ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Часть 1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Функциональный анализ возник на рубеже 19-го и 20-го столетий в трудах Гильберта (теория операторов в бесконечномерных евклидовых пространствах), Фреше, Хаусдорфа (теория топологических и метрических пространств), Фредгольма (теория интегральных уравнений), Лебега (теория интеграла и меры), Рисса, Банаха (теория линейных нормированных пространств) и др.

Для функциональнного анализа характерен общий абстрактный подход, при котором исследуются не отдельные функции и уравнения, а различные пространства и операторы в этих пространствах. Этот подход позволил с единой точки зрения рассматривать, например, вопросы решения дифференциальных и интегральных уравнений, граничных задач для уравнений в частных производных, бесконечных систем уравнений. В настоящее время общепризнана объединяющая роль функционального анализа. Его язык, идеи и методы используются в теории дифференциальных уравнений и математической физике, в теории численных методов, в математической экономике, в теории управления и других теоретических и прикладных дисциплинах.

Сегодня имеется большое количество первоклассных учебников и монографий по функциональному анализу. Но их объем далеко превосходит возможности семестрового лекционного курса. Поэтому возникает необходимость в учебном пособии в объеме лекционного курса, которое являлось бы в определенной мере логически завершенным введением в предмет.

Глава 1

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

Понятие метрического пространства является обобщением трехмерного евклидового пространства. Более точно, обобщается возможность измерять расстояние между точками. В функциональном анализе принят аксиоматический подход. Поэтому свойства расстояния в обычном трехмерном евклидовом пространстве формализуются в виде аксиом метрики.

Аксиомы метрики

Пусть X – множество элементов $\{x, y, z, ...\}$. Метрикой на X называется функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. *аксиома тождества*

   $\rho(x, y) \geq 0$ для всех x, y из X, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2. *аксиома симметрии*

   $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всех x, y из X;

3. *неравенство треугольника*

   $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для всех x, y, z из X.

Элементы множества X обычно называют точками. Тогда $\rho(x, y)$ – есть расстояние между точками x и y.

Определение. Метрическим пространством будем называть пару (X, ρ), где X – некоторое множество, а ρ – метрика на этом множестве.

Любое множество можно рассматривать как метрическое пространство, определив метрику, полагая, например, $\rho(x,x)=0$ и $\rho(x,y)=1$ при $x\neq y$. Правда, такое введение метрики малосодержательно, так как все такие пространства будут отличаться лишь мощностью соответствующих множеств. Очевидно, что на данном множестве можно рассматривать различные метрики и в этом случае мы получаем различные метрические пространства.

Первые примеры метрических пространств

1. Вещественная прямая $\mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x,y)=|x-y|$.

2. Вещественное линейное пространство $\mathbb{R}^n$ с метрикой

$$\rho_1(x,y)=\sum_{m=1}^{n}|x_m-y_m|.$$

3. Вещественное линейное пространство $\mathbb{R}^n$ с метрикой

$$\rho_\infty(x,y)=\sup_{1\le m\le n}|x_m-y_m|.$$

4. Множество $C[a,b]$ всех непрерывных функций на конечном отрезке $[a,b]$ с метрикой

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|.$$

Проверка аксиом в данных случаях тривиальна и предоставляется читателю.

Неравенства Гельдера и Минковского

Для рассмотрения дальнейших примеров нам понадобятся два важных неравенства – неравенства Гельдера и Минковского. Имеются варианты этих неравенств для конечных последовательностей чисел, для числовых рядов и для функций. Наиболее общей является формулировка для функций. Остальные получаются из нее в качестве следствий.

Лемма 1.1.1 *(неравенство Гельдера)*

Пусть $1<p\,,q<\infty$, *причем* $1/p+1/q=1$ *(такие числа называют сопряженными показателями). Тогда для измеримых по Лебегу функций*

f, g справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \le \left\{\int\limits_a^b |f(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} \left\{\int\limits_a^b |g(t)|^q\,dt\right\}^{1/q},$$

причем интегралы понимаются в смысле Лебега и из сходимости интегралов справа следует сходимость интеграла слева.

Если $p = 1,\ q = \infty$, то

$$\left|\int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \le \int\limits_a^b |f(t)|dt\ \ (\text{ess sup}\,|g(t)|)\,,$$

где

$$\text{ess sup}\,|g(t)| = \inf_{\{e:\,mes\,e=0\}}\ \sup_{[a,b]\setminus e} |g(t)|,$$

причем из конечности правой части следует сходимость интеграла слева.

Доказательство. Предварительно установим числовое неравенство: для $a, b \ge 0$ верно $ab \le a^p/p + b^q/q$.

Для этого заметим, что функция $s(x) = x^p/p + 1/q - x$ убывает при $0 < x < 1$, возрастает при $x > 1$ и $s(1) = 0$. Поэтому выполняется неравенство $s(x) \ge 0$. Полагая в нем $x = a/b^{q-1}$ и умножая на b^q, получаем нужное неравенство.

Введем функции

$$\alpha(t) = \frac{|f(t)|}{\left\{\int\limits_a^b |f(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}}\,,\ \ \beta(t) = \frac{|g(t)|}{\left\{\int\limits_a^b |g(t)|^q\,dt\right\}^{1/q}}.$$

Интегрируя неравенство

$$\alpha(t)\beta(t) \le \alpha^p(t)/p + \beta^q(t)/q,$$

получаем

$$\int\limits_a^b \alpha(t)\beta(t)\,dt \le 1,$$

что и приводит к нужному неравенству Гельдера.

Случай $p = 1,\ q = \infty$ очевиден.■

Лемма 1.1.2 *(неравенство Минковского)*

Пусть $1 \le p < \infty$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\left\{\int\limits_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} \le \left\{\int\limits_a^b |f(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} + \left\{\int\limits_a^b |g(t)|^p\,dt\right\}^{1/p},$$

причем из сходимости интегралов справа следует сходимость интеграла слева.

Доказательство. Рассмотрим очевидное неравенство

$$\int\limits_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt \le \int\limits_a^b |f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)|\,dt + \int\limits_a^b |f(t)+g(t)|^{p-1}|g(t)|\,dt.$$

Учитывая, что $(p-1)q = p$, и применяя к интегралам в правой части неравенство Гельдера, приходим к неравенству

$$\int\limits_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt \le$$

$$\le \left(\left\{\int\limits_a^b |f(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} + \left\{\int\limits_a^b |g(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}\right)\left\{\int\limits_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right\}^{1/q},$$

из которого очевидным образом следует неравенство Минковского.■

Упражнение. Вывести для рядов неравенства Гельдера

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n\right| \le \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^p\right\}^{1/p} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^q\right\}^{1/q}$$

и Минковского

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |f_n+g_n|^p\right\}^{1/p} \le \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^p\right\}^{1/p} + \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^p\right\}^{1/p}.$$

Дальнейшие примеры метрических пространств

1. **Метрики на $\mathbb{R}^n$.** Формула

$$\rho_p(x,y) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right\}^{1/p}$$

при $1 \le p < \infty$ определяет метрику на $\mathbb{R}^n$.

Неравенство треугольника следует из неравенства Минковского (достаточно положить $f_k = x_k - z_k,\ g_k = z_k - y_k$.)

Упражнение. Доказать, что метрики ρ_p , $1 \le p \le \infty$ на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны в смысле следующего определения:

метрики $d_1,\ d_2$ на множестве X называются эквивалентными, если существуют такие константы $c_1,\ c_2 > 0$, что для всех $x,\ y$ выполняются неравенство

$$c_1 d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le c_2 d_1(x,y).$$

2. **Пространства последовательностей**

Обозначим через l_p , $1 \le p < \infty$ – множество всех числовых последовательностей (бесконечных векторов) таких, что сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$. Метрика определяется формулой

$$\rho_p(x,y) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right\}^{1/p}.$$

В случае $p = \infty$ определяем l_∞ как множество всех ограниченных последовательностей с метрикой

$$\rho_\infty(x,y) = \sup_k |x_k - y_k|.$$

Упражнение. Показать, что все введенные метрики определены на l_1, но не являются попарно эквивалентными.

3. **Функциональные пространства Лебега**

Обозначим через $L_p(a,b)$, $1 \le p < \infty$ – множество всех измеримых по Лебегу функций на (a,b) с конечным интегралом $\int\limits_a^b |f(t)|^p\,dt < \infty$, который понимается в смысле Лебега. Метрика определяется формулой

$$\rho_p(f,g) \le \left\{ \int\limits_a^b |f(t)-g(t)|^p\,dt \right\}^{1/p}.$$

Отметим, что равенство $\rho_p(f,g) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $f(t) = g(t)$ почти всюду. Поэтому для выполнения аксиомы тождества следует считать элементами пространства $L_p(a,b)$ классы эквивалентных (т.е. совпадающих почти всюду) функций, а расстояние между классами определяется как расстояние между любыми представителями этих классов.

В случае $p = \infty$ пространство $L_\infty(a,b)$ определяется как множество классов эквивалентных функций, для которых $\operatorname{ess\,sup}|f(t)| < \infty$, а метрика определяется соотношением

$$\rho_\infty(f,g) = \operatorname{ess\,sup}|f(t) - g(t)|.$$

Упражнение. Показать, что неравенство Минковского справедливо для измеримых функций на пространстве с мерой, и определить функциональные пространства Лебега на пространствах с мерой.

Сходимость

Пусть задано метрическое пространство (X,ρ). Наличие метрики позволяет ввести понятие сходимости.

Определение. Будем говорить, что последовательность элементов $x_n \in X$ сходится к элементу $x \in X$ в метрике ρ при $n \to \infty$, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0.$$

Обычно пишут $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если нужно указать в какой метрике понимается сходимость, то используют запись $x \overset{\rho}{=} \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Мы будем использовать также запись $x_n \to x$ без указания, что $n \to \infty$.

Понятие сходимости в метрическом пространстве – естественное обобщение понятия сходимости числовой последовательности. С другой стороны – второе понятие является частным случаем первого, как сходимость в метрическом пространстве $\mathbb{R}$.

Сформулируем несколько простых утверждений относительно сходимости.

1. *Единственность предела. Последовательность не может иметь более одного предела.*

Доказательство. От противного. Пусть $x_n \to x$ и $x_n \to y$. Из неравенства треугольника следует, что

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y).$$

Переходя к пределу, получим, что $\rho(x,y) = 0$. Вследствие аксиомы тождества $x = y$.$\blacksquare$

2.*Если $x_n \to x$, то ее подпоследовательность также сходится к x.*

3. *Непрерывность метрики. Если $x_n \to x,\ y_n \to y$, то $\rho(x_n,y_n) \to \rho(x,y)$.*

Доказательство. Имеем

$$|\rho(x_n,y_n) - \rho(x,y)| \leq |\rho(x_n,y_n) - \rho(x_n,y)| + |\rho(x_n,y) - \rho(x,y)|.$$

Далее ввиду неравенства

$$|\rho(x,y) - \rho(z,y)| \leq \rho(x,z),$$

эквивалентного неравенству треугольника (докажите), получаем

$$|\rho(x_n,y_n) - \rho(x,y)| \leq \rho(y,y_n) + \rho(x_n,x) \to 0$$

при $n \to \infty$. $\blacksquare$

Пример. Смысл сходимости в $C[0,1]$.

Пусть $x_n \to x$ в метрике пространства $C[0,1]$. Это означает, что

$$\rho(x_n,x) = \max_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x(t)| \to 0$$

при $n \to \infty$. Таким образом, сходимость в пространстве непрерывных функций является равномерной сходимостью.

Упражнение. На множестве всех m - раз непрерывно дифференцируемых функций $C^m[0,1]$ ввести метрику так, чтобы сходимость в этой метрике совпадала с равномерной сходимостью последовательностей функций и их производных до порядка m включительно. Рассмотреть аналогичный вопрос для множества всех бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty[0,1]$.

Открытые и замкнутые множества

Введем ряд важных для дальнейшего понятий. Пусть задано метрическое пространство (X, ρ).

Определение. Шаром $S(x_0, r)$ (замкнутым шаром $\overline{S}(x_0, r)$) с центром в точке x_0 радиуса r называется множество

$$S(x_0, r) = \{x \in X; \rho(x, x_0) < r\} \ (\overline{S}(x_0, r) = \{x \in X; \rho(x, x_0) \leq r\}).$$

Определение. Точку a будем называть предельной точкой множества M, если существует такая последовательность $\{x_n\}$ точек множества M, что $x_n \neq a$ и $x_n \to a$.

Упражнение. Точка a – предельная точка множества M тогда и только тогда, когда для любого $r > 0$ $\ M \cap (S(a, r) \setminus \{a\}) \neq \oslash$.

Определение. Замыканием множества M будем называть множество, полученное добавлением к M всех его предельных точек. Замыкание множества M обозначается следующим образом: $\overline{M}$.

Определение. Множество называется замкнутым, если оно совпадает со своим замыканием.

Упражнение. Доказать, что замыкание любого множества является замкнутым множеством.

Определение. Множество U называется открытым, если его дополнение $X \setminus U$ замкнутое множество.

Упражнение. Доказать, что

1. каждый шар является открытым множеством;

2. множество открыто тогда и только тогда, когда вместе с каждой своей точкой оно содержит некоторый шар ненулевого радиуса с центром в этой точке.

Упражнение. Свойства открытых множеств.

Доказать, что

1. $X, \oslash$ открыты;

2. пересечение двух открытых множеств открыто;

3. объединение любого семейства открытых множеств открыто.

Упражнение. Свойства замкнутых множеств.

Доказать, что

1. $X, \oslash$ замкнуты;

2. объединение двух замкнутых множеств замкнуто:

3. пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

Непрерывные отображения

Введем понятие непрерывного отображения. Пусть заданы метрические пространства (X, ρ), (Y, d) и отображение $f : X \to Y$.

Определение. (на языке последовательностей)

Отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке x_0, если для любой последовательности $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ последовательность $f(x_n)$ сходится в пространстве Y к точке $f(x_0)$.

Определение. (на языке $\epsilon - \delta$)

Отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке x_0, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, как только $\rho(x, x_0) < \delta$.

Упражнение. Доказать эквивалентность обоих определений.

Определение. Отображение называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке.

Упражнение. Доказать следующие критерии непрерывности отображений.

Отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого (замкнутого) множества из пространства Y является открытым (замкнутым) множеством в пространстве X.

Сепарабельные пространства

Пусть M, N – множества в метрическом пространстве X.

Определение. Говорят, что M плотно в N, если для любой точки $n \in N$ и для любого $\epsilon > 0$ найдется такая точка $m \in M$, что $\rho(m, n) < \epsilon$.

Если M плотно во всем пространстве X, то говорят, что M всюду плотно в X.

Определение. Множество M называется нигде не плотным в X, если оно не является плотным ни в одном его шаре. Иначе, для любого шара S существует шар $S_1 \subset S$, для которого $M \cap S_1 = \oslash$.

Например, простая гладкая кривая на плоскости является нигде не плотным множеством. Верно ли это для непрерывных кривых (вспомните кривые Пеано)?

Определение. Метрическое пространство называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Приведем примеры сепарабельных метрических пространств.

1. $\mathbb{R}$ – сепарабельно. В качестве счетного всюду плотного множества на вещественной оси можно выбрать множество всех рациональных чисел. (Основополагающий факт анализа - любое иррациональное число является пределом последовательности рациональных чисел).

2. $\mathbb{R}^n$ – сепарабельно. Счетное всюду плотное множество – множество всех векторов с рациональными координатами.

3. $C[0, 1]$ – сепарабельно. Каждая непрерывная функция – равномерный предел последовательности многочленов (теорема Вейерштрасса). Каждый многочлен – равномерный предел последовательности многочленов с рациональными коэффициентами. Следовательно, множество всех многочленов

с рациональными коэффициентами плотно в пространстве непрерывных функций. Остается заметить, что оно также и счетно.

4. l_p, $1 \le p < \infty$ – сепарабельно. Счетное всюду плотное множество образуют все векторы, у каждого из которых лишь конечное число ненулевых рациональных координат.

5. $L_p(a,b)$ $1 \le p < \infty$ – сепарабельно. Приведите пример счетного всюду плотного множества в этом пространстве.

Пример пространства, не являющегося сепарабельным, доставляет пространство l_∞. Для доказательства этого факта предварительно заметим, что множество всех последовательностей, состоящих из нулей и единиц несчетно. Более точно, в курсе математического анализа доказывается, что оно имеет мощность континуума. Расстояние между двумя различными точками этого множества равно единице. Рассмотрим множество шаров с центрами в точках этого множества и радиусами $r = 1/3$. Очевидно, что эти шары не пересекаются и их несчетное число. Предположение о сепарабельности пространства l_∞ приводит к противоречию, так как в каждом шаре должна содержатся точка счетного всюду плотного множества.

1.2 ПОЛНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Фундаментальные последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства (X, ρ) называется фундаментальной или последовательностью Коши, если

$$\lim_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0,$$

или более подробно: для любого $\epsilon > 0$ существует такое число $N = N(\epsilon)$, что $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$ как только $n, m > N$.

Если последовательность сходится, то она фундаментальна. Это следует из неравенства треугольника

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x),$$

ввиду сходимости $x_n \to x$.

