دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

شبیه‌سازی کامپیوتر

استاد علی‌رضا فرهادی

تمرین دوم | اعداد تصادفی و توزیع‌های احتمال | مصطفی قدیمی

سؤال ۱. نرم‌افزارهای شبیه‌سازی

- الف) ویژگی‌های متعددی را هنگام انتخاب نرم‌افزار شبیه‌سازی باید در نظر بگیریم که در موارد زیر به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

۱. روی یک مسئله‌ی خاص (مثل راحتی در استفاده کردن نرم‌افزار) نباید تمرکز کنیم. باید دقت مدل، سطح قابل دست‌یابی، راحتی در یادگیری، پشتیبانی فروش و کاربردها و موارد استفاده‌ی نرم‌افزار را در نظر بگیریم.

۲. سرعت اجرا مهم است. نباید انجام آزمایش‌ها بسیار طولانی شود؛ زیرا سرعت روی زمان ایجاد و توسعه اثرگذار است. هنگام رفع اشکال یک تحلیل‌گر ممکن است که منتظر این باشد که نرم‌افزار به نقطه‌ای برسد اما در زمان شبیه‌سازی ممکن است خطاهای خیلی زیادی قبل از این که خطا شناسایی شود، اتفاق بیفتد.

۳. باید مراقب ادعاهای تبلیغات باشیم. بسیاری از آن‌ها فقط نکات مثبت نرم‌افزار را ذکر می‌کنند. همین‌طور نشان داده می‌شود که روی مسئله‌های آزمایشی بسیار خوب عمل می‌کنند؛ در حالی که ممکن است روی مسئله‌ی ما عمل‌کرد ضعیفی داشته باشند.

۴. از فروشنده بخواهیم تا یک نسخه و بخش کوچکی از مسئله‌ی ما را حل کند.

۵. چک‌لیستی از «بله» و «خیر»ها به عنوان ورودی داشته باشیم. برای مثال خیلی از بسته‌ها مدعی هستند که باید موجودیت conveyor را داشته باشند. این در حالی است که پیاده‌سازی باید تنوع و سطوح زیادی و قابل توجهی از fidelity را داشته باشند. پیاده‌سازی و قابلیت‌ها چیزهایی هستند که بسیار مهم هستند. یک مثال دیگر: ممکن است خیلی از بسته‌ها یک license هنگام اجرا بخواهند که قیمت و ویژگی‌های آن ممکن است تفاوت داشته باشد.

۶. کاربران شبیه‌سازی درخواست می‌کنند که آیا مدل‌های شبیه‌سازی را می‌توان به کد یا routineهای زبان‌های خارجی مثل C، Java و... وصل کرد یا خیر. این ویژگی بسیار خوبی است؛ مخصوصا وقتی که روتین خارجی وجود دارد و رای هدف در در دسترس است.

۷. یک trade-off سنگینی بین محیطهای ساختن مدل گرافیکی و آن‌هایی که بر اساس زبان شبیه‌سازی هستند وجود دارد. ساخت مدل گرافیکی دیگر مدت زمان یادگیری زبان برنامه‌نویسی را برای یادگیری syntex از بین می‌برد اما نیاز به رویه‌ی منطق را در بسیاری از مدل‌های واقعی از بین نمی‌برد؛ بنابراین باید نسبت به عبارت‌های مانند «بدون نیاز به برنامه‌نویسی» باشیم، مگر این‌که برای مدل ما به‌طور نسبتا کاملی مناسب باشد.

- ب)

۱. متدها باید سریع باشند. محاسبه‌ی تک‌به‌تک هر کدام از اعداد شبه‌تصادفی بسیار کم‌هزینه هستند. اما باید به این نکته توجه کنیم که شبیه‌سازی ممکن است به میلیون‌ها عدد تصادفی نیاز داشته باشد. هزینه‌ی کل

محاسبات می‌تواند با انتخاب یک متد کارا (از لحاظ محاسبات) برای تولید اعداد تصادفی مدیریت و کنترل شود.

۲. متد باید قابل حمل باشد. یعنی بتوان در کامپیوترهای دیگر از آن استفاده کرد و باید توجه کرد که هر جا که برنامه اجرا شود (در هر کامپیوتری)، نتایج مشابهی را تولید کند.

۳. اعداد تصادفی باید قابل تکرار باشند؛

۴. مهم‌ترین نکته این است که اعداد تولید شده باید به‌طور تقریبی بسیار نزدیک به ویژگی‌های ایده‌آل آماری به لحاظ استقلال و uniformity باشند.

