A számításelmélet alapjai I.

3. előadás

előadó: Tichler Krisztián
ktichler@inf.elte.hu

Lineáris grammatikák

Definíció

Egy $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$ környezetfüggetlen grammatikát **lineárisnak** nevezünk, ha minden szabálya vagy

a) $A \to u$, $A \in N, u \in \Sigma^*$ vagy

b) $A \to u_1 B u_2$ alakú, ahol $A, B \in N$ és $u_1, u_2 \in \Sigma^*$.

A G lineáris grammatikát **bal-lineárisnak** nevezzük, ha minden b) alakú szabályában $u_1 = \varepsilon$.

A G lineáris grammatikát **jobb-lineárisnak** mondjuk, ha minden b) alakú szabályában $u_2 = \varepsilon$.

Megjegyzés: A jobb-lineáris grammatika egy másik elnevezés a reguláris (3-típusú) grammatikákra.

Példa:

1. $S \to aSb \mid \varepsilon$	lineáris, de se nem bal-, se nem jobb-lineáris
2. $S \to Saa \mid b$	bal-lineáris
3. $S \to aS \mid bbS \mid c$	jobb-lineáris

Lineáris grammatikák és nyelvek

Definíció

Egy L nyelvet lineárisnak, bal-lineárisnak, illetve jobb-lineárisnak mondunk, ha van olyan G lineáris, bal-lineáris, illetve jobb-lineáris grammatika, amelyre $L = L(G)$ teljesül.

Megjegyzés: A jobb-lineáris nyelvek tehát azonosak a reguláris (3-típusú) nyelvekkel.

Tétel

Minden bal-lineáris grammatika reguláris (3-típusú) nyelvet generál.

Bal- és jobblineáris nyelvek

Bizonyítás: Legyen $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ bal-lineáris grammatika és legyen $N = \{S, A_1, \ldots, A_n\}$.

Feltehetjük, hogy S nem fordul elő egyetlen szabály jobboldalán sem. Ha mégis előfordul, akkor minden előfordulását nevezzünk át S'-re ($S' \notin N \cup \Sigma$) és adjuk hozzá P-hez az $S \to S'$ szabályt.

Megkonstruálunk egy $G' = \langle N, \Sigma, P', S \rangle$ jobb-lineáris grammatikát, amelyre $L(G) = L(G')$ teljesül.

1. $S \to u :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $S \to u \in P$,
2. $S \to uA_k :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $A_k \to u \in P$,
3. $A_j \to uA_k :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $A_k \to A_j u \in P$,
4. $A_j \to u :\in P'$ akkor és csak akkor, ha $S \to A_j u \in P$.

($u \in \Sigma^*$ minden a 4 pontban)

Megmutatjuk, hogy $L(G) = L(G')$.

Bal- és jobblineáris nyelvek

$L(G) \subseteq L(G')$:

Legyen $w \in L(G)$.

$$\begin{array}{rcl} S \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to u \in P, \\ S \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to u \in P, \\ A_j \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to A_j u \in P, \\ A_j \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to A_j u \in P. \end{array}$$

1. eset Ha $S \to w \in P$, akkor $S \to w \in P'$, így $w \in L(G')$.

2. eset Egyébként w-hez van G-ben egy

$$S \Rightarrow A_{i_1} w_1 \Rightarrow A_{i_2} w_2 w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_{i_{m-1}} w_{m-1} \cdots w_1 \Rightarrow w_m w_{m-1} \cdots w_1 = w$$

levezetés ($m \geq 2$). Azonban ekkor G'-ben létezik egy

$$S \Rightarrow w_m A_{i_{m-1}} \Rightarrow w_m w_{m-1} A_{i_{m-2}} \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_m \cdots w_2 A_{i_1} \Rightarrow w_m \cdots w_1 = w$$

levezetés, azaz $w \in L(G')$.

$L(G') \subseteq L(G)$:

Következik a szimmetriából.

