Клевчихин Ю.А.

Руководство к решению контрольной работы по ТФКП

для студентов специальности
прикладная математика и информатика

Владивосток
2006

ББК 22.16
УДК 517

Клевчихин Ю.А.
К 48 Руководство к решению контрольной работы по ТФКП. Уч. мет. пособие. – Владивосток: Изд-во Дальневосточного ун-та, 2006

Пособие предназначено для студентов специальности прикладная математика и информатика

$$\text{К}\,\frac{1702050000}{180(03)-2006}$$ ББК 22.16

Предисловие

В связи с сокращением часов, отводимых в учебном плане для аудиторного изучения теории функций комплексной переменной и отсутствию практических занятий, у большинства студентов возникают трудности при самостоятельном решении домашней контрольной работы.

Данное пособие призвано помочь решить все задачи. Здесь приведён пример решения одного из вариантов такой работы, но приведённый текст не претендует на всестороннее объяснение решения задач. Указания к решению довольно краткие и без изучения теории, хотя бы в объеме моей книжки[1] полностью понять решения не удастся. Поэтому перед решением каждой задачи настоятельно рекомендуется прочитать соответствующие разделы теории.

Автор

[1] Насколько мне известно, это наиболее краткий, но достаточно полный учебник (см. список литературы).

Задача 1. Найти все значения корня $\sqrt[4]{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{32}}$.

> **Необходимые факты**: 1) Любое комплексное число $w = u + iv$ можно записать в тригонометрической форме
>
> $$w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \text{ где}$$
> $$\rho = \sqrt{u^2+v^2},$$
> $$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x \geqslant 0, \\ \pi\operatorname{sgn} y + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x < 0. \end{cases}$$
>
> 2) Любое комплексное число $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеет ровно n различных корней n-ой степени z_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, которые вычисляются по формуле
>
> $$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\tfrac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$
>
> где $\sqrt[n]{\rho}$ — обычный арифметический корень из положительного действительного числа.

Р е ш е н и е з а д а ч и. У нас подкоренное число $w = \frac{1+i\sqrt{3}}{32}$. Находим его модуль и аргумент:

$$\rho = \tfrac{|1+i\sqrt{3}|}{32} = \tfrac{\sqrt{1+3}}{32} = \tfrac{2}{32} = \tfrac{1}{16},$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\tfrac{\sqrt{3}}{1} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \tfrac{\pi}{3},$$

поэтому число w в тригонометрической форме имеет вид

$$w = \tfrac{1}{16}\left(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}\right)$$

Теперь по формуле корней (у нас $n = 4$), находим

$$z_k = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{4}\right) + \sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{4}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k\right).$$

Таким образом,

$$z_0 = \tfrac{1}{2}\Big(\cos\tfrac{\pi}{12} + i\sin\tfrac{\pi}{12}\Big),$$
$$z_1 = \tfrac{1}{2}\Big(\cos\left(\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{\pi}{2}\right)\Big) = \tfrac{1}{2}\Big(-\sin\tfrac{\pi}{12} + i\cos\tfrac{\pi}{12}\Big),$$
$$z_2 = \tfrac{1}{2}\Big(\cos\left(\tfrac{\pi}{12}+\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{12}+\pi\right)\Big) = \tfrac{1}{2}\Big(-\cos\tfrac{\pi}{12} - i\sin\tfrac{\pi}{12}\Big),$$
$$z_3 = \tfrac{1}{2}\Big(\cos\left(\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{3\pi}{2}\right)\Big) = \tfrac{1}{2}\Big(\sin\tfrac{\pi}{12} - i\cos\tfrac{\pi}{12}\Big).$$

Чтобы привести полученные в тригонометрической форме числа к алгебраической форме, вычислим входящие в выражения корней значения $\cos\frac{\pi}{12}$ и $\sin\frac{\pi}{12}$.

Используя тригонометрические формулы, получаем

$$\begin{aligned}
&2\cos^2\tfrac{\pi}{12} = 1+\cos\tfrac{\pi}{6} = 1+\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{2+\sqrt{3}}{2},\\
&\cos^2\tfrac{\pi}{12} = \tfrac{2+\sqrt{3}}{4},\\
&\cos\tfrac{\pi}{12} = \tfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
&2\sin^2\tfrac{\pi}{12} = 1-\cos\tfrac{\pi}{6} = 1-\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{2-\sqrt{3}}{2},\\
&\sin^2\tfrac{\pi}{12} = \tfrac{2-\sqrt{3}}{4},\\
&\sin\tfrac{\pi}{12} = \tfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.
\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в выражение корней, окончательно находим

Ответ:

$$\sqrt[4]{\frac{1+i\sqrt{3}}{32}} = \begin{cases}
\frac14\Big(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\Big)\\
\frac14\Big(-\sqrt{2-\sqrt{3}}+i\sqrt{2+\sqrt{3}}\Big)\\
\frac14\Big(-\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}\Big)\\
\frac14\Big(\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}\Big)
\end{cases}$$

Задача 2. Представить в алгебраической форме $\operatorname{sh}\left(1+\dfrac{\pi i}{2}\right)$.

Необходимые факты: 1) Определение гиперболических и тригонометрических функций

$$\begin{array}{ll} \operatorname{ch} z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}, & \operatorname{sh} z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}, \\ \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, & \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \end{array}$$

Отсюда

$$\begin{array}{ll} \operatorname{ch} iz = \cos z, & \operatorname{sh} iz = i\sin z, \\ \cos iz = \operatorname{ch} z, & \sin iz = i\operatorname{sh} z. \end{array}$$

2) Из последних соотношений легко получить для гиперболических функций аналоги стандартных тригонометрических формул:

$$\begin{aligned} &\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1 \quad (\text{основное тождество}),\\ &\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2,\\ &\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2 \end{aligned}$$

(из них обычным способом выводятся все другие аналоги).

Выведем, например, последнюю формулу:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) &= \cos i(z_1 \pm z_2) = \cos(iz_1 \pm iz_2) = \\ &= \cos iz_1 \cos iz_2 \mp \sin iz_1 \sin iz_2 = \\ &= \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \mp (i\operatorname{sh} z_1)(i\operatorname{sh} z_2) = \\ &= \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2. \end{aligned}$$

Обращаем внимание, что для обычного cos в этой формуле стоит $\mp$, а не $\pm$.

Р е ш е н и е з а д а ч и. По формулам имеем

$$\operatorname{sh}\left(1+\tfrac{\pi}{2}i\right) = \operatorname{sh} 1 \operatorname{ch}\tfrac{\pi}{2}i + \operatorname{ch} 1 \operatorname{sh}\tfrac{\pi}{2}i = \operatorname{sh} 1 \cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}\operatorname{ch} 1 = i\operatorname{ch} 1.$$

Ответ: $\operatorname{sh}\left(1+\frac{\pi}{2}i\right) = i\operatorname{ch} 1$.

Задача 3. Представить в алгебраической форме $\operatorname{Arcth}(4i)$.

Необходимые факты: 1) По определению

$$w = \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1}.$$

Выразим отсюда z:

$$w\big(e^{2z}-1\big) = e^{2z}+1 \Rightarrow e^{2z} = \tfrac{w+1}{w-1} \Rightarrow z = \tfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\big(\tfrac{w+1}{w-1}\big).$$

Таким образом, по определению обратной функции имеем

$$z = \operatorname{Arcth} w = \tfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\big(\tfrac{w+1}{w-1}\big).$$

2) По определению $\operatorname{Ln} z$ — многозначная «функция», все значения которой вычисляются по формуле

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\big(\arg z + 2\pi n\big), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решение задачи. В нашем случае $w = 4i$, поэтому

$$\operatorname{Arcth} 4i = \tfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\big(\tfrac{4i+1}{4i-1}\big).$$

Вычислим выражение под знаком логарифма:

$$\tfrac{4i+1}{4i-1} = \tfrac{(4i+1)^2}{(4i-1)(4i+1)} = \tfrac{-16+8i+1}{-17} = \tfrac{15-8i}{17}.$$

И теперь найдём его модуль и аргумент:

$$\big|\tfrac{15-8i}{17}\big| = \tfrac{\sqrt{15^2+8^2}}{17} = \tfrac{\sqrt{225+64}}{17} = 1,$$
$$\arg\tfrac{15-8i}{17} = \operatorname{arctg}\big(-\tfrac{8}{15}\big) = -\operatorname{arctg}\tfrac{8}{15}.$$

Поэтому окончательно

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcth} 4i &= \tfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\tfrac{4i+1}{4i-1} = \tfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\tfrac{15-8i}{17} = \\ &= \tfrac{1}{2}\Big(\ln 1 + i\big(-\operatorname{arctg}\tfrac{8}{15} + 2\pi n\big)\Big) = \\ &= -\tfrac{i}{2}\big(\operatorname{arctg}\tfrac{8}{15} + 2\pi k\big), \quad k = -n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Ответ: $\operatorname{Arcth} 4i = -\tfrac{i}{2}\big(\operatorname{arctg}\tfrac{8}{15} + 2\pi n\big) \approx (-0.244978663 + \pi n)i$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. Представить в алгебраической форме $(2+i)^{3i}$.

