

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. Ю. Чеботарев

ВВЕДЕНИЕ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебно – методическое пособие для студентов математических
специальностей

Владивосток

2020

Чеботарев А.Ю.

Введение в функциональный анализ. Учебно – методическое пособие. 2020. - 38 с.

Рецензенты: И.В. Прохоров, д.ф.-м.н.

В учебно - методическом пособии рассмотрены основные факты из теории метрических, нормированных и гильбертовых пространств, а также из теории линейных операторов, снабженные значительным количеством разобранных примеров и упражнений. Приводятся варианты контрольных заданий по разобранным темам.

Пособие предназначено для проведения лекционных и практических занятий по дисциплинам «Функциональный анализ», «Прикладной функциональный анализ».

Содержание

Вместо предисловия	4
1. Метрические, нормированные и гильбертовы пространства	5
1.1. Что такое метрика?	5
1.2. Примеры метрических пространств	6
1.3. Множества в метрических пространствах	9
1.4. Сходимость и полнота	11
1.5. Компактность	13
1.6. Как линейное пространство сделать нормированным?	15
1.7. Скалярные произведения и гильбертовы пространства	19
2. Линейные операторы	24
2.1. Пространство линейных непрерывных операторов	24
2.2. Обратный оператор	27
2.3. Замкнутые операторы	30
3. Задачи и упражнения	32
3.1. Пространства	32
3.2. Линейные операторы	34

Вместо предисловия

Две основные причины побудили к написанию этого учебного пособия. Многие годы чтения курса по прикладному функциональному анализу выявили необходимость того, чтобы студенты имели лаконичное пособие, максимально автономное и предназначенное, в первую очередь, для интенсивного практикума. Кроме того, в процессе консультаций с инженерами и физиками, обращавшимися за советами по поводу трудностей, с которыми они сталкивались при решении возникавших перед ними задач, выяснилось, что инженеру, не являющемуся профессиональным математиком и желающему строго обосновать предлагаемый им способ решения практической задачи, необходимо ознакомиться с современным математическим аппаратом, по крайней мере с основами функционального анализа. Этот раздел математики содержит много новых для нематематика абстрактных понятий, которые нельзя усвоить второпях. Таким образом, возникла идея подготовки учебного пособия, содержащего теоретические сведения по функциональному анализу, которые можно глубже усвоить с помощью упражнений и контрпримеров. Литература по функциональному анализу достаточно обширна, но представлена она, в основном, «толстыми» книгами известных авторов, изданными давно и практически отсутствующими в библиотеках вузов. Данное пособие призвано восполнить указанный пробел.

Автор, Владивосток, 2020

1. Метрические, нормированные и гильбертовы пространства

1.1. Что такое метрика?

Определение 1. Если каждой паре элементов x, y некоторого множества X поставлено в соответствие число $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$, называемое расстоянием между элементами x и y так, что

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$,

то множество X называется метрическим пространством с метрикой $\rho(x, y)$.

Свойство 1 называется аксиомой тождества, а свойство 2 – аксиомой треугольника.

Пример 1.1. Показать, что из аксиом 1, 2 вытекает свойство (аксиома симметрии)

3. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$.

Решение. Положим в аксиоме треугольника $x = z$. Тогда из аксиомы тождества вытекает $\rho(x, y) \leq \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X$. Меняя местами x и y , получаем симметричность метрики. Если в аксиоме 2 положить $y = x$, получим неотрицательность метрики.

Как следует из аксиом 1.-3. метрика наследует свойства обычного расстояния между точками на плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве.

Метрическое пространство определяется выбором множества X и метрики ρ ; одно и то же множество может порождать различные метрические пространства при введении различных метрик. Элементами метрического пространства могут быть смоделированные объекты различной природы: числа, векторы, функции, студенты и т. п. Эти элементы называются *точками* метрического пространства.

Пример 1.2. Пусть X — произвольное множество. Доказать, что формула

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = y, \\ 1 & \text{при } x \neq y \end{cases}$$

определяет метрику на X (X – дискретное пространство).

Решение. Выполнение аксиомы 1 очевидно. Проверим справедливость неравенства треугольника. Последнее не выполняется, если $\rho(x, y) = 1$, $x \neq y$, и при этом $\rho(x, z) + \rho(y, z) = 0$. Однако это возможно только если $\rho(x, z) = \rho(y, z) = 0$ и тогда $x = z$ и $y = z$, что противоречит условию $x \neq y$.

Пример 1.3. Пусть $\rho(x, y)$ — метрика на X . Доказать, что функции

$$1. \rho_1(x, y) = \rho(x, y)/(1 + \rho(x, y)),$$

$$2. \rho_2(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y)),$$

$$3. \rho_3(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$$

также являются метриками.

Решение. Нетрудно видеть, что если взять неубывающую функцию $F(t)$, которая обращается в нуль только при $t = 0$, и при этом $F(a+b) \leq F(a) + F(b)$, то функция $\tilde{\rho}(x, y) = F(\rho(x, y))$ также будет метрикой.

В нашем случае:

$$1. F(t) = t/(1 + t), \quad t \geq 0;$$

$$2. F(t) = \ln(1 + t), \quad t \geq 0;$$

$$3. F(t) = \min\{1, t\}, \quad t \geq 0;$$

и все три введенные функции ρ_1, ρ_2, ρ_3 являются метриками.

Задание на множестве X метрической структуры позволяет определить сходимость последовательности элементов из X .

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства X называется сходящейся к элементу $x \in X$, если числовая последовательность $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ или $x_n \rightarrow x$).

1.2. Примеры метрических пространств

1. Евклидово пространство размерности $n \geq 1$:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, n}, \right. \\ \left. \rho(x, y) = \left(\sum_1^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \right\}.$$

2. Пространство p -суммируемых последовательностей:

$$l_p = \left\{ x : x = (x_1, x_2, \dots), \sum_1^\infty |x_i|^p < \infty, \right. \\ \left. \rho(x, y) = \left(\sum_1^\infty |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1 \right\}.$$

3. Пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций:

$$C[a, b] = \left\{ x = x(t), \quad t \in [a, b] - \text{непрерывная функция}, \right. \\ \left. \rho(x, y) = \max_{[a, b]} |x(t) - y(t)| \right\}.$$

4. Пространство Лебега с показателем p :

$$L^p(a, b) = \left\{ x = x(t), \quad t \in (a, b) \right\},$$

где $x(t)$ — измеримая на (a, b) функция, интегрируемая по Лебегу со степенью $p \geq 1$, $\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \right)^{1/p}$.

Пример 1.4. Проверить аксиомы метрики для пространств \mathbb{R}^n , l_p , $C[a, b]$, $L^p(a, b)$.

Решение.

1. Пространство \mathbb{R}^n с метрикой $\rho(x, y) = \left(\sum_1^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$. Выполнение аксиомы тождества очевидно, а аксиома треугольника следует из применения неравенства Минковского для сумм:

$$\rho(x, y) = \left(\sum_1^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_1^n ((x_i - z_i) + (z_i - y_i))^2 \right)^{1/2} \leq \\ \leq \left(\sum_1^n (x_i - z_i)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_1^n (z_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

2. Пространство l_p с метрикой

$$\rho(x, y) = \left(\sum_1^\infty |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Выполнение аксиомы тождества очевидно, а аксиома треугольника следует из применения неравенства Минковского для рядов:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \left(\sum_1^\infty |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_1^\infty (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|)^p \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left(\sum_1^\infty |x_i - z_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_1^\infty |z_i - y_i|^p \right)^{1/p} = \rho(x, z) + \rho(z, y). \end{aligned}$$

3. Пространство $C[a, b]$ с метрикой

$$\rho(x, y) = \max_{[a, b]} |x(t) - y(t)|.$$

Выполнение аксиомы тождества очевидно, а выполнение аксиомы треугольника следует из неравенства $|a + b| \leq |a| + |b|$:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \max_{[a, b]} |x(t) - y(t)| = \max_{[a, b]} |x(t) - z(t) + z(t) - y(t)| \leq \\ &\leq \max_{[a, b]} |x(t) - z(t)| + \max_{[a, b]} |z(t) - y(t)| = \rho(x, z) + \rho(z, y). \end{aligned}$$

4. Пространство $L^p(a, b)$ с метрикой

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Выполнение аксиомы тождества очевидно, а аксиома треугольника следует из применения неравенства Минковского для интегралов:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p} = \\ &= \left(\int_a^b |(x(t) - z(t)) + (z(t) - y(t))|^p dt \right)^{1/p} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left(\int_a^b |x(t) - z(t)|^p \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t) - z(t)|^p \right)^{1/p} = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Упражнение 1.1. Проверить аксиомы метрики

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in T} |x(t) - y(t)|,$$

для множества $M(T)$ всех ограниченных функций, определенных на множестве T .