Bal- és jobblineáris nyelvek

$$
\begin{array}{ccc}
S \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to u \in P, \\
S \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to u \in P, \\
A_j \to uA_k :\in P' & \leftrightarrow & A_k \to A_j u \in P, \\
A_j \to u :\in P' & \leftrightarrow & S \to A_j u \in P.
\end{array}
$$

Példa:

$L = \{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N}\}.$

P	P'
$S \to \varepsilon$	$S \to \varepsilon$
$S \to A_1 b$	$A_1 \to b$
$S \to A_2 a$	$A_2 \to a$
$A_1 \to A_1 b$	$A_1 \to bA_1$
$A_1 \to A_2$	$A_2 \to A_1$
$A_2 \to A_2 a$	$A_2 \to aA_2$
$A_2 \to \varepsilon$	$S \to A_2$

$S \Rightarrow A_1 b \Rightarrow A_2 b \Rightarrow A_2 ab \Rightarrow ab.$ $\quad$ $S \Rightarrow A_2 \Rightarrow aA_2 \Rightarrow aA_1 \Rightarrow ab.$

$\mathcal{L}_3$ tükrözésre való zártsága

Állítás: Minden $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ jobb-lineáris grammatikához meg tudunk konstruálni egy G' bal-lineáris grammatikát, amely $L(G)$ tükörképét generálja.

Bizonyítás: G'-ben vegyük a G-beli $A \to u$ és $A \to uB$ alakú szabályok helyett az $A \to u^R$ illetve $A \to Bu^R$ szabályokat ($A, B \in N, u \in \Sigma^*$).

Következmény:

1. $\mathcal{L}_3$ zárt a tükrözés (megfordítás) műveletére nézve.
2. Minden reguláris nyelv generálható bal-lineáris grammatikával.

Bizonyítás:
1. Ha $L \in \mathcal{L}_3$, akkor az állítás miatt L^R generálható egy bal-lineáris G grammatikával. Az előző tétel alapján $L^R \in \mathcal{L}_3$.
2. Ha $L \in \mathcal{L}_3$, akkor az épp most bizonyított **1.** miatt $L^R \in \mathcal{L}_3$ is igaz, így L^R jobb-lineáris grammatikával generálható. Az állítás miatt $(L^R)^R = L$ bal-lineáris grammatikával generálható.

3-típusú grammatikák normálformája

Definíció

Egy $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$ grammatika **3-as normálformájú**, ha minden P-beli szabály alakja

- $X \to aY$, $X, Y \in N$, $a \in \Sigma$ vagy
- $X \to \varepsilon$, ahol $X \in N$.

Tétel

Minden reguláris (azaz 3-típusú) nyelv generálható 3-as normálformájú grammatikával.

Bizonyítás: Legyen L tetszőleges nyelv. Ekkor létezik $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$ 3-típusú grammatika, melyre $L(G) = L$. Ismeretes, hogy G szabályai vagy

a) $A \to uB$ vagy
b) $A \to u$ alakúak ($A, B \in N$, $u \in \Sigma^*$).

A G grammatikát a megfelelő alakra transzformáljuk, figyelve arra hogy az eredmény G-vel ekvivalens legyen.

3-típusú grammatikák normálformája

1. lépés: Hosszredukció

a) típusú szabályok:

Ha $A \to uB \in P$ $(A, B \in N, u \in \Sigma^*)$, $|u| > 1$ és $u = a_1 \cdots a_n, n \geq 2$, akkor helyettesítsük az $A \to a_1 \cdots a_n B$ szabályt az $\{A \to a_1 Z_1, Z_1 \to a_2 Z_2, \ldots Z_{n-1} \to a_n B\}$ szabályhalmazzal, ahol $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ új, a szabályhoz bevezetett egyedi nemterminálisok.

b) típusú szabályok:

Hasonlóan, Ha $A \to u \in P$ $(A \in N, u \in \Sigma^*)$, $|u| > 0$ és $u = a_1 \cdots a_m, m \geq 1$, akkor helyettesítsük az $A \to a_1 \cdots a_m$ szabályt az $\{A \to a_1 Y_1, Y_1 \to a_2 Y_2, \ldots Y_{m-1} \to a_m E, E \to \varepsilon\}$ szabályhalmazzal, ahol $Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ új, a szabályhoz bevezetett egyedi nemterminálisok. E szintén új nemterminális, de elég a b) típusú szabályok hosszredukciójához egy közös új ε szabály.