Следующие примеры показывают, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 1. Пусть $X = (0, 1]$, $\rho(x, y) = |x - y|$. Последовательность $x_n = 1/n$ фундаментальна, но не является сходящейся в пространстве X. (Число 0, являющееся пределом данной числовой последовательности, не принадлежит пространству X.)

Пример 2. Пусть X – множество всех многочленов, рассматриваемых на отрезке $[0, 1]$, с метрикой $\rho(p, q) = \max\limits_{t\in[0,1]} |p(t) - q(t)|$. Пусть $\{p_n(t)\}$ – последовательность многочленов, равномерно сходящаяся к функции e^t. Данная последовательность фундаментальна, но не является сходящейся в пространстве X.

Рассмотренные примеры мотивируют следующее важное

Определение. Метрическое пространство называется полным, если каждая фундаментальная последовательность элементов этого пространства сходится.

Пространства, рассмотренные в примерах 1 и 2, таким образом, не являются полными.

Полнота конкретных пространств

1. Вещественная прямая $\mathbb{R}$, метрика $\rho(x, y) = |x - y|$. Условие фундаментальности числовой последовательности согласно критерию Коши является необходимым и достаточным условием ее сходимости. Следовательно пространство $\mathbb{R}$ полно.

2. Пространство $\mathbb{R}^n$ с любой из метрик ρ_p, $1 \le p \le \infty$ полно вследствие упомянутого критерия Коши сходимости числовой последовательности.

3. Пространство $C[0, 1]$ полно. Условие фундаментальности последовательности означает, что

$$\max_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x_m(t)| \to 0$$

при $n, m \to \infty$. По критерию Коши равномерной сходимости последовательности функций это необходимое и достаточное условие для равномерной сходимости последовательности $\{x_n(t)\}$. Следовательно, существует функция $x(t)$, являющаяся равномерным пределом последовательности непрерывных функций $x_n(t)$. Согласно теореме Вейерштрасса о непрерывности равномерного предела непрерывных функций функция $x(t)$ непрерывна.

4. Отметим, что пространства $l_p\,,\ L_p(a, b),\ 1 \leq p \leq \infty$ также полны [8], с. 82. В дальнейшем будет дано доказательство полноты средствами функционального анализа.

Теоремы о полных метрических пространствах

Полные метрические пространства важны не столько с эстетической точки зрения, как некая завершенная конструкция, но более всего тем, что для них справедливы некоторые фундаментальные теоремы, имеющие многочисленные приложения.

Принцип вложенных шаров

Теорема 1.2.1 *Для того чтобы метрическое пространство было полным, необходимо и достаточно, чтобы каждая последовательность замкнутых вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.*

Доказательство.
Необходимость. Пусть метрическое пространство (X, ρ) полно и $\{\overline{S}(a_n, r_n)\}$ – последовательность шаров, удовлетворяющая всем условиям теоремы. Ввиду оценки

$$\rho(a_n, a_m) \leq r_{min(n,m)}$$

последовательность центров шаров фундаментальна и вследствие полноты пространства X сходящаяся. Тогда $a = \lim\, a_n$ принадлежит всем шарам (почему?).

Достаточность. Предположим, что каждая последовательность шаров с указанными в формулировке теоремы свойствами имеет непустое пересечение. Докажем полноту пространства. Предварительно отметим два утверждения, доказательство которых проведите самостоятельно.

1. *Если подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится, то и сама последовательность также сходится.*

2. *Любая фундаментальная последовательность* $\{x_n\}$ *содержит подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$, *удовлетворяющую условию* $\rho(x_{n_k},\ x_{n_{k+1}}) < 2^{-k-1}$.

Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность. Ввиду отмеченных утверждений, не нарушая общности, считаем, что $\rho(x_n,\ x_{n+1}) < 2^{-n-1}$.

Рассмотрим шары $\overline{S}(x_n, 2^{-n})$ и покажем, что они образуют систему вложенных шаров. Для этого докажем, что любая точка x, принадлежащая шару $\overline{S}(x_{n+1}, 2^{-n-1})$, содержится в шаре $\overline{S}(x_n, 2^{-n})$. Оценивая расстояние между точками x и x_n, имеем

$$\rho(x, x_n) \leq \rho(x, x_{n+1}) + \rho(x_n,\ x_{n+1}) \leq 2^{-n-1} + 2^{-n-1} = 2^{-n},$$

т.е. точка x принадлежит шару $\overline{S}(x_n, 2^{-n})$.

Согласно предположению существует точка, принадлежащая каждому шару $\overline{S}(x_n, 2^{-n})$. Очевидно, эта точка является пределом последовательности $\{x_n\}$.■

Упражнение. Доказать, что при выполнении условий теоремы пересечение всех шаров состоит из одной точки.

Замечание. Если нарушено условие $r_n \to 0$, то система вложенных замкнутых шаров может иметь пустое пересечение. Контрпример составляет содержание следующего упражнения.

Упражнение. Показать, что множество N всех натуральных чисел с метрикой $\rho(n, m) = 1 + 1/(n + m)$ при $n \neq m$ и $\rho(n, m) = 0$ при $n = m$ является полным метрическим пространством, а последовательность шаров $\overline{S}(n, 1 + 1/(2n))$ имеет пустое пересечение.

Теорема Бэра

Теорема 1.2.2 *Полное метрическое пространство нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.*

Доказательство. От противного. Пусть полное метрическое пространство X можно представить как счетное объединение нигде не плотных множеств

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Возьмем произвольный замкнутый шар $\overline{S}_1$ с радиусом $r_1 = 1$. Так как M_1 нигде не плотно, то существует замкнутый шар $\overline{S}_2$ с радиусом $r_2 < 1/2$, вложенный в шар $\overline{S}_1$, для которого $\overline{S}_2 \cap M_1 = \oslash$. Аналогично, в шаре $\overline{S}_2$ существует замкнутый шар $\overline{S}_3$ с радиусом $r_3 < 1/3$, имеющий пустое пересечение с множеством M_2. Продолжая этот процесс, мы построим последовательность замкнутых вложенных друг в друга шаров $\{\overline{S}_n\}$ с радиусами $r_n < 1/n$, для которых выполняется условие

$$\overline{S}_n \cap M_k = \varnothing,\ k = 1, 2, ...n - 1.$$

По принципу вложенных шаров в силу полноты пространства X существует точка, общая для всех шаров и не принадлежащая ни одному из множеств M_n. Противоречие. ■

Замечание. Обычно теорема Бэра формулируется как теорема о категории. Множество в метрическом пространстве называют множеством первой категории, если его можно представить как счетное объединение нигде не плотных множеств, и множеством второй категории, если этого сделать нельзя. После этого теорема Бэра формулируется следующим образом:

Полное метрическое пространство является множеством второй категории.

Упражнение. Доказать, что в полном метрическом пространстве счетное пересечение открытых всюду плотных множеств всюду плотно.

Упражнение. Может ли счетное объединение нигде не плотных множеств быть всюду плотным множеством, нигде не плотным множеством?

Пополнение метрического пространства

Теорема 1.2.3 *Пусть (X, ρ) – неполное метрическое пространство. Тогда существует полное метрическое пространство (Y, d) и отображение $f : X \to Y$ такие, что*

1. отображение f изометрично, т.е. выполняется условие:

для всех x_1, x_2 из пространства X

$$d(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1, x_2);$$

2. образ $f(X) \subset Y$ пространства X всюду плотен в пространстве Y.

Пространство Y называют пополнением пространства X.

Если $(\tilde{Y}, \tilde{d})$ – другое пополнение пространства (X, ρ), то существует изометрическое отображение $\phi : Y \to \tilde{Y}$, для которого $\phi(Y) = \tilde{Y}$. В этом случае говорят, что пространства Y и $\tilde{Y}$ изометрически гомеоморфны.

Набросок доказательства. Суть, конечно, в том, чтобы к пространству X присоединить все точки, к которым "должны"сходится несходящиеся фундаментальные последовательности, при этом нужно позаботиться о том, чтобы любые фундаментальные последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, удовлетворяющие условию $\rho(x'_n, x''_n) \to 0$ при $n \to \infty$, (назовем такие последовательности эквивалентными) имели один и тот же предел. Формально отождествление эквивалентных фудаментальных последовательностей получается, когда мы рассматриваем множество Y всех классов эквивалентных фундаментальных последовательностей. На множестве Y вводится метрика:

$$d(y_1, y_2) = \lim_{n \to \infty} \rho(x^1_n, x^2_n),$$

где $\{x^1_n\}$ и $\{x^2_n\}$ соответственно представители классов y_1 и y_2. Далее, проверяется корректность этого определения, т.е. устанавливается, что $d(y_1, y_2)$ не зависит от выбора представителей этих классов и удовлетворяет аксиомам метрики. Самое удивительное состоит в том, что (Y, d) уже является полным пространством.

Изометрическое отображение $f : X \to Y$ определяется следующим образом: $f(x)$ – есть класс эквивалентности стационарной последовательности

$(x, x, x...)$. Очевидно, что $d(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1, x_2)$. Наконец, проверяется, что $f(X)$ плотно в Y.■

Упражнение. Проведите подробное доказательство, используя описанную схему, или разберите доказательство из [14], с. 33. Докажите изометрическую гомеоморфность двух пополнений.

Теорема Банаха о неподвижной точке (принцип сжимающих отображений)

Разнообразные уравнения, интегральные, дифференциальные, функциональные, можно привести к виду $x = Ax$, где $A : X \to X$ – отображение некоторого метрического пространства X в себя (часто употребляется также термин – оператор). Решение этого уравнения будем называть неподвижной точкой отображения (оператора) A.

Определение. Оператор A будем называть сжимающим, если существует такое число $\alpha \in (0, 1)$, что для любых $x, y \in X$ выполняется неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y).$$

Теорема 1.2.4 *Пусть (X, ρ) – полное метрическое пространство и A – сжимающий оператор. Тогда у оператора A существует единственная неподвижная точка x^*, причем*

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

где последовательные приближения x_n определяется рекуррентной формулой $x_n = Ax_{n-1}$, причем в качестве начальной точки x_0 можно взять любую точку пространства X.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $x_n = Ax_{n-1}$, $n = 1, 2, ...$ и покажем, что она фундаментальна. Используя условие сжимаемости, имеем оценку

$$\rho(x_n, x_{n+p}) = \rho(Ax_{n-1}, Ax_{n+p-1}) \le \alpha\rho(x_{n-1}, Ax_{n+p-1}) \le$$

$$\le \alpha^2\rho(x_{n-2}, x_{n+p-2}) \le ... \le \alpha^n\ \rho(x_0, x_p).$$

Применение неравенства треугольника приводит к неравенству

$$\rho(x_0, x_p) \leq \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + ...\rho(x_{p-1}, x_p) \leq$$
$$\leq (1 + \alpha + \alpha^2 + ...\alpha^{p-1})\rho(x_0, x_1) = \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha}\,\rho(x_0, x_1).$$

Следовательно справедлива оценка

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leq \alpha^n \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha}\,\rho(x_0, x_1). \qquad (*)$$

Поэтому

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leq \alpha^n \frac{1}{1-\alpha}\,\rho(x_0, x_1) \to 0$$

при $n \to \infty$.

Вследствие этого последовательные приближения x_n образуют фундаментальную последовательность и тогда в силу полноты пространства (!) существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Покажем, что x^* является неподвижной точкой оператора A. Для этого оценим расстояние между элементами Ax^* и x^*:

$$\rho(Ax^*, x^*) \leq \rho(Ax^*, Ax_{n-1}) + \rho(x_n, x^*) \leq \alpha\rho(x^*, x_{n-1}) + \rho(x^*, x_n).$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем

$$\rho(Ax^*, x^*) = 0.$$

Поэтому из аксиомы тождества следует, что $Ax^* = x^*$, т.е. x^* – неподвижная точка оператора A.

Единственность. Пусть существует две неподвижные точки x^* и y^*. Тогда

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(Ax^*, Ay^*) \leq \alpha\rho(x^*, y^*).$$

Поэтому

$$(1-\alpha)\rho(x^*, y^*) \leq 0,$$

что и влечет равенство $x^* = y^*$.■

Замечание 1. Если в неравенстве (*) перейдем к пределу при $p \to \infty$, то получим оценку сходимости

$$\rho(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1).$$

Замечание 2. Вообще говоря, оператор является сжимающим на всем пространстве в крайне редких случаях. Поэтому часто используется следующее утверждение:

предположим, что существует замкнутый шар $\bar{S} \subset X$ такой, что оператор A отображает шар $\bar{S}$ в себя и является в этом шаре сжимающим оператором. Тогда в этом шаре у оператора A существует единственная неподвижная точка. Вне этого шара могут существовать другие неподвижные точки оператора A.

Замечание 3. Теорема Банаха – первая в многочисленном ряду теорем о неподвижной точке. Второй наиболее известной из них является теорема Шаудера, обобщающая на бесконечномерный случай теорему Браудера. Напомним, что теорема Браудера утверждает, что непрерывное отображение n-мерного шара в себя имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку. Об этих и других теоремах о неподвижной точке смотрите [26], с. 212.

Примеры применения принципа сжимающих отображений

1. Интегральные уравнения

Рассмотрим в пространстве $C[0,1]$ интегральное уравнение

$$x(t) = \lambda \int\limits_0^1 k(t,s)x(s)\,ds + f(t),$$

где $f(t)$ и $k(t,s)$ – известные функции, непрерывные соответственно на $[0,1]$ и $[0,1]\times[0,1]$, $x(t)$ – неизвестная функция, подлежащая определению.

Введем оператор A, определяемый правой частью уравнения:

$$(Ax)(t) = \lambda \int\limits_0^1 k(t,s)x(s)\,ds + f(t).$$

Ввиду непрерывности интеграла от непрерывной функции двух переменных оператор A переводит пространство $C[0,1]$ в себя. Поэтому интегральное уравнение можно представить в операторной форме

$$x = Ax.$$

Определим условия сжимаемости оператора A. Для произвольных непрерывных функций $x_1,\ x_2$ имеем

$$\rho(Ax_1, Ax_2) = \max_{t\in[0,1]} |(Ax_1)(t) - (Ax_2)(t)| =$$

$$= \max_{t\in[0,1]} \left| \lambda \int\limits_0^1 k(t,s)[x_1(s) - x_2(s)]\, ds \right|.$$

Вынося из под знака интеграла $\max\limits_{s\in[0,1]} |x_1(s) - x_2(s)|$, получаем оценку

$$\rho(Ax_1, Ax_2) \leq \max_{t\in[0,1]} \left(|\lambda| \int\limits_0^1 |k(t,s)|\, ds \right) \rho(x_1, x_2).$$

Таким образом, при выполнении условия

$$|\lambda| < \left(\int\limits_0^1 |k(t,s)|\, ds \right)^{-1}$$

оператор A является сжимающим и, следовательно, интегральное уравнение имеет единственное непрерывное решение.

2. Теорема существования и единственности задачи Коши

Теорема 1.2.5 *Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $K = \{|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ и удовлетворяет в этом прямоугольнике условию Липшица по переменной y:*
существует такая константа $\gamma > 0$, что для любых точек $(x, y_1),\ (x, y_2)$ из прямоугольника K

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \gamma |y_1 - y_2|.$$

Пусть также $\max\limits_K |f(x,y)| \leq M$.

При этих предположениях задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

имеет на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$, *где* $h < \min(a,\, b/M,\, 1/\gamma)$, *единственное решение* $y = y(x)$.

Доказательство теоремы естественным образом распадается на две части:

1 часть – приведение задачи к эквивалентному интегральному уравнению;

2 часть – применение к интегральному уравнению принципа сжимающих отображений.

1. Пусть $y = y(x)$ – решение задачи Коши, определенное на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$. Тогда интегрируя дифференциальное уравнение с учетом начального условия, получаем, что $y(x)$ является решением интегрального уравнения

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds.$$

Обратно, пусть $y(x)$ – непрерывное (!) решение данного интегрального уравнения. Тогда функция $y(x)$ автоматически является непрерывно дифференцируемой согласно теореме о непрерывной дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции. (Отметим, что аналогичные свойства сглаживания характерны для интегральных операторов.) Дифференцируя интегральное соотношение, убеждаемся, что решение интегрального уравнения является решением задачи Коши.

2. Введем оператор

$$(Ay)(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds.$$

Для применения принципа сжимающих отображений следует выбрать полное метрическое пространство, в котором оператор A является сжимающим. Из пункта 1 следует, что можно рассматривать непрерывные функции, но, очевидно, что нельзя выбрать все пространство $C[x_0 - h, x_0 + h]$, так как оператор A определен лишь на тех функциях, графики которых расположены в прямоугольнике K. Поэтому будем рассматривать оператор A в замкнутом шаре $\overline{S}(y_0, b) \subset C[x_0 - h, x_0 + h]$, где y_0 в данном случае обозначает постоянную функцию $y_0(x) = y_0$.

Покажем, что оператор A переводит этот шар в себя и является в нем сжимающим оператором.

Действительно, если $y \in \overline{S}(y_0, b)$, то

$$\rho(Ay, y_0) = \max_{|x-x_0|\le h} \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds \right| \le Mh \le b$$

и, следовательно, оператор A переводит данный шар в себя.