سؤال ۲. کاربردهای توزیع‌های احتمال

- توزیع پواسون:

$$\lambda = 0.11,\ \alpha = -0.12\ and\ \beta = 0.3$$

- توزیع log-normal

$$mean = 79.99\ andvariance = 266.10$$

- توزیع بتا:

$$beta\ distribution(2, 2)$$

سؤال ۳. مکعب

x_i را متغیر تصادفی‌ای فرض می‌کنیم که تعداد عددهای تکراری روی مکعب‌ها را بشمارد. حال با توجه به روابط آن داریم:

$$p_i = \frac{100-i}{100} \implies E[x_i] = \frac{i}{100-i}$$

در این مرحله برای به دست آوردن امید ریاضی حداقل تعداد مراحلی که لازم است تا همه‌ی اعداد ۱ تا ۱۰۰ نوشته شده باشند، داریم:

$$n = \Sigma_{i=0}^{99}(x_i+1)$$

با توجه به نتایجی که از مراحل قبل گرفتیم، داریم:

$$\implies E[n] = \Sigma_{i=0}^{99}\frac{100}{100-i} \approx 519$$

سؤال ۴. چراغ مطالعه

- $$E(X) = 1.8 + \frac{1}{3}\Gamma(2+1) = 1.8 + \frac{2}{3} = 2.47 \times 10^3\, hours$$

$$F(2.47) = 1 - e^{\sqrt{-\frac{2.47-1.80}{0.33}}} = 1 - e^{-\sqrt{2}} = 0.76$$

$$P(X > 2.47) = 1 - 0.76 = 0.24$$

- اگر x را میانه فرض کنیم داریم:

$$0.5 = 1 - e^{-\sqrt{\frac{x-1.8}{0.33}}} \implies ln(0.5) = -\sqrt{\frac{x-1.8}{0.33}} \implies x = 1.96 \times 10^3\, hours$$

سؤال ۵. نانوایی

ابتدا باید تابع $\Lambda(t)$ را حساب کنیم:

$$\Lambda(t) = \begin{cases} \int_0^t 30du = 30t & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \int_0^1 30du + \int_1^t 20du = 20t + 10 & 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ \int_0^1 30du + \int_1^2 20du + \int_2^t 45du = 45t - 40 & 2 \leqslant t \leqslant 3 \end{cases}$$

- برای محاسبه‌ی امید ریاضی تعداد مشتریان مراجعه‌کننده بین ساعت ۶:۳۰ تا ۸:۳۰ باید مقدار $\Lambda(0.5)$ و $\Lambda(2.5)$ را حساب کنیم:

$$\Lambda(2.5) - \Lambda(0.5) = (45(2.5) - 40) - (30(0.5)) = 57.5$$

- $$P(N(2.5) - N(0.5) = k) = \frac{e^{-(\Lambda(2.5)-\Lambda(0.5))}(\Lambda(2.5) - \Lambda(0.5))^k}{k!}$$

با توجه به نتیجه‌ی بالا داریم:

$$P(k < 60) = \Sigma_{k=0}^{59} \frac{e^{-57.5}(57.5)^k}{k!}$$

سؤال ۶. روش سریع تولید اعداد تصادفی

می‌دانیم:

$$(c+d)\,mod\,m = c\,mod\,m + d\,mod\,m$$

حال اگر $g = h\,mod\,m$ می‌توانیم آن را برای $k \geqslant 0$ به صورت زیر بنویسیم:
$g = h - km$

- $$X_{i+2} = aX_{i+1}\,mod\,m = a[aX_i\,modm]\,mod\,m = a[aX_i - km]\,mod\,m = a^2X_i\,mod\,m - akm\,mod\,m$$

  چون $akm\,mod\,m = 0$ بنابراین داریم:

  $$\implies X_{i+2} = a^2X_i\,mod\,m$$

- $$(a^nX_i)\,mod\,m = ((a^n\,mod\,m) + (a^n - (a^n\,mod\,m)))X_i\,mod\,m$$

  $$\implies (a^nX_i)\,mod\,m = ((a^n\,mod\,m)X_i\,mod\,m) + ((a^n - (a^n\,mod\,m))X_i\,mod\,m)$$

  برای $k \geqslant 0$ داریم:

  $$\implies (a^nX_i)\,mod\,m = ((a^n\,mod\,m)X_i\,mod\,m) + (kmX_i\,mod\,m)$$

  $$\implies (a^nX_i)\,mod\,m = (a^n\,mod\,m)X_i\,mod\,m$$

سؤال ۷. مولد واریته تصادفی پیوسته

$$cdf = F(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}}{2} & -\infty < x \leqslant 0 \\ 1 - e^{2x} & 0 < x < \infty \end{cases}$$

حال اگر برای بازه‌ی $-\infty < X < \infty$ قرار دهیم $F(X) = R$ خواهیم داشت:

$$X = \begin{cases} \frac{1}{2} ln 2R & 0 < R \leqslant \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} ln(2 - 2R) & \frac{1}{2} < R < 1 \end{cases}$$

سؤال ۸. مولد واریته تصادفی گسسته

$$F(t-1)=\frac{(t)(t-1)(2t-1)}{180}<R\leqslant\frac{(t)(t+1)(2t+1)}{180}=F(x)$$

واریته تصادفی متناظر با اعداد تصادفی تولید شده برابر است با:

$$\implies F(1)=\frac{6}{180},\ F(2)=\frac{30}{180},\ F(3)=\frac{42}{180},\ F(4)=1$$

$$R_1=0.83\implies X=4,\ R_2=0.24\implies X=4,\ R_3=0.57\implies X=4$$