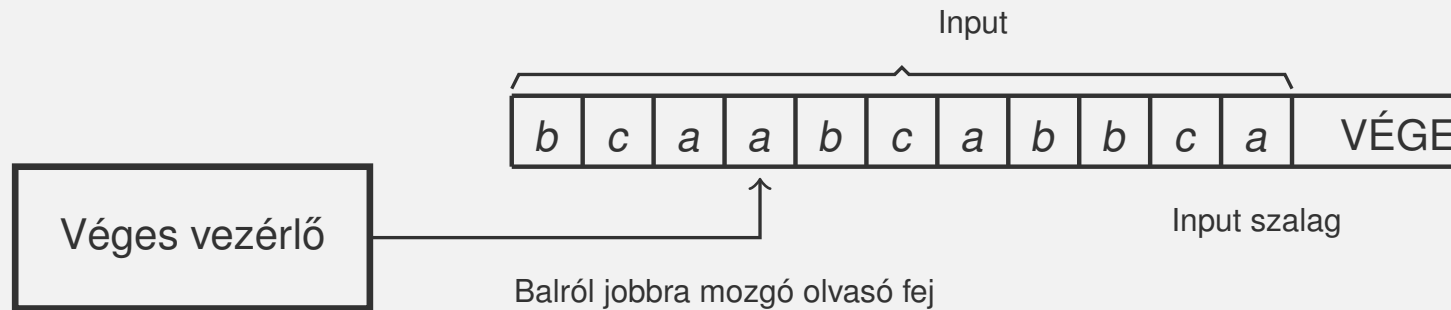


A számításelmélet alapjai I.

4. előadás

előadó: Tichler Krisztián
ktichler@inf.elte.hu

Véges automata



- ▶ Formális nyelvek megadása nemcsak generatív eszközökkel, hanem felismerő eszközökkel is lehetséges. Ilyen eszközök az automaták, amelyek szavak feldolgozására és azonosítására alkalmasak.
- ▶ Nyelvek megadására a grammatikák szintetizáló, az automaták analitikus megközelítést alkalmaznak.
- ▶ Az automata egy szó feldolgozása után kétféle választ adhat, vagy elfogadja (igen), vagy elutasítja (nem) a bemenetet.

Véges automata

- ▶ A véges automata diszkrét időintervallumokban végrehajtott lépések sorozatán keresztül működik.
- ▶ A véges automata a kezdőállapotából indul, az inputszó az inputszalagon helyezkedik el, az olvasófej pedig az inputszó legbaloldalibb szimbólumán áll.
- ▶ Az automata, miután elolvasott egy szimbólumot, az olvasófejet egy pozícióval jobbra mozgatja, majd állapotot vált az állapot-átmenet függvénye szerint.
- ▶ Amennyiben az automata még nem olvasta végig a teljes inputot és elfogadó állapotba ér nem dönt még az elfogadásról/elutasításról, tovább működik a szabályai szerint.
- ▶ Ha az automata elolvasta az inputot, akkor megáll és aktuális állapota alapján válaszol, hogy felismeri vagy elutasítja a bemeneti szót.

Determinisztikus véges automata

Definíció

Egy **determinisztikus véges automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, ahol

- ▶ Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,
- ▶ Σ az **inputszimbólumok ábécéje**,
- ▶ $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ leképezés, az ún. **állapot-átmenet függvény**, δ értelmezési tartománya a teljes $Q \times \Sigma$.
- ▶ $q_0 \in Q$ a **kezdőállapot**,
- ▶ $F \subseteq Q$ az **elfogadó állapotok halmaza**.

Tehát minden $(q, a) \in Q \times \Sigma$ párra **pontosan egy** olyan s állapot létezik, amelyre $\delta(q, a) = s$ fennáll.

Megjegyzés: Az elfogadó állapotokra használható alternatívaként a végállapot szó is.

Az átmenetfüggvény kiterjesztése

Legyen $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ egy determinisztikus véges automata (DVA).