Необходимые факты: 1) В случае комплексных z и w по определению $$z^w = e^{w\,\mathrm{Ln}\,z}.$$ 2) По формуле Эйлера $e^z = e^{(x+iy)} = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Решение задачи. Имеем

$$(2+i)^{3i} = e^{3i\,\mathrm{Ln}(2+i)}.$$

Но, как мы знаем,

$$\mathrm{Ln}(2+i) = \ln|2+i| + i\,\mathrm{Arg}(2+i) = \ln\sqrt{5} + i(\mathrm{arctg}\,\tfrac{1}{2} + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}(2+i)^{3i} &= e^{3i(\ln\sqrt{5}+i(\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+2\pi n))} = \\ &= e^{-3(\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+2\pi n)+i3\ln\sqrt{5}} = \\ &= e^{-3(\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+2\pi n)}\big(\cos(3\ln\sqrt{5}\,) + i\sin(3\ln\sqrt{5})\big), \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Ответ: $(2+i)^{3i} = e^{-3(\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+2\pi n)}(\cos(3\ln\sqrt{5}\,) + i\sin(3\ln\sqrt{5}\,))$.

Задача 5. Представить в алгебраической форме $\mathrm{Ln}(4i)$.

Решение. По определению логарифма комплексного числа

$$\mathrm{Ln}\,4i = \ln|4i| + i\,\mathrm{Arg}(4i) = \ln 4 + i\big(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi n\big), \quad n \in \mathbb{Z},$$

так как $|4i| = 4$ и $\arg 4i = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\mathrm{Ln}\,4i = \ln 4 + i\big(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\big)$, $n \in \mathbb{Z}$.

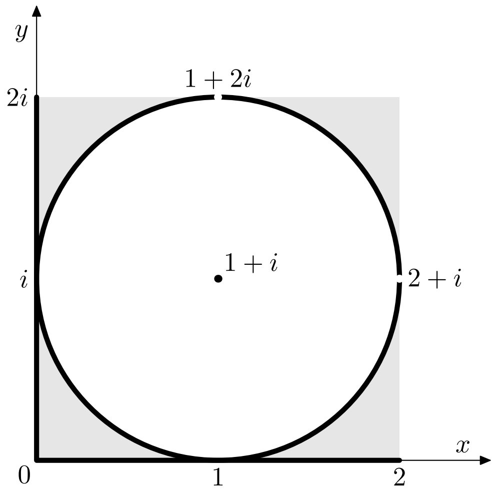
Задача 6. Вычертить область, заданную неравенствами

$$|z-1-i| \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \operatorname{Re} z < 2, \quad 0 \leqslant \operatorname{Im} z < 2.$$

Решение. С геометрической точки зрения $|z-(1+i)| = 1$ — окружность радиуса 1 с центром в точке $(1+i)$ на комплексной плоскости, поэтому $|z-(1+i)| \geqslant 1$ — множество точек, находящиеся вне круга (включая границу круга).

Далее, неравенства $0 \leqslant \operatorname{Re} z < 2$, $0 \leqslant \operatorname{Im} z < 2$. очевидно, задают квадрат со стороной 2 с нижней левой вершиной в нуле, а правой верхней в $2+2i$.

Таким образом, искомая область — внешность круга, лежащая внутри квадрата (границы изображенные жирными линиями принадлежат области, а тонкой — нет).



Обратим внимание на отсутствие в полученном множестве двух точек $1+2i$ и $2+i$.

Задача 7. Определить вид пути и в случае, когда он проходит через точку ∞, исследовать его поведение в этой точке:

$$z = 3\operatorname{tg} t + i4\sec t.$$

Р е ш е н и е. Наименьший общий период функций tg и sec равен 2π. Поэтому достаточно построить кривую для $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. (В $\frac{\pi}{2}$ функции tg и sec не определены).

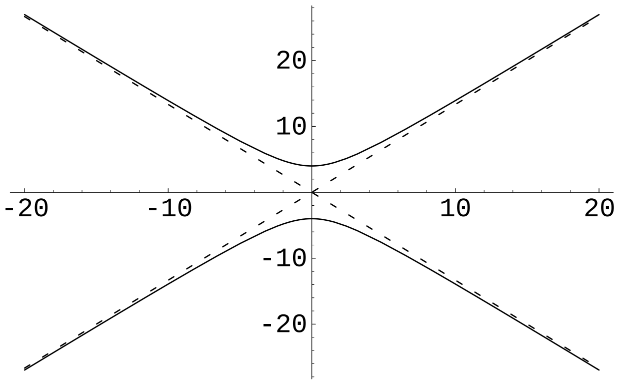
Так как $z = 3\operatorname{tg} t + i4\sec t$, в координатах x, y параметрические уравнения искомой кривой имеют вид

$$\begin{cases} x = 3\operatorname{tg} t, \\ y = 4\sec t. \end{cases}$$

Исключим из этих равенств параметр t:

$$\begin{aligned} &\frac{x}{3} = \operatorname{tg}\ t, && \frac{y}{4} = \sec t, \\ &\frac{x^2}{9} = \operatorname{tg}^2 t + 1 - 1, && \frac{y^2}{16} = \sec^2 t, \\ &\frac{x^2}{9} = \frac{1}{\cos^2 t} - 1, && \frac{y^2}{16} = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{aligned}$$

Отсюда $\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} - 1$ и $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ — каноническое уравнение гиперболы. Очевидно, $\frac{x}{3} \pm \frac{y}{4} = 0$ — асимптоты.



При $t \to -\frac{\pi}{2} + 0$, $x \to -\infty$ и $y \to +\infty$.
При $t \to \frac{\pi}{2} - 0$, $x \to +\infty$ и $y \to +\infty$.
При $t \to \frac{\pi}{2} + 0$, $x \to -\infty$ и $y \to -\infty$.
При $t \to \frac{3\pi}{2} - 0$, $x \to +\infty$ и $y \to -\infty$.

Задача 8. Восстановить голоморфную в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)$ или мнимой части $v(x,y)$ и начальному значению $f(z_0)$.

$$v = y - \frac{y}{x^2+y^2}, \quad f(1) = 2.$$

Необходимые факты: 1) $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция $f = u + iv$ является голоморфной в области тогда и только тогда, когда в этой области её действительная и мнимая части удовлетворяют условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

2) Функция $u(x,y)$ (соответственно $v(x,y)$) является действительной (соответственно мнимой) частью некоторой голоморфной функции f тогда и только тогда, когда она является гармонической, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \left(\text{соотв.} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\right)$$

Р е ш е н и е з а д а ч и. Сначала проверяем, существует ли голоморфная функция с данной мнимой частью $v(x,y) = y - \frac{y}{x^2+y^2}$. Для этого проверяем, удовлетворяет ли она уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2y(x^2+y^2)-8x^2y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2y^3-6x^2y}{(x^2+y^2)^3},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1 - \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)4y}{(x^2+y^2)^3} = -\frac{-2x^2y-2y^3-4x^2y+4y^3}{(x^2+y^2)^3} = \frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

Отсюда видим, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2y^3-6x^2y}{(x^2+y^2)^3} + \frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3} = 0.$$

Из условий Коши-Римана для действительной части $v(x,y)$ получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \left(= \frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \left(= -\frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Из второго уравнения сразу видим, что

$$u(x,y) = -x\int \frac{2ydy}{(x^2+y^2)^2} = -x\int \frac{dy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \varphi(x)$$

с некоторой функцией φ, зависящей только от x. Чтобы её найти, вычислим производную

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(x) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(x).$$

С другой стороны, как следует из первого уравнения нашей системы

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Приравнивая, находим $\varphi'(x) = 1$ и, значит, $\varphi(x) = x+C$. Таким образом,

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + x + C,$$

поэтому

$$\begin{aligned} f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) &= \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} + x + C + i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right) = \\ &= x + iy + \frac{x-iy}{x^2+y^2} + C = z + \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} + C = z + \frac{1}{z} + C. \end{aligned}$$

Найдем константу C. Для этого воспользуемся данным нам условием $f(1) = 2$. Подставляя, получим

$$f(1) = 1 + 1 + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Окончательно имеем

Ответ: $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

Задача 9. Вычислить интеграл от функции комплексной переменной по данному пути

$$\int\limits_{ABC} (z^2 + \cos z)\, dz,$$

где ABC — ломанная, соединяющая точки $z_A = 0$, $z_B = 1$, $z_C = i$.

