МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)
Департамент математического и компьютерного моделирования

Максимов П.А.

Сборник задач по дисциплине «Дифференциальные уравнения»

г. Владивосток
2023

Содержание

Раздел I

Системы линейных дифференциальных уравнений.

1. Системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

В данном разделе будем рассматривать системы линейных уравнений вида:

$$\underline{\dot{x}} = A(t)\cdot\underline{x} + \underline{f}(t),\ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},\ \underline{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Здесь $\underline{x}$ – вектор искомых функций, $A(t)$ – квадратная матрица размерности $n\times n$, $\underline{f}(t)$ – вектор функций неоднородности уравнения. Для систем линейных уравнений можно определить характеристику по следующим условиям:

1. Если $\underline{f}(t) = \underline{0}$ – уравнение является однородным, иначе – неоднородное;
2. Если $A_{n\times n}$ – const – система является системой уравнений с постоянными коэффициентами. Если матрица в явном виде зависит от t – система является системой уравнений с переменными коэффициентами.

В дальнейшем будем рассматривать системы линейных уравнений с вещественными постоянными коэффициентами:

$$\dot{x} = Ax + f(t).$$

Как и в случае линейных уравнений первого порядка, для построения общего решения необходимо согласно принципу суперпозиции найти все частные однородные решения, затем частное неоднородное решение, и сложить их:

$$x = \sum_{k=1}^{n} C_k x_k + x_p.$$

Общее однородное решение уравнения с постоянными коэффициентами возможно представить следующим образом:

$$x(t) = e^{At}\cdot\underline{C}.$$

Здесь e^{At} – фундаментальная матрица. Производная такой матричной функции выносит матрицу A как сомножитель:

$$\dot{x} = A\cdot e^{At}\cdot\underline{C} = Ax,$$

что удовлетворяет однородному уравнению, а значит является однородным решением.

Положим, что матрицу A можно разложить по собственным значениям и собственным векторам:

$$A = PJP^{-1},$$

где J – матрица жордановой формы, P – матрица преобразования. Тогда, проведем замену в уравнении:

$$\dot{x} = PJP^{-1}x + f(t).$$

Домножим всё уравнение на P^{-1} слева, и сделаем замену $y = P^{-1}x$, $g = P^{-1}f$. Тогда $\dot{y} = P^{-1}\dot{x}$ в силу постоянности матрицы P, и уравнение принимает следующий вид:

$$\dot{y} = Jy + g(t).$$

Матрица J является обобщенной блочно-диагональной матрицей, блоки которой могут быть представлены матрицами следующего вида:

$$J_p^{l\times l} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{l-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_l \end{pmatrix}, \; J_d^{l\times l} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \; J_c^{2\times 2} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

и матрица J представима в виде таких блоков:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & J_k \end{pmatrix}$$

при чем $\dim J = \sum\limits_{m=1}^{k} \dim J_m = n \times n$. Общее однородное решение уравнения представимо в виде:

$$y = e^{Jt} \cdot \underline{C}.$$

Для построения общего однородного решения в явном виде, необходимо построить фундаментальную матрицу e^{Jt}. Разложим функцию e^x в ряд Маклорена:

$$e^z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots .$$

Область сходимости этого ряда $z \in \mathbb{R}$, но можно показать, что данный ряд справедлив и для $z \in \mathbb{C}$. Подставим вместо z матричное выражение Jt. Тогда:

$$e^{Jt} = \sum_{m=1}^{\infty} J^m \cdot \frac{t^m}{m!} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{m=1}^{\infty} J_1^m \cdot \frac{t^m}{m!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum\limits_{m=1}^{\infty} J_k^m \cdot \frac{t^m}{m!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_{k-1} t} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{J_k t} \end{pmatrix}.$$

Выпишем каждый случай отдельно:

1. Вещественные простые собственные значения (случай матрицы $J_p^{l\times l}$):

$$e^{J_p^{l\times l} t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_{l-1} t} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_l t} \end{pmatrix};$$

2. Вещественные кратные собственные значения (случай матрицы $J_d^{l\times l}$):

$$e^{J_d^{l\times l}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & \frac{t}{1!}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!}e^{\lambda t} & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{l-3}}{(l-3)!}e^{\lambda t} & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t} & \frac{t}{1!}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix};$$

3. Комплексно-сопряженные собственные значения (случай обобщенной матрицы $J_c^{2\times 2}$):

$$e^{J_c^{2\times 2}t} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & -e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}\sin\beta t & e^{\alpha t}\cos\beta t \end{pmatrix}.$$

Общее однородное решение исходного уравнения тогда можно представить в следующем виде:

$$x = Py = P\cdot e^{Jt}\cdot \underline{C},$$

где P – матрица преобразования.

С другой стороны, общее решение можно составить на основе собственных векторов и собственных значений матрицы A. Положим, что $\underline{v}_k$ – собственный вектор для собственного значения λ_k. Тогда рассмотрим все возможные случаи общего решения:

1. Вещественные простые собственные значения $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} C_k\underline{v}_k\cdot e^{\lambda_k t} = C_1\underline{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n\underline{v}_n e^{\lambda_n t};$$

2. Вещественные собственные значения кратности $p \leq n$, линейно-зависимые – $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p \neq \lambda_{p+1} \neq \cdots \lambda_n$:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{p} C_k\left(\sum_{i=1}^{k}\underline{v}_i\frac{t^{k-i}}{(k-i)!}\right)e^{\lambda_k t} + \sum_{k=p+1}^{n} C_k\underline{v}_k e^{\lambda_k t} = \\ &= C_1\underline{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\left(\underline{v}_1 t + \underline{v}_2\right)e^{\lambda_2 t} + C_3\left(\underline{v}_1\frac{t^2}{2!} + \underline{v}_2 t + \underline{v}_3\right)e^{\lambda_3 t} + \cdots + C_{p+1}\underline{v}_{p+1}e^{\lambda_{p+1}t} + \cdots \end{aligned};$$

3. Комплексно-сопряженные собственные значения $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$:

$$x = C_1 e^{\alpha t}\,\mathrm{Re}\left(\underline{v}_1 e^{i\beta t}\right) + C_2 e^{\alpha t}\,\mathrm{Im}\left(\underline{v}_1 e^{i\beta t}\right).$$

Замечание

Для представления $A = PJ_c^{2\times 2}P^{-1}$, матрица P строится следующим образом:

$$P = \begin{pmatrix}\underline{v}_1 & \underline{v}_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

где $\underline{v}_1$ – собственный вектор-столбец, отвечающий за собственное значение $\alpha + i\beta$, а $\underline{v}_2$ – комплексно-сопряженный собственный вектор.

1.1. Примеры

Рассмотрим пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y, \\ \dot{y} = -9x - 7y. \end{cases}$$

Выпишем матрицу данной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -9 & -7 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные значения и собственные вектора:

$$\det|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -9 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = -1.$$

Данные собственные значения являются кратными, и rank $(A - \lambda_1 I) = 1$, тогда число линейно-независимых векторов: $2 - 1 = 1$. Таким образом, данные собственные значения линейно-зависимы. Построим первый ненулевой собственный вектор:

$$\lambda_1 = -1: \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} \cdot \underline{v}_1 = \underline{0} \implies \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Найдем второй собственный вектор. Так как в системе возможно выделить всего один линейно-независимый собственный вектор, то второй является присоединенным к первому:

$$\lambda_2 = -1: \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} \cdot \underline{v}_2 = \underline{v}_1 \implies \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Запишем общее решение уравнения:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] e^{-t}.$$

Посмотрим, как выглядят жорданова форма решения и матрица преобразования. Так как $\underline{v}_1$ является единственным линейно-независимым вектором, а $\underline{v}_2$ построен на основе первого, то в жордановой форме справа от первого собственного значения появляется число 1. Матрица преобразования строится по такому принципу – в столбцах будут расположены собственные вектора в порядке возрастания зависимости. Тогда матрицы имеют следующий вид:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если перемножить PJP^{-1}, то получится в точности матрица A. Тогда в матричной форме, согласно случаю кратных собственных значений, решение можно записать так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим другой пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$$

Выпишем матрицу данной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные значения и собственные вектора:

$$\det|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \implies \lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

В результате собственные значения представляют собой комплексно-сопряженную пару. Найдем первый собственный вектор:

$$\lambda_1 = 2+i: \begin{pmatrix} 3-i & -2 \\ 5 & -3-i \end{pmatrix} \cdot \underline{v}_1 = \underline{0} \implies \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3+i \\ 5 \end{pmatrix},\ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3-i \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Распишем общее решение:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= C_1 \begin{pmatrix} 3+i \\ 5 \end{pmatrix} e^{2t}(\cos t + i\sin t) + C_2 \begin{pmatrix} 3-i \\ 5 \end{pmatrix} e^{2t}(\cos t - i\sin t) = \\
&= \begin{pmatrix} 3C_1\cos t - C_1\sin t + 3C_2\cos t - C_2\sin t + i\,(C_1\cos t + 3C_1\sin t - C_2\cos t - 3C_2\sin t) \\ 5C_1\cos t + 5C_2\cos t + i\,(5C_1\sin t - 5C_2\sin t) \end{pmatrix} e^{2t} = \\
&= \begin{pmatrix} (3C_1 + 3C_2 + iC_1 - iC_2)\cos t + (-C_1 - C_2 + 3iC_1 - 3iC_2)\sin t \\ (5C_1 + 5C_2)\cos t + (5iC_1 - 5iC_2)\sin t \end{pmatrix} e^{2t} = \star
\end{aligned}$$

В силу произвольности постоянных, сделаем переобозначение $\tilde{C}_1 = C_1 + C_2,\ \tilde{C}_2 = iC_1 - iC_2$:

$$\star = \begin{pmatrix} \left(3\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2\right)\cos t + \left(-\tilde{C}_1 + 3\tilde{C}_2\right)\sin t \\ 5\tilde{C}_1\cos t + 5\tilde{C}_2\sin t \end{pmatrix} e^{2t} = \tilde{C}_1 \begin{pmatrix} 3\cos t - \sin t \\ 5\cos t \end{pmatrix} e^{2t} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} 3\sin t + \cos t \\ 5\sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

При этом:

$$\mathrm{Re}\left[\begin{pmatrix} 3+i \\ 5 \end{pmatrix} e^{it}\right] = \begin{pmatrix} 3\cos t - \sin t \\ 5\cos t \end{pmatrix},\ \mathrm{Im}\left[\begin{pmatrix} 3+i \\ 5 \end{pmatrix} e^{it}\right] = \begin{pmatrix} 3\sin t + \cos t \\ 5\sin t \end{pmatrix}.$$

Аналогично, построим жорданову форму и матрицу преобразования матрицы A. Для этого воспользуемся замечанием:

$$P = \begin{pmatrix} 3+i & 3-i \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

При этом, $PJP^{-1} = A$. Таким образом, общее решение можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t & -e^{2t}\sin t \\ e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим последний пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -4x + 4y, \\ \dot{z} = -2x + y + 2z. \end{cases}$$

Выпишем матрицу данной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для данной матрицы $\lambda_{1,2,3} = 2$. Построим собственные вектора:

$$\lambda_1 = 2: \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{v}_1 = \underline{0} \implies \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В данной системе существует два линейно-независимых собственых вектора: rank $(A - \lambda_1 I) = 1$, $3 - 1 = 2$. Соответственно, третий собственный вектор должен быть построен на основе предыдущего. Но в данном случае, невозможно построить третий вектор на основе или первого или второго. Но можно построить на основе вектора $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда переобозначим $\underline{\tilde{v}}_2 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$, и найдем присоединенный собственный вектор:

$$\lambda_1 = 2: \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Построим жорданову форму и матрицу преобразования:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

А общее решение принимает вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix},$$

или, в другой форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

1.2. Задачи

Построить общее решение следующих двумерных систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

1. $\begin{cases} \dot{x} = -5x, \\ \dot{y} = 6x - 3y. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 4x, \\ \dot{y} = -2x. \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -4x - 3y. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 6x, \\ \dot{y} = 6y - 8x. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -2x, \\ \dot{y} = 12x + 2y. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 5x, \\ \dot{y} = 7y - 8x. \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y, \\ \dot{y} = 8x + 9y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2y - x. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 11x, \\ \dot{y} = y - 9x. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 4y. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dot{x} = y - 7x, \\ \dot{y} = -4x - 3y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 10y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} \dot{x} = 8x - 4y, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} \dot{x} = 8x + 4y, \\ \dot{y} = -9x - 4y. \end{cases}$ **19.** $\begin{cases} \dot{x} = -7x - 5y, \\ \dot{y} = 10x + 3y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - y, \\ \dot{y} = x - 6y. \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y, \\ \dot{y} = 5x - 2y. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} \dot{x} = 9x - 4y, \\ \dot{y} = 10x - 3y. \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} \dot{x} = 8x + 6y, \\ \dot{y} = -15x - 10y. \end{cases}$

Построить общее решение следующих трехмерных систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

21. $\begin{cases} \dot{x} = x - z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = z. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y - 4z, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{z} = x - 2y. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 8z - x - 7y, \\ \dot{z} = 5z - x - 4y. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = 2z - x, \\ \dot{y} = 3y + z - 2x, \\ \dot{z} = 7z - 8x. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = 7y + 5z - x, \\ \dot{y} = -x - 7y - 4z, \\ \dot{z} = x + 9y + 6z. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 12y + 9z, \\ \dot{y} = 4z - 3y, \\ \dot{z} = 3z - 2y. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x - 7z, \\ \dot{y} = x - y - 5z, \\ \dot{z} = y - 4z. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = 3y - 2z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = 3x - y + z. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 3x - 8z, \\ \dot{y} = 6x - 5y + 12z, \\ \dot{z} = 3z - 5y - 3x. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = 4z - 8x - 18y, \\ \dot{y} = 3x + 7y - 2z, \\ \dot{z} = 4x + 12y + 5z. \end{cases}$

Для следующих матричных систем линейных уравнений найти обобщенную жорданову форму, матрицу преобразования и фундаментальную матрицу:

31. $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \cdot x$

32. $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot x$

33. $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot x$

34. $\dot{x} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \cdot x$

35. $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$

36. $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} \cdot x$

37. $\dot{x} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot x$

38. $\dot{x} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 10 & -7 \end{pmatrix} \cdot x$

39. $\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x$

40. $\dot{x} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -6 \end{pmatrix} \cdot x$

41. $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot x$

42. $\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot x$

43. $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot x$

44. $\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & -7 & 0 \\ -5 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot x$

45. $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot x$

46. $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$

47. $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot x$

48. $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 \\ -1 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot x$

49. $\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 8 & -9 & 4 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot x$

50. $\dot{x} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -7 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x$

2. Системы линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами

В данном разделе рассматривать будем системы следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + f(t),$$

где A – квадратная постоянная матрица $n \times n$, f – правая часть, вектор функций неоднородности уравнения. Будем полагать, что однородное решение уравнения известно в следующем виде:

$$x(t) = \Phi(t) \cdot \underline{C},$$

где Φ – фундаментальная матрица, при этом $\dot{\Phi} = A\Phi$. Для построения общего неоднородного решения можно воспользоваться методом вариации произвольных постоянных. Положим $\underline{C} = \underline{C}(t)$. Тогда общее неоднородное решение будем искать в следующем виде:

$$x_{nh}(t) = \Phi(t) \cdot \underline{C}(t).$$

Найдем производную:

$$\dot{x} = \dot{\Phi} \cdot \underline{C} + \Phi \cdot \dot{\underline{C}} = A\Phi \cdot \underline{C} + \Phi \cdot \dot{\underline{C}}.$$

Подставим в исходное неоднородное уравнение:

$$A\Phi \cdot \underline{C} + \Phi \cdot \dot{\underline{C}} = A\Phi \cdot \underline{C} + f(t).$$

Упростим выражение, и домножим всё уравнение слева на обратную матрицу к матрице Φ. При этом, Φ^{-1} существует, так как содержит в себе n линейно-независимых столбцов частных однородных решений. Получим:

$$\dot{\underline{C}} = \Phi^{-1} \cdot f(t).$$

Выпишем k-е уравнение системы:

$$\dot{C}_k = \Phi_k^{-1} \cdot f(t).$$

Здесь Φ_k^{-1} – k-я строка матрицы Φ^{-1}. В общем случае будем полагать, что применение оператора интегрирования на вектор функций является тем же, что и применение оператора интегрирования на каждый компонент этого вектора:

$$\underline{C}(t) = \int \Phi^{-1}(t) \cdot \underline{f}(t)\ dt = \begin{pmatrix} \int \Phi_1^{-1}(t) \cdot f(t)\ dt \\ \vdots \\ \int \Phi_n^{-1}(t) \cdot f(t)\ dt \end{pmatrix}.$$

Интегрируя, и переобозначая вектор-функцию, полученную в результате интегрирования за $\underline{F}(t)$, получим:

$$\underline{C}(t) = \underline{F}(t) + \tilde{\underline{C}}.$$

Подставляя данное выражение вместо $C(t)$ в общее неоднородное решение, получим:

$$x(t) = \Phi(t) \cdot (\underline{F}(t) + \underline{C}).$$

2.1. Примеры

Рассмотрим следующий пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - \dfrac{2}{t}, \\ \dot{y} = -4x - 3y + \dfrac{3}{t} + \ln t. \end{cases}$$

Выпишем матрицу системы, и найдем ее собственные значения и собственные вектора:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \ \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Выпишем жорданову форму и матрицу преобразований:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная матрица принимает следующий вид:

$$\Phi = Pe^{Jt} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{t} \\ 2e^{-t} & -e^{t} \end{pmatrix}.$$

Тогда общее однородное решение принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} x_h \\ y_h \end{pmatrix} = \Phi \cdot \underline{C} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{t} \\ 2e^{-t} & -e^{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Правая часть уравнения в векторной форме выглядит таким образом:

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{t} \\ \frac{3}{t} + \ln t \end{pmatrix}$$

Далее методом вариации произвольных постоянных, будем полагать, что общее неоднородное решение можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x_{nh} \\ y_{nh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{t} \\ 2e^{-t} & -e^{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

Подставим общее неоднородное решение в уравнение, и выпишем систему для произвольных постоянных, согласно алгоритму. Но сначала найдем обратную матрицу для фундаментальной:

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{t} \\ 2e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{t} \\ 2e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{t} \\ \frac{3}{t} + \ln t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\ln t + \frac{1}{t}\right) e^{t} \\ \left(\ln t - \frac{1}{t}\right) e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Интегрируя каждый компонент вектора отдельно, получим:

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} \ln t + \tilde{C}_1 \\ e^{-t} \ln t + \tilde{C}_2 \end{pmatrix}.$$

Подставим полученный вектор в общее неоднородное решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{t} \\ 2e^{-t} & -e^{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{t} \ln t + C_1 \\ e^{-t} \ln t + C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{t} \\ 2e^{-t} & -e^{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \ln t \\ 3 \ln t \end{pmatrix}.$$

Таким образом получено решение исходного уравнения. В виде системы решение можно представим так:

$$\begin{cases} x = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} - 2 \ln t, \\ y = 2C_1 e^{-t} - C_2 e^{t} + 3 \ln t. \end{cases}$$

2.2. Задачи

Построить общее решение следующих линейных неоднородных систем уравнений с постоянными коэффициентами:

51. $\begin{cases} \dot{x} = t - x - 2y, \\ \dot{y} = y - t + 1 \end{cases}$

52. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = t - 4x - y - 3 \end{cases}$

53. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2t + 1, \\ \dot{y} = t^2 - x - 2y \end{cases}$

54. $\begin{cases} \dot{x} = 9y - 4x - 5e^t - 18t + 3, \\ \dot{y} = 8y - 4x - 4e^t - 16t + 6 \end{cases}$

55. $\begin{cases} \dot{x} = 2\sin t - x - 8y + 8, \\ \dot{y} = 3y - 3 \end{cases}$

56. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 2\cos t, \\ \dot{y} = x - y + \cos t - 3\sin t \end{cases}$

57. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + 4e^{-t} - 3, \\ \dot{y} = 2x - y - 2 \end{cases}$

58. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 3\,(t+1)\,e^{2t} - 2t, \\ \dot{y} = (2t-7)\,e^{2t} + 5t + 1 - 2x - 5y \end{cases}$

59. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 5\sin t - \cos t, \\ \dot{y} = 6x - 4y + 6\sin t \end{cases}$

60. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - e^t\cos t, \\ \dot{y} = x + y + e^t\sin t \end{cases}$

61. $\begin{cases} \dot{x} = y - x - (\sin t + \sec t)\tan t, \\ \dot{y} = 3y - 4x + 3\cos t - 4\sec t + \sin t \end{cases}$

62. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 + e^{-2t}\ln t, \\ \dot{y} = \dfrac{e^{-2t}}{t} - 2y \end{cases}$

63. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{e^t}{t} - y, \\ \dot{y} = 4x - \dfrac{e^t}{t^3}\left(4t^2 - t + 2\right) \end{cases}$

64. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y - 2 + (3t-2)\ln t, \\ \dot{y} = \dfrac{1}{t} - 6x - 2y - 2\,(3t-1)\ln t \end{cases}$

65. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + (t-1)^2 - t\ln t - 1, \\ \dot{y} = (1+t)\,(\ln t - t + 1) - x - y \end{cases}$

66.* $\begin{cases} \dot{x} = \arctan t - x - y - t - 1, \\ \dot{y} = x - 3y + t + \dfrac{1}{t^2+1} + 3\arctan t \end{cases}$

67.* $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3t^2, \\ \dot{y} = z + 2\ln t, \\ \dot{z} = -\dfrac{2}{t} \end{cases}$

68.* $\begin{cases} \dot{x} = x - 2te^t, \\ \dot{y} = y + z + \sin t - 1, \\ \dot{z} = z + \sin t - \cos t \end{cases}$

69.** $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{t} - x, \\ \dot{y} = 2t - \ln t - z, \\ \dot{z} = y - t^2 - \dfrac{1}{t} \end{cases}$

70.** $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y + 2z - \dfrac{2}{t} + 2\tan t, \\ \dot{y} = \dfrac{3}{t} - \dfrac{1}{t^2} - 5x - 3y - 2z - 2\tan t, \\ \dot{z} = y - \dfrac{1}{t} - \sec^2 t \end{cases}$

3. Матричные функции

В данном разделе рассмотрим задачи, связанные с поиском функций от матриц $f(A)$. Будем полагать, что функция f – разложима в ряд Маклорена, матрица A – квадратная, при этом множество, состоящее из любых степеней матрицы A является коммутирующим множеством матриц: $A^nA^m = A^mA^n = A^{n+m}$. Тогда функцией f над матрицей A называется матрица следующего вида:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot A^k.$$

Положим, что матрица A имеет разложение $A = PJP^{-1}$, где P – матрица преобразования, J – жорданова форма матрицы A. Тогда $A^2 = PJP^{-1}PJP^{-1} = PJ^2P^{-1}$. Аналогично считается и любая степень такой матрицы A: $A^k = PJ^kP^{-1}$. Подставим данное разложение в матричную функцию:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot PJ^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot J^k\right)P^{-1} = Pf(J)P^{-1}.$$

Тогда при выполнении условий, справедливо следующее выражение:

$$f(A) = Pf(J)P^{-1}.$$

Рассмотрим степени для различных видов вещественных жордановых форм:

1. Случай простых собственных значений:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \ J^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix};$$

2. Случай кратных собственных значений:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \ J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & \frac{k}{1!}\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2!}\lambda^{k-2} & \cdots & B_{n-1}\lambda^{k-(n-2)} & B_n\lambda^{k-(n-1)} \\ 0 & \lambda^k & \frac{k}{1!}\lambda^{k-1} & \cdots & B_{n-2}\lambda^{k-(n-3)} & B_{n-1}\lambda^{k-(n-2)} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \cdots & B_{n-3}\lambda^{k-(n-4)} & B_{n-2}\lambda^{k-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^k & \frac{k}{1!}\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix},$$

где

$$B_n = \frac{k\cdots\big(k-(n-2)\big)}{(n-1)!} = \frac{k!}{(n-1)!\big(k-(n-1)\big)!}.$$

Случай матриц с комплексно-сопряженными собственными значениями может быть рассмотрен как случай простых собственных значений.

Положим $f_k = f^{(k)}(0)$. Рассмотрим случаи функций от таких матриц:

1. Случай простых собственных значений:

$$f(J)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f_k}{k!}\lambda_1^k & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f_k}{k!}\lambda_n^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n)\end{pmatrix};$$

2. Случай кратных собственных значений:

$$f(J)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f_k}{k!}\lambda^k & \frac{1}{1!}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f_k}{(k-1)!}\lambda^{k-1} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f_k}{\big(k-(n-1)\big)!}\lambda^{k-(n-1)}\\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f_k}{k!}\lambda^k & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f_k}{\big(k-(n-2)\big)!}\lambda^{k-(n-2)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f_k}{k!}\lambda^k\end{pmatrix}=\star$$

Выпишем i,j-й элемент этой матрицы (полагая $j\geq i$):

$$f(J)_{i,j}=\frac{1}{(j-i)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_k}{\big(k-(j-i)\big)!}\lambda^{k-(j-i)}=\frac{1}{(j-i)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_{k+(j-i)}}{k!}\lambda^k=$$
$$=\frac{1}{(j-i)!}\frac{d^{j-i}}{d\lambda^{j-i}}f(\lambda)=\frac{1}{(j-i)!}f_\lambda^{(j-i)}(\lambda).$$

Тогда

$$\star=\begin{pmatrix}f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'_\lambda(\lambda) & \frac{1}{2!}f''_\lambda(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}f_\lambda^{(n-1)}(\lambda)\\ 0 & f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'_\lambda(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}f_\lambda^{(n-2)}(\lambda)\\ 0 & 0 & f(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(n-3)!}f_\lambda^{(n-3)}(\lambda)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda)\end{pmatrix}.$$

В случае, если жорданов блок является транспонированным, то заполнение идет так-же транспонировано.

3.1. Примеры

Рассмотрим следующий пример. Найти функцию sin от матрицы:

$$\sin\begin{pmatrix}\frac{\pi}{4} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\pi}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & 1\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2}\end{pmatrix}.$$

Представленная матрица является матрицей жордановой формы. Выделим жордановы блоки: первый блок с собственным значением $\lambda=\dfrac{\pi}{4}$ размерности 1×1; второй блок с собственным значением $\lambda=\dfrac{\pi}{2}$ размерности 3×3, верхнетреугольный. В таком случае необходимо найти две производные функции sin: $f(\lambda)=\sin\lambda,\ f'_\lambda(\lambda)=\cos\lambda,\ f''_\lambda(\lambda)=-\sin\lambda$. Найдем значения функции и её производных в заданных собственных значениях: $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\dfrac{\pi}{2} = 1,\ \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$. Заполним результирующую матрицу:

$$\sin\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим другой пример. Найти $\arctan At$, где A – известная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Представленная матрица так же является матрицей жордановой формы. Выделим жордановы блоки: первый блок с собственным значением $\lambda = 1$ размерности 2×2, нижнетреугольный; второй блок с собственным значением 2 размерности 2×2, верхнетреугольный. Тогда необходимо найти дополнительно только первую производную функции arctan: $f\left(\lambda, t\right) = \arctan \lambda t,\ f'_\lambda\left(\lambda, t\right) = \dfrac{t}{\lambda^2 t^2 + 1}$. Стоит обратить внимание, что функция также зависит от переменной t, а производная вычисляется по аргументу λ как частная (полагая t константой). Найдем значения функции и её производной в заданных собственных значениях: $f\left(1, t\right) = \arctan t,\ f'_\lambda\left(1, t\right) = \dfrac{t}{t^2+1},\ f\left(2, t\right) = \arctan(2t),\ f'_\lambda\left(2, t\right) = \dfrac{t}{4t^2+1}$. Заполним результирующую матрицу:

$$\arctan\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} t\right] = \begin{pmatrix} \arctan t & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t}{t^2+1} & \arctan t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \arctan 2t & \frac{t}{4t^2+1} \\ 0 & 0 & 0 & \arctan 2t \end{pmatrix}.$$

3.2. Задачи

Найти матричную экспоненту (e^A):

71. $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

72. $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

73. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

74. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

75. $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\pi}{4} \\ 0 & \dfrac{\pi}{4} & 0 \end{pmatrix}$

76. $A = \begin{pmatrix} -2 & -\dfrac{\pi}{2} & 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

77. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

78. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

79. $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

80. $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 15 & -10 \end{pmatrix}$

Найти функцию от матрицы:

81. $\sin(A)$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

82. $\tan(A)$, $A = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

83. $\ln(A)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

84. $\cosh(A)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & -4 & -5 \\ 0 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$,

$\lambda_{1,2,3} = -5$

85. $\exp(A)$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 15 & 6 & 10 \end{pmatrix}$,

$\lambda_{1,2} = 4$

86. $\sec(At)$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

87. $\arctan(At)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

88. $\cos(At)$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

89.* $\cot(At)$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -12 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$,

$\lambda_{1,2,3,4} = 4$

90.** $\operatorname{arsinh}(At)$, $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 10 & -6 \\ 3 & -1 & 10 & -6 \\ 0 & -3 & 17 & -9 \\ 5 & -5 & 25 & -13 \end{pmatrix}$,

$\lambda_{1,2,3,4} = 2$

Раздел II

Теория устойчивости.

4. Устойчивость по Ляпунову, устойчивость по первому приближению

Пусть $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ – вектор неизвестных функций, $\underline{f}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}) \end{pmatrix}$ – вектор известных функций. Рассматривать будем автономную систему следующего вида:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}), \; t > t_0$$

с начальным условием:

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0.$$

Положим, что существует точка покоя $\underline{x}(t) = \underline{\varphi}_h$ такая, что $f\left(\underline{\varphi}_h\right) = 0$. Тогда такая точка покоя называется устойчивой, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta > 0 : \left\|\underline{x}_0 - \underline{\varphi}_h\right\| < \delta \implies \left\|\underline{x}(t) - \underline{\varphi}_h\right\| < \varepsilon \;\forall t \geq t_0.$$

В случае, если $\lim\limits_{t\to\infty} \left\|\underline{x}(t) - \underline{\varphi}_h\right\| = 0$, такая точка покоя называется ассимптотически устойчивой. Точкой покоя (или критической точкой) $\underline{\varphi}_h$ называется точка, вдоль которой решение уравнения постоянно. Когда решение определяется какими-либо постоянными, такие решения называются стационарными решениями, или решениями равновесия системы.

Рассмотрим автономную систему:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}).$$

Для определения ее стационарных решений необходимо найти такие постоянные вектора $\underline{x}(t) = \underline{\varphi}_k, \; k \in \overline{1,n}, \; n \geq 0$, при которых

$$f\left(\underline{\varphi}\right) = \underline{0}.$$

Находя такие вектора $\underline{\varphi}_k$, для исследования устойчивости, можно построить систему первого приближения. На основе собственных значений матрицы, можно судить об устойчивости. Если вещественные части всех собственных значений матрицы первого приближения отрицательны, то система считается устойчивой. Если хотя бы у одного из собственных значений вещественная часть положительна, система считается неустойчивой. В случае, если среди собственных значений есть хотя бы одно значение с нулевой вещественной частью, необходим дополнительный анализ.

Матрица системы первого приближения представляет собой матрицу Якоби вектор-функции $\underline{f}(\underline{x})$ в окресности точки покоя $\underline{\varphi}_k$.

4.1. Примеры

Рассмотрим, как ведет себя решение следующего уравнения в геометрическом смысле для любого начального условия:

$$y' = \sin y, \; y(0) = C - \text{const}.$$

Дифференциальное уравнение имеет вид $y' = f(y)$ – уравнение, зависимое только от искомой функции, или носит название автономного или стационарного. Рассматривать будем в области решений $y \in [-2\pi, 2\pi]$ Построим график этого уравнения как функции в осях $y'(y)$:

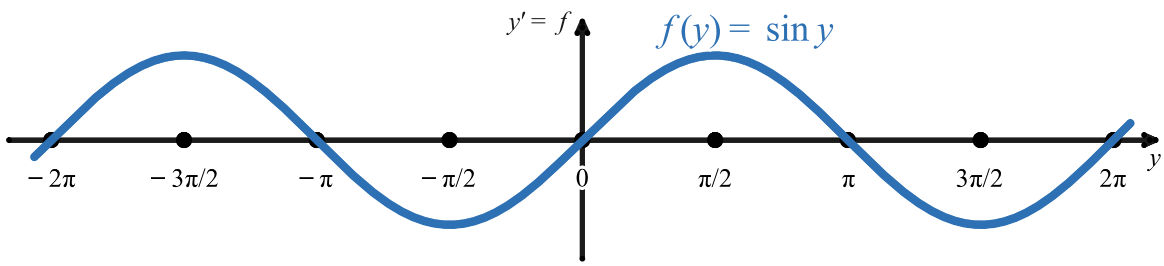

Рис. 1: График в осях $y'(y)$

Следующим шагом определим нули производной искомой функции. Для этого необходимо приравнять правую часть $f(y)$ уравнения к нулю:

$$\sin y = 0 \implies y_n = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Для рассматриваемого случая достаточно условия, что $n = \overline{-2,2} \subset \mathbb{Z}$. Стоит упомянуть, что для фиксированных значений n, y_n является решением следующей задачи:

$$y' = \sin y,\ y(0) = y_n.$$

Такие постоянные y_n называются точками покоя исходного уравнения.

Теперь у заданной кривой определим участки, где функция f положительна или отрицательна. Эти участки ограничены точками покоя. Решение y уравнения $y' = f(y)$ возрастает, если $f(y) > 0$, и убывает $f(y) < 0$. Эти области пометим соответствующими направляющими стрелками:

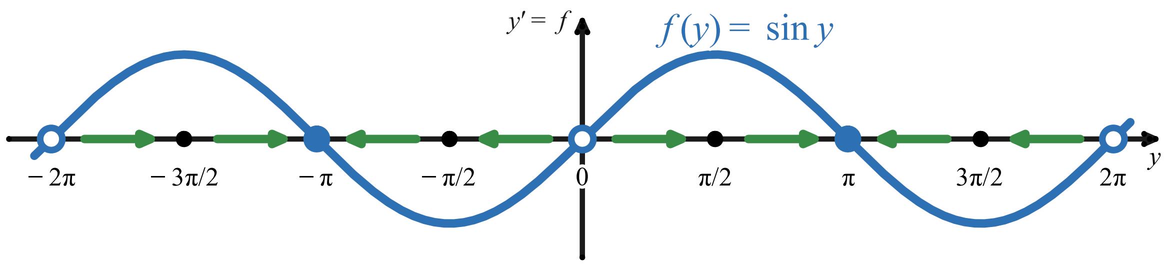

Рис. 2: График $f(y)$ в осях $y'(y)$ с направлениями в областях возрастания/убывания

Точки покоя бывают двух типов: устойчивые и неустойчивые соответственно. Согласно направляющим стрелкам, устойчивыми точками будут $y_{-1} = -\pi,\ y_1 = \pi$, а неустойчивыми – $y_{-2} = -2\pi,\ y_0 = 0,\ y_2 = 2\pi$. Теперь построим области перегиба кривых функции. Для этого найдем вторую производную решения:

$$y'' = f'(y) \cdot y' = f'(y) \cdot f(y).$$

Области, где $y'' > 0$ – вогнуты вверх (выпуклые), и где $y'' < 0$ – вогнуты вниз (вогнуты).

Построим график решения $f'(y)$:

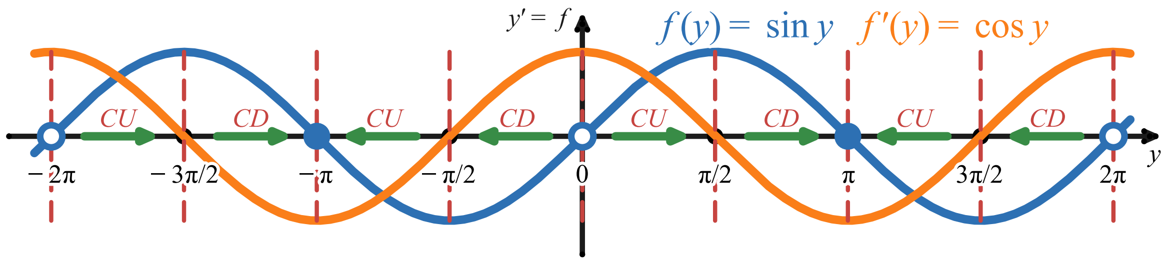

Рис. 3: График $f(y)$ и $f'(y)$ в осях $y'(y)$

На рисунке символами CU и CD помечены участки вогнутости вверх и вниз соответственно. Данной информации достаточно для построения примерного поведения решения исходного уравнения:

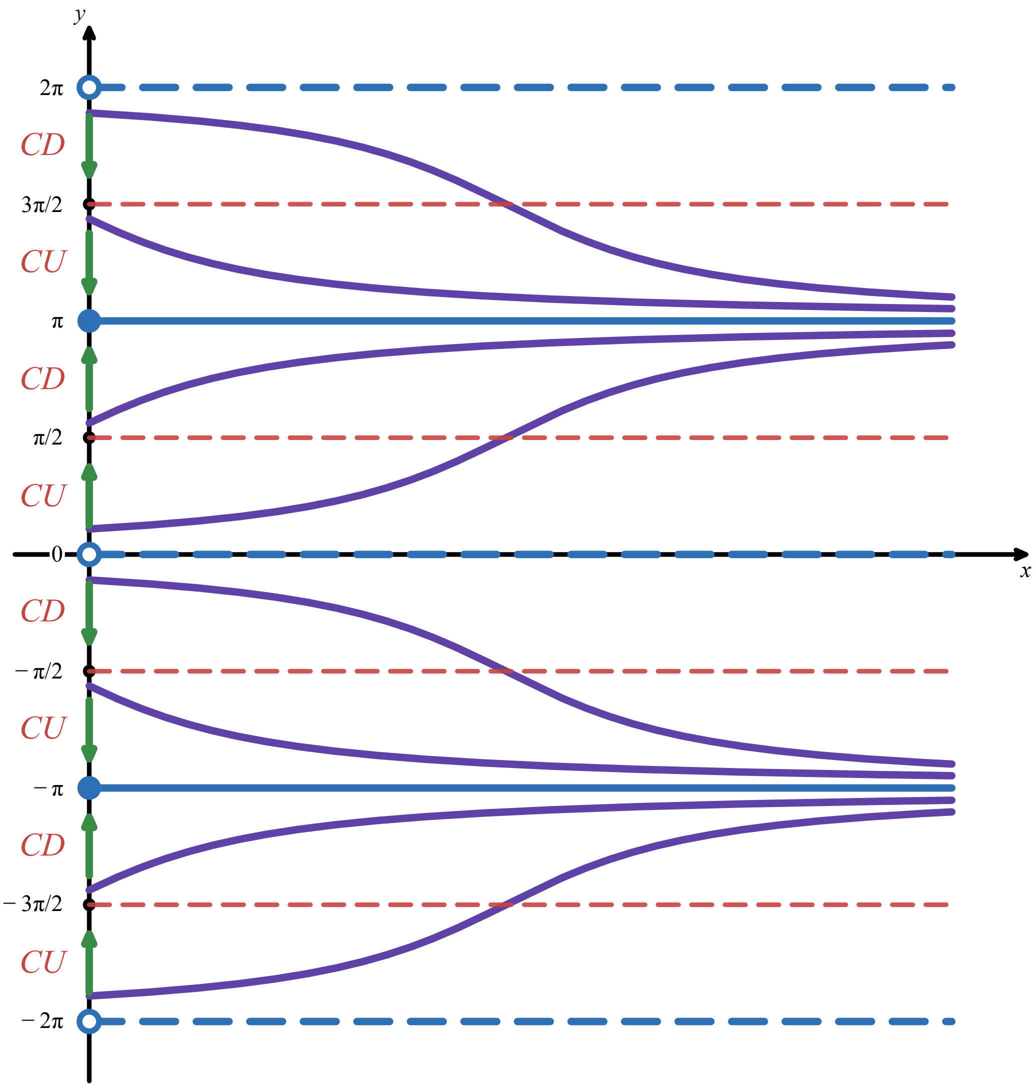

Рис. 4: Примерное поведение решения $y(x)$ исходного уравнения

Рассмотрим другой пример. Дана система следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \sin x, \\ \dot{y} = x \sin y \end{cases}.$$

Необходимо найти точки покоя, и исследовать их устойчивость. Найдем все возможные точки покоя. Для этого приравняем производные к нулю:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y \sin x = 0, \\ x \sin y = 0. \end{cases}$$

Из этой системы следует набор таких точек:

$$\begin{cases} x = n\pi, \\ y = m\pi. \end{cases}, \ n, m \in \mathbb{Z}$$

Построим матрицу Якоби исходной системы в окрестности точки $(n\pi, m\pi)$:

$$A = J(x, y)\Big|_{(n\pi, m\pi)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(y \sin x) & \dfrac{\partial}{\partial y}(y \sin x) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(x \sin y) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x \sin y) \end{pmatrix}\Bigg|_{(n\pi, m\pi)} = \begin{pmatrix} (-1)^n m\pi & 0 \\ 0 & (-1)^m n\pi \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения данной матрицы:

$$\det|A - \lambda I| = 0 \implies \big(\lambda - (-1)^n m\pi\big) \cdot \big(\lambda - (-1)^m n\pi\big) = 0.$$

Отсюда следует, что $\lambda_1 = (-1)^n m\pi$ и $\lambda_2 = (-1)^m n\pi$.

