

Numerikus módszerek C

2. előadás: Hibaszámítás, Lineáris egyenletrendszerek megoldása,
Gauss-elimináció

Krebsz Anna

ELTE IK

- 1 A hibaszámítás elemei
- 2 Lineáris egyenletrendszerek alkalmazása
- 3 Lineáris egyenletrendszerek
- 4 A Gauss-elimináció algoritmus

- 1 A hibaszámítás elemei
- 2 Lineáris egyenletrendszerek alkalmazása
- 3 Lineáris egyenletrendszerek
- 4 A Gauss-elimináció algoritmus

Definíció: Hibák jellemzése

Legyen A egy pontos érték, a pedig egy közelítő értéke. Ekkor:

$\Delta a := A - a$ a közelítő érték (pontos) hibája,

$|\Delta a| := |A - a|$ a közelítő érték abszolút hibája,

$\Delta_a \geq |\Delta a|$ az a egy abszolút hibakorlátja,

$\delta a := \frac{\Delta a}{A} \approx \frac{\Delta a}{a}$ az a relatív hibája,

$\delta_a \geq |\delta a|$ az a egy relatív hibakorlátja.

Definíció: Hibák jellemzése

Legyen A egy pontos érték, a pedig egy közelítő értéke. Ekkor:

$\Delta a := A - a$ a közelítő érték (pontos) hibája,

$|\Delta a| := |A - a|$ a közelítő érték abszolút hibája,

$\Delta_a \geq |\Delta a|$ az a egy abszolút hibakorlátja,

$\delta a := \frac{\Delta a}{A} \approx \frac{\Delta a}{a}$ az a relatív hibája,

$\delta_a \geq |\delta a|$ az a egy relatív hibakorlátja.

Példa

Nézzük végig a fogalmakat π két tizedesjegyre kerekített értékén, vagyis a 3.14 közelítésén!

Példa

Mennyi $\sqrt{2020} - \sqrt{2019}$ értéke?

Példa

Mennyi $\sqrt{2020} - \sqrt{2019}$ értéke?

Más alakban is számolható:

$$\begin{aligned}\sqrt{2020} - \sqrt{2019} &= (\sqrt{2020} - \sqrt{2019}) \cdot \frac{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}}{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}} = \\ &= \frac{2020 - 2019}{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}} = \frac{1}{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}}.\end{aligned}$$

Példa

Mennyi $\sqrt{2020} - \sqrt{2019}$ értéke?

Más alakban is számolható:

$$\begin{aligned}\sqrt{2020} - \sqrt{2019} &= (\sqrt{2020} - \sqrt{2019}) \cdot \frac{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}}{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}} = \\ &= \frac{2020 - 2019}{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}} = \frac{1}{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}}.\end{aligned}$$

Próbáljuk ki mindkét számolási módot! Melyik ad pontosabb eredményt?

0.0111262300000002

0.011126231166003

Tétel: az alpműveletek hibakorlátai

$$\Delta_{a \pm b} = \Delta_a + \Delta_b$$

$$\delta_{a \pm b} = \frac{|a| \cdot \delta_a + |b| \cdot \delta_b}{|a \pm b|}$$

$$\Delta_{a \cdot b} = |b| \cdot \Delta_a + |a| \cdot \Delta_b$$

$$\delta_{a \cdot b} = \delta_a + \delta_b$$

$$\Delta_{a/b} = \frac{|b| \cdot \Delta_a + |a| \cdot \Delta_b}{b^2}$$

$$\delta_{a/b} = \delta_a + \delta_b$$

Tétel: az alpműveletek hibakorlátai

$$\Delta_{a \pm b} = \Delta_a + \Delta_b$$

$$\delta_{a \pm b} = \frac{|a| \cdot \delta_a + |b| \cdot \delta_b}{|a \pm b|}$$

$$\Delta_{a \cdot b} = |b| \cdot \Delta_a + |a| \cdot \Delta_b$$

$$\delta_{a \cdot b} = \delta_a + \delta_b$$

$$\Delta_{a/b} = \frac{|b| \cdot \Delta_a + |a| \cdot \Delta_b}{b^2}$$

$$\delta_{a/b} = \delta_a + \delta_b$$

Megjegyzés: a kapott korlátok két esetben lehetnek nagyságrendileg nagyobbak, mint a kiindulási értékek hibái:

