НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
МИЭТ

В. А. Гончаров

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ВУЗОВ

Допущено Учебно-методическим объединением в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям 010501(010200) «Прикладная математика и информатика» (специалист), 230105(220400) «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» (специалист), 010500(510200) «Прикладная математика и информатика» (бакалавр), 010200(511200) «Математика. Прикладная математика» (бакалавр), 011000(511300) «Механика. Прикладная математика» (бакалавр), 010300(511800) «Математика. Компьютерные науки» (бакалавр)

Книга доступна в электронной библиотечной системе biblio-online.ru

Москва • Юрайт • 2014

УДК 51
ББК 22.193-018.2*32.973я73
Г57

Настоящая методическая разработка выполнена в рамках инновационной образовательной программы МИЭТ «Современное профессиональное образование для российской инновационной системы в области электроники»

Гончаров, В. А.

Г57 Методы оптимизации : учеб. пособие для вузов / В. А. Гончаров. — М. : Издательство Юрайт ; ИД Юрайт, 2014. — 191 с. — Серия : Бакалавр. Базовый курс.

ISBN 978-5-9916-1265-4 (Издательство Юрайт)
ISBN 978-5-9692-1179-7 (ИД Юрайт)

Пособие посвящено систематическому изложению основ методов оптимизации и имеет прикладную инженерно-техническую направленность. Основное внимание уделено прикладным и вычислительным аспектам оптимизации, связанным с разработкой численных методов решения задач и построением алгоритмов их реализации.

Для студентов, обучающихся по специальностям 010501 (010200) «Прикладная математика и информатика» (специалист), 230105 (220400) «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» (специалист), 010500 (510200) «Прикладная математика и информатика» (бакалавр), 010200 (511200) «Математика. Прикладная математика» (бакалавр), 011000 (511300) «Механика. Прикладная математика» (бакалавр), 010300 (511800) «Математика. Компьютерные науки» (бакалавр), однако в силу актуальности рассматриваемых вопросов будет полезным и для студентов, специализирующихся в смежных областях.

УДК 51
ББК 22.193-018.2*32.973я73

ISBN 978-5-9916-1265-4
(Издательство Юрайт)
ISBN 978-5-9692-1179-7
(ИД Юрайт)

Оглавление

Предисловие **5**

Глава 1. Задачи оптимизации. Основные определения **6**

1.1. Задачи оптимизации 6
1.2. Минимум функции одной переменной 9
1.3. Унимодальные функции 10
1.4. Выпуклые функции 12
1.5. Условие Липшица 15
1.6. Классическая минимизация функции одной переменной 17

Глава 2. Одномерная минимизация функций. Прямые методы 20

2.1. О прямых методах 20
2.2. Метод перебора 21
2.3. Метод поразрядного поиска 22
2.4. Метод дихотомии 24
2.5. Метод золотого сечения 27
2.6. Сравнение методов перебора, дихотомии и золотого сечения 30
2.7. Метод парабол 31

Глава 3. Одномерная минимизация. Методы, использующие информацию о производных целевой функции **37**

3.1. Метод средней точки 37
3.2. Метод хорд 39
3.3. Метод Ньютона 42
3.4. Возможные модификации метода Ньютона 47
3.5. Методы минимизации многомодальных функций 48

Глава 4. Задача минимизации функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия безусловного экстремума **57**

4.1. Постановка задачи и определения 57
4.2. Свойства выпуклых множеств и выпуклых функций 62

4.3. Необходимые и достаточные условия безусловного экстремума 64

Глава 5. Общие принципы многомерной минимизации. Методы градиентного спуска. Метод сопряженных направлений и метод Ньютона **74**

5.1. Выпуклые квадратичные функции 74
5.2. Общие принципы многомерной минимизации 76
5.3. Метод градиентного спуска 80
5.4. Метод наискорейшего спуска 84
5.5. Метод сопряженных направлений 86
5.6. Метод сопряженных градиентов 90
5.7. Метод Ньютона 93
5.8. Квазиньютоновские методы 95