Необходимые факты: 1) Если $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — параметризация кривой γ, то вычислительная формула для интеграла такова:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \int\limits_a^b f\big(z(t)\big) z'(t)\, dt.$$

В случае, когда подынтегральная функция f имеет первообразную F (т. е. $F'(z) = f(z)$) на кривой γ и γ соединяет точки A, B (т. е. $z(a) = A$, $z(b) = B$), то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \int\limits_a^b f\big(z(t)\big) z'(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_a^b F'\big(z(t)\big) z'(t)\, dt = \int\limits_a^b \Big(F\big(z(t)\big)\Big)'\, dt =$$

$$= F(z(t))\Big|_a^b = F(z)\Big|_A^B.$$

Р е ш е н и е   з а д а ч и. У нас функция $f(z) = z^2 + \cos z$ — голоморфна в $\mathbb{C}$, поэтому имеет первообразную, которая легко находится:

$$F(z) = \tfrac{z^3}{3} + \sin z \quad (\text{очевидно, } F'(z) = z^2 + \cos z)$$

Далее, по условию ломаная, по которой ведется интегрирование, начинается в точке $z_A = 0$ и заканчивается в точке $z_C = i$. Поэтому по вычислительной формуле для случая, когда подынтегральная функция имеет первообразную, имеем

$$\int\limits_{ABC} (z^2 + \cos z)\, dz = \tfrac{z^3}{3} + \sin z\Big|_0^i = \tfrac{i^3}{3} + \sin i = -\tfrac{i}{3} + i \operatorname{sh} 1 = (\operatorname{sh} 1 - \tfrac{1}{3})i.$$

Ответ: $\displaystyle\int\limits_{ABC} (z^2 + \cos z)\, dz = (\operatorname{sh} 1 - \tfrac{1}{3})i$**.**

Задача 10. Найти радиус и область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(i^n n(2+i^n)\big) z^{n^2}.$$

Необходимые факты: Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ вычисляется по формуле Коши-Адамара

$$R = \frac{1}{\rho}, \quad \rho = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Область сходимости степенного ряда — круг радиуса R с центром в точке z_0. Вне круга ряд расходится. В граничных точках может сходиться, а может и расходиться.

Р е ш е н и е з а д а ч и. Для данного нам степенного ряда, очевидно, $z_0 = 0$. Выпишем формулу для вычисления коэффициентов c_n (обращая особое внимание, что c_n — это коэффициент при степени n):

$$c_k = \begin{cases} i^n n(2+i^n), & k = n^2, \\ 0, & k \neq n^2. \end{cases}$$

Видим, что среди коэффициентов много нулевых. Вычислим модуль ненулевых коэффициентов:

$$|c_{n^2}| = |i^n n(2+i^n)| = n|2+i^n| = \begin{cases} 3n, & n = 4m, \\ n\sqrt{5}, & n = 4m+1, \\ n, & n = 4m+2, \\ n\sqrt{5}, & n = 4m+3. \end{cases}$$

Очевидно, наибольшей из подпоследовательностей будет подпоследовательность при $n = 4m$, т. е. $\left|c_{(4m)^2}\right| = \left|c_{16m^2}\right| = 12m$.

Нам надо найти верхний предел, а это наибольший из частичных пределов последовательности $\sqrt[n]{|c_n|}$. Ясно, что он будет равен пределу наибольшей подпоследовательности

$$\sqrt[16m^2]{|c_{16m^2}|} = \sqrt[16m^2]{12m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1.$$

Доказательство по теореме о сжатой переменной

$$1 \leqslant \sqrt[16m^2]{12m} \leqslant \sqrt[16m^2]{16m^2} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$$

в силу известного предела $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$.

Таким образом,

Ответ: $R = 1$ и область сходимости — круг $|z| < 1$.

Задача 11. Найти лорановские разложения данной функции в 0 и в ∞.

$$f(z) = \frac{5z - 100}{z^4 + 5z^3 - 50z^2}.$$

Необходимые факты: 1) По теореме Лорана, если функция f голоморфна в кольце $K = \{z : r < |z - z_0| < R\}$, то существуют такие коэффициенты c_n, $n \in \mathbb{Z}$, что в этом кольце

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Говорят, что ряд справа является разложением в ряд Лорана в кольце K по степеням $(z - z_0)$ (или центрированным в точке z_0).

2) Разложение в ряд Лорана в заданном кольце с центром в z_0 единственно.

3) Если $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n$ и $g(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c''_n (z - z_0)^n$, то

$$(f + g)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c'_n + c''_n)(z - z_0)^n$$

в общей части колец сходимости рядов для f и g.

4) Для нахождения коэффициентов ряда Лорана, как правило, используются известные разложения в ряд Тейлора элементарных функций e^z, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\sin z$, $\cos z$, $\ln(1 + z)$ и $(1 + z)^\alpha$. В нашем случае будут использованы разложения

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots,$$
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots,$$

справедливые только при $|z| < 1$.

Решение задачи. Чтобы найти нужное разложение, предварительно разложим нашу функцию на простые дроби. Для этого найдём все корни знаменателя:

$$z^4 + 5z^3 - 50z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2(z^2 + 5z - 50) = 0.$$

Откуда

$$z_1 = z_2 = 0, \quad z_{3,4} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+200}}{2} = \frac{-5 \pm 15}{2} = \begin{cases} 5 \\ -10. \end{cases}$$

Таким образом, $z^4 + 5z^3 - 50z^2 = z^2(z+10)(z-5)$, поэтому разложение нашей функции на простые дроби должно иметь вид:

$$\frac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2} = \frac{5z-100}{z^2(z+10)(z-5)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+10} + \frac{D}{z-5}.$$

Коэффициенты A, B, C, D можно найти как обычно, приводя к общему знаменателю справа и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z слева и справа. Но B, C и D можно найти проще.

Для нахождения B: умножаем обе части равенства

$$\frac{5z-100}{z^2(z+10)(z-5)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+10} + \frac{D}{z-5}. \qquad ⁂$$

на z^2 и в результат подставляем $z = 0$:

$$\left.\frac{5z-100}{(z+10)(z-5)}\right|_{z=0} = \left.\left(Az + B + \frac{Cz^2}{z+10} + \frac{Dz^2}{z-5}\right)\right|_{z=0} \quad \Rightarrow \quad B = 2.$$

Аналогично для C: умножаем обе части равенства ⁂ на $(z+10)$ и результат вычисляем при $z = -10$:

$$\left.\frac{5z-100}{z^2(z-5)}\right|_{z=-10} = \left.\frac{A(z+10)}{z} + \frac{B(z+10)}{z^2} + C + \frac{D(z+10)}{z-5}\right|_{z=-10} \Rightarrow \quad C = \frac{1}{10}.$$

Наконец, для D: умножаем на $(z-5)$ и результат вычисляем при $z = 5$:

$$\left.\frac{5z-100}{z^2(z+10)}\right|_{z=5} = \left.\frac{A(z-5)}{z} + \frac{B(z-5)}{z^2} + \frac{C(z-5)}{z+10} + D\right|_{z=5} \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{1}{5}.$$

Для нахождения коэффициента A из ⁂ получаем равенство

$$\frac{5z-100}{z^2(z+10)(z-5)} = \frac{A}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{10(z+10)} - \frac{1}{5(z-5)}.$$

Откуда, например, при $z = 1$ находим $A = \dfrac{1}{10}$. Таким образом, окончательно получим

$$\frac{5z-100}{z^2(z+10)(z-5)} = \frac{1}{10z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{10(z+10)} - \frac{1}{5(z-5)}.$$

Нам надо найти разложение нашей функции в окрестностях нуля и бесконечности. Оба эти разложения по степеням z. Первые два слагаемые — это уже суммы степеней z. Поэтому остаётся разложить в ряды Лорана только последние слагаемые $\frac{1}{10(z+10)}$ и $\frac{1}{5(z-5)}$.

Разложим $\frac{1}{10(z+10)}$ в окрестности нуля. Очевидно, эта функция голоморфна в круге $|z| < 10$. Поэтому её ряд Лорана в этом круге совпадёт с рядом Тейлора (с кругом сходимости $|z| < 10$):

$$\frac{1}{10(z+10)} = \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z}{10}\right)} = \frac{1}{10^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{10}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^{n+2}} \cdot z^n.$$

Аналогично находим разложение $\frac{1}{5(z-5)}$ в окрестности 0. Замечаем, что функция голоморфна в круге $|z| < 5$, поэтому

$$\frac{1}{5(z-5)} = \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{z}{5}\right)} = \frac{1}{5^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{n+2}} \cdot z^n.$$

Оба полученных разложения справедливы в меньшем круге $|z| < 5$. Поэтому в этом круге имеет место равенство

$$\begin{aligned}
\frac{5z-100}{z^2(z+10)(z-5)} &= \frac{1}{10z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{10(z+10)} - \frac{1}{5(z-5)} = \\
&= \frac{1}{10z} + \frac{2}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^{n+2}} \cdot z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{n+2}} \cdot z^n = \\
&= \frac{2}{z^2} + \frac{1}{10z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{10^{n+2}} + \frac{1}{5^{n+2}}\right) z^n.
\end{aligned}$$

Отсюда видим, что в кольце $0 < z < 5$ разложение в ряд Лорана имеет вид

$$\frac{5z-100}{z^2(z+10)(z-5)} = \frac{2}{z^2} + \frac{1}{10z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{10^{n+2}} + \frac{1}{5^{n+2}}\right) z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

где

$$c_n = \begin{cases} 0, & n \leqslant -3, \\ 2, & n = -2, \\ \frac{1}{10}, & n = -1, \\ \frac{(-1)^n}{10^{n+2}} + \frac{1}{5^{n+2}}, & n \geqslant 0. \end{cases}$$

Разложим теперь $\frac{1}{10(z+10)}$ в окрестности ∞. Очевидно, эта функция голоморфна в кольце $|z| > 10$. Поэтому преобразуем её так:

$$\frac{1}{10(z+10)} = \frac{1}{10z} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{10}{z}\right)}.$$

Замечая, что при $|z| > 10$ имеем $\left|\frac{10}{z}\right| < 1$ и поэтому

$$\frac{1}{1 + \frac{10}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\tfrac{10}{z}\right)^n.$$

Окончательно получаем

$$\frac{1}{10(z+10)} = \frac{1}{10z} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{10}{z}\right)} = \tfrac{1}{10z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{10}{z}\right)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{10^{n-1}}{z^{n+1}} = \left(\begin{smallmatrix}\text{замена}\\ \text{индекса}\\ n+1=-n'\end{smallmatrix}\right) = \sum_{n'=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n'+1}}{10^{n'+2}} z^{n'}$$

(штрих в последней сумме можно не писать, так как от обозначения индекса суммирования сумма не зависит).

