Ю.А. Клевчихин

Лекции по теории функций комплéксной переменной

Владивосток
2023

ББК 22.16
УДК 517

Клевчихин Ю.А.
К 48 Лекции по теории функций комплексной переменной. Уч.мет. пособие. – Владивосток: Изд-во Дальневосточного Федерального ун-та, 2023.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов отделения прикладной математики и является записью семестрового курса лекций (36 часов) читавшегося в институте математики и компьютерных технологий ДВФУ. Оно не может служить полноценным учебником по данному предмету, так как содержит только основы теории. Тем не менее его содержание соответствует стандартной программе специальности “Прикладная математика” и знание присутствующих здесь результатов, на наш взгляд, необходимо и достаточно, чтобы разобраться в любом вопросе, изложенном в более продвинутых учебниках из приведенных в списке литературы.

$\text{К}\dfrac{1702050000}{180(03)-2023}$ ББК 22.16

Содержание

Предисловие

> Лекции, которые на самом деле учат, никогда не могут быть популярными; популярные же лекции не могут обеспечить подлинного обучения.
>
> Майкл Фарадей.

> Пусть никто, не будучи математиком, не дерзает читать мои труды.
>
> Леонардо да Винчи

Начала теории функций компле́ксной переменной были заложены сравнительно поздно — во второй половине 18 века в основном, как принято считать, в трудах Леонарда Эйлера. Дальнейшее её развитие происходило очень интенсивно и многие выдающиеся математики 19 века оставили в ней свой след, однако наиболее существенный вклад сделали Огюстен Коши, Георг Риман, Карл Вейерштрасс, Анри Пуанкарэ (желающие поспорить по поводу набора имен могут обращаться либо лично к автору, либо отправлять свои сообщения по адресу `klevchikhin.yua@mail.dvfu.ru`).

Классическая часть теории — функции одной компле́ксной переменной[1] — была завершена к концу 19 века, тем не менее и в ней идет постоянное развитие либо в связи с решением старых задач не решенных классиками, либо в связи с появлением новых. Так, например, сравнительно недавно (1984 г.) в научном мире произвело сенсацию решение французом Луи де Бранжем[2] старой (1916 г.), элементарно формулируемой и возможно потому очень притягательной проблемы — гипотезы Бибербаха. Не решенных тоже осталось еще достаточно много как среди старых задач, так и среди более новых[3], желающие могут найти много нерешённых задач в википедии в разделе нерешенных математических проблем.

Имеется очень старая проблема, так называемая «гипотеза Римана»[4], формулировка которой тоже элементарна, а ее решение оценено в

[1] В частности всё, что вошло в эту книжку.

[2] L. de Branges. A proof of the Bieberbach conjecture, Acta Math. 154 (1985), 137-152.

[3] Докторские диссертации двух членов нашей кафедры профессоров В.Н. Дубинина и В.А. Шлыка посвящены решению некоторых из таких задач.

[4] Бывший директор нашего института Н.В. Кузнецов много лет занимался решением этой проблемы и ему принадлежат результаты существенно продвинувшие её понимание.

\$1 000 000 (см. //www.claymath.org) поэтому для желающих заниматься наукой в области теории функций имеется широкое поле деятельности.

Настоящий курс является записью лекций по теории функций комплéксной переменной, читавшихся в Дальневосточном госуниверситете на отделении прикладной математики в 1990-2001 годах и ДВФУ в 2019 в институте математики и компьютерных технологий. Он соответствует программе специальности Прикладная математика и рассчитан на один семестр (36 часов, 1 лекция в неделю).

Его появление связано с двумя причинами. Во-первых, хотя в природе существует много прекрасных курсов по данной тематике, что видно хотя бы из приведенного списка литературы, все эти книги слишком «толстые» и расчитаны на гораздо более длительное изучение. Во-вторых, изложение некоторых ключевых моментов теории в моем курсе несколько отличается от традиционного (на мой взгляд, в лучшую сторону), что имеет смысл зафиксировать хотя бы для того, чтобы студентам, посещающим мои лекции, было легче готовиться к экзаменам.

Кроме этих причин я считаю, что каждый преподаватель должен публиковать свои лекции (в электронном виде сейчас это общедоступно), чтобы коллеги и все желающие могли оценить их уровень, доступность изложения и т. д.[5]

В этой книжке почти отсутствуют задачи и упражнения, кроме необходимых примеров, иллюстрирующих теорию. Задачи же и упражнения вынесены в отдельную книжку: Клевчихин Ю.А. Руководство к решению задач по теории функций комплексной переменной. Владивосток, Изд-во ДВФУ 2021.

Ещё одно замечание по поводу эпиграфов к параграфам. Как правило, их содержание редко связано с содержанием параграфа и не стоит искать какой-нибудь тайной смысловой связи (иногда просто в какой-то момент написания данного раздела я был под воздействием соответствующего высказывания). Их наличие можно оправдать только тем, что с одной стороны, так мне было интереснее работать над этой книжкой, а с другой, мне кажется, так её интереснее читать.

Это второе издание исправленное и дополненное. Первое (электронное) помещено в электронную библиотеку ДВФУ в 2002 г. В новом издании исправлены замеченные ошибки и добавлена глава о гармонических функциях.

Автор

[5] …дабы дурь каждого видна была. (Пётр I Романов)

1. Компле́ксные числа

> Я недавно встретил человека, который сказал мне, что не верит даже в существование минус единицы, так как из этого следует существование квадратного корня из нее.
>
> Э.Ч. Титчмарш.

Введение

Компле́ксные числа вошли в общематематическую практику сравнительно недавно (первое явное упоминание о них — в книге Дж. Кардано "Великое искусство, или Об алгебраических правилах", 1545 г.) и довольно долго считались "не настоящими", или "мнимыми" числами. Даже в 17 веке многие крупные ученые считали сущность компле́ксных чисел загадочной и мистической. Например, известно, что И. Нью́тон не включал мнимые величины в понятие числа. Несмотря на это теория компле́ксных чисел успешно развивалась, символ $i = \sqrt{-1}$ ввел Л. Эйлер (1794 г.), термин "компле́ксное число" — Л. Карно́ в 1803 г., но общеупотребительным он стал после работ К. Га́усса (1831 г.). Много сделали для обоснования и понимания компле́ксных чисел К. Ве́ссель (1799 г.), Ж. Арга́н (1806 г, 1814 г.), У. Га́мильтон (1837 г.)

Тем не менее до сих пор встречаются чудаки[1], которые помещают в интернет свои опусы с "доказательствами" того, что компле́ксных чисел не существует, а их употребление ведет к противоречиям[2]. В силу этого первая лекция посвящена компле́ксным числам, чтобы в дальнейшем ни у кого не было никаких сомнений в их существовании и правомерности употребления, а чтобы это было не очень скучно (все уже не раз встречались с ними в различных курсах), остановимся более подробно на вопросах, которые, как правило, менее известны.

---

[1]на букву "м". (Василий Шукшин, «Калина красная»)

[2]Наподобие следующего: $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = i \cdot i = -1$ (найдите ошибку).

Определение компле́ксных чисел

Напомним некоторые стандартные определения из курса алгебры.

Определение. *Полем* называется множество $\mathbb{F}$ (от англ. Field), в котором заданы две бинарные алгебраические операции $(x, y) \mapsto x + y$ и $(x, y) \mapsto x \cdot y$ (т. е. отображения $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$), обладающие свойствами:

I. $\mathbb{F}$ — абелева группа относительно операции сложения $(+)$, т. е.

- I.1. $\forall x, y \in \mathbb{F} \quad x + y = y + x$ (коммутативность сложения)
- I.2. $\forall x, y, z \in \mathbb{F} \quad x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность сложения)
- I.3. $\exists 0 \in \mathbb{F}\ \forall x \in \mathbb{F} \quad x + 0 = 0 + x = x$ (существование нейтрального элемента для сложения)
- I.4. $\forall x \in \mathbb{F}\ \exists(-x) \in \mathbb{F} \quad x + (-x) = 0$ (существование обратного элемента для сложения)

II. $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \backslash \{0\}$ — абелева группа относительно операции умножения $(\cdot)$:

- II.1. $\forall x, y \in \mathbb{F}^* \quad x \cdot y = y \cdot x$ (коммутативность умножения)
- II.2. $\forall x, y, z \in \mathbb{F}^* \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (ассоциативность умножения)
- II.3. $\exists 1 \in \mathbb{F}^*\ \forall x \in \mathbb{F}^* \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (существование нейтрального элемента для умножения)
- II.4. $\forall x \in \mathbb{F}^*\ \exists(x^{-1}) \in \mathbb{F}^* \quad x \cdot (x^{-1}) = 1$ (существование обратного элемента для умножения)

III. Операции сложения и умножения связывает закон дистрибутивности умножения относительно сложения:

- III.1 $\forall x, y, z \in \mathbb{F} \qquad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + x \cdot z$

Хорошо известными примерами полей являются $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ соответственно поля рациональных и действительных чисел. Менее общеизвестны поля Галуа $\mathbb{F}_p = \{0, 1, \ldots, p - 1\}$, где p — простое, и поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. На их рассмотрении мы здесь останавливаться не будем, а только отметим, что эти примеры показывают, что поля существуют и, вообще говоря, их много. Чтобы уточнить это “много”, вводят следующие понятия.

Определение. Говорят, что два поля $\mathbb{F}'$ и $\mathbb{F}''$ *изоморфны*, если существует отображение $I : \mathbb{F}' \to \mathbb{F}''$ со свойствами:

1. I — биекция $\mathbb{F}'$ и $\mathbb{F}''$,
2. $\forall x, y \in \mathbb{F}' \quad I(x+y) = I(x) \oplus I(y)$, (здесь через $\oplus$ обозначено сложение в $\mathbb{F}''$, через $+$ — сложение в $\mathbb{F}'$),
3. $\forall x, y \in \mathbb{F}' \quad I(x \cdot y) = I(x) \odot I(y)$, ($\odot$ — умножение в $\mathbb{F}''$).

При этом отображение I называется *изоморфизмом* полей $\mathbb{F}'$ и $\mathbb{F}''$.

Более общо, *гомоморфизм* поля $\mathbb{F}'$ в поле $\mathbb{F}''$ — это отображение $\mathbb{F}' \to \mathbb{F}''$, удовлетворяющее свойствам 2 и 3 выше (свойство 1 может не выполняться). Как обычно, в алгебре изоморфные объекты можно не различать, так как они обладают совершенно одинаковыми свойствами. Напротив, неизоморфные объекты существенно различны.

Можно доказать, что поля рациональных и действительных чисел не изоморфны (хотя бы потому, что как множества они имеют разную мощность).

Для гомоморфизмов полей легко установить следующие предложения[3]:

Предложение 1. *Если $g : \mathbb{F}' \to \mathbb{F}''$ — гомоморфизм и 0_1, 0_2 — нули в $\mathbb{F}'$ и $\mathbb{F}''$ соответственно, а 1_1, 1_2 — единицы, то*

$$g(0_1) = 0_2, \quad g(1_1) = 1_2.$$

Предложение 2. *Если $g : \mathbb{F}' \to \mathbb{F}''$ — гомоморфизм, то g — инъекция.*

Второе предложение означает, что всякий гомоморфизм $g : \mathbb{F}' \to \mathbb{F}''$ является изоморфизмом $\mathbb{F}'$ и его образа в $\mathbb{F}''$. Поэтому поле $\mathbb{F}'$ можно отождествить с подмножеством, которое содержится в $\mathbb{F}''$ и, рассматриваемое отдельно от содержащего его поля $\mathbb{F}''$, является полем. Для описания такой ситуации вводят

Определение. Пусть $\mathbb{F}$ — поле и $\mathbb{K}$ — его подмножество. Говорят, что $\mathbb{K}$ — *подполе* поля $\mathbb{F}$ или, иначе, что $\mathbb{F}$ — *расширение* поля $\mathbb{K}$, если

1. $\mathbb{K}$ содержит 0 и 1.
2. $\forall x, y \in \mathbb{K} \quad x + y \in \mathbb{K} \quad$ и $\quad -x \in \mathbb{K}$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{K}^* \quad x \cdot y \in \mathbb{K} \quad$ и $\quad x^{-1} \in \mathbb{K}$.

Замечание. Перечисленные условия эквивалентны двум:

[3] Докажите самостоятельно.

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^* \qquad x - y \in \mathbb{K} \quad \text{и} \quad x \cdot y^{-1} \in \mathbb{K}$$

Примеры. **1.1.** Поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является подполем поля действительных чисел $\mathbb{R}$.

1.2. Менее известный пример. Пусть $\mathbb{F} = \{p + q\sqrt{2} \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$. Легко видеть, что это поле относительно операций сложения и умножения, определяемых равенствами

$$\big(p_1 + q_1\sqrt{2}\big) + \big(p_2 + q_2\sqrt{2}\big) = (p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)\sqrt{2},$$
$$(p_1 + q_1\sqrt{2}) \cdot (p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1 p_2 + 2q_1 q_2) + (p_1 q_2 + q_1 p_2)\sqrt{2}.$$

Множество рациональных чисел является подполем этого поля (точнее, изоморфно подполю элементов вида $p + 0\sqrt{2}$).

Отметим следующее. Если $\mathbb{F}$ — расширение поля $\mathbb{K}$, то его можно рассматривать как векторное пространство над полем $\mathbb{K}$. Поэтому можно вычислить алгебраическую размерность этого векторного пространства (т. е. теоретико-множественную мощность его алгебраического базиса).

Определение. Размерность $\mathbb{F}$, как векторного пространства над подполем $\mathbb{K}$, называется *индексом расширения* $\mathbb{F}$ поля $\mathbb{K}$ и обозначается через $[\mathbb{F} : \mathbb{K}]$.

Известно, что индекс поля действительных чисел над полем рациональных чисел равен континууму (в $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$ имеется, так называемый, базис Гамеля, который имеет мощность континуума).

Индекс поля из примера 1.2 выше, очевидно, равен двум (в качестве базиса поля $\mathbb{F}$ над $\mathbb{Q}$ можно взять элементы $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ и $\sqrt{2} = 0 + 1\sqrt{2}$).

Теперь мы готовы дать точное (аксиоматическое) определение комплéксных чисел $\mathbb{C}$.

Определение. *Комплéксными числами* называют элементы множества $\mathbb{C}$, наделенного двумя бинарными операциями и обладающего свойствами:

1. $\mathbb{C}$ является полем.
2. $\mathbb{C}$ содержит $\mathbb{R}$ в качестве подполя (то же самое: $\mathbb{C}$ — расширение поля действительных чисел $\mathbb{R}$).
3. $\mathbb{C}$ — алгебраически полное поле (т. е. в нем разрешимы все алгебраические уравнения).
4. $\mathbb{C}$ — наименьшее из расширений поля $\mathbb{R}$ со свойством 3.

Данное определение на первый взгляд довольно сложно и кажется не очевидным ни существование объекта с такими свойствами, ни его единственность. Докажем сначала существование.

Обозначим через $\mathbb{C}_M$ (буква M от слова Matrix) множество всех 2×2-матриц вида

$$z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, \quad \text{где } x \text{ и } y \text{ из } \mathbb{R}, \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

и возьмем в качестве операции сложения обычную сумму матриц, а операции умножения обычное произведение матриц. Тогда для $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}$ и $z_2 = \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}$ имеем

$$z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -(y_1 + y_2) \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_M,$$

$$z_1 \cdot z_2 = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -(x_1y_2 + x_2y_1) \\ x_1y_2 + x_2y_1 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_M,$$

$$-z = \begin{pmatrix} -x & y \\ -y & -x \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_M, \qquad z^{-1} = \frac{1}{z} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} 1 & \frac{y}{x^2+y^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_M.$$

Проверка выполнения девяти аксиом поля остается читателю в качестве легкого[4] упражнения.

Таким образом, $\mathbb{C}_M$ является полем, т. е. обладает свойством 1 определения поля компле́ксных чисел. Далее, очевидно, отображение

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}_M$$

является изоморфизмом $\mathbb{R}$ на подполе в $\mathbb{C}_M$. Значит, $\mathbb{R}$ — подполе $\mathbb{C}_M$ и свойство 2, определения поля комплексных чисел, тоже выполнено.

Доказательство разрешимости любого алгебраического уравнения в $\mathbb{C}_M$ составляет содержание *основной теоремы алгебры*. Оно не просто и будет проведено нами позднее методами отличными от известных из алгебры[5]. Пока же нам будет нужна только разрешимость уравнения

[4]Делать здесь эти простые, но громоздкие выкладки не имеет смысла. Мы и в дальнейшем в подобных случаях будем поступать аналогично.

[5]Будет приведено два доказательства. Одно, как следствие теоремы Лиувилля, другое, как следствие теоремы Руше.

$$z^2 + 1 = 0,$$

которая проверяется непосредственным вычислением: в качестве решения надо взять $z = \mathbf{i}$ (см. равенства 1.1 ниже).

Выполнение свойства 4 вытекает из следующих соображений: множество $\mathbb{C}_M$ является векторным пространством размерности 2 над полем действительных чисел. В качестве его базиса можно взять матрицы

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

которые линейно независимы и любую матрицу $z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ можно представить в виде их *линейной комбинации* $z = x\mathbf{1} + y\mathbf{i}$.

Пусть $\mathbf{C}$ — произвольное расширение множества действительных чисел, в котором разрешимо любое алгебраическое уравнение. Выберем в нем два элемента 1 и i, где i — решение уравнения $z^2 + 1 = 0$. Легко проверить (упражнение), что отображение

$$z = x\mathbf{1} + y\mathbf{i} \mapsto x + iy$$

является гомоморфизмом поля $\mathbb{C}_M$ в $\mathbf{C}$.

Мы доказали, что $\mathbb{C}_M$ подполе любого другого алгебраически полного поля[6], что и означает его минимальность.

Из доказанной минимальности сразу вытекает единственность (с точностью до изоморфизма). В самом деле, очевидно, что отображение

$$z = x\mathbf{1} + y\mathbf{i} \mapsto x + iy$$

— изоморфизм $\mathbb{C}_M$ и любого другого минимального алгебраически полного расширения поля $\mathbb{R}$.

Некоторые свойства комплексных чисел

> Мнимые числа — это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием.
>
> Г. Лейбниц, [16, с. 279]

$\mathbb{C}_M$ — это одна из моделей поля компле́ксных чисел, но существуют и другие (разумеется, изоморфные). Например, компле́ксные числа можно

[6]На самом деле мы воспользовались разрешимостью не любого уравнения, а только $z^2 + 1 = 0$.

реализовать как множество $\mathbb{C}_P$ (буква P от слова $Pair$) всех упорядоченных пар (x, y), где x и y — действительные числа. С этой моделью все знакомы гораздо лучше еще со школы. В ней удобно изучать свойства компле́ксных чисел, связанные с операцией сложения. Операция умножения в этой модели не выглядит естественной:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1),$$

и поэтому изучение её свойств кажется не простым. С другой стороны, мы видели, что в модели $\mathbb{C}_M$ операция умножения вводится достаточно естественно — обычное умножение матриц, в силу этого её изучение в этой модели психологически проще. Ниже мы приводим несколько других моделей полезных для изучения свойств компле́ксных чисел.

Различные модели множества комплексных чисел $\mathbb{C}$. Для большинства людей наиболее интуитивно доступными являются геометрические представления, поэтому так популярны геометрические модели. Так, всем известно, что упорядоченную пару действительных чисел (x, y) можно отождествить с точкой плоскости (или вектором) посредством введения системы координат на этой плоскости. Мы будем обозначать эту модель символом $\mathbb{C}_V$ (буква V от слова Vector). В ней пару $z = (x, y)$ удобно обозначать символом $z = x + iy$, как вектор, разложенный по базису $\mathbf{1} = (1, 0)$ и $i = (0, 1)$ (при этом базисный вектор $\mathbf{1}$ в записи обычно опускается без ущерба для ясности). Геометрически сумма двух компле́ксных чисел изображается здесь, как диагональ параллелограмма, построенного на векторах, изображающих слагаемые. Как уже говорилось, в этой модели легко проверить все свойства сложения. Стандартны следующие обозначения: если $z = x + iy$, то $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, $\overline{z} = x - iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Отметим еще, что отображение

$$z = x + iy \mapsto x - iy = \overline{z}$$

является автоморфизмом (т. е. изоморфизмом на себя) поля $\mathbb{C}$.

Полезными равенствами в этой модели являются:

$$z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z, \quad z\overline{z} = x^2 + y^2$$

. Далее, поскольку $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние от точки z до 0, справедливы неравенства: треугольника:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

и обратное неравенство треугольника:

$$|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$$

(докажите самостоятельно).

Ещё одна геометрическая модель поля комплексных чисел получится, если матрице $z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ сопоставить отображение плоскости в себя, рассматривая плоскость как двумерное эвклидово пространство с фиксированным ортонормированным базисом. Чтобы понять, как действует это отображение, заметим, что всякую такую матрицу можно разложить в произведение:

$$z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ при $x > 0$ и $\varphi = \pi \operatorname{sgn} y + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ при $x < 0$ $\Big($при таком φ имеют место равенства: $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)$.

Отображение $\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ — “растяжение” плоскости (при $\rho > 1$ растяжение и сжатие при $\rho < 1$). Его обозначают просто ρ, а отображение $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ — поворот плоскости вокруг начала координат на угол φ (против частовой стрелки, если $\varphi > 0$). Его обозначают через $e^{i\varphi}$. Это *обозначение* удобно в силу формулы

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)},$$

справедливой геометрически очевидно (последовательно два раза повернуть плоскость на углы φ и ψ всё равно что один раз повернуть на угол $\varphi + \psi$) и проверяемой алгебраически:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = e^{i(\varphi+\psi)}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что всякое комплéксное число можно представить в виде произведения $z = \rho e^{i\varphi}$. Эту форму записи комплéксных чисел называют *показательной*. В ней легче изучать свойства комплексных чисел связанные с операциями умножения и деления.

Число ρ называют *модулем* комплéксного числа z и обозначают $|z|$:

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Число φ называют *аргументом* компле́ксного числа z и обозначают $\operatorname{Arg} z$. Оно определяется не однозначно с точностью до слагаемого кратного 2π:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n,$$

где $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, $\quad \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{при } x > 0, \\ \pi \operatorname{sgn} y + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{при } x < 0. \end{cases}$

(как определяется $\arg z$ при $x = 0$ напишите сами).

Отметим еще, что число $e^{i\varphi}$ в векторной модели записывается в виде

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Эту формулу называют *формулой Эйлера*, а соответствующее разложение

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

— тригонометрической формой компле́ксного числа. Кроме того, легко видеть, что

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Эту формулу называют *формулой Муавра* (или Моавра, фр. A. Moivre). С ней связана техника извлечения корней n-ой степени из компле́ксных чисел.

Определение. *Корнем n-ой степени* $\sqrt[n]{w}$ из компле́ксного числа w называют всякое такое компле́ксное число z, у которого $z^n = w$.

Из формулы Муавра сразу следует, что если $w = \rho e^{i\varphi}$, то числа[7]

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\Big(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\Big)$$

— корни n-ой степени из w. В качестве упражнения рекомендуется доказать, что при $k = 0, 1, \ldots, n-1$ получаются *различные* корни, и что *все* корни находятся среди них.

[7]В последней формуле $\sqrt[n]{\rho}$ — обычный арифмерический корень (т. е. единственное положительное число) из положительного действительного числа ρ. Несмотря на одинаковость обозначения с (многозначным) корнем из комплексного числа, недоразумения обычно возникают только у чудаков.

2. Топологические свойства $\mathbb{C}$

> Первая отчетливая концепция взаимно однозначного соответствия между комплéксными числами и точками плоскости бесспорно принадлежит К.Ф. Гауссу, особенной заслугой которого явилось то, что он первый применил эту идею к теории комплéксных чисел и ясно предвидел всю ту пользу, которую смогли извлечь из неё аналисты XIX века.
>
> Н. Бурбакú, [17, с. 161]

Топология множества комплексных чисел

Кроме алгебраической структуры поля, множество комплéксных чисел наделено “естественной” топологией. В такой топологии должны быть непрерывны алгебраические операции и естественное вложение $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Оказывается такая топология одна!

Теорема. *В множестве $\mathbb{C}$ имеется единственная отделимая топология, в которой непрерывны алгебраические операции и вложение $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Эта топология порождена нормой $z \mapsto |z|$.*

Доказательство. Наделённое такой топологией $\mathbb{C}$ становится двумерным топологическим векторным пространством над $\mathbb{R}$, так как отображения $x \mapsto x\mathbf{I}$, $y \mapsto y\mathbf{J}$ непрерывны в силу непрерывности вложения $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ и операции умножения. Но, как известно [18, с. 48], [19, с. 34], всякое n-мерное топологическое векторное пространство над $\mathbb{R}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n$, надёленному нормой $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$. ✌

Из последней теоремы видим, что топология на множестве комплéксных чисел “совпадает” с топологией двумерной плоскости (точнее, эти два топологических пространства гомеоморфны). Поэтому при изучении топологических свойств множества комплéксных чисел $\mathbb{C}$ полезно представлять его себе как двумерную плоскость (т. е. пользоваться моделью $\mathbb{C}_V$).

Напомним основные топологические понятия применительно к комплéксным числам.

- Топология на $\mathbb{C}$ вводится с помощью нормы $z \mapsto |z|$.
- В этой топологии *базис окрестностей точки* z_0 (еще говорят *фундаментальную систему окрестностей точки* z_0) образуют множества

$$U_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Непрерывность суммы легко получается с помощью неравенства треугольника, справедливого для модуля:

$$|(z_1 + z_2) - (w_1 + w_2)| \leqslant |z_1 - w_1| + |z_2 - w_2|.$$

Непрерывность произведения следует из неравенства:

$$|z_1 z_2 - w_1 w_2| = |z_1 z_2 - w_1 z_2 + w_1 z_2 - w_1 w_2| \leqslant |z_1 - w_1||z_2| + |w_1||z_2 - w_2|.$$

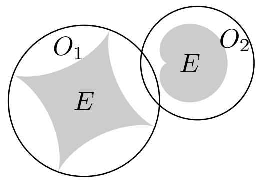
- Так как фундаментальную систему окрестностей произвольной точки z_0 образуют множества $U_\varepsilon(z_0)$, $\varepsilon > 0$, *окрестностью точки* z_0 называют всякое множество, содержащее $U_\varepsilon(z_0)$ при каком-нибудь $\varepsilon > 0$.
- Точка z_0 является *внутренней* для множества $E \subset \mathbb{C}$, если содержится в нем вместе с некоторой окрестностью, т. е. если существует $\varepsilon > 0$, при котором $U_\varepsilon(z_0)$ содержится в E.
- Точка z_0 является *предельной* для множества E, если при любом $\varepsilon > 0$ "проколотая" окрестность $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(z_0) = U_\varepsilon(z_0) \backslash \{z_0\}$ имеет непустое пересечение с E.
- Точка z_0 является *точкой прикосновения* для множества E, если при любом $\varepsilon > 0$ $\quad U_\varepsilon(z_0) \cap E \neq \varnothing$.
- Множество B — *ограничено*, если существует такое действительное число R, что для всех $z \in B$ $|z| < R$.
- Множество G — *открыто*, если состоит только из внутренних точек.
- *Внутренностью* произвольного множества E называется множество $\overset{\circ}{E}$ всех внутренних точек из E. Это наибольшее открытое множество из содержащихся в E.
- Множество F — *замкнуто*, если содержит все свои предельные точки (или точки прикосновения).
- *Замыканием* E называется множество $\overline{E}$ всех точек прикосновения множества E. Это наименьшее замкнутое множество, из содержащих E.
- *Производным* для E называется множество E' всех предельных точек множества E. Производное множество для E в общем случае не совпадает с его замыканием $\overline{E} = E \cup E'$. Точки дополнения $\overline{E} - E'$ называются *изолированными* точками E.

- *Границей* ∂E множества E называется множество $\overline{E} - \overset{\circ}{E}$. Точки, принадлежащие границе, называются *граничными точками.*

- Множество $K \subset \mathbb{C}$ — *компактно*, если из всякого его открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие. На комплéксной плоскости (как и в любом метризуемом пространстве) это верно тогда и только тогда, когда из всякой его последовательности можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к элементу из этого же множества K. И так как $\mathbb{C}$ является конечномерным пространством над $\mathbb{R}$, это будет тогда и только тогда, когда K замкнуто и ограничено.

- *Относительно компактные* множества — это те, замыкание которых компактно. На комплéксной плоскости $\mathbb{C}$ это в точности ограниченные множества.

○ Множество E называется *несвязным*, если существуют такие два множества O_1, O_2, что:



$$\begin{aligned} &1.\quad O_1, O_2 \text{ — открытые множества},\\ &2.\quad O_1 \cap E \neq \varnothing, \quad O_2 \cap E \neq \varnothing,\\ &3.\quad O_1 \cap O_2 \cap E = \varnothing,\\ &4.\quad O_1 \cup O_2 \supset E. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Связное множество — это такое, которое не является несвязным.

- *Область* — это открытое связное множество.

- *Континуумом* называют связное компактное множество не сводящееся к одной точке.

- *Линейно связным* называют множество, любые две точки которого можно соединить путем (параметризованной непрерывной кривой), лежащим в этом множестве.

Связность множеств

Изучим более подробно понятие связности множеств, поскольку из других курсов оно менее знакомо, чем перечисленные выше.

Теорема [критерий связности]. *Множество E несвязно тогда и только тогда, когда существуют два множества E_1 и E_2 со свойствами:*

$$\begin{aligned} &1. \quad E_1 \neq \varnothing, \quad E_2 \neq \varnothing, \\ &2. \quad E_1 \cup E_2 = E, \\ &3. \quad \overline{E}_1 \cap E_2 = \varnothing, \\ &4. \quad E_1 \cap \overline{E}_2 = \varnothing. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть E несвязно. Найдем открытые множества O_1 и O_2 со свойствами из соотношений (2.1). Положим $E_1 = O_1 \cap E$ и $E_2 = O_2 \cap E$. Нетривиальна проверка только равенств 3, 4 из (2.2). Мы покажем, что $\overline{E}_1 \cap E_2 = \varnothing$, другое равенство доказывается аналогично.

Пусть $z \in E_2 = O_2 \cap E$. В силу открытости O_2 имеется окрестность $U_\delta(z) \subset O_2$. Эта окрестность в силу свойства $O_1 \cap O_2 \cap E = \varnothing$ не может содержать точек из $E_1 = O_1 \cap E$, поэтому $z \notin \overline{O_1 \cap E}$, значит, $\overline{E}_1 \cap E_2 = \varnothing$. И необходимость доказана.