Глава 6. Прямые методы безусловной минимизации многомерных задач **101**

6.1. Проблема минимизации многомерных задач 101
6.2. Минимизация функций по правильному (регулярному) симплексу 104
6.3. Минимизация функций при помощи нерегулярного симплекса 111
6.4. Метод циклического покоординатного спуска 113
6.5. Метод Хука – Дживса 117
6.6. Методы случайного поиска 119

Глава 7. Условный экстремум функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия условного экстремума **124**

7.1. Условный экстремум при ограничениях типа равенств 124
7.2. Условный экстремум при ограничениях типа неравенств 140

Глава 8. Линейное программирование **153**

8.1. Определения. Примеры задач линейного программирования 153
8.2. Общая и каноническая задачи линейного программирования 156
8.3. Геометрическое истолкование задач линейного программирования 158
8.4. Аналитическое решение задач линейного программирования 163

Литература 191

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие построено на материалах, используемых при чтении одноименного курса лекций, практических занятий и лабораторно-вычислительного практикума, которые проводятся автором в Московском институте электронной техники, и учитывает специфику математической подготовки студентов различных вузов.

Автор попытался создать учебное пособие, которое охватывало бы основную часть предлагаемого курса и не требовало бы частого дополнительного обращения к порой труднодоступной специальной литературе, за исключением случаев, когда необходимо разобраться в доказательствах сходимости отдельных методов. Автор исходил из того, что для будущего инженера важнее понять суть методов и алгоритмов их реализации, условий их применения и получить навыки решения типовых задач оптимизации.

Охарактеризуем кратко особенности содержания книги. В главе 1 вводятся и обсуждаются основные термины и определения. Ядро книги составляют главы 2, 3 и 5, 6, в которых рассматриваются соответственно одномерная и многомерная минимизации с использованием принципиально важных прямых методов, а также методов, использующих информацию о производной (или градиенте) целевой функции. В главах 4, 7 формулируются необходимые и достаточные условия существования безусловного и условного экстремумов, приводятся примеры аналитического решения экстремальных задач. Заключительная глава посвящена разбору задач линейного программирования на конкретных примерах.

В конце глав приводятся вопросы и задания для самопроверки. Кроме того, в каждой заключительной части четырех из восьми глав приведены тексты заданий для численной реализации, которые предполагается выполнить в современной среде программирования MATLAB. Эти задания могут служить основой для лабораторно-вычислительных работ, выполняемых при изучении дисциплины «Методы оптимизации».

Глава 1

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Задачи оптимизации

В любой сфере человеческой деятельности как на сугубо личном, так и на общегосударственном уровне, явно или неявно мы встречаемся с оптимизацией. Экономическое планирование, управление, проектирование сложных объектов всегда направлено на поиск наилучшего варианта с точки зрения намеченной цели.

При всем многообразии задач оптимизации дать общие методы их решения может только математика, резкое расширение приложений которой связано с появлением ЭВМ, что привело к математизации не только физики, но и химии, биологии, экономики, психологии, медицины — практически всех наук. Суть математизации состоит в построении математических моделей процессов и явлений и в разработке методов их исследования.

Использование математического аппарата при решении задач оптимизации предполагает формулировку интересующей проблемы на языке математики, придание количественных оценок возможным вариантам вместо слов «лучше», «хуже».

Многие задачи оптимизации сводятся к отысканию наименьшего или наибольшего значения некоторой функции, которую принято называть *целевой функцией*. Такая постановка задачи будет обычной при дальнейшем изложении. В этом случае методы исследования существенно зависят от свойств целевой функции и той информации о ней, которая может считаться доступной до решения задачи и в процессе решения.

Наиболее просты с математической точки зрения случаи, когда целевая функция является дифференцируемой функцией. В этом случае для исследования ее свойств (участки возрастания и убывания, точки локального экстремума) может быть использована производная.

