A számításelmélet alapjai I. (Nyolcadik gyakorlat)

Dr. Lázár Katalin Anna

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C.
e-mail: lazarkati@elte.hu

2024. április 9.

Tematika

- Környezetfüggetlen grammatikák és nyelvek. Levezetési fa.
- Az aktív/nem aktív (inaktív) nemterminális, az elérhető/nem elérhető nemterminális, a hasznos/nem hasznos nemterminális fogalma. A redukált környezetfüggetlen grammatika fogalma
- ε-mentes grammatikák. A környezetfüggetlen grammatikák Chomsky normálformája.

Levezetési fa

Példa 1

Legyen $G = (\{S\}, \{a\}, \{S \to SS, S \to a\}, S)$.

- Igazoljuk, hogy G nem egyértelmű!
- Határozzuk meg $L(G)$-t!

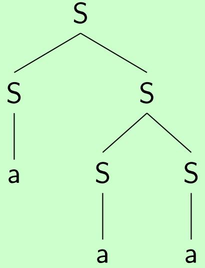
Levezetési fa

Példa 1

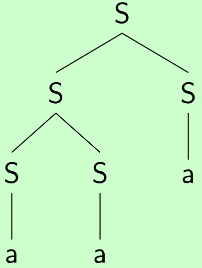
- Az alábbi t_1 és t_2 derivációs fákra teljesül, hogy $t_1 \neq t_2$ és $fr(t_1) = fr(t_2) = aaa$.
- $L(G) = a^+$.

Levezetési fa

Példa 1



t_1



t_2

Levezetési fa

Példa 2

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A\}$, $T = \{a, b, c\}$ és $P = \{S \to abSba, S \to A, A \to cAc, A \to cc\}$.

- Bizonyítsuk be, hogy a $w = (ab)^2c^2(ba)^2 \in L(G)$!
- Adjuk meg $L(G)$-t!

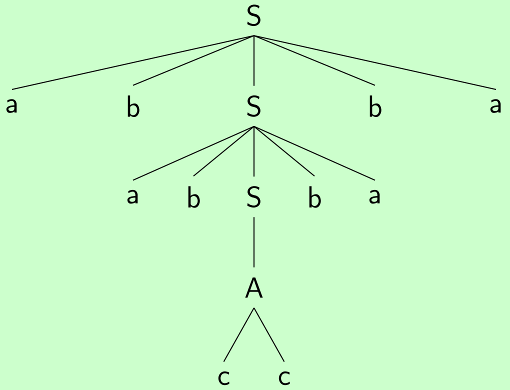
Levezetési fa

Példa 2

- $w \in L(G)$, mert S-ből az alábbi levezetés adható meg w-hez: $S \Longrightarrow abSba \Longrightarrow (ab)^2S(ba)^2 \Longrightarrow (ab)^2A(ba)^2 \Longrightarrow (ab)^2c^2(ba)^2$.
- Másik megoldás: $w \in L(G)$, mivel az alábbi t G szerinti S gyökerű derivációs fára teljesül, hogy $fr(t) = w$.
- $L(G) = \{(ab)^n(cc)^m(ba)^n \mid n \geq 0, m \geq 1\}$.

Levezetési fa

Példa 2



Levezetési fa

Példa 3

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$ és $P = \{S \to ABS, S \to AB, A \to aA, A \to a, B \to bA\}$. Az alábbi szavak közül melyek vannak $L(G)$-ben:

- $aabaab$,
- $aaaaba$,
- $aabbaa$,
- $abaaba$?

Indokoljuk meg az állítást!

Levezetési fa

Példa 3

- Nincs $L(G)$-ben, mert G nem generál b-vel befejeződő szót.
- Létezik S gyökerű derivációs fa a szóhoz, így $L(G)$-ben van.
- Nincs $L(G)$-ben, mert G nem generál olyan szót, amelyben b valamely előfordulását nem az a követi.
- Létezik S gyökerű derivációs fa a szóhoz, így $L(G)$-ben van.

