Перечень классических пространств

✍ $\mathbb{P}$ – поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ или поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

✍ ℓ_p^m $(1 \leqslant p < \infty)$ – пространство векторов $x = \{\xi_k\}_{k=1}^m$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, наделенное нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^m |\xi_k|^p\right)^{1/p}.$$

✍ c^m – пространство векторов $x = \{\xi_k\}_{k=1}^m$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, с нормой

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |\xi_k|.$$

☛ Пространство c^m будем обозначать также ℓ_∞^m.

✍ ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$ – пространство последовательностей $x = \{\xi_k\} = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, таких, что $\sum\limits_{k=1}^\infty |\xi_k|^p < \infty$, с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p\right)^{1/p}.$$

✍ m – пространство ограниченных последовательностей $x = \{\xi_k\} = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, с нормой

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k|.$$

☛ Пространство m будем обозначать также символом ℓ_∞.

✍ c – пространство сходящихся последовательностей $x = \{\xi_k\} = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, с нормой

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k|.$$

✍ c_0 – пространство сходящихся к нулю последовательностей $x = \{\xi_k\} = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, с нормой

$$\|x\| = \max_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k|.$$

✍ s – пространство последовательностей $x = \{\xi_k\} = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, с метрикой

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}, \quad y = \{\eta_k\} = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty},\ \eta_k \in \mathbb{P}.$$

✍ $C[a,b]$ – пространство функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{P}$, непрерывных на $[a,b]$, с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

✍ $C^k[a,b]$ – пространство функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{P}$, k раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$, с нормой

$$\|x\| = \sum_{\ell=0}^{k} \max_{t \in [a,b]} |x^{(\ell)}(t)|.$$

✍ $\widetilde{L}_p[a,b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ – пространство функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{P}$, непрерывных на $[a,b]$, с нормой

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

✍ Пусть E – измеримое по Лебегу подмножество $\mathbb{R}$.

$L_p(E)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ – пространство измеримых по Лебегу функций $x\colon E \to \mathbb{P}$ таких, что $|x(t)|^p$ суммируема на E, с нормой

$$\|x\| = \left(\int_E |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Функции x и y определяют один и тот же элемент $L_p(E)$, если $x(t) = y(t)$ для почти всех $t \in E$, т. е. x и y эквивалентны.

✍ Пусть E – измеримое по Лебегу подмножество $\mathbb{R}$.

$L_\infty(E)$ – пространство измеримых по Лебегу функций $x\colon E \to \mathbb{P}$ таких, что $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in E} |x(t)| < \infty$, с нормой

$$\|x\| = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in E} |x(t)|.$$

Функции x и y определяют один и тот же элемент $L_\infty(E)$, если $x(t) = y(t)$ для почти всех $t \in E$.

Величина $\operatorname{ess\,sup}$ (существенный супремум) функции x на множестве E определяется следующим образом:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in E} |x(t)| = \inf\big\{M > 0 : \operatorname{mes}\{t \in E\colon |x(t)| > M\} = 0\big\}.$$

В большинстве задач этого пособия $E = [a, b]$.

☛ Для пространств ℓ_p^m, ℓ_p, $\widetilde{L}_p[a, b]$, $L_p(E)$, если границы для индекса p не указаны явно, задачу нужно решить для всех p, $1 \leqslant p < \infty$. Нормы в этих пространствах будем часто обозначать $\|\cdot\|_p$.

Пространство $L_1(E)$ будем обозначать также $L(E)$.

✍ $\langle \mathbb{P}, \rho_{|\cdot|}\rangle$ – поле $\mathbb{P}$ с естественной метрикой

$$\rho_{|\cdot|}(x, y) = |x - y|.$$

✍ $\langle X, \rho_T\rangle$ – произвольное непустое множество X с *тривиальной* метрикой

$$\rho_T(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Тема 1. Метрические и линейные нормированные пространства, топология метрических пространств

Определение 1.1. Пусть X – непустое множество. Отображение $\rho\colon X^2 \to \mathbb{R}$ называется *метрикой на* X, если для любых x, y, $z \in X$

1) $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Определение 1.2. Если ρ – метрика на X, то пара $\langle X, \rho\rangle$ называется *метрическим пространством.*

Определение 1.3. Пусть X – линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Отображение $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ называется *нормой на* X, если для любых x, $y \in X$ и $\lambda \in \mathbb{P}$

1) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Определение 1.4. Если $\| \cdot \|$ – норма на линейном пространстве X, то пара $\langle X, \| \cdot \| \rangle$ называется *нормированным пространством.*

☛ Норму в пространстве X иногда будем обозначать $\| \cdot \|_X$, метрику – ρ_X. Там, где это не вызывает непонимания, вместо $\langle X, \rho \rangle$ или $\langle X, \| \cdot \| \rangle$ будем писать метрическое (нормированное) пространство X.

Определение 1.5. Пусть $\langle X, \rho \rangle$ – метрическое пространство, $a \in X$, $r > 0$.

✓ Множество $B(a,r) = \{x \in X \colon \rho(x,a) < r\}$ называется *открытым шаром* с центром в точке a радиуса r.

✓ Множество $B[a,r] = \{x \in X \colon \rho(x,a) \leqslant r\}$ называется *замкнутым шаром* с центром в точке a радиуса r.

✓ Множество $S[a,r] = \{x \in X \colon \rho(x,a) = r\}$ называется *сферой* с центром в точке a радиуса r.

Определение 1.6. Пусть $\langle X, \rho \rangle$ – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется *сходящейся*, если существует точка $x_0 \in X$ такая, что

$$\rho(x_n, x_0) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Точка x_0 называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$. В этом случае пишут

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\rho} x_0 \quad \text{или} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0.$$

Определение 1.7. Пусть $\langle X, \rho \rangle$ – метрическое пространство, $M \subset X$.

✓ Точка $x_0 \in M$ называется *внутренней точкой* множества M, если

$$\exists\, r > 0 \quad B(x_0, r) \subset M.$$

✓ Точка $x_0 \in X$ называется *предельной точкой* множества M, если
$$\forall\, r > 0 \quad M \cap \bigl(B(x_0, r) \setminus \{x_0\}\bigr) \neq \varnothing.$$

☛ Множество внутренних точек множества M обозначают $\overset{\circ}{M}$ и называют *внутренностью* множества M; множество предельных точек обозначают M'.

Определение 1.8. Пусть $\langle X, \rho \rangle$ – метрическое пространство, $M \subset X$.

✓ Множество M называется *ограниченным* в $\langle X, \rho \rangle$, если оно содержится в некотором шаре. В частности, множество M называется *ограниченным* в нормированном пространстве $\langle X, \|\cdot\| \rangle$, если
$$\exists\, r > 0 \quad \forall\, x \in M \quad \|x\| \leqslant r.$$

✓ Множество M называется *открытым*, если каждая его точка является внутренней точкой этого множества, т. е.
$$\forall\, x \in M \;\exists\, r > 0 \quad B(x, r) \subset M.$$

✓ Множество M называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, т. е. если $M' \subset M$.