($\Leftarrow$) Пусть для E имеются множества E_1 и E_2 со свойствами (2.2). Обозначим через $O_1 = (\overline{E}_1)^c$ и $O_2 = (\overline{E}_2)^c$. Это открытые непустые множества. Очевидно, $E \subset O_1 \cup O_2$ и $E \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing$, то есть O_1 и O_2 обладают всеми свойствами из соотношений (2.1).

Что и требовалось доказать. ✌

Напомним, что отрезком, соединяющим точки z_1 и z_2 называется множество точек $\{z: \ z = (1-t)z_1 + tz_2, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

Теорема. *Отрезок $E = [z_1, z_2]$, соединяющий точки z_1 и z_2 является связным множеством.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся открытые множества O_1 и O_2 со свойствами (2.1). Выберем $z_1^{(1)} \in O_1 \cap E$ и $z_2^{(1)} \in O_2 \cap E$ и рассмотрим середину отрезка $[z_1^{(1)}, z_2^{(1)}]$. Эта точка лежит в объединении $O_1 \cup O_2$, поэтому попадет в одно из множеств $O_1 \cap E$ или $O_2 \cap E$. Обозначим через $[z_1^{(2)}, z_2^{(2)}]$ ту из половин отрезка $[z_1^{(1)}, z_2^{(1)}]$, у которой $z_1^{(2)} \in O_1 \cap E$, а $z_2^{(2)} \in O_2 \cap E$. Продолжая аналогично, через $[z_1^{(n)}, z_2^{(n)}]$ обозначаем ту из половин отрезка $[z_1^{(n-1)}, z_2^{(n-1)}]$, у которой $z_1^{(n)} \in O_1 \cap E$, а $z_2^{(n)} \in O_2 \cap E$. По теореме о вложенных отрезках существует единственная точка z_0, принадлежащая всем построенным отрезкам. Эта точка не может принадлежать O_1, ибо тогда O_1 будут принадлежать все отрезки $[z_1^{(n)}, z_2^{(n)}]$ начиная с некоторого номера. По той же причине она не может принадлежать O_2, а это противоречит тому, что $z_0 \in O_1 \cup O_2$. Противоречие доказывает теорему. ✌

Следствие. *Всякий путь (то есть непрерывная параметризованная кривая) является связным множеством.*

Доказательство аналогично предыдущему. Если $z = z(t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — параметризация кривой, то все деления производим с отрезком $[0, 1]$, выбирая те из отрезков $[t_1^{(n)}, t_2^{(n)}]$, у которых $z(t_1^{(n)}) \in O_1$, а $z(t_2^{(n)}) \in O_2$. В результате опять получим точку $z_0 = z(t_0)$, которая не может принадлежать ни O_1 ни O_2, но должна принадлежать их объединению?!

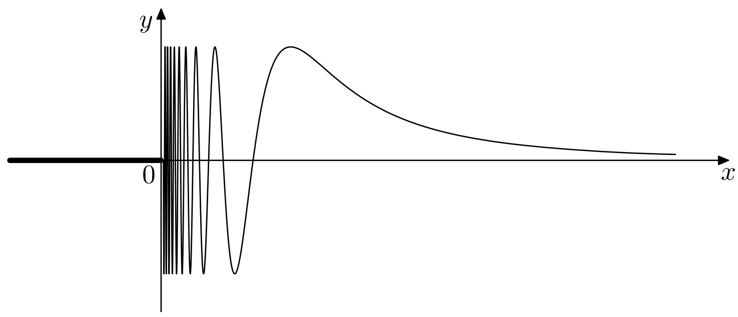
Следствие. *Всякая ломаная, соединяющая две точки комплéксной плоскости, является связным множеством.*

Для таких ломаных существует непрерывная параметризация. (В качестве упражнения, напишите параметризацию ломаной, состоящей из двух звеньев.)

Следствие. *Всякое линейно связное множество является связным.*

Утверждение обратное к предыдущему следствию в общем случае неверно. Это доказывает следующий пример.

Пусть $E = \{z \big| \operatorname{Re} z \leqslant 0, \quad \operatorname{Im} z = 0\} \cup \{z \big| z = x + i \sin \frac{1}{x}, x > 0\}$.



Это множество связно, но не является линейно связным (упражнение). Однако, справедлива следующая теорема.

Теорема. Открытое *множество $G \subset \mathbb{C}$ связно тогда и только тогда, когда оно линейно связно.*

Пусть z_1 произвольная точка из множества G. Обозначим через O_1 множество тех $z \in G$, которые можно соединить путем с точкой z_1. Оставшуюся часть обозначим через O_2. Таким образом, $G \subset O_1 \cup O_2$ и $O_1 \cap O_2 \cap G =$. Покажем, что O_1 открыто. В самом деле, пусть $z \in O_1$. Так как G — открыто, имеется круг $U_\delta(z)$, содержащийся в G. Поскольку любую точку этого круга можно соединить отрезком прямой с его центром z, он содержится в O_1 и, значит, O_1 — открыто (и непусто). Но O_2 тоже открыто, так как при $z \in O_2$ тоже $z \in G$ и имеется круг $U_\delta(z) \subset G$. Опять все точки этого круга принадлежат O_2, поскольку в противном случае в $U_\delta(z)$ имелась бы точка из O_1 и тогда z можно было бы соединить прямой с этой точкой и путем с точкой z_1, что противоречит определению O_2.

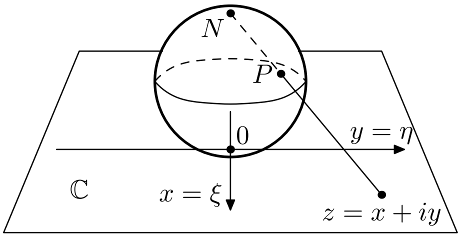
Если бы O_2 было непусто, то по определению G было бы несвязно. Таким образом, $G = O_1$, что и требовалось доказать. ✌

3. Компактификация

Не знающий геометрии не допускается!
Надпись на дверях школы Платона.

Из общей топологии известно, что всякое локально компактное пространство можно отождествить со всюду плотным подмножеством некоторого компактного пространства. Это очень полезно, в частности, для того, чтобы иметь возможность извлекать сходящуюся подпоследовательность из любой последовательности. Известны несколько способов такой "компактификации". Наиболее используемой компактификацией в компле́ксном анализе является, так называемая, одноточечная компактификация — *расширенная компле́ксная плоскость* $\overline{\mathbb{C}}$ (или, ее другая модель, *компле́ксная проективная плоскость* $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{CP}$). Мы изучим здесь только расширенную компле́ксную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Она наиболее проста, так как имеет наглядную геометрическую интерпретацию.

Сфера Римана



Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (ξ, η, ζ) сферу S с центром в точке $(0, 0, 1/2)$ радиуса $1/2$:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0. \qquad (3.1)$$

Отождествим плоскость ζ=0 с множеством компле́ксных чисел: $z = x + iy \mapsto (\xi, \eta, 0)$. Обозначим через $N = (0, 0, 1)$ — "северный полюс" сферы, и проведем из нее луч через точку сферы $P = (\xi, \eta, \zeta)$ до пересечения с плоскостью $\zeta = 0$. Точку пересечения обозначим $z = x + iy$. Точка P называется *стереографической проекцией* точки z на *сферу Римана* S. Стереографическая проекция устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками $z \in \mathbb{C}$ и точками сферы S с выколотым северным полюсом N.

Теорема. *Стереографическая проекция является гомеоморфизмом* $\mathbb{C}$ *на сферу с выколотым северным полюсом.*

Доказательство. Получим сначала формулы стереографической проекции.
Так как точки $N = (0, 0, 1)$, $P = (\xi, \eta, \zeta)$ и $(x, y, 0)$ лежат на одной прямой, имеем

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta - 1}{-1},$$

или

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}, \quad z = x + iy = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}. \tag{3.2}$$

Отсюда находим,

$$|z|^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2}.$$

Из уравнения сферы (3.1) имеем $\xi^2 + \eta^2 = \zeta(1-\zeta)$, поэтому

$$z\overline{z} = |z|^2 = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \quad \text{откуда,} \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}.$$

Из соотношений (3.2), находим

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}. \tag{3.3}$$

Покажем теперь, что стереографическая проекция обладает тем свойством, что окружности на плоскости переводит в окружности на сфере, при этом их центры переходят друг в друга, а прямые на плоскости переходят в окружности на сфере, проходящие через северный полюс N.

В самом деле, общее уравнение окружности на плоскости z имеет вид

$$Az\overline{z} + \tfrac{1}{2}B(z + \overline{z}) - \tfrac{1}{2}iC(z - \overline{z}) + D = 0, \tag{3.4}$$

где A, B, C и D — действительные числа, $A > 0$, $B^2 + C^2 > 4AD$. При $A = 0$ уравнение (3.4) определяет прямую.

Подставляя (3.2) в уравнение окружности (3.4) и учитывая (3.1), находим

$$(A - D)\zeta + B\xi + C\eta + D = 0.$$

Это уравнение показывает, что все точки сферы, являющиеся стереографической проекцией точек окружности лежат на одной плоскости в пространстве, значит, на окружности на сфере (сфера и плоскость пересекаются по окружности).

Доказанное свойство показывает, что образами (круговых) окрестностей на плоскости являются (круговые) окрестности на сфере и обратно. Отсюда и следует заключение теоремы (детали остаются в качестве упражнения).✌

Из последней теоремы следует, что множество $\mathbb{C}$ с топологической точки зрения можно рассматривать как поверхность сферы с выколотой точкой N. Обозначим через $\overline{\mathbb{C}}$ объединение $\mathbb{C}$ с одноточечным множеством $\{\infty\}$, где через ∞ обозначен произвольный элемент, не принадлежащий $\mathbb{C}$. Если по определению считать фундаментальной системой окрестностей этой точки прообразы при стереографической проекции круговых окрестностей точки N на сфере (т. е. внешности кругов с центром в нуле), то получим топологическое пространство, гомеоморфное сфере Римана. Оно и называется *расширенной компле́ксной плоскостью* $\overline{\mathbb{C}}$. В силу компактности сферы Римана (она замкнута и ограничена в $\mathbb{R}^3$), $\overline{\mathbb{C}}$ — компактное топологическое пространство.

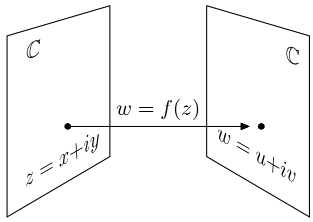
4. Функции компле́ксной переменной[8]

Иногда случается, что кругозор человека становится все уже и уже, и, когда его радиус стремится к нулю, он сводится к точке. Тогда она становится его точкой зрения.

Д. Гильберт.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область и $f : D \to \mathbb{C}$ — функция из D в $\mathbb{C}$. Если $w = f(z)$ и $w = u + iv$, а $z = x + iy$, то такая функция определяет две действительные функции

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$



Обратно, задав в области D две произвольные функции u, v получим компле́ксному функцию компле́ксной переменной:
$w = u(x, y) + iv(x, y) = u(z) + iv(z)$,
где $z = x + iy$.

Другой способ задания компле́ксной функции использует показательную форму записи компле́ксных чисел. А именно, всякая функция $f : D \to \mathbb{C}$ определяет еще две действительные функции

$$\rho = |f(z)|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} f(z).$$

и обратно. Отметим только, что в этом случае приходится специально оговаривать какая “ветвь многозначной функции” Arg имеется в виду.

Элементарными функциями компле́ксной переменной называют функции, получающиеся применением *конечного* числа алгебраических операций и операций суперпозиции всего к трём функциям: (здесь $z = x+iy$)

$$w = z; \quad w = e^z \overset{\text{def}}{=} e^x(\cos y + i \sin y) \quad w = \operatorname{Ln} z \overset{\text{def}}{=} \ln|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

(здесь $\cos y$, $\sin y$, $\ln|z|$ — обычные функции действительной переменной) Причём очевидно, что e^z и $\operatorname{Ln} z$ — взаимно обратные функции, то есть $e^{\operatorname{Ln} z} = z$ и $\operatorname{Ln}(e^z) = z$ для всех z (первое равенство при $z \neq 0$, во втором надо правильно выбрать “ветвь” $\operatorname{Arg} z$).

[8]В большинстве книг на русском языке употребляется термин «компле́ксное переменное», «действительное переменное» в среднем роде. Мы всюду пишем «переменная» в женском роде, считая опущенным слово «величина». Так же писали, например, А.Н. Тихонов и А.Г. Свешников (см. список литературы.)

Например, являются общепринятыми (в России[9]) следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&w = \sin z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} && w = \cos z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\
&w = \operatorname{tg} z \overset{\text{def}}{=} \frac{\sin z}{\cos z} && w = \operatorname{ctg} z \overset{\text{def}}{=} \frac{\cos z}{\sin z} \\
&w = \operatorname{sh} z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} && w = \operatorname{ch} z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \\
&w = \operatorname{th} z \overset{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} && w = \operatorname{cth} z \overset{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}
\end{aligned}
$$

В качестве упражнения рекомендуется найти формулы для вычисления обратных тригонометрических и гиперболических функций $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$, $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$, $\operatorname{Arcth} z$. Отметим ещё, что по определению для компле́ксных a и z полагают $a^z \overset{\text{def}}{=} e^{z \operatorname{Ln} a}$.

График компле́ксной функции $f : D \to \mathbb{C}$ лежит в $4^{\text{х}}$-мерном пространстве, поэтому изобразить его непосредственно невозможно. Обычно, чтобы представить себе поведение функции $w = f(z)$, рисуют графики функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ или $\rho = |f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$ и $\varphi = \operatorname{Arg} f(z)$. В прикладной компьютерной программе Mathlab имеется возможность строить график функции $\rho = |f(z)|$ и на нем же цветом изображать функцию $\operatorname{Arg} f(z)$. Приведены примеры графиков некоторых компле́ксных функций.

Как обычно мы будем употреблять следующие обозначения:

1. $\operatorname{dom} f$ — *область определения* функции f (от английского «domain» — область).
2. $\operatorname{ran} f$ — *область значений* функции f (от английского «range»; в действительном анализе чаще употребляют сокращение im от английского «image», которое в компле́ксном анализе употребляется, как мы знаем, для других целей).
3. $\operatorname{Re} f$ — *действительная часть* f, если $f = u + iv$, то $\operatorname{Re} f = u$.
4. $\operatorname{Im} f$ — *мнимая часть* f, если $f = u + iv$, то $\operatorname{Im} f = v$.
5. $|f|$ — *модуль функции* f, если $f{=}u{+}iv$, то $|f|(z){=}\sqrt{u^2(z){+}v^2(z)}$.
6. $\operatorname{Arg} f$ — *аргумент функции* f, если $f = u + iv$, то $\operatorname{Arg} f(z) = \arg f(z) + 2\pi n$.

[9]Для гиперболических и некоторых тригонометрических (и обратных к ним) функций в западной Европе и США приняты немного другие обозначения

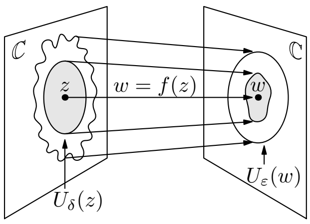
При изучении свойств компле́ксных функций, связанных с топологией, таких как существование пределов и непрерывность, удобно интерпретировать $\mathbb{C}$ как плоскость, тогда компле́ксные функции — это отображения (частей) плоскости в плоскость.

Определение. Число $w_0 = u_0 + iv_0$ называется *пределом функции* $w = f(z)$ *при* $z \to z_0$, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in \overset{\circ}{U}_\delta (z_0) \implies f(z) \in U_\varepsilon(w_0).$$

Как обычно, записывают это в виде

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$



В геометрических терминах это означает, что прообраз при f всякой окрестности точки w_0 содержит проколотую окрестность точки z_0.

В алгебраических терминах то же самое записывается в виде:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z :\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Дословно повторяя доказательство эквивалентности определения предела по Коши и Гейне из действительного анализа, можно доказать следующий критерий существования предела.

Теорема. *Для того чтобы* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\forall (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \begin{cases} z_n \to z_0, \\ z_n \neq z_0 \end{cases} \implies \lim_{n \to \infty} f(z_n) = w_0.$$

Доказательство критерия Коши тоже дословно переносится из действительного анализа.

Теорема. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ *существует тогда и только тогда, когда* f *удовлетворяет условию Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z', z'' \in \overset{\circ}{U}_\delta (z_0) \implies |f(z') - f(z'')| < \varepsilon.$$

Следующие две теоремы тоже очень часто применяются для нахождения пределов.

Теорема. *Для существования предела* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы*

$$\lim_{z\to z_0} \operatorname{Re} f(z) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y),$$
$$\lim_{z\to z_0} \operatorname{Im} f(z) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y),$$

где $z = x + iy$, $f = u + iv$, *и в этом случае*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \operatorname{Re} f(z) + i \lim_{z\to z_0} \operatorname{Im} f(z).$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$. Тогда

$$|u(z) - u_0| \leqslant \sqrt{(u(z)-u_0)^2 + (v(z)-v_0)^2} = |f(z) - w_0| \xrightarrow[z\to z_0]{} 0.$$

Аналогично доказывается существование предела $\lim\limits_{z\to z_0} v(z)$.

($\Leftarrow$) Так как $f(z) = u(z) + iv(z)$, нужное утверждение следует из того, что предел суммы равен сумме пределов и постоянный множитель можно выносить за знак предела.✌

Вторая теорема дает, вообще говоря, только достаточные условия существования предела.

Теорема. *Если существуют пределы*

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \rho,$$
$$\lim_{z\to z_0} \arg f(z) = \varphi,$$

то существует предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \rho e^{i\varphi}$.

Обратно, при $w_0 = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0$ предела $\lim\limits_{z\to z_0} \arg f(z)$ может не существовать, а при $w_0 \notin \{z : \operatorname{Re} z \leqslant 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ справедлива и обратная теорема. При $w_0 \in \{z : \operatorname{Re} z \leqslant 0, \operatorname{Im} z \neq 0\}$ для существования предела надо правильно выбрать ветвь функции $\operatorname{Arg} f$.✌

Непрерывность

В основных моментах, связанных с непрерывностью функций комплéксной переменной тоже нет ничего особо нового по сравнению с действительным анализом. Поэтому мы будем кратки.

Определение. Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется *непрерывной в точке* $z_0 \in D$, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

В геометрических терминах это означает, что прообраз всякой окрестности $U_\varepsilon\big(f(z_0)\big)$ точки $f(z_0)$ содержит некоторую (полную, а не проколотую, как в определении предела) окрестность $U_\delta(z_0)$ точки z_0.

В алгебраических:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z : |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Говорят, что f *непрерывна в области* D, когда она непрерывна в каждой точке области D.

В силу теорем о пределах из непрерывности функции f следует непрерывность функций $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ и $|f|$ (с некоторыми оговорками и $\arg f$). Обратно, непрерывность $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, как и $|f|$, $\arg f$, влечет непрерывность f.

Справедлив следующий критерий непрерывности функции $f{:}D \to \mathbb{C}$, где D — открытое множество[10].

Теорема. *Функция $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывна на множестве D тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(U)$ всякого открытого множества $U \subset \mathbb{C}$ является открытым множеством в D.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Является непосредственным следствием определения непрерывности. Если $z_0 \in f^{-1}(U)$, то $f(z_0) \in U$, где U — открыто. Значит, имеется окрестность $U_\varepsilon\big(f(z_0)\big)$ целиком содержащаяся в U, поэтому ее прообраз содержится в $f^{-1}(U)$ и содержит окрестность $U_\delta(z_0)$. Таким образом, точка z_0 принадлежит $f^{-1}(U)$ вместе с окрестностью $U_\delta(z_0)$, значит, $f^{-1}(U)$ открыто.

($\Leftarrow$) Очевидно, так как для любой точки z_0 прообраз открытого множества $U_\varepsilon\big(f(z_0)\big)$ открыт, поэтому содержит некоторую окрестность $U_\delta(z_0)$. Значит, f непрерывна в z_0.

Что и требовалось доказать.✌

С некоторыми поправками (связанными с тем, что функции принимают значения в неупорядоченном множестве $\mathbb{C}$) справедливы обычные теоремы о непрерывных функциях. Так аналогом первой и второй теорем Вейерштрасса является следующая теорема.

Теорема. *Если $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывна, то образом всякого компакта $K \Subset D$ является компакт $f(K) \Subset \mathbb{C}$.*

[10]Мы считаем D— открытым, чтобы не возиться с индуцированными топологиями. Но теорема будет верна и для любого D наделенного индуцированной из $\mathbb{C}$ топологией.

(*В частности,* $\operatorname{Re} f$*,* $\operatorname{Im} f$ *и* $|f|$ *ограничены на* K *и достигают своих точных верхней и нижней граней.*)

Доказательство. Пусть $(U_i)_{i\in I}$ — открытое покрытие образа $f(K)$ множества K. Прообразы $f^{-1}(U_i)$ образуют открытое покрытие компактного множества K, поэтому из него можно извлечь конечное подпокрытие $f^{-1}(U_{i_1}), \ldots, f^{-1}(U_{i_n})$. Очевидно, тогда множества $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ образуют конечное подпокрытие множества $f(K)$.

Точно так же компактны, но уже в $\mathbb{R}$ образы K при отображениях $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ и $|f|$, а значит, замкнуты и ограничены. Докажем, что, например $|f|$ достигает своих точных верхней и нижней граней (доказательство для $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ аналогично).

Обозначим через m и M соответственно точную нижнюю и точную верхнюю грани множества $|f(K)| = \{|f(z)| : z \in K\}$. Это конечные числа в силу ограниченности множества $|f(K)|$ и, по определению точных граней, в любой их окрестности есть точки из $|f(K)|$. То есть m и M точки прикосновения $|f(K)|$. В силу его замкнутости они принадлежат $|f(K)|$, значит, найдутся z_1, $z_2 \in K$, для которых $|f(z_1)| = m$ и $|f(z_2)| = M$.

Что и требовалось доказать.✌

Аналогом теоремы Коши о промежуточных значениях для функций компле́ксной переменной является следующая теорема.

Теорема. *Образ связного множества* E *при непрерывном отображении* f *есть связное множество.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся такие открытые множества O_1 и O_2, что $f(E) \subset O_1 \cup O_2$, $f(E) \cap O_1 \neq \varnothing$, $f(E) \cap O_2 \neq \varnothing$ и $O_1 \cap O_2 \cap f(E) = \varnothing$. Очевидно, их прообразами будут открытые множества с аналогичными свойствами по отношению к E, что противоречит его связности.

Что и требовалось доказать.✌

Определение равномерной непрерывности и теорема Кантора переносятся из действительного анализа дословно.

Определение. Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется *равномерно непрерывной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z', z'' \in D : |z' - z''| < \delta \implies |f(z') - f(z'')| < \varepsilon.$$

Теорема [Г. Кантора]. *Если функция* $f : K \to \mathbb{C}$ *непрерывна и* $K \Subset \mathbb{C}$ *— компакт, то* f *равномерно непрерывна на* K*.*

Напомним доказательство. Для каждой точки $z \in K$ найдем окрестность $U_{\delta(z)}(z)$ (δ зависит от точки z), в которой $|f(z) - f(z')| < \varepsilon/2$ для любых $z' \in U_{\delta(z)}(z)$. Когда z пробегает K, окрестности $U_{\frac{\delta(z)}{2}}(z)$ *половинного* радиуса образуют покрытие

K. Извлечём из него конечное подпокрытие $U_k = U_{\frac{\delta(z_k)}{2}}(z_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$ и положим $\delta = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \big(\delta(z_k)\big)$. Если теперь z' и z'' две произвольные точки из K, у которых $|z' - z''| < \delta$, то сначала найдём z_{k_0} так, чтобы $z' \in U_{k_0}$ $((U_k)$ — покрытие). Но тогда обе точки z' и z'' попадут в одну и ту же окрестность $U_{\delta(z_{k_0})}(z_{k_0})$ (она имеет радиус в два раз больше чем U_{k_0}) и поэтому

$$|f(z') - f(z'')| \leqslant |f(z') - f(z_{k_0})| + |f(z_{k_0}) - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

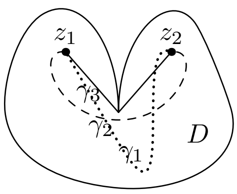
Что и требовалось доказать.✌

В дальнейшем нам понадобится еще одно понятие непрерывности.

Определение. Пусть D —область и $f : D \to \mathbb{C}$. Введем в D метрику по формуле

$$d(z_1, z_2) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} dS,$$

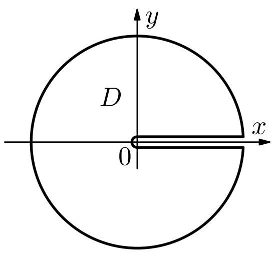
где γ пробегает все спрямляемые кривые, лежащие в D и соединяющие точки z_1 и z_2 (проверка свойств метрики является упражнением, $\int_\gamma dS$ — это длина кривой γ).



Говорят, что функция f *непрерывна в D вплоть до границы*, если она равномерно непрерывна относительно этой метрики на каждом ограниченном подмножестве из D, т. е. для любого ограниченного подмножества $V \subset D$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z', z'' \in V : d(z', z'') < \delta \implies |f(z') - f(z'')| < \varepsilon.$$

Отметим, что если функцию f можно по непрерывности продолжить в замыкание $\overline{D}$ области D, то она непрерывна вплоть до границы. Обратное в общем случае неверно, что можно увидеть из следующего примера.



Задача. Пусть $D = \{z : |z| < 1, \arg z \neq 0,\ z \neq 0\}$. Рассмотрим в этой области функцию (здесь $z = \rho e^{i\varphi}$)

$$f(z) = \sqrt{z} = \rho^{1/2} e^{i\varphi/2}.$$

Доказать, что она непрерывна вплоть до границы в области D, но ее невозможно продолжить по непрерывности в замыкание D (которое совпадает с кругом $\overline{U}_1(0) = \{z : |z| \leqslant 1\}$).

5. Комплексное дифференцирование

...не следует недооценивать преимуществ, которые можно получить применением хорошо приспособленного для дальнейших исследований формализма, который, если можно так выразиться, опережает нашу мысль.

Ф. Клейн "Эрлагенская программа"

$\mathbb{R}$-линейные и $\mathbb{C}$-линейные отображения

Пусть E, F — линейные пространства над полем $\mathbb{F}$. Напомним, что $L : E \to F$ называется *линейным отображением*, если

1. $L(z_1 + z_2) = L(z_1) + L(z_2) \qquad \forall z_1, z_2 \in E$ (аддитивность)
2. $L(\alpha z) = \alpha L(z) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall z \in E$ (однородность)

В качестве линейных пространств мы в дальнейшем берем одно и то же множество $\mathbb{C}$, но рассматриваемое либо как 2-мерное пространство над полем $\mathbb{R}$, либо как 1-мерное пространство над $\mathbb{C}$. Эти пространства имеют *разные* множества линейных отображений, так как свойство 2 должно выполняться в первом случае только для действительных чисел, а во втором — для всех комплéксных.

Рассмотрим сначала $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$. Для того, чтобы отличать линейные отображения этого линейного пространства от линейных отображений на $\mathbb{C}$, рассматриваемом как 1-мерное линейное над самим собой, будем называть первые $\mathbb{R}$-линейными, а вторые — $\mathbb{C}$-линейными.

Теорема [об общем виде R-линейного отображения]. *Отображение $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является $\mathbb{R}$-линейным тогда и только тогда, когда существуют такие A, $B \in \mathbb{C}$, что*

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad L(z) = Az + B\overline{z}. \tag{5.1}$$

Доказательство ($\Rightarrow$). Поскольку $z = x + iy$ и L — $\mathbb{R}$-линейное отображение, имеем

$$\begin{aligned} L(x+iy) = xL(1) + yL(i) &= \frac{z+\overline{z}}{2}L(1) + \frac{z-\overline{z}}{2i}L(i) \\ &= \frac{1}{2}\big(L(1) - iL(i)\big)z + \frac{1}{2}\big(L(1) + iL(i)\big)\overline{z}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ и $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$. Обозначив теперь через $A = \frac{1}{2}\big(L(1) - iL(i)\big)$ и $B = \frac{1}{2}\big(L(1) + iL(i)\big)$, получаем требуемое.

($\Leftarrow$). Отображение задается формулой (5.1), надо доказать, что оно линейно. Это, практически, очевидно, но можно сделать и вычисление:

$$L(\alpha z_1 + \beta z_2) = A(\alpha z_1 + \beta z_2) + B(\overline{\alpha z_1 + \beta z_2}) = A\alpha z_1 + B\overline{\alpha z_1} + A\beta z_2 + B\overline{\beta z_2}$$
$$= \alpha(Az_1 + B\overline{z}_1) + \beta(Az_2 + B\overline{z}_2) = \alpha L z_1 + \beta L z_2.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\alpha = \overline{\alpha}$, $\beta = \overline{\beta}$ для действительных чисел (и только для них).

Теорема полностью доказана.✌

Теперь надо заметить, что всякое $\mathbb{C}$-линейное отображение обязано быть и $\mathbb{R}$-линейным. Поэтому $\mathbb{C}$-линейные отображения надо искать среди $\mathbb{R}$-линейных, т. е. среди отображений вида (5.1). Они должны удовлетворять свойству однородности для всех $\alpha \in \mathbb{C}$. Но

$$L(\alpha z) = A(\alpha z) + B\overline{(\alpha z)} = \alpha A z + \overline{\alpha} B \overline{z}; \qquad \alpha L(z) = \alpha A z + \alpha B \overline{z}.$$

Поэтому

$$L(\alpha z) = \alpha L(z) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha A z + \overline{\alpha} B \overline{z} = \alpha A z + \alpha B \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\alpha} B \overline{z} = \alpha B \overline{z}.$$

Последнее равенство при всех $\alpha, z \in \mathbb{C}$ выполняется только при $B = 0$.

Таким образом, можно сформулировать теорему.