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 4

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, X, Y, Z\}$, $T = \{a, b\}$, ahol $P = \{S \to YXX, S \to ab, X \to YY, X \to bY, Y \to aa, Y \to aX, Z \to aSa, Z \to b\}$. Határozzuk meg G hasznos nemterminálisainak halmazát!

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 4

Megjegyzés

- Az A nemterminális hasznos a G grammatikában, ha aktív és elérhető.
- Akkor mondjuk, hogy A aktív, ha G-ben levezethető belőle terminális szó, azaz $A \Longrightarrow^* v$ valamely $v \in T^*$-ra.
- Akkor mondjuk, hogy A G-ben elérhető, ha létezik G-ben $S \Longrightarrow^* uAv$ levezetés, ahol $u, v \in (N \cup T)^*$.

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 4

Megjegyzés

- Először az aktív nemterminálisok halmazát határozzuk meg az alábbi halmazsorozat segítségével: $A_1 = \{X \mid X \to u \in P, u \in T^*\}$, $A_{i+1} = A_i \cup \{X \mid X \to w \in P, w \in (T \cup A_i)^*\}, i = 1, 2, \ldots$.
- Ezek a halmazok nemcsökkenő hierarchiát alkotnak a tartalmazásra nézve. Mivel a nemterminálisok száma véges, létezik olyan k szám, hogy $A_k = A_l$ teljesül minden $l \geq k$-ra.

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 4

A halmazsorozat: $A_1 = \{S, Y, Z\}$, $A_2 = A_1 \cup \{X\}$, vagyis az aktív nemterminálisok halmaza: $\{S, X, Y, Z\}$.

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 4

Megjegyzés

- Ezután az elérhető nemterminálisokat határozzuk meg a következő halmazsorozat segítségével: $R_1 = \{S\}$, $R_{i+1} = R_i \cup \{\, Y \mid X \to uYw \in P,\ X \in R_i, u, w \in (N \cup T)^*\}, i = 1, 2, \ldots$. Az előzőekhez hasonlóan létezik olyan m szám, hogy $R_m = R_l$ minden $l \geq m$ esetben.

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 4

A halmazsorozat: $R_1 = \{S\}$, $R_2 = R_1 \cup \{X, Y\}$ és $R_3 = R_2$, vagyis az elérhető nemterminálisok halmaza: $\{S, X, Y\}$.

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 4

Az $A_k \cap R_m$ halmaz G aktív és elérhető, azaz hasznos nemterminálisainak halmaza. A hasznos nemterminálisok halmaza tehát: $\{S, X, Y\}$.

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 5

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B, C, D\}$, $T = \{a, b, c\}$, ahol $P = \{S \to bCB, S \to bBB, S \to abD, A \to ADb, A \to bD, C \to bBc, C \to aCB, D \to DD, D \to Cb, D \to \varepsilon\}$. Adjunk meg olyan G-vel ekvivalens G' grammatikát, amelynek minden szimbóluma hasznos! Adjuk meg $L(G)$-t!

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 5

Az aktív nemterminálisok halmazának meghatározása: $A_1 = \{D\}$, $A_2 = A_1 \cup \{A, S\}$, vagyis az aktív nemterminálisok halmaza: $\{S, A, D\}$.

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 5

Az elérhető nemterminálisok halmazának meghatározása: $R_1 = \{S\}$, $R_2 = R_1 \cup \{B, C, D\}$ és $R_3 = R_2$, vagyis az elérhető nemterminálisok halmaza: $\{S, B, C, D\}$.

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 5

A hasznos nemterminálisok halmazának meghatározása ($A_k \cap R_m$ halmaz): $\{S, D\}$.

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 5

G-vel ekvivalens G' grammatika, amelynek minden szimbóluma hasznos:
$G' = (N', T', P', S)$, ahol $N' = \{S, D\}$, $T' = \{a, b\}$, ahol
$P' = \{S \to abD, D \to DD, D \to \varepsilon\}$.

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 5

$L(G) = \{ab\}$.