✓ Множество $\overline{M} = M \cup M'$ называется *замыканием* множества M.

✓ *Диаметром* множества M называется величина
$$\operatorname{diam} M = \sup\{\rho(x, y) \colon x, y \in M\}.$$

✓ *Расстоянием от точки $x_0 \in X$ до множества M* называется величина
$$\rho(x_0, M) = \inf\{\rho(x_0, y) \colon y \in M\}.$$

Если существует элемент $y \in M$ такой, что $\rho(x_0, y) = \rho(x_0, M)$, то говорят, что расстояние от x_0 до M *достигается* (*на элементе* y).

✓ *Расстоянием между множествами* $A, B \subset X$ называется величина

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y)\colon x \in A,\ y \in B\}.$$

Пример 1.1. Доказать замкнутость множества

$$M = \left\{x \in C^1[0,1]\colon x'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\right\}$$

в пространстве $C^1[0,1]$.

Решение. Пусть $x_0 \in M'$. Нам предстоит проверить, что $x_0'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_\varepsilon \neq x_0$ такой, что $x_\varepsilon \in M \cap B(x_0, \varepsilon)$. В частности, для $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ существует $x_n \neq x_0\colon\ x_n \in M \cap B\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$. Имеет место свойство $x_n'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ и справедливы оценки

$$\left|x_0'\left(\frac{1}{2}\right) - x_n'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \max_{t\in[0,1]} |x_0(t) - x_n(t)| +$$
$$+ \max_{t\in[0,1]} |x_0'(t) - x_n'(t)| = \|x_0 - x_n\| < \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$x_0'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n'\left(\frac{1}{2}\right) = 2,$$

т. е. $x_0 \in M$. Таким образом, $M' \subset M$, т. е. множество M замкнуто. ✌

Пример 1.2. Доказать, что множество

$$M = \left\{x \in \ell_1\colon \xi_k > -1\right\}$$

открыто в пространстве ℓ_1 над полем $\mathbb{R}$.

Решение. Пусть $x_0 = \{\xi_k^0\} \in M$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k^0 = 0$ и $\xi_k^0 > -1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, k > N \qquad \xi_k^0 > -\frac{1}{2},$$

а значит,

$$a = \inf_k \xi_k^0 > -1.$$

Положим $r = a + 1$. Для всякого $x = \{\xi_k\} \in B(x_0, r)$ имеем

$$\xi_k^0 - \xi_k \leqslant |\xi_k^0 - \xi_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^0 - \xi_k| = \|x_0 - x\| < r.$$

Следовательно,

$$\xi_k = \xi_k - \xi_k^0 + \xi_k^0 > -r + \xi_k^0 = -1 + (\xi_k^0 - a) \geqslant -1,$$

т. е. $x \in M$, а значит, $B(x_0, r) \subset M$. Итак, для всякого $x_0 \in M$ мы нашли $r > 0$ такое, что $B(x_0, r) \subset M$. Таким образом, множество M открыто.

Пример 1.3. Доказать, что множество

$$M = \bigl\{x \in C[a,b] \colon 3 \leqslant x(t) < 5\bigr\}$$

не открыто и не замкнуто в пространстве $C[a,b]$.

Решение. Множество M не является замкнутым в пространстве $C[a,b]$, если существует $x_0 \in C[a,b] \colon x_0 \in M'$ и $x_0 \notin M$. Очевидно, что $x_0(t) \equiv 5 \notin M$. Покажем, что $x_0 \in M'$. Для этого достаточно показать, что для всякого $\varepsilon > 0$ $M \cap B(x_0, \varepsilon) \neq \varnothing$. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию

$$x(t) = x_0(t) - \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, 2\right\}, \quad t \in [a,b].$$

Ясно, что $x \in M$, так как $3 \leqslant x(t) < 5$. Из соотношений

$$|x(t) - x_0(t)| = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, 2\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad t \in [a,b],$$

следует, что $\|x - x_0\| < \varepsilon$, т. е. $x \in B(x_0, \varepsilon)$. Значит, $M \cap B(x_0, \varepsilon) \neq \varnothing$. Итак, множество M не замкнуто.

Докажем, что M не открыто. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функции $x_0(t) \equiv 3$ и $x(t) \equiv 3 - \dfrac{\varepsilon}{2}$, $t \in [a, b]$. Очевидно, что $x_0 \in M$, $x \notin M$ и $x \in B(x_0, \varepsilon)$, т. е. $B(x_0, \varepsilon) \not\subset M$. Следовательно, множество M не является открытым. ✌

Пример 1.4. Доказать, что множество

$$M = \left\{x \in \ell_\infty \colon \xi_k > -1\right\}$$

не является открытым в пространстве ℓ_∞.

Решение. Для доказательства достаточно найти точку $x_0 \in M$ такую, что для всякого $\varepsilon > 0$ шар $B(x_0, \varepsilon)$ содержит точки, не принадлежащие множеству M. Рассмотрим $x_0 = \left\{-\dfrac{k}{k+1}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Очевидно, что $x_0 \in \ell_\infty$ и $x_0 \in M$. Пусть $\varepsilon > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$, рассмотрим $x_{k_0} = \{\xi_k^{k_0}\}$:

$$\xi_k^{k_0} = \begin{cases} -\dfrac{k}{k+1}, & k \neq k_0, \\ -1, & k = k_0. \end{cases}$$

Очевидно, что $x_{k_0} \notin M$. Подберем k_0 так, чтобы $x_{k_0} \in B(x_0, \varepsilon)$, т. е.

$$\|x_0 - x_{k_0}\| = \sup_k \left|-\frac{k}{k+1} - \xi_k^{k_0}\right| = \left|1 - \frac{k_0}{k_0+1}\right| = \frac{1}{k_0+1} < \varepsilon.$$

Таким образом, найдена точка $x_0 \in M$ и $x_0 \notin \overset{\circ}{M}$, следовательно, множество M не является открытым. ✌

☞ Доказать утверждения 1.1–1.7.

1.1. Если ρ – метрика на множестве X, то

$$\forall\, x, y \in X \quad \rho(x, y) \geqslant 0.$$

1.2. Если $\|\cdot\|$ – норма на линейном пространстве X, то

$$\forall\, x \in X \quad \|x\| \geqslant 0.$$

1.3. Нормированное пространство $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

1.4. Пусть X – метрическое пространство, $M \subset X$. Точка $x_0 \in X$ является предельной точкой множества M тогда и только тогда, когда

$$\exists\, \{x_n\} \subset M \setminus \{x_0\}\colon \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0.$$

1.5. Пусть X – метрическое пространство, $M \subset X$. Множество M замкнуто тогда и только тогда, когда

$$\forall\, \{x_n\} \subset M \quad \left(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \in M\right).$$

1.6. В метрическом пространстве $\langle X, \rho\rangle$ справедливо неравенство четырехугольника:

$$\forall\, x, y, u, v \in X \quad |\rho(x, u) - \rho(y, v)| \leqslant \rho(x, y) + \rho(u, v).$$

1.7. В нормированном пространстве $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ справедливо неравенство

$$\forall\, x, y \in X \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

1.8. Может ли нормированное пространство
а) состоять из одного элемента? б) быть счетным?