Рассмотрим случаи, когда собственные значения отрицательны одновременно:

1. $n > 0, m > 0$: Если n и m нечетные одновременно;
2. $n < 0, m < 0$: Если n и m четные одновременно;
3. $n < 0, m > 0$: Если n – нечетное, m – четное;
4. $n > 0, m < 0$: Если n – четное, m – нечетное.

Случаи, содержащие $m = 0$, или $n = 0$ не рассматриваем, так как их исследование на устойчивость требует дополнительного анализа. Все остальные случаи сводятся к наличию хотя бы одного положительного собственного значения, что говорит о том, что система не устойчива. В общем случае здесь можно заметить некоторую симметрию относительно n и m.

4.2. Задачи

Найти точки покоя и геометрически исследовать поведение решений:

91. $y' = y, \ y \in (-1, 1)$

92. $y' = y^2 - 1, \ y \in (-2, 2)$

93. $y' = \dfrac{y}{y+1}, \ y \in (-1, 1)$

94. $y' = \dfrac{1+y}{1-y}, y \in (-2, 0)$

95. $y' = \dfrac{y^2 - 2y - 3}{y+3}, \ y \in (-2, 5)$

96. $y' = \ln y, \ y \in (0, 2)$

97. $y' = e^y - 1,\ y \in (-1, 1)$

98. $y' = y \ln y,\ y \in (0, 1)$

99. $y' = ye^{-y},\ y \in (-2, 2)$

100. $y' = \sinh 2y,\ y \in (-1, 1)$

101. $y' = -e^{-y} \sinh y,\ y \in (-1, 1)$

102. $y' = \cos y,\ y \in (-2\pi, 2\pi)$

103. $y' = \sin^2 y,\ y \in (-2\pi, 2\pi)$

104. $y' = \tan y,\ y \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

105. $y' = 1 - \sec 2y,\ y \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

106. $y' = (y+1) \sin y,\ y \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

107. $y' = (y - \pi) \cos y,\ y \in (-1, 2\pi)$

108. $y' = \frac{\cos y}{1 - \sin y},\ y \in (-\pi, 0)$

109. $y' = \operatorname{arccot} y - \frac{\pi}{2},\ y \in (-\pi, \pi)$

110. $y' = y \arctan \frac{\pi}{y + \pi},\ y \in (-1, 1)$

Найти точки покоя следующих стационарных систем, и исследовать их устойчивость по первому приближению, полагая $x, y \in \mathbb{R}$:

111. $\dot{x} = y^2 - x,\ \dot{y} = x^2 - y$

112. $\dot{x} = xy + 1,\ \dot{y} = x^2 - y^2$

113. $\dot{x} = x\left(y^2 + x\right),\ \dot{y} = y\left(x^2 - y + 1\right)$

114. $\dot{x} = 1 - x^4 - y^2,\ \dot{y} = x - y - 1$

115. $\dot{x} = \frac{x^2 - 4}{y},\ \dot{y} = \frac{y^2 - 1}{x + 1}$

116. $\dot{x} = y - xe^y,\ \dot{y} = x^2 - y$

117. $\dot{x} = e^x - e^y,\ \dot{y} = x^2 + 2y$

118. $\dot{x} = \sin y - x,\ \dot{y} = -y \cos x$

119. $\dot{x} = \frac{\cos x}{y^2 - 1},\ \dot{y} = xy,\ x \in (-\pi, \pi)$

120. $\dot{x} = \arctan x + 2y,\ \dot{y} = \sinh x - \tanh y$

Найти точки покоя следующих трехмерных стационарных систем, и исследовать их на устойчивость по первому приближению, полагая $x, y, z \in \mathbb{R}$:

121. $\dot{x} = z - x^2,\ \dot{y} = y - y^2,\ \dot{z} = x - z^2$

122. $\dot{x} = x^2 + y,\ \dot{y} = z^2 + x^2 y,\ \dot{z} = 2xz - y^2$

123. $\dot{x} = x - y + z - 1,\ \dot{y} = x^2 + yz,\ \dot{z} = 1 - z^2$

124. $\dot{x} = \sin x + \sin z,\ \dot{y} = e^y - e^x,\ \dot{z} = \cos^2 2z$

Доказать, что точка $M_0\,(0, 0, 0)$ является точкой покоя, и исследовать ее на устойчивость по первому приближению:

125. $\dot{x} = xy - 2z,\ \dot{y} = y^2 - x,\ \dot{z} = y - 2x^2 - 3z$

126. $\dot{x} = 2 \tan x - yz,\ \dot{y} = 3x^2 - 2y,\ \dot{z} = \arcsin z$

127. $\dot{x} = x^3 - x,\ \dot{y} = x - y - 3yz^3,\ \dot{z} = \sin x - 2z$

128. $\dot{x} = \cos z - e^y,\ \dot{y} = 2 \tan z + x,\ \dot{z} = \ln(y + 1) - xz$

129. $\dot{x} = 3z - \arctan x,\ \dot{y} = x^2 - \ln(y + 1),\ \dot{z} = xy - z$

130. $\dot{x} = \sqrt{xy + 9} - x - 3\cos z,\ \dot{y} = x^2 - \tan(y + z) + z,\ \dot{z} = (z - 1)^2 + z - e^{-y}$

5. Классификация точек покоя

В данном разделе рассмотрим классификацию точек покоя для двумерных вещественных стационарных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}\left(\underline{x}\right), \ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Для данной системы в окрестности точки покоя $\underline{x} = \underline{x}_0$ будем рассматривать систему первого приближения:

$$\dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x},$$

где $A = \tilde{J}\left(\underline{x}\right)\Big|_{\underline{x}=\underline{x}_0}$ – матрица Якоби в точке покоя, двумерная матрица постоянных коэффициентов. Положим, что матрица A – разложима с помощью матрицы преобразований P, и верхнетреугольной жордановой формы J: $A = PJP^{-1}$. Следующая классификация будет рассмотрена для систем вида $\dot{\underline{x}} = J\underline{x}$. Для построения фазового пространства конкретных систем, необходимо построить матрицу преобразований P, и по представленным ниже правилам применить матрицу P как матрицу аффинного преобразования системы координат.

Пусть у матрицы J собственные значения λ_1 и λ_2. Собственные вектора $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ матрицы A представляют собой соответствующие собственным значениям λ_1, λ_2 столбцы матрицы преобразований P. Будем полагать, что собственные вектора рассматриваемой системы равны соответственно $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, и соответствующие им прямые на изображениях будут отражены красными линиями. Тогда введем классификацию точек покоя:

1. *Невырожденный узел* – случай, когда ненулевые вещественные собственные значения $\lambda_{1,2}$ не равны между собой, и одного знака (положим $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_{1,2} \neq 0$). Интегральные кривые на фазовой плоскости сходятся в (в случае отрицательных собственных значений), или исходят из (в случае положительных собственных значений) точки покоя, и изгибаются по направлению прямой, построенной на основе собственного вектора с наименьшим по модулю собственным значением (от прямой с направляющим вектором $\underline{v}_2$ к прямой с направляющим вектором $\underline{v}_1$). На изображениях ниже рассмотрены случаи $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ (устойчивый невырожденный узел, рис. 5) и $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (неустойчивый невырожденный узел, рис. 6).

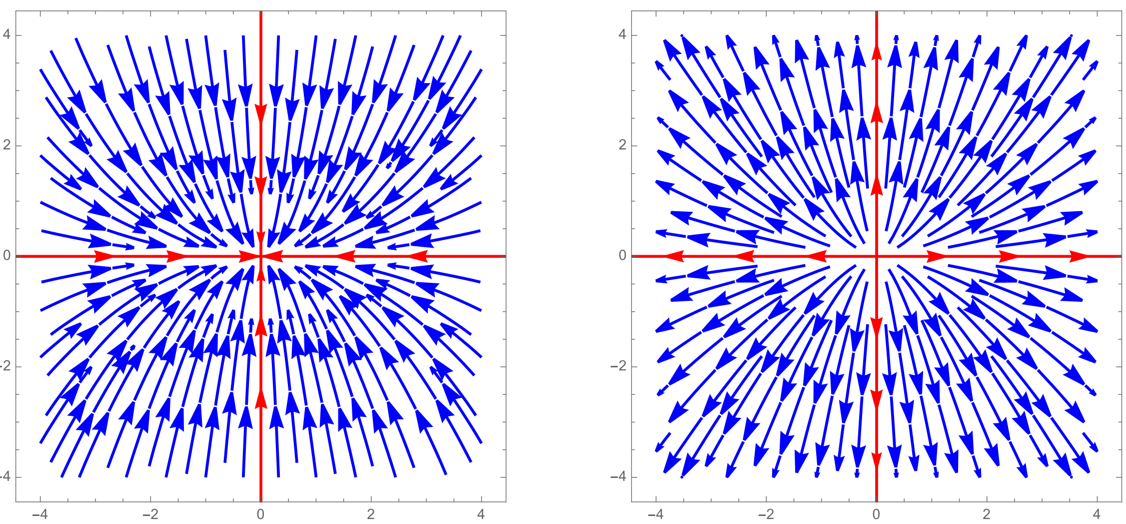

Рис. 5: Устойчивый невырожденный узел **Рис. 6:** Неустойчивый невырожденный узел

2. *Вырожденный узел* – случай, когда ненулевые вещественные собственные значения $\lambda_{1,2}$ равны между собой, при этом линейно-зависимы (положим $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$). Интегральные кривые на фазовой плоскости сходятся в (в случае отрицательных собственных значений), или исходят из (в случае положительных собственных значений) точки покоя, и вращаются в направлении, обратном положительному направлению вращения системы координат (против часовой стрелки). На изображениях ниже рассмотрены случаи $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ (устойчивый вырожденный узел, рис. 7) и $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (неустойчивый вырожденный узел, рис. 8).

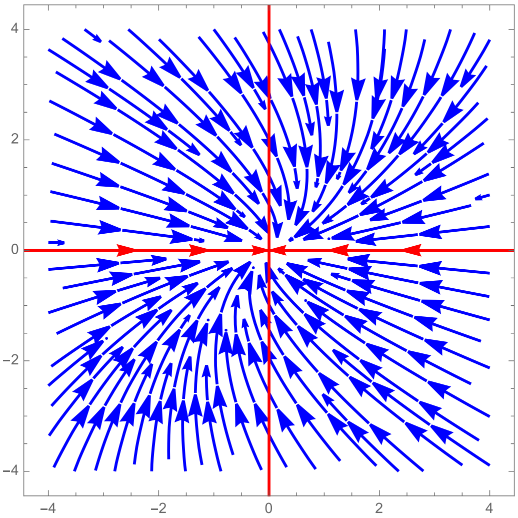

Рис. 7: Устойчивый вырожденный узел

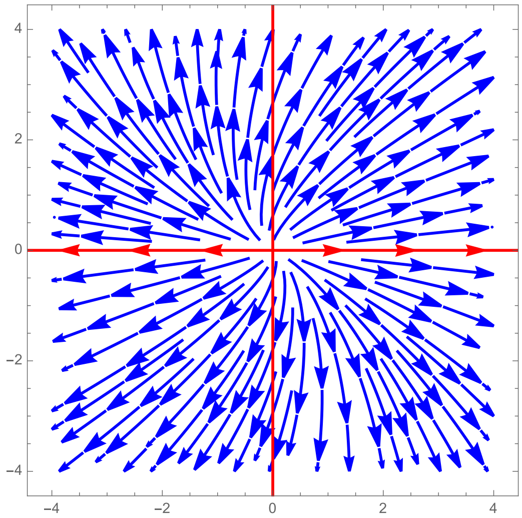

Рис. 8: Неустойчивый вырожденный узел

3. *Дикритический узел* – случай, когда ненулевые вещественные собственные значения $\lambda_{1,2}$ равны между собой, при этом линейно-независимы (положим $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$). Интегральные кривые на фазовой плоскости сходятся в (в случае отрицательных собственных значений), или исходят из (в случае положительных собственных значений) точки покоя, и представляют собой прямые линии. На изображениях ниже рассмотрены случаи $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (устойчивый дикритический узел, рис. 9) и $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (неустойчивый дикритический узел, рис. 10).

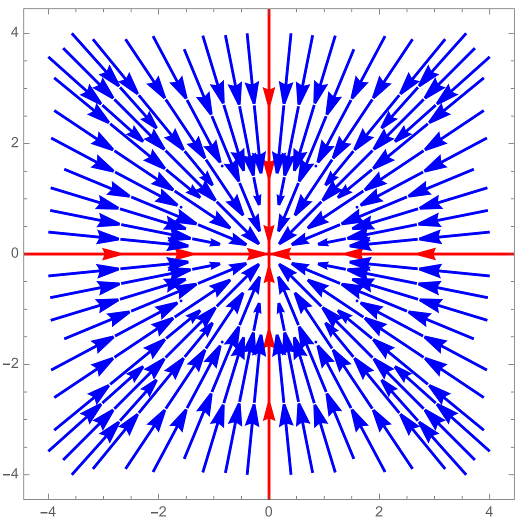

Рис. 9: Устойчивый дикритический узел

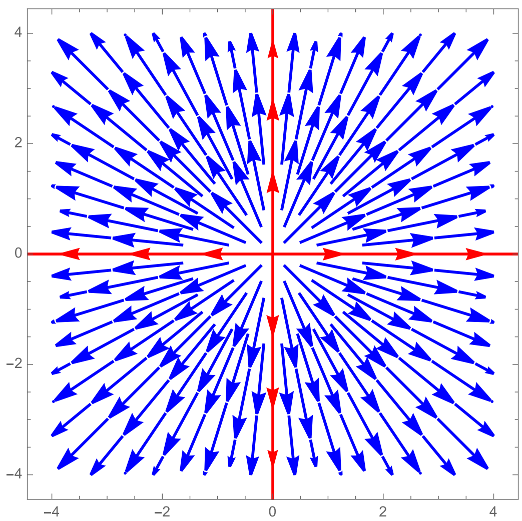

Рис. 10: Неустойчивый дикритический узел

4. *Седло* – случай, когда ненулевые вещественные собственные значения $\lambda_{1,2}$ имеют противоположные знаки (положим $\lambda_1 < 0 < \lambda_2,\ \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$). Интегральные кривые на фазовой плоскости представляют собой семейство гипербол в окрестности точки покоя. Направление задается от прямой, построенной на основе собственного вектора с положительным собственным значением в сторону прямой, построенной на основе собственного вектора с отрицательным собственным значением. Седловая точка является неустойчивой. На изображении ниже рассмотрен случай $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (седловая точка, рис. 11).

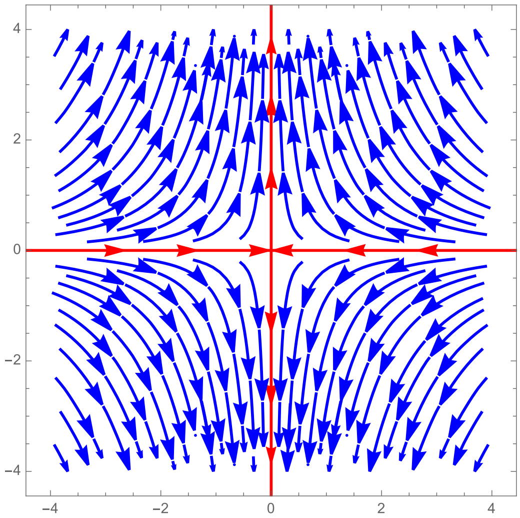

Рис. 11: Неустойчивая седловая точка

5. *Фокус* – случай, когда комплексно-сопряженные собственные значения $\lambda_{1,2}$ имеют ненулевую вещественную часть (положим $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$). Интегральные кривые представляют собой вращающийся поток, сходящийся к (в случае отрицательной вещественной части собственных значений), или исходящихся от (в случае положительной вещественной части собственных значений) точки покоя (при этом ее не касается). Вращение производится в положительном направлении вращения системы координат (по часовой стрелке) в случае, если вещественная жорданова форма является обобщением комплексного числа. На изображениях ниже рассмотрены случаи $J = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (устойчивый фокус, рис. 12) и $J = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (неустойчивый фокус, рис. 13).

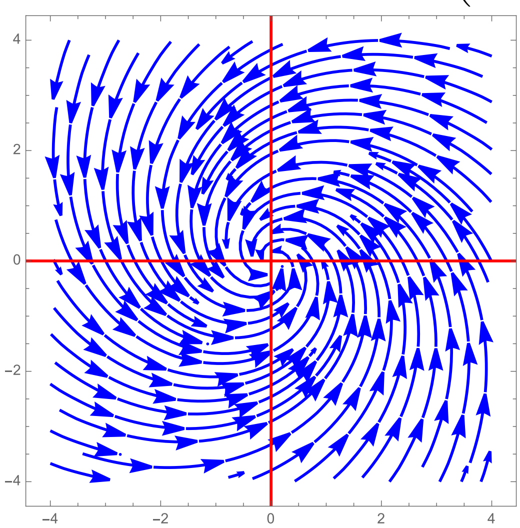

Рис. 12: Устойчивый фокус

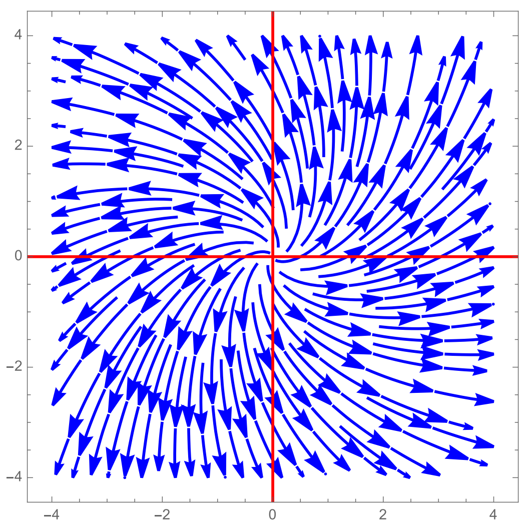

Рис. 13: Неустойчивый фокус

6. *Центр* – случай, когда комплексно-сопряженные собственные значения $\lambda_{1,2}$ имеют нулевую вещественную часть (положим $\lambda_{1,2} = \pm i\beta,\ \beta \in \mathbb{R},\ \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$). Интегральные кривые представляют собой семейство эллипсов, окружающих точку покоя. Вращение производится в положительном направлении вращения системы координат (по часовой стрелке) в случае, если вещественная жорданова форма является обобщением комплексного числа. На изображении ниже рассмотрен случай $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (устойчивый фокус, рис. 14).

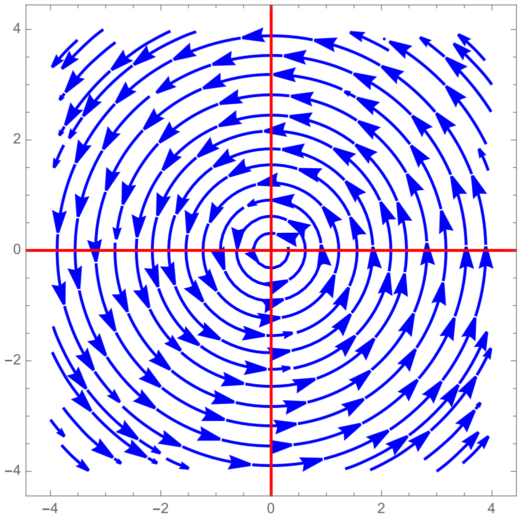

Рис. 14: Центр

7. *Семейство параллельных прямых* – случай, когда среди вещественных собственных значений $\lambda_{1,2}$ имеется хотя-бы одно отрицательное собственное значение (положим $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$). В случае, если хотя бы одно из собственных значений не нулевое, интегральные кривые представляют собой параллельные прямые, параллельные прямой, образованной собственным вектором, отвечающим ненулевому собственному значению, и сходящиеся к (в случае одного отрицательного собственного значения), или исходящие из (в случае одного положительного собственного значения) прямой, образованной собственным вектором, отвечающим за нулевое собственное значение. На изображениях ниже рассмотрены случаи $J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (устойчивое семейство параллельных прямых, рис. 15) и $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (неустойчивое семейство параллельных прямых, рис. 16).

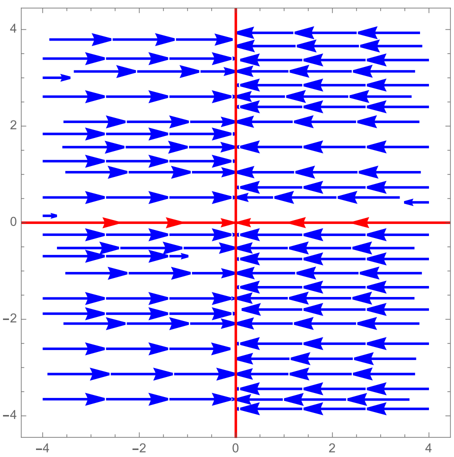

Рис. 15: Сходящееся семейство параллельных прямых

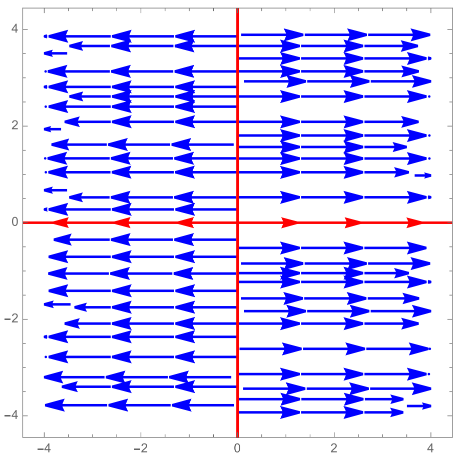

Рис. 16: Расходящееся семейство параллельных прямых

В случае, если оба собственных значения нулевые, и линейно-зависимы (положим $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), то параллельные прямые разнонаправлены. Выше прямой, образованной первым направляющим вектором параллельные прямые направлены в сторону его положительного направления, ниже – отрицательного. В случае, когда нулевые значения линейно-независимы, фазовое пространство находится в покое. На изображении ниже рассмотрен случай $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (неустойчивое семейство параллельных разнонаправленных прямых, рис. 17)

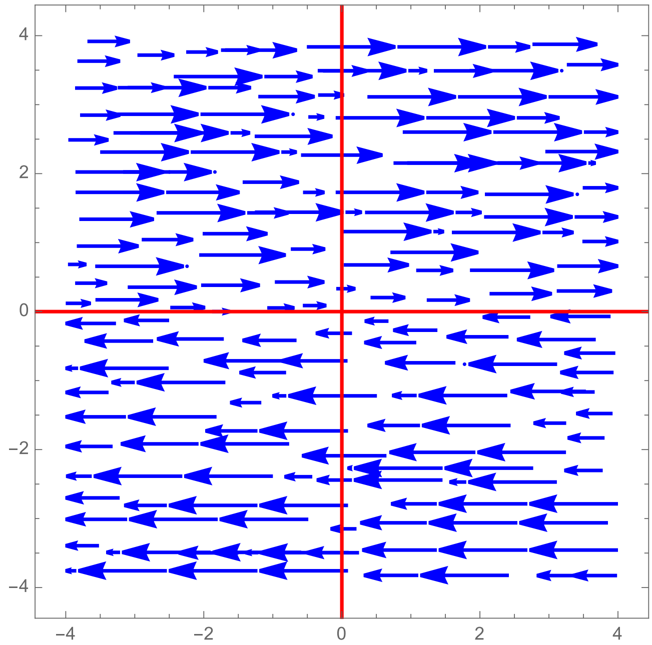

Рис. 17: Неустойчивое семейство параллельных разнонаправленных прямых

5.1. Примеры

В качестве примера рассмотрим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y\cos x, \\ \dot{y} = \sin x. \end{cases}$$

Найдем ее стационарные точки. Для это построим решение следующей системы:

$$\begin{cases} y\cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ y = 0. \end{cases}$$

Построим соответствующую линеаризованную систему в окрестности точек $M_k = (\pi k, 0)$:

$$\tilde{J}(x,y)\Big|_{x=\pi k,\ y=0} = \begin{pmatrix} -y\sin x & \cos x \\ \cos x & 0 \end{pmatrix}\Big|_{x=\pi k,\ y=0} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}$$

Собственные значения матрицы: $\lambda_{1,2} = \pm 1$ – вещественные, разных знаков, соответственно точки $M_k = (\pi k, 0)$ являются седловыми. Собственные вектора матрицы:

$$\lambda_1 = -1 : \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} (-1)^k \\ -1 \end{pmatrix}, \ \lambda_2 = 1 : \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} (-1)^k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования, и жорданова форма имеют следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^k \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применим преобразование P для фазового пространства, описанного на рис. (11):

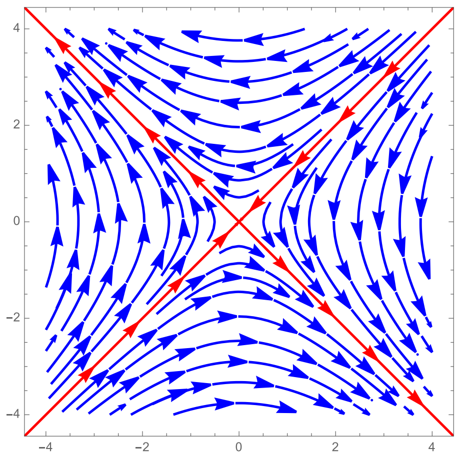

Рис. 18: Седловая точка в случае k – нечетных

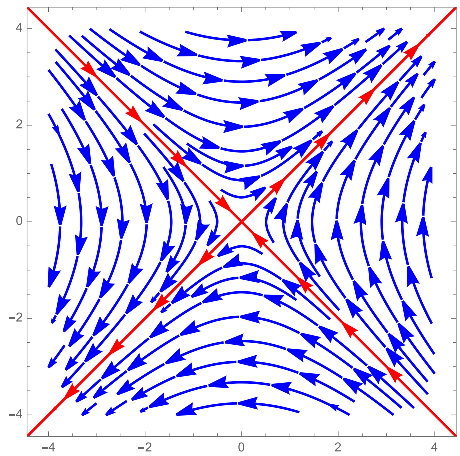

Рис. 19: Седловая точка в случае k – четных

Объединим данные траектории на общем изображении:

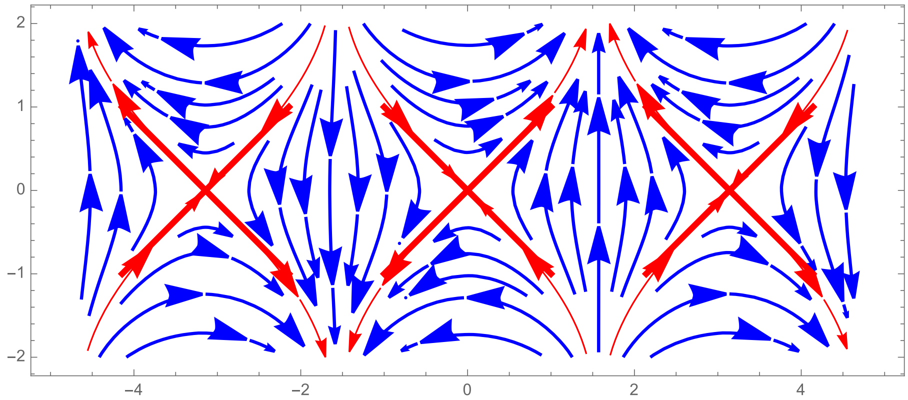

Рис. 20: Фазовое пространство решения

Рассмотрим следующий пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x^2y - 2xy^2 - 2y^2 + 22y \\ \dot{y} = 2x^2y - 2xy + 2y^2 - 22y \end{cases}$$

Найдем нули системы:

$$\begin{cases} y\left(x^2 + xy + y - 11\right) = 0 \\ y\left(x^2 - x + y - 11\right) = 0 \end{cases} \implies \begin{array}{l} M_0 = (C, 0), \ M_1 = (0, 11), \\ M_2 = (-3, -1), \ M_3 = (4, -1). \end{array}$$

Матрица Якоби исходной системы имеет следующий вид:

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} -4xy & 22 - 2x^2 - 4y \\ 4xy & -22 + 2x^2 + 4y \end{pmatrix}$$

Рассмотрим точку M_0. Матрица Якоби в окрестности точки M_0 принимает вид:

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & 22 - 2C^2 \\ 0 & -22 + 2C^2 \end{pmatrix}$$

Собственные значения и соответствующие им собственные вектора следующие:

$$\lambda_1 = 0 : \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda_2 = -22 + 2C^2 : \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Так как среди собственных значений присутствует хотя-бы один ноль, то точка $M_0 \forall C$ является семейством параллельных прямых. В случае, если $C^2 < 11$ – интегральные прямые сходятся к прямой, образованной вектором $\underline{v}_1$ перпендикулярно вектору $\underline{v}_2$; если $C^2 > 11$ – интегральные прямые исходят из прямой, образованной вектором $\underline{v}_1$ перпендикулярно вектору $\underline{v}_2$; если $C^2 = 11$, то окрестность находится в состоянии покоя.

Рассмотрим точку M_1. Матрица Якоби в окрестности точки M_1 принимает вид:

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} -242 & -22 \\ -22 & 22 \end{pmatrix}$$

Собственные значения и соответствующие им собственные вектора следующие:

$$\lambda_{1,2} = 22\left(-5 \pm \sqrt{37}\right) : \underline{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 6 \pm \sqrt{37} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения разных знаков, тогда точка M_1 – неустойчивая седловая точка. Интегральные кривые сходятся вдоль прямой, образованной вектором $\underline{v}_2$, и расходятся вдоль прямой, образованной вектором $\underline{v}_1$.

Рассмотрим точку M_2. Матрица Якоби в окрестности точки M_2 принимает вид:

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ 14 & -2 \end{pmatrix}$$

Собственные значения и соответствующие им собственные вектора следующие:

$$\lambda_{1,2} = -8 \pm i \cdot 2\sqrt{5} : \underline{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} -3 \pm i\sqrt{5} \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Оба собственных значения комплексные, с отрицательной вещественной частью, тогда точка M_2 – устойчивый фокус. Вещественная матрица преобразования и матрица комплексного числа примут следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \sqrt{5} - 3 & \sqrt{5} + 3 \end{pmatrix}, \ J = \begin{pmatrix} -8 & -2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & -8 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим точку M_3. Матрица Якоби в окрестности точки M_3 принимает вид:

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ -14 & -2 \end{pmatrix}$$

Собственные значения и соответствующие им собственные вектора следующие:

$$\lambda_{1,2} = 6 \pm i \cdot 2\sqrt{19} : \underline{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 4 \pm i\sqrt{19} \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Оба собственных значения комплексные, с положительной вещественной частью, тогда точка M_2 – неустойчивый фокус. Вещественная матрица преобразования и матрица комплексного числа примут следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ \sqrt{19}+4 & \sqrt{19}-4 \end{pmatrix}, \ J = \begin{pmatrix} 6 & -2\sqrt{19} \\ 2\sqrt{19} & 6 \end{pmatrix}.$$

Объединим все точки и траектории в их окрестности на общем изображении:

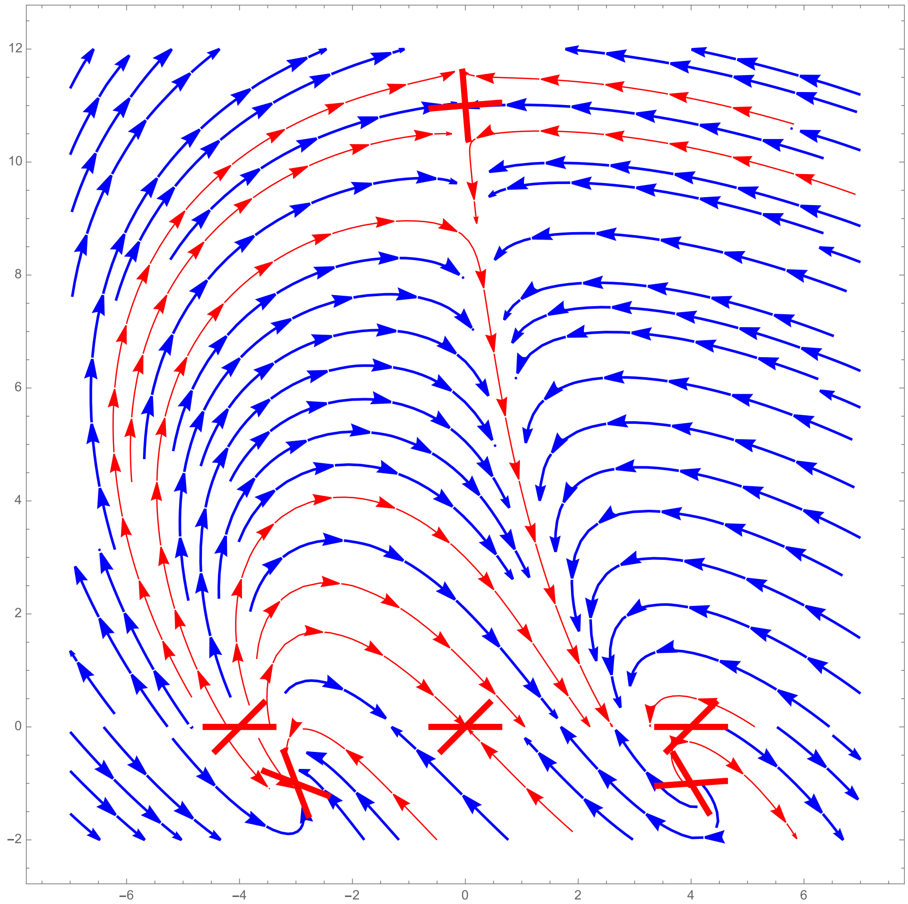

Рис. 21: Фазовое пространство решения

5.2. Задачи

Найти и классифицировать точки покоя для следующих систем дифференциальных уравнений со степенными функциями:

131. $\dot{x} = x + y - 3, \ \dot{y} = 4x - 2y$

132. $\dot{x} = -2x - 4y, \ \dot{y} = -x - 2y$

133. $\dot{x} = x - 2y + 6, \ \dot{y} = 2x - 2y + 8$

134. $\dot{x} = 6 - x - y, \ \dot{y} = 3x(2 - y) + 3y$

135. $\dot{x} = 7y - 2xy + 1, \ \dot{y} = 4y - x$

136. $\dot{x} = 1 - xy, \ \dot{y} = x(y-1)^2 + x - y^2$

137. $\dot{x} = 2xy - 10y - 8, \ \dot{y} = 2xy - 9y - 4$

138. $\dot{x} = 8y - x(3y - 4), \ \dot{y} = x(y + 2) + 8$

139. $\dot{x} = y^2(x + 1) - y + 1, \ \dot{y} = 2x - 4xy - 2y$

140. $\dot{x} = x + y - xy(x + 1), \ \dot{y} = -x - y$

141. $\dot{x} = 5 - x^2 - 2y(y + 1), \ \dot{y} = y(y + 1) - x^2 - 1$

142. $\dot{x} = -x\left(x + y^2\right), \ \dot{y} = 2xy(x - y + 2) + 2x$

143. $\dot{x} = (x - y)(x + y - 3)\,,\ \dot{y} = x(x - 3)(y + 2) - y^2 + 3y$

144. $\dot{x} = 2x\left(x - y^2 + 12\right),\ \dot{y} = x(x - 3)(y + 1) + 9 - y^2$

145. $\dot{x} = x(y - 2)^2 - 2x^2y - 8x,\ \dot{y} = 2x(x + 2)(y - 2) + 8$

146. $\dot{x} = 2xy(x + 3) - (y + 1)(y - 2)\,,\ \dot{y} = xy(2x + y + 5) - 2x$

147. $\dot{x} = 6 - x(x + 3) - 2(y - 1)^2\,,\ \dot{y} = xy(2y - x - 7) - 6x - 2y$

148.* $\dot{x} = (x + 2y)^2 - 2y^2 + 4xy + 2x - 4y,\ \dot{y} = xy^2 - (x + y)^2 - 2x + 2y$

149.* $\dot{x} = x\left(2x - 5y - y^2 - 8\right),\ \dot{y} = x(x - 1) - 2y(y + 5) - 12$

150.* $\dot{x} = (x - 1)^2 - 2xy(y + 2) - 2(y + 1)^2 - 2,\ \dot{y} = -y(x - 1)^2 - 2y^2$

Найти и классифицировать точки покоя для следующих систем дифференциальных уравнений:

151. $\dot{x} = x\sin y,\ \dot{y} = y\cos y$

152. $\dot{x} = y^2 - \pi^2,\ \dot{y} = x^2 + \cos y$

153. $\dot{x} = ye^{-x},\ \dot{y} = \dfrac{\sin y}{x}$

154. $\dot{x} = \sin y - \cos x,\ \dot{y} = xy$

155. $\dot{x} = \arctan(y - x)\,,\ \dot{y} = x\tan(x + y)$

156. $\dot{x} = x\cosh 2y,\ \dot{y} = y\cosh(y - 2x)$

157. $\dot{x} = y - xe^{-x},\ \dot{y} = y^2 - xy - 2y$

158.* $\dot{x} = \dfrac{2}{x^2 - y} + y,\ \dot{y} = y^2 + \cos\pi x$

159.* $\dot{x} = \dfrac{\cos x}{y + 1}, \dot{y} = \dfrac{\sinh y}{x + 1}$

160.* $\dot{x} = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x},\ \dot{y} = \sin(x + y)$

6. Критерий устойчивости уравнений с постоянными коэффициентами

В данном разделе мы будем рассматривать критерий Рауса-Гурвица об устойчивости линейных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами. Согласно условиям, решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами является устойчивым, если вещественные части корней соответствующего характеристического полинома отрицательны. Необходимым условием является положительность коэффициентов уравнения.

