Разбор заданий экзамена

Январь 2023

Глава 1

Вариант 6

1.1 Задание 2

Найти область сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, 5^{-n^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{n|x|}}$$

$$dom(\sum) = \{x : x \neq 0\}$$

Коши

$$C_n = \sqrt[n]{|U_n(x)|} = \sqrt[n]{5^{-n^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{n|x|}}} = 5^{-n \operatorname{arctg} \frac{1}{n|x|}}$$

$C_n \to q < 1$ - сходится
$C_n \to q > 1$ - расходится
$C_n \to q = 1$ - не ясно

$$\lim_{n\to\infty} 5^{-n \operatorname{arctg} \frac{1}{n|x|}} = \lim_{n\to\infty} 5^{-n \frac{1}{n|x|}} = 5^{-\frac{1}{|x|}} < 1 \iff \forall x \neq 0$$

Обл. сх $(\sum) = \{x : x \neq 0\}$

1.2 Задание 7

С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл

$$f(a,b,c) = \int_0^\infty \ln\frac{b^2+x^2}{c^2+x^2}\cos ax dx$$

Считаем a, b, c > 0

$$\frac{\delta f}{\delta b} = \int_0^\infty \frac{c^2+x^2}{b^2+x^2}\frac{2b}{c^2+x^2}dx = (*)$$

*// Формулы, которые надо знать к экзамену:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}sgna - \textbf{Дирихле}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} - \textbf{Эйлера-Пуассона}$$

$$\int_0^\infty \sin ax^2 dx = \int_0^\infty \cos ax^2 dx - \textbf{Френеля}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}dx; \quad \int_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^2}dx - \textbf{Лапласа}$$

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx - \textbf{Фруллани}$$

Интегралы Эйлера

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

$$(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

//*

$$(*) = 2\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2}d\left(\frac{x}{b}\right) = \left|\frac{x}{b} = t\right| = \int_0^\infty \frac{\cos abt}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}e^{-|ab|}$$

(нашли производную, теперь интегрируем)

$$f(a,b,c) = \frac{\pi}{2}\int e^{-|ab|}db = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{|a|}e^{-|ab|} + c(a,c).$$

$$f(a,c,c) = 0 = -\frac{\pi}{2a}e^{-ac} + c(a,c)$$

$$c(a,c) = \frac{\pi}{2a}e^{-ac}$$

И так

$$f(a,c,c) = 0 = -\frac{\pi}{2a}e^{-ab} + \frac{\pi}{2a}e^{-ac} = \frac{\pi}{2a}e^{-a}\left(e^{c} - e^{b}\right)$$

(ps: модуль можно не писать a, b, c $>$ 0)