A számításelmélet alapjai I. (Tizenegyedik gyakorlat)

Dr. Lázár Katalin Anna

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C.
e-mail: lazarkati@elte.hu

2024. április 30.

Tematika

- 0-típusú és környezetfüggő grammatikák. A hossz-nemcsökkentő grammatikák fogalma.
- A Kuroda normálforma: hossz-nemcsökkentő grammatikák Kuroda normálformája. ε-mentes környezetfüggő grammatikák és a Kuroda normálforma.

0-típusú és környezetfüggő grammatikák

Példa 1

Konstruáljunk

- 0-típusú,
- környezetfüggő (1-típusú)

grammatikát az $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ nyelvhez!

0-típusú és környezetfüggő grammatikák

Példa 1

- 0-típusú grammatika: $G = (\{S, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$, ahol $P = \{S \to aSBc, S \to \varepsilon, cB \to Bc, aB \to ab, bB \to bb\}$.
- környezetfüggő grammatika: $G = (\{S, S_0, B, C, X, Y\}, \{a, b, c\}, P, S_0)$, ahol $P = \{S_0 \to S, S_0 \to \varepsilon, S \to aSBC, S \to aBC, CB \to CX, CX \to YX, YX \to BX, BX \to BC, aB \to ab, bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$.

A hossz-nemcsökkentő grammatikák fogalma

Példa 2

Hossz-nemcsökkentő grammatikák-e a következők?

- $G = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, \{S \to SAS, SA \to B0B0S, S \to 1, A \to S0S, B0B0 \to 0S0S\}, S)$
- $G = (\{S, B\}, \{a, b, c\}, \{S \to abc, S \to aSBc, cB \to Bc, bB \to bb\}, S)$
- $G = (\{S, A, B\}, \{d, e\}, \{S \to BeBe, BeBe \to dAdA, eB \to dede, Bd \to SAS, A \to ede\}, S)$

A hossz-nemcsökkentő grammatikák fogalma

Példa 2

- Igen, $G = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, \{S \to SAS, SA \to B0B0S, S \to 1, A \to S0S, B0B0 \to 0S0S\}, S)$ hossz-nemcsökkentő grammatika.
- Igen, $G = (\{S, B\}, \{a, b, c\}, \{S \to abc, S \to aSBc, cB \to Bc, bB \to bb\}, S)$ hossz-nemcsökkentő grammatika.
- Igen, $G = (\{S, A, B\}, \{d, e\}, \{S \to BeBe, BeBe \to dAdA, eB \to dede, Bd \to SAS, A \to ede\}, S)$ hossz-nemcsökkentő grammatika.

A hossz-nemcsökkentő grammatikák

Példa 3

Konstruáljunk hossz-nemcsökkentő grammatikát az $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ nyelvhez!

A hossz-nemcsökkentő grammatikák

Példa 3

A hossz-nemcsökkentő grammatika: $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$, ahol $P = \{S \to abc, S \to aAbc, Ab \to bA, Ac \to Bbcc, bB \to Bb, aB \to aaA, aB \to aa\}$.

Hossz-nemcsökkentő grammatikák Kuroda normálformája

Példa 4

Adjuk meg a $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \to SAS, SA \to BaBaS, S \to b, A \to SaS, BaB \to aSaS\}, S)$ hossz-nemcsökkentő grammatikával ekvivalens Kuroda normálformájú grammatikát!

Hossz-nemcsökkentő grammatikák Kuroda normálformája

Példa 4

Megjegyzés

- Egy hossz-nemcsökkentő $G = (N, T, P, S)$ grammatikát Kuroda normálformájúnak mondunk, ha minden egyes szabálya $A \to a$, $A \to B$, $A \to BC$ vagy $AB \to CD$ alakú, ahol $a \in T$ és $A, B, C, D \in N$.
- Ismeretes, hogy minden hossz-nemcsökkentő grammatikához meg tudunk konstruálni egy vele ekvivalens Kuroda normálformájú grammatikát. Legyen $G = (N, T, P, S)$ egy hossz-nemcsökkentő grammatika, és tegyük fel, hogy terminális szimbólumok csak az $A \to a$ alakú szabályokban fordulnak elő, ahol $A \in N, a \in T$.

Hossz-nemcsökkentő grammatikák Kuroda normálformája

Példa 4

Megjegyzés

- Ha $u \to v \in P$, valamint $|u| = 1$ és $|v| > 2$, akkor az $u \to v$-t $A \to BC$ alakú szabályokkal tudjuk helyettesíteni a Chomsky normálformára hozás algoritmusának megfelelően.
- Ha $|u| = |v| = 2$, akkor az $u \to v$ szabály $AB \to CD$ alakú.