Рассматривать будем линейное уравнение следующего вида:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0,\ a_i \in \mathbb{R},\ a_i > 0\ \forall i = \overline{0,n}.$$

Соответствующий характеристический полином имеет следующий вид:

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Решение является асимптотически устойчивым, если вещественные части корней уравнения $P(\lambda) = 0$ отрицательны. Для определения отрицательности корней можно воспользоваться критерием Рауса-Гурвица. Согласно критерию, необходимо, чтобы все главные миноры матрицы Гурвица были положительными. Матрица Гурвица строится по следующим правилам:

- На главной диагонали располагаются коэффициенты характеристического уравнения, начиная с a_1;
- В столбцах коэффициенты характеристического уравнения располагаются по убыванию;
- В ячейках, где индекс коэффициента ниже минимального или выше максимального ставятся нули.

По заданным правилам, матрица Гурвица выглядит следующим образом:

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}.$$

6.1. Пример

Рассмотрим пример. Для следующего уравнения определить, при каких значениях параметров a, b решение является асимптотически устойчивым:

$$y^{IV} + 2y''' + ay'' - by' + 3y = 0.$$

Согласно необходимому условию, коэффициенты уравнения должны быть положительны. Тогда, первое необходимое условие устойчивости: $a > 0, b < 0$. Построим матрицу Гурвица:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -b & 0 & 0 \\ 1 & a & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -b & 0 \\ 0 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем главные миноры:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2 > 0,\ M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -b \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a + b > 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -b & 0 \\ 1 & a & 3 \\ 0 & 2 & -b \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & 3 \\ 2 & -b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -b & 0 \\ 2 & -b \end{vmatrix} = -2ab - 12 - b^2 > 0,$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & -b & 0 & 0 \\ 1 & a & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -b & 0 \\ 0 & 1 & a & 3 \end{vmatrix} = 3M_3 > 0.$$

Согласно критерию, необходимо, чтобы все миноры были положительны. Последний минор зависит от предпоследнего, соответственно, если $M_3 > 0$, то и $M_4 > 0$. Выпишем систему неравенств:

$$\begin{cases} a > 0,\ b < 0, \\ 2a + b > 0, \\ b^2 + 2ab + 12 < 0. \end{cases} \implies \begin{cases} a > 0,\ b < 0, \\ b > -2a, \\ b^2 + 2ab + 12 < 0. \end{cases}$$

Условие $b > -2a$ не противоречит условию $b < 0$ при $a > 0$, и является усиляющим. Из последнего условия найдем ограничения для b:

$$-a - \sqrt{a^2 - 12} < b < -a + \sqrt{a^2 - 12}.$$

Для того, чтобы b было вещественным, необходимо, чтобы $a \geq \sqrt{12}$ или $a \leq -\sqrt{12}$ (что противоречит условию $a > 0$). Условие $a \geq \sqrt{12}$ является усиляющим. При $a \geq \sqrt{12}$, $a > \sqrt{a^2 - 12}$. Также $-2a < -a - \sqrt{a^2 - 12} < -a + \sqrt{a^2 - 12}$, что также является усиляющим условием. Объединим все сильные условия. Таким образом, решение исходной задачи является асимптотически устойчивым при:

$$\begin{cases} a \geq \sqrt{12}, \\ -a - \sqrt{a^2 - 12} < b < -a + \sqrt{a^2 - 12}, \end{cases}$$

или, что то же:

$$\begin{cases} a \geq 2\sqrt{3}, \\ b^2 + 2ab + 12 < 0. \end{cases}$$

На плоскости a, b соответствующая область выглядит таким образом:

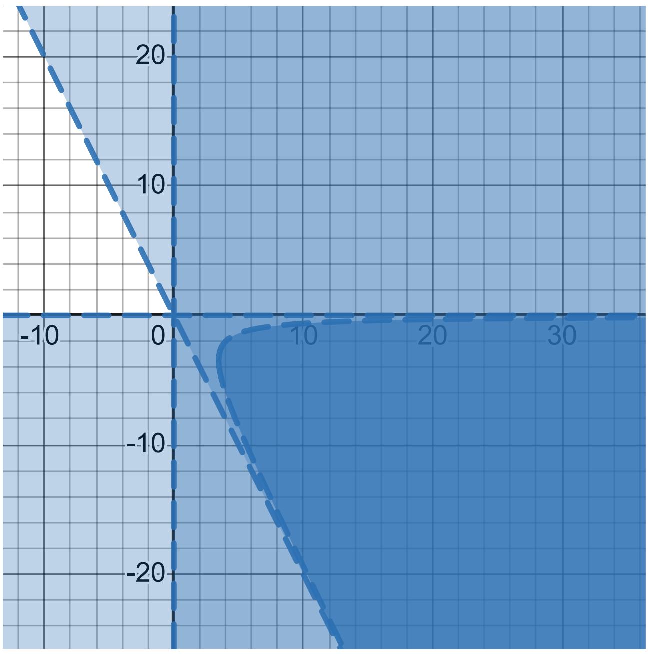

Рис. 22: Область параметров a, b

6.2. Задачи

Для следующих линейных уравнений определить, является ли решение асимптотически устойчивым:

161. $y'' + 4y' + 2y = 0$

162. $y'' + 6y' + 8y = 0$

163. $y'' + 2y' + 5y = 0$

164. $y'' + 9y' + y = 0$

165. $y''' + 2y'' + 3y' + 2y = 0$

166. $y''' + 3y'' + 4y' + y = 0$

167. $y''' + 4y'' + y' + 4y = 0$

168. $y''' + 5y'' + 4y' + 2y = 0$

169. $2y''' + y'' + y' + 2y = 0$

170. $2y''' + 3y'' + y' + 5y = 0$

171. $2y''' + 5y'' + 4y' + 2y = 0$

172. $3y''' + y'' + 4y' + y = 0$

173. $3y''' + y'' + 3y' + 5y = 0$

174. $3y''' + 2y'' + 3y' + 4y = 0$

175. $y^{IV} + y''' + 4y'' + y' + 3y = 0$

176. $y^{IV} + 3y''' + y'' + 2y' + y = 0$

177. $y^{IV} + 5y''' + 3y'' + 4y' + 1y = 0$

178. $2y^{IV} + 3y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$

179.* $y^{V} + 2y^{IV} + y''' + y'' + 2y' + 4y = 0$

180.* $y^{V} + 4y^{IV} + 5y''' + 2y'' + y' + 2y = 0$

Для следующих линейных уравнений определить, при каких значениях параметров a, b решение является асимптотически устойчивым:

181. $y''' + 5y'' + 4y' - ay = 0$

182. $ay''' + y'' + 5y' + 5y = 0$

183. $y''' - ay'' + 3y' + 5y = 0$

184. $2y''' + 2y'' + ay' + y = 0$

185. $ay''' + 2y'' + by' + 3y = 0$

186. $y''' + ay'' - by' + 2y = 0$

187. $y''' + 5y'' - ay' - by = 0$

188. $2y''' + ay'' + 2y' + by = 0$

189. $ay''' + 2y'' + 3y' - by = 0$

190. $3y''' - ay'' + by' + 3y = 0$

191. $5y''' - ay'' + by' + 2y = 0$

192. $4y''' + ay'' + 2y' - by = 0$

193. $y^{IV} + y''' - ay'' + 3y' - by = 0$

194. $y^{IV} + 5y''' + y'' - ay' + by = 0$

195. $y^{IV} + 2y''' + ay'' + 3y' + by = 0$

196. $ay^{IV} + 2y''' + 3y'' + by' + y = 0$

197. $y^{V} + 4y^{IV} + y''' + 4y'' + ay' - by = 0$

198. $y^{V} - ay^{IV} + 2y''' + y'' + 2y' + by = 0$

199.* $3y^{V} + 5y^{IV} + 5y''' + ay'' + by' + 5y = 0$

200.* $ay^{V} + y^{IV} + 3y''' + by'' + 5y' + 5y = 0$

Раздел III

Краевые задачи.

7. Краевые задачи, метод подстановки

В данном разделе будем рассматривать некоторые частные случаи краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введем понятие краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения в общем случае. Рассмотрим уравнение на интервале следующего вида:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,\ x \in (x_0, x_l).$$

Краевыми условиями на функцию y данного уравнения называется совокупность следующих дифференциальных операторов $(n-1)$-го порядка в точках x_0 и x_l:

$$B_i^{(n-1)}[y](x_0, x_l) = 0,\ i = \overline{1,n}.$$

Частный случай линейных краевых условий имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} \cdot y^{(j-1)}(x_0) + b_{ij} \cdot y^{(j-1)}(x_l)\right) = c_i, i = \overline{1,n},$$

где $a_{ij},\ b_{ij},\ c_i$ – const $\forall i, j = \overline{1,n}$.

Задача, содержащаяя в себе уравнение n-го порядка и n-соответствующих краевых условий называется краевой задачей. Рассматривать будем частные случаи краевых задач для уравнений второго порядка. Их классификацию будем проводить на основе следующих характеристик:

1. Условия вида $y(x_0) = y_0,\ y(x_l) = y_l$ называются краевыми условиями первого рода (условия Дирихле);
2. Условия вида $y'(x_0) = y_0,\ y'(x_l) = y_l$ называются краевыми условиями второго рода (условия Неймана);
3. Условия вида $a_{11}y(x_0) + a_{12}y'(x_0) = y_0,\ a_{21}y(x_l) + a_{22}y'(x_l) = y_l$, при условии $a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0,\ a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ называются краевыми условиями третьего рода (смешанные краевые условия, условия Робена).

Краевые условия называются однородными, если $y_0 = y_l = 0$.

Рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = f(x),\ x \in (x_0, x_l).$$

Классическим решение краевой задачи Дирихле для данного уравнения будем называть такую функцию $y(x) \in C^2(x_0, x_l) \cap C[x_0, x_l]$, удовлетворяющую одновременно и уравнению и краевым условиям.

Классическим решение краевой задачи Неймана и смешанной краевой задачи для данного уравнения будем называть такую функцию $y(x) \in C^2(x_0, x_l) \cap C^1[x_0, x_l]$, удовлетворяющую одновременно и уравнению и краевым условиям.

Решение рассматриваемых в разделе можно проводить с помощью метода подстановки. Суть метода заключается в том, чтобы найти сначала общее решение уравнения, а затем, подставляя известные значения из краевыех условий, построить решение, удовлетворяющее краевой задаче.

7.1. Примеры

Рассмотрим следующую краевую задачу для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} y''\left(x-\cos y\right)+2y'+y'^2\sin y=0; \\ y\left(0\right)=\pi,\ y'\left(1\right)+y\left(1\right)=y'\left(1\right)\sin y\left(1\right). \end{cases}$$

Представленное уравнение является уравнением с полной второй производной:

$$\left(xy-\sin y\right)''=0,$$

отсюда общее решение уравнения принимает вид:

$$xy-\sin y=C_1x+C_2.$$

Подставим первое краевое условие:

$$0\cdot\pi-\sin\pi=C_1\cdot 0+C_2 \implies C_2=0.$$

Так как второе краевое условие не является линейным, но при этом в нем присутствует значение производной в точке, продифференцируем решение:

$$xy'+y-y'\sin y=C_1.$$

Подставим $x=1$ в это выражение, получим:

$$y'\left(1\right)+y\left(1\right)-y'\left(1\right)\sin y\left(1\right)=C_1.$$

Данное выражение в точности повторит второе краевое условие, если $C_1=0$. Тогда общее решение краевой задачи принимает следующий вид:

$$xy=\sin y.$$

Рассмотрим неоднородную смешанную краевую задачу для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} y''\left(x^2+1\right)-2xy'+2y=2; \\ y\left(0\right)+y'\left(0\right)=0,\ y'\left(1\right)-y\left(1\right)=1. \end{cases}$$

Для однородного уравнения первое частное решение нетрудно подобрать: $y_{h_1}=x$. Построим общее однородное решение с помощью понижения порядка в линейном уравнении:

$$y=ux,\ u=u\left(x\right) \implies u''x\cdot\left(x^2+1\right)+2u'=0 \implies u'=C_1\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \implies u=C_1\left(x-\frac{1}{x}\right)+C_2.$$

и общее однородное решение принимает вид:

$$y=C_1\left(x^2-1\right)+C_2x.$$

По виду уравнения нетрудно подобрать частное неоднородное решение:

$$y_p=1.$$

Тогда общее решение исходного уравнения принимает вид:

$$y=C_1\left(x^2-1\right)+C_2x+1.$$

Для подстановки краевых условий, найдем производную от решения:

$$y' = 2C_1x + C_2.$$

Согласно методу подстановки, составим систему уравнений для нахождения значений произвольных постоянных:

$$\begin{cases} (-C_1 + 1) + (C_2) = 0, \\ (2C_1 + C_2) - (C_2 + 1) = 1; \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 - C_2 = 1, \\ C_1 = 1; \end{cases}$$

из чего следует $C_1 = 1, C_2 = 0$. Тогда общее решение краевой задачи имеет следующий вид:

$$y = x^2.$$

7.2. Задачи

Построить решение следующих краевых задач для линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

201. $y'' = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$

202. $y'' = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1$

203. $y'' - y' = 0,\ y(0) = 0,\ y(\ln 2) = 1$

204. $y'' - 3y' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y(\ln 2) = 0$

205. $y'' - 4y' + 3y = 0,\ y(0) = 2,\ y(\ln 2) = 10$

206. $y'' - y' - 2y = 0,\ y(0) = -2,\ y(\ln 3) = 8$

207. $y'' - y' - 6y = 0,\ y(0) = -8,\ y(\ln 3) = 26$

208. $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y(1) = 0$

209. $y'' - y = 0,\ y(0) = -4,\ y(\ln 5) = 4$

210. $y'' - 4y = 0,\ y(0) = -2,\ y(\ln 2) = 7$

211. $y'' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

212. $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 2,\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$

213. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 2,\ y(\pi) = -2e^{\pi}$

214. $y'' - 2y' + 5y = 0,\ y(0) = 1,\ y(\pi) = e^{\pi}$

215. $y'' = 2,\ y'(0) = -2,\ y(1) = 0$

216. $y'' - y' = -1,\ y(-1) = e^{-1} - 1,\ y'(1) = 1 + e$

217. $y'' - y = 2e^x,\ y(0) = -1,\ y'(\ln 2) = \ln 4 + 5$

218. $y'' - 2y' + 2y = 2 - \sin x + 2\cos x,\ y'(-1) = y'(1) = -\cos 1$

219.* $y'' + 4y = 20e^{4x},\ 2y(0) - y'(0) = -4,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) - y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 3e^{\pi}$

220.* $y'' + 4y = \frac{2\pi^2}{x^3} \cdot \left(2x^2 + 1\right),\ y(-\pi) + y'(-\pi) = -\pi - 1,\ y(\pi) - y'(\pi) = \frac{4}{\pi} + 1 + \pi$

Построить решение следующих краевых задач для линейных уравнений с переменными коэффициентами:

221. $x^2y'' + xy' - y = 0,\ y(-1) = -2,\ y(1) = 2$

222. $y''x(x-2) + 2y = 2y'(x-1),\ y(0) = 1,\ y(1) = 1$

223. $y''(x-1) - xy' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(\ln 2) = 1$

224. $y''(2x-1) - 2y' = y(2x-3),\ y'(0) = 2,\ y(\ln 3) = \ln 3 - 3$

225. $y'' + 2\cos x = y' \tan x + y \sec^2 x,\ y(0) = 0,\ y'(\pi) = 4$

226. $y''(2x \cot 2x - 1) = 4(y - xy' - 1),\ y'(0) = 1,\ y(\pi) = 1 - \pi$

227.* $y''(x-1) - xy' + y = 2xe^{-x},\ y(0) + y'(1) = 1 + 2\sinh 1,\ y(1) - y'(1) = \dfrac{2}{e}$

228.* $xy''(x \ln x + 1) + y'\left(x^2 \ln x + 1\right) = (y-1)(x-1),\ y(1) + y'(1) = 3,\ y(1) - y'(2) = \dfrac{1+e}{e^2}$

229.* $\begin{cases} \left(x^2+1\right)^2 (y''-2) \arctan x + x\left(x^2+1\right)(y''-2) + 2xy = 2x^2(y'-x), \\ y(0) + 2y(1) = \pi + 4,\ y'(1) - y'(0) = 1 \end{cases}$

230.* $\begin{cases} x^2 \ln x\,(y''-y') - x \ln x\,(y''-y) - xy'' + y' + (x-1)y = x^2 - x + 1, \\ y'(1) - y(1) = 2,\ 2y'(1) + 2y'(2) - y(2) = 2e + e^2 + 10 \end{cases}$

Классифицировать следующие нелинейные краевые задачи, и построить решение с помощью метода подстановки:

231. $xyy'' + xy'^2 + yy' = 0,\ y(1) = 0,\ y(2) \cdot y'(2) = 1$

232. $y'' - y'^2 = \dfrac{y'}{x+1},\ y(0) - y'(0) = 2,\ y'(1) = -1$

233. $y'^2(y \tanh y + 2) = (y' - y'') \cdot (y + \tanh y),\ y(0) = 0,\ y(\sinh 1) = 1$

234. $x(2\ln x - 1) \cdot \left(y'^2 - yy''\right) = yy' \cdot (6 \ln x - 5),\ y(1) = e,\ y(e) = 1$

235. $2yy'\left(\cos^2 x + 1\right) + \left(yy'' + y'^2\right) \sin 2x = 0,\ y(0) = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

236. $y'' + 2y'^2 \tan y = 2y' \tan x,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4},\ y'(\pi) = 0$

237. $y'' + y'^2 - y' = \dfrac{y'}{x+1},\ y'(-1) - y(-1) = 1,\ y(0) + y'(0) = e - 1$

238. $xy'' + y' = xy'^2 \tan y,\ y'(1) \cdot \cos y(1) = -1,\ y(e) = 0$

239.* $2xyy' + \left(x^2 + 1\right) \cdot \left(yy'' + y'^2\right) = 0,\ y(0) \cdot y'(0) = 2,\ y^2(1) + 2y(0) \cdot y'(1) = \pi$

240.** $xy'^2 + xy'' + 2x = y'(3x - 2) + 3,\ y(1) = 1,\ y(e) = e - 1$

8. Функции Грина

В данном разделе рассмотрим интегральные формулы Грина и функции Грина для решения краевых задач для линейных уравнений второго порядка.

Введем линейный дифференциальный оператор второго порядка по следующему правилу:

$$L[u] = \frac{d}{dx}\left[p(x)\cdot\frac{du}{dx}\right] - q(x)\cdot u,\ u = u(x)$$

Рассмотрим краевую задачу для следующего линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$L[u] = f(x),\ x \in (x_0, x_l)$$

с однородными краевыми условиями Дирихле:

$$u(x_0) = u(x_l) = 0.$$

Введем такую функцию $v \in C^2[x_0, x_l]$, удовлетворяющую однородным условиям Дирихле:

$$v(x_0) = v(x_l) = 0,$$

затем домножим исходное уравнение на данную функцию, и проинтегрируем по области $D = [x_0, x_l]$:

$$\int\limits_{x_0}^{x_l} L[u]\cdot v\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_l} f\cdot v\,dx.$$

Раскроем линейный оператор:

$$\int\limits_{x_0}^{x_l} \frac{d}{dx}\left[p\cdot\frac{du}{dx}\right]\cdot v\,dx - \int\limits_{x_0}^{x_l} q\cdot v\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_l} f\cdot v\,dx.$$

Для первого слагаемого воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int\limits_{x_0}^{x_l} \frac{d}{dx}\left[p\cdot\frac{du}{dx}\right]\cdot v\,dx = p\cdot v\cdot\frac{du}{dx}\bigg|_{x_0}^{x_l} - \int\limits_{x_0}^{x_l} p\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}\,dx.$$

Из условия, что функция v удовлетворяет однородным условиям Дирихле, следует:

$$\int\limits_{x_0}^{x_l} \frac{d}{dx}\left[p\cdot\frac{du}{dx}\right]\cdot v\,dx = -\int\limits_{x_0}^{x_l} p\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}\,dx.$$

Введем скалярное произведение следующим образом:

$$(u, v) = \int\limits_{x_0}^{x_l} u(x)\cdot v(x)\,dx,$$

тогда исходная задача принимает следующий вид:

$$-\left(p\cdot u', v'\right) - \left(q\cdot u, v\right) = \left(f, v\right),$$

что является частным случаем первой формулы Грина, а исходная краевая задача сведена к интегральной.

Теперь рассмотрим способы сведения линейных краевых задач с неоднородными краевыми условиями к неоднородным линейным краевым задачам с однородными краевыми условиями. Снова рассмотрим уравнение

$$L[y] = f(x),\ x \in (x_0, x_l)$$

с неоднородными смешанными краевыми условиями:

$$a_{11}y(x_0) + a_{12}y'(x_0) = y_0,\ a_{21}y(x_l) + a_{22}y'(x_l) = y_l.$$

Так как представленное уравнение является линейным, то выполняется принцип суперпозиции:

$$y = u + v.$$

Пусть функция v удовлетворяет только неоднородным краевым условиям, тогда функция u должна удовлетворять, соответственно, однородным краевым условиям, и новому уравнению. Построим новую краевую задачу из этих условий:

$$L[u] + L[v] = f(x),\ x \in (x_0, x_l)\,,$$

$$a_{11}u(x_0) + a_{12}u'(x_0) = 0,\ a_{21}u(x_l) + a_{22}u'(x_l) = 0,$$

$$a_{11}v(x_0) + a_{12}v'(x_0) = y_0,\ a_{21}v(x_l) + a_{22}v'(x_l) = y_l.$$

Положим, что функцию v можно подобрать согласно краевым условиям, тогда краевая задача сводится к задаче с однородными краевыми условиями относительно новой неизвестной функции u.

Подбирать функцию v можно различными способами. Например, пусть v – некоторая квадратичная функция с неопределенными коэффициентами: $v = Ax^2 + Bx + C$. Подставляя в краевые условия, можно подобрать значения коэффициентов A, B, C:

$$\begin{cases} a_{11}\left(Ax_0^2 + Bx_0 + C\right) + a_{12}\left(2Ax_0 + B\right) = y_0, \\ a_{21}\left(Ax_l^2 + Bx_l + C\right) + a_{22}\left(2Ax_l + B\right) = y_l, \end{cases}$$

Представленная система является линейной системой алгебраических уравнений из двух уравнений и трех неизвестных. Из этой системы можно получить любой набор коэффициентов A, B, C, на основе которых построить такую функцию v, которая будет удовлетворять краевым условиям. Так как функция v известна, то и известно значение выражения $L[v]$. Пусть $g(x) = f(x) - L[v]$. Тогда краевая задача принимает следующий вид:

$$L[u] = g(x),\ x \in (x_0, x_l)\,,$$

$$a_{11}u(x_0) + a_{12}u'(x_0) = 0,\ a_{21}u(x_l) + a_{22}u'(x_l) = 0.$$

Решая данную задачу, и подставляя известное значение функции v, получим решение исходной краевой задачи.

Рассмотрим линейный неоднородный дифференциальный оператор с однородными смешанными краевыми условиями:

$$L[u] = f(x),\ x \in (x_0, x_l)\,,\ L[u] = \frac{d}{dx}\left[p \cdot \frac{du}{dx}\right] - q \cdot u,$$

$$B_0[u] = a_{11}u(x_0) + a_{12}u'(x_0) = 0,\ B_l[u] = a_{21}u(x_l) + a_{22}u'(x_l) = 0.$$

Функцией Грина данной краевой задачи называется такая функция $G(x,t)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $G(x,t) \in \left(C^2(x_0,x_l) \cap C[x_0,x_l]\right) \times \left(C^1(x_0,x_l) \cap C[x_0,x_l]\right)$ – непрерывна на квадрате, дважды дифференцируема по x, и дифференцируема один раз по t;

2. $L_x[G(x,t)] = \delta(x-t) = \begin{cases} 0 : x \neq t \\ 1 : x = t \end{cases}$ – удовлетворяет однородному уравнению, когда $x \neq t$, и оператор равен 1 при $x = t$;

3. $B_0[G(x,t)] = B_l[G(x,t)] = 0$ – удовлетворяет однородным краевым условиям по переменной x;

4. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\partial G}{\partial x}\Bigg|_{x=t-\varepsilon}^{x=t+\varepsilon} = \dfrac{1}{p(t)}$ – производная функции терпит разрыв первого рода со скачком в точке $x = t$.

Функция Грина является обратным оператором для исходной краевой задачи. Решение можно записать в следующем виде:

$$u(x) = \int\limits_{x_0}^{x_l} G(x,t) \cdot f(t)\, dt.$$

Справедливость данного выражения можно доказать следующим образом:

$$L[u] = L_x\left[\int\limits_{x_0}^{x_l} G(x,t) \cdot f(t)\, dt\right] = \int\limits_{x_0}^{x_l} L_x[G(x,t)] \cdot f(t)\, dt = \int\limits_{x_0}^{x_l} \delta(x-t) \cdot f(t)\, dt = f(x).$$

Такая функция удовлетворяет уравнению. Краевые условия выполняются согласно условиям, наложенным на функцию G.

Рассмотрим построение функции Грина. Положим следующее уравнение:

$$L[G(x,t)] = 0,\ x \neq t.$$

Рассмотрим следующие две области:

$$I_0(t) = [x_0, t),\ I_l(t) = (t, x_l].$$

Пусть u_0, u_l – линейно-независимые частные решения однородного уравнения, при условии, что:

$$B_0[u_0] = 0,\ B_l[u_l] = 0.$$

Тогда пусть функция Грина принимает следующий вид:

$$G(x,t) = \begin{cases} C_1(t) \cdot u_0(x),\ x \in I_0(t), \\ C_2(t) \cdot u_l(x),\ x \in I_l(t). \end{cases}$$

Удовлетворим условие непрерывности функции в точке $x = t$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} G(t-\varepsilon, t) = \lim_{\varepsilon \to 0} G(t+\varepsilon, t),$$

из чего следует:

$$C_1(t) \cdot u_0(t) = C_2(t) \cdot u_l(t).$$

Затем удовлетворим условие разрывности производной функции в точке $x = t$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial G}{\partial x}\Bigg|_{x=t-\varepsilon}^{x=t+\varepsilon} = \frac{1}{p(t)},$$

из чего следует:

$$C_2(t)\cdot u_l'(t) - C_1(t)\cdot u_0'(t) = \frac{1}{p(t)}.$$

Рассматривая систему, построенную на двух данных условиях, возможно найти неизвестные функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$. Тогда возможно определить единственную функцию Грина на основе конкретных функций u_0 и u_l.

8.1. Примеры

Построим интегральную форму следующей краевой задачи:

$$y'' + y' - 2y = 10e^{-x}\cos x,\ y(0) = 1,\ y(\ln 2) = -1.$$

Введем функцию v, удовлетворяющую однородным условиям Дирихле:

$$v(0) = v(\ln 2) = 0.$$

Найдем функции $p(x)$ и $q(x)$. Домножим исходное уравнение на некоторой неизвестный интегрирующий множитель $\mu(x)$. Соответствующее уравнение для функций p и q можно найти из следующего соотношения:

$$\mu\cdot(y'' + y' - 2y) = \frac{d}{dx}\left[p\cdot y'\right] - q\cdot y$$

Раскрываем скобки, получим:

$$y''\mu + y'\mu - 2y\mu = py'' + p'y' - qy,$$

отсюда:

$$p = \mu,\ p' = \mu,\ q = 2\mu.$$

Найдем p:

$$p' = p \implies p = Ce^x,\ \text{пусть } C = 1,$$

тогда

$$q = 2e^x.$$

Сведем исходное уравнение к операторному виду:

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left[y'e^x\right] - 2ye^x = 10\cos x.$$

Домножим уравнение на функцию v, и проинтегрируем:

$$\int\limits_0^{\ln 2} \frac{d}{dx}\left[y'e^x\right]\cdot v\,dx - 2\int\limits_0^{\ln 2} ye^x\cdot v\,dx = 10\int\limits_0^{\ln 2}\cos x\cdot v\,dx.$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям для первого интеграла, получим:

$$y'e^x \cdot v\Big|_{x=0}^{x=\ln 2} - \int\limits_0^{\ln 2} y'e^x \cdot v'\, dx - 2\int\limits_0^{\ln 2} ye^x \cdot v\, dx = 10\int\limits_0^{\ln 2} \cos x \cdot v\, dx.$$

Введем скалярное произведение следующим образом:

$$(u, v) = \int\limits_0^{\ln 2} u(x) \cdot v(x)\, dx.$$

Упростим выражение, получим следующую интегральную форму исходной краевой задачи:

$$\left(y'e^x, v'\right) + 2\left(ye^x, v\right) = -10\left(\cos x, v\right).$$

Построим решение следующей неоднородной краевой задачи для линейного неоднородного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases} x\left(2x-1\right)y'' + 2\left(x-1\right)y' - 2y = 6x\left(x-1\right) + 2, \\ y(1) + y'(1) = 3,\ 2y(2) - y'(2) = 3 \end{cases}$$

Решение будем строить в виде линейной комбинации двух функций:

$$y = u + v,$$

где функция v удовлетворяет неоднородным краевым условиям, а для функции u ставится новая краевая задача. Пусть v – некоторая линейная функция: $v = Ax + B$. Найдем коэффициенты A и B:

$$\begin{cases} 2A + B = 3 \\ 3A + 2B = 3 \end{cases} \implies A = 3, B = -3,\ v(x) = 3\left(x - 1\right).$$

Тогда новая краевая задача принимает следующий вид:

$$\begin{cases} x\left(2x-1\right)\left(u + 3x - 3\right)'' + 2\left(x-1\right)\left(u + 3x - 3\right)' - 2\left(u + 3x - 3\right) = 6x\left(x-1\right) + 2, \\ u(1) + u'(1) = 0,\ 2u(2) - u'(2) = 0 \end{cases}$$

Раскроем скобки, упростим выражение:

$$\begin{cases} x\left(2x-1\right)u'' + 2\left(x-1\right)u' - 2u = 6x\left(x-1\right) + 2, \\ u(1) + u'(1) = 0,\ 2u(2) - u'(2) = 0 \end{cases}$$

Найдем значение функций $p(x)$ и $q(x)$ домножая исходное уравнение на интегрирующий множитель $\mu(x)$:

$$\mu \cdot \Big(x\left(2x-1\right)u'' + 2\left(x-1\right)u' - 2u\Big) = pu'' + p'u' - qu.$$

Отсюда следует:

$$p = \mu \cdot x\left(2x-1\right),\ p' = 2\mu \cdot \left(x-1\right),\ q = 2\mu.$$

Найдем p:

$$\frac{p'}{p} = \frac{2\,(x-1)}{x\,(2x-1)} \implies p(x) = \frac{Cx^2}{2x-1},\ \text{пусть } C = 1,$$

тогда

$$\mu(x) = \frac{x}{(2x-1)^2},\ q(x) = \frac{2x}{(2x-1)^2},\ f(x) = \frac{2x\big(3x\,(x-1)+1\big)}{(2x-1)^2}$$

Таким образом, исходное уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{2x-1}\cdot u'\right] - \frac{2x}{(2x-1)^2} = \frac{2x\big(3x\,(x-1)+1\big)}{(2x-1)^2}$$

Найдем однородные решения исходного уравнения:

$$x\,(2x-1)\,u'' + 2\,(x-1)\,u' - 2u = 0.$$

Подберем частное решение. Пусть $u = x^n$. Подставим в уравнение:

$$n\,(n-1)\cdot x\,(2x-1)\,x^{n-2} + 2n\,(x-1)\cdot x^{n-1} - 2x^n = 0.$$

Рассчитаем коэффициенты при старших степенях x:

$$2n\,(n-1)\,x^n + 2nx^n - 2x^n = 0 \implies n = \pm 1.$$

Найдем частное решение в виде полинома степени $n = 1$: $u = x + a$. Подставим в уравнение:

$$2\,(x-1) - 2\,(x+a) = 0 \implies a = -1.$$

Частное решение однородного уравнения: $u = x-1$. Найдем второе частное решение. Положим $u = z\cdot(x-1)\,,\ z = z(x)$. Подставим в уравнение:

$$x\left(2x^2 - 3x + 1\right)z'' + 2\left(3x^2 - 3x + 1\right)z' = 0.$$

Разделяя переменные, получим:

$$z' = C_1\cdot\frac{1-2x}{x^2\,(x-1)^2} \implies z = C_1\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) + C_2.$$

Подставляя и упрощая, получим общее решение однородного уравнения:

$$u = C_1\,(x-1) + \frac{C_2}{x}$$

Подберем два линейно-независимых частных решения, удовлетворящих однородным краевым условиям. Для этого найдем производную функции u:

$$u' = C_1 - \frac{C_2}{x^2}.$$

Система для двух частных решений принимает вид:

$$\begin{cases} u_1 = C_1\,(x-1) + \dfrac{C_2}{x}, \\ u_1(1) + u_1'(1) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = C_1\,(x-1) + \dfrac{C_2}{x}, \\ 2u_2(2) - u_2'(2) = 0. \end{cases}$$

Подберем значения C_1 и C_2 для функций u_1 и u_2:

$$u_1 : C_2 + C_1 - C_2 = 0; \quad u_2 : 2C_1 + C_2 - C_1 + \frac{C_2}{4} = 0.$$

Выберем следующие функции:

$$u_1 = \frac{1}{x},\ u_2 = 5\,(x-1) - \frac{4}{x}.$$

Проверим их линейную независимость:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & 5\,(x-1) - \frac{4}{x} \\ -\frac{1}{x^2} & 5 + \frac{4}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{5}{x^2}\,(2x-1) \neq 0.$$

Построим функцию Грина:

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{C_1(t)}{x},\ 1 \le x < t \le 2, \\ C_2(t) \cdot \left(5\,(x-1) - \dfrac{4}{x}\right),\ 1 \le t < x \le 2. \end{cases}$$

Выпишем условия непрерывности и разрывности функции Грина:

$$\begin{cases} \dfrac{C_1(t)}{t} = C_2(t) \cdot \left(5\,(t-1) - \dfrac{4}{t}\right) \\ C_2(t) \cdot \left(5 + \dfrac{4}{t^2}\right) + \dfrac{C_1(t)}{t^2} = \dfrac{1}{p(t)} = \dfrac{2t-1}{t^2}. \end{cases}$$

Запишем данную систему в матричной форме относительно неизвестных $C_1(t)$ и $C_2(t)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -5\,(t-1) + \frac{4}{t} \\ \frac{1}{t^2} & 5 + \frac{4}{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2t-1}{t^2} \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы коэффициентов при $C_1(t)$, $C_2(t)$ известен, и равен $W(t)$. Тогда

$$C_1(t) = \frac{t^2}{5\,(2t-1)} \cdot \left(5\,(t-1) - \frac{4}{t}\right) \cdot \frac{2t-1}{t^2} = \frac{1}{5}\left(5\,(t-1) - \frac{4}{t}\right),$$

$$C_2(t) = \frac{t^2}{5\,(2t-1)} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{2t-1}{t^2} = \frac{1}{5t}.$$

Тогда функция Грина принимает следующий вид:

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{5x} \cdot \left(5\,(t-1) - \dfrac{4}{t}\right),\ 1 \le x < t \le 2, \\ \dfrac{1}{5t} \cdot \left(5\,(x-1) - \dfrac{4}{x}\right),\ 1 \le t < x \le 2. \end{cases}$$

Построим решение новой краевой задачи:

$$u(x) = \int\limits_1^2 G(x,t) \cdot f(t)\,dt = \int\limits_1^x G_2(x,t) \cdot f(t)\,dt + \int\limits_x^2 G_1(x,t) \cdot f(t)\,dt = \circledast$$

Рассмотрим каждый интеграл отдельно:

$$I_1 = \int\limits_1^x G_2(x,t)\cdot f(t)\,dt = \frac{1}{5}\cdot\left(5\,(x-1)-\frac{4}{x}\right)\cdot\int\limits_1^x \frac{1}{t}\cdot\frac{2t\big(3t\,(t-1)+1\big)}{(2t-1)^2}\,dt = \star$$

$$I_1' = 2\int\limits_1^x \frac{3t\,(t-1)+1}{(2t-1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_1^x 3+\frac{1}{(2t-1)^2} = \frac{3}{2}t-\frac{1}{4\,(2t-1)}\Bigg|_{t=1}^{t=x} =$$

$$= \frac{3}{2}x-\frac{1}{4\,(2x-1)}-\frac{5}{4} = \frac{1}{4}\cdot\left(6x-5-\frac{1}{2x-1}\right);$$

$$\star = \frac{1}{20}\cdot\left(5\,(x-1)-\frac{4}{x}\right)\cdot\left(6x-5-\frac{1}{2x-1}\right) = \frac{15x^4-35x^3+13x^2+11x-4}{5x\,(2x-1)};$$

$$I_2 = \int\limits_x^2 G_1(x,t)\cdot f(t)\,dt = \frac{1}{5x}\cdot\int\limits_x^2\left(5\,(t-1)-\frac{4}{t}\right)\cdot\frac{2t\big(3t\,(t-1)+1\big)}{(2t-1)^2}\,dt = \star$$

$$I_2' = \int\limits_x^2\left(5\,(t-1)-\frac{4}{t}\right)\cdot\frac{2t\big(3t\,(t-1)+1\big)}{(2t-1)^2}\,dt = \int\limits_x^2 \frac{15}{2}t^2-\frac{15}{2}t-\frac{43}{8}-\frac{21}{8\,(2t-1)^2}\,dt =$$

$$= \frac{5}{2}t^3-\frac{15}{4}t^2-\frac{43}{8}t+\frac{21}{16\,(2t-1)}\Bigg|_{t=x}^{t=2} = -\frac{39}{8}-\frac{5}{2}x^3+\frac{15}{4}x^2+\frac{43}{8}x-\frac{21}{16\,(2x-1)} =$$

$$= -\frac{5x^4-10x^3-7x^2+16x-4}{2x-1};$$

$$\star = -\frac{5x^4-10x^3-7x^2+16x-4}{5x\,(2x-1)};$$

$$\circledast = \frac{15x^4-35x^3+13x^2+11x-4}{5x\,(2x-1)}-\frac{5x^4-10x^3-7x^2+16x-4}{5x\,(2x-1)} =$$

$$= \frac{10x^4-25x^3+20x^2-5x}{5x\,(2x-1)} = \frac{2x^3-5x^2+4x-1}{2x-1} = (x-1)^2\,.$$

Тогда общее решение принимает вид:

$$y = u+v = (x-1)^2+3\,(x-1) = x^2+x-2.$$

Замечание

На примере видно, что функция Грина является симметричной относительно аргументов x и t. В общем случае данная функция может быть представлена в следующем виде:

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{u_0(x)\cdot u_l(t)}{W(t)\cdot p(t)},\ x_0\le x<t\le x_l,\\[2mm] \dfrac{u_0(t)\cdot u_l(x)}{W(t)\cdot p(t)},\ x_0\le t<x\le x_l,\end{cases}$$

где u_0, u_l – частные решения, удовлетворяющие первому и второму краевым условиям, $W(t)$ – определитель Вронского системы двух частных решений, $p(t)$ – коэффициент при старшей производной в рассматриваемом линейном дифференциальном операторе.