В последние десятилетия в условиях научно-технического прогресса круг задач оптимизации, поставленных практикой, существенно расширился. Во многих из них значения целевой функции могут получаться в результате численных расчетов или браться из эксперимента. Такие задачи являются более сложными, при их решении нельзя исследовать целевую функцию с помощью производной. Это привело к разработке специальных методов, рассчитанных на широкое применение ЭВМ. Следует также иметь в виду, что сложность решения задачи существенно зависит от размерности целевой функции, т.е. от числа ее аргументов.

Пример 1.1. Указать *наилучший вариант консервной банки* фиксированного объема V, имеющей обычную форму прямого кругового цилиндра.

Рассмотрим два варианта этой задачи.

1. Наилучшая банка должна иметь наименьшую поверхность S (на изготовление пойдет наименьшее количество жести).

2. Наилучшая банка должна иметь наименьшую длину швов l (швы нужно сваривать, и эта работа должна быть минимальной).

Запишем формулы объема банки, площади поверхности и длины швов:

$$V = \pi r^2 h, \quad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h, \quad l = 4\pi r + h.$$

Объем банки задан, это устанавливает связь между радиусом r и высотой h. Выразив высоту через радиус $h = V/\pi r^2$ и подставив полученное выражение в формулы для поверхности и длины швов, получим:

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad 0 < r < \infty, \tag{1.1}$$

$$l(r) = 4\pi r + \frac{V}{\pi r^2}, \quad 0 < r < \infty. \tag{1.2}$$

Таким образом, с математической точки зрения задача о наилучшей консервной банке сводится к определению значения r, при котором достигает своего наименьшего значения в одном случае функция $S(r)$, в другом — $l(r)$. Поскольку $S(r)$ и $l(r)$ дифференцируемы, то задача решается просто.

1. Первый вариант постановки задачи: из формулы (1.1) следует

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2}{r^2}(2\pi r^3 - V).$$

При $0 < r < r_1 = \sqrt[3]{V/2\pi}$ $S'(r) < 0$, т.е. функция убывает, при $r_1 < r < \infty$ $S'(r) > 0$, т.е. функция возрастает. Следовательно, $S = S_{\min}$ при $r = r_1$, где

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \quad h_1 = 2r_1, \tag{1.3}$$

а $S(r_1) = 3\sqrt[3]{2\pi V^2} \le S(r)$. График функции $S(r)$ показан на рис. 1.1.

2. Второй вариант постановки задачи: из формулы (1.2) следует

$$l'(r) = 4\pi - \frac{2V}{\pi r^3} = \frac{2}{\pi r^3}(2\pi^2 r^3 - V).$$

При $0 < r < r_2 = \sqrt[3]{V / 2\pi^2}$ $l'(r) < 0$, т.е. функция убывает, при $r_2 < r < \infty$ $l'(r) > 0$, функция возрастает. Следовательно, $l = l_{\min}$ при $r = r_2$, где

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}, \quad h_2 = 2\pi r_2, \tag{1.4}$$

при этом $l(r_2) = 3\sqrt[3]{4\pi V} \le l(r)$. График функции $l(r)$ показан на рис. 1.2.

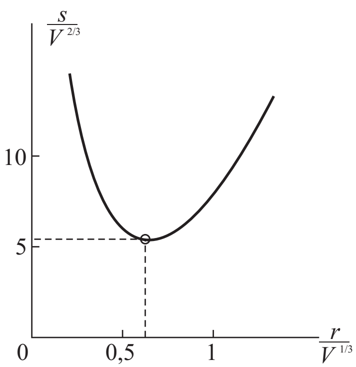

Рис.1.1. **График функции** $S(r)$

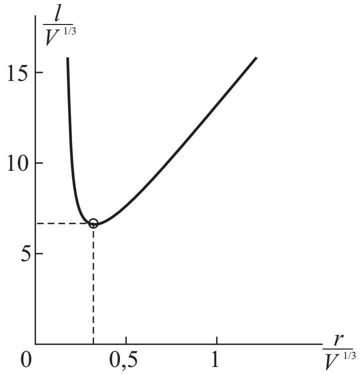

Рис.1.2. **График функции** $l(r)$

Очевидно, что при разных критериях оптимизации получаются различные ответы. В первом варианте (1.3) высота наилучшей банки равна ее диаметру, а во втором — (1.4) она в π раз больше него.■

