A számításelmélet alapjai I. (Tizedik gyakorlat)

Dr. Lázár Katalin Anna

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C.
e-mail: lazarkati@elte.hu

2024. április 25.

Tematika

- A veremautomata fogalma. A közvetlen (egylépéses) konfiguráció-átmenet, a (0 vagy többlépéses) konfiguráció-átmenet (közvetlen redukció, redukció) fogalma. Elfogadás elfogadó állapotokkal (végállapotokkal) vagy üres veremmel. A veremautomata által elfogadott nyelv. A determinisztikus veremautomata fogalma.
- Az üres veremmel elfogadó és az elfogadó állapotokkal elfogadó veremautomaták egyenlő felismerő ereje. A veremautomata (mindkét elfogadási mód esetében) és a környezetfüggetlen grammatikák egyenlő ereje (mindketten a környezetfüggetlen nyelvek osztályát határozzák meg).

Veremautomata

Példa 1

Legyen $V = \{a, b, c\}$ egy ábécé és legyen $L = \{ab^n cb^n a \mid n \geq 1\}$. Konstruáljunk egy veremautomatát, amely felismeri az L nyelvet és ismertessük ezen veremautomata működését!

Veremautomata

Példa 1

Legyen a veremautomata $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $Z = \{z_0, b\}$, $F = \emptyset$, valamint

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, q_0, a) = (z_0, q_1), & \delta(z_0, q_1, b) = (bz_0, q_1), & \delta(b, q_1, b) = (bb, q_1), \\ \delta(b, q_1, c) = (bb, q_2), & \delta(b, q_2, b) = (\varepsilon, q_2), & \delta(z_0, q_2, a) = (\varepsilon, q_2). \end{array}$$

Veremautomata

Példa 1

- A veremautomata első lépésben elolvas egy a betűt az input szalagról és kiveszi, majd visszateszi a kezdő veremszimbólumot, valamint a q_0 állapotból átmegy q_1 állapotba.
- Ezután a q_1 állapotban b betűt olvas az input szalagról, valamint egy b betűt ad a verem tetejéhez és továbbra is marad a q_1 állapotban.
- Ezt a lépést addig ismétli, amíg a c szimbólum következik olvasásra.
- A veremben levő b betűk száma meg fog egyezni az elolvasott b betűk számával.

Veremautomata

Példa 1

- A c betű olvasásakor átmegy q_2 állapotba és nem változtatja a verem tartalmát.
- Ezután ismét csak b betűket tud olvasni az input szalagról, végig q_2 állapotban, minden egyes lépésnél törölve egy b betűt a verem tartalmából.
- Működését akkor végzi el sikeresen, ha pontosan annyi b betűt tud elolvasni ebben a fázisban, ahány b betű van a veremben; ekkor az utolsó lépésben az a betűt olvassa és törli a z_0 veremszimbólumot.
- A veremautomata üres veremmel fogadja el a szót.

Veremautomata

Példa 2

Legyen $V = \{a, b, c\}$ egy ábécé és legyen $L = \{c^m a^n b^n \mid m \geq 0, n \geq 1\}$. Konstruáljunk egy veremautomatát, amely felismeri az L nyelvet és ismertessük ezen veremautomata működését!

Veremautomata

Példa 2

Legyen $A = (\{z_0, a\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \{c, a, b\}, \delta, z_0, q_0, \emptyset)$, ahol

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \delta(z_0, q_0, c) = (z_0, q_0), \\
(2) & \delta(z_0, q_0, a) = (az_0, q_1), \\
(3) & \delta(a, q_1, a) = (aa, q_1), \\
(4) & \delta(a, q_1, b) = (\varepsilon, q_2), \\
(5) & \delta(a, q_2, b) = (\varepsilon, q_2), \\
(6) & \delta(z_0, q_2, \varepsilon) = (\varepsilon, q_2).
\end{array}
$$

Veremautomata

Példa 2

- A veremautomata az átmenet használatával $m \geq 0$ számú c betűt olvas el egymás után. Az első a betű elolvasása után állapotát q_1-re cseréli és egy a betűt helyez el a veremben a verem tetejére írva.
- Ezután vagy további a betűket olvas el, marad a q_1 állapotban és minden egyes a betű elolvasása után egy a betűt ír a verembe, vagy egy b betűt olvas el, állapotát a q_2 állapotra cseréli, és törli a verem tetején levő a betűt.
- Munkáját akkor tudja befejezni, ha a veremből minden a betűt törölt és a verem tetején levő szimbólum z_0, de ez csak akkor lehetséges, ha pontosan annyi b betűt olvas el a q_2 állapotban, mint ahány a betű van a veremben.
- Tehát A az L nyelv minden szavát és csak azokat ismeri fel.