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 6

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B, C, D\}$, $T = \{a, b\}$, ahol $P = \{S \to B, A \to AbB, A \to BA, A \to b, B \to aAB, B \to \varepsilon, C \to DC, C \to \varepsilon, D \to CD, D \to \varepsilon\}$.

- Határozzuk meg G aktív, elérhető és hasznos nemterminálisainak halmazát!
- Adjunk G-vel ekvivalens és csak hasznos szimbólumokat tartalmazó grammatikát!

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 6

- Az aktív nemterminálisok halmazának meghatározása során kapott halmazsorozat: $A_1 = \{A, B, C, D\}$, $A_2 = A_1 \cup \{S\}$, vagyis az aktív nemterminálisok halmaza: $\{S, A, B, C, D\}$.
- Az elérhető nemterminálisokat a következő halmazsorozat segítségével határozzuk meg: $R_1 = \{S\}$, $R_2 = R_1 \cup \{B\}$, $R_3 = R_2 \cup \{A\}$ és $R_4 = R_3 = R$. Tehát az elérhető nemterminálisok halmaza: $\{S, A, B\}$.

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 6

- A hasznos nemterminálisok halmaza tehát: $\{S, A, B\}$.
- A G-vel ekvivalens és csak hasznos szimbólumokat tartalmazó grammatika: $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$, ahol $P = \{S \to B, A \to AbB, A \to BA, A \to b, B \to aAB, B \to \varepsilon\}$.

Redukált környezetfüggetlen grammatika

Példa 7

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{a, b\}$, ahol $P = \{S \to SAAC, S \to AAA, A \to AB, A \to ab, B \to b, B \to CC, C \to CA\}$.
Adjunk meg olyan G-vel ekvivalens G' grammatikát, amely redukált (nem redundáns)!

Redukált környezetfüggetlen grammatika

Példa 7

Megjegyzés

Egy környezetfüggetlen grammatika redukált (nem redundáns), ha minden nemterminálisa aktív és elérhető.

Redukált környezetfüggetlen grammatika

Példa 7

Az aktív nemterminálisok halmazának meghatározása:
$A_1 = \{A, B\}$, $A_2 = \{S, A, B\}$ és $A_3 = \{S, A, B\}$.

Redukált környezetfüggetlen grammatika

Példa 7

Az elérhető nemterminálisok halmazának meghatározása: $R_1 = \{S\}$, $R_2 = \{S, A, C\}$, $R_3 = \{S, A, B, C\}$.

Redukált környezetfüggetlen grammatika

Példa 7

- Az aktív és elérhető nemterminálisok halmaza tehát: $A_3 \cap R_3 = \{S, A, B\}$.
- Elimináljuk az összes nemterminálist, amely nincs benne az $A_3 \cap R_3$ halmazban, a megfelelő szabályokkal együtt.
- Ekkor $P' = \{S \to AAA, A \to AB, A \to ab, B \to b\}$.
- Nem szükséges megismételnünk az eljárást, mivel P' minden nemterminálisa aktív és elérhető.
- A $G' = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \to AAA, A \to AB, A \to ab, B \to b\}, S)$ ugyanazt a nyelvet generálja, mint G, tehát G redukált.

ε-mentes grammatika

Példa 8

Legyen $G = (N, T, P, S)$ környezetfüggetlen grammatika, ahol $N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{a, b, c\}$ és $P = \{S \to cBBA, S \to cAc, S \to c, A \to bB, A \to a, A \to \varepsilon, B \to aB, B \to b, C \to ccc\}$. Konstruáljunk egy G' környezetfüggetlen grammatikát, úgy, hogy $L(G) - \{\varepsilon\} = L(G')$ legyen! (G' G-vel ekvivalens ε-mentes környezetfüggetlen grammatika.)