8.2. Задачи

Свести задачу к задаче с однородными краевыми условиями, найти интегрирующий множитель и построить интегральную форму для следующих краевых задач:

241. $x^2u'' + xu' - u = 0,\ u(-1) = -1,\ u(1) = 1$

242. $xu'' + (x-1)\,u' - u = -1,\ u(0) = 0,\ u(1) = 1$

243. $(2x-1)\,u'' - 2u' - (2x-3)\,u = 3x - 2x^2 - 2,\ u(-1) = \dfrac{1}{e} - 1,\ u(1) = 1 + e$

244. $x^2u'' = 2\,(xu' - u + 1)\,,\ u(0) = 1,\ u(1) = 1$

245. $x\,(x-4)\,u'' - 2\,(x-2)\,u' + 2u = -4,\ u(0) = 2,\ u(1) = 1$

246. $x\,(x-1)\,u'' + (x+1)\,u' - u = 3x^2,\ u(-1) = 1,\ u(1) = 3$

247. $u'' - 3u'\cot x + \left(3\operatorname{cosec}^2 x - 2\right)u = 3\cot x \operatorname{cosec} x,\ u(0) = 1,\ u\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

248.* $x\,(x-2)\,u'' - \left(x^2 - 2\right)u' + 2\,(x-1)\,u = (x-2)^2\,,\ u(0) = -2,\ u(1) = 1 - e$

249.* $(xe^x + 1)\,u'' - (x+1)\,u'e^x + ue^x = e^x,\ u(0) = 2,\ u(1) = 3$

250.* $x^2\,(\ln x - 1)\,u'' - x\,(2\ln x - 1)\,u' + 2u\ln x = 2\ln x,\ u(1) = 1,\ u(e) = 1 + e$

Свести задачу к задаче с однородными краевыми условиями, найти интегрирующий множитель и построить общее решение следующих краевых задач для линейных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью функции Грина:

251. $y'' = (x+2)\,e^x,\ y(0) = 1,\ y(1) = e$

252. $y'' - y' = 1 - 2x,\ y(0) = 2,\ y(1) = e + 3$

253. $y'' - y = 2e^x,\ y(0) = 0,\ y\,(\ln 2) = \ln 4 + 3$

254. $y'' - 3y' + 2y = 2\cdot(1-x)\,e^x,\ y(0) = 0,\ y(1) = 2e - e^2$

255. $y'' - 2y' + y = x + e^{2x} - 2,\ y(0) = 1,\ y(1) = 1 + e + e^2$

256. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x},\ y(0) = 1,\ y\,(\ln 3) = 9\,(1 + \ln 3)$

257. $y'' - 4y = 4\sinh 2x,\ y(-1) = 3\cosh 2,\ y(1) = 5\cosh 2$

258. $y'' - 4y' + 4y = 4x + 2e^{2x} - 4,\ y(0) = 1,\ y'(1) = 1$

259. $y'' - 2y' + y = 2\,(x-1)\,e^{-x},\ y'(-1) = 2\cosh 1,\ y'(1) = -2e$

260. $y'' + y = 2\cosh x,\ y(0) = 2,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cosh\dfrac{\pi}{2}$

261. $y'' + y = 2\cos x,\ y(0) = -1,\ y'\,(\pi) = -\pi$

262. $y'' = 2\,(y' - y + x)\,,\ y(0) = 2,\ y'\,(\pi) = 1 - e^{\pi}$

263. $y'' - 2y' + 5y = 10\cos x,\ y(0) + y'(0) = 3,\ y\,(\pi) = e^{\pi} - 2$

264. $y'' - 2y' + 5y = 4xe^x,\ y(0) + y'(0) = 5,\ y\,(\pi) = (1 + \pi)\,e^{\pi}$

265. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x},\ y'(0) = -2,\ y(\pi) - y'(\pi) = 0$

266. $y'' + 4y' + 5y = 2 \cdot (5x+3) \cdot e^{x},\ 2y'(0) - y(0) = 9,\ y(\pi) = e^{-2\pi} + \pi e^{\pi}$

267. $y'' + 2y' + 5y = 5x^2 + 4x + 2,\ 2y'(0) - y(0) = 4,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi}{2}$

268. $y'' + 6y' + 13y = 13x + 6,\ y(0) + y'(0) = -3,\ y'(\pi) = 1 - 5e^{-3\pi}$

269.* $y'' + 4y = 32\sin 6x + 2\tan^3 x + 6\tan x,\ y(0) - y'(0) = 6,\ 2y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$

270.* $\begin{cases} y'' - 6y' + 13y = 5 \cdot (6\sin x - 7\cos x)\, e^{-x}, \\ y(-\pi) + 2y'(-\pi) = 8e^{-3\pi} - 5e^{\pi},\ y(\pi) - y'(\pi) = 4 \cdot \left(e^{-\pi} - e^{3\pi}\right) \end{cases}$

Свести задачу к задаче с однородными краевыми условиями, найти интегрирующий множитель и построить общее решение следующих краевых задач для линейных уравнений с переменными коэффициентами с помощью функции Грина:

271. $x^2 y'' - xy' = 3(y-1),\ y(-1) = 2,\ y'(1) = 5$

272. $x^3 y'' + 2x^2 y' = 2(xy - x - 1),\ y(-1) = -2,\ y(1) = 2$

273. $x(x+1)\, y'' + (x-1)\, y' = y + 3x^2,\ y'(0) = -1,\ y(1) = 2$

274. $x^2(\ln x - 1)\, y'' - xy' + y = (2\ln x - 3) \cdot x^2 - 1,\ y'(0) = 1,\ y'(1) = 3$

275. $x(x+1)\, y'' - \left(x^2 - 2\right) y' = (x+2)(y-1),\ y(-1) = -\frac{1}{e},\ y(1) + y'(1) = 1 - 2e$

276. $(1-2x)\, y'' + 4xy' - 4y = (1-2x)^2 + 1,\ y(-1) = 1 + \frac{1}{e^2},\ y'(0) - y(0) = 1$

277.* $\begin{cases} 2y''\cos^2 x + 3y'\sin 2x + 2(2 - \cos 2x)\, y = 4 - 2\cos 2x, \\ y'(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \end{cases}$

278.* $\begin{cases} (x - \tan x)\, y'' + (xy' - y)\tan x = \left(x^2 - 2\right)\tan x + 2x, \\ y(0) - y'(0) = -2,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} \end{cases}$

279.* $\begin{cases} (2x-1)\, y'' - 2y' + (3-2x)\, y = 3x - 2x^2 - 2, \\ 2y(-\ln 2) + 2y'(-\ln 2) = 4 - 2\ln 2,\ y'(0) - y(0) = 1 \end{cases}$

280.* $\begin{cases} x^2(\ln x + 1)\, y'' + x(2\ln x + 1)\, y' - y = 2x\ln x, \\ y(1) + 2y'(1) = 3,\ 2y(2) - y'(2) = 4\ln 2 + 7 \end{cases}$

Раздел IV

Нелинейные системы уравнений. Уравнения с частными производными.

9. Нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор неизвестных функций, $\underline{x} = \underline{x}(t)$. Системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка называется система следующего вида:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t).$$

Стационарной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка называется система следующего вида:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}).$$

Симметрической системой $(n-1)$-го равенства обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка называется система следующего вида:

$$\frac{dx_1}{f_1(\underline{x}, t)} = \frac{dx_2}{f_2(\underline{x}, t)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(\underline{x}, t)}.$$

Первым интегралом нелинейной системы называется некоторая функция $\varphi(\underline{x}, t) = C_1$, полученная путем интегрирования любой комбинации уравнений системы ровно один раз. Здесь C_1 – произвольная постоянная. k-порядковым интегралом (k-м интегралом, общим интегралом) называется некоторая функция $\varphi(\underline{x}, t, C_1, \dots, C_{k-1}) = C_k$, содержащая в себе $(k-1)$-порядковых интегралов. Соответственно, вторым интегралом называется интеграл, содержащий в себе две произвольные постоянные. Полным интегралом системы называется интеграл, полученный путем полного интегрирования системы (содержит в себе n-произвольных постоянных). Общим решением системы называется совокупность всех возможных первых и общих интегралов, образующих полный интеграл.

Для нелинейных систем характерны следующие свойства:

1. Любую стационарную систему из n уравнений можно свести к нестационарной системе $(n-1)$-го уравнения. Для этого достаточно зафиксировать k-е уравнение (k – произвольно, $f_k(\underline{x}) \not\equiv 0$), и затем разделить каждое уравнения на данное. k-е уравнение примет вид $1 = 1$, тогда его можно исключить из системы. Таким образом x_k становится новой независимой переменной.

2. Любую систему из n уравнений можно свести к симметрической системе путем разделения каждого уравнения на их соответствующую правую часть, и дальнейшего приравнивая их между собой. Такую операцию можно производить и в обраную сторону.

Рассмотрим свойство 1.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(\underline{x}), \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_k = f_k(\underline{x}), \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_n = f_n(\underline{x}). \end{cases}$$

Зафиксируем уравнение $\dot{x}_k = f_k(\underline{x})$, где $f_k(\underline{x}) \not\equiv 0$. Введем вектор $\underline{y} = \{x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n\} = \underline{x} \setminus \{x_k\}$ размерности $n-1$, полагая теперь, что $\underline{y} = \underline{y}(x_k)$. Разделим каждое m-е уравнение системы на k-е, $m \in \overline{1,n},\ m \neq k$:

$$\frac{\dot{x}_m}{\dot{x}_k} = \frac{f_m(\underline{x})}{f_k(\underline{x})}.$$

Здесь $\dfrac{\dot{x}_m}{\dot{x}_k} = \dfrac{\dfrac{dx_m}{dt}}{\dfrac{dx_k}{dt}} := \dfrac{dx_m}{dx_k} = y'_m$. Переобозначим $\dfrac{f_m(\underline{x})}{f_k(\underline{x})} := g_m\left(\underline{y}, x_k\right)$. Тогда система принимает следующий вид:

$$\underline{y}' = \underline{g}\left(\underline{y}, x_k\right).$$

В данной системе отсутствует k-е уравнение. Таким образом получена нестационарная система из $(n-1)$-го уравнения.

Рассмотрим свойство 2.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(\underline{x}, t), \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_n = f_n(\underline{x}, t). \end{cases}$$

Разделяя каждое уравнение на их соответствующие правые части, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{x}_1}{f_1(\underline{x}, t)} = 1, \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{\dot{x}_n}{f_n(\underline{x}, t)} = 1. \end{cases}$$

Правые части каждого уравнения полученной системы равны, соответственно, приравняем каждое уравнение между собой:

$$\frac{\dot{x}_1}{f_1(\underline{x}, t)} = \frac{\underline{x}_2}{f_2(\underline{x}, t)} = \cdots = \frac{\dot{x}_n}{f_n(\underline{x}, t)} = 1.$$

Домножим выражение на dt, получим симметрическую систему следующего вида:

$$\frac{dx_1}{f_1(\underline{x}, t)} = \frac{dx_2}{f_2(\underline{x}, t)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(\underline{x}, t)} = dt.$$

Рассмотрим это же свойство в другую сторону. Любая система равенств может быть представлена в виде некоторой системы. Зафиксируем некоторую k-ю часть равенства, и приравняем остальные части к нему в виде следующей системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{f_1(\underline{x}, t)} = \dfrac{dx_k}{f_k(\underline{x}, t)}, \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{dx_n}{f_n(\underline{x}, t)} = \dfrac{dx_k}{f_k(\underline{x}, t)}, \\ \qquad dt = \dfrac{dx_k}{f_k(\underline{x}, t)}. \end{cases}$$

Разделим каждое уравнение на x_k, и умножим на соотвествующий знаменатель левой части каждого уравнения системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_k} = \dfrac{f_1(\underline{x}, t)}{f_k(\underline{x}, t)}, \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dx_k} = \dfrac{f_n(\underline{x}, t)}{f_k(\underline{x}, t)}, \\ \dfrac{dt}{dx_k} = \dfrac{1}{f_k(\underline{x}, t)}. \end{cases}$$

Снова производя переобозначения, получим:

$$\begin{cases} \quad y_1' = g_1(\underline{x}, t), \\ \qquad \vdots \\ \quad y_n' = g_n(\underline{x}, t), \\ \dfrac{dt}{dx_k} = g_k(\underline{x}, t), \end{cases}$$

где $t = t(x_k)$.

Рассмотрим методы решения систем нелинейных уравнений. Будем рассматривать стационарные уравнения. Для таких уравнений используется *метод понижения порядка*. Положим, что возможно зафиксировать одно уравнение в системе. Тогда, разделяя каждое уравнение системы на него, согласно свойству (1), полученная система будет состоять из $(n-1)$-го уравнения, тем самым был понижен её порядок.

В случае систем из двух уравнений, такой метод сводит к классическому скалярному уравнению первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = f_2(x, y), \end{cases} \implies \frac{dy}{dx} = y' = g(x, y).$$

Другой метод решения называется *методом повышения порядка* для решения систем нестационарных уравнений. Он позволяет сводить системы 1-го порядка из n уравнений к уравнению n-го порядка. Его возможно реализовать только в случае, если имеется возможность выражать переменные из уравнений.

В случае систем из двух уравнений, полагая, что одну из переменных в системе можно выразить в явном виде, система сводится к уравнению второго порядка:

$$\begin{cases} y = \varphi(x, \dot{x}, t), \\ \dot{y} = \psi(x, y, t), \end{cases} \implies \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \cdot \ddot{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \psi\big(x, \varphi(x, \dot{x}), t\big),$$

или, в простой форме:

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0.$$

В общем случае такие методы называются *методами исключения переменной*. Если возможно выразить из одного из уравнений нестационарной системы независимую переменную t, то после подстановки такого выражения, система сократит количество уравнений до $n-1$. В случае, если возможно выразить зависимую переменную, то при подстановке в другие уравнения, их порядок производной увеличивается.

Рассмотрим методы решения симметрических систем. Для системы из n равенств необходимо найти n независимых первых и общих интегралов системы. Для равенств симметрической системы характерен принцип равенства дробей. Положим равенство некоторому значению λ следующих дробей:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lambda.$$

Тогда дробь, построенная в виде линейной комбинацией числителей и такой же линейной комбинацией знаменателей, также равна некоторому числу λ:

$$\frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n}{k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_n\beta_n} = \lambda \ \forall k_i,\ i \in \overline{1,n}.$$

Составляя функциональные комбинации таким образом, чтобы получилось интегрируемое уравнение, можно построить, соответственно, первые интегралы системы. Уже известные комбинации можно использовать в дальнейших решениях уравнений. В симметрических системах возможно наличие выражений следующего вида:

$$\frac{dx_k}{0}.$$

При построении системы уравнений, возникнет комбинация вида $dx_k = 0$, или $x_k = C_k$.

9.1. Примеры

Рассмотрим следующий пример:

$$t\dot{x} + x = 0,\ t^2\dot{y} = 2x^2 - ty.$$

Здесь представлена система двух нестационарных уравнений. Выразить свободно переменные t, x или y для получения более простой системы невозможно. Но в данном примере первое уравнение системы представляет собой вполне интегрируемое уравнение, соответственно, возможно понизить порядок данной системы. Воспользуемся методом подстановки решения. Первое уравнение системы имеет следующее решение:

$$xt = C_1.$$

Подставим это значение во второе уравнение:

$$t^2\dot{y} = 2\frac{C_1^2}{t^2} - ty.$$

Получили в результате линейное неоднородное уравнение первого порядка с переменными коэффициентами. Построим второй (полный) интеграл с помощью интегрирующего множителя $\frac{1}{t}$:

$$t\dot{y} + y = 2\frac{C_1^2}{t^3} \implies ty + \frac{C_1^2}{t^2} = C_2.$$

Запишем решение в виде системы первых интегралов. Подставим во второй интеграл решение первого уравнения. Получим следующую систему:

$$xt = C_1,\ ty + x^2 = C_2.$$

Полученная система является полным интегралом системы, и также является общим решением.

Рассмотрим другой пример:

$$t\dot{x} = \frac{x}{1-y},\ t\dot{y} = \frac{y}{1-y}$$

Данная система представляет собой также систему двух нестационарных уравнений. Так как второе уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, можно воспользоваться методом подстановки, но в данном примере рассмотрим другой метод. Можно увидеть, что если разделить одно уравнение на другое, результирующее уравнение будет независимо от t. При этом, уравнение сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка. Воспользуемся частным случаем метода исключения переменной – методом понижения порядка. Разделим второе уравнение на первое:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} := y' = \frac{y}{x}.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, первый интеграл (в данном случае он является также полным), соответственно, имеет следующий вид:

$$\frac{x}{y} = C_1.$$

Построим общее решение данного уравнения. Для этого подставим первый интеграл в виде уравнения $x = C_1 y$ в рассматриваемую систему. Тогда

$$\dot{x} = C_1\dot{y},$$

и

$$tC_1\dot{y} = \frac{C_1 y}{1-y},\ t\dot{y} = \frac{y}{1-y}.$$

При подстановке первого интеграла в исходную систему, с условием, что $C_1 \neq 0$, получили два зависимых уравнения. Исключая одно из уравнений в силу зависимости, получим одно уравнение с разделяющимися переменными. Построим его решение:

$$\frac{(1-y)\ dy}{y} = \frac{dt}{t} \implies te^y = C_2 y.$$

Таким образом получили второе решение, которое является ещё одним первым интегралом системы. Тогда общее решение системы можно записать в виде следующей системы:

$$x = C_1 y,\ te^y = C_2 y.$$

В некоторых задачах может потребоваться найти решение только в виде полного интеграла $F(x, y) = C$. Для таких случаев подстановка в уравнение и построение второго решения не требуется.

Рассмотрим третий пример:

$$\dot{x} = ye^x,\ \dot{y} = 2e^{-2x} - 2y^2e^x.$$

Представленная система является стационарной, и ее можно решать методом понижения порядка, как в случае примера выше. Для данного примера рассмотрим ещё один вариант метода исключения переменных – метод повышения порядка. В первом уравнении системы можно выразить y в через переменные x и $\dot{x}$:

$$y = \dot{x} \cdot e^{-x}.$$

Подставим данное равенство во второе уравнение, исключая из уравнения полностью переменную y. Тогда

$$\dot{y} = \ddot{x} \cdot e^{-x} - \dot{x}^2 \cdot e^{-x},$$

и при подстановке, уравнение принимает следующий вид:

$$\ddot{x} \cdot e^{-x} - \dot{x}^2 \cdot e^{-x} = 2e^{-2x} - 2\dot{x}^2 \cdot e^{-x}.$$

Приведем подобные слагаемые, и домножим на e^{2x}:

$$\ddot{x} \cdot e^{x} + \dot{x}^2 \cdot e^{x} = 2.$$

Левая часть уравнения представляет собой вторую полную производную функции e^x по переменной t, тогда общее решение данного уравнения принимает вид:

$$e^x = t^2 + C_1 t + C_2.$$

Дифференцируя данное выражение, выразим $\dot{x}$:

$$e^x \dot{x} = 2t + C_1 \implies \dot{x} = (C_1 + 2t)\, e^{-x}.$$

Подставим данное выражение в y, и запишем общий интеграл в виде следующей системы:

$$e^x = t^2 + C_1 t + C_2,\; y = (C_1 + 2t)\, e^{-2x}.$$

Также можно выразить $x(t)$ и $y(t)$:

$$x = \ln\left|t^2 + C_1 t + C_2\right|,\; y = \frac{C_1 + 2t}{\left(t^2 + C_1 t + C_2\right)^2}$$

Данная система представляет собой общее решение исходной системы.

Последний пример представляет собой следующую симметрическую систему трех равенств:

$$\frac{dx}{x^2 z} = \frac{dy}{z\,(z - xy)} = -\frac{dz}{xz^2} = \frac{du}{uxz + x^2}.$$

Необходимо построить систему из трех независимых интегрируемых комбинаций. Первую комбинацию выберем в виде равенства между первым и третьим уравнением:

$$\frac{dx}{x^2 z} = -\frac{dz}{xz^2} \implies \frac{dx}{x} + \frac{dz}{z} = 0.$$

Данная комбинация является вполне интегрируемой. Первый интеграл симметрической системы принимает вид:

$$xz = C_1.$$

Для построения второй и третьей комбинации, необходимо задействовать, соответственно, второе и четвертое соотношения. Также возможно подставлять уже известные первые интегралы в систему. Построим вторую комбинацию по следующему принципу: домножим третье соотношение на z (минус ассоциируем со знаменателем, соответственно числитель берется со знаком плюс), четвертое домножим на u, сложим по принципу равенства дробей для упрощения знаменателя, и приравняем результат к первому соотношению:

$$\frac{z\,du + u\,dz}{uxz^2 + x^2z - uxz^2} = \frac{dx}{x^2z} \implies z\,du + u\,dz = dx.$$

В результате получена интегрируемая комбинация, и второй интеграл принимает следующий вид:

$$uz - x = C_2.$$

На данный момент решения не было задействовано второе соотношение, которое также необходимо реализовать. Для построения третьей интегрируемой комбинации, воспользуемся известным первым интегралом:

$$\frac{dx}{C_1x} = \frac{dy}{z^2 - C_1y} = -\frac{dz}{C_1z} = \frac{du}{C_1u + x^2}.$$

Рассмотрим вторую и третью комбинацию:

$$\frac{dy}{z^2 - C_1y} = -\frac{dz}{C_1z} \implies \frac{dy}{dz} = \frac{y}{z} - \frac{z}{C_1}.$$

Для полученного линейного неоднородного уравнения первого порядка с переменными коэффициентами для функции $y(z)$ построим решение с помощью интегрирующего множителя $\frac{1}{z}$:

$$\frac{y}{z} = \tilde{C}_3 - \frac{z}{C_1}.$$

Данное решение является вторым интегралом. Запишем в виде первого интеграла, подставляя известное значение C_1:

$$xy = \tilde{C}_3xz - z \implies xy = \tilde{C}_3C_1 - z \implies xy + z = C_3$$

Теперь запишем общее решение данной системы:

$$xz = C_1,\ uz - x = C_2,\ xy + z = C_3.$$

9.2. Задачи

Классифицировать и построить общее решение следующих систем нелинейных дифференциальных уравнений:

281. $\begin{cases} \dot{x} = 2 - \dfrac{x}{t}, \\ \dot{y} = 2t; \end{cases}$

282. $\begin{cases} \dot{x} = 2t, \\ \dot{y} = -\dfrac{2ty}{x}; \end{cases}$

283. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{t} + 2t, \\ \dot{y} = \dfrac{3 - y^2}{2ty}; \end{cases}$

284. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{4y^2}, \\ \dot{y} = \dfrac{1}{2y}; \end{cases}$

285. $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{9t^2x}{2y} - \dfrac{1}{xy}, \\ \dot{y} = 9t^2; \end{cases}$

286. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{3y^2 - 4t}{2y}, \\ \dot{y} = -\dfrac{3y^2 + 4t}{2x}; \end{cases}$

287. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{xy}{t - 2x^2}, \\ \dot{y} = \dfrac{y}{2x^2 - t}; \end{cases}$

288. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1-4xy}{y^2-4x^2y}, \\ \dot{y} = \dfrac{2\left(y^2-x\right)}{y^2-4x^2y}; \end{cases}$

289. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{t^2-x^2e^y}{t\,(t-x)\,e^y}, \\ \dot{y} = \dfrac{xe^y-t}{t\,(t-x)\,e^y}; \end{cases}$

290. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{xy}{t\tan y+x^2}, \\ \dot{y} = -\dfrac{y}{t+x^2\cot y}; \end{cases}$

291. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{3}{2ty\cos x} - \dfrac{\tan x}{t}, \\ \dot{y} = \dfrac{3}{2y}; \end{cases}$

292. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{2t+xe^{t-x}}{y\,(x-1)}, \\ \dot{y} = \dfrac{2t+e^{t-x}}{1-x}; \end{cases}$

293. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{t+z}{x}, \\ \dot{y} = -\dfrac{xy+z+t}{tx}, \\ \dot{z} = 1; \end{cases}$

295. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{2tx}{xy+z} + \dfrac{x}{t}, \\ \dot{y} = \dfrac{2tz}{x\,(xy+z)} - \dfrac{y}{t}, \\ \dot{z} = \dfrac{2t^2}{x\,(xy+z)}; \end{cases}$

297. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{e^{-y}\cos t}{1-x}, \\ \dot{y} = \dfrac{e^{-y}\cos t}{x-1}, \\ \dot{z} = \dfrac{2xe^{-y}\cos t}{1-x}; \end{cases}$

294. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{y}{x}\cos^2 y, \\ \dot{y} = \cos^2 y, \\ \dot{z} = -\dfrac{z}{y}\cos^2 y; \end{cases}$

296. $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{\left(x^2+1\right)e^t}{xy^2}, \\ \dot{y} = \dfrac{e^t}{y}, \\ \dot{z} = \dfrac{ze^t}{y^2}; \end{cases}$

298. $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{2xy\,(t+1)\,e^t}{z\,(2yz-1)}, \\ \dot{y} = \dfrac{x\,(t+1)\,e^t}{z\,(2yz-1)}, \\ \dot{z} = \dfrac{(t+1)\,e^t}{z}; \end{cases}$

299.* $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{tx+z}{t^2+x}, \\ \dot{y} = -\dfrac{tx+z}{t\left(t^2+x\right)}\sec y - \dfrac{\tan y}{t}, \\ \dot{z} = \dfrac{x^2-tz}{t^2+x}; \end{cases}$

300.* $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{e^x}{z\left(2ye^x+z\right)}, \\ \dot{y} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{ye^x}{z\left(2ye^x+z\right)}, \\ \dot{z} = \dfrac{e^x}{2ye^x+z}; \end{cases}$

Построить общее решение следующих симметрических систем из двух равенств:

301. $\dfrac{dx}{u+y} = dy = du$

302. $\dfrac{dx}{2uy} = \dfrac{dy}{u} = \dfrac{du}{y}$

303. $\dfrac{dx}{2u} = \dfrac{x\,dy}{2uy-x^2} = du$

304. $\dfrac{dx}{4uy} = -\dfrac{dy}{2u} = \dfrac{du}{2y^2-x}$

305. $\dfrac{dx}{uy} = \dfrac{dy}{ux} = \dfrac{du}{xy}$

306. $y\,dx = x\,dy = \dfrac{xy}{u}\,du$

307. $\dfrac{dx}{2u^2} = \dfrac{x\,dy}{2ux-u^2y} = \dfrac{x\,du}{u^3}$

308. $y^2\,dx = -dy = \dfrac{xy^2\,du}{u+x^2y^2}$

309. $y\,dx = \dfrac{x^3\,dy}{x^2+y} = \dfrac{x^2y\,du}{xu-x^2y-y^2}$

310. $dx = \dfrac{u^2x\,dy}{1-u^2y} = \dfrac{x\,du}{u}$

311. $dx = -\dfrac{\tan x}{y}\,dy = 2u\,du$

312. $\dfrac{dx}{2y} = -dy = \dfrac{2ue^{-y}\,du}{2y-x}$

313. $\dfrac{dx}{u} = \dfrac{e^{x+y}\,dy}{3-ue^{x+y}} = du$

314. $\dfrac{\cos^2 y}{x}\,dx = \dfrac{dy}{2x^2} = \dfrac{du}{10x-u\sec^2 y}$

315. $-\dfrac{e^u\,dx}{2xe^u\cos 2y+3}=dy=\dfrac{du}{2\cos 2y}$

316. $-\dfrac{dx}{4y}=\dfrac{u+x}{3e^{3x}-2}\,dy=\dfrac{e^{-3x}}{6y}\,du$

317. $\dfrac{dx}{8uy}=-\dfrac{\sqrt{x-1}}{u}\,dy=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{4y}\,du$

318. $-\dfrac{dx}{15y\sqrt[3]{(x^2-4)^2}}=\dfrac{dy}{2xe^u}=\dfrac{du}{2xy}$

319. $\dfrac{\sqrt{y+2}\,dx}{3u}=\dfrac{\sqrt{x}\,dy}{u\sec^2\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{y+2}\,du}{9}$

320.* $dx=\dfrac{(x^2+u^2)}{u-x-xe^{x-u}}\,dy=\dfrac{du}{e^{x-u}+1}$

Построить общее решение следующих симметрических систем из трех равенств:

321. $\dfrac{dx}{12u}=-\dfrac{dy}{6u}=\dfrac{dz}{4uy}=\dfrac{du}{y}$

322. $\dfrac{dx}{xz^2}=\dfrac{dy}{z^2(x-y)}=\dfrac{dz}{yz(x-y)}=\dfrac{du}{uy(y-x)+xz}$

323. $\dfrac{y\,dx}{1-y^2}=\dfrac{x^2\,dy}{x+yz}=\dfrac{xy\,dz}{xy+z}=\dfrac{y\,du}{y^2z-xy-2z}$

324. $\dfrac{dx}{2z}=-\dfrac{dy}{3x+2z^2}=\dfrac{dz}{3}=\dfrac{du}{10yz-15x^2-10xz^2}$

325. $\dfrac{e^{-z}dx}{y^2}=\dfrac{e^{-z}dy}{3xy}=\dfrac{dz}{2xy^2}=\dfrac{du}{2xy-3uxe^z}$

326. $\dfrac{5\,dx}{2u-1}=\dfrac{15\sec xz\,dy}{10ux+z(6u-3)}=\dfrac{3\,dz}{2u}=du$

327. $\dfrac{2\,dx}{u+x^2}=\dfrac{dy}{ze^{-2x}-y(x^2+u)}=\dfrac{2x\,dz}{z(u-x^2)}=\dfrac{du}{z}$

328.* $\dfrac{y\,dx}{x^2}=\dfrac{dy}{x}=-\dfrac{y\,dz}{xz+y}=\dfrac{y(x^2+1)\,du}{x^2z-(xz+y)(x^2+1)\arctan x}$

329.* $\dfrac{y\,dx}{2z-x(x+1)}=\dfrac{(x+1)\,dy}{2z+(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)\,dz}{2x+1}=\dfrac{u(x+1)\,du}{2z+(x+1)^2}$

330.* $\dfrac{dx}{2yz\cos u-1}=\dfrac{\sec u\,dy}{u-\tan u}=\dfrac{\sec u\,dz}{2y(u-\tan u)}=\dfrac{x\,du}{u-2yz\sin u}$

10. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными

Дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка в общем случае называется уравнение вида

$$F\left(x_1,\ldots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0,\ u=u\left(x_1,\ldots,x_n\right).$$

В векторной форме, уравнение имеет вид:

$$F\left(\underline{x},u,\nabla u\right)=0,\ u=u\left(\underline{x}\right).$$

В качестве простейшего примера уравнений с частными производными можно привести следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,y),\ u=u(x,y).$$

Данное уравнение называется уравнением, допускающим разделение переменных (или допускающим интегрирование), полагая y – параметром. Рассматривать его будем как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно переменных u и x. Решение такого уравнения строится путем интегрирования обеих частей по переменной x:

$$u=\int f(x,y)\,\partial x=F(x,y)+C_1(y).$$

Так как уравнение интегрировалось только по переменной x (положив y параметром), то любая произвольная постоянная будет являться в таком случае параметрической функцией. Её аргументом будут выступать те переменные, которые в процессе интегрирования не участвовали.

Линейным уравнением с частными производными называется уравнение вида:

$$\sum_{k=1}^{n}A_k\left(\underline{x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_k}=B\left(\underline{x}\right)\cdot u+f\left(\underline{x}\right).$$

В векторной форме, полагая $\underline{A}\left(\underline{x}\right)$ – вектор с компонентами $A_k\left(\underline{x}\right),\ k=\overline{1,n}$ такое уравнение принимает вид:

$$\underline{A}\left(\underline{x}\right)\cdot\nabla u=B\left(\underline{x}\right)\cdot u+f\left(\underline{x}\right),$$

где левая часть уравнения представляет собой скалярное произведение двух векторных функций.

Для таких уравнений возможно составить характеристику, описываемую в следующем виде:

1. Если $B\left(\underline{x}\right)\neq 0$ – уравнение является полным, иначе – неполное;
2. Если $f\left(\underline{x}\right)=0$ – уравнение является однородным, иначе – неоднородное;
3. Если A_k – const $\forall k=\overline{1,n}$ – уравнение является уравнением с постоянными коэффициентами. Если $\exists k\in\overline{1,n}:\ A_k=A_k\left(\underline{x}\right)\neq$ const – уравнение является уравнением с переменными коэффициентами;
4. Если $\exists k\in\overline{1,n}:A_k=A_k\left(\underline{x},u\right)$ – уравнение называется квазилинейным.

Для линейных уравнений также характерен принцип суперпозиции:

$$u = \sum_{k=1}^{n} C_k u_k + u_p,$$

где u_k – частные решения однородного уравнения, а u_p – частное решение неоднородного уравнения.

Метод решения будем рассматривать на примере квазилинейных уравнений, так как он является общим для таких типов уравнений. Квазилинейным уравнением с частными производными называется уравнение вида

$$\sum_{k=1}^{n} A_k\left(\underline{x}, u\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} = B\left(\underline{x}, u\right).$$

Решение такого уравнения строится вдоль его функций-характеристик. Соответствующей симметрической характеристической системой квазилинейного дифференциального уравнения называется система вида следующего вида:

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \cdots = \frac{dx_n}{A_n} = \frac{du}{B}.$$

Решения этой системы удовлетворяют следующему свойству:

$$\varphi_k\left(\underline{x}, u\right) = C_k - \text{const},\ k = \overline{1, n}.$$

Здесь функции φ_k являются решениями симметрической системы, и называются функциями-характеристиками уравнения с частными производными. Общее решение линейного и квазилинейного уравнения с частными производными первого порядка будет содержать одну произвольную функцию от известных характеристических решений. Общее решение принимает вид:

$$\Phi\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_n\right) = 0,$$

где Φ – произвольная функция.

Функция-характеристика так же носит название «первый интеграл» уравнения с частными производными, а совокупность первых интегралов дает систему, называемую «полным интегралом».

10.1. Примеры

В качестве примера рассмотрим следующее уравнение

$$2u^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} - 2x\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(8uxy + z\right)\frac{\partial u}{\partial z} + u.$$

Для начала охарактеризуем это уравнение. Это неприведенное квазилинейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка. Приведем его к каноническому виду:

$$2u^2\frac{\partial u}{\partial x} - 4u^2x\frac{\partial u}{\partial y} - \left(8uxy + z\right)\frac{\partial u}{\partial z} = u.$$

Построим соответствующую симметрическую характеристическую систему для данного уравнения:

$$\frac{dx}{2u^2} = \frac{dy}{-4u^2x} = \frac{dz}{-8uxy - z} = \frac{du}{u}.$$

Данную симметрическую систему можно свести к системе из трех уравнений. Выберем возможные интегрируемые комбинации:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{2u^2} = \dfrac{du}{u}; \\ \dfrac{dx}{2u^2} = \dfrac{dy}{-4u^2x}; \\ \dfrac{du}{u} = \dfrac{udz + zdu - 2ydy}{-8u^2xy - zu + zu + 8u^2xy}. \end{cases}$$

Полагаем в третьем уравнении в знаменателе 0, а решение постоянным вдоль этой характеристики (третье уравнение было построено на основе принципа равенства дробей, соответственно такой вариант вполне действителен). После упрощений, получим следующую систему:

$$\begin{cases} 2udu - dx = 0; \\ 2xdx + dy = 0; \\ udz + zdu - 2ydy = 0. \end{cases}$$

Интегрируя каждое уравнение этой системы, получим три решения:

$$u^2 - x = C_1, \quad x^2 + y = C_2, \quad uz - y^2 = C_3,$$

из которых следуют три характеристические функции:

$$\varphi_1(u, x, y, z) = u^2 - x, \quad \varphi_2(u, x, y, z) = x^2 + y, \quad \varphi_3(u, x, y, z) = uz - y^2.$$

Тогда общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид:

$$\Phi\left(u^2 - x, x^2 + y, uz - y^2\right) = 0.$$

Проверим, действительно ли оно является решением. Для этого, воспользуемся следующей техникой. Найдем соответствующие частные производные полученного решения вдоль переменных x, y, z:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi_k} \cdot \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1} \cdot \left(2u\dfrac{\partial u}{\partial x} - 1\right) + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2} \cdot 2x + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi_3} \cdot z\dfrac{\partial u}{\partial x}; \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi_k} \cdot \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial y} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1} \cdot 2u\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi_3} \cdot \left(z\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2y\right); \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi_k} \cdot \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial z} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1} \cdot 2u\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi_3} \cdot \left(z\dfrac{\partial u}{\partial y} + u\right). \end{cases}$$

Из общего решения следует, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0,$$

тогда выразим из каждого уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ соответственно:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}-2x\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}}{2u\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}+z\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi_3}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi_3}-\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}}{2u\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}+z\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi_3}},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-u\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi_3}}{2u\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}+z\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi_3}}.$$

Подставим известные выражения в исходное уравнение, домножив на общий знаменатель:

$$2u^2\cdot\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}-2x\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\right)-4u^2x\cdot\left(2y\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_3}-\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\right)+(8uxy+z)\cdot u\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_3}=$$
$$=u\cdot\left(2u\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}+z\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_3}\right).$$

Вынесем производные за скобки, получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\cdot\left(2u^2-2u^2\right)+\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\cdot\left(-4u^2x+4u^2x\right)+\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_3}\cdot\left(-8u^2xy+8u^2xy+uz-uz\right)=0.$$

Равенство выполняется, соответственно представленная функция является решением для любого $\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$, где φ_k – функции-характеристики.

