A számításelmélet alapjai I.
(Első gyakorlat)

Dr. Lázár Katalin Anna

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C.
e-mail: lazarkati@elte.hu

2024. február 13.

Tematika

- Ábécé, szavak (sztringek), üres szó, alapvető műveletek szavakon (konkatenáció, a szó i-dik hatványa), szó hossza, szavak egyenlősége (azonossága), szavak (valódi) részszavai, szavak prefixuma (kezdőszelete), szuffixuma (utótagja), tükörképe (fordítottja).
- Nyelv, üres nyelv, véges, végtelen nyelv.
- Nyelvekre vonatkozó műveletek: unió, metszet, különbség, komplemens, konkatenáció, i-dik iteráció, iteratív lezárt (lezárt vagy Kleene-lezárt), tükörkép (megfordítás), prefixum (prefixnyelv), szuffixum (szuffixnyelv), homomorfizmus, izomorfizmus.

Műveletek szavakon

Példa 1

Legyen $V = \{a, b, c\}$ és legyen $u_1 = cab$, $u_2 = aabc$ egy-egy V feletti szó.

1. Soroljuk fel u_1 és u_2 valódi részszavait!
2. Adjuk meg u_1 és u_2 hosszát!
3. Határozzuk meg u_1 és u_2 konkatenáltját! Igaz-e, hogy $u_1u_2 = u_2u_1$?
4. Határozzuk meg u_1 és u_2 tükörképét (fordítottját), valamint $u_2^R u_1$-et!
5. Igaz-e, hogy ab prefixuma (kezdőszelete) u_1-nek, bc szuffixuma (utótagja) u_2-nek?
6. Határozzuk meg u_1 és u_2 j-dik hatványait (vagyis u_1^j-t és u_2^j-t), ahol $j = 0, 1, 2, 3$!

Műveletek szavakon

Példa 1

1. u_1 valódi részszavai: c, a, b, ca, ab. u_2 valódi részszavai: $a, b, c, aa, ab, bc, aab, abc$.
2. u_1 hossza: $|u_1| = 3$, u_2 hossza: $|u_2| = 4$.
3. u_1 és u_2 konkatenáltja: $u_1 u_2 = cabaabc$. $u_1 u_2 = cabaabc \neq u_2 u_1 = aabccab$.
4. u_1 tükörképe: $u_1^R = bac$, u_2 tükörképe: $u_2^R = cbaa$. $u_2^R u_1 = cbaacab$.
5. HAMIS (ab NEM prefixuma u_1-nek). IGAZ (bc szuffixuma u_2-nek).
6. u_1 és u_2 j-dik hatványai, ahol $j = 0, 1, 2, 3$:
   $u_1^0 = \varepsilon, u_1^1 = cab, u_1^2 = cabcab, u_1^3 = cabcabcab$ és
   $u_2^0 = \varepsilon, u_2^1 = aabc, u_2^2 = aabcaabc, u_2^3 = aabcaabcaabc$.

Véges és végtelen nyelvek

Példa 2

Legyen $V = \{c, d\}$. Végesek vagy végtelenek az alábbi nyelvek? Végtelen nyelvek esetén soroljuk fel a nyelv néhány szavát!

1. $L_1 = \emptyset$.
2. $L_2 = \{\varepsilon\}$.
3. $L_3 = \{c, cd, ccdc, ccddd\}$.
4. $L_4 = \{c^i d^{i+1} \mid i \geq 0\}$.
5. $L_5 = \{c^p d^q \mid p, q \text{ prím}, \ q = p + 2\}$ ($L_5 = \{c^p d^q \mid p, q \text{ ikerprím}\}$).
6. $L_6 = \{u \in V^* \mid |u|_c = |u|_d\}$, ahol $|u|_c$, $|u|_d$ c és d u-beli előfordulásainak számát jelöli.
7. $L_7 = \{uu^R \mid u \in V^+\}$.