ε-mentes grammatika

Példa 8

Megjegyzés

- P'-t a következőképpen konstruáljuk meg: minden $X \to u$ szabály benne van P'-ben, akkor és csak akkor, ha $u \neq \varepsilon$ és van olyan v szó, $v \in (N \cup T)^*$, hogy $X \to v \in P$ és u-t v-ből úgy kapjuk meg, hogy U-beli nemterminálisok valahány, azaz nulla vagy több előfordulását elhagyjuk v-ből.
- Ekkor látható, hogy $L(G') \subseteq L(G) - \{\varepsilon\}$, hiszen minden $X \to u$ szabály alkalmazása megfelel az $X \to v$ szabály alkalmazásának, amelyet valahány $Z \Longrightarrow_G^* \varepsilon$ levezetés alkalmazásával kombinálunk, ahol $Z \in U$ és Z előfordul u-ban.

ε-mentes grammatika

Példa 8

Megjegyzés

- Megfordítva, ha $S \Longrightarrow_G^* u$ és $u \neq \varepsilon$, akkor $S \Longrightarrow_{G'}^* u$, hiszen az $X \to \varepsilon$-típusú szabályok alkalmazása elkerülhető P' megfelelő szabályának alkalmazásával.
- Ezek alapján $L(G') = L(G) - \{\varepsilon\}$.
- Ha $\varepsilon \in L(G)$, akkor vesszük a $G_1 = (N \cup \{S_1\}, T, P' \cup \{S_1 \to \varepsilon, S_1 \to S\}, S_1)$ grammatikát, amely az $L(G)$ nyelvet generálja.

ε-mentes grammatika

Példa 8

Megjegyzés

- U meghatározása: definiáljuk az $U_i \subseteq N$ halmazokat a következőképpen: $U_1 = \{X \mid X \to \varepsilon \in P\}$, $U_{i+1} = U_i \cup \{X \mid X \to u \in P \text{ és } u \in U_i^*\}, i \geq 1$.
- Nyilvánvaló, hogy az U_i sorozat, $i = 1, 2, \ldots$ a tartalmazásra nézve hierarchiát alkot és van olyan k index, hogy $U_k = U_{k+1}$ és így $U_k = U_j$ minden $j \geq k$-ra. Legyen $U = U_k$.
- Ekkor azonnal látható, hogy $X \Longrightarrow_G^* \varepsilon$ akkor és csak akkor, ha $X \in U$. Vagyis, $\varepsilon \in L(G)$ akkor és csak akkor, ha $S \in U$.

ε-mentes grammatika

Példa 8

$U_1 = \{A\}$, $U_1 = U$, $P' = (P \cup \{S \to cBB, S \to cc\}) - \{A \to \varepsilon\}$.

ε-mentes grammatika

Példa 9

Legyen $G = (N, T, P, S)$ környezetfüggetlen grammatika, ahol
$N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{b\}$ és
$P = \{S \to ABC, A \to BB, A \to \varepsilon, B \to CC, B \to A, C \to AA, C \to b\}$.
Konstruáljunk egy G' környezetfüggetlen grammatikát, úgy, hogy
$L(G) - \{\varepsilon\} = L(G')$ legyen!

ε-mentes grammatika

Példa 9

$U_1 = \{A\}$, $U_2 = U_1 \cup \{B, C\}$, $U_3 = U_2 \cup \{S\}$, és $U_4 = U_3 = U$,
$P' = (P \cup \{S \to AB, S \to AC, S \to BC, S \to A, S \to B, S \to C, A \to B, B \to C, C \to A\}) - \{A \to \varepsilon\}$.

ε-mentes grammatika

Példa 10

Legyen $G = (N, T, P, S)$ környezetfüggetlen grammatika, ahol $N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{a, b, c\}$ és $P = \{S \to ABB, S \to b, A \to cC, A \to \varepsilon, A \to B, A \to a, B \to ab, B \to A, C \to c\}$. Határozzuk meg G azon nemterminálisainak halmazát, amelyekből ε levezethető!

ε-mentes grammatika

Példa 10

$U_1 = \{A\}$, $U_2 = \{A\} \cup \{B\}$, $U_3 = \{A, B\} \cup \{S\}$, valamint $U = U_3$.