Definíció

A δ leképezés **kiterjesztése** az a $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ (teljes) leképezés, amelyre

- ▶ $\hat{\delta}(q, \varepsilon) := q$
- ▶ $\hat{\delta}(q, xa) := \delta(\hat{\delta}(q, x), a) \quad (\forall x \in \Sigma^*, a \in \Sigma)$

$\hat{\delta}(q, u)$ tehát az az állapota az automatának, ahova a q állapotból indulva az u szó feldolgozása után eljut.

Ha $\hat{\delta}(q_0, u) \in F$, akkor az u inputot elfogadja A , ha $\hat{\delta}(q_0, u) \notin F$, akkor elutasítja.

Mivel $\hat{\delta}$ a δ kiterjesztése, ezért általában nem zavaró, ha a $\hat{\delta}$ -t elhagyjuk.

Determinisztikus véges automata – példa

1. példa: Legyen $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ véges automata, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_1, q_2\}$ és legyen

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, a) = q_2, & \delta(q_0, b) = q_1, \\ \delta(q_1, a) = q_3, & \delta(q_1, b) = q_0, \\ \delta(q_2, a) = q_0, & \delta(q_2, b) = q_3, \\ \delta(q_3, a) = q_1, & \delta(q_3, b) = q_2. \end{array}$$

Például

$$\delta(q_2, abb) = \delta(\delta(\delta(q_2, a), b), b) = \delta(\delta(q_0, b), b) = \delta(q_1, b) = q_0.$$

q_0 : eddig páros sok a és páros sok b volt.

q_1 : eddig páros sok a és páratlan sok b volt.

q_2 : eddig páratlan sok a és páros sok b volt.

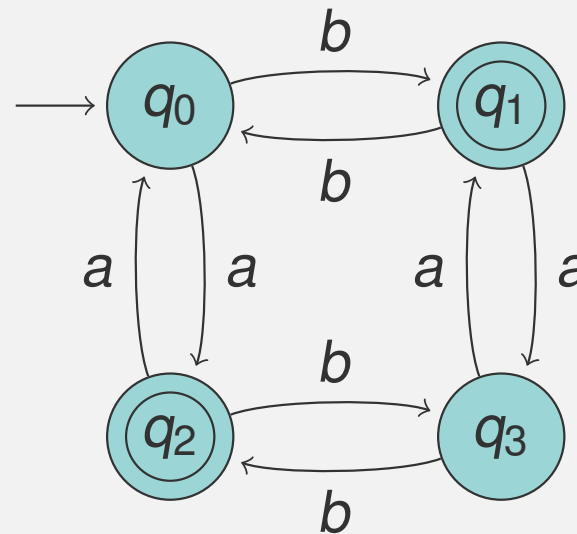
q_3 : eddig páratlan sok a és páratlan sok b volt.

Az A véges automata pontosan azokat a szavakat fogadja el, amelyekben az a és b betűk paritása (párossága) különbözik.

Determinisztikus véges automata – példa

1. Az automatát megadhatjuk **táblázattal** is ($q \in Q$ sorában és $t \in \Sigma$ oszlopában a cella tartalma $\delta(q, t)$, \rightarrow : kezdőállapot, \leftarrow : elfogadó állapot, \Leftrightarrow : ha a kezdőállapot elfogadó).

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_2	q_1
$\leftarrow q_1$	q_3	q_0
$\leftarrow q_2$	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2



2. Vagy **átmenetdiagrammal** (a gráf csúcsai az Q elemeivel vannak címkézve; akkor és csak akkor megy $q \in Q$ -ból egy $t \in \Sigma$ címkéjű él $r \in Q$ -ba, ha $\delta(q, t) = r$. A kezdőállapot \rightarrow -al van megjelölve, az elfogadó állapotok duplán vannak bekarikázva.)