10.2. Задачи

Определить тип и найти общее решение следующих двумерных уравнений с частными производными:

331. $2x\dfrac{\partial u}{\partial y}+3y^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

332. $\cos x\dfrac{\partial u}{\partial y}-2y\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

333. $y\dfrac{\partial u}{\partial y}-x\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x^2$

334. $ye^{-x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+e^x\dfrac{\partial u}{\partial y}=xe^x+y^2e^{-x}$

335. $\sec^2 y\dfrac{\partial u}{\partial x}+\cos x\sec^2 y=\sin x\dfrac{\partial u}{\partial y}$

336. $4uy\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y$

337. $4uy\dfrac{\partial u}{\partial x}+\left(x\sin x-2u^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}+2y\sin x=0$

338. $\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{2}{u}\left(x^2+\dfrac{y}{u}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2xy}{u}\dfrac{\partial u}{\partial y}-x-\dfrac{2y^2}{u^2}$

339. $xy\dfrac{\partial u}{\partial y}-x\dfrac{\partial u}{\partial x}=u\left(y+\ln u\right)$

340. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\left(2xe^{-u}-y\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}=2x^2e^{-u}$

341. $\dfrac{\partial u}{\partial y}\operatorname{cosec} y+1+\dfrac{x+\cos u}{u}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

342. $u\cdot(4u-2)\cdot\left(x\dfrac{\partial u}{\partial y}+y\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial u}{\partial y}-2ux$

343. $2ux^2\left(x\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-y=x\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\right)$

344. $5\tan x\cdot\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=2u^2\dfrac{\partial u}{\partial y}-5ux$

345. $2x\left(u+y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)+ue^u\left(u+1\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

346. $\left(3u^2-4x^2\right)\cdot\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=8ux^2$

347.* $\dfrac{ux^2}{x^2+1}+\left(\dfrac{ux}{x^2+1}+\arctan x\right)e^u\dfrac{\partial u}{\partial y}+\left(x^2\arctan x+2xye^u\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}=2ye^u$

348.* $\dfrac{u}{x^2-y}+\left(\dfrac{2u^2}{x^2-y}+\dfrac{u^2+x}{y}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\left(\dfrac{4u^2x}{x^2-y}+1\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2ux\left(u^2+x\right)}{y\left(x^2-y\right)}$

Определить тип и найти общее решение следующих трехмерных уравнений с частными производными:

349. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+2x\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial z}+2z\dfrac{\partial u}{\partial y}$

350. $\left(y-2z^2\right)\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\left(2z\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\cos x=0$

351. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{3x^2-u^2}{2u}$

352. $uy^2+xz^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2z\dfrac{\partial u}{\partial z}=yz^2\dfrac{\partial u}{\partial y}$

353. $2z\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)+x\dfrac{\partial u}{\partial z}=2xz\cdot(y\cos y-\sin y)$

354. $xy\tan y\dfrac{\partial u}{\partial x}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{uy\,(x\tan y+1)}{2\,(y-x)}$

355. $2yu\left(y\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial u}{\partial y}-4z\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=2ux\dfrac{\partial u}{\partial x}+x+4yz$

356. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=(x+y)\left(z\dfrac{\partial u}{\partial z}-u\right)-2xy\dfrac{\partial u}{\partial x}$

357. $z\sqrt{x}\left(u-x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\right)+xy\sqrt{y}\dfrac{\partial u}{\partial z}=xz\sqrt{y}\left(1-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$

358. $uy\dfrac{\partial u}{\partial y}+\left(2uz-y\right)\cdot\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}-x\tan z\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+2u^2=0$

359. $5u\left(2y\sec^2 2x-\tan 2x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=2y^2\sec^2 2x\left(z\dfrac{\partial u}{\partial z}+1\right)$

360. $4u^3\left(y\dfrac{\partial u}{\partial y}-2x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=ye^y\left(1+z\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$

361. $2xy\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)+xz\dfrac{\partial u}{\partial z}=2y\cot u-z\operatorname{cosec} u$

362. $x\cdot\left(2z\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)+z=y\cdot\left(ux+yz^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}$

363. $z\sec^2 z\left(e^x\dfrac{\partial u}{\partial x}+uy\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)+2ux\left(y\dfrac{\partial u}{\partial y}+e^x\right)=2xze^x\dfrac{\partial u}{\partial z}$

364. $u\tan x\left(u\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\right)+(u+xy)\cdot\left(z\sec^2 x\dfrac{\partial u}{\partial z}-\tan x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=u^2\dfrac{\partial u}{\partial z}$

365. $y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{z^2}{u}=\left(x^2+1\right)\arctan x\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}$

366. $2x\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{3x^2+1}{2y^2}\left(y\dfrac{\partial u}{\partial y}-u\right)+\dfrac{(x^2+1)}{z}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

367. $uy\left(1+2x\frac{\partial u}{\partial z}\right)+x\left(u\sin 2x-z\cos 2x\right)\frac{\partial u}{\partial y}=xy\frac{\partial u}{\partial x}$

368. $2z\left(x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}-u\right)-2x^2\sec^2 x\left(2z+3\frac{\partial u}{\partial z}\right)=3u\frac{\partial u}{\partial z}$

369.* $2x^2ye^{-u}\left(2z+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)+2z=2xz\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+e^u\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$

370.* $2e^{2x}\left(2u\sqrt{4-z^2}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}+1\right)=3\left(2u\sqrt{4-z^2}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}+1\right)$

11. Системы уравнений с частными производными первого порядка

Рассмотрим системы дифференциальных уравнений относительно одной неизвестной функции, разрешенные относительно производной. Они имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = f_1\left(\underline{x}, u\right), \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = f_n\left(\underline{x}, u\right). \end{cases}$$

В векторной форме такие уравнения представляют собой следующий вид:

$$\nabla u = \underline{f}\left(\underline{x}, u\right).$$

Если решение системы существует, то оно описывает однопараметрическое семейство некоторых n-мерных поверхностей в $n+1$-мерном пространстве (n независимых переменных и одна зависимая). Решение такой системы существует и единственно в случае, если система уравнений является совместной. Если система совместна, то она считается вполне интегрируемой. Для проверки условия совместности используется классический критерий интегрируемости системы, основанный на принципе равенства смешанных производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\ \forall i, j = \overline{1, n},\ i \neq j.$$

Таким образом критерий интегрируемости исходной системы принимает следующий вид:

$$\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right\}\ \forall i, j = \overline{1, n},\ i \neq j.$$

Для системы из двух уравнений, критерий интегрируемости состоит из одного уравнения. Для системы из трех уравнений, критерий состоит из трех уравнений, так как содержит в себе все возможные различные пары производных по аргументам.

Рассмотрим случай, когда критерий интегрируемости выполняется. Тогда решение уравнения можно построить на основе метода соответствий функций. Каждое уравнение рассматривается отдельно, строится его общее решение, затем составляется система решений каждого уравнения:

$$\begin{cases} F_1\Big(\underline{x}, u, C_1\left(\underline{x} \setminus \{x_1\}\right)\Big) = 0, \\ \quad\vdots \\ F_n\Big(\underline{x}, u, C_n\left(\underline{x} \setminus \{x_n\}\right)\Big) = 0. \end{cases}$$

Так как данная система решений удовлетворяет одной и той же поверхности, то данные функции должны быть равны. Приводя функции к общему виду, и сопоставляя произвольные функции $C_1, \cdots, C_n$, получим общее решение данной системы:

$$F\left(\underline{x}, u, C\right) = 0.$$

В случае, если критерий интегрируемости не выполняется, решения системы может или не существовать, или существовать бесконечное множество параметрических решений (для такого решения критерий интегрируемости может выполняться *искусственно*). Тогда можно воспользоваться обобщенным методом решения систем путем сведения их к квазилинейному уравнению первого порядка. Для этого домножим каждое уравнение на соответствующие им функции $A_k(\underline{x}, u) \neq 0$ (выбираются произвольно), и сложим получившийся результат. Получим:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(\underline{x}, u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} = B(\underline{x}, u), \; B(\underline{x}, u) = \sum_{k=1}^{n} A_k(\underline{x}, u) \cdot f_k(\underline{x}, u),$$

или, в векторной форме, полагая $\underline{A}(\underline{x}, u)$ – вектор с компонентами $A_k(\underline{x}, u), \; k = \overline{1, n}$:

$$\underline{A}(\underline{x}, u) \cdot \nabla u = \underline{A}(\underline{x}, u) \cdot \underline{f}(\underline{x}, u).$$

В результате интегрирования этого уравнения, получим некоторую функцию:

$$\Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0,$$

где $\varphi_k = \varphi_k(\underline{x}, u)$. Подставим в исходную систему, и найдем вид функции Φ в явном виде.

11.1. Примеры

Рассмотрим следующий пример:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u + x}{u - x}, \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{u - x}.$$

Для начала проверим критерий интегрируемости данной системы. При дифференцировании не стоит забывать, что u так же считается функцией переменных x, y. Распишем частные производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u + x}{u - x}\right) = \frac{1}{(u - x)^2}\left((u - x) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - (u + x)\frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$
$$= -\frac{2x}{(u - x)^2}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy}{(u - x)^3};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{u - x}\right) = \frac{y}{(u - x)^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} - 1\right) =$$
$$= \frac{y}{(u - x)^2} \cdot \left(\frac{u + x}{u - x} - 1\right) = \frac{2xy}{(u - x)^2}.$$

Смешанные производные функции u равны между собой, следовательно критерий интегрируемости выпоняется, а значит существует единственное однопараметрическое решение данной системы. Построим его согласно метода соответствий. Для этого, решим каждое уравнение отдельно. Второе уравнение системы является уравнением, допускающим разделение переменных, полагая x – параметром:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{u - x} \implies \int (u - x) \; \partial u = -\int y \partial y \implies u^2 - 2ux + y^2 = C_2(x).$$

На данном этапе можно продифференцировать результат по x, и подставить в первое уравнение, тем самым находя уравнение для функции $C_2(x)$, а можно построить решение первого уравнения. Сделаем замену в первом уравнении $v = u - x$, тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + 1$, и:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + 1 = \frac{v + 2x}{v} \implies \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{v} \implies v^2 = 2x^2 + C_2(y).$$

Возвращаясь к исходной замене, получим:

$$u^2 - 2ux + x^2 = 2x^2 + C_1(y).$$

Запишем систему решений для построения соответствий:

$$\begin{cases} u^2 - 2ux = x^2 + C_1(y), \\ u^2 - 2ux = -y^2 + C_2(x). \end{cases}$$

Из этой системы следует, что $C_1(y) = -y^2$, $C_2(x) = x^2$, и, соответствие между функциями $C_1(y) = C_2(x)$ возможно, когда $C_1(y) = C_2(x) = C$. Тогда поверхность, удовлетворяющая уравнению имеет следующий вид:

$$u^2 - 2ux = x^2 - y^2 + C.$$

Рассмотрим другое уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ux, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 2uy.$$

Проверим критерий интегрируемости данного уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x\frac{\partial u}{\partial u} = 4uxy, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2y\frac{\partial u}{\partial x} = 4uxy.$$

Смешанные производные равны, а значит система совместна, и существует решение. Но в этот раз для решения воспользуемся методом сведения системы уравнений к квазилинейному уравнению первого порядка. Попробуем получить простое уравнение. Для этого домножим первое уравнение на y, второе на x, и вычтем одно из другого. Получим:

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Его общее решение имеет следующий вид:

$$u = \Phi\left(x^2 + y^2\right).$$

Переобозначим за $t(x, y) = x^2 + y^2$, тогда $u = \Phi(t)$. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = 2x \cdot \frac{d\Phi}{dt}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = 2y \cdot \frac{d\Phi}{dt}.$$

Подставим в исходную систему, полагая $u = \Phi(t)$. Получим:

$$2x \cdot \frac{d\Phi}{dt} = 2x\Phi, \ 2y \cdot \frac{d\Phi}{dt} = 2y\Phi.$$

Данная система уравнений является линейно-зависимой. Из нее следует уравнение вида:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi.$$

Тогда функция $\Phi(t)$ принимает следующий вид:

$$\Phi(t) = Ce^t \quad \forall C, t.$$

И, подставляя это выражение в решение квазилинейного уравнения, получим решение исходной системы:

$$u = Ce^{x^2+y^2}.$$

11.2. Задачи

Для следующих двумерных систем уравнений с частными производными найти общее решение в виде семейства поверхностей $F(u, x, y) = C$:

371. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=1$

372. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-2x,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=2$

373. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{y}$

374. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=x$

375. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos\left(x+y\right),\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\cos\left(x+y\right)$

376. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2y\left(3x-y\right),\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=x\left(3x-4y\right)$

377. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-e^{y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-xe^{y}$

378. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}\ln y,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{e^{2x}}{y}$

379. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y\sec^2 x,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\tan x-2y$

380. $\cos x\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=\tan x\tan y,\ \cos x\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sec^2 y$

381. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{u},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x}{u}$

382. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{u}{x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{x}$

383. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+2xu=e^{-y},\ x\dfrac{\partial u}{\partial y}=-e^{-y}$

384. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}=ye^{-u},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{-u}\ln x$

385. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}=2ye^{u}+1,\ x\dfrac{\partial u}{\partial y}=2\left(x-y\right)e^{u}$

386. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{uy+4e^{2x}}{xy},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{u}{y}$

387. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2\sec u,\ y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2x\sec u-\tan u$

388. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{u}{x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{e^{-ux}}{xy}$

389.* $2\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2u-y^2}{u-x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{xy}{u-x}$

390.* $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{u}{3u^2-6u+x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{3u^2-6u+x}$

Для следующих двумерных систем уравнений с частными производными найти решение задачи Коши в виде трехмерной поверхности, где $u=u(x,y)$:

391. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-1,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=2y,\ u(0,0)=1$

392. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{u},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{e^{y}}{2u},\ u(1,0)=1$

393. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{u}{x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{xy^2},\ u(1,1)=-1$

394. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{u}{x}-\dfrac{x}{y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^2,\ u(1,-1)=2$

395. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^{-u}\ln y,\ y\dfrac{\partial u}{\partial y}=xe^{-u},\ u(0,1)=0$

396. $\cos x\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=u\sin x+y^2,\ \cos x\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xy,\ u(\pi,0)=1$

397. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2\left(u+x\right)-1,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=2xy\left(u+x\right),\ u(-1,1)=2$

398. $\sin u\dfrac{\partial u}{\partial x}=y-\cos x,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=x\operatorname{cosec} u,\ u(\pi,1)=\pi$

399. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{e^{-u}}{u+1},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2ye^{-u}}{u+1},\ u(0,0)=1$

400. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x-u\ln u}{\ln u+1},\ xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{\ln u+1},\ u(1,e)=e$

Для следующих трехмерных систем уравнений с частными производными найти решение в виде поверхности, где $u = u(x, y, z)$:

401. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y,\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x,\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = -1$

402. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3z^2,\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -4y^3,\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 6xz$

403. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{u}{x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xyz,\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = xy^2$

404. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2xy}{z},\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{u}{y},\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{u}{z}$

405. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{u}{x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{ux+1}{xy},\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{4z^3}{xy}$

406. $e^{y+z}\dfrac{\partial u}{\partial x} = -3x^2,\ e^{y+z}\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^3,\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = -u$

407. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{u}{x+e^u},\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{z}{x+e^u},\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{y}{x+e^u}$

408. $\cos u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{ye^{xy}}{u+\tan u},\ \cos u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{xe^{xy}}{u+\tan u},\ \cos u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{2z}{u+\tan u}$

409.* $z\dfrac{\partial u}{\partial x} = y\,(u+x)\,e^x - z,\ z\dfrac{\partial u}{\partial y} = (u+x)\,e^x,\ z\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\,(u+x)\ln(u+x)$

410.* $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{u}{x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{y\sin ux + z^2}{xy^2\cos ux},\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{2z\ln y}{xy\cos ux}$

12. Уравнения Пфаффа, интегрирующий множитель

Рассмотрим обобщенные уравнения в полных дифференциалах. Введем для них критерии интегрируемости и рассмотрим способы их интегрирования.

Пусть $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор независимых переменных, $\underline{P}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} P_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ P_n(\underline{x}) \end{pmatrix}$ – вектор известных функций n-переменных. Дифференциальным уравнением Пфаффа называется уравнение следующего вида:

$$\underline{P}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = 0,$$

где $\circledast \cdot \circledast$ – скалярное произведение, $d\underline{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$. Раскрывая скалярное произведение, уравнение можно переписать в следующем виде:

$$P_1(\underline{x})\ dx_1 + \ldots + P_n(\underline{x})\ dx_n = 0.$$

Уравнение Пфаффа может быть вполне-интегрируемым, если выполняется критерий интегрируемости. Положим, что левая часть уравнения Пфаффа является полным дифференциалом некоторой непрерывной со своими первыми производными функции $u(\underline{x})$, где

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\, dx_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\, dx_n.$$

Тогда, в силу предположения, построим соответствия с исходным уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = P_1(\underline{x}), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} = P_n(\underline{x}).$$

Для построения критерия интегрируемости, воспользуемся признаком равенства смешанных производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\ \forall i, j = \overline{1, n},\ i \neq j.$$

Полагая, что $P_i(\underline{x}) = \dfrac{\partial u}{\partial x_i},\ P_j(\underline{x}) = \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, и объединив все равенства в совокупность условий, получим следующий критерий интегрируемости:

$$\left\{ \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i} \right\}\ \forall i, j = \overline{1, n},\ i \neq j.$$

Если в полученном критерии все равенства выполняются, то уравнение Пфаффа является вполне-интегрируемым, и представляет из себя полный дифференциал некоторой функции. Положим, что критерий выполнен. Снова введем функцию $u(\underline{x})$, и составим систему соответствий:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = P_1(\underline{x}); \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = P_n(\underline{x}). \end{cases}$$

Данная система представляет из себя систему уравнений с частными производную, допускающую разделение переменных, которую можно решить путем интегрирования каждого k-го уравнения по переменной x_k:

$$\begin{cases} u = \int P_1\left(\underline{x}\right)\, \partial x_1 + \varphi_1\left(\underline{x} \setminus \{x_1\}\right); \\ \quad\vdots \\ u = \int P_n\left(\underline{x}\right)\, \partial x_n + \varphi_n\left(\underline{x} \setminus \{x_n\}\right). \end{cases}$$

Здесь $\varphi_k\left(\underline{x} \setminus \{x_k\}\right),\ k = \overline{1, n}$ – произвольные функции $(n-1)$–й переменной. Из этой системы можно получить общий вид функции $u\left(\underline{x}\right)$ с помощью метода соответствий: $u\left(\underline{x}\right) = F\left(\underline{x}\right) + C_1$. Но эта функция получена в следствии решения следующего уравнения:

$$du = P_1\left(\underline{x}\right)\, dx_1 + \ldots + P_n\left(\underline{x}\right)\, dx_n,$$

в свою же очередь, исходное уравнение представляет из себя уравнение $du = 0$, из чего $u\left(\underline{x}\right) = C_2$. Тогда:

$$\begin{cases} u = F\left(\underline{x}\right) + C_1 \\ u = C_2 \end{cases} \implies F\left(\underline{x}\right) = C - \text{общее решение.}$$

Но если критерий интегрируемости не выполняется, то решение можно получить также с помощью интегрирующего множителя $\mu = \mu\left(\underline{x}\right)$, если он существует. Суть интегрирующего множителя заключается в том, что при домножении всего уравнения на него, выполняется критерий интегрируемости:

$$\left\{\frac{\partial\left(\mu P_i\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial\left(\mu P_j\right)}{\partial x_i}\right\}\ \forall i, j = \overline{1, n},\ i \neq j.$$

Раскрывая производные, и сводя каждое уравнение к каноническому виду линейного полного однородного уравнения с частными производными первого порядка, получим систему уравнений с частными производными относительно интегрирующего множителя:

$$\left\{P_j \frac{\partial \mu}{\partial x_i} - P_i \frac{\partial \mu}{\partial x_j} = \mu\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j}{\partial x_i}\right)\right\}\ \forall i, j = \overline{1, n},\ i \neq j.$$

Далее будет вывод критерия существования интегрирующего множителя в трехмерном случае, случаи высших порядков аналогичны, но могут содержать более одного параметра в решении.

Рассмотрим уравнение

$$P_x(x, y, z)\, dx + P_y(x, y, z)\, dy + P_z(x, y, z)\, dz = 0,$$

для которого не выполняется хотя бы одно равенство в критерии интегрируемости:

$$\frac{\partial P_x}{\partial y} \neq \frac{\partial P_y}{\partial x},\ \frac{\partial P_x}{\partial z} \neq \frac{\partial P_z}{\partial x},\ \frac{\partial P_y}{\partial z} \neq \frac{\partial P_z}{\partial y}.$$

Положим, что существует интегрирующий множитель $\mu = \mu(x, y, z)$. Составим для интегрирующего множителя систему уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} P_y \frac{\partial \mu}{\partial x} - P_x \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial P_x}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial x}\right), \\ P_z \frac{\partial \mu}{\partial x} - P_x \frac{\partial \mu}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x}\right), \\ P_z \frac{\partial \mu}{\partial y} - P_y \frac{\partial \mu}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial P_y}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial y}\right), \end{cases}$$

Сделаем переобозначение: $A_{xy} := \dfrac{\partial P_x}{\partial y} - \dfrac{\partial P_y}{\partial x}$, $A_{xz} := \dfrac{\partial P_x}{\partial z} - \dfrac{\partial P_z}{\partial x}$, $A_{yz} := \dfrac{\partial P_y}{\partial z} - \dfrac{\partial P_z}{\partial y}$. Разделим каждое уравнение системы на μ, сделаем переобозначение $\eta = \ln \mu$, тогда $\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial x_k} = \dfrac{\partial \eta}{\partial x_k} = \eta'_{x_k}$, и запишем систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} P_y & -P_x & 0 \\ P_z & 0 & -P_x \\ 0 & P_z & -P_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta'_x \\ \eta'_y \\ \eta'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{xy} \\ A_{xz} \\ A_{yz} \end{pmatrix}$$

В полученной системе определитель матрицы равен нулю, но полученная система является неоднородной. Из нее можно вывести критерий существования интегрирующего множителя. Нетрудно убедиться, что если домножить второе уравнение на $\dfrac{P_y}{P_z}$, третье на $\dfrac{P_x}{P_z}$, и вычесть из второго третье, то в левой части нового уравнения получится в точности левая часть первого уравнения. Тогда при таких операциях, правые части тоже должны быть равны, а значит:

$$\frac{P_y}{P_z} A_{xz} - \frac{P_x}{P_z} A_{yz} = A_{xy}.$$

Домножим на P_z, перенесем всё в одну часть, и раскроем замены, получим:

$$P_x \left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \right) + P_y \left(\frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x} \right) + P_z \left(\frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} \right) = 0.$$

Если такое равенство выполняется, то существует интегрирующий множитель для уравнения Пфаффа. Согласно теории решений неоднородных систем с вырожденными матрицами, у представленной системы при выполнении условия выше существует единственное однопараметрическое решение. Исключим одно уравнение из системы, например, первое:

$$\begin{pmatrix} P_z & 0 & -P_x \\ 0 & P_z & -P_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta'_x \\ \eta'_y \\ \eta'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{xz} \\ A_{yz} \end{pmatrix}$$

Теперь положим, например, $\eta'_z = q$ – параметр. Удобно выбирать в системе параметром ту переменную, столбец для которой не содержит нулей. Разрешим систему относительно η'_x и η'_y:

$$\begin{pmatrix} P_z & 0 \\ 0 & P_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta'_x \\ \eta'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{xz} + P_x q \\ A_{yz} + P_y q \end{pmatrix}$$

Решая эту систему, получим систему параметрических уравнений с частными производными следующего вида:

$$\begin{cases} \eta'_x = \dfrac{1}{P_z} \left(A_{xz} + P_x q \right), \\ \eta'_y = \dfrac{1}{P_z} \left(A_{yz} + P_y q \right), \\ \eta'_z = q. \end{cases}$$

Выбирая значение $q = q(x, y, z)$ можно построить различные варианты уравнений для функции η. Значение q необходимо подобрать такое, при котором полученная система будет совместной. Чтобы получить интегрирующий множитель в явном виде, достаточно после интегрирование полученной системы с выбранным значением q воспользоваться обратной заменой

$\eta = \ln \mu \implies \mu = e^{\eta}$. Домножая все уравнение на полученный интегрирующий множитель, исходное уравнение будет представлять из себя уравнение в полных дифференциалах.

Так же возможны другие случаи параметризации этой системы, в зависимости от того, какое уравнение было исключено, и того, какая производная неизвестной функции была параметризована. К примеру, если исключить второе уравнение из системы, и параметризовать η'_y, то система примет вид:

$$\begin{cases} \eta'_x = -\dfrac{1}{P_y}\left(A_{xy} + P_x q\right), \\ \eta'_y = q, \\ \eta'_z = \dfrac{1}{P_y}\left(A_{yz} - P_z q\right). \end{cases}$$

Аналогично, если исключить третье уравнение из системы, и параметризовать η'_x, система принимает вид:

$$\begin{cases} \eta'_x = q, \\ \eta'_y = \dfrac{1}{P_x}\left(A_{xy} - P_y q\right), \\ \eta'_z = \dfrac{1}{P_x}\left(A_{xz} - P_z q\right). \end{cases}$$

12.1. Примеры

Рассмотрим следующий пример:

$$2\left(x\,dx - dy\right) \cdot \sec y + dx - z\,dy = \left(x\,dy + dz\right) \tan y$$

Первым шагом сведем это уравнение к классическому виду уравнения Пфаффа:

$$\left(2x \sec y + 1\right)\ dx - \left(2 \sec y + z + x \tan y\right)\ dy - \tan y\,dz = 0.$$

Здесь представлены следующие функции:

$$P_x = 2x \sec y + 1, \quad P_y = -2\sec y - z - x \tan y, \quad P_z = -\tan y.$$

Проверим критерий интегрируемости для данного уравнения. Для этого найдем соответствующие частные производные:

$$\frac{\partial P_x}{\partial y} = 2x \sec y \tan y,\ \frac{\partial P_y}{\partial x} = -\tan y \implies \frac{\partial P_x}{\partial y} \neq \frac{\partial P_y}{\partial x};$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial P_z}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial P_x}{\partial z} = \frac{\partial P_z}{\partial x};$$
$$\frac{\partial P_y}{\partial z} = -1,\ \frac{\partial P_z}{\partial y} = -\sec^2 y \implies \frac{\partial P_y}{\partial z} \neq \frac{\partial P_z}{\partial y}.$$

Из полученных частных производных следует, что критерий интегрируемости не выполняется. В таком случае найдем интегрирующий множитель. Проверим критерий существования интегрирующего множителя:

$$\left(2x \sec y + 1\right)\left(1 - \sec^2 y\right) - \left(2\sec y + z + x \tan y\right)\left(0 - 0\right) +$$
$$+ \tan y \left(2x \sec y \tan y + \tan y\right) = 0.$$

Раскрываем скобки, и, пользуясь одной из вариаций основного тригонометрического тождества: $\sec^2 y - 1 = \tan^2 y$, получим:

$$-2x \sec y \tan^2 y - \tan^2 y + 2x \sec y \tan^2 y + \tan^2 y = 0.$$

Получили верное равенство, следовательно для уравнения существует интегрирующий множитель $\mu = \mu(x, y, z)$. Введем функцию $\eta = \ln \mu$, и воспользуемся уже готовым выводом для интегрирующего множителя. В данном случае достаточно простой функцией является P_z, воспользуемся выводом именно с ней в знаменателе:

$$\begin{cases} \eta'_x = -\dfrac{1}{\tan z}\big(0 + (2x \sec y + 1)\, q\big), \\ \eta'_y = -\dfrac{1}{\tan z}\big(\sec^2 y - 1 - (2 \sec y + z + x \tan y)\, q\big), \\ \eta'_z = q. \end{cases}$$

Удобно выбрать, например, $q = 0$. Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} \eta'_x = 0, \\ \eta'_y = -\tan y, \\ \eta'_z = 0. \end{cases}$$

Из этой системы видно, что интегрирующий множитель зависит только от переменной y, и при этом критерий совместности системы выполняется:

$$\frac{\partial \eta'_x}{\partial y} = \frac{\partial \eta'_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta'_x}{\partial z} = \frac{\partial \eta'_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta'_y}{\partial z} = \frac{\partial \eta'_z}{\partial y} = 0.$$

Интегрируя систему, получаем интегрирующий множитель в следующем виде:

$$\eta = \ln \cos y + C \implies \mu = C \cos y,\ C \neq 0.$$

Положим $C = 1$ для удобства. Можно выбрать любое удобное значение C, так как уравнение можно на него сократить при условии, что $C \neq 0$, и решение от этого не изменится. Домножим уравнение на полученный интегрирующий множитель, и приведем к классическому виду:

$$(2x + \cos y)\ dx - (2 + z \cos y + x \sin y)\ dy - \sin y\, dz = 0$$

Здесь:

$$P_x = 2x + \cos y, \quad P_y = -2 - z \cos y - x \sin y, \quad P_z = -\sin y.$$

Проверим критерий интегрируемости для полученного уравнения:

$$\frac{\partial P_x}{\partial y} = -\sin y,\ \frac{\partial P_y}{\partial x} = -\sin y \implies \frac{\partial P_x}{\partial y} = \frac{\partial P_y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial P_z}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial P_x}{\partial z} = \frac{\partial P_z}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial P_y}{\partial z} = -\cos y,\ \frac{\partial P_z}{\partial y} = -\cos y \implies \frac{\partial P_y}{\partial z} = \frac{\partial P_z}{\partial y}.$$

Критерий интегрируемости выполняется, соответственно данное уравнение представляет из себя уравнение в полных дифференциалах. Тогда положим, что существует функция $u(x, y, z)$

такая, что левая часть уравнения представляет из себя полный дифференциал этой функции, а значит справедливо уравнение:

$$du = 0 \implies u = C_1.$$

Зная, что $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}\,dz$, получим систему следующих соответствий:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + \cos y; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2 - z\cos y - x\sin y; \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = -\sin y. \end{cases}$$

Представленная система является системой уравнений с частными производными, разрешенная относительно производных. При этом, каждое уравнение представляет из себя уравнение, допускающее разделение переменных. Проинтегрируем уравнения по соотвествующим им переменным, полагая оставшиеся параметрами, не участвующими в интегрировании:

$$\begin{cases} u = x^2 + x\cos y + \varphi_x(y,z); \\ u = -2y - z\sin y + x\cos y + \varphi_y(x,z); \\ u = -z\sin y + \varphi_z(x,y). \end{cases}$$

Так как каждое из найденных решений соответствует одному и тому же выражению, то поставим соответствия между функциями φ:

$$\varphi_x(y,z) = -2y - z\sin y,\ \varphi_y(x,z) = x^2,\ \varphi_z(x,y) = x^2 + x\cos y - 2y.$$

При этом, $\bar{\varphi}_x(y,z) = \bar{\varphi}_y(x,z) = \bar{\varphi}_z(x,y) = C_2$. Тогда поверхность, удовлетворяющая полученной системе принимает вид:

$$u = x^2 + x\cos y - z\sin y - 2y + C_2,$$

а решение уравнения Пфаффа $u = C_1$ при известной функции u принимает вид:

$$x^2 + x\cos y - z\sin y - 2y = C, \quad \mu = \cos y.$$

Представленное уравнение является общим решением уравнения Пфаффа.

12.2. Задачи

Найти общее решение для вполне-интегрируемых уравнений Пфаффа:

411. $2y\,dy + \cos(x+y)\,(dx+dy) - z\,dx = x\,dz$

412. $2z\,dz + (x - 2\ln x)\,dy + \left(y - \dfrac{2y}{x}\right)\,dx = 0$

413. $2x\,dx + \dfrac{y\,dz}{z^2+1} + \arctan z\,dy = 0$

414. $\dfrac{x}{z^2}\,dz - \left(2xy + \dfrac{1}{x}\right)\,dy + \left(\dfrac{y}{x^2} - y^2 - \dfrac{1}{z}\right)\,dx = 0$

415. $\left(x+\dfrac{2y}{z^3}\right)\,dz+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{z^2}\right)\,dy+\left(z-\dfrac{y}{x^2}\right)\,dx=0$

416. $2y\sin x\,dy+y^2\cos x\,dx=xz\sin z\,dz-(x\,dz+z\,dx)\cos z$

417. $(4y-z)\,dx+4x\,dy+(dz+dy)\sec^2(y+z)=x\,dz$

418. $\left(2xe^y-\dfrac{x}{y^2}\right)\,dy+\left(2e^y+\dfrac{1}{y}\right)\,dx=2z\,dz$

419. $x\,(dy+dz)+y\,(dx+dz)+z\,(dx+dy)=xy\,dz+xz\,dy+yz\,dx$

420.* $2\,(ze^x-xy)\,dz+x\,(\cos y-2z)\,dy=\left(2yz-z^2e^x-\sin y\right)\,dx$

421.* $(x\,dy+y\,dx)\arcsin z+\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,(xy+2z)\,dz=2x\,dx$

Найти интегрирующие множители, и построить общее решение для следующих уравнений Пфаффа:

422. $z^3\,dx+\left(xz^2-y\right)\,dz+z\,dy=0$

423. $x\,dy+y\,dx+\dfrac{xy}{z\ln z}\,dz=\dfrac{2z}{\ln z}\,dz$

424. $(2yz-x)\,e^{-z}\,dy+\left(1-ye^{-z}\right)\,dx+\left(x+y^2e^{-z}\right)\,dz=0$

425. $x\left(y^2\,dz+3yz\,dy\right)=2y^2z\,dx$

426. $\dfrac{xy}{z}\cdot\ln xy\,dz+x\,dy+y\,dx=0$

427. $\dfrac{2z}{xy}\,dz+\dfrac{x}{y}\,dy-\dfrac{y}{x}\,dx=2\,(dy-dx)$

428. $2\left(dy-\dfrac{z}{y}\,dx\right)+\left(\dfrac{dy}{y}+\dfrac{dx}{x}\right)\cos xy=\dfrac{x}{y}\,dz-\dfrac{y}{x}\,dx$

429. $\left(\dfrac{z^3}{x}-2\right)y\,dx+\left(3yz^2-\dfrac{2}{xy^2}\right)\,dz+\dfrac{6z}{xy^3}\,dy=0$

430. $2x^2y\left(6x^2\,dx+5y^2z\,dz\right)-x^2\left(8x^3+y^3\right)\,dy=0$

431. $\dfrac{zx}{x+y}\,dz+\dfrac{z}{x+y}\,(2y\,dy+z\,dx)=\dfrac{z}{x+y}\ln(x+y)\,dz+\dfrac{z^2}{(x+y)^2}\,(dx+dy)$

432. $2x^3z^2\,dy-\dfrac{1}{z}\left(2x^3+z^3\right)e^y\,dz+\dfrac{1}{x}\left(x^3+2z^3z\right)e^y\,dx=2x^2z^2\,dx$

433. $\dfrac{x}{y}e^x\,dz+\left(e^y+\dfrac{z}{y}e^x\right)\,dx=\left(1+\dfrac{1}{y}\right)e^y\,dy$

434. $z\tan x\,(dy-z\,dz)-2yz^2\sec x\,(z\,dy+y\,dz)+zy\,dx=z\,dz$

435. $x\,dy+y\,dx+\dfrac{1}{z}\,(dy+x\,dz)+\dfrac{\tan z}{z}\,(dx-y\,dz)=\dfrac{xy\sec z}{z\sin^2 z}\,dz$

436. $z\,dy+2\tan y\,dz+\left(\dfrac{2}{z}\sec y+\dfrac{z}{x}\tan y\right)\,dx=0$

437.* $\left(y^2+z^2\right)\cdot(z\,dx-x\,dz)=\left(z^2+x^2\right)\cdot(y\,dz-z\,dy)$

438.* $e^{-y}\left(\dfrac{dz}{z}+dx\right)-e^{-x-y}\left(x^2\,dy+\dfrac{x^2y}{z}\,dz+2xy\,dz\right)+\dfrac{e^{-x}}{z}\,dy=0$

439.* $z^2\,(x\,dx+z\,dz)=(y\,dz-z\,dy)\sqrt{x^2+z^2}$

440.* $dy+dz+\dfrac{y+z}{xz}\,(2z\,dx-x\,dz)+\dfrac{4z}{x}\sqrt{yz+z^2}\,dz=0$

Раздел V

Нелинейные уравнения с частными производными первого порядка.