3-típusú grammatikák normálformája

Az eddigi szavakat az átalakítás után is generálni lehet (a hosszú szabály szimulálásához alkalmazzuk a neki megfeleltetett szabályokat a megadott sorrendben).

Másrészt, mivel az új nemterminálisok szabályonként egyediek, így nem lehetséges az eddigieken felül további szavak generálása.

2. lépés: Láncmentesítés

Egy már hosszredukált $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ grammatika szabályhalmazának elemei $X \to aY, X \to Y, X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X, Y \in N$ és $a \in \Sigma$.

Tehát már csak az $X \to Y$ alakú, ú.n. **láncszabályokat** kell eliminálni.

Jelölje P_0 a P-beli láncszabályok halmazát.

3-típusú grammatikák normálformája

Első lépésben meghatározzuk minden $A \in N$ esetén a $H(A) := \{B \in N \mid A \Rightarrow^* B\}$ halmazokat.

$H(A)$ hatékony előállításához definiáljuk rekurzívan a $H_i(A)$ $(i \geq 0)$ halmazokat az alábbiak szerint:

$H_0(A) := \{A\}$

$H_{i+1}(A) := H_i(A) \cup \{B \in N \mid \exists C \in H_i(A) \text{ amelyre } C \to B \in P\}$.

$H_0(A) \subseteq H_1(A) \subseteq \cdots \subseteq H_k(A) \subseteq \cdots \subseteq N$

$k := \min\{0 \leq i \leq n-1 \mid H_i(A) = H_{i+1}(A)\}$.

$H(A) = H_k(A)$, hiszen $H_i(A)$ az A-ból legfeljebb i darab láncszabály alkalmazással elérhető nemterminálisok halmaza.

3-típusú grammatikák normálformája

$G' = \langle N, \Sigma, P', S \rangle$,
$P' := \{A \to w \mid \exists B \in H(A),\ \text{amelyre } B \to w \in P\} \setminus P_0$.

Tekintsünk egy levezetésben láncszabály alkalmazások egy egymást követő sorozatát $A \in N$-től $B \in N$-ig. Ha a levezetés következő lépése a $B \to w$ ($w \in (N_1 \cup \Sigma)^*$) szabály alkalmazása, akkor helyettesítsük a G-beli $A \Rightarrow^*_G B \Rightarrow_G w$ levezetés részletet az $A \Rightarrow_{G'} w$ lépéssel G'-ben.

Tehát $L(G) \subseteq L(G')$.
Fordítva, az új szabályokat helyettesíthetjük láncszabályok és egy eredeti szabály ezen sorrendben történő alkalmazásával, amiből $L(G') \subseteq L(G)$ adódik.

Tehát a kapott grammatika az eredetivel ekvivalens és 3-típusú.

3-típusú grammatikák normálformája

Példa:

$S \to abS$
$S \to B$
$B \to bB$
$B \to V$
$V \to aa$
$V \to b$

1. lépés: Hosszredukció

$S \to aZ_1$ $\quad Z_1 \to bS$
$S \to B$
$B \to bB$
$B \to V$
$V \to aZ_2$ $\quad Z_2 \to aE$
$V \to bE$ $\quad E \to \varepsilon$

2. lépés: Láncmentesítés

$S \to aZ_1$ $\quad Z_1 \to bS$
$S \to B$
$B \to bB$
$B \to V$
$V \to aZ_2$ $\quad Z_2 \to aE$
$V \to bE$ $\quad E \to \varepsilon$

$S \to aZ_1$ $\quad Z_1 \to bS$
$S \to bB$
$S \to aZ_2$ $\quad S \to bE$
$B \to bB$
$B \to aZ_2$ $\quad B \to bE$
$V \to aZ_2$ $\quad Z_2 \to aE$
$V \to bE$ $\quad E \to \varepsilon$

$H_0(X) = H_1(X) = H(X) = \{X\}$ $\quad$ **(**$X \in \{V, Z_1, Z_2, E\}$**)**
$H_0(B) = \{B\}$**,** $H_1(B) = H_2(B) = H(B) = \{B, V\}$**.**
$H_0(S) = \{S\}$, $H_1(S) = \{S, B\}$, $H_2(S) = H_3(S) = H(S) = \{S, B, V\}$**.**

Reguláris kifejezések

Motiváció:

Vegyük észre, hogy minden véges nyelv reguláris. Tudjuk továbbá, hogy az $\mathcal{L}_3$ nyelvosztály (a reguláris nyelvek osztálya) zárt az unió, a konkatenáció és az iteratív lezárt műveletekre nézve.