1.9. Пусть $X \neq \varnothing$. Можно ли на нем ввести метрику?

1.10. Пусть X – линейное пространство. Можно ли на нем ввести норму?

1.11. Пусть $\rho: \ X^2 \to \mathbb{R}$ – метрика на множестве X. Доказать, что следующие функции тоже являются метриками на X:

$$\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}, \qquad \rho_2(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\},$$

$$\rho_3(x,y) = \ln(1+\rho(x,y)).$$

1.12. Доказать, что функция

$$\rho(n,m) = \begin{cases} 0, & n = m, \\ 1 + \dfrac{1}{n+m}, & n \neq m, \end{cases}$$

задает метрику на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

1.13. В множестве X всевозможных последовательностей натуральных чисел для элементов

$$x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}, \qquad y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$$

обозначим через $k_0(x,y)$ наименьший индекс, при котором $\xi_k \neq \eta_k$. Доказать, что

а) формула $\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1 + \dfrac{1}{k_0(x,y)}, & x \neq y, \end{cases}$

задает метрику на X;

б) аксиома треугольника выполняется в X в усиленной форме:

$$\rho(x,z) \leqslant \max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\};$$

в) если $\rho(x,y) \neq \rho(y,z)$, то

$$\rho(x,z) = \max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\}.$$

1.14. Каким условиям должна удовлетворять непрерывная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, чтобы формула

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

задавала метрику на $\mathbb{R}$?

1.15. Указать необходимое и достаточное условие на отображение $f\colon X \to \mathbb{P}$, при котором формула из задачи 1.14 задает метрику на X.

1.16. Каким условиям должна удовлетворять функция f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, чтобы формула

$$\rho(x, y) = \left| \int_x^y f(t)\, dt \right|$$

задавала метрику на $\mathbb{R}$? Рассмотреть случаи

а) $f \in C(\mathbb{R})$; б)✯ $\forall\, r > 0 \quad f \in L_1[-r, r]$.

1.17. Проверить справедливость аксиом метрики в линейном пространстве s. Доказать, что пространство s ненормируемо, т. е. в нем нельзя ввести норму так, чтобы выполнялось равенство $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

1.18. Является ли линейное пространство $\mathbb{P}^2$ нормированным, если для $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{P}^2$

а) $\|x\| = \sqrt{|\xi_1|} + \sqrt{|\xi_2|}$;

б) $\|x\| = \sqrt[p]{|\xi_1|^p + |\xi_2|^p}$ при $0 < p < 1$;

в) $\|x\| = |\xi_1 - \xi_2| + |\xi_1|$;

г) $\|x\| = \max\{|\xi_1 + 2\xi_2|, |\xi_1 - \xi_2|\}$?

1.19. Пусть $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$. При каких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ следующие отображения задают норму на $\mathbb{R}^2$:

а) $\|x\| = \alpha|\xi_1| + \beta|\xi_2|$;

б) $\|x\| = \sqrt{\alpha^2\xi_1^2 + \beta^2\xi_2^2}$;

в) $\|x\| = \max\{\alpha|\xi_1|, \beta|\xi_2|\}$?

Построить шары $B[0,1]$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ с этими нормами.

1.20. Построить шары $B[0,1]$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, если для $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ нормы определены следующим образом:

а) $\|x\| = \max\{\sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2}, |\xi_3|\}$;

б) $\|x\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2} + |\xi_3|$;

в) $\|x\| = \max\left\{2|\xi_1|, \dfrac{1}{3}|\xi_2|, |\xi_3|\right\}$;

г) $\|x\| = 2|\xi_1| + \dfrac{1}{3}|\xi_2| + |\xi_3|$;

д) $\|x\| = \sqrt{4|\xi_1|^2 + \dfrac{1}{9}|\xi_2|^2 + |\xi_3|^2}$.

1.21. Пусть $x \in \ell_p^n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Доказать, что

$$\|x\|_{\ell_\infty^n} = \lim_{p\to\infty} \|x\|_{\ell_p^n}.$$

1.22. Доказать, что в пространстве c_0

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k| = \max_k |\xi_k|,$$

т. е. верхняя грань обязательно достигается, а в пространствах c и m она может не достигаться.

1.23. Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций определить норму следующим образом:

а) $\|x\| = |x(b) - x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

б) $\|x\| = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

в) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

г) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \int_a^b |x(t)|\,dt$;

д) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$?

1.24. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций определить норму следующим образом:

а) $\|x\| = |x(a)| + |x'(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

б) $\|x\| = |x(a)| + |x(b)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

в) $\|x\| = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

г) $\|x\| = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \left(\int_a^b |x''(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$;

д) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)| + \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$?

1.25. Доказать, что в любом метрическом пространстве $\langle X, \rho\rangle$

$$\forall\, x \in X\ \forall\, r > 0 \quad 0 \leqslant \operatorname{diam} B(x, r) \leqslant 2r.$$

Привести пример метрического пространства $\langle X, \rho\rangle$ и такого элемента $x_0 \in X$, что

$$\operatorname{diam} B(x_0, 1) = \frac{1}{2}.$$

1.26. Доказать, что в любом нормированном пространстве X

$$\forall\, x \in X\ \forall\, r > 0 \quad \operatorname{diam} B(x, r) = 2r.$$

1.27. Доказать, что в нормированном пространстве из условия $B(x_1, r_1) \subset B(x_2, r_2)$ следуют неравенства $r_1 \leqslant r_2$ и $\|x_1 - x_2\| \leqslant r_2 - r_1$.

1.28. Привести пример метрического пространства, в котором существуют шары $B(x_1, r_1)$ и $B(x_2, r_2)$ такие, что $r_1 < r_2$ и шар $B(x_2, r_2)$ лежит строго внутри шара $B(x_1, r_1)$.

1.29. Привести пример метрического пространства, в котором существуют шары,

а) имеющие несколько центров;

б) совпадающие с множеством всех своих центров.

1.30. Возможно ли, чтобы $B(x_1, r) = B(x_2, r)$ и $x_1 \neq x_2$ в нормированном пространстве X?

☞ Доказать справедливость утверждений 1.31–1.37 в метрическом пространстве $\langle X, \rho\rangle$ для $M, N \subset X$, $x \in X$.

1.31. Если M – ограниченное множество, то $\overline{M}$ – ограниченное множество и $\operatorname{diam} \overline{M} = \operatorname{diam} M$.

1.32. Множество M' замкнуто, т. е. $(M')' \subset M'$. Возможно ли здесь строгое включение?

1.33. Если $M \subset N$, то $\overline{M} \subset \overline{N}$.

1.34. $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

1.35. $\rho(x, M) = 0 \iff x \in \overline{M}$.

1.36. $\rho(x, M) = \rho(x, \overline{M})$.

1.37. $\rho(M, N) = \rho(M, \overline{N}) = \rho(\overline{M}, N) = \rho(\overline{M}, \overline{N})$.

1.38. Пусть для множеств M, N из метрического пространства $\langle X, \rho\rangle$ выполняется соотношение $\overline{M} \subset \overline{N}$. Следует ли отсюда, что $M \subset N$?