- ① $\delta_{a \pm b}$ esetén, amikor közeli számokat vonunk ki egymásból.
- ② $\Delta_{a/b}$ esetén, amikor kicsi számmal osztunk.

Ezeket az eseteket az algoritmusok implementálásakor el kell kerülni.

Biz.: az összeadást és kivonást azonos előjelű számok között értjük. Az $a \pm b$ hibája

$$\Delta(a \pm b) = (A \pm B) - (a \pm b) = (A - a) \pm (B - b) = \Delta a \pm \Delta b$$

Biz.: az összeadást és kivonást azonos előjelű számok között értjük. Az $a \pm b$ hibája

$$\Delta(a \pm b) = (A \pm B) - (a \pm b) = (A - a) \pm (B - b) = \Delta a \pm \Delta b$$

$$|\Delta(a \pm b)| = |\Delta a \pm \Delta b| \leq |\Delta a| + |\Delta b| \leq \Delta_a + \Delta_b = \Delta_{a \pm b}.$$

Biz.: az összeadás, kivonás hibakorlátai

Nézzük a relatív hibát

$$\frac{\Delta(a \pm b)}{a \pm b} = \frac{\Delta a \pm \Delta b}{a \pm b} = \frac{a \cdot \delta a \pm b \cdot \delta b}{a \pm b}$$

Nézzük a relatív hibát

$$\frac{\Delta(a \pm b)}{a \pm b} = \frac{\Delta a \pm \Delta b}{a \pm b} = \frac{a \cdot \delta a \pm b \cdot \delta b}{a \pm b}$$

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta(a \pm b)|}{|a \pm b|} &= \frac{|a \cdot \delta a \pm b \cdot \delta b|}{|a \pm b|} \leq \frac{|a| \cdot |\delta a| + |b| \cdot |\delta b|}{|a \pm b|} \leq \\ &\leq \frac{|a| \cdot \delta_a + |b| \cdot \delta_b}{|a \pm b|} = \delta_{a \pm b} \end{aligned}$$

A szorzás hibája

$$\begin{aligned}\Delta(a \cdot b) &= A \cdot B - a \cdot b = A \cdot B - A \cdot b + A \cdot b - a \cdot b = \\ &= A(B - b) + b(A - a) = A \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a = \\ &= (a + \Delta a) \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a \approx a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a \\ &(\Delta a \cdot \Delta b \text{ elhanyagolható})\end{aligned}$$

A szorzás hibája

$$\begin{aligned}\Delta(a \cdot b) &= A \cdot B - a \cdot b = A \cdot B - A \cdot b + A \cdot b - a \cdot b = \\ &= A(B - b) + b(A - a) = A \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a = \\ &= (a + \Delta a) \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a \approx a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a \\ &\quad (\Delta a \cdot \Delta b \text{ elhanyagolható})\end{aligned}$$

$$|\Delta(a \cdot b)| \leq |a| \cdot |\Delta b| + |b| \cdot |\Delta a| \leq |a| \cdot \Delta_b + |b| \cdot \Delta_a = \Delta_{a \cdot b}$$

A szorzás hibája

$$\begin{aligned}\Delta(a \cdot b) &= A \cdot B - a \cdot b = A \cdot B - A \cdot b + A \cdot b - a \cdot b = \\ &= A(B - b) + b(A - a) = A \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a = \\ &= (a + \Delta a) \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a \approx a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a \\ &\quad (\Delta a \cdot \Delta b \text{ elhanyagolható})\end{aligned}$$

$$|\Delta(a \cdot b)| \leq |a| \cdot |\Delta b| + |b| \cdot |\Delta a| \leq |a| \cdot \Delta_b + |b| \cdot \Delta_a = \Delta_{a \cdot b}$$

