1. Определение устойчивости разностной схемы.

Перейдем теперь к более общему определению устойчивости. С этой целью рассмотрим задачу

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + A\varphi = f \quad \text{в } \Omega\times\Omega_t,$$
$$\varphi = g \quad \text{при } t = 0, \tag{2.14}$$

которая аппроксимируется разностной задачей

$$\varphi^{j+1} = T\varphi^j + \tau S f^j \quad \text{на } \Omega_h\times\Omega_\tau,$$
$$\varphi^0 = g. \tag{2.15}$$

Будем говорить, что разностная схема (2.15) *устойчива*, если при любом параметре h, характеризующем разностную аппроксимацию, и $j \leqslant T/\tau$ имеет место соотношение

$$\|\varphi^j\|_{\Phi_h} \leqslant C_1\|g\|_{G_h} + C_2\|f^{h\tau}\|_{F_{h\tau}}, \tag{2.16}$$

где константы C_1 и C_2 равномерно ограничены на $0 \leqslant t \leqslant T$ и не зависят от τ, h, g и f; через G_h обозначено пространство, которому принадлежит g в (2.15).

2. Доказательство неравенства ‖(E+σA)−1‖≤ 1

Рассмотрим положительно полуопределенную матрицу $A \geqslant 0$, действующую на векторы из евклидова пространства. Имеет место следующее соотношение (E — единичная матрица):

$$\|(E+\sigma A)^{-1}\| \leqslant 1 \tag{1.25}$$

для любых значений параметра $\sigma \geqslant 0$. Доказательство этого важного утверждения проведем с помощью формулы

$$\|(E+\sigma A)^{-1}\|^2 = \max_{\varphi}\frac{((E+\sigma A)^{-1}\varphi,\ (E+\sigma A)^{-1}\varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}. \tag{1.26}$$

Положим

$$\psi = (E+\sigma A)^{-1}\varphi.$$

Тогда

$$\|(E+\sigma A)^{-1}\|^2 = \max_{\psi}\frac{(\psi,\ \psi)}{((E+\sigma A)\psi,\ (E+\sigma A)\psi)} =$$
$$= \frac{1}{\min\limits_{\psi}\left[1 + 2\sigma\dfrac{(A\psi,\ \psi)}{(\psi,\ \psi)} + \sigma^2\dfrac{(A\psi,\ A\psi)}{(\psi,\ \psi)}\right]}.$$

Поскольку $A \geqslant 0$ на векторах φ и ψ, то из последнего соотношения следует оценка (1.25).

Если $A > 0$, то, очевидно, при $\sigma > 0$ выполняется неравенство

$$\|(E+\sigma A)^{-1}\| < 1. \tag{1.27}$$

3. Доказательство леммы Келлога.

Лемма (Келлог). *Если* $A \geqslant 0$ *и* $\sigma \geqslant 0$, *то*

$$\|(E-\sigma A)(E+\sigma A)^{-1}\| \leqslant 1. \quad (1.28)$$

В самом деле, введем обозначение

$$T = (E-\sigma A)(E+\sigma A)^{-1}$$

и рассмотрим выражение для $\|T\|^2$:

$$\|T\|^2 = \max_{\varphi} \frac{((E-\sigma A)(E+\sigma A)^{-1}\varphi,\ (E-\sigma A)(E+\sigma A)^{-1}\varphi)}{(\varphi,\ \varphi)} =$$

$$= \max_{\psi} \frac{((E-\sigma A)\psi,\ (E-\sigma A)\psi)}{((E+\sigma A)\psi,\ (E+\sigma A)\psi)} =$$

$$= \max_{\psi} \frac{(\psi,\ \psi) - 2\sigma(A\psi,\ \psi) + \sigma^2(A\psi,\ A\psi)}{(\psi,\ \psi) + 2\sigma(A\psi,\ \psi) + \sigma^2(A\psi,\ A\psi)} \leqslant 1.$$

Здесь существенно использовалось свойство положительной полуопределенности матрицы A.

