# Dynamika układów wieloczłonowych – kolokwium przykładowe

Daniel Wlazło

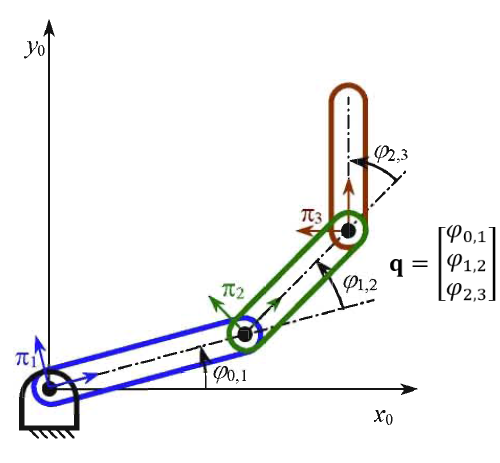
## Zadanie 1

**Wymień i przedstaw krótko rodzaje współrzędnych uogólnionych wykorzystywanych do opisu kinematyki i dynamiki mechanizmów.**

Zazwyczaj stosuje się jeden z trzech rodzajów współrzędnych:

* współrzędne złączowe
* współrzędne absolutne
* współrzędne naturalne

### Współrzędne złączowe



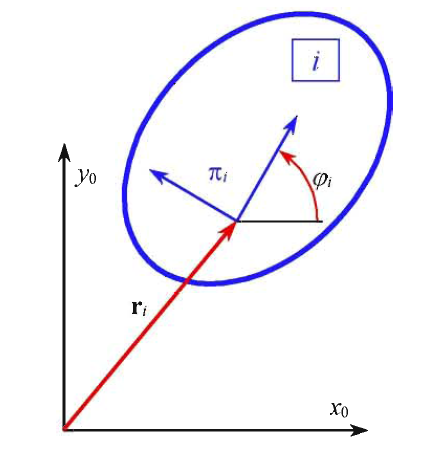
Współrzędne złączowe są współrzędnymi względnymi – opisują położenie i orientację członu względem innych członów, a nie bezpośrednio względem globalnego układu odniesienia.

Określają położenie wybranego członu względem innego członu, tworzącego z nim parę kinematyczną. Współrzędnymi złączowymi są parametry odmierzające ruch względny w parach kinematycznych (w parach obrotowych – kąty; w parach postępowych – przesunięcia względne).

W otwartych łańcuchach kinematycznych współrzędne złączowe są niezależne i nie muszą spełniać żadnych dodatkowych równań. W zamkniętych łańcuchach kinematycznych równania więzów są zapisywane jako zależności geometryczne, które muszą być spełniane, aby mechanizm się nie „rozpadł”.

### Współrzędne absolutne

Współrzędne absolutne są współrzędnymi bezwzględnymi – opisują położenie i orientację członu (związanego z nim lokalnego układu odniesienia) bezpośrednio względem globalnego układu odniesienia, a nie względem innych członów układu.

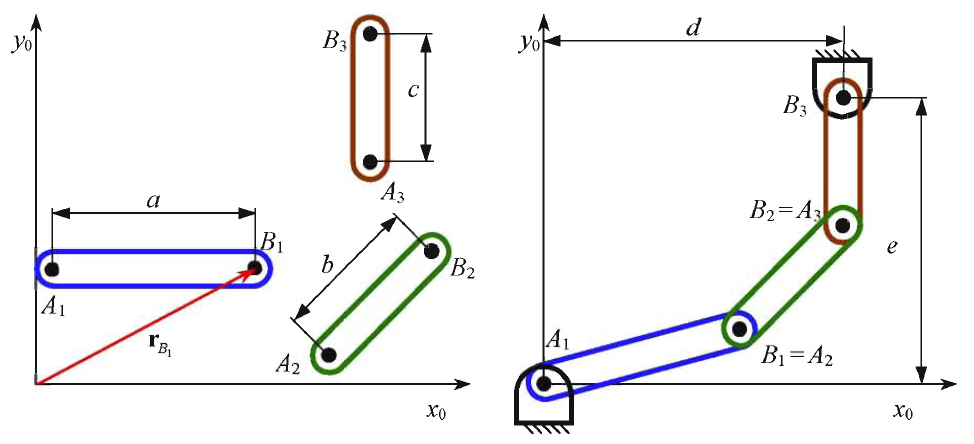


Współrzędne absolutne członu można zapisać w postaci trójelementowego wektora:

Wektor współrzędnych absolutnych układu składającego się z wielu członów zestawia się z trójelementowych wektorów współrzędnych absolutnych poszczególnych członów. Mechanizm składający się z członów jest opisywany przez wektor współrzędnych absolutnych liczący elementów.

