

# A számításelmélet alapjai I. (Negyedik gyakorlat)

Dr. Lázár Katalin Anna

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar  
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C.  
e-mail: lazarkati@elte.hu

2024. március 5.

- A véges automata fogalma, a determinisztikus és a nemdeterminisztikus véges automata. A véges automata működése, közvetlen (egy lépéses) redukció, redukció fogalma, a véges automata által elfogadott (felismert) nyelv. A véges automaták állapot-átmeneti leképezésének ábrázolásai: táblázattal, állapot-átmenet diagrammal (gráffal).
- Minden nemdeterminisztikus véges automatához megadható vele azonos nyelvet meghatározó reguláris grammatika. Minden reguláris grammatikához megadható olyan véges automata, amely vele azonos nyelvet határoz meg.

# Véges automata

## Példa 1

Legyen  $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  véges automata, ahol

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $F = \{q_0\}$  és legyen  $\delta(q_0, a) = q_2$ ,  
 $\delta(q_0, b) = q_1$ ,  $\delta(q_1, a) = q_3$ ,  $\delta(q_1, b) = q_0$ ,  $\delta(q_2, a) = q_0$ ,  $\delta(q_2, b) = q_3$ ,  
 $\delta(q_3, a) = q_1$ ,  $\delta(q_3, b) = q_2$ . Milyen szavakat fogad el az automata? Adjuk meg az  $A$  automata átmeneti állapotainak tábláját!

# Véges automata

## Példa 1

- Az  $A$  véges automata pontosan azokat a szavakat fogadja el, amelyek páros számú  $a$  betűt és páros számú  $b$  betűt tartalmaznak.
- Az  $A$  automata átmeneti állapotainak táblája:

$\delta$	$a$	$b$
$q_0$	$q_2$	$q_1$
$q_1$	$q_3$	$q_0$
$q_2$	$q_0$	$q_3$
$q_3$	$q_1$	$q_2$

- Például, ha az input szó  $bbabab$ , az állapotok sorozata  $q_0, q_1, q_0, q_2, q_3, q_1, q_0$ .

# Véges automata

## Példa 2

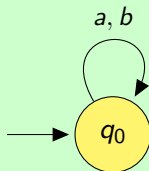
Adjuk meg az alábbi nyelveket felismerő véges automatákat! (Adjuk meg az  $A$  automaták állapotdiagramjait!)

- $\emptyset$
- $\{a, b\}^*$

# Véges automata

## Példa 2

$A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  véges automata, ahol  $Q = \{q_0\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $F = \emptyset$  és legyen  $\delta(q_0, a) = \delta(q_0, b) = q_0$ .

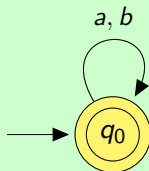


# Véges automata

## Példa 2

$A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  véges automata, ahol

$Q = \{q_0\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $F = \{q_0\}$  és legyen  $\delta(q_0, a) = \delta(q_0, b) = q_0$ .



## Példa 3

Adjuk meg az alábbi nyelveket felismerő véges automatákat! (Adjuk meg az  $A$  automaták átmeneti állapotainak tábláit és állapotdiagramjait!

- $\{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$ ,
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ páratlan}\}$ ,
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \equiv 1 \pmod{3}\}$ ,

ahol  $|w|_a$  az  $a$  betű előfordulásainak számát jelöli a  $w$  szóban.



# Véges automata

## Példa 3

Legyen  $\{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$ . Ekkor  $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  véges automata, ahol  $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $F = \{q_0, q_1\}$  és legyen

$\delta(q_0, a) = q_0, \delta(q_0, b) = q_1, \delta(q_1, a) = q_2, \delta(q_1, b) = q_1,$

$\delta(q_2, a) = q_2, \delta(q_2, b) = q_2.$

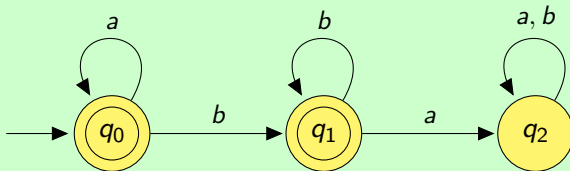
Az  $A$  automata átmeneti állapotainak táblája:

$\delta$	$a$	$b$
$\Leftrightarrow$	$q_0$	$q_1$
$\leftarrow$	$q_1$	$q_1$
	$q_2$	$q_2$