A relatív hiba

$$\delta(a \cdot b) = \frac{\Delta(a \cdot b)}{a \cdot b} \approx \frac{a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a}{a \cdot b} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a} = \delta b + \delta a$$

$$|\delta(a \cdot b)| \leq |\delta a| + |\delta b| \leq \delta_a + \delta_b = \delta_{a \cdot b}$$

Az osztás hibája

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{A}{B} - \frac{a}{b} = \frac{A \cdot b - a \cdot B}{Bb} = \\ &= \frac{A \cdot b - a \cdot b + a \cdot b - a \cdot B}{Bb} = \frac{b \cdot (A - a) - a \cdot (B - b)}{Bb} = \\ &= \frac{b \cdot \Delta a - a \cdot \Delta b}{(b + \Delta b) \cdot b} \approx \frac{b \cdot \Delta a - a \cdot \Delta b}{b^2}\end{aligned}$$

($\Delta b \cdot b$ elhanyagolható)

Az osztás hibája

$$\begin{aligned}
 \Delta \left(\frac{a}{b} \right) &= \frac{A}{B} - \frac{a}{b} = \frac{A \cdot b - a \cdot B}{Bb} = \\
 &= \frac{A \cdot b - a \cdot b + a \cdot b - a \cdot B}{Bb} = \frac{b \cdot (A - a) - a \cdot (B - b)}{Bb} = \\
 &= \frac{b \cdot \Delta a - a \cdot \Delta b}{(b + \Delta b) \cdot b} \approx \frac{b \cdot \Delta a - a \cdot \Delta b}{b^2} \\
 &(\Delta b \cdot b \text{ elhanyagolható})
 \end{aligned}$$

$$\left| \Delta \left(\frac{a}{b} \right) \right| \leq \frac{|b| \cdot |\Delta a| + |a| \cdot |\Delta b|}{b^2} \leq \frac{|b| \cdot \Delta_a + |a| \cdot \Delta_b}{b^2} = \Delta_{a/b}$$

Az osztás relatív hibája

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{\Delta\left(\frac{a}{b}\right)}{\frac{a}{b}} \approx \frac{b \cdot \Delta a - a \cdot \Delta b}{b^2} \cdot \frac{b}{a} = \\ &= \frac{b \cdot \Delta a - a \cdot \Delta b}{b \cdot a} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} = \\ &= \delta a - \delta b = \delta\left(\frac{a}{b}\right)\end{aligned}$$

Az osztás relatív hibája

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{\Delta\left(\frac{a}{b}\right)}{\frac{a}{b}} \approx \frac{b \cdot \Delta a - a \cdot \Delta b}{b^2} \cdot \frac{b}{a} = \\ &= \frac{b \cdot \Delta a - a \cdot \Delta b}{b \cdot a} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} = \\ &= \delta a - \delta b = \delta\left(\frac{a}{b}\right)\end{aligned}$$

$$\left|\delta\left(\frac{a}{b}\right)\right| \leq |\delta a| + |\delta b| \leq \delta_a + \delta_b = \delta_{a/b}$$



Példa

1. Mennyi $\exp(\pi)$ értéke?

Példa

1. Mennyi $\exp(\pi)$ értéke?

π -t közelítsük 2 és 15 tizedesjeggyel:

23.140692632779267

23.103866858722185

Példa

1. Mennyi $\exp(\pi)$ értéke?

π -t közelítsük 2 és 15 tizedesjeggyel:

23.140692632779267

23.103866858722185

Példa

2. Mennyi $\log(\pi)$ értéke?

Példa

1. Mennyi $\exp(\pi)$ értéke?

π -t közelítsük 2 és 15 tizedesjeggyel:

23.140692632779267

23.103866858722185

Példa

2. Mennyi $\log(\pi)$ értéke?

π -t közelítsük 2 és 15 tizedesjeggyel:

1.144729885849400

1.144222799920162

Példa

1. Mennyi $\exp(\pi)$ értéke?

π -t közelítsük 2 és 15 tizedesjeggyel:

23.140692632779267

23.103866858722185

Példa

2. Mennyi $\log(\pi)$ értéke?

π -t közelítsük 2 és 15 tizedesjeggyel:

1.144729885849400

1.144222799920162

Melyik függvény tolerálja jobban a hibát?

1. Tétel: a függvényérték hibája

Ha $f \in C^1(k_{\Delta_a}(a))$ és $k_{\Delta_a}(a) = [a - \Delta_a; a + \Delta_a]$, akkor

$$\Delta_{f(a)} = M_1 \cdot \Delta_a,$$

ahol $M_1 = \max \{ |f'(\xi)| : \xi \in k_{\Delta_a}(a) \}$.

1. Tétel: a függvényérték hibája

Ha $f \in C^1(k_{\Delta_a}(a))$ és $k_{\Delta_a}(a) = [a - \Delta_a; a + \Delta_a]$, akkor

$$\Delta_{f(a)} = M_1 \cdot \Delta_a,$$

ahol $M_1 = \max \{ |f'(\xi)| : \xi \in k_{\Delta_a}(a) \}$.

Biz.: a Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával.

$$\Delta f(a) = f(A) - f(a) = f'(\xi) \cdot (A - a) = f'(\xi) \cdot \Delta a,$$

valamely $\xi \in k_{\Delta_a}(a)$ értékre. Vizsgáljuk az abszolút hibát.

1. Tétel: a függvényérték hibája

Ha $f \in C^1(k_{\Delta_a}(a))$ és $k_{\Delta_a}(a) = [a - \Delta_a; a + \Delta_a]$, akkor

$$\Delta_{f(a)} = M_1 \cdot \Delta_a,$$

ahol $M_1 = \max \{ |f'(\xi)| : \xi \in k_{\Delta_a}(a) \}$.

Biz.: a Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával.

$$\Delta f(a) = f(A) - f(a) = f'(\xi) \cdot (A - a) = f'(\xi) \cdot \Delta a,$$

valamely $\xi \in k_{\Delta_a}(a)$ értékre. Vizsgáljuk az abszolút hibát.

Jó felső becslést adva nyerjük az abszolút hibakorlátot:

$$|\Delta f(a)| = |f'(\xi)| \cdot |\Delta a| \leq M_1 \cdot \Delta_a = \Delta_{f(a)},$$

2. Tétel: a függvényérték hibája

Ha $f \in C^2(k_{\Delta_a}(a))$ és $k_{\Delta_a}(a) = [a - \Delta_a; a + \Delta_a]$, akkor

$$\Delta_{f(a)} = |f'(a)| \Delta_a + \frac{M_2}{2} \cdot \Delta_a^2,$$

ahol $M_2 = \max \{ |f''(\xi)| : \xi \in k_{\Delta_a}(a) \}.$

2. Tétel: a függvényérték hibája

Ha $f \in C^2(k_{\Delta_a}(a))$ és $k_{\Delta_a}(a) = [a - \Delta_a; a + \Delta_a]$, akkor

$$\Delta_{f(a)} = |f'(a)| \Delta_a + \frac{M_2}{2} \cdot \Delta_a^2,$$

ahol $M_2 = \max \{ |f''(\xi)| : \xi \in k_{\Delta_a}(a) \}$.

Biz.: a Taylor-formula felhasználásával.

$$\Delta f(a) = f(A) - f(a) = f'(a) \cdot (A - a) + \frac{f''(\xi)}{2} \cdot (A - a)^2,$$

valamely $\xi \in k_{\Delta_a}(a)$ értékre. Vizsgáljuk az abszolút hibát.