Véges és végtelen nyelvek

Példa 2

1. $L_1 = \emptyset$ véges nyelv.
2. $L_2 = \{\varepsilon\}$ véges nyelv.
3. $L_3 = \{c, cd, ccdc, ccddd\}$ véges nyelv.
4. $L_4 = \{c^i d^{i+1} \mid i \geq 0\}$ végtelen nyelv. Példa L_4 szavaira: d, cd^2, c^2d^3, stb.
5. $L_5 = \{c^p d^q \mid p, q \text{ prím}, q = p+2\}$ ($L_5 = \{c^p d^q \mid p, q \text{ ikerprím}\}$) végtelen nyelv (végtelen sok ikerprím létezik). Példa L_5 szavaira: $c^3d^5, c^5d^7, c^{11}d^{13}, c^{17}d^{19}, c^{29}d^{31}$, stb.
6. $L_6 = \{u \in V^* \mid |u|_c = |u|_d\}$ végtelen nyelv. Példa L_6 szavaira: $\varepsilon, cd, ccdd, cdcd, cddcdd$, stb.
7. $L_7 = \{uu^R \mid u \in V^+\}$ végtelen nyelv. Példa L_7 szavaira: $cc, dd, cddc, cddddc$, stb.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 3

Legyen $V = \{a, b\}$ ábécé és legyenek $L_1 = \{a, b\}$, $L_2 = \{a, bb\}$ nyelvek. Határozzuk meg az $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 - L_2$, $L_2 - L_1$, $L_1 L_2$, L_1^*, $L_1^* L_2^*$, $(L_1 \cup L_2)^*$, $\bar{L_1}$ és L_1^R nyelveket!

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 3

- $L_1 \cup L_2 = \{a, b, bb\}$,
- $L_1 \cap L_2 = \{a\}$,
- $L_1 - L_2 = \{b\}$,
- $L_2 - L_1 = \{bb\}$,
- $L_1 L_2 = \{aa, abb, ba, bbb\}$,
- $L_1^* = V^*$ (minden $\{a, b\}$ feletti szó),
- $L_1^* L_2^* = V^*$,
- $(L_1 \cup L_2)^* = V^*$,
- $\bar{L_1} = \{u \in V^* \mid |u| \geq 2 \text{ vagy } u = \varepsilon\}$ és
- $L_1^R = \{a, b\}(= L_1)$

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 4

Legyen $V = \{a, b\}$ ábécé és legyenek $L_1 = \{a^{3n}b^{3n} \mid n \geq 1\}$, $L_2 = \{a^{3n}b^{2n} \mid n \geq 0\}$ nyelvek V felett! Adjuk meg az $\bar{L_1}$ és az L_2^R nyelveket!

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 4

- $\bar{L_1} = V^* - \{a^{3n}b^{3n} \mid n \geq 1\}$.
- $L_2^R = \{b^{2n}a^{3n} \mid n \geq 0\}$.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 5

Legyen $V = \{a, b\}$ ábécé és legyenek $L_1 = \{ab, bb\}$ és $L_2 = \{\varepsilon, a, baa\}$.
Határozzuk meg $L_1 L_2$-t!

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 5

$L_1 L_2 = \{ab, bb, aba, bba, abbaa, bbbaa\}$.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 6

Legyen $V = \{a, b\}$ ábécé és legyen $L = \{a, bb\}$. Határozzuk meg L^i-t, ahol $i = 0, 1, 2, 3$!

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 6

- $L^0 = \{\varepsilon\}$,
- $L^1 = \{a, bb\}$,
- $L^2 = \{aa, abb, bba, bbbb\}$ és
- $L^3 = \{aaa, aabb, abba, abbbb, bbaa, bbabb, bbbba, bbbbbb\}$.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 7

Legyen $V = \{a, b\}$ ábécé és legyen $L = \{a^{3n+1}b \mid n \geq 0\}$. Határozzuk meg Pre($L$)-t és Suf($L$)-t!

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 7

Definíció 1

- Egy $L \subseteq V^*$ nyelv prefixnyelvén a $\mathrm{Pre}(L) = \{u \mid u \in V^*, uv \in L \text{ valamely } v \in V^*\text{-ra}\}$ nyelvet értjük.
- Egy $L \subseteq V^*$ nyelv szuffixnyelvén a $\mathrm{Suf}(L) = \{u \mid u \in V^*, vu \in L \text{ valamely } v \in V^*\text{-ra}\}$ nyelvet értjük.

Megjegyzés

$L \subseteq \mathrm{Pre}(L)$, $L \subseteq \mathrm{Suf}(L)$.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 7

- $\mathrm{Pre}(L) = \{a^{3n+1}b \mid n \geq 0\} \cup \{a^n \mid n \geq 0\}$.
- $\mathrm{Suf}(L) = \{a^n b \mid n \geq 0\} \cup \{\varepsilon\}$.

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 8

Mely összefüggések igazak az alábbi nyelvekre? ($L_1 \subseteq L_2$, $L_1 \supseteq L_2$, $L_1 = L_2$, egyik sem)

- $L_1 = \{a^{3n} \mid n > 0\}$ és $L_2 = (aaa)^*$.
- $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ és $L_2 = a^* b^* c^*$.

