دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی مکانیک

دینامیک تخصصی

گزارش پروژه پایانی

حل دینامیک سیستم ۴ درجه آزادی

نگارش
مصطفی کویری
۹۷۲۸۰۷۶

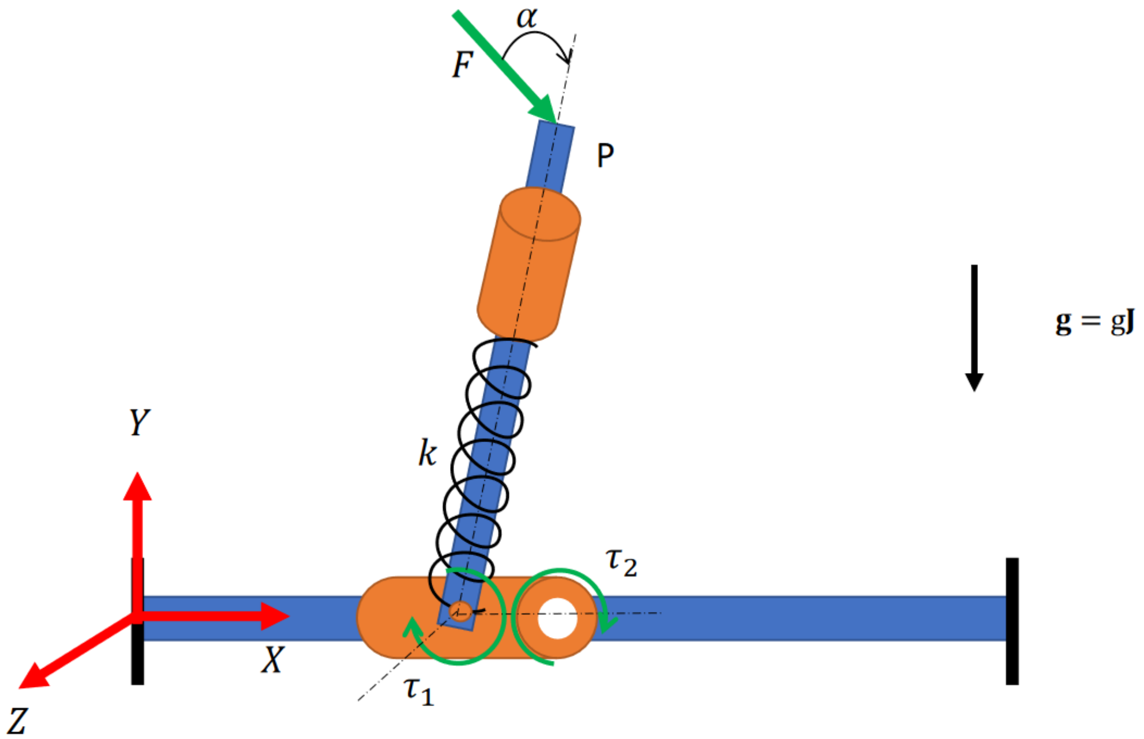
استاد درس
دکتر تقوایی‌پور
مهندس مجیبی

آذر ماه ۱۳۹۹

۱ -
فصل اول
مقدمه

مقدمه

در گزارش پیش رو معادلات دینامیکی سیستم نشان داده در شکل- ۱ با دور وش لاگرانژ و نیوتون استخراج می‌شوند. سپس مقادیر بدست آمده با یکدیگر مقایسه می‌شود تا درستی حل های انجام شده بررسی شوند. در ادامه بررسی دو روش مختلف و همینطور بررسی افزایش دقت حل با افزایش گام‌های زمانی را داریم. به صورت کلی حل با وجود دمپر انجام شده اما هرجا نیاز بود می‌شود c را صفر قرار داده و حل بدون دمپر را استخراج کرد



شکل-۱ سیستم مذکور

۱-۱- ساختار کلی گزارش حاضر

مراحل کلی حل به شکل زیر است:

- تعیین درجات آزادی و پارامترهای مورد نظر
- ساخت ماتریس دوران مربوطه با توجه به دستگاه انتخاب شده برای حل سیستم

- انتقال پارمترها به دستگاه مذکور و محاسبات کلی سرعت برای بدست اوردن انرژی ها برای روش لاگرانژ
- حل بوسیله روش لاگرانژ
- حل نیوتون
- نتایج نمودارها
- خطاهای گام زمانی