Пример 1.5. Каким условиям должна удовлетворять функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, чтобы на вещественной прямой можно было задать метрику $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$?

Решение. Аксиома треугольника справедлива, очевидно, для произвольной функции f . Для справедливости аксиомы тождества необходимо и достаточно, чтобы из условия $f(x) = f(y)$ вытекало $x = y$, то есть чтобы функция f была обратимой.

1.3. Множества в метрических пространствах

1. Открытый шар: $B(a, r) = \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$.
2. Замкнутый шар: $\overline{B}(a, r) = \{x \in X : \rho(x, a) \leq r\}$.
3. Ограниченное множество M : существует шар $B(a, r)$, такой, что $M \subset B(a, r)$; число

$$\text{diam} M = \sup \{ \rho(x, y) : x, y \in M \},$$

называется *диаметром* M . Числа

$$\rho(x, M) = \inf \{ \rho(x, y) : y \in M \},$$

$$\rho(M, K) = \inf \{ \rho(x, y) : x \in M, y \in K \},$$

называются *расстоянием от точки x до множества M* и *расстоянием между множествами M и K* соответственно.

4. Открытое множество

$$M \subset X : \forall x \in M \exists r > 0 B(x, r) \subset M,$$

т. е. любая точка множества M является *внутренней точкой* и, значит, содержится в M вместе с некоторым шаром. Для множества $M \subset X$ точка $a \in X$ называется *предельной точкой* этого множества, если в любом шаре $B(a, r), r > 0$ найдется точка $x \in M, x \neq a$; точка $a \in M$ называется *изолированной* точкой множества M , если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $B(a, \varepsilon) \cap M = \{a\}$. *Замыканием* множества M называется множество \overline{M} , полученное присоединением к M всех его предельных точек.

5. *Замкнутое множество* $M \subset X: \overline{M} = M$.
6. Множество $M \subset K$ *плотное* в множестве $K: K \subset \overline{M}$. В частности, множество M называется *всюду плотным* в пространстве X , если $\overline{M} = X$; M *нигде не плотно*, если каждый шар пространства X содержит в себе некоторый шар, свободный от точек M .
7. Пространство X называется *сепарабельным*, если оно содержит счетное всюду плотное множество.
8. *Граница* ∂M множества M :

$$\partial M = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0, M \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset, (X \setminus M) \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\}.$$

Пример 1.6. Доказать

1. $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$;
2. $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

Решение.

1. Пусть $x \in \overline{M \cup N}$. Тогда существует последовательность $x_n \in M \cup N, x_n \rightarrow x$. Из нее можно выбрать подпоследовательность $x'_n \in M, x'_n \rightarrow x$ или $x''_n \in N, x''_n \rightarrow x$, то есть $x \in \overline{M}$ или $x \in \overline{N}$. Таким образом, $\overline{M \cup N} \subseteq \overline{M} \cup \overline{N}$. Обратно, если $x \in \overline{M} \cup \overline{N}$, то либо $x \in M$ либо $x \in N$, если x - предельная точка либо множества M или множества N , следовательно, $x \in \overline{M \cup N}$.
2. Множество $\overline{\overline{M}}$ содержит множество \overline{M} и все его предельные точки, а поскольку \overline{M} замкнуто, то содержит все свои предельные точки. Следовательно $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

Пример 1.7. Доказать, что граница ∂M замкнутое множество и при этом $\partial M = \partial(X \setminus M)$.

Решение. Равенство $\partial M = \partial(X \setminus M)$ следует из определения граничной точки, в каждой окрестности которой есть точки из данного множества и из его дополнения. Покажем замкнутость ∂M . Пусть $x_n \in \partial M, n = 1, 2, \dots$ и $x_n \rightarrow x$. В каждой $\varepsilon/2$ -окрестности точки x есть члены последовательности x_n , $\rho(x, x_n) < \varepsilon/2$. $\varepsilon/2$ -окрестность такой точки x_n целиком лежит в ε -окрестности точки x , так как если $\rho(y, x_n) < \varepsilon/2$, то $\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) < \varepsilon$. Поскольку x_n - граничная точка, в ее $\varepsilon/2$ -окрестности есть точки из M и из его дополнения, эти же точки будут лежать и в ε -окрестности x . Следовательно, $x \in \partial M$ и граница – замкнутое множество.

Пример 1.8. Пусть $A, B \subset X$ – замкнутые множества, $A \cap B = \emptyset$. Возможно ли, что $\rho(A, B) = 0$?

Решение

Да, возможно. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1/x\}$. Множества A и B - замкнутые, $A \cap B = \emptyset$, а расстояние между ними

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(a, b), a \in A, b \in B\} = \inf\{1/|x|, x \in \mathbb{R}\} = 0.$$

1.4. Сходимость и полнота

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства X называется фундаментальной, если $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$.

Пример 1.9. Доказать, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.

Решение. Пусть последовательность x_n сходится к точке x . Тогда на основании неравенства треугольника заключаем, что

$$0 \leq \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x, x_m) \rightarrow 0, \quad \text{если } n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty.$$

Последнее означает фундаментальность последовательности.

Определение 4. Метрическое пространство называется полным, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится.

Одно и то же множество с разными метриками может порождать полное или неполное метрическое пространство. В полном пространстве для последовательности замкнутых множеств, вложенных друг в друга, диаметры которых стремятся к нулю, всегда найдется единственная точка, принадлежащая всем этим множествам.

Пример 1.10. Доказать, что фундаментальная последовательность ограничена.

Решение. Пусть x_n — фундаментальная последовательность. Тогда найдется такой номер n_0 , что

$$\rho(x_{n_0}, x_{n_0+p}) < 1, \forall p \geq 1.$$

Следовательно, вся последовательность содержится в шаре

$$B(x_{n_0}, r), \text{ где } r = \max_{1 \leq j \leq n_0-1} \{\rho(x_{n_0}, x_j); 1\},$$

то есть является ограниченной.

Пример 1.11. Пусть $x_n \in X$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1})$ сходится. Доказать, что $\{x_n\}$ фундаментальная. Верно ли обратное?

Решение. Рассмотрим расстояния

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+p}) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \rho(x_{n+2}, x_{n+p}) \leq \dots \leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \rho(x_k, x_{k+1}). \end{aligned}$$

В силу критерия Коши для числовых рядов, $\rho(x_n, x_{n+p}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то есть последовательность x_n фундаментальна. Обратное, вообще говоря, неверно. Рассмотрим, например, числовую последовательность $x_{2k} = 1/k, x_{2k-1} = 1/k^2, k = 1, 2, \dots$. Очевидно, что данная последовательность стремится к нулю по метрике $\rho(x, y) = |x - y|$ и поэтому фундаментальна. Однако, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\rho(x_{2k-1}, x_{2k}) + \rho(x_{2k}, x_{2k+1})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right)$$

расходится.

