A számításelmélet alapjai I. – mintazh, 1. anyagrész (megoldási útmutató)

1. feladat megoldása

a.) $L_1 - L_2 = \{a^n b^n \mid n \geq 0 \text{ és } n \equiv 0 \text{ vagy } 1 \mod 3\}$, $L_1 L_2 = \{a^n b^n a^m b^k \mid k, n, m \geq 0 \text{ és } k \equiv 2 \mod 3\}$ és $\text{Pre}(L_1) = \{a^n b^k \mid n \geq k \geq 0\}$.

b.) A G grammatika minden szabálya megfelel a 0-típusú grammatika követelményeinek, ezért G grammatika 0-típusú (mondatszerkezetű). Indoklás:

- $S \to CCbA$ megfelel a 0-, 1- és 2-típusú grammatika követelményeinek, a 3-típusúnak viszont nem.
- $AB \to ASb$ megfelel a 0- és 1-típusú grammatika követelményeinek.
- $SBA \to SbacA$ megfelel a 0- és 1-típusú grammatika követelményeinek.
- $B \to abc$ mind a négy típusú grammatika követelményeinek megfelel.
- $C \to \varepsilon$ megfelel a 0-, 2- és 3-típusú grammatika követelményeinek.

c.) $(b + c + a^*b)^*a^*$

2. feladat megoldása

a.) Az L^*-ot generáló $G' = (N', T, P', S_0)$ grammatika a következő: $N' = \{S, A, B, S_0\}$, $T = \{a, b\}$ és $P' = \{S \to aB, A \to b, A \to abB, A \to bB, B \to bA, B \to \varepsilon\} \cup \{A \to bS, B \to S\} \cup \{S_0 \to \varepsilon, S_0 \to S\}$.

b.) A jobb-lineáris grammatika: $G = (\{S, A\}, \{a, b, c\}, \{S \to aA, A \to bcA, A \to acbb\}, S)$.

3. feladat megoldása

Legyen $G = (\{S, X\}, \{a, b, c\}, P, S)$, ahol $P = \{S \to aSc, S \to X, X \to bXc, X \to \varepsilon\}$. Az első levezetési lépés során az $S \to aSc$ vagy az $S \to X$ szabályt alkalmaztuk. Ha az $S \to aSc$ szabályt alkalmaztuk, akkor alkalmazzuk valahányszor, 0-t is beleértve az $S \to aSc$ szabályt. Ekkor az $a^n S c^n$ mondatformát kapjuk. Majd az $S \to X$ szabályt alkalmazva az $a^n X c^n$ mondatformához jutunk. Ezután alkalmazzuk az $X \to bXc$ szabályt valahányszor, 0–t is beleértve. Ekkor az $a^n b^m X c^{m+n}$ mondatformát kapjuk. Majd az $X \to \varepsilon$ szabályt alkalmazva befejezzük a levezetést, s megkapjuk $a^n b^n c^{m+n}$–et, ahol $n, m \geq 0$. Hasonló a bizonyítás, ha $S \to X$ szabályt alkalmazzuk az első lépésben. Más levezetés nem lehetséges, így L bármely szava (és csak az) levezethető.

4. feladat megoldása

- Az első lépés a hosszredukció. Az új szabályhalmaz $P' = \{S \to aB, S \to A, A \to bZ_1, Z_1 \to \varepsilon, A \to bZ_2, Z_2 \to cZ_3, Z_3 \to aB, B \to A, B \to aZ_4, Z_4 \to bZ_5, Z_5 \to \varepsilon\}$.
- Ezután elimináljuk a láncszabályokat, $S \to A$-t és $B \to A$-t.
- Az új szabályhalmaz $P_1' = \{S \to aB, S \to bZ_1, B \to bZ_1, A \to bZ_1, Z_1 \to \varepsilon, S \to bZ_2, B \to bZ_2, A \to bZ_2, Z_2 \to cZ_3, Z_3 \to aB, B \to aZ_4, Z_4 \to bZ_5, Z_5 \to \varepsilon\}$ lesz.

5. feladat megoldása

a.) Az $A = (Q, T, \delta, q_{00}, F)$ véges determinisztikus automata, ahol $Q = \{q_{00}, q_{10}, q_{01}, q_{11}, q\}$, $T = \{a, b\}$, $F = \{q_{01}, q_{11}\}$ és legyen $\delta(q_{00}, a) = q_{10}$, $\delta(q_{00}, b) = q_{01}$, $\delta(q_{10}, a) = q$, $\delta(q_{10}, b) = q_{11}$, $\delta(q_{01}, a) = q_{11}$, $\delta(q_{01}, b) = q_{00}$, $\delta(q_{11}, a) = q$, $\delta(q_{11}, b) = q_{10}$, $\delta(q, a) = q$, $\delta(q, b) = q$.

Az A automata átmeneti állapotainak táblája:

		a	b
$\rightarrow$	q_{00}	q_{10}	q_{01}
	q_{10}	q	q_{11}
$\leftarrow$	q_{01}	q_{11}	q_{00}
$\leftarrow$	q_{11}	q	q_{10}
	q	q	q

b.) Az A automata konstrukciója: $Q = N$, $Q_0 = \{S\}$, $F = \{C\}$. Továbbá δ-t úgy definiáljuk, hogy $\delta(S, a) = \{B\}$, $\delta(B, c) = \{S\}$, $\delta(B, b) = \{A\}$, $\delta(A, a) = \{A\}$, $\delta(A, a) = \{C\}$.

6. feladat megoldása

Az A' véges determinisztikus automata:

- Q' elemei: $\emptyset$, $\{q_0\}$, $\{q_1\}$, $\{q_2\}$, $\{q_3\}$, $\{q_0, q_1\}$, $\{q_0, q_2\}$, $\{q_0, q_3\}$, $\{q_1, q_2\}$, $\{q_1, q_3\}$, $\{q_2, q_3\}$, $\{q_0, q_1, q_2\}$, $\{q_0, q_1, q_3\}$, $\{q_0, q_2, q_3\}$, $\{q_1, q_2, q_3\}$, $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $q_0' = \{q_0\}$ és
- $F' = \{\{q_2\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_2, q_3\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \{q_0, q_2, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}\}$.
- Az új állapotátmenet táblázat:

		a	b
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$	$\{q_0, q_3\}$
	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2\}$
$\leftarrow$	$\{q_2\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_1\}$
	$\{q_3\}$		$\{q_1, q_2\}$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$
$\leftarrow$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\leftarrow$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$
	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\leftarrow$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\leftarrow$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\leftarrow$	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\leftarrow$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\leftarrow$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$