Перейдем от конкретного примера к общей постановке задач и определениям.

1.2. Минимум функции одной переменной

Рассмотрим математическую модель оптимизации, в которой целевая функция зависит от одной переменной, определенной на множестве U вещественной оси,

$$\begin{aligned} & f(x) \to \min, \\ & x \in U. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Максимизация целевой функции ($f(x) \to \max$) эквивалентна минимизации противоположной величины ($-f(x) \to \min$), поэтому, не умаляя общности, будем рассматривать только задачи минимизации.

Определение. Число $x^* \in U$ называется *точкой глобального* (абсолютного) *минимума* или просто *точкой минимума* функции $f(x)$ на множестве U , если $f(x^*) \le f(x)$ для всех $x \in U$. Множество всех точек минимума $f(x)$ на U будем в дальнейшем обозначать через U^*.

Определение. Число $\tilde{x} \in U$ называется *точкой локального минимума* функции $f(x)$, если $f(\tilde{x}) \le f(x)$ для всех $x \in U$, достаточно близких к $\tilde{x}$, т.е. если существует $\varepsilon > 0$ такое, что это неравенство выполняется для любого

$$x \in \{x \in U, \ |x - \tilde{x}| < \varepsilon\}.$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена снизу на множестве U, т.е. $f(x) \ge A > -\infty$ для всех $x \in U$. Число f_* называется *точной нижней гранью* функции $f(x)$ на множестве U ($f_* = \inf\limits_U f(x)$), если $f(x) \ge f_*$ при всех $x \in U$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $x_\varepsilon \in U$ такая, что $f(x_\varepsilon) < f_* + \varepsilon$ (т.е. среди значений $f(x)$ на множестве U найдутся сколь угодно близкие к f_*).

Для неограниченных функций $f(x)$ полагают $f_* = -\infty$.

Необходимо отметить следующее.

1. Глобальный минимум $f(x)$ является и локальным минимумом, а обратное, вообще говоря, неверно.

2. Множество точек минимума U^* функции $f(x)$ на множестве U может быть пустым, состоять из конечного или бесконечного числа точек.

Например:

а) если $f(x)=\ln x$, $U=[0,1]$, то $U^*=\varnothing$;

б) если $f(x)=x^2$, $U=[-1,1]$, то $U^*=\{0\}$ — конечное множество;

в) если $f(x)=\sin^2\pi x$, $U=R$, то $U^*=Z$ — бесконечное множество.

3. Если $U^*\neq\varnothing$, то $\inf\limits_U f(x)=\min\limits_U f(x)$. Таким образом, точная нижняя грань обобщает понятие минимума функции на случай $U^*=\varnothing$.

Широкий класс функций, для которых $U^*\neq\varnothing$, определяет известная из математического анализа теорема Вейерштрасса, утверждающая, что непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция достигает на нем своих минимального и максимального значений. Таким образом, задача отыскания минимума (1.5) для непрерывных функций всегда имеет решение.

