A számításelmélet alapjai I. (Hetedik gyakorlat)

Dr. Lázár Katalin Anna

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C.
e-mail: lazarkati@elte.hu

2024. március 26.

Tematika

- A minimális állapotszámú determinisztikus véges automata, a minimalizálási algoritmus.

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 1

Legyen $A = (Q, T, \delta, q_1, F)$ determinisztikus véges automata, ahol $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $T = \{a, b\}$, $F = \{q_2, q_3\}$ és δ az alábbi táblázattal adott:

	δ	a	b
$\rightarrow$	q_1	q_4	q_5
$\leftarrow$	q_2	q_4	q_4
$\leftarrow$	q_3	q_2	q_4
	q_4	q_4	q_5
	q_5	q_2	q_2

Konstruáljunk meg egy A' determinisztikus véges automatát, amely minimális állapotszámú és amelyre $L(A') = L(A)$ teljesül!

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 1

Megjegyzés

- Először megállapítjuk, hogy az automata összefüggő-e vagy sem.
- Az A determinisztikus véges automatát összefüggőnek nevezzük, ha minden állapota elérhető a kezdőállapotból, azaz ha minden $p \in Q$ esetén létezik $w \in T^*$, hogy $q_0 w \Longrightarrow_A^* p$ teljesül.
- Ha nem, akkor összefüggővé tesszük.
- A továbbiakban az összefüggő automatával foglalkozunk, vagyis, ha összefüggő volt az automata, akkor az eredeti automatával, ha nem az volt, akkor legnagyobb összefüggő részautomatájával.

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 1

Megjegyzés

- Ezután partícionáljuk (a megkülönböztethetőség szerint ekvivalenciaosztályokra bontjuk) az állapothalmazt.
- Először az állapotok halmazát két partícióra osztjuk: F-re és $Q - F$-re. (Az F-beli állapotok megkülönböztethetők a $Q - F$-beli állapotoktól az üres szóval).
- Majd megismételjük a partíciók további partíciókra való szétbontását mindaddig, amíg a partíciók száma változatlan marad.

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 1

Megjegyzés

- Ez a következőképpen történik: Tekintsük egy tetszőleges partíció állapotait.
- Vegyük az a input szimbólumot és tekintsük a $\delta(p, a)$ állapotot minden p állapotra a partícióban. Ha az így nyert állapotok különböző partíciókhoz tartoznak, akkor az eredeti partíciót bontsuk szét annyi új partícióra, ahány ilyen módon meghatározott partíció keletkezett.
- Végezzük el ezt az eljárást minden input betűre és minden partícióra, addig, amíg új partíció már nem keletkezik.

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 1

Megjegyzés

- Ezután meghatározzuk a minimális állapotszámú automata komponenseit.
- Minden egyes B_i partícióra tekintünk egy b_i reprezentáns állapotot. Legyen $A = (Q', T, \delta', q_0', F')$, ahol Q' a partíciók reprezentánsainak halmaza. Továbbá, legyen q_0' a q_0-t tartalmazó partíció reprezentánsa és $\delta'(b_i, a) = b_j$, ha van olyan $q_i \in B_i$ és $q_j \in B_j$, amelyre $\delta(q_i, a) = q_j$. $F' = \{b_f\}$ azon partíció reprezentánsa, amely F elemeit tartalmazza.

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 1

- Könnyen megállapítható, hogy az automata nem összefüggő, mivel a q_3 állapot nem érhető el a kezdőállapotból. (q_1-ből közvetlenül elérhető q_4 és q_5, q_5-ből pedig q_2; q_3 egyetlen állapotból sem érhető el közvetlenül.)
- Ezután már csak a q_1,q_2, q_4, q_5 állapotokkal foglalkozunk.

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 1

- Először két partícióra bontjuk ezen állapotok halmazát: $[q_1, q_4, q_5]$, valamint $[q_2]$.
- Az a inputszimbólum hatására q_1 és q_4 ugyanazon partícióba tartozó állapotba megy át (q_4 állapot), míg q_5 nem.
- Ezért a $[q_1, q_4, q_5]$ partíciót két partícióra bontjuk: $[q_1, q_4]$, valamint $[q_5]$.
- Ezután könnyen beláthatjuk, hogy további partíciókra nem tudjuk bontani a meglévőket, mivel mind az a, mind a b inputszimbólumok hatására q_1 és q_4 ugyanazon partícióba tartozó állapotba megy át.

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 1

- Tehát a minimális állapotszámú automata állapotait reprezentáló partíciók $[q_1, q_4]$, $[q_5]$, $[q_2]$.
- Reprezentáljuk $[q_1, q_4]$-t b_1-gyel, $[q_5]$-t b_2-vel, $[q_2]$-t b_3-mal. Az új automata kezdőállapota b_1 lesz, elfogadó állapota b_3, szabályait pedig az alábbi táblázattal tudjuk megadni:

	δ	a	b
$\rightarrow$	b_1	b_1	b_2
	b_2	b_3	b_3
$\leftarrow$	b_3	b_1	b_1

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 2

Legyen $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ determinisztikus véges automata, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $T = \{a, b\}$, $F = \{q_3, q_4\}$ és δ az alábbi táblázattal adott:

	δ	a	b
$\rightarrow$	q_0	q_0	q_1
	q_1	q_1	q_2
	q_2	q_3	q_1
$\leftarrow$	q_3	q_4	q_1
$\leftarrow$	q_4	q_2	q_1

Konstruáljunk meg egy A' determinisztikus véges automatát, amely minimális állapotszámú és amelyre $L(A') = L(A)$ teljesül!