Аналогично, при $|z| > 5$ находим разложение $\frac{1}{5(z-5)}$:

$$\frac{1}{5(z-5)} = \frac{1}{5z} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{z}\right)} = \frac{1}{5z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{z}\right)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{z^{n+1}} = \left(\begin{smallmatrix}\text{замена}\\ \text{индекса}\\ n+1=-n'\end{smallmatrix}\right) = \sum_{n'=-\infty}^{-1} \frac{1}{5^{n'+2}} z^{n'}.$$

Оба полученных разложения справедливы в кольце $|z| > 10$. Поэтому в этом кольце имеет место равенство

$$\frac{5z - 100}{z^2(z+10)(z-5)} = \frac{1}{10z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{10(z+10)} - \frac{1}{5(z-5)} =$$
$$= \frac{2}{z^2} + \frac{1}{10z} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{10^{n+2}} + \frac{1}{5^{n+2}}\right) z^n = \left(\begin{smallmatrix}\text{вычисляем}\\ \text{сумму при}\\ n=-2 \text{ и } n=-1\end{smallmatrix}\right) =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{-3} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{10^{n+2}} + \frac{1}{5^{n+2}}\right) z^n + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{10z}.$$

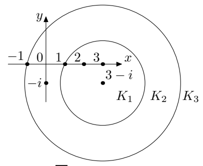
Это и есть разложение в ряд Лорана в точке ∞.

Задача 12. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z - z_0$

$$\frac{z+3}{z^2-1}, \quad z_0 = 3 - i.$$

Р е ш е н и е з а д а ч и. Разложим нашу функцию на простые дроби $\frac{z+3}{z^2-1} = -\left(\frac{1}{1+z} + \frac{2}{1-z}\right)$ и отметим, что она голоморфна всюду, за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в нуль, т. е. точек $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$. Поэтому вся комплексная плоскость разбивается на три кольца, в которых функция $\frac{z+3}{z^2-1}$ голоморфна:

$$K_1 : 0 < |z - (3-i)| < \sqrt{5},$$
$$K_2 : \sqrt{5} < |z - (3-i)| < \sqrt{17},$$
$$K_3 : 3 < |z - (3-i)| < \infty.$$



(так как $|z_1 - z_0| = |1 - (3-i)| = |-2+i| = \sqrt{5}$ и $|z_2 - z_0| = |-1-(3-i)| = |-4+i| = \sqrt{17}$).

Рассмотрим кольцо $K_1 : 0 < |z-(3-i)| < \sqrt{5}$. В нём обе функции $\frac{1}{1+z}$ и $\frac{2}{1-z}$ голоморфны. Поэтому их ряд Лорана совпадает в K_1 с рядом Тейлора. Разложение находим стандартным способом (для краткости мы вместо $3-i$ пишем z_0):

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+z_0+z-z_0} = \frac{1}{1+z_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{1+z_0}} = \left(\begin{matrix}\text{с учётом, что}\\ \text{в нашем кольце}\\ \left|\frac{z-z_0}{1+z_0}\right|<1\end{matrix}\right) =$$
$$= \frac{1}{1+z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-z_0}{1+z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n.$$

$$\frac{2}{1-z} = \frac{2}{1-z_0-z+z_0} = \frac{2}{1-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}} = \left(\begin{matrix}\text{учитываем, что}\\ \text{в нашем кольце и}\\ \left|\frac{z-z_0}{1-z_0}\right|<1\end{matrix}\right)$$
$$= \frac{2}{1-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(1-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n.$$

Складывая оба разложения, окончательно в кольце K_1 получим

$$\boxed{\frac{z+3}{z^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(1+z_0)^{n+1}} - \frac{2}{(1-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n},$$

где $z_0 = 3 - i$ (мы еще умножили на -1).

Рассмотрим кольцо $K_2 : \sqrt{5} < |z - z_0| < \sqrt{17}$. В нём $\frac{1}{1+z}$ останется голоморфной и поэтому её разложение будет таким же как в кольце K_1. Для дроби $\frac{2}{1-z}$ мы найдём разложение, справедливое во внешности кольца K_1 и, в частности, в кольце K_2:

$$\frac{2}{1-z} = -\frac{2}{z - z_0 + z_0 - 1} = \left(\begin{array}{c} \text{теперь} \\ \text{в нашем кольце} \\ \left|\frac{1-z_0}{z-z_0}\right| < 1 \end{array} \right) = -\frac{2}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_0 - 1}{z - z_0}} =$$

$$= -\frac{2}{z - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z_0 - 1}{z - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}(z_0 - 1)^n}{(z - z_0)^{n+1}} =$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{мы сделали замену индекса } n + 1 = -n' \Rightarrow \\ n = -(n' + 1) \text{ и в результате опустили штрих} \end{array} \right) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2(-1)^n}{(z_0 - 1)^{n+1}} (z - z_0)^n.$$

Таким образом, в кольце K_2 имеет место разложение

$$\boxed{\frac{z+3}{z^2-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2(-1)^{n+1}}{(z_0 - 1)^{n+1}} (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(1 + z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n.}$$

Остаётся кольцо $K_3 : \sqrt{17} < |z - z_0| < \infty$. Разложение $\frac{2}{1-z}$ мы уже имеем (такое же как в K_2). Найдём разложение $\frac{1}{z+1}$:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1 + z_0 + z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1+z_0}{z - z_0}} =$$

$$= \frac{1}{z - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1 + z_0}{z - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 + z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} =$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{мы сделали замену индекса } n + 1 = -n' \Rightarrow \\ n = -(n' + 1) \text{ и в результате опустили штрих} \end{array} \right) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n+1}}{(1 + z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n.$$

Итак, в кольце K_3

$$\boxed{\frac{z+3}{z^2-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\frac{2(-1)^{n+1}}{(z_0 - 1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1 + z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n.}$$

Задача 13. Функцию $(z-1)\cos\frac{z-3}{z-1}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$.

Решение задачи. Данная функция голоморфна всюду, кроме точки $z_0 = 1$. Поэтому её можно разложить в ряд Лорана сходящийся всюду в кольце $0 < |z-1| < \infty$. Чтобы разложить функцию $\cos\frac{z-3}{z-1}$, сначала её немного преобразуем:

$$\cos\tfrac{z-3}{z-1} = \cos\left(1 - \tfrac{2}{z-1}\right) = \cos 1 \cos\tfrac{2}{z-1} + \sin 1 \sin\tfrac{2}{z-1} \qquad (*)$$

Теперь воспользуемся известными разложениями в ряд Тейлора sin и cos (справедливыми при любых значениях аргумента):

$$\cos\tfrac{2}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\tfrac{2}{z-1}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n 4^n}{(2n)!}\tfrac{1}{(z-1)^{2n}} =$$

$$\begin{bmatrix}\text{замена}\\ \text{индекса}\\ n=-n'\end{bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{0} \tfrac{(-1)^n}{4^n(-2n)!}(z-1)^{2n},$$

$$\sin\tfrac{2}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(\tfrac{2}{z-1}\right)^{2n+1} = \sum_{n=-\infty}^{0} \tfrac{2(-1)^{n-1}}{4^n(1-2n)!}(z-1)^{2n-1}.$$

Подставляя полученные ряды в $(*)$, окончательно можем написать

$$(z-1)\cos\frac{z-3}{z-1} =$$

$$= (z-1)\left[\cos 1 \sum_{n=-\infty}^{0} \tfrac{(-1)^n}{4^n(-2n)!}(z-1)^{2n} + \sin 1 \sum_{n=-\infty}^{0} \tfrac{2(-1)^{n-1}}{4^n(1-2n)!}(z-1)^{2n-1}\right] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} \tfrac{(-1)^n \cos 1}{4^n(-2n)!}(z-1)^{2n+1} + \sum_{n=-\infty}^{0} \tfrac{2(-1)^{n-1}\sin 1}{4^n(1-2n)!}(z-1)^{2n}.$$

Первая сумма содержит только нечётные степени $(z-1)$, вторая только чётные, поэтому окончательно

$$(z-1)\cos\tfrac{z-3}{z-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-1)^k,$$

где

$$c_k = \begin{cases} \frac{(-1)^n \cos 1}{4^n(-2n)!}, & k = 2n+1,\ n \leqslant 0, \\ \frac{2(-1)^{n-1}\sin 1}{4^n(1-2n)!}, & k = 2n,\ n \leqslant 0, \\ 0, & k \geqslant 2. \end{cases}$$

Задача 14. Определить тип особой точки $z = 0$ для функции

$$\frac{\cos z^2 - 1}{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}}.$$

> **Необходимые факты**: Согласно теоремам классификацию особой точки z_0 можно произвести в зависимости от предела $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.
>
> - Если он существует и конечен, то z_0 — устранимая.
> - Если он равен ∞, то z_0 — полюс, причём его порядок равен такому числу n, для которого
>
> $$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) \neq \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ \infty \end{smallmatrix} \right.,$$
>
> - Если он не существует, то z_0 — существенно особая точка.