13. Метод Лагранжа-Шарпи нахождения полного интеграла

Будем рассматривать двумерный случай уравнения с частными производными первого порядка:

$$F\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,\ u = u(x, y).$$

В дальнейшем, для упрощения записи, будем использовать обозначения Монжа для частных производных:

$$F\left(u, x, y, p, q\right) = 0,$$

где $p = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Так же, введем следующее обозначение для Якобиана:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \mathcal{J}\begin{pmatrix} F_1 & \dots & F_n \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

Метод Лагранжа-Шарпи заключается в нахождении сопряженного уравнения, содержащего первую произвольную постоянную:

$$G\left(u, x, y, p, q\right) = C_1,$$

такого, что система для F и G удовлетворяла условию вполне интегрируемости. Для этого необходимо, чтобы систему возможно было разрешить относительно переменных p и q, и при этом

$$\mathcal{J}\begin{pmatrix} F & G \\ p & q \end{pmatrix} \neq 0.$$

Сама система для F и G принимает следующий вид:

$$\begin{cases} F\left(u, x, y, p, q\right) = 0, \\ G\left(u, x, y, p, q\right) = C_1. \end{cases}$$

Предположим, что условия выполнены, тогда

$$p = A\left(u, x, y\right), \quad q = B\left(u, x, y\right).$$

Чтобы система для F и G имела общее, совместное решение, необходимо, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Тогда, полагая, что p и q известны, найдем соответствующие частные производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial A}{\partial y} + \dfrac{\partial A}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial A}{\partial y} + \dfrac{\partial A}{\partial u} \cdot B; \\ \dfrac{\partial q}{\partial x} = \dfrac{\partial B}{\partial x} + \dfrac{\partial B}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial B}{\partial x} + \dfrac{\partial B}{\partial u} \cdot A. \end{cases}$$

Запишем условие на совместное решение, полагая $A = p$ и $B = q$:

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial u} \cdot q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial u} \cdot p.$$

Это условие называется критерием интегрируемости. Если оно выполняется, то возможно построить общее решение системы для F и G. Для нахождения вспомогательного уравнения G, построим ему соответствующее линейное дифференциальное уравнение с частными производными. Для этого найдем, соответственно $\frac{\partial p}{\partial u}, \frac{\partial q}{\partial u}, \frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{\partial q}{\partial x}$ из системы для F и G. Продифференцируем систему по переменным u, x и y соответственно, полагая, что p и q зависимы от них, из которых выразим необходимые производные. Рассмотрим случай для u, остальные – аналогичны:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial p} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial q} \cdot \dfrac{\partial q}{\partial u} = 0; \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} + \dfrac{\partial G}{\partial p} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial u} + \dfrac{\partial G}{\partial q} \cdot \dfrac{\partial q}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Решаем эту систему относительно $\frac{\partial p}{\partial u}$ и $\frac{\partial q}{\partial u}$, получим:

$$\frac{\partial p}{\partial u} = -\frac{\mathcal{J}\begin{pmatrix} F & G \\ u & q \end{pmatrix}}{\mathcal{J}\begin{pmatrix} F & G \\ p & q \end{pmatrix}}, \quad \frac{\partial q}{\partial u} = -\frac{\mathcal{J}\begin{pmatrix} F & G \\ p & u \end{pmatrix}}{\mathcal{J}\begin{pmatrix} F & G \\ p & q \end{pmatrix}}.$$

Применяя аналогичный метод для переменных x и y, нетрудно показать, что:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\mathcal{J}\begin{pmatrix} F & G \\ y & q \end{pmatrix}}{\mathcal{J}\begin{pmatrix} F & G \\ p & q \end{pmatrix}}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\mathcal{J}\begin{pmatrix} F & G \\ p & x \end{pmatrix}}{\mathcal{J}\begin{pmatrix} F & G \\ p & q \end{pmatrix}}.$$

Подставим найденные производные в критерий интегрируемости, полагая, что функция G – неизвестна. Сократим знаменатели (общие, по условию не равные нулю), упростим выражение, получим:

$$\mathcal{J}\begin{pmatrix} F & G \\ y & q \end{pmatrix} + \mathcal{J}\begin{pmatrix} F & G \\ u & q \end{pmatrix} \cdot q = \mathcal{J}\begin{pmatrix} F & G \\ p & x \end{pmatrix} + \mathcal{J}\begin{pmatrix} F & G \\ p & u \end{pmatrix} \cdot p.$$

Раскрывая Якобианы, перенося слагаемые в одну сторону, получим:

$$\begin{gathered} \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial u}\right) \cdot q - \\ -\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial p}\right) \cdot p = 0. \end{gathered}$$

Приведем это уравнение к каноническому линейному уравнению с частными производными относительно неизвестной функции G. Произведем следующие переобозначения, полагая в общем случае все функции аргументов (u, x, y, p, q):

$$U := -q \cdot \frac{\partial F}{\partial q} - p \cdot \frac{\partial F}{\partial p},\ X := -\frac{\partial F}{\partial p},\ Y := -\frac{\partial F}{\partial q},$$
$$P := \frac{\partial F}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial F}{\partial u},\ Q := \frac{\partial F}{\partial y} + q \cdot \frac{\partial F}{\partial u}.$$

Применяя эти переобозначения, получим следующее линейное уравнение относительно функции G:

$$U \cdot \frac{\partial G}{\partial u} + X \cdot \frac{\partial G}{\partial x} + Y \cdot \frac{\partial G}{\partial y} + P \cdot \frac{\partial G}{\partial p} + Q \cdot \frac{\partial G}{\partial q} = 0.$$

Для этого уравнения достаточно найти первый интеграл вида:

$$G\left(u, x, y, p, q\right) = C_1,$$

который удовлетворяет условию разрешимости вместе с F относительно p и q. Производя разрешение, получим, что

$$p = \varphi_1\left(u, x, y, C_1\right), \ q = \varphi_2\left(u, x, y, C_1\right).$$

Подставим разрешенные конструкции в уравнение Пфаффа:

$$du = p\, dx + q\, dy,$$

получим вполне интегрируемое уравнение. В результате его интегрирования, получим общее решение, которое запишем в форме:

$$\Phi\left(u, x, y, C_1, C_2\right) = 0.$$

В дополнение стоит сказать, что этот метод является двумерным расширением метода общей параметризации для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения.

13.1. Примеры

В качестве примера рассмотрим линейное неоднородное уравнение с частными производными, для которого построим общее решение методом характеристик, и сравним его с методом Лагранжа-Шарпи. В общем случае, конечно, данный метод решает нелинейные уравнения. Дано уравнение:

$$\frac{p}{y} - \frac{q}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Упростим запись уравнения путем домножения на xy:

$$xp - yq = x + y.$$

Соответствующая симметрическая характеристическая система имеет вид:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{du}{x+y}.$$

Выделяя интегрируемые комбинации, получим общее решение:

$$\Phi\left(xy, u - x + y\right) = 0,$$

или, если выразить u в явном виде:

$$u = x - y + \Phi\left(xy\right).$$

Теперь построим решение методом Лагранжа-Шарпи. Для этого будем искать вид вспомогательного уравнения $G\left(u, x, y, p, q\right) = C_1$. Запишем вид функции F:

$$F\left(u, x, y, p, q\right) = xp - yq - x - y.$$

Для дальнейших преобразований найдем соответствующие производные функции F:

$$\frac{\partial F}{\partial u}=0,\ \frac{\partial F}{\partial x}=p-1,\ \frac{\partial F}{\partial y}=-q-1,\ \frac{\partial F}{\partial p}=x,\ \frac{\partial F}{\partial q}=-y.$$

С этого этапа можно сразу строить соответствующее линейное уравнение для функции G, находя коэффициенты по выведенным выражениям ранее. Здесь же рассмотрим вывод этого уравнения. Так как система уравнений для F и G должна быть совместна, она должна удовлетворять критерию интегрируемости:

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Полагая, что p,q зависят не только от x,y, но еще и от u, критерий интегрируемости принимает вид:

$$\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial u}\cdot q=\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial u}\cdot p.$$

Найдем соответствующие производные функций p,q по переменным u,x и y. Для этого продифференцируем уравнения системы F,G по этим переменным. Так как уравнения будут похожи для каждой переменной, положим, что ξ будет отвечать за конкретную переменную из этого набора. Система принимает вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial \xi}+\dfrac{\partial F}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial \xi}+\dfrac{\partial F}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial q}{\partial \xi}=0;\\ \dfrac{\partial G}{\partial \xi}+\dfrac{\partial G}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial \xi}+\dfrac{\partial G}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial q}{\partial \xi}=0.\end{cases}$$

Решаем эту систему относительно переменных $\dfrac{\partial p}{\partial \xi}$ и $\dfrac{\partial q}{\partial \xi}$. Получим:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi}=-\frac{\mathcal{J}\begin{pmatrix}F & G\\ \xi & q\end{pmatrix}}{\mathcal{J}\begin{pmatrix}F & G\\ p & q\end{pmatrix}},\quad \frac{\partial q}{\partial \xi}=-\frac{\mathcal{J}\begin{pmatrix}F & G\\ p & \xi\end{pmatrix}}{\mathcal{J}\begin{pmatrix}F & G\\ p & q\end{pmatrix}}.$$

Для подстановки в критерий интегрируемости достаточно посчитать числители этих выражений. Просчитаем индивидуально для необходимых переменных:

$$\mathcal{J}\begin{pmatrix}F & G\\ u & q\end{pmatrix}=y\frac{\partial G}{\partial u},\ \mathcal{J}\begin{pmatrix}F & G\\ p & u\end{pmatrix}=x\frac{\partial G}{\partial u},$$

$$\mathcal{J}\begin{pmatrix}F & G\\ y & q\end{pmatrix}=-\left(q+1\right)\cdot\frac{\partial G}{\partial q}+y\frac{\partial G}{\partial y},$$

$$\mathcal{J}\begin{pmatrix}F & G\\ p & x\end{pmatrix}=x\frac{\partial G}{\partial x}-\left(p-1\right)\cdot\frac{\partial G}{\partial p}.$$

Подставим найденные производные в критерий интегрируемости, и приведем сразу к линейному уравнению с частными производными:

$$\left(yq-px\right)\frac{\partial G}{\partial u}-x\frac{\partial G}{\partial x}+y\frac{\partial G}{\partial y}+\left(p-1\right)\frac{\partial G}{\partial p}-\left(q+1\right)\frac{\partial G}{\partial q}=0.$$

Соответствующая симметрическая характеристическая система принимает вид:

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{yq - px} = \frac{dp}{p-1} = \frac{dq}{-(q+1)}.$$

Нетрудно заметить, что если домножить первый элемент на p, второй на q, сложить и приравнять к третьему, после упрощений получится вполне интегрируемое уравнение Пфаффа:

$$du = p\,dx + q\,dy.$$

Второе уравнение системы же получим из первого интеграла на основе двух последних элементов этой симметрической системы:

$$\frac{dp}{p-1} + \frac{dq}{q+1} = 0,$$

или, интегрируя, получим:

$$(p-1)\cdot(q+1) = \tilde{C}_1.$$

Получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} xp - yq = x + y; \\ (p-1)\cdot(q+1) = \tilde{C}_1. \end{cases}$$

Из последнего уравнения выразим p, переобозначая для удобства $\tilde{C}_1 := C_1^2$:

$$p = \frac{C_1^2}{q+1} + 1.$$

Подставим это выражение в первое уравнение системы:

$$\frac{C_1^2 x}{q+1} + x - yq = x + y.$$

Упростим, и выразим q:

$$q = C_1\sqrt{\frac{x}{y}} - 1.$$

Подставляя это в p, получим:

$$p = C_1\sqrt{\frac{y}{x}} + 1.$$

Подставляя это выражение в уравнение Пфаффа, получим:

$$du = C_1\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\,dx + \sqrt{\frac{x}{y}}\,dy\right) + dx - dy.$$

Данное уравнение является вполне интегрируемым, общее решение примет вид:

$$u = 2C_1\sqrt{xy} + x - y + C_2,$$

что является частным случаем решения методом характеристик, где

$$\Phi(\varphi_1) = 2C_1\sqrt{\varphi_1} + C_2.$$

Аналогичные частные случаи решения линейного уравнения можно также получить, выбрав другие комбинации для первого интеграла в сопряженном уравнении, например $\dfrac{dp}{p-1} = \dfrac{dy}{y}$, из чего вытекает система $p = C_1 y + 1$, $q = C_1 x - 1$, и общий интеграл принимает вид:

$$u = C_1 xy + x - y + C_2,$$

что так же удовлетворяет частному решению общего, полученного методом характеристик.

13.2. Задачи

Методом Лагранжа-Шарпи построить общее решение следующих уравнений:

441. $q = p^2 + 1$

442. $q\sqrt{p-1} = 1$

443. $p \operatorname{cosec} q - 3q^2 = 1$

444. $pq - q^2 = 1$

445. $p^2 - q^2 = 1$

446. $pqe^x + 1 = pe^x$

447. $\left(qu^2 - 1\right) \sin p = 0$

448. $2p = u\,(pq - 1)$

449. $p\left(u^2 + 1\right) = q^2 + p^2$

450. $q \cos^2 u = p^2 - q^2$

451. $p^2 u^2 = q^2\,(p - q)$

452. $pe^x u = q^2 e^{2x} - p^2$

453. $pq = x^2 y^2$

454. $p^2 x = q^2 y$

455. $p \sin^2 y = q^2 \cos x$

456. $q\,(px + u) = y$

457.* $yq\,(p + u) = e^{-2x}$

458.** $py^2 \cos^2 x - 1 = (qy + 2u)^2\, y^2 \sec^2 y$

Методом Лагранжа-Шарпи построить общее решение следующих уравнений, и найти поверхность, удовлетворяющую условиям Коши:

459. $q = 1 + \sqrt{1-p}; \quad u\Big|_{x=0} = y,\ u\Big|_{y=0} = x$

460. $q^4 = u^2 p^3; \quad u\Big|_{x=0} = \dfrac{1}{1-y},\ u\Big|_{y=0} = \dfrac{1}{1-x}$

461. $qe^u\left(p^2 + 1\right) = p^2 + q^2 e^{2u}; \quad u\Big|_{x=1} = \ln y,\ u\Big|_{y=1} = \ln x$

462. $pq = u + 1; \quad u\Big|_{x=-y} = -1,\ u\Big|_{y=0} = \dfrac{x^2}{4} - 1$

463.* $q^2 + upq = u^2; \quad u\Big|_{x=0,\ y=-1} = u\Big|_{x=-1,\ y=0} = -1$

464.* $\dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{q} + \dfrac{1}{x}; \quad u\Big|_{x=0,\ y=2} = 4,\ u\Big|_{x=-2,\ y=-1} = \ln 4 - 6$

465.* $2\,(yq - px) = q^2; \quad u\Big|_{y=x} = x^2,\ u\Big|_{x=1,\ y=1} = 1$

466.* $px^2 + y = (qx - 1)^2; \quad u\Big|_{y=1} = x - 2\ln x,\ u\Big|_{x=1} = 2y - 1$

14. Обобщенное уравнение Клеро

Рассмотрим следующий вид двумерного нелинейного уравнения с частными производными первого порядка:

$$u = px + qy + \varphi(p, q).$$

Такое уравнение называется двумерным обобщенным уравнением Клеро. Построим его решение методом Лагранжа-Шарпи. Для этого найдем вспомогательное уравнение $G(u, x, y, p, q)$. Положим

$$F = u - px - qy - \varphi(p, q).$$

Найдем соответствующие производные функции F:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 1,\ \frac{\partial F}{\partial x} = -p,\ \frac{\partial F}{\partial y} = -q,\ \frac{\partial F}{\partial p} = -x - \frac{\partial \varphi}{\partial p},\ \frac{\partial F}{\partial q} = -y - \frac{\partial \varphi}{\partial q}.$$

Теперь построим вспомогательное квазилинейное уравнение для функции G. Найдем соответствующие коэффициенты уравнения:

$$U = q \cdot \left(y + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) + p \cdot \left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right),$$
$$X = x + \frac{\partial \varphi}{\partial p},\ Y = y + \frac{\partial \varphi}{\partial q},$$
$$P = -p + p = 0,\ Q = -q + q = 0.$$

Получим уравнение:

$$\left(px + qy + p\frac{\partial \varphi}{\partial p} + q\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) \cdot \frac{\partial G}{\partial u} + \left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) \cdot \frac{\partial G}{\partial x} + \left(y + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) \cdot \frac{\partial G}{\partial y} = 0.$$

В этом уравнении отсутствуют производные по переменным p и q, при этому сами переменные в уравнении присутствуют. Из этого следует, что p и q – параметры уравнения, или, что то же – какие-либо постоянные, от которых зависит общее решение в явном виде. Наша задача состоит в том, чтобы построить хотя бы одно частное решение. Нетрудно показать, что для этой системы выполняется условие вполне интегрируемости:

$$du = p\,dx + q\,dy.$$

Так как p и q относительно уравнения для функции G – постоянные, то первый интеграл системы имеет вид:

$$u = px + qy + C.$$

Убедимся, что постоянные p и q являются произвольными. Для этого в соответствующей симметрической характеристической системе рассмотрим следующее выражение:

$$\frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}.$$

Это равенство верно согласно принципу равенства дробей при условии, что p и q – какие-либо постоянные ($dp = dq = 0$ одновременно), что в данном случае выполняется. Здесь или $p =$

C_1 или $q = C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Положим $q = C_1$, таким образом вполне интегрируемая система примет вид:

$$\begin{cases} u = px + qy + \varphi(p, q), \\ q = C_1. \end{cases}$$

Подставим второе уравнение в первое, получим:

$$u = px + C_1 y + \varphi(p, C_1).$$

Положим C_1, y параметрами уравнения, перепишем его в следующем виде:

$$u = px + \psi(p, C_1, y).$$

В данном уравнении присутствует помимо функции u, ее производная по переменной x, домноженная как раз соответствующую ей переменную. Так же функция ψ в общем случае зависит только от производной функции u, в рамках переменной x, параметры C_1 и y могут интерпретироваться как фиксированные постоянные. Таким образом получено классическое одномерное параметрическое уравнение Клеро, в ходе решения которого получим, что $p = C_2$, где C_2 – вторая произвольная постоянная, отличная от C_1. Производя переобозначения индексов произвольных постоянных, получим общее решение:

$$u = C_1 x + C_2 y + \varphi(C_1, C_2).$$

Аналогичный результат можно получить, положив $p = C_1$ из решения соответствующей симметрической характеристической системы. Из этой же системы, очевидно, вытекает следствие, что p и q должны являться произвольными постоянными одновременно.

Таким образом, общее решение двумерного обобщенного уравнения Клеро имеет вид:

$$u = C_1 x + C_2 y + \varphi(C_1, C_2).$$

Эти следствия можно расширить в общем случае для больших размерностей. Обобщенное уравнение Клеро имеет вид:

$$u = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} + \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

а его общее решение, соответственно:

$$u = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot x_k + \varphi(C_1, \ldots, C_n).$$

Замечание

Стоит упомянуть, что в системе

$$\frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

можно построить сразу два первых интеграла, и, в силу того, что эта система была основана на исходном уравнении, то, согласно методу Лагранжа-Шарпи, можно построить систему из двух уравнений сразу в явном виде:

$$\begin{cases} p = C_1, \\ q = C_2. \end{cases}$$

При подстановке в уравнение Пфаффа, получили бы сразу полный интеграл

$$u = C_1 x + C_2 y + C,\ \forall C.$$

Далее, методом соответствия уравнения его решению получим, что $C = \varphi\left(C_1, C_2\right)$, так как p и q – произвольные постоянные. Соответственно, общее решение принимает следующий вид:

$$u = C_1 x + C_2 y + \varphi\left(C_1, C_2\right).$$

14.1. Примеры

Рассмотрим следующий пример:

$$u = px + qy + pq.$$

Используя полученные ранее выкладки, из симметрической характеристической системы получим:

$$\frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}.$$

На основе этой системы получим сразу два первых интеграла, удовлетворяющих самому уравнению:

$$p = C_1,\ q = C_2.$$

Подставим в уравнение Пфаффа, и проинтегрируем:

$$u = C_1 x + C_2 y + C,\ \forall C.$$

Методом соответствия сравним этот результат с исходным уравнением, полагая, что p и q – произвольные постоянные, получим, что

$$C = C_1 C_2,$$

следовательно, общее решение принимает вид:

$$u = C_1 x + C_2 y + C_1 C_2.$$

Рассмотрим другой пример:

$$2x \cdot (u - qy) = pq + px^2.$$

Данное уравнение не является уравнением Клеро в явном виде, но его можно к нему привести. Положим, например $t = x^2$, тогда

$$u = u\left(x, y\right) = u\left(t, y\right).$$

Найдем соответствующие производные:

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} = 2x \cdot \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Положим

$$p_1 = \frac{\partial u}{\partial t} \implies p = 2x \cdot p_1.$$

Переведем уравнение от переменных u, x, y в переменные u, t, y, оставив $2x$ как общий множитель:

$$2x \cdot (u - qy) = 2x \cdot p_1 q + 2x \cdot p_1 t.$$

Сокращая на $2x$, полагая $x \neq 0$, и упрощая, получим:

$$u = p_1 t + qy + p_1 q.$$

Данное уравнение является уравнением Клеро для $u\,(t, y)$. Тогда общее решение принимает вид:

$$u = C_1 t + C_2 y + C_1 C_2,$$

или, подставляя $t = x^2$, получим:

$$u = C_1 x^2 + C_2 y + C_1 C_2.$$

Помимо замен независимых переменных x и y, в уравнении могут присутствовать и замены функции u, включая и комбинации таких замен. Рассмотрим следующий пример:

$$2yu = y^2 q + (q + 2y) \cdot (px + u)\,.$$

Здесь можно обратить внимание, что в левой части функция u стоит с коэффициентом $2y$, а в правой части первым слагаемым q стоит с коэффициентом y^2. Так что стоит попробовать сделать замену $t = y^2$, что, возможно, упростит дальнейшее вычисление:

$$t = y^2,\ u = u\,(x, y) = u\,(x, t)\,.$$

Найдем соответствующие производные:

$$q = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dy} = 2y \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = 2y \cdot q_1.$$

Подставим в уравнение, оставляя $2y$ как общий множитель, а y^2 заменяя на t:

$$2yu = 2ytq_1 + 2y \cdot (q_1 + 1) \cdot (px + u)\,.$$

Сократим на $2y$, полагая $y \neq 0$, раскроем скобки, приведем подобные слагаемые:

$$tq_1 + pq_1 x + uq_1 + px = 0.$$

Данное уравнение все еще не является обобщенным уравнением Клеро, поэтому попробуем провести ещё какие-либо замены. Стоит обратить внимание, что в исходном уравнении присутствует конструкция $px + u$. В дифференциальной форме она имеет следующий вид:

$$px + u = x\frac{\partial u}{\partial x} + u = \frac{\partial}{\partial x}\,(ux)\,.$$

В таком случае, попробуем сделать замену $v = ux$. Найдем соответствующие производные:

$$p_2 = \frac{\partial v}{\partial x} = px + u, \quad q_2 = \frac{\partial v}{\partial t} = xq_1.$$

Выразим конструкции u, p и q_1:

$$u = \frac{v}{x}, \quad p = \frac{p_2 - u}{x} = \frac{p_2 x - v}{x^2}, \quad q_1 = \frac{q_2}{x}.$$

Подставим в полученное уравнение:

$$\frac{t}{x} \cdot q_2 + \frac{p_2 x - v}{x} \cdot \frac{q_2}{x} + \frac{v}{x} \cdot \frac{q_2}{x} + \frac{p_2 x - v}{x} = 0.$$

Аналогично, упростим, приведем подобные, получим:

$$v = p_2 x + q_2 t + p_2 q_2.$$

В результате было получено обобщенное уравнение Клеро, его общее решение в переменных $v\left(x, t\right)$ имеет вид:

$$v = C_1 x + C_2 t + C_1 C_2.$$

Проводя обратные замены, получим:

$$ux = C_1 x + C_2 y^2 + C_1 C_2,$$

что является общим решением поставленного уравнения.

Замечание

Стоит заметить, что в общем случае проводить замены независимых переменных проще в комбинации, даже если замена является незначительной. К примеру, уравнение может являться уравнением Клеро для переменных $x + y$ и y, в таком случае стоит проводить замену совместно следующим образом:

$$t = x + y, \ s = y.$$

Возможные замены

1. Если присутствует $n \cdot px$, $n \in \mathbb{R}$, то возможна замена $t = x^{\frac{1}{n}}$;
2. Если присутствует $n \cdot qy$, $n \in \mathbb{R}$ то возможна замена $t = y^{\frac{1}{n}}$;
3. Если присутствует $-p^2$ или $-q^2$, то возможна замена: $t = xy$;
4. Если присутствует $+p^2$, то возможна замена: $t = \frac{y}{x}$;
5. Если присутствует $+q^2$, то возможна замена: $t = \frac{x}{y}$;
6. Если присутствует $u + px$, то возможна замена: $v = ux$;
7. Если присутствует $u + qy$, то возможна замена: $v = uy$;
8. Если присутствует $u - px$, то возможна замена: $v = \frac{u}{x}$;
9. Если присутствует $u - qy$, то возможна замена: $v = \frac{u}{y}$;

14.2. Задачи

Привести следующие уравнения к обобщенному уравнению Клеро, и найти общее решение:

467. $u - 1 = q \cdot (pq + y) + px$

468. $\left(u - 3q^2 - qy\right) \cdot x^2 = \dfrac{p^2}{4} + \dfrac{px^3}{2}$

469. $u = pq^2 e^{-x} + p + qy$

470. $2y\left(u - p^2 - px - 1\right) = 2pq + qy^2$

471. $u = px + q - 2qe^{-y} + 3e^p$

472. $u - p = pe^{-x} \cos 2q + qy$

473. $u = 2p^2x^2 + px \ln x + qy + e^{-q}$

474. $u - px = (qy)^p + qy \cdot \ln y$

475. $2u = px + qy + 2 \tan \dfrac{q}{2y} + 2 \cot \dfrac{p}{2x}$

476. $u^2 - 2u\,(px + qy) = 2que^{2up} + 1$

477. $u \ln u = px + 2p + qy + q \sin \dfrac{p}{u}$

478. $px + 3q^2 e^u + qy + e^{-u}(\ln p + u) = 1$

479.* $2x \cdot \left(1 + e^{-u} - qy\right) = px^2 + p \ln q + pu$

480.* $1 + e^{-u} \cdot \sin qye^u \cdot \cos pe^{u-x} = p + qy \cdot \ln y$

Найти обобщенные замены $t = \varphi(x, y)$, $s = \psi(x, y)$, $v = v(u, x, y)$ такие, для которых следующие уравнения примут вид обобщенного уравнения Клеро, и найти общее решение.

481. $ux^2 + q^2 y = qpx + px^3$

482. $u + 2p^2 e^{-y} = q - p + 2pqe^{-y} + p \cdot (x + y) + 1$

483. $4y^2(u - qy) = p^2x^2 - q^2y^2$

484. $px^2 = u + px + 2qxy$

485.* $px + 2qy + 3e^u \cdot (px + qy) \cdot (qy + 1) = 0$

486.* $2u \cdot \left(xy - 2x^2 + 1\right) + 2px^3 = px + qy + 2qxy \cdot (x + y)$

487.* $y^3 \sin y \cdot (2u + px) = \left(px^2 + ux - y^2 \cos y\right) \cdot (px + qy - u)$

488.* $e^{-y} \cdot (u + px + qy) + px + qy = u\,(y - 1) - py\,(x + y)$

Раздел VI

Операционное исчисление. Преобразования Лапласа и Фурье.

15. Введение, оператор свертки

В данном разделе будут описаны функции и операторы, которые будут использоваться в дальнейшем.

1. $\operatorname{sgn}(t)$ – функция знака аргумента. Определение:

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0; \end{cases}$$

2. $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, функция бесконечного точечного импульса. Определение:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0, \\ 0 & t \neq 0; \end{cases}$$

Свойства:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1; \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t)\, dt = f(0);$$

3. $u(t), H(t)$ – функция Хевисайда, шаговая функция, пороговая функция. Определение:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0, \\ 0 & t \leq 0; \end{cases}$$

4. $\Pi_{a,b}(t)$ – функция прямоугольника, определяет ненулевой отрезок. Определение:

$$\Pi_{a,b}(t) = \begin{cases} 1 & a < t < b, \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases}$$

5. $f(t) * g(t)$ – $(*)$ оператор свертки. Определение:

$$f(t) * g(t) = h(t) = \int\limits_0^t f(t-\tau) \cdot g(\tau)\, d\tau;$$

Свойства:

$$f * g = g * f; \quad (f * g) * h = f * (g * h); \quad f * (g + h) = f * g + f * h.$$

Некоторые обобщения функции $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{\pi\left(t^2 + h^2\right)},\ \delta(t) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{2} \cdot |t|^{h-1},\ \delta(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{t}{h}}{\pi t}.$$

15.1. Примеры

Рассмотрим пример. Пусть $f(t) = t * t$. Распишем по определению:

$$f(t) = t * t = \int\limits_0^t (t-\tau)\cdot\tau\,d\tau = \int\limits_0^t t\tau - \tau^2\,d\tau = t\cdot\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3}\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} =$$
$$= \frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{6}.$$

Аналогично рассмотрим пример с функцией $\delta(t)$. Пусть $f(t) = 1 * \delta(t-1)$. Распишем по определению:

$$f(t) = 1 * \delta(t-1) = \int\limits_0^t 1\cdot\delta(\tau-1)\,d\tau = \circledast$$

Полагая, что $\tau - 1 \in (0,t)$, или, что то же, $\tau \in (1, t+1)$, получим

$\circledast = 1,\ t > 1$. Или $\circledast = 0,\ \tau \notin (1, t+1)$.

Тогда

$$f(t) = 1 * \delta(t-1) = \begin{cases} 1 & t > 1 \\ 0 & 0 < t < 1 \end{cases},\ \text{или } f(t) = u(t-1),\ t \geq 0.$$

15.2. Задачи

Найти результат применения оператора свертки:

489. $1 * 1$

490. $1 * 2$

491. $2 * t$

492. $2t * 3t$

493. $t^2 * t$

494. $t * e^t$

495. $e^t * e^{2t}$

496. $e^t * \sin t$

497. $t * \ln t$

498. $e^{1-t} * \cos(1+t)$

499. $(1-t) * \sqrt{t}$

500. $5\sin 2t * \cos 3t$

501. $\cosh t * 2\sin(-t)$

502. $\ln 3t * t^2$

503. $\big(12t * t^2\big) * t^3$

504. $t * \arctan t$

505. $t * \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

506. $t * e^{t^2}$

507. $t * \delta(t)$

508. $t^2 * \delta(t-1)$

509. $\sin t^2 * \delta(t)$

510. $\log_4 2t * \delta(t-2)$

511. $\arctan t * \delta(t+2)$

512. $\sin t * u(t)$

513. $\cos t * u(t-1)$

514. $\ln t * u(t-1)$

515. $\big(\cos t * \delta(t)\big) * u(t-1)$

516. $u(t-1) * \delta(t+2)$

517.* $\ln(t+1) * \delta'(t)$

518.* $\tan t * \delta'(t-1)$

16. Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}(s)$ – интегральное преобразование из функции вещественной переменной $t \in \mathbb{R}$ в функцию комплексной переменной $s \in \mathbb{C}$, $s = \alpha + i\omega$, $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, описывающееся следующим выражением:

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}(s) = F(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\, dt.$$

Для упрощения, в дальнейшем будем записывать $\mathscr{L}\left\{f\right\}$, подразумевая $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}(s)$. Такое преобразование позволяет сводить задачи дифференциальных и интегральных уравнений к алгебраическим задачам. Здесь $f(t)$ – функция, называемая «оригиналом», а $F(s)$ – функция, называемая «образом», или результатом применения преобразования Лапласа.

Преобразование Лапласа является линейным, соответственно, удовлетворяет следующим условиям:

1. $\mathscr{L}\left\{f+g\right\} = \mathscr{L}\left\{f\right\} + \mathscr{L}\left\{g\right\}$;
2. $\mathscr{L}\left\{C \cdot f\right\} = C \cdot \mathscr{L}\left\{f\right\}$, $\forall C - \text{const}$;

16.1. Примеры

Рассмотрим пример $f(t) = 1 - u(\pi - t)$. Построим преобразование Лапласа по определению:

$$\mathscr{L}\left\{f\right\} = \int\limits_0^\infty e^{-st} \cdot \big(1 - u(\pi - t)\big)\, dt = \int\limits_0^\infty e^{-st}\, dt - \int\limits_0^\infty e^{-st} \cdot u(\pi - t)\, dt = \circledast$$

Первый интеграл тривиальный, в свою очередь, второй интеграл под действием функции $u(\pi - t)$ изменит пределы интегрирования на $t \in (0, \pi)$ в силу поведения функции $u(\pi - t)$ на диапазоне $(0, \infty)$:

$$\circledast = -\frac{1}{s}e^{-st}\Bigg|_{t=0}^{t\to\infty} - \int\limits_0^\pi e^{-st}\, dt = \circledast$$

Для сходимости интеграла, положим $s > 0$, тогда получим:

$$\circledast = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-st}\Bigg|_0^\pi = \frac{1}{s}\left(1 + e^{-\pi s} - 1\right) = \frac{1}{s}e^{-\pi s}, s > 0.$$

Построим решение в образах следующей задачи Коши для линейного дифференциального уравнения путем преобразования Лапласа:

$$y' + \delta(t-1) \cdot y = 1,\ y(1) = 0,\ y = y(t).$$

Первым этапом приведем начальные условия к нормальному виду. Для этого сделаем замену $t = \tau + 1$. Тогда, при $t = 1$, $\tau = 0$. Соответственно, $y = y(t) = y(\tau + 1) = y(\tau)$, $y'(t) = y'(\tau)$. Получим следующую задачу Коши:

$$y' + \delta(\tau) \cdot y = 1,\ y(0) = 0,\ y = y(\tau).$$

Применим преобразование Лапласа на эту задачу:

$$\mathscr{L}\left\{y'\right\} + \mathscr{L}\left\{\delta(\tau)\cdot y\right\} = \mathscr{L}\left\{1\right\},\ y(0) = 0.$$

Получим:

$$\Big[s\cdot Y(s) - y(0)\Big] + y(0) = \frac{1}{s},$$

Упростим, выразим $Y(s)$. Таким образом, решение в образах принимает такой вид:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2}.$$

16.2. Задачи

Найти результат применения оператора Лапласа $\mathscr{L}\left\{f\right\}$ для следующих функций:

519. $f(t) = 1$

520. $f(t) = 4t$

521. $f(t) = t^2 - 1$

522. $f(t) = e^t$

523. $f(t) = e^{2t} - t^4$

524. $f(t) = e^t + e^{-t}$

525. $f(t) = \sin t$

526. $f(t) = \cos 2t$

527. $f(t) = \cos^2 t$

528. $f(t) = \cosh 2t$

529. $f(t) = t\cdot e^{-t}$

530. $f(t) = t^2\cdot e^{-2t}$

531. $f(t) = t\cdot \sin 2t$

532. $f(t) = \sin t\cdot\cos t$

533. $f(t) = 2\delta(t)$

534. $f(t) = \delta(t-1)$

535. $f(t) = u(t)$

536. $f(t) = u(t-1)$

537. $f(t) = \Pi_{1,3}(t)$

538. $f(t) = \Pi_{0,1}(t-1)$

539. $f(t) = t * e^t$

540. $f(t) = e^t * \sin 2t$

541. $f(t) = \delta(t)\cdot\sin t$

542. $f(t) = u(t-1)\cdot\cos(t-1)$

Определить результат применения преобразования Лапласа для функций общего вида:

543. $f(t) = t^n,\ n - \text{const}$

544. $f(t) = e^{at},\ a - \text{const}$

545. $f(t)\cdot\delta(t-a),\ a - \text{const}$

546. $f(at),\ a - \text{const}$

547. $f(t)\cdot u(t-a),\ a - \text{const}$

548. $f(t)\cdot t$

549. $f(t)\cdot t^n,\ n - \text{const}$

550. $f(t)\cdot e^{at},\ a - \text{const}$

551. $\dfrac{f(t)}{t}$

552. $\dfrac{f(t)}{t^n},\ n - \text{const}$

553. $f'(t)$

554. $f^{(n)}(t),\ n - \text{const}$

555. $\displaystyle\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$

556. $\displaystyle\int\cdots\int\limits_0^t f(\tau)\,d^n\tau$

557. $f(t) * g(t)$

Свести следующие дифференциальные уравнения к алгебраическим путем применения преобразования Лапласа (полагая $y(0) = \tilde{C}_1$, $y'(0) = \tilde{C}_2$):

558. $y' - y = 0$

559. $y'' - y' = 0$

560. $y'' - 3y' + 2y = 0$

561. $y'' - y = 0$

562. $y'' + y = 0$

563. $y'' - 2y' + y = 0$

564. $y'' + 4y' - 5y = 0$

565. $y'' + 2y' + 2 = 0$

566. $y'' + 2y' + 5 = 0$

567. $y' - y = t$

568. $y'' - y' = t + e^{-t}$

569. $y'' - 3y' + 2y = e^t - \sin t$

570. $y'' - y = 2\cosh t + t - e^{-t}$

17. Обратное преобразование Лапласа

Обратное преобразование Лапласа $\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}(t)$ – интегральное преобразование из функции комплексной переменной $s \in \mathbb{C}$ в функцию вещественной переменной $t \in \mathbb{R}$. Для решения задач, связанных с поиском обратного преобразования, рекомендуется пользоваться таблицей оригиналов и изображений. Обратное преобразование Лапласа удовлетворяет следующему соотношению:

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) \implies \mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t).$$

17.1. Примеры

Рассмотрим следующий пример. Положим

$$F(s) = \int\limits_s^{\infty} \frac{1}{\sigma^2}\,d\sigma.$$

Проинтегрировав функцию $F(s)$, получим, что

$$F(s) = \frac{1}{s},$$

а ее обратное преобразвание будет $f(t) = 1$.

Так же, аналогичное решение можно получить, пользуясь свойством обратного преобразования. Найдем производную от образа для того, чтобы избавиться от оператора интегрирования:

$$F'(s) = -\frac{1}{s^2}.$$

Тогда, по свойству преобразования производной, получим

$$f(t) = -\frac{1}{t} \cdot \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{t}{t} = 1.$$

Аналогично, найдем решение уравнения, рассматриваемого ранее:

$$y' + \delta(t-1)\cdot y = 1,\ y(1) = 0,\ y = y(t),$$

при известном решении в образах:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Применяя обратное преобразование, получим, что

$$y(\tau) = \tau,$$

или

$$y(t) = t - 1.$$

Дифференцируя и подставляя в уравнение, можно убедиться, что полученная функция является решением для любых значений, кроме $t = 1$. При $t = 1$ возможен разрыв за счет присутствия в уравнении функции $\delta(t-1)$. Для того, чтобы определить, является ли данная функция решением в окрестности $t = 1$, рассмотрим следующий предел:

$$\lim_{t \to 1} y \cdot \delta(t-1) = \lim_{t \to 1} (t-1) \cdot \delta(t-1).$$

Нетрудно убедиться, что этот предел в точности равен 0. Соответственно, при $t = 1$, удовлетворяется как уравнение, так и начальное условие. А значит, функция $y = t-1$ является решением данного уравнения.

