A számításelmélet alapjai I.
(Harmadik gyakorlat)

Dr. Lázár Katalin Anna

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C.
e-mail: lazarkati@elte.hu

2024. február 27.

Tematika

- $i = 0$ eset: nincs korlátozás,
- $i = 1$ eset:
  (1) P minden szabálya $u_1Au_2 \to u_1vu_2$ alakú, ahol $u_1, u_2, v \in (N \cup \Sigma)^*, A \in N$, és $v \neq \varepsilon$,
  (2) Egyetlen kivétel megengedünk: P tartalmaz**hat**ja az $S \to \varepsilon$ szabályt, de csak abban az esetben, ha S nem fordul elő P egyetlen szabályának jobb oldalán sem.
  ("Korlátozott ε szabály" vagy röviden "KES")
- $i = 2$ eset: P minden szabálya $A \to v$ alakú, ahol $A \in N$ és $v \in (N \cup \Sigma)^*$,
- $i = 3$ eset: P minden szabálya vagy $A \to uB$ vagy $A \to u$, alakú, ahol $A, B \in N$ és $u \in \Sigma^*$.

Bal- és jobb-lineáris grammatikák

Példa 1

Legyen $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to abS, S \to a\}, S)$ és
$G_2 = (\{S, S_1\}, \{a, b\}, \{S \to Sab, S \to aab\}, S)$.

- Bal- vagy jobb-lineárisak az előbbi grammatikák?
- Határozzuk meg $L(G_1)$-t és $L(G_2)$-t!

Bal- és jobb-lineáris grammatikák

Példa 1

- G_1 jobb-lineáris, G_2 bal-lineáris.
- $L(G_1) = (ab)^*a$ és $L(G_2) = aab(ab)^*$

Jobb-lineáris grammatikák

Példa 2

Konstruáljunk jobb-lineáris grammatikát az $L = aab^*a$ nyelvhez!

Jobb-lineáris grammatikák

Példa 2

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \to aA, A \to aB, B \to bB, B \to a\}, S).$

Bal- és jobb-lineáris grammatikák

Példa 3

Konstruáljunk jobb-lineáris és bal-lineáris grammatikát az $L = \{a^n b^m \mid n \geq 3, m \geq 2\}$ nyelvhez! Adjuk meg $a^4 b^3$ jobb-lineáris és bal-lineáris levezetését!

Bal- és jobb-lineáris grammatikák

Példa 3

- A jobb-lineáris grammatika: $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \to aaaA, A \to aA, A \to bbB, B \to bB, B \to \varepsilon\}, S)$.
- A bal-lineáris grammatika: $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \to Abb, A \to Ab, A \to Baaa, B \to Ba, B \to \varepsilon\}, S)$.
- A jobb-lineáris levezetés: $S \Longrightarrow aaaA \Longrightarrow aaaaA \Longrightarrow aaaabbB \Longrightarrow aaaabbbB \Longrightarrow aaaabbb$.
- A bal-lineáris levezetés:
  $S \Longrightarrow Abb \Longrightarrow Abbb \Longrightarrow Baaabbb \Longrightarrow Baaaabbb \Longrightarrow aaaabbb$.

Bal- és jobb-lineáris grammatikák

Példa 4

Legyen $G = (N, T, P, S)$ bal-lineáris grammatika, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$, $P = \{S \to Abb, A \to Baa, B \to Aab, A \to aa\}$. Konstruáljunk meg egy G' jobb-lineáris grammatikát, amelyre $L(G) = L(G')$ teljesül!

Bal- és jobb-lineáris grammatikák

Példa 4

Megjegyzés

Legyen $G = (N, T, P, S)$ bal-lineáris grammatika és legyen $N = \{S, A_1, \ldots, A_n\}$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy S nem fordul elő egyetlen szabály jobb oldalán sem. Megkonstruálunk egy $G' = (N, T, P', S)$ jobb-lineáris grammatikát, amelyre $L(G) = L(G')$ teljesül.

- $S \to u \in P'$ akkor és csak akkor, ha $S \to u \in P$, $u \in T^*$,
- $S \to uA_k \in P'$ akkor és csak akkor, ha $A_k \to u \in P$, $u \in T^*$,
- $A_j \to uA_k \in P'$ akkor és csak akkor, ha $A_k \to A_j u \in P$, $u \in T^*$,
- $A_j \to u \in P'$ akkor és csak akkor, ha $S \to A_j u \in P$, $u \in T^*$.