Chomsky-normálforma

Példa 11

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{a, b\}$, ahol $P = \{S \to AB, S \to b, A \to C, A \to aB, B \to ab, B \to A, C \to bSb\}$ (G ε-mentes környezetfüggetlen grammatika). Konstruáljunk meg G-ből kiindulva egy olyan Chomsky normálformájú G' környezetfüggetlen grammatikát, amelyre $L(G') = L(G)$ teljesül! (Hozzuk Chomsky normálformára G grammatikát!)

Chomsky-normálforma

Példa 11

Megjegyzés

A Chomsky normálformára hozás lépései:

- Feltesszük, hogy a P szabályhalmaz elemei terminális szimbólumokat csak az $X \to a$, $a \in T$ alakú szabályokban tartalmaznak.
- Ha ez nem így lenne, akkor ún. álterminálisok (új nemterminálisok) bevezetésével létrehozunk egy G–vel ekvivalens grammatikát, amelynek a szabályai ilyen alakúak.

Chomsky-normálforma

Példa 11

Megjegyzés

- Ekkor minden további szabály $X \to u$ alakú, ahol $u \in N^*$.
- Ezután ún. hosszredukciót hajtunk végre, vagyis minden $X \to Y_1 Y_2 \dots Y_k$, $k \geq 3$ alakú szabályt, ahol $X, Y_1, \dots, Y_k \in N$ helyettesítünk egy $X \to Y_1 Z_1, Z_1 \to Y_2 Z_2, \dots, Z_{k-2} \to Y_{k-1} Y_k$ szabályhalmazzal, ahol $Z_1, \dots, Z_{k-2}$ új nemterminális szimbólumok.

Chomsky-normálforma

Példa 11

Megjegyzés

- Ekkor egy $G_1 = (N', T, P_1, S)$ grammatikát kapunk, ahol P_1 olyan szabályokból áll, amelyek alakja az alábbi három típus valamelyike: $X \to a$, $X \in N'$, $a \in T$, $X \to Y$, $X, Y \in N'$, $X \to YZ$, $X, Y, Z \in N'$.
- Az N' halmaz N elemeiből, valamint azokból az új nemterminálisokból áll, amelyeket külön-külön bevezettünk P azon szabályaihoz, amelyek jobboldalának hosszát csökkentettük.

Chomsky-normálforma

Példa 11

Megjegyzés

- Ezután elimináljuk a láncszabályokat (az $X \to Y$ alakú szabályokat, ahol X és Y nemterminálisok).
- Ezért minden egyes $X \in N'$ nemterminálisra definiáljuk az $U_i(X)$ halmazokat: $U_1(X) = \{X\}$,
  $U_{i+1}(X) = U_i(X) \cup \{Y \mid Y \to Z \in P_1, Z \in U_i(X)\}, i = 1, 2, \ldots$.
- Nyilvánvaló, hogy van olyan k természetes szám, hogy $U_k(X) = U_{k+1}(X)$, és így $U_k(X) = U_l(X)$ teljesül minden l-re, ahol $l \geq k$. Legyen $U_k(X) = U(X)$.

Chomsky-normálforma

Példa 11

Megjegyzés

- Definiáljuk P'-t a következőképpen:
  1. $X \to a \in P'$ akkor és csak akkor, ha van olyan $A \in N'$, ahol $X \in U(A)$ és $A \to a \in P_1$,
  2. $X \to YZ$ akkor és csak akkor, ha van olyan $A \in N'$, ahol $X \in U(A)$ és $A \to YZ \in P_1$.

Chomsky-normálforma

Példa 11

Megjegyzés

- Látható, hogy $X \to a \in P'$ akkor és csak akkor, ha $X \Longrightarrow_{G_1}^{*} a$ és $X \to YZ \in P'$ akkor és csak akkor, ha $X \Longrightarrow_{G_1}^{*} A \Longrightarrow_{G_1}^{*} YZ$ teljesül valamely A-ra.