17.2. Задачи

Найти оригиналы $\mathscr{L}^{-1}\{F\}$ для следующих изображений:

571. $F(s) = \dfrac{1}{s}$

572. $F(s) = \dfrac{1}{s+1}$

573. $F(s) = 1$

574. $F(s) = e^{-s}$

575. $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$

576. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$

577. $F(s) = \dfrac{1}{s^2-1}$

578. $F(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$

579. $F(s) = \dfrac{1}{s^4+s^2}$

580. $F(s) = \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{s-2}$

581. $F(s) = \dfrac{6s}{s^2+4s+13}$

582. $F(s) = \dfrac{s+7}{s^2-3s-10}$

583. $F(s) = \dfrac{s^2+1}{s^3-8}$

584. $F(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s}}$

585. $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s}$

586. $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s+1}$

587. $F(s) = \dfrac{1-e^{-s}}{s^2}$

588. $F(s) = \dfrac{s+2}{(s^3+8) \cdot e^{2s}}$

589. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \cdot \dfrac{1}{s^2-1}$

590. $F(s) = \dfrac{1-s^2}{(1+s^2)^2}$

591. $F(s) = \dfrac{2s}{(s^2+1) \cdot (s+1)^2}$

592. $F(s) = \dfrac{e^{-s} \cdot (2s-1)}{s^2+1}$

593. $F(s) = \dfrac{2e^{-s}}{s^3+2s^2+4s+8}$

594.* $F(s) = \ln \dfrac{s+1}{s^2+1}$

595.* $F(s) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{s}\right)$

596.* $F(s) = \arctan \dfrac{1}{s}$

Определить результат применения обратного преобразования Лапласа для функций общего вида:

597. $F(s) = C,\ C - \text{const}$

598. $F(s) = \dfrac{1}{s^n},\ n - \text{const}$

599. $F(s) \cdot e^{-as},\ a - \text{const}$

600. $F(s) \cdot G(s)$

601. $s \cdot F(s)$

602. $\dfrac{F(s)}{s}$

603. $F'(s)$

604. $\displaystyle\int_s^\infty F(\sigma)\, d\sigma$

Найти общее решение следующих дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа:

605. $y' = t + 2,\ y(0) = 1$

606. $y' = 3\sin t,\ y(\pi) = 3$

607. $y'' - y' = 6e^{-2t},\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0$

608. $y'' - y = e^{t} - e^{-t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

609. $y'' + 2y' + y = 2\cosh t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

610. $y'' = 6t + t \cdot e^{t-1} - 6,\ y(1) = -1,\ y'(1) = 0$

611. $ty' + y = 1,\ y(1) = 1$

612. $ty'' - ty' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

613. $y''e^{t} - y'e^{t} = 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

614. $4t^2y'' + y = t + 1,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1$

615. $y' = \delta(t-1),\ y(1) = 0$

616. $y' = u(t-1) \cdot \dfrac{d}{dt}\delta(t-1),\ y(0) = 0$

617. $y'' + 2y' + y = 12t \cdot e^{-t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

618. $y'' + y' = e^{-t} \cdot \delta(t),\ y(0) = y'(0) = 0$

619. $y'' + y = \sin t \cdot u(t-1),\ y(0) = y'(0) = 0$

620. $y'' - 2y' + y = 2t * \cosh t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

621. $y'' + \delta(t) \cdot y' = 4u(t-1),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

622.* $y'' + 2\delta(t-2) \cdot y' + u(t-2) \cdot y = 2(t-2) * e^{-t+2},\ y(2) = 0,\ y'(2) = -1$

18. Преобразование Фурье

Преобразование Фурье $\mathscr{F}\left\{f(t)\right\}(\omega)$ – интегральное преобразование из функций вещественной переменной $t \in \mathbb{R}$ в функцию вещественной переменной $\omega \in \mathbb{R}$. Преобразование аналогично преобразованию Лапласа, но аргумент преобразования состоит только из комплексной части, а область интегрирования покрывает все вещественные числа:

$$\mathscr{F}\left\{f(t)\right\}(\omega) = F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\omega t i} \cdot f(t)\, dt.$$

Преобразование Фурье подразделяется на вещественное и комплексное преобразования. Они получаются путем разложения экспоненты по формуле Эйлера: $e^{-2\pi\omega t i} = \cos(2\pi\omega t) - i\sin(2\pi\omega t)$. Таким образом, вещественное преобразование (косинус-преобразование) Фурье имеет вид:

$$\mathscr{F}_{\Re}\left\{f\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(2\pi\omega t)\, dt,$$

и комплексное (синус-преобразование), соответственно:

$$\mathscr{F}_{\Im}\left\{f\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin(2\pi\omega t)\, dt.$$

Тогда:

$$\mathscr{F}\left\{f\right\} = \mathscr{F}_{\Re}\left\{f\right\} - i \cdot \mathscr{F}_{\Im}\left\{f\right\}$$

18.1. Примеры

В качестве примера рассмотрим функцию $f(t) = \dfrac{1}{t}$. Распишем по определению общего преобразования Фурье:

$$\mathscr{F}\left\{f\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} \cdot e^{-2\pi\omega t i}\, dt = \int \frac{1}{t} \cdot \cos 2\pi\omega t\, dt - i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} \cdot \sin 2\pi\omega t\, dt = \circledast$$

Полагая $u = 2\pi\omega t$, и $du = 2\pi\omega\, dt$, получим:

$$\circledast = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos u}{u}\, du - i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \circledast$$

Первый интеграл в общем случае расходится, но пользуясь понятием главного значения интеграла по Коши, при предположении, что преобразование Фурье всегда существует и сходится, положим, что $u = -u$, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos u}{u}\, du = \int\limits_{\infty}^{-\infty} \frac{\cos(-u)}{-u}\, d(-u) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos u}{u}\, du = 0.$$

Второй же интеграл в общем случае равен π, но при условии, что $\omega > 0$. Если же $\omega < 0$, пределы интегрирования меняют знак, а значит, что интеграл будет равен $-\pi$. При $\omega = 0$, сам интеграл равен 0, из чего следует обобщение:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u(\omega)}{u(\omega)}\, d\big(u(\omega)\big) = \pi \cdot \operatorname{sgn}(\omega).$$

Из замены выше стоит заметить, что при интегрировании u содержит помимо ω еще коэффициент 2π. Тогда, по свойствам функции $\operatorname{sgn}(t)$, перепишем результат в следующей канонической форме:

$$\circledast = -i\pi \cdot \operatorname{sgn}(2\pi\omega).$$

18.2. Задачи

Найти вещественные и комплексные преобразования Фурье для следующих функций:

623. $f(t) = 1$

624. $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$

625. $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

626. $f(t) = e^{-|t|}$

627. $f(t) = e^{-t^2}$

628. $f(t) = te^{-t^2}$

Определить результат применения преобразования Фурье для функций общего вида:

629. $f(t) = \dfrac{1}{t^n},\ n - \text{const} \neq 1$

630. $f(t) = \dfrac{1}{a^2+t^2},\ a - \text{const}$

631. $f(t) = e^{-a^2t^2},\ a - \text{const}$

632. $f(t) = e^{-|at|},\ a - \text{const}$

633. $f'(t)$

634. $f^{(n)}(t),\ n - \text{const}$

Полагая t – параметром, определить результат преобразования Фурье для функций общего вида:

635. $f(x,t)$

636. $\dfrac{\partial f}{\partial t}$

637. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

638. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

639. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

640. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$

Построить вещественную и комплексную спектральные функции для следующих выражений:

641. $f(t) = \sin t$

642. $f(t) = \sin t + 2\cos t$

643. $f(t) = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{t}{2} - 2\sin 3t$

644. $f(t) = \sin t \cdot \cos t + 2\cos 3t - 3\sin t$

645. $f(t) = \delta(t)$

646. $f(t) = \delta(t-1)$

647. $f(t) = \Pi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(t)$

648. $f(t) = \Pi_{0,1}(t)$

649. $f(t) = u(t)$

650. $f(t) = u(t-1)$

651. $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1, \\ -1, & 1 \le t < 2; \end{cases}$

652. $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t < \pi, \\ \sin -t, & \pi \le t < 2\pi; \end{cases}$

653. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t+1}, & 0 \le t < 1, \\ \dfrac{1}{t}, & 1 \le t < 2; \end{cases}$

654. $f(t) = \begin{cases} e^{-t^2}, & 0 \le t < 1, \\ \dfrac{1}{t}, & 1 \le t < 2; \end{cases}$

19. Обратное преобразование Фурье

Обратное преобразование Фурье $\mathscr{F}^{-1}\left\{F(\omega)\right\}(t)$ – интегральное преобразование, обратное к преобразованию Фурье. Определяется с помощью следующего выражения:

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{F\right\} = f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi\omega t i} \cdot F(\omega)\, d\omega$$

19.1. Примеры

В качестве примера рассмотрим функцию, прямое преобразование от которой уже было найдено:

$$F(\omega) = -i\pi \cdot \operatorname{sgn}(2\pi\omega).$$

Распишем по общему определению обратное преобразование Фурье:

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{F\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi\omega t i} \cdot \big(-i\pi \cdot \operatorname{sgn}(2\pi\omega)\big)\, d\omega = -i\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(2\pi\omega) \cdot e^{2\pi\omega t i}\, d\omega = \circledast$$

По определению функции $\operatorname{sgn}(t)$, разложим этот интеграл на два:

$$\circledast = -i\pi \cdot \left(\int\limits_{-\infty}^{0} -1 \cdot e^{2\pi\omega t i}\, d\omega + \int\limits_{0}^{\infty} 1 \cdot e^{2\pi\omega t i}\, d\omega \right) = \circledast$$

Представленные интегралы являются в общем случае достаточно простыми в нахождении первообразной, даже при том, что они содержат комплексное выражение:

$$\circledast = -i\pi \cdot \left(\frac{e^{2\pi\omega t i}}{2\pi t i}\Bigg|_{\omega=0}^{\omega\to-\infty} + \frac{e^{2\pi\omega t i}}{2\pi t i}\Bigg|_{\omega=0}^{\omega\to\infty} \right) = -\frac{1}{2t} \cdot \left(e^{2\pi\omega t i}\Big|_{\omega=0}^{\omega\to-\infty} + e^{2\pi\omega t i}\Big|_{\omega=0}^{\omega\to\infty} \right)$$

При $\omega \to 0$, нетрудно заметить, что аргументы экспонент обнуляются, а случай при $\omega \to \pm\infty$ рассмотрим отдельно в предельной форме:

$$\lim_{\omega\to-\infty} e^{2\pi\omega t i} + \lim_{\omega\to\infty} e^{2\pi\omega t i} = \lim_{\omega\to\infty} \left(e^{2\pi\omega t i} + e^{-2\pi\omega t i}\right) \cdot \frac{2}{2} = \lim_{\omega\to\infty} 2\cos 2\pi\omega t = \star$$

Предположим, что данный предел был получен путем применения правила Лопиталя. Тогда воспользуемся им в обратную сторону:

$$\star = \lim_{\omega\to\infty} \frac{\int\limits_{0}^{\omega} 2\cos 2\pi\sigma t\, d\sigma}{\int\limits_{0}^{\omega} d\sigma} = \lim_{\omega\to\infty} \frac{\sin 2\pi\omega t}{\pi\omega t} = \star$$

Разобьем дробь полученного предела на множители определенным образом:

$$\star = \lim_{\omega\to\infty} \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{\sin 2\pi\omega t}{\pi \cdot 2\pi t} = \star$$

Второй множитель можно разложить в дельта-функцию по одному из ее определений – $\delta(2\pi\omega t)$. Тогда:

$$\star = \lim_{\omega\to\infty} \frac{2\pi}{\omega} \cdot \delta(2\pi\omega t) = 0.$$

Этот предел равен нулю на основе того, что знаменатель бесконечно растет, а дельта функция в ненулевой точке (полагая $t \neq 0$) равна нулю. В случае, если $t \to 0$, то нетрудно показать, что и такой предел так же равен нулю. Тогда

$$\circledast = -\frac{1}{2t} \cdot (0 - 1 - 1) = \frac{1}{t}.$$

Получили исходную функцию, пример которой был рассмотрен ранее.

19.2. Задачи

Полагая t – параметром, найти решение следующих задач Коши с помощью преобразования Фурье (свести к конечному интегралу, и найти его, если возможно):

655. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(0,x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

656. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(0,x) = \dfrac{\pi}{2}e^{-4\pi|x|}$

657. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\sin x,\ u(0,x) = \sin x$

658. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x \sin t,\ u(0,x) = \delta(x)$

659.* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(0,x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = H(x)$

660.* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Pi_{-\pi,\pi}(x) \cdot \left(x^2+1\right),\ u(0,x) = \delta(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$

20. Лабораторная работа

20.1. Постановка задачи

Реализовать алгоритм построения интегрального преобразования Фурье для произвольно-заданных функций одной переменной. Для реализации потребуются следующие параметры:

- $f(t)$ – определение функции,
- a, b – область интегрирования функции,
- n_1 – количество разбиений области интегрирования (также можно использовать шаг h_1),
- n_2 – количество разбиений частотного диапазона (также можно использовать шаг h_2),
- m – максимальное значение частоты.

Задача сводится к построению спектрального разложения одномерного сигнала $f(t)$ на частоты составляющих его волн.

Реализация проводится с помощью численных методов рассчета интегралов. Потребуется построить график функции $f(t)$, и ее вещественные и комплексные спектральные разложения ($\mathscr{F}_{\Re}\left\{f\right\}$ и $\mathscr{F}_{\Im}\left\{f\right\}$). Графики разложений строятся в диапазоне $\omega \in [0, m]$. Оси графиков разложений представляют из себя по горизонтали – частотный диапазон, по вертикали – амплитуда.

Решение оформить в среде LaTeX.

20.2. Пример

Рассмотрим функцию $f(t) = \sin t$ на диапазоне $[a, b] = [0, \pi]$, в остальном диапазоне полагая $f(t) = 0$. Для аналитического решения, функция примет вид: $f(t) = \sin t \cdot \Pi_{0,\pi}(t)$. Положим $\hat{\omega} = 2\pi\omega$. Тогда преобразования Фурье примут вид:

$$\mathscr{F}_{\Re}\left\{\sin t\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin t \cdot \Pi_{0,\pi}(t) \cdot \cos\hat{\omega}t \, dt = \int\limits_{0}^{\pi} \sin t \cos\hat{\omega}t \, dt = \frac{\cos\pi\hat{\omega} + 1}{1 - \hat{\omega}^2}.$$

$$\mathscr{F}_{\Im}\left\{\sin t\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin t \cdot \Pi_{0,\pi}(t) \cdot \sin\hat{\omega}t \, dt = \int\limits_{0}^{\pi} \sin t \sin\hat{\omega}t \, dt = \frac{\sin\pi\hat{\omega}}{1 - \hat{\omega}^2},$$

В таком случае спектральный график в аналитической форме будет иметь следующий вид:

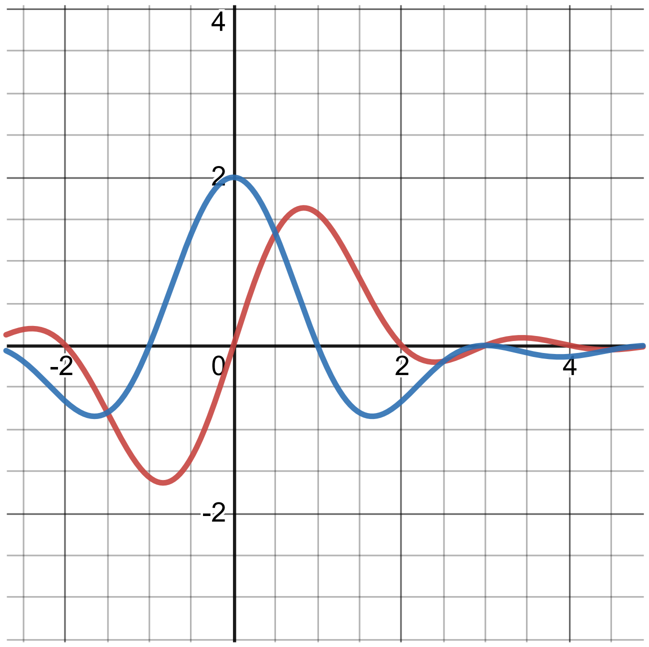

Рис. 23: Спектральный график волн синус- и косинус-преобразований (красный – синус, вещественное преобразование, синий – косинус, комплексное преобразование)

В процессе реализации численного алгоритма, максимальное значение частоты выберем $m = 2$. Таким образом, численно найденный спектральный график имеет вид:

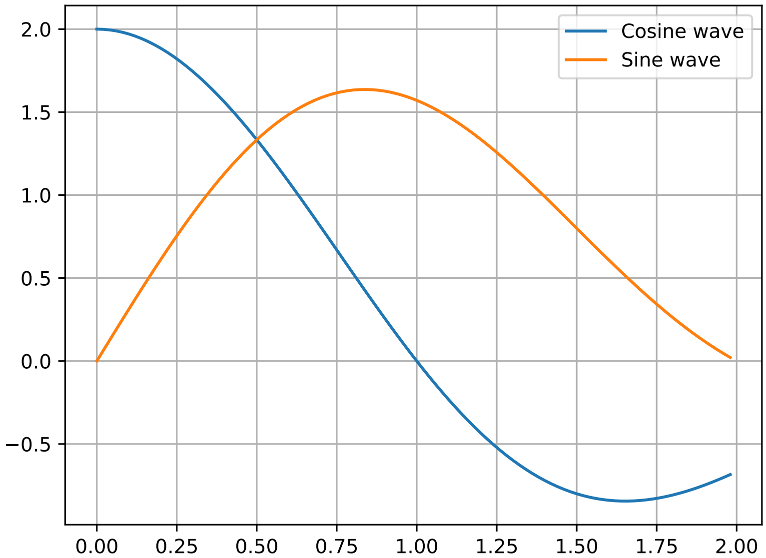

Рис. 24: Численно рассчитанный спектральный график волн синус- и косинус-преобразований (оранжевый – синус, синий – косинус)

Раздел VII

Ответы

Системы линейных дифференциальных уравнений.

Системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-5t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t};$

2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t};$

3) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{t};$

4) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-2t}\cos 2t & -e^{-2t}\sin 2t \\ e^{-2t}\sin 2t & e^{-2t}\cos 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix};$

5) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

6) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-5t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{-5t};$

7) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] e^{-t};$

8) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t};$

9) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

10) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t};$

11) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{5t};$

12) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-5t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{-5t};$

13) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix};$

14) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{-5t};$

15) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t};$

16) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{t}\cos t & -e^{t}\sin t \\ e^{t}\sin t & e^{t}\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix};$

17) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] e^{2t};$

18) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{3t}\cos 2t & -e^{3t}\sin 2t \\ e^{3t}\sin 2t & e^{3t}\cos 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix};$

19) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-t}\cos 3t & -e^{-t}\sin 3t \\ e^{-t}\sin 3t & e^{-t}\cos 3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix};$

20) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-t}\cos 3t & -e^{-t}\sin 3t \\ e^{-t}\sin 3t & e^{-t}\cos 3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix};$

21) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^t + C_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^t;$

22) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t};$

23) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^t;$

24) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right] e^{3t};$

25) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t}\cos t & e^{-2t}\sin t \\ 0 & -e^{-2t}\sin t & e^{-2t}\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix};$

26) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t};$

27) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{-2t} + C_3 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{-2t};$

28) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t\cos t & e^t\sin t \\ 0 & -e^t\sin t & e^t\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix};$

29) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_3 \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right] e^{-3t};$

30) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t}\cos 2t & e^{3t}\sin 2t \\ 0 & -e^{3t}\sin 2t & e^{3t}\cos 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix};$

31) $J = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ \Phi = \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} \\ e^{-3t} & 4e^{-t} \end{pmatrix};$

32) $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \Phi = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & \cos t - \sin t \\ \cos t + 2\sin t & 2\cos t - \sin t \end{pmatrix};$

33) $J=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix},\ \Phi=\begin{pmatrix}-e^{-2t}&(1-t)\,e^{-2t}\\2e^{-2t}&(2t-1)\,e^{-2t}\end{pmatrix};$

34) $J=\begin{pmatrix}-2&0\\0&2\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix},\ \Phi=\begin{pmatrix}e^{-2t}&e^{2t}\\2e^{-2t}&e^{2t}\end{pmatrix};$

35) $J=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}3&-1\\2&1\end{pmatrix},\ \Phi=\begin{pmatrix}(3\cos t-\sin t)\,e^{2t}&-(\cos t+3\sin t)\,e^{2t}\\(2\cos t+\sin t)\,e^{2t}&(\cos t-2\sin t)\,e^{2t}\end{pmatrix};$

36) $J=\begin{pmatrix}-4&0\\0&-3\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}4&-1\\5&-1\end{pmatrix},\ \Phi=\begin{pmatrix}4e^{-4t}&-e^{-3t}\\5e^{-4t}&-e^{-3t}\end{pmatrix};$

37) $J=\begin{pmatrix}-5&1\\0&-5\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix},\ \Phi=\begin{pmatrix}e^{-5t}&(1+t)\,e^{-5t}\\2e^{-5t}&(3+2t)\,e^{-5t}\end{pmatrix};$

38) $J=\begin{pmatrix}-2&0\\0&3\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix},\ \Phi=\begin{pmatrix}e^{-2t}&e^{3t}\\2e^{-2t}&e^{3t}\end{pmatrix};$

39) $J=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix},\ \Phi=\begin{pmatrix}e^{3t}&(2+t)\,e^{3t}\\e^{3t}&(1+t)\,e^{3t}\end{pmatrix};$

40) $J=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix},\ \Phi=\begin{pmatrix}(\sin t-2\cos t)\,e^{t}&(\cos t+2\sin t)\,e^{t}\\(3\cos t-\sin t)\,e^{t}&-(\cos t+3\sin t)\,e^{t}\end{pmatrix};$

41) $J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \Phi=\begin{pmatrix}e^{t}&e^{2t}&(1+t)\,e^{2t}\\e^{t}&2e^{2t}&2te^{2t}\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix};$

42) $J=\begin{pmatrix}-3&1&0\\0&-3&0\\0&0&-2\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&2&1\\2&3&2\end{pmatrix},\ \Phi=\begin{pmatrix}2e^{-3t}&(2+2t)\,e^{-3t}&e^{-2t}\\e^{-3t}&(2+t)\,e^{-3t}&e^{-2t}\\2e^{-3t}&(3+2t)\,e^{-3t}&2e^{-2t}\end{pmatrix};$

43) $J=\begin{pmatrix}-4&1&0\\0&-4&1\\0&0&-4\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\1&-1&-1\\0&1&3\end{pmatrix},\ \Phi=\begin{pmatrix}e^{-4t}&(t-1)\,e^{-4t}&\left(\dfrac{t^2}{2}-t-2\right)e^{-4t}\\e^{-4t}&(t-1)\,e^{-4t}&\left(\dfrac{t^2}{2}-t-1\right)e^{-4t}\\0&3e^{-4t}&(3+t)\,e^{-4t}\end{pmatrix};$

44) $J=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-5&-1\\0&1&-5\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&2\\0&1&-2\end{pmatrix},$
$\Phi=\begin{pmatrix}e^{-2t}&e^{-5t}\sin t&e^{-5t}\cos t\\e^{-2t}&(2\sin t-\cos t)\,e^{-5t}&(2\cos t+\sin t)\,e^{-5t}\\0&(\cos t-2\sin t)\,e^{-5t}&-(2\cos t+\sin t)\,e^{-5t}\end{pmatrix};$

45) $J=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&2&-1\\1&1&0\end{pmatrix},\ \Phi=\begin{pmatrix}e^{-t}&2&2t-1\\2e^{-t}&2&2t-1\\e^{-t}&1&t\end{pmatrix};$

46) $J=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\-2&1&1\end{pmatrix},$
$\Phi=\begin{pmatrix}0&0&e^{-t}\\e^{-t}\cos t&-e^{-t}\sin t&-e^{-t}\\(\sin t-2\cos t)\,e^{-t}&(\cos t+2\sin t)\,e^{-t}&e^{-t}\end{pmatrix};$

47) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\Phi = \begin{pmatrix} e^t & (1+t)\,e^t & \left(t+\dfrac{t^2}{2}\right)e^t \\ 0 & 0 & e^t \\ 2e^t & (1+2t)\,e^t & \left(3+t+t^2\right)e^t \end{pmatrix}$;

48) $J = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Phi = \begin{pmatrix} 3e^{-4t} & (3t-2)\,e^{-4t} & 0 \\ -e^{-4t} & (1-t)\,e^{-4t} & 0 \\ -e^{-4t} & -te^{-4t} & e^{-3t} \end{pmatrix}$;

49) $J = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-5t} & (1+t)\,e^{-5t} & 0 \\ 4e^{-5t} & (2+4t)\,e^{-5t} & e^{-5t} \\ 2e^{-5t} & (1+2t)\,e^{-5t} & e^{-5t} \end{pmatrix}$;

50) $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & e^{3t} \\ -e^{-t} & 1 & -e^{-3t} \\ e^{-t} & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

Системы линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами

51) $x = C_1e^{-t} + C_2e^t - t + 1,\ y = t - C_2e^t$;

52) $x = C_1e^t + C_2\,(t+1)\,e^t + t - 1,\ y = 4 - 2C_1e^t - C_2\,(2t+1)\,e^t - 3t$;

53) $x = t^2 + 2 - C_1e^{-t} - C_2\,(t-2)\,e^{-t},\ y = C_1e^{-t} + C_2\,(t-3)\,e^{-t} - 1$;

54) $x = 3C_1e^{2t} + C_2\,(3t+1)\,e^{2t} + 3 - e^t,\ y = 2C_1e^{2t} + C_2\,(1+2t)\,e^{2t} + 2t + 1$;

55) $x = C_1e^{-t} + 2C_2e^{3t} + \sin t - \cos t,\ y = 1 - C_2e^{3t}$;

56) $x = C_1\,(\cos t + \sin t) - 2C_2\sin t + 2\sin t - 2t\cos t,\ y = C_1\sin t + C_2\,(\cos t - \sin t) - (t-1)\,(\sin t + \cos t)$;

57) $x = C_1e^t\,(\sin 2t + \cos 2t) - 2C_2e^t\sin 2t + 1,\ y = C_1e^t\sin 2t + C_2e^t\,(\cos 2t - \sin 2t) + e^{-t}$;

58) $x = 2C_1e^{-3t} + C_2\,(2t+1)\,e^{-3t} + te^{2t},\ y = t - 2C_1e^{-3t} - 2C_2te^{-3t} - e^{2t}$;

59) $x = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} + \sin t,\ y = C_1e^{2t} + 2C_2e^{-t}$;

60) $x = C_1e^t\sin t + C_2e^t\cos t + e^t\sin t,\ y = -C_1e^t\cos t + C_2e^t\sin t$;

61) $x = C_1e^t + C_2\,(1-t)\,e^t + \sec t,\ y = 2C_1e^t + C_2\,(1-2t)\,e^t + \cos t$;

62) $x = C_1e^{-2t} + C_2e^t + 1,\ y = 3C_1e^{-2t} - e^{-2t}\ln t$;

63) $x = C_1\cos 2t - C_2\sin 2t - \dfrac{e^t}{t},\ y = 2C_1\sin 2t + 2C_2\cos 2t - \dfrac{e^t}{t^2}$;

64) $x = C_1 - C_2e^t + t\ln t,\ y = -3C_1 + 2C_2e^t - \ln t$;

65) $x = C_1 + C_2\,(2t+1) + t^2,\ y = -C_1 - C_2\,(2t-1) - t\ln t$;

66) $x = C_1e^{-2t} - (t+1)\,C_2e^{-2t} + t,\ y = C_1e^{-2t} - C_2te^{-2t} + \arctan t$;

67) $x = C_1 + 2C_2t + C_3t^2 - 3t^2,\ y = C_2 + C_3t,\ z = C_3 + 2\ln t$;

68) $x = C_1e^t + t^2e^t,\ y = C_2e^t + C_3te^t - 1,\ z = C_3e^t + \sin t$;

69) $x = C_1 e^{-t} + \dfrac{1}{t},\ y = C_2 \cos t - C_3 \sin t - t^2,\ z = C_2 \sin t + C_3 \cos t + \ln t;$

70) $x = C_2 e^t (\sin t - \cos t) + C_3 e^t (\sin t + \cos t),\ y = -C_1 e^{-t} + C_2 e^t (\cos t - \sin t) - C_3 e^t (\sin t + \cos t) - \dfrac{1}{t},\ z = C_1 e^{-t} + C_2 e^t \cos t - C_3 e^t \sin t + \tan t;$

Матричные функции

71) $\begin{pmatrix} e^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$; **72)** $\begin{pmatrix} e^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$; **73)** $\begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ e^{-2} & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **74)** $\begin{pmatrix} e^3 & e^3 & \dfrac{e^3}{2} \\ 0 & e^3 & e^3 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$;

75) $\begin{pmatrix} e^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$; **76)** $\begin{pmatrix} 0 & -e^{-2} & 0 \\ e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{pmatrix}$; **77)** $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ e^J = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$;

78) $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix},\ e^J = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ e^{-1} & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$; **79)** $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ e^J \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ e^{-2} & e^{-2} & 0 \\ \dfrac{e^{-2}}{2} & e^{-2} & e^{-2} \end{pmatrix}$;

80) $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix},\ e^J \begin{pmatrix} e^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-4}\cos 3 & -e^{-4}\sin 3 \\ 0 & e^{-4}\sin 3 & e^{-4}\cos 3 \end{pmatrix}$; **81)** $\begin{pmatrix} -\sin 1 & \cos 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 1 & -\sin 1 \end{pmatrix}$;

82) $\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **83)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

84) $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \cosh(J) = \begin{pmatrix} \cosh 5 & -\sinh 5 & \dfrac{\cosh 5}{2} & 0 \\ 0 & \cosh 5 & -\sinh 5 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cosh 1 \end{pmatrix}$;

85) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ \exp(J) = \begin{pmatrix} e^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e\cos 3 & -e\sin 3 \\ 0 & 0 & e\sin 3 & e\cos 3 \end{pmatrix}$;

86) $\begin{pmatrix} \sec t & 0 & 0 & 0 \\ t\sec t\tan t & \sec t & 0 & 0 \\ \dfrac{t^2}{2}\sec t\left(\sec^2 t + \tan^2 t\right) & t\sec t\tan t & \sec t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sec t \end{pmatrix}$;

87) $\begin{pmatrix} \arctan 2t & \dfrac{t}{4t^2+1} & 0 & 0 \\ 0 & \arctan 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \arctan 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \arctan 2t \end{pmatrix}$;

88) $\begin{pmatrix} \cos 3t & t\sin 3t & -\dfrac{t^2}{2}\cos 3t & -\dfrac{t^3}{6}\sin 3t \\ 0 & \cos 3t & t\sin 3t & -\dfrac{t^2}{2}\cos 3t \\ 0 & 0 & \cos 3t & t\sin 3t \\ 0 & 0 & 0 & \cos 3t \end{pmatrix}$;

89) $P = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f(Jt) = \begin{pmatrix} \cot 4t & -t\operatorname{cosec}^2 4t & 0 & 0 \\ 0 & \cot 4t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cot 4t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cot 4t \end{pmatrix}$;

90) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $f(Jt) = \begin{pmatrix} \operatorname{arsinh} 2t & \dfrac{t}{\sqrt{1+4t^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{arsinh} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{arsinh} 2t & \dfrac{t}{\sqrt{1+4t^2}} \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{arsinh} 2t \end{pmatrix}$;

Теория устойчивости.

Устойчивость по Ляпунову, устойчивость по первому приближению

91) $y = 0$ – неуст.; **92)** $y = -1$ – уст., $y = 1$ – неуст.; **93)** $y = 0$ – неуст.; **94)** $y = -1$ – неуст.; **95)** $y = 3$ – уст., $y = -1$ – неуст.; **96)** $y = 1$ – неуст.; **97)** $y = 0$ – неуст.; **98)** $y = 1$ – неуст.; **99)** $y = 0$ – неуст.; **100)** $y = 0$ – неуст.; **101)** $y = 0$ – уст.; **102)** $y = -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ – уст., $y = -\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}$ – неуст.; **103)** $y = -\pi, 0, \pi$ – стац.; **104)** $y = -\pi, 0, \pi$ – уст.; **105)** $y = -\pi, 0, \pi$ – стац.; **106)** $y = -\pi, 0$ – уст., $y = -1, \pi$ – неуст.; **107)** $y = \pi$ – уст., $y = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ – неуст.; **108)** $y = \dfrac{\pi}{2}$ – неуст.; **109)** $y = 0$ – уст.; **110)** $y = 0$ – неуст.; **111)** $M_0(0,0)$ – уст., $M_1(1,1)$ – неуст.; **112)** $M_1(-1,1)$ – неуст., $M_2(1,-1)$ – неуст.; **113)** $M_0(0,0)$ – неуст., $M_1(0,1)$ – неуст.; **114)** $M_1(0,-1)$ – неуст., $M_2(1,0)$ – уст.; **115)** $M_1(-2,-1)$ – неуст., $M_2(-2,1)$ – уст., $M_3(2,-1)$ – уст., $M_4(2,1)$ – неуст.; **116)** $M_0(0,0)$ – уст.; **117)** $M_0(0,0)$ – неуст., $M_1(-2,-2)$ – неуст.; **118)** $M_0(0,0)$ – уст.; **119)** $M_1\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ – уст., $M_2\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ – неуст.; **120)** $M_0(0,0)$ – неуст.; **121)** $M_0(0,0,0)$ – неуст., $M_1(0,1,0)$ – неуст., $M_2(1,0,1)$ – неуст., $M_3(1,1,1)$ – уст.; **122)** $M_0(0,0,0)$ – стац., $M_1(-2,-4,-4)$ – уст., $M_2(2,-4,4)$ – неуст.; **123)** $M_1(-1,-1,1)$ – неуст., $M_2(0,0,1)$ – неуст.; **124)** $M_1\left(-\dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ – неуст., $M_2\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}\right)$ – неуст.; **125)** $M_0(0,0,0)$ – уст.; **126)** $M_0(0,0,0)$ – неуст.; **127)** $M_0(0,0,0)$ – уст.; **128)** $M_0(0,0,0)$ – неуст.; **129)** $M_0(0,0,0)$ – уст.; **130)** $M_0(0,0,0)$ – уст.;

Классификация точек покоя

131) $M_1(1,2)$ – седл.; **132)** $M_1(2C,-C)$ – сход. сем. пар. пр.; **133)** $M_1(-2,2)$ – уст. фокус; **134)** $M_1(3,3)$ – уст. узел; **135)** $M_1(4,1)$ – седл.; **136)** $M_1(1,1)$ – уст. фокус; **137)** $M_1(4,-4)$ – седл.; **138)** $M_1(4,-4)$ – неуст. узел; **139)** $M_1(-1,1)$ – расход. сем. пар. пр.; **140)** $M_1(-1,1)$ – седл.; **141)** $M_1(-1,1)$ – неуст. фокус, $M_2(1,-2)$ – уст. фокус; **142)** $M_1(0,-1)$ – сход. сем. пар. пр., $M_2(-1,1)$ – неуст. фокус; **143)** $M_0(0,0)$ – центр, $M_1(3,3)$ – центр; **144)** $M_1(0,3)$ – уст. вырожд. узел, $M_2(3,-3)$ – неуст. фокус; **145)** $M_1(-2,-2)$ – седл., $M_2(0,2)$ – уст. дикрит. узел; **146)** $M_1 = (0,2)$ – неуст. вырожд. узел, $M_2(-3,-1)$ – неуст. узел; **147)** $M_1(-2,3)$ – уст. узел,

$M_2(-1,-1)$ – седл.; **148)** $M_1(0,2)$ – центр, $M_2(-2,0)$ – неуст. фокус; **149)** $M_1(1,-3)$ – неуст. узел, $M_2(0,-2)$ – уст. вырожд. узел; **150)** $M_1(3,-2)$ – седл., $M_2(-1,0)$ – уст. дикрит. узел; **151)** $M_1\left(0,\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$ – седл. ($k\geq 0$), узел ($k\%2=0$ – уст., $k\%2=1$ – неуст.), $M_2(C,0)$ – расх. сем. пар. пр. **152)** $M_1(-1,-\pi)$ – седл., $M_2(-1,\pi)$ – центр, $M_3(1,-\pi)$ – центр, $M_4(1,\pi)$ – седл. **153)** $M_1(C,0)\,,C\neq 0$ – сем. пар. пр. (сх. при $C<0$, расх. при $C>0$) **154)** $M_1\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k,0\right)$ – седл. ($k>0,\ k\%2=1$ или $k<0,\ k\%2=0$), узел ($k>0,\ k\%2=0$ – неуст., $k<0,\ k\%2=1$ – уст.) **155)** $M_0(0,0)$ – сход. сем. пар. пр. **156)** $M_0(0,0)$ – неуст. дикрит. узел **157)** $M_0(0,0)$ – уст. узел **158)** $M_1(-1,-1)$ – седл., $M_2(1,-1)$ – уст. узел **159)** $M_1\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k,0\right),\ k\in\mathbb{Z}$ – седл. ($k>0,\ k\%2=0$ или $k<0,\ k\%2=1$), узел ($k<0,\ k\%2=0$ – уст., $k>0,\ k\%2=1$ – неуст.) **160)** $M_1(\pi k,\pi k)\,,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ – сход. сем. пар. пр.

