بسم الله الرحمان الرحيم

الجداء المتجهي

ذ: مصطفى لعبيدي

ثانوية طارق بن زيادالتاهيلية
بازرو

23 مارس 2020

تتمة درس الهندسة الفضائية :

الجداء المتجهي - تطبيقات

- √ تعريف الجداء المتجهي
- ◄ انعدام الجداء المتجهي واستقامية متجهتين
- √ خاصيات
- √ المعلم المباشر
- √ احداثيات الجداء المتجهي لمتجهتين
- √ تطبيقات الجداء المتجهي :
  - معادلة مستوى معرف بثلاث نقط
  - مسافة نقطة عن مستقيم
  - مساحة مثلث
  - موجهة تقاطع مستويين

توجيه الفضاء- توجيه المستوى

ليكن $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلما للفضاء أي النقط O,I,J,K بحيث :
$\vec{i} = \overrightarrow{OI}, \vec{j} = \overrightarrow{OJ}, \vec{k} = \overrightarrow{OK}$ نقط غير مستوائية
رجل امبير للمعلم $\mathcal{R}$ هو رجل خيالي راسه في K قدماه في O وينظر الى I

إذا كان J على يسار هدا الرجل فإن المعلم يكون مباشراً او موجباً

إدا كان المعلم مباشر فان الاساس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مباشر

الفضاء $(\mathcal{E})$ موجه إذا كان منسوباً إلى معلم مباشر

ملحوظة :
يمكن إنشاء معلم مباشر $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ بحيث $\vec{i}, \vec{j}$ موجهتين لمستوى
وتوجيه المستوى بتوجيه منظمية عليه

تعريف الجداء المتجهي :

ليكن $\vec{u} = \overrightarrow{OA}, \vec{v} = \overrightarrow{OB}$ متجهتين من الفضاء المتجهي
الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بهذا الترتيب هو المتجهة
$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$
المعرفة بمايلي:
$\vec{w} = \overrightarrow{OC}$

1. اذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان فان $\vec{0} = \vec{w}$
2. اذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فان المتجهة $\vec{w}$ تحقق
   1. $(OC) \perp (OA)$ و $(OB) \perp (OC)$
   2. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ اساس مباشر
   3. $OC = OA \times OB \times |\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})|$

خاصيات الجداء المتجهي

خاصية

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}_3$$

- $$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$
- $$\alpha\beta(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \wedge (\beta\vec{v})$$
- $$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

ملحوظة :

اذا كان $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ اساس متعامد ممنظم ومباشر فإن :

$$\begin{array}{c|c} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} & \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} & \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} & \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \end{array}$$

تطبيق : الصيغة التحليلية للجداء المتجهي في م.م.م.م I

تحديد احداثيات : $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \vec{v} \wedge \vec{u}$ في معلم متعامد ممنظم مباشر
$\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

تطبيق : الصيغة التحليلية للجداء المتجهي في م.م.م.م II

$$
\begin{aligned}
\vec{u}\wedge\vec{v} =& (u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k})\wedge(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k})\\
=&\ \overbrace{u_1\vec{i}\wedge v_1\vec{i}}^{\vec{0}}+\overbrace{u_1\vec{i}\wedge v_2\vec{j}}^{u_1v_2\vec{k}}+\overbrace{u_1\vec{i}\wedge v_3\vec{k}}^{-u_1v_3\vec{j}}+\\
&+\overbrace{u_2\vec{j}\wedge v_1\vec{i}}^{-u_2v_1\vec{k}}+\overbrace{u_2\vec{j}\wedge v_2\vec{j}}^{\vec{0}}+\overbrace{u_2\vec{j}\wedge v_3\vec{k}}^{u_2v_3\vec{i}}+\\
&+\overbrace{u_3\vec{k}\wedge v_1\vec{i}}^{u_3v_1\vec{j}}+\overbrace{u_3\vec{k}\wedge v_2\vec{j}}^{-u_3v_2\vec{i}}+\overbrace{u_3\vec{k}\wedge v_3\vec{k}}^{\vec{0}}\\
=&(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}+(3v_1-u_1v_3)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}\\
=&\begin{vmatrix} u_2 & v_2\\ u_3 & v_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} u_1 & v_1\\ u_3 & v_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{vmatrix}\vec{k}\\
=&\begin{pmatrix} u_2v_3-u_3v_2\\ u_3v_1-u_1v_3\\ u_1v_2-u_2v_1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

احداثيات الجداء المتجهي في م.م.م.م.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

مثال :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}$$

حيث

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{\begin{matrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}} \\ 5 \quad 6 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = 3 \times 6 - 5 \times 4 \qquad M_2 = -(1 \times 6 - 5 \times 2) \qquad M_3 = 1 \times 4 - 3 \times 2$$

$$M_1 = -2 \qquad M_2 = 4 \qquad M_3 = -2$$

$$\vec{u}(-2; 4; -2)$$

تمرين 1

أحسب $\vec{v} \wedge \vec{u}$ حيث $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\2\\5\end{pmatrix}$ انقر هنا لتصحيح التمرين

خاصية

خاصية

متجهتان مستقيمتان يكافئ جدائهما المتجهي منعدم
بالرموز لدينا :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} = k \times \vec{v} \quad ou \quad \vec{v} = \vec{0}$$