Теорема [об общем виде $\mathbb{C}$-линейного отображения]. *Отображение $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является $\mathbb{C}$-линейным тогда и только тогда, когда существует такое $A \in \mathbb{C}$, что*

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad L(z) = Az. \tag{5.2}$$

Замечание. Отметим, что кроме линейных над полем компле́ксных чисел можно изучать *антилинейные* (или, иначе, *полулинейные*) функции. Это функции, которые кроме аддитивности обладают свойством *антиоднородности* (иначе, полуоднородности):

$$L(\alpha z) = \overline{\alpha} L(z).$$

Как и выше, можно доказать, что справедлива теорема:

Теорема. *Отображение $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является антилинейным тогда и только тогда, когда существует такое $B \in \mathbb{C}$, что*

$$\forall z \qquad L(z) = B\overline{z}.$$

Замечание. Мы привели здесь удобную для дальнейшего характеризацию линейных отображений плоскости в себя. Но из алгебры известна другая, а именно, если фиксировать базис на плоскости, то каждому линейному отображению плоскости в себя можно сопоставить матрицу (действующую на векторы по известному правилу). Спрашивается, как соотносится приведённая выше характеризация с матричной?

Ответ в следующей задаче.

Задача. Докажите, что в базисе $\mathbf{1} = (1, 0)$, $\mathbf{i} = (0, 1)$ всякому $\mathbb{R}$-линейному отображению L можно взаимно-однозначно сопоставить матрицу (её действие на вектор-столбец справа)

$$L \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

И обратно, всякая 2×2 матрица порождает $\mathbb{R}$-линейное отображение.

Для того чтобы отображение, порождаемое матрицей было $\mathbb{C}$-линейным, необходимо и достаточно, чтобы $a = d$, $b = -c$. то есть соответствующая матрица должна иметь вид

$$L \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Дифференцирование

Пусть $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — отображение. Напомним, что f называется *дифференцируемым в точке* $z = (x, y)$ (мы будем говорить $\mathbb{R}$-*дифференцируемым* в противоположность вводимому ниже понятию $\mathbb{C}$-дифференцируемой функции), когда существует такое $\mathbb{R}$-линейное отображение $\Delta z \mapsto L(\Delta z)$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, что

$$\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z) = L(\Delta z) + o(z, \Delta z), \tag{5.3}$$

где $o(z, \Delta z)$ — отображение бесконечно малое по сравнению с Δz.

Чтобы найти $\mathbb{R}$-линейное отображение $\Delta z \mapsto L(\Delta z)$, поступим следующим образом. Поскольку $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ и при этом изоморфизме $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и так как u и v — дифференцируемы,

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}),$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

Поэтому приращение Δf можно записать в виде

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + o(|\Delta z|),$$

где $|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Перегруппировывая слагаемые, находим

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + o(|\Delta z|) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\Delta z).\end{aligned}$$

где введены естественные обозначения

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Воспользовавшись равенствами $\Delta x = \dfrac{\Delta z + \overline{\Delta z}}{2}$, $\Delta y = \dfrac{\Delta z - \overline{\Delta z}}{2i}$, получаем

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta z + \overline{\Delta z}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta z - \overline{\Delta z}}{2i} + o(\Delta z) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{\Delta z} + o(\Delta z).\end{aligned}$$

Вводя еще очень удобные и часто употребляемые обозначения

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\end{aligned} \tag{5.5}$$

окончательно можем написать

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{\Delta z} + o(\Delta z). \tag{5.6}$$

Итог вычислений можно сформулировать в виде теоремы:

Теорема. *Для того чтобы функция $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ была $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z, необходимо и достаточно, чтобы её приращение можно было представить в виде* (5.6).

Определение. Функция $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется $\mathbb{C}$-*дифференцируемой* в точке z (или, иначе, *моногенной*), когда её приращение в точке z представимо в виде

$$\Delta f = f(z+\Delta z) - f(z) = L(\Delta z) + o(z, \Delta z)$$

где $\Delta z \mapsto L(\Delta z)$ — $\mathbb{C}$-линейное отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $o(z, \Delta z)$ — бесконечно малая по сравнению с Δz.

Поскольку, как мы отмечали, всякое $\mathbb{C}$-линейное отображение является $\mathbb{R}$-линейным, из определений следует, что $\mathbb{C}$-дифференцируемая функция будет и $\mathbb{R}$-дифференцируемой, значит, $\mathbb{C}$-дифференцируемые отображения надо искать только среди тех, у которых приращение представимо в виде (5.6). Но, как мы видели ранее, отображение

$$\Delta z \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{\Delta z}$$

будет $\mathbb{C}$-линейным тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ и тогда

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(z, \Delta z).$$

В итоге получаем теорему.

Теорема. *Пусть функция* f — $\mathbb{R}$*-дифференцируема в точке* z. *Для того чтобы она была* $\mathbb{C}$*-дифференцируемой в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0. \tag{5.7}$$

и в этом случае

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(z, \Delta z).$$

Равенство (5.7) *более подробно можно переписать в виде*

$$\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)+i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0.$$

или, что то же самое (действительная и мнимая части должны быть равны нулю)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.8}$$

Равенства (5.8) (впрочем, как и равносильное равенство (5.7)) называют условиями Коши-Римана (или Даламбера-Эйлера). Таким образом, необходимым и достаточным условием $\mathbb{C}$-дифференцируемости функции в точке является выполнение условий Коши-Римана-Даламбера-Эйлера (при условии «обычной» дифференцируемости функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, когда $f = u + iv$).

Как и в действительном анализе, линейную часть приращения дифференцируемой функции называют дифференциалом f в точке z и ее аргумент обозначают не Δz, а dz. Таким образом, для $\mathbb{R}$-дифференцируемой функции дифференциалом в точке z является $\mathbb{R}$-линейная функция от dz:

$$dz \mapsto df(z) = \frac{\partial f}{\partial z}\, dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\, \overline{dz},$$

и для $\mathbb{C}$-дифференцируемой функции

$$dz \mapsto df(z) = \frac{\partial f}{\partial z}\, dz.$$

Определение. Функцию f называют *голоморфной в точке* z_0, если она $\mathbb{C}$-дифференцируема в каждой точке некоторой окрестности этой точки:

$$\exists \delta > 0\ \forall z \in U_\delta(z_0) \Rightarrow f - \mathbb{C}\text{-дифференцируема в } z.$$

Говорят, что f *голоморфна на множестве* $E \subset \mathbb{C}$, если она голоморфна в каждой точке этого множества. Отсюда следует существование *открытого* множества, содержащего E, на котором f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой.

В частности, если D — область, легко видеть, что для голоморфности в D функции достаточно её $\mathbb{C}$-дифференцируемости в каждой точке этой области (а не голоморфности).

Множество всех *голоморфных в области* D функций обозначается $\mathcal{O}(D)$. Это обозначение в последние 30 лет становится общепринятым. Буква $\mathcal{O}$ возможно от происходящего из греческих слов термина «голоморфный»: $\ddot{o}\lambda o\sigma$ (голо) — весь, целый, и «$\mu o\rho\varphi\eta$ (морфо)» — форма.

В дальнейшем мы увидим, что голоморфная функция «целиком» определяется своими значениями в сколь угодно малой окрествности любой точки из области определения. Т. е. зная значения такой функции в малой окркстности какой-нибудь точки, можно восстановить её значения в любой, сколь угодно далёкой от неё точке области определения.

Наряду с термином "*голоморфная функция*" употребляются как синонимы термины "*регулярная функция*" и "*однозначная аналитическая функция*"[11].

[11] На самом деле существуют отдельные определения регулярной и однозначной аналитической функций, но, как мы увидим в дальнейшем, они эквивалентны голоморфности.

Для дифференцируемой в области D функции f возникает отображение $z \mapsto df(z)$, сопоставляющее каждой точке z дифференциал функции f в этой точке. Это отображение (из области D в множество линейных функций) называют дифференциалом функции f (в отличие от дифференциала *в точке*).

Теорема. *Функция f $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке $z \in D$ тогда и только тогда, когда существует конечный предел*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \overset{def}{=} f'(z)$$

и в этом случае $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть f — $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке z. Тогда $\Delta f = \dfrac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\Delta z)$. Значит,

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(\frac{\partial f}{\partial z})\Delta z + o(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z} \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

($\Leftarrow$). Пусть существует предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z)$. Тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) + \alpha(\Delta z),$$

где $\alpha(\Delta z)$ — бесконечно малая, т. е. $\alpha(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Но тогда

$$\Delta f = f'(z)\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z,$$

где, очевидно, $\alpha(\Delta z)\Delta z = o(\Delta z)$ и, значит, f — $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке z.

Что и требовалось доказать.✌

Пример. Пусть $f(z) = z|z|^2$, более подробно можно написать: $f(z) = x(x^2+y^2) + iy(x^2+y^2)$. Отсюда видим, что функции

$$u(x,y) = x(x^2+y^2), \qquad v(x,y) = y(x^2+y^2)$$

— многочлены от x и y, значит, бесконечно дифференцируемы (над $\mathbb{R}$). Но с другой стороны,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

и равенство $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ (первое из условий Коши-Римана) возможно только при $x = 0$, $y = 0$. Таким образом, функция f нигде кроме нуля не является $\mathbb{C}$-дифференцируемой, хотя $\mathbb{R}$-дифференцируема в каждой точке плоскости $\mathbb{C}$.

Отметим еще, что иначе можно было делать так: $f(z) = z|z|^2 = z^2\overline{z}$ (т. к. $|z|^2 = z\overline{z}$), поэтому $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z\overline{z}$ и $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = z^2$, откуда тоже сразу следует не дифференцируемость в смысле компле́ксного анализа функции всюду, кроме нуля и равенство

$$df = 2z\overline{z}dz + z^2\overline{dz}.$$

(Производные по z и $\overline{z}$ можно считать как обычные частные производные по независимым переменным z и $\overline{z}$.)

Замечание. Отметим, что вполне осмыслено следующее определение: функция называется *антидифференцируемой* в точке z, если её приращение в этой точке представимо в виде:

$$f(z + \Delta z) - f(z) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{\Delta z} + o(\Delta z).$$

Функции, антидифференцируемые *в области* называют *антиголоморфными* в этой области.

Для таких функций можно построить теорию, аналогичную изложенной в этом параграфе и ниже. Так, аналогом условий Коши-Римана будет $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ или, более подробно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Считается, что развитие этой теории не даст ничего принципиально нового по сравнению с традиционной.

Задача (на пятерку без сдачи экзамена). Перенести всю следующую ниже теорию (с соответствующими изменениями) на антиголоморфные функции.

6. Комплексное интегрирование

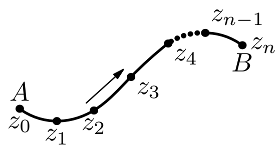
Большинство людей подобны ослам, предпочитающим солому золоту.

Гераклит.

В дальнейшем мы будем использовать три типа интегралов:

$$\int_L f(z)\,dz; \quad \int_L f(z)\,|dz| \equiv \int_L f(z)\,ds; \quad \iint\limits_D f(z)\,dxdy \equiv -\frac{1}{2i}\iint\limits_D f(z)\,dz\wedge\overline{dz}.$$

Определение. Пусть L – спрямляемая жорданова кривая[12] (с концами A и B) в плоскости $\mathbb{C}$ и f – непрерывная функция, заданная на L. Рассмотрим разбиение τ кривой L точками $z_0, z_1, \dots, z_n$, занумерованными в соответствие с ориентацией кривой (если $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ — параметризация, то точкам $A = z_0, z_1, \dots, z_n = B$ должны соответствовать точки $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$).



Интегральной суммой $\sigma(f, \tau, \zeta)$ интеграла $\int_L f(z)\,dz$ называется

$$\sigma(f, \tau, \zeta) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

где $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ — выборка, $\zeta_k \in \overset{\frown}{z_{k-1} z_k}$ и $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Если существует предел интегральных сумм при мелкости разбиения $\lambda(\tau)$, стремящейся к нулю, то этот предел называется интегралом по кривой L от $f(z)$:

$$\int_L f(z)\,dz = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma(f, \tau, \zeta) = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k.$$

Сделаем следующие преобразования интегральной суммы:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k))(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] + i\sum_{k=1}^{n} [v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k],$$

где $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$.

Последние две суммы, очевидно, являются интегральными суммами для криволинейных интегралов

[12] см. Добавление о кривых в конце этого параграфа.

$$\int_L u\,dx - v\,dy + i\int_L v\,dx + u\,dy.$$

Поэтому получаем

Теорема. *Интеграл* $\int_L f(z)\,dz$ *существует тогда и только тогда, когда существуют криволинейные интегралы* $\int_L u\,dx - v\,dy$ *и* $\int_L v\,dx + u\,dy$*; в этом случае*

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L u\,dx - v\,dy + i\int_L v\,dx + u\,dy.$$

Теорема. *Справедлива следующая вычислительная формула для интеграла:*

$$\int_L f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt.$$

Доказательство. Получается непосредственным вычислением:

$$\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \Big(u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\Big)(x'(t)+iy'(t))\,dt =$$
$$= \int_\alpha^\beta \Big(u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)\Big)\,dt +$$
$$+ i\int_\alpha^\beta \Big(u(x(t),y(t))y'(t) + v(x(t),y(t))x'(t)\Big)\,dt =$$
$$= \int_L u\,dx - v\,dy + i\int_L v\,dx + u\,dy = \int_L f(z)\,dz.$$

Аналогом криволинейного интеграла первого рода для функций комплéксной переменной является интеграл

$$\int_L f(z)\,|dz| = \int_L f(z)\,ds \overset{\text{def}}{=} \int_L u(x,y)\,ds + i\int_L v(x,y)\,ds.$$

Интегралы $\int_L f(z)\,dz$ и $\int_L f(z)\,|dz|$ обладают стандартными свойствами:

6.1. Линейность:

$$\int_L \big(\alpha f(z) + \beta g(z)\big)\,dz = \alpha\int_L f(z)\,dz + \beta\int_L g(z)\,dz.$$

6.2. Аддитивность: если кривая $L = \bigcup\limits_{k=1}^{n} L_k$, где $(L_k)_{k=1}^n$ — разбиение кривой L на дуги L_k, то

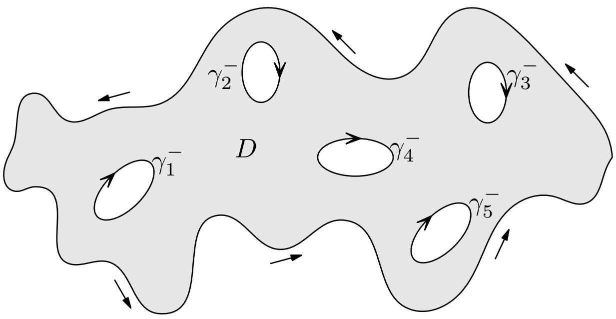
$$\int_L f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{L_k} f(z)\,dz.$$

6.3. Для любой функции справедливо неравенство:

$$\left|\int_L f(z)\,dz\right| \leqslant \int_L |f(z)|\,|dz|.$$

6.4. Если кривая L^- — как множество совпадает с L, но противоположно ориентирована, то

$$\int_{L^-} f(z)\,dz = -\int_L f(z)\,dz.$$



В частности, если D — $(n+1)$-связная область с границей $\partial D = \Gamma \cup \bigcup_1^n \gamma_k^-$, то

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k^+} f(z)\,dz.$$

(здесь и в дальнейшем, чтобы подчеркнуть, что интеграл берется по *замкнутой* кривой используется значок $\oint$)

6.5. Если последовательность функций (f_n) равномерно на кривой L сходится к функции f, то справедлива формула перехода к пределу под знаком интеграла:

$$f_n \overset{L}{\rightrightarrows} f \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_L f_n(z)\,dz = \int_L f(z)\,dz.$$

Вычислим теперь в качестве примера один часто встречающийся в дальнейшем интеграл:

$$\oint_{|z|=\delta} z^n\,dz = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{если } n = -1. \end{cases} \tag{6.1}$$

Доказательство. Кривую $\{|z| = \delta\}$ параметрически можно записать в виде $z(t) = \delta e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, поэтому

$$\int\limits_{|z|=\delta} z^n\,dz = \int\limits_0^{2\pi} \delta^n e^{int}\delta i e^{it}\,dt =$$

$$= \begin{cases} i\delta^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt = \frac{\delta^{n+1}}{i(n+1)}e^{i(n+1)t}\Big|_0^{2\pi} = 0, & \text{при } n \neq -1, \\ i\delta^0 \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i, & \text{при } n = -1. \end{cases}$$

✌

Обобщением формулы (6.1) является формула

$$\int_{|z-z_0|=\delta} (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{если } n = -1. \end{cases} \tag{6.2}$$

Она получается простой заменой переменной.

Наконец, оставшийся тип интегралов определяется так:

$$\iint\limits_D f(z)\,dxdy \overset{\text{def}}{=} \iint\limits_D u(x,y)\,dxdy + i\iint\limits_D v(x,y)\,dxdy,$$

где, как обычно, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Отметим, что выражение $f(z)\,dxdy$ под знаком интеграла, на самом деле является дифференциальной формой $f(z)\,dx \wedge dy$, поэтому справедливы равенства:

$$dxdy = dx\wedge dy = \frac{1}{2}(dz+\overline{dz})\wedge\frac{1}{2i}(dz-\overline{dz}) = -\frac{1}{4i}dz\wedge\overline{dz} + \frac{1}{4i}\overline{dz}\wedge dz = -\frac{1}{2i}dz\wedge\overline{dz}.$$

Значит, можно написать

$$\iint\limits_D f(z)\,dxdy = -\frac{1}{2i}\iint\limits_D f(z)\,dz\wedge\overline{dz}.$$

Добавление о кривых в $\mathbb{C}$

Здесь мы сформулируем обычные определения для кривых в $\mathbb{R}^2$ в применении к комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Напомним, что параметризованной кривой на плоскости $\mathbb{R}^2$ (или, иначе, путём) называют вектор-функцию

$$\gamma : t \mapsto \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

Её можно представлять себе, как закон движения точки $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ по плоскости при изменении времени t от a до b, а образ отезка $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^2$ называют траекторией этой параметризованной кривой и обозначают γ^*.

При отождествлении $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, получаем: параметризованная кривая в $\mathbb{C}$ — это комплекснозначная функция

$$t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t) : [a, b] \to \mathbb{C}\,.$$

Две параметризованные кривые $z_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$, $z_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$ называют эквивалентными, когда существует такая строго воздастающая биекция $\tau : [a, b] \leftrightarrow [c, d]$, что

$$\forall t \in [a, b] \quad z_2(\tau(t)) = z_1(t).$$

Легко видеть, что это отношение эквивалентности в классе всех параметризованных кривых (интуитивно можно считать, что две кривые эквивалентны, когда их траектории совпадают). Поэтому класс всех параметризованных кривых распадается на непересекающиеся классы эквивалентных параметризованных кривых.

Определение. *Кривыми* на комплексной плоскости называют указанные выше классы эквивалентых параметризованных кривых.

Выбор из класса всех эквивалентных кривых одного представителя называется *параметризацией* этой кривой.

Отметим, что в классе эквивалентных параметризованных кривых всегда имеется такая параметризация, у которой область определения отрезок $[0, 1]$ (лёгкое упражнение).

Определение. Кривая называется *простой* или *жордановой*, если у неё имеется параметризация, которая является инъекцией в $\mathbb{C}$. Интуитивно это означает, что зкон движения, описываемый этой параметризацией, происходит без остановок и без самопересечений траектории.

Кривая называется *непрерывной*, если у неё имеется непрерывная параметризация.

Кривая называется *спрямляемой*, если у неё имеется спрямляемая параметризация (т.е. точная верхняя грань длин вписанных ломанных конечна и эта точная верхняя грань называется длиной этой кривой).

Кривая называется *дифференцируемой* (соответственно, *класса* C^n), если у неё имеется дифференцируемая параметризация. (соответственно, *класса* C^n, т.е. $z(t) = x(t) + iy(t)$ и функции $x(t), y(t)$ непрерывно дифференцируемы n раз).

Кривая называется *гладкой*, если у неё имеется непрерывно дифференцируемая параметризация, у которой

$$\forall t \quad |z'(t)|^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0.$$

(если $z(t)$ — закон движения по плоскости, то $z'(t)$ — скорость движения в момент времени t и указанное условие означает, что скорость в каждый момент времени отлична от нуля и меняется непрерывно без резких скачков по величине и направлению, поэтому траектория не имеет углов, что соответствует интуитивному представлению о гладкости.)

7. ФормулаБоре́ля-Помпе́ю

И всякое знание, отделенное от справедливости и другой добродетели, представляется плутовством, а не мудростью.

Сократ, в диалоге Платона "Менексен".

Пусть D — область с кусочно гладкой границей ∂D и $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ — непрерывно дифференцируемая дифференциальная форма, определенная в $\overline{D}$ (т. е. $P, Q \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$), тогда, как известно, для нее справедлива формула Грина:

$$\oint\limits_{\partial D} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Предполагая $f \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$, воспользуемся этой формулой:

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)\,dz = \oint\limits_{\partial D} u\,dx - v\,dy + i\oint\limits_{\partial D} v\,dx + u\,dy =$$

$$= \iint\limits_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left(i\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdy + \iint\limits_D \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= i\iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdy - \iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$= i\iint\limits_D \frac{\partial f}{\partial x}\,dxdy - \iint\limits_D \frac{\partial f}{\partial y}\,dxdy = 2i\iint\limits_D \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = 2i\iint\limits_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,dxdy.$$

Итак, мы получили теорему:

Теорема [формула Коши-Грина]. *Если $f \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$, где D — ограниченная область с кусочно гладкой границей ∂D, то справедлива формула*

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 2i\iint\limits_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,dxdy. \tag{7.1}$$

Замечание. Если воспользоваться теорией дифференциальных форм, то последний результат получается несколько проще. Надо вспомнить, что $df(z) = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{dz}$, тогда для дифференциальной формы $\omega = f(z)\,dz$ внешний дифференциал находится по формуле

$$d\omega = d\Big(f(z)\,dz\Big) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\overline{dz}\right) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\overline{dz} \wedge dz = -\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,dz \wedge \overline{dz}.$$

Теперь, применяя формулу Стокса к этому случаю, находим

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)\,dz = -\iint\limits_{D} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,dz \wedge \overline{dz},$$

что совпадает с формулой (7.1).

Как следствие формулы (7.1) получаем следующую теорему.

Теорема [Борель-Помпéю]. *Если $f \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$, где D — ограниченная область с кусочно гладкой границей ∂D, то справедлива формула*

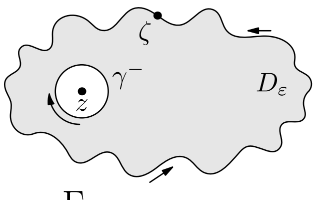
$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta - z}\,d\xi d\eta = \begin{cases} f(z), & \text{если } z \in D, \\ 0, & \text{если } z \notin \overline{D}, \end{cases} \qquad (7.2)$$

где $\zeta = \xi + i\eta$.

Доказательство. Заметим, что функция $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ голоморфна во всей комплéксной плоскости кроме точки $\zeta = z$, в которой она не определена. Значит, $\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta - z} = 0$ всюду, кроме точки $\zeta = z$. Поэтому, применяя формулу (7.1) при $z \notin \overline{D}$, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D} \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi d\eta =$$
$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D} \left[\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta - z} + f(\zeta)\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right)\right] d\xi d\eta = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta - z}\,d\xi d\eta,$$

и формула (7.2) при $z \notin \overline{D}$ доказана.



Если теперь $z \in D$ поступим следующим образом. Окружим точку z кругом малого радиуса ε целиком лежащим в D и через D_ε обозначим область, полученную выбрасыванием из D этого круга. Граница полученной области будет состоять из границы области D и отрицательно ориентированной окружности $\gamma^- = \{|\zeta - z| = \varepsilon\}^-$. К области D_ε можно применить уже полученную формулу:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta - z}\,d\xi d\eta = 0.$$

Вычислим теперь криволинейный интеграл в левой части:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Первый из интегралов справа не зависит от ε, а второй можно еще переписать так:

$$\oint\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=f(z)\oint\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon}\frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta+\oint\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta=$$
$$=2\pi i f(z)+\oint\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

В результате вычислений получаем

$$0=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\,d\xi d\eta=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\left\{\oint\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-2\pi i f(z)-\oint\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\,d\xi d\eta.$$

Окончательная формула получается предельным переходом при $\varepsilon\to 0$, если заметить, что в силу $\mathbb{R}$-дифференцируемости f:

$$f(\zeta)-f(z)=\frac{\partial f(z)}{\partial z}(\zeta-z)+\frac{\partial f(z)}{\partial\overline{z}}(\overline{\zeta-z})+o(|\zeta-z|),$$

и поэтому справедлива оценка:

$$\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right|=\left|\frac{\partial f(z)}{\partial z}+\frac{\partial f(z)}{\partial\overline{z}}\frac{(\overline{\zeta-z})}{(\zeta-z)}+o(1)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right|+\left|\frac{\partial f(z)}{\partial\overline{z}}\right|+|o(1)|\leqslant M,$$

когда $|\zeta-z|\leqslant\varepsilon$, значит, в силу ограниченности подынтегральной функции

$$\left|\oint\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|\leqslant M\oint\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon}|d\zeta|=M2\pi\varepsilon\to 0,\qquad\text{при }\varepsilon\to 0,$$

а двойной интеграл по определению сходимости несобственных двойных интегралов

$$\iint\limits_{D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z}\, d\xi d\eta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \iint\limits_{D} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z}\, d\xi d\eta.$$

так как $\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}$ непрерывна и интеграл от $\frac{1}{\zeta - z}$ сходится, а семейство областей D_ε — исчерпывающее для области D.

Теорема полностью доказана.✌

Отметим, что функция $f(z) = (z - z_0)^n$ голоморфна (т. е. $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$) и имеет непрерывную производную во всей комплéксной плоскости за исключением точки z_0 при отрицательных n. Поэтому имеем

$$\oint\limits_{\partial D} (z - z_0)^n\, dz = 0, \quad \text{когда } z_0 \notin \overline{D}.$$

Если же $z_0 \in D$, окружим ее как раньше кругом, целиком лежащим в D. К оставшейся области D_ε с границей $\partial D_\varepsilon = \partial D \cup \{|z - z_0| = \varepsilon\}^-$ можно применить формулу (7.1), откуда получаем

$$\oint\limits_{\partial D} (z - z_0)^n\, dz = \oint\limits_{|z - z_0| = \varepsilon} (z - z_0)^n\, dz = \begin{cases} 0, & \text{если } n \ne -1, \\ 2\pi i & \text{если } n = -1. \end{cases}$$

Окончательно, для любой области D можем написать формулу, являющуюся обобщением формулы (6.1).

$$\oint\limits_{\partial D} (z - z_0)^n\, dz = \begin{cases} 0, & \text{если } z_0 \notin \overline{D} \text{ или } n \ne -1, \\ 2\pi i & \text{если } z_0 \in \overline{D} \text{ и } n = -1. \end{cases} \tag{7.3}$$

Из формул (7.1) и (7.2) при дополнительном предположении голоморфности функции в области, как простое следствие получаются соответственно следующие две формулы:

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)\, dz = 0, \qquad \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} 0, & \text{если } z \notin \overline{D}, \\ f(z), & \text{если } z \in D. \end{cases}$$

Первое равенство называют теоремой Коши, второе — интегральной формулой Коши. К сожалению, они получены нами при предположении не только голоморфности функции, но и непрерывности производной в D. На самом деле эту непрерывность можно доказать. Но оказывается проще непосредственно доказать эти формулы, а уже из них получать как следствие непрерывность производных и, более того, возможность разложения f в сходящийся степенной ряд в окрестности любой точки из D, откуда следует бесконечная дифференцируемость f в области D.

Замечание. Отметим, что формула Грина (как и более общая формула Стокса) для действительных функций остается справедливой и для областей с "разрезами", если дифференциальная форма непрерывна вплоть до границы, а ее дифференциал непрерывен в D, поэтому формулы Коши-Грина и Бореля-Помпею остаются справедливыми для кусочно-гладких областей D с разрезами, если функция f непрерывна вплоть до границы D и имеет непрерывные в D производные.

8. Теорема Коши

Пифагор, чтобы принести жертву богам по случаю открытия своей теоремы, приказал заколоть сто быков. С тех пор все скоты не любят математику.

(Математический фольклор)

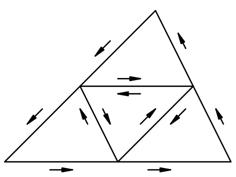
В доказательстве теоремы Коши при предположении только голоморфности функции $f(z)$ главную роль будет играть следующая лемма.

Лемма. [Э. Гурса́] *Пусть f голоморфна в односвязной области D. Тогда для любого треугольника Δ, целиком лежащего в D имеем*

$$\oint\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть

$$\left|\oint\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| = M \neq 0.$$



Разделим треугольник Δ средними линиями на четыре равных треугольника, которые обозначим через Δ_k^1, $k = 1, 2, 3, 4$. Легко видеть, что

$$M = \left|\oint\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| = \left|\sum_{k=1}^{4}\oint\limits_{\partial\Delta_k^1} f(z)\,dz\right| \leqslant \sum_{k=1}^{4}\left|\oint\limits_{\partial\Delta_k^1} f(z)\,dz\right|,$$

поэтому найдется такой треугольник $\Delta_{k_0}^1 = \Delta^1$, у которого $\left|\oint\limits_{\partial\Delta^1} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{M}{4}$. С полученным треугольником Δ^1 поступим аналогично. Разделим его средними линиями на четыре треугольника Δ_k^2, $k = 1, 2, 3, 4$. Точно так же, найдется треугольник $\Delta_{k_0}^2 = \Delta^2$, у которого $\Bigl|\oint\limits_{\partial\Delta^2} f(z)\,dz\Bigr| \geqslant \frac{M}{4^2}$. Продолжая, получим последовательность вложенных треугольников Δ^n, которые замкнуты как множества, и диаметр которых стремится к нулю при $n \to \infty$ и при этом

$$\Bigl|\oint\limits_{\partial\Delta^n} f(z)\,dz\Bigr| \geqslant \frac{M}{4^n}.$$

По теореме Больцано-Вейерштрасса они имеют общую точку, скажем, $z_0 \in D$. Взяв достаточно малую окрестность $U_\varepsilon(z_0)$ точки z_0, $U_\varepsilon(z_0) \subset D$, найдем такое N, чтобы для $n > N$ треугольники Δ^n попали внутрь $U_\varepsilon(z_0)$. Так как подынтегральная функция дифференцируема в этой окрестности

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| = o(|z - z_0|) \leqslant C\varepsilon|z - z_0|,$$

а в силу равенств (7.3)

$$\oint\limits_{\partial\Delta^n} \Bigl(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\Bigr)\,dz = 0.$$

Поэтому интеграл по границе треугольника Δ^n оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned}\Bigl|\oint\limits_{\partial\Delta^n} f(z)\,dz\Bigr| &= \Bigl|\oint\limits_{\partial\Delta^n} \Bigl(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\Bigr)\,dz\Bigr| \\ &\leqslant \oint\limits_{\partial\Delta^n} C\varepsilon|z - z_0|\,|dz| \leqslant C\varepsilon p_n^2,\end{aligned}$$

где p_n — периметр треугольника Δ^n, который, очевидно, равен $\frac{P}{2^n}$, где P — периметр исходного треугольника. Значит,

$$\Bigl|\oint\limits_{\partial\Delta^n} f(z)\,dz\Bigr| \leqslant \varepsilon\frac{CP^2}{4^n}.$$

Отсюда находим, $\frac{M}{4^n} \leqslant \varepsilon\frac{CP^2}{4^n}$. В силу произвольности ε, получаем $M = 0$, что противоречит предположению.