۲ -

فصل دوم

حل و نتایج

مراحل حل مسئله

مختصات تعمیم یافته

$$q=\begin{Bmatrix}x\\t\\a\\r\end{Bmatrix},\qquad q'=\begin{Bmatrix}x'\\t'\\a'\\r'\end{Bmatrix},\qquad q"=\begin{Bmatrix}x"\\t"\\a"\\r"\end{Bmatrix},$$

ماتریس های دوران:

در این مسئله دو دوران صورت میگیرد. اولین دوران حول محور X و دومین دوران حول محور z

$$R_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\ t&\sin t\\0&-sint&\cos\ t\end{bmatrix}$$

$$R_2=\begin{bmatrix}\cos a&\sin a&0\\-\sin a&\cos\ a&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

دو سرعت های زاویه ای نیز در این مکانیزم به صورت زیر تعریف میشوند.

$$\omega_1=\begin{Bmatrix}t'\\0\\0\end{Bmatrix}_{XYZ},\qquad \omega_2=\begin{Bmatrix}0\\0\\a'\end{Bmatrix}_{xyz}$$

سرعت زاویه ای ω_1 به تمامی اجرام و سرعت زاویه ای ω_2 به میله و اسلایدر روی آن وارد میشود.

بدین ترتیب ماتریس دوران کلی به صورت زیر به دست می آید که این ماتریس نمودار را در دستگاه مختصات ثابت یا اصلی XYZ به دستگاه چسبیده بر روی میله xyz انتقال میدهد.

$$R=R_2R_1,\qquad \begin{Bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{Bmatrix}=R\begin{Bmatrix}A_X\\A_Y\\A_Z\end{Bmatrix}$$

بردار مکان نقاط مورد نظر به صورت زیر به دست می آیند.

$$r_1=\begin{Bmatrix}x\\0\\0\end{Bmatrix}_{XYZ},\qquad r_b=r_{1XYZ}+\begin{Bmatrix}\frac{l}{2}\\0\\0\end{Bmatrix}_{xyz},\qquad r_2=r_{1XYZ}+\begin{Bmatrix}r\\0\\0\end{Bmatrix}_{xyz},\qquad r_f=r_{1XYZ}+\begin{Bmatrix}l\\0\\0\end{Bmatrix}_{xyz}$$

که به ترتیب مکان جرم اول، مکان مرکز میله، مکان جرم دوم و نقطه اعمال نیروی F هستند.

این نقاط در دستگاه اصلی به صورت زیر هستند. در این دستگاه مشتق گیری برای رسیدن به سرعت و شتاب راحت تر هست زیرا جهت محور های مختصات ثابت است.

$$r_{1XYZ}=\begin{Bmatrix}x\\0\\0\end{Bmatrix}_{XYZ},\qquad r_{bXYZ}=r_{1XYZ}+R^T\begin{Bmatrix}\frac{l}{2}\\0\\0\end{Bmatrix}_{xyz},\qquad r_{2XYZ}=r_{1XYZ}+R^T\begin{Bmatrix}r\\0\\0\end{Bmatrix}_{xyz},\qquad r_{fXYZ}=r_{1XYZ}+R^T\begin{Bmatrix}l\\0\\0\end{Bmatrix}_{xyz}$$

دو بردار زیر را میتوان تعریف کرد تا مشتق گیری را در یک مرحله انجام داد.

$$s = \begin{Bmatrix} x \\ t \\ a \\ r \\ x' \\ t' \\ a' \\ r' \end{Bmatrix}, \qquad s' = \begin{Bmatrix} x' \\ t' \\ a' \\ r' \\ x" \\ t" \\ a" \\ r" \end{Bmatrix}$$

اکنون برای تمامی بردار ها به روش زیر می توان متشق گیری را انجام داد.

$$A' = jacobian(A, s) \times s'$$

برای میله چون جرمی پیوسته است ماتریس ممان اینرسی در دستگاه چسبیده به میله که همراه آن دوران میکند به صورت زیر است.

