A számításelmélet alapjai I. (Nyolcadik gyakorlat)

Dr. Lázár Katalin Anna

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C.
e-mail: lazarkati@elte.hu

2024. április 9.

Tematika

- Környezetfüggetlen grammatikák és nyelvek. Levezetési fa.
- Az aktív/nem aktív (inaktív) nemterminális, az elérhető/nem elérhető nemterminális, a hasznos/nem hasznos nemterminális fogalma. A redukált környezetfüggetlen grammatika fogalma
- ε-mentes grammatikák. A környezetfüggetlen grammatikák Chomsky normálformája.

Levezetési fa

Példa 1

Legyen $G = (\{S\}, \{a\}, \{S \to SS, S \to a\}, S)$.

- Igazoljuk, hogy G nem egyértelmű!
- Határozzuk meg $L(G)$-t!

Levezetési fa

Példa 2

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A\}$, $T = \{a, b, c\}$ és $P = \{S \to abSba, S \to A, A \to cAc, A \to cc\}$.

- Bizonyítsuk be, hogy a $w = (ab)^2c^2(ba)^2 \in L(G)$!
- Adjuk meg $L(G)$-t!

Levezetési fa

Példa 3

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$ és $P = \{S \rightarrow ABS, S \rightarrow AB, A \rightarrow aA, A \rightarrow a, B \rightarrow bA\}$. Az alábbi szavak közül melyek vannak $L(G)$-ben:

- $aabaab$,
- $aaaaba$,
- $aabbaa$,
- $abaaba$?

Indokoljuk meg az állítást!

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 4

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, X, Y, Z\}$, $T = \{a, b\}$, ahol $P = \{S \to YXX, S \to ab, X \to YY, X \to bY, Y \to aa, Y \to aX, Z \to aSa, Z \to b\}$. Határozzuk meg G hasznos nemterminálisainak halmazát!

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 4

Megjegyzés

- Az A nemterminális hasznos a G grammatikában, ha aktív és elérhető.
- Akkor mondjuk, hogy A aktív, ha G-ben levezethető belőle terminális szó, azaz $A \Longrightarrow^* v$ valamely $v \in T^*$-ra.
- Akkor mondjuk, hogy A G-ben elérhető, ha létezik G-ben $S \Longrightarrow^* uAv$ levezetés, ahol $u, v \in (N \cup T)^*$.

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 4

Megjegyzés

- Először az aktív nemterminálisok halmazát határozzuk meg az alábbi halmazsorozat segítségével: $A_1 = \{X \mid X \to u \in P, u \in T^*\}$, $A_{i+1} = A_i \cup \{X \mid X \to w \in P, w \in (T \cup A_i)^*\}, i = 1, 2, \ldots$.
- Ezek a halmazok nemcsökkenő hierarchiát alkotnak a tartalmazásra nézve. Mivel a nemterminálisok száma véges, létezik olyan k szám, hogy $A_k = A_l$ teljesül minden $l \geq k$-ra.

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 4

Megjegyzés

- Ezután az elérhető nemterminálisokat határozzuk meg a következő halmazsorozat segítségével: $R_1 = \{S\}$, $R_{i+1} = R_i \cup \{Y \mid X \to uYw \in P,\ X \in R_i, u, w \in (N \cup T)^*\}, i = 1, 2, \ldots$. Az előzőekhez hasonlóan létezik olyan m szám, hogy $R_m = R_l$ minden $l \geq m$ esetben.

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 5

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B, C, D\}$, $T = \{a, b, c\}$, ahol $P = \{S \to bCB, S \to bBB, S \to abD, A \to ADb, A \to bD, C \to bBc, C \to aCB, D \to DD, D \to Cb, D \to \varepsilon\}$. Adjunk meg olyan G-vel ekvivalens G' grammatikát, amelynek minden szimbóluma hasznos! Adjuk meg $L(G)$-t!

Aktív, elérhető és hasznos nemterminálisok

Példa 6

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B, C, D\}$, $T = \{a, b\}$, ahol $P = \{S \to B, A \to AbB, A \to BA, A \to b, B \to aAB, B \to \varepsilon, C \to DC, C \to \varepsilon, D \to CD, D \to \varepsilon\}$.

- Határozzuk meg G aktív, elérhető és hasznos nemterminálisainak halmazát!
- Adjunk G-vel ekvivalens és csak hasznos szimbólumokat tartalmazó grammatikát!

Redukált környezetfüggetlen grammatika

Példa 7

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{a, b\}$, ahol $P = \{S \to SAAC, S \to AAA, A \to AB, A \to ab, B \to b, B \to CC, C \to CA\}$. Adjunk meg olyan G-vel ekvivalens G' grammatikát, amely redukált (nem redundáns)!

Redukált környezetfüggetlen grammatika

Példa 7

Megjegyzés

Egy környezetfüggetlen grammatika redukált (nem redundáns), ha minden nemterminálisa aktív és elérhető.