Véges nemdeterminisztikus automata

Determinisztikus véges automata:

- ▶ A δ függvény mindenütt értelmezett és egyértékű. Azaz minden $(q, a) \in Q \times \Sigma$ párra pontosan egy olyan s állapot létezik, amelyre $\delta(q, a) = s$ fennáll.

Nemdeterminisztikus véges automata:

- ▶ Megengedjük az állapot-átmenet függvény többértékűségét, azaz δ ekkor egy $Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ leképezés.
- ▶ Több kezdőállapot is megengedett (azaz a kezdőállapotok Q_0 halmazára $Q_0 \subseteq Q$).
- ▶ Úgy interpretálhatjuk, hogy a $q \in Q$ állapotból az $a \in \Sigma$ betű olvasására a gép egy tetszőleges $\delta(q, a)$ -beli új állapotba léphet, azaz adott inputra több működés lehetséges.
- ▶ Mivel $\emptyset \in \mathcal{P}(Q)$, ezért előfordulhat, hogy az $\delta(q, a) = \emptyset$ valamely (q, a) -ra, ilyenkor elakad a gép.
- ▶ Akkor fogad el egy bemenetet, ha van legalább egy F -beli állapotban termináló működése.

Nemdeterminisztikus véges automata

Definíció

A **nemdeterminisztikus véges automata** egy rendezett ötös, $A = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$, ahol

- ▶ Q az **állapotok** egy véges, nemüres halmaza,
- ▶ Σ az **inputszimbólumok ábécéje**,
- ▶ $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ leképezés, az **állapot-átmenet függvény**,
- ▶ $Q_0 \subseteq Q$ a **kezdőállapotok halmaza**,
- ▶ $F \subseteq Q$ az **elfogadó állapotok halmaza**.

Megjegyzés: A determinisztikus véges automata a nemdeterminisztikus véges automata speciális esetének tekinthető. Ha minden $(q, a) \in Q \times \Sigma$ esetén $|\delta(q, a)| = 1$, akkor minden bemenetre pontosan 1 működés lehetséges és az elfogadás is ugyanazt jelenti.

Nemdeterminisztikus véges automata – példa

2. példa: Legyen $A = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$ nemdeterminisztikus véges automata (NVA vagy NDVA), ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $Q_0 = \{q_0, q_2\}$, $F = \{q_1, q_2\}$ és legyen