Решение задачи. Согласно формуле Тейлора имеем

$$\cos z^2 = 1 - \frac{z^4}{2} + o(z^5)$$
$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + o(z^5).$$

Поэтому

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z^2 - 1}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6} = \lim_{z\to 0} \frac{-\frac{z^4}{2} + o(z^5)}{\frac{z^5}{120} + o(z^5)} =$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + o(z)}{z(\frac{1}{120} - o(z))} = \lim_{z\to 0} -\frac{60}{z} = \infty.$$

Далее, очевидно, (вычисления те же самые):

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} -\frac{60z}{z} = -60 \neq \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ \infty \end{smallmatrix} \right..$$

Откуда видим, что точка $z = 0$ — полюс 1-го порядка.

Ответ: для функции $\frac{\cos z^2 - 1}{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}}$ точка $z = 0$ — полюс 1-го порядка.

Задача 15. Для функции $\frac{1}{e^z+1}$ найти все изолированные особые точки и определить их тип.

> **Необходимые факты**: 1) Если $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, где g и h — голоморфные в D функции, то f может иметь в D только полюсы или устранимые особые точки. Эти точки являются нулями знаменателя $h(z)$.
> 2) Если z_0 — нуль знаменателя и n — его порядок, то для определения особой точки надо вычислить порядок нуля m в этой точке числителя. Если $m \geqslant n$, то точка устранимая, если $m < n$, то полюс порядка $n - m$.
> 3) Если z_0 — нуль функции, то чтобы найти его порядок, надо найти сколько первых производных этой функции обращаются в нуль в этой точке. Порядок нуля на единицу больше.

Решение задачи. Очевидно, что функция $\frac{1}{e^z+1}$ является отношением двух голоморфных функций во всей комплексной плоскости. Числитель нулей не имеет, следовательно все (конечные) особые точки — полюсы порядок которых равен порядку соответствующих нулей знаменателя.

Найдём нули знаменателя:

$$e^z + 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad e^z = -1 \quad \Rightarrow \quad z_n = \mathrm{Ln}(-1) = (2n+1)\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Так как $\left(e^z + 1\right)' = e^z \neq 0$ всюду, то все точки z_n — нули первого порядка знаменателя. Поэтому данная нам функция $\frac{1}{e^z+1}$ в точках $z_n = (2n+1)\pi i$ имеет полюсы первого порядка.

Далее, поскольку при $z_n = (2n+1)\pi i \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, точка ∞ не является изолированной особой точкой (и её тип не надо определять).

Ответ: все изолированные особые точки $z_n = (2n+1)\pi i$, $(n \in \mathbb{Z})$, — полюсы 1-го порядка, ∞ не является изолированной особой точкой (но и точкой регулярности тоже).

Задача 16. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin \pi z}\, dz.$$

Необходимые факты: 1) По теореме Коши о вычетах искомый интеграл равен $2\pi i$, умноженному на сумму вычетов во всех изолированных особых точках, лежащих внутри области, ограниченной кривой, по которой ведётся интегрирование.
2) Вычет в устранимой особой точке равен нулю, а вычет в полюсе z_0 первого порядка, если $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где φ, ψ — голоморфны, $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$ можно вычислить по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

Решение задачи. Функция $f(z) = \frac{iz(z-i)}{\sin \pi z}$ является отношением голоморфных функций во всей плоскости и, в частности, в круге $|z - \frac{1}{2}| < 1$. Поэтому в этом круге она может иметь только полюсы или устранимые особые точки там, где знаменатель равен нулю. Найдём эти точки:

$$\sin \pi z = 0, \quad \Rightarrow \quad z = n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В круге $|z - \frac{1}{2}| < 1$ лежат только две точки $z = 0$ и $z = 1$.

Точка $z = 0$ является нулём первого порядка и для числителя и для знаменателя так как:

$$\big(z(z-i)\big)' = 2z - i\Big|_{z=0} = -i \neq 0; \quad (\sin \pi z)' = \pi \cos \pi z\Big|_{z=0} = \pi \neq 0.$$

Следовательно, $z = 0$ — устранимая особая точка. Вычет в ней равен нулю.

Точка $z = 1$ является нулём первого порядка для знаменателя, а числитель в ней в нуль не обращается:

$$iz(z-i)\Big|_{z=1} = i(1-i) = 1 + i \neq 0; \quad (\sin \pi z)' = \pi \cos \pi z\Big|_{z=1} = -\pi \neq 0.$$

Следовательно, $z = 1$ — полюс первого порядка. Вычет в ней можно вычислить по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{iz(z-i)}{\sin \pi z} = \frac{iz(z-i)}{(\sin \pi z)'}\Big|_{z=1} = \frac{1+i}{-\pi}.$$

Поэтому искомый интеграл равен

$$\oint\limits_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin \pi z}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1+i}{\pi}\right) = -2i(1+i) = 2-2i.$$

Ответ: $\displaystyle\oint\limits_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin \pi z}\,dz = 2(1-i).$

Задача 17. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{2z^4}\,dz.$$

Необходимые факты: Вычет в полюсе порядка n вычисляется по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\big[(z-z_0)^n f(z)\big]^{(n-1)}.$$

Но иногда проще найти непосредственно c_{-1} из разложения в ряд Лорана в точке z_0.

Р е ш е н и е. Сначала заметим, что

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{2z^4}\,dz = \oint\limits_{|z|=2} \left[\frac{1}{2z^3} - \frac{\sin z}{2z^4}\right] dz = \oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{2z^3}\,dz - \oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{2z^4}\,dz.$$

Первый из интегралов справа равен нулю, так как подынтегральная функция является рядом Лорана в единственной её особой точке $z=0$, причём, очевидно, $c_{-1} = \operatorname*{Res}\limits_{z=0} \frac{1}{2z^3} = 0$ (у функции $\frac{1}{2z^3}$ только $c_{-3} = \frac{1}{2}$, а все остальные нули).

Вычислим вычет подынтегральной функции второго интеграла в её единственной особой точке $z=0$. Так как

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^3 \sin z}{2z^4} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2},$$

видим, что $z = 0$ — полюс третьего порядка, поэтому по формуле вычисления вычетов в случае полюса

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{2z^4} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin z}{2z}\right)^{(2)}.$$

Указанную производную вычислять утомительно, поэтому найдём непосредственно коэффициент c_{-1} ряда Лорана в нуле:

$$\frac{\sin z}{2z^4} = \frac{1}{2z^4}\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots\right) = \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{12z} + \frac{z}{240} - \dots$$

Откуда видим, что $c_{-1} = -\frac{1}{12}$.

Таким образом,

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{2z^4}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{\pi i}{6}.$$

Окончательно получаем

Ответ: $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{2z^4}\,dz = \oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{2z^3}\,dz - \oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{2z^4}\,dz = \frac{\pi i}{6}.$

Задача 18. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=0.05} \frac{e^{iz} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z}\,dz.$$

Р е ш е н и е. Числитель и знаменатель подынтегрального выражения — голоморфные всюду в $\mathbb{C}$ функции. Поэтому особыми точками являются только нули знаменателя. Найдём те из них, которые попали в круг $|z| < 0.05$:

$$z^3 \operatorname{sh} 16\pi z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0 \quad \vee \quad \operatorname{sh} 16\pi z = 0.$$

Последнее уравнение перепишем так:

$$e^{16\pi z} - e^{-16\pi z} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{16\pi z} = e^{-16\pi z} \quad \Rightarrow \quad e^{32z} = 1 = e^{2\pi n}$$

Откуда $32z = 2\pi n \Rightarrow z_n = \frac{\pi}{16}n$.

Следующая оценка показывает, что в круг $|z| < 0.05 = \frac{1}{20}$ попадает только точка $z_0 = 0$:

$$n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\pi}{16}n\right| \geqslant \left|\frac{\pi}{16}\right| > \frac{3}{16} > \frac{1}{20}.$$

Итак, наши вычисления показывают, что

$$\oint\limits_{|z|=0.05} \frac{e^{iz} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z}\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{iz} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z}$$

Для вычисления указанного вычета заметим, что точка $z = 0$ является нулём первого порядка для числителя:

$$e^{iz} - 1 - \sin 4z\Big|_{z=0} = 0;$$
$$(e^{iz} - 1 - \sin 4z)' = ie^{iz} - 4\cos 4z\Big|_{z=0} = i - 4 \neq 0,$$

И нулём четвёртого порядка знаменателя, так как знаменатель является произведением z^3 (нуль третьего порядка) и $\operatorname{sh} 16\pi z$ (нуль первого порядка $(\operatorname{sh} 16\pi z)'\big|_{z=0} \neq 0$). Поэтому для дроби $z = 0$ является полюсом 3-го порядка.