1.39. Пусть M и N замкнуты в метрическом пространстве $\langle X, \rho\rangle$. Возможно ли, что $M \cap N = \varnothing$ и $\rho(M, N) = 0$?

1.40. В метрическом пространстве $\langle X, \rho_T \rangle$ описать все открытые и замкнутые множества.

☞ Доказать справедливость утверждений 1.41–1.44 в нормированном пространстве X для $x \in X,\ r > 0$.

1.41. $B[x, r],\ S[x, r]$ – замкнутые множества.

1.42. $B(x, r)$ – открытое множество.

1.43. $\overset{\circ}{B}\,[x, r] = B(x, r)$.

1.44. $\overline{B(x, r)} = B[x, r]$.

1.45. Верны ли утверждения 1.41–1.44 в метрическом пространстве?

1.46. Описать все подмножества нормированного пространства X, которые являются одновременно открытыми и замкнутыми.

1.47. Будут ли следующие множества ограниченными, открытыми, замкнутыми в пространстве ℓ_1^2 над полем $\mathbb{R}$:

а) $M = [0, 1] \times \mathbb{Q}$;

б) $M = \left\{ \dfrac{2n-1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \times (0, 1)$;

в) $M = \big\{ (\xi_1, \xi_2) \colon\ \min\{|\xi_1|, 5|\xi_2|\} = 1 \big\}$;

г) $M = \big\{ (\xi_1, \xi_2) \colon |\xi_1| < 1,\ |\xi_2| > 2 \big\}$;

д) $M = \big\{ (\xi_1, \xi_2) \colon\ -4 < \xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1 + 4\xi_2 \leqslant 4 \big\}$?

1.48. Будут ли следующие множества ограниченными, открытыми, замкнутыми в $\langle X, \|\cdot\| \rangle,\ \mathbb{P} = \mathbb{R}$:

а) $M = \big\{ x \in X \colon e^t < x(t) < 4 \big\}, \quad X = C[0, 1]$;

б) $M = \big\{ x \in X \colon 0 < \xi_k < 2 \big\}, \quad X = c_0$;

в) $M = \left\{x \in X\colon \int_0^1 x(t)\,dt = 1\right\}, \quad X = L_1[0,1];$

г) $M = \bigl\{x \in X\colon x(0) = 1\bigr\}, \quad X = \widetilde{L}_1[0,1];$

д) $M = \bigl\{x \in X\colon \xi_k \geqslant 0\bigr\}, \quad X = \ell_2;$

е) $M = \left\{x \in X\colon \xi_k < \dfrac{k+1}{k}\right\}, \quad X = \ell_1?$

1.49. Будут ли следующие множества открытыми, замкнутыми в пространстве $C[a,b]$:

а) $P_n = \left\{p\colon p(t) = \sum\limits_{j=0}^{m} c_j t^j,\ 0 \leqslant m \leqslant n\right\};$

б) $Q_n = \left\{p\colon p(t) = \sum\limits_{j=0}^{n} c_j t^j,\ c_n \neq 0\right\};$

в) $P = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_n?$

1.50. Пусть $x_0 \in C[a,b]$, $\mathbb{P} = \mathbb{R}$. Могут ли множества

$$M = \{t \in [a,b]\colon x_0(t) < 1\},$$

$$N = \{t \in [a,b]\colon x_0(t) \leqslant 1\}$$

быть открытыми, замкнутыми в $\langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|} \rangle$?

1.51. Пусть $A \subset \mathbb{P}$. Будет ли множество

$$M_A = \bigl\{x \in C[a,b]\colon \forall\, t \in [a,b] \quad x(t) \in A\bigr\}$$

а) открытым в пространстве $C[a,b]$, если множество A открыто в пространстве $\langle \mathbb{P}, \rho_{|\cdot|} \rangle$;

б) замкнутым в пространстве $C[a,b]$, если множество A замкнуто в пространстве $\langle \mathbb{P}, \rho_{|\cdot|} \rangle$?

1.52. Доказать, что

а) параллелепипед $M = \big\{x \in \ell_2\colon |\xi_k| \leqslant \alpha_k\big\}$ ограничен в пространстве ℓ_2 тогда и только тогда, когда $\{\alpha_k\} \in \ell_2$;

б) если все $\alpha_k \neq 0$, то эллипсоид

$$M = \Big\{x \in \ell_2\colon \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\xi_k}{\alpha_k}\right|^2 \leqslant 1\Big\}$$

ограничен в пространстве ℓ_2 тогда и только тогда, когда $\{\alpha_k\} \in \ell_\infty$.

1.53. Доказать, что множество c_0 замкнуто в пространстве c, множество c замкнуто в пространстве ℓ_∞.

Тема 2. Сходимость в метрическом пространстве. Сравнение метрик и норм

Определение 2.1. Пусть ρ_1, ρ_2 – метрики, заданные на одном множестве X. Говорят, что

- ✓ ρ_1 *не слабее* ρ_2 (ρ_2 *не сильнее* ρ_1), если из сходимости последовательности $\{x_n\}$ к точке x_0 в пространстве $\langle X, \rho_1\rangle$ следует ее сходимость к x_0 в пространстве $\langle X, \rho_2\rangle$, т. е.

$$\rho_1(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho_2(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

- ✓ ρ_1 *сильнее* ρ_2 (ρ_2 *слабее* ρ_1), если ρ_1 не слабее ρ_2 и

$$\exists\ \{x_n\}: \quad \rho_2(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{но} \quad \rho_1(x_n, x_0) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

- ✓ ρ_1 и ρ_2 *эквивалентны*, если ρ_1 не слабее ρ_2 и ρ_2 не слабее ρ_1, т. е.

$$\rho_1(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho_2(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Эти понятия переносятся и на нормы через метрики, ими порождаемые.

Определение 2.2. Пусть $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ – две нормы, заданные на одном линейном пространстве X. Говорят, что

✓ $\|\cdot\|_1$ *не слабее* $\|\cdot\|_2$ ($\|\cdot\|_2$ *не сильнее* $\|\cdot\|_1$), и пишут $\|\cdot\|_1 \succeq \|\cdot\|_2$, ($\|\cdot\|_2 \preceq \|\cdot\|_1$), если

$$\|x_n - x_0\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longrightarrow \quad \|x_n - x_0\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

✓ $\|\cdot\|_1$ *сильнее* $\|\cdot\|_2$ ($\|\cdot\|_2$ *слабее* $\|\cdot\|_1$), и пишут $\|\cdot\|_1 \succ \|\cdot\|_2$, ($\|\cdot\|_2 \prec \|\cdot\|_1$), если $\|\cdot\|_1 \succeq \|\cdot\|_2$ и

$$\exists\ \{x_n\}: \quad \|x_n - x_0\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{но} \quad \|x_n - x_0\|_1 \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

✓ $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ *эквивалентны*, если

$$\|x_n - x_0\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|x_n - x_0\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Определение 2.3. Метрические пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если существует отображение $\tau\colon X \to Y$ такое, что τ есть биекция X на Y и

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\rho_X} x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tau(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\rho_Y} \tau(x_0).$$

Отображение τ называется *гомеоморфизмом* X на Y.