Далее, для любых $y_1, y_2 \in \overline{S}(y_0, b)$ имеем

$$\rho(Ay_1, Ay_2) = \max_{|x-x_0|\le h} \left| \int\limits_{x_0}^{x} [f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))]\, ds \right| \le$$

$$\le \max_{|x-x_0|\le h} \int\limits_{x_0}^{x} \gamma |y_1(s)) - y_2(s)|\, ds \le \gamma h \rho(y_1, y_2).$$

Так как $h < 1/\gamma$, то $\gamma h < 1$ и оператор A – сжимающий в этом шаре. Тогда у оператора A в этом шаре существует единственная неподвижная точка.

На самом деле полученное решение является единственным решением задачи Коши. Иначе, если существуют два решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, то найдется точка x_*, в которой $y_1(x_*) = y_2(x_*)$, но в любой окрестности этой точки эти решения не совпадают. Противоречие состоит, конечно, в том, что можно выбрать подходящий замкнутый шар в некотором пространстве $C[x_* - h_1, x_* + h_1]$, в котором оператор A является сжимающим и который содержит ограничения функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на отрезок $[x_* - h_1, x_* + h_1]$. (Проведите подробное доказательство.)■

Замечание. Отметим важный факт. Длина интервала определения решения не зависит от константы Липшица γ и теорема остается справедливой при выполнении условия $h < \min(a,\, b/M)$.

Упражнение. Докажите предыдущее утверждение самостоятельно. Установите, что принцип сжимающих отображений справедлив в предположении, что некоторая степень оператора является сжимающим оператором, и покажите, что рассматриваемый оператор при любой константе Липшица имеет степень, являющуюся сжимающим оператором.

Упражнение. Доказать теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений.

1.3 КОМПАКТНОСТЬ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Основные определения

Напомним важную теорему Больцано, которая утверждает, что из любой ограниченной числовой последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Естественно возникает вопрос – как обстоит дело в произвольном метрическом пространстве.

Во-первых, нужно определить понятие ограниченного множества.

Определение. Множество в метрическом пространстве будем называть ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.

Во-вторых, простые примеры показывают, что теорема Больцано не распространяется на произвольные метрические пространства.

Пример. Рассмотрим в пространстве l_2 последовательность единичных ортов $e_n = (0, 0, ..1, 0, ...)$. Расстояние между различными ортами $\rho(e_j, e_k) = \sqrt{2}$. Поэтому из последовательности $\{e_n\}$ нельзя извлечь сходящейся подпоследовательности.

Введем следующее

Определение. Множество M в метрическом пространстве X будем называть относительно компактным, если из любой последовательности его элементов $\{x_n\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Относительно компактное множество M будем называть компактным, если эту сходящуюся подпоследовательность можно извлечь так, что ее предел принадлежит множеству M.

Используя эти определения, теорему Больцано можно сформулировать следующим образом. Здесь приводится формулировка, включающая и критерий компактности.

Числовое множество относительно компактно (компактно) тогда и только тогда, когда оно ограничено (ограничено и замкнуто).

Непрерывные функции на компактных множествах

Для непрерывных функций на компактных множествах справедливы теоремы, аналогичные теоремам Вейерштрасса для непрерывных числовых функций на отрезке.

Теорема 1.3.1 *Пусть X – метрическое пространство, M – его компактное множество, $f : M \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Тогда*
1. f ограничена на M и достигает на M своих точной верхней и точной нижней граней, т.е. существуют x^* и x_*, что

$$\sup_{x\in M} f(x) = f(x^*),\ \inf_{x\in M} f(x) = f(x_*);$$

2. функция $f(x)$ равномерно непрерывна на M, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x_1 - x_2)| < \varepsilon$, если $x_1, x_2 \in M$ и $\rho(x_1, x_2) < \delta$.

Доказательство.

1. Пусть $A = \sup\limits_{x\in M} f(x)$ (заметим, что здесь A не предполагается конечным). По определению точной верхней грани существует такая последовательность $\{x_n\}$ элементов из M, что $f(x_n) \to A$. В силу компактности M можно считать, что $x_n \to x^*$ (в противном случае перейдем к сходящейся к x^* подпоследовательности). Вследствие непрерывности функции f имеем $f(x_n) \to f(x^*)$. Следовательно $A = f(x^*) < \infty$.

Для точной нижней грани доказательство проводится аналогично.

2. Предположим, функция f не является равномерно непрерывной. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся такие точки

$x_\delta,\ y_\delta$ из M, для которых $\rho(x_\delta, y_\delta) < \delta$ и $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \varepsilon_0$. Возьмем последовательность $\delta_n \to 0$ и обозначим $x_n = x_{\delta_n},\ y_n = y_{\delta_n}$. Можно считать ввиду компактности M, что $x_n \to x,\ y_n \to y$. А так как $\rho(x_n, y_n) \to 0$, то $x = y$. Далее, вследствие непрерывности функции f выполняется соотношение $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$. Но с другой стороны, $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$. Противоречие. ■

Критерий компактности Хаусдорфа

Определение. Пусть M и N – множества из метрического пространства X. Множество N называют ε-сетью для множества M, если для любой точки $m \in M$ существует такая точка $n \in N$, что $\rho(m, n) < \varepsilon$.

Теорема 1.3.2 *Для того чтобы множество M в метрическом пространстве X было относительно компактно, необходимо, а в случае полноты пространства X и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ у множества M существовала конечная (т.е. состоящая из конечного числа элементов) ε-сеть.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть множество M относительно компактно. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем произвольный элемент x_1 из M. Возможны два случая: либо для любого элемента $x \in M$ выполняется соотношение $\rho(x, x_1) < \varepsilon$ и тогда $\{x_1\}$ является ε-сетью для M, либо существует элемент x_2, для которого $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Во втором случае возможны также два случая: либо $\{x_1, x_2\}$ – ε-сеть для множества M, либо существует элемент $x_3 \in M$, для которого выполняются соотношения $\rho(x_1, x_3) \geq \varepsilon,\ \rho(x_2, x_3) \geq \varepsilon$.

Продолжая этот процесс, мы либо после конечного числа шагов построим конечную ε-сеть для множества M, либо построим последовательность $\{x_n\}$, для которой $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ при $m \neq n$. Но последнее невозможно ввиду относительной компактности множества M, так как в этом случае из последовательности $\{x_n\}$ нельзя выбрать сходящейся подпоследовательности.

Достаточность. Пусть X – полное метрическое пространство и у множества M для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть. Выберем последовательность $\varepsilon_n \to 0$ и для каждого ε_n построим конечную ε_n-сеть $\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ...x_{m_n}^{(n)}\}$ для множества M. Рассмотрим шары вида $\overline{S}(x_j^{(n)}, \varepsilon_n)$. Очевидно, что для любого n выполняется включение $M \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m_n} \overline{S}(x_j^{(n)}, \varepsilon_n)$.

Выберем произвольную последовательность $\{y_n\}$ элементов множества M и покажем что из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Рассмотрим шары радиуса ε_1. Среди них найдется шар, обозначим его через $\overline{S}_1$, который содержит подпоследовательность $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$. Для дальнейшего удобно осуществить перенумерацию, полагая $y_k^{(1)} = y_{n_k}$. Таким образом, получаем подпоследовательность

$$\{y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, ...y_k^{(1)}, ...\} \subset \overline{S}_1.$$

Далее, среди шаров радиуса ε_2 найдется шар $\overline{S}_2$, содержащий подпоследовательность

$$\{y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, ...y_k^{(2)}, ...\} \subset \overline{S}_2$$

предыдущей последовательности.

Продолжая этот процесс, на шаге с номером n получаем подпоследовательность

$$\{y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, ...y_k^{(n)}, ...\} \subset \overline{S}_n$$

предыдущей последовательности. Здесь $\overline{S}_n$ один из шаров радиуса ε_n. В результате данного процесса выбираются все более плотно упакованные подпоследовательности, расположенные в шарах все меньшего и меньшего радиуса. Однако этот факт вовсе не означает, что в результате конечного числа шагов будет выбрана сходящяяся подпоследовательность. Поэтому обратимся к диагональнной последовательности $\{y_n^{(n)}\}$. Это решающий шаг в доказательстве! Во-первых, она является подпоследовательностью исходной последовательности, а во-вторых, если у нее отбросить первые k элементов, то оставшаяся ее часть будет содержаться в шаре $\overline{S}_{k+1}$ радиуса ε_{k+1}. Вследствие второго свойства диагональная последовательность фундаментальна, так как $\rho(y_n^{(n)}, y_m^{(m)}) \leq \varepsilon_{min(n,m)}$.■

Ряд замечаний и следствий.

Замечание 1. Описанный в доказательстве достаточности процесс носит название диагонализации и часто используется в теоретических исследованиях.

Замечание 2. Требование существования конечной ε-сети в критерии Хаусдорфа можно заменить требованием существования относительно компактной ε-сети.

Следствие 1. (Критерий компактностим метрического пространства)

Метрическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1. X – полное;

2. для любого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть.

Доказательство. Заметим, что для всего метрического пространства (в отличие от его подмножества) понятия компактности и относительной компактности совпадают. Поэтому остается показать, что из компактности следует полнота. Пусть $\{x_n\}$ – произвольная фундаментальная последовательность. В силу компактности X из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Но если подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится, то и сама фундаментальная последовательность сходится (докажите).■

Следствие 2.

Компактное метрическое пространство сепарабельно и ограничено.

Доказательство. Предоставляя доказательство ограниченности читателю, установим сепарабельность. Возьмем числовую последовательность $\varepsilon_n \to 0$ и для каждого ε_n выберем конечную ε_n-сеть. Тогда, очевидно, объединение всех ε_n-сетей является счетным всюду плотным множеством. ■

Пример компактного множества (гильбертов параллелепипед)

Рассмотрим в пространстве l_2 множество

$$\Pi = \{x = (x_1, x_2, ...) \in l_2;\ |x_n| \leq 1/n,\ n \in N\}.$$

Покажем, что Π компактно. Действительно, рассмотрим множество

$$\Pi_N = \{x = (x_1, x_2, ...x_N, 0, 0, ..);\ |x_n| \leq 1/n\}.$$

Каждое множество Π_N можно рассматривать как подмножество в $\mathbb{R}^N$. Так как Π_N ограничено, то вследствие критерия Больцано оно относительно компактно. В то же время для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что Π_N при $N > N(\varepsilon)$ является ε-сетью для множества Π. В самом деле, выбрав элементы $x = (x_1, x_2, ...x_N, x_{N+1}, ..) \in \Pi$ и $x^{(N)} = (x_1, ...x_N, 0, 0, ..) \in \Pi_N$, получим

$$\rho(x, x^{(N)}) = \{\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^2\}^{1/2} \leq \{\sum_{k=N+1}^{\infty} 1/k^2\}^{1/2}.$$

Следовательно, определив $N(\varepsilon)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\{\sum_{k=N(\varepsilon)+1}^{\infty} 1/k^2\}^{1/2} < \varepsilon,$$

установим, что для любого $\varepsilon > 0$ у множества Π существует относительно компактная ε-сеть. Вследствие критерия Хаусдорфа Π относительно компактно. Компактность этого множества следует из его замкнутости.

Критерий Арцела

Для конкретных метрических пространств существуют более удобные критерии относительной компактности множеств. Ниже формулируется критерий относительной компактности в пространстве непрерывных функций на конечном отрезке. Не нарушая общности, будем расматривать пространство $C[0, 1]$.

Определение. Множество $\Phi \subset C[0, 1]$ будем называть равномерно ограниченным, если сущестует такая константа $M < \infty$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ выполняется соотношение

$$\max_{t \in [0,1]} |\varphi(t)| \leq M.$$

Определение. Множество $\Phi \subset C[0,1]$ называется равностепенно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ выполняется неравенство $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon$ как только $|t_1 - t_2| < \delta$.

Теорема 1.3.3 *Для того чтобы множество $\Phi \subset C[0,1]$ было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным.*

Доказательство. Данная теорема является следствием критерия Хаусдорфа.

Необходимость. Пусть Φ относительно компактно.

Равномерная ограниченность. Выберем для множества Φ 1-сеть $\{\varphi_1, ..\varphi_n\}$. Каждая из этих функций ограничена: $\max\limits_{t\in[0,1]} |\varphi(t)| \le M_i$. Пусть M – наибольшее из чисел M_i. Тогда для любой функции $\varphi \in \Phi$ выполняется неравенство

$$|\varphi(t)| \le |\varphi(t) - \varphi_j(t)| + |\varphi_j(t)| \le M + 1,$$

что и означает равномерную ограниченность множества Φ.

Равностепенная непрерывность. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ выберем $\varepsilon/3$-сеть $\{\varphi_1, ...\varphi_n\}$. Каждая функция φ_i равномерно непрерывна, поэтому существует $\delta_i > 0$, что $|\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2)| < \varepsilon/3$ при $|t_1 - t_2| < \delta_i$. Пусть $\varphi \in \Phi$ – произвольная функция и φ_j – элемент сети, для которого $|\varphi(t) - \varphi_j(t)| < \varepsilon/3$. Положим $\delta = \min \delta_i$. Тогда при $|t_1 - t_2| < \delta$ имеем

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le |\varphi(t_1) - \varphi_j(t_1)| + |\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| + |\varphi_j(t_2) - \varphi(t_2)| < \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ множество Φ равностепенно непрерывно.

Достаточность. Предположим, что множество Φ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Для доказательства его относительной компактности достаточно для любого $\varepsilon > 0$ установить существование конечной ε-сети. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По нему выберем δ из условия равностепенной непрерывности. Пусть также M – постоянная из условия равномерной ограниченности. Тогда графики всех функций из Φ будут расположены в прямоугольнике $[0,1] \times [-M, M]$. Отрезок $[0,1]$ разобьем на части точками $t_j = j/n,\ j = 0, 1, ..n$ так, чтобы $1/n < \delta$, а отрезок $[-M, M]$ – точками $x_k = kM/m,\ k = -m, ..m$ так, чтобы $M/m < \varepsilon$. Обозначим через Ψ множество всех кусочно-линейных непрерывных функций, графики которых являются ломаными с вершинами в точках (t_j, x_k). Отметим, что множество Ψ конечно. Далее, для каждой функции $\varphi \in \Phi$ существует функция $\psi \in \Psi$ с условием

$$|\varphi(t_i) - \psi(t_i)| < \varepsilon,\ i = 0, 1, ..n.$$

Оценим расстояние между этими двумя функциями. Пусть $t \in [t_i, t_{i+1}]$, тогда

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq |\varphi(t) - \varphi(t_i)| + |\varphi(t_i) - \psi(t_i)| + |\psi(t_i) - \psi(t)|.$$

Так как $|t - t_i| < \delta$, то вследствие равностепенной непрерывности $|\varphi(t) - \varphi(t_i)| < \varepsilon$, в силу выбора ψ $\ |\varphi(t_i) - \psi(t_i)| < \varepsilon$, далее ввиду линейности ψ на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ и предыдущих оценок

$$|\psi(t) - \psi(t_i)| < |\psi(t_i) - \psi(t_{i+1}| \leq$$

$$\leq |\psi(t_i) - \varphi(t_i)| + |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i+1})| + |\varphi(t_{i+1}) - \psi(t_{i+1})| \leq 3\varepsilon.$$

Таким образом, из предыдущих неравенств следует, что множество Ψ является 5ε-сетью для множества Φ. Ввиду произвольности ε вследствие критерия Хаусдорфа множество Φ относительно компактно. ■

Замечание. Если множество Φ состоит из непрерывно дифференцируемых функций, то равномерная ограниченность множества Φ и множества производных функций множества Φ влечет относительную компактность множества Φ в пространстве $C[0,1]$. Действительно, равностепенная непрерывность следует из формулы конечных приращений $\varphi(t_1) - \varphi(t_2) = \varphi'(\xi)(t_1 - t_2)$.

Обобщенная теорема Арцела

Пусть (X, ρ) и (Y, d) – компактные метрические пространства. Обозначим через $C(X, Y)$ – множество всех непрерывных отображений из X в Y

и введем метрику $r(f,g) = \sup\limits_{x\in X} d(f(x), g(x))$.

Упражнение. Докажите, что пространство $C(X,Y)$ является полным.

Обобщенная теорема Арцела устанавливает критерий компактности в пространстве $C(X,Y)$.

Теорема 1.3.4 *Множество $\Phi \subset C(X,Y)$ относительно компактно тогда и только тогда, когда оно равностепенно непрерывно в смысле следующего определения: $\Phi \subset C(X,Y)$ равностепенно непрерывно, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что неравенство $\rho(x_1, x_2) < \delta$ влечет $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ для всех $f \in \Phi$.*

Доказательство смотрите в [12], с. 110.