Теорема доказана.✌

Из леммы Гурса вытекают два простых следствия.

Следствие. *Если $f(z)$ голоморфна в односвязной области D, то интеграл по любой замкнутой ломаной L, лежащей в D, равен нулю.*

Следствие. *Если $f(z)$ голоморфна в односвязной области D, то интегралы по любым двум ломаным L_1 и L_2, лежащим в D и соединяющим точки $z_0, z \in D$, равны.*

Определение. *Первообра́зной* функции $f(z)$ в области D называется такая функция $F(z)$, что:

1. F — непрерывна в области D,
2. Для всех, кроме конечного числа точек $z \in D \quad F'(z) = f(z)$.

Теорема. *Если $f(z)$ голоморфна в односвязной области D, то она имеет в этой области первообра́зную.*

Доказательство. Фиксируем произвольную точку z_0 из D и по определению положим

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta,$$

где интеграл берется по любой ломаной L, соединяющей z_0 и z. Согласно следствию 2, функция $F(z)$ корректно определена во всей области D, так как ее значение в точке z не зависит от ломаной L и любую точку z в связной области можно соединить ломаной с точкой z_0.

Покажем, что $F'(z) = f(z)$. Для этого надо доказать, что

$$|F(z + \Delta z) - F(z) - f(z)\Delta z| = o(|\Delta z|).$$

Выберем круг $U_\delta(z)$ с центром в точке z радиуса δ целиком лежащий в D так, чтобы $\forall \zeta \in U_\delta(z)\ |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ и будем брать $|\Delta z| < \delta$. Тогда, в силу независимости интеграла от ломаной и равенства $\int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\zeta = \Delta z$, имеем

$$F(z + \Delta z) - F(z) - f(z)\Delta z = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta - f(z)\Delta z =$$
$$= \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\, d\zeta - f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} \big(f(\zeta) - f(z)\big)\, d\zeta.$$

Полученный интеграл легко оценивается:

$$\left|\int_z^{z+\Delta z}\big(f(\zeta)-f(z)\big)\,d\zeta\right| \leqslant \int_z^{z+\Delta z} |f(\zeta)-f(z)|\,|d\zeta| \leqslant \varepsilon|\Delta z|,$$

что и требовалось доказать.✌

Теорема. *Пусть функция f имеет в области D первообразную F. Тогда для любой кривой L в области D с началом в точке z_1 и концом в точке z_2 имеем*

$$\int_L f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1).$$

(*опять получаем, что интеграл не зависит от кривой*).

Доказательство. Пусть $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, — параметризация (кусочно-гладкой) кривой γ. Используя вычислительную формулу для интеграла и то, что $F'(z) = f(z)$ получаем

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta F'\big(z(t)\big)z'(t)\,dt =$$
$$= \int_\alpha^\beta \big(F(z(t))\big)'\,dt = F(z(t))\Big|_\alpha^\beta = F(z_2) - F(z_1)$$

Что и требовалось доказать.✌

Другое доказательство. Рассматривая функцию $F(z)$ как 0-форму в области D, вычислим ее внешний дифференциал $dF(z)$:

$$dF(z) = \frac{\partial F}{\partial z}\,dz + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z} = F'(z)\,dz = f(z)\,dz.$$

Значит, $F(z)$ — непрерывно дифференцируемая форма и поэтому к ней можно применить формулу Стокса:

$$\int_{\partial L} F(z) = \int_L f(z)\,dz.$$

Отметим, что кривая L — это одномерный сингулярный куб, а его границей является нульмерная цепь $\partial L = \{z_2\} - \{z_1\}$ и по определению $\int\limits_{\partial L} F(z) = F(z_2) - F(z_1)$.

Теорема [Коши]. *Пусть D — односвязная область и $f(z)$ — голоморфная в D функция. Тогда для любой замкнутой (спрямляемой) кривой L, лежащей в D,*

$$\oint\limits_L f(z)\,dz = 0. \tag{8.1}$$

Сформулированную теорему можно считать тривиальным следствием предыдущей, так как в этом случае можно считать, что начальная и конечная точка кривой совпадают, поэтому

$$\oint\limits_L f(z)\,dz = F(z_0) - F(z_0) = 0.$$

Но лучше отметить, что замкнутая кривая является циклом, т. е. $\partial L = 0$, а интеграл по нулевой цепи равен нулю, поэтому теорема получается как следствие теоремы Стокса:

$$0 = \int_{\partial L=0} F(z) = \oint\limits_L dF(z) = \oint\limits_L f(z)\,dz.$$

Отметим, что поскольку теорема Стокса справедлива для любой сингулярной цепи, кривая L в теореме Коши не обязана быть жордановой и может иметь самопересечения и даже складки.

Пусть f голоморфна в замыкании $\overline{D}$ области D. Тогда по определению голоморфности в точке, для любой точки z границы ∂D найдется открытая окрестность $U(z)$, в которой f голоморфна. Объединение $D \cup \bigcup\limits_{z\in\partial D} U(z)$ является областью, которая содержит исходную область D и в которой функция f все еще голоморфна. Это рассуждение позволяет сформулировать следующую теорему.

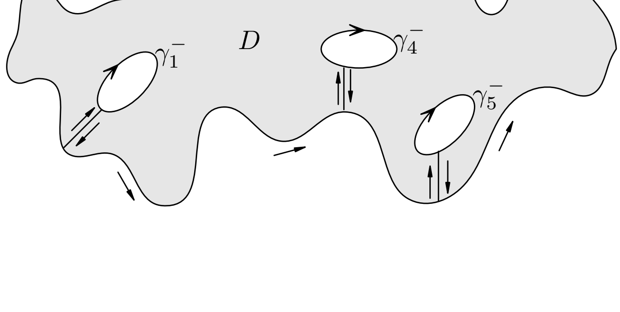
Теорема [Коши]. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в замыкании $\overline{D}$ области D, где область D многосвязна и ее граница*

$$\partial D = \Gamma \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} \gamma_k^-,$$

(*в этом случае говорят, что область D n-связна*) *тогда*

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)\,dz = \oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n-1} \oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0. \qquad (8.2)$$

Доказательство. Соединим внешнюю границу Γ области D разрезами с внутренними частями границы γ_k.



Получится односвязная область, в замыкании которой функция f голоморфна. Как и раньше, дифференциальная форма $f(z)\,dz$ точна в этой области. Применяя формулу Стокса к первообразной и учитывая, что разрезы при обходе по границе, проходятся дважды в противоположных направлениях и интегралы по разрезам исчезают, получаем требуемое.✌

9. Интегральная формула Коши

Если бы люди больше осознавали, каким строгим универсальным законам подчиняются даже самые дикие и произвольные фантазии.
Карл Густав Юнг (1875–1961).

Следующая теорема, как мы увидим, имеет огромное число применений во всей дальнейшей теории. А получается она из теоремы Коши точно так же как формула Бореля-Помпéю из формулы Коши–Грина.

Теорема [интегральная формула Коши]. *Если функция $f(z)$ голоморфна в замыкании $\overline{D}$ конечно-связной области D, тогда имеет место формула*:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \begin{cases} f(z), & \text{если } z \in D,\\ 0, & \text{если } z \notin \overline{D}. \end{cases} \tag{8.3}$$

Доказательство. Поскольку функция $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ голоморфна во всей компле́ксной плоскости кроме точки $\zeta = z$, применим формулу (8.2) к голоморфной по ζ функции $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ при $z \notin D$, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0,$$

и формула (8.3) при $z \notin D$ доказана.✌

Если $z \in D$, окружим точку z кругом малого радиуса ε целиком лежащим в D и через D_ε обозначим область, полученную выбрасыванием из D этого круга. Граница полученной области D_ε будет состоять из границы области D и отрицательно ориентированной окружности $\{|\zeta - z| = \varepsilon\}^-$. К области D_ε можно применить уже полученную формулу:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Первый из интегралов справа не зависит от ε, а второй переписывается в виде:

$$\oint\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \oint\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta + \oint\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

$$= 2\pi i f(z) + \oint\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

В результате вычислений получаем

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) + \oint\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right\}.$$

Окончательная формула получается предельным переходом при $\varepsilon \to 0$, если заметить, что в силу голоморфности f

$$f(\zeta) - f(z) = f'(z)(\zeta - z) + o(\zeta - z),$$

и поэтому справедлива оценка:

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| = |f'(z)| + |O(\zeta - z)| \leqslant M,$$

когда $|\zeta - z| \leqslant \varepsilon$, значит, в силу ограниченности подынтегральной функции

$$\left| \oint\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leqslant M \oint\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon} |d\zeta| = M 2\pi\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Теорема полностью доказана.

Следствие. *Отметим, что две последние теоремы остаются справедливыми при менее жестких ограничениях на поведение функции f в области D, а именно, достаточно потребовать её голоморфности в D и непрерывности вплоть до границы, что существенно слабее голоморфности в замыкании $\overline{D}$ области D* (см. Замечание 7.4.).

Следствия из интегральной формулы Коши

Безумец отличается от математика не столько своими ошибками, сколько своей неспособностью извлекать из них уроки.

Л. Янг [20, с. 108]

Одним из самых простых следствий из интегральной формулы Коши является

Теорема [о среднем значении]. *Если функция f голоморфна в круге $U_R(z_0) = \{z : |z - z_0| < R\}$ и непрерывна в его замыкании, то справедлива формула*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint\limits_{|z-z_0|=R} f(z)\,|dz| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\,dt. \tag{9.1}$$

(*Иными словами, значение функции в центре круга равно среднему от значений функции на его границе*)

Доказательство. Применяя к функции f в заданном круге интегральную формулу Коши, получим

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta-z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta = *$$

Параметризуем окружность уравнением $\zeta = z_0 + Re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ и применим вычислительную формулу к последнему интегралу:

$$* = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{Re^{it}} iRe^{it}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\,dt.$$

Аналогично вычисляем средний интеграл в равенствах (9.1):

$$\frac{1}{2\pi R} \oint\limits_{|z-z_0|=R} f(z)\,|dz| = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{it})|iRe^{it}|\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{it})\,dt.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема [принцип максимума модуля]. *Модуль голоморфной в области D функции не равной тождественно константе, не может принимать максимального значения внутри области.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть функция f принимает максимальное значение в точке $z_0 \in D$, т. е.

$$\max_{z\in D}|f(z)| = M = |f(z_0)|.$$

Поскольку D — открытое множество, точка z_0 — внутренняя, значит, имеется окрестность $U_\delta(z_0)$, лежащая в D вместе с границей $\gamma = \{z : |z - z_0| = \delta\}$. По теореме о среднем

$$M = |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi\delta}\left|\oint\limits_\gamma f(z)\,|dz|\right| \leqslant \frac{1}{2\pi\delta}\oint\limits_\gamma |f(z)|\,|dz|. \tag{9.2}$$

Легко видеть, что если подынтегральная функция $|f(z)|$ строго меньше M хотя бы в одной точке окружности γ, то и весь интеграл справа в (9.2) строго меньше M.[13] Поэтому, чтобы имело место равенство, функция $|f(z)|$ обязана быть равна M на всей окружности γ. Поскольку те же самые рассуждения годятся для любой меньшей окружности, получаем, что $|f(z)| = M$ всюду в окрестности $U_\delta(z_0)$.

Покажем теперь, что в этом случае $|f(z)|{=}M$ всюду в области D. Для этого обозначим через O_1 множество всех точек z, где $|f(z)|{=}M$. По доказанному каждая такая точка принадлежит O_1 вместе с некоторой окрестностью, значит, O_1 — открыто.

Пусть O_2 — все оставшиеся точки из D. То есть $O_2{=}\{z{:}|f(z)|{<}M\}$. В силу непрерывности функции $z \mapsto |f(z)|$ это множество тоже открыто (как прообраз открытого множества $\{\rho : \rho < M\}$).

Очевидно, $O_1 \cap O_2 \cap D = \varnothing$, $O_1 \cup O_2 \supset D$, если они оба непусты, то D — несвязно?! Так как по предположению $O_1 \neq \varnothing$, пустым должно быть O_2, что и требовалось доказать. ✌

Итак, исходя из предположения, что $|f(z_0)| = M$ во внутренней точке z_0 области D, мы получили, что она постоянна в области D, что противоречит условиям теоремы.

Чтобы получить дальнейшие следствия интегральной формулы Коши, рассмотрим ситуацию немного более общую чем в этой формуле.

Определение. Пусть функция φ непрерывна на спрямляемой жордановой кривой γ, тогда для любых $z \notin \gamma$ определен интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{9.3}$$

Он называется *интегралом Коши* функции φ.

[13] если $|f(z_1)| < M - \varepsilon$, то, в силу непрерывности $|f(z)| < M - \varepsilon/2$ в некоторой окрестности $U_\sigma(z_1)$ и, значит, на некоторой дуге длины $> 2\sigma$ и для интеграла справедлива оценка $\frac{1}{2\pi\delta}\oint_\gamma |f(z)|\,|dz| < \frac{1}{2\pi\delta}\big(M(2\pi\delta - 2\sigma) + (M - \varepsilon/2)2\sigma\big) < M$

Теорема [об интеграле Коши]. *Пусть функция φ определена и непрерывна на спрямляемой жордановой кривой γ (не обязательно замкнутой). Тогда интеграл Коши (9.3) является голоморфной функцией в каждой точке $z \notin \gamma$. Более того, у функции $F(z)$ существует производная любого порядка и её можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла*:

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta. \tag{9.4}$$

Доказательство. Для доказательства голоморфности достаточно показать, что

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right| \xrightarrow[\Delta z\to 0]{} 0$$

при $z \in D$. Для этого выберем окрестность $U_\varepsilon(z)$ не пересекающуюся с кривой γ. Тогда при $|\Delta z| < \frac{\varepsilon}{2}$ для любых $\zeta \in \gamma$ будем иметь $|\zeta - z| > \varepsilon$ и $|\zeta - z - \Delta z| > \frac{\varepsilon}{2}$. Простое вычисление показывает, что

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\Delta z}\int_\gamma \varphi(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{1}{\zeta - z}\right)d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\Delta z}\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)\cdot\Delta z}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)}\,d\zeta.$$

Используя это равенство находим

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(\zeta)\left(\frac{1}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2}\right)d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \left|\frac{\varphi(\zeta)\cdot\Delta z}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)^2}\right|\,|d\zeta| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{M|\Delta z|}{\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon^2}\int_\gamma |d\zeta| \xrightarrow[\Delta z\to 0]{} 0,$$

где M — максимум функции $\varphi(\zeta)$ на кривой γ. И голоморфность функции $F(z)$ доказана. Кроме того, доказано, что первая производная вычисляется дифференцированием под знаком интеграла. Общая формула (9.4) доказывается по индукции и её доказательство остается для самостоятельной работы в качестве упражнения. ✌

Следствие. *Если f голоморфна в области D, то она бесконечно дифференцируема и её производные в точке z можно считать по формуле*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{9.5}$$

где γ — произвольная замкнутая спрямляемая жорданова кривая, лежащая в D и охватывающая точку z. Если, кроме того, f непрерывна в замыкании области D, то в качестве кривой γ можно брать границу ∂D области D.

В частности, из этого следствия вытекает непрерывность производной голоморфной функции, о которой мы упоминали ранее. Более того, очевидно, непрерывны все производные в области голоморфности.

Теорема [Жозеф Лиувилль]. *Если функция голоморфна во всей комплéксной плоскости и ограничена, то она постоянна.*

Доказательство. Предположим, $|f(z)| \leqslant M$ для всех z. Возьмем произвольную точку $z \in \mathbb{C}$. Тогда, по предыдущему следствию, для любого $R > 0$

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \right| \leqslant \frac{M}{2\pi R^2} \oint\limits_{|\zeta - z| = R} |d\zeta| = \frac{M}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Откуда видим, что $f'(z) = 0$, значит, $f(z) \equiv \mathrm{const}$.

Что и требовалось доказать. ✌

Следующая интересная теорема носит название “лемма Шварца”, поскольку у самого Шварца она имела вспомогательный характер.

Теорема [лемма Шварца К.Г.А.]. *Если функция f голоморфна в единичном круге $U_1(0) = \{z : |z| < 1\}$ и удовлетворяет условиям:*

$$f(0) = 0, \tag{1}$$
$$|f(z)| < 1, \quad (\textit{при } |z| < 1) \tag{2}$$

то в этом круге

$$|f(z)| \leqslant |z|, \tag{3}$$
$$|f'(0)| \leqslant 1, \tag{4}$$

При этом, если равенство $|f(z)| = |z|$ имеет место хотя бы в одной точке $z_0 \neq 0$, $|z_0| < 1$, или $|f'(0)| = 1$, то существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что всюду в рассматриваемом круге $f(z) = e^{i\alpha} z$.

Доказательство. По интегральной формуле Коши при $\varepsilon < 1$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{и} \quad f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta}$$

Вычитая из первого равенства второе, и учитывая, что по условию $f(0)=0$, получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=\varepsilon} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right) f(\zeta)\,d\zeta = \frac{z}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}$$

Отсюда по теореме об интеграле Коши видим, что

$$F(z) = \frac{f(z)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}$$

голоморфна в круге $|z| < \varepsilon < 1$, причём

$$F(0) = f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=\varepsilon} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^2}$$

Из принципа максимума модуля вытекает, что максимум функции $|F(z)|$ при $|z| \leqslant \varepsilon < 1$ достигается на окружности $|z| = \varepsilon$.

Следовательно, учитывая, что у нас $|f(z)| < 1$, видим, что

$$|F(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{\varepsilon}.$$

В пределе при $\varepsilon \to 1 - 0$ отсюда получаем

$$|F(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant 1 \quad \text{или} \quad |f(z)| \leqslant |z|$$

для $|z| < 1$, и поэтому $F(0) = |f'(0)| = \lim\limits_{z\to 0}\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant 1$.

Если в некоторой точке $z_0 \neq 0$, $|z_0| < 1$, имеет место равенство $|f(z_0)| = |z_0|$, то, как следует из принципа максимума модуля, $F(z)$ постоянна в круге $|z| \leqslant 1$.

При наличии равенства $|F(0)| = |f'(0)| = 1$, аналогично получаем, что $F(z) = \text{const}$.

Очевидно, в обоих этих случаях $|F(z)| = 1$, т. е. $F(z) = e^{i\alpha}$ и, значит, $f(z) = e^{i\alpha} z$.

Теорема полностью доказана.✌

Теорема [Джачи́нто Море́ра]. *Если функция f непрерывна в области D и интеграл от нее по любому замкнутому контуру $\gamma \subset D$ равен нулю, то f голоморфна в области D.*

Доказательство. Очевидно, при условиях теоремы интеграл по любой кривой не зависит от этой кривой, а зависит только от начальной и конечной точек. Поэтому, при фиксированной точке $z_0 \in D$ корректно определена функция

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Простая оценка показывает, что эта функция является первообра́зной для функции f (ср. доказательство теоремы о существовании первообразной у голоморфной функции)

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\Big(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta\Big) - f(z) =$$
$$\frac{1}{\Delta z}\Big(\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\, d\zeta\Big) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \big(f(\zeta) - f(z)\big)\, d\zeta.$$

Оставшееся выражение оценивается так:

$$\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \Big(f(\zeta) - f(z)\Big)\, d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)|\, |d\zeta| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\zeta \in [z, z+\Delta z]} |f(\zeta) - f(z)| \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0.$$

Значит, F— голоморфна. Но, по следствию из теоремы об интеграле Коши, у голоморфной функции все производные тоже голоморфны, поэтому голоморфна $f(z) = F'(z)$.✌

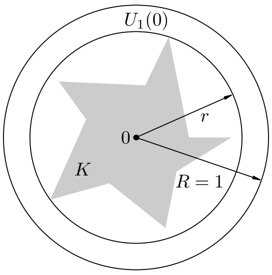
10. Теоремы Вейерштрасса о рядах

> ...в математике истинный смысл теоремы до конца раскрывается лишь в ходе её доказательства, и если найдется такой болван, который будет заучивать только формулировки теорем игнорируя доказательства, — он будет тратить время впустую.
>
> Л. Янг [20, с. 237]

В дальнейшем будут часто использоваться две теоремы Вейерштрасса о рядах. Но сначала одно определение.

Определение. Будем говорить, что функциональный ряд *компактно сходится на множестве* D, если для любого компактного подмножества $K \Subset D$ ряд $\sum\limits_k^\infty \varphi_k(z)$ сходится равномерно на этом компакте (Топологи в этом случае говорят более длинно: "ряд сходится в топологии равномерной сходимости на каждом компакте из D". А во многих русских учебниках по ТФКП эту сходимость называют "равномерной сходимостью *внутри* области D").

$$`\sum_k^\infty \varphi_k \text{ компактно сходится в } D \Leftrightarrow \quad \forall K \Subset D \quad \sum_k^\infty \varphi_k \overset{K}{\rightrightarrows} .$$



Отметим, что компактно сходящийся в области ряд не обязан равномерно сходиться в этой области. Например, ряд $\sum\limits_k^\infty z^k$ в круге $U_1(0)=\{z : |z|<1\}$ сходится компактно, но не равномерно. В самом деле, если $K \Subset U_1(0)$, то расстояние от K до границы круга строго больше нуля, поэтому найдется круг радиуса r строго меньше 1, содержащий K. А в этом круге ряд $\sum z^k$ сходится равномерно (так как мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum r^k$).

Неравномерная сходимость в круге $U_1(0)$ очевидна, так как $\sup\limits_{z\in U_1(0)} |z^n| = 1 \not\to 0$ при $n \to \infty$.

10.1. Упражнение. Для того чтобы ряд $\sum\limits_k^\infty \varphi_k(z)$ компактно сходился в области D, необходимо и достаточно, чтобы каждая точка области обладала окрестностью, где ряд сходится равномерно.

Теорема [Карл Вейерштрасс]. *Пусть функции $\varphi_n \in \mathcal{O}(D)$ для каждого n и ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty \varphi_k$ сходится компактно в D. Тогда сумма ряда $S(z)$ —*

голоморфная в D функция и её производные можно вычислять почленным дифференцированием ряда. Получающиеся при этом ряды

$$S^{(n)}(z) = \sum_k^{\infty} \varphi_k^{(n)}(z), \tag{10.1}$$

сходятся компактно в D.

Доказательство. Пусть z_0 — произвольная точка из D. Покажем, что сумма ряда голоморфна в этой точке. Для этого окружим её кругом $U = U_d(z_0)$, лежащим в D вместе с границей ∂U. Если теперь взять произвольную замкнутую жорданову спрямляемую кривую γ в этом круге, то в силу её компактности, ряд $\sum\limits_k^{\infty} \varphi_k(z)$ сходится на ней равномерно, поэтому его можно интегрировать почленно. Следовательно,

$$\oint\limits_{\gamma} S(\zeta)\, d\zeta = \oint\limits_{\gamma} \sum_k^{\infty} \varphi_k(\zeta)\, d\zeta = \sum_k^{\infty} \oint\limits_{\gamma} \varphi_k(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

(По теореме Коши равны 0 интегралы от каждого слагаемого.) По теореме Мореры сумма ряда S — голоморфная функция.

Чтобы доказать формулу (10.1), опять проинтегрируем почленно равномерно по ζ из ∂U сходящийся ряд $\sum\limits_k^{\infty} \frac{\varphi_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}$ (при фиксированном $z \in U$):

$$S^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\partial U} \frac{S(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\partial U} \sum_k^{\infty} \frac{\varphi_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta =$$
$$= \sum_k^{\infty} \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\partial U} \frac{\varphi_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta = \sum_k^{\infty} \varphi_k^{(n)}(z).$$

Остается доказать компактную сходимость ряда $\sum\limits_k^{\infty} \varphi_k^{(n)}(z)$. Для этого достаточно показать, что каждая точка области обладает окрестностью, в которой ряд сходится равномерно.

Пусть опять $z_0 \in D$ и $U = U_d(z_0)$ — окрестность, лежащая в D вместе с границей. Покажем, что ряд равномерно сходится в окрестности V с радиусом в два раза меньшим. Для этого заметим, что для любой точки $z \in V$ и $\zeta \in \partial U$, имеем $|\zeta - z| \geqslant d/2$, поэтому

$$\sup_{z\in V}\left|\sum_{k=N+1}^{N+p}\varphi_k^{(n)}(z)\right| = \sup_{z\in V}\left|\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\partial U}\frac{\sum\limits_{k=N+1}^{N+p}\varphi_k(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{n!}{2\pi}\oint\limits_{\partial U}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^{n+1}}\right)\sup_{z\in\partial U}\left|\sum_{k=N+1}^{N+p}\varphi_k(z)\right| \leqslant \frac{n!}{(d/2)^n}\sup_{z\in\partial U}\left|\sum_{k=N+1}^{N+p}\varphi_k(z)\right|.$$

Последнее выражение можно сделать произвольно малым в силу равномерной сходимости ряда $\sum_k^\infty \varphi_k(z)$ на ∂U.

Теорема полностью доказана.✌

Теорема [Карл Вейерштрасс]. *Если ряд голоморфных в области D функций $\sum\limits_k^\infty \varphi_k(z)$ равномерно сходится на границе этой области ∂D, то он сходится равномерно во всей области D.*

Эта теорема является простым следствием принципа максимума модуля голоморфной функции:

$$\sup_{z\in D}\left|\sum_{k=N+1}^{N+p}\varphi_k(z)\right| = \sup_{z\in\partial D}\left|\sum_{k=N+1}^{N+p}\varphi_k(z)\right|.$$

Последнее выражение можно сделать произвольно малым в силу равномерной сходимости ряда $\sum_k^\infty \varphi_k(z)$ на ∂D.✌

11. Теорема Тэйлора и её следствия

Все с легкостью жалуются на свою память,
но никто не жалуется на свой ум.
Франсуа де Ларошфуко

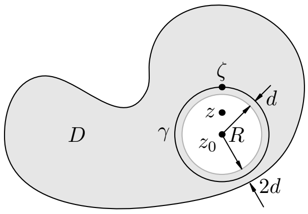
Теорема [Брук Тэйлор]. *Пусть $f \in \mathcal{O}(D)$ и круг $U = U_R(z_0) = \{z : |z-z_0| < R\}$ вместе с границей ∂U лежит в области D. Тогда функцию f можно разложить в этом круге в равномерно сходящийся степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \tag{11.1}$$

где коэффициенты c_n вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \qquad (11.2)$$

Разложение в степенной ряд единственно.



Доказательство. Поскольку круг лежит в области D вместе с границей, расстояние от этого круга до границы области строго больше нуля:

$$\rho(\partial U, \partial D) = 2d > 0$$

Обозначим через $\gamma = \{\zeta : |\zeta - z_0| = R + d\}$ и для $z \in \overline{U}$ применим к функции f интегральную формулу Коши, после чего немного преобразуем знаменатель подынтегрального выражения:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)\Bigl(1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Bigr)}\, d\zeta. \qquad (11.3)$$

Теперь, заметим, что при сделанных предположениях для всех $\zeta \in \gamma$ имеет место неравенство $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| \leqslant \frac{R}{R+d} < 1$. Поэтому можем написать

$$\frac{1}{\Bigl(1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Bigr)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Bigr)^n,$$

и ряд справа сходится равномерно по $\zeta \in \gamma$, так как мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \bigl(\frac{R}{R+d}\bigr)^n$.

Подставив полученное выражение в равенство (11.3) и проинтегрировав почленно, получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Bigr)^n d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\Bigr) \cdot (z - z_0)^n.$$

При этом общий член ряда при всех $z \in U$ допускает равномерную оценку:

$$\left|\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\right)\cdot(z-z_0)^n\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{MR^n}{(R+d)^{n+1}}\oint\limits_{\gamma}|d\zeta|=M\Big(\frac{R}{R+d}\Big)^n,$$

где через M мы обозначили максимум непрерывной функции f на кривой γ и учли равенство $\oint_\gamma |d\zeta| = 2\pi(R+d)$. Значит, полученный ряд сходится равномерно в U.

Для доказательства единственности разложения, заметим, что если имеется какое-либо представление $f(z)=\sum_0^\infty c_n(z-z_0)^n$, то коэффициенты c_n вычисляются дифференцированием:

$$n!c_n = f^{(n)}(z)\Big|_{z=z_0}$$

Отсюда единственность.

Теорема полностью доказана.✌

Отметим, что интегральная формула (11.2) для практического вычисления коэффициентов разложения в ряд Тэйлора, как правило, не применяется из-за трудности вычисления интегралов. Чаще всего их вычисляют либо дифференцированием, либо используя следующие семь известных разложений:

$$e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots+\frac{z^n}{n!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1!}$$

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\dots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sh} z = z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1!}$$

$$\operatorname{ch} z = 1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\dots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

$$(1+z)^\alpha = 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\dots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\dots+=\sum_{n=0}^{\infty}C_\alpha^n z^n$$

$$\log(1+z) = z - \frac{z}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + \cdots + = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}.$$

(Для пяти первых разложений область сходимости вся компле́ксная плоскость, для последнего — единичный круг, для предпоследнего — в зависимости от α от всей плоскости, до единичного круга.)

Следствия формулы Тэйлора

А может, лучшая победа
Над временем и тяготеньем —
Пройти, чтоб не оставить следа,
Пройти, чтоб не оставить тени...

М. Цветаева. Прокрасться...