Jó felső becslést adva nyerjük az abszolút hibakorlátot:

$$\begin{aligned} |\Delta f(a)| &= |f'(a)| \cdot |\Delta a| + \frac{|f''(\xi)|}{2} \cdot |\Delta a|^2 \leq \\ &\leq |f'(a)| \cdot \Delta_a + \frac{M_2}{2} \cdot \Delta_a^2 = \Delta_{f(a)}, \end{aligned}$$



Jó felső becslést adva nyerjük az abszolút hibakorlátot:

$$\begin{aligned} |\Delta f(a)| &= |f'(a)| \cdot |\Delta a| + \frac{|f''(\xi)|}{2} \cdot |\Delta a|^2 \leq \\ &\leq |f'(a)| \cdot \Delta_a + \frac{M_2}{2} \cdot \Delta_a^2 = \Delta_{f(a)}, \end{aligned}$$



Következmény: függvényérték relatív hibája

Ha Δ_a kicsi, akkor $\delta_{f(a)} = \frac{|a| |f'(a)|}{|f(a)|} \cdot \delta_a$.

Jó felső becslést adva nyerjük az abszolút hibakorlátot:

$$\begin{aligned} |\Delta f(a)| &= |f'(a)| \cdot |\Delta a| + \frac{|f''(\xi)|}{2} \cdot |\Delta a|^2 \leq \\ &\leq |f'(a)| \cdot \Delta_a + \frac{M_2}{2} \cdot \Delta_a^2 = \Delta_{f(a)}, \end{aligned}$$



Következmény: függvényérték relatív hibája

Ha Δ_a kicsi, akkor $\delta_{f(a)} = \frac{|a||f'(a)|}{|f(a)|} \cdot \delta_a$.

Definíció: Az f függvény a -beli kondíciószáma

A $c(f, a) = \frac{|a||f'(a)|}{|f(a)|}$ mennyiséget az f függvény a -beli kondíciószámának nevezzük.

Biz.: Ha Δ_a kicsi, akkor a 2. tételben szereplő eredményben a Δ_a^2 -es tagot elhanyagolhatjuk, így felhasználva, hogy $\Delta_a = |a| \cdot \delta_a$

$$|\delta f(a)| \approx \frac{|f'(a)| \cdot \Delta_a}{|f(a)|} = \frac{|a| \delta_a \cdot |f'(a)|}{|f(a)|} = \frac{|a| |f'(a)|}{|f(a)|} \cdot \delta_a.$$



- 1 A hibaszámítás elemei
- 2 Lineáris egyenletrendszerek alkalmazása**
- 3 Lineáris egyenletrendszerek
- 4 A Gauss-elimináció algoritmus

- **Általános iskolában:**

Matematikai versenyfeladat 3. osztály

A MATEK szó minden betűje egy-egy számjegyet jelöl. A számjegyekre igazak a következő állítások:

$$M + A + T + E + K = 25$$

$$M + A = 11$$

$$A + T = 10$$

$$T + E = 12$$

$$E + K = 10$$

Melyik betű melyik számjegyet jelöli, ha az öt betű öt különböző számjegyet jelöl?

- **Gazdasági számítások:**

Tegyük fel, hogy egy üzem kétféle végterméket állít elő négyféle alkatrész felhasználásával. Jelölje A_1, A_2 a végtermékeket, az A_3, A_4 a félkész termékeket és A_5, A_6 az alapanyagokat. Az egyes alapanyagok és félkész termékek egymásba és a végtermékbe való beépülését a **közvetlen ráfordítás mátrix** (K) adja meg. A mátrix k_{ij} eleme azt mutatja, hogy az i . termékből közvetlenül (nem más terméken keresztül) mennyi épül be a j . termékbe.