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

سرعت زاویه ای این میله نیز به صورت زیر به دست می آید.

$$\omega = R\omega_1 + \omega_2$$

هر دو ممان اینرسی و سرعت زاویه ای در دستگاه متحرک نوشته شده اند پس میتوان مومنتوم زاویه میله را حول مرکز جرم میله نوشت.

$$H_G = I\omega$$

اکنون میتوان انرژی جنبشی سیستم را به صورت زیر به دست آورد.

$$T = \frac{1}{2}(m_1 v_1 . v_1 + m_2 v_2 . v_2 + m_b v_b . v_b + \omega . H_G)$$

انرژی پتانسیل در این سیستم در فنر و همچنین در اجرام به دلیل وجود نیروی گرانش ذخیره میشود. از اینرو داریم:

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + m_b g y_b + \frac{1}{2}k\left(r - r_f\right)^2$$

سرعت اجرام:

$$v_1 = \begin{Bmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$v_b = \begin{Bmatrix} \mathrm{x}' - \dfrac{\mathrm{a'lsin(a)}}{2} \\ \dfrac{\mathrm{a'lcos(a)cos(t)}}{2} - \dfrac{\mathrm{t'lsin(a)sin(t)}}{2} \\ \dfrac{\mathrm{a'lcos(a)sin(t)}}{2} + \dfrac{\mathrm{t'lsin(a)cos(t)}}{2} \end{Bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{Bmatrix} x' + r' \cos(a) - a' r \sin(a) \\ r' \sin(a) \cos(t) + a' r \cos(a) \cos(t) - t' r \sin(a) \sin(t) \\ r' \sin(a) \sin(t) + a' r \cos(a) \sin(t) + t' r \sin(a) \cos(t) \end{Bmatrix}$$

انرژی جنبشی اجرام:

$$E_1 = \frac{x'^2 m_1}{2}$$

$$E_2 = \frac{m_2\left(x' + r'cos(a) - a'rsin(a)\right)^2}{2} + \frac{m_2\left(r'sin(a)cos(t) + a'rcos(a)cos(t) - t'rsin(a)sin(t)\right)^2}{2} + \frac{m_2\left(r'sin(a)sin(t) + a'rcos(a)sin(t) + t'rsin(a)cos(t)\right)^2}{2}$$

$$E_b = \frac{Iz_b a'^2}{2} + \frac{Ix_b t'^2}{2} + \frac{x'^2 m_b}{2} + \frac{a'^2 l^2 m_b}{8} - \frac{Ix_b t'^2 sin(a)^2}{2} + \frac{Iy_b t'^2 sin(a)^2}{2} + \frac{t'^2 l^2 m_b sin(a)^2}{8} - \frac{a'x'lm_b sin(a)}{2}$$

انرژی پتانسیل:

$$V = \frac{k\left(r - r_f\right)^2}{2} + \frac{glm_b sin(a)cos(t)}{2} + gm_2 rsin(a)cos(t)$$

که r_f در رابطه بالا طول آزاد فنر در راستای میله است.
اکنون لاگرانژ سیستم به صورت زیر نتیجه خواهد شد.

$$L = T - V$$

اکنون معادلات حاکم برسیستم با توجه با متد لاگرانژ به صورت زیر به دست می آید.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_i$$

تنها موردی که در رابطه بالا هنوز به دست نیامده است بردار Q_i است.

برای به دست آوردن بردار نیرو های تعمیم یافته باید توان تزریق شده به سیستم را به دست آورد. البته در این مورد باید از نیروی فنر و گرانش صرف نظر کرد زیرا این دو نیرو در معادله لاگرانژ لحاظ شده اند.

$$P_{input} = -\tau_2\, t' - \tau_1 a' + F.v_f - Cr'^2, \qquad P_{input} = Q.q'$$

در این معادله F نیرو وارد شده به سر میله است.

$$F = \begin{Bmatrix} -fcos(\alpha) \\ -fsin(\alpha) \\ 0 \end{Bmatrix}_{xyz}$$

در محاسبه $F.v_f$ باید هر دو بردار در یک دستگاه مختصات باشند برای اینکا بردار F را در دستگاه مختصات ثابت به صورت زیر نتیجه میشود.

$$F_{XYZ} = R^T F_{xyz}$$

با حل معادله لاگرانژ و دانستن این که این معادلات نسبت به شتاب های مختصات تعمیم یافته خطی هستند. میتوان معادلات را به صورت زیر تصور کرد.

$$eqn = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} - Q_i = Mq'' + A = 0$$

