Ю.А. Клевчихин

Материалы к коллоквиуму 1

(март 2015)

$\boxed{\int}$

Владивосток
2015

Коллоквиум I

Здесь перечисляются определения и теоремы к коллоквиуму в той последовательности, в которой они встречались в лекциях. Все они сформулированы в краткой в символьной форме. Так можно выписывать их как ответы на вопросы во время защиты написанного по вопросам коллоквиума. Разумеется, нужно уметь пояснить все более подробно. Доказательства надо читать в соответствующих лекциях.

Неопределелённый интеграл

Точная первообразная.

F — точная первообразная для f на $[a;b] \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall x \in [a;b] \quad F'(x) = f(x).$$

Теорема (о том, что две точные первообразные для одной и той же функции могут отличаться только на константу).

$$F_1' = f \wedge F_2' = f \Rightarrow \exists C = \text{const} : F_1 - F_2 = C.$$

Первообразная (обобщённая).

F — первообразная (обобщённая) для f на $[a;b] \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

- $F \in C[a;b]$;
- $F'(x) = f(x)$ всюду, кроме конечного множества точек из $[a;b]$.

Теорема (о том, что две первообразные для одной и той же функции могут отличаться только на константу).

$$F_1, F_2 \text{ — первообразные для f на } [a;b] \Leftrightarrow \\ \exists C = \text{const} : F_1 - F_2 = C.$$

Свойства неопределенного интеграла:

Теорема (линейность) *Если f, g имеют первообразные, то*

$$\forall \alpha, \beta \int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx.$$

Теорема (формула интегрирования по частям)

$$\int f(x) g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx.$$

Теорема (формула замены переменной)

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Rightarrow \int f'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = F\big(\varphi(t)\big) + C$$

Интегрирование рациональных дробей:

- Простейшая дробь типа I $\frac{A}{x-x_0}$
- Простейшая дробь типа II $\frac{A}{(x-x_0)^n}$, $n > 1$
- Простейшая дробь типа III $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где $p^2 - 4q < 0$
- Простейшая дробь типа IV $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, где $p^2 - 4q < 0$, $n > 1$.

Теорема (об интегрировании простейших дробей типа 1,2,3) *Справедливы равенства*:

$\int \frac{A}{x-x_0} dx = \ln|x - x_0| + C;$

$\int \frac{A}{(x-x_0)^n} dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{A}{(x-x_0)^{n-1}}$

$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \ln|x^2 + px + q| + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$

Теорема (об интегрировании простейших дробей типа 4)

Теорема 1 (о разложении на простые дроби). *Если* $\deg P < n + \deg Q$, *то* $\exists A \in \mathbb{R}$ *и* $\exists R(x) : \deg R < n - 1 + \deg Q$ *и*

$$\frac{P(x)}{(x-x_0)^n Q(x)} = \frac{A}{(x-x_0)^n} + \frac{R(x)}{(x-x_0)^{n-1} Q(x)}$$

Теорема 2 (о разложении на простые дроби). *Если* $\deg P < 2n + \deg Q$, *то* $\exists M, N \in \mathbb{R}$ *и* $\exists R(x) : \deg R < 2n - 1 + \deg Q$ *и*

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^n Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} + \frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{n-1} Q(x)}.$$

Написать как будет выглядеть разложение на простые дроби следующей правильной дроби (например, а вообще-то у каждого своя дробь):

$$\frac{1 + x^3 - x^6 + x^{12}}{(x+1)^4 (x-2)(x^2+x+2)^3 (x^2+x+1)}$$

Теорема (интегралы вида $\int R\Big(x; \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\Big) dx$).

Подстановка $\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} = t$ приводит подынтегральное выражение к рациональной дроби, следовательно такие интегралы выражаются через элементарные функции.

Теорема (интегралы вида $\int R(x; \sqrt{ax^2+bx+c})dx$).

Вычисление интеграла сводится к интегралу от дробно-рациональной функции одной из подстановок Эйлера. Следовательно такие интегралы выражаются через элементарные функции.

Подстановками Эйлера называют следующие замены переменной

- $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t$, при $a > 0$;
- $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$, при $c > 0$;
- $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1)t$, где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Теорема (интегралы вида $\int x^m(ax^n+b)^p dx$).

Вычисление интеграла от биномиального дифференциала в трех исключительных случаях:

1) p — целое;
2) $\frac{m+1}{n}$ — целое;
3) $\frac{m+1}{n}+p$ — целое;

сводится к интегралу от дробно-рациональной функции одной из подстановок Чебышёва, следовательно такие интегралы выражаются через элементарные функции. В остальных случаях интеграл от биномиального дифференциала через элементарные функции не выражается.