Теорема [Неравенства Коши]. *Если функция f голоморфна в круге $U_R(z_0)$ и непрерывна на его границе, то коэффициенты ряда Тэйлора допускают оценку*

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{R^n},$$

где $M = \max\limits_{|z-z_0|=R} |f(z)|$.

Доказательство. При предположениях теоремы оценку модуля коэффициентов можно делать исходя из интегральной формулы (11.2)

$$|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta-z_0|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\right| \leqslant \frac{M}{2\pi R^{n+1}}\oint\limits_{|\zeta-z_0|=R}|d\zeta| = \frac{M}{R^n}.$$

Что и требовалось доказать.✌

Отметим, что доказанную ранее теорему Лиувилля, можно получить еще как следствие неравенств Коши. В самом деле, если функция f голоморфна во всей плоскости, то для вычисления её коэффициентов Тэйлора можно брать круг с центром, скажем, в нуле и произвольного радиуса R. Если она еще и ограничена, то оценка (при $R \to \infty$)

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{R^n},$$

показывает, что все коэффициенты c_n при $n > 0$ равны нулю и, значит, функция f — тождественная константа.

Простым следствием теоремы Лиувилля является “основная теорема алгебры”:

Теорема. *Всякий многочлен степени* > 0 *над полем компле́ксных чисел имеет по крайней мере один корень.*

Доказательство. Пусть $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n$ — многочлен степени $n > 0$. Предположим, уравнение $P(z) = 0$ не имеет корней, тогда, поскольку $P(z)$ можно переписать в виде

$$P(z) = z^n\Big(1 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}\Big),$$

видим, что $P(z) \to \infty$ при $z \to \infty$. Поэтому функция $g(z) = 1/P(z)$ голоморфна во всей плоскости и ограничена (голоморфна потому, что знаменатель голоморфная функция нигде не равная нулю по предположению, а ограниченная потому, что $g(z) \to 0$ при $z \to \infty$, следовательно, найдется круг $U_R(0)$ вне которого $|g(z)| < 1$, а внутри круга $g(z)$ ограничена, как непрерывная функция по теореме Вейерштрасса). По теореме Лиувилля функция g постоянна (конечно, $P(z)$ тоже), что противоречит тому, что степень P строго больше нуля.

Противоречие доказывает теорему.✌

Вообще, в теории функций принято решения уравнения $f(z) = 0$ называть *нулями* функции f, а не корнями. Если z_0 — нуль голоморфной функции f, то её разложение в ряд Тэйлора в некоторой окрестности z_0 должно иметь коэффициент $c_0 = 0$, так как, очевидно, $f(z_0) = c_0$. Могут быть равны нулю и несколько следующих коэффициентов, поэтому, если c_n — первый отличный от нуля коэффициент, то разложение в ряд Тэйлора должно иметь вид:

$$f(z) = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots = \\ (z - z_0)^n\big(c_n + c_{n+1}(z - z_0) + \dots\big) = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

где $\varphi(z_0) \neq 0$.

Определение. Если z_0 — нуль голоморфной функции, то номер n первого коэффициента $c_n \neq 0$ называется *порядком нуля* z_0 (или кратностью).

Из следующей теоремы и теоремы Тэйлора вытекает, что отличная от тождественного нуля в области D голоморфная функция не может иметь нуль бесконечной кратности (доказать самим).

Теорема. *Пусть* N *— множество нулей голоморфной в* D *функции* f*. Если это множество имеет предельную точку* z_0*, принадлежащую* D*, то* f *тождественно равна нулю в области* D*.*

Доказательство. Так как точка z_0 принадлежит области D вместе с некоторой окрестностью, скажем, $U = U_\varepsilon(z_0)$, в силу голоморфности функции f мы можем представить её в этой окрестности в виде суммы ряда Тэйлора

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + \cdots = \sum_0^\infty c_n z^n.$$

Выберем из множества нулей N последовательность $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n \in \overset{\circ}{U}$, сходящуюся к z_0 ($z_n \neq z_0$, так как z_n берутся из проколотой окрестности). Тогда для любого n имеем, $f(z_n) = 0$ и в силу допустимости почленного перехода к пределу в степенном ряде, получим

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty}(c_0 + c_1(z_n - z_0) + c_2(z_n - z_0)^2 + c_3(z_n - z_0)^3 + \cdots) = c_0.$$

Значит, $c_0 = 0$ и в окрестности U имеет место равенство

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)} = c_1 + c_2(z - z_0) + c_3(z - z_0)^2 + \cdots$$

Опять, подставляя z_n вместо z, слева будем иметь нуль (так как $f(z_n) = 0$, а $(z_n - z_0) \neq 0$), а справа, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $c_1 = 0$ и, значит, в окрестности U имеет место равенство

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^2} = c_2 + c_3(z - z_0) + c_4(z - z_0)^2 + \cdots$$

Продолжая, точно так же видим, что все коэффициенты $c_n = 0$, значит, функция f равна нулю в окрестности U. Чтобы теперь доказать, что f равна нулю в любой другой точке z области D, соединим её с точкой z_0 ломаной L, лежащей в D. Как и в принципе максимума модуля, разобьем ломаную на конечное число звеньев точками, расстояние между которыми меньше расстояния от ломаной L до границы области ∂D и нарисуем круги радиуса равного длине звена ломаной. Заметим, что центр каждого следующего круга — предельная точка предыдущего круга, который, по доказанному, является множеством нулей функции f. Поэтому $f(z)$ равна нулю в каждом из кругов, а значит, и в точке z.

Что и требовалось доказать.✌

Отметим важность условия принадлежности предельной точки z_0 множества нулей N области D. Если оно не выполнено, то заключение теоремы может не выполняться. Например, функция $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ голоморфна всюду, кроме нуля и точка $z_0 = 0$ является предельной точкой нулей функции f, тем не менее, очевидно, f отлична от тождественного нуля.

Последнюю теорему часто называют теоремой единственности из-за следующего её применения

Теорема. *Если две голоморфные в D функции равны на множестве, имеющем предельную точку z_0, принадлежащую D, то они равны на всем множестве D.*

В самом деле, применение предыдущей теоремы к разности $f(z)-g(z)$ доказывает эту теорему.

Прежде чем переходить к следующему вопросу, напомним некоторые сведения о степенных рядах. Первый факт касается области сходимости степенного ряда.

Теорема [Нильс Абель]. *Если степенной ряд вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{11.4}$$

сходится в точке z_1, то он компактно сходится в круге $\{|z-z_0| < |z_1-z_0|\}$.

Доказательство получается сразу, если заметить, что при условиях теоремы последовательность $c_n(z_1-z_0)^n \to 0$ при $n \to \infty$ (необходимое условие сходимости ряда $\sum c_n(z_1-z_0)^n$), значит, ограничена, скажем, $|c_n(z_1-z_0)^n| < M$. Поэтому общий член ряда (11.4) в любом круге с центром в z_0 и радиусом $r < |z_1-z_0|$ можно оценить так:

$$|c_n(z-z_0)^n| = |c_n(z_1-z_0)^n|\frac{|c_n(z-z_0)^n|}{|c_n(z_1-z_0)^n|} < M\Big|\frac{r}{z_1-z_0}\Big|^n < Mq^n,$$

где $q = \frac{r}{|z_1-z_0|} < 1$ и ряд сходится равномерно в круге $|z-z_0| < r$ по признаку Вейерштрасса.

Из этой теоремы вытекает, что если ряд (11.4) расходится в какой-то точке z_2, то он расходится и в любой другой точке, отстоящей от z_0 дальше чем z_2. (Иначе, по теореме он должен был бы сходиться в z_2).

Таким образом, областью сходимости степенного ряда является круг, вне которого в каждой точке ряд расходится. На границе круга могут быть точки как сходимости, так и расходимости ряда. Для радиуса круга сходимости имеется формула Коши-Адамара

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Доказательство этой теоремы в точности повторяет случай рядов над полем действительных чисел (рекомендуется повторить).

12. Ряды Лорана

> ...серьезный человек не должен тратить время на выражение мнения большинства — есть много людей, которые охотно сделают это вместо него.
>
> Г.Х.Харди

Определение. *Рядом Лорана* называется ряд вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k = \overbrace{\cdots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)}}^{\text{главная часть}} +$$

$$+ \overbrace{c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots}^{\text{правильная часть}}$$

Сумма слагаемых с отрицательными индексами $\sum\limits_{-\infty}^{-1} c_k(z-z_0)^k = \sum\limits_{1}^{+\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}$ называется *главной частью* ряда Лорана, а оставшаяся сумма $\sum\limits_{0}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k$ называется *правильной частью* ряда Лорана.

По определению ряд Лорана сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды составляющие его правильную и главную части.

Поскольку правильная часть ряда Лорана — обычный степенной ряд, его областью сходимости является круг $|z-z_0| < R$ $(1/R = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|})$, при этом ряд сходится в круге сходимости компактно, значит его сумма — голоморфная функция в этом круге.

В главной части ряда Лорана, обозначив $\frac{1}{z-z_0} = \zeta$, тоже получим степенной ряд относительно ζ: $\sum\limits_{1}^{\infty} c_{-k}\zeta^k$. Областью сходимости этого ряда является круг $|\zeta| < \frac{1}{r}$ $(r = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|})$, значит, областью сходимости исходного ряда будет множество $\{z : \frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{r}\}$ или, что то же самое, множество $\{z : |z-z_0| > r\}$ — внешность круга радиуса r и сумма голоморфная функция вне круга (в силу компактной сходимости ряда).

Итог можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. *Областью сходимости ряда Лорана*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{12.1}$$

является кольцо $r < |z - z_0| < R$, *где*

$$r = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}, \qquad \frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Сходимость ряда (12.1) *в кольце* $r < |z - z_0| < R$ *компактная, поэтому сумма — голоморфная в кольце сходимости функция.*

Следующая теорема является обратной к предыдущей.

Теорема [Пьер Лоран]. *Если функция* $f(z)$ *голоморфна в кольце* $K = \{z : r < |z - z_0| < R\}$, *то в этом кольце её можно разложить в компактно сходящийся ряд Лорана*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

при этом коэффициенты вычисляются по формулам

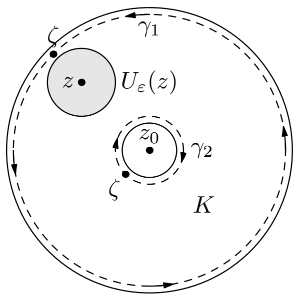
$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

где γ *— окружность с центром в* z_0, *лежащая в кольце* K (*или любая другая гомотопная ей в кольце кривая*).

Доказательство. Пусть $z \in K$ и $U_\varepsilon(z)$ — её окрестность, целиком содержащаяся в K. Обозначим через γ_1 и γ_2 такие две окружности, лежащие в K, что окрестность $U_\varepsilon(z)$ заключена между ними. По интегральной теореме Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)\big(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\big)}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(z - z_0)\big(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\big)}\, d\zeta = *$$



Заметим, что в первом из интегралов, когда $\zeta \in \gamma_1$, имеем $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$, поэтому

$$\frac{1}{\left(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k,$$

причем ряд сходится равномерно по $\zeta \in \gamma_1$, поэтому его можно интегрировать почленно. Совершенно аналогично при $\zeta \in \gamma_2$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)} = \sum_{k'=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{k'},$$

и ряд сходится равномерно по $\zeta \in \gamma_2$. Поэтому, подставляя полученные ряды в интегралы, находим

$$*= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\right)(z-z_0)^k + \sum_{k'=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} f(\zeta)(\zeta-z_0)^{k'}d\zeta\right)\frac{1}{(z-z_0)^{k'+1}}.$$

Для завершения доказательства остается обозначить через c_k коэффициент при $(z-z_0)^k$ в первой сумме

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$$

и заметить два факта: во-первых, значение интеграла не изменится, если интегрировать не по γ_1, а по любой другой гомотопной кривой, в частности, по γ_2; во-вторых, при отрицательных k подынтегральное выражение совпадет с написанным во второй сумме, если в ней предварительно сделать замену индекса $-k = k' + 1$.✌

Замечание. Вполне очевидно, что данная теорема является обобщением теоремы Тэйлора и превращается в неё, когда функция голоморфна во внешнем круге, а не только в кольце (по теореме Коши обратятся в нуль все коэффициенты при отрицательных индексах k).

Следствие [неравенства Коши]. *Если функция голоморфна в кольце* $\{z : r < |z - z_0| < R\}$, *то для коэффициентов ряда Лорана справедлива оценка*

$$|c_n| \leqslant \frac{M_\rho}{\rho^n}, \tag{12.2}$$

где $r < \rho < R$ *и* $M_\rho = \sup\limits_{|z-z_0|=\rho}|f(z)|$.

Оценка (12.2) получается точно так же, как для коэффициентов ряда Тэйлора и соответствующее вычисление остается в качестве упражнения для самостоятельной работы.

Теорема. *Разложение в ряд Лорана в кольце K единственно.*

Доказательство. Предположим, для всех z из кольца K имеет место равенство

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = \sum_{-\infty}^{\infty} c'_k (z-z_0)^k.$$

Умножим обе части этого равенства на $(z-z_0)^{-n-1}$ и проинтегрируем ряды почленно по окружности γ, лежащей в кольце K.

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k \oint_{\gamma} (z-z_0)^{k-n-1}\, dz = \sum_{-\infty}^{\infty} c'_k \oint_{\gamma} (z-z_0)^{k-n-1}\, dz.$$

Все интегралы в суммах равны нулю, кроме $k=n$, когда они равны $2\pi i$. Отсюда получаем при всех n

$$2\pi i c_n = 2\pi i c'_n.$$

Что и требовалось доказать.✌

13. Изолированные особые точки и их классификация

> Какой раб чувственных наслаждений не доведет до позорного состояния и тело и душу?
>
> Сократ.

Определение. Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(z_0)$ этой точки, в которой функция голоморфна, а в самой точке z_0 либо не определена, либо не $\mathbb{C}$-дифференцируема.

Если точка z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$, то по теореме Лорана в окрестности $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(z_0)$ её можно разложить в ряд Лорана. В связи с таким разложением особые точки функции классифицируют следующим образом.

Определение. Точка z_0 называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$, если её разложение в ряд Лорана не содержит членов с отрицательными степенями $(z - z_0)$, то есть $c_k = 0$ для всех $k < 0$ или, что то же самое, главная часть ряда Лорана равна нулю. Примером является функция $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ в точке $z_0 = 0$:

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \dots$$

Точка z_0 называется *полюсом* функции $f(z)$, если главная часть её ряда Лорана содержит лишь конечное число членов отличных от нуля, т. е. разложение имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

и в этом случае наибольшее n, при котором $c_{-n} \neq 0$ называется *порядком полюса* (или, иногда, кратностью).

Точка z_0 называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$, если главная часть её ряда Лорана в окрестности этой точки имеет бесконечное число членов отличных от нуля. В качестве примера можно привести $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ в точке $z_0 = 0$:

$$f(z) = \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{z} + 1.$$

Оказывается, для определения типа особой точки не обязательно раскладывать функцию в ряд Лорана, имеются более простые описания. А именно, справедливы следующие три теоремы.

Теорема. *Точка z_0 — устранимая особая точка функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(z_0)$, в которой f ограничена и в этом случае существует предел*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = c_0.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Практически, очевидна: дано, что

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_2)^2 + \dots$$

в окрестности $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(z_0)$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$ и, значит, ограниченность f в этой окрестности.

$\Leftarrow$ Пусть $|f(z)| \leqslant M$ в окрестности $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(z_0)$. Согласно неравенствам Коши (12.2) для любого $\rho > 0$ и $n > 0$ имеем

$$|c_{-n}| \leqslant M\rho^n \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0.$$

Отсюда следует, что $c_{-n} = 0$ при всех $n > 0$.

Что и требовалось доказать.✌

Теорема. *Для того чтобы изолированная особая точка функции была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty.$$

Доказательство. Если z_0 — полюс, то имеем

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots\right) =$$
$$= \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(z-z_0)^n}\left(c_{-n} + c_{-n+1}(z-z_0) + \ldots\right) = \infty.$$

Обратно, если $\lim f(z) = \infty$, то функция $\frac{1}{f(z)}$ — голоморфна в некоторой окрестности точки z_0 и ограничена. Согласно предыдущей теореме для неё z_0 — устранимая особая точка, поэтому разложение в ряд Лорана имеет вид $\frac{1}{f(z)} = c'_n(z-z_0)^n + c'_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \ldots$, где $c'_n \neq 0$ для некоторого $n > 0$ (отметим, что $c'_0 = 0$ так как $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$). Поэтому функцию $f(z)$ можно в окрестности z_0 представить в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n(c'_n + c'_{n+1}(z-z_0) + \ldots)} = \frac{1}{(z-z_0)^n\varphi(z)}.$$

Функция $\varphi(z) = c'_n + c'_{n+1}(z-z_0) + \ldots$ голоморфна в окрестности z_0 и отлична от нуля в точке z_0, поэтому такой же будет и $\frac{1}{\varphi(z)}$ и её ряд Лорана будет рядом Тэйлора. Окончательно получим

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}(c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots).$$

Значит, главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ имеет конечное число слагаемых.

Что и требовалось доказать.✌

Теорема. *Точка z_0 — существенно особая тогда и только тогда, когда предела функции f при $z \to z_0$ не существует.*

Доказательство. Эта теорема является простым следствием предыдущих двух.

Необходимость. Функция f не может быть ограничена ни в какой проколотой окрестности точки z_0, иначе точка z_0 была бы устранимой особой точкой. И предел функции f не может равняться бесконечности, иначе точка была бы полюсом. Остается только одна возможность — предела не существует.

Достаточность. Если предела f при $z \to z_0$ не существует, то главная часть ряда Лорана не может иметь конечное число членов, так как иначе, по доказанному, предел был бы конечным или бесконечным.

Теорема полностью доказана.✌

Уточнением последней теоремы является

Теорема [Сохоцкий-Вейерштрасс]. Если z_0 — существенно особая точка функции f, то для любого комплéксного числа $A \in \overline{\mathbb{C}}$ существует такая последовательность $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, что $z_n \to z_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

Доказательство. Пусть сначала $A = \infty$. В этом случае существование такой последовательности $z_n \to z_0$, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$ очевидно, так как в противном случае функция $f(z)$ была бы ограничена в некоторой окрестности z_0 и, значит, точка z_0 была бы устранимой.

Пусть теперь $A \neq \infty$. Предположим, что существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$, в которой $f(z) \neq A$. (Если бы это было неверно, то существовала бы такая последовательность $z_n \to z_0$, что $\forall n\ f(z_n) = A$ и все было бы доказано.)

Рассмотрим функцию $g(z) = \frac{1}{f(z)-A}$. Эта функция голоморфна в $\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$ и точка z_0 для нее не может быть: a) устранимой (в противном случае она была бы такой же для f) b) полюсом (в противном случае $f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} A$ и z_0 — опять устранимая особая точка). Поэтому z_0 — существенно особая точка для g, значит, по доказанному существует такая последовательность $z_n \to z_0$, что $g(z_n) \to \infty$. Отсюда, $f(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$.

Что и требовалось доказать.✌

Замечание. Иначе последнюю теорему можно сформулировать так: любая точка расширенной комплéксной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ является предельной для образа произвольной проколотой окрестности существенно особой точки z_0 при отображении f.

Следующая теорема еще более уточняет поведение голоморфной функции вблизи существенно особой точки.

Теорема [Шарль Пика́р]. *Если z_0 — существенно особая точка функции f, то образом любой проколотой окрестности при отображении f является вся компле́ксная плоскость за исключением, быть может, одной точки.*

Доказательство этой теоремы существенно сложнее и здесь не будет приведено. Желающие могут прочитать его, например, в книге И.И. Привалова “Введение в теорию функций компле́ксного переменного”. В ней этой теореме посвящена глава VIII (с. 256–264)

Особая точка ∞

Если функция f голоморфна в окрестности бесконечно удаленной точки (т. е. на множестве $U_R(\infty) = \{z : |z| > R\}$), то она считается изолированной особой точкой. Классификация особенности производится согласно следующему определению.

Определение. Считается, что функция $f(z)$ голоморфная в окрестности бесконечно удаленной точки имеет тот же тип особенности, что и функция $g(z) = f(\frac{1}{z})$ в точке нуль.

Исходя из этого определения и учитывая, что ряд Лорана функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке получается из ряда Лорана функции $g(z)$ в нуле простой заменой z на $1/z$, легко увидеть справедливость следующих утверждений:

1. ∞ — устранимая особая точка тогда и только тогда, когда ряд Лорана функции f в ∞ не содержит членов с положительными степенями z.

2. ∞ — полюс тогда и только тогда, когда ряд Лорана f в ∞ содержит лишь конечное число членов с положительными степенями z.

3. ∞ — существенно особая точка тогда и только тогда, когда ряд Лорана функции f в ∞ содержит бесконечное число членов с положительными степенями z.

И, наконец, совершенно аналогично конечным точкам доказываются теоремы о том, что:

1. ∞ — устранимая особая точка тогда и только тогда, когда функция f ограничена в некоторой окрестности $U_R(\infty)$ и в этом случае существует предел $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) \neq \infty$.

2. ∞ — полюс тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

3. ∞ — существенно особая точка тогда и только тогда, когда не существует предела $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Доказательство остается в качестве упражнения.

14. Некоторые классы голоморфных функций

Люди только тогда сообщают нам интересные сведения, когда мы им противоречим.
Бернард Шоу

Определение. Функция f называется *целой*, если она голоморфна во всей компле́ксной плоскости $\mathbb{C}$.

Примером целой функции является любой многочлен $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$. Кроме многочленов имеются такие функции, как e^z, $\sin z$, $\cos z$.

Очевидно, сумма и произведение целых функций являются целыми функциями (т. е. целые функции образуют алгебру).

Из определения следует, что у любой целой функции имеется ровно одна особая точка — ∞. Оказывается, зная тип особенности в ∞ можно сразу очень много сказать о самой функции. А именно, справедлива теорема.

Теорема. Если ∞ — устранимая особая точка целой функции f, то эта функция есть тождественная константа.

Если ∞ — полюс целой функции f, то f — многочлен.

Если ∞ — существенно особая точка целой функции, то такая функция называется целой трансцендентной функцией.

Доказательство. Если ∞ — устранимая особая точка, то функция f ограничена в некоторой окрестности $U_R(\infty)$, то есть вне круга $\overline{U}_R(0) = \{z : |z| \leqslant R\}$ радиуса R. В самом же круге $\overline{U}_R(0)$ f ограничена, как непрерывная функция по теореме Вейерштрасса. Значит, она ограничена во всей компле́ксной плоскости. По теореме Лиувилля f — тождественная константа.

Если ∞ — полюс, то разложение в ряд Лорана в окрестности ∞ имеет вид
$$f(z) = \dots + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n.$$
(Слагаемых с положительными степенями z конечное число.) Рассмотрим новую функцию:

$$g(z) = f(z) - (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n).$$

Это целая функция, как разность двух целых функций. Легко видеть, что для неё ∞ — устранимая особая точка, так как её ряд Лорана не содержит слагаемых с положительными степенями. Поэтому g — константа. Значит, f — многочлен.

Что и требовалось доказать.✌

Мероморфные функции

Приливы есть во всех делах людских,
И тот, кто их использует умело,
Преуспевает в замыслах своих —
Так говорит Шекспир...
Но в том и дело,
Что вовремя увидеть надо их.

У. Шекспир.

Определение. Функция f называется *мероморфной* в области D, если она имеет конечное число изолированных особых точек на всяком компакте в D, причем все они являются полюсами.

В частности мероморфными в $\mathbb{C}$ являются функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$. Оказывается, функции мероморфные в *расширенной* компле́ксной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ допускают простое описание.

Теорема. *Если функция f мероморфна в расширенной компле́ксной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ (и, значит, ∞ — полюс), то f — рациональная функция, т. е.*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где $P(z), Q(z)$ — многочлены от z.

Доказательство. Пусть $z_1, \ldots, z_n, \infty$ — все особые точки функции f. Тогда разложения в ряд Лорана функции f в окрестностях точек z_i и ∞ имеют вид

$$f(z) = \sum_{k=-m_i}^{\infty} c_k^{(i)} (z - z_i)^k, \qquad f(z) = \sum_{k=-\infty}^{m_\infty} c_k^{(\infty)} z^k.$$

Обозначим через $\varphi_i(z)$, $\varphi_\infty(z)$ главные части этих рядов:

$$\varphi_i(z) = \frac{c_{-m_i}^{(i)}}{(z-z_i)^{m_i}} + \dots + \frac{c_{-1}^{(i)}}{z-z_i}, \qquad \varphi_\infty(z) = c_1^{(\infty)} z + \dots c_{m_\infty}^{(\infty)} z^{m_\infty}.$$

Они содержат конечное число слагаемых, поэтому $\varphi_i(z)$ — рациональные функции с одной особой точкой z_i, а в бесконечно удаленной точке $\varphi_\infty(z)$ — многочлен.

Обозначим через g функцию $g(z) = f(z) - \sum_{i=1}^n \varphi_i(z) - \varphi_\infty(z)$. Особые точки у неё остались те же самые, что и у f, причем все они устранимые, так как главная часть ряда Лорана функции g в точках z_i, очевидно, отсутствует. Доопределив g в точках z_i по непрерывности, получим голоморфную и ограниченную функцию во всей плоскости. Значит, g — константа, откуда $f(z) = g(z) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(z) + \varphi_\infty(z)$ — рациональная функция, так как слагаемые являются рациональными функциями.

Что и требовалось доказать.✌

15. Вычеты

…геологическая история показывает нам, что жизнь есть лишь беглый эпизод между двумя вечностями смерти и что в этом эпизоде прошедшая и будущая длительность сознательной мысли — не более как мгновение.

Мысль — только вспышка света посреди долгой ночи. Но эта вспышка — всё.

А. Пуанкарэ. Наука и гипотеза.

Определение. Пусть z_0 — изолированная особая точка функции f в области D. *Вычетом* f в точке z_0 называют число

$$\operatorname*{Выч}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=\delta} f(z)\, dz,$$

где δ настолько мало, что круг $\overline{U}_\delta(z_0)$ лежит в D и не содержит кроме z_0 других особых точек функции f.

Отметим, что в силу теоремы Коши интеграл в определении вычета можно считать по любой простой замкнутой кривой, лежащей в области голоморфности функции и охватывающей только одну её особую точку z_0. (Уметь пояснить подробнее, почему?)

Теорема. 1. *Если z_0 — устранимая особая точка, то вычет в этой точке $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$.*

2. Если z_0 — полюс порядка n, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\big(f(z)(z-z_0)^n\big).$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно, так как по определению в устранимой особой точке $c_{-1} = 0$.

В случае, когда z_0 — полюс порядка n, в проколотой окрестности точки z_0 имеем

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$$

Поэтому

$$(z-z_0)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-z_0) + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + c_0(z-z_0)^n + \dots$$

Дифференцируя $(n-1)$-раз, получим

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\big(f(z)(z-z_0)^n\big) = (n-1)!c_{-1} + \frac{n!}{2!}c_0(z-z_0) + \dots$$

Равенство справедливо в проколотой окрестности, поэтому, переходя к пределу при $z \to z_0$, получим требуемое.

Теорема полностью доказана.✌

Следствие. 1. *Если z_0 — полюс порядка 1, то*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0).$$

2. Если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z), \psi(z)$ — такие голоморфные функции, что $\varphi(z_0) \neq 0$, а $\psi(z)$ имеет в точке z_0 нуль первого порядка, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Доказательство. Первое утверждение — это предыдущая теорема при $n = 0$.

Для доказательства второго, отметим, что при сформулированных условиях в точке z_0 имеется полюс первого порядка, так как

$$\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\displaystyle\lim_{z\to z_0}\frac{\psi(z)}{(z-z_0)}} \neq 0.$$

Поэтому, (учитывая, что $\psi(z_0) = 0$)

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Что и требовалось доказать.✌

Теорема [Основная теорема Коши о вычетах]. *Пусть D — ограниченная область и f — функция голоморфная в D и непрерывная в $\overline{D}$ всюду, за исключением конечного числа особых точек $z_1, \ldots, z_n$, принадлежащих D. Тогда*

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Доказательство. Окружим особые точки кругами целиком лежащими в D и не пересекающимися друг с другом. Обозначим через γ_k границу k-го круга. Если удалить эти круги из области D, то в оставшейся области функция f будет голоморфна и границей будет множество $\Gamma = \partial D \cup \bigcup\limits_{k=1}^{n} \gamma_k^-$. Поэтому по теореме Коши

$$0 = \oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \oint\limits_{\partial D} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k} f(z)\,dz,$$

или, что то же самое

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Что и требовалось доказать.✌

Определение. Если функция f голоморфна в окрестности бесконечно удаленной точки, то по определению полагают

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=R} f(z)\,dz = -c_{-1},$$

где c_{-1} — коэффициент разложения f в ряд Лорана в бесконечно удаленной точке.

Непосредственным следствием этого определения является следующая теорема.

Теорема. *Если f голоморфна во всей компле́ксной плоскости за исключением конечного числа особых точек $z_1, \ldots, z_n$, то*

$$\sum_{k=1}^{n+1} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = 0, \quad \text{где } z_{n+1} = \infty.$$

Эта теорема часто применяется для вычисления интегралов $\oint_\Gamma f(z)\,dz$, когда функция голоморфна во всей плоскости, но внутрь контура Γ попадает больше особых точек, чем вне его. В силу этой теоремы

$$\oint\limits_\Gamma f(z)\,dz = -2\pi i \sum_i \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z),$$

где сумма считается по тем особым точкам, которые не попали внутрь контура Γ, включая ∞.

16. Применение вычетов для вычисления интегралов

Умный человек может быть влюблен, как безумец, но не как дурак.

Франсуа де Ларошфуко

Теорема. *Пусть $R(u,v)$ — рациональная функция двух переменных (т. е. $R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, где P, Q — многочлены от двух переменных u, v), тогда*

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx = 2\pi i \sum_k^n \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),$$

где

$$f(z) = R\biggl(\frac{1}{2i}\Bigl(z - \frac{1}{z}\Bigr), \frac{1}{2}\Bigl(z + \frac{1}{z}\Bigr)\biggr) \cdot \frac{1}{iz},$$

а сумма вычисляется по тем особым точкам, которые попали внутрь круга $U_1(0)$ единичного радиуса с центром в нуле.