ε-mentes grammatika

Példa 8

Legyen $G = (N, T, P, S)$ környezetfüggetlen grammatika, ahol $N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{a, b, c\}$ és $P = \{S \to cBBA, S \to cAc, S \to c, A \to bB, A \to a, A \to \varepsilon, B \to aB, B \to b, C \to ccc\}$. Konstruáljunk egy G' környezetfüggetlen grammatikát, úgy, hogy $L(G) - \{\varepsilon\} = L(G')$ legyen! (G' G-vel ekvivalens ε-mentes környezetfüggetlen grammatika.)

ε-mentes grammatika

Példa 8

Megjegyzés

- P'-t a következőképpen konstruáljuk meg: minden $X \to u$ szabály benne van P'-ben, akkor és csak akkor, ha $u \neq \varepsilon$ és van olyan v szó, $v \in (N \cup T)^*$, hogy $X \to v \in P$ és u-t v-ből úgy kapjuk meg, hogy U-beli nemterminálisok valahány, azaz nulla vagy több előfordulását elhagyjuk v-ből.
- Ekkor látható, hogy $L(G') \subseteq L(G) - \{\varepsilon\}$, hiszen minden $X \to u$ szabály alkalmazása megfelel az $X \to v$ szabály alkalmazásának, amelyet valahány $Z \Longrightarrow_G^* \varepsilon$ levezetés alkalmazásával kombinálunk, ahol $Z \in U$ és Z előfordul u-ban.

ε-mentes grammatika

Példa 8

Megjegyzés

- Megfordítva, ha $S \Longrightarrow_G^* u$ és $u \neq \varepsilon$, akkor $S \Longrightarrow_{G'}^* u$, hiszen az $X \to \varepsilon$-típusú szabályok alkalmazása elkerülhető P' megfelelő szabályának alkalmazásával.
- Ezek alapján $L(G') = L(G) - \{\varepsilon\}$.
- Ha $\varepsilon \in L(G)$, akkor vesszük a $G_1 = (N \cup \{S_1\}, T, P' \cup \{S_1 \to \varepsilon, S_1 \to S\}, S_1)$ grammatikát, amely az $L(G)$ nyelvet generálja.

ε-mentes grammatika

Példa 8

Megjegyzés

- U meghatározása: definiáljuk az $U_i \subseteq N$ halmazokat a következőképpen: $U_1 = \{X \mid X \to \varepsilon \in P\}$, $U_{i+1} = U_i \cup \{X \mid X \to u \in P \text{ és } u \in U_i^*\}, i \geq 1$.
- Nyilvánvaló, hogy az U_i sorozat, $i = 1, 2, \ldots$ a tartalmazásra nézve hierarchiát alkot és van olyan k index, hogy $U_k = U_{k+1}$ és így $U_k = U_j$ minden $j \geq k$-ra. Legyen $U = U_k$.
- Ekkor azonnal látható, hogy $X \Longrightarrow_G^* \varepsilon$ akkor és csak akkor, ha $X \in U$. Vagyis, $\varepsilon \in L(G)$ akkor és csak akkor, ha $S \in U$.

ε-mentes grammatika

Példa 9

Legyen $G = (N, T, P, S)$ környezetfüggetlen grammatika, ahol
$N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{b\}$ és
$P = \{S \to ABC, A \to BB, A \to \varepsilon, B \to CC, B \to A, C \to AA, C \to b\}$.
Konstruáljunk egy G' környezetfüggetlen grammatikát, úgy, hogy
$L(G) - \{\varepsilon\} = L(G')$ legyen!

ε-mentes grammatika

Példa 10

Legyen $G = (N, T, P, S)$ környezetfüggetlen grammatika, ahol $N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{a, b, c\}$ és $P = \{S \to ABB, S \to b, A \to cC, A \to \varepsilon, A \to B, A \to a, B \to ab, B \to A, C \to c\}$. Határozzuk meg G azon nemterminálisainak halmazát, amelyekből ε levezethető!

Chomsky-normálforma

Példa 11

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{a, b\}$, ahol $P = \{S \to AB, S \to b, A \to C, A \to aB, B \to ab, B \to A, C \to bSb\}$ (G ε-mentes környezetfüggetlen grammatika). Konstruáljunk meg G-ből kiindulva egy olyan Chomsky normálformájú G' környezetfüggetlen grammatikát, amelyre $L(G') = L(G)$ teljesül! (Hozzuk Chomsky normálformára G grammatikát!)

Chomsky-normálforma

Példa 11

Megjegyzés

A Chomsky normálformára hozás lépései:

- Feltesszük, hogy a P szabályhalmaz elemei terminális szimbólumokat csak az $X \to a$, $a \in T$ alakú szabályokban tartalmaznak.
- Ha ez nem így lenne, akkor ún. álterminálisok (új nemterminálisok) bevezetésével létrehozunk egy G–vel ekvivalens grammatikát, amelynek a szabályai ilyen alakúak.