В том случае, когда матрица A положительна, при $\sigma > 0$

$$\|(E-\sigma A)(E+\sigma A)^{-1}\| < 1. \quad (1.29)$$

4. Доказательство устойчивости схемы Кранка-Николсон для неоднородного уравнения.

Рассмотрим теперь неоднородные уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + A\varphi = f \quad \text{в} \quad \Omega \times \Omega_t,$$
$$\varphi = g \quad \text{в } \Omega \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (4.25)$$

Разностная аппроксимация задачи (4.25) на основе схемы Кранка — Николсона в предположениях, сформулированных выше, имеет вид

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda^j \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} = f^j, \quad (4.26)$$

где $f^j = f(t_{j+1/2})$.

Нетрудно убедиться, что разностная задача (4.26) аппроксимирует (4.25) со вторым порядком по τ. Решение задачи (4.26) запишем в виде

$$\varphi^{j+1} = T^j\varphi^j + \tau\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda^j\right)^{-1} f^j. \quad (4.27)$$

Из уравнения (4.17) следует, что

$$\|\varphi^{j+1}\|_\Phi \leqslant \|T^j\|\,\|\varphi^j\|_\Phi + \tau\left\|\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda^j\right)^{-1}\right\|\,\|f^j\|_F. \quad (4.28)$$

Поскольку $\tau > 0$ и

$$(\Lambda^j\varphi^j, \varphi^j)_\Phi \geqslant 0, \quad (4.29)$$

то

$$\|T^j\| \leqslant 1, \quad \left\|\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda^j\right)^{-1}\right\| \leqslant 1. \quad (4.30)$$

Следовательно, (4.28) приводит к неравенству

$$\|\varphi^{j+1}\|_\Phi \leqslant \|\varphi^j\|_\Phi + \tau\|f^j\|_F. \quad (4.31)$$

Полагая $\|\varphi^0\|_\Phi = \|g\|$, $\|f\| = \max_j \|f^j\|_F$, с помощью рекуррентного соотношения (4.31) получаем

$$\|\varphi^j\|_\Phi \leqslant \|g\| + j\tau\|f\|, \quad \tau j \leqslant T. \quad (4.32)$$

Таким образом, соотношение (4.32) показывает устойчивость разностной схемы. Кроме того, это соотношение является априорной оценкой нормы решения.

5. Доказательство аппроксимации схемы Кранка-Николсон для однородного уравнения.

Рассмотрим теперь вопрос о порядке аппроксимации в схеме Кранка — Николсона, когда имеет место зависимость оператора A от времени. Определим оператор L равенством

$$L\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial t} + A\varphi, \tag{4.14}$$

а оператор L_τ — равенством

$$(L_\tau\varphi)^j = \frac{(\varphi)^{j+1} - (\varphi)^j}{\tau} + \Lambda^j \frac{(\varphi)^{j+1} + (\varphi)}{2}, \tag{4.15}$$

где $(\varphi)^j$ — проекция функции φ на сетку Ω_τ. Далее, введем норму

$$\|(L_\tau\varphi)\|_{C_\tau} = \max_{t_j\in\Omega_\tau} \|(L_\tau\varphi)^j\|, \tag{4.16}$$

где $\|\cdot\|$ — некторая норма в пространстве, которому принадлежит $(L_\tau\varphi)^j$. Для оценки нормы (4.16) разложим решение исходного

уравнения (4.1) в ряд Тейлора:

$$(\varphi)^{j+1} = (\varphi)^j + \tau(\varphi_t)^j + \frac{\tau^2}{2}(\varphi_{tt})^j + \ldots \tag{4.17}$$

Принимая во внимание очевидные соотношения

$$\varphi_t = -A\varphi, \quad \varphi_{tt} = A^2\varphi - A_t\varphi, \tag{4.18}$$

где $A_t = \partial A/\partial t$, преобразуем ряд Тейлора (4.17) к виду

$$(\varphi)^{j+1} = (\varphi)^j - \tau A^j(\varphi)^j + \frac{\tau^2}{2}[(A^j)^2(\varphi)^j - A_t^j(\varphi)^j - \ldots], \quad A^j = A(t_j). \tag{4.19}$$