Теорема Пеано о существовании решения задачи Коши

В качестве приложения критерия Арцела рассмотрим теорему о существовании решения задачи Коши. Рассмотрим функцию $f(x,y)$, заданную и непрерывную на прямоугольнике $K = \{|x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$ и $\max\limits_K |f(x,y)| < M$. При этих предположениях справедлива

Теорема 1.3.5 *Задача Коши*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

имеет решение $y = y(x)$, определенное на отрезке h, где $h < min(a,\, b/M)$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса существует последовательность многочленов $\{P_n(x,y)\}$, которая равномерно на K сходится к функции $f(x,y)$. Можно считать, что $|P_n(x,y)| < M$. Вместе с исходной задачей Коши рассмотрим последовательность задач Коши

$$\begin{cases} y' = P_n(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Каждая из этих задач имеет единственное решение $y = y_n(x)$, определенное на отрезке $|x - x_0| \leq h,\ h < min(a,\, b/M)$, причем $|y(x) - y_0| \leq b$. Этот факт следует из теоремы существования и единственности решения задачи Коши и замечания к ней. Рассмотрим множество функций $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Из предыдущей оценки следует равномерная ограниченность этого множества. Кроме того из равенства $y_n'(x) = P_n(x, y_n(x))$ следует равномерная ограниченность производных $|y_n'(x)| < M$. Следовательно, множество $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактно в пространстве $C[x_0 - h, x_0 + h]$. Поэтому из этой последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Не нарушая общности будем считать, что сама последовательность $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к некоторой функции $y(x)$. Покажем, что функция $y(x)$ является решением исходной задачи Коши. Заметим, что каждая из функций $y_n(x)$ удовлетворяет равенству

$$y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} P_n(s, y_n(s))\, ds.$$

Так как

$$|P_n(x, y_n(x)) - f(x, y(x))| \leq$$

$$\leq |P_n(x, y_n(x)) - f(x, y_n(x))| + |f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))|,$$

то последовательность функций $P_n(x, y_n(x))$ сходится равномерно к функции $f(x, y(x))$. Предельный переход в интегральном равенстве приводит к тождеству

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds.$$

Вследствие этого функция $y(x)$ является решением исходной задачи Коши. ■

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте аксиомы метрики.

2. Какое элементарное числовое неравенств лежит в основе доказательства неравенства Гельдера?

3. Каков смысл сходимости в пространстве $C[0, 1]$?

4. Приведите определения непрерывности отображения метрических пространств в терминах последовательностей, на языке "$\varepsilon - \delta$", в терминах прообразов открытых и замкнутых множеств.

5. Приведите определение сепарабельного метрического пространства.

6. Является ли множество всех многочленов с рациональными коэффициентами счетным всюду плотным множеством в пространстве непрерывных функций на отрезке?

7. Приведите примеры полного и неполного метрических пространств.

8. Выполняется ли принцип сжимающих отображений в случае неполного метрического пространства?

9. В какой форме применяется принцип сжимающих отображений в доказательстве теоремы существования решения задачи Коши?

10. Какое условие на правую часть дифференциального уравнения обеспечивает возможность применения принципа сжимающих отображений?

11. Как формулируются определения компактности и относительной компактности множества в метрическом пространстве?

12. Как определяется ограниченность множества в метрическом пространстве?

13. Является ли замкнутое множество в метрическом пространстве компактным?

14. Является ли компактное метрическое пространство а) ограниченным, б) сепарабельным?

15. Как строится конечная ε-сеть в доказательстве достаточности критерия Арцела?

16. Как используется критерий Арцела в доказательстве теоремы Пеано?

Глава 2

ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

2.1 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

Предварительно напомним определение линейного пространства.

Множество X называется линейным пространством, если на нем определены две операции: сложение элементов и умножение элементов на числа из некоторого числового поля. В дальнейшем рассматриваются поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ или вещественных чисел $\mathbb{R}$. В первом случае пространство X будем называть комплексным, во втором – вещественным.

Эти операции должны удовлетворять следующим аксиомам.

a. *аксиомы сложения*

1. сложение коммутативно: $x + y = y + x,\ \forall\, x, y \in X$;
2. сложение ассоциативно: $(x + y) + z = x + (y + z),\ \forall\, x, y, z \in X$;
3. существует нуль: $\exists 0 \in X\ \forall\, x\ \ 0 + x = x$;
4. существует противоположный элемент: $\forall\, x\ \exists(-x)\ \ x + (-x) = 0$.

В дальнейшем будем обозначать $x + (-y) = x - y$.

b. *аксиомы умножения*

5. $1 \cdot x = x\ \forall x$;
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$.

В дальнейшем знак $\cdot$ для умножения опускается.

c. *аксиомы дистрибутивности*

7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Упражнение. Доказать, что $0 \cdot x = 0$ (здесь и далее мы не различаем при написании нуль-число (в данном случае слева) и нуль-вектор (в данном случае справа)), $(-1) \cdot x = -x, \ \lambda \cdot 0 = 0$.

Определение. Линейное пространство X будем называть линейным нормированным пространством (ЛНП), если определено отображение $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$, называемое нормой, для которого выполняются аксиомы:
1. $\|x\| \geq 0, \ \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (аксиома тождества);
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (однородность нормы);
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Легко проверяется, что функция $\rho(x, y) = \|x - y\|$ является метрикой. Поэтому ЛНП является метрическим пространством. Сходимость $x_n \to x$ по этой метрике означает, что $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Эту сходимость будем называть сходимостью по норме.

Определение. Полное ЛНП называется пространством Банаха или банаховым пространством.

Определение. Множество $L \subset X$ называется линейным многообразием в пространстве X, если оно замкнуто относительно линейных операций, т.е. если L содержит элементы x и y, то L обязательно содержит их любую линейную комбинацию $\alpha x + \beta y$.

Определение. Замкнутое относительно метрики линейное многообразие называется подпространством.

Как показывают примеры, следует различать линейные многообразия и подпространства.

Пример. В пространстве $C[0, 1]$ непрерывных функций с нормой $\|x\| = \max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$ рассмотрим в качестве L множество всех многочленов. Очевидно, что L линейное многообразие, но не является (!) подпространством, так как по теореме Вейерштрасса $\overline{L} = C[0, 1]$.

В то же время любое конечномерное многообразие является подпространством (докажите).

Примеры линейных нормированных пространств

1. Пространство $\mathbb{R}^n$ с любой из норм

$$\|x\| = \begin{cases} \{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\}^{1/p}, & 1 \le p < \infty \\ \sup\limits_{k=1,\dots n} |x_k|, & p = \infty. \end{cases}$$

Упражнение. Доказать, что все эти нормы эквивалентны в смысле следующего определения:

две нормы $\|\cdot\|_1$ *и* $\|\cdot\|_2$ *на линейном пространстве* X *называются эквивалентными, если существуют такие константы* $c_1,\ c_2 > 0$*, что для любого элемента* x *выполняется неравенство* $c_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2\|x\|_1$.

На самом деле, любые две нормы, которые можно ввести на конечномерном пространстве, эквивалентны. Этот факт будет установлен позднее в качестве следствия фундаментальной теоремы Банаха об обратном операторе.

2. Пространства последовательностей l_p с нормой

$$\|x\| = \begin{cases} \{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\}^{1/p}, & 1 \le p < \infty \\ \sup\limits_{k=1,\dots} |x_k|, & p = \infty. \end{cases}$$

Здесь неравенство треугольника есть неравенство Минковского.

Отметим, что здесь все нормы $\|\cdot\|_p$ определены на l_1, но попарно не эквивалентны (докажите).

3. Функциональные пространства Лебега $L_p(a,b)$ с нормой

$$\|x\| = \begin{cases} \{\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt\}^{1/p}, & 1 \le p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup} |x(t)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Напомним, что элементами этих пространств являются классы эквивалентных измеримых по Лебегу функций, для которых конечна соответствующая норма.

Отметим также, что все приведенные пространства являются банаховыми.

Свойства алгебраических операций и нормы

В линейном нормированном пространстве алгебраические операции и норма непрерывны, т.е. если $x_n \to x,\ y_n \to y,\ \lambda_n \to \lambda$, то

1. $x_n + y_n \to x + y$;
2. $\lambda_n x_n \to \lambda x$;
3. $\|x_n\| \to \|x\|$.

Ограничимся доказательством непрерывности нормы. Заметим, что для любых $x,\ y$ из неравенства треугольника следует, что $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. Поэтому $|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \to 0$.

Замечание. Пусть X – ЛНП, не являющееся банаховым, и Y – его пополнение (в смысле метрики, задаваемой нормой). Тогда вследствие непрерывности линейных операций и нормы они однозначно распространяются с X на Y. При этом Y становится линейным нормированным, а ввиду полноты, и банаховым пространством. (Проведите подробную проверку аксиом.)

Далее нам часто придется рассматривать ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ с элементами x_k банахова пространства X.

Определение. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится, если сходится последовательность $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ его частичных сумм, т.е. существует такой элемент $x \in X$, что

$$\|S_n - x\| \to 0.$$

Элемент x будем называть суммой ряда и писать $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = x$.

Достаточное условие сходимости

Теорема 2.1.1 *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *из элементов банахова пространства* X *сходится, если сходится числовой ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать фундаментальность последовательности частичных сумм ряда. В свою очередь, это следует из сходимости ряда из норм элементов:

$$\|S_n - S_m\| \leq \| \sum_{k=m}^{n} x_k \| \leq \sum_{k=m}^{n} \|x_k\| \to 0,\ n > m,$$

при $n,\ m \to \infty$.■

2.2 ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Определение. Линейное пространство H, комплексное или вещественное, называется предгильбертовым, если в нем для любых элементов $x,\ y$ определено число (x, y), называемое их скалярным произведением, так что выполняются следующие аксиомы:

1. $(x, x) \geq 0,\ (x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2. линейность по первому аргументу
   $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$;
3. $(x, y) = \overline{(y, x)}$.
   Здесь и ниже черта означает операцию комплексного сопряжения.

Примеры предгильбертовых пространств

1. $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k;$$

2. $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением

$$(z, w) = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k;$$

3. комплексное пространство l_2 со со скалярным произведением

$$(z, w) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \bar{w}_k;$$

4. комплексное пространство $L_2(a, b)$ со скалярным произведением

$$(z, w) = \int_a^b z(t) \bar{w}(t)\, dt;$$

5. $C^l[a,b]$ – множество вещественных l раз непрерывно дифференцируемых функций со скалярным произведением

$$(x,y)=\sum_{j=0}^{l}\int_a^b x^{(j)}(t)y^{(j)}(t)dt.$$

Теорема о норме

Теорема 2.2.1 *Каждое предгильбертово пространство является линейным нормированным пространством относительно нормы*

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}.$$

Доказательство. Предварительно установим неравенство Коши - Буняковского

$$|(x,y)|\le\|x\|\|y\|.$$

Ввиду аксиом скалярного произведения справедливо неравенство

$$0\le(x+\lambda y,x+\lambda y)=(x,x)+\lambda\overline{(x,y)}+\bar\lambda(x,y)+|\lambda|^2(y,y).$$

Считая, что $y\ne0$ и полагая $\lambda=-(x,y)/(y,y)$, приходим к неравенству

$$|(x,y)|\le(x,x)(y,y).$$

Извлекая квадратнный корень, получаем нужное неравенство.

Докажем теорему о норме. Достаточно проверить неравенство треугольника. Для любых элементов x,y имеем цепочку неравенств

$$\|x+y\|^2=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)=(x,x)+2Re(x,y)+(y,y)\le$$
$$\le\|x\|^2+2|(x,y)|+\|y\|^2\le(\|x\|+\|y\|)^2.\blacksquare$$

Определение. Полное предгильбертово пространство называется гильбертовым пространством.

Пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, l_2, $L_2(a,b)$, приведенные в примерах, являются гильбертовыми. $C^l[a,b]$ не является полным. Пополнение этого пространства по метрике, определяемой скалярным произведением, называется пространством Соболева и обычно обозначается $H^l(a,b)$. Аналогично определяются многомерные пространства Соболева в областях пространства $\mathbb{R}^n$, играющие фундаментальную роль в современной теории уравнений в частных производных.

Свойства скалярного произведения

1. *Скалярное произведение непрерывно.*

Действительно, если $x_n \to x,\ y_n \to y$, то ввиду неравенства

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| \leq |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \leq |x_n\| \|y - y_n\| + \|x - x_n\| \|y\|$$

имеем $|(x_n, y_n) - (x, y)| \to 0$, что и означает непрерывность скалярного произведения.

2. *Тождество параллелограмма*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

3. *Поляризационное тождество*

$$(x, y) = 1/4\{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)\}.$$

Замечание. Если в ЛНП для нормы выполняется тождество параллелограмма, то в нем можно ввести с помощью поляризационного тождества скалярное произведение [12], с. 160.

Упражнение. Докажите тождество параллелограмма и поляризационное тождество.

Упражнение. Докажите, что пополнение предгильбертова пространства относительно метрики, определяемой скалярным произведением, является гильбертовым пространством.

Ортонормированные системы

Определение. Элементы x, y называются ортогональными: $x \perp y$, если $(x, y) = 0$.

Определение. Систему элементов $\{e_j\}$ будем называть ортонормированной, если выполняются соотношения

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

В дальнейшем для определенности будем рассматривать бесконечномерные пространства.

Процесс ортогонализации Шмидта

Пусть в предгильбертовом пространстве H задана линейно независимая система элементов $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$, т.е. ее каждая конечная подсистема линейно независима. Процесс ортогонализации позволяет из данной линейно независимой системы построить ортонормированную систему.

Алгоритм построения.

Полагаем $e_1 = h_1/\|h_1\|$. Выбираем $g_2 = h_2 + \alpha_{21}e_1$ и требуем, чтобы выполнялось условие $g_2 \perp e_1$. Условие ортогональности однозначно определяет коэффициент $\alpha_{21} = -(h_2, e_1)$. Элемент e_2 получаем, нормируя элемент g_2 : $e_2 = g_2/\|g_2\|$.

Заметим, что $\|g_2\| \neq 0$, иначе h_2 пропорционален h_1. Далее продолжаем по индукции. Предположим, что элементы $e_1, e_2, ...e_{n-1}$ уже построены. Тогда выбираем g_n в форме $g_n = h_n + \alpha_{n1}e_1 + \alpha_{n2}e_2 + ...\alpha_{nn-1}e_{n-1}$ и требуем выполнения условий ортогональности $g_n \perp e_1, e_2, ...e_{n-1}$. Эти условия однозначно определяют коэффициенты $\alpha_{nj} = -(h_n, e_j),\ j = 1, ...n-1$. Элемент e_n получаем, нормируя g_n: $e_n = g_n/\|g_n\|$.

Продолжая этот процесс, построим ортонормированную систему $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Важное свойство процесса ортогонализации состоит в том, что при любом $n = 1, 2, ...\infty$ линейные оболочки систем векторов $\{h_j\}_{j=1}^{n}$ и $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ совпадают. Действительно, из алгоритма определения элементов e_j следует, что элемент e_n является линейной комбинацией элементов $h_1, h_2, ..h_n$:

$$e_n = \beta_{nn}h_n + \beta_{nn-1}h_{n-1} + ... + \beta_{n1}h_1,$$

причем $\beta_{nn} \neq 0$.

Системы ортогональных многочленов

Процесс ортогонализации используется для построения систем ортогональных многочленов. На множестве вещественных функций, определенных на интервале (a,b), введем скалярное произведение по формуле

$$(x,y)=\int\limits_a^b \rho(t)x(t)y(t)\,dt,$$

где $\rho(t)>0$ – функция, называемая весом. Предположим, что существуют интегралы $\int\limits_a^b \rho(t)t^{2n}\,dt$. Тогда, применяя процесс ортогонализации к системе одночленов $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$, получаем систему многочленов, ортогональных относительно введенного скалярного произведения. Таким образом получаются классические системы ортогональных многочленов Лежандра, Эрмита, Якоби, Лагерра. Например, если $(a,b)=(-1,1),\ \rho(t)=1$, то получается система многочленов Лежандра, определяемая рекуррентной формулой

$$P_n(t)=c_n\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n],$$

а в случае $(a,b)=(-\infty,+\infty),\ \rho(t)=e^{-t^2}$ получается система многочленов Эрмита с рекуррентной формулой

$$H_n(t)=c_ne^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}[e^{-t^2}].$$

Упражнение. Доказать рекуррентные формулы для многочленов Лежандра и Эрмита.

Теорема о существовании ортонормированного базиса

Определение. Ортонормированная система $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве H называется полной или ортонормированным базисом, если ее линейная оболочка всюду плотна в H.

Теорема 2.2.2 *В каждом сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Доказательство. В сепарабельном гильбертовом пространстве выберем счетное всюду плотное множество $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$. Построим линейно независимую систему элементов $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$, линейная оболочка которой $L(\{h_j\}_{j=1}^{\infty})$ содержит все элементы $g_j,\ j=1,2,\ldots$. Эту систему можно выбрать следующим образом. В качестве h_1 выбираем первый ненулевой элемент в последовательности $g_1, g_2, ...g_n, ...$, в качестве h_2 – первый линейно независимый с элементом h_1 в этой последовательности, в качестве h_3 – первый линейно независимый с элементами h_1 и h_2, и т.д. К выбранной линейно независимой системе применим процесс ортогонализации. В результате получим ортонормированную систему $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, которая является ортонормированным базисом. Этот факт следствие того, что линейная оболочка системы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ содержит всюду плотное множество $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$.$\blacksquare$

Теорема Рисса – Фишера

Роль ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве аналогична роли базиса в евклидовом пространстве. Каждый элемент можно разложить по базису, но в случае бесконечномерного пространства это разложение есть ряд, называемый рядом Фурье.

Теорема 2.2.3 *Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H.*
1. Тогда каждый элемент $x \in H$ можно разложить в ряд Фурье

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) e_j,$$

сходящийся в смысле нормы:

$$\|x - \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j\| \to 0$$

при $n \to \infty$, причем выполняется равенство Парсеваля

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2.$$

2. Если задана числовая последовательность $\{a_j\}$ и для нее выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ *сходится к некоторому элементу* y *и является его рядом Фурье, т.е.* $(y, e_j) = a_j$.

