Numerikus Módszerek Gyakorlat
2. zárthelyi (minta)

1. Az $f(x) = x^3 - 8x + 4$ egyenelet $[0, 1]$ intervallumbeli megoldásának közelítésére az

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 4}{8}$$

iterációt használjuk.

(a) Bizonyítsuk az iterációs sorozat konvergenciáját az intervallumon!

(b) Írjuk fel a hibabecslést!

$$|x_k - x^*| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot |x_0 - x^*| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot (1-0) = \left(\frac{3}{5}\right)^k \qquad (x_0 \in [0,1]).$$

(6+2 pont)

2. Tekintsük a következő nemlineáris egyenletet:

$$f(x) = e^{3x} - \cos(x) - 42 = 0$$

(a) Igazoljuk, hogy az $[1, 2]$ intervallum tartalmaz gyököt!

(b) Írjuk fel az f függvényre a Newton-módszert!

(c) Lássuk be, hogy a Newton-módszer monoton konvergenciatételének feltételei a megadott intervallumon teljesülnek! Hogyan kell megválasztanunk az x_0 kezdőpontot?

(2+2+4 pont)

3. Tekintsük az $f(x) = 2^x - x^2$ függvényt és a $0, 1, 2, 3, 4$ alappontokat!

   (a) Írjuk fel az f-et a megadott alappontokon interpoláló polinom Newton-alakját (a polinomot nem kell algebrai alakra hozni)!

   (b) Tegyük fel, hogy ugyanezt a függvényt másodfokú polinommal szeretnénk interpolálni a $[0, 4]$ intervallumon. Hogyan kell megválasztanunk az alappontokat, ha azt szeretnénk, hogy az interpolációs polinom intervallumra vonatkozó hibabecslése optimális legyen? Becsüljük is a hibát!

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

(8+6 pont)

4. Írjuk fel az (x_i, y_i) pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes és parabola egyenletét!

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1	1	-1	0	2

$$E(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

(4+6 pont)

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - E(f)\right| \leq \frac{M_2}{24} \cdot (b-a)^3$$

5. Tekintsük a következő határozott integrált:

$$T(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1-x}{x+2}\,\mathrm{d}x$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T(f)\right| \leq \frac{M_2}{12} \cdot (b-a)^3.$$

   (a) Közelítsük az integrált érintő-, trapéz- és Simpson-formulával!

   (b) Becsüljük a Simpson-formula hibáját!

   (c) Hányszorosan összetett Simpson-formulát kell alkalmaznunk, ha azt szeretnénk, hogy a közelítés hibája 10^{-3} alá csökkenjen?

(3+3+4 pont)

(a) Azt a $p_1(x) = a_1 x + a_0$ elsőfokú polinomot (egyenest) keressük, amelyre a

$$\sum_{i=0}^{3} (y_i - p_1(x_i))^2 = \sum_{i=0}^{3} (y_i - a_1 x_i - a_0)^2$$

kifejezés minimális. Átfogalmazva, azt az egyenest keressük amelyre a

$$S(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S(f)\right| \leq \frac{M_4}{4! \cdot 5!}(b-a)^5.$$

$$\left|\int_{-1}^{1} 2^{-x}\,\mathrm{d}x - T_m(f)\right| \leq \left(\frac{M_2}{12} \cdot (b-a)^3\right) \cdot \frac{1}{m^2},$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_m(f)\right| \leq \left(\frac{M_4}{4! \cdot 5!} \cdot (b-a)^5\right) \cdot \left(\frac{2}{m}\right)^4$$