A számításelmélet alapjai I. (Első gyakorlat)

Dr. Lázár Katalin Anna

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C.
e-mail: lazarkati@elte.hu

2024. február 13.

Tematika

- Ábécé, szavak (sztringek), üres szó, alapvető műveletek szavakon (konkatenáció, a szó i-dik hatványa), szó hossza, szavak egyenlősége (azonossága), szavak (valódi) részszavai, szavak prefixuma (kezdőszelete), szuffixuma (utótagja), tükörképe (fordítottja).
- Nyelv, üres nyelv, véges, végtelen nyelv.
- Nyelvekre vonatkozó műveletek: unió, metszet, különbség, komplemens, konkatenáció, i-dik iteráció, iteratív lezárt (lezárt vagy Kleene-lezárt), tükörkép (megfordítás), prefixum (prefixnyelv), szuffixum (szuffixnyelv), homomorfizmus, izomorfizmus.

Műveletek szavakon

Példa 1

Legyen $V = \{a, b, c\}$ és legyen $u_1 = cab$, $u_2 = aabc$ egy-egy V feletti szó.

1. Soroljuk fel u_1 és u_2 valódi részszavait!
2. Adjuk meg u_1 és u_2 hosszát!
3. Határozzuk meg u_1 és u_2 konkatenáltját! Igaz-e, hogy $u_1 u_2 = u_2 u_1$?
4. Határozzuk meg u_1 és u_2 tükörképét (fordítottját), valamint $u_2^R u_1$-et!
5. Igaz-e, hogy ab prefixuma (kezdőszelete) u_1-nek, bc szuffixuma (utótagja) u_2-nek?
6. Határozzuk meg u_1 és u_2 j-dik hatványait (vagyis u_1^j-t és u_2^j-t), ahol $j = 0, 1, 2, 3$!

Véges és végtelen nyelvek

Példa 2

Legyen $V = \{c, d\}$. Végesek vagy végtelenek az alábbi nyelvek? Végtelen nyelvek esetén soroljuk fel a nyelv néhány szavát!

1. $L_1 = \emptyset$.
2. $L_2 = \{\varepsilon\}$.
3. $L_3 = \{c, cd, ccdc, ccddd\}$.
4. $L_4 = \{c^i d^{i+1} \mid i \geq 0\}$.
5. $L_5 = \{c^p d^q \mid p, q \text{ prím}, q = p + 2\}$ ($L_5 = \{c^p d^q \mid p, q \text{ ikerprím}\}$).
6. $L_6 = \{u \in V^* \mid |u|_c = |u|_d\}$, ahol $|u|_c$, $|u|_d$ c és d u-beli előfordulásainak számát jelöli.
7. $L_7 = \{uu^R \mid u \in V^+\}$.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 3

Legyen $V = \{a, b\}$ ábécé és legyenek $L_1 = \{a, b\}$, $L_2 = \{a, bb\}$ nyelvek. Határozzuk meg az $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 - L_2$, $L_2 - L_1$, $L_1 L_2$, L_1^*, $L_1^* L_2^*$, $(L_1 \cup L_2)^*$, $\bar{L_1}$ és L_1^R nyelveket!

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 4

Legyen $V = \{a, b\}$ ábécé és legyenek $L_1 = \{a^{3n}b^{3n} \mid n \geq 1\}$, $L_2 = \{a^{3n}b^{2n} \mid n \geq 0\}$ nyelvek V felett! Adjuk meg az $\bar{L_1}$ és az L_2^R nyelveket!

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 5

Legyen $V = \{a, b\}$ ábécé és legyenek $L_1 = \{ab, bb\}$ és $L_2 = \{\varepsilon, a, baa\}$. Határozzuk meg L_1L_2-t!

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 6

Legyen $V = \{a, b\}$ ábécé és legyen $L = \{a, bb\}$. Határozzuk meg L^i-t, ahol $i = 0, 1, 2, 3$!

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 7

Legyen $V = \{a, b\}$ ábécé és legyen $L = \{a^{3n+1}b \mid n \geq 0\}$. Határozzuk meg Pre($L$)-t és Suf($L$)-t!

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 7

Definíció 1

- Egy $L \subseteq V^*$ nyelv prefixnyelvén a $\mathrm{Pre}(L) = \{u \mid u \in V^*, uv \in L \text{ valamely } v \in V^*\text{-ra}\}$ nyelvet értjük.
- Egy $L \subseteq V^*$ nyelv szuffixnyelvén a $\mathrm{Suf}(L) = \{u \mid u \in V^*, vu \in L \text{ valamely } v \in V^*\text{-ra}\}$ nyelvet értjük.

Megjegyzés

$L \subseteq \mathrm{Pre}(L)$, $L \subseteq \mathrm{Suf}(L)$.

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 8

Mely összefüggések igazak az alábbi nyelvekre? ($L_1 \subseteq L_2$, $L_1 \supseteq L_2$, $L_1 = L_2$, egyik sem)

- $L_1 = \{a^{3n} \mid n > 0\}$ és $L_2 = (aaa)^*$.
- $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ és $L_2 = a^* b^* c^*$.