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 8

- $L_1 = \{a^{3n} \mid n > 0\} \subseteq L_2 = (aaa)^*$.
- $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \subseteq L_2 = a^* b^* c^*$.

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 9

Legyen $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, $L_2 = \{a^{2n+1} b \mid n \geq 0\}$. Igazak-e a következő állítások?

- $\{a^n b^n a^n b \mid n \geq 0\} \subseteq L_1 L_2$.
- $\{a^n b^n a^{2n+1} b \mid n \geq 0\} \subseteq L_1 L_2$.
- $\{(a^n b^n)^n \mid n \geq 0\} \subseteq L_1^*$.
- $\{(ab)^n \mid n \geq 0\} \subseteq L_2^+$.

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 9

- $\{a^n b^n a^n b \mid n \geq 0\} \subseteq L_1 L_2$ NEM IGAZ.
- $\{a^n b^n a^{2n+1} b \mid n \geq 0\} \subseteq L_1 L_2$ IGAZ.
- $\{(a^n b^n)^n \mid n \geq 0\} \subseteq L_1^*$ IGAZ.
- $\{(ab)^n \mid n \geq 0\} \subseteq L_2^+$ NEM IGAZ.

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 10

Mely összefüggések igazak az alábbi nyelvekre? Húzzunk alá minden igaz választ!

1. $L_1 = \{a^{4n} \mid n > 0\} \cup \{\varepsilon\}$ és $L_2 = (aaaa)^*$.

   $L_1 \subseteq L_2$ $\quad$ $L_2 \subseteq L_1$ $\quad$ egyenlők $\quad$ egyik sem

2. $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ és $L_2 = a^* b^*$.

   $L_1 \subseteq L_2$ $\quad$ $L_2 \subseteq L_1$ $\quad$ egyenlők $\quad$ egyik sem

3. $L_1 = \{u \mid u \in \{a, b\}^+\}$ és $L_2 = aa^* bb^*$.

   $L_1 \subseteq L_2$ $\quad$ $L_2 \subseteq L_1$ $\quad$ egyenlők $\quad$ egyik sem

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 10

1. $L_1 = \{a^{4n} \mid n > 0\} \cup \{\varepsilon\}$ és $L_2 = (aaaa)^*$.

   $\underline{L_1 \subseteq L_2}$ $\underline{L_2 \subseteq L_1}$ <u>egyenlők</u> egyik sem

2. $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ és $L_2 = a^* b^*$.

   $\underline{L_1 \subseteq L_2}$ $L_2 \subseteq L_1$ egyenlők egyik sem

3. $L_1 = \{u \mid u \in \{a, b\}^+\}$ és $L_2 = aa^* bb^*$.

   $L_1 \subseteq L_2$ $\underline{L_2 \subseteq L_1}$ egyenlők egyik sem

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 11

Legyen $V = \{a\}$ ábécé és legyen $L_3 = \{a^{3^n} \mid n \geq 1\}$. Melyik nyelv üres az alábbi nyelvek közül: $\emptyset L_3^*$, $\emptyset L_3^+$, $L_3 L_3$, $\overline{L}_3$, $\overline{L}_3 \emptyset$?

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 11

- $\emptyset L_3^*$, $\emptyset L_3^+$ és $\overline{L}_3\emptyset$ üres (ugyanis $\forall L$ nyelvre:$L\emptyset = \emptyset L = \emptyset$).
- $L_3 L_3$ és $\overline{L}_3$ nem üres.

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 12

Mely állítások igazak az alábbi, nyelvekre vonatkozó állítások közül?

- $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$.
- $\{\varepsilon\}^* = \varepsilon$.
- $\{\varepsilon\}^+ = \varepsilon$.
- $\emptyset^+ = \emptyset$.
- $(L^*)^+ = (L^+)^*$.

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 12

- $L \subseteq L^*, (L^*)^* \subseteq L^*$.
- ha $L_1 \subseteq L_2$, akkor $L_1^* \subseteq L_2^*$.
- $L \subseteq L^+, (L^+)^+ \subseteq L^+$.
- ha $L_1 \subseteq L_2$, akkor $L_1^+ \subseteq L_2^+$.
- $\emptyset L = L$.
- $\{\varepsilon\}L = \{\varepsilon\}$.
- $L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1$.
- $L^* - \{\varepsilon\} = L^+$.
- $(L^R)^R = L$.

