



دانشکده فنی دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

پروژه دوم درس ریاضیات مهندسی

طراحان

محمدامین کشمیری

سروش مس فروش

مقدمه

در درس ریاضیات مهندسی با معادلات PDE آشنا شدیم، این دسته از معادلات در بسیاری از زمینه‌های مهندسی اهمیت ویژه‌ای دارند. در این تمرین کامپیوتری هدف ما بررسی و حل برخی از معادلات PDE معروف می‌باشد. این تمرین در دو بخش طراحی شده است.

- حل معادله حرارت

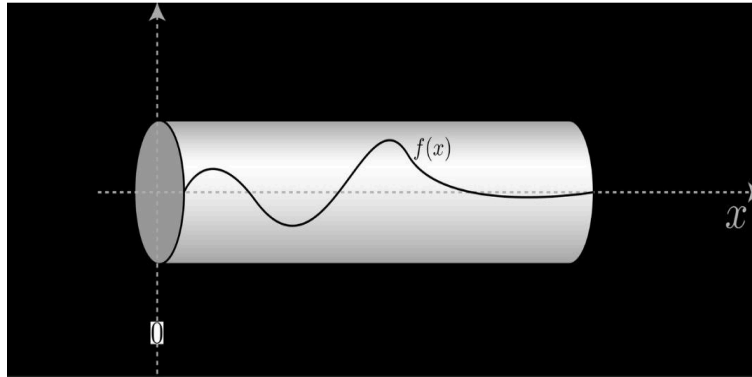
در این قسمت به حل معادله حرارت در یک میله محدود می‌پردازیم، سپس با Plot کردن آن توزیع حرارت در طول میله را مشاهده کنیم.

- حل معادله هلمهولتز

در این قسمت به تحلیل معادله هلمهولتز می‌پردازیم که یکی از معادلات بنیادی در بررسی میدان‌ها و امواج است.

۱ حل معادله حرارت

در این قسمت می‌خواهیم معادله حرارت را برای میله‌ای به طول 2 متر حل کنیم، دمای ابتدای میله صفر درجه سانتی‌گراد و دمای انتهای آن، 50 درجه سانتی‌گراد است.



شکل ۱: Finite Length Pole

معادله به همراه شرایط مرزی آن به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(2, t) = 50 \\ u(x, 0) = 2e^x \end{cases}, \quad \frac{1}{c^2} = 50$$

حال گام به گام به بررسی مراحل حل می‌پردازیم.

۱.۱ فرم کلی معادله در MATLAB

در نرم افزار MATLAB فرم کلی معادله به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$c \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m f \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + s \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

هدف ما تعیین ضرایب فوق به گونه‌ای می‌باشد که معادله حرارت حاصل شود.
راهنمایی:

برای رسیدن به $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ مقدار f را برابر $\frac{\partial u}{\partial x}$ قرار دهید.

برای مشخص کردن فرم کلی یک تابع در MATLAB به شکل زیر عمل می‌کنیم.

```
function [c,f,s]=Equation(x,t,u,DuDx)
c= ? ;
f= ? ;
s= ? ;
end
```

۲.۱ شرایط اولیه

برای مشخص کردن شرایط اولیه به صورت زیر عمل می‌کنیم.

```
function value =Init(x)
value = 2*exp(x);
end
```

۳.۱ شرایط مرزی

فرم کلی شرایط مرزی در MATLAB به صورت زیر می باشد.

$$p(x,t,u) + q(x,t)f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

برای مشخص کردن ضرایب به صورت زیر عمل می‌کنیم.

```
function [pl,ql,pr,qr]=BC(xl,ul,xr,ur,t)
pl= ? ;
ql= ? ;
pr= ? ;
qr= ? ;
end
```

• ضرایب p_l, q_l مربوط به شرایط مرزی در $x = x_l$

• ضرایب p_r, q_r مربوط به شرایط مرزی در $x = x_r$

• ضرایب مربوط به دما در $x = x_l$

• ضرایب مربوط به دما در $x = x_r$

ضریب $p(x, t, u)$ در MATLAB به صورت زیر است.

$$p(x, t, u) = u_l - 45, \quad p_l = u_l, \quad p_r = u_r - 35$$

۴.۱ حل معادله

در نهایت برای حل معادله از دستور `pdepe()` استفاده می‌کنیم.
تذکر

برای حل معادله دقت کنید که باید $0 \leq x \leq 1$ به 200 قسمت شکسته شده و همچنین $0 \leq t \leq 10$ به 201 قسمت شکسته شود.