Chomsky-normálforma

Példa 11

- Az egyszerűség kedvéért csak a szabályhalmazokat fogjuk megadni. Először álterminálisok segítségével átalakítjuk a szabályhalmazt, hogy terminálisokat csak az $X \to a$ alakú szabályokban tartalmazzon ($X \in N, a \in T$).
- Ekkor P-ből a $P'' = \{S \to AB, S \to b, A \to C, A \to A'B, A' \to a, B \to A'B', B' \to b, B \to A, C \to B'SB'\}$ szabályhalmazt kapjuk.

Chomsky-normálforma

Példa 11

- Ezután hosszredukciót hajtunk végre. Ez csak a $C \to B'SB'$ szabályt érinti. Az új szabályhalmaz:
- $P_1 = \{S \to AB, S \to b, A \to C, A \to A'B, A' \to a, B \to A'B', B' \to b, B \to A, C \to B'S', S' \to SB'\}$ lesz.

Chomsky-normálforma

Példa 11

- Végül elimináljuk a láncszabályokat: $A \to C$, $B \to A$. Mivel $B \Longrightarrow A \Longrightarrow C$, ezért $U(C) = \{C, A, B\}$, $U(A) = \{A, B\}$.
- Az új szabályhalmaz tehát: $P' = \{S \to AB, S \to b, A \to A'B, B \to A'B, A' \to a, B \to A'B', B' \to b, C \to B'S', A \to B'S', B \to B'S', S' \to SB'\}$ lesz.

Chomsky-normálforma

Példa 12

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{a, b, c\}$, ahol $P = \{S \to cBBA, S \to cBc, S \to AC, S \to c, A \to bA, A \to a, B \to bB, B \to b, C \to ccc\}$ (G ε-mentes környezetfüggetlen grammatika). Konstruáljunk meg G–ből kiindulva egy olyan Chomsky normálformájú G' környezetfüggetlen grammatikát, amelyre $L(G') = L(G)$ teljesül!

Chomsky-normálforma

Példa 12

- Az egyszerűség kedvéért csak a szabályhalmazokat fogjuk megadni. Először álterminálisok segítségével átalakítjuk a szabályhalmazt, hogy terminálisokat csak az $X \to a$ alakú szabályokban tartalmazzon ($X \in N, a \in T$).
- Ekkor P-ből a $P'' = \{S \to C'BBA, S \to C'BC', S \to AC, S \to c, A \to B'A, A \to a, B \to B'B, B \to b, C \to C'C'C', B' \to b, C' \to c\}$ szabályhalmazt kapjuk.

Chomsky-normálforma

Példa 12

- Ezután hosszredukciót hajtunk végre. Ez érinti az $S \to C'BBA, S \to C'BC'$ és $C \to C'C'C'$ szabályokat.
- Az új szabályhalmaz: $P_1 = \{S \to C'Z, Z \to BZ', Z' \to BA, S \to C'X', X' \to BC', S \to AC, S \to c, A \to B'A, A \to a, B \to B'B, B \to b, C \to C'Y', Y' \to C'C', B' \to b, C' \to c\}$ lesz.
- Látható, hogy P_1 nem tartalmaz láncszabályokat, vagyis az új grammatika Chomsky normálformájú.

Chomsky-normálforma

Példa 13

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{a, b, c\}$, ahol $P = \{S \to aABC, S \to a, A \to aA, A \to B, A \to a, B \to bcB, B \to bc, B \to C, C \to cC, C \to c\}$ (G ε-mentes környezetfüggetlen grammatika). Konstruáljunk meg G-ből kiindulva egy olyan Chomsky normálformájú G' környezetfüggetlen grammatikát, amelyre $L(G') = L(G)$ teljesül! (Hozzuk Chomsky normálformára G grammatikát!)

Chomsky-normálforma

Példa 13

- Az egyszerűség kedvéért csak a szabályhalmazokat fogjuk megadni. Először álterminálisok segítségével átalakítjuk a szabályhalmazt, hogy terminálisokat csak az $X \to a$ alakú szabályokban tartalmazzon ($X \in N, a \in T$).
- Ekkor P-ből a $P'' = \{S \to A'ABC, S \to a, A \to A'A, A \to B, A \to a, B \to B'C'B, B \to B'C', B \to C, C \to C'C, C \to c, A' \to a, B' \to b, C' \to c\}$ szabályhalmazt kapjuk.