1.3. Унимодальные функции

Если функция $f(x)$, определенная на множестве U, имеет, кроме глобального, еще и локальные минимумы, отличные от него, то минимизация $f(x)$, как правило, сильно затрудняется. Большинство методов поиска минимума $f(x)$ приспособлено только для тех функций, у которых каждый локальный минимум является одновременно и глобальным. Этим свойством обладают унимодальные функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется *унимодальной* на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна на $[a,b]$ и существуют числа α и β, $a\le\alpha\le\beta\le b$, такие, что:

1) если $a<\alpha$, то на отрезке $[a,\alpha]$ функция $f(x)$ монотонно убывает;

2) если $\beta<b$, то на отрезке $[\beta,b]$ функция $f(x)$ монотонно возрастает;

3) при $x \in [\alpha, \beta]$ выполняется $f(x) = f_* = \min\limits_{[a,b]} f(x)$.

Отметим, что возможно вырождение в точку одного или двух отрезков из $[a, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$ и $[\beta, b]$. Некоторые варианты расположения и вырождения в точку отрезков монотонности и постоянства унимодальной функции показаны на рис.1.3.

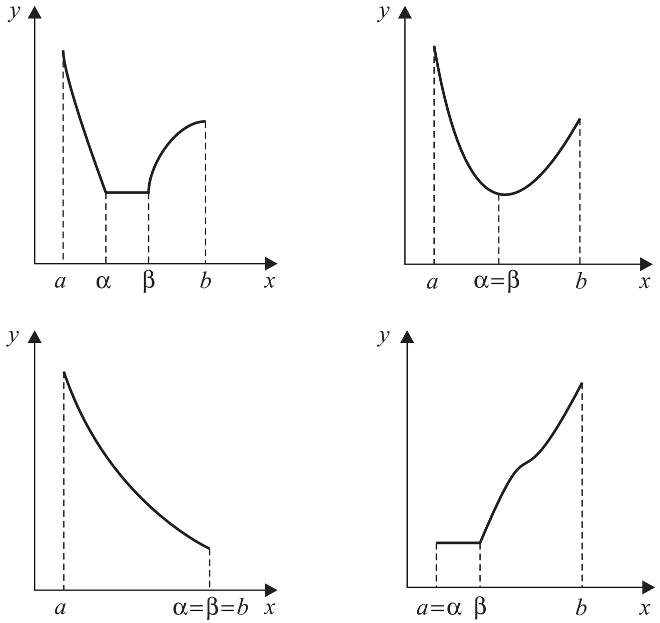

Рис. 1.3. **Графики унимодальных функций**

Из определения вытекают следующие свойства унимодальных функций.

1. Любая из точек локального минимума унимодальной функции является и точкой ее глобального минимума на отрезке $[a, b]$.

2. Функция, унимодальная на отрезке $[a, b]$, унимодальна и на любом меньшем отрезке $[c, d] \subset [a, b]$.

3. Пусть $f(x)$ унимодальна на $[a, b]$ и $a \le x_1 < x_2 \le b$. Тогда:

$$\text{если } f(x_1) \le f(x_2), \text{ то } x^* \in [a,\ x_2],$$
$$\text{если } f(x_1) > f(x_2), \text{ то } x^* \in [x_1, b],$$

где x^* — одна из точек минимума $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Пример 1.2. На какие три части следует разбить отрезок $[-1, 2]$, чтобы на каждой из них функция $f(x) = \big||x(x-1)|-1\big|$ была унимодальной?

□ Строя поэтапно график функции $f(x)$, получим три отрезка: $[-1,0]$, $[0,1]$ и $[1,2]$, на каждом из которых функция унимодальна. ■

Пример 1.3. Найти максимальное значение b, при котором функция $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ унимодальна на отрезке $[-5, b]$.

□ Корни квадратного трехчлена $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; вершина параболы $x_в = 2{,}5$. Поэтому $b = 2{,}5$. ■

1.4. Выпуклые функции

Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *выпуклой* на этом отрезке, если для всех x', $x'' \in [a, b]$ и произвольного числа $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$f(\alpha x' + (1-\alpha)x'') \le \alpha f(x') + (1-\alpha) f(x''). \tag{1.6}$$

Свойство 1. Если функция $f(x)$ выпукла на $[a, b]$, то на любом $[x', x''] \subset [a, b]$ ее график расположен не выше хорды, проведенной через точки графика с абсциссами x' и x'' (см. рис. 1.4).