Подстановками Чебышёва называют замены переменной в интеграле по формулам:

- когда p — целое: $x^q = t$, q — наименьший общий знаменатель рациональных чисел m и n.
- когда $\frac{m+1}{n}$ — целое: $ax^n+b = t^N$, где N — знаменатель рационального числа p;
- когда $\frac{m+1}{n}+p$ — целое: $a+bx^{-n} = t^N$, где N — знаменатель рационального числа p.

Теорема (интегралы вида $\int R(\sin x; \cos x)\, dx$)

Подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ приводит к интегралу от дробно-рациональной функции, поэтому такие интегралы выражаются через элементарные функции.

При выполнении подстановки используются следующие тригонометрические формулы: $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Определённый интеграл

Основные обозначения.

- Разбиением τ отрезка $[a;b]$ называется совокупность точек $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$;
- x_k — точки разбиения, $k = 0, 1, \dots, n$;
- $\Delta_k = [x_{k-1}; x_k]$ — отрезки разбиения;
- $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ — длина отрезка разбиения Δ_k.
- $\xi = \{\xi_1; \xi_2, \dots, \xi_n\}$, где $\forall k\ \xi_k \in \Delta_k$, называют выборкой, соответствующей разбиению τ.
- $\lambda(\tau) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k$ — мелкость разбиения — длина наибольшего отрезка разбиения.
- Интегральная сумма Римана $\sigma(f;\tau,\xi) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

Определение. (предела интегральных сумм Римана) Число I называется пределом интегральных сумм Римана при мелкости разбиений стремящейся к нулю, когда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \forall\xi\ |\sigma(f;\tau,\xi) - I| < \varepsilon.$$

Теорема (об ограниченности интегрируемой функции). Если $f \in \mathscr{R}[a;b]$, то $f \in \mathcal{B}[a,b]$.

Суммы Дарбу и их 5 свойств. Верхней суммой Дарбу называют $\sum\limits_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$, а нижней суммой Дарбу называют $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$, где

$m_k = \inf\limits_{x\in\Delta_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x\in\Delta_k} f(x)$.

Они обладают следующими свойствами:

1) $\forall\tau\forall\xi \underline{s}(f;\tau) \leqslant \sigma(f;\tau;\xi) \leqslant \overline{S}(f;\tau)$.
2) $\overline{S}(f;\tau) = \sup\limits_{\xi} \sigma(f;\tau;\xi)$ и $\underline{S}(f;\tau) = \inf\limits_{\xi} \sigma(f;\tau;\xi)$.
3) $\tau_1 \leqslant \tau_2) \Rightarrow \underline{S}(f;\tau_1) \geqslant \underline{S}(f;\tau_2)$ и $\overline{S}(f;\tau_1) \geqslant \overline{S}(f;\tau_2)$
4) $\forall\tau_1,\tau_2\ \underline{S}(f;\tau_1) \leqslant \overline{S}(f;\tau_2)$
5) $\exists\overline{I},\underline{I}$: $I = \inf\limits_{\tau} \overline{S}(f;\tau)$, $\underline{I} = \sup\limits_{\tau} \underline{S}(f;\tau)$ $\forall\tau\underline{S}(f;\tau) \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}(f;\tau)$.

Теорема (Критерий 1 интегрируемости по Риману).

$$f \in \mathscr{R}[a,b] \Leftrightarrow$$
$$f \in \mathcal{B}[a,b] \wedge \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \overline{S}(f;\tau) - \underline{S}(f;\tau) < \varepsilon.$$

Теорема (Критерий 2 интегрируемости по Риману).

$$f \in \mathscr{R}[a,b] \Leftrightarrow f \in \mathcal{B}[a,b] \wedge \forall\varepsilon > 0\ \exists\tau : 0 \leqslant \overline{S}(f;\tau) - \underline{S}(f;\tau) < \varepsilon.$$

Теорема (об интегрируемости непрерывной функции)

$$f \in C[a;b] \Rightarrow f \in \mathscr{R}[a,b]$$

Теорема (об интегрируемости функции, имеющей конечное множество точек разрыва).

Если $f \in \mathcal{B}[a,b]$ и непрерывна всюду за исключением конечного множества точек, то $f \in \mathscr{R}[a,b]$.

Теорема (об интегрируемости монотонной функции)

Если f монотонна на $[a;b]$, то $f \in \mathscr{R}[a,b]$.