Подставим (4.19) в (4.16). Тогда с учетом (4.15) получим

$$\|(0 - L_\tau\varphi)\|_{C_\tau} = \max_{t_j} \| \Lambda^j(\varphi)^j - A^j(\varphi)^j + \frac{\tau}{2}\{(A^j)^2 - A_t^j - \Lambda^j A^j\}(\varphi)^j + O(\tau^2)\|. \tag{4.20}$$

Если в качестве аппроксимирующего оператора Λ^j выбрать

$$\Lambda^j = A^j = A(t_j), \tag{4.21}$$

то из (4.20) следует, что

$$\|(0 - L_\tau\varphi)\|_{C_\tau} = \frac{\tau}{2}\max_{t_j\in\Omega_\tau} \| A_t^j(\varphi)^j\| + O(\tau^2),$$

и мы имеем первый порядок аппроксимации. Заметим, что в частном случае, когда A не зависит от t, аппроксимация в форме (4.21) обеспечивает второй порядок по τ.

Предположим теперь, что аппроксимирующий оператор выбран в виде

$$\Lambda^j = A^j + \frac{\tau}{2}A_t^j. \tag{4.22}$$

В этом случае имеем

$$\|(0 - L_\tau\varphi)\|_{C_\tau} = O(\tau^2).$$

Отметим, что аппроксимация схемой Кранка — Николсона также будет иметь второй порядок по τ, если оператор Λ^j выбрать в виде

$$\Lambda^j = A^{j+1/2} \tag{4.23}$$

или

$$\Lambda^j = \frac{1}{2}(A^{j+1} + A^j). \tag{4.24}$$

6. Доказательство аппроксимации и устойчивости метода покомпонентного расщепления.

§ 6. Метод покомпонентного расщепления на основе схем Кранка — Николсона. Случай $A = A_1 + A_2$

Пусть в задаче (5.1) оператор $A = A(t)$ представлен в виде суммы двух положительных полуопределенных матриц:

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t), \quad A_1(t) \geqslant 0, \quad A_2(t) \geqslant 0, \tag{6.1}$$

имеющих достаточно гладкие по t элементы. Рассмотрим аппроксимации этих матриц на интервале $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$ в форме

$$\Lambda_\alpha^j = A_\alpha(t_{j+1/2}), \quad \alpha = 1, 2. \tag{6.2}$$

Схема покомпонентного расщепления для задачи (5.1) имеет вид

$$\frac{\varphi^{j+1/2} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda_1^j \frac{\varphi^{j+1/2} + \varphi^j}{2} = 0,$$

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+1/2}}{\tau} + \Lambda_2^j \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^{j+1/2}}{2} = 0, \tag{6.3}$$

$$j = 0, 1, \ldots; \quad \varphi^0 = g.$$

Систему разностных уравнений (6.3) без вспомогательных функций $\varphi^{j+1/2}$ можно привести к одному уравнению

$$\varphi^{j+1} = T^j \varphi^j, \tag{6.4}$$

где

$$T^j = \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right). \tag{6.5}$$

Пусть выполнено условие

$$\frac{\tau}{2}\|\Lambda_\alpha^j\| < 1, \quad \alpha = 1, 2; \tag{6.6}$$

тогда схема (6.3) абсолютно устойчива. Она обладает вторым порядком аппроксимации по τ, если Λ_1^j и Λ_2^j коммутируют, и первым, если Λ_1^j и Λ_2^j не коммутируют. Действительно, разложим оператор T^j по степеням τ:

$$T^j = E - \tau\Lambda^j + \frac{\tau^2}{2}\left((\Lambda_1^j)^2 + 2\Lambda_2^j\Lambda_1^j + (\Lambda_2^j)^2\right) - \ldots$$

Если операторы Λ_α^j коммутируют, т. е. $\Lambda_1^j\Lambda_2^j = \Lambda_2^j\Lambda_1^j$, то разложение T^j можно записать в виде

$$T^j = E - \tau\Lambda^j + \frac{\tau^2}{2}(\Lambda^j)^2.$$

Тогда уравнение (6.4) запишется в виде

$$\varphi^{j+1} = \varphi^j - \tau\Lambda^j\varphi^j + \frac{\tau^2}{2}(\Lambda^j)^2\varphi^j - \ldots \tag{6.7}$$