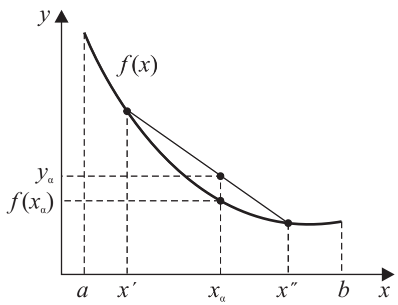

Рис. 1.4. **Взаимное расположение графика выпуклой функции и хорды**

Свойство 2. Можно показать, что всякая выпуклая непрерывная функция на $[a, b]$ является и унимодальной на этом отрезке. Обратное, вообще говоря, неверно.

Из курса математического анализа известны следующие условия выпуклости функции:

а) для того чтобы дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ была выпуклой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы ее производная $f'(x)$ не убывала на $[a,b]$ (например: $y=x^2,\ x\in R;\ y=\cos x,\ x\in[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}]$);

б) для того чтобы дважды дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ была выпуклой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы при всех $x\in[a,\ b]$ выполнялось неравенство $f''(x)\geq 0$ ($y=x^2,\ x\in R;\ y=\cos x,\ x\in[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}]$).

При исследовании выпуклости функций на практике неравенство (1.6) удается использовать только в редких случаях. Поэтому для дифференцируемых достаточное количество раз функций обычно применяют вышеприведенные дифференциальные критерии выпуклости.

Непосредственная проверка унимодальности с помощью определения этого понятия также в большинстве случаев вызывает затруднения. Поэтому для обоснования унимодальности достаточно гладких функций используют те же критерии выпуклости. Если функция оказывается выпуклой, то можно утверждать, что она унимодальна. Однако при отрицательном результате проверки функции на выпуклость нельзя сделать вывод, что она не унимодальна.

Пример 1.4. Показать, что функция $f(x)=x^4-10x^3+36x^2+5x$ унимодальна на отрезке $[3,\ 5]$.

□ Вторая производная функции $f(x)$ равна $f''(x)=12x^2-60x+72$. Корни полученного квадратного трехчлена $x_1=2$ и $x_2=3$. Следовательно, $f''(x)\geq 0$, если $x\geq 3$, в частности при $x\in[3,\ 5]$. По дифференциальному критерию «б» получаем, что $f(x)$ выпукла, а значит, и унимодальна на этом отрезке. ■

Пример 1.5. В следующих задачах убедиться в унимодальности функций $f(x)$ на указанных отрезках $[a,b]$.

$$1)\ f(x)=x^2-3x+x\ln x,\ x\in[1,2].$$

□ $f''(x)=2+\frac{1}{x}>0$ при $x\in[1,2]$. По дифференциальному критерию «б» $f(x)$ выпуклая, а значит, и унимодальная при $x\in[1,2]$. ■

$$2)\ f(x)=\ln(1+x^2)-\sin x,\ x\in[0,\ \frac{\pi}{4}].$$

□ $f''(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}+\sin x>0$ при $x\in[0,\ \dfrac{\pi}{4}]$. По дифференциальному критерию «б» $f(x)$ выпуклая, а значит, и унимодальная при $x\in[0,\ \dfrac{\pi}{4}]$. ■

$$3)\ f(x)=\frac{1}{2}x^2-\sin x,\ x\in[0,1].$$

□ $f''(x)=1+\sin x\geq 0$ при $x\in[0,1]$. По дифференциальному критерию «б» $f(x)$ выпуклая, а значит, и унимодальная при $x\in[0,1]$. ■

Пример 1.6. Привести примеры функций $f(x)$, унимодальных на отрезке $[a,b]$, но невыпуклых на нем.

$$\square\ f(x)=-\frac{1}{1+x^2},\ x\in R \text{ или } x\in[a,b],$$

где $[a,b]$ — такой отрезок, что $0\in(a,b)$.