Доказательство. Сделаем в интеграле подстановку $z = e^{ix}$. Тогда $dz = ie^{ix}\,dx = iz\,dx$ или $dx = \dfrac{dz}{iz}$ и

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\Bigl(z - \frac{1}{z}\Bigr), \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\Bigl(z + \frac{1}{z}\Bigr).$$

Подставляя в интеграл, по основной теореме о вычетах, получим

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx = \oint\limits_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz} = 2\pi i \sum_k^n \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

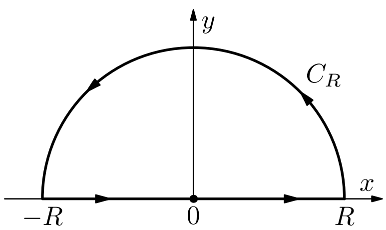
Что и требовалось доказать.✌

Теорема. *Пусть f — функция голоморфная всюду в верхней полуплоскости за исключением конечного числа особых точек $z_1, \ldots, z_n$, у которых мнимая часть строго больше нуля (т. е. на вещественной оси особых точек нет). Если*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z>0}} |zf(z)| = 0, \tag{16.1}$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{16.2}$$



Доказательство, Обозначим через Γ_R кривую, состоящую из отрезка вещественной оси $[-R, R]$ и полуокружности C_R радиуса R, лежащей в верхней полуплоскости. Выберем R настолько большим, чтобы все особые точки верхней полуплоскости попали внутрь контура Γ_R. Тогда будем иметь

$$\oint\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Заметим, что правая часть равенства не зависит от R, поэтому

$$\lim_{R\to\infty} \oint\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz\right) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Первый из интегралов в скобках, очевидно, стремится к $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. А для второго, в силу (16.1), имеет место оценка

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| = \left|\int_{C_R} zf(z)\frac{dz}{z}\right| \leqslant \int_{C_R} |zf(z)|\frac{|dz|}{|z|} \leqslant \sup_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z>0}} |zf(z)| \cdot \frac{1}{R}\int_{C_R} |dz| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Откуда немедленно следует заключение теоремы.

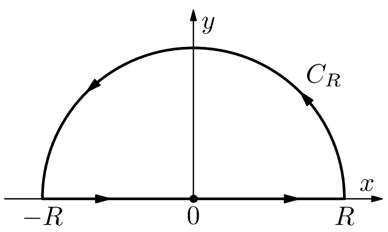
Следующая теорема часто применяется при вычислении преобразований Фурье и Лапласа.

Теорема [К.Жордан]. *Пусть f — функция голоморфная всюду в верхней полуплоскости за исключением конечного числа особых точек $z_1, \dots, z_n$, не лежащих на вещественной прямой. Если*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z>0}} |f(z)| = 0, \tag{16.3}$$

то при $\xi \geqslant 0$

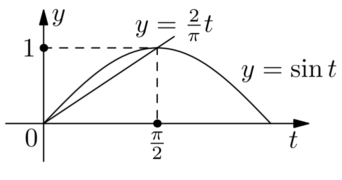
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \bigl(e^{i\xi z} f(z)\bigr). \tag{16.4}$$



Доказательство. Как и в предыдущей теореме, выберем R так, чтобы все особые точки попали в полукруг ограниченный кривой $\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$ и покажем, что интеграл по полуокружности C_R при условии (16.3) стремится к нулю при $R \to \infty$. Это утверждение часто называют *леммой Жордана* и мы в дальнейшем тоже будем ссылаться на него как на лемму Жордана.

Итак, параметризуем C_R с помощью уравнения $z{=}Re^{it}$, $0{\leqslant}t{\leqslant}\pi$. Тогда

$$\Bigl|\int_{C_R} e^{i\xi z} f(z)dz\Bigr| = \Bigl|\int_0^{\pi} e^{i\xi Re^{it}} f(Re^{it}) Rie^{it} dt\Bigr| \leqslant \sup_{z\in C_R} |f(z)| \cdot R \int_0^{\pi} \Bigl|e^{i\xi Re^{it}}\Bigr| dt = (*)$$



Заметим, что на промежутке $[0, \pi/2]$, имеем $\frac{2}{\pi}t \leqslant \sin t$ (см. рисунок) и, поэтому

$$\Bigl|e^{i\xi Re^{it}}\Bigr| = \Bigl|e^{i\xi R(\cos t + i\sin t)}\Bigr| = e^{-\xi R\sin t} \leqslant e^{-\xi R \frac{2}{\pi} t}.$$

Откуда

$$(*) = \sup_{z\in C_R}|f(z)|\cdot R\int_0^{\pi} e^{-\xi R\sin t}\,dt \leqslant \sup_{z\in C_R}|f(z)|\cdot 2R\int_0^{\pi/2} e^{-\xi R\frac{2}{\pi}t}\,dt =$$
$$= \sup_{z\in C_R}|f(z)|\Big(-\frac{\pi}{\xi}\Big)e^{-\xi R\frac{2}{\pi}t}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sup_{z\in C_R}|f(z)|\frac{\pi}{\xi}\Big(1-e^{-\xi R}\Big) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

и лемма Жордана доказана. Теперь имеем равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R} e^{i\xi x}f(x)\,dx + \int_{C_R} e^{i\xi z}f(z)\,dz\right) =$$
$$= \lim_{R\to\infty}\oint\limits_{\Gamma_R} e^{i\xi z}f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\big(e^{i\xi z}f(z)\big).$$

Что и требовалось доказать.✌

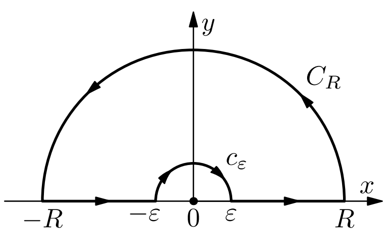
Слевствие. При условиях теоремы Жордана имеют место равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\xi x)\,dx = \mathrm{Re}\Big(2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\big(e^{i\xi z}f(z)\big)\Big) = -2\pi\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\big(e^{i\xi z}f(z)\big).$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\xi x)\,dx = \mathrm{Im}\Big(2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\big(e^{i\xi z}f(z)\big)\Big) = 2\pi\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\big(e^{i\xi z}f(z)\big).$$

Они получаются из предыдущей теоремы отделением действительной и мнимой частей.

В качестве нетривиального применения рассмотренных теорем приведем вычисление известного интеграла Дирихле.

Пример. Интеграл Дирихле $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,dx$.



Введем вспомогательную функцию $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ и выберем контур интегрирования, как на рисунке слева. Поскольку внутри этого контура особых точек нет, по теореме Коши

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{c_\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R} + \int_{C_R} = 0. \qquad (*)$$

По лемме Жордана $\int\limits_{C_R} = O\big(\frac{1}{R}\big)$ при $R\to\infty$. Рассмотрим теперь интеграл $\int\limits_{c_\varepsilon}$. Раскладывая в ряд Лорана подынтегральное выражение, будем иметь

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \dots}{z} = \frac{1}{z} + \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — голоморфная функция в точке 0. Отсюда

$$\int_{c_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{c_\varepsilon} \frac{dz}{z} + \int_{c_\varepsilon} \varphi(z)\,dz = \int_\pi^0 \frac{\varepsilon e^{it} i\,dt}{\varepsilon e^{it}} + O(\varepsilon) = -i\pi + O(\varepsilon),$$

где мы воспользовались тривиальной оценкой:

$$\Big| \int_{c_\varepsilon} \varphi(z)\,dz \Big| \leqslant \sup_{z \in c_\varepsilon} |\varphi(z)| \pi\varepsilon = O(\varepsilon).$$

Таким образом, равенство $(*)$ можно переписать в виде

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx = i\pi + O(\varepsilon) + O\Big(\frac{1}{R}\Big).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и $R \to \infty$ и замечая, что искомый интеграл это мнимая часть вычисленного выражения, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi.$$

Логарифмический вычет

> Математическая истина останется на вечные времена, а метафизические призраки проходят, как бред больных.
>
> Ф. Вольтер

Напомним, что функция $\operatorname{Ln} z$ от компле́ксного z определяется формулой

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z, \quad \text{где} \quad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

при этом справедлива формула дифференцирования $\frac{d}{dz} \operatorname{Ln} z = \frac{1}{z}$.

Определение. Пусть функция f голоморфна в проколотой окрестности точки z_0. Тогда её *логарифмическим вычетом* в этой точке называется число

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \Big(\frac{d}{dz} \operatorname{Ln}\big(f(z)\big) \Big).$$

Лемма. *Пусть z_0 — нуль порядка n голоморфной в окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$ функции f. Тогда*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = n.$$

Доказательство. Поскольку z_0 — нуль порядка n, имеем

$$f(z) = c_n(z-z_0)^n + \dots = (z-z_0)^n(c_n + c_{n+1}(z-z_0) + \dots) = (z-z_0)^n\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — голоморфная функция, $\varphi(z_0) = c_n \neq 0$. Отсюда

$$f'(z) = n(z-z_0)^{n-1}\varphi(z) + (z-z_0)^n\varphi'(z).$$

Значит,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-z_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{n}{z-z_0} + c_0' + c_1'(z-z_0) + \dots,$$

так как функция $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ — голоморфна в окрестности z_0. Поэтому видим, что z_0 — полюс порядка 1 и

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = n.$$

Что и требовалось доказать.✌

Лемма. *Пусть z_0 — полюс порядка m голоморфной в окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$ функции f. Тогда*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = -m.$$

Доказательство. В окрестности $U_\delta(z_0)$ имеем

$$f(z) = \frac{c_m}{(z-z_0)^m} + \dots = \frac{1}{(z-z_0)^m}(c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0)) + \dots = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m},$$

где $\psi(z)$ — голоморфная в окрестности z_0 функция, $\psi(z_0) = c_{-m} \neq 0$. Тогда

$$f'(z) = -\frac{m\psi(z)}{(z-z_0)^{m+1}} + \frac{\psi'(z)}{(z-z_0)^m}.$$

Поэтому

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m}{z-z_0} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = -\frac{m}{z-z_0} + c_0' + c_1'(z-z_0) + \ldots$$

Откуда, как и в предыдущей лемме, z_0 — полюс порядка 1 и

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = -m.$$

Что и требовалось доказать.✌

Теорема. *Пусть f — мероморфна в односвязной области D и γ — замкнутая кусочно гладкая жорданова кривая, лежащая в D, причем γ не проходит ни через нули функции f, ни через полюсы. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P,$$

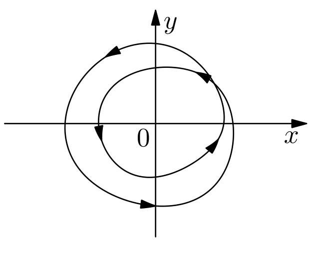
где N — количество нулей (с учетом кратности) функции f, лежащих внутри контура γ, а P — количество полюсов (тоже с учетом кратности).

Доказательство. Особыми точками функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ являются только нули и полюсы функции f, поэтому по основной теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_k \operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{f'(z)}{f(z)},$$

где z_k пробегает все нули и полюсы, попавшие внутрь контура γ. Теперь, заключение теоремы непосредственно следует из лемм 16.6. и 16.7.✌

Эта теорема имеет хорошую геометрическую интерпретацию. Для того чтобы сформулировать соответствующую теорему, приведем некоторые предварительные соображения.



16.9. Пусть $w(t)$ — непрерывная комплéкснозначная функция вещественного аргумента. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \operatorname{Arg} w(t)$. Поскольку Arg — многозначная функция, $\operatorname{Arg} w = \arg w + 2\pi n$, где $0 \leqslant \arg w < 2\pi$, а n — любое целое число, функция $\varphi(t)$ тоже многозначна. Выберем из множества всех значений $\varphi(t)$ какое-нибудь одно, скажем φ_0 (другие отличаются от него на число, кратное 2π). Если теперь t непрерывно менять от α до β, то среди всех значений $\varphi(t)$ имеются такие, которые будут непрерывно изменяться от φ_0 до какого-то значения φ_1. При этом, очевидно, разность $\Delta_\alpha^\beta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ не будет зависеть от "ветви" многозначной функции $\varphi(t)$, которую мы выберем, т. е. если мы всю эту процедуру повторим, начиная с другого значения φ_0' (которое будет равно $\varphi_0 + 2\pi k$ при некотором k), то получим ту же самую разность: $\Delta_\alpha^\beta\varphi = \varphi_1' - \varphi_0'$. Ее называют *приращением аргумента* функции $w(t)$. Кроме этого отметим, что число $\frac{1}{2\pi}\Delta_\alpha^\beta\varphi$ по геометрическому смыслу есть количество оборотов конца радиус-вектора $w(t)$ вокруг нуля, когда t пробегает от α до β (см. рисунок).

Теорема [Принцип аргумента]. *Если f — мероморфная в односвязной области D функция и $\gamma \subset D$ — замкнутая кусочно гладкая жорданова кривая, $z = z(t)$ — её параметризация, то приращение аргумента функции $w(t) = f\big(z(t)\big)$ при однократном обходе по контуру γ равно $2\pi(N - P)$, где N и P — соответственно количество нулей и полюсов с учетом кратности, лежащих в области ограниченной контуром γ.*

Доказательство. Пусть $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — параметрическое уравнение кривой γ. Отметим, что в силу замкнутости кривой γ имеем $z(a) = z(b)$. Вычислим логарифмический вычет функции f:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'\big(z(t)\big)}{f\big(z(t)\big)} z'(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\mathrm{Ln}\big(f\big(z(t)\big)\big)\Big|_a^b = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Ln}\big(w(t)\big)\Big|_a^b.$$

Замечая, что $\ln|w(t)|\Big|_a^b = \ln|w(b)| - \ln|w(a)| = 0$, получим

$$\mathrm{Ln}\big(w(t)\big)\Big|_a^b = \Big(\ln|w(t)| + i\,\mathrm{Arg}\,w(t)\Big)\Big|_a^b = i\,\mathrm{Arg}\,w(t)\Big|_a^b = i\Delta_a^b\,\mathrm{Arg}\,f\big(z(t)\big).$$

Откуда

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_a^b\,\mathrm{Arg}\,f\big(z(t)\big) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P.$$

Что и требовалось доказать.✌

Отметим, что из последнего равенства вытекает независимость приращения аргумента функции $f(z(t))$ от выбора параметризации кривой γ. В силу этого корректно более короткое обозначение

$$\Delta_\gamma\,\mathrm{Arg}\,f \overset{\mathrm{def}}{=} \Delta_a^b\,\mathrm{Arg}\,f\big(z(t)\big).$$

Теорема [Эжен Руше], *Пусть f и g — голоморфные в D функции и $\gamma \subset D$ — простая замкнутая кривая. Предположим, всюду на γ имеет место неравенство* (*строгое!*)

$$|f(z)| > |g(z)| \qquad z \in \gamma. \tag{16.5}$$

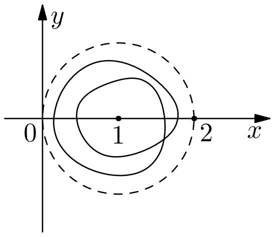
Тогда f и $f+g$ имеют внутри контура γ одинаковое число нулей.

Доказательство. Заметим сначала, что в силу (16.5), $|f(z)| > 0$ на γ (неравенство строгое!, т. е. $|f(z)| \neq 0$) и

$$|f(z)+g(z)| \geqslant |f(z)| - |g(z)| > 0 \quad \text{на } \gamma,$$

значит, f и $f+g$ не имеют нулей на γ. Тогда

$$\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f+g) = \Delta_\gamma \operatorname{Arg} f\bigl(1+\tfrac{g}{f}\bigr) = \Delta_\gamma \operatorname{Arg} f + \Delta_\gamma \operatorname{Arg}\bigl(1+\tfrac{g}{f}\bigr).$$



Но, $\left|\frac{g}{f}\right| < 1$ по предположению, поэтому конец радиус-вектора $w = 1+\frac{g}{f}$ не может сделать ни одного оборота вокруг нуля, так как лежит в круге $\{w : |w-1| < 1\} = \{w = u+iv : (u-1)^2+v^2 < 1\}$. Поэтому, согласно принципу аргумента, $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}\bigl(1+\frac{g}{f}\bigr) = 0$. Значит,

$$\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f = \Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f+g) = 2\pi N.$$

Что и требовалось доказать.✌

Пример. Найдем количество корней уравнения $2z^8-7z^5+3z-1 = 0$, лежащих в круге $|z| < 1$. Для этого обозначим через $f(z) = -7z^5$ и $g(z) = 2z^8+3z-1$. Тогда при $|z| = 1$ будем иметь $|f(z)| = 7$, а $|g(z)| < 2+3+1 = 6$. Таким образом, функции f и g удовлетворяют условиям теоремы Руше, поэтому f и $f+g$ имеют в единичном круге одинаковое число нулей. Но у f их 5 — все равны 0. Поэтому исходное уравнение имеет 5 корней в единичном круге.

Теорема [Основная теорема алгебры]. *Всякий многочлен $P_n(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ имеет с учетом кратности ровно n корней.*

Доказательство. Обозначим через

$$f(z) = z^n, \quad g(z) = a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n.$$

Поскольку

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{a_n}{z^n} \xrightarrow[z\to\infty]{} 0,$$

найдется такое R, что

$$\forall z \quad |z| = R \Longrightarrow \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1,$$

или, что то же самое, $|f(z)| > |g(z)|$ на окружности $|z| = R$. Поэтому, по теореме Руше $f(z) = z^n$ и $P_n(z) = f(z) + g(z)$ имеют одинаковое число нулей (очевидно, равное n) в круге $|z| < R$.

Что и требовалось доказать.✌

В качестве важных для теории конформных отображений приложений теоремы Руше докажем ещё две (нетривиальных) теоремы.

Теорема. *При голоморфном отображении внутренние точки переходят во внутренние.*

Отметим, что не голоморфные (непрерывные) отображения (плоскости в плоскость) этим свойством, вообще говоря, не обладают (придумайте пример). Но *прообраз* внутренней точки для любого непрерывного отображения обязан быть внутренней точкой. Это следует из теоремы о том, что прообраз открытого множества открыт.

Доказательство. Пусть D — область, $f(D)$ — её образ. Для любой точки $z_0 \in D$ надо доказать, что её образ $w_0 = f(z_0)$ является внутренней точкой $f(D)$, то есть, что существует целая окрестность $U_\varepsilon(w_0)$, содержащаяся в $f(D)$. Но это означает, что для любой точки $w \in U_\varepsilon(w_0)$ функция $F(z) = f(z) - w$ имеет нуль в D (для достаточно малых ε). Докажем это.

Заметим сначала, что функция $f(z) - w_0$ имеет нуль в точке z_0. Поэтому её разложение в ряд Тэйлора в этой точке будет иметь вид

$$f(z) - w_0 = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots$$

где $c_m \neq 0$, m — кратность нуля. Тогда разложение в ряд Тэйлора $F(z) = f(z) - w$ имеет вид

$$F(z) = w_0 - w + c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots = \varphi(z) + \psi(z),$$

где мы обозначили

$$\varphi(z) = c_m(z - z_0)^m,$$
$$\psi(z) = w_0 - w + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots = (w - w_0) + (z - z_0)^{m+1}\sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}(z - z_0)^k.$$

Но тогда

$$\left|\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}\right| \leqslant \overbrace{\frac{|w-w_0|}{|c_m||z-z_0|^m}}^{<\frac{1}{2} \text{ при } |w-w_0|<\varepsilon} + \overbrace{|z-z_0|\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}(z-z_0)^k\right|}^{<\frac{1}{2} \text{ на окружности } |z-z_0|=\delta}.$$

Выберем теперь сначала $\delta > 0$ так, чтобы вторая скобка в сумме справа была $< \frac{1}{2}$ на окружности $|z - z_0| = \delta$, затем выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы первая скобка была $< \frac{1}{2}$ на этой окружности (очевидно, сделать это можно). Но тогда на окружности $|z-z_0| = \delta$ будем иметь $|\varphi(z)| > |\psi(z)|$ и по теореме Руше функции $F(z) = \varphi(z) + \psi(z)$ и $\varphi(z) = c_m(z - z_0)^m$ имеют одинаковое число нулей ($m \geqslant 1$) в окрестности $U_\delta(z_0)$ при $w \in U_\varepsilon(w_0)$. Что и требовалось доказать.✌

Напомним, что в теории функций принято называть взаимно-однозначные (или, иначе, инъективные) отображения (частей) $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ *однолистными.*

Теорема [Принцип соответствия границ]. *Пусть D и G — односвязные ограниченные области с кусочно гладкими границами ∂D и ∂G соответственно и $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$. Если при движении z по ∂D в положительном направлении точка $w = f(z)$ движется по ∂G в положительном направлении и один обход всей границы ∂D соответствует одному обходу ∂G, то f однолистно отображает D на G.*

Доказательство. Пусть $\nu(w)$ — число нулей функции $F(z) = f(z) - w$ в области D (однолистность f означает, что $\forall w \ \nu(w) \leqslant 1$). По условию теоремы при $w \notin \partial G$ функция $F(z) \neq 0$ на ∂D. По принципу аргумента

$$\nu(w) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg F = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G}(\zeta - w) = \begin{cases} 1, & w \in G \\ 0, & w \notin \overline{G} \end{cases}$$

(количество нулей функций $F(z) = f(z) - w$ и $\zeta \mapsto \zeta - w$ в областях D и G соответственно, совпадают). Что и требовалось доказать. ✌

17. Гармонические функции

Скрытая гармония сльнее явной.
Гераклит.

Пусть $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция n переменных, $u : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Напомним, что *оператором Лапласа* называют отображение

$$u \mapsto \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

а соответствующее уравнение

$$\Delta u = f, \quad f : D \to \mathbb{R}$$

называют *уравнением Лапласса.*

Очевидно, оператор Лапласа (на своей области определения) линеен:

$$\Delta(\alpha u + \beta v) = \alpha \Delta u + \beta \Delta v,$$

поэтому его *ядро*[14]. т.е. множество функций

$$H(D) = \{u : \Delta u(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad (x_1, \ldots .x_n) \in D\}$$

образует линейное пространство (подпространство всех дважды дифференцируемых функций). Элементы этого пространства называют *гармоническими функциями*[15].

В дальнейшем мы будем иметь дело только с $n = 2$, отождествляя $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$:

$$(x, y) \leftrightarrow x + iy = z.$$

В этом случае $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, но практически все результаты, которые будут получены ниже, переносятся на случай произвольного n.

Чтобы следующие далее результаты не казались удивительными, полезно отметить, что в одномерном случае имеем довольно смешную ситуацию: $\Delta u = \frac{d^2 u}{dx^2}$ и ядром оператора Лапласа (в любой области, т. е. на любом интервале (a, b)) будут в точности только линейные (точнее, в

[14]Ядро линейного отображения является линейным пространством — простой алгебраический факт. Здесь слово “ядро” используется в чисто алгебраическом смысле: все решения уравнения $\Delta u = 0$. В дальнейшем слово “ядро” будет использоваться и в другом смысле: ядро интегрального оператора $u \mapsto \int K(z,t)u(t)\,dt$ это функция $K(z,t)$.

[15]В последние годы обозначение $H(D)$, для множества гармонических функций, стандартно.

современной терминологии, аффинные) функции $u(x) = Ax+B$. Для таких функций совершенно очевидно выполнение *свойства среднего значения*: значение линейной функции в центре интервала равно среднему арифметическому граничных значений и *принципа экстремума*: линейные функции отличные от константы принимают максимальное и минимальное значения на концах интервала.

В размерности 2 и более ситуация гораздо сложнее (можно иначе сказать “богаче”). Имеется много нелинейных гармонических функций. Но для общих гармонических функций указанные свойства сохраняются (но гораздо менее очевидно, это нетривиальные теоремы).

Напомним, что мы вводили операторы (см. с. 33)

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

В этих обозначениях

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} = 4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}} = 4\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}\partial z}.$$

А условия Коши-Римана для функции $f(z) = u(z)+iv(z)$ тогда выглядят так:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Если $f(z) = u(z) + iv(z)$ — голоморфная в области D функция, то в силу условий Коши–Римана функции u и v являются гармоническими в D:

$$+\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}; \end{cases} \quad \Rightarrow \Delta u = 0.$$

Аналогичная выкладка доказывает гармоничность v (проделать самостоятельно). Но можно всё доказать и одной выкладкой:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Rightarrow \Delta u + i\Delta v = \Delta f = 4\frac{\partial}{\partial z}\overset{\overset{0}{\|}}{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta u = 0 \\ \Delta v = 0 \end{cases}$$

Определение. Если u — гармоническая функция и $f = u + iv$ — голоморфна в области D, то v называют *сопряженной к u гармонической функцией в области D*.

В силу равенства $-if = v - iu$, сопряженной к гармонической функции v будет функция $(-u)$. А так как для любой вещественной константы C функция $f + iC = u + i(v + C)$ тоже голоморфна, видим, что функция $v + C$ тоже является сопряженной к u. Как показывает следующая теорема, произвол выбора сопряженной гармонической функции этим исчерпывается и у каждой гармонической функции есть сопряженная.

Теорема. *Пусть D — односвязная область и $u \in H(D)$ (т. е. гармоническая). Тогда найдется такая функция $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$ (т. е. голоморфная), что $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$. Функция f определяется с точностью до чисто мнимой константы.*

Доказательство Пусть $u \in H(D)$. Рассмотрим (комплекснозначную!) функцию g, определенную в области D равенством:

$$g(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial z}, \quad z = x + iy.$$

Поскольку u удовлетворяет уравнению Лапласа

$$0 = \Delta u = 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial u}{\partial z} = 4\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \overset{\substack{\text{условие}\\ \text{К.-Р.}\\ \downarrow}}{=} 0$$

т. е. $g \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$. В силу односвязности области D корректно определена также голоморфная функция (C — произвольная вещественная постоянная)

$$f(z) = U(z) + iV(z) = u(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} g(\zeta)d\zeta + iC$$

(интегрируем по любому пути лежащему в D и соединяющему точки z_0 и z; интеграл от пути не зависит, почему?), Равенства (для получения первого надо использовать условия Коши-Римана)

$$\frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} = f'(z) = g(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

влекут

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

С учётом того, что $U(z_0) = u(z_0)$, имеем $U(z) = u(z)$.

Единственность следует из общей теории дифференциальных уравнений (единственность решения задачи Коши для системы двух уравнений первого порядка). Детали остаются для самостоятельной работы. ✌

Основные свойства гармонических функций

> В природе существует внутренне присущая ей скрытая гармония, отражающаяся в наших умах в виде простых математических законов. Именно этим объясняется, почему природные явления удаётся предсказывать с помощью комбинации наблюдений и математического анализа.
>
> Леонардо да Винчи

Применение последней теоремы сразу же дает локальные свойства гармонических функций:

a) **Бесконечная дифференцируемость:** *любая гармоническая функция бесконечно дифференцируема в своей области определения* (как действительная часть некоторой голоморфной функции). Более того, *она является аналитической* в области определения, т. е. раскладывается в степенной ряд в каждой круговой окрестности, целиком содержащейся в области определения (этот степенной ряд от двух переменных (x, y) является действительной частью комплексного степенного ряда соответствующей голоморфной функции).

b) **Конформная инвариантность:** *если u — гармоническая в области G функция, а g — голоморфная в области D функция и $g(D) \subset G$, то $v = u \circ g$ является гармонической в области D.*

Доказательство. Так как по условию $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$

$$\Delta(u \circ g)(z) = 4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u\big(g(z)\big)}{\partial \bar{z}}\right) = 4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\big(g(z)\big) \cdot \overset{\|}{\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}}\right) = 0.$$ ✌

c) **Принцип экстремума.** *Непостоянная гармоническая в области D функция u не может достигать локального максимума или минимума во внутренней точке.*

Доказательство. Достаточно доказать, что не может быть локального максимума т. к. в точке локального минимума функция $(-u)$ имеет локальный максимум.

$\sqcap$ Итак, предположим во внутренней точке $z_0 \in D$ функция u не является тождественной константой и имеет локальный максимум. Пусть v — сопряженная гармоническая функция и $f = u + iv$. Рассмотрим голоморфную в D функцию $F(z) = e^{f(z)} = e^{u(z)}(\cos v(z) +$

$i \sin v(z))$. Очевидно, $|F(z)| = e^{u(z)}$ принимает максимальное значение в точке z_0 внутри D. Согласно принципу максимума модуля (для голоморфных функций), $e^{f(z)} = F(z) \equiv \text{const}$ всюду в D. Но тогда тождественная константа и $f(z) = u(z) + iv(z)$ и её действительная часть $u(z)$. Что противоречит предположению. ✌

d) **Теорема единственности** (граничная). *Если две гармонические в D функции имеют совпадающие значения на границе ∂D, то они совпадают всюду в D.*

Доказательство. Нам дано, что $u(z) = v(z)\Big|_{z\in\partial D}$ и $u, v \in H(D)$. Но тогда $w = u - v \in H(D)$ и $w(z) = 0\Big|_{z\in\partial D}$. В силу принципа экстремума внутри D имеем

$$\forall z \in D \quad 0 \leqslant w(z) \leqslant 0 \Rightarrow w(z) \equiv 0 \text{ всюду в } D.$$

Или $u(z) = v(z)$ всюду в D. ✌

e) **Теорема единственности** (внутренняя). *Если две гармонические в D функции имеют совпадающие значения в некоторой окрестности $U_\delta(z_0) \subset D$, то они совпадают всюду в D.*

Доказательство. Нам дано, что $u(z) = v(z)$ при $z \in U_\delta(z_0) \subset D$ и $u, v \in H(D)$. Но тогда $w = u - v \in H(D)$ и $w(z) = 0$ при $z \in U_\delta(z_0)$. Построим голоморфную функцию $f(z)$, у которой $\operatorname{Re} f = w$. В силу условий Коши-Римана её мнимая часть равна константе iC, $C \in \mathbb{R}$, т. е. $f(z) \equiv iC$ при $z \in U_\delta(z_0)$. По теореме единственности для голоморфных функций $f(z) \equiv iC$ при $z \in D$, значит, $\operatorname{Re} f(z) = w(z) \equiv 0$ всюду в D. ✌

f) **Свойство среднего значения:** *если функция u гармонична в круге $U_R(z_0) = \{z : |z - z_0| < R\}$ и непрерывна в его замыкании, то*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint\limits_{|z-z_0|=R} u(z)|dz| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{it})\, dt$$

Доказательство. Пусть v — сопряженная гармоническая функция и $f = u + iv$. Для голоморфной функции f справедлива теорема о среднем (для чуть меньшего круга радиуса $r = R - \varepsilon$ так как мы знаем про непрерывность в замыкании исходного круга только действительной части[16] f):

$$f(z_0) = u(z_0) + iv(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\,dt + \frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(z_0 + re^{it})\,dt.$$

Отделяя действительные части слева и справа, находим

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\,dt.$$

В силу теоремы Кантора непрерывная в замкнутом круге $\overline{U}_R(z_0)$ функция u равномерно непрерывна в нем. А поэтому

$$u(z_0 + re^{it}) = u(z_0 + (R-\varepsilon)e^{it}) \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{t\in[0.2\pi]}{\rightrightarrows}} u(z_0 + Re^{it})$$

Согласно теореме о переходе к пределу под знаком интеграла имеем

$$u(z_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} u(z_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} u(z_0 + re^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{it})\,dt.$$

✌

Свойство среднего значения оказывается характеристическим для гармонических функций. Далее мы покажем, что этим свойством обладают только гармонические функции.

