دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

درس یادگیری ماشین

استاد سید عباس حسینی

تمرین دوم | مروری بر مباحث جبرخطی و آمار | مصطفی قدیمی

سؤال ۱. مقدار ویژه

- جمع مقادیر ویژه برابر با trace است.
  اگر معادله مشخصه ماتریس را بنویسیم ($p(\lambda) = det(A - \lambda I)$)، داریم:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \big(\lambda^n - (\mathbf{tr}A)\,\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A\big)\,.$$

از طرفی می‌دانیم:

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

λ_j نشان‌دهنده‌ی مقدار ویژه‌ی ماتریس A است؛ بنابراین با مقایسه‌ی ضرایب، این رابطه اثبات می‌شود.

$$tr(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

- ضرب مقادیر ویژه برابر با دترمینان ماتریس است.
  بار دیگر اگر معادله‌ی مشخصه را بنویسیم و فرض کنیم که λ ریشه‌های این معادله هستند، داریم:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) = p(\lambda) &= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \\
&= (-1)(\lambda - \lambda_1)(-1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (-1)(\lambda - \lambda_n) \\
&= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)
\end{aligned}$$

در معادله‌ی اول، ضریب $(-1)^n$ از فاکتورگیری به دست آمده است. این ضریب را می‌توان به‌جای فاکتورگیری روی قطر گسترش داد و به معادله‌ی دوم رسید.

حال اگر λ را برابر با صفر قرار دهیم (چون متغیر است)، در سمت چپ معادله‌ی مشخصه $det(A)$ و در سمت راست $\lambda_1 \dots \lambda_n$ به دست می‌آید، به بیان دیگر:

$$det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$$

- مقدار ویژه‌های AB و BA با یک‌دیگر برابرند.
  اگر λ مقادیر ویژه‌ی AB باشند و آن را در بردار ناصفر x ضرب کنیم، داریم:

$$ABx = \lambda x$$

حال اگر $y = Bx$ باشد، آن‌گاه y هم ناصفر خواهد بود (در غیر این صورت در معادله‌ی بالا یا x و یا λ برابر با صفر می‌شوند که خلاف فرضیات ما است.). با جای‌گذاری روابط داریم:

$$BAy = BABx = B(ABx) = B(\lambda x) = \lambda Bx = \lambda y$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، ثابت شد که λ مقدار ویژه‌ی BA نیز هست.

سؤال ۲. مشتق‌گیری

هر کدام از روابط زیر را ثابت کنید.

- $\frac{\partial a^t x}{\partial x} = a$

$$\frac{\partial a^t x}{\partial x} = \frac{\partial \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}{\partial x} = \frac{\partial (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)}{\partial x}$$

اگر $f = (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)$ **داریم:**

$$\frac{\partial a^t x}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = a$$

- $\frac{\partial x^t A x}{\partial x} = 2xA$