Veremautomata

Példa 2

Megjegyzés

A δ leképezést szabályok formájában is megadhatjuk. Az így nyert szabályhalmazt M_δ-val jelöljük. Tehát

1. $zqa \to up \in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $(u, p) \in \delta(z, q, a)$,
2. $zq \to up \in M_\delta$ akkor és csak akkor, ha $(u, p) \in \delta(z, q, \varepsilon)$.

Veremautomata

Példa 2

A példában:

$$\begin{array}{ll} (1) & z_0 q_0 c \to z_0 q_0, \\ (2) & z_0 q_0 a \to a z_0 q_1, \\ (3) & a q_1 a \to a a q_1, \\ (4) & a q_1 b \to q_2, \\ (5) & a q_2 b \to q_2, \\ (6) & z_0 q_2 \to q_2. \end{array}$$

Veremautomata

Példa 3

Legyen $V = \{a, b\}$ egy ábécé és legyen $L = \{a^n b^{n-1} \mid n \geq 1\}$.
Konstruáljunk egy veremautomatát, amely felismeri az L nyelvet és ismertessük ezen veremautomata működését!

Veremautomata

Példa 3

Legyen $A = (\{\#, a\}, \{S, A, B\}, \{a, b\}, \delta, \#, S, \emptyset)$ üres veremmel elfogadó automata. A szabályhalmaz:

1. $\#Sa \rightarrow \#A$; első a-t nem tesszük be
2. $\#Aa \rightarrow aaA$; további a-kat berakjuk a verembe
3. $aAb \rightarrow B$; ha b jön, akkor kiveszünk egy a-t
4. $aBb \rightarrow B$; ha b jön, akkor kiveszünk egy a-t
5. $\#B \rightarrow B$; elfogyott az input
6. $\#A \rightarrow B$; elfogyott az input

Veremautomata

Példa 4

Legyen $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$, ahol $|w|_a$ és $|w|_b$ a és b előfordulásainak számát jelöli w-ben.

- Adjunk meg egy, az L-et végállapotokkal felismerő (elfogadó állapotokkal elfogadó) veremautomatát!
- Adjunk meg egy, az L-et üres veremmel felismerő (elfogadó) veremautomatát!

Veremautomata

Példa 4

Az L-et végállapotokkal felismerő veremautomata:
$A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$, ahol $Q = \{q_0, q_1\}$, $Z = \{z_0, a, b\}$, $T = \{a, b\}$, $F = \{q_0\}$, valamint

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \delta(z_0, q_0, a) = (az_0, q_1), \\
(2) & \delta(z_0, q_0, b) = (bz_0, q_1), \\
(3) & \delta(a, q_1, a) = (aa, q_1), \\
(4) & \delta(b, q_1, b) = (bb, q_1), \\
(5) & \delta(b, q_1, a) = (\varepsilon, q_1), \\
(6) & \delta(a, q_1, b) = (\varepsilon, q_1), \\
(7) & \delta(z_0, q_1, a) = (az_0, q_1), \\
(8) & \delta(z_0, q_1, b) = (bz_0, q_1), \\
(9) & \delta(z_0, q_1, \varepsilon) = (z_0, q_0).
\end{array}
$$

Veremautomata

Példa 4

Az L-et üres veremmel felismerő veremautomata:
$A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$, ahol $Q = \{q_0\}$, $Z = \{z_0, a, b\}$, $T = \{a, b\}$, $F = \emptyset$, valamint

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \delta(z_0, q_0, a) = (az_0, q_0), \\
(2) & \delta(z_0, q_0, b) = (bz_0, q_0), \\
(3) & \delta(a, q_0, a) = (aa, q_0), \\
(4) & \delta(b, q_0, b) = (bb, q_0), \\
(5) & \delta(b, q_0, a) = (\varepsilon, q_0), \\
(6) & \delta(a, q_0, b) = (\varepsilon, q_0), \\
(7) & \delta(z_0, q_0, \varepsilon) = (\varepsilon, q_0).
\end{array}
$$