Свойства интегрируемых функций

Теорема. $f \in \mathscr{R}[a,b] \Rightarrow |f| \in \mathscr{R}[a,b]$

Теорема. $f \in \mathscr{R}[a,b] \wedge k \in R \Rightarrow kf \in \mathscr{R}[a,b]$

Теорема. $f; g \in \mathscr{R}[a,b] \Rightarrow (f+g) \in \mathscr{R}[a,b]$

Теорема. $f; g \in \mathscr{R}[a,b] \Rightarrow f \cdot g \in \mathscr{R}[a,b]$

Теорема. $f \in \mathscr{R}[a,b] \wedge [c;d] \subset [a;b] \Rightarrow f \in \mathscr{R}[c;d]$

Теорема. $f \in \mathscr{R}[a,b] \wedge f \in \mathscr{R}[b;c] \Rightarrow f \in \mathscr{R}[a;c]$

Свойства интеграла

Теорема (Линейность интеграла)

$$f; g \in \mathscr{R}[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Теорема (Аддитивность интеграла) Если f интегрируема по Риману на бóльшем из промежутков $[a;b]$, $[a;c]$ или $[c;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$

Теорема (Положительность интеграла)

$$f \in \mathscr{R}[a,b] \wedge f > 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx > 0:$$

Теорема (Монотонность интеграла)

$$f, g \in \mathscr{R}[a,b] \wedge f \leqslant g \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

Теорема (Неравенство для модуля интеграла)

$$f \in \mathscr{R}[a,b] \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$$

Теорема (Простейшая теорема о среднем)

$$f \in \mathscr{R}[a,b] \wedge m \leqslant f(x) \leqslant M \Rightarrow \exists \mu \in [m;M] : \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$$

Вычисление интеграла

Теорема (о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом)

$$f \in \mathscr{R}[a,b] \wedge F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F \in C[a;b].$$

Теорема (о дифференцируемости в точке)

Если $f \in \mathscr{R}[a,b]$ и f — непрерывна в точке $x_0 \in [a;b]$, то $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ — дифференцируема в точке x_0.

Теорема (Формула Ньютона-Лейбница)

$$f \in \mathscr{R}[a,b] \wedge \Phi \text{ — первообразная для } f \text{ на } [a;b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b$$

Теорема (Формула интегрирования по частям)

$$f, g, f', g' \in \mathscr{R}[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(t)g(x)\,dx$$

Теорема (1 о замене переменной). Если $f \in C[A;B]$, а $\varphi \in C^1[\alpha;\beta]$, $\varphi : [\alpha;\beta] \to [A;B]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$$

Теорема (2 о замене переменной) Если $f \in \mathscr{R}[a,b]$, а $\varphi \in C^1[\alpha;\beta]$, $\varphi \uparrow [\alpha;\beta]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$$

Первая теорема о среднем

$$f; g \in \mathscr{R}[a,b] \wedge g > 0 \wedge m \leqslant f(x) \leqslant M \Rightarrow$$
$$\exists \mu \in [m;M] : \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

Теорема (1-ая формула Боннэ)

$$0 \leqslant f \downarrow [a;b] \wedge g \in \mathscr{R}[a,b] \Rightarrow$$
$$\exists \xi \in [a;b] : \quad \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)\,dx$$

Теорема (2-ая формула Боннэ)

$$0 \leqslant f \uparrow [a;b] \wedge g \in \mathscr{R}[a,b] \Rightarrow$$
$$\exists \xi \in [a;b] : \quad \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_\xi^b g(x)\,dx$$

Вторая теорема о среднем. Если f монотонна на $[a;b]$, а $g \in \mathscr{R}[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int\limits_\xi^b g(x)\,dx$$

Некоторые вопросы и правильные ответы на них

Здесь в вопросах как правило опущены слова «Что такое». За строкой вопроса идёт строка (или больше) ответа.

– Точная первообра́зная функции f на промежутке $[a; b]$.
– Это такая функция F, что $\forall x \in [a; b]$ имеем $F'(x) = f(x)$.

– (Обобщённая) первообра́зная функции f на промежутке $[a; b]$.
– Это функция $F : [a; b] \to \mathbb{R}$, со свойствами:

1) F непрерывна на $[a; b]$;
2) $F'(x) = f(x)$ для всех, за исключением конечного множества точек $x \in [a; b]$.

– Неопределённый интеграл $\displaystyle\int f(x)\,dx$.
– Это совокупность всех первообразных для функции f.