[16] Далее мы увидим, что в случае известной непрерывности в замыкании круга только u, будут непрерывны и v и $f = u + iv$. Зная это сейчас можно было бы обойтись и без предельных переходов под знаком интеграла.

Интегральные формулы Пуассона и Шварца

Не шути с женщинами: эти шутки глупы и неприличны.

Козьма Прутков

В дальнейшем через $\mathbb{D}$ будем обозначать единичный диск $\{z : |z| < 1\}$. Тогда $\overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| \leqslant 1\}$ — замкнутый единичный диск.

Теорема (формула Пуассона). *Пусть* $u \in H(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$. *Тогда для любого* $z \in \mathbb{D}$ *выполняется равенство*:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} u(e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} u(\zeta)\,|d\zeta|$$

Доказательство. Рассмотрим дробно–линейное отображение

$$\zeta \mapsto \frac{\zeta - z}{1-\overline{z}\zeta} = g(\zeta) = w.$$

Как мы знаем это отображение биголоморфно отображает единичный круг на себя, причем точка z переходит в 0. Значит, обратная функция $\zeta = g^{-1}(w)$ (для нас её вид не важен, но Вы должны уметь её выразить явно) голоморфна и переводит 0 в z (т. е. $g^{-1}(0) = z$).

Для произвольной функции $u \in H(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ в силу конформной инвариантности, функция $u \circ g^{-1} \in H(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ тоже и для неё справедливо свойство среднего значения:

$$u(z) = u \circ g^{-1}(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{D}} u \circ g^{-1}(w)\,|dw|.$$

Выполним в этом интеграле замену переменной $w = \frac{\zeta - z}{1-\overline{z}\zeta}$:

$$dw = \frac{(1-\overline{z}\zeta) + (\zeta - z)\overline{z}}{(1-\overline{z}\zeta)^2}d\zeta = \frac{1-z\overline{z}}{(1-\overline{z}\zeta)^2}d\zeta = \frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}\zeta)^2}d\zeta.$$

Поскольку при $|\zeta| = 1$ имеют место равенства (т. к. тогда $\frac{1}{\zeta} = \overline{\zeta}$)

$$|1-\overline{z}\zeta| = \left|\tfrac{1}{\zeta} - \overline{z}\right| = |\overline{\zeta} - \overline{z}| = |\zeta - z|,$$

то мы приходим к равенству

$$|dw| = \frac{1-|z|^2}{|1-\overline{z}\zeta|^2}\,|d\zeta| = \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}|\,d\zeta|.$$

И, окончательно, (т. к. на $\partial\mathbb{D}$ $\zeta = e^{it}$ и $|d\zeta| = |ie^{it}dt| = dt$)

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}u(\zeta)\,|d\zeta| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}u(e^{it})\,dt.$$

✌

Для обобщения формулы на круги произвольного радиуса с центром в нуле заметим, что если функция u является гармонической в круге $\mathbb{D}_r = \{z : |z| < r\}$ и непрерывна в его замыкании, то, очевидно, функция

$$U(\zeta) = u(r\zeta) = u(z), \quad z = r\zeta,\ \zeta = \frac{z}{r},$$

будет гармонической в $\mathbb{D}$ и непрерывной в его замыкании. Применив к ней полученную формулу, находим

$$u(z) = U(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|\zeta|^2}{|e^{it}-\zeta|^2}U(e^{it})\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|\frac{z}{r}|^2}{|e^{it}-\frac{z}{r}|^2}u(re^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2-|z|^2}{|re^{it}-z|^2}u(re^{it})\,dt$$

Получение формулы для функции гармонической в круге с центром в произвольной точке $z_0 \in \mathbb{C}$ рекомендуется проделать самостоятельно. Кроме того, выведите как выглядит эта формула в обозначениях, не использующих комплексных чисел.[17]

Другой способ получения формулы Пуассона.

Для гармонической в круге $\mathbb{D}_\rho = \{z : |z| < \rho\}$ функции u построим голоморфную функцию $f = u + iv$ так, чтобы $v(0) = 0$ и полученную функцию разложим в нуле в ряд Тэйлора:

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad \text{где } c_0 = f(0) = u(0) \in \mathbb{R} \qquad (\star)$$

Тогда при $r < \rho$ и $z = re^{it}$ будем иметь

[17] Ответ: если положить $z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, то получим $u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2-\rho^2}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(t-\theta)}u(r\cos t, r\sin t)\,dt$.

$$f(re^{it}) = u(0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n e^{int}$$
$$\overline{f(re^{it})} = u(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c}_n r^n e^{-int}$$

Отсюда

$$u(re^{it}) = \tfrac{1}{2}(f(re^{it}) + \overline{f(re^{it})}) = u(0) + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n r^n e^{int} + \overline{c}_n r^n e^{-int}\right]$$

Умножив обе части полученного равенства на e^{-ikt} и проинтегрировав от 0 до 2π (с учётом того, что $\int_0^{2\pi} e^{-ikt}e^{\pm int} = 0$ при $-k \pm n \neq 0$), получим

$$\int_0^{2\pi} u(re^{it})e^{-ikt}\,dt = \pi \cdot c_k r^k \quad \text{или} \quad c_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(re^{it})}{r^k e^{ikt}}\,dt$$

Подставив в ($\star$), находим (учтя, что по теореме о среднем $c_0 = u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{it})\,dt$)

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{it})\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(re^{it})}{r^n e^{int}}\,dt \cdot z^n = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{it})\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{r^n e^{int}}\right]dt \end{aligned}$$

Сумма в квадратных скобках легко считается

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{r^n e^{int}} = 1 + 2\frac{\frac{z}{re^{it}}}{1 - \frac{z}{re^{it}}} = 1 + 2\frac{z}{re^{it} - z} = \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z}$$

Таким образом, получается формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{it})\frac{re^{it} + z}{re^{it} - z}\,dt.$$

Её называют *формулой Шварца.* Она восстанавливает голоморфную функцию по граничным значениям её действительной части.

Формула Пуассона получается из неё отделение действительной части. Чтобы проделать это заметим, что

$$\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z} = \frac{(re^{it}+z)(re^{-it}-\overline{z})}{|re^{it}-z|^2} = \frac{r^2-|z|^2+\overbrace{zre^{-it}-\overline{z}re^{it}}^{\text{чисто мнимое}}}{|re^{it}-z|^2}$$

Поэтому, окончательно

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{it}) \operatorname{Re}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{it})\frac{r^2-|z|^2}{|re^{it}-z|^2}\,dt$$

Попутно для сопряжённой гармонической функции, обращающейся в нуль в нуле, получаем формулу

$$v(z) = \operatorname{Im} f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{it}) \operatorname{Im}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\,dt = \frac{-i}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{it})\frac{zre^{-it}-\overline{z}re^{it}}{|re^{it}-z|^2}\,dt$$

Интегралы Шварца и Пуассона

Существовать — это быть в гармонии.
Готфрид Вильгельм Лейбниц

Ядрами Шварца и Пуассона называют соответственно функции

$$s(z,t) = \frac{re^{it}+z}{re^{it}-z} \quad \text{и} \quad p(z,t) = \frac{r^2-|z|^2}{|re^{it}-z|^2}$$

Это функции от $t \in [0, 2\pi]$ и $z \in \mathbb{D}_r$, $r > 0$ — фиксировано. Ядро Дирихле принимает только вещественные значения, ядро Шварца — комплексно-значная функция.

Определение. Пусть $\varphi(t)$ — произвольная интегрируемая (по Лебегу или Риману — кому что нравится, на самом деле, для знатоков, $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(e^{it})$, где $\tilde{\varphi} \in L^1(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ — граница единичного круга) функция, определённая на $[0, 2\pi]$ с вещественными значениями. Интегралами Шварца и Пуассона называют соответственно функции

$$S[\varphi](z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\,dt \quad \text{и} \quad P[\varphi](z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\frac{r^2-|z|^2}{|re^{it}-z|^2}\,dt$$

(Буквы S и P от Schvartz и Poisson соответственно).

Теорема. *Для любой интегрируемой функции $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ интеграл Шварца $S[\varphi]$ голоморфная в круге $\mathbb{D}_r$ функция, а интеграл Пуассона $P[\varphi]$ — гармоническая.*

Доказательство. В силу того, что интеграл Пуассона, очевидно, является действительной частью интеграла Шварца, достаточно доказать только голоморфность $S[\varphi]$. Докажем комплексную дифференцируемость $S[\varphi]$ прямой выкладкой (конечно, можно и менее громоздко).

Пусть $z \in \mathbb{D}_r$ — произвольная точка. Найдётся такое $\delta > 0$, что $U_\delta(z) \subset \mathbb{D}_r$. Выберем Δz так, чтобы $|\Delta z| < \frac{\delta}{2}$. Тогда $z + \Delta z \in U_{\frac{\delta}{2}}(z)$ и находится от границы диска на расстоянии больше $\frac{\delta}{2}$, значит, $|re^{it} - z - \Delta z| > \frac{\delta}{2}$.

Мы хотим доказать что

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{S[\varphi](z + \Delta z) - S[\varphi](z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \frac{2re^{it}}{(re^{it} - z)^2}\, dt$$

(формально продифференцировали по z интеграл Шварца под знаком интеграла). Для этого оценим модуль разности

$$\left| \frac{S(z + \Delta z) - S(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \frac{2re^{it}}{(re^{it} - z)^2}\, dt \right| = (\star)$$

Если мы покажем, что он стремится к нулю при $\Delta z \to 0$, то всё будет доказано.

Итак, вычислим сначала $\frac{S[\varphi](z+\Delta z) - S[\varphi](z)}{\Delta z}$:

$$\frac{S[\varphi](z + \Delta z) - S[\varphi](z)}{\Delta z} =$$
$$= \frac{1}{2\pi \Delta z} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \left[\frac{re^{it} + z + \Delta z}{re^{it} - z - \Delta z} - \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} \right] dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi \Delta z} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \frac{2re^{it} \Delta z}{(re^{it} - z - \Delta z)(re^{it} - z)}\, dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \frac{2re^{it}}{(re^{it} - z - \Delta z)(re^{it} - z)}\, dt$$

Поэтому

$$(\star) = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \left[\frac{2re^{it}}{(re^{it} - z - \Delta z)(re^{it} - z)} - \frac{2re^{it}}{(re^{it} - z)^2} \right] dt \right| =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \varphi(t) \left[\frac{2re^{it} \Delta z}{(re^{it} - z - \Delta z)(re^{it} - z)^2} \right] dt \right| \leqslant (\star)$$

Далее модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля и уменьшая знаменатель увеличиваем дробь:

$$(\star) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\varphi(t)| \frac{2r|\Delta z|}{\underbrace{|re^{it}-z-\Delta z|}_{\geqslant\frac{\delta}{2}}\,\underbrace{|re^{it}-z|}_{\geqslant\delta}{}^2}\,dt \leqslant \frac{2r|\Delta z|}{\pi\delta^3}\int\limits_0^{2\pi}|\varphi(t)|\,dt \underset{\Delta z\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Что и требовалось доказать. ✌

Замечание. Гораздо короче можно доказать предыдущую теорему используя известную из анализа теорему о дифференцировании под знаком интеграла. Рекомендуется соответствующие проверки выполнения условий этой теоремы проделать самостоятельно.

Подведём теперь итог о том, что мы уже имеем про интеграл Пуассона (для простоты мы берём случай $r = 1$, это не уменьшает общности).

а) Соответствие $\varphi \mapsto P[\varphi]$ линейно; в самом деле

$$\begin{aligned} P[\alpha\varphi+\beta\psi](z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big[\alpha\varphi(t)+\beta\psi(t)\big]\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt = \\ &= \alpha\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt + \beta\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(t)\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt = \\ &= \alpha P[\varphi]+\beta P[\psi](z). \end{aligned}$$

б) Если за область определения P взять $L^1(\mathbb{T})$, то получим линейный оператор $P : L^1(\mathbb{T}) \to H(\mathbb{D})$ — это последняя теорема;

в) Обозначим через $\Gamma : C(\overline{\mathbb{D}}) \to C(\mathbb{T})$ оператор взятия граничных значений функции:

$$\Gamma[u] = u\Big|_{\mathbb{T}}, \quad \text{где} \quad u\Big|_{\mathbb{T}}(t) = u(e^{it})$$

В этих обозначениях, если $u \in H(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$, то $\Gamma[u](t) = u(e^{it})$ и $(P\circ\Gamma)[u] = P\big[\Gamma[u]\big] = u$ — это теорема об интеграле Пуассона. Как говорят алгебраисты, оператор Пуассона P является *левым* обратным к сужению оператора Γ на $H(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$. Кстати, этот факт даёт полезное равенство: при $u(z) \equiv 1$ имеем $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt \equiv 1$;

Теперь кажется естественным поинтересоваться: а что будет, если мы ОВсначала подействуем оператором Пуассона на произвольную функцию из $C(\mathbb{T})$, а потом вычислим её граничные значения? Хотелось бы, чтобы

$$(\Gamma \circ P)[\varphi] = \varphi \quad \forall \varphi \in C(\mathbb{T}).$$

Это бы означало, что операторы Γ и P являются взаимно обратными биекциями пространств $H(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ и $C(\mathbb{T})$

В терминах дифференциальных уравнений, это бы означало, что интеграл Пуассона даёт единственное решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad u\Big|_{\partial\mathbb{D}} = \varphi, \quad \text{где } \varphi \in C(\mathbb{T})$$

Но здесь возникает следующая проблема. Если посмотреть на формулу

$$P[\varphi](z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt,$$

то видим, что при $|z| = 1$ подынтегральное выражение (а, значит, и интеграл) равно нулю, что не совпадает с граничными значениями *непрерывного продолжения на границу* (если оно есть) гармонической функции $P[\varphi](z)$ изнутри круга $\mathbb{D}$ (как мы знаем, есть только одна гармоническая функция, у которой все граничные значения равны нулю, — это 0). Поэтому всюду далее мы будем считать функцию $P[\varphi]$ определенной в замкнутом диске $\overline{\mathbb{D}}$ посредством формулы

$$P[\varphi](z) = \begin{cases} \varphi(t), & z = e^{it}, \\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt, & |z| < 1, \end{cases}$$

Фактически, мы “в силовую” (т. е. по определению) положили $(\Gamma \circ P)[\varphi] = \varphi$, но зато покажем, что это определение “хорошее”, совпадает с непрерывным продолжением.

Предварительно установим следующее простое

Предложение. *Любой тригонометрический полином представляет граничные значения некоторой гармонической функции, являющейся полиномом*:

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) \Rightarrow \exists u \in H(\mathbb{D}) : u(e^{it}) = \varphi(t)$$

Доказательство. Доказывать здесь, практически, нечего. При любом n функции $\cos nt$ и $\sin nt$ являются соответственно действительной и мнимой частью голоморфной функции z^n при $z = e^{it} \in \mathbb{T}$, т. е. являются граничными значениями гармонических функций. В силу линейности оператора взятия граничных значений Γ любой тригонометрический полином является граничными значениями действительной (или мнимой) части некоторого полинома от z. Но полином от z является голоморфной функцией, а его действительная часть, очевидно тоже полином (от двух переменных x и y) и гармоническая функция. Такие гармонические функции называют *гармоническими полиномами.*

Упражнение для самостоятельной работы. Найдите явное выражение того полинома от z, вещественной частью граничных значений которого является написанный выше тригонометрический полином. [18])

Теорема (о граничных значениях интеграла Пуассона). *Пусть функция φ непрерывна на $\mathbb{R}$ и периодична с периодом 2π (Это то же самое, что $\tilde{\varphi}(\zeta)$ непрерывна на $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{z : |z| = 1\}$, где $\tilde{\varphi}(e^{it}) = \varphi(t)$). Тогда функция*

$$u(z) = \begin{cases} \varphi(t), & z = e^{it}, \\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\, dt, & |z| < 1, \end{cases}$$

непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$ и гармонична в $\mathbb{D}$ (т. е. $u \in H(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$) и $\Gamma[u] = \varphi$.

Доказательство. Гармоничность в $\mathbb{D}$ уже доказана в предыдущей теореме, остаётся доказать непрерывность в $\overline{\mathbb{D}}$. Для этого достаточно построить равномерно сходящуюся к u в $\overline{\mathbb{D}}$ последовательность непрерывных в $\overline{\mathbb{D}}$ функций (предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией — стандартная теорема в анализе).

Воспользовавшись тем, что любую непрерывную функцию на $\mathbb{T}$ можно с любой точностью равномерно приблизить тригонометрическим полиномом[19], построим последовательность $\psi_n(t)$) тригонометрических полиномов равномерно сходящуюся на $\mathbb{T}$ к $\varphi(t)$ при $n \to \infty$ и рассмотрим соответствующую последовательность гармонических полиномов $P[\psi_n](z)$ (мы восстановили гармонические полиномы с помощью оператора Пуассона).

Вычислим $\sup\limits_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |u(z) - P[\psi_n](z)|$. Он будет равен максимальному из двух значений

[18]Подсказка: воспользуйтесь равенствами $\cos nt = \frac{1}{2}(e^{int} + e^{-int})$ и $\sin nt = \frac{1}{2i}(e^{int} - e^{-int})$. Ответ: $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_1^N c_n z^n$, где $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$

[19]Это стандартный факт из анализа, но см. Добавление в конце.

$$\sup_{z\in\mathbb{T}}\bigl|u(z)-P[\psi_n](z)\bigr|$$
$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\bigl|u(z)-P[\psi_n](z)\bigr|$$

(мы диск $\overline{\mathbb{D}}$ разбили на две части $\mathbb{T}\cup\mathbb{D}$; супремум по всему множеству равен максимуму из супремумов по частям)

Первый из супремумов легко вычисляется:

$$\sup_{z\in\mathbb{T}}\bigl|u(z)-P[\psi_n](z)\bigr| = \sup_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}\bigl|\varphi(t)-\psi_n(t)\bigr| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

по определению u и построению последовательности ψ_n.

Для вычисления второго супремума заметим, что так как $\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} > 0$, справедлива оценка (для любых $z\in\mathbb{D}$):

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\varphi(t)|\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|\varphi(t)|\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt = \max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|\varphi(t)|$$

Более коротко её можно записать так:

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\bigl|P[\varphi](z)\bigr| \leqslant \|\varphi\|_{C(\mathbb{T})} \overset{\text{def}}{=} \max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}\bigl|\varphi(t)\bigr|.$$

Поэтому для последовательности гармонических функций $P[\psi_n](z)$ будем иметь (на $\mathbb{D}$ у нас $u(z)=P[\varphi](z)$)

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}|u(z)-P[\psi_n](z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}}|P[\varphi-\psi_n](z)| \leqslant \|\varphi-\psi_n\|_{C(\mathbb{T})}\to 0,$$

А это и означает, что последовательность $P[\psi_n]$ непрерывных в $\overline{\mathbb{D}}$ функций равномерно сходится к u. Следовательно, u непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$. ✌

Неравенство Харнака

> В голове Архимеда было больше воображения, чем в голове Гомера.
>
> Вольтер

Напомним, что в формуле Пуассона

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{it})\frac{r^2-|z|^2}{|re^{it}-z|^2}\,dt$$

функцию $p(z,t) = \frac{r^2-|z|^2}{|re^{it}-z|^2}$ называют *ядром Пуассона.* Это ядро допускает следующую элементарную оценку:

$$\frac{r-|z|}{r+|z|} = \frac{r^2-|z|^2}{(r+|z|)^2} \leqslant \frac{r^2-|z|^2}{|re^{it}-z|^2} \leqslant \frac{r^2-|z|^2}{(r-|z|)^2} = \frac{r+|z|}{r-|z|} \qquad (\star\!\star\!\star)$$

(прямое и обратное неравенства треугольника используем для увеличения или уменьшения знаменателя; соответственно, дробь уменьшается или увеличивается и сокращаем один из множителей разложения числителя по разности квадратов)

Теорема (Неравенство Харнака). *Пусть $\mathbb{D}_r = \{z : |z| < r\}$ — диск радиуса r в комплексной плоскости. Если $u \in H(\mathbb{D}_r) \cap C(\overline{\mathbb{D}_r})$ и*

$$\forall z \in \mathbb{D}_r \quad u(z) \geqslant 0$$

то в $\mathbb{D}_r$ справедливо неравенство Харнака:

$$\frac{r-|z|}{r+|z|}\cdot u(0) \leqslant u(z) \leqslant \frac{r+|z|}{r-|z|}\cdot u(0)$$

Доказательство. Фактически, уже всё сделано. Пишем формулу Пуассона и применяем неравенства $(\star\!\star\!\star)$:

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(re^{it})\frac{r-|z|}{r+|z|}dt}_{\frac{r-|z|}{r+|z|}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(re^{it})dt} \leqslant \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(re^{it})\frac{r^2-|z|^2}{|re^{it}-z|^2}\,dt}_{u(z)} \leqslant \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(re^{it})\frac{r+|z|}{r-|z|}dt}_{\frac{r+|z|}{r-|z|}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(re^{it})dt}$$

Завершает доказательство учёт того, что $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(re^{it})dt = u(0)$ по теореме о среднем. ✌

Характеристическое свойство гармонических функций

Если бы нам было дано узнать, где начинается симметрия, нам бы стало известно и то, есть ли на свете Бог.

Мэттью Беллами

Определение. Будем говорить, что непрерывная в области D функция u *обладает локально свойством среднего значения*, если для каждой точки $z_0 \in D$ найдется такое $r > 0$, что $U_r(z_0) \subset D$ и

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{it})\,dt \qquad (*)$$

для всех $0 < \rho < r$.

Теорема. *Непостоянная непрерывная в области D функция u, обладающая в D локально свойством среднего значения, не может достигать внутри D ни минимума, ни максимума.*

Доказательство. Допустим, что функция u достигает в точке $z_0 \in D$ своего максимума (или минимума). По свойству среднего значения найдется такое $r > 0$, что при всех $0 < \rho < r$ выполняется равенство $(*)$. Поскольку для всех $t \in [0; 2\pi]$ имеет место неравенство $u(z_0 + \rho e^{it}) \leqslant u(z_0)$ (или $u(z_0 + \rho e^{it}) \geqslant u(z_0)$ в случае минимума), то равенство $(*)$ вместе с непрерывностью функции u дает $u(z_0 + \rho e^{it}) = u(z_0)$ при всех $0 < \rho < r$ и $t \in [0, 2\pi]$, т. е. $u(z) = u(z_0)$ во всей окрестности $U_r(z_0)$.

$\sqcap\!\!\sqcap$ Пусть при некотором t_0 имеет место строгое неравенство $u(z_0 + \rho e^{it_0}) < u(z_0)$, например, $u(z_0 + \rho e^{it_0}) = u(z_0) - \varepsilon$. В силу непрерывности u будем иметь $u(z_0 + \rho e^{it}) \leqslant u(z_0) - \frac{\varepsilon}{2}$ на целом интервале $t \in [t_0 - \delta; t_0 + \delta]$. Значит,

$$2\pi u(z_0) = \int\limits_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{it})\,dt = \int\limits_0^{t_0-\delta} + \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} + \int\limits_{t_0+\delta}^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{it})\,dt \leqslant$$
$$\leqslant u(z_0)(t_0 - \delta) + (u_0 - \tfrac{\varepsilon}{2})2\delta + u(z_0)(2\pi - t_0 - \delta) < 2\pi u(z_0)?!$$

Таким образом мы показали, что множество A точек области D, в которых u достигает своего максимума (или минимума) открыто (каждая точка z_0 принадлежит A вместе с окрестностью $|z - z_0| < r$). С другой стороны, множество $B = D \backslash A$ в силу непрерывности функции u также должно быть открытым (как прообраз открытого множества $\big(-\infty, u(z_0)\big)$

т. е. $\{z : u(z) < u(z_0)\}$). Поскольку D связно, то одно из множеств A или B должно быть пустым. По предположению $A \neq \varnothing$. Следовательно, $B = \varnothing$ и $A = D$. Однако, это влечет условие $u(z) \equiv u(z_0)$, что противоречит непостоянности функции u?! ✌

Теорема. *Непрерывная в области D функция u, обладающая в D локально свойством среднего значения, является гармонической.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in D$ и $r > 0$, такие, что $\overline{U}_r(z_0) \subset D$. Определим функцию $V(z)$ равенством

$$V(z) = \begin{cases} u(z_0 + re^{it}), & z = e^{it} \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\frac{1-|z^2|}{|e^{it}-z|}, & |z| < 1 \end{cases}$$

Из свойств интеграла Пуассона следует, что функция V является гармонической в $\mathbb{D}$ и непрерывной в $\overline{\mathbb{D}}$. Положим теперь $v(z) = V(\frac{z-z_0}{r})$. Эта функция гармонична в $U_r(z_0)$, непрерывна в $\overline{U}_r(z_0)$ и совпадает с u на $\partial U_r(z_0)$. Разность $u(z) - v(z)$ является непрерывной в $U_r(z_0)$ функцией, обладающей локально свойством среднего значения так как таковы обе функции u и v. Следовательно, по предыдущей теореме $u-v$ не достигает в $U_r(z_0)$ ни максимума, ни минимума, если только она не тождественно постоянна. Однако $u(z) - v(z) = 0$ при $z \in \partial U_r(z_0)$ и потому $u(z) \equiv v(z)$ в $U_r(z_0)$. ✌

О равномерной сходимости

> Век живи — век учись! И ты наконец достигнешь того, что подобно мудрецу, будешь иметь право сказать, что ничего не знаешь.
>
> Козьма Прутков.

Как Вы должны помнить, в математическом анализе важную роль играет понятие равномерной сходимости для обоснования перемены порядка пределов, перемены местами предельного перехода и интеграла, почленного дифференцирования и интегрирования рядов и т. д. Кстати, выше мы уже один раз поменяли местами предел и интеграл, воспользовавшись равномерной сходимостью подынтегрального выражения к своему пределу. Напомним, что пишут $f_n(z) \underset{n\to\infty}{\overset{z\in D}{\rightrightarrows}} f(z)$ (т. е. f_n равномерно стремится к f в области D при n, стремящемся к бесконечности), когда

$$\sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

или, более подробно,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N \Rightarrow \sup_{z\in D}|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Однако, если внимательно проследить, в доказательстве большинства теорем на самом деле используется более слабое свойство, чем равномерная сходимость *на всём* рассматриваемом множестве функциональной последовательности или ряда. В связи с этим возникают два, как мы установим, эквивалентных понятия.

Определение. Пусть $f_n(z)$ — последовательность функций, определенная в области D. Говорят, что f_n *локально равномерно сходится к функции f в D*, когда у любой точки z из D имеется окрестность, в которой f_n сходится к f равномерно:

$$\forall z \in D\ \exists\delta > 0: \sup_{z\in U_\delta(z)} |f_n(z) - f(z)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Очевидно, всякая равномерно сходящаяся в D последовательность сходится и локально равномерно в D. Обратное неверно. Например, последовательность $f_n(z) = z^n$ локально равномерно сходится к нулю в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, но не равномерно в $\mathbb{D}$ (т. к. $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}}|z^n| = 1 \nrightarrow 0$).

Кроме понятия локально равномерной сходимости в теории функций популярно понятие равномерной сходимости *внутри* D:

Определение. Говорят, что f_n *равномерно сходится к функции f* ***внутри*** D, когда f_n сходится к f равномерно на любом компакте, лежащем в D:

$$\forall K \Subset D\ \sup_{z\in K}|f_n(z) - f(z)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Теорема. *Последовательность функций f_n тогда и только тогда сходится равномерно внутри области D, когда она сходится локально равномерно в D.*

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность f_n сходится внутрои D, тогда у любой точки $z \in D$ найдется окрестность $U_\varepsilon(z) \subset D$. Очевидно, $\overline{U}_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)$ — компактная окрестность, содержащаяся в D и, значит, там f_n сходится равномерно. Т. е. f_n сходится локально равномерно.

Достаточность. Пусть последовательность f_n сходится локально равномерно и $K \Subset D$. Найдем у каждой точки $z \in K$ окрестность $U(z)$, в которой f_n сходится равномерно. Очевидно, эти окрестности образуют открытое покрытие K. Выберем из него конечное подпокрытие $\{U(z_k) :$

$1 \leqslant k \leqslant n\}$. Тогда последовательность равномерно сходится на $\bigcup\limits_{k=1}^{n} U(z_k)$ и $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n}$, значит,

$$f_n(z) \underset{n\to\infty}{\overset{z\in K}{\rightrightarrows}} f(z). \quad ✌$$

Теорема. *Если последовательность гармонических функций u_n сходится локально равномерно в D к функции v, то v — гармоническая функция в D.*

Доказательство. Пусть z — произвольная точка из D. Найдем окрестность $U_\delta(z)$ лежащую в D вместе с границей и в которой сходимость u_n к v равномерная. Для любого $0 < r < \delta$ перейдём к пределу при $n \to \infty$ в равенстве

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(z + re^{it})\,dt = u_n(z).$$

Получим (перейти к пределу под знаком интеграла можно в силу равномерной сходимости u_n к v в $U_\delta(z)$)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z + re^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} u_n(z + re^{it})\,dt =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(z + re^{it})\,dt = \lim_{n\to\infty} u_n(z) = v(z).$$

т. е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z + re^{it})\,dt = v(z).$$

Таким образом, предельная функция v локально обладает свойством среднего значения, значит, гармоническая. ✌

Последняя теорема позволяет доказать следующий полезный факт.