Вычислять вычет по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{iz} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{e^{iz} - 1 - \sin 4z}{\operatorname{sh} 16\pi z} \right)^{(2)}$$

кажется не простым занятием из-за громоздких вычислений. Поэтому попытаемся найти c_{-1} коэффициент разложения подынтегральной функции в ряд Лорана непосредственно.

Поскольку мы выяснили, что $z = 0$ полюс третьего порядка, разложение должно иметь вид

$$\frac{e^{iz} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z} = \frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + \ldots$$

Отсюда

$$e^{iz} - 1 - \sin 4z = \operatorname{sh} 16\pi z(c_{-3} + c_{-2}z + c_{-1}z^2 + c_0 z^3 + \ldots)$$

Выпишем первые три коэффициента разложения в нуле функции слева:

$$e^{iz} - 1 - \sin 4z = iz + \tfrac{(iz)^2}{2} + \tfrac{(iz)^3}{6} + \cdots - \left(4z - \tfrac{(4z)^3}{6} + \ldots\right),$$

откуда

$$e^{iz}-1-\sin 4z=(i-4)z-\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{4^3-i}{6}z^3+\dots$$

Справа же будем иметь

$$\begin{aligned}&\operatorname{sh}16\pi z(c_{-3}+c_{-2}z+c_{-1}z^2+c_0z^3+o(z^3))=\\&\quad=\left(16\pi z+\tfrac{(16\pi z)^3}{3!}+\dots\right)(c_{-3}+c_{-2}z+c_{-1}z^2+c_0z^3+o(z^3))=\\&\qquad\qquad=16\pi c_{-3}z+16\pi c_{-2}z^2+\left[\tfrac{(16\pi)^3}{6}c_{-3}+16\pi c_{-1}\right]z^3+\dots\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты в полученных рядах при одинаковых степенях z получим

$$\begin{aligned}i-4&=16\pi c_{-3}\\-\tfrac{1}{2}&=16\pi c_{-2}\\\tfrac{4^3-i}{6}&=\tfrac{(16\pi)^3}{6}c_{-3}+16\pi c_{-1}\end{aligned}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{aligned}c_{-3}&=\tfrac{i-4}{16\pi}\\c_{-2}&=-\tfrac{1}{32\pi}\\c_{-1}&=\tfrac{1}{16\pi}\left(\tfrac{4^3-i}{6}-\tfrac{(16\pi)^3}{6}c_{-3}\right)\end{aligned}$$

Нас интересует только коэффициент c_{-1}:

$$c_{-1}=\tfrac{1}{16\pi}\left(\tfrac{4^3-i}{6}-\tfrac{(16\pi)^3}{6}\tfrac{i-4}{16\pi}\right)=\tfrac{1}{16\pi}\left(\tfrac{4^3-i}{6}+\tfrac{(16\pi)^2(4-i)}{6}\right).$$

Таким образом, окончательно

Ответ:

$$\oint\limits_{|z|=0.05}\frac{e^{iz}-1-\sin 4z}{z^3\operatorname{sh}16\pi z}\,dz=\tfrac{i}{8}\left(\tfrac{4^3-i+(16\pi)^2(4-i)}{6}\right).$$

Задача 19. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z+5|=2} \left(z \sin \frac{1}{z+5} + \frac{2 \operatorname{ch} \frac{\pi i z}{4}}{(z+4)^2(z+2)} \right) dz.$$

Р е ш е н и е. Интеграл от суммы равен сумме интегралов, поэтому мы вычислим сначала интеграл

$$\oint\limits_{|z+5|=2} z \sin \tfrac{1}{z+5} \, dz.$$

Очевидно, подынтегральное выражение имеет в $\mathbb{C}$ одну изолированную особую точку $z = -5$. Она лежит в центре окружности, по которой ведётся интегрирование. Поэтому, по основной теореме о вычетах

$$\oint\limits_{|z+5|=2} z \sin \tfrac{1}{z+5} \, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} z \sin \tfrac{1}{z+5}.$$

Разложим подынтегральную функцию в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z = -5$:

$$z \sin \tfrac{1}{z+5} = \big(-5 + (z+5) \big) \Big(\tfrac{1}{z+5} - \tfrac{1}{6} \tfrac{1}{(z+5)^3} + \tfrac{1}{120} \tfrac{1}{(z+5)^5} - \dots \Big) =$$
$$= 1 - \tfrac{5}{z+5} - \tfrac{1}{6} \tfrac{1}{(z+5)^2} + \tfrac{5}{6} \tfrac{1}{(z+5)^3} + \dots$$

Отсюда видим, что разложение содержит бесконечно много ненулевых коэффициентов при отрицательных степенях $(z+5)$, значит, $z = -5$ — существенно особая точка. И кроме того видим, что вычет в этой точке

$$\operatorname*{Res}_{z=-5} z \sin \tfrac{1}{z+5} = c_{-1} = -5.$$

Значит,

$$\oint\limits_{|z+5|=2} z \sin \tfrac{1}{z+5} \, dz = -10\pi i.$$

Вычислим теперь второй интеграл:

$$\oint\limits_{|z+5|=2} \tfrac{2 \operatorname{ch} \frac{\pi i z}{4}}{(z+4)^2(z+2)} \, dz.$$

Особыми точками подынтегральной функции являются нули знаменателя $z = -4$ и $z = -2$. Но точка $z = -2$ лежит вне окружности $|z+5| = 2$, поэтому по основной теореме Коши о вычетах имеем

$$\oint\limits_{|z+5|=2} \frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{4}}{(z+4)^2(z+2)}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-4} \frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{4}}{(z+4)^2(z+2)}.$$

Но $z = -4$ полюс второго порядка, так как является, очевидно, нулем второго порядка для знаменателя, а числитель в ней $\neq 0$. По формуле для вычисления вычета в полюсе порядка 2

$$\operatorname*{Res}_{z=-4} \frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{4}}{(z+4)^2(z+2)} = \lim_{z\to-4}\left(\frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{4}}{z+2}\right)' = 2\lim_{z\to-4} \frac{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sh}\frac{\pi i z}{4}(z+2) - \operatorname{ch}\frac{\pi i z}{4}}{(z+2)^2} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\oint\limits_{|z+5|=2} \frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{4}}{(z+4)^2(z+2)}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-4} \frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{4}}{(z+4)^2(z+2)} = \pi i.$$

Ответ:

$$\oint\limits_{|z+5|=2} \left(z\sin\frac{1}{z+5} + \frac{2\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{4}}{(z+4)^2(z+2)}\right)dz = -9\pi i.$$

Задача 20. Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4-\sqrt{7}\sin t}.$$

Необходимые факты: Для вычисления таких интегралов делают замену $e^{it}=z$, тогда $dt=\frac{dz}{iz}$ и справедливы формулы $$\sin t = \tfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \tfrac{1}{2i}\Big(z-\tfrac{1}{z}\Big),$$ $$\cos t = \tfrac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \tfrac{1}{2}\Big(z+\tfrac{1}{z}\Big).$$

Р е ш е н и е з а д а ч и. После замены получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4-\sqrt{7}\sin t} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\Big(4-\sqrt{7}\frac{1}{2i}\big(z-\frac{1}{z}\big)\Big)iz}\,dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{2}{8iz-\sqrt{7}z^2+\sqrt{7}}\,dz.$$

Очевидно, нули знаменателя являются полюсами первого порядка для подынтегрального выражения. Найдём их.

$$\sqrt{7}z^2-8iz-\sqrt{7}=0 \quad\Rightarrow\quad z_{1,2}=\tfrac{4i\pm 3i}{\sqrt{7}} = \begin{cases} i\sqrt{7}; \\ \frac{i}{\sqrt{7}}. \end{cases}$$

В единичном круге лежит только один корень $z=\frac{i}{\sqrt{7}}$. Поэтому искомый интеграл вычисляется так:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{2}{8iz-\sqrt{7}z^2+\sqrt{7}}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{i}{\sqrt{7}}} \frac{2}{8iz-\sqrt{7}z^2+\sqrt{7}} =$$

$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{i}{\sqrt{7}}} \frac{2}{-\sqrt{7}(z-i\sqrt{7})\big(z-\frac{i}{\sqrt{7}}\big)} = \frac{4\pi i}{-\sqrt{7}(z-i\sqrt{7})}\bigg|_{z=\frac{i}{\sqrt{7}}} = \frac{2\pi}{3}.$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4-\sqrt{7}\sin t} = \frac{2\pi}{3}.$

Задача 21. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(4+\sqrt{7}\cos t)^2}$.