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 2

- Könnyen megállapítható, hogy az automata összefüggő (q_0-ból közvetlenül elérhető q_0 és q_1, q_1-ből q_1 és q_2, q_2-ből q_3 és q_1, q_3-ból q_4 és q_1, q_4-ből pedig q_2 és q_1).

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 2

- Először két partícióra bontjuk ezen állapotok halmazát: $[q_0, q_1, q_2]$, valamint $[q_3, q_4]$.
- Az *a* inputszimbólum hatására q_0 és q_1 ugyanazon partícióba tartozó állapotba megy át (q_0 és q_1 állapot), míg q_2 nem (q_3 állapot).
- Ezért a $[q_0, q_1, q_2]$ partíciót két partícióra bontjuk: $[q_0, q_1]$, valamint $[q_2]$.
- Az *a* inputszimbólum hatására q_3 és q_4 különböző partícióba tartozó állapotba megy (q_4 és q_2 állapot).

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 2

- A második lépésben létrejött partíciók tehát: $[q_0, q_1]$,$[q_2]$,$[q_3]$ és $[q_4]$.
- A harmadik lépésben $[q_0, q_1]$-t tovább bontjuk, ugyanis a b inputszimbólum hatására q_0 és q_1 különböző partícióba tartozó állapotba megy (q_1 és q_2 állapot).
- Az így létrejött partíciók tehát: $[q_0]$,$[q_1]$,$[q_2]$,$[q_3]$ és $[q_4]$.
- Látható, hogy további partíciókra nem tudjuk bontani a meglévőket.

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 2

- Tehát a minimális állapotszámú automata állapotait reprezentáló partíciók: $[q_0]$,$[q_1]$,$[q_2]$,$[q_3]$ és $[q_4]$.
- Reprezentáljuk $[q_0]$-t $[b_0]$-val,$[q_1]$-t $[b_1]$-gyel, $[q_2]$-t $[b_2]$-vel, $[q_3]$-t $[b_3]$-mal és $[q_4]$-t $[q_4]$-gyel.
- Az új automata kezdőállapota b_0 lesz, elfogadó állapotai b_3 és b_4, szabályait pedig az alábbi táblázattal tudjuk megadni:

	δ	a	b
$\rightarrow$	b_0	b_0	b_1
	b_1	b_1	b_2
	b_2	b_3	b_1
$\leftarrow$	b_3	b_4	b_1
$\leftarrow$	b_4	b_2	b_1

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 3

Legyen $A = (Q, T, \delta, q_1, F)$ determinisztikus véges automata, ahol $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $T = \{a, b\}$, $F = \{q_1, q_3\}$ és δ az alábbi táblázattal adott:

	δ	a	b
	q_0	q_1	q_2
$\rightleftarrows$	q_1	q_0	q_4
	q_2	q_4	q_1
$\leftarrow$	q_3	q_1	q_0
	q_4	q_4	q_1

Konstruáljunk meg egy A' determinisztikus véges automatát, amely minimális állapotszámú és amelyre $L(A') = L(A)$ teljesül!

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 3

- Könnyen megállapítható, hogy az automata nem összefüggő, mivel a q_3 állapot nem érhető el a kezdőállapotból. (q_0-ból közvetlenül elérhető q_1 és q_2, q_1-ből q_0 és q_4, q_2-ből és q_4-ből pedig q_4 és q_1; q_3 egyetlen állapotból sem érhető el közvetlenül.)
- Ezután már csak a q_0, q_1, q_2 és q_4 állapotokkal foglalkozunk.

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 3

- Először két partícióra bontjuk ezen állapotok halmazát: $[q_0, q_2, q_4]$, valamint $[q_1]$.
- Az a inputszimbólum hatására q_2 és q_4 ugyanazon partícióba tartozó állapotba megy át (q_4 állapot), míg q_0 nem.
- Ezért a $[q_0, q_2, q_4]$ partíciót két partícióra bontjuk: $[q_2, q_4]$, valamint $[q_0]$.
- Ezután könnyen beláthatjuk, hogy további partíciókra nem tudjuk bontani a meglévőket, mivel mind az a, mind a b inputszimbólumok hatására q_2 és q_4 ugyanazon partícióba tartozó állapotba megy át.

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 3

- Tehát a minimális állapotszámú automata állapotait reprezentáló partíciók $[q_0]$, $[q_1]$, $[q_2, q_4]$.
- Reprezentáljuk $[q_0]$-t b_0-val, $[q_1]$-t b_1-gyel, $[q_2, q_4]$-t pedig b_2-vel.
- Az új automata kezdő- és elfogadó állapota b_1 lesz, szabályait pedig az alábbi táblázattal tudjuk megadni:

Minimális állapotszámú VDA konstruálása

Példa 3

	δ	a	b
	b_0	b_1	b_2
$\rightleftarrows$	b_1	b_0	b_2
	b_2	b_2	b_1