A **teljes ráfordítások mátrixában** (T) a t_{ij} elem azt mutatja, hogy egy darab A_j termék összesen hány darab A_i elemet tartalmaz. Ennek meghatározása a $T = (I - K)^{-1}$ képletből történik. A kétféle mátrix alkalmazása:
 x alapanyagból $y = (I - K) \cdot x$ végtermék lesz és
 y végtermékhez $x = T \cdot y = (I - K)^{-1} \cdot x$ alapanyag kell.

- Mérnöki feladatok numerikus megoldása (lásd a bevezető példát)

- Mérnöki feladatok numerikus megoldása (lásd a bevezető példát)
- Interpolációs spline-ok megadása

- Mérnöki feladatok numerikus megoldása (lásd a bevezető példát)
- Interpolációs spline-ok megadása
- Approximációs feladatok megoldása

- **Hálózatok stacionárius modellezése:** villamos hálózatok, áramkörök, víz- és gázellátó csőrendszerek irányított gráffal történő leírása után. Az él iránya megfelel a várt áramlási iránynak. Minden élhez tartozik egy szám, az ott szállított áram (víz stb.) mennyiségét adja. Egyes csomópontokhoz is tartozhat áram, ezek a külső pontok. Ilyen áram a ponton keresztül be ill. kifolyó áram, amely ugyancsak ismeretlen lehet.

A gráf minden csomópontjában felírjuk az első Kirchhoff-féle törvényt, amely szerint - figyelembe véve az élek irányát - a csomópontban találkozó élek áramainak összege nulla. Ez az anyag-megmaradási törvény egy lineáris reláció, és a minden csomópont-hoz tartozó relációk összessége adja a lineáris egyenletrendszert.

- 1 A hibaszámítás elemei
- 2 Lineáris egyenletrendszerek alkalmazása
- 3 Lineáris egyenletrendszerek**
- 4 A Gauss-elimináció algoritmus

Lineáris egyenletrendszer (LER)

Hagyományos alak:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

n egyenlet, n ismeretlen

Lineáris egyenletrendszer (LER)

Hagyományos alak:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

n egyenlet, n ismeretlen

Megj.: Fontos, hogy négyzetes a mátrix.

Mátrix alak:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

vagyis

$$Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b, x \in \mathbb{R}^n.$$

Feladat:

A és b adottak, keressük x -et.

Tétel: emlékeztető Mat.alapokból

- LER megoldható $\iff b$ felírható az A oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként.

Tétel: emlékeztető Mat.alapokból

- LER megoldható $\iff b$ felírható az A oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként.
- Egyértelműen létezik megoldás $\iff A$ oszlopai lineárisan függetlenek $\iff \text{rang}(A) = n \iff \det(A) \neq 0 \iff A$ invertálható ($x = A^{-1}b$).

Tétel: emlékeztető Mat.alapokból

- LER megoldható $\iff b$ felírható az A oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként.
- Egyértelműen létezik megoldás $\iff A$ oszlopai lineárisan függetlenek $\iff \text{rang}(A) = n \iff \det(A) \neq 0 \iff A$ invertálható ($x = A^{-1}b$).

Megj.:

- Ha A speciális alakú (pl. diagonális vagy háromszög alakú), akkor egyszerűen megkapható a megoldás. Ez az alapötlet a direkt módszerek esetén.

Tétel: emlékeztető Mat.alapokból

- LER megoldható $\iff b$ felírható az A oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként.
- Egyértelműen létezik megoldás $\iff A$ oszlopai lineárisan függetlenek $\iff \text{rang}(A) = n \iff \det(A) \neq 0 \iff A$ invertálható ($x = A^{-1}b$).

Megj.:

- Ha A speciális alakú (pl. diagonális vagy háromszög alakú), akkor egyszerűen megkapható a megoldás. Ez az alapötlet a direkt módszerek esetén.
- Cramer-szabályt max. 3×3 -as mátrixokra alkalmazunk.