Критерий устойчивости уравнений с постоянными коэффициентами

161) уст.; **162)** уст.; **163)** уст.; **164)** уст.; **165)** уст.; **166)** уст.; **167)** неуст.; **168)** уст.; **169)** неуст.; **170)** неуст.; **171)** уст.; **172)** уст.; **173)** неуст.; **174)** неуст.; **175)** неуст.; **176)** неуст.; **177)** уст.; **178)** уст.; **179)** уст.; **180)** неуст.; **181)** $-20<a<0$; **182)** $0<a<1$; **183)** $3a+5<0$; **184)** $a>1$; **185)** $a>0,\ 2b>3a$; **186)** неуст.; **187)** $b<0,\ 5a<b$; **188)** $b>0,\ a>b$; **189)** $a<0,\ b<0,\ ab+6>0$; **190)** $a<0,\ b>0,\ ab+9<0$; **191)** $a<0,\ ab+10<0$; **192)** $b<0,\ a>-2b$; **193)** $b<0,\ 3a-b+9<0$; **194)** $b>0,\ a^2+5a+25b<0$; **195)** $b>0,\ 2a>3,\ 6a-4b-9>0$; **196)** $a>0,\ 4-6b+ab^2<0$; **197)** неуст.; **198)** $2a<-1,\ 2a^2+2a+1+ab<0$; **199)** неуст.; **200)** $a>0, 14-10a+5a^2-3b-3ab+ab^2<0$;

Краевые задачи.

Краевые задачи, метод подстановки

201) $y=0$; **202)** $y=x$; **203)** $y=e^x-1$; **204)** $y=2e^x-e^{2x}$; **205)** $y=e^{3x}+e^x$; **206)** $y=e^{2x}-3e^{-x}$; **207)** $y=e^{3x}-9e^{-2x}$; **208)** $y=e^{2x}(1-x)$; **209)** $y=e^x-5e^{-x}$; **210)** $y=4\sinh 2x-2e^{-2x}$; **211)** $y=\cos x$; **212)** $y=2\cos 2x$; **213)** $y=2e^x(\cos x+\sin x)$; **214)** $y=e^x(\cos 2x+\sin 2x)$; **215)** $y=(x-1)^2$; **216)** $y=e^x+x$; **217)** $y=e^x(x+1)-2e^{-x}$; **218)** $y=1-\sin x$; **219)** $y=\sin 2x+e^{4x}$; **220)** $y=\dfrac{2}{\pi}\cdot\cos 2x-\dfrac{1}{\pi}\cdot\sin 2x+\dfrac{\pi^2}{x}$; **221)** $y=x+\dfrac{1}{x}$; **222)** $y=x^2-x+1$; **223)** $y=e^x-x$; **224)** $y=3xe^{-x}-e^x$; **225)** $y=\cos x+4\tan x-\sec x$; **226)** $y=\sin 2x-x+1$; **227)** $y=2\cosh x-x$; **228)** $y=2\ln x+e^{-x}+1$; **229)** $y=x^2+x+2\arctan x$; **230)** $y=2x\ln x+x+e^x$; **231)** $y^2=4\ln x$; **232)** $e^{-y}=(x+1)^2$; **233)** $y\sinh y=x$; **234)** $x^2\ln y=x^2-e^2\ln x$; **235)** $y=1$; **236)** $\tan y=C_1\tan x+C_2$; **237)** $e^y=(e-1)\cdot xe^x+1$; **238)** $\sin y=1-\ln x$; **239)** $y^2=4\arctan x-2$; **240)** $xe^{y-x}=1$;

Функции Грина

241) $w=x,\ \mu=\dfrac{1}{x},\ (xu',v')+\left(\dfrac{u}{x},v\right)=0,\ u=x;$

242) $w=x,\ \mu=\dfrac{e^x}{x^2},\ \left(\dfrac{e^x}{x}u',v'\right)+\left(\dfrac{e^x}{x^2}u,v\right)=0,\ u=x;$

243) $w=x+e^x,\ \mu=\dfrac{1}{(2x-1)^2},\ \left(\dfrac{u'}{2x-1},v'\right)+\left(\dfrac{2x-3}{(2x-1)^2}u,v\right)=0,\ u=x+e^x;$

244) $w=1,\ \mu=\dfrac{1}{x^4},\ \left(\dfrac{u'}{x^2},v'\right)-2\left(\dfrac{u}{x^4},v\right)=-\left(\dfrac{2}{x^4},v\right),\ u=x^2-x+1;$

245) $w = 2 - x,\ \mu = \dfrac{1}{x^2 (x-4)^2},$
$\left(\dfrac{u'}{x(x-4)}, v'\right) - 2\left(\dfrac{u}{x^2 (x-4)^2}, v\right) = 4\left(\dfrac{1}{x^2 (x-4)^2}, v\right),\ u = x^2 - 2x + 2$;

246) $w = x + 2,\ \mu = \dfrac{x-1}{x^2},$
$\left(\dfrac{(x-1)^2}{x}u', v'\right) + \left(\dfrac{(x-1)}{x^2}u, v\right) = \left(\left(3 + \dfrac{1}{x^2}\right)(1-x), v\right),\ u = x^2 + x + 1$;

247) $w = \cos x,\ \mu = \operatorname{cosec}^3 x,$
$\left(u' \operatorname{cosec}^3 x, v'\right) - \left((2 + \cos 2x) \cdot u \operatorname{cosec}^5 x, v\right) = 0,\ u = \sin 2x + \cos x$;

248) $w = 2x - 1 - e^x,\ \mu = \dfrac{e^{-x}}{x^2 (x-2)^2},$
$\left(\dfrac{e^{-x}}{x(x-2)}u', v'\right) - 2\left(\dfrac{e^{-x}(x-1)}{x^2 (x-2)^2}u, v\right) = \left(\dfrac{e^{-x}(x^2 - 2x + 2)}{x^2 (x-2)^2}, v\right),\ u = x^2 + x - e^x - 1$;

249) $w = x + 2,\ \mu = \dfrac{1}{(xe^x + 1)^2},\ \left(\dfrac{u'}{xe^x + 1}, v'\right) - \left(\dfrac{e^x}{(xe^x + 1)^2}u, v\right) = 0,\ u = x + 2;$

250) $w = x + \ln x,\ \mu = \dfrac{1}{x^4 (\ln x - 1)^2},$
$\left(\dfrac{u'}{x^2 (\ln x - 1)}, v'\right) - 2\left(\dfrac{\ln x}{x^4 (\ln x - 1)^2}u, v\right) = \left(\dfrac{2\ln^2 x - 5\ln x + x + 2}{x^4 (\ln x - 1)^2}, v\right),\ u = x\ln x + 1$;

251) $\mu = 1,\ y = 1 - x + xe^x$; **252)** $\mu = e^{-x},\ y = e^x + 1 + x^2 + x$; **253)** $\mu = 1,\ y = \sinh x + xe^x$;
254) $\mu = e^{-3x},\ y = \left(x^2 + 1\right) \cdot e^x - e^{2x}$;
255) $\mu = e^{-2x},\ y = x \cdot (e^x + 1) + e^{2x}$; **256)** $\mu = e^{-x},\ y = (x+1) \cdot e^{2x}$; **257)** $\mu = 1,\ y = (x+1) \cdot \cosh 2x$;
258) $\mu = e^{-4x},\ y = (x-1)^2 e^{2x} + x$; **259)** $\mu = e^{-2x},\ y = e^x - 2xe^x + x\cosh x$;
260) $\mu = 1,\ y = \cos x + \cosh x$; **261)** $\mu = 1,\ y = x\sin x - \cos x$; **262)** $\mu = e^{-2x},\ y = e^x \cos x + x + 1$;
263) $\mu = e^{-2x},\ y = e^x \cos 2x - \sin x + 2\cos x$; **264)** $\mu = e^{-2x},\ y = (\cos 2x + \sin 2x + x)\, e^x$;
265) $\mu = e^{2x},\ y = (\cos x + 1)\, e^{-x}$; **266)** $\mu = e^{4x},\ y = (\sin x - \cos x) \cdot e^{-2x} + xe^x$;
267) $\mu = e^{-2x},\ y = e^{-x} \sin 2x + x^2$; **268)** $\mu = e^{6x},\ y = e^{-x} \sin 2x + x^2$;
269) $\mu = 1,\ y = \cos 2x - \sin 6x + \tan x$; **270)** $\mu = e^{-6x},\ y = 2 \cdot e^{3x} \sin 2x + (2\sin x - \cos x) \cdot e^{-x}$;
271) $\mu = \dfrac{1}{x^4},\ y = x^3 + 1 - \dfrac{2}{x}$; **272)** $\mu = \dfrac{1}{x},\ y = x + 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$; **273)** $\mu = \dfrac{1+x}{x^2},\ y = x^2 + x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$;
274) $\mu = \dfrac{1}{x^2 (\ln x - 1)^2},\ y = x^2 + x - 1$; **275)** $\mu = \dfrac{xe^{-x}}{(x+1)^2},\ y = -e^x + 1 + \dfrac{1}{x}$; **276)** $\mu = \dfrac{e^{-x}}{1 - 2x}.\ y = x^2 + e^{2x}$;
277) $\mu = \sec^3 x,\ y = \cos x + 1$; **278)** $\mu = \dfrac{\sec x}{(x - \tan x)^2},\ y = x^2 + x + \sin x$; **279)** $\mu = \dfrac{1}{(2x-1)^2},\ y = x + e^x$;
280) $\mu = \dfrac{1}{(\ln x + 1)^2},\ y = x + 2\ln x + \dfrac{4}{x}$;

Нелинейные системы уравнений. Уравнения с частными производными.

Нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

281) $tx - t^2 = C_1,\ y - t^2 = C_2$; **282)** $xy = C_1,\ x - t^2 = C_2$; **283)** $\dfrac{x}{t} - 2t = C_1,\ ty^2 - 3t = C_2$;
284) $\dfrac{x^2}{y} = C_1,\ y^2 - t = C_2$; **285)** $2t + x^2 y = C_1,\ y - 3t^2 = C_2$;

286) $\dfrac{x}{y} - 3t = C_1,\ 2t^2 + xy = C_2;$ **287)** $xe^y = C_1,\ ty + x^2 = C_2;$

288) $xy^2 - t = C_1,\ x^2 + y - 2t = C_2;$ **289)** $xe^y - t = C_1,\ y + \dfrac{x}{t} = C_2;$

290) $x\sin y = C_1,\ x^2 - 2ty = C_2;$ **291)** $t\sin x - y = C_1,\ y^2 - 3t = C_2;$

292) $ye^x - e^t = C_1,\ t^2 + xy = C_2;$ **293)** $ty + x = C_1,\ z - t = C_2,\ x^2 - 2tz = C_3;$

294) $\tan y - t = C_1,\ yz = C_2,\ x^2 - y^2 = C_3;$ **295)** $xy - t^2 = C_1,\ \dfrac{t}{x} + z = C_2,\ z^2 - 2ty = C_3;$

296) $z\sqrt{x^2+1} = C_1,\ y^2 - 2e^t = C_2,\ \dfrac{z}{y} = C_3;$ **297)** $xe^y - \sin t = C_1,\ z - x^2 = C_2,\ x + y = C_3;$

298) $x + y^2 = C_1,\ z^2 - 2te^t = C_2,\ xz + y = C_3;$

299) $x - t\sin y = C_1,\ 2tz + x^2 = C_2,\ z - tx = C_3;$ **300)** $ze^x = C_1,\ t - yz = C_2,\ z - ye^x = C_3;$

301) $uy - x = C_1,\ y - u = C_2;$ **302)** $y^2 - x = C_1,\ u^2 - x = C_2;$ **303)** $u + \dfrac{y}{x} = C_1,\ u^2 - x = C_2;$

304) $x + y^2 = C_1,\ u^2 - xy = C_2;$ **305)** $x^2 - u^2 = C_1,\ y^2 - x^2 = C_2;$ **306)** $\dfrac{u}{x} = C_1,\ \dfrac{u}{y} = C_2;$

307) $x - uy = C_1,\ \dfrac{u^2}{x} = C_2;$ **308)** $\dfrac{1}{y} - x = C_1,\ \dfrac{u}{x} + y = C_2;$ **309)** $\dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{x} = C_1,\ \dfrac{u}{x} + y = C_2;$

310) $uy + \dfrac{1}{u} = C_1,\ \dfrac{u}{x} = C_2;$ **311)** $y\sin x = C_1,\ u^2 - x = C_2;$ **312)** $x + y^2 = C_1,\ xe^y - u^2 = C_2;$

313) $e^{x+y} - 3u = C_1,\ u^2 - 2x = C_2;$ **314)** $\tan y - x^2 = C_1,\ ux - 5y = C_2;$

315) $\sin 2y - u = C_1,\ xe^u + 3y = C_2;$ **316)** $\ln|u + x| - y^2 = C_1,\ 2u + e^{3x} = C_2;$

317) $\arcsin x - u^2 = C_1,\ 2y^2 + \sqrt{x-1} = C_2;$ **318)** $5u + \sqrt[3]{x^2-4} = C_1,\ y^2 - 2e^u = C_2;$

319) $\tan\sqrt{x} - 3\sqrt{y+2} = C_1,\ u^2 - 3x = C_2;$ **320)** $e^{u-x} - x = C_1,\ y + \arctan\dfrac{u}{x} = C_2;$

321) $x + 2y = C_1,\ y^2 + 3z = C_2,\ 2u^2 - z = C_3;$ **322)** $x^2 - 2xy = C_1,\ y^2 - z^2 = C_2,\ uz - x = C_3;$

323) $\dfrac{x}{y} + z = C_1,\ u + xz = C_2,\ \dfrac{z}{x} - y = C_3;$ **324)** $xz + y = C_1,\ z^2 - 3x = C_2,\ u - 5xy = C_3;$

325) $e^z - x^2 = C_1,\ uy - z = C_2,\ y^2 - 3x^2 = C_3;$

326) $\sin xz - y = C_1,\ u^2 - 3z = C_2,\ u + 5x - 3z = C_3;$

327) $u + \dfrac{z}{x} = C_1,\ u^2 - 2xz = C_2,\ ye^{2x} - u = C_3;$

328) $z\arctan x - u = C_1,\ \dfrac{x}{y} = C_2,\ xz + y = C_3;$

329) $\dfrac{y}{x+1} - z = C_1,\ z^2 - xy = C_2,\ u^2 - 2y = C_3;$

330) $x\sin u - y = C_1,\ y^2 - z = C_2,\ z^2 - 2ux = C_3;$

Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка

331) $\Phi\left(u, x^2 - y^3\right) = 0;$ **332)** $\Phi\left(u, y^2 + \sin x\right) = 0;$ **333)** $\Phi\left(u + x^2, xy\right) = 0;$

334) $\Phi\left(u - xy, y^2 - e^{2x}\right) = 0;$ **335)** $\Phi\left(u + \sin x, \tan y - \cos x\right) = 0;$

336) $\Phi\left(u^2 - x, u + y^2\right) = 0;$ **337)** $\Phi\left(u^2 - \cos x, ux + y^2\right) = 0;$ **338)** $\Phi\left(u^2x - y^2, u + xy\right) = 0;$

339) $\Phi\left(x\ln u - y, x + \ln y\right) = 0;$ **340)** $\Phi\left(e^u - x^2, u - xy\right) = 0;$

341) $\Phi\left(ux + \sin u, u - \cos y\right) = 0;$ **342)** $\Phi\left(u^2 - u + x, x^2 - y^2 + \ln u\right) = 0;$

343) $\Phi\left(ux + y, \dfrac{y}{x} - u^2\right) = 0;$ **344)** $\Phi\left(u\sin x, u^2 - 5xy\right) = 0;$ **345)** $\Phi\left(ue^u + x^2, uy\right) = 0;$

346) $\Phi\left(u^3 - 4ux^2, \dfrac{e^y}{x}\right) = 0;$ **347)** $\Phi\left(u\arctan x - y^2, y + \dfrac{e^u}{x}\right) = 0;$

348) $\Phi\left(\dfrac{u}{x^2 - y}, \dfrac{u^2 + x}{y}\right) = 0;$ **349)** $\Phi\left(u, x^2 - y + z^2, x + z\right) = 0;$

350) $\Phi\left(u, yz + \sin x, y + z^2\right) = 0;$ **351)** $\Phi\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}, z\left(u^2 - x^2\right)\right) = 0;$

352) $\Phi\left(xy, uz, y^2 + z^2\right) = 0;$ **353)** $\Phi\left(u + x\sin y, x - z^2, xy\right) = 0;$

354) $\Phi\left(x\sec y, u^2(x - y), yz\right) = 0;$ **355)** $\Phi\left(u^2 + x, y^2 - z, xy + z^2\right) = 0;$

356) $\Phi\left(uz+y, x\sec z, uy^2\right)=0;$ **357)** $\Phi\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}, y^2-z^2, \dfrac{u-y}{x}\right)=0;$

358) $\Phi\left(\dfrac{xz}{y}, 4u^2(x+y), z(x+y)\right)=0;$ **359)** $\Phi\left(y\tan 2x, ze^u, y^2-5u^2\right)=0;$

360) $\Phi\left(u^4-e^y, ze^u, xy^2\right)=0;$ **361)** $\Phi\left(x\cos u-z, yz^2, x+y\right)=0;$

362) $\Phi\left(xe^{2u}, ye^{-uz}, x+z^2\right)=0;$ **363)** $\Phi\left(ue^{-x}+\ln y, x^2+\tan z, \dfrac{u}{z}\right)=0;$

364) $\Phi\left(y+z\tan x, y^2-u^2, ux+y\right)=0;$ **365)** $\Phi\left(z\arctan x, \dfrac{y}{z}, u^2+z^2\right)=0$

366) $\Phi\left(\dfrac{z}{x^2+1}, \dfrac{u}{y}, y^2-xz\right)=0;$ **367)** $\Phi\left(z\sin 2x-y^2, \dfrac{u}{x}, ux+z\right)=0;$

368) $\Phi\left(\dfrac{u}{x}-2\tan x, xy, 3u+z^2\right)=0;$ **369)** $\Phi\left(\dfrac{e^u}{x}-y^2, u-z^2, x-y+z\right)=0;$

370) $\Phi\left(u^2+\arcsin\dfrac{z}{2}, e^{2x}-3y, u-x+y\right)=0;$

Системы уравнений с частными производными

371) $u=x+y+C;$ **372)** $u=2y-x^2+C;$ **373)** $u=\sin x-\ln y+C;$ **374)** $u=xy+C;$
375) $u=\sin(x+y)+C;$ **376)** $u=3x^2y-2xy^2+C;$ **377)** $u=C-xe^u;$ **378)** $u=e^{2x}\ln y+C;$
379) $u=y\tan x-y^2+C;$ **380)** $u=\sec x\tan y+C;$ **381)** $u^2=2xy+C;$ **382)** $ux=y^2+C;$
383) $ux^2=xe^{-y}+C;$ **384)** $e^u=y\ln x+C;$ **385)** $xe^{-u}=y^2-2xy+C;$
386) $uxy-y^2-2e^{2x}+C;$ **387)** $y\sin u=2xy+C;$ **388)** $e^{ux}=\ln y+C;$
389) $u^2-2ux=C-xy^2;$ **390)** $u^3-3u^2+ux=y+C;$ **391)** $u=y^2-x+1;$
392) $u^2=2x-e^y;$ **393)** $uxy+1=0;$ **394)** $uy+x^2=xy;$ **395)** $e^u=x\ln y;$
396) $u\cos x=xy^2-1;$ **397)** $\ln(u+x)=xy^2+1;$ **398)** $\cos u=\sin x-xy+\pi-1;$
399) $ue^u=y^2-x+e;$ **400)** $ux\ln u=x^2-\ln y+1;$ **401)** $u=xy-z+C;$
402) $u=3xz^2-y^4+C;$ **403)** $u=xy^2z+Cx;$ **404)** $uz=x^2y+Cy;$ **405)** $uxy=z^4-y+C;$
406) $ue^z=C-x^3e^{-y};$ **407)** $ux+e^u=yz+C;$ **408)** $u\sin u=z^2-e^{xy}+C;$
409) $z\ln(u+x)=ye^x+C;$ **410)** $y\sin ux+z^2\ln y=C;$

Уравнения Пфаффа

411) $y^2-xz+\sin(x+y)=C;$ **412)** $xy-2y\ln x+z^2=C;$ **413)** $x^2+y\arctan z=C;$

414) $xy^2+\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{x}=C;$ **415)** $xz-\dfrac{y}{z^2}+\dfrac{y}{x}=C;$ **416)** $xz\cos z+y^2\sin x=C;$

417) $4xy-xz+\tan(y+z)=C;$ **418)** $2xe^y+\dfrac{x}{y}-z^2=C;$ **419)** $xy+xz+yz-xyz=C;$

420) $x\sin y+z^2e^x-2xyz=C;$ **421)** $xy\arcsin z-x^2-2\sqrt{1-z^2}=C;$

422) $xz+\dfrac{y}{z}=C,\ \mu=\dfrac{1}{z^2};$ **423)** $xy\ln z-z^2=C,\ \mu=\ln z;$ **424)** $xe^z+y^2z-xy=C,\ \mu=e^z;$

425) $2y^3\dfrac{z}{x^2}=C,\ \mu=\dfrac{y}{x^3};$ **426)** $z\ln xy=C,\ \mu=\dfrac{z}{xy};$ **427)** $x^2y-xy^2+z^2=C,\ \mu=xy;$

428) $xy^2-x^2z+\sin xy=C,\ \mu=xy;$ **429)** $x^2-xz^3+\dfrac{2z}{y^3}=C,\ \mu=\dfrac{x}{y};$

430) $\dfrac{4x^3}{y^2}-y+5z^2=C,\ \mu=\dfrac{1}{y^3x^2};$ **431)** $xz+y^2-z\ln(x+y)=C,\ \mu=\dfrac{x+y}{z};$

432) $\dfrac{x}{z^2}-2xe^{-y}-\dfrac{z}{x^2}=C,\ \mu=\dfrac{e^{-y}}{x^3z^3};$ **433)** $xz-ye^{y-x}=C,\ \mu=ye^{-x};$

434) $y\sin x+z\cos x-y^2z^2=C,\ \mu=\dfrac{\cos x}{z};$ **435)** $xy\cot z+x\sin z+y\cos z=C,\ \mu=z\cos z;$

436) $x^2+xz^2\sin y=C,\ \mu=xz\cos y;$ **437)** $\operatorname{arccot}\dfrac{z}{x}+\arctan\dfrac{y}{z}=C,\ \mu=\dfrac{1}{x^2+z^2};$

438) $ze^x + e^y - x^2yz = C,\ \mu = ze^{x+y}$; **439)** $\dfrac{y}{z} + \sqrt{x^2+z^2} = C,\ \mu = \dfrac{1}{z^2\sqrt{x^2+z^2}}$;

440) $x\sqrt{\dfrac{y}{z}+1} + z^2 = C,\ \mu = \dfrac{x}{\sqrt{yz+z^2}}$;

Нелинейные уравнения с частными производными первого порядка.

Метод Лагранжа-Шарпи

441) $u = C_1x + \left(C_1^2+1\right)y + C_2$; **442)** $C_1u = C_1\left(C_1^2-1\right)x + y + C_2$;
443) $u = x\left(1+3C_1^2\right)\sin C_1 + C_1y + C_2$; **444)** $C_1u = \left(1+C_1^2\right)x + C_1^2y + C_2$;
445) $u = x\cosh C_1 + y\sinh C_1 + C_2$; **446)** $e^{-x} = t \implies C_1u = C_1^2e^{-x} + (C_1+1)\,y + C_2$;
447) $u^3 = C_1x + 3y + C_2$; **448)** $u - C_1^2\ln(u+C_1) = C_1^2x + y + C_2$;
449) $\left(C_1^2+1\right)\arctan u = C_1^2x + C_1y + C_2$; **450)** $\left(C_1^2-1\right)\tan u = C_1x + y + C_2$;
451) $\dfrac{1-C_1}{u} = C_1^3x + C_1^2y + C_2$; **452)** $e^x = t \implies \left(1-C_1^2\right)\ln u = C_1^2e^x + C_1y + C_2$;
453) $3C_1u = C_1^2x^3 + y^3 + C_2$; **454)** $u = C_1\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) + C_2$; **455)** $u = C_1^2\sin x + C_1\cos y + C_2$;
456) $2C_1ux = C_1^2x^2 + y^2 + C_2$; **457)** $e^x = t,\ v = ut \implies C_1ue^x = C_1^2x + \ln y + C_2$;
458) $v = uy^2 \implies uy^2 = \left(1+C_1^2\right)\tan x + C_1\sin y + C_2$; **459)** $u = x + y$; **460)** $u = \dfrac{1}{1-x-y}$;
461) $e^u = x + y - 1$; **462)** $2\sqrt{1+u} = x + y$; **463)** $2\sqrt{1+u} + 2\,\mathrm{artanh}\sqrt{1+u} = x + y + 1$;
464) $u = 2\,(x+y) + 2\ln\dfrac{y-1}{x+1}$; **465)** $u = y^2$; **466)** $u = x - 2\ln x + \dfrac{y-1}{x} + y - 1$;

Обобщенное уравнение Клеро

467) $u = C_1x + C_2y + C_1C_2 + 1$; **468)** $u = C_1x^2 + C_2y + C_1^2 + 3C_2^2$;
469) $u = C_1e^x + C_2y + C_1C_2^2$; **470)** $u = C_1x + C_2y^2 + C_1^2 + 2C_1C_2 + 1$;
471) $u = C_1x + C_2e^y + 3e_1^C - 2C_2$; **472)** $u = C_1e^x + C_2y + C_1\cos 2C_2$;
473) $u = C_1\ln x + C_2y + 2C_1^2 + e^{-C_2}$; **474)** $u = C_1x + C_2\ln y + C_2^{C_1}$;
475) $u = C_1x^2 + C_2y^2 + \tan C_2 + \cot C_1$; **476)** $u^2 = C_1x + C_2y + C_2e^{C_1} + 1$;
477) $\ln u = C_1x + C_2y + 2C_1 + C_2\sin C_1$; **478)** $e^u = C_1x + C_2y + 3C_2^2 + \ln C_1$;
479) $e^u = C_1x^2 + C_2y + C_1\ln C_2 - 1$; **480)** $e^u = C_1e^x + C_2\ln y - \cos C_1\sin C_2$;
481) $u = C_1x + C_2xy + C_1C_2$; **482)** $u = C_1\,(x+y) + C_2e^y + 2C_1C_2 + 1$;
483) $u = C_1\dfrac{y}{x} + C_2xy - C_1C_2$; **484)** $ux = C_1xy + C_2y + C_1 + C_2$;
485) $ye^u = C_1x + C_2\dfrac{y}{x} + 3C_1C_2$; **486)** $\dfrac{u}{x} = C_1\dfrac{y}{x} + C_2xy + 2C_1 + C_2$;
487) $\dfrac{u}{y} = C_1\dfrac{y}{x} + C_2\cos y + C_1C_2$; **488)** $uxy = C_1\dfrac{x}{y} + C_2e^y + C_1 + C_2$;

Операционное исчисление. Преобразования Лапласа и Фурье.

Оператор свертки

489) t; **490)** $2t$; **491)** t^2; **492)** t^3; **493)** $\dfrac{t^4}{12}$; **494)** $e^t - t - 1$; **495)** $e^{2t} - e^t$;

496) $\dfrac{1}{2}\left(e^t - \sin t - \cos t\right)$; **497)** $\dfrac{t^2}{2}\,(2\ln t - 3)$;

498) $\dfrac{e}{2}\left(\sin(t+1) + \cos(t+1) - e^{-t}\sin 1 - e^{-t}\cos 1\right)$; **499)** $\dfrac{t\sqrt{t}}{15}\,(4t-10)$;

500) $2\cos 2t - 2\cos 3t$; **501)** $\cos t - \cosh t$; **502)** $\dfrac{t^3}{3}\ln 3t - \dfrac{11}{18}t^3$; **503)** $\dfrac{t^8}{280}$;

504) $\frac{1}{2}\left(t - t\ln\left(t^2+1\right) - \left(t^2-1\right)\arctan t\right)$; **505)** $\sqrt{1-t^2} + t\arcsin t - 1$;
506) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\pi}t\,\mathrm{erfi}\,t - e^{t^2} + 1\right)$; **507)** $t\,(2u(t)-1)$; **508)** $(t-1)^2u(t-1)$; **509)** $(2u(t)-1)\sin t^2$;
510) $u(t-2)\log_4(2t-4)$; **511)** $-u(-t-2)\arctan(t+2)$; **512)** $u(t)\,(1-\cos t)$;
513) $u(t-x)\sin(x-1)$; **514)** $(t-1)\cdot u(t-1)\cdot(\ln(t-1)-1)$; **515)** $u(t-1)\sin(t-1)$; **516)** 0;
517) 0; **518)** 0;

Преобразование Лапласа

519) $\frac{1}{s}$; **520)** $\frac{4}{s^2}$; **521)** $\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s}$; **522)** $\frac{1}{s-1}$; **523)** $\frac{1}{s-2} - \frac{24}{s^5}$; **524)** $\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}$;
525) $\frac{1}{s^2+1}$; **526)** $\frac{s}{s^2+4}$; **527)** $\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s}\right)$; **528)** $\frac{s}{s^2-4}$; **529)** $\frac{1}{(s+1)^2}$; **530)** $\frac{2}{(s+2)^3}$;
531) $\frac{2s}{(s^2+4)^2}$; **532)** $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+4}$; **533)** 2; **534)** e^{-s}; **535)** $\frac{1}{s}$; **536)** $\frac{e^{-s}}{s}$; **537)** $\frac{1}{s}\left(e^{-s} - e^{-3s}\right)$;
538) $\frac{1}{s}\left(e^{-s} - e^{-2s}\right)$; **539)** $\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s-1}$; **540)** $\frac{1}{s-1}\cdot\frac{2}{s^2+4}$; **541)** 0; **542)** $\frac{se^{-s}}{s^2+1}$;
543) $\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$; **544)** $\frac{1}{s-a}$; **545)** $e^{-as}f(a)$; **546)** $\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$; **547)** $e^{-as}\int\limits_0^\infty e^{-st}f(t+a)\,dt$;
548) $-F'(s)$; **549)** $(-1)^nF^{(n)}(s)$; **550)** $F(s-a)$; **551)** $\int\limits_s^\infty F(s)\,ds$; **552)** $\int\limits_s^\infty\cdots\int F(s)\,d^ns$;
553) $sF(s) - f(0)$; **554)** $s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$; **555)** $\frac{F(s)}{s}$;
556) $\frac{F(s)}{s^n}$; **557)** $F(s)\cdot G(s)$; **558)** $Y(s) = \frac{C_1}{s-1}$; **559)** $Y(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s-1}$;
560) $Y(s) = \frac{C_1}{s-1} + \frac{C_2}{s-2}$; **561)** $Y(s) = \frac{C_1}{s-1} + \frac{C_2}{s+1}$; **562)** $Y(s) = \frac{C_1s}{s^2+1} + \frac{C_2}{s^2+1}$;
563) $Y(s) = \frac{C_1}{s-1} + \frac{C_2}{(s-1)^2}$; **564)** $Y(s) = \frac{C_1}{s-1} + \frac{C_2}{s+5}$;
565) $Y(s) = \frac{C_1s}{(s+1)^2+1} + \frac{C_2}{(s+1)^2+1}$; **566)** $Y(s) = \frac{C_1s}{(s-1)^2+2^2} + \frac{C_2}{(s-1)^2+2^2}$;
567) $Y(s) = \frac{y(0)}{s-1} + \frac{1}{s^3-s^2}$; **568)** $Y(s) = \frac{y'(0)}{s^2-s} - \frac{y(0)}{s} + \frac{s^2+s+1}{s^5-s^3}$;
569) $Y(s) = \frac{4y(0)-2y'(0)-1}{2\,(s-1)} + \frac{5y'(0)-5y(0)+4}{5\,(s-2)} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{3s+1}{10\,(s^2+1)}$;
570) $Y(s) = \frac{2y(0)+2y'(0)-1}{4\,(s-1)} + \frac{2y(0)-2y'(0)+5}{4\,(s+1)} + \frac{1}{2\,(s-1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2}$;

Обратное преобразование Лапласа

571) 1; **572)** e^{-t}; **573)** $\delta(t)$; **574)** $\delta(t-1)$; **575)** t; **576)** $\sin t$; **577)** $\sinh t$; **578)** $\cos t$;
579) $t - \sin t$; **580)** $e^t + e^{2t}$; **581)** $2e^{-2t}\,(3\cos 3t - 2\sin 3t)$; **582)** $\frac{1}{7}\left(12e^{5t} - 5e^{-2t}\right)$;
583) $\frac{1}{12}\left(5e^{2t} - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t + 7\cos\sqrt{3}t\right)$; **584)** $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{t}}$; **585)** $u(t-1)$; **586)** $u(t-1)e^{-t+1}$;
587) $t - (t-1)\cdot u(t-1)$; **588)** $\frac{e^{-t+2}}{\sqrt{3}}\cdot u(t-2)\cdot\sin\sqrt{3}(t-2)$; **589)** $\sin t * \sinh t$; **590)** $-t\cos t$;
591) $\sin t - te^{-t}$; **592)** $\left(2\cos(t-1) - \sin(t-1)\right)\cdot u(t-1)$;

593) $\dfrac{u(t-1)}{4}\left(e^{-t+1}+\sin 2(t-1)-\cos 2(t-1)\right)$; **594)** $\dfrac{1}{t}\left(2\cos t-e^{-t}\right)$; **595)** $\dfrac{1}{t}\left(1-e^{t}\right)$;
596) $\dfrac{1}{t}\sin t$; **597)** $C\delta(t)$; **598)** $\dfrac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$; **599)** $f(t-a)\cdot u(t-a)$; **600)** $f(t)\cdot g(t)$;
601) $f'(t)+\delta(t)\cdot f(0)-\delta(0)\cdot f(t)$; **602)** $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$; **603)** $-tf(t)$; **604)** $\dfrac{f(t)}{t}$;
605) $y=1+2t+\dfrac{t^2}{2}$; **606)** $y=3\cos t-2$; **607)** $y=2e^{-t}+e^{2t}$; **608)** $y=t\cosh t$;
609) $y=\dfrac{1}{2}\left(t^2-t+1\right)e^{-t}+\dfrac{1}{2}\cosh t$; **610)** $y=(t-1)^3+(t-2)e^{t-1}$; **611)** $y=1$; **612)** $y=t$;
613) $y=\cosh t$; **614)** $e^t=x \implies y=\left(\sqrt{t}-1\right)^2+\sqrt{t}\ln t$; **615)** $y=u(t-1)$;
616) $y=\delta(t-1)\cdot u(t-1)$; **617)** $y=\left(t+2t^3\right)e^{-t}$; **618)** $y=1-e^{-t}$;
619) $y=\dfrac{1}{2}(\cos 1\sin t-t\cos t-1)$; **620)** $y=\dfrac{1}{4}e^{-t}+\dfrac{1}{4}\left(2t^2-2t+11\right)e^{t}-2$;
621) $y=2u(t-1)(t-1)^2$; **622)** $y=(t-1)e^{2-t}-2\sin(t-2)+\cos(t-2)+2t-6$;

Преобразование Фурье

Положим $\hat\omega=2\pi\omega$.
623) $-i\pi\delta(\hat\omega)$; **624)** $-\pi\hat\omega\operatorname{sgn}\hat\omega$; **625)** $\pi e^{-|\hat\omega|}$; **626)** $\dfrac{2}{1+\hat\omega^2}$; **627)** $\sqrt{\pi}e^{-\frac{\hat\omega^2}{4}}$; **628)** $\dfrac{1}{2}i\hat\omega\sqrt{\pi}e^{-\frac{\hat\omega^2}{4}}$;
629) $\dfrac{i^n\pi}{\Gamma(n)}\hat\omega^{n-1}\operatorname{sgn}\hat\omega$; **630)** $\dfrac{\pi}{a}e^{-|a\hat\omega|}\cdot\operatorname{sgn}a$; **631)** $\dfrac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{\hat\omega^2}{4a^2}}\cdot\operatorname{sgn}a$; **632)** $\dfrac{2\,|a|}{a^2+\hat\omega^2}$; **633)** $i\hat\omega F(\omega)$;
634) $(i\hat\omega)^n F(\omega)$; **635)** $F(\omega,t)$; **636)** $\dfrac{\partial F}{\partial t}(\omega,t)$; **637)** $i\hat\omega F(\omega,t)$; **638)** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}(\omega,t)$;
639) $-\hat\omega^2F(\omega,t)$; **640)** $i\hat\omega\dfrac{\partial F}{\partial t}(\omega,t)$; **641)** $i\pi\big(\delta(\hat\omega-1)-\delta(\hat\omega+1)\big)$;
642) $2\pi\big(\delta(\hat\omega-1)+\delta(\hat\omega+1)\big)+i\pi\big(\delta(\hat\omega-1)-\delta(\hat\omega+1)\big)$;
643) $i\pi\big(2\delta(\hat\omega+3)-2\delta(\hat\omega-3)+\delta(2\hat\omega+1)-\delta(2\hat\omega-1)\big)$;
644) $2\pi\big(\delta(\hat\omega-3)+\delta(\hat\omega-3)\big)+\dfrac{i\pi}{2}\big(\delta(\hat\omega-2)-\delta(\hat\omega+2)+6\delta(\hat\omega-1)-6\delta(\hat\omega+3)\big)$; **645)** 1;
646) $\cos\hat\omega t+i\sin\hat\omega t$; **647)** $\dfrac{2}{\hat\omega}\sin\dfrac{\hat\omega}{2}$; **648)** $\dfrac{i}{\hat\omega}\left(1-e^{i\hat\omega}\right)$; **649)** $\pi\delta(\hat\omega)+\dfrac{i}{\hat\omega}$; **650)** $\pi\delta(\hat\omega)+\dfrac{i}{\hat\omega}e^{i\hat\omega}$;
651) $\dfrac{i}{\hat\omega}\left(1-e^{i\hat\omega}\right)^2$; **652)** $\dfrac{\left(1+e^{i\pi\hat\omega}\right)}{1-\hat\omega^2}$; **653)** $\left(e^{i\hat\omega}+1\right)\cdot(\operatorname{Ci}2\hat\omega-\operatorname{Ci}\hat\omega+i\operatorname{Si}2\hat\omega-i\operatorname{Si}\hat\omega)$; **654)** TBS
;

Обратное преобразование Фурье

655) $u(t,x)=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\hat\omega x-\hat\omega^2t-|\hat\omega|}\,d\hat\omega$; **656)** $u(t,x)=4\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\hat\omega x-4\hat\omega^2t-|\hat\omega|}\cdot\dfrac{1}{16\pi^2+\hat\omega^2}\,d\hat\omega$;
657) $u(t,x)=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\hat\omega x-\hat\omega^2t-|\hat\omega|}\,d\hat\omega$; **658)** $u(t,x)=\sin x\cdot\left(1-t-\dfrac{1}{2}\cosh t\right)$; **659)** TBS ;
660) TBS ;