Következésképpen, kiindulva véges számú véges nyelvből és az előzőekben felsorolt, ún. reguláris műveleteket véges sokszor alkalmazva reguláris nyelvet kapunk.

Kérdés az, hogy vajon ezzel az eljárással minden reguláris nyelvet elő tudunk-e állítani, azaz, ez a módszer elégséges-e az $\mathcal{L}_3$ nyelvosztály leírására?

Reguláris kifejezések

Definíció

Legyenek V és $V' = \{\emptyset, \varepsilon, \cdot, +, *, (,)\}$ diszjunkt ábécék. A V ábécé feletti **reguláris kifejezéseket** rekurzív módon a következőképpen definiáljuk:

1. $\emptyset$ reguláris kifejezés V felett,
2. ε reguláris kifejezés V felett,
3. a reguláris kifejezés V felett, ha $a \in V$,
4. Ha R reguláris kifejezés V felett, akkor R^* is reguláris kifejezés V felett,
5. Ha Q és R reguláris kifejezések V felett, akkor $(Q \cdot R)$ is,
6. Ha Q és R reguláris kifejezések V felett, akkor $(Q + R)$ is.

Reguláris kifejezések

Minden egyes R reguláris kifejezés egy-egy $L(R)$-rel jelölt reguláris nyelvet határoz meg, amelyeket az alábbi rekurzióval definiálunk.

Definíció

1. $L(\emptyset) := \emptyset$,
2. $L(\varepsilon) := \{\varepsilon\}$,
3. $L(a) := \{a\} \quad (a \in V)$,
4. $L(R^*) := L(R)^*$, ha R reguláris kifejezés,
5. $L(Q \cdot R) := L(Q)L(R)$, ha Q, R reguláris kifejezések,
6. $L(Q + R) := L(Q) \cup L(R)$, ha Q, R reguláris kifejezések.

Azaz a $*$, $\cdot$ és + szimbólumok jelölik rendre a lezárt, a konkatenáció és az unió műveleteket jelölik.

Megjegyzés: $(Q + R)$ helyett használatosak még a $(Q \,|\, R)$ illetve a $(Q \cup R)$ jelölések is. $(Q \cdot R)$ helyett gyakran röviden (QR)-t írunk.

Reguláris kifejezések

Megjegyzés: R-et gyakran azonosítjuk $L(R)$-el. Ilyenkor, kicsit pontatlanul, olyat írunk például, hogy $ab^* = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Állítás: Legyenek P, Q és R reguláris kifejezések. Ekkor fennállnak a következő azonosságok:

1. $P + (Q + R) = (P + Q) + R$
2. $P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$
3. $P + Q = Q + P$
4. $P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$
5. $(P + Q) \cdot R = P \cdot R + Q \cdot R$
6. $P^* = \varepsilon + P \cdot P^*$
7. $\varepsilon \cdot P = P \cdot \varepsilon = P$
8. $P^* = (\varepsilon + P)^*$
9. $P \cdot \emptyset = \emptyset \cdot P = \emptyset$

Tehát precízebben az állítások így hangzanak:
$L(\text{bal oldal}) = L(\text{jobb oldal})$.

Reguláris kifejezések

A műveletek precedenciasorrendje $*, \cdot, +$, ennek és az asszociatív szabályok figyelembevételével bizonyos zárójelpárok elhagyhatók.

Példa:

Az $(a+b)a^*$ és $aa^* + ba^*$ reguláris kifejezések által leírt nyelv ugyanaz: $\{aa^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{ba^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Viszont $(a+b)a^* \neq a + ba^*$, hiszen az utóbbi által leírt nyelv $\{a, b, ba, ba^2, ba^3, \ldots\}$.

Megjegyzés: Néha használjuk a Q^+ jelölést $(Q \cdot Q^*)$ rövidítésére. Használunk néha **konkrét** pozitív egész kitevőket is, például $(a^3b + ab^3)b^*$.