LER-k megoldási módszerei általában

- Direkt módszerek, felbontások (véges lépésszám, „pontos” megoldás)
 - Gauss-elimináció, Progonka módszer
 - LU -felbontás, LDU , LL^T , Cholesky
 - QR-felbontás (Gram–Schmidt ort., Householder trf.)
 - ILU-felbontás
- Iterációs módszerek (vektor sorozat, mely a megoldáshoz „tart”)
 - mátrixnormák, Banach-féle fixponttétel
 - Jacobi-iteráció
 - Gauss–Seidel-iteráció
 - Richardson-iteráció
 - ILU-algoritmus
- Variációs módszerek (egy „célfüggvény” minimalizálása által)
 - Gradiens-módszer
 - Konjugált gradiens-módszer

Direkt módszerek, felbontások

- Gauss-elimináció,
- Progonka módszer,
- LU -felbontás.

Direkt módszerek, felbontások

- Gauss-elimináció,
- Progonka módszer,
- LU -felbontás.

Jellemzők:

- Pontos számolás esetén pontos megoldás.
- Véges lépésszám.
- Pontatlan számolás (pl. véges aritmetika) esetén a megoldás az algoritmussal nem javítható.

- 1 A hibaszámítás elemei
- 2 Lineáris egyenletrendszerek alkalmazása
- 3 Lineáris egyenletrendszerek
- 4 A Gauss-elimináció algoritmus**

Legyen $a_{in+1} := b_i$, azaz $[A|b]$ a tárolási forma.

GE := Gauss-elimináció.

$$A^{(0)} := \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} = b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} = b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} = b_n \end{array} \right]$$

Legyen $a_{in+1} := b_i$, azaz $[A|b]$ a tárolási forma.

GE := Gauss-elimináció.

$$A^{(0)} := \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} = b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} = b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} = b_n \end{array} \right]$$

Célunk: A LER-t egyszerűbb alakra hozni:

- 1 balról jobbra: a főátló alatt kinullázzuk az elemeket, „előre”, GE
- 2 jobbról balra: a főátló fölött nullázunk, „vissza”, visszahelyettesítés

Az 1. egyenletet változatlanul hagyjuk.

Ha $a_{11}^{(0)} \neq 0$, akkor az i -edik egyenletből ($i = 2, 3, \dots, n$) kivonjuk az 1. egyenlet $\left(\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}\right)$ -szeresét: hogy $a_{i1}^{(0)}$ kinullázódjon.
 (\rightsquigarrow elimináció, kiküszöbölés)

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{nn+1}^{(1)} \end{array} \right],$$

ahol

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \cdot a_{1j}^{(0)} \quad (i = 2, \dots, n; j = 2, \dots, n, n+1).$$

Az 1. és 2. egyenletet változatlanul hagyjuk.

Ha $a_{22}^{(1)} \neq 0$, akkor az i -edik egyenletből ($i = 3, 4, \dots, n$) kivonjuk a 2. egyenlet $\left(\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right)$ -szeresét: hogy $a_{i2}^{(1)}$ kinullázódjon.

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & a_{3n+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{nn+1}^{(2)} \end{array} \right],$$

ahol

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot a_{2j}^{(1)} \quad (i = 3, \dots, n; j = 3, \dots, n, n+1).$$

Az $1., 2., \dots, k$. egyenleteket változatlanul hagyjuk.

Ha $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$, akkor az i -edik egyenletből ($i = k + 1, \dots, n$)

kivonjuk a k -adik egyenlet $\left(\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right)$ -szeresét: hogy $a_{ik}^{(k-1)}$

kinullázódjon. Ezt a lépést láttuk, amikor a 2. lépésben az 1. lépés eredményét felhasználtuk. Ha 2 helyére k -t írunk, akkor megkapjuk az általános képleteket.

Az $1., 2., \dots, k$. egyenleteket változatlanul hagyjuk.

