A számításelmélet alapjai I.
(Harmadik gyakorlat)

Dr. Lázár Katalin Anna

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C.
e-mail: lazarkati@elte.hu

2024. február 27.

Tematika

- Lineáris grammatikák és nyelvek: a lineáris, a bal-lineáris, valamint a jobb-lineáris grammatika, nyelv és nyelvosztály fogalma. A bal-lineáris grammatikák által generált nyelvek osztálya megegyezik a reguláris nyelvek osztályával.
- Reguláris grammatikák normálformája.
- A reguláris kifejezések fogalma, reguláris kifejezések egyenlősége. Minden reguláris kifejezés reguláris nyelvet jelöl és minden reguláris nyelv leírható reguláris kifejezéssel.

Bal- és jobb-lineáris grammatikák

Példa 1

Legyen $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to abS, S \to a\}, S)$ és
$G_2 = (\{S, S_1\}, \{a, b\}, \{S \to Sab, S \to aab\}, S)$.

- Bal- vagy jobb-lineárisak az előbbi grammatikák?
- Határozzuk meg $L(G_1)$-t és $L(G_2)$-t!

Jobb-lineáris grammatikák

Példa 2

Konstruáljunk jobb-lineáris grammatikát az $L = aab^*a$ nyelvhez!

Bal- és jobb-lineáris grammatikák

Példa 3

Konstruáljunk jobb-lineáris és bal-lineáris grammatikát az $L = \{a^n b^m \mid n \geq 3, m \geq 2\}$ nyelvhez! Adjuk meg $a^4 b^3$ jobb-lineáris és bal-lineáris levezetését!

Bal- és jobb-lineáris grammatikák

Példa 4

Legyen $G = (N, T, P, S)$ bal-lineáris grammatika, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$, $P = \{S \rightarrow Abb, A \rightarrow Baa, B \rightarrow Aab, A \rightarrow aa\}$. Konstruáljunk meg egy G' jobb-lineáris grammatikát, amelyre $L(G) = L(G')$ teljesül!

Bal- és jobb-lineáris grammatikák

Példa 4

Megjegyzés

Legyen $G = (N, T, P, S)$ bal-lineáris grammatika és legyen $N = \{S, A_1, \ldots, A_n\}$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy S nem fordul elő egyetlen szabály jobb oldalán sem. Megkonstruálunk egy $G' = (N, T, P', S)$ jobb-lineáris grammatikát, amelyre $L(G) = L(G')$ teljesül.

- $S \to u \in P'$ akkor és csak akkor, ha $S \to u \in P$, $u \in T^*$,
- $S \to uA_k \in P'$ akkor és csak akkor, ha $A_k \to u \in P$, $u \in T^*$,
- $A_j \to uA_k \in P'$ akkor és csak akkor, ha $A_k \to A_j u \in P$, $u \in T^*$,
- $A_j \to u \in P'$ akkor és csak akkor, ha $S \to A_j u \in P$, $u \in T^*$.

3-as típusú grammatikák normálformája

Példa 5

Legyen $G = (N, T, P, S)$ reguláris grammatika, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$, $P_1 = \{S \to aaA, A \to bbB, A \to B, A \to aa, B \to bb\}$. Konstruáljunk G-hez egy G' reguláris grammatikát, amely normálformájú és amelyre $L(G') = L(G)$!

3-as típusú grammatikák normálformája

Példa 5

Megjegyzés

- Normálforma alatt a 3-as típusú grammatikák normálformáját értjük.
- Legyen $G = (N, T, P, S)$ 3-típusú grammatika. Ismeretes, hogy G szabályai vagy $A \to uB$, vagy $A \to u$ alakúak, ahol $A, B \in N$ és $u \in T^*$.
- Minden 3-típusú, azaz reguláris nyelv generálható egy olyan grammatikával, amelynek szabályai vagy $X \to aY$, ahol $X, Y \in N$ és $a \in T$, vagy $X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X \in N$.

3-as típusú grammatikák normálformája

Példa 5

Megjegyzés

- Először ún. hosszredukciót hajtunk végre:
  - minden egyes $A \to a_1 \dots a_n B$, $n \geq 2$, alakú szabályt egy $\{A \to a_1 Z_1, Z_1 \to a_2 Z_2, \dots, Z_{n-1} \to a_n B\}$ szabályhalmazzal helyettesítünk, ahol $Z_1, \dots, Z_{n-1}$ új, a szabályhoz bevezetett nemterminálisok, és
  - minden egyes $A \to a_1 \dots a_m$, $m \geq 1$ alakú szabályt pedig helyettesítünk egy $\{A \to a_1 Y_1, Y_1 \to a_2 Y_2, \dots, Y_{m-1} \to a_m Y_m, Y_m \to \varepsilon\}$ szabályhalmazzal, ahol $Y_1, \dots, Y_m$ a szabályhoz bevezetett új nemterminálisok.
- Az így kapott új P'' szabályhalmaz elemei $X \to aY$, $X \to Y$, $X \to \varepsilon$ alakúak, ahol $X, Y \in N$ és $a \in T$.