# Véges automata

## Példa 3

Az  $A$  automata állapotdiagramja:



# Véges automata

## Példa 3

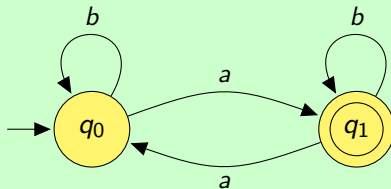
Legyen  $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ páratlan}\}$ . Ekkor  $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  véges automata, ahol  $Q = \{q_0, q_1\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $F = \{q_1\}$  és legyen  $\delta(q_0, a) = q_1$ ,  $\delta(q_1, a) = q_0$ ,  $\delta(q_i, b) = q_i$ ,  $i = 0, 1$ . Az  $A$  automata átmeneti állapotainak táblája:

$\delta$	$a$	$b$
$\rightarrow$	$q_1$	$q_0$
$\leftarrow$	$q_0$	$q_1$

# Véges automata

## Példa 3

Az  $A$  automata állapotdiagramja:



# Véges automata

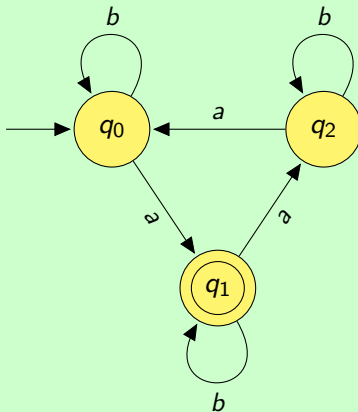
## Példa 3

Legyen  $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \equiv 1 \pmod{3}\}$ . Ekkor  $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  véges automata, ahol  $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $F = \{q_1\}$  és legyen  $\delta(q_i, a) = q_{(i+1) \bmod 3}$  és  $\delta(q_i, b) = q_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ .  
Az  $A$  automata átmeneti állapotainak táblája:

$\delta$	$a$	$b$
$\rightarrow$	$q_1$	$q_0$
$\leftarrow$	$q_2$	$q_1$
	$q_0$	$q_2$

## Példa 3

Az A automata állapotdiagramja:



## Példa 4

Adjuk meg az alábbi nyelveket felismerő véges automatákat! (Adjuk meg az  $A$  automaták átmeneti állapotainak tábláit!)

- $\{(ab)^n \mid n \geq 0\}$ .
- $\{a^{5n+3} \mid n \geq 0\}$ .
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ } a\text{-val kezdődik vagy } b\text{-vel végződik}\}$ .
- $\{a\}^* \cup \{b\}^*$ .

# Véges automata

## Példa 4

Legyen  $\{(ab)^n \mid n \geq 0\}$ . Ekkor  $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  véges automata, ahol  $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $F = \{q_0\}$  és legyen

$\delta(q_0, a) = q_1, \delta(q_0, b) = q_2, \delta(q_1, a) = q_2, \delta(q_1, b) = q_0,$

$\delta(q_2, a) = q_2, \delta(q_2, b) = q_2.$

Az  $A$  automata átmeneti állapotainak táblája:

$\delta$	$a$	$b$
$q_0$	$q_1$	$q_2$
$q_1$	$q_2$	$q_0$
$q_2$	$q_2$	$q_2$



# Véges automata

## Példa 4

Legyen  $\{a^{5n+3} \mid n \geq 0\}$ . Ekkor  $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  véges automata, ahol  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$ ,  $T = \{a\}$ ,  $F = \{q_3\}$  és legyen  $\delta(q_0, a) = q_1$ ,  $\delta(q_1, a) = q_2$ ,  $\delta(q_2, a) = q_3$ ,  $\delta(q_3, a) = q_4$  és  $\delta(q_4, a) = q_0$ .