Chomsky-normálforma

Példa 11

Megjegyzés

- Ekkor minden további szabály $X \to u$ alakú, ahol $u \in N^*$.
- Ezután ún. hosszredukciót hajtunk végre, vagyis minden $X \to Y_1 Y_2 \dots Y_k, k \geq 3$ alakú szabályt, ahol $X, Y_1, \dots, Y_k \in N$ helyettesítünk egy $X \to Y_1 Z_1, Z_1 \to Y_2 Z_2, \dots, Z_{k-2} \to Y_{k-1} Y_k$ szabályhalmazzal, ahol $Z_1, \dots, Z_{k-2}$ új nemterminális szimbólumok.

Chomsky-normálforma

Példa 11

Megjegyzés

- Ekkor egy $G_1 = (N', T, P_1, S)$ grammatikát kapunk, ahol P_1 olyan szabályokból áll, amelyek alakja az alábbi három típus valamelyike: $X \to a$, $X \in N'$, $a \in T$, $X \to Y$, $X, Y \in N'$, $X \to YZ$, $X, Y, Z \in N'$.
- Az N' halmaz N elemeiből, valamint azokból az új nemterminálisokból áll, amelyeket külön-külön bevezettünk P azon szabályaihoz, amelyek jobboldalának hosszát csökkentettük.

Chomsky-normálforma

Példa 11

Megjegyzés

- Ezután elimináljuk a láncszabályokat (az $X \to Y$ alakú szabályokat, ahol X és Y nemterminálisok).
- Ezért minden egyes $X \in N'$ nemterminálisra definiáljuk az $U_i(X)$ halmazokat: $U_1(X) = \{X\}$,
$U_{i+1}(X) = U_i(X) \cup \{Y \mid Y \to Z \in P_1, Z \in U_i(X)\}, i = 1, 2, \ldots$.
- Nyilvánvaló, hogy van olyan k természetes szám, hogy $U_k(X) = U_{k+1}(X)$, és így $U_k(X) = U_l(X)$ teljesül minden l-re, ahol $l \geq k$. Legyen $U_k(X) = U(X)$.

Chomsky-normálforma

Példa 11

Megjegyzés

- Definiáljuk P'-t a következőképpen:
  1. $X \rightarrow a \in P'$ akkor és csak akkor, ha van olyan $A \in N'$, ahol $X \in U(A)$ és $A \rightarrow a \in P_1$,
  2. $X \rightarrow YZ$ akkor és csak akkor, ha van olyan $A \in N'$, ahol $X \in U(A)$ és $A \rightarrow YZ \in P_1$.

Chomsky-normálforma

Példa 11

Megjegyzés

- Látható, hogy $X \to a \in P'$ akkor és csak akkor, ha $X \Longrightarrow^*_{G_1} a$ és $X \to YZ \in P'$ akkor és csak akkor, ha $X \Longrightarrow^*_{G_1} A \Longrightarrow^*_{G_1} YZ$ teljesül valamely A-ra.

Chomsky-normálforma

Példa 12

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{a, b, c\}$, ahol $P = \{S \to cBBA, S \to cBc, S \to AC, S \to c, A \to bA, A \to a, B \to bB, B \to b, C \to ccc\}$ (G ε-mentes környezetfüggetlen grammatika). Konstruáljunk meg G–ből kiindulva egy olyan Chomsky normálformájú G' környezetfüggetlen grammatikát, amelyre $L(G') = L(G)$ teljesül!

Chomsky-normálforma

Példa 13

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{a, b, c\}$, ahol $P = \{S \to aABC, S \to a, A \to aA, A \to B, A \to a, B \to bcB, B \to bc, B \to C, C \to cC, C \to c\}$ (G ε-mentes környezetfüggetlen grammatika). Konstruáljunk meg G-ből kiindulva egy olyan Chomsky normálformájú G' környezetfüggetlen grammatikát, amelyre $L(G') = L(G)$ teljesül! (Hozzuk Chomsky normálformára G grammatikát!)

Chomsky-normálforma

Példa 14

Legyen $G = (N, T, P, S)$, ahol $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b, c\}$, ahol $P = \{S \to BB, A \to S, A \to aacc, A \to b, B \to AacaA, B \to A\}$ (G ε-mentes környezetfüggetlen grammatika). Konstruáljunk meg G-ből kiindulva egy olyan Chomsky normálformájú G' környezetfüggetlen grammatikát, amelyre $L(G') = L(G)$ teljesül! (Hozzuk Chomsky normálformára a G grammatikát!)

Láncszabálymentes grammatika

Példa 15

Legyen $G = (N, T, P, S)$ környezetfüggetlen grammatika, ahol
$N = \{S, A, B, C\}$, $T = \{a, b\}$ és
$P = \{S \to ASB, S \to B, A \to Aa, A \to B, B \to b, B \to C, C \to a\}$.
Adjunk meg egy G-vel ekvivalens, láncszabálymentes grammatikát!