A számításelmélet alapjai I. (Második gyakorlat)

Dr. Lázár Katalin Anna

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C.
e-mail: lazarkati@elte.hu

2024. február 20.

Tematika

- A generatív grammatika fogalma, generatív grammatikák típusai.
- A levezetés fogalma (közvetlen (egylépéses) levezetés, k lépéses levezetés, levezetés, mondatforma), generált nyelv.
- Chomsky-féle hierarchia.
- Nyelvosztályok zártsági tulajdonságai.

Generatív grammatika

Példa 1

Generatív grammatikák-e a következők? Indokoljuk!

1. $G_1 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{A \to aAb, A \to ab, B \to ba\}, S)$.
2. $G_2 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \to \varepsilon, S \to AB, A \to aA, B \to ab, abb \to aSb\}, S)$.
3. $G_3 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, S)$.
4. $G_4 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to \varepsilon, S \to SS, S \to aSb, S \to bSa\}, S)$.

Generált nyelv

Példa 2

Milyen nyelvet generálnak a következő grammatikák? Adjunk példát egy-egy lehetséges levezetésre!

1. $G_1 = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S\}$, $T = \{a, b\}$ és $P = \{S \to \varepsilon, S \to SS, S \to aS, S \to Sa, S \to aSb, S \to bSa\}$.
2. $G_2 = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S\}$, $T = \{a, b\}$ és $P = \{S \to \varepsilon, S \to aSa, S \to bSb\}$.
3. $G_3 = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b, c\}$ és $P = \{S \to \varepsilon, S \to AB, A \to \varepsilon, A \to aAb, B \to \varepsilon, B \to bBc\}$.

Generált nyelv

Példa 3

Legyen $G_4 = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S\}$, $T = \{a, b\}$ és $P = \{S \to \varepsilon, S \to SS, S \to aSb, S \to bSa\}$. Milyen nyelvet generál a G_4 grammatika? Bizonyítsuk!

Chomsky-féle hierarchia

Definíció 1

A $G = (N, T, P, S)$ generatív grammatika i-típusú, $i = 0, 1, 2, 3$, ha P szabályhalmazára teljesülnek a következők:

1. $i = 0$: nincs korlátozás,
2. $i = 1$: P minden szabálya $u_1Au_2 \to u_1vu_2$ alakú, ahol $u_1, u_2, v \in (N \cup T)^*$, $A \in N$, és $v \neq \varepsilon$, kivéve az $S \to \varepsilon$ alakú szabályt, feltéve, hogy P-ben ilyen szabály létezik. Ha P tartalmazza az $S \to \varepsilon$ szabályt, akkor S nem fordul elő P egyetlen szabályának jobb oldalán sem,
3. $i = 2$: P minden szabálya $A \to v$ alakú, ahol $A \in N$ és $v \in (N \cup T)^*$,
4. $i = 3$: P minden szabálya vagy $A \to uB$ vagy $A \to u$, alakú, ahol $A, B \in N$ és $u \in T^*$.

Grammatikák típusai

Példa 4

Legyen $G_1 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, ahol
$P = \{S \to AB, A \to BSB, A \to BB, B \to aAb, B \to \varepsilon, B \to a, B \to b\}$.
Milyen típusú G_1 grammatika?

Grammatikák típusai

Példa 5

Legyen $G_2 = (\{S, A, B\}, \{a\}, P, S)$, ahol $P = \{S \to ABa, AB \to AaBB, B \to aaa, S \to AS, AAS \to ABS\}$. Milyen típusú G_2 grammatika?

Grammatikák típusai

Példa 6

Legyen $G_3 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, P, S)$, ahol
$P = \{S \to \varepsilon, S \to AB, A \to 1B0, 0B \to 011, 1B \to 10BS\}$. Milyen típusú G_3 grammatika?

Generált nyelv

Példa 7

Adjunk környezetfüggetlen grammatikát, amely az

- $L_1 = \{a^{2n}b^{3n} \mid n \geq 0\}$
- $L_2 = \{u \in \{a, b\}^* \mid u = u^R\}$

nyelvet generálja!

Generált nyelv

Példa 8

Konstruáljunk környezetfüggetlen G grammatikát, amely az alábbi nyelvet generálja: $L = \{a^m c^k b^n \mid 1 \leq m \leq n, k \geq 1\}$! Igazoljuk állításunkat!

Generált nyelv

Példa 9

Konstruáljunk 3-típusú grammatikát a legfeljebb három a-t tartalmazó $\{a, b\}$ feletti szavak nyelvéhez! Adjuk meg *babbaab* egy lehetséges levezetését!

Zártsági tulajdonságok

Példa 10

Legyen $V = \{a, b, c\}$ egy ábécé és L egy nyelv V felett, ahol $L = L_1 L_2$ és $L_1 = \{(ab)^n \mid n \geq 0\}$ és $L_2 = \{b, cc\}$. Konstruáljunk a zártsági tulajdonságok felhasználásával egy G_c 3-as típusú grammatikát, úgy, hogy $L(G_c) = L$ legyen!

Zártsági tulajdonságok

Példa 10

Megjegyzés

A P szabályhalmazból megkonstruálunk egy P_1 szabályhalmazt úgy, hogy minden $A \to u$ alakú szabályt, ahol $A \in N$ és $u \in T^*$ felcserélünk egy $A \to uS'$ alakú szabályra ($S' \notin (N \cup T)$) és a többi szabályt változatlanul hagyjuk. A $G_c = (N \cup N', T \cup T', P_1 \cup P', S)$ grammatika nyilvánvalóan 3–típusú és generálja az $L(G)L(G')$ nyelvet.

Zártsági tulajdonságok

Példa 11

Legyen $G = (N, T, P, S)$ egy 3-as típusú grammatika, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$ és
$P = \{S \to aB, S \to b, A \to bbS, A \to bB, B \to aA, B \to \varepsilon\}$.
Konstruáljunk egy G' 3-as típusú grammatikát, amelyre $L(G') = L^*$ teljesül, ahol $L = L(G)$!

Zártsági tulajdonságok

Példa 11

Megjegyzés

Definiáljuk a P'' szabályhalmazt úgy, hogy $A \to uS$ eleme P''-nek minden $A \to u$ P-beli szabályra, ahol $u \in T^*$. Akkor a $G' = (N \cup \{S_0\}, T, P'' \cup P \cup \{S_0 \to \varepsilon, S_0 \to S\}, S_0)$ grammatika generálja az L^* nyelvet.

Zártsági tulajdonságok

Példa 12

Bizonyítsuk be a környezetfüggetlen nyelvek zártsági tulajdonságai alapján, hogy az $L = \{a^i b^j \mid i \neq j\}$ nyelv környezetfüggetlen!

Zártsági tulajdonságok

Példa 13

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$ és $P = \{S \to aAbB, A \to aA,\ B \to bBb,\ B \to bbb,\ A \to aa\}$. Legyen $L = L(G)$. Konstruáljunk meg egy olyan $G_* = (N', T, P', S')$ környezetfüggetlen grammatikát, amelyre $L(G_*) = L^*$ teljesül!

Zártsági tulajdonságok

Példa 13

Megjegyzés

Legyen $S_0 \notin N$. A $G_* = (N \cup \{S_0\}, T, P \cup \{S_0 \to \varepsilon, S_0 \to SS_0\}, S_0)$ generálja az L^* nyelvet.