или

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda^j\left(\varphi^j - \frac{\tau}{2}\Lambda^j\varphi^j + \ldots\right) = 0.$$

Подставляя в последнее равенство выражение $\tau\Lambda^j\varphi^j$ из (6.7), имеем

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda^j\left(\frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} - \tau^2(\Lambda^j)^2\varphi^j + \ldots\right) = 0.$$

Сравнивая эту схему со схемой Кранка — Николсона (1.15), заключаем, что порядок аппроксимации схемы (6.3) отличается от порядка аппроксимации схемы (1.15) на величину $O(\tau^2)$. Следовательно, в случае $\Lambda_1^j\Lambda_2^j = \Lambda_2^j\Lambda_1^j$ схема (6.3) обладает вторым порядком аппроксимации по τ, если же $\Lambda_1^j\Lambda_2^j \neq \Lambda_2^j\Lambda_1^j$, то лишь первым. Абсолютная устойчивость схемы (6.3) следует из неравенства

$$\|T^j\| \leqslant \left\|\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)\right\| \cdot \left\|\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)\right\|$$

и оценок

$$\left\|\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_\alpha^j\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_\alpha^j\right)\right\| = \left\|\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_\alpha^j\right)\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_\alpha^j\right)^{-1}\right\| \leqslant 1,$$

7. Реализация схемы покомпонентного расщепления.

вытекающих из теоремы 2.1. Схема (6.3) реализуется следующим образом:

$$\xi^{j+1/4} = \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)\varphi^j, \qquad \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)\xi^{j+2/4} = \xi^{j+1/4},$$

$$\xi^{j+3/4} = \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)\xi^{j+2/4}, \qquad \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)\varphi^{j+1} = \xi^{j+3/4}, \qquad (6.8)$$

$$j = 0, 1, \ldots; \quad \varphi^0 = g.$$

Если разбиение A на A_1 и A_2 осуществлено так, что возможно эффективное решение уравнений с матрицами $(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_\alpha^j)$, то и реализация всего алгоритма будет эффективной.

Замечание 6.1. Для формулировки схемы (6.3) с переменным шагом достаточно в (6.3) и в выражениях (6.8) заменить τ на $\tau_j = t_{j+1} - t_j$. □

8. Доказательство аппроксимации и устойчивости метода двуциклического покомпонентного расщепления.

§ 13. Метод двуциклического покомпонентного расщепления. Случай оператора $A = A_1 + A_2$

Рассмотрим задачу

$$\frac{d\varphi}{dt} + A\varphi = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_t,$$
$$\varphi = g \quad \text{при } t = 0 \qquad (13.1)$$

при условии (6.1). Будем аппроксимировать операторы $A_1(t)$ и $A_2(t)$ не на интервале $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$, как в (6.3), а на интервале $t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_{j+1}$. Положим

$$\Lambda_\alpha^j = A_\alpha(t_j).$$

Запишем две системы разностных уравнений

$$\frac{\varphi^{j-1/2} - \varphi^{j-1}}{\tau} + \Lambda_1^j \frac{\varphi^{j-1/2} + \varphi^{j-1}}{2} = 0,$$
$$\frac{\varphi^j - \varphi^{j-1/2}}{\tau} + \Lambda_2^j \frac{\varphi^j + \varphi^{j-1/2}}{2} = 0; \qquad (13.2)$$

$$\frac{\varphi^{j+1/2} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda_2^j \frac{\varphi^{j+1/2} + \varphi^j}{2} = 0,$$
$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+1/2}}{\tau} + \Lambda_1^j \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^{j+1/2}}{2} = 0. \qquad (13.3)$$

Цикл вычислений состоит в поочередном применении схем (13.2), (13.3). Из данных схем (исключая $\varphi^{j+1/2}$) получаем, что на полном шаге вычислений

$$\varphi^{j+1} = T^j\varphi^{j-1}, \qquad (13.4)$$

где

$$T^j = \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right) \times$$
$$\times \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2^j\right)\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right)^{-1}\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1^j\right) =$$
$$= E - 2\tau\Lambda^j + \frac{(2\tau)^2}{2}(\Lambda^j)^2 - \ldots \qquad (13.5)$$

Здесь и далее предполагается выполнение ограничения (6.6).