$$\delta(q_0, a) = \{q_1, q_2\},$$

$$\delta(q_1, a) = \{q_3\},$$

$$\delta(q_2, a) = \{q_0\},$$

$$\delta(q_3, a) = \{q_1\},$$

$$\delta(q_0, b) = \{q_1\},$$

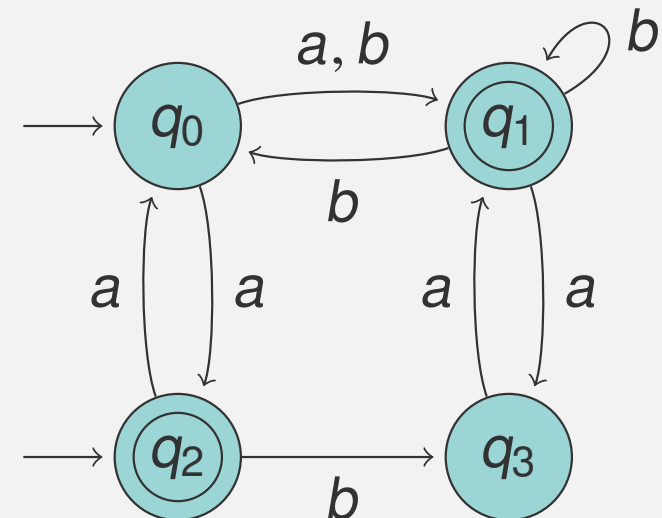
$$\delta(q_1, b) = \{q_0, q_1\},$$

$$\delta(q_2, b) = \{q_3\},$$

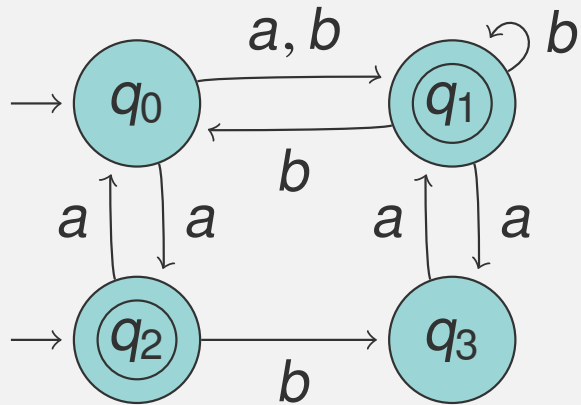
$$\delta(q_3, b) = \{\}.$$

Ugyanez táblázattal, illetve átmenetdiagrammal:

	a	b
$\rightarrow q_0$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
$\leftarrow q_1$	$\{q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\rightleftharpoons q_2$	$\{q_0\}$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_1\}$	$\{\}$



Nemdeterminisztikus véges automata – példa



Elfogadja aab -t mert erre az inputra van **legalább egy** elfogadó számítás.

Néhány lehetséges működés az aab bemenetre:

1. lehetőség:

állapot	q_2	q_0	q_1	q_0	$\notin F$
feldolgozandó	aab	ab	b	ε	elutasító számítás

2. lehetőség:

állapot	q_0	q_1	q_3	
feldolgozandó	aab	ab	b	elakadó számítás

3. lehetőség:

állapot	q_2	q_0	q_1	q_1	$\in F$
feldolgozandó	aab	ab	b	ε	elfogadó számítás

Szabály alapú alternatív megközelítés

Legyen $A = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$ egy nemdeterminisztikus véges automata.

Az átmenetek szabály alapon történő megadása:

Az A nemdeterminisztikus véges automatához tartozó M_δ szabályrendszerhez minden $p, q \in Q$, $a \in \Sigma$, $p \in \delta(q, a)$ esetén adjuk hozzá a

$$qa \rightarrow p$$

alakú átírási szabályt, azaz

$$M_\delta = \{qa \rightarrow p \mid p, q \in Q, a \in \Sigma, p \in \delta(q, a)\}$$

Megjegyzés: Tehát egy egyetlen kezdőállapottal rendelkező A véges automata pontosan akkor determinisztikus, ha minden egyes $(q, a) \in Q \times \Sigma$ pár esetén pontosan egy $p \in Q$ létezik, melyre $qa \rightarrow p \in M_\delta$.

Szabály alapú alternatív megközelítés

Nézzük meg a 2. (nemdeterminisztikus) példa esetén mely szabályokból áll M_δ .

Példa:

$M :$	a	b
$\rightarrow q_0$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
$\leftarrow q_1$	$\{q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\rightleftharpoons q_2$	$\{q_0\}$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_1\}$	$\{\}$

$M_\delta :$	
$q_0 a \rightarrow q_1 \mid q_2$	$q_0 b \rightarrow q_1$
$q_1 a \rightarrow q_3$	$q_1 b \rightarrow q_0 \mid q_1$
$q_2 a \rightarrow q_0$	$q_2 b \rightarrow q_3$
$q_3 a \rightarrow q_1$	

Megjegyzés: Bár M_δ egy szabályrendszer, így önmagában nem tekinthető grammatikának.

Véges automata – egylépéses redukció

Láttuk, hogy az automata további működése mindig csak az aktuális, $q \in Q$ állapottól és a bemenet még hátralévő olvasatlan $w \in \Sigma^*$ suffixétől függ. Ez motiválja a következőt.

Definíció

Egy $u \in Q\Sigma^*$ szót az $A = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$ NDVA egy **konfigurációjának** nevezzük.