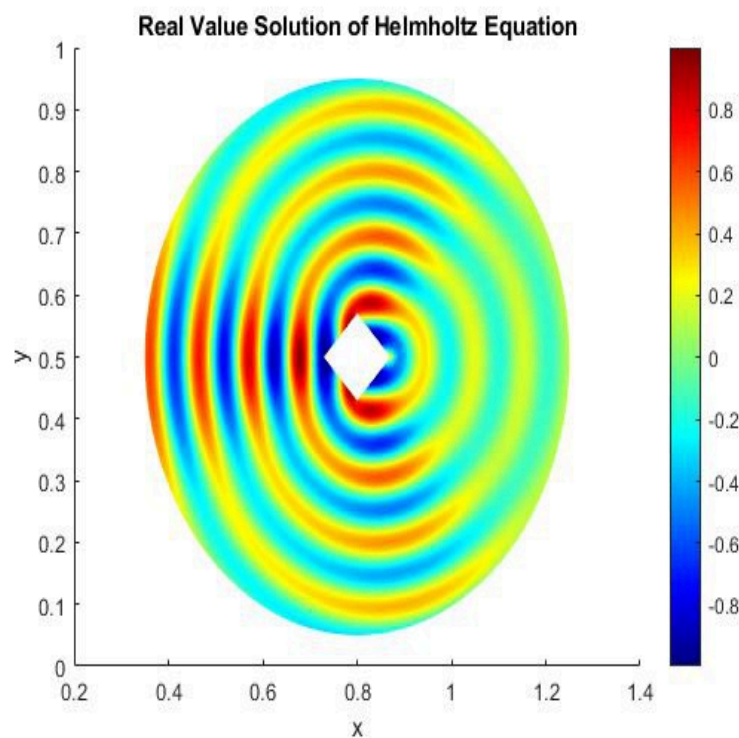
۵.۱ خواسته‌ها

- توابع معرفی شده برای معادله، شرایط مرزی و شرایط اولیه را پیاده‌سازی کنید و در گزارش‌کار خود شرح دهید.
- معادله را به کمک دستور معرفی شده حل کنید. پس از حل معادله به نمایش دمای میله در زمان‌های $t = 0, 5, 10$ در یک نمودار بپردازید و تحلیل خود را ارائه دهید.
- به کمک دستورات `imagesc()`, `colormap()` به صورت دوبعدی نمودار تغییرات دمایی را در طول مکان و زمان مشاهده کنید و تحلیل خود را ارائه کنید.
- ابتدا x و t به ترتیب به 100 و 101 قسمت تقسیم کرده سپس خواسته قبل را تکرار کنید.
- نمودار سه بعدی دما بر حسب زمان و مکان را به کمک دستور `surf(sol)` ترسیم کرده و نتیجه را در گزارش‌کار خود ارائه دهید. (به ازای هر دو حالت ذکر شده برای (x, t))

۲ حل معادله هلمهولتز

در این قسمت می‌خواهیم معادله هلمهولتز را حل و بررسی کنیم. فرم کلی معادله به صورت زیر است.

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0, \quad k : \text{Wave number}, \quad A : \text{Amplitude}$$



شکل ۲: Solved Helmholtz Equation

امتیازی: معادله هلمهولتز را با استفاده از معادله موج استخراج کنید و در مورد روش جل و شرایط مرزی آن تحقیق کنید.

در ادامه می‌خواهیم معادله هلمهولتز را در محیط PDE Modeler حل کنیم.

۱.۲ مراحل حل معادله

- ابتدا PDE Modeler را با نوشتن عبارت pdeModeler در CMD نرم افزار MATLAB باز کنید.
- محدوده محورهای x و y را به ترتیب $[0.1 \ 1.5]$ و $[0 \ 1]$ در نظر بگیرید. برای انجام این کار به قسمت Options-Axes limits مراجعه فرمایید.
- یک دایره به شعاع 0.45 و مرکز (0.8 0.5) رسم کنید.
- مود کاری را با مراجعه به بخش Application mode به Generic Scalar تنظیم کنید.
- شرایط مرزی را با مراجعه به قسمت Boundary-Specify Boundary Conditions مشخص کنید. دقت شود که شرایط مرزی از شرط Neumann با $q = -60i$ و $g = 0$ استفاده کنید.
- با مراجعه به بخش Mesh-Initialize Mesh شرایط اولیه مش را تعیین کنید.
- حال معادله را حل کنید.
- شکل موج را رسم کرده و در گزارش کار خود ارائه کنید، همچنین رفتار موج را توحیه کنید.

نکات کلی درباره پروژه

- در صورتی که در پروژه هر گونه ابهام و یا پرسشی دارید می‌توانید با [محمد امین کشمیری](#) یا [سروش مس‌فروش](#) در ارتباط باشید.
- در صورتی که سوالی از پروژه دارید که ممکن است برای دیگران نیز مفید باشد، آن را در گروه درس مطرح کنید.
- گزارش کار شما اصلی‌ترین معیار ارزیابی خواهد بود؛ در نتیجه زمان کافی را برای تکمیل آن اختصاص دهید.
- لطفاً تمامی خروجی‌ها، نمودارها و نتیجه‌گیری‌ها و همچنین نکات و فرض‌هایی که برای پیاده‌سازی و محاسبات خود در نظر می‌گیرید را در توضیحات ذکر کرده و نشان دهید.
- برای نوشتن گزارش کار می‌توانید از محیط MATLAB live script استفاده کنید اما اجباری به استفاده از آن در این درس وجود ندارد. در صورت تمایل می‌توانید برای نوشتن گزارش کار از محیط word یا $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ نیز استفاده کنید.
- مشورت و همفکری با دوستان خود هنگام انجام پروژه کاری مفید و سازنده است و از انجام آن پرهیز نکنید، اما این کار باید در راستای فهم درس و پروژه باشد و از کپی‌کردن کدهای یکدیگر خودداری کنید.
- پاسخ‌های خود (فایل‌های MATLAB و گزارشکار و دو فایل صوتی خروجی گرفته شده) را به صورت یک فایل زیپ در سامانه درس با فرمت نامگذاری Engmath-CANum-SID بارگذاری نمایید.