Замечание. Пространства, приведенные в п. 1.2, являются полными. Примером неполного метрического пространства может служить множество \mathbb{Q} рациональных чисел с обычным расстоянием $\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$. В нем последовательность $x_n = (1 + 1/n)^n \in \mathbb{Q}$ является фундаментальной, однако $\lim x_n = e$ не является рациональным числом.

1.5. Компактность

В XIX веке чешский математик Б. Больцано заметил, что всякое ограниченное множество точек числовой прямой имеет хотя бы одну предельную точку. Идея выделения сходящейся последовательности из некоторых множеств привела к следующему понятию.

Определение 5. Множество K метрического пространства X называется компактным, если из любой бесконечной последовательности $\{x_n\} \subset K$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу $x \in K$.

Пример 1.12. Доказать, что компактное множество замкнуто и ограничено.

Решение. По определению компактного множества K , из любой последовательности его элементов можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к элементу этого множества, то есть оно содержит все свои предельные точки, следовательно, оно замкнуто. Предположим, что K — неограничено. Выберем элемент $x_1 \in K$, к нему подберем $x_2 \in K$, $\rho(x_1, x_2) > 1$. Далее, в силу неограниченности K , строим последовательность $\{x_m\} \subset K$ такую, что $\rho(x_m, x_k) > 1$ при $m \neq k$, из которой нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность.

Множество $M \subset X$ называется *относительно компактным*, если \overline{M} — компактное множество. Множество $M \subset X$ называется *предкомпактным*, если из любой его последовательности можно выделить фундаментальную подпоследовательность. В полном метрическом пространстве предкомпактное множество

является относительно компактным. Множество A образует ε -сеть для множества M , если $\forall x \in M$ найдется $y \in A$ такой, что $\rho(x, y) < \varepsilon$. Если $\forall \varepsilon > 0$ множество M имеет конечную ε -сеть, то M называется *вполне ограниченным*. Оказывается, что в полном метрическом пространстве компактность \overline{M} равносильна тому, что M вполне ограничено (теорема **Хаусдорфа**). Пусть $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ — замкнутое ограниченное множество; через $C(\overline{\Omega})$ обозначаем пространство непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций, $\rho(x, y) = \max_{t \in \overline{\Omega}} |x(t) - y(t)|$. Множество $M \subset C(\overline{\Omega})$ называется *равномерно ограниченным*, если $\exists \alpha > 0 : |x(t)| \leq \alpha \forall x \in M$ при всех $t \in \overline{\Omega}$. При этом постоянная α не зависит от $x(t)$. *Равностепенная непрерывность* множества M (функций из множества M) означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее только от ε , такое что

$$\forall t_{1,2} \in \overline{\Omega}, |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon \forall x \in M.$$

Подчеркнем, что δ не зависит ни от выбора t_1, t_2 , ни от функции $x = x(t) \in M$. Относительная компактность множества $K \subset C(\overline{\Omega})$ равносильна равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности K (теорема **Арцела**).

Пример 1.13. Привести пример ограниченного и замкнутого множества в $C[0, 1]$, не являющегося компактным.

Решение. Рассмотрим множество непрерывных кривых

$$K = \{x(t) \in C[0, 1] : x(0) = 0, x(1) = 1, |x(t)| \leq 1\}.$$

Очевидно, это множество ограничено и замкнуто. Покажем, что оно не компактно. Рассмотрим последовательность функций из K :

$$x_n(t) = \sin \frac{\pi}{2}(4n+1)t, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть $t_1 = \frac{1}{4n+1}$, $t_2 = \frac{2}{4n+1}$. Тогда $|x_n(t_1) - x_n(t_2)| = 1$, в то время как $|t_1 - t_2| = \frac{1}{4n+1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, функции из K не равностепенно непрерывны и множество K не компактно.

Пример 1.14. Доказать, что множество

$$K = \{x = x(t) : x(t) = e^{-\alpha t}, t \in [0, 1], \alpha \in [1, 2]\}$$

вполне ограничено в $C[0, 1]$.

Решение. K равномерно ограничено, так как $\forall t \in [0, 1]$, $\alpha \in [1, 2]$, $|x(t)| = |e^{-\alpha t}| \leq 1$. Покажем равностепенную непрерывность функций из K . По формуле Лагранжа

$$|x(t_1) - x(t_2)| = |x'(\xi)| \cdot |t_1 - t_2| = \alpha |t_1 - t_2| \leq 2 |t_1 - t_2|.$$

Следовательно, по теореме Арцела множество \overline{K} компактно.

Типичным примером компактного множества в $C(\overline{\Omega})$ является следующее:

$$K = \{x = x(t) \in C(\overline{\Omega}) : |x(t)| \leq \alpha \ \forall t \in \overline{\Omega}, |\nabla x(t)| \leq \beta \ \forall t \in \Omega\}.$$

Компактность множеств в метрических пространствах активно используется в теории экстремальных задач. Это основано на обобщении известной теоремы Вейерштрасса:

Если X, Y – метрические пространства, $A \subset X$ – компактное множество и функция $f : A \rightarrow Y$ непрерывна на A , то $f(A)$ также компактно.

В частности, если $Y = \mathbb{R}$, то $f(A)$ – ограниченное и замкнутое множество на числовой прямой, и, следовательно, функция f ограничена на A и достигает своих наибольшего и наименьшего значений.

Упражнение 1.2. *Функционал $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ называется полунепрерывным снизу (сверху), если из условия $x_n \in A, x_n \rightarrow x \in A$ следует, что $f(x) \leq \liminf f(x_n)$ (соответственно, $f(x) \geq \limsup f(x_n)$). Доказать, что полунепрерывный снизу (сверху) и определенный на компактном множестве функционал ограничен снизу (сверху) и достигает своего наименьшего (наибольшего) значения.*

Замечание. Система $\{A_\alpha\}$ открытых множеств метрического пространства X называется открытым покрытием множества K , если каждая точка $x \in K$ принадлежит хотя бы одному из множеств A_α этой системы. Компактность множества K эквивалентна тому, что из любого открытого покрытия этого множества можно выделить конечное подпокрытие.

1.6. Как линейное пространство сделать нормированным?

Рассмотрим линейное (векторное) пространство с умножением на вещественные числа. Понятие линейного пространства носит чисто алгебраический характер. Для того, чтобы изучать в

этом пространстве задачи, связанные со сходимостью элементов, нужно определить расстояние между элементами, т. е. ввести метрику.

Определение 6. *Линейное пространство E над полем \mathbb{R} называется нормированным пространством, если определено отображение:*

$$\forall x \in E \mapsto \|x\| \geq 0 \text{ такое, что}$$

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (условие тривиальности);
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (условие однородности);
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Число $\|x\|$ называется **нормой** элемента (точки, вектора) $x \in E$.

Любое нормированное пространство является метрическим, если определить метрику: $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Поэтому все понятия, определенные в п. 1.1–1.5 для метрических пространств используются и в нормированных. Например, *сходимость по норме* (или *сильная сходимость*) последовательности $\{x_n\} \subset E$ к элементу $x \in E$ имеет место, если $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$.

Если нормированное пространство является полным в смысле сильной сходимости, то оно называется *банаховым пространством* (или пространством Банаха). Метрические пространства, приведенные в п. 1.2, являются банаховыми по соответствующим нормам:

1. \mathbb{R}^n . $\|x\|_{\mathbb{R}^n} = (\sum_1^n x_i^2)^{1/2}$;
2. l_p . $\|x\|_{l_p} = (\sum_1^\infty |x_i|^p)^{1/p}$, $p \geq 1$;
3. $C[a, b]$. $\|x\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$;
4. $L^p(a, b)$. $\|x\|_{L^p(a, b)} = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$, $p \geq 1$.