Если $A_\alpha(t) \geqslant 0$, то при достаточной гладкости решения φ задачи (5.1) и элементов матриц $\{A_\alpha(t)\}$ система разностных уравнений (13.2), (13.3) абсолютно устойчива и схема (13.4) аппроксимирует исходную задачу (13.1) со вторым порядком точности по τ.

Действительно, из разложения (13.5) оператора шага T^j заключаем, что он с точностью до величины $O(\tau^2)$ совпадает с оператором шага схемы Кранка — Николсона, примененной к удвоенному интервалу по времени. Следовательно, независимо от коммутативности операторов $\{A_\alpha\}$ схемы (13.4) имеет второй порядок аппроксимации по τ.

Устойчивость схемы следует из оценок

$$\| \varphi^{j+1} \|_\Phi \leqslant \| T^j \| \| \varphi^{j-1} \|_\Phi \leqslant \| \varphi^{j-1} \|_\Phi \leqslant \dots \leqslant \| g \|_\Phi, \quad \| \cdot \|_\Phi = (\cdot, \cdot)_\Phi^{1/2},$$

поскольку в силу теоремы 2.1 введения $\| T^j \| \leqslant 1$.

Для неоднородной задачи

$$\begin{gathered} \frac{d\varphi}{dt} + A\varphi = f \quad \text{в} \quad \Omega_t, \\ \varphi = g \quad \text{при} \quad t = 0 \end{gathered} \tag{13.6}$$

схема двуциклического покомпонентного расщепления имеет вид

$$\begin{gathered} \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j\right) \varphi^{j-1/2} = \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j\right) \varphi^{j-1}, \\ \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2^j\right) (\varphi^j - \tau f^j) = \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2^j\right) \varphi^{j-1/2}, \\ \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2^j\right) \varphi^{j+1/2} = \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2^j\right) (\varphi^j + \tau f^j), \\ \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j\right) \varphi^{j+1} = \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1^j\right) \varphi^{j+1/2}, \end{gathered} \tag{13.7}$$

где $f^j = f(t_j)$. Разрешая эти уравнения относительно φ^{j+1}, получаем

$$\varphi^{j+1} = T^j \varphi^{j-1} + 2\tau T_1^j T_2^j f^j, \tag{13.8}$$

где

$$T^j = T_1^j T_2^j T_2^j T_1^j, \quad T_\alpha^j = \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_\alpha^j\right)^{-1} \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_\alpha^j\right).$$

С помощью разложения по степеням малого параметра τ придем к соотношению

$$\varphi^{j+1} = \left[E - 2\tau\Lambda^j + \frac{(2\tau)^2}{2} (\Lambda^j)^2\right] \varphi^{j-1} + 2\tau (E - \tau\Lambda^j) f^j + O(\tau^3), \tag{13.9}$$

которое в свою очередь преобразуем к виду

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j-1}}{2\tau} + \Lambda^j (E - \tau\Lambda^j) \varphi^{j-1} = (E - \tau\Lambda^j) f^j + O(\tau^2). \tag{13.10}$$

Исключим φ^{j-1}, используя разложение решения в ряд Тейлора в окрестности точки t_{j-1}. С точностью до τ^2 имеем

$$\varphi^j = \varphi^{j-1} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j-1} \tau + O(\tau^2). \tag{13.11}$$

Производную $\partial\varphi/\partial t$ исключим с помощью соотношения

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j-1} = -\Lambda^j \varphi^{j-1} + f^j + O(\tau). \tag{13.12}$$