Теорема (Харнака). *Пусть в некоторой области D последовательность гармонических функций $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно возрастает при всех $z \in D$:*

$$\forall n\; u_n \in H(D) \quad \text{и} \quad \forall z \in D\; \forall n\; u_n(z) \leqslant u_{n+1}(z).$$

Тогда:

a) *либо $u_n \to \infty$ локально равномерно в D;*

b) *либо u_n сходится локально равномерно в D к некоторой гармонической функции.*

Доказательство. Напомним, что для гармонической в круге $\mathbb{D}_r$ функции и непрерывной в его замыкании справедливо неравенство Харнака

$$\frac{r-|z|}{r+|z|}\cdot u(0) \leqslant u(z) \leqslant \frac{r+|z|}{r-|z|}\cdot u(0).$$

В силу открытости D для произвольной точки $z_0 \in D$ найдётся окрестность $U_r(z_0)$, которая вместе с границей лежит в D. Отметим, что всякая возрастающая последовательность имеет предел конечный или равный $+\infty$.

Предположим сначала, что $u_n(z_0) \to +\infty$, тогда в силу левого из неравенств Харнака в окрестности $U_r(z_0)$ будем иметь

$$\frac{r-|z-z_0|}{r+|z-z_0|}\cdot u_n(z_0) \leqslant u_n(z)$$

а во вдвое меньшей окрестности (т. е. когда $|z-z_0| < \frac{r}{2}$)

$$\frac{1}{3}u_n(z_0) = \frac{r-r/2}{r+r/2}\cdot u_n(z_0) \leqslant u_n(z),$$

что говорит о том, что u_n равномерно в $U_{\frac{r}{2}}(z_0)$ стремится к бесконечности.

Если же $u_n(z_0)$ имеет конечный предел, то для неё выполнено условие Коши и в силу правого из неравенств Харнака будем иметь

$$[u_{n+p}(z) - u_n(z)] \leqslant \frac{r+|z-z_0|}{r-|z-z_0|}\cdot [u_{n+p}(z_0) - u_n(z_0)]$$

Опять же во вдвое меньшей окрестности

$$[u_{n+p}(z) - u_n(z)] \leqslant \frac{r+r/2}{r-r/2}\cdot [u_{n+p}(z_0) - u_n(z_0)] = 3[u_{n+p}(z_0) - u_n(z_0)]$$

т. е. u_n сходится равномерно в $U_{\frac{r}{2}}(z_0)$.

Таким образом, область D распадается на два открытых непересекающихся множества D_1 и D_2. В первом u_n локально равномерно стремится к $+\infty$, во втором локально равномерно сходится в силу предыдущей теоремы к гармонической функции. Так как D — область, значит, связно, одно из этих множеств должно быть пусто. ✌

Принцип симметрии

> Симметрия является той идеей, с помощью которой человек веками пытается объяснить и создать порядок, красоту и совершенство.
>
> А.Вейль

Мы опишем здесь принцип симметрии для гармонических функций в простейшем виде.

Теорема. *Пусть $D = D^+ \cup (a,b) \cup D^-$ — область, у которой $D^+ \subset \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ лежит в верхней полуплоскости, $D^- \subset \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ лежит в нижней полуплоскости, и границы D^+ и D^- имеют общую часть — отрезок вещественной оси (a,b).*

Пусть функция u гармонична в области D^+ непрерывна в $D^+ \cup (a,b)$, причём $u(x) = 0$, при $x \in (a,b)$. Тогда функция

$$U(z) = \begin{cases} u(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in (a,b) \\ -u(\bar z), & z \in D^- \quad (\Rightarrow \bar z \in D^+) \end{cases}$$

является гармонической в области D.

Доказательство. Покажем, что функция U локально обладает свойством среднего значения во всей области D.

В D^+ функция U гармоническая. В области D^- имеем $U(z) = -u(\bar z) = -u(\zeta)$, поэтому, делая замену $\bar z = \zeta$, получим

$$\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|z-z_0|=r} U(z)|dz| = -\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|z-z_0|=r} u(\bar z)|dz| =$$

$$-\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|\bar\zeta-\bar\zeta_0|=r} u(\zeta)|d\bar\zeta| = -\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|\zeta-\zeta_0|=r} u(\zeta)|d\zeta| = -u(\zeta_0) = U(z_0).$$

и свойство среднего значения выполнено.

Пусть теперь $z_0 \in (a,b)$. Обозначим через C_r^+ и C_r^- соответственно верхнюю и нижнюю полуокружности $\{z : |z - z_0| = r, \operatorname{Im} z > 0\}$ и $\{z : |z - z_0| = r, \operatorname{Im} z < 0\}$. Тогда $U(z_0) = 0$ по определению и

$$\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|z-z_0|=r} U(z)|dz| = \frac{1}{2\pi r}\left[\int\limits_{C_r^+} u(z)|dz| + \int\limits_{C_r^-} u(z)|dz| \right] = \left(\begin{matrix}\text{во втором интеграле} \\ \text{замена } z=\bar\zeta\end{matrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\Bigg[\int\limits_{C_r^+} u(z)|dz| + \int\limits_{C_r^+} u(\bar\zeta)|d\bar\zeta|\Bigg] = \frac{1}{2\pi r}\Bigg[\int\limits_{C_r^+} u(z)|dz| - \int\limits_{C_r^+} u(\zeta)|d\zeta|\Bigg] = 0$$

(Впрочем и без выкладки по определению функция U принимает в симметричных точках на окружности значения разных знаков. Поэтому интеграл по всей окружности равен нулю.) ✌

Линии уровня

> Тот, кто хулит высшую достоверность математических наук, питается сумбуром и никогда не заставит умолкнуть возражения софистических наук – наук, которые учат лишь вечному крику.
>
> Леонардо да Винчи

Определение. Пусть $c \in \mathbb{R}$. Множеством c-уровня функции $u : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ называют совокупность всех точек области D, в которых эта функция равна c:

$$M_c = \{z \in D : u(z) = c\}.$$

Бывают случаи, когда это множество можно "параметризовать", т. е. найти такую функцию $z = z(t)$, которая осуществляет непрерывную биекцию M_c с отрезком $[a, b]$ или окружностью $\mathbb{T}$. В этом случае M_c называют *линией* c-уровня функции u (если биекция с $\mathbb{T}$, то линия уровня замкнута и согласно теореме Жордана ограничивает некоторую область). Иногда множество уровня называют линией, если его можно представить как конечное объединение обычных линий.

Теорема. *Если гармоническая функция u имеет замкнутую линию уровня, то внутри области, ограниченной этой линией должна находиться хотя бы одна особая точка функции u.*

Доказательство. Согласно принципу экстремума, если гармоническая всюду в некоторой области функция u равна константе c на границе области, то она равна этой константе всюду в области. Множество c-уровня такой функции совпадёт с областью D и не является линией.

Теорема. *Всякая достаточно малая окрестность точки z_0 множества c-уровня гармонической функции u разбивается этим множеством на $2n$ $(n \geqslant 1)$ секторов, в которых функция u попеременно больше и меньше $c = u(z_0)$.*

Доказательство. Выберем сопряжённую гармоническую v к функции u так, чтобы $v(z_0) = 0$. Тогда голоморфная функция $f(z) = u(z) - c + iv(z)$ обращается в нуль в точке z_0, поэтому разложение в ряд Тэйлора в этой точке для f имеет вид

$$f(z) = c_n(z-z_0)^n + c_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \cdots = c_n(z-z_0)^n + o(r^n), \quad \text{где } c_n \neq 0.$$

Тогда $u(z) - c$ — действительная часть этого разложения, т. е.

$$u(z) = c + \operatorname{Re} c_n(z - z_0)^n + o(r^n).$$

Если положить $z - z_0 = re^{i\varphi}$ и $c_n = a_n + ib_n$, то

$$\begin{aligned} c_n(z - z_0)^n &= (a_n + ib_n)r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = \\ &= r^n\big[a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi + i(a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi)\big]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} u(z) &= c + \operatorname{Re} c_n(z - z_0)^n + o(r^n) = \\ &= c + r^n(a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi) + o(r^n) = c - Ar^n \sin(n\varphi - \Psi) + o(r^n). \end{aligned}$$

где $A = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\Psi = \operatorname{arctg} \frac{a_n}{b_n} = \mathrm{const}$. Таким образом, в малой окрестности точки z_0 строение линий уровня "похоже" на строение линий уровня функции $c+(a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi)$, а оно, очевидно, такое, как описано в условиях теоремы. ✌

Теорема. Линии уровня гармонической функции u и её сопряженной в точках пересечения ортогональны.

Доказательство. Пусть $z_1(t) = \big(x_1(t), y_1(t)\big)$ — линия уровня функции u. Это означает, что для всех t имеем $u\big(x_1(t), y_1(t)\big) \equiv \mathrm{const}$, значит,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\dot{x}_1(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\dot{y}_1(t) \equiv 0$$

А это, в свою очередь, означает, что касательный вектор $\big(\dot{x}_1(t), \dot{y}_1(t)\big)$ к линии уровня $z_1(t)$ ортогонален вектору $\big(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\big)$.

Аналогично находим, что для линии уровня $z_2(t) = \big(x_2(t), y_2(t)\big)$ сопряженной функции v вектор $\big(\dot{x}_2(t), \dot{y}_2(t)\big)$, касательный к этой линии уровня, ортогонален вектору $\big(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\big)$.

Но в силу условий Коши-Римана векторы $\big(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\big)$ и $\big(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\big)$ ортогональны (проверьте сами). Значит, ортогональны им ортогональные (у нас всё происходит на плоскости!).

Добавление

Теорема. *Всякую непрерывную на $\mathbb{T}$ функцию можно с любой точностью приблизить тригонометрическим полиномом.*

Обратим внимание, что это **не то же самое**, что ряд Фурье равномерно сходится к непрерывной функции, что, вообще говоря, неверно.

Доказательство.

Предположим у нас имеются тригонометрические полиномы $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ со свойствами

a) $Q_k(t) \geqslant 0$ для любых $t \in \mathbb{R}^1$

b) $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} Q_k(t)\,dt = 1$

c) если $\eta_k(\delta) = \sup\{Q_k(t) : \delta \leqslant |t| \leqslant \pi\}$, то

$$\lim_{k\to\infty} \eta_k(\delta) = 0$$

для любых $\delta > 0$. Другими словами, $Q_k(t)$ равномерно на $\{t : \delta \leqslant |t| \leqslant \pi\}$ стремится к нулю для любых $\delta > 0$.

Сопоставим каждой функции $f \in C(\mathbb{T})$ функцию P_k по формуле

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) Q_k(s)\,ds \tag{1}$$

Если в этом интеграле сделаем замену $t - s = \sigma \Rightarrow s = t - \sigma$, то, с учётом периодичности f и Q_k, получим

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma) Q_k(t-\sigma)\,d\sigma. \tag{2}$$

Так как согласно нашим предположениям, $Q_k(t)$ — тригонометрический полином, т. е. имеет вид

$$Q_k(t) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k} e^{int},$$

то легко видеть, что все P_k — тригонометрические полиномы.

Пусть $\varepsilon > 0$ — любое. Так как f — равномерно непрерывна на $\mathbb{T}$, найдётся такое $\delta > 0$, что $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ при всех $|t - s| < \delta$. Согласно b)

$$P_k(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big[f(t-s) - f(s)\big] Q_k(s)\,ds$$

Модуль этой разности оцениваем так (с учётом а)):

$$|P_k(t) - f(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(t-s) - f(s)\big| Q_k(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big[\underbrace{\int\limits_{-\delta}^{\delta}}_{A} + \underbrace{\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \big|f(t-s) - f(s)\big| Q_k(s)\,ds}_{B}\Big]$$

Сначала оцениваем интеграл A (находим такое $\delta > 0$, чтобы...)

$$A = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \big|f(t-s) - f(s)\big| Q_k(s)\,ds \leqslant \sup\big|f(t-s) - f(s)\big| \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} Q_k(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \sup\big|f(t-s) - f(s)\big| \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} Q_k(s)\,ds = \sup\big|f(t-s) - f(s)\big| < \varepsilon$$

Интеграл B оценивается в соответствии с предположением с):

$$B \leqslant 2\|f\|_\infty \cdot \eta_k(\delta) \to 0,$$

Остаётся построить Q_k с нужными свойствами а), b), с). Для этого полагаем

$$Q_k(t) = c_k\Big(\frac{1+\cos t}{2}\Big)^k$$

Условие а) выполнено очевидно. Константу c_k подбираем так, чтобы выполнялось условие b) (очевидно, сделать это можно). Остаётся проверить с).

Сначала получим оценку для c_k:

$$1 = \frac{c_k}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{1+\cos t}{2}\Big)^k dt = \frac{c_k}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \Big(\frac{1+\cos t}{2}\Big)^k dt >$$

$$> \frac{c_k}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \Big(\frac{1+\cos t}{2}\Big)^k \sin t dt = \frac{2c_k}{\pi(k+1)}$$

Откуда $c_k < \frac{\pi(k+1)}{2}$.

Далее, в силу убывания Q_k на $[0, \pi]$, имеем

$$0 < \delta \leqslant |t| \leqslant \pi \Rightarrow Q_k(t) \leqslant Q_k(\delta) \leqslant \frac{\pi(k+1)}{2}\Big(\frac{1+\cos\delta}{2}\Big)^k \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

Что и требовалось доказать. ✌

18. Преобразование Лапласа

Дорогая тетя, сообщаю вам, что я намереваюсь жениться… не бойтесь, она не математик.

Джеймс Клерк Максвелл.

Определение. Функция $f(t)$ от $t \in \mathbb{R}$ называется *оригиналом*, если удовлетворяет условиям:

1. $f(t) = 0$ при $t < 0$.

2. f — *кусочно гёльдерова*, т. е. на всяком конечном интервале может иметь только конечное число разрывов 1-го рода или точек, где не выполняется условие Гёльдера $|f(t_1) - f(t_2)| < K|t_1 - t_2|^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

3. $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ для всех t. Наименьшее из чисел s_0, для которых справедливо это неравенство, называется *показателем роста* функции f. Функции с конечным показателем роста называют *функциями конечного роста*.

Примеры.

17.1. Функция Хевисайда $\theta(t)$ определяется равенством

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Очевидно, $\theta(t)$ — оригинал.

17.2. e^{t^2} — не является функцией конечного роста, поэтому не является оригиналом.

17.3. Если функция f удовлетворяет условиям 2, 3 определения оригинала, но не удовлетворяет первому (как, например, $\sin t$), то функция $\theta(t)f(t)$ является оригиналом и её чаще всего обозначают так же как f, опуская (но подразумевая) множитель $\theta(t)$.

Определение. *Преобразованием Лапласа* оригинала $f(t)$ называют функцию $\overline{f}(p)$ компле́ксной переменной $p = s + i\sigma$, определенную при $\operatorname{Re} p > s_0$ равенством

$$\overline{f}(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$$

Преобразование Лапласа $\overline{f}(p)$ часто называют *изображением* функции-*оригинала* $f(t)$.

Если $f(t)$ — оригинал, а $\overline{f}(p)$ — изображение, коротко это записывают так

$$f(t) \risingdotseq \overline{f}(p) \quad \text{или} \quad \overline{f}(p) \risingdotseq f(t)$$

Теорема. *Изображение* $\overline{f}(p)$ *является голоморфной функцией в полуплоскости* $\operatorname{Re} p > s_0$, *где* s_0 *— показатель роста* f.

Доказательство. Для доказательства мы хотим применить стандартную теорему из анализа о дифференцировании по параметру p под знаком интеграла. Согласно ей надо проверить, что интеграл от $f(t)e^{-pt}$ сходится (хотя бы в одной точке), а интеграл от её производной по параметру $\left(f(t)e^{-pt}\right)'_p = -tf(t)e^{-pt}$ сходится компактно (т. е. равномерно на всяком компакте).

При $s = \operatorname{Re} p > s_0$, имеет место оценка ($t > 0$):

$$|f(t)e^{-pt}| \leqslant Me^{s_0t}e^{-st} = Me^{-(s-s_0)t}$$

Таким образом, подынтегральное выражение мажорируется функцией, интеграл от которой сходится:

$$\int_0^\infty Me^{-(s-s_0)t}\,dt < \infty, \quad (s > s_0).$$

Далее,

$$|-tf(t)e^{-pt}| \leqslant |t|Me^{-(s-s_0)t}$$

Так как интеграл от $|t|Me^{-(s-s_0)t}$ сходится компактно при $s > s_0$, интеграл $\int_0^\infty -tf(t)e^{-pt}\,dt$, тоже сходится компактно.

Что и требовалось доказать.✌

Примеры.

17.4. $\theta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$. В самом деле

$$\theta(t) \risingdotseq \int_0^\infty \theta(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

17.5. $e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{1}{p-\lambda}$. Действительно,

$$e^{\lambda t} \risingdotseq \int_0^\infty e^{\lambda t} e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-(p-\lambda)t} dt = -\frac{e^{-(p-\lambda)t}}{p-\lambda}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p-\lambda}.$$

Свойства преобразования Лапласа

17.6. *Линейность.* Если f и g — оригиналы, α и β — числа, то

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha \overline{f}(p) + \beta \overline{g}(p).$$

Это свойство следует непосредственно из определения.

17.7. $\sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

Из равенства $\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$ и примера 17.5 в силу линейности получаем

$$\sin \omega t \risingdotseq \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\Big) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

17.8. $\cos \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2}$.

Аналогично предыдущему, так как $\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$, имеем

$$\cos \omega t \risingdotseq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\Big) = \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

17.9. Точно так же находим формулы

$$\operatorname{sh} \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2-\omega^2} \qquad \operatorname{ch} \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

17.10. *Теорема подобия.* Для любого $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha}\overline{f}\Big(\frac{p}{\alpha}\Big).$$

Эта формула получается заменой переменной в интеграле: $\alpha t = \tau$.

17.11. *Дифференцирование оригинала.* Если функция f такова, что $f^{(n)}(t)$ является оригиналом, то

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n \overline{f}(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

При $n = 1$ формула получается интегрированием по частям. В общем случае с помощью математической индукции (детали вычислений остаются в качестве легкого упражнения).

17.12. *Дифференцирование изображения.* Для любого оригинала $f(t)$

$$\overline{f}^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n t^n f(t).$$

Это свойство получается дифференцированием по параметру p под знаком интеграла. Законность такого дифференцирования имеет место в силу компактной сходимости интеграла от производной в области $\mathrm{Re}\, p > s_0$.

Примеры.

17.13 $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$. В самом деле,

$$(-1)^n t^n \theta(t) \risingdotseq \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)}.$$

Откуда и следует требуемое равенство.

17.14. $t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$.

Аналогично предыдущему следует из равенства

$$(-1)^n t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \left(\frac{1}{p-\lambda}\right)^{(n)}.$$

17.15. Справедливы формулы (при p действительном)

$$t^n \sin \omega t \risingdotseq n! \frac{\mathrm{Im}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}, \quad t^n \cos \omega t \risingdotseq n! \frac{\mathrm{Re}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}},$$

Эти две формулы получаются из 17.14. при $\lambda = i\omega$:

$$t^n e^{i\omega t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-i\omega)^{n+1}} = n! \frac{(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$$

и свойства линейности.

17.16. *Интегрирование оригинала.* Для любого оригинала $f(t)$ имеем

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{\overline{f}(p)}{p}.$$

Если обозначить $g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$, то $g'(t) = f(t)$ и $g(0) = 0$. Поэтому окончательная формула получается из формулы дифференцирования оригинала.

17.17. *Интегрирование изображения.* Если сходится интеграл $\int\limits_p^\infty \overline{f}(p)\, dp$, то

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty \overline{f}(p)\,dp.$$

В самом деле,

$$\int_p^\infty \overline{f}(p)\,dp = \int_p^\infty dp \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Когда путь интегрирования от p до ∞ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant a > s_0$, подынтегральное выражение внутреннего интеграла допускает оценку

$$\left|f(t)e^{-pt}\right| \leqslant Me^{-(a-s_0)t},$$

откуда следует его равномерная сходимость по p. Поэтому можно изменить порядок интегрирования:

$$\int_p^\infty \overline{f}(p)\,dp = \int_0^\infty f(t)dt \int_p^\infty e^{-pt}dp = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-pt}\,dt,$$

откуда и следует требуемое.

17.18. *Теорема запаздывания.* Для любого $\tau > 0$

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}\overline{f}(p).$$

Получается непосредственно из определения заменой $t - \tau = \xi$.

17.19. *Теорема смещения.* Для любого $p_0 \in \mathbb{C}$

$$e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq \overline{f}(p - p_0).$$

Получается непосредственным вычислением.

17.20. Следующие формулы получаются применением предыдущей теоремы к формулам 17.7 и 17.8.

$$e^{\lambda t}\cos\omega t \risingdotseq \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}, \quad e^{\lambda t}\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}.$$

17.21. *Теорема умножения* (Э. Борель) Произведение двух изображений также является изображением и

$$\overline{f}(p)\overline{g}(p) \risingdotseq \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Напомним, что $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = f * g(t)$ называется сверткой функций f и g. Итак, имеем

$$f * g(t) \risingdotseq \int_0^\infty e^{-pt}\Big(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\Big)dt = *$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$* = \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt}g(t-\tau)\,dt = *$$

Полагая во внутреннем интеграле $t - \tau = \xi$, окончательно получаем

$$* = \int_0^\infty e^{-p\tau}f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-p\xi}g(\xi)d\xi = \overline{f}(p)\overline{g}(p).$$

17.22. *Изображение произведения.* Для любых двух оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ с показателями роста соответственно s_1 и s_2

$$f(t)g(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \overline{f}(q)\overline{g}(p-q)\,dq,$$

где $a > s_1$, $\operatorname{Re} p > s_2 + a$.

Для доказательства воспользуемся формулой Мелллина для функции f, которая будет доказана в теореме 17.22 ниже:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{qt}\overline{f}(q)\,dq.$$

Тогда можем написать

$$f(t)g(t) \risingdotseq \int_0^\infty f(t)g(t)e^{-pt}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \Big\{\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{qt}\overline{f}(q)\,dq\Big\}g(t)e^{-pt}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Big\{\overline{f}(q)\int_0^\infty g(t)e^{-(p-q)t}\,dt\Big\}\,dq = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\overline{f}(q)\overline{g}(p-q)\,dq.$$

Что и требовалось доказать.

Использование преобразования Лапласа основано на следующей простой идее. Пусть нам надо решить дифференциальное уравнение. Это, вообще говоря, сложная задача, поэтому к этому дифференциальному уравнению применяют преобразование Лапласа. В силу свойства 17.11. дифференциальное уравнение превращается в алгебраическое для изображения искомой функции. Решение такого уравнения, как правило, гораздо более легкая задача. Очевидно, если бы преобразование Лапласа было обратимо, то для решения исходной задачи достаточно было бы восстановить оригинал от решения алгебраической задачи. Оказывается это тоже гораздо легче, чем решать исходную задачу непосредственно. Именно поэтому следующая теорема является одной из наиболее важных в теории преобразования Лапласа.

Теорема [формула Меллина]. *Если $f(t)$ — оригинал и $\overline{f}(p)$ — его изображение, то в любой точке, где f удовлетворяет условию Гельдера*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\overline{f}(p)\,dp,$$

где $a > s_0$.

Доказательство. Положим $g(t) = e^{-at}f(t)$, где $a > s_0$ и вычислим её преобразование Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-ist}dt = \overline{g}(is) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(a+is)t}\,dt = \overline{f}(a+is).$$

По теореме об обращении преобразования Фурье, имеем

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(a+is)e^{ist}\,ds,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Отсюда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f}(a+is)e^{(a+is)t}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\overline{f}(p)e^{pt}\,dp.$$

Что и требовалось доказать.✌

Вопросы к экзамену по ТФКП

Основные вопросы

1. Комплексные числа, основные свойства, различные модели.
2. Топология и сходимость в $\mathbb{C}$. Примеры.
3. Критерий связности множеств.
4. Теорема о связности отрезка.
5. Теорема о линейной связности открытого связного множества.
6. Сфера Римана и стереографическая проекция, расширенная плоскость.
7. Теорема об образе компакта при непрерывном отображении.
8. Теорема об образе связного множества при непрерывном отображении.
9. Теоремы об общем виде $\mathbb{R}$-линейных и $\mathbb{C}$-линейных отображений.
10. $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$-дифференцируемость, условия Коши-Римана. Примеры.
11. Необходимое и достаточное условие $\mathbb{C}$-дифференцируемости.
12. Комплексное интегрирование. Формула Коши-Грина.
13. Формула Бореля-Помпе́ю.
14. Лемма Гурса́ и её следствия.
15. Теорема о существовании первообра́зной.
16. Теорема о независимости интеграла от кривой.
17. Теорема Коши и её обобщения.
18. Интегральная формула Коши.
19. Теорема о среднем значении голоморфной функции.
20. Принцип максимума модуля голоморфной функции.
21. Теорема об интеграле Коши.
22. Теорема Лиувилля.
23. Теорема Море́ры.
24. Первая теорема Вейерштрасса о рядах.
25. Вторая теорема Вейерштрасса о рядах.
26. Теорема Тэйлора.
27. Неравенства Коши и теорема Лиувилля как следствие теоремы Тэйлора.
28. Основная теорема алгебры.
29. Нули голоморфной функции. Теорема единственности.
30. Степенные ряды. Теорема Абеля.
31. Теорема Лорана.
32. Неравенства Коши и единственность разложения в ряд Лорана.

33. Характеризация устранимой особой точки.
34. Характеризация полюса.
35. Характеризация существенно особой точки.
36. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса.
37. Целые функции. Классификация по типу особенности в ∞.
38. Мероморфные функции в $\mathbb{C}$. Теорема о мероморфных функциях в $\overline{\mathbb{C}}$.
39. Вычеты. Определение и вычисление.
40. Основная теорема о вычетах (Коши) и её следствия.
41. Вычисление интегралов вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\, dx$
42. Вычисление интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$
43. Вычисление интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x} f(x)\, dx$.
44. Логарифмический вычет, теорема.
45. Принцип аргумента.
46. Теорема Руше.
47. Применения теоремы Руше (включая основную теорему алгебры).
48. Вычисление интеграла Дирихле.
49. Теорема о голоморфности изображения.
50. Свойства преобразования Лапласа (в билете будет одно из свойств, например, теорема умножения).
51. Теорема Меллина.

Дополнительные вопросы к экзамену по ТФКП

1. Поле, подполе, примеры.
2. Изоморфизм полей, примеры.
3. Определение поля $\mathbb{C}$.
4. Модуль и аргумент комплексного числа.
5. Показательная и тригонометрическая формы комплексного числа.
6. Формулы Муавра и Эйлера.
7. Извлечение корней n-ой степени из комплексного числа.
8. Окрестность, проколотая окрестность, замкнутая окрестность.
9. Открытое множество, точка прикосновения, предельная точка.

10. Замкнутое множество, внутренняя точка, изолированная точка.
11. Граница множества, континуум.
12. Компактное множество.
13. Компактные множества в $\mathbb{C}$ и их свойства.
14. Связное множество, компонента связности, многосвязное множество.
15. Область, замкнутая область, односвязная и многосвязная область.
16. Функции комплексной переменной, способы задания.
17. Образ множества при отображении, прообраз, их свойства.
18. Окрестность точки ∞, сходимость к ∞, геометрическая интерпретация.
19. Предел функции, критерий Коши, свойства предела.
20. Непрерывность, равномерная непрерывность, примеры.
21. $\mathbb{R}$-линейное и $\mathbb{C}$-линейное отображения и их общий вид.
22. $\mathbb{R}$- и $\mathbb{C}$-дифференцируемость, их связь.
23. Условия Коши-Римана, операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.
24. Голоморфность.
25. Определение интегралов $\int\limits_C f(z)\,dz$, $\int\limits_C f(z)\,|dz|$ и их вычисление.
26. Простая (жорданова) кривая, гладкая кривая, спрямляемая кривая.
27. Предельный переход под знаком интеграла.
28. Вычисление интеграла $\int\limits_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^n\,dz$.
29. Формула Коши и интеграл Коши.
30. Первообра́зная.
31. Равномерная и компактная сходимость ряда.
32. Радиус сходимости степенного ряда и формула Коши-Адамара.
33. Область сходимости ряда Лорана.
34. Неравенства Коши.
35. Классификация особых точек, примеры.

36. Теорема Пикара, примеры.
37. Целая и мероморфная функции. Примеры.
38. Вычет, определение и вычисление.
39. Логарифмический вычет, его значение в нуле и полюсе.
40. Принцип аргумента.
41. Уметь применить теорему Руше для нахождения количества корней в круге.
42. Преобразование Лапласа, оригинал и изображение.
43. Свойства преобразования Лапласа.

19. Список литературы

[1] *Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.

[2] *А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов.* Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1979.

[3] *М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

[4] *И.И. Привалов.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.

[5] *И.А. Александров, В.В. Соболев.* Аналитические функции комплексного переменного. М.: Высшая школа, 1984.

[6] *М.А. Евграфов.* Аналитические функции. М.: Наука, 1991.

[7] *Б.В. Шабат.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969.

[8] *А. Гурвиц, Р. Курант.* Теория функций. М.: Мир, 1968.

[9] *Е. Титчмарш.* Теория функций. М.: Наука, 1980.

[10] *А.В. Бицадзе.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.

[11] *А.И. Маркушевич.* Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1966.

[12] *С. Стоилов.* Теория функций комплексного переменного. Т 1, Т 2, М.: ИИЛ, 1962.

[13] *М.А. Евграфов и др.* Сборник задач по теории аналитических функций. М.: Наука, 1969.

[14] *Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного.

[15] *В.Ф. Чудесенко.* Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. М.: Высшая школа, 1982.

[16] Математический энциклопедический словарь. Под ред. Ю.В. Прохорова, М.: "Советская энциклопедия", 1988.

[17] *Н. Бурбакú.* Очерки по истории математики. М.: ИИЛ, 1963.

[18] *Н. Бурбакú.* Топологические векторные пространства. М.: ИИЛ, 1959.

[19] *Х. Шефер.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.

[20] *Л. Янг.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М:. Мир, 1974.

Учебное издание
Юрий Александрович Клевчихин
Теория функций комплексной переменной
(лекции)

Компьютерный набор и вёрстка Ю.А. Клевчихин

ЛР 020277 от 18.02.01. Подписано в печать 4.10.2002
Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 9,1, уч.-изд. л. 7,9
Тираж 100 экз.
Издательство Дальневосточного университета
690650, г. Владивосток, ул. Октябрьская, 27

Отпечатано в учебно-полиграфическом комплексе
Института математики и компьютерных наук ДВГУ
690650, г. Владивосток, ул. Октябрьская, 27