Так как нормированное пространство E фактически является линейным пространством, то для E имеют смысл понятия, определенные для линейных пространств. Например:

1. Пусть $A \subset E$, $B \subset E$. $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \subset E$

2. Множество $L \subset E$ называется **линейным многообразием**, если

$$\forall x, y \in L, \forall \lambda \in \mathbb{R} : x + y \in L, \lambda \cdot x \in L.$$

3. Множество $x_0 + L$, где $x_0 \in E$, L — линейное многообразие, называется **аффинным многообразием**.
4. Элементы x_1, x_2, \dots, x_n линейного пространства E называются **линейно независимыми**, если

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i = 0, \quad c_i \in \mathbb{R} \Rightarrow c_i = 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

В противном случае элементы x_1, x_2, \dots, x_n будут линейно зависимыми.

5. **Базисом** линейного многообразия $L \subset E$ называется множество линейно независимых элементов $x_1, \dots, x_n \subset L$ таких, что $\forall x \in L \exists c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n : x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$.

Числа c_i называются **координатами** элемента x в данном базисе; число n называется **размерностью** L , $n = \dim L$; L называется **n -мерным** многообразием. Если $\forall n \in \mathbb{N}$ в L можно найти n линейно независимых элементов, то L называется **бесконечномерным** линейным многообразием, $\dim L = \infty$.

6. **Отрезком**, соединяющим точки $x, y \in E$, называется множество

$$[x, y] = \{\alpha x + \beta y : \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1\}.$$

Множество $A \subset E$ называется **выпуклым**, если $[x, y] \subset A \forall x, y \in A$.

Соединение алгебраической структуры линейного пространства и метрических свойств, определяемых нормой, приводит к понятию **подпространства**, которое есть просто **замкнутое линейное многообразие**. Заметим, что в случае если L — линейное многообразие, $n = \dim L < \infty$, то $\bar{L} = L$, то есть L — подпространство. Для бесконечномерных линейных многообразий равенство $\bar{L} = L$ может не иметь места, то есть не

все линейные многообразия являются подпространствами. Если L — подпространство пространства E , $\dim L = \infty$, то последовательность линейно независимых элементов $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset L$ называется счетным базисом L , если $\forall x \in L \exists \{c_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$:

$$x = \sum c_i x_i, \text{ т.е. } \|x - \sum_{i=1}^n c_i x_i\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Пример 1.15. Пусть L — множество всех многочленов степени не больше n , определенных на $[a, b]$. Показать, что L — подпространство в $C[a, b]$. Найти его базис.

Решение. Очевидно, что L — линейное многообразие в $C[a, b]$. L — замкнуто, так как имеет конечную размерность равную $n+1$, базисом является множество $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$. Функции

$$1, t, t^2, \dots, t^n, t \in [a, b]$$

— линейно независимы, так как из того, что $\sum_{i=0}^n c_i \cdot t^i = 0, t \in [a, b]$ следует, что $c_i = 0, i = \overline{0, n}$. Действительно, дифференцируя n раз по t , получим $c_n = 0$, и далее $c_{n-1} = \dots = c_0 = 0$.

Пример 1.16. Образует ли подпространство в $C[a, b]$ множество всех многочленов?

Решение. Пусть L_0 — множество всех многочленов на $[a, b]$. Очевидно, что L_0 является линейным многообразием. Однако, L_0 не замкнуто, что показывает следующий пример. Пусть

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}, x_n \in L_0.$$

Последовательность $x_n(t)$ равномерно сходится к функции e^t на $[a, b]$ при $n \rightarrow \infty$. Но предельная функция e^t не является многочленом.

Пример 1.17. Доказать, что шар в нормированном пространстве не может содержать ненулевого линейного многообразия.

Решение. Пусть $B = \{x \in X : \|x\| < R\}$ — шар в пространстве X с нормой $\|\cdot\|$. Предположим, что L — линейное

многообразие и $L \subset B$.

Тогда $\forall x \in L, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda x \in L$, т.е.

$$\begin{aligned} |\lambda| \|x\| < R &\Rightarrow \|x\| < R/|\lambda| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow L = \{0\}, \end{aligned}$$

т.е. L - нулевое линейное многообразие.

В одном и том же линейном пространстве E можно по-разному определять норму элемента $x \in E$. Две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ называются **эквивалентными**, если:

$$\exists \alpha, \beta > 0, \alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \quad \forall x \in E.$$

В этом случае из сходимости по одной норме следует сходимость по другой норме, а если по одной из этих норм E является полным (т.е. **банаховым**), то E является банаховым и по другой (из эквивалентных) норме. Отметим также, что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

Вложение нормированного пространства X в нормированное пространство $Y, X \subset Y$ называется непрерывным, если

$$\|x\|_Y \leq \gamma \|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

где γ не зависит от x . Если при этом ограниченное в X множество будет относительно компактным в Y , то вложение называется **компактным**.

В общем случае в нормированных пространствах не определено понятие угла между элементами и, соответственно, ортогональности элементов. Тем не менее справедлив следующий результат о существовании **«почти перпендикуляра»** к подпространству $L \subset E, L \neq E$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists y \in E, \|y\| = 1 \Rightarrow \|x - y\| > 1 - \varepsilon \quad \forall x \in L.$$

($y \in E$ — «почти перпендикуляр»).

1.7. Скалярные произведения и гильбертовы пространства

Пусть V — линейное пространство над \mathbb{R} . **Скалярное произведение** на V есть симметрическая билинейная форма, являющаяся при этом положительно определенной. Каждой паре элементов $x, y \in V$ ставится в соответствие число (x, y) , удовлетворяющее аксиомам: $\forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

1. $(x, y) = (y, x)$ (симметрия);
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$; $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (линейность);
3. $(x, x) > 0$, если $x \neq 0$ (положительная определенность).

Пространство V со скалярным произведением называется **евклидовым**.

Замечание. Рассматривая линейное пространство V над полем \mathbb{C} комплексных чисел, следует заменить аксиому 1 в определении скалярного произведения условием $(x, y) = \overline{(y, x)}$. Пространство V при этом называется **унитарным** пространством.

Фундаментальным свойством скалярного произведения является справедливость **неравенства Коши-Буняковского**

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x) \cdot (y, y),$$

которое сразу следует из неотрицательности квадратичной функции

$$f(t) = (x + ty, x + ty) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(достаточно положить $t = -(x, x)/(y, y)$, если $y \neq 0$). Неравенство переходит в равенство тогда и только тогда, когда x отличается от y скалярным множителем.

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что в евклидовом (и унитарном) пространстве можно определить норму

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

и, таким образом, евклидово пространство будет нормированным (и соответственно метрическим) пространством.

Наличие скалярного произведения позволяет определить *угол между ненулевыми элементами* евклидова пространства x, y ; $\varphi = \arccos\{(x, y)/(\|x\| \cdot \|y\|)\}$. В частности, элементы x и y из V называются **ортогональными** ($x \perp y$), если $(x, y) = 0$; множество $z \in V$ таких, что $(z, x) = 0 \quad \forall x \in M \subset V$, обозначается M^\perp (*перпендикуляр к M*).

Определение 7. Евклидово (унитарное) пространство V называется *гильбертовым*, если оно полное по норме, определяемой скалярным произведением.

Таким образом гильбертово пространство является банаховым, т. е. полным нормированным пространством.

Замечание. Вещественное нормированное пространство можно сделать евклидовым в том и только в том случае, если в нем выполняется равенство «параллелограмма»

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in V,$$

при этом скалярное произведение имеет вид:

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Пример 1.18. Доказать, что скалярное произведение есть непрерывная функция относительно сходимости по норме.