Подставим (13.12) в (13.11):

$$\varphi^j = (E - \tau\Lambda^j) \varphi^{j-1} + \tau f^j + O(\tau^2).$$

Отсюда

$$(E - \tau\Lambda^j) \varphi^{j-1} = \varphi^j - \tau f^j + O(\tau^2). \tag{13.13}$$

Подставим соотношение (13.13) в (13.10):

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j-1}}{2\tau} + \Lambda^j \varphi^j = f^j + O(\tau^2). \tag{13.14}$$

Если теперь принять, что

$$\Phi = G = F, \quad \| \cdot \|_F = \| \cdot \| = (\cdot, \cdot)^{1/2},$$

то легко заметить, что уравнение (13.14) аппроксимирует исходную задачу (13.6) в норме $\| \cdot \|$ на интервале $t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_{j+1}$ со вторым порядком по τ. Таким образом, с помощью двуциклического метода найдена разностная аппроксимация неоднородного эволюционного уравнения, обладающая вторым порядком аппроксимации по τ.

Устойчивость схемы доказывается совсем просто. В самом деле, оценим (13.8) по норме

$$\| \varphi^{j+1} \| \leqslant \| T^j \| \| \varphi^{j-1} \| + 2\tau \| T_1^j \| \| T_2^j \| \| f^j \|. \tag{13.15}$$

Выше было установлено, что $\| T_\alpha^j \| \leqslant 1$; следовательно,

$$\| T^j \| \leqslant \| T_1^j \| \| T_2^j \| \| T_2^j \| \| T_1^j \| \leqslant 1.$$

Поэтому

$$\| \varphi^{j+1} \| \leqslant \| \varphi^{j-1} \| + 2\tau \| f^j \|. \tag{13.16}$$

С помощью рекуррентного соотношения (13.16) получаем

$$\| \varphi^j \| \leqslant \| g \| + \tau j \| f \|, \tag{13.17}$$

где

$$\| f \| = \max_j \| f^j \|.$$

9.Доказательство аппроксимации схемы метода стабилизации.

10. Доказательство устойчивости метода стабилизации.

При достаточной гладкости метод стабилизации (20.10) имеет второй порядок аппроксимации по τ. Счетная устойчивость будет обеспечена при выполнении условия

$$\|T\| \leqslant 1, \tag{20.12}$$

где T — оператор шага, определяемый формулой

$$T = E - \tau \prod_{\alpha=n}^{1} \left(E + \frac{\tau}{2} A_\alpha\right)^{-1} A. \tag{20.13}$$

К сожалению, из условия $A_\alpha \geqslant 0$ здесь не следует устойчивость в какой-нибудь норме, как это имело место в случае $n = 2$.

Для установления устойчивости иногда пользуются следующим простым алгоритмическим приемом. Полагая f^j равным нулю, приведем уравнение (20.10), разрешенное относительно φ^{j+1}, к следующему виду:

$$\varphi^{j+1} = T\varphi^j. \tag{20.14}$$

Поскольку оператор T предполагается не зависящим от времени, т. е. от индекса j, то, решая задачу (20.14) при начальном условии

$$\varphi^0 = g \tag{20.15}$$

и фиксированном параметре τ, обеспечивающем необходимую аппроксимацию, будем следить только за нормой $\|\varphi_j\|_\Phi$. Если эта норма не будет расти, то можно считать, что устойчивость имеет место. После этого можно переходить к решению неоднородной задачи. Перепишем уравнение (20.10) в следующем виде:

$$\varphi^{j+1} = T\varphi^j + \tau \prod_{\alpha=n}^{1} \left(E + \frac{\tau}{2} A_\alpha\right)^{-1} f^j. \tag{20.16}$$

Отсюда

$$\|\varphi^{j+1}\|_\Phi \leqslant \|T\| \|\varphi^j\|_\Phi + \tau \prod_{\alpha=1}^{n} \left\| \left(E + \frac{\tau}{2} A_\alpha\right)^{-1} \right\| \|f^j\|_F,$$

или, в силу неравенства (20.12) и неравенства $\left\| \left(E + \frac{\tau}{2} A_\alpha\right)^{-1} \right\| \leqslant 1$,

$$\|\varphi^{j+1}\|_\Phi \leqslant \|\varphi^j\|_\Phi + \tau j \|f^j\|_F. \tag{20.17}$$