Определение 2.4. Линейные нормированные пространства X и Y называются *линейно гомеоморфными*, если существует линейное отображение $\tau\colon X \to Y$, которое является гомеоморфизмом X на Y. Отображение τ называется *линейным гомеоморфизмом* X на Y.

Теорема 2.1. *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^m$ *– линейно независимая система в нормированном пространстве* X. *Тогда*

$$x_n = \sum_{k=1}^m \xi_{n,k} e_k \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 = \sum_{k=1}^m \xi_k e_k \\ \Longleftrightarrow \quad \xi_{n,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi_k, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Следствие 2.1. *В конечномерном нормированном пространстве сходимость по норме эквивалентна покоординатной сходимости.*

Пример 2.1. Сходится ли последовательность

$$x_n(t) = te^{-nt}$$

в пространствах а) $C[0,1]$; б) $C^1[0,1]$?

Решение. а) Сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x в пространстве $C[0,1]$ эквивалентна равномерной сходимости последовательности функций $\{x_n(t)\}$ к функции $x(t)$ на отрезке $[0,1]$ (см. задачу 2.9). Значит, если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} x$, то $x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t)$ поточечно на $[0,1]$. Найдем поточечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim_{n\to\infty} te^{-nt} = 0 = x(t).$$

Функция $x(t) \equiv 0$ принадлежит пространству $C[0,1]$. Проверим, сходится ли x_n к 0 в этом пространстве:

$$\|x_n - 0\|_{C[0,1]} = \max_{t\in[0,1]} |te^{-nt}| = \frac{1}{n} \cdot e^{-n\cdot\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, x_n сходится к 0 в пространстве $C[0,1]$.

б) Сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x в пространстве $C^1[0,1]$ эквивалентна равномерной сходимости на отрезке $[0,1]$ последовательности функций $\{x_n(t)\}$ к функции $x(t)$ и последовательности функций $\{x_n'(t)\}$ к функции $x'(t)$ (см. задачу 2.11). Значит, если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} x$, то $x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t)$ поточечно на $[0,1]$. Так как поточечно x_n сходится к 0 (см. п. «а») и $0 \in C^1[0,1]$, осталось проверить, сходится ли x_n к 0 в этом пространстве:

$$\|x_n - 0\|_{C^1[0,1]} = \max_{t\in[0,1]} |te^{-nt}| + \max_{t\in[0,1]} |(1-nt)e^{-nt}| =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot e^{-n\cdot\frac{1}{n}} + \left|1 - n \cdot \frac{2}{n}\right| e^{-n\cdot\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-2} \neq 0.$$

Таким образом, в пространстве $C^1[0,1]$ последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела. ✌

Пример 2.2. Исследовать на сходимость последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t < -\dfrac{1}{n}, \\ nt, & |t| \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 1, & \dfrac{1}{n} < t \leqslant 1, \end{cases}$$

в пространствах а) $C[-1,1]$; б) $L_p[-1,1]$, $1 \leqslant p < \infty$; в) $\widetilde{L}_1[-1,1]$.

Решение. а) Найдем поточечный предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & 0 < t \leqslant 1, \end{cases} = \operatorname{sign} t.$$

Поскольку $x \notin C[-1,1]$, последовательность не сходится в этом пространстве.

б) Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому элементу y в пространстве $L_p[-1,1]$, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, которая сходится к y почти всюду на $[-1,1]$ (см. задачу 2.12). Но последовательность $\{x_n\}$ сама поточечно сходится к $x(t) = \operatorname{sign} t \in L_p[-1,1]$, а значит, и любая ее подпоследовательность поточечно сходится к x. Отсюда следует, что если $\{x_n\}$ сходится по норме в $L_p[-1,1]$ к элементу y, то $y = x$ в $L_p[-1,1]$ (см. задачу 2.13). Остается проверить, сходится ли

$\{x_n\}$ к x по норме. Имеем

$$\|x_n - x\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |x_n(t) - x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \left(\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |nt - \operatorname{sign} t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant 2\left(\int_{0}^{\frac{1}{n}} 2^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{4}{\sqrt[p]{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, в пространстве $L_p[-1,1]$ последовательность $\{x_n\}$ сходится.

в) Покажем, что в пространстве $\widetilde{L}_1[-1,1]$ последовательность $\{x_n\}$ не сходится. Допустим, что $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ в $\widetilde{L}_1[-1,1]$. Тогда для $x(t) = \operatorname{sign} t$ имеем

$$0 \leqslant \|x - x_0\|_1 \leqslant \|x - x_n\|_1 + \|x_n - x_0\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Отсюда следует, что $\|x - x_0\|_1 = 0$. Из непрерывности функций x и x_0 на множестве $[-1,0) \cup (0,1]$ и неравенств

$$0 \leqslant \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} |x(t) - x_0(t)|\, dt \leqslant \int_{-1}^{1} |x(t) - x_0(t)|\, dt = 0,$$

$$0 \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} |x(t) - x_0(t)|\, dt \leqslant \int_{-1}^{1} |x(t) - x_0(t)|\, dt = 0,$$

справедливых для всех $n \in \mathbb{N}$, следует, что

$$x_0(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t < 0, \\ 1, & 0 < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Но тогда функция x_0 не является непрерывной на отрезке $[-1,1]$, т. е. $x_0 \notin \widetilde{L}_1[-1,1]$. Итак, последовательность $\{x_n\}$ не сходится в пространстве $\widetilde{L}_1[-1,1]$. ✌

Пример 2.3. Исследовать на сходимость последовательность $\{x_n\} = \{\xi_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\xi_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}, & k \leqslant n, \\ \sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{k+1}}, & k > n, \end{cases}$$

в пространствах c_0, c, ℓ_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Решение. Проверим, каким из этих пространств принадлежит $\{x_n\}$. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \xi_{nk} = \lim_{\substack{k>n\\ k\to\infty}} \xi_{nk} = \lim_{k\to\infty}\left(\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right) = 0.$$

Значит, $\{x_n\} \subset c_0 \subset c \subset l_\infty$.

Далее, для $k > n$ имеем

$$\begin{aligned} |\xi_{nk}| &= \left|\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right| = \\ &= 2\left|\sin\frac{\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}}{2\sqrt[3]{k+1}\sqrt[3]{k}}\right| \cdot \left|\cos\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}} + \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right)\right| \underset{k\to\infty}{\sim} \\ &\sim 2\sin\frac{1}{2\sqrt[3]{k(k+1)}\big(\sqrt[3]{(k+1)^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{k^2}\big)} \sim \\ &\sim \frac{1}{3k^{4/3}}. \end{aligned}$$

Так как $x_n \in \ell_p \iff$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk}|^p \iff$ сходится ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |\xi_{nk}|^p \iff$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{4p}{3}}$, а сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{4p}{3}}$ при $p \geqslant 1$ конечна, то $x_n \in \ell_p$.

Итак, последовательность $\{x_n\}$ принадлежит пространствам $c_0, c, \ell_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$. Из сходимости по норме в этих пространствах следует покоординатная сходимость. Найдем покоординатный предел, если он существует.