Решение. Пусть $x_n \rightarrow x$ и $y_n \rightarrow y$, тогда $\|x_n\|$ и $\|y_n\|$ - ограничены, то есть $\|x_n\|, \|y_n\| \leq M$, где константа M не зависит от n . Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &= |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| = \\ &= |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|y\| \cdot \|x_n - x\| \leq \\ &\leq M \cdot \|y_n - y\| + M \cdot \|x_n - x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

поскольку $\|y_n - y\|$ и $\|x_n - x\|$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Приведем примеры вещественных гильбертовых пространств.

$$1. \mathbb{R}^n. \quad (x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \quad \text{где } x = \{x_k\}_1^n, y = \{y_k\}_1^n.$$

$$2. l_2. \quad (x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad \text{где } x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots).$$

$$3. L^2(\Omega), \text{ где } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ — открытая область. } (u, v) = \int_{\Omega} (u \cdot v) dx \text{ (интеграл Лебега).}$$

Если M — замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве V , то для любого элемента $x \in V$ существует единственный элемент $y \in M$ такой, что

$$\rho(x, M) = \inf_{z \in M} \|x - z\| = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}.$$

Элемент y называется **проекцией** элемента x на множество M , $y = P_M(x)$. Очевидно, что условие $x = P_M(x)$ равносильно тому, что $x \in M$. Выбрав в качестве M подпространство

$H \subset V$, заключаем, что любой элемент $x \in V$ допускает единственное представление в виде:

$$x = u + v, \quad u \in H, \quad v \in H^\perp,$$

при этом $u = P_H(x), v = P_{H^\perp}(x)$ и справедлива теорема Пифагора

$$\|x\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Пример 1.19. Доказать, что если H — подпространство гильбертова пространства V , то H^\perp также будет подпространством.

Решение. H^\perp — линейное многообразие, т.к. если $x, y \in H^\perp$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то $(\lambda x + y, z) = \lambda(x, z) + (y, z) = 0$, то есть $\lambda x + y \in H^\perp$. Замкнутость H^\perp следует из непрерывности скалярного произведения.

Равенство $x = P_H(x) + P_{H^\perp}(x) \quad \forall x \in V$ часто записывают в виде $V = H \oplus H^\perp$ и говорят, что V есть **ортогональная сумма** подпространств H и H^\perp . Напомним, что система элементов $\{x_1, x_2, \dots\} \subset V$ называется

1. **линейно независимой**, если $\forall n \in \mathbb{N}$ система $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ линейно независима;
2. **ортогональной**, если $(x_k, x_j) = 0$ при $k \neq j, x_k \neq 0$;
3. **ортонормированной**, если $(x_k, x_j) = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$

Оказывается, эти понятия тесно связаны — ортогональная система всегда линейно независима и, наоборот, любую линейно независимую систему можно ортонормировать с помощью процесса **ортонормализации** Шмидта. Полагаем $e_1 = x_1/\|x_1\|$. Далее, если

$$q_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} (x_k, e_j) e_j, \quad k = 2, 3, \dots,$$

то $e_k = q_k/\|q_k\|$.

Для конечной системы x_1, x_2, \dots, x_n линейная независимость равносильна условию $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det(x_k, x_j) \neq 0$. Данный определитель называется определителем Грама.

Пусть $\{e_1, e_2, \dots\}$ — ортонормированная система в гильбертовом пространстве V . Числа $c_k = (x, e_k)$, $k = 1, 2, \dots$ называются коэффициентами Фурье элемента $x \in V$ относительно системы $\{e_k\}$. Для любого элемента $x \in V$ справедливо **неравенство Бесселя**:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ортонормированная система $\{e_j\}$ называется **полной**, если из условия

$$c_k = (x, e_k) = 0, \quad \forall k$$

следует, что $x = 0$. В. А. Стеклов, исследуя вопрос о разложимости функций по ортогональным системам, ввел понятие **замкнутости** системы $\{e_j\}$, означающее, что подпространство, порождаемое данной системой, совпадает со всем пространством V , и при этом любой элемент $x \in V$ можно представить в виде **ряда Фурье**

$$x = \sum_k c_k e_k, \quad c_k = (x, e_k).$$

На основании ортогональности системы $\{e_k\}$ отсюда следует равенство Парсеваля–Стеклова

$$\|x\|^2 = \sum_k |c_k|^2.$$

Оказывается, замкнутость и полнота в гильбертовом пространстве — равносильные понятия. Замкнутая (полная) ортонормированная система называется **ортобазисом** гильбертова пространства.

Упражнение 1.3. Доказать, что система

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2t, \dots \right\}$$

является ортобазисом в пространстве $L^2(-\pi, \pi)$.

2. Линейные операторы

2.1. Пространство линейных непрерывных операторов

Пусть E, F -вещественные (комплексные) нормированные пространства. Отображение или оператор $A : D \rightarrow F, D \subset E$, называется **непрерывным** в точке $x_0 \in D$, если $Ax_n \xrightarrow{F} Ax_0$ при условии, что $x_n \in D, x_n \xrightarrow{E} x_0$; оператор называется **ограниченным**, если он отображает любое ограниченное множество из $D = D(A)$ на множество, ограниченное в F . Оказывается, имеется класс операторов, для которых из непрерывности в одной точке следует непрерывность на всей области определения D , и при этом непрерывность равносильна ограниченности.

Определение 8. Оператор $A : D \rightarrow F, D \subset E$ называется *линейным*, если D -линейное многообразие в E и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \forall x, y \in D : A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$.

Линейный оператор $A : E \rightarrow F$ ограничен тогда и только тогда, когда $\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \forall x \in E$, где C не зависит от x . Для линейных операторов из непрерывности следует ограниченность и наоборот.

Упражнение 2.1. Показать, что из непрерывности линейного оператора $A : D \rightarrow F$ в точке $x_0 \in D$ вытекает его непрерывность в каждой точке D , а значит, и ограниченность.

Если множество $\mathcal{L}(E, F)$ линейных непрерывных операторов, действующих из E в F , наделить структурой линейного пространства, полагая $\forall x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$ (или \mathbb{C}):

$$(A + B)x = Ax + Bx, \lambda A(x) = \lambda(Ax),$$

а затем определить норму оператора:

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_F; x \in E, \|x\|_E \leq 1\},$$

то получим нормированное пространство. Важной особенностью пространства $\mathcal{L}(E, F)$ является его **полнота** в случае, если пространство F является полным. Пространство E при этом может и не являться полным. Сходимость по норме пространства $\mathcal{L}(E, F)$ называют **равномерной** сходимостью операторов.

Пример 2.1. Доказать, что $\|A\| = \sup\{\|Ax\|_F, \|x\|_E \leq 1\}$ совпадает с величиной

$$\inf\{C : \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \ \forall x \in E\} = \sup\{\|Ax\|_F : \|x\|_E = 1\}.$$

Решение. Пусть $d = \inf\{C : \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \ \forall x \in E\}$. Полагая $y = x/\|x\|$, $\|y\|_E = 1$, получаем

$$d = \inf\{C : \|Ay\|_F \leq C \ \forall y \in E, \|y\|_E = 1\}.$$

Следовательно,

$$\|A\| = \sup\{\|Ay\|_F, \|y\|_E \leq 1\} \geq \sup\{\|Ay\|_F, \|y\|_E = 1\} \geq d.$$

Далее, по определению точной нижней грани $\exists c_n < d + 1/n$,

$$\|Ax\|_F \leq c_n\|x\|_E < (d + \frac{1}{n})\|x\|_E \leq (d + \frac{1}{n}) \quad \forall x, \|x\|_E \leq 1.$$