Р е ш е н и е. Как и в предыдущей задаче, замена $z = e^{it}$, $dt = \frac{dz}{iz}$, $\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ приводит к интегралу по единичной окружности:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(4+\sqrt{7}\cos t)^2} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{\left(4+\sqrt{7}\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)^2}\cdot\frac{dz}{iz} =$$
$$= \frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{\left(\sqrt{7}z^2+8z+\sqrt{7}\right)^2}.$$

Последний интеграл вычисляем по основной теореме Коши о вычетах. Для этого найдём нули знаменателя:

$$\sqrt{7}z^2+8z+\sqrt{7}=0 \quad\Rightarrow\quad z_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16-7}}{\sqrt{7}} = \frac{-4\pm 3}{\sqrt{7}} = \begin{cases} -\sqrt{7}, \\ -\frac{1}{\sqrt{7}}. \end{cases}$$

Первый из корней лежит вне круга $|z|<1$, поэтому

$$\frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{\left(\sqrt{7}z^2+8z+\sqrt{7}\right)^2} = \frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{7\left(z+\sqrt{7}\right)^2\left(z+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} =$$
$$= \frac{8\pi}{7}\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{\sqrt{7}}} \frac{z}{\left(z+\sqrt{7}\right)^2\left(z+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2}.$$

Очевидно, для выражения под знаком вычета точка $z = -\frac{1}{\sqrt{7}}$ является полюсом 2-го порядка, поэтому вычет вычисляем по формуле для полюса порядка n (у нас $n=2$):

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{\sqrt{7}}} \frac{z}{\left(z+\sqrt{7}\right)^2\left(z+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} = \lim_{z\to-\frac{1}{\sqrt{7}}}\left(\frac{z}{(z+\sqrt{7})^2}\right)' =$$
$$= \lim_{z\to-\frac{1}{\sqrt{7}}} \frac{z+\sqrt{7}-2z}{(z+\sqrt{7})^3} = \lim_{z\to-\frac{1}{\sqrt{7}}} \frac{\sqrt{7}-z}{(z+\sqrt{7})^3} = \frac{\sqrt{7}+\frac{1}{\sqrt{7}}}{(\sqrt{7}-\frac{1}{\sqrt{7}})^3} = \frac{7}{27}.$$

Окончательно получаем

Ответ: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(4+\sqrt{7}\cos t)^2} = \frac{8\pi}{27}$.

Задача 22. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2}$.

> **Необходимые факты**: Если в интеграле $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ подынтегральная функция f является сужением на действительную прямую голоморфной во всей верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек z_k, $\operatorname{Im} z_k > 0$, функции $f(z)$ (фактически, надо вместо действительной переменной x в подынтегральную функцию подставить комплексную z и исследовать полученную функцию) и $\lim\limits_{R\to\infty}\Bigl(\sup\limits_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} |zf(z)|\Bigr) = 0$, то интеграл можно вычислить по формуле
> $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Р е ш е н и е з а д а ч и. В нашем случае

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+2)(z^2+3)^2} = \frac{1}{(z+i\sqrt{2})(z-i\sqrt{2})(z+i\sqrt{3})^2(z-i\sqrt{3})^2}.$$

голоморфна во всей верхней полуплоскости, кроме точек $z_1 = i\sqrt{2}$ (очевидно, полюс первого порядка) и $z_2 = i\sqrt{3}$ (полюс второго порядка).

Кроме того

$$\sup_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} \frac{|z|}{\bigl|(z^2+2)(z^2+3)^2\bigr|} = \sup_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} \frac{|z|}{\bigl|z^2+2\bigr|\bigl|z^2+3\bigr|^2} \leqslant$$

(уменьшаем знаменатель с помощью обратного неравенства треугольника)

$$\leqslant \sup_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} \frac{|z|}{\bigl||z|^2-2\bigr|\bigl||z|^2-3\bigr|^2} = \frac{R}{|R^2-2||R^2-3|^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы о вычислении интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2} = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=i\sqrt{2}} \frac{1}{(z^2+2)(z^2+3)^2} + \operatorname*{Res}_{z=i\sqrt{3}} \frac{1}{(z^2+2)(z^2+3)^2}\right).$$

Первый из вычетов вычисляем по формуле для полюсов 1-го порядка:

$$\operatorname*{Res}_{z=i\sqrt{2}} \frac{1}{(z^2+2)(z^2+3)^2} = \left.\frac{1}{(z+i\sqrt{2})(z^2+3)^2}\right|_{z=i\sqrt{2}} = \frac{1}{i2\sqrt{2}}.$$

Второй вычет вычисляем по формуле для полюсов 2-го порядка:

$$\operatorname*{Res}_{z=i\sqrt{3}} \frac{1}{(z^2+2)(z^2+3)^2} = \lim_{z\to i\sqrt{3}} \left(\frac{1}{(z^2+2)\big(z+i\sqrt{3}\big)^2}\right)' =$$

$$= \left.\frac{-2z(z+i\sqrt{3})-2(z^2+2)}{(z^2+2)^2\big(z+i\sqrt{3}\big)^3}\right|_{z=i\sqrt{3}} = \frac{14}{-i24\sqrt{3}} = -\frac{7}{i12\sqrt{3}}.$$

Окончательно получаем:

Ответ: $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2} = 2\pi i\left(\frac{1}{i2\sqrt{2}} - \frac{7}{i12\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{7\pi}{6\sqrt{3}}.$

Задача 23. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+17}\,dx$.

Необходимые факты: 1) По теореме Жордана, если в интеграле $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx$, $a>0$, функция f является сужением на действительную прямую голоморфной во всей верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек z_k, $\operatorname{Im} z_k>0$, функции $f(z)$ и $\lim\limits_{R\to\infty}\Big(\sup\limits_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} |f(z)|\Big)=0$, то интеграл можно вычислить по формуле

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)e^{iaz}.$$

2) Так как $\cos ax = \operatorname{Re} e^{iax}$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\,dx = \operatorname{Re}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx\right) = \\ = \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)e^{iaz}\right).$$

Р е ш е н и е з а д а ч и. В нашем случае $f(z)=\frac{z}{z^2-2z+17}$ голоморфна всюду в верхней полуплоскости, кроме точки $z=1+4i$ — полюс первого порядка, так как

$$z^2-2z+17 = \big(z-(1+4i)\big)\big(z-(1-4i)\big).$$

Кроме того,

$$\sup_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} \frac{|z|}{\left|z^2-2z+17\right|} \leqslant \sup_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} \frac{|z|}{|z|^2-2|z|-17} \leqslant \frac{R}{R^2-2R-17} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Поэтому по теореме Жордана

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{xe^{ix}}{x^2-2x+17}\,dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1+4i} \tfrac{ze^{iz}}{z^2-2z+17} = \tfrac{2\pi i z e^{iz}}{z-(1-4i)}\Big|_{z=1+4i} = \tfrac{\pi(1+4i)e^{-4+i}}{4}.$$

Отделяя действительную часть последнего выражения, окончательно получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+17}\,dx = \operatorname{Re}\frac{\pi(1+4i)e^{-4+i}}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{4e^4}\operatorname{Re}(1+4i)(\cos 1 + i\sin 1) = \frac{\pi}{4e^4}(\cos 1 - 4\sin 1).$$

Ответ:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+17}\,dx = \frac{\pi}{4e^4}(\cos 1 - 4\sin 1).$$

Задача 24. Найти оригинал по заданному изображению

$$F(p) = \frac{p+4}{p^2+4p+5}.$$

Необходимые факты. 1) Преобразование Лапласа линейно:

$$f(t) \risingdotseq F(p) \wedge g(t) \risingdotseq G(p) \quad \Rightarrow \quad \alpha f(t)+\beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p)+\beta G(p).$$

2) Теорема смещения:

$$F(p) \fallingdotseq f(t) \quad \Rightarrow \quad e^{at}f(t) \risingdotseq F(p-a).$$

3) $\cos at \risingdotseq \frac{p}{p^2+a^2}$;
4) $\sin at \risingdotseq \frac{a}{p^2+a^2}$.

Р е ш е н и е з а д а ч и. Преобразуем данное изображение так:

$$F(p) = \frac{p+4}{p^2+4p+5} = \frac{p+4}{(p+2)^2+1} = \frac{p+2}{(p+2)^2+1} + \frac{2}{(p+2)^2+1}.$$

Тогда

$$F(p-2) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{2}{p^2+1} \fallingdotseq \cos t + 2\sin t.$$

По теореме смещения отсюда

$$F(p) = F\big((p-2)+2\big) \fallingdotseq e^{-2t}(\cos t + 2\sin t).$$

Ответ: $f(t) = e^{-2t}(\cos t + 2\sin t)$.