Доказательство. Сначала установим экстремальное свойство коэффициентов Фурье.

Лемма 2.2.1 *Точная нижняя грань* $\inf\limits_{a_1,a_2,\dots a_n} \|x - \sum\limits_{j=1}^{n} a_j e_j\|^2$ *достигается тогда и только тогда, когда коэффициенты* a_j *совпадают с коэффициентами Фурье:* $a_j = (x, e_j),\ j = 1, 2, \dots n$, *причем*

$$\inf_{a_1,a_2,\dots a_n} \|x - \sum_{j=1}^{n} a_j e_j\|^2 = \|x - \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |(x, e_j)|^2.$$

Доказательство. Введем обозначение $(x, e_j) = c_j$. Ввиду равенства

$$(a_j - c_j)(\bar{a}_j - \bar{c}_j) = |a_j|^2 - a_j \bar{c}_j - c_j \bar{a}_j + |c_j|$$

имеем

$$\|x - \sum_{j=1}^{n} a_j e_j\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{j=1}^{n} (|a_j|^2 - a_j \bar{c}_j - c_j \bar{a}_j) = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} |a_j - c_j|^2.$$

Из последнего равенства с очевидностью следует, что точная нижняя грань достигается тогда и только тогда, когда $a_j = c_j$.

Следствие.(неравенство Бесселя) Для любой ортонормированной системы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2 \le \|x\|^2.$$

Перейдем к доказательству теоремы. Так как линейная оболочка системы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ плотна в пространстве H, то существует последовательность линейных комбинаций $x_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j^{(n)} e_j$, сходящаяся при $n \to \infty$ к элементу x. В силу экстремального свойства коэффициентов Фурье имеем

$$\|x - \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |(x, e_j)|^2 \to 0.$$

Таким образом, установлено, что ряд Фурье сходится к элементу x и выполняется равенство Парсеваля.

Для доказательства второй части теоремы рассмотрим последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j e_j$. Ввиду соотношения

$$\|S_n - S_m\|^2 = \| \sum_{j=m+1}^{n} a_j e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \to 0,\ n > m$$

и сходимости ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j|^2$ последовательность S_n фундаментальна. Вследствие полноты пространства H ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ сходится. Обозначим его сумму через y. Тогда в силу непрерывности скалярного произведения имеем

$$(y, e_k) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{j=1}^{n} a_j e_j, e_k) = a_k.$$

Таким образом, установлено, что рассматриваемый ряд является рядом Фурье для элемента y.■

Теорема об ортогональном разложении

Определение. Пусть M – подмножество в гильбертовом пространстве H. Его ортогональным дополнением $M^\perp$ называется множество

$$M^\perp = \{y \in H;\ (y, x) = 0,\ \forall x \in M\}.$$

Заметим, что $M^\perp$ является подпространством в H. (докажите)

Теорема 2.2.4 *Пусть L – подпространство в гильбертовом пространстве H, $L^\perp$ – его ортогональное дополнение. Тогда H разлагается в ортогональную сумму*

$$H = L \oplus L^\perp.$$

Это означает, что любой элемент x можно единственным представить в виде суммы $x = y + z$, где $y \in L$, $z \in L^\perp$.

Доказательство. Первый вариант – для сепарабельного гильбертового пространства.

Заметим, что подпространство сепарабельного гильбертового пространства само является сепарабельным гильбертовым пространством (приведите доказательство). Поэтому в подпространстве L существует ортонормированный базис, который обозначим через $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$. Для определенности считаем, что L бесконечномерно. Рассмотрим элемент $y = \sum\limits_{j=1}^{\infty}(x, f_j)f_j$. Данный ряд сходится ввиду неравенства Бесселя и его сумма y принадлежит подпостранству L. Согласно второй части теоремы Рисса - Фишера данный ряд является рядом Фурье для элемента y, т.е. $(y, f_j) = (x, f_j),\ j = 1, 2, ...$ Пусть $z = x - y$. Из равенства коэффициентов Фурье элементов x и y по системе $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ вытекает, что $z \in L^{\perp}$. Поэтому установлено существование ортогонального разложения для элемента x.

Остается доказать единственность разложения. Предположим, что существует еще одно разложение $x = y_1 + z_1$. Вычитая одно разложение из другого, получаем равенство $y - y_1 = z_1 - z$. Умножая скалярно обе части этого равенства на элемент $y - y_1$, получаем

$$(y - y_1, y - y_1) = (z_1 - z, y - y_1) = 0.$$

Следовательно, $y = y_1,\ z = z_1$ и единственность доказана.

Второй вариант – для общего случая. Для этого используем теорему о существовании элемента наилучшего приближения [22], с. 58.

Теорема 2.2.5 *Пусть M – выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве H и элемент $x \notin M$. Тогда существует единственный элемент $y \in M$, для которого*

$$\|x - y\| = \rho(x, L) \stackrel{def}{=} \inf_{z \in M} \|x - z\|.$$

Доказательство. Обозначим $\rho(x, L) = d$. Существует последовательность элементов y_n, для которых

$$d^2 \leq \|x - y_n\|^2 \leq d^2 + 1/n.$$

Применим тождество параллелограмма к точкам $x - y_n$ и $x - y_m$:

$$\|y_n - y_m\|^2 + \|2x - (y_n + y_m)\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2).$$

В силу выпуклости множества M точка $1/2(y_n + y_m)$ принадлежит M, поэтому

$$\|2x - (y_n + y_m)\| \geq 2d.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\|x - 1/2(y_n + y_m)\|^2 \leq 2(1/n + 1/m),$$

вследствие которого последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна. Но тогда $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ является элементом наилучшего приближения для элемента x. Если y' – второй такой элемент, то, применяя тождество параллелограмма к элементам $x - y$ и $x - y'$, аналогично предыдущему получаем равенство

$$\|y - y'\|^2 + \|2x - (y + y')\|^2 = 2(\|x - y\|^2 + \|x - y'\|^2).$$

Отсюда $y = y'$.

Завершим доказательство теоремы об ортогональном разложении. Применим предыдущую теорему к элементу x и подпространству L. Пусть $y \in L$ – элемент наилучшего приближения. Достаточно показать, что $x - y \perp L$. Пусть h – произвольный элемент из подпространства L. Тогда верно неравенство

$$d^2 \leq \|x - y - \lambda h\|^2 = d^2 - 2\mathrm{Re}\{\overline{\lambda}(x - y, h)\} + |\lambda|^2\|h\|^2.$$

Считаем, что $h \neq 0$ и полагаем в этом неравенстве $\lambda = (h, x - y)/\|h\|^2$. В результате получаем $|(x - y, h)| \leq 0$. Следовательно $x - y \perp L$.■

Замкнутые ортонормированные системы

Определение. Ортонормированная система $\{e_j\}$ называется замкнутой, если для любого элемента $x \in H$ справедливо равенство Парсеваля.

Теорема 2.2.6 *Пусть $\{e_j\}$ – ортонормированная система в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис;

2. $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ – замкнутая ортонормированная система;

3. не существует элемента $y \neq 0$, ортогонального всем элементам системы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, т.е. из равенств $(y, e_j) = 0$, $\forall j = 1, 2, ...$ следует, что $y = 0$.

Доказательство. Импликация 1. $\rightarrow$ 2. установлена в теореме Рисса - Фишера. Если $(y, e_j) = 0$ $\forall j = 1, 2, ...$, то из равенства Парсеваля следует, что $y = 0$. Таким образом, установлена импликация 2. $\rightarrow$ 3. Наконец, предположим, что система $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ не является ортонормированным базисом. Тогда ортогональное дополнение к линейной оболочке системы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ нетривиально, т.е. содержит ненулевой элемент. Но это противоречит условию 3. ■

Примеры ортонормированных базисов

1. В пространстве l_2 система единичных ортов $e_j = (0, 0, ...1, 0, ...)$ образует ортонормированный базис. Легко проверяется замкнутость этой ортонормированной системы.

2. В пространстве $L_2(-1, 1)$ система многочленов Лежандра образует ортонормированный базис.

Действительно, по свойству процесса ортогонализации линейная оболочка всех многочленов Лежандра совпадает с множеством всех многочленов. Согласно теореме Вейерштрасса множество всех многочленов плотно в пространстве $C[-1, 1]$. В свою очередь, множество всех непрерывных функций плотно в пространстве $L_2(-1, 1)$. Таким образом, линейная оболочка всех многочленов Лежандра плотна в пространстве $L_2(-1, 1)$ и, следовательно, система многочленов Лежандра образует ортонормированный базис.

Теорема Рисса - Фишера для системы многочленов Лежандра формулируется следующим образом.

Теорема 2.2.7 *Любую функцию $f(t) \in L_2(-1, 1)$ можно разложить ряд Фурье по системе многочленов Лежандра*

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j P_j(t),$$

где $f_j = \int\limits_{-1}^{1} f(t)P_j(t)\,dt.$

Этот ряд сходится к функции f *в норме пространства* $L_2(-1,1)$, *т.е.*

$$\int\limits_{-1}^{1} |f(t) - \sum_{j=0}^{n} f_j P_j(t)|^2\,dt \to 0$$

при $n \to \infty$, *и выполняется равенство Парсеваля*

$$\int\limits_{-1}^{1} |f(t)|^2 dt = \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^2.$$

3. В комплексном пространстве $L_2(-\pi,\pi)$ ортонормированный базис образует тригонометрическая система $\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Упражнение. Аналогично примеру 2 доказать утверждение 3. и сформулировать теорему Рисса - Фишера для тригонометрической системы.

Изоморфизм гильбертовых пространств

Определение. Два гильбертовых пространства H_1 и H_2 будем называть изоморфными, если существует биективное отображение $\varphi : H_1 \to H_2$, сохраняющее линейные операции и скалярное произведение, т.е. выполняются соотношения:

1. $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$,
2. $(\varphi(x), \varphi(y))_{H_2} = (x, y)_{H_1}$.

Теорема 2.2.8 *Любые два бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства над одним и тем же числовым полем изоморфны.*

Доказательство. Ввиду транзитивности свойства изоморфности достаточно установить изоморфизм пространств H и l_2, где H – произвольное сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство. Выберем ортонормированный базис $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ в пространстве H. Отображение $\varphi : H \to l_2$ определим, сопоставляя элементу $x \in H$ набор его коэффициентов Фурье: $\varphi(x) = \{(x, e_j)\}_{j=1}^{\infty}$. Вследствие равенства Парсеваля отображение φ сохраняет норму. Линейность этого отображения следует из линейности скалярного произведения по первому аргументу. Тот факт, что отображение φ сохраняет скалярное произведение, вытекает из поляризационного тождества. ■

Упражнение. Проведите подробное доказательство теоремы об изоморфизме.

Замечание(о несепарабельных гильбертовых пространствах)

Понятие ортонормированного базиса распространяется на случай несепарабельного гильбертова пространства [18], с. 59. Конечно, в этом случае базисы несчетны. Мощность ортонормированного базиса является инвариантом пространства (размерность пространства). Пространства одинаковой рамерности изоморфны. [1]

Замечание. (о базисах в банаховых пространствах) Понятие базиса для банахова пространства формулируется следующим образом.

Определение. Система элементов $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ банахова пространства X называется базисом, если любой элемент $x \in X$ можно единственным образом представить в виде сходящегося в норме пространства X ряда

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j.$$

Ясно, что пространство с базисом обязательно сепарабельно.

Пространства $L_p(0,1)$, l_p, $1 \le p < \infty$, $C[0,1]$ имеют базисы. Но, например, система функций $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$ не является базисом в $C[0,1]$.

Вопрос, будет ли любое сепарабельное банахово пространство иметь базис, составлявший проблему базиса, долго не поддавался решению. В 1973 году шведский математик П.Энфло построил пример сепарабельного банахова пространства без базиса.

Вопросы для самоконтроля

1. Чем отличаются линейные многообразия от линейных подпространств?

2. Приведите пример линейного многообразия в пространстве C[0,1], которое не является подпространством.

3. Выполняется ли тождество параллелограмма в пространстве непрерывных функций?

4. Как осуществляется процесс ортогонализации?

5. Как применяется процесс ортогонализации для построения систем ортогональных многочленов?

6. В чем состоит экстремальное свойство коэффициентов Фурье?

7. Чем отличается ортонормированный базис от ортонормированной системы?

8. Как определяется ортогональное дополнение для произвольного множества гильбертова пространства?

9. Является ли это множество замкнутым?

10. Как определяется замкнутая ортонормированная система?

11. Приведите примеры ортонормированных базисов.

Глава 3

ЛИНЕЙНЫЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

3.1 НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ОГРАНИЧЕННОСТЬ

Пусть X и Y – линейные пространства над одним и тем же числовым полем вещественных или комплексных чисел.

Определение. Линейным оператором называется отображение

$$A : X \to Y,$$

удовлетворяющее условию линейности:

для любых элементов $x_1, x_2 \in X$ и чисел α, β

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2.$$

Если X и Y – линейные нормированные пространства, то для оператора, как для отображения, определено понятие непрерывности.

Таким образом, оператор A непрерывен в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 в пространстве X, последовательность $\{Ax_n\}$ сходится к Ax_0 в пространстве Y, т.е. из того, что $\|x_n - x_0\|_X \to 0$ вытекает, что $\|Ax_n - Ax_0\|_Y \to 0$.

Эквивалентное определение формулируется следующим образом: оператор A называется непрерывным в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$ как только $\|x - x_0\| < \delta$.

Оператор будем называть непрерывным, если он непрерывен в каждой точке пространства X.

Для линейного оператора верна простая

Теорема 3.1.1 *Линейный оператор непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен хотя бы в одной точке.*

Доказательство. Достаточно показать, что из непрерывности в нуле следует непрерывность в любой точке x_0. Действительно, если $x_n \to x_0$, то $x_n - x_0 \to 0$, и в силу непрерывности в нуле $A(x_n - x_0) \to A0 = 0$. Поэтому $Ax_n \to Ax_0$.■

В линейных нормированных пространствах чаще используется понятие ограниченного оператора.

Определение. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется ограниченным, если существует такая константа $M > 0$, что для всех $x \in X$

$$\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

В ЛНП понятия непрерывности и ограниченности линейного оператора эквивалентны.

Теорема 3.1.2 *Линейный оператор непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Доказательство. Очевидно, из ограниченности следует непрерывность в нуле и, следовательно, непрерывность во всем пространстве. Обратно, если оператор A непрерывен в нуле, то для фиксированного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что $\|Ax\|_Y \leq \varepsilon$ при $\|x\|_X \leq \delta$. Возьмем произвольный элемент $x \neq 0$, тогда элемент $\delta x/\|x\|$ имеет норму, равную δ. Поэтому $\|A(\delta x/\|x\|)\| \leq \varepsilon$. Но тогда из линейности вытекает, что $\|Ax\| \leq (\varepsilon/\delta)\|x\|$, т.е. в качестве M можно выбрать ε/δ.■

Определение. Пусть $A : X \to Y$ – ограниченный оператор. Его нормой называется число $\|A\|$, определяемое соотношением

$$\|A\| = \inf\{M : \|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X\}.$$

Из определения точной нижней грани вытекает, что число $\|A\|$ есть норма оператора, если выполняются два условия:

1. $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$;
2. $\forall\varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \neq 0 :\ \|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$.

Теорема 3.1.3 *(о вычислении нормы оператора)*

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \|Ax\|/\|x\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существует такой элемент $x_\varepsilon \neq 0$, что

$$\|A\| - \varepsilon < \|Ax_\varepsilon\|/\|x_\varepsilon\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \leq \|A\|.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем утверждение теоремы.■

Примеры операторов.

1. Нулевой оператор: $0 : X \to Y, \quad 0x = 0$.
2. Тождественный или единичный оператор: $I : X \to X, \quad Ix = x$.
3. Интегральный оператор в пространстве непрерывных функций

$$A : C[0,1] \to C[0,1]$$

определяется соотношением

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 k(t,s)x(s)\,ds,$$

где $k(t,s)$ – непрерывная функция на квадрате $[0,1]\times[0,1]$, называемая ядром интегрального оператора. Этот оператор действует в пространстве непрерывных функций (интеграл от непрерывной функции двух переменных является непрерывной функцией). Покажем, что оператор A ограничен и оценим его норму. Справедливо неравенство

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} \left| \int\limits_0^1 k(t,s)x(s)\,ds \right| \leq \max_{t\in[0,1]} \left(\int\limits_0^1 |k(t,s)|\,ds \right) \|x\|.$$

(Из под знака интеграла выносится $\max|x(s)| = \|x\|$).

В результате получаем, что оператор A ограничен и для его нормы выполняется оценка

$$\|A\| \leq \max_{t\in[0,1]} \left(\int\limits_0^1 |k(t,s)|\,ds \right).$$

Упражнение. Доказать, что на самом деле имеет место равенство.

Указание. Для знакопостоянного ядра утверждение очевидно. Для знакопеременного рассмотреть сначала случай одной перемены знака и для любого $\varepsilon > 0$ построить элемент x_ε, почти реализующий норму.

4. Оператор ортогонального проектирования.