Поэтому $\|A\| \leq d + 1/n$. В силу произвольности n , $\|A\| \leq d$. Таким образом, $d = \|A\|$, и, кроме того,

$$\|A\| = \sup\{\|Ay\|_F, \|y\|_E = 1\}.$$

Из определения нормы линейного оператора следует оценка $\|Ax\|_F \leq \|A\| \cdot \|x\|_E$. Поэтому из равномерной сходимости последовательности операторов $A_n \in \mathcal{L}(E, F)$ к оператору A следует сходимость последовательности $\{A_n x\}$, при всех $x \in E$, к элементу $Ax \in F$ (иногда говорят, что $A_n \rightarrow A$ сильно при $n \rightarrow \infty$, если $A_n x \rightarrow Ax \ \forall x \in E$). Обратное, вообще говоря, неверно. Рассмотрим простой пример. Пусть V — гильбертово пространство с ортобазисом $\{e_1, e_2, \dots\}$. Определим последовательность операторов $A_n : V \rightarrow V$, $A_n x = \sum_1^n c_i e_i$, где $c_i = (x, e_i)$. Тогда

$$A_n x \rightarrow x \text{ при } n \rightarrow \infty \ \forall x \in V$$

и, следовательно, $A_n \rightarrow I$, (I -единичный оператор) в смысле поточечной (сильной) сходимости. Однако, равномерная сходимость последовательности $\{A_n\}$ не имеет места, т.к.

$$\|A_n - A_{n+p}\| = \sup\{\|A_n x - A_{n+p} x\|, \|x\| = 1\} \geq$$

$$\|A_n e_{n+1} - A_{n+p} e_{n+1}\| = \|e_{n+1}\| = 1 \ \forall n, p > 0.$$

Приведем две важные теоремы, описывающие поведение последовательностей операторов из $\mathcal{L}(E, F)$.

Теорема 1. (принцип равномерной ограниченности) Пусть E -банахово пространство, F -нормированное пространство, $A_n \in \mathcal{L}(E, F)$ и последовательность $\{A_n x\}$ является ограниченной в F , $\forall x \in E$. Тогда числовая последовательность $\{\|A_n\|\}$ ограничена.

Данный принцип называют теоремой **Банаха-Штейнгауза**.

Теорема 2. Пусть $A, A_n \in \mathcal{L}(E, F)$, где E, F – банаховы пространства. Последовательность A_n сильно сходится к A тогда и только тогда, когда последовательность норм операторов $\{\|A_n\|\}$ ограничена и $A_n x \rightarrow Ax$ ($n \rightarrow \infty$) $\forall x \in L$, где L – линейное многообразие всюду плотное в E .

Важное значение для приложений имеет следующий результат о продолжении линейного оператора, определенного на некотором линейном многообразии, на все пространство с сохранением нормы.

Теорема 3. Пусть $A : D \rightarrow F, D \subset E, E$ – нормированное пространство, F – банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(D, F)$, $\bar{D} = E$. Тогда существует оператор $\tilde{A} \in \mathcal{L}(E, F)$ такой, что $\tilde{A}x = Ax \forall x \in D, \|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Оператор \tilde{A} называется продолжением оператора A по непрерывности.

Множество нулей оператора $A : D \rightarrow F$ называется **ядром** оператора A ,

$$\ker A = \{x \in D : Ax = 0\}.$$

Множество $A(D) = \text{Im}(A)$ значений оператора A может, вообще говоря, и не совпадать со всем пространством F .

Пример 2.2. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$, $\text{Im}(A) \cap \text{Im}(B) = \{0\}$, $A \neq 0, B \neq 0$. Доказать, что A и B линейно независимые элементы пространства $\mathcal{L}(E, F)$.

Решение. Рассмотрим линейную комбинацию

$$c_1 A + c_2 B \in \mathcal{L}(E, F).$$

Пусть $c_1 A + c_2 B = 0$, то есть $\forall x \in E \quad c_1 A(x) = -c_2 B(x)$. Элемент $A(c_1 x) \in \text{Im} A$, элемент $B(-c_2 x) \in \text{Im} B$. Тогда

$$A(c_1 x) = B(-c_2 x) \in \text{Im} A \cap \text{Im} B = \{0\},$$

т.е. $c_1Ax = 0$, $c_2Bx = 0$, $\forall x \in E$. Так как A и B — ненулевые элементы $\mathcal{L}(E, F)$, то $c_1 = c_2 = 0$.

В пространстве $\mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$ можно определить операцию умножения операторов как суперпозицию отображений:

$$(A \cdot B)x = A(Bx), \quad \forall x \in E.$$

Таким образом, в $\mathcal{L}(E)$ степени оператора находятся по формулам

$$A^0x = Ix = x, \quad A^n x = A(A^{n-1}x), \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N}.$$

Пример 2.3. Доказать, что $\forall A, B \in \mathcal{L}(E)$

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|, \quad \|A^n\| \leq \|A\|^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решение.

1. Заметим, что

$$\|(A \cdot B)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\|.$$

Тогда по определению нормы оператора

$$\sup_{\|x\|=1} \|(A \cdot B)x\| \leq \|A\| \sup_{\|x\|=1} \|Bx\|, \quad \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

2. Очевидным образом вытекает из предыдущего:

$$\|A^n\| \leq \|A\| \cdot \|A^{n-1}\| \leq \dots \leq \|A\|^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.2. Обратный оператор

Пусть оператор $A : E \rightarrow F$ (необязательно линейный) обладает тем свойством, что каждому элементу y из множества значений $\text{Im}(A) \subset F$ соответствует только один элемент $x \in E$, для которого $y = Ax$, т.е. решение уравнения $Ax = y$ единственно.

Это соответствие $y \rightarrow x$ рассматривается как оператор $B : \text{Im}(A) \rightarrow E$, и, в силу определения, $B(Ax) = x \quad \forall x \in E$ или $B \cdot A = I_E$, где I_E — единичный (тождественный) оператор в пространстве E . Оператор B называется **левым обратным** к оператору A .

Упражнение 2.2. Пусть $A : E \rightarrow F$ — линейный оператор, $\ker A = \{0\}$. Тогда существует линейный левый обратный оператор. Доказать.

Если $\text{Im}(A) = F$, т.е. оператор A устанавливает взаимно однозначное соответствие между E и F , то оператор B , определенный на всем F , называется **обратным оператором** к A и обозначается A^{-1} ; $A^{-1}Ax = x \quad \forall x \in E$, $AA^{-1}y = y \quad \forall y \in F$. Рассмотрим далее линейные операторы в случае, когда E, F нормированные пространства.

Линейный оператор $A : E \rightarrow F$ является **обратимым**, если $\text{Im}(A) = F$, $\ker A = \{0\}$, **непрерывно обратимым**, если $\exists A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. Критерием непрерывной обратимости является условие:

$$\|Ax\|_F \geq m\|x\|_E \quad \forall x \in E, \quad (*)$$

где постоянная $m > 0$ не зависит от x .

Пример 2.4. Пусть выполняется условие (*). Доказать, что $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$.

Решение. Пусть $y \in \text{Im}A \subset F$, $y = Ax, x \in E$,
 $\|y\|_F \geq m\|A^{-1}y\|$. Тогда $\|A^{-1}\| = \sup_{\|y\|_F=1} \|A^{-1}y\| \leq 1/m$.

Одним из «китов» теории банаховых пространств является следующий факт.

Принцип открытости отображения. Пусть E и F – банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $\text{Im}(A) = F$, $M \subset E$ – открытое множество. Тогда множество $A(M) \subset F$ также открытое.

Другими словами, при непрерывном линейном отображении банахова пространства E на банахово пространство F образ любого открытого множества есть снова открытое множество. Из этого принципа вытекает важное следствие (теорема **Банаха о гомеоморфизме**).

Теорема 4. Пусть $A \in \mathcal{L}(E, F)$, где E и F – банаховы пространства, $\ker A = \{0\}$, $\text{Im}(A) = F$. Тогда существует $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Таким образом, если линейный ограниченный оператор A , отображающий банахово пространство E **на все** банахово пространство F , имеет обратный A^{-1} , то оператор A^{-1} ограничен. Последние два утверждения перестают быть верными, если отказаться от полноты одного из пространств E или F .