Az  $A$  automata átmeneti állapotainak táblája:

	$\delta$	$a$
$\rightarrow$	$q_0$	$q_1$
	$q_1$	$q_2$
	$q_2$	$q_3$
$\leftarrow$	$q_3$	$q_4$
	$q_4$	$q_0$

# Véges automata

## Példa 4

Legyen  $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ } a\text{-val kezdődik vagy } b\text{-vel végződik}\}$ . Ekkor

$A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  véges automata, ahol

$Q = \{q_0, q_a, q_b, q\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $F = \{q_a, q_b\}$  és legyen

$\delta(q_0, a) = q_a, \delta(q_0, b) = q_b, \delta(q_a, a) = q_a, \delta(q_a, b) = q_a,$

$\delta(q_b, a) = q, \delta(q_b, b) = q_b, \delta(q, a) = q, \delta(q, b) = q_b.$

Az  $A$  automata átmeneti állapotainak táblája:

$\delta$	$a$	$b$
$\rightarrow$	$q_a$	$q_b$
$\leftarrow$	$q_a$	$q_a$
$\leftarrow$	$q_b$	$q$
	$q$	$q_b$

# Véges automata

## Példa 4

Legyen  $\{a\}^* \cup \{b\}^*$ . Ekkor  $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  véges automata, ahol  $Q = \{q_0, q_a, q_b, q_t\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $F = \{q_0, q_a, q_b\}$  és legyen  $\delta(q_0, a) = q_a, \delta(q_0, b) = q_b, \delta(q_a, a) = q_a, \delta(q_a, b) = q_t, \delta(q_b, a) = q_t, \delta(q_b, b) = q_b, \delta(q_t, a) = q_t, \delta(q_t, b) = q_t$ . Az  $A$  automata átmeneti állapotainak táblája:

	$\delta$	$a$	$b$
$\rightleftarrows$	$q_0$	$q_a$	$q_b$
$\leftarrow$	$q_a$	$q_a$	$q_t$
$\leftarrow$	$q_b$	$q_t$	$q_b$
	$q_t$	$q_t$	$q_t$

## Példa 5

Adjunk meg az alábbi nyelveket felismerő véges automatákat! (Adjuk meg az  $A$  automaták átmeneti állapotainak tábláit!)

- $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ páros}\},$
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 4\},$
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \geq 3\},$
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid w = uab, u \in \{a, b\}^*\},$
- $\{a, ab, abb, c, cb, cab\},$
- $\{a, b\}^* abba \{a, b\}^*.$

# Véges automata

## Példa 5

Legyen  $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ páros}\}$ . Ekkor  $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  véges automata, ahol  $Q = \{q_0, q_1\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $F = \{q_0\}$  és legyen  $\delta(q_0, a) = q_1$ ,  $\delta(q_1, a) = q_0$ ,  $\delta(q_i, b) = q_i$ ,  $i = 0, 1$ . Az  $A$  automata átmeneti állapotainak táblája:

	$\delta$	$a$	$b$
$\Leftrightarrow$	$q_0$	$q_1$	$q_0$
	$q_1$	$q_0$	$q_1$

# Véges automata

## Példa 5

Legyen  $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 4\}$ . Ekkor  $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  véges automata, ahol  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $F = \{q_4\}$  és legyen  $\delta(q_i, a) = q_{i+1}$ ,  $\delta(q_i, b) = q_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ,  $\delta(q_5, a) = q_5$ ,  $\delta(q_5, b) = q_5$ . Az  $A$  automata átmeneti állapotainak táblája:

$\delta$	$a$	$b$
$\rightarrow$	$q_1$	$q_1$
	$q_2$	$q_2$
	$q_3$	$q_3$
	$q_4$	$q_4$
$\leftarrow$	$q_5$	$q_5$
	$q_5$	$q_5$

# Véges automata

## Példa 5

Legyen  $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \geq 3\}$ . Ekkor  $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  véges automata, ahol  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $F = \{q_3\}$  és legyen  $\delta(q_i, a) = q_{i+1}$ ,  $\delta(q_i, b) = q_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $\delta(q_3, a) = q_3$ ,  $\delta(q_3, b) = q_3$ . Az  $A$  automata átmeneti állapotainak táblája:

$\delta$	$a$	$b$
$\rightarrow$	$q_1$	$q_1$
	$q_2$	$q_2$
	$q_3$	$q_3$
$\leftarrow$	$q_3$	$q_3$

# Véges automata

## Példa 5

Legyen  $\{w \in \{a, b\}^* \mid w = uab, u \in \{a, b\}^*\}$ . Ekkor  $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  véges automata, ahol  $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $F = \{q_2\}$  és legyen  $\delta(q_0, a) = q_1$ ,  $\delta(q_0, b) = q_0$ ,  $\delta(q_1, a) = q_1$ ,  $\delta(q_1, b) = q_2$ ,  $\delta(q_2, a) = q_1$ ,  $\delta(q_2, b) = q_0$ . Az  $A$  automata átmeneti állapotainak táblája:

$\delta$	$a$	$b$
$\rightarrow$	$q_1$	$q_0$
	$q_1$	$q_2$
$\leftarrow$	$q_1$	$q_0$



## Példa 5

Legyen  $\{a, ab, abb, c, cb, cab\}$ . Ekkor  $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  véges automata, ahol  $Q = \{q_0, q_a, q_c, q_{ab}, q_{ca}, q_{cb}, q_{abb}, q_{cab}, q\}$ ,  $T = \{a, b, c\}$ ,  $F = \{q_a, q_c, q_{ab}, q_{cb}, q_{abb}, q_{cab}\}$  és legyen  $\delta(q_0, a) = q_a$ ,  $\delta(q_0, b) = q$ ,  $\delta(q_0, c) = q_c$ ,  $\delta(q_a, a) = q$ ,  $\delta(q_a, b) = q_{ab}$ ,  $\delta(q_a, c) = q$ ,  $\delta(q_c, a) = q_{ca}$ ,  $\delta(q_c, b) = q_{cb}$ ,  $\delta(q_c, c) = q$ ,  $\delta(q_{ab}, a) = q$ ,  $\delta(q_{ab}, b) = q_{abb}$ ,  $\delta(q_{ab}, c) = q$ ,  $\delta(q_{ca}, a) = q$ ,  $\delta(q_{ca}, b) = q_{cab}$ ,  $\delta(q_{ca}, c) = q$ ,  $\delta(q_{cb}, a) = q$ ,  $\delta(q_{cb}, b) = q$ ,  $\delta(q_{cb}, c) = q$ ,  $\delta(q_{abb}, a) = q$ ,  $\delta(q_{abb}, b) = q$ ,  $\delta(q_{abb}, c) = q$ ,  $\delta(q_{cab}, a) = q$ ,  $\delta(q_{cab}, b) = q$ ,  $\delta(q_{cab}, c) = q$ ,  $\delta(q, a) = q$ ,  $\delta(q, b) = q$ ,  $\delta(q, c) = q$ .

# Véges automata

## Példa 5

Az  $A$  automata átmeneti állapotainak táblája:

	$\delta$	$a$	$b$	$c$
$\rightarrow$	$q_0$	$q_a$	$q$	$q_c$
$\leftarrow$	$q_a$	$q$	$q_{ab}$	$q$
$\leftarrow$	$q_c$	$q_{ca}$	$q_{cb}$	$q$
$\leftarrow$	$q_{ab}$	$q$	$q_{abb}$	$q$
	$q_{ca}$	$q$	$q_{cab}$	$q$
$\leftarrow$	$q_{cb}$	$q$	$q$	$q$
$\leftarrow$	$q_{abb}$	$q$	$q$	$q$
$\leftarrow$	$q_{cab}$	$q$	$q$	$q$
	$q$	$q$	$q$	$q$

# Véges automata

## Példa 5

Legyen  $\{a, b\}^* abba \{a, b\}^*$ . Ekkor  $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  véges automata, ahol  $Q = \{q_0, q_a, q_{ab}, q_{abb}, q_{abba}\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $F = \{q_{abba}\}$  és legyen  $\delta(q_0, a) = q_a$ ,  $\delta(q_0, b) = q_0$ ,  $\delta(q_a, a) = q_a$ ,  $\delta(q_a, b) = q_{ab}$ ,  $\delta(q_{ab}, a) = q_a$ ,  $\delta(q_{ab}, b) = q_{abb}$ ,  $\delta(q_{abb}, a) = q_{abba}$ ,  $\delta(q_{abb}, b) = q_0$ ,  $\delta(q_{abba}, a) = q_{abba}$ ,  $\delta(q_{abba}, b) = q_{abba}$ . Az  $A$  automata átmeneti állapotainak táblája:

$\delta$	$a$	$b$
$\rightarrow q_0$	$q_a$	$q_0$
$q_a$	$q_a$	$q_{ab}$
$q_{ab}$	$q_a$	$q_{abb}$
$q_{abb}$	$q_{abba}$	$q_0$
$\leftarrow q_{abba}$	$q_{abba}$	$q_{abba}$