Рассмотрим подпространство L в гильбертовом пространстве H. По теореме об ортогональном разложении каждый элемент x можно единственным образом представить в виде ортогональной суммы $x = y + z,\ y \in L,\ z \in L^\perp$. Определим оператор P, полагая $Px = y$, т.е. оператор P сопоставляет элементу x его ортогональную проекцию y на подпространство L. Оператор P называется оператором ортогонального проектирования (или ортопроектором) на подпространство L и обозначается, если нужно указать подпространство, $P = P_L$.

Покажем, что оператор P является линейным ограниченным оператором.

Проверка линейности. Для произвольных элементов $x_1, x_2 \in H$ имеют место ортогональные разложения: $x_j = y_j + z_j,\ j = 1, 2.$ тогда для их линейной комбинации справедливо ортогональное разложение

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2).$$

Поэтому

$$P(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha P x_1 + \beta P x_2.$$

Ограниченность. По теореме Пифагора $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$, поэтому $\|Px\| = \|y\| \le \|x\|$. Следовательно, оператор P ограничен и выполняется оценка $\|P\| \le 1$. На самом деле $\|P\| = 1$, так как для $y \in L$ имеем $\|Py\| = \|y\|$.

5. Линейный ограниченный функционал.

Линейный функционал – это линейный оператор, действующий из некоторого линейного пространства X в числовое пространство $\mathbb{R}$, если X вещественно, и в $\mathbb{C}$, если X комплексно. Так как в числовом пространстве норма есть модуль числа, то норма функционала определяется соотношением

$$\|f\| = \inf\{M :\ |f(x)| \le M\|x\|\}$$

и может быть вычислена по формулам

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)|.$$

6. Дифференциальные операторы.

Рассмотрим оператор дифференцирования, сопоставляющий непрерывно дифференцируемой функции ее производную: $(Ax)(t) = x'(t)$. Следовательно, оператор дифференцирования определен как оператор

$$A : C^1[0,1] \to C[0,1].$$

Если в пространстве $C^1[0,1]$ задана естественная норма

$$\|x\| = \max_{t\in[0,1]}(|x(t)|, |x'(t)|),$$

то оператор дифференцирования ограничен. Если же рассматривать в пространстве $C^1[0,1]$ норму $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$ (т.е. норму, индуцированную из пространства $C[0,1]$) то он не является ограниченным. Действительно, для последовательности функций $x_n(t) = \sin nt$ имеем $\|x_n\| = 1$ и в то же время $\|Ax_n\| = \max |n \cos nt| \to \infty$.

Приведенный пример показывает, что в зависимости от выбора нормы на пространстве определения оператора, оператор может оказаться ограниченным или неограниченным. Конечно, можно выбрать нормы, чтобы оператор оказался ограниченным. Но имеются весьма важные причины, по которым, например, оператор дифференцирования следует рассматривать в одном и том же пространстве. В этом случае операторы будут неограниченными и, более того, определенными не на всем пространстве, а лишь на некотором линейном многообразии.

Упражнение. Доказать, что дифференциальный оператор с непрерывными коэффициентами $(Ax)(t) = \sum\limits_{j=0}^{l} a_j(t)x^{(j)}(t)$ является ограниченным оператором из пространства $C^l[0,1]$ в пространство $C[0,1]$.

Теорема о продолжении оператора по непрерывности.

Теорема 3.1.4 *Пусть L – линейное многообразие, всюду плотное в банаховом пространстве X. Будем рассматривать L как линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\| = \|\cdot\|_X$. Пусть $A : L \to Y$ – линейный ограниченный оператор, действующий из L в банахово пространство Y. Тогда его можно единственным образом продолжить на все пространство X с сохранением нормы: т.е. существует единственный линейный ограниченный оператор $\tilde{A} : X \to Y$, для которого*

1. $\tilde{A}x = Ax \; \forall x \in L$;

2. $\|\tilde{A}\|_{X\to Y} = \|A\|_{L\to Y}$.

Доказательство. Для произвольного элемента $x \in X$ выберем последовательность $x_n \to x$. Положим

$$\tilde{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n.$$

Остается проверить, что этот предел определяет оператор с нужными свойствами.

1. Существование предела.

Ввиду неравенства

$$\|Ax_n - Ax_m\| \le \|A\|\|x_n - x_m\|$$

последовательность $\{Ax_n\}$ фундаментальна в Y и, следовательно, предел существует.

2. Предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$ и, значит, зависит только от элемента x. (Докажите самостоятельно)

3. Оператор $\tilde{A}$ линеен ввиду непрерывности линейных операций.

4. Оператор $\tilde{A}$ ограничен ввиду непрерывности нормы:

$$\|\tilde{A}x\| = \lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| \le \|A\|_{L\to Y}\|x\|$$

и $\|\tilde{A}\|_{X\to Y} \le \|A\|_{L\to Y}$. На самом деле имеет место равенство, так как для всех $x \in L$ $\tilde{A}x = Ax$.

5. Единственность оператора $\tilde{A}$ следствие того факта, что линейные ограниченные операторы, совпадающие на всюду плотном множестве, равны (докажите).■

Примеры применения теоремы о продолжении оператора по непрерывности.

Пример 1. Интегральный оператор в пространстве $L_2(0,1)$.

Рассмотрим интегральный оператор

$$(Kx)(t) = \int\limits_0^1 k(t,s)x(s)\,ds$$

с непрерывным ядром. Как было установлено, он определен на всюду плотном в пространстве $L_2(0,1)$ множестве непрерывных функций. Пусть $x(t)$ – непрерывная функция. Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\left|\int\limits_0^1 k(t,s)x(s)\,ds\right| \le \left\{\int\limits_0^1 |k(t,s)|^2\,ds\right\}^{1/2} \left\{\int\limits_0^1 |x(s)|^2\,ds\right\}^{1/2}.$$

Поэтому для любой непрерывной функции $x(t)$ выполняется неравенство

$$\|Kx\|_{L_2(0,1)} \le \left\{\int\limits_0^1 |k(t,s)|^2\,ds\right\}^{1/2} \|x\|_{L_2(0,1)}.$$

Используя теорему, получаем, что оператор K (отождествляем его с продолжением $\tilde{K}$) является ограниченным оператором в пространстве $L_2(0,1)$ и справедлива оценка

$$\|K\|_{L_2\to L_2} \le \left\{\int\limits_0^1 |k(t,s)|^2 ds\right\}^{1/2}.$$

Данный пример носит иллюстративный характер. Применение теоремы Фубини позволяет установить ограниченность в пространстве $L_2(0,1)$ интегрального оператора в предположении квадратичной суммируемости ядра.

Действительно, если $k(t,s) \in L_2([0,1]^2)$, $x(s) \in L_2(0,1)$, то из неравенства Гельдера для двумерного интеграла следует, что функция $k(t,s)x(s)$

интегрируема на квадрате $[0,1]^2$. Поэтому согласно теореме Фубини интеграл $(Kx)(t)$ является интегрируемой функцией. Далее, повторяем, по существу, предыдущие рассуждения, но в предположении квадратичной суммируемости ядра.

Пример 2. Оператор преобразования Фурье.

Преобразованием Фурье называется интегральное преобразование, сопоставляющее функции $f(t)$, определенной на $\mathbb{R}$, функцию $(Ff)(x)$, определяемую интегралом

$$(Ff)(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}\,dt.$$

Покажем, что можно определить оператор преобразования Фурье как ограниченный оператор $F : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$. Для этого согласно теореме о продолжении достаточно определить оператор на всюду плотном множестве и установить соответствующие оценки ограниченности. Воспользуемся известным результатом о преобразовании Фурье в классе $S(\mathbb{R})$. Напомним, что класс $S(\mathbb{R})$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций, для которых при любых n, m выполняется условие $\sup\limits_t |t^m f^{(n)}(t)| < \infty$. Упомянутый результат состоит в том, что преобразование Фурье взаимно однозначно отображает класс $S(\mathbb{R})$ на себя, причем обратное отображение F^{-1} определяется формулой

$$(F^{-1}g)(t) = 1/\sqrt{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{itx}\,dx.$$

Остается установить оценки ограниченности. Пусть $f,\ g \in S(\mathbb{R})$. Изменяя порядок интегрирования в силу теоремы Фубини, получаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (Ff)(t)g(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)(Fg)(t)\,dt.$$

Полагая в полученном соотношении $g = F^{-1}\bar{f}$, где черта означает комплексное сопряжение, и учитывая, что $F^{-1}\bar{f} = \overline{Ff}$, выводим, что

$$\|Ff\|_{L_2}^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |(Ff)(t)|^2\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt.$$

Теперь ввиду теоремы о продолжении можно считать, что операторы F и F^{-1} определены на всем пространстве $L_2(\mathbb{R})$, причем $\|F^{\pm 1}f\| = \|f\|$ для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ и $F(F^{-1}f) = F^{-1}(Ff) = f$. Для произвольного элемента $f \in L_2(\mathbb{R})$ $\quad Ff = \lim\limits_{n\to\infty} Ff_n$, где предел понимается в смысле L_2 и $\{f_n\}$ – последовательность элементов из $S(\mathbb{R})$, которая сходится в L_2 к элементу f.

Замечание. Конечно, в предыдущих рассуждениях существенно используется тот факт, что множество функций $S(\mathbb{R})$ плотно в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Этот и другие результаты об аппроксимации функций, играющие важную роль в различных вопросах функционального анализа, смотрите в [10], с. 97.

3.2 ПРОСТРАНСТВО ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Теорема о полноте

Пусть X и Y – линейные нормированные пространства. Обозначим через $L(X,Y)$ множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y. В этом множестве можно ввести линейные операции, определяя сумму операторов и умножение оператора на число следующими формулами:

$$(A+B)x = Ax + Bx,$$

$$(\lambda A)x = \lambda(Ax).$$

Отметим также, что если $A : X \to Y,\ B : Y \to Z$, то определено произведение данных операторов:

$$(AB)x = A(Bx).$$

Теорема 3.2.1 *Для введенных операций справедливы неравенства:*

1. $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$;

2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$;

3. $\|AB\| \le \|A\| \|B\|$.

Докажем последнее соотношение, первые два докажите самостоятельно. Имеем

$$\|AB\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|(AB)x\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|A(Bx)\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \|A\|\|Bx\| = \|A\|\|B\|.$$

Теорема 3.2.2 *Множество $L(X,Y)$ относительно введенных линейных операций и нормы оператора является линейным нормированным пространством. Если Y – банахово пространство, то $L(X,Y)$ также банахово.*

Доказательство. Заметим, что однородность нормы и неравенство треугольника для операторной нормы уже установлены в предыдущей теореме. Далее, очевидно, что $\|A\| \ge 0$ и $\|A\| = 0$ эквивалентно условию $A = 0$. Таким образом, установлено, что $L(X,Y)$ является линейным нормированным пространством.

Докажем его полноту в предположении полноты пространства Y. Пусть $\{A_n\}$ – фундаментальная последовательность операторов, т.е. $\|A_n - A_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Покажем, что существует оператор $A \in L(X,Y)$, для которого $\|A_n - A\| \to 0$. Положим $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. Этот предел действительно существует ввиду полноты пространства Y и фундаментальности последовательности операторов $\{A_n\}$ и определяет линейный оператор (почему?). Вследствие фундаментальности последовательности операторов $\sup\limits_n \|A_n\| < \infty$. Поэтому из неравенства

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \le \sup_n \|A_n\| \|x\|$$

вытекает ограниченность оператора A. Покажем, что $\|A_n - A\| \to 0$. Для этого воспользуемся соотношением

$$\|A_n x - Ax\| = \lim_{m\to\infty} \|A_n x - A_m x\| \le \overline{\lim_{m\to\infty}} \|A_n - A_m\| \|x\|.$$

В силу фундаментальности последовательности $\{A_n\}$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$ при $n, m > N$. Выбирая в предыдущем неравенстве $n > N$, получим:

$$\|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Ввиду произвольности ε выводим, что $\|A_n - A\| \to 0$.■

Определение. Пространство $L(X, \mathbb{R})$, если X вещественно, или $L(X, \mathbb{C})$, если X комплексно, состоящее из всех линейных ограниченных функционалов на X, называется сопряженным пространством и обозначается X^*.

Важный факт.

Следствие. Сопряженное пространство X^* полно независимо от полноты пространства X.

Равномерная и сильная сходимости последовательностей операторов.

Как было установлено выше в случае линейных нормированных пространств X и Y пространство $L(X, Y)$ также является линейным нормированным пространством. В нем определена сходимость по операторной норме: $A_n \to A$, если $\|A_n - A\| \to 0$. Эту сходимость называют также равномерной сходимостью. Это связано с тем, что из соотношения

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A_n x - Ax\|$$

следует, что сходимость по норме эквивалентна сходимости $A_n x \to Ax$, равномерной относительно x с $\|x\| < 1$.

Для последовательностей операторов можно ввести другие типы сходимости. Мы ограничимся определением поточечной сходимости, которую называют также сильной сходимостью последовательности операторов.

Определение. Будем говорить, что последовательность линейных ограниченных операторов $A_n \in L(X, Y)$ поточечно (сильно) сходится к линейному ограниченному оператору $A \in L(X, Y)$ и обозначать $A_n \xrightarrow{T} A$, $A_n \xrightarrow{s} A$ или $A = s-\lim\limits_{n \to \infty} A_n$, если для любого элемента $x \in X$ выполняется соотношение $\|A_n x - Ax\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 3.2.3 *Из сходимости по норме следует поточечная сходимость последовательности операторов. Обратное, вообще говоря, неверно.*

Доказательство. Первое утверждение следует из неравенства

$$\|A_n x - Ax\| \le \|A_n - A\|\|x\|.$$

В качестве контрпримера рассмотрим последовательность ортопроекторов. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство и $\{e_j\}$ – его ортонормированный базис. Рассмотрим последовательность ортопроекторов $\{P_n\}$, где P_n проектирует H на подпространство L_n, являющееся линейной оболочкой системы векторов $\{e_j\}_{j=1}^n : \ L_n = L(\{e_j\}_{j=1}^n)$. Покажем, что $P_n \xrightarrow{s} I$, но не равномерно. Из теоремы Рисса - Фишера вытекает, что

$$Ix = \sum_{j=1}^{\infty}(x, e_j)e_j, \ P_n x = \sum_{j=1}^{\infty}(x, e_j)e_j.$$

Поэтому из равенства Парсеваля получаем, что

$$\|P_n x - Ix\| = \| \sum_{j=n+1}^{\infty} (x, e_j)e_j\| = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |(x, e_j)|^2\right)^{1/2} \to 0.$$

С другой стороны оператор $I - P_n$ является орторопроектором на подпространство $L^{\perp}$, поэтому $\|I - P_n\| = 1$.■

Принцип равномерной ограниченности.

Это одна из важнейших теорем. Ее другие названия теорема Банаха - Штейнгауза, теорема о резонансе.

Теорема 3.2.4 *Пусть X и Y – банаховы пространства, $\{A_n\} \in L(X, Y)$ – последовательность операторов. Если для каждого x*

$$\sup_n \|A_n x\| < \infty,$$

то

$$\sup_n \|A_n\| < \infty.$$

Доказательство. Для доказательства применим теорему Бэра. Введем замкнутые множества

$$M_N = \{x : \sup_n \|A_n x\| \leq N\},\ N = 1, 2, ...$$

Согласно предположению имеет место соотношение

$$X = \bigcup_{N=1}^{\infty} M_N.$$

Так как X – полное пространство, то согласно теореме Бэра найдется номер N_0, для которого множество M_{N_0} плотно в некотором шаре $\overline{S}(x_0, \varepsilon)$. Очевидно, что $\overline{S}(x_0, \varepsilon) \subset M_{N_0}$ (в силу замкнутости M_{N_0}).

Возьмем произвольный элемент x с $\|x\| \leq 1$. Тогда $x_0,\ x_0 + \varepsilon x \in M_{N_0}$. Поэтому справедливо неравенство

$$\|A_n x\| = 1/\varepsilon \|A_n(x_0 - (x_0 - \varepsilon x))\| \leq 1/\varepsilon(\|A_n x_0\| + \|A_n(x_0 - \varepsilon x)\|) \leq 2N_0/\varepsilon.$$

Так как полученная оценка не зависит от n, то

$$\sup_n \|A_n\| \leq 2N_0/\varepsilon < \infty.\blacksquare$$

Отметим ряд следствий из принципа равномерной ограниченности.

Следствие 1. (принцип фиксации особенности)

Если

$$\sup_n \|A_n\| = \infty,$$

то существует такой элемент x_0, что

$$\sup_n \|A_n x_0\| = \infty.$$

Доказательство. Если такого элемента не существует, то выполняется предположение принципа равномерной ограниченности.$\blacksquare$

Следствие 2. Пусть X и Y – банаховы пространства. Тогда пространство операторов $L(X, Y)$ полно относительно поточечной сходимости. Более подробно это означает следующее: если для каждого x последовательность $\{A_n x\}$ фундаментальна в пространстве Y, то существует оператор $A \in L(X, Y)$, для которого $A_n \xrightarrow{T} A$.