Veremautomata

Példa 5

Legyen $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $Z = \{z_0, a\}$, $T = \{a, b\}$, $F = \{q_1, q_2\}$, valamint

$$\begin{array}{ll}
(1) & \delta(\varepsilon, q_0, a) = (a, q_0), \\
(2) & \delta(\varepsilon, q_0, \varepsilon) = (\varepsilon, q_1), \\
(3) & \delta(a, q_0, b) = (\varepsilon, q_2), \\
(4) & \delta(a, q_1, \varepsilon) = (\varepsilon, q_1), \\
(5) & \delta(a, q_2, b) = (\varepsilon, q_2), \\
(6) & \delta(a, q_2, \varepsilon) = (\varepsilon, q_2).
\end{array}$$

- Az alábbi szavak közül melyeket ismeri fel végállapotokkal az A veremautomata: b^2, a^2b^2, a^3b?
- Adjuk meg az A veremautomata által végállapotokkal felismert $L(A)$ nyelvet!

Veremautomata

Példa 5

- $z_0 q_0 b^2 \Longrightarrow_A z_0 q_1 b^2$, amelyből más konfiguráció nem érhető el, tehát $b^2 \notin L(A)$.
- $z_0 q_0 a^2 b^2 \Longrightarrow_A a z_0 q_0 a b^2 \Longrightarrow_A a^2 z_0 q_0 b^2 \Longrightarrow_A a z_0 q_2 b$, vagyis $a^2 b^2 \in L(A)$.
- $z_0 q_0 a^3 b \Longrightarrow_A^* a^3 z_0 q_0 b \Longrightarrow_A a^2 z_0 q_2$, vagyis $a^3 b \in L(A)$.
- $L(A) = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$

Veremautomata

Példa 6

Legyen $V = \{a, b\}$ egy ábécé és legyen $L = \{a^n b^m \mid n < m\}$.
Konstruáljunk egy veremautomatát, amely felismeri az L nyelvet!

Veremautomata

Példa 6

Legyen $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $Z = \{z_0, a\}$, $T = \{a, b\}$, $F = \{q_2\}$, valamint

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \delta(\varepsilon, q_0, a) = (a, q_0), \\
(2) & \delta(\varepsilon, q_0, \varepsilon) = (\varepsilon, q_1), \\
(3) & \delta(a, q_1, b) = (\varepsilon, q_1), \\
(4) & \delta(z_0, q_1, b) = (z_0, q_2), \\
(5) & \delta(z_0, q_2, b) = (z_0, q_2).
\end{array}
$$

Veremautomata

Példa 7

Legyen $V = \{a, b, c\}$ egy ábécé és legyen $L = \{a^i b^j c^{j+1} \mid i, j \geq 0\}$.
Konstruáljunk egy veremautomatát, amely felismeri az L nyelvet!

Veremautomata

Példa 7

Legyen $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $Z = \{z_0, b\}$, $T = \{a, b, c\}$, $F = \{q_3\}$, valamint

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \delta(\varepsilon, q_0, a) = (\varepsilon, q_0), \\
(2) & \delta(\varepsilon, q_0, \varepsilon) = (\varepsilon, q_1), \\
(3) & \delta(\varepsilon, q_1, b) = (b, q_1), \\
(4) & \delta(\varepsilon, q_1, \varepsilon) = (\varepsilon, q_2), \\
(5) & \delta(b, q_2, c) = (\varepsilon, q_2), \\
(6) & \delta(z_0, q_2, c) = (z_0, q_3).
\end{array}
$$

Veremautomata

Példa 8

Legyen $V = \{a, b, c\}$ egy ábécé és legyen
$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k > 0, i = j + k\}$.
Konstruáljunk egy veremautomatát, amely felismeri az L nyelvet!

