

A számításelmélet alapjai I. (Negyedik gyakorlat)

Dr. Lázár Katalin Anna

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C.
e-mail: lazarkati@elte.hu

2024. március 5.

- A véges automata fogalma, a determinisztikus és a nemdeterminisztikus véges automata. A véges automata működése, közvetlen (egy lépéses) redukció, redukció fogalma, a véges automata által elfogadott (felismert) nyelv. A véges automaták állapot-átmeneti leképezésének ábrázolásai: táblázattal, állapot-átmenet diagrammal (gráffal).
- Minden nemdeterminisztikus véges automatához megadható vele azonos nyelvet meghatározó reguláris grammatika. Minden reguláris grammatikához megadható olyan véges automata, amely vele azonos nyelvet határoz meg.

Véges automata

Példa 1

Legyen $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ véges automata, ahol

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $T = \{a, b\}$, $F = \{q_0\}$ és legyen $\delta(q_0, a) = q_2$,
 $\delta(q_0, b) = q_1$, $\delta(q_1, a) = q_3$, $\delta(q_1, b) = q_0$, $\delta(q_2, a) = q_0$, $\delta(q_2, b) = q_3$,
 $\delta(q_3, a) = q_1$, $\delta(q_3, b) = q_2$. Milyen szavakat fogad el az automata? Adjuk meg az A automata átmeneti állapotainak tábláját!

Véges automata

Példa 2

Adjuk meg az alábbi nyelveket felismerő véges automatákat! (Adjuk meg az A automaták állapotdiagramjait!)

- \emptyset
- $\{a, b\}^*$

Példa 3

Adjuk meg az alábbi nyelveket felismerő véges automatákat! (Adjuk meg az A automaták átmeneti állapotainak tábláit és állapotdiagramjait!

- $\{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$,
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ páratlan}\}$,
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \equiv 1 \pmod{3}\}$,

ahol $|w|_a$ az a betű előfordulásainak számát jelöli a w szóban.

Példa 4

Adjuk meg az alábbi nyelveket felismerő véges automatákat! (Adjuk meg az A automaták átmeneti állapotainak tábláit!)

- $\{(ab)^n \mid n \geq 0\}$.
- $\{a^{5n+3} \mid n \geq 0\}$.
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ } a\text{-val kezdődik vagy } b\text{-vel végződik}\}$.
- $\{a\}^* \cup \{b\}^*$.

Példa 5

Adjunk meg az alábbi nyelveket felismerő véges automatákat! (Adjuk meg az A automaták átmeneti állapotainak tábláit!)

- $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ páros}\},$
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 4\},$
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \geq 3\},$
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid w = uab, u \in \{a, b\}^*\},$
- $\{a, ab, abb, c, cb, cab\},$
- $\{a, b\}^* abba \{a, b\}^*.$

Reguláris grammatikák és véges automaták

Példa 6

Legyen $G = (N, T, P, S)$ reguláris grammatika, ahol $N = \{S, A, B, C, X\}$,
 $T = \{a, b, c\}$, és

$P = \{S \rightarrow bB, B \rightarrow cX, A \rightarrow cX, X \rightarrow aA, X \rightarrow aC, C \rightarrow \varepsilon\}$.

Konstruáljunk meg a G reguláris grammatikához egy A
nemdeterminisztikus véges automatát úgy, hogy $L(A) = L(G)$ teljesüljön.

Példa 6

Megjegyzés

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $G = (N, T, P, S)$ normálformában adott, azaz minden szabálya vagy $X \rightarrow aY$, vagy $X \rightarrow \varepsilon$ alakú, ahol $X, Y \in N$ és $a \in T$. Az $A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ nemdeterminisztikus véges automatát úgy konstruáljuk meg, hogy $Q = N$, $Q_0 = \{S\}$ és $F = \{Z \in N \mid Z \rightarrow \varepsilon \in P\}$, továbbá $\delta(X, a) = \{Y \mid X \rightarrow aY \in P\}$, $X \in N$, $a \in T$.

Reguláris grammatikák és véges automaták

Példa 7

Legyen $G = (N, T, P, S)$ reguláris grammatika, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$, és $P = \{S \rightarrow aA, S \rightarrow b, A \rightarrow aA, A \rightarrow aB, A \rightarrow bb, B \rightarrow A, B \rightarrow aaA, B \rightarrow \varepsilon\}$. Konstruáljunk meg a G reguláris grammatikához egy A nemdeterminisztikus véges automatát úgy, hogy $L(A) = L(G)$ teljesüljön!

Példa 8

Legyen $A = (Q, T, \delta, \{q_0\}, F)$ nemdeterminisztikus véges automata, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $T = \{a, b, c\}$, $F = \{q_2\}$, valamint $\delta(q_0, a) = \{q_1\}$, $\delta(q_0, b) = \{q_2\}$, $\delta(q_0, c) = \{q_1\}$, $\delta(q_1, a) = \{q_1\}$, $\delta(q_1, b) = \{q_2\}$, $\delta(q_1, c) = \{q_2\}$. Adjunk meg egy G reguláris grammatikát úgy, hogy $L(G) = L(A)$! (Adjuk meg az N és P halmazokat!)

Példa 8

Megjegyzés

Definiáljuk a $G = (N, T, P, S)$ grammatikát úgy, hogy $N = Q \cup \{S\}$ és legyen

- ① $p \rightarrow a \in P$ akkor és csak akkor, ha $q_0 a \rightarrow p \in M_\delta$ valamely $q_0 \in Q_0$ -ra,
- ② $p \rightarrow qa \in P$ akkor és csak akkor, ha $qa \rightarrow p \in M_\delta$,
- ③ $S \rightarrow p \in P$ akkor és csak akkor, ha $p \in F$,
- ④ $S \rightarrow \varepsilon \in P$ akkor és csak akkor, ha $Q_0 \cap F \neq \emptyset$.

Reguláris grammatikák és véges automaták

Példa 9

Legyen $A = (Q, T, \delta, \{q_0\}, F)$ nemdeterminisztikus véges automata, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $T = \{a, b, c\}$, $F = \{q_2\}$, valamint

$$\delta(q_0, a) = \{q_1\}, \quad \delta(q_0, b) = \{q_0\}, \quad \delta(q_0, c) = \{q_1\},$$

$$\delta(q_1, a) = \{q_1\}, \quad \delta(q_1, b) = \{q_2\}, \quad \delta(q_1, c) = \{q_2\},$$

$$\delta(q_2, a) = \{q_2\}, \quad \delta(q_2, b) = \{q_2\}, \quad \delta(q_2, c) = \{q_2\}.$$

Adjunk meg egy G reguláris grammatikát úgy, hogy $L(G) = L(A)$! (Adjuk meg az N és P halmazokat!)