Definíció

Legyen $A = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$ egy véges automata és legyenek $u, v \in Q\Sigma^*$ konfigurációk. Az A automata az u szót **egy lépésben** (közvetlenül) a v szóra **redukálja** (jelölés: $u \Rightarrow_A v$), ha van olyan $qa \rightarrow p \in M_\delta$ szabály (azaz $p \in \delta(q, a)$) és olyan $w \in \Sigma^*$ szó, hogy $u = qaw$ és $v = pw$ teljesül.

Megjegyzés: Determinisztikus esetben bármely $u \in Q\Sigma^+$ esetén egyértelműen létezik egy olyan $v \in Q\Sigma^*$, melyre $u \Rightarrow_A v$.

Véges automata – redukció

Definíció

Az $A = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$ véges automata az $u \in Q\Sigma^*$ szót a $v \in Q\Sigma^*$ szóra **redukálja** (jelölés: $u \Rightarrow_A^* v$), ha vagy $u = v$ vagy valamely $k \geq 1$ -re léteznek w_0, \dots, w_k konfigurációk melyekre $w_{i-1} \Rightarrow_A w_i$ ($1 \leq i \leq k$), $w_0 = u$ és $w_k = v$.

Megjegyzés: A levezetés hossza ($|u| - |v|$) szerinti rekurzióval is definiálhatnánk a többlépéses redukciót. Azaz $u \Rightarrow_A^* v$ ha vagy $u = v$, vagy van olyan $z \in Q\Sigma^*$, $|z| = |v| + 1$, amelyre $u \Rightarrow_A^* z$ és $z \Rightarrow_A v$ teljesül.

Megjegyzés: $A \Rightarrow_A^*$ reláció a \Rightarrow_A reláció reflexív, tranzitív lezártja.

Megjegyzés: $A \Rightarrow_A^*$ a grammatikák elméletéből ismert levezetés fogalmával azonos (konfigurációk között M_δ -beli szabályok szerint).

Megjegyzés: Míg nemdeterminisztikus esetben egy konfigurációból akár több mint 1, akár 0 darab adott lépésszámú redukció lehetséges, addig determinisztikus esetben pontosan 1.

Véges automata – Elfogadott nyelv

Definíció

Az $A = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$ nemdeterminisztikus véges automata által **elfogadott nyelv**:

$$L(A) = \{u \in \Sigma^* \mid q_0 u \Rightarrow_A^* p \text{ valamely } q_0 \in Q_0\text{-ra és } p \in F\text{-re}\}.$$

Megjegyzés: $L(A)$ -t az A által felismert nyelvnek is nevezik.

Megjegyzés: $\varepsilon \in L(A) \iff Q_0 \cap F \neq \emptyset$.

Megjegyzés: Determinisztikus esetben $Q_0 = \{q_0\}$ egyelemű, és minden $u \in \Sigma^*$ -ra $q_0 u$ pontosan egyféleképp redukálható valamely $p \in Q$ -ra. A akkor fogadja el u -t, ha $p \in F$ teljesül. Azaz:

$$L(A) = \{u \in \Sigma^* \mid q_0 u \Rightarrow_A^* p, \text{ ahol } p \in F\}.$$

Megjegyzés: Determinisztikus esetben alternatív módon a kiterjesztett δ függvénnnyel is definálható $L(A)$:

$$L(A) = \{u \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, u) \in F\}.$$

Megjegyzés: Ha egyértelmű, hogy melyik automatában történik a redukció \Rightarrow_A alsó indexe elhagyható.

Véges automata – példák

Az **1. példa** (DVA) esetén M_δ a következő szabályokból áll:

$$q_0 a \rightarrow q_2, \quad q_0 b \rightarrow q_1, \quad q_1 a \rightarrow q_3, \quad q_1 b \rightarrow q_0$$

$$q_2 a \rightarrow q_0, \quad q_2 b \rightarrow q_3, \quad q_3 a \rightarrow q_1, \quad q_3 b \rightarrow q_2.$$

$$q_0 aab \Rightarrow q_2 ab \Rightarrow q_0 b \Rightarrow q_1.$$

Ez aab egyetlen olyan redukciója, amely a teljes szót feldolgozza.