Bal- és jobb-lineáris grammatikák

Példa 4

Az előbbiek alapján a jobb-lineáris grammatika szabályhalmaza:
$P' = \{S \to aaA, A \to bb, B \to aaA, A \to abB\}$.

3-as típusú grammatikák normálformája

Példa 5

Legyen $G = (N, T, P, S)$ reguláris grammatika, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$, $P_1 = \{S \to aaA, A \to bbB, A \to B, A \to aa, B \to bb\}$. Konstruáljunk G-hez egy G' reguláris grammatikát, amely normálformájú és amelyre $L(G') = L(G)$!

3-as típusú grammatikák normálformája

Példa 5

Megjegyzés

- Normálforma alatt a 3-as típusú grammatikák normálformáját értjük.
- Legyen $G = (N, T, P, S)$ 3-típusú grammatika. Ismeretes, hogy G szabályai vagy $A \to uB$, vagy $A \to u$ alakúak, ahol $A, B \in N$ és $u \in T^*$.
- Minden 3-típusú, azaz reguláris nyelv generálható egy olyan grammatikával, amelynek szabályai vagy $X \to aY$, ahol $X, Y \in N$ és $a \in T$, vagy $X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X \in N$.

3-as típusú grammatikák normálformája

Példa 5

Megjegyzés

- Először ún. hosszredukciót hajtunk végre:
  - minden egyes $A \to a_1 \dots a_n B$, $n \geq 2$, alakú szabályt egy $\{A \to a_1 Z_1, Z_1 \to a_2 Z_2, \dots, Z_{n-1} \to a_n B\}$ szabályhalmazzal helyettesítünk, ahol $Z_1, \dots, Z_{n-1}$ új, a szabályhoz bevezetett nemterminálisok, és
  - minden egyes $A \to a_1 \dots a_m$, $m \geq 1$ alakú szabályt pedig helyettesítünk egy $\{A \to a_1 Y_1, Y_1 \to a_2 Y_2, \dots, Y_{m-1} \to a_m Y_m, Y_m \to \varepsilon\}$ szabályhalmazzal, ahol $Y_1, \dots, Y_m$ a szabályhoz bevezetett új nemterminálisok.
- Az így kapott új P'' szabályhalmaz elemei $X \to aY$, $X \to Y$, $X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X, Y \in N$ és $a \in T$.

3-as típusú grammatikák normálformája

Példa 5

Megjegyzés

- Ezután elimináljuk a láncszabályokat.
- Legyen N' a P'' szabályhalmazban előforduló nemterminálisok halmaza (az új nemterminálisokat is beszámítva). Legyen bármely $X \in N'$ nemterminálisra $U(X) = \{Y \mid Y \Longrightarrow^* X\}$.
- Definiáljuk a P' szabályhalmazt a következőképpen:
  - $X \to aY \in P'$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $Z \in N'$, amelyre $X \in U(Z)$ és $Z \to aY \in P''$, valamint
  - $X \to \varepsilon \in P'$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $Z \in N'$, amelyre $X \in U(Z)$ és $Z \to \varepsilon \in P''$.
  - Más szabály nincs P'-ben.

3-as típusú grammatikák normálformája

Példa 5

Tekintsük a feladatban szereplő G grammatikát!

- Az első lépés a hosszredukció: az $S \to aaA$ szabály helyett az $S \to aA_1, A_1 \to aA$, az $A \to bbB$ helyett az $A \to bB_1, B_1 \to bB$, az $A \to aa$ helyett az $A \to aA_2, A_2 \to aZ$, $Z \to \varepsilon$, valamint a $B \to bb$ helyett a $B \to bB_2, B_2 \to bZ$, $Z \to \varepsilon$ szabályokat vesszük.
- Az új szabályhalmaz $P' = \{S \to aA_1, A_1 \to aA, A \to bB_1, B_1 \to bB, A \to aA_2, A_2 \to aZ, B \to bB_2, B_2 \to bZ, Z \to \varepsilon, A \to B\}$.
- Ezután elimináljuk az egyetlen láncszabályt, $A \to B$-t.
- Az új szabályhalmaz $P'_1 = \{S \to aA_1, A_1 \to aA, A \to bB_1, B_1 \to bB, A \to aA_2, A_2 \to aZ, A \to bB_2, B \to bB_2, B_2 \to bZ, Z \to \varepsilon\}$ lesz.
- Az új grammatika $G' = (N'_1, T, P'_1, S)$ lesz, ahol $N'_1 = \{S, A, B, Z, A_1, A_2, B_1, B_2\}$.