Reguláris kifejezések – Arden tétele

Az alábbi tételt később, a reguláris kifejezések véges automatákkal való kapcsolatának vizsgálatakor fogjuk használni:

Arden tétele

Adottak az R és Q reguláris kifejezések. A $P = R + P \cdot Q$ egyenletnek P-re vonatkozó megoldása $P = R \cdot Q^*$. Amennyiben $\varepsilon \notin L(Q)$, akkor az egyenletnek ez az egyetlen megoldása.

Példa: A $P = ab^* + Pbc^*$ egyenlet egyértelmű megoldása $P = ab^*(bc^*)^*$.

Bizonyítás:
(1) $P = R \cdot Q^*$ megoldás:

$$R + P \cdot Q = R + (R \cdot Q^*) \cdot Q = R + R \cdot (Q \cdot Q^*) =$$
$$R \cdot (\varepsilon + Q \cdot Q^*) = R \cdot Q^* = P.$$

Reguláris kifejezések – Arden tétele

(2) A megoldás egyértelműsége:

$P = R + P \cdot Q = R + (R + P \cdot Q) \cdot Q = R + RQ + PQ^2 = \cdots = R + RQ + \cdots RQ^n + PQ^{n+1}$, ahol n tetszőleges nagy lehet, azaz

$$P = R(\varepsilon + Q + \cdots Q^n) + PQ^{n+1}. \qquad (*)$$

Legyen $w \in P$ és $n = |w|$ az előző (*) képletben. Mivel $\varepsilon \notin Q$ ezért $w \notin PQ^{n+1}$ (minden szava legalább $n+1$ hosszú), tehát $w \in R(\varepsilon + Q + \ldots + Q^n) \subseteq RQ^*$.

Fordítva, ha $w \in RQ^*$, akkor $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $w \in RQ^n$, azaz benne van (*) jobboldalában, azaz P-ben is.

Tehát csak $P = R \cdot Q^*$ lehetséges.

Reguláris kifejezések leíró ereje

Tétel

Minden reguláris kifejezés reguláris (azaz 3-típusú) nyelvet ír le, és megfordítva, minden reguláris nyelvhez megadható egy, ezen nyelvet leíró reguláris kifejezés.

Bizonyítás:

1. Az, hogy reguláris kifejezések csakis reguláris nyelvet írhatnak le következik az $\emptyset, \{\varepsilon\}, \{a\}$ $(a \in V)$ nyelvek reguláris voltából és $\mathcal{L}_3$ reguláris műveletekre való zártságából.

2. Megmutatjuk, hogy minden L reguláris nyelvhez, amelyet a $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$ normálformában adott reguláris grammatika generál, meg tudunk konstruálni egy reguláris kifejezést, amely az L nyelvet jelöli.

Reguláris kifejezések leíró ereje

Legyen $N = \{A_1, \ldots, A_n\}, n \geq 1, S = A_1$. ($G$ minden szabálya vagy $A_i \to aA_j$ vagy $A_i \to \varepsilon$ alakú, ahol $a \in \Sigma, 1 \leq i, j \leq n$.)

Azt mondjuk, hogy az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ ($u \in \Sigma^*$) levezetés **érinti** az A_m nemterminálist, ha A_m előfordul valamely közbülső mondatformában az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ levezetésben.

Az $A_i \Rightarrow^* uA_j$ levezetést **ℓ-megszorítottnak** nevezzük, ha $1 \leq m \leq \ell$ teljesül minden A_m nemterminálisra, amelyet a levezetés érint.

Definiáljuk a következő halmazokat $0 \leq k \leq n, 1 \leq i, j \leq n$-re:

$$E_{i,j}^k = \{u \in \Sigma^* \mid \text{létezik } A_i \Rightarrow^* uA_j \text{ } k\text{-megszorított levezetés}\}.$$

Az $i \neq j$ esetben az $E_{i,j}^0$ halmaz vagy üres vagy Σ-beli betűkből áll: $a \in E_{i,j}^0$, akkor és csak akkor, ha $A_i \to aA_j \in P$.