Mivel $q_1 \in F$, ezért $aab \in L(A)$.

A **2. példa** (NDVA) esetén M_δ a következő szabályokból áll:

$$q_0 a \rightarrow q_1 \mid q_2, \quad q_0 b \rightarrow q_1, \quad q_1 a \rightarrow q_3, \quad q_1 b \rightarrow q_0 \mid q_1$$

$$q_2 a \rightarrow q_0, \quad q_2 b \rightarrow q_3, \quad q_3 a \rightarrow q_1.$$

Tekintsük az alábbi két redukciót:

$$q_2 aab \Rightarrow q_0 ab \Rightarrow q_1 b \Rightarrow q_0. \text{ (a korábbi „1. lehetőség” megfelelője)}$$

$$q_2 aab \Rightarrow q_0 ab \Rightarrow q_1 b \Rightarrow q_1. \text{ (a korábbi „3. lehetőség” megfelelője)}$$

Ez két olyan redukció, amelyik az aab bemenetre, valamely kezdőállapotból a teljes bemenetet feldolgozza. Mivel $q_1 \in F$, ezért a 2. redukció alapján $aab \in L(A)$.

Véges automaták és reguláris nyelvek

Tétel

Minden A nemdeterminisztikus véges automatához meg tudunk adni egy 3-típusú G grammatikát úgy, hogy $L(G) = L(A)$ teljesül.

Bizonyítás: Legyen $A = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$ egy nemdeterminisztikus véges automata.

Minden $qa \rightarrow p \in M_\delta$ ($q, p \in Q, a \in \Sigma, p \in \delta(q, a)$) állapot-átmeneti szabály hossz-csökkentő, de könnyen belátható, hogy a redukció megfelel egy bal-lineáris grammatikabeli levezetés fordítottjának.

Legyen $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ egy grammatika, melyre $N = Q \cup \{S\}$ ($S \notin Q$). és defináljuk a P szabályrendszert a következőképpen.

1. $p \rightarrow a : \in P$ akkor és csak akkor, ha $q_0 a \rightarrow p \in M_\delta$ valamely $q_0 \in Q_0$ -ra,
2. $p \rightarrow qa : \in P$ akkor és csak akkor, ha $qa \rightarrow p \in M_\delta$,
3. $S \rightarrow p : \in P$ akkor és csak akkor, ha $p \in F$,
4. $S \rightarrow \varepsilon : \in P$ akkor és csak akkor, ha $Q_0 \cap F \neq \emptyset$

Véges automaták és reguláris nyelvek

Nyilvánvaló, hogy $\varepsilon \in L(G)$ akkor és csak akkor, ha $\varepsilon \in L(A)$.

$L(A) \subseteq L(G)$:

- ▶ Tegyük fel, hogy $u \neq \varepsilon, u \in L(A)$. Akkor van olyan $q_0 \in Q_0$ kezdőállapot és olyan $p \in F$ elfogadó állapot, hogy $q_0 u \Rightarrow_A^* p$ teljesül. Tekintve ennek a redukciónak a megfordítását, a 2. csoportba tartozó szabályok használatával meg tudjuk konstruálni a $p \Rightarrow_G^* q_0 u$ levezetést.
- ▶ Ez a G -beli levezetés egy $p_1 \rightarrow q_0 a$ alakú szabály alkalmazásával ér véget valamely $p_1 \in Q$ -ra. Ekkor a 2. pont szerint $q_0 a \rightarrow p_1 \in M_\delta$, de ekkor az 1. pont szerint $p_1 \rightarrow a \in P$. Tehát $p \Rightarrow_G^* u$ is igaz, ha a $p_1 \rightarrow a$ szabályt alkalmazzuk $p_1 \rightarrow q_0 a$ helyett utoljára.
- ▶ Mivel $p \in F$, ezért a 3. pont alapján $S \rightarrow p \in P$, tehát $S \Rightarrow_G^* u$.
- ▶ Tehát mivel u tetszőleges $L(A)$ -beli volt, $L(A) \subseteq L(G)$.