Liczba współrzędnych odpowiada liczbie stopni swobody układu w którym nie ma żadnych par kinematycznych. Współrzędne te są zależne. Równania kinematyczne wynikają z istnienia par kinematycznych . Równania opisują więzy, które z punktu widzenia mechaniki określa się jako holonomiczne, sklereonomiczne i dwustronne.

### Współrzędne naturalne



Współrzędnymi naturalnymi nazywane są współrzędne globalne punktów bądź wersorów związanych z członem. Punkty i wersory służące do opisu położenia i orientacji członu za pomocą współrzędnych naturalnych są nazywane punktami i wersorami bazowymi. Dobiera się je tak aby łatwo pokazać istnienie par kinematycznych.

Wektor współrzędnych dla każdego członu składa się z współrzędnych (przynajmniej) 2 punktów:

Wektor współrzędnych absolutnych układu składającego się z wielu członów zestawia się z (co najmniej) czteroelementowych wektorów współrzędnych absolutnych poszczególnych członów. Na współrzędne należy nałożyć więzy odpowiadające za sztywność członu - np. :

oraz odpowiadające za pary kinematyczne, np. :

## Zadanie 2

**Co to są współrzędne absolutne? Jak wygląda wektor współrzędnych uogólnionych opisujących położenie układu wieloczłonowego w przestrzeni tych współrzędnych?**

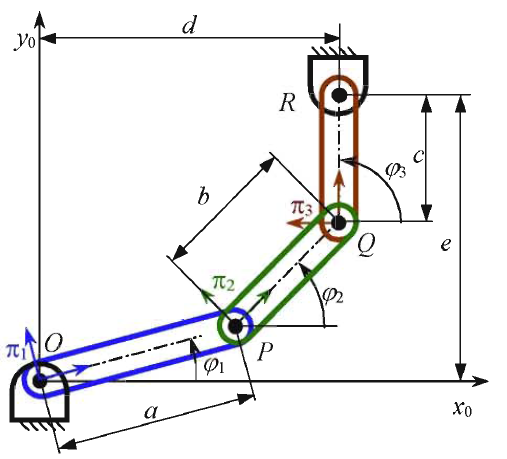
Współrzędne absolutne są współrzędnymi bezwzględnymi – opisują położenie i orientację członu (związanego z nim lokalnego układu odniesienia) bezpośrednio względem globalnego układu odniesienia, a nie względem innych członów układu.

Współrzędne absolutne członu można zapisać w postaci trójelementowego wektora:

Wektor współrzędnych absolutnych układu składającego się z wielu członów zestawia się z trójelementowych wektorów współrzędnych absolutnych poszczególnych członów.

## Zadanie 3 A

**Stosując współrzędne absolutne napisz równania więzów kinematycznych opisujących pary kinematyczne płaskiego czworoboku przegubowego**



Po wprowadzeniu układów zapisuję współrzędne absolutne:

Równania więzów – wynikające z istnienia par kinematycznych:

## Zadanie 4 A

**Jakie są wymiary macierzy Jacobiego równań więzów dla zadania z poprzedniego punktu? Napisz dwa wybrane przez siebie wiersze tej macierzy**

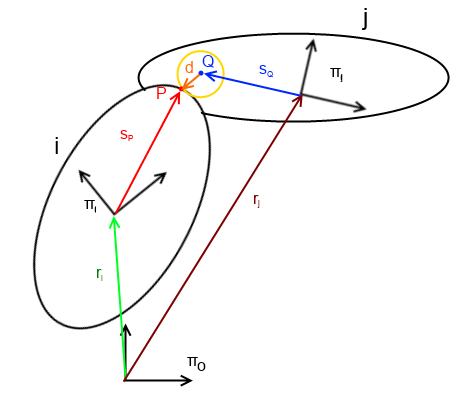
Jest 8 równań więzów oraz 9 współrzędnych.:

Zatem jakobian równań więzów ma postać:

Dla przykładu dwa pierwsze wiersze macierzy jacobiego będą miały postać:

## Zadanie 3 B

**Człony oraz mechanizmu płaskiego opisanego przez współrzędne absolutne tworzą parę kinematyczną taką, że punkt należący do członu porusza się po związanym z członem okręgu o środku w punkcie i promieniem . Należy napisać równanie więzów opisujących tę parę.,**



Równanie więzów:

Gdzie wektor **:**

## Zadanie 4 B

**Należy napisać wzory na niezerowe elementy macierzy Jacobiego odpowiadające równaniu z poprzedniego punktu.**

Korzystając z:

zatem:

## Zadanie 5

**Podaj warunek konieczny i wystarczający do tego aby równania więzów były niezależne**

Równania więzów są niezależne jeżeli w obszarze **nie** zachodzi tożsamość postaci:

Warunek konieczny i wystarczający:

Jeśli w pewnym punkcie zachodzą następujące warunki:

* spełnione jest równanie ,
* rząd macierzy Jacobiego jest równy : , gdzie – liczba równań więzów.

to wszystkie równania w pewnym otoczeniu punktu są niezależne.

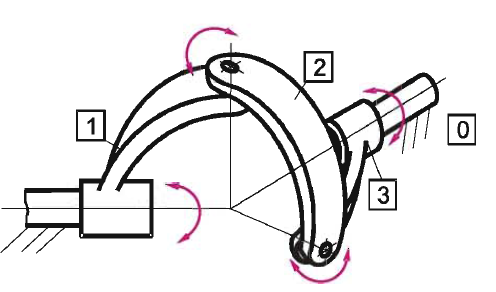
*Różniczki równań więzów muszą być liniowo niezależne.*

## Zadanie 6

**Czy przestrzenny czworobok przegubowy ma więzy nadmiarowe? Dlaczego wzór na ruchliwość dla czworoboku płaskiego daje inny wynik niż dla przestrzennego?**

Jeżeli założyć, że przeguby to pary obrotowe 5-tej klasy, to z wzoru Kutzbacha–Grublera wynika że ruchliwość jest równa: Przestrzenny czworobok przegubowy musi mieć zatem więzy nadmiarowe, aby w ogóle się poruszać.

W czworoboku sferycznym, np. więzy nadmiarowe są spowodowane przecinaniem się osi obrotu w jednym punkcie:



Przestrzenny wzór Kutzbacha–Grublera dla czworoboku płaskiego daje natomiast wzór dla płaskich mechanizmów daje .

Dzieje się tak dlatego, że pary kinematyczne obrotowe tego mechanizmu krępują wielokrotnie ruch członów w kierunku prostopadłym do płaszczyzny ruchu.

## Zadanie 7

**Jak wygląda pełne zadanie kinematyki dla czworoboku? Co to są więzy kierujące?**

Pełnie zadanie kinematyki dla czworoboku jest to (chyba):

* zadanie o położeniach – wyznaczenie położeń i orientacji
* zadane o prędkościach – wyznaczenie prędkości (oraz prędkości kątowych)
* zadanie o przyspieszeniach – wyznaczenie przyspieszeń (oraz przyspieszeń kątowych)

Zadanie o położeniach – rozwiązanie równań algebraicznych:

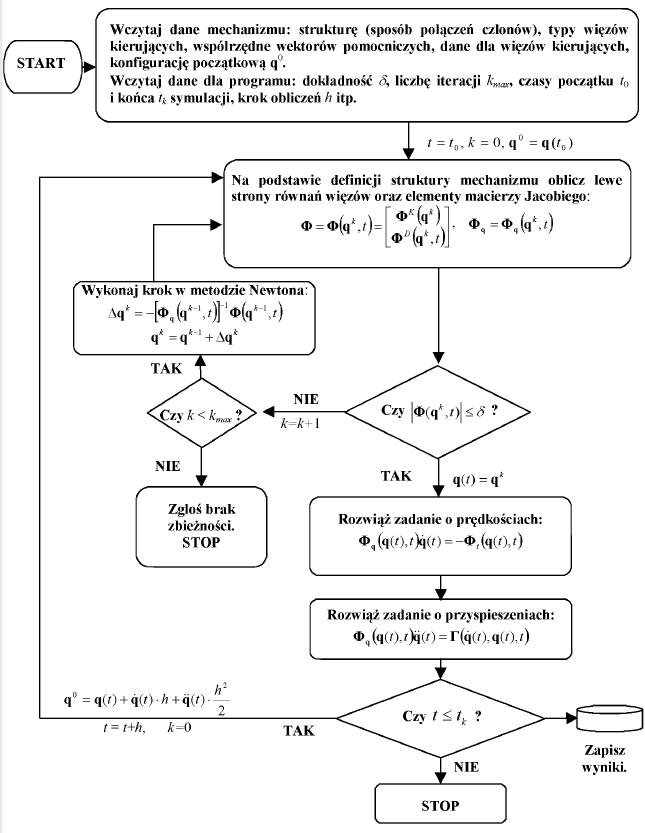
Zadanie o prędkościach – rozwiązanie układu równań:

Zadanie o przyspieszeniach – rozwiązanie układu równań:

Więzy kierujące: – zapis warunków, jakie nakładamy na ruch układu członów definiując zadanie kinematyki (na ogół mają one charakter niematerialny). W przypadku czworoboku przegubowego będzie to nałożenie (np.) warunków na obrót jednego członu względem drugiego.

## Zadanie 8

**Jak wygląda schemat blokowy programu do analizy kinematycznej układów wieloczłonowych?**



## Zadanie 9

**Wykonaj jedną iterację metodą Newtona dla układu równań:**

**przyjmując przybliżenie startowe:**

Obliczam macierz Jakobiego:

, więc podstawiam:

Obliczam **:**

Zapisuję układ równań:

Rozwiązuję układ równań:

Aktualizuję współrzędne:

## Zadanie 10

**Napisz ogólną, macierzową postać równań ruchu mechanizmu płaskiego opisanego przez współrzędne absolutne. Co zawierają występujące w zapisie macierze? Jaka jest interpretacja fizyczna poszczególnych członów równań?**

Równanie ruchu:

– macierz masowa

Zakładam, że początek lokalnego układu odniesienia pokrywa się ze środkiem masy członu.   
 Wówczas

- macierz masowa członu

*-* współrzędne absolutne

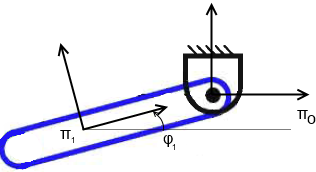
– wektor mnożników Lagrange’a

**–** wektor sił uogólnionych

(ozn. )

## Zadanie 11

**Napisz równania ruchu wahadła fizycznego we współrzędnych absolutnych.**



Układ współrzędnych w członie 1 został umieszczony w środku masy członu. Zakładam, że poza siłami grawitacji nie działają na ciało inne siły.

– masa wahadła – moment bezwładności

Równania więzów:

– odległość środka masy od „punktu zawieszenia”.

Stąd macierz Jacobiego:

Obliczam siły zewnętrzne (w tym przypadku tylko grawitacyjne):

Równanie ruchu ma zatem postać:

## Zadanie 12

**Jak nazywa się układ równań powstały z zastosowania równań ruchu wymienionych powyżej? Wyjaśnij pojęcie indeksu równania. Co oznaczają skróty I3, SI2, SI3?**

Jest to układ RRA – układ równań różniczkowych algebraicznych.

Indeks różniczkowy RRA to minimalna liczba różniczkowań względem czasu niektórych lub wszystkich RRA potrzebna aby wyznaczyć jako ciągłą funkcję . W równaniach powyższych wymagane są wyrażenia dla . Jeśli liczba różniczkowań jest równa 0 to RRA ma indeks równy 0. RRA o indeksie 0 to RRZ. Jeśli liczba różniczkowań jest równa 1 to RRA ma indeks 1, jeśli 2 to RRA ma indeks 2 etc.

Im wyższy indeks tym większe trudności w rozwiązaniu numerycznym RRA.

I3 – układ RRA o indeksie 3

SI2 – układ RRA o indeksie 2 z dodaną stabilizacją

SI1 – układ RRA o indeksie 1 z dodaną stabilizacją