Для всякого фиксированного k имеем

$$\lim_{n\to\infty} \xi_{nk} = \lim_{\substack{n > k \\ n \to \infty}} \xi_{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = \xi_k.$$

Значит, покоординатно

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \right\}_{k=1}^{\infty},$$

и если x_n сходится по норме, то сходится к этому x.

Проверим, каким пространствам принадлежит x. Так как

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = 0,$$

то $x \in c_0 \subset c \subset \ell_\infty$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p$ сходится $\Longleftrightarrow p > 3$, значит, $x \in \ell_p, 3 < p < \infty$ и $x \notin \ell_p, 1 \leqslant p \leqslant 3$. Следовательно, при $1 \leqslant p \leqslant 3$ последовательность $\{x_n\}$ не сходится в ℓ_p.

В пространствах c_0, c, ℓ_∞ последовательность $\{x_n\}$ сходится к x, поскольку справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &= \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_{nk} - \xi_k| = \sup_{k>n} \left| \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \right| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{k>n} \left| \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} \right| + \sup_{k>n} \left| \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \right| + \sup_{k>n} \left| \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{2}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

В пространствах ℓ_p, $3 < p < \infty$, сходимость тоже есть, поскольку справедливы соотношения

$$\|x_n - x\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Обе последние суммы стремятся к нулю при $n \to \infty$ как остатки сходящихся рядов, так как

$$\left|\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right| \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{3k^{4/3}},$$

а ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{4p/3}}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{p/3}}$ при $p > 3$ сходятся. ✌

Пример 2.4. Исследовать на сходимость последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{n}, \\ t^{-1/\pi}, & \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

в пространствах $L_p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$.

Решение. Поточечно последовательность функций $\{x_n(t)\}$ сходится к функции

$$x(t) = \begin{cases} t^{-1/\pi}, & 0 < t \leqslant 1, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Так как $x \notin L_p[0,1]$ при $\dfrac{p}{\pi} \geqslant 1$, то последовательность $\{x_n\}$ не сходится в пространствах $L_p[0,1]$ при $p \geqslant \pi$.

Пусть $1 \leqslant p < \pi$. Тогда $x \in L_p[0,1]$. Покажем, что $\{x_n\}$ сходится к x в этих пространствах. Действительно, x_n и x удовлетворяют следующим условиям:

1) $|x(t)|^p, |x_n(t) - x(t)|^p \in L_1[0,1]$;
2) $|x_n(t) - x(t)|^p \leqslant |x(t)|^p, \quad t \in [0,1]$;
3) $|x_n(t) - x(t)|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad t \in [0,1]$.

Применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем

$$\|x_n - x\|^p = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^p\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 0\, dt = 0.$$ ✌

☞ Доказать справедливость утверждений 2.1–2.10.

2.1. Пусть X – метрическое пространство, $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$, $x, y, x', x'' \in X$. Тогда

а) $\left(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x' \quad \text{и} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x''\right) \implies x' = x''$;

б) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \implies \forall\, \{x_{n_k}\} \quad x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$;

в) $\{x_n\}$ сходится $\implies$ $\{x_n\}$ ограничена;

г) $\left(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \text{и} \quad y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y\right) \implies$
$\rho(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho(x, y)$.

2.2. Пусть X – нормированное пространство, $x, y \in X$, $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$, $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{P}$, $\lambda \in \mathbb{P}$. Тогда

а) $\left(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \text{и} \quad y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y\right) \implies$
$x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x + y$;

б) $\left(\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \quad \text{и} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x\right) \implies$
$\lambda_n x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda x$;

в) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \Longrightarrow \quad \|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|$.

2.3. Сходимость последовательности в пространствах s и ℓ_p^m, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, эквивалентна покоординатной сходимости.

2.4. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, τ – линейная биекция X на Y. Пространства X и Y линейно гомеоморфны тогда и только тогда, когда существуют такие константы $c_1, c_2 > 0$, что для любого $x \in X$

$$c_1\|x\|_X \leqslant \|\tau(x)\|_Y \leqslant c_2\|x\|_X.$$

2.5. Конечномерные нормированные пространства X и Y одинаковой размерности и над одним полем *линейно гомеоморфны.*

2.6. Любые две нормы на конечномерном линейном пространстве эквивалентны.

2.7. Пусть X – номированное пространство, X_0 – его конечномерное линейное подмножество. Тогда X_0 замкнуто в X.

2.8. Сходимость последовательности в пространствах m, c_0, c равномерна по координатам.

2.9. Сходимость последовательности в пространстве $C[a,b]$ эквивалентна равномерной сходимости на отрезке $[a,b]$.

2.10. Сходимость последовательности $\{x_n\}$, $x_n = \{\xi_{nk}\}$ к элементу $x = \{\xi_k\}$ в пространствах ℓ_p эквивалентна выполнению следующих условий:

1) $\forall\, k \quad \xi_{nk} \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi_k$;

2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0(\varepsilon)\ \forall\, N \geqslant N_0(\varepsilon)\ \forall\, n \displaystyle\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_{nk}|^p < \varepsilon^p$.

2.11. Что означает сходимость последовательности в пространствах $C^k[a,b],\ k \geqslant 1$?

2.12. Доказать, что если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ в пространстве $L_1[a,b]$, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $x_{n_k}(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} x(t)$ почти всюду на $[a,b]$. Верно ли это утверждение в $L_p[a,b],\ p > 1$?

2.13. Доказать, что если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ в пространстве $L_p[a,b]$ и существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $x_{n_k}(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} y(t)$ почти всюду на $[a,b]$, то $x = y$ в $L_p[a,b]$.

2.14. В каких из пространств $\ell_p,\ c_0,\ c,\ m$ сходятся следующие последовательности:

а) $x_n = (1, 2, \ldots, n, 0, 0 \ldots)$;

б) $x_n = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$;

в) $x_n = \left(\underbrace{\dfrac{1}{n^\alpha}, \dfrac{1}{n^\alpha}, \ldots, \dfrac{1}{n^\alpha}}_{n}, 0, 0, \ldots\right)$;

г) $x_n = \left(1, \dfrac{1}{\ln 2}, \ldots, \dfrac{1}{\ln n}, 0, 0, \ldots\right)$;

д) $x_n = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, 1, 1, \ldots\right)$;

е) $$x_n = \left(\frac{\sin 1}{2}, \frac{2\sin 2}{3}, \ldots, \frac{n \sin n}{n+1}, \sin(n+1), \sin(n+2), \ldots\right);$$

ж) $x_n = \left(1, \dfrac{1}{2^\alpha}, \dfrac{1}{3^\alpha}, \ldots, \dfrac{1}{n^\alpha}, 0, 0, \ldots\right)$?

2.15. Сходятся ли в пространстве $C[0,1]$ следующие последовательности:

а) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$; б) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$?