Reguláris kifejezések leíró ereje

Ha $i = j$, akkor $E^0_{i,i}$ tartalmazza ε-t és nulla vagy több elemét Σ-nak (ha $A_i \to aA_i \in P$).

k-ra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Látható, hogy $E^0_{i,j}$ leírható reguláris kifejezéssel.

Tegyük fel, hogy rögzített k-ra $(0 < k \leq n)$, az $E^{k-1}_{i,j}$ nyelvek mindegyike leírható reguláris kifejezéssel.

Meggondolható, hogy teljesül

$$E^k_{i,j} = E^{k-1}_{i,j} + E^{k-1}_{i,k} \cdot (E^{k-1}_{k,k})^* \cdot E^{k-1}_{k,j}.$$

Tekintsük ugyanis egy $u \in E^k_{i,j}$ szónak egy k-megszorított $A_i \Rightarrow^* uA_j$ levezetését és tekintsük ebben az A_k előfordulásait. Vegyük észre, hogy az első előfordulásig levezetett prefix, az egymást követő előfordulások közötti részszavak, valamint az utolsó előfordulás után levezetett suffix egyaránt $(k-1)$-megszorított levezetésből adódik.

Reguláris kifejezések leíró ereje

Tehát mivel minden $0 \leq k \leq n, 1 \leq i, j \leq n$-re $E^k_{i,j}$ megkapható $(k-1)$-megszorított halmazokból a reguláris műveletekkel, ezért az indukciós hipotézis alapján $E^k_{i,j}$ szintén leírható reguláris kifejezéssel.

Legyen I_ε azon i indexek halmaza, amelyekre $A_i \to \varepsilon \in P$.

Ekkor $L(G) = \bigcup_{i \in I_\varepsilon} E^n_{1,i}$.

Tehát L leírható reguláris kifejezéssel.

Reguláris kifejezések leíró ereje

1. Példa:

$R = a(a + ba^*)^*$. Készítsünk 3-típusú grammatikát R-hez!

A zártsági tétel konstrukcióit alkalmazzuk.

Legyen $R_1 = a,\ R_2 = ba^*,\ R_3 = R_1 + R_2,\ R_4 = R_3^*$.

$R_1 :\ A \to a$

$R_2 :\ B \to bC,\ C \to aC \,|\, \varepsilon$ (kezdőszimbólum: B)

$R_3 :\ D \to A \,|\, B,\ A \to a,\ B \to bC,\ C \to aC \,|\, \varepsilon$ (kezdőszimbólum: D)

$R_4 :\ X \to D \,|\, \varepsilon,\ D \to A \,|\, B,\ A \to a \,|\, aD,\ B \to bC,\ C \to aC \,|\, \varepsilon \,|\, D$ (kezdőszimbólum: X)

$R :\ S \to aX, X \to D \,|\, \varepsilon,\ D \to A \,|\, B,\ A \to a \,|\, aD,\ B \to bC,$
$C \to aC \,|\, \varepsilon \,|\, D$ (kezdőszimbólum: S)

Reguláris kifejezések leíró ereje

2. Példa:

$$\boxed{E_{i,j}^{k} = E_{i,j}^{k-1} + E_{i,k}^{k-1} \cdot (E_{k,k}^{k-1})^* \cdot E_{k,j}^{k-1}}$$

$A_1 \to bA_1 \mid aA_2$

$A_2 \to bA_1 \mid \varepsilon$

$E_{i,j}^0$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$\varepsilon + b$	a
$i=2$	b	ε

$E_{i,j}^1$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	b^*	b^*a
$i=2$	b^+	$\varepsilon + b^+a$

$E_{i,j}^2$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$b^* + b^*a(b^+a)^*b^+$	$b^*a(b^+a)^*$
$i=2$	$(b^+a)^*b^+$	$(b^+a)^*$

Például:

$$E_{12}^2 = E_{12}^1 + E_{12}^1(E_{22}^1)^*E_{22}^1 =$$

$$b^*a + b^*a(\varepsilon + b^+a)^*(\varepsilon + b^+a) = \; b^*a + b^*a(b^+a)^* = \; b^*a(b^+a)^*.$$

$$L(G) = E_{12}^2 = b^*a(b^+a)^*.$$