Задача 25. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y'' - 2y' = \frac{e^t}{\operatorname{ch} t},$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Необходимые факты: 1) Преобразование Лапласа n-ой производной вычисляется по формуле

$$y^{(n)}(t) \risingdotseq p^n \overline{y}(p) - p^{n-1} y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0).$$

2) Пусть $L(y) = ay'' + by' + cy$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Если известно решение $y_1(t)$ задачи Коши

$$L(y) = 1,$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

то решение задачи

$$L(y) = f(t),$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

можно найти по одной из формул Дюамеля:

$$y(t) = \int\limits_0^t x_1'(\tau) f(t-\tau)\, d\tau \quad \text{или} \quad y(t) = \int\limits_0^t x_1'(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Р е ш е н и е з а д а ч и. Решить задачу непосредственно с помощью преобразования Лапласа затруднительно, так как трудно найти преобразование Лапласа правой части данного уравнения. Поэтому, чтобы применить формулу Дюамеля, решим (с помощью преобразования Лапласа) уравнение $y'' - 2y' = 1$ при тех же (нулевых!) начальных условиях.

Вычисляем преобразование Лапласа левой и правой частей уравнения:

$$y'' - 2y' \risingdotseq p^2 \overline{y} - 2p\overline{y};$$
$$1 \risingdotseq \tfrac{1}{p},$$

откуда (разложение на простые дроби делаем стандартным способом)

$$p^2\overline{y} - 2p\overline{y} = \tfrac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad \overline{y} = \tfrac{1}{p^2(p-2)} = \tfrac{1}{4(p-2)} - \tfrac{1}{2p^2} - \tfrac{1}{4p}.$$

Вычисляя обратное преобразование Лапласа (по таблице), находим

$$y_1(t) = \tfrac{1}{4}e^{2t} - \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}(e^{2t} - 2t - 1).$$

Теперь, по (первой) формуле Дюамеля выписываем решение исходной задачи (у нас $y_1'(t) = \frac{e^{2t}-1}{2} = e^t \operatorname{sh} t$):

$$\begin{aligned} y(t) &= \int\limits_0^t \frac{e^\tau}{\operatorname{ch}\tau} e^{(t-\tau)} \operatorname{sh}(t-\tau)\, d\tau = e^t \int\limits_0^t \frac{\operatorname{sh}(t-\tau)}{\operatorname{ch}\tau}\, d\tau = \\ &= e^t \int\limits_0^t \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{ch}\tau - \operatorname{ch} t \operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau}\, d\tau = e^t \int\limits_0^t \left(\operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau} \right) d\tau = \\ &= e^t \left(t \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \int\limits_0^t \frac{\operatorname{sh}\tau\, d\tau}{\operatorname{ch}\tau} \right) = e^t \big(t \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \ln \operatorname{ch} t \big). \end{aligned}$$

Ответ: $y(t) = e^t\big(t \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \ln \operatorname{ch} t\big)$.

Задача 26. Операционным методом решить задачу Коши

$$y'' + 2y' = \sin\tfrac{t}{2},$$
$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

Р е ш е н и е. Применяя преобразование Лапласа к левой и правой частям данного дифференциального уравнения, получаем операторное уравнение:

$$p^2\bar{y} - 3p - 1 + 2p\bar{y} - 6 = \frac{2}{4p^2+1}.$$

Откуда находим

$$\bar{y}p(p+2) = \frac{2}{4p^2+1} + 3(p+2) + 1,$$

или

$$\bar{y} = \frac{2}{(4p^2+1)p(p+2)} + \frac{3}{p} + \frac{1}{p(p+2)}.$$

Разложим методом неопределённых коэффициентов все дроби на простые:

$$\frac{2}{(4p^2+1)p(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{Cp+D}{4p^2+1}.$$

Коэффициенты находим обычным способом (вычисления опускаются):

$$A = 1, \quad B = -\frac{1}{17}, \quad C = -\frac{56}{17}, \quad D = -\frac{24}{17}.$$

Аналогично,

$$\frac{1}{p(p+2)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2(p+2)}.$$

Таким образом, получаем

$$\bar{y} = \frac{1}{p} - \frac{1}{17}\frac{1}{p+2} - \frac{2}{17}\frac{7p+3}{p^2+\frac{1}{4}} + \frac{3}{p} + \frac{1}{2p} - \frac{1}{p+2} =$$
$$= \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{p} - \frac{18}{17}\cdot\frac{1}{p+2} - \frac{14}{17}\cdot\frac{p}{p^2+\frac{1}{4}} + \frac{12}{17}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{p^2+\frac{1}{4}}.$$

Обратное преобразование Лапласа к каждому слагаемому справа находим по таблицам (см. приложение).

Ответ: $y(t) = \frac{9}{2} - \frac{18}{17}e^{-2t} - \frac{14}{17}\cos\frac{t}{2} + \frac{12}{17}\sin\frac{t}{2}$.

Задача 27. Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданному начальному условию

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 1, \\ \dot{y} = 4x - 2y, \\ x(0) = -1, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Применяя преобразование Лапласа, получим линейную алгебраическую систему

$$\begin{cases} p\bar{x} + 1 = 2\bar{x} + 3\bar{y} + \frac{1}{p}, \\ p\bar{y} = 4\bar{x} - 2\bar{y}, \end{cases}$$

или, после упрощения

$$\begin{cases} (p-2)\bar{x} - 3\bar{y} = \frac{1}{p} - 1, \\ -4\bar{x} + (p+2)\bar{y} = 0. \end{cases}$$

Решаем эту систему по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (p-2) & -3 \\ -4 & (p+2) \end{vmatrix} = p^2 - 16 = (p-4)(p+4),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{1}{p} - 1 & -3 \\ 0 & (p+2) \end{vmatrix} = \frac{-p^2 - p + 2}{p},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} (p-2) & \frac{1}{p} - 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-4p + 4}{p}.$$

Отсюда

$$\bar{x} = \frac{-p^2 - p + 2}{p(p-4)(p+4)}, \qquad \bar{y} = \frac{-4p + 4}{p(p-4)(p+4)}.$$

Разложение на простые дроби даёт (вычисления элементарны и опускаются):

$$\bar{x} = -\tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{p} - \tfrac{9}{16} \cdot \tfrac{1}{p-4} - \tfrac{5}{16} \cdot \tfrac{1}{p+4},$$
$$\bar{y} = -\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{p} - \tfrac{3}{8} \cdot \tfrac{1}{p-4} + \tfrac{5}{8} \cdot \tfrac{1}{p+4}.$$

Переходя к оригиналам, по таблице находим:

Ответ: $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{8} - \frac{9}{16}e^{4t} - \frac{5}{16}e^{-4t}, \\ y(t) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{8}e^{4t} + \frac{5}{8}e^{-4t}. \end{cases}$

Задача 28. Найти дробно-линейное отображение, переводящее три заданные точки z_1,z_2 и z_3 плоскости $\overline{C}_z$, в соответственно три заданные точки w_1, w_2, w_3 плоскости $\overline{C}_w$.

$$w(\infty) = 2; \quad w(1+i) = 2+i; \quad w(1) = 2+3i.$$

Необходимые факты: 1) Дробно-линейное отображение является гомеоморфизмом $\overline{\mathbb{C}}$ на себя и полностью определяется своими значениями в произвольных трёх точках.
2) Непосредственное вычисление показывает, что дробно-линейное отображение переводящее три заданные точки z_1, z_2, z_3 соответственно в точки 0, ∞, 1, имеет вид

$$f(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

3) Из перечисленных фактов следует, что если при дробно-линейном отображении $z \mapsto w$ три различные заданные точки z_1, z_2, z_3 переходят соответственно в три различные заданные точки w_1, w_2, w_3, то z и w связаны соотношением

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} \qquad ({\star}{\star}{\star})$$

Р е ш е н и е. В нашем случае, очевидно,

$$\begin{array}{lcl} z_1 = \infty & \mapsto & w_1 = 2, \\ z_2 = 1 + i & \mapsto & w_2 = 2 + i, \\ z_3 = 1 & \mapsto & w_3 = 2 + 3i. \end{array}$$

Согласно (${\star}{\star}{\star}$), если $z \mapsto w$ при искомом дробно-линейном отображении, то

$$\lim_{z_1 \to \infty} \frac{z - z_1}{z - (1+i)} \cdot \frac{-i}{1 - z_1} = \frac{-i}{z - (1+i)} = \frac{w - 2}{w - (2+i)} \cdot \frac{2i}{3i}.$$

Выражая отсюда w, найдём искомое дробно-линейное отображение:

$$w = \frac{4z - (7 - 2i)}{z - (1 - 2i)}.$$

Ответ: $w = \dfrac{4z - (7 - 2i)}{z - (1 - 2i)}$.

Приложение

Таблица некоторых оригиналов и их изображений.

$$\begin{array}{lll}
1 & \risingdotseq & \frac{1}{p} \\
t^n & \risingdotseq & \frac{n!}{p^{n+1}} \\
e^{\omega t} & \risingdotseq & \frac{1}{p-\omega} \\
\sin \omega t & \risingdotseq & \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \\
\cos \omega t & \risingdotseq & \frac{p}{p^2+\omega^2} \\
\mathrm{sh}\, \omega t & \risingdotseq & \frac{\omega}{p^2-\omega^2} \\
\mathrm{ch}\, \omega t & \risingdotseq & \frac{p}{p^2-\omega^2}
\end{array}$$

Список литературы

[1] *Ю.А. Клевчихин.* Теория функций комплексной переменной. Владивосток. ДВГУ. 2002.

[2] *В.Ф. Чудесенко.* Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. М.: Высшая школа, 1982.