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 12

- $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$ IGAZ.
- $\{\varepsilon\}^* = \varepsilon$ IGAZ.
- $\{\varepsilon\}^+ = \varepsilon$ IGAZ.
- $\emptyset^+ = \emptyset$ IGAZ.
- $(L^*)^+ = (L^+)^*$ IGAZ.

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 12

- $L \subseteq L^*, (L^*)^* \subseteq L^*$ IGAZ.
- ha $L_1 \subseteq L_2$, akkor $L_1^* \subseteq L_2^*$ IGAZ.
- $L \subseteq L^+, (L^+)^+ \subseteq L^+$ IGAZ.
- ha $L_1 \subseteq L_2$, akkor $L_1^+ \subseteq L_2^+$ IGAZ.
- $\emptyset L = L$ HAMIS (ugyanis $\forall L : \emptyset L = L\emptyset = \emptyset$).
- $\{\varepsilon\}L = \{\varepsilon\}$ HAMIS (ugyanis $\forall L : \{\varepsilon\}L = L\{\varepsilon\} = L$).
- $L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1$ IGAZ.
- $L^* - \{\varepsilon\} = L^+$ HAMIS (ugyanis $L^* = L^+$, ha $\varepsilon \in L$ és $L^* - \{\varepsilon\} = L^+$ ha $\varepsilon \notin L$).
- $(L^R)^R = L$ IGAZ.

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 13

Jelöljenek L, L_1, és L_2 egy V ábécé feletti nyelveket.

- Mikor üres L^*, $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$?
- Mikor véges L^*, $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$?

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 13

- $L^* \ni \varepsilon$, tehát sosem üres. $L_1 \cup L_2$ pontosan akkor üres, ha $L_1 = L_2 = \emptyset$. Végül, $L_1 L_2$ pontosan akkor üres, ha $L_1 = \emptyset$ vagy $L_2 = \emptyset$.
- L^* pontosan akkor véges, ha $L = \emptyset$ vagy $L = \{\varepsilon\}$. $L_1 \cup L_2$ pontosan akkor véges, ha L_1 és L_2 is véges. Végül, $L_1 L_2$ pontosan véges, ha L_1 és L_2 is véges, vagy ha $L_1 = \emptyset$ vagy ha $L_2 = \emptyset$.

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 14

Jelöljön L egy V ábécé feletti tetszőleges nyelvet. Mikor teljesülnek a következő egyenlőségek?

1. $L^+ = L^+ \cup L^0$, ...
2. $L^+ \cap \{\varepsilon\} = \emptyset$, ...
3. $L^0\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$, ...
4. $\emptyset L = L$, ...
5. $\bar{L} \cap L = \{\varepsilon\}$, ...

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 14

1. $L^+ = L^+ \cup L^0$, vagyis $L^+ = L^*$, ha $\varepsilon \in L$.
2. $L^+ \cap \{\varepsilon\} = \emptyset$, ha $\varepsilon \notin L$.
3. $L^0\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$, mindig (ugyanis $L^0 = \varepsilon$).
4. $\emptyset L = L$, ha $L = \emptyset$.
5. $\bar{L} \cap L = \{\varepsilon\}$ soha.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 15

Igazoljuk, hogy tetszőleges L nyelvre $L^* = L^* L^*$!

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 15

Mivel $\varepsilon \in L^*$, ezért a $L^* \subseteq L^*L^*$ nyilván fennáll. A másik irányú tartalmazás igazolásához tekintsük $w \in L^*L^*$ szót. Ekkor w felírható $w = uv$ alakban úgy, hogy $u \in L^*$ és $v \in L^*$. Emiatt $u = u_1 \dots u_k$ és $v = v_1 \dots v_l$ alakban felírható, ahol $u_i, v_j \in L$, $0 \le i \le k, 0 \le j \le l$, ami azt jelenti, hogy u és v konkatenációja L^*-beli.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 16

Igazoljuk, hogy tetszőleges L nyelvre $(L^*)^* = L^*$!

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 16

Egyrészt $L^* = (L^*)^1 \subseteq (L^*)^*$. A másik irányú tartalmazás igazolásához tekintsük $u \in (L^*)^*$-t. Ekkor u felírható $u = u_1 \dots u_k$ alakban úgy, hogy $u_i \in L^*$, $0 \leq i \leq k$. $u_i \in L^*$, $0 \leq i \leq k$ miatt u_i felírható $u = u_{i_1} \dots u_{i_{m_i}}$ alakban, ahol $u_{i_1}, \dots, u_{i_{m_i}} \in L$, azaz u $\sum_{i=1}^{k} m_i$ darab L-beli szó konkatenációja, azaz L^*-beli.