Véges automaták és reguláris nyelvek

$L(G) \subseteq L(A)$:

- ▶ Legyen $u \in L(G)$ és $u \neq \varepsilon$. Ekkor $S \Rightarrow_G^* u$, ahol $u \in \Sigma^+$.
- ▶ A G konstrukciója alapján akkor létezik az

$$S \Rightarrow_G p \Rightarrow_G^* p_1 v \Rightarrow_G av = u$$

levezetés, ahol $p \in F$ és $p_1 \rightarrow a \in P$.

- ▶ Mivel $p_1 \rightarrow a \in P$, ezért az 1. pont alapján $q_0 a \rightarrow p_1 \in M_\delta$ valamely $q_0 \in Q_0$ -ra, és így a 2. pont alapján $p_1 \rightarrow q_0 a \in P$. Ha az utolsóként alkalmazott $p_1 \rightarrow a$ szabályt $p_1 \rightarrow q_0 a$ -ra cseréljük a levezetésben kapjuk, hogy $p \Rightarrow_G^* q_0 u$.
- ▶ A 2. pont szabályaival ebből $q_0 u \Rightarrow_A^* p$ következik.
- ▶ Mivel $p \in F$, ezért $u \in L(A)$, azaz mivel u tetszőleges $L(G)$ -beli volt, $L(G) \subseteq L(A)$.

G bal-lineáris grammatika. Korábbi tételünk szerint létezik G' jobb-lineáris grammatika, melyre $L(G') = L(G)$ teljesül bizonyítva a tételt. □

Véges automaták és reguláris nyelvek

Következmény:

NDVA		NDVA (M_δ)	bal-lineáris	jobb-lineáris
q_0 kezdőállapot			S ÚJ kezdőszimbólum	
$p \in \delta(q_0, a)$		$q_0 a \rightarrow p \ (q_0 \in Q_0)$	$p \rightarrow a$	$S \rightarrow ap$
$p \in \delta(q, a)$		$qa \rightarrow p$	$p \rightarrow qa$	$q \rightarrow ap$
$p \in F$			$S \rightarrow p$	$p \rightarrow \varepsilon$
$Q_0 \cap F \neq \emptyset$			$S \rightarrow \varepsilon$	$S \rightarrow \varepsilon$

Következmény: (ha A determinisztikus)

DVA		DVA (M_δ)	jobb-lineáris
q_0 kezdőállapot			q_0 kezdőszimbólum
$\delta(q, a) = p$		$qa \rightarrow p$	$q \rightarrow ap$
$p \in F$			$p \rightarrow \varepsilon$

Véges automaták és reguláris nyelvek

1. példa:

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_2	q_1
$\leftarrow q_1$	q_3	q_0
$\leftarrow q_2$	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

3-as típusú grammatika:

$$q_0 \rightarrow aq_2 \mid bq_1$$

$$q_1 \rightarrow aq_3 \mid bq_0 \mid \varepsilon$$

$$q_2 \rightarrow aq_0 \mid bq_3 \mid \varepsilon$$

$$q_3 \rightarrow aq_1 \mid bq_2$$

2. példa:

	a	b
$\rightarrow q_0$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
$\leftarrow q_1$	$\{q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\Leftrightarrow q_2$	$\{q_0\}$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_1\}$	$\{\}$

3-as típusú grammatika:

$$S \rightarrow aq_1 \mid aq_2 \mid bq_1 \mid aq_0 \mid bq_3 \mid \varepsilon$$

$$q_0 \rightarrow aq_1 \mid aq_2 \mid bq_1$$

$$q_1 \rightarrow aq_3 \mid bq_0 \mid bq_1 \mid \varepsilon$$

$$q_2 \rightarrow aq_0 \mid bq_3 \mid \varepsilon$$

$$q_3 \rightarrow aq_1$$

Véges automaták és reguláris nyelvek

Tétel

Minden 3-típusú G grammatikához meg tudunk adni egy A nemdeterminisztikus véges automatát úgy, hogy $L(A) = L(G)$ teljesül.