2.16. Сходятся ли следующие последовательности в пространствах $C[0,1]$, $C^1[0,1]$, $L_1[0,1]$, $\widetilde{L}_1[0,1]$:

а) $x_n(t) = \dfrac{t^n}{n} - \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$; б) $x_n(t) = \dfrac{t^n}{n}$;

в) $x_n(t) = \operatorname{arctg}\left(n\left(t - \dfrac{1}{2}\right)\right)$; г) $x_n(t) = ne^{-nt}$?

2.17. Доказать, что последовательность $x_n(t) = \sin nt$ не сходится в пространстве $L_2[a,b]$.

2.18. Пусть X – нормированное пространство. Доказать, что

$$\|\cdot\|_1 \succeq \|\cdot\|_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, C > 0\ \forall\, x \in X \quad \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1.$$

2.19. Доказать, что $\ell_p \subset \ell_q$, если $1 \leqslant p < q < \infty$ и для $x \in \ell_p$ $\|x\|_{\ell_p} \geqslant \|x\|_{\ell_q}$.

2.20. Показать, что

$$\ell_1 \subset \ell_p \subset \ell_q \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty, \qquad 1 < p < q < \infty.$$

2.21. Привести примеры, подтверждающие, что вложения в предыдущей задаче строгие.

2.22. Доказать, что

$$\|\cdot\|_{\ell_1} \succeq \|\cdot\|_{\ell_p} \succeq \|\cdot\|_{\ell_q} \succeq \|\cdot\|_{\ell_\infty}, \qquad 1 < p < q < \infty.$$

2.23. Привести примеры, подтверждающие, что отношения в предыдущей задаче строгие, т. е.

$$\|\cdot\|_{\ell_1} \succ \|\cdot\|_{\ell_p} \succ \|\cdot\|_{\ell_q} \succ \|\cdot\|_{\ell_\infty}, \qquad 1 < p < q < \infty.$$

2.24. Доказать, что $L_q[a,b] \subset L_p[a,b]$, если $1 \leqslant p < q < \infty$ и для $x \in L_q[a,b]$

$$\left(\int_a^b \frac{|x(t)|^p}{b-a}\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b \frac{|x(t)|^q}{b-a}\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2.25. Показать, что

$$C^k[a,b] \subset C[a,b] \subset L_q[a,b] \subset L_p[a,b] \subset L_1[a,b],$$

$$1 < p < q < \infty.$$

2.26. Привести примеры, подтверждающие, что вложения в предыдущей задаче строгие.

2.27. Доказать, что

$$\|\cdot\|_{C^k[a,b]} \succeq \|\cdot\|_{C[a,b]} \succeq \|\cdot\|_{L_q[a,b]} \succeq \|\cdot\|_{L_p[a,b]} \succeq \|\cdot\|_{L_1[a,b]},$$

$$1 < p < q < \infty.$$

2.28. Привести примеры, подтверждающие, что отношения в предыдущей задаче строгие, т. е.

$$\|\cdot\|_{C^k[a,b]} \succ \|\cdot\|_{C[a,b]} \succ \|\cdot\|_{L_q[a,b]} \succ \|\cdot\|_{L_p[a,b]} \succ \|\cdot\|_{L_1[a,b]},$$

$$1 < p < q < \infty.$$

2.29. Сравнить нормы $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ на множестве $L_\infty[a,b]$.

2.30. Исследовать на сходимость последовательности

а) $x_n = \{\xi_{nk}\}_{k=1}^{\infty}, \quad \xi_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{k+1}}, & 1 \leqslant k \leqslant n, \\ \dfrac{1}{\sqrt{k+2}}, & k > n, \end{cases}$

в пространствах из задачи 2.20;

б) $x_n(t) = n\left(\sqrt{t+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{t}\right)$ в пространствах из задачи 2.25, если $[a,b]=[0,1]$;

в) $x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}(1-nt), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} < t \leqslant 1, \end{cases}$

в пространствах $L_p[0,1]$.

2.31. ✯ Доказать, что последовательность $x_n(t) = \sin nt$ не сходится в пространствах $L_p[0,1]$.

2.32. а) При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ и p следующие последовательности сходятся к нулю в пространствах $L_p[0,1]$:

$$x_n(t) = n^\alpha e^{-nt}, \qquad y_n(t) = n^\alpha \sin nt?$$

б) При каких значениях α и p эти последовательности имеют предел в пространствах $L_p[0,1]$?

2.33. В пространстве $C^m[0,1]$ сравнить нормы

$$\|x\|_0 = \sum_{n=0}^{m} \max_{t\in[a,b]} |x^{(n)}(t)|,$$

$$\|x\|_1 = \max_{0\leqslant n\leqslant m} \left(\max_{t\in[a,b]} |x^{(n)}(t)|\right),$$

$$\|x\|_2 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

2.34. Доказать эквивалентность следующих норм:

а) в пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций:

$$\|x\|_0 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|,$$
$$\|x\|_1 = |x(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|,$$
$$\|x\|_2 = \max_{t\in[a,b]} \left(|x(t)| + |x'(t)|\right),$$
$$\|x\|_3 = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \int_a^b |x(t)|\,dt;$$

б) в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций:

$$\|x\|_0 = \sum_{n=0}^{2} \max_{t\in[a,b]} |x^{(n)}(t)|,$$
$$\|x\|_1 = |x(a)| + |x'(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x''(t)|,$$
$$\|x\|_2 = |x(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x''(t)|,$$
$$\|x\|_3 = \max_{t\in[a,b]} |x''(t)| + \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2},$$
$$\|x\|_4 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x''(t)|.$$

2.35. Проверить, что отображения

$$\rho_1(x,y) = \ln(1 + |x-y|),$$
$$\rho_2(x,y) = |x - y + \operatorname{sign} x - \operatorname{sign} y|,$$
$$\rho_3(x,y) = \left|\int_x^y e^{-t^2}\,dt\right|$$

из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$ являются метриками. Сравнить их.

2.36. На множестве ограниченных последовательностей сравнить метрики ρ_s и ρ_∞, где

$$\rho_s(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|},$$
$$\rho_\infty(x,y) = \sup_k |\xi_k - \eta_k|.$$

2.37. Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ – эквивалентные нормы на линейном пространстве X. Доказать следующие утверждения:

а) если множество $M \subset X$ открыто (замкнуто) в смысле одной из этих норм, то M открыто (замкнуто) в смысле другой;

б) если множество $M \subset X$ ограничено в смысле одной из этих норм, то M ограничено в смысле другой.

2.38. Пусть ρ_1 и ρ_2 – метрики, заданные на X. Доказать, что ρ_1 не слабее ρ_2 тогда и только тогда, когда всякое множество открытое (замкнутое) в $\langle X, \rho_2 \rangle$ является открытым (замкнутым) в $\langle X, \rho_1 \rangle$.

2.39. Пусть на множестве X заданы две эквивалентные метрики. Какие из свойств множества $M \subset X$ сохраняются при переходе от одной метрики к другой: открытость, замкнутость, ограниченность?

2.40. Описать все метрические пространства, в которых всякое открытое множество является замкнутым.

2.41. Доказать, что на любом бесконечномерном линейном пространстве можно задать две несравнимые нормы.

