)=dq; % Obliczenie wektora prawych stron równania
               różniczkowego
dY(7:12,1)=x(1:6,1);
end
```