– Простейшая дробь вида 1, 2, 3, 4
– Это соответственно дроби $\frac{A}{x-x_0}$, $\frac{A}{(x-x_0)^n}$, $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, здесь $n > 2$, $p^2 - 4q < 0$.

– Правильная дробь
– Это функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где P, Q — многочлены, причём $\deg P < \deg Q$ и P, Q не имеют общих корней (значит, дробь несократима).

– Дробно-рациональная функция двух переменных $R(u; v)$
– Это функция вида $R(u; v) = \frac{P(u;v)}{Q(u;v)}$, где P, Q — многочлены от двух переменных u, v. Многочлен от двух переменных $P(u; v)$ — это сумма $\sum_{k=1}^{n} P_k(u; v)$, где

$$P_k(u; v) = a_{k,0}u^k + a_{k-1,1}u^{k-1}v + a_{k-2,2}u^{k-2}v^2 + \cdots + a_{0,k}v^k$$

($P_k(u; v)$ называют однородным многочленом степени k от двух переменных.)

– Биномиальный дифференциал
– Это выражение вида $x^m(ax^n + b)^p\,dx$, где m, n, p — рациональные числа, a, b — произвольные константы из $\mathbb{R}$.

– Подстановки Эйлера
– Это замены переменной $x \to t$ по формулам

- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x \pm t$, при $a > 0$;
- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$, при $c > 0$;
- $\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = (x - x_1)t$, где x_1, x_2 — корни $ax^2 + bx + c = 0$.

Применяются для вычисления интегралов вида $\int R(x; \sqrt{ax_2 + bx + c}\, dx$.

– Подстановки Чебышёва

– Это замены переменной $x \to t$ в интеграле $\int x^m (ax^n + b)^p \, dx$ по формулам:

- когда p — целое: $x^q = t$, q — наименьший общий знаменатель рациональных чисел m и n.
- когда $\frac{m+1}{n}$ — целое: $ax^n + b = t^N$, где N — знаменатель рационального числа p;
- когда $\frac{m+1}{n} + p$ — целое: $a + bx^{-n} = t^N$, где N — знаменатель рационального числа p.

– Разбиение τ (отрезка $[a; b]$)
– Это множество точек $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$.

– Отрезок разбиения Δ_k
– Это множество $\Delta_k = [x_{k-1}; x_k]$.

– Что такое Δx_k ?
– Это длина отрезка Δ_k : $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

– Мелкость разбиения $\lambda(\tau)$
– Это длина наибольшего отрезка разбиения: $\lambda(\tau) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k$.

– Выборка ξ (соответствующая разбиению τ)
– Это множество точек ξ_k, выбранных по одной из каждого отрезка Δ_k, $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, $\forall k \; \xi_k \in \Delta_k$.

– Интегральная сумма Римана $\sigma(f; \tau; \xi)$
– По определению это такая сумма:

$$\sigma(f; \tau; \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

– Верхняя сумма Дарбу.
– Для функции f, соответствующая разбиению τ, — это сумма

$$\overline{S}(f; \tau) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k; \quad M_k \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \Delta_k} f(x).$$

– Нижняя сумма Дарбу

– Для функции f, соответствующая разбиению τ, — это сумма

$$\underline{s}(f;\tau) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k; \quad m_k \overset{\text{def}}{=} \inf_{x\in\Delta_k} f(x).$$

– Верхний интеграл Дарбу
– Это $\overline{I} = \inf\limits_{\tau} S(f;\tau)$.

– Нижний интеграл Дарбу
– Это $\underline{I} = \sup\limits_{\tau} S(f;\tau)$

– Предел интегральных сумм Римана
– $I = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma(f;\tau;\xi) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \forall\xi\ \left|\sigma(f;\tau;\xi) - I\right| < \varepsilon.$$

Что означает, что предел интегральных сумм равен ∞?
– $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma(f;\tau;\xi) = \infty \overset{\text{def}}{=}$

$$\forall E > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \forall\xi \bigl|\sigma(f;\tau;\xi)\bigr| > E.$$

– Интегрируемая по Риману функция
– На отрезке $[a;b]$ это такая функция, у которой существует ***конечный*** предел $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma(f;\tau;\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

— Что означает, что функция не интегрируема по Риману на $[a;b]$?
— Это означает, что предела интегральных сумм Римана либо не существует, либо он равен бесконечности.

— Что такое функция ограниченной вариации?
— Говорят, что f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a;b]$, если $\exists M\ \forall\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$

$$\sum_{k=1}^{n} \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| \leqslant M.$$

Наименьшая из констант M с этим свойством называется вариацией функции f на $[a;b]$ и обозначается $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(x)$.