بدین ترتیب ماتریس جرم M و بایاس به صورت زیر نتبیجه میشود.

```
M =[                m1 + m2 + mb,                                                                0, -(sin(a)*(l*mb + 2*m2*r))/2, m2*cos(a)
                    0, Ix_b - Ix_b*sin(a)^2 + Iy_b*sin(a)^2 + (l^2*mb*sin(a)^2)/4 + m2*r^2*sin(a)^2,                           0,         0
 -(sin(a)*(l*mb + 2*m2*r))/2,                                                                    0,  (mb*l^2)/4 + m2*r^2 + Iz_b,         0
                m2*cos(a),                                                                       0,                           0,        m2];


A =[                                                                  f*cos(a + alpha) - 2*da*dr*m2*sin(a) - (da^2*l*mb*cos(a))/2 - da^2*m2*r*cos(a)
  To2 + 2*dr*dt*m2*r - Ix_b*da*dt*sin(2*a) + Iy_b*da*dt*sin(2*a) - 2*dr*dt*m2*r*cos(a)^2 - (g*l*mb*sin(a)*sin(t))/2 - g*m2*r*sin(a)*sin(t) + (da*dt*l^2*mb*sin(2*a))/4 + da*dt*m2*r^2*sin(2*a)
 To1 + f*l*sin(alpha) + (Ix_b*dt^2*sin(2*a))/2 - (Iy_b*dt^2*sin(2*a))/2 + 2*da*dr*m2*r - (dt^2*l^2*mb*sin(2*a))/8 - (dt^2*m2*r^2*sin(2*a))/2 + (g*l*mb*cos(a)*cos(t))/2 + g*m2*r*cos(a)*cos(t)
                                                         c*dr + k*r - k*r_f - da^2*m2*r - dt^2*m2*r + dt^2*m2*r*cos(a)^2 + g*m2*sin(a)*cos(t)];
```

بدین ترتیب با داشتن این دو ماتریس، شتاب مختصات تعمیم یافته به شکل زیر به دست می آیند.

$$q'' = -\mathrm{M}^{-1}A$$

اگر از سرعت های اجرام یک بار دیگر مشتق بگیریم به شتاب مرکز جرم اجرام خواهیم رسید و میتوان از روش نیوتون برای یافتن معادلات استفاده کرد.

اولین معادله نیوتون را میتوان در راستای x برای تمامی اجرام نوشت.

در این راستا تنها نیروی F مقدار دارد.

$$\sum F = \sum m_i a_i$$

$$F_x = m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_b a_b$$

معادله دوم را میتوان از گشتاور گیری در همین راستا برای تمامی اجرام نوشت. در این راستا نیروی کشش زمین وارد به میله و جرم دوم و گشتاور وارد به جرم یک باعث گشتاور میشوند.

$$\sum M_o = \sum H'_{G_i} + \sum r_{oG_i} \times m_i a_{G_i}$$

$$(r_1 - r_b) \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_b g \\ 0 \end{Bmatrix} + (r_1 - r_2) \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_2 g \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\tau_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$
$$= H'_{G_b} + (r_1 - r_b) \times m_b a_{G_b} + (r_1 - r_2) \times m_2 a_{G_2}$$

تمامی بردار های استفاده شده در این معادله باید در دستگاه مختصات ثابت نوشته شوند با معادله نهایی نیز در این دستگاه به دست آید. از این معادله تنها در راستای x مد نظر است.

معادله سوم از گشتاور گیری در راستای z متصل به میله نوشته میشود. نیروی F و نیروی گرانش میله و جرم دوم در این راستا گشتاور دارند همچنین گشتاور وارده از جرم اول به میله نیز مستقیم وارد میشود.

$$(r_1 - r_b) \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_b g \\ 0 \end{Bmatrix} + (r_1 - r_2) \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_2 g \\ 0 \end{Bmatrix} + (r_1 - r_f) \times F + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau_1 \end{Bmatrix}$$
$$= H'_{G_b} + (r_1 - r_b) \times m_b a_{G_b} + (r_1 - r_2) \times m_2 a_{G_2}$$

تمامی بردارهای این معادله باید در دستگاه متحرک متصل به جرم دوم نوشته شوند تا این معادله نیز در این دستگاه به دست آید. همچنین از این معادله تنها پارامتر سوم که در راستای z است مورد نظر است.