Chomsky-normálforma

Példa 13

- Ezután hosszredukciót hajtunk végre. Ez csak az $S \to A'ABC$ és $B \to B'C'B$ szabályokat érinti.
- Az új szabályhalmaz: $P_1 = \{S \to A'X, X \to AY, Y \to BC, S \to a, A \to A'A, A \to B, A \to a, B \to B'Z, Z \to C'B, B \to B'C', B \to C, C \to C'C, C \to c, A' \to a, B' \to b, C' \to c\}$ lesz.

Chomsky-normálforma

Példa 13

- Végül elimináljuk a láncszabályokat: $A \to B$, $B \to C$.
- Az új szabályhalmaz tehát:
  $P' = \{S \to A'X, X \to AY, Y \to BC, S \to a, A \to A'A, A \to a, B \to B'Z, A \to B'Z, Z \to C'B, B \to B'C', A \to B'C', C \to C'C, A \to C'C, B \to C'C, C \to c, A \to c, B \to c, A' \to a, B' \to b, C' \to c\}$ lesz.

Chomsky-normálforma

Példa 14

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b, c\}$, ahol $P = \{S \to BB, A \to S, A \to aacc, A \to b, B \to AacaA, B \to A\}$ (G ε-mentes környezetfüggetlen grammatika). Konstruáljunk meg G-ből kiindulva egy olyan Chomsky normálformájú G' környezetfüggetlen grammatikát, amelyre $L(G') = L(G)$ teljesül! (Hozzuk Chomsky normálformára a G grammatikát!)

Chomsky-normálforma

Példa 14

- Az egyszerűség kedvéért csak a szabályhalmazokat fogjuk megadni. Először álterminálisok segítségével átalakítjuk a szabályhalmazt, hogy terminálisokat csak az $X \to a$ alakú szabályokban tartalmazzon ($X \in N, a \in T$).
- Ekkor P-ből a $P'' = \{S \to BB, A \to S, A \to A'A'C'C', A \to b, B \to AA'C'A'A, B \to A, A' \to a, C' \to c\}$ szabályhalmazt kapjuk.

Chomsky-normálforma

Példa 14

- Ezután hosszredukciót hajtunk végre. Ez csak az $A \to A'A'C'C'$ és $B \to AA'C'A'A$ szabályokat érinti.
- Az új szabályhalmaz: $P_1 = \{S \to BB, A \to S, A \to A'X, X \to A'Y, Y \to C'C', A \to b, B \to AZ, Z \to A'V, V \to C'W, W \to A'A, B \to A, A' \to a, C' \to c\}$ lesz.

Chomsky-normálforma

Példa 14

- Végül elimináljuk a láncszabályokat: $A \to S$, $B \to A$.
- Az új szabályhalmaz tehát: $P' = \{S \to BB, A \to BB, A \to A'X, X \to A'Y, Y \to C'C', A \to b, B \to b, B \to BB, B \to A'X, B \to AZ, Z \to A'V, V \to C'W, W \to A'A, A' \to a, C' \to c\}$ lesz.

Láncszabálymentes grammatika

Példa 15

Legyen $G = (N, T, P, S)$ környezetfüggetlen grammatika, ahol
$N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{a, b\}$ és
$P = \{S \to ASB, S \to B, A \to Aa, A \to B, B \to b, B \to C, C \to a\}$.
Adjunk meg egy G-vel ekvivalens, láncszabálymentes grammatikát!

Láncszabálymentes grammatika

Példa 15

A G-vel ekvivalens, láncszabálymentes grammatika szabályhalmaza:
$P = \{S \to ASB, S \to b, S \to a, A \to Aa, A \to b, A \to a, B \to b, B \to a, C \to a\}$.