Пример 2.5. В банаховых пространствах E, F рассмотрим операторное уравнение $Ax = y$, $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Доказать, что из однозначной разрешимости этого уравнения при любой правой части $y \in F$ следует непрерывная зависимость решения $x \in E$ от $y \in F$.

Решение. Из разрешимости уравнения $Ax = y \forall y \in F$ следует, что $\text{Im} A = F$. Единственность решения влечет условие $\ker A = \{0\}$. Тогда, в силу теоремы Банаха о гомеоморфизме, обратный оператор A^{-1} непрерывен, т.е. решение непрерывно зависит от правой части.

Если ограниченный линейный оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ непрерывно обратим, то и близкие к нему линейные ограниченные операторы непрерывно обратимы:

$$\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow \exists B^{-1} : F \rightarrow E. \quad (**)$$

Пример 2.6. Показать, что из $(**)$ вытекает, что

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|B - A\| \cdot \|A^{-1}\|}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \|B^{-1}\| &= \|A^{-1} \cdot A \cdot B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|(A - B + B)B^{-1}\| \leq \\ &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\| \cdot \|B^{-1}\| + \|A^{-1}\|, \\ \|B^{-1}\|(1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|) &\leq \|A^{-1}\|, \end{aligned}$$

Используя $(**)$, получаем требуемое

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|B - A\| \cdot \|A^{-1}\|}.$$

В частном случае, когда $E = F, A = I, B = I - C$, где $C \in \mathcal{L}(E), \|C\| < 1$, получаем оценку

$$\|(I - C)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|C\|}.$$

В этом случае справедливо разложение оператора $(I - C)^{-1}$ в ряд Неймана

$$(I - C)^{-1} = I + C + C^2 + \dots$$

2.3. Замкнутые операторы

Непрерывность (ограниченность) линейного оператора тесно связана с понятием замкнутости графика $G(A)$ оператора A .

Определение 9. Графиком оператора $A : D \rightarrow F$ называется множество $G(A) = \{ \{x, Ax\}, x \in D \} \subset E \times F$.

Пусть E, F — нормированные пространства. Линейный оператор A называется **замкнутым**, если из условий

$$x_n \in D, x_n \rightarrow x, Ax_n \rightarrow y$$

следует $x \in D, y = Ax$, то есть, $G(A)$ замкнутое множество в пространстве $Z = E \times F$ пар $z = \{x, y\}$, где $x \in E, y \in F$, с метрикой $\rho(z_1, z_2) = \|x_1 - x_2\|_E + \|y_1 - y_2\|_F$.

Пример 2.7. 1. Если $A \in \mathcal{L}(E, F)$, то A замкнут.
2. Если A замкнут и $\exists A^{-1}$, то A^{-1} замкнут. Доказать.

Решение.

1. Пусть $x_n \rightarrow x, Ax_n \rightarrow y$. В силу непрерывности оператора $Ax_n \rightarrow Ax$ и в силу единственности предела $y = Ax$, т.е. A замкнутый оператор.
2. Пусть $y_n \rightarrow y, A^{-1}y_n \rightarrow x$. Покажем, что $A^{-1}y = x$. Обозначим $x_n = A^{-1}y_n$. Тогда $Ax_n = y_n \rightarrow y, x_n \rightarrow x$. Так как A замкнутый оператор, то $Ax = y$ или $A^{-1}y = x$.

Наряду с принципом открытости отображения и теоремой Банаха об обратном операторе третьим «китом» теории линейных операторов является следующая

Теорема 5. (о замкнутом графике) Пусть E, F — банаховы пространства, $A : E \rightarrow F$ — замкнутый линейный оператор. Тогда оператор A ограничен (непрерывен).

В силу теоремы о замкнутом графике замкнутый линейный оператор, определенный на подпространстве банахова пространства, непрерывен, то есть для таких операторов понятие замкнутости ничего нового не дает. Но для линейных операторов, определенных на незамкнутом линейном многообразии свойство замкнутости оказывается часто весьма ценным, например, при исследовании операторных уравнений. Простым примером замкнутого не непрерывного оператора в пространстве $C[a, b]$

служит оператор дифференцирования $A = d/dt$, определенный на линейном многообразии непрерывно дифференцируемых функций.

Равенство

$$\|x\|_G = \|x\|_E + \|Ax\|_F,$$

определяет еще одну норму на линейном многообразии D , которую называют нормой графика. Если E, F – банаховы пространства, оператор A замкнут, то D с этой нормой является банаховым пространством. Оператор A ограничен на этом пространстве. Оператор B называется **замыканием** оператора A , если $G(B) = \overline{G(A)}$. Говорят также, что B является **расширением** A ($B \supset A$), если $G(B) \supset G(A)$.

3. Задачи и упражнения

3.1. Пространства

Вариант 1.

1. Будет ли полным метрическим пространством вещественная прямая с метрикой $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)|$?
2. Сходится ли в $C[0, 1]$ последовательность $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$?
3. Доказать, что гильбертово пространство **строго нормировано**, т.е. из условия $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ следует при $x \neq 0, y \neq 0$, что $y = \lambda x$, где $\lambda > 0$.

Вариант 2.

1. Будет ли полным метрическим пространством вещественная прямая с метрикой $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$?
2. Сходится ли в $C[0, 1]$ последовательность $x_n(t) = t^n - t^{2n}$?
3. Пусть в гильбертовом пространстве: $\|x_n\| \leq 1, \|y_n\| \leq 1, \|x_n - y_n\| \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Доказать, что $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$.

Вариант 3.

1. Будет ли полным метрическим пространством вещественная прямая с метрикой $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$?
2. Сходится ли в $C[0, 1]$ последовательность

$$x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}?$$

3. Доказать, что условие $\|x\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in L$ эквивалентно ортогональности элемента x гильбертова пространства H подпространству $L \subset H$.

Вариант 4.

1. Доказать, что множество $\{\sin(nt)\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(-\pi; \pi)$ замкнуто и ограничено.
2. Образует ли подпространство в $C[0, 1]$ множество монотонных функций?
3. Вычислить углы треугольника, образованного точками в $L^2(-1, 1)$: $f_1(t) = 0, f_2(t) = 1, f_3(t) = t$.

Вариант 5.

1. Будет ли компактным в $C[0, 1]$ множество

$$M = \{y(t) = \int_0^1 e^{t+\tau} x(\tau) d\tau, x(t) \in C[0, 1]\}?$$

2. Образует ли подпространство в $C[0, 1]$ множество функций

$$L = \{x(t) : \int_0^1 x(t) dt = 0\}?$$

3. Доказать, что для ортогональной системы $\{x_k\}$ в гильбертовом пространстве следующие условия равносильны:

- а) $\sum_k x_k$ сильно сходится;
б) $\sum_k \|x_k\|^2$ сходится.

Вариант 6.

1. Образует ли полное пространство множество непрерывных на $[0, 1]$ функций таких, что $x(0) = x(1)$?
2. Доказать замкнутость конечномерного линейного многообразия нормированного пространства.
3. Доказать, что в $L^2(0, 1)$ множество

$$L = \{x(t) \in L^2(0, 1) : \int_0^1 x(t) dt = 0\},$$

является подпространством и найти L^\perp .

Вариант 7.

1. Пусть $M \subset R$ – открытое множество. Будет ли множество

$$A_M = \{x(t) \in C[0, 1], x(t) \in M \forall t \in [0, 1]\}$$

открытым?

2. В пространстве $C[0, 1]$ найти расстояние от элемента $x_0(t) = t$ до подпространства многочленов нулевой степени.
3. Доказать, что множество $L \subset L^2(0, 1)$,

$$L = \{x(t) \in L^2(0, 1) : x(t) = 0 \text{ п.в. на } [a, b] \subset [0, 1]\},$$

является подпространством и найти L^\perp .

Вариант 8.