تمرين 2

$A\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ و $C\begin{pmatrix}-2\\1\\6\end{pmatrix}$

هل النقط A,B,C مستقيمية ؟

انقر هنا لتصحيح التمرين

معادلة مستوى معرف بثلاث نقط

طريقة1

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

$$M(x, y, z) \in (ABC) \iff \overrightarrow{AM} \times (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

طريقة2

متجهة منظمية تحدد شكل معادلة المستوى ونقطة منه تحدد العدد الثابت

تمرين تطبيقي

تمرين 3

الفضاء منسوب ل م.م.م.م ونعتبر النقط $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$

① حدد احداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

② استنتج ان النقط غير مستقيمية

③ تحقق ان معادلة المستوى (ABC) هي : (ABC): x+y+z=1

انقر هنا لتصحيح التمرين

مسافة نقطة عن مستقيم

مسافة نقطة عن مستقيم هي المسافة الدنوية التي تفصل هذه النقطة عن أية نقطة من المستقيم

$d(M,\mathcal{D}) = inf\{MM', M' \in \mathcal{D}\}$

خاصية

① (i) $d(M,\mathcal{D}) = MH$ مع $H = proj_{\perp,\mathcal{D}}(M)$ المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم $\mathcal{D}$

② (ii) $d(M,\mathcal{D}) = \dfrac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}$ حيث $\mathcal{D}(A,\overrightarrow{v})$

ملاحظة

ليكن $\mathcal{P}$ المعرف بالنقط A, B, C. لدينا :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$

برهان.

لان المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) $\square$

ملاحظة

ليكن $\mathcal{P}$ المعرف بالنقط A, B, C. لدينا :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}$$

برهان.

لان المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) $\square$

تمرين تطبيقي

تمرين 4

الفضاء منسوب ل م.م.م.م ونعتبر النقط $A(0,-1,1), B(1,1,-2), C(-2,1,6)$
احسب مسافة النقطة B عن المستقيم (AC)

انقر هنا لتصحيح التمرين

مساحة مثلث

خاصية

ABC هي مساحة المثلث $S_{ABC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$

ملحوظة

ABDC هي مساحة متوازي الاضلاع $S = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

صيغتا $\cos$ و $\sin$

خاصية

$$\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\|u\|\|v\|} \quad \text{(i)}$$

$$|\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| = \frac{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|}{\|u\|\|v\|} \quad \text{(ii)}$$

موجهة تقاطع مستويين

خاصية

$\vec{n} \wedge \vec{n'}$ موجهة لمستقيم تقاطع المستويين اللذين منظميتهما هما $\vec{n}$ و $\vec{n'}$

مثال : حدد موجهة تقاطع المستويين (D_1) و (D_2) بحيث

$$(D_1) : 2x - y + 2z - 3 = 0$$
$$(D_2) : 3x + y - 4z + 1 = 0$$

الحل :

$$(2; -1; 2) \wedge (3; 1; -4) = (2; 14; 5)$$

موجهة تقاطع مستويين

خاصية

$\vec{n} \wedge \vec{n'}$ موجهة لمستقيم تقاطع المستويين اللذين منظميتهما هما $\vec{n}$ و $\vec{n'}$

مثال : حدد موجهة تقاطع المستويين (D_1) و (D_2) بحيث

$$(D_1) : 2x - y + 2z - 3 = 0$$
$$(D_2) : 3x + y - 4z + 1 = 0$$

الحل :

$$(2; -1; 2) \wedge (3; 1; -4) = (2; 14; 5)$$

النهاية

نهاية الدرس

انتهى الدرس و فيما يلي حلول التمارين المدرجة فيه

حل التمرين

حل التمرين

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

انقر هنا للرجوع للتمرين

الرجوع للتمرين

حل التمرين

حل التمرين

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\2\\5\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}16\\1\\6\end{pmatrix}\neq\vec{0}$$

اذن المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيميتان ومنه النقط A,B,C غير مستقيمية

انقر هنا للرجوع للتمرين

الرجوع للتمرين

حل التمرين

①

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$
$$= +\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

② $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0} \iff$ النقط A,B,C غيرمستقيمية

الرجوع للتمرين | تتمة حل التمرين

حل التمرين

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in (ABC) &\iff \overrightarrow{AM} \times (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff x - 1 + y + z = 0 \\ (ABC) : x + y + z = 1 \end{aligned}$$

الطريقة الثانية | الرجوع للتمرين

الطريقة التانية

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ منظمية على المستوى (ABC)

اذن معادلة المستوى تكتب على شكل $(ABC) : x + y + z + d = 0$

وبمان $A \in (ABC)$ وبتعويض احداثيات A في هذه المعادلة نحصل على

$1 + 0 + 0 + d = 0$ أي $d = -1$

ومنه معادلة المستوى هي :

$(ABC) : x + y + z - 1 = 0$

الرجوع للتمرين

حل التمرين

① لدينا

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

②

$$d(B,(AC)) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\sqrt{16^2 + 1^2 + 6^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 5^2}} = \sqrt{\frac{293}{33}}$$

انقر هنا للرجوع للتمرين