معادله چهارم که معادله اخر است را برای جرم دوم در راستای میله نوشته میشود.

$$\sum F = \sum m_i a_i$$

$$F = -k(r - r_f) - cr' + m_2 g_{xyz} = m_2 a_2$$

ماتریس جرم و بایاس حاصل از معادلات نیوتون به صورت زیر به دست می آید.

```
M =[ m1 + m2 + mb,                                                              0,      -(sin(a)*(l*mb + 2*m2*r))/2, m2*cos(a)
        0, Ix_b/2 + Iy_b/2 + (l^2*mb)/8 + (m2*r^2)/2 + (Ix_b*cos(2*a))/2 - (Iy_b*cos(2*a))/2 - (l^2*mb*cos(2*a))/8 - (m2*r^2*cos(2*a))/2,          0,          0
 -(sin(a)*(2*m2*r + l*mb*cos(t)))/2,                                 -(l^2*mb*cos(a)*sin(a)*sin(t))/4, (mb*cos(t)*l^2)/4 + m2*r^2 + Iz_b,          0
                -m2*cos(a),                                                     0,                                0,       -m2];


A =[                                    f*cos(a + alpha) - 2*da*dr*m2*sin(a) - (da^2*l*mb*cos(a))/2 - da^2*m2*r*cos(a)
        To2 + dr*dt*m2*r - Ix_b*da*dt*sin(2*a) + Iy_b*da*dt*sin(2*a) - dr*dt*m2*r*cos(2*a) - (g*l*mb*sin(a)*sin(t))/2 - g*m2*r*sin(a)*sin(t) + (da*dt*l^2*mb*sin(2*a))/4 + da*dt*m2*r^2*sin(2*a)
To1+f*l*sin(alpha)+(Ix_b*dt^2*sin(2*a)-Iy_b*dt^2*sin(2*a))/2+2*da*dr*m2*r-(dt^2*m2*r^2*sin(2*a)+g*l*mb*cos(a)*cos(t))/2+g*m2*r*cos(a)*cos(t)-(2*da*dt*l^2*mb*cos(a)^2*sin(t)-dt^2*l^2*mb*cos(a)*sin(a)*cos(t))/4
                        k*r_f - k*r - c*dr + da^2*m2*r + dt^2*m2*r - dt^2*m2*r*cos(a)^2 - g*m2*sin(a)*cos(t)];
```

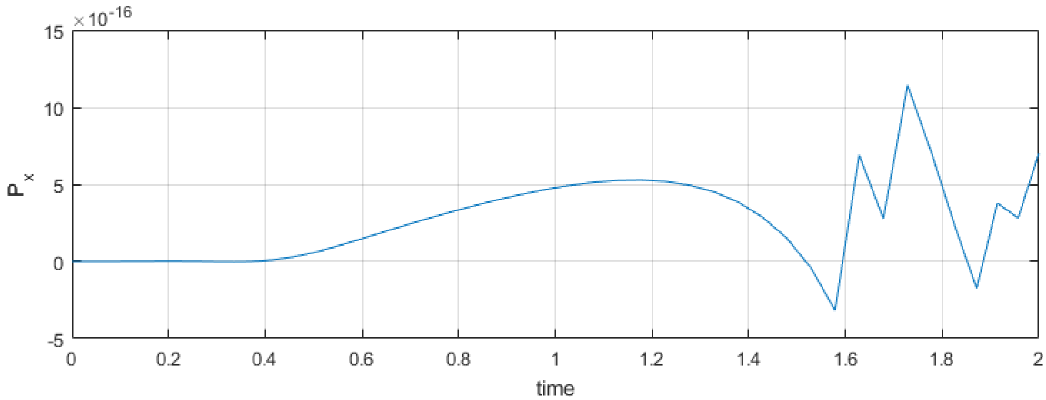
بدین ترتیب با داشتن این دو ماتریس، شتاب مختصات تعمیم یافته به شکل زیر به دست می آیند.