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 9

Legyen $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, $L_2 = \{a^{2n+1} b \mid n \geq 0\}$. Igazak-e a következő állítások?

- $\{a^n b^n a^n b \mid n \geq 0\} \subseteq L_1 L_2$.
- $\{a^n b^n a^{2n+1} b \mid n \geq 0\} \subseteq L_1 L_2$.
- $\{(a^n b^n)^n \mid n \geq 0\} \subseteq L_1^*$.
- $\{(ab)^n \mid n \geq 0\} \subseteq L_2^+$.

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 10

Mely összefüggések igazak az alábbi nyelvekre? Húzzunk alá minden igaz választ!

1. $L_1 = \{a^{4n} \mid n > 0\} \cup \{\varepsilon\}$ és $L_2 = (aaaa)^*$.

   $L_1 \subseteq L_2$ $L_2 \subseteq L_1$ egyenlők egyik sem

2. $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ és $L_2 = a^* b^*$.

   $L_1 \subseteq L_2$ $L_2 \subseteq L_1$ egyenlők egyik sem

3. $L_1 = \{u \mid u \in \{a, b\}^+\}$ és $L_2 = aa^* bb^*$.

   $L_1 \subseteq L_2$ $L_2 \subseteq L_1$ egyenlők egyik sem

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 11

Legyen $V = \{a\}$ ábécé és legyen $L_3 = \{a^{3^n} \mid n \geq 1\}$. Melyik nyelv üres az alábbi nyelvek közül: $\emptyset L_3^*$, $\emptyset L_3^+$, $L_3 L_3$, $\overline{L}_3$, $\overline{L}_3\emptyset$?

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 12

Mely állítások igazak az alábbi, nyelvekre vonatkozó állítások közül?

- $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$.
- $\{\varepsilon\}^* = \varepsilon$.
- $\{\varepsilon\}^+ = \varepsilon$.
- $\emptyset^+ = \emptyset$.
- $(L^*)^+ = (L^+)^*$.

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 12

- $L \subseteq L^*, (L^*)^* \subseteq L^*$.
- ha $L_1 \subseteq L_2$, akkor $L_1^* \subseteq L_2^*$.
- $L \subseteq L^+, (L^+)^+ \subseteq L^+$.
- ha $L_1 \subseteq L_2$, akkor $L_1^+ \subseteq L_2^+$.
- $\emptyset L = L$.
- $\{\varepsilon\}L = \{\varepsilon\}$.
- $L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1$.
- $L^* - \{\varepsilon\} = L^+$.
- $(L^R)^R = L$.

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 13

Jelöljenek L, L_1, és L_2 egy V ábécé feletti nyelveket.

- Mikor üres L^*, $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$?
- Mikor véges L^*, $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$?

Nyelvekre vonatkozó összefüggések

Példa 14

Jelöljön L egy V ábécé feletti tetszőleges nyelvet. Mikor teljesülnek a következő egyenlőségek?

1. $L^+ = L^+ \cup L^0$, ...
2. $L^+ \cap \{\varepsilon\} = \emptyset$, ...
3. $L^0\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$, ...
4. $\emptyset L = L$, ...
5. $\bar{L} \cap L = \{\varepsilon\}$, ...

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 15

Igazoljuk, hogy tetszőleges L nyelvre $L^* = L^*L^*$!

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 16

Igazoljuk, hogy tetszőleges L nyelvre $(L^*)^* = L^*$!

Példa 17

Igazoljuk, hogy tetszőleges L_1 és L_2 nyelvekre $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* L_2^*)^*$!

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 18

Igazoljuk, hogy tetszőleges L_1 és L_2 nyelvekre $(L_1L_2)^R = L_2^R L_1^R$!

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 19

Legyenek L_1, L_2 és L_3 azonos V ábécé feletti nyelvek. Igazak-e az alábbi egyenlőségek? Ha igen, igazoljuk, ha nem, adjunk ellenpéldát!

- $(L_1 L_2)L_3 = L_1(L_2 L_3)$.
- $(L_1 \cap L_2)L_3 = L_1 L_3 \cap L_2 L_3$.
- $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$.

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 20

Legyenek $V_1 = \{a, b\}$, $V_2 = \{a, b, c\}$, $h : V_1^* \to V_2^*$ homomorfizmus, $h(a) = ab$, $h(b) = bbc$, $L = \{aa, aba\}$. Határozzuk meg $h(aba)$-t és $h(L)$-et!

Nyelvekre vonatkozó műveletek

Példa 21

Legyenek L, L_1 és L_2 azonos V ábécé feletti nyelvek, h homomorfizmus. Igazak-e az alábbi egyenlőségek? Ha igen, igazoljuk, ha nem, adjunk ellenpéldát!

- $h(L_1 \cap L_2) = h(L_1) \cap h(L_2)$.
- $h(L^R) = h(L)^R$.