Hossz-nemcsökkentő grammatikák Kuroda normálformája

Példa 4

Megjegyzés

- Vagyis elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, ha $|u| \geq 2$ és $|v| > 2$.
- Legyen $u = X_1X_2 \ldots X_m$ és $v = Y_1Y_2 \ldots Y_n$, $2 \leq m < n$, $X_i \in N, 1 \leq i \leq m$ és $Y_j \in N, 1 \leq j \leq n$. Akkor az $X_1X_2 \ldots X_m \to Y_1Y_2 \ldots Y_n$ szabályt helyettesítjük az $X_1X_2 \to Y_1Z_2$, $Z_2X_3 \to Y_2Z_3, \ldots, Z_{m-1}X_m \to Y_{m-1}Z_m$, $Z_m \to Y_mZ_{m+1}$, $Z_{m+1} \to Y_{m+1}Z_{m+2}, \ldots, Z_{n-1} \to Y_{n-1}Y_n$ szabályokkal, ahol $Z_2, \ldots, Z_{n-1}$ új, a szabályhoz bevezetett nemterminálisok. (Minden fenti alakú szabályhoz páronként diszjunkt új nemterminális halmazt vezetünk be.)

Hossz-nemcsökkentő grammatikák Kuroda normálformája

Példa 4

- Az egyszerűség kedvéért csak a szabályhalmazokat fogjuk megadni. Először álterminálisok segítségével átalakítjuk a szabályhalmazt, hogy terminálisokat csak az $A \to a$ alakú szabályokban tartalmazzon ($A \in N, a \in T$). Ekkor P-ből a $P'' = \{S \to SAS, SA \to BA'BA'S, S \to b, A \to SA'S, BA'B \to A'SA'S, A' \to a\}$ szabályhalmazt kapjuk.

Hossz-nemcsökkentő grammatikák Kuroda normálformája

Példa 4

- Ezután hosszredukciót hajtunk végre a Chomsky normálformára hozás algoritmusának megfelelően. Ez csak az $S \rightarrow SAS$ és $A \rightarrow SA'S$ szabályokat érinti. Az új szabályhalmaz: $P_1 = \{S \rightarrow SX', X' \rightarrow AS, SA \rightarrow BA'BA'S, S \rightarrow b, A \rightarrow SY', Y' \rightarrow A'S, BA'B \rightarrow A'SA'S, A' \rightarrow a\}$ lesz.
- Végül átalakítjuk az $u \rightarrow v \in P$, $|u| \geq 2$, $|v| > 2$ alakú szabályokat. Két ilyen szabályunk van: $SA \rightarrow BA'BA'S$ és $BA'B \rightarrow A'SA'S$. Az új szabályhalmaz: $P_2 = \{S \rightarrow SX', X' \rightarrow AS, SA \rightarrow BZ_2, Z_2 \rightarrow A'Z_3, Z_3 \rightarrow BZ_4, Z_4 \rightarrow A'S, S \rightarrow b, A \rightarrow SY', Y' \rightarrow A'S, BA' \rightarrow A'V_2, V_2B \rightarrow SV_3, V_3 \rightarrow A'S, A' \rightarrow a\}$ lesz.

Környezetfüggő grammatikák Kuroda normálforma

Példa 5

Adjuk meg a $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, \{S \to BaB, BaB \to BaBa, A \to SaS, A \to c, B \to AbbA, B \to c\}, S)$ környezetfüggő grammatikával ekvivalens Kuroda normálformájú grammatikát!

Környezetfüggő grammatikák Kuroda normálforma

Példa 5

- Az egyszerűség kedvéért csak a szabályhalmazokat fogjuk megadni. Először álterminálisok segítségével átalakítjuk a szabályhalmazt, hogy terminálisokat csak az $A \to a$ alakú szabályokban tartalmazzon ($A \in N, a \in T$). Ekkor P–ből a $P'' = \{S \to BA'B, BA'B \to BA'BA', A \to SA'S, A \to c, B \to AB'B'A, B \to c, A' \to a, B' \to b\}$ szabályhalmazt kapjuk.
- Ezután hosszredukciót hajtunk végre a Chomsky normálformára hozás algoritmusának megfelelően. Ez csak az $S \to BA'B$, $A \to SA'S$ és $B \to AB'B'A$ szabályokat érinti. Az új szabályhalmaz: $P_1 = \{S \to BX', X' \to A'B, BA'B \to BA'BA', A \to SY', Y' \to A'S, A \to c, B \to AV', V' \to B'W', W' \to B'A, B \to c, A' \to a, B' \to b\}$ lesz.

Környezetfüggő grammatikák Kuroda normálforma

Példa 5

- Végül átalakítjuk az $u \to v \in P$, $|u| \geq 2$, $|v| > 2$ alakú szabályokat. Egyetlen ilyen szabályunk van: $BA'B \to BA'BA'$. Az új szabályhalmaz: $P_2 = \{S \to BX', X' \to A'B, BA' \to BZ_2, Z_2B \to A'Z_3, Z_3 \to BA', A \to SY', Y' \to A'S, A \to c, B \to AV', V' \to B'W', W' \to B'A, B \to c, A' \to a, B' \to b\}$ lesz.