Доказательство. Определим оператор A соотношением $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. Тогда A – линейный оператор. Его ограниченность следует из соотношения

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \le \sup_n \|A_n\| \|x\|,$$

так как в силу принципа равномерной ограниченности

$$\sup_n \|A_n\| < \infty. \blacksquare$$

Следствие 3. (критерий поточечной сходимости)

Для того чтобы последовательность операторов $A_n \in L(X,Y)$ сходилась поточечно к оператору $A_n \in L(X,Y)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1. $\sup\limits_n \|A_n\| < \infty$;

2. $\|A_n x - Ax\| \to 0$ для всех элементов x, принадлежащих некоторому всюду плотному в X множеству M.

Доказательство. Необходимость условий непосредственно следует из принципа равномерной ограниченности.

Докажем достаточность. Предположим, что выполнены условия 1. и 2. Для произвольного элемента x существует последовательность элементов $x_n \in M$, для которой $\|x_n - x\| \to 0$. Далее, справедлива цепочка неравенств

$$\|A_n x - Ax\| \le \|A_n(x - x_m)\| + \|A(x - x_m)\| + \|A_n x_m - Ax_m\| \le$$

$$\le \sup \|A_n\| \|x - x_m\| + \|A\| \|x - x_m\| + \|A_n x_m - Ax_m\|.$$

Для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ выберем m так, чтобы

$$(\sup \|A_n\| + \|A\|)\|x - x_m\| < \varepsilon.$$

Учитывая, что при $n \to \infty$ для любого m $\|A_n x_m - Ax_m\| \to 0$, и переходя к пределу в полученной цепочке неравенств, устанавливаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| \le \varepsilon.$$

Утверждение теоремы верно ввиду произвольности ε.$\blacksquare$

Отметим еще одно важное следствие теоремы Бэра.

Теорема об открытости отображения.

Теорема 3.2.5 *Пусть $A : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, отображающий банахово пространство X на банахово пространство Y. Тогда для любого открытого множества $U \subset X$ множество $A(U)$ также открыто в Y.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что для любой точки x пространства X образ любой ее окрестности содержит некоторую окрестность точки Ax. Ввиду линейности оператора A достаточно рассмотреть точку $x = 0$. Ввиду равенства $A(X) = Y$ справедливо представление $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A(S_X(0,n))$, где $S_X(0,n)$ – шар с центром в нуле в пространстве X. Но тогда вследствие теоремы Бэра некоторое множество $\overline{A(S_X(0,n_0))}$ имеет непустую внутренность. Не нарушая общности можно считать (докажите), что $S_Y(0,\varepsilon) \subset \overline{A(S_X(0,1))}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Покажем, что $\overline{A(S_X(0,1))} \subset A(S_X(0,2))$. Пусть $y \in \overline{A(S_X(0,1))}$. Выберем $x_1 \in S_X(0,1)$ так, чтобы

$$y - Ax_1 \in S_Y(0,\varepsilon/2) \subset \overline{A(S_X(0,1/2))}.$$

Теперь выберем $x_2 \in S_X(0,1/2)$, для которого $y - Ax_1 - Ax_2 \in S_y(0,\varepsilon/4)$. По индукции выбираем $x_n \in S_X(0,2^{1-n})$ так, что

$$y - \sum_{k=1}^{n} Ax_k \in S_Y(0,\varepsilon 2^{1-n}).$$

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится и его сумма принадлежит шару $S_X(0,2)$ и вследствие ограниченности оператора A имеем

$$y = A(\sum_{k=1}^{\infty} x_k).$$

Таким образом, доказано, что множество $A(S_X(0,2))$ содержит некоторую окрестность нуля пространства Y. Но тогда ввиду однородности нормы образ $A(V)$ любой окрестности V нуля пространства X содержит некоторую окрестность W нуля пространства Y.■

Обратимые операторы.

Пусть X и Y – линейные пространства, $A : X \to Y$ – линейный оператор.

Определение. Оператор A называется обратимым, если существует такой линейный оператор $B : Y \to X$, что

$$AB = I_Y, \ BA = I_X.$$

Оператор B называется обратным к оператору A и обозначается A^{-1}. Обратный оператор единствен (докажите). Обратный оператор однозначно определяется соотношениями

$$\forall y \in Y \ AA^{-1}y = y, \ \forall x \in X \ A^{-1}Ax = x.$$

Понятие обратимости оператора $A : X \to Y$ связано с разрешимостью операторного уравнения $Ax = y$, где y – известный, а x неизвестный элементы.

Теорема 3.2.6 *Оператор $A : X \to Y$ обратим тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = y$ для любого $y \in Y$ имеет единственное решение $x \in X$.*

Доказательство. Если существует обратный оператор A^{-1}, то $x = A^{-1}y$ при любом y является решением уравнения $Ax = y$, так как $A(A^{-1}y) = y$. Далее, если x – решение уравнения, то действуя оператором A^{-1} на обе части равенства $Ax = y$, получаем, что $x = A^{-1}y$.

Обратно, пусть уравнение $Ax = y$ при любом y имеет единственное решение. Обозначим через A^{-1} отображение, сопоставляющее элементу y, это решение. Таким образом, $A(A^{-1}y) = y$. Далее, из равенства $Ax = Ax$ следует, что $x = A^{-1}(Ax)$. Остается показать линейность отображения A^{-1}. Пусть x_i – решение уравнения $Ax = y_i, i = 1, 2$. Тогда $\alpha x_1 + \beta x_2$– единственное решение уравнения $Ax = \alpha y_1 + \beta y_2$. Поэтому $\alpha x_1 + \beta x_2 = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)$. Но $x_i = A^{-1}y_i$, поэтому $A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2$. Следовательно, оператор A^{-1} линеен.■

Определение. Ядром оператора A называется множество

$$\operatorname{Ker} A = \{x \in X; Ax = 0\}.$$

Определение. Образом оператора A называется множество

$$\operatorname{Im} A = \{y \in Y;\ y = Ax,\ x \in X\}.$$

Упражнение. Доказать, что образ и ядро оператора являются линейными многообразиями, причем, если оператор ограничен, то ядро оператора является подпространством.

В новых терминах предыдущую теорему можно сформулировать следующим образом:
оператор A обратим тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} A = Y,\ \operatorname{Ker} A = \{0\}$.

Теоремы о существовании ограниченных обратных операторов.

Пусть X и Y – линейные нормированные пространства, $A : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор. Пусть у него существует обратный оператор $A^{-1} : Y \to X$. Верно ли, что обратный оператор ограничен? Примеры показывают, что, вообще говоря, нет.

Пример. Рассмотрим оператор интегрирования

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds,$$

как оператор $A : X \to Y$, где $X = C[0,1]$, а

$$Y = \operatorname{Im}\, A = \{y(t) = (Ax)(t),\ x \in C[0,1]\}$$

с нормой $\|y\|_Y = \|y\|_{C[0,1]} = \max\limits_{t\in[0,1]} |y(t)|$. Можно показать, что

$$\operatorname{Im}\, A = \{y(t) \in C^1[0,1],\ y(0) = 0\}.$$

Заметим, что $\operatorname{Ker}\, A = \{0\}$. Действительно, если $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds = 0$, то, дифференцируя, получаем $x(t) = 0$. Таким образом, обратный оператор A^{-1} существует. Для его определения рассмотрим уравнение

$$\int_0^t x(s)\,ds = y(t) \in Y.$$

Дифференцируя, получаем, что $(A^{-1}y)(t) = \frac{d}{dt}y(t)$. Но как было показано, в рассматриваемых пространствах оператор дифференцирования не является ограниченным.

Для приближенного решения операторных уравнений $Ax = y$ важно, чтобы уравнение было корректным, т.е. для любого $y \in Y$ оно имело единственное решение, которое непрерывно зависит от правой части y. Здесь мы ограничимся простым случаем, когда приближенно задается лишь правая часть уравнения, но приближенно может задаваться и сам оператор. Корректность уравнения гарантирует, что приближенное решение мало отличается от точного решения, если приближенная правая часть мало отличается от точной правой части.

Если обратный оператор A^{-1} ограничен, то уравнение корректно. Действительно, в этом случае точное и приближенное решения определяются формулами: $x_T = A^{-1}y_T,\ x_\Pi = A^{-1}y_\Pi$, абсолютные погрешности Δx и Δy связаны соотношением $\Delta x = A^{-1}\Delta y$. Поэтому $\|\Delta x\| \le \|A^{-1}\|\|\Delta y\|$.

Если же обратный оператор не является ограниченным, то задача некорректна и приближенное решение может сколь угодно сильно отличаться от точного решения даже если правая часть сколь угодно мало отличается от точной правой части.

Пример. Точное уравнение $\int\limits_0^t x(s)\,ds = 0$ с точным решением $x_T(t) = 0$. Приближенное уравнение $\int\limits_0^t x(s)\,ds = \varepsilon \sin nt$ с приближенным решением $x_\Pi = \varepsilon n \cos nt$. Оценим погрешности Δx и Δy в метрике пространства $C[0,1]$. Тогда $\|\Delta x\| = \varepsilon n$, а $\|\Delta y\| = \varepsilon$. Выбирая ε сколь угодно малым, мы добиваемся того, что $\|\Delta y\|$ сколь угодно мало. В то же время при фиксированном ε можно выбрать n настолько большим, что погрешность решения будет сколь угодно велика.

Теорема 3.2.7 *Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $A : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, отображающий X на Y. Пусть существует константа $\gamma > 0$, что для любого $x \in X$ вы-*

полняется неравенство $\|Ax\| \geq \gamma\|x\|$. Тогда у оператора A существует ограниченный обратный оператор A^{-1} и $\|A^{-1}\| \leq 1/\gamma$.

Доказательство. По условию $\operatorname{Im} A = Y$. $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, так как из $Ax = 0$ ввиду неравенства $\|Ax\| \geq \gamma\|x\|$ следует $x = 0$. Поэтому существует обратный оператор A^{-1}. Докажем его ограниченность. Полагая в неравенстве $x = A^{-1}y$, получаем

$$\|y\| = \|A(A^{-1}y)\| \geq \gamma\|y\|.$$

Из полученного неравенства следует ограниченность обратного оператора и указанная оценка его нормы.■

Теорема 3.2.8 *(об обратимости оператора, близкого к единичному оператору) Пусть $B : X \to X$ – линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве X и $\|B\| < 1$. Тогда оператор $A = I - B$ имеет ограниченный обратный оператор, который опeрделяется рядом Неймана:*

$$(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k, \ B^0 = I.$$

Лемма 3.2.1 *Произведение непрерывных операторов непрерывно, т.е. если $\|A_n - A\| \to 0, \ \|B_n - B\| \to 0$, то $\|A_nB_n - AB\| \to 0$.*

Доказательство теоремы 3.2.8. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} B^k$. Числовой ряд из норм $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|B^k\| \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \|B\|^k = 1/(1-\|B\|)$ сходится. Поэтому вследствие полноты пространства операторов $L(X, X)$ сходится ряд из операторов. Обозначим его сумму через $C = \sum\limits_{k=0}^{\infty} B^k$. Покажем, что оператор C обратный к оператору A. Для этого достаточно показать, что

$$C(I - B) = (I - B)C = I.$$

Согласно лемме имеем

$$C(I - B) = \lim_{n\to\infty} [\sum_{k=0}^{n} B^k(I - B)] = \lim_{n\to\infty}(I - B^{n+1}) = I.$$

Аналогично доказывается второе соотношение.■

Теорема 3.2.9 *(об обратимости оператора, близкого к обратимому)*

Пусть X, Y – банаховы пространства и оператор $A \in L(X,Y)$ имеет ограниченный обратный $A^{-1} \in L(Y,X)$. Пусть оператор $\triangle A : X \to Y$ ограничен и $\|\triangle A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Тогда оператор $C = A + \triangle A$ имеет ограниченный обратный, причем справедлива оценка

$$\|C^{-1} - A^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|^2 \|\triangle A\|}{1 - \|\triangle A\| \|A^{-1}\|}.$$

Лемма 3.2.2 *Пусть A и B имеют обратные операторы. Тогда оператор AB также имеет обратный: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Доказательство теоремы 3.2.9. Оператор C представим в виде произведения $C = A(I + A^{-1}\triangle A)$. Ввиду оценки для $\triangle A$ оператор $(I + A^{-1}\triangle A)$ обратим как бликий к единичному оператору. Таким образом, у оператора C существует ограниченный обратный $C^{-1} = (I + A^{-1}\triangle A)^{-1}A^{-1}$. Далее, используя представление

$$C^{-1} - A^{-1} = C^{-1}(A - C)A^{-1} = -(I + A^{-1}\triangle A)^{-1}A^{-1}\triangle A A^{-1}$$

и оценку нормы обратного для оператора, близкого к единичному, имеем нужную оценку.■

Замечание. Из установленной оценки следует, что переход к обратному оператору – непрерывная операция и что множество всех обратимых операторов открыто в пространстве $L(X,Y)$.

Упражнение. Пусть $\{A_n\}$ – последовательность обратимых операторов, сходящаяся по норме к оператору A. Доказать, что при равномерной ограниченности норм обратных операторов: $\sup \|A_n^{-1}\| < \infty$, оператор A имеет ограниченный обратный.

Теорема 3.2.10 *(теорема Банаха) Пусть линейный ограниченный оператор A взаимно однозначно отображает банахово пространство X на банахово пространство Y. Тогда у оператора A существует ограниченный обратный оператор.*

Доказательство. Существование обратного оператора очевидно. Его ограниченность следует из теоремы об открытом отображении. (Докажите более подробно)■

Интегральные уравнения.

Пусть $K : C[0,1] \to C[0,1]$ – интегральный оператор

$$(Kx)(t) = \int\limits_0^1 k(t,s)x(s)\,ds$$

с непрерывным ядром $k(t,s)$. Как было установлено ранее, оператор K ограничен и

$$\|K\| = \max_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 |k(t,s)|\,ds.$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) - \int\limits_0^1 k(t,s)x(s)\,ds = y(t),$$

или в операторной форме

$$(I-K)x = y.$$

Пусть $\|K\| < 1$. Тогда согласно теореме 3.2.8 оператор $I-K$ имеет ограниченный обратный оператор, который определяется рядом

$$(I-K)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} K^n.$$

Рассмотрим оператор K^2. Изменяя порядок интегрирования, устанавливаем, что K^2 является интегральным оператором

$$(K^2x)(t) = \int\limits_0^1 k_2(t,s)x(s)\,ds$$

с ядром

$$k_2(t,s) = \int\limits_0^1 k(t,s_1)k(s_1,s)\,ds_1.$$

Аналогично устанавливается, что K^n – интегральный оператор

$$(K^n x)(t) = \int\limits_0^1 k_n(t,s)x(s)\,ds,$$

ядро которого определяется индуктивной формулой

$$k_n(t,s) = \int\limits_0^1 k_{n-1}(t,s_1)k(s_1,s)\,ds_1.$$

Ядро $k_n(t,s)$ называется n-тым итерированным ядром и допускает оценку

$$\max_{t,s\in[0,1]} |k_n(t,s)| \le \|K\|^{n-1} \max_{t,s\in[0,1]} |k(t,s)|.$$

(Докажите самостоятельно). Поэтому ряд из итерированных ядер сходится равномерно. Его сумма

$$r(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t,s),\ \ k_1(t,s) = k(t,s)$$

– непрерывная функция. Таким образом, в рассматриваемом случае обратный оператор определяется формулой

$$((I-K)^{-1}z)(t) = z(t) + \int\limits_0^1 r(t,s)z(s)\,ds,$$

а решение интегрального уравнения есть

$$x(t) = y(t) + \int_0^1 r(t,s)y(s)\,ds.$$

Упражнение. Рассмотреть интегральное уравнение с "малым"ядром в пространствах $L_1(0,1)$ и $L_2(0,1)$.

Приближенное решение интегрального уравнения. Метод замены ядра вырожденным ядром.