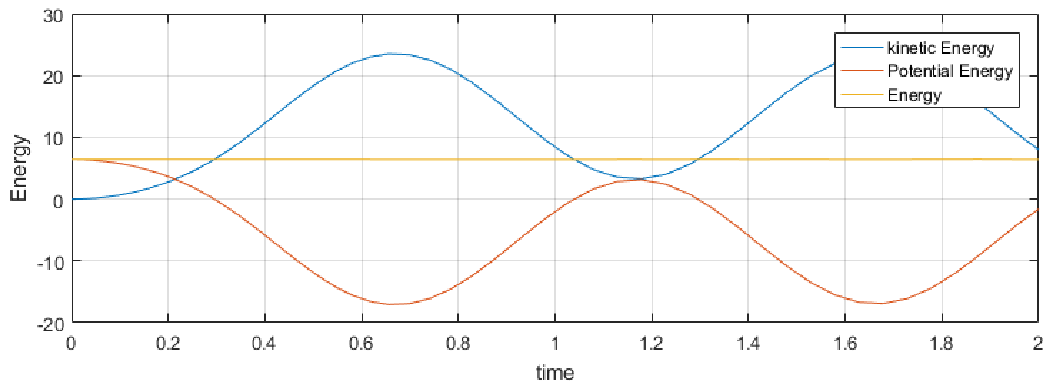
$$q'' = -\mathrm{M}^{-1}A$$

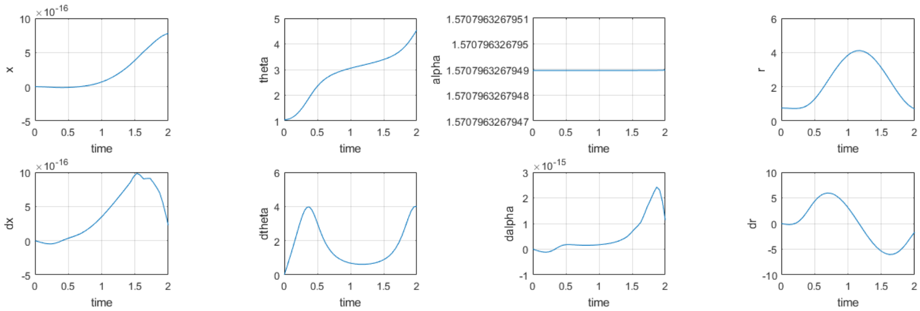
نتایج:

شرایط اولیه:

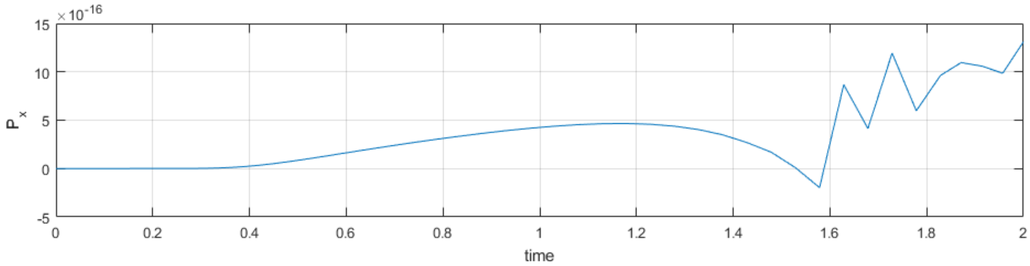
$m1 = 1; mb = 1; m2 = 1; l = 1; k = 10; ro = 0; r\_f = 1; g = 9.81; alpha = pi/4;$
$Ix\_b = 0; Iy\_b = 1/12 * mb * l\text{^}2; Iz\_b = Iy\_b;$
$c = 0; f = 0;\ To1 = 0;\ To2 = 0;$
$x0 = 0$
$t0 = pi/3$
$a0 = pi/2$
$r0 = .75$
$dx0 = 0$
$dt0 = 0$
$da0 = 0$
$dr0 = 0$

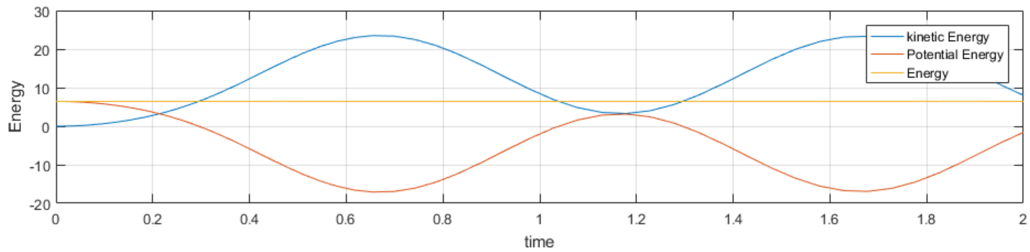


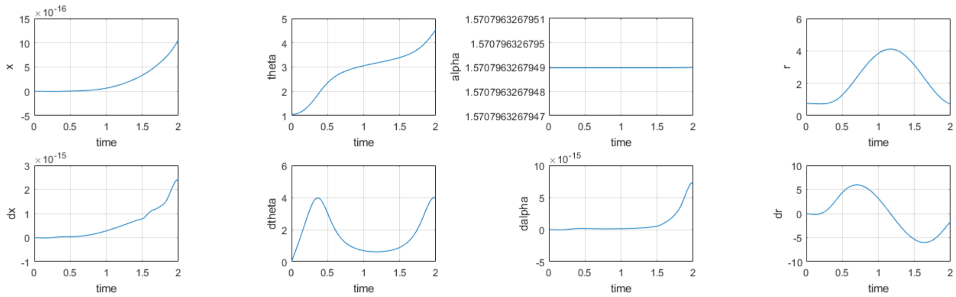




نیوتون:







شرایط اولیه:

$m1 = 1; mb = 1; m2 = 1; l = 1; k = 10; ro = 0; r\_f = 1; g = 9.81; alpha = pi/4;$

$Ix\_b = 0; Iy\_b = 1/12 * mb * l\hat{}2; Iz\_b = Iy\_b;$

$c = .5; f = 2;\ To1 = 2;\ To2 = 4;$

$x0 = 0$

$t0 = pi/3$

$a0 = pi/3$

$r0 = .75$

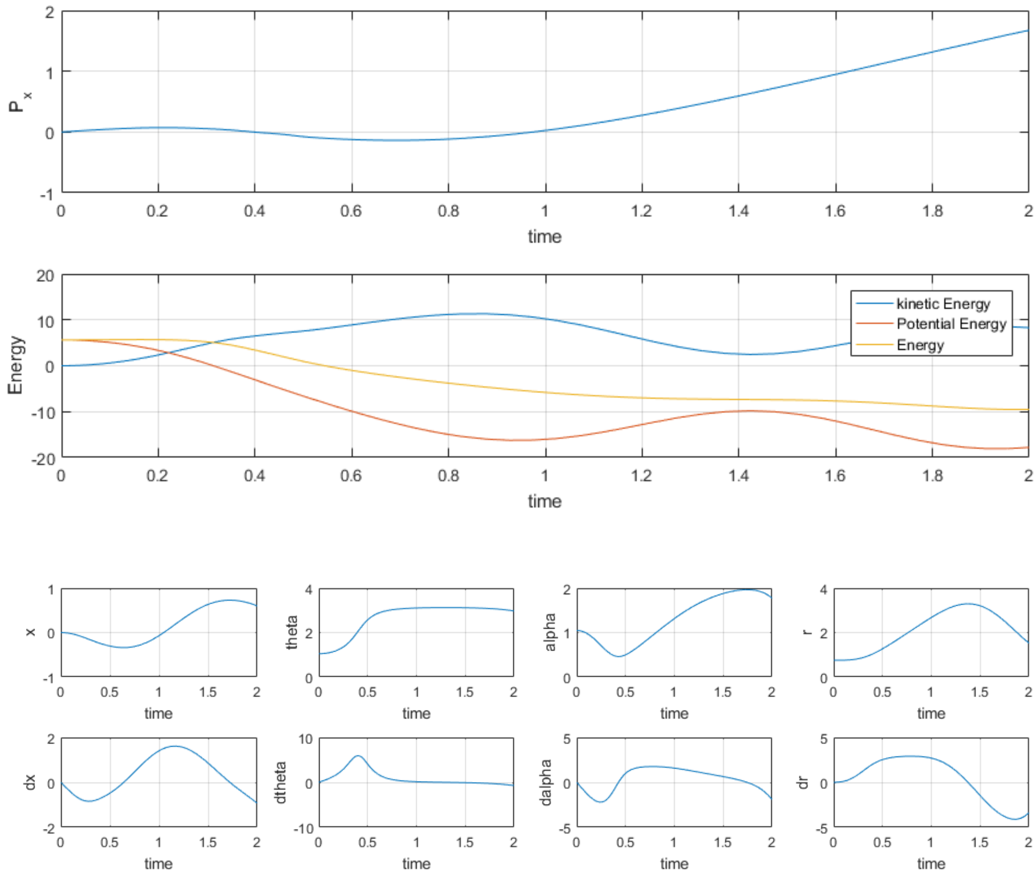
$dx0 = 0$

$dt0 = 0$

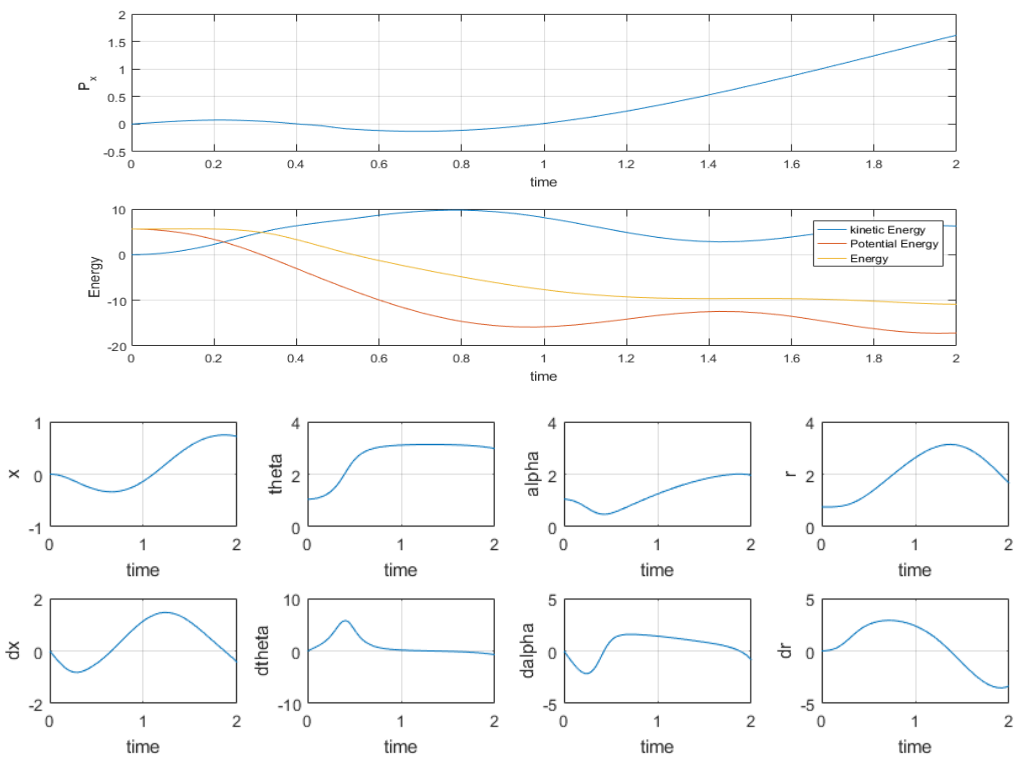
$da0 = 0$

$dr0 = 0$

لاگرانژ:

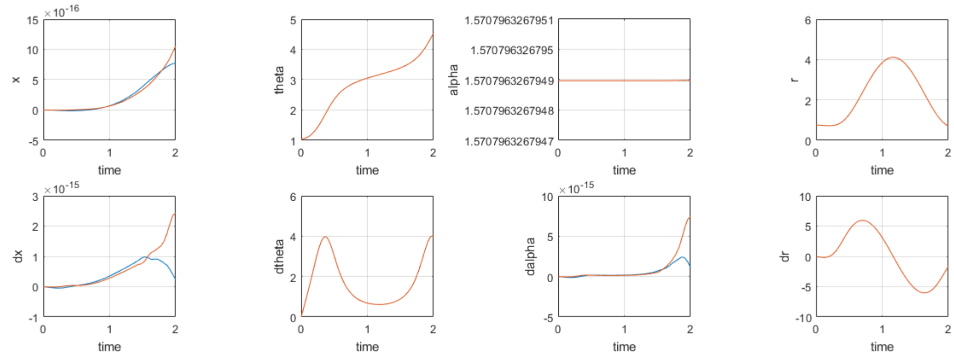


نیوتون:



$m1 = 1; mb = 1; m2 = 1; l = 1; k = 10; ro = 0; r\_f = 1; g = 9.81; alpha = pi/4;$

$Ix\_b = 0; Iy\_b = 1/12 * mb * l^2; Iz\_b = Iy\_b;$
$c = 0; f = 0;\ To1 = 0;\ To2 = 0;$
$x0 = 0$
$t0 = pi/3$
$a0 = pi/2$
$r0 = .75$
$dx0 = 0$
$dt0 = 0$
$da0 = 0$
$dr0 = 0$



خطای گام زمانی:

برای رسم نمودار خطای گام زمانی شرایط مرزی را بدون اعمال ورودی در نظر میگیریم.

در این حالت قاعدتا باید انرژی سیستم ثابت باشد و گام زمانی را تغییر میدهیم. همچنین از آنجایی که فانکشن هایی چون ode45 مقادیر را تا دقت زیاد گاهی بدون در نظر گرفتن گام زمانی حل میکنند. از متد رانگ کوتاه برای تحلیل اثر گام زمانی در خطا و زمان حل استفاده شده است. نتایج به صورت زیر است.