Bizonyítás:

- ▶ Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ normálformában van (minden szabály vagy $X \rightarrow aY$, vagy $X \rightarrow \varepsilon$ alakú, ahol $X, Y \in N$ és $a \in \Sigma$).
- ▶ Legyen $A = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$ az a nemdeterminisztikus véges automata melyre

$$Q = N, \quad Q_0 = \{S\}, \quad \text{és} \quad F = \{Z \in N \mid Z \rightarrow \varepsilon \in P\}.$$

Legyen M_δ úgy definiálva, hogy

$$Xa \rightarrow Y \in M_\delta \text{ akkor és csak akkor, ha } X \rightarrow aY \in P.$$

Véges automaták és reguláris nyelvek

- ▶ A levezetés hosszára vonatkozó teljes indukcióval egyszerűen adódik, hogy minden $X, Y \in N$, $u \in \Sigma^*$ esetén

$$X \Rightarrow_G^* uY \iff Xu \Rightarrow_A^* Y.$$

- ▶ Az $S \Rightarrow_G^* uZ \Rightarrow_G u$ G -beli levezetéshez tehát van A -ban olyan redukció, amelyre $Su \Rightarrow_A^* Z$ teljesül. Mivel G a $Z \rightarrow \varepsilon$ szabályt használta ezért $Z \in F$.
- ▶ Megfordítva, minden A -beli $Su \Rightarrow_A^* Z$, $Z \in F$ redukcióhoz tudunk egy megfelelő $S \Rightarrow_G^* uZ$ levezetést találni G -ben. Mivel $Z \in F$, ezért van $Z \rightarrow \varepsilon$ szabály, tehát $S \Rightarrow_G^* uZ \Rightarrow u$. \square

Példa:

$S \rightarrow aA \mid aB \mid bB \mid \varepsilon$

$A \rightarrow bS \mid bB$

$B \rightarrow aS \mid aA \mid \varepsilon$

	a	b
$\Leftarrow S$	$\{A, B\}$	$\{B\}$
A	$\{\}$	$\{S, B\}$
$\leftarrow B$	$\{S, A\}$	$\{\}$

Véges automata determinizálása

Tétel

Minden $A = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$ nemdeterminisztikus véges automatához megkonstruálható egy $A' = \langle Q', \Sigma, \delta', q'_0, F' \rangle$ determinisztikus véges automata úgy, hogy $L(A') = L(A)$ teljesül.

A konstrukció:

$$Q' := \mathcal{P}(Q), \quad q'_0 := Q_0, \quad F' := \{q' \in Q' \mid q' \cap F \neq \emptyset\},$$

$$\delta'(q', a) := \bigcup_{q \in q'} \delta(q, a).$$

A konstrukció helyességét a jövő héten látjuk be.

Tehát mind a determinisztikus véges automaták, mind a nemdeterminisztikus véges automaták reguláris (\mathcal{L}_3 -beli) nyelveket leíró formális eszközök.

Véges automata determinizálása – példa

	<i>a</i>	<i>b</i>
$\rightarrow q_0$	$\{\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\Leftrightarrow q_1$	$\{q_0\}$	$\{\}$
$\leftarrow q_2$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$

NVA

	<i>a</i>	<i>b</i>
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{q_0\}$	$\{\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\leftarrow \{q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{\}$
$\leftarrow \{q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
$\Leftrightarrow \{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\leftarrow \{q_0, q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\leftarrow \{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_2\}$
$\leftarrow \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$

DVA