С помощью рекуррентной связи приходим к условию устойчивости

$$\|\varphi^j\|_\Phi \leqslant \|g\|_\Phi + \tau j \|f\|, \tag{20.18}$$

где

$$\|f\| = \max_j \|f^j\|_F. \tag{20.19}$$

Замечание 20.2. При проверке условия устойчивости $\|T\| \leqslant 1$ мы использовали начальное условие (20.15). Это совсем не обязательно. В качестве начального условия можно было выбрать любую функцию из того же класса гладкости, что и функции g и f. □

11. Реализация схемы метода стабилизации.

Схема реализации алгоритма имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&F^j = -A\varphi^j + f^j, \\
&\left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right)\xi^{j+1/n} = F^j, \\
&\left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right)\xi^{j+2/n} = \xi^{j+1/n}, \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\left(E + \frac{\tau}{2} A_n\right)\xi^{j+1} = \xi^{j+(n-1)/n}, \\
&\varphi^{j+1} = \varphi^j + \tau\xi^{j+1}.
\end{aligned} \tag{20.11}$$

12. Метод предиктор-корректор.

МЕТОД ПРЕДИКТОР-КОРРЕКТОР

Следующий класс методов расщепления — метод предиктор-корректор (схема аппроксимационной поправки), так же как и схема с факторизацией оператора, будет рассматриваться в применении к матричным эволюционным уравнениям (18.1) с оператором, не зависящим от t.

где

$$C_1^{-1} = \left(E + \frac{\tau}{2} A_1^*\right)^{-1} \left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right), \quad \| \varphi \|_{C_1^{-1}} = (C_1^{-1} \varphi, \varphi)_\Phi^{1/2}.$$

Для того чтобы доказать справедливость (23.5), перепишем (23.3) в виде

$$\left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right)\left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right) \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda \varphi^j = 0,$$

где

$$\Lambda = \left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right)\left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right) A \left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right)^{-1} \left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right)^{-1}.$$

Разложив правую часть последнего соотношения в ряд по степеням τ в предположении

$$\frac{\tau}{2} \| A_\alpha \| < 1,$$

получим $\Lambda = A + O(\tau^2)$. С помощью оценки, использованной для метода стабилизации, приходим к выводу, что метод предиктор-корректор имеет второй порядок аппроксимации по τ. Исследуем устойчивость этого метода. С этой целью уравнение (23.3) запишем в виде

$$\left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right)\left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right) \frac{\Phi^{j+1} - \Phi^j}{\tau} + A \Phi^j = 0, \qquad (23.6)$$

где

$$\Phi^j = \left(E + \frac{\tau}{2} A_2\right)^{-1} \left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right)^{-1} \varphi^j. \qquad (23.7)$$

Разностное уравнение (23.6) устойчиво, так как

$$\| \Phi^{j+1} \|_{C_2} \leqslant \| \Phi^j \|_{C_2}. \qquad (23.8)$$

Отсюда с учетом соотношений (23.7) и (23.8) получим

$$\left\| \left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right)^{-1} \varphi^{j+1} \right\|_\Phi \leqslant \left\| \left(E + \frac{\tau}{2} A_1\right)^{-1} \varphi^j \right\|_\Phi,$$

или

$$\| \varphi^{j+1} \|_{C_1^{-1}} \leqslant \| \varphi^j \|_{C_1^{-1}} \leqslant \ldots \leqslant \| g \|_{C_1^{-1}}.$$

Для неоднородной задачи метод предиктор-корректор сформулируем следующим образом:

$$\frac{\varphi^{j+1/4} - \varphi^j}{\tau/2} + A_1 \varphi^{j+1/4} = f^j,$$

$$\frac{\varphi^{j+1/2} - \varphi^{j+1/4}}{\tau/2} + A_2 \varphi^{j+1/2} = 0, \qquad (23.9)$$

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + A \varphi^{j+1/2} = f^j,$$