3-as típusú grammatikák normálformája

Példa 5

Megjegyzés

- Ezután elimináljuk a láncszabályokat.
- Legyen N' a P'' szabályhalmazban előforduló nemterminálisok halmaza (az új nemterminálisokat is beszámítva). Legyen bármely $X \in N'$ nemterminálisra $U(X) = \{Y \mid Y \Longrightarrow^* X\}$.
- Definiáljuk a P' szabályhalmazt a következőképpen:
  - $X \to aY \in P'$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $Z \in N'$, amelyre $X \in U(Z)$ és $Z \to aY \in P''$, valamint
  - $X \to \varepsilon \in P'$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $Z \in N'$, amelyre $X \in U(Z)$ és $Z \to \varepsilon \in P''$.
  - Más szabály nincs P'-ben.

3-as típusú grammatikák normálformája

Példa 6

Legyen $G = (N, T, P, S)$ egy 3-as típusú grammatika, ahol $N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{a, b\}$ és $P = \{S \to abB, S \to b, A \to S, A \to aC, B \to \varepsilon, B \to bA, C \to aA, C \to a\}$. Konstruáljunk egy G' 3-as típusú grammatikát, amely normálformájú és amelyre $L(G) = L(G')$ teljesül!

Reguláris kifejezések

Példa 7

Adjunk reguláris kifejezést a legfeljebb 3 a-t tartalmazó $\{a, b\}$ feletti szavak nyelvéhez!

Reguláris kifejezések

Példa 8

Adjuk meg reguláris kifejezéssel azt a nyelvet a $\{0, 1\}$ ábécé felett,

- amely azon szavakból áll, amelyek tartalmazzák részszóként a 010 szót!
- amely azon szavakból áll, amelyek tartalmazzák részszóként a 000 vagy az 111 szót!
- amely azon 1-esre végződő szavakból áll, amelyek nem tartalmazzák részszóként a 00 szót!
- amely azon szavakból áll, melynek 3. betűje 0!

Reguláris kifejezések

Példa 9

Határozzuk meg, hogy a következő reguláris kifejezések közül melyek ekvivalensek!

- $(a^* ba^*)^*$
- $b(a+b)(ab)^*$
- $(a+b)^*$
- $(ab)^*$
- $\emptyset^* + a(ba)^* b$
- $a(b^* a)^*$
- $a^*(ba^*)^*$
- $(a^* b^*)^*$

Reguláris kifejezések

Példa 9

- $a(b^*(a+\varepsilon))^*$
- $(a^*b)^*a^*$
- $a^*b^*a^*$
- $a(a+b)^*$
- $b(ab)^*a$
- $(a+ab+b)^*$
- $(a+ab)^*$

Reguláris kifejezések

Példa 10

Ugyanazt a nyelvet jelölik-e az $\{a, b\}\{a\}^*$ és $\{a\}\{a\}^* \cup \{b\}\{a\}^*$ reguláris kifejezések?

Reguláris kifejezések

Példa 11

Ugyanazt a nyelvet jelölik-e az alábbi reguláris kifejezések:

- $a^* + (a^* + b^*) = (a^* + a^*) + b^*$,
- $(a + b^*)a^* = a \cdot a^* + b^* \cdot a^*$,
- $a^* = \varepsilon + a \cdot a^*$,
- $(a + b^*)^* = (\varepsilon + (a + b^*))^*$?

Reguláris kifejezések

Példa 11

Megjegyzés

Axiómák reguláris kifejezésekre: Legyenek P, Q, R reguláris kifejezések. Akkor P, Q és R helyébe reguláris kifejezéseket írva fennállnak az alábbi egyenlőségek:

- $P + (Q + R) = (P + Q) + R$
- $P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$
- $P + Q = Q + P$
- $P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$
- $(P + Q) \cdot R = P \cdot R + Q \cdot R$

Reguláris kifejezések

Példa 11

Megjegyzés

- $P^* = \varepsilon + P \cdot P^*$
- $\varepsilon \cdot P = P \cdot \varepsilon = P$
- $P^* = (\varepsilon + P)^*$
- Ha $P = R + P \cdot Q$ és $\varepsilon \notin Q$, akkor $P = R \cdot Q^*$ (inferencia szabály)
- $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$
- $\emptyset \cdot P = P \cdot \emptyset = \emptyset$

Reguláris kifejezések

Példa 12

Adjuk meg a következő reguláris kifejezések által jelölt nyelvet generáló 3-típusú (jobb-lineáris) grammatikát!

- $(a(a+ba)^*)^*$
- $(a+(b+ab)^*)^*$
- $(ab)^*+(ba)^*$
- $a^*+(ab)^*$