DISCRETE ANALYSIS, 3RD SEMESTER

ФЁДОР АЛЕКСЕЕВ

Содержание

Часть 1. Лекция 1. Оценки и асимпотики комбинаторных величин

Пример 1. Рассмотрим задачу.

Пусть $n = 4k, k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим граф

$$G = (V, E)\colon V = \{A \subset \{1, 2, \dots, n\} \,||A| = 2k\},\\ E = \{\{A, B\} \,||A \cap B| = k\}.$$

Факты:

(1) Сколько вершин в G? $|V| = C_n^{n/2}$
(2) Сколько рёбер? $|E| = C_n^{n/2} \cdot \left(C_{n/2}^{n/4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$
(3) Сколько треугольников?

$$\frac{1}{6} \cdot C_n^{n/2} \cdot \left(C_{n/2}^{n/4}\right)^2 \cdot \sum_{i=0}^{n/4} \left(C_{n/4}^{i}\right)^2 \cdot \left(C_{n/4}^{n/4-i}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{6} \cdot C_n^{n/2} \cdot \left(C_{n/2}^{n/4}\right)^2 \cdot \sum_{i=0}^{n/4} \left(C_{n/4}^{i}\right)^4$$

Утверждение 1. $C_n^0 < C_n^1 < C_n^2 < \ldots < C_n^{n/2} = C_n^{n/2} > \ldots$.

Утверждение 2. $C_{2n}^n < 2^{2n}$.

Утверждение 3. $C_{2n}^n > \frac{2^{2n}}{2n+1}$.

Замечание. Оба факта показываются из того, что $\sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i = 2^{2n}$.

Определение. $a \sim b \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b + o(1)$.

Замечание. Верна формула Стирлинга: $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$.

Утверждение 4. $C_{2n}^n \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$.

Замечание. Ещё одна аналитическая запись:

$$a > 1 \Rightarrow f(n) = (a + o(1))^n \Rightarrow \ln f(n) = n \ln a + o(1) \sim n \ln a \\ (\not\Rightarrow f(n) \sim a^n).$$

Тогда $\left.\begin{array}{ll} \ln(C_{2n}^n) < & 2n \ln 2 \\ \ln(C_{2n}^n) > & 2n\ln 2 - \ln(2n+1) \sim 2n \ln 2 \end{array}\right| \Rightarrow \ln(C_{2n}^n) \sim 2n \ln 2 \Rightarrow C_{2n}^n = (2 + o(1))^{2n} = (4 + o(1))^n$

Теорема 1. *Пусть* $a \in (0, 1)$. *Тогда* $C_n^{[an]} = \left(\frac{1}{a^a(1-a)^{1-a}} + o(1)\right)^n$.

Доказательство.

Замечание. При $a = \frac{1}{2}$ $C_n^{[n/2]} = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} + o(1)\right)^n$.

Замечание. $\frac{1}{a^a(1-a)^{1-a}} = e^{\overbrace{-a\ln a - (1-a)\ln(1-a)}^{\text{энтропия}}}$. Поэтому доказываем мы энтропийные оценки.

Перейдём к доказательству.

$$C_n^{[an]} = \frac{n!}{[an]!(n-[an])!} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{\sqrt{2\pi[an]}(\frac{[an]}{e})^{[an]}\sqrt{2\pi(n-[an])}(\frac{n-[an]}{e})^{n-[an]}}$$

Допустим пока, будто нет `[]` — целых частей. Тогда получим:

$$\underbrace{\frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi an}\sqrt{2\pi(n-an)}}}_{P(n)} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(\frac{an}{e}\right)^{-an} \cdot \left(\frac{n-an}{e}\right)^{-n+an} =$$

$$P(n) \cdot \frac{1}{a^{an}(1-a)n-an} = P(n) \cdot \left(\frac{1}{a^a \cdot (1-a)^(1-a)}\right)^n = \left(\frac{1}{a^a \cdot (1-a)^{1-a}} + o(1)\right)^n$$

А почему можно избавиться от целых частей? Под корнем — не важно, можно загнать в P. А вот $[an]^{[an]}$.

$$[an]^{[an]} = (an-\varepsilon)^{an-\varepsilon} = (an)^{an-\varepsilon}(1-\frac{\varepsilon}{an})^{an-\varepsilon} \sim (an)^{an} \underbrace{(an)^{-\varepsilon}e^{-\varepsilon}}_{\text{добавим в } P(n)}.$$

□

Упражнение 1. Проверить для $(n-[an])^{n-[an]}$.

Упражнение 2 (Важное)**.** Докажите, что $P([a_1n],[a_2n],[a_3n],\dots,[a_kn]) = \left(\frac{(\sum a_i)^{\sum a_i}}{\prod a_i^{a_i}} + o(1)\right)$.

Упражнение 3. Пусть $f(n) \sim an, a \in (0,1)$. Тогда $C_n^{f(n)} = \left(\frac{1}{a^a(1-a)^{1-a}} + o(1)\right)^n$.

Теорема 2. (1) $C_n^k \leqslant \frac{n^k}{k!}$
(2) $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$, *если* $k^2 = o(n)$
(3) $C_n^k = \frac{n^k}{k!} * e^{-\frac{k(k-1)}{2n} + O(\frac{k^3}{r^2})}$

Доказательство. Для начала, $C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \leqslant \frac{n^k}{k!}$. Чуть аккуратнее:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) =$$

$$\frac{n^k}{k!}e^{\ln(1-\frac{1}{n})+\ln(1-\frac{2}{n})+\ldots+\ln(1-\frac{k-1}{n})} = \frac{n^k}{k!}e^{-\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n})-\frac{2}{n}+O(\frac{4}{n^2})+\ldots-\frac{k-1}{n}+O(\frac{(k-1)^2}{n^2})} =$$

$$\frac{n^k}{k!}e^{-\frac{k(k-1)}{2n}+O(\frac{k^3}{n^2})}.$$

□