1. Является ли множество функций $x_n(t) = \sin(t + n), t \in [0, 1]$

вполне ограниченным в $C[0, 1]$?

2. Найти расстояние в $C[0, 1]$ от элемента $x_0(t) = t^2$ до подпространства многочленов степени не больше единицы.

3. Доказать, что множество многочленов $P(t)$ таких, что $P(1) = 0$ выпуклое и всюду плотное в $L^2(0, 1)$.

Вариант 9.

1. Покажите, что множество последовательностей

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots), \sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2 + \dots} \leq \xi_1$$

замкнуто в пространстве l_1 .

2. Доказать, что параллелепипед

$$\{x \in l_2, x = (x_1, x_2, \dots) : |x_k| \leq 1/k\},$$

компактен в l_2 .

3. В пространстве $L^2(0, 1)$ найти расстояние от элемента $x(t) = t^2$ до подпространства $L = \{x \in L^2(0, 1) : \int_0^1 x(t)dt = 0\}$.

Вариант 10.

1. Всегда ли диаметр шара в метрическом пространстве вдвое больше радиуса?

2. В пространстве l_2 найти расстояние $\rho(x, L_n)$ от элемента $x = (1, 0, 0, \dots)$ до подпространства

$$L_n = \{x \in l_2 : x = (x_1, x_2, \dots), \sum_{k=1}^n x_k = 0\}.$$

3. В гильбертовом пространстве $L^2(0, 1)$ найти ортогональное дополнение к множеству многочленов с нулевым свободным членом.

3.2. Линейные операторы

Вариант 1.

1. Найти норму линейного оператора $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$.

2. Найти ядро оператора $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau + x(t)$.

3. Рассмотрим оператор $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $Ax(t) = x(t)/t$

с областью определения $D = \{x \in C[0, 1] : \exists \lim_{t \rightarrow +0} t^{-1}x(t)\}$. Доказать, что A – замкнутый оператор.

Вариант 2.

1. Найти норму линейного оператора $A : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$.
2. Доказать, что оператор $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau + x(t)$ непрерывно обратим, и найти оператор A^{-1} .
3. Пусть A – замкнутый оператор. Доказать, что $\ker A$ – замкнутое множество.

Вариант 3.

1. Пусть $Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$ – оператор Вольтерра в пространстве $C[0, 1]$. Найти A^n и доказать, что $\|A^n\| \leq K^n/n!$ для некоторой постоянной $K > 0$.
2. Доказать непрерывную обратимость оператора $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t}x(s)ds$ и найти A^{-1} .
3. Пусть $A, B : E \rightarrow F$ – линейные операторы, причем A замкнут, B ограничен и $D(A) \subset D(B)$. Доказать, что $A + B$ – замкнутый оператор.

Вариант 4.

1. Найти норму линейного оператора $A : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$, $Ax(t) = t \int_0^t x(\tau) d\tau$.
2. Пусть $A, B : E \rightarrow E$ – линейные операторы, $D(A) = D(B) = E$, $AB + A + I = 0$, $BA + A + I = 0$. Доказать, что существует обратный оператор A^{-1} .
3. Найти норму оператора ортогонального проектирования на подпространство H в гильбертовом пространстве V .

Вариант 5.

1. Найти норму линейного оператора $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $Ax(t) = x(t^2)$.
2. Пусть $A \in \mathcal{L}(E)$, $N_k = \ker(A^k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Доказать, что $N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_k \subset N_{k+1} \subset \dots$, и если $N_k = N_{k+1}$ для некоторого натурального k , то $N_k = N_{k+1} = N_{k+2} = \dots$.
3. Доказать, что последовательность операторов

$$A_n x(t) = x(t^{1+1/n}), \quad n \in \mathbb{N},$$

в пространстве $C[0, 1]$ такова, что $A_n \in \mathcal{L}(C[0, 1])$ и при этом A_n сильно сходится к тождественному оператору при $n \rightarrow \infty$.

Вариант 6.

1. Найти норму линейного оператора $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $Ax(t) = t^2x(0)$.
2. Рассмотрим оператор $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $Ax(t) = x''(t) + x(t)$ с областью определения

$$D(A) = \{x \in C^2[0, 1] : x(0) = x'(0) = 0\}.$$

Доказать непрерывную обратимость A и найти A^{-1} .

3. Пусть E – банахово пространство. Доказать, что в пространстве $\mathcal{L}(E)$ множество непрерывно обратимых операторов открыто.

Вариант 7.

1. Найти норму линейного оператора $A : l_2 \rightarrow l_2$, $Ax = (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$.
2. Пусть $A, B : E \rightarrow E$ – линейные операторы, $D(A) = D(B) = E$, $AB = BA$. Доказать, что если B непрерывно обратим, $A, B \in \mathcal{L}(E)$, то $\|AB\| \leq \frac{\|A\|}{\|B^{-1}\|}$.
3. Существует ли оператор A^{-1} , если $A : C[0, 1] \rightarrow C^2[0, 1]$, $Ax(t) = \int_0^t e^{-|s-t|}x(s)ds$?

Вариант 8.

1. Найти норму линейного оператора $A : L^2(0, 2\pi) \rightarrow L^2(0, 2\pi)$, $Ax(t) = \int_0^{2\pi} \sin(t+s)x(s)ds$
2. Найти решение операторного уравнения

$$x(t) + \lambda Ax(t) = y(t),$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $y \in C[0, 2\pi]$ заданы, оператор A определен в первом задании.

3. Пусть $A : E \rightarrow F$ – линейный оператор. Доказать, что его замкнутость равносильна условию, что $D(A)$ в норме

$$||| x ||| \equiv \|x\|_E + \|Ax\|_F,$$

является банаховым пространством.

Вариант 9.

1. Найти норму линейного оператора $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $Ax(t) = t \int_0^t \frac{x(\tau)}{1-\tau} d\tau$.
2. Если $\ker A$ – подпространство в E , $A : E \rightarrow F$ – линейный оператор, вытекает ли отсюда, что A – ограниченный оператор?
3. Сходится ли последовательность операторов

$$A_n x : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], A_n x(t) = \int_0^t \left[\sum_0^n \frac{\tau^k}{k!} \right] x(\tau) d\tau, n \in \mathbb{N}$$

к оператору $Ax(t) = \int_0^t e^\tau x(\tau) d\tau$?

Вариант 10.

1. Найти норму линейного оператора $A : C[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$, $Ax(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$.
2. Пусть $A, A^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ и $k = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ – число обусловленности оператора A . Получить оценку относительной погрешности решения уравнения

$Ax = y$:

$$\frac{1}{k} \frac{\|A\bar{x} - y\|}{\|y\|} \leq \frac{\|\bar{x} - x\|}{\|x\|} \leq k \frac{\|A\bar{x} - y\|}{\|y\|}.$$

3. Пусть $A : E \rightarrow E$ – линейный оператор и существует последовательность $\|x_n\| = 1, Ax_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Доказать, что A не может быть непрерывно обратимым.

Список литературы

- [1] Функциональный анализ (*под редакцией С.Г.Крейна*). – М., Наука. 1972. 544с.
- [2] *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М., Наука. 1965.
- [3] *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М., Наука. 1980.
- [4] *Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. – М., Наука. 1979.
- [5] *Треногин В.А., Писаревский В.М., Соболева Г.С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М., Наука. 1984.

Учебное издание

Александр Юрьевич Чеботарев

Пространства и линейные операторы

Учебно – методическое пособие для студентов математических
специальностей

Редактор А.А. Илларионов

Технический редактор

Компьютерный набор и верстка А.С. Савенковой

Подписано в печать2008 г.

Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. , уч.-изд. л. .

Тираж 150 экз.

Издательство Дальневосточного университета

690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27.

Отпечатано в лаборатории кафедры математической физики и

компьютерного моделирования ИМКН ДВГУ

690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27, к. 335.