Ha $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$, akkor az i -edik egyenletből ($i = k + 1, \dots, n$)

kivonjuk a k -adik egyenlet $\left(\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right)$ -szeresét: hogy $a_{ik}^{(k-1)}$

kinullázódjon. Ezt a lépést láttuk, amikor a 2. lépésben az 1. lépés eredményét felhasználtuk. Ha 2 helyére k -t írunk, akkor megkapjuk az általános képleteket.

Tétel: A Gauss-elimináció általános lépése

Ha $a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0$, akkor a k . lépés képletei

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)}$$

$$\begin{aligned} k &= 1, \dots, n-1; \\ i &= k+1, \dots, n; \\ j &= k+1, \dots, n, n+1. \end{aligned}$$

Így $n - 1$ lépés után felső háromszögmátrix alakú LER-t kapunk:

$$A^{(n-1)} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n-1}^{(0)} & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n-1n-1}^{(n-2)} & a_{n-1n}^{(n-2)} & a_{n-1n+1}^{(n-2)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & a_{nn+1}^{(n-1)} \end{array} \right].$$

Így $n - 1$ lépés után felső háromszögmátrix alakú LER-t kapunk:

$$A^{(n-1)} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n-1}^{(0)} & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n-1n-1}^{(n-2)} & a_{n-1n}^{(n-2)} & a_{n-1n+1}^{(n-2)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & a_{nn+1}^{(n-1)} \end{array} \right].$$

Ezután visszafelé haladva: az aktuális egyenletet osztjuk a főátlóbeli elemmel, majd a főátló fölött kinullázzuk az elemeket, az eddigiekkel analóg „sorműveletek” alkalmazásával.

Végül $[I|x]$ alakot nyerünk. ($I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egységmátrix.)

Az algoritmus második része („jobbról-balra”), a felső háromszög alakú LER megoldása képlettel is kifejezhető. Figyeljük meg, hogy a felső-háromszögmátrixú alaknál soronként azonos felső indexek vannak.

Az algoritmus második része („jobbról-balra”), a felső háromszög alakú LER megoldása képlettel is kifejezhető. Figyeljük meg, hogy a felső-háromszögmátrixú alaknál soronként azonos felső indexek vannak.

A visszahelyettesítés

$$x_n = \frac{a_{nn}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}},$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}} \left(a_{in+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} \cdot x_j \right) \quad (i = n - 1, \dots, 1).$$

Példa: LER megoldása GE-val

Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert Gauss-elimináció alkalmazásával!

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Az elimináció: Kézi számolásnál függőleges vonalat húzunk a jobboldali vektor elé, számítógéppel ezt programozással oldjuk meg.

1. lépés:

$$2. \text{ sor} - \underbrace{\left(\frac{-4}{2}\right)}_{+2} * 1. \text{ sor}$$

$$3. \text{ sor} - \underbrace{\left(\frac{6}{2}\right)}_{+3} * 1. \text{ sor}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & -2 & 3 \\ 6 & -5 & 4 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array} \right] \rightarrow$$

2. lépés:

$$3. \text{ sor } - \underbrace{\left(\frac{-5}{5}\right)}_{+1} * 2. \text{ sor}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow$$

A visszahelyettesítés:

3. sor $/(-1)$

2. sor $- 4 * \text{új 3. sor.}$

1. sor $- 3 * \text{új 3. sor.}$

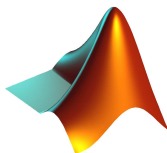
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

2. sor /5

1. sor /2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Tehát a lineáris egyenletrendszer megoldása az $\mathbf{x} = [1, 1, -1]^T$ vektor.



- 1 A Gauss-elimináció működése „kisebb” ($n \approx 7$) LER-ekre
- 2 A beépített megoldó rutin persze sokkal gyorsabb
- 3 Egyre nagyobb méretű ($n = 10, 20, 30, \dots, 200$) mátrixokra a GE futási idejének viselkedése tényleg n^3 -szerű