Определение. Ядро $k(t,s)$ называется вырожденным, если оно допускает представление

$$k(t,s) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t)b_j(s).$$

Не нарушая общности, можно считать, что системы функций $\{a_j(t)\}_{j=1}^n$ и $\{b_j(t)\}_{j=1}^n$ линейно независимы. Рассмотрим вопрос о решении интегрального уравнения с вырожденным ядром:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) \int_0^1 b_j(s)x(s)\,ds + y(t).$$

Пусть $x(t)$ – его решение. Введем обозначения

$$x_j = \int_0^1 b_j(s)x(s)\,ds,\ y_j = \int_0^1 b_j(s)y(s)\,ds.$$

Интегрируя уравнение с вырожденным ядром по t от 0 до 1, получим, что $\{x_j\}$ является решением следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$x_j - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}x_k = y_j\ j = 1, 2, ...n,$$

где

$$\alpha_{jk} = \int_0^1 b_j(t)a_k(t)dt.$$

Обратно, если $\{x_j\}$ – решение алгебраической системы, то

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k a_k(t) + y(t)$$

– решение интегрального уравнения (докажите непосредственной подстановкой в интегральное уравнение). Таким образом, установлено, что решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Предположим что определитель системы отличен от нуля: $det(\delta_{jk} - \alpha_{jk}) \neq 0$. Тогда система имеет единственное решение

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} r_{jk}y_k,$$

где r_{jk} – коэффициенты обратной матрицы. В этом случае интегральное уравнение при любой правой части имеет единственное решение

$$x(t) = y(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \sum_{j=1}^{n} r_{kj} \int_0^1 b_j(s)y(s)\,ds.$$

Следовательно, в случае обратимости для интегрального оператора с вырожденным ядром имеем

$$((I-K)^{-1}y)(t) = y(t) + \int_0^1 r(t,s)y(s)\,ds,$$

где

$$r(t,s) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \sum_{j=1}^{n} r_{kj} b_j(s)$$

– вырожденное ядро.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение в пространстве $C[0,1]$ с невырожденным ядром, не предполагая малости ядра. Пусть $k_\varepsilon(t,s)$ – вырожденное ядро, для которого выполняется неравенство

$$\max_{t,s\in[0,1]} |k(t,s) - k_\varepsilon(t,s)| < \varepsilon$$

(ε-аппроксимация ядра). Существование такой аппроксимации вытекает, например, из теоремы Вейерштрасса об приближении непрерывных функций многочленами. Обозначим интегральный оператор с вырожденным ядром через K_ε. Тогда $\|K-K_\varepsilon\| \le \varepsilon$. Предположим, что оператор $I-K$ имеет ограниченный обратный и $\|(I-K)^{-1}\| = r$. Тогда согласно теореме 3.2.9 при достаточно малом ε (достаточно считать, что $\varepsilon < 1/r$) оператор $I-K_\varepsilon$ также имеет ограниченный обратный, причем

$$\|(I-K)^{-1} - (I-K_\varepsilon)^{-1}\| \le \varepsilon r^2/(1-\varepsilon r).$$

Каждое из уравнений $(I-K)x = y$ и $(I-k_\varepsilon)x = y$ имеет единственное решение: точное $x = (I-K)^{-1}y$ и приближенное $x_\varepsilon = (I-K_\varepsilon)^{-1}y$, причем справедлива оценка погрешности:

$$\|x - x_\varepsilon\|_{C[0,1]} \le \frac{\varepsilon r^2}{1-\varepsilon r}\|y\|_{C[0,1]}.$$

Изоморфизм конечномерных банаховых пространств.

Определение. Линейные нормированные пространства X и Y над одним и тем же числовым полем будем называть изоморфными, если существует линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$, взаимно однозначно отображающий X на Y и имеющий ограниченный обратный.

Теорема 3.2.11 *Любые два линейных конечномерных нормированных пространства одной и той же размерности изоморфны.*

Доказательство. Используем следующий факт: конечномерное нормированное пространство является банаховым пространством. (докажите). В силу транзитивности условия изоморфности достаточно показать, что вещественное (комплексное) ЛНП размерности n изоморфно $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$). В пространстве X выберем базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ и рассмотрим отображение $J : \mathbb{R}^n \to X$, определяемое соотношением

$$J\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j.$$

Ввиду неравенства

$$\|J\xi\| \leq \sup_k \|e_k\| \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|$$

отображение J является линейным ограниченным оператором, взаимно однозначно отображающим $\mathbb{R}^n$ на X. Согласно теореме Банаха у оператора J обратный оператор ограничен.■

Следствие 1. В конечномерном ЛНП любые две нормы эквивалентны.

Следствие 2. В конечномерном ЛНП множество относительно компактно (компактно) тогда и только тогда, когда оно ограничено (ограничено и замкнуто).

Задача о наилучшем приближении.

Пусть X – банахово пространство, L – его подпространство. Для любого элемента x величину

$$\rho(x, L) = \inf_{y \in L} \|x - y\|$$

будем называть расстоянием элемента x до подпространства L.

Упражнение. Доказать, что $x \in L$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $\rho(x, L) = 0$.

Определение. Пусть $x \notin L$. Элемент $z \in L$ будем называть элементом наилучшего приближения в подпространстве L для x, если $\|x - z\| = \rho(x, L)$.

Напомним, что при доказательстве теоремы об ортогональном разложении гильбертова пространства для любого подпространства L и любого элемента x было установлено существование единственного элемента наилучшего приближения $z \in L$. Именно этот элемент z является ортогональной проекцией элемента x на подпространство L.

Теорема 3.2.12 *Пусть L – конечномерное линейное многообразие в банаховом пространстве X. Тогда для любого элемента $x \in X$ в L существует элемент наилучшего приближения.*

Доказательство. Очевидно, для любого $n = 1, 2, ...$ существует элемент z_n, для которого

$$\|x - z_n\| \leq \rho(x, L) + 1/n.$$

Из неравенства

$$\|z_n\| \leq \|x\| + \|x - z_n\| \leq \|x\| + \rho(x, L) + 1$$

следует ограниченность последовательности $\{z_n\}$. По следствию 2 из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $z_{n_k} \to z$. Ясно, что z является элементом наилучшего приближения.■

Пример. Пусть P^n – подпространство в $C[0, 1]$, состоящее из всех многочленов степени не выше $n = 0, 1, ...$ Тогда для любой непрерывной на $[0, 1]$ функции существует многочлен из P^n наилучшего равномерного приближения среди всех многочленов степени не выше n.

Замечание. Элемент наилучшего приближения, вообще говоря, неединствен. Некоторые достаточные условия его единственности приведены в [22], с. 35.

3.3 СПЕКТР И РЕЗОЛЬВЕНТА

Пусть X – комплексное банахово пространство, $A : X \to X$ – линейный ограниченный оператор. Вместе с ним будем рассматривать семейство операторов $A_\lambda = A - \lambda I,\ \lambda \in \mathbb{C}$.

Определение. Комплексное число λ называется регулярным значением оператора A, если оператор A_λ имеет ограниченный обратный оператор A_λ^{-1}. Этот обратный оператор принято обозначать R_λ или $R_\lambda(A)$ и называть резольвентой оператора A. Множество всех регулярных значений оператора A называется резольвентным множеством и обозначается $\rho(A)$.

С учетом теоремы Банаха об обратном операторе следующие утверждения эквивалентны:

λ регулярно тогда и только тогда, когда A_λ взаимно однозначно отображает X на X;

λ регулярно тогда и только тогда, когда уравнение $A_\lambda x = y$ для любого $y \in X$ имеет единственное решение.

Теорема о резольвенте

Теорема 3.3.1 *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Резольвентное множество $\rho(A)$ оператора A является открытым множеством комплексной плоскости $\mathbb{C}$,причем*
$$\{\lambda; |\lambda| > \|A\|\} \subset \rho(A).$$
2. *На множестве $\{\lambda; |\lambda| > \|A\|\}$ резольвента разлагается в сходящийся по норме ряд:*
$$R_\lambda = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$
3. *Для любых $\lambda, \mu \in \rho(A)$ справедливо резольвентное тождество Гильберта*
$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu.$$

Доказательство. Начнем с доказательства утверждения 2. Используем представление $A - \lambda I = -\lambda(I - A/\lambda)$. Так как $|\lambda| > \|A\|$, то оператор $I - A/\lambda$ имеет ограниченный обратный как оператор, близкий к единичному оператору. Поэтому $R_\lambda = -\lambda^{-1}(I - A/\lambda)^{-1}$ и остается воспользоваться рядом Неймана для оператора $(I - A/\lambda)^{-1}$.

Докажем утверждение 1. Нужно показать, что резольвентное множество вместе с каждой точкой λ содержит некоторую ее окрестность. Рассмотрим оператор $A - (\lambda + \triangle\lambda)I$. Тогда, если выполнено неравенство $|\triangle\lambda| < \|R_\lambda\|^{-1}$, то по свойству обратимости оператора, близкого к обратимому, оператор $A_{\lambda+\triangle\lambda}$ имеет ограниченный обратный.

Доказательство свойства 3. Ввиду соотношения $R_\lambda A_\lambda = A_\lambda R_\lambda = I$ имеем $R_\lambda - R_\mu = R_\lambda(A_\mu - A_\lambda)R_\mu$ и остается заметить, что $A_\mu - A_\lambda = (\lambda - \mu)I$■.

Теорема о спектре

Определение. Спектром $\sigma(A)$ оператора A называется множество

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Иначе, спектр – множество всех тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор A_λ не имеет ограниченного обратного.

Теорема 3.3.2 *Спектр оператора A – непустое ограниченное множество комплексной плоскости, содержащееся в круге* $\{\lambda; |\lambda| \leq \|A\|\}$.

Все утверждения за исключением непустоты спектра непосредственно следуют из теоремы о резольвенте. По поводу же последнего ограничимся пока следующим замечанием.

Резольвенту можно рассматривать как операторную функцию комплексного параметра λ. В теории операторов важную роль играет тот факт, что на резольвентном множестве R_λ является аналитической оператор-функцией. Это позволяет в теории операторов использовать мощную теорию аналитических функций. Если предположить, что спектр пуст, то резольвента R_λ аналитична на всей расширенной комплексной плоскости и на бесконечности обращается в нуль: $R_\infty = 0$. Но для аналитических оператор-функций, как и для скалярных, справедлива теорема Лиувилля: аналитическая на всей расширенной комплексной плоскости оператор-функция является постоянным оператором. Ввиду равенства $R_\infty = 0$ и теоремы Лиувилля получаем, что $R_\lambda = 0$ для всех λ, что невозможно.

Замечание. Результат о расположении спектра можно уточнить, введя понятие спектрального радиуса оператора.

Определение. Спектральным радиусом опрератора A будем называть величину $r_A = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|A^n\|^{1/n}$.

Если $|\lambda| > r_A$, то ряд для резольвенты сходится и определяет оператор, обратный к оператору A_λ. Поэтому, на самом деле, все λ с $|\lambda| > r_A$ принадлежат резольвентному множеству. Следовательно, спектр $\sigma(A)$ содержится в круге $\{\lambda : |\lambda| \leq r_A\}$, причем доказывается, что на границе этого круга обязательно расположена хотя бы одна точка спектра. Отметим также, что для любого оператора существует $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$ и поэтому

$$r_A = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Вывод данной формулы и других приведенных выше утверждений можно найти в [22], с. 257.

Классификация точек спектра

Как уже отмечалось число λ принадлежит спектру оператора $A : X \to X$, если у оператора A_λ не существует ограниченного обратного. При этом возможны три взаимо исключающие ситуации:

1. отображение $A_\lambda : X \to \operatorname{Im} A_\lambda$ не является взаимно однозначным, т.е. существуют такие элементы $x_1 \neq x_2$, что $A_\lambda x_1 = A_\lambda x_2$;

2. отображение $A_\lambda : X \to \operatorname{Im} A_\lambda$ является взаимно однозначным, $\operatorname{Im} A_\lambda \neq X$ и $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = X$;

3. отображение $A_\lambda : X \to \operatorname{Im} A_\lambda$ взаимно однозначно $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq X$.

Заметим, что в случае взаимной однозначности отображения $A_\lambda : X \to X$ вследствие теоремы Банаха существует ограниченный обратный оператор A_λ^{-1} и точка λ не принадлежит спектру.

Определение.

Множество всех точек спектра, которые удовлетворяют условию 1, называется точечным спектром и обозначается $\sigma_T(A)$.

Множество всех точек спектра, удовлетворяющих условию 2, называется непрерывным спектром и обозначается $\sigma_H(A)$.

Множество всех точек спектра, удовлетворяющих условию 3, называется остаточным спектром и обозначается $\sigma_O(A)$.

Таким образом, справедливо представление

$$\sigma(A) = \sigma_T(A) \cup \sigma_H(A) \cup \sigma_O(A),$$

причем все три компоненты попарно не пересекаются.

Отметим также, что точечный спектр состоит из собственных значений оператора A. Действительно, если при $x_1 \neq x_2$ $A_\lambda x_1 = A_\lambda x_2$, то $x_0 = x_1 - x_2$ является собственным вектором, отвечающим собственному значению λ: $(A - \lambda I)x_0 = 0$. Обратно, если x_0 – собственный вектор, то $A_\lambda x_0 = 0 = A_\lambda 0$ и, следовательно, собственное значение λ принадлежит точечному спектру.

Примеры вычисления спектра

Пример 1. Оператор $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

В координатной форме оператор задается матрицей:

$$(Az)_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} z_k.$$

Из курса линейной алгебры известно, что оператор $A - \lambda I$ обратим тогда и только тогда, когда $det(a_{jk} - \lambda\delta_{jk}) \neq 0$. Корни характеристического уравнения $det(a_{jk} - \lambda\delta_{jk}) = 0$ являются собственными значениями оператора A, их не более n. Таким образом, если $\lambda_1, ...\lambda_m$ $(m \leq n)$ все различные собственные значения, то

$$\sigma(A) = \sigma_T(A) = \{\lambda_1, ...\lambda_m\}.$$

Пример 2. Оператор умножения на независимую переменную.

Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, определяемый соотношением $(Ax)(t) = tx(t)$. Для определения его спектра рассмотрим уравнение

$$Ax - \lambda x = y,$$

которое в явной форме имеет вид

$$(t - \lambda)x(t) = y(t).$$

Если $\lambda \overline{\in} [0,1]$, то для любой непрерывной функции $y(t)$ уравнение имеет единственное решение $x(t) = y(t)/(t - \lambda)$. Если $\lambda \in [0,1]$, то заведомо при $y(\lambda) \neq 0$ уравнение неразрешимо, а однородное уравнение $(t - \lambda)x(t) = 0$ имеет лишь тривиальное решение $x(t) = 0$, причем в этом случае $Im\ A_\lambda$ не является плотным в $C[0,1]$ (почему?). Поэтому

$$\sigma(A) = \sigma_O(A) = [0,1].$$

Упражнение. Рассмотреть оператор умножения на независимую переменную в пространстве $L_2(0,1)$ и показать, что $\sigma(A) = \sigma_H(A) = [0,1]$.

Упражнение. Для оператора умножения $(Ax)(t) = a(t)x(t)$, рассматриваемого в пространствах $C[0,1]$ и $L_2(0,1)$, где $a(t)$ – непрерывная функция на $[0,1]$, найти спектр и исследовать его характер.

Пример 3. Операторы сдвига.

В пространстве l_2 операторы правого U и левого сдвига V определяются формулами

$$U(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...),\ V(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...).$$

Из легко устанавливаемых равенств $\|U\| = \|V\| = 1$ вытекает, что все точки λ, удовлетворяющие условию $|\lambda| > 1$, принадлежат резольвентному множеству. Для оператора левого сдвига рассмотрим уравнение

$$(V - \lambda I)x = 0.$$

Оно имеет нетривиальное решение $x = c(1, \lambda, \lambda^2, ...)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $|\lambda| < 1$. Таким образом, имеем

$$\sigma_T(V) = \{\lambda :\ |\lambda| < 1\}.$$

Так как спектр оператора является замкнутым множеством, то

$$\sigma(V) = \{\lambda : \ |\lambda| \leq 1\}.$$

Для определения спектра оператора U рассмотрим равенство

$$V(U - \lambda I) = I - \lambda V.$$

При $|\lambda| < 1$ оператор $I - \lambda V$ имеет ограниченный обратный. Поэтому оператор $U - \lambda I$ необратим, иначе является обратимым оператор V. Следовательно,

$$\sigma(U) = \{\lambda : \ |\lambda| \leq 1\}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Является ли линейный ограниченный оператор в ЛНП непрерывным?

2. Верно ли обратное утверждение?

3. Как определяется норма ограниченного оператора?

4. Как оценивается норма интегрального оператора в пространстве квадратично суммируемых функций?

5. Как формулируется теорема о продолжении оператора по непрерывности?

6. Как определяются действия над линейными операторами?

7. При каких условиях полно пространство операторов?

8. Как определяется сопряженное пространство к ЛНП?

9. Почему оно всегда полное?

10. Как определяются поточечная и равномерная сходимости последовательностей операторов?

11. Как связаны эти понятия?

12. Как понимается поточечная полнота пространства операторов?

13. В чем смысл принципа фиксации особенности?

14. Как связана обратимость оператора с разрешимостью операторного уравнения?

15. Является ли переход к обратному оператору непрерывной операцией?

16. Как понимается близость оператора к единичному или обратимому в соответствующих теоремах об обратимости?

17. Какой вид имеет оператор, обратный к оператору вида "единичный + интегральный с малой нормой"?

18. Как решаются интегральные уравнения с вырожденными ядрами?

19. Является ли регулярным значением число λ, если уравнение $(- \lambda I)x = y$ имеет единственное решение при любой правой части y ?

Литература

[1] *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.

[2] *Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я.В.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Выш. школа, 1978.

[3] *Босс В.* Лекции по математике: функциональный анализ. Т. 5. 2005.

[4] *Городецкий В.В.* Методы решения задач по функциональному анализу. 1990.

[5] *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Мир, 1962.

[6] *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.

[7] *Вайнберг М. М.* Функциональный анализ. М.: Просвещение, 1979.

[8] *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

[9] *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

[10] *Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.

[11] *Князев П.Н.* Функциональный анализ. 2003.

[12] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

[13] *Кутателидзе С.С.* Основы функционального анализа. 1983.

[14] *Люстерник Л.А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

[15] *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. школа, 1982.

[16] *Пим Дж., Хадсон В.* Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.

[17] *Пугачев В.С.* Лекции по функциональному анализу. М.: Из-во МАИ, 1996.

[18] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

[19] *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

[20] *Рисс Ф., Сёкефальви - Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.

[21] *Садовничий В. А.* Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1986.

[22] *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

[23] *Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.

[24] *Хелемский А.Я.* Лекции по функциональному анализу. Москва, МЦНМО, 2004.

[25] *Хилле Е., Филлипс Р.С.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.

[26] *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Москва: Мир, 1967.

Оглавление