Veremautomata

Példa 8

Legyen $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $Z = \{z_0, a\}$, $T = \{a, b, c\}$, $F = \{q_4\}$, valamint

$$\begin{array}{ll}
(1) & \delta(\varepsilon, q_0, a) = (a, q_1), \\
(2) & \delta(\varepsilon, q_1, a) = (a, q_1), \\
(3) & \delta(a, q_1, b) = (\varepsilon, q_2), \\
(4) & \delta(a, q_2, b) = (\varepsilon, q_2), \\
(5) & \delta(a, q_2, c) = (\varepsilon, q_3), \\
(6) & \delta(a, q_3, c) = (\varepsilon, q_3), \\
(7) & \delta(z_0, q_3, \varepsilon) = (z_0, q_4).
\end{array}$$

Veremautomata

Példa 9

Legyen $V = \{a, b\}$ egy ábécé és legyen $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$.
Konstruáljunk egy veremautomatát, amely felismeri az L nyelvet!

Veremautomata

Példa 9

Legyen $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $Z = \{z_0, a, b\}$, $T = \{a, b\}$, $F = \{q_2\}$, valamint

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \delta(\varepsilon, q_0, a) = (a, q_0), \\
(2) & \delta(\varepsilon, q_0, b) = (b, q_0), \\
(3) & \delta(\varepsilon, q_0, \varepsilon) = (\varepsilon, q_1), \\
(4) & \delta(a, q_1, a) = (\varepsilon, q_1), \\
(5) & \delta(b, q_1, b) = (\varepsilon, q_1), \\
(6) & \delta(z_0, q_1, \varepsilon) = (z_0, q_2).
\end{array}
$$

Veremautomata

Példa 10

Legyen $V = \{a, b, c\}$ egy ábécé és legyen $L = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Mutassuk meg, hogy az L nyelv determinisztikus veremautomatával felismerhető!

Veremautomata

Példa 10

Legyen $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $Z = \{z_0, a, b\}$, $T = \{a, b, c\}$, $F = \{q_2\}$, valamint

$$\begin{array}{ll}
(1) & \delta(\varepsilon, q_0, a) = (a, q_0), \\
(2) & \delta(\varepsilon, q_0, b) = (b, q_0), \\
(3) & \delta(\varepsilon, q_0, c) = (\varepsilon, q_1), \\
(4) & \delta(a, q_1, a) = (\varepsilon, q_1), \\
(5) & \delta(b, q_1, b) = (\varepsilon, q_1), \\
(6) & \delta(z_0, q_1, \varepsilon) = (z_0, q_2).
\end{array}$$

$L(A) = L$ és A determinisztikus.

Veremautomata

Példa 11

Legyen $V = \{a, b\}$ egy ábécé és legyen $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b \leq |w|_a\}$, ahol $|w|_a$ és $|w|_b$ a és b előfordulásainak számát jelöli w-ben.
Konstruáljunk egy veremautomatát, amely felismeri az L nyelvet!

Veremautomata

Példa 11

Legyen $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$, ahol $Q = \{q_0, q_1\}$, $Z = \{z_0, a, b\}$, $T = \{a, b\}$, $F = \{q_1\}$, valamint

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \delta(z_0, q_0, \varepsilon) = (z_0, q_1), \\
(2) & \delta(\varepsilon, q_0, a) = (a, q_1), \\
(3) & \delta(z_0, q_0, a) = (az_0, q_0), \\
(4) & \delta(a, q_0, a) = (aa, q_0), \\
(5) & \delta(z_0, q_0, b) = (bz_0, q_0), \\
(6) & \delta(b, q_0, b) = (bb, q_0), \\
(7) & \delta(b, q_0, a) = (\varepsilon, q_0), \\
(8) & \delta(a, q_0, b) = (\varepsilon, q_0).
\end{array}
$$

Veremautomata

Példa 12

Legyen $V = \{a, b\}$ egy ábécé és legyen $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$. Mutassuk meg, hogy az L nyelv determinisztikus veremautomatával felismerhető!

Veremautomata

Példa 12

Legyen $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $Z = \{z_0, a\}$, $T = \{a, b\}$, $F = \{q_2\}$, valamint

$$\begin{array}{ll} (1) & \delta(\varepsilon, q_0, a) = (a, q_0), \\ (2) & \delta(a, q_0, b) = (\varepsilon, q_1), \\ (3) & \delta(a, q_1, b) = (\varepsilon, q_1), \\ (4) & \delta(z_0, q_1, \varepsilon) = (z_0, q_2). \end{array}$$

$L(A) = L$ és A determinisztikus.