Очевидно, что функция унимодальна на $[a,b]$, но $f'(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, вторая производная $f''(x)=\dfrac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}<0$, например при $|x|>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Функция $f(x)$ не является выпуклой по дифференциальному критерию выпуклости «б». ■

□ $f(x)=|\ln x|$, $x\in(0,+\infty)$. Очевидно, что функция унимодальна при $x\in(0,\ +\infty)$, но не является выпуклой при $x\in(1,\ +\infty)$, так как на этом интервале $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$. ■

Пример 1.7. Будет ли функция $f(x)=ax^3-3x^2-10$ унимодальной на отрезке $[1,2]$ при $a>3$?

□ Первая производная функции $f'(x)=3ax^2-6x$, вторая — $f''(x)=6a(x-\dfrac{1}{a})$. Если $x\in[1,2]$, а величина $a>3$, т.е. $0<\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{3}$, то $f''(x)>0$ и функция $f(x)$ унимодальна по дифференциальному критерию «б» выпуклости функций. ■

Пример 1.8. Доказать, что из выпуклости функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ следует ее унимодальность на $[a,b]$, если ограничиваться только дифференцируемыми на $[a,b]$ функциями.

□ Пусть $f(x)$ выпукла на $[a,b]$, тогда $f'(x)$ не убывает на этом отрезке. Допустим противное, т.е. что $f(x)$ неунимодальна на $[a,b]$. Тогда существуют $x_1,\ x_2,\ x_3\in[a,b]$ такие, что $f(x_1)<f(x_2)$ и $f(x_3)<f(x_2)$. А это противоречит дифференциальному критерию «а» выпуклости $f(x)$ на $[a,b]$. ■

1.5. Условие Липшица

Применение некоторых методов одномерной минимизации возможно только в том случае, если скорость изменения целевой функции $f(x)$ на любых участках отрезка $[a,b]$ ограничена некоторым числом, одним и тем же для всех участков. В этом случае говорят, что $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a,b]$ *условию Липшица*. Целевые функции большинства практических задач оптимизации таким свойством обладают.

Определение. Функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a,b]$ условию Липшица, если существует такое число $L>0$ (константа Липшица), что

$$\left|f(x')-f(x'')\right|\le L\left|x'-x''\right| \qquad (1.7)$$

для всех x' и x'', принадлежащих $[a,b]$.

Необходимо обратить внимание на следующее.

1. Если неравенство (1.7) выполняется с константой L, то оно справедливо и для всех $L'>L$. Поэтому для функции, удовлетворяющей условию Липшица, существует бесконечное множество констант L из (1.7). При использовании алгоритмов минимизации, включающих L как параметр, наилучшие результаты достигаются, как правило, если в качестве L берется минимальная из констант Липшица.

2. Из условия (1.7) сразу следует непрерывность $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Поэтому согласно теореме Вейерштрасса функция $f(x)$, удовлетворяющая на отрезке $[a,b]$ условию Липшица, имеет на нем хотя бы одну точку минимума, хотя не является, вообще говоря, унимодальной.

3. Условие (1.7) означает, что модуль углового коэффициента любой хорды графика $f(x)$ не превосходит L. Переходя в (1.7) к пределу при $\left|x'-x''\right|\to 0$, убеждаемся, что если в некоторой точке существует касательная к графику $f(x)$, то модуль ее углового коэффициента также не может превышать L. Так, функция $f(x)=\sqrt{x}$ на отрезке $[0, 1]$ условию Липшица не удовлетворяет, потому что при $x\to +0$ угловой коэффициент касательной к ее графику k неограниченно возрастает (рис. 1.5).

4. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную производную, то она удовлетворяет на этом отрезке условию Липшица с константой $L=\max\limits_{[a,b]}\left|f'(x)\right|$.