Тема 3. Плотность, сепарабельность

Определение 3.1. Пусть M и N – подмножества метрического пространства X. Множество M называется *плотным* в множестве N, если $N \subset \overline{M}$. В частности, множество M называется *всюду плотным* в метрическом пространстве X, если $\overline{M} = X$.

Определение 3.2. Множество M называется *нигде не плотным* в метрическом пространстве X, если в $\overline{M}$ нет внутренних точек, т. е. $\overset{\circ}{\overline{M}} = \varnothing$.

Определение 3.3. Метрическое пространство называется *сепарабельным*, если в нем есть не более чем счетное всюду плотное множество.

Пример 3.1. Пусть M – множество алгебраических многочленов с нулевым свободным членом,

$$N = \{x \in C[0,1] \colon x(0) = 0\}.$$

Доказать, что множество M плотно в множестве N из пространства $C[0,1]$ над $\mathbb{R}$.

Решение. Множество M плотно в N, если $N \subset \overline{M}$, т. е. любой элемент $x \in N$ либо принадлежит M, либо является предельной точкой M. Это означает, что для каждого элемента $x \in N$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $x_\varepsilon \in M$ со свойством $x_\varepsilon \in B(x, \varepsilon)$ или, что то же самое, для каждого $x \in N$ найдется последовательность $\{x_n\} \subset M$ такая, что $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ в пространстве $C[0,1]$.

Пусть $x \in N$. По теореме Вейерштрасса существует последовательность многочленов $\{p_n\}$, равномерно сходящаяся к x, т. е. сходящаяся по норме пространства $C[0,1]$ (см. задачу 2.9). Рассмотрим последовательность сдвинутых многочленов $x_n(t) = p_n(t) - p_n(0)$. Ясно, что $x_n(0) = 0$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ также сходится к x в $C[0,1]$. Действительно,

$$\begin{aligned}\|x_n - x\| = \|p_n - p_n(0) - x\| = \|p_n - x - (p_n(0) - x(0))\| \leqslant \\ \leqslant \|p_n - x\| + \|p_n(0) - x(0)\| \leqslant 2\|p_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Итак, множество M плотно в N.

Отметим, что нетрудно построить последовательность $\{x_n\}$ конструктивно. Для функции $x \in C[0,1]$ рассмотрим последовательность ее многочленов Бернштейна

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k}, \quad n \geqslant 0.$$

Известно [2, гл. 4, § 5, теорема 1], что она равномерно на $[0,1]$ сходится к x. Далее, если $x \in N$, то

$$B_n(0) = x(0) = 0.$$

Следовательно, в этом случае $B_n \in M$ и $\{B_n\}$ сходится к x в $C[0,1]$. ✌

Пример 3.2. Доказать, что множество

$$M = \{x \in C[a,b] \colon x(a) = x(b)\}$$

всюду плотно в пространстве $L_p[a,b]$ над $\mathbb{R}$.

Решение. Множество M всюду плотно в пространстве $L_p[a,b]$, если $\overline{M} = L_p[a,b]$. Следовательно, нужно показать, что для каждой функции $x \in L_p[a,b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $z \in M$ такая, что $\|x - z\|_p < \varepsilon$.

Возьмем $x \in L_p[a,b]$ и $\varepsilon > 0$. Так как множество $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций плотно в пространстве $L_p[a,b]$ (см. задачу 3.6), то для x существует функция $y \in C[a,b]$ такая, что $\|x - y\|_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Для y построим непрерывную на $[a,b]$ функцию z следующего вида:

$$z(t) = \begin{cases} y(t), & t \in [a, b-\delta], \\ y(a), & t = b, \\ \text{линейна}, & t \in [b-\delta, b]. \end{cases}$$

Так как $z(b) = y(a) = z(a)$, то $z \in M$. Подберем δ так, чтобы $\|y - z\|_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Очевидно, что

$$\max_{t\in[a,b]} |z(t)| \leqslant \max_{t\in[a,b]} |y(t)| = \|y\|_{C[a,b]} = R.$$

Отсюда

$$\|y - z\|_p = \left(\int_a^b |y(t) - z(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{b-\delta}^b |y(t) - z(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant 2R\delta^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

если $\delta < \left(\dfrac{\varepsilon}{4R}\right)^p$. Итак, мы нашли функцию $z \in M$ такую, что

$$\|x - z\|_p \leqslant \|x - y\|_p + \|y - z\|_p < \varepsilon.$$ ✌

Пример 3.3. Доказать, что множество c_0 сходящихся к нулю последовательностей нигде не плотно в пространстве c.

Решение. Надо доказать, что $\overset{\circ}{\overline{c_0}}$ есть пустое множество в пространстве c. Так как c_0 – замкнутое подмножество в c (см.

задачу 1.53), то $\overline{\overset{\circ}{c_0}} = \overset{\circ}{c_0}$. Надо показать, что для всякого элемента $x_0 \in c_0$ и всякого $\varepsilon > 0$ шар $B(x_0, \varepsilon) \subset c$ не принадлежит множеству c_0.

Для $x_0 = \{\xi_k^0\} \in c_0$ имеем $\xi_k^0 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Значит, для $\varepsilon > 0$ найдется номер k_0 такой, что $|\xi_k^0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для $k > k_0$.

Рассмотрим $x = \{\xi_k\}$:

$$\xi_k = \begin{cases} \xi_k^0, & k \leqslant k_0, \\ \dfrac{\varepsilon}{4}, & k > k_0. \end{cases}$$

Тогда $x \notin c_0$, $x \in c$ и $x \in B(x_0, \varepsilon)$, так как $|\xi_k - \xi_k^0| \leqslant \dfrac{3}{4}\,\varepsilon < \varepsilon$. Следовательно, $B(x_0, \varepsilon) \not\subset c_0$. ✌

3.1. Пусть M и N – множества, всюду плотные в метрическом пространстве X. Возможно ли, что $M \cap N = \varnothing$?

3.2. Будут ли множество P_n всех алгебраических многочленов степени не выше n и множество P всех алгебраических многочленов

а) нигде не плотными в пространстве $C[a, b]$,

б) всюду плотными в пространстве $C[a, b]$?

3.3. Показать, что множество всех финитных последовательностей не является всюду плотным в пространствах c и ℓ_∞; всюду плотно в пространствах c_0 и ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$.

☞ Доказать утверждения 3.4–3.7.

3.4. Множество P всех алгебраических многочленов всюду плотно в пространстве $C^1[a, b]$.

3.5. Множество кусочно линейных непрерывных функций всюду плотно в пространстве $C[a, b]$ над $\mathbb{R}$.

3.6. Множество $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций всюду плотно в пространстве $L_p[a,b]$, $1 \leqslant p < \infty$.

3.7. а) Множество алгебраических многочленов от t^2 всюду плотно в пространстве $C[0,1]$;

б) множество алгебраических многочленов от t, равных нулю при $t = 1$, всюду плотно в множестве

$$M = \{x \in C[0,1] \colon x(1) = 0\};$$

в) множество

$$M = \{x \in C[0,1] \colon x(0) = 0\}$$

всюду плотно в пространствах $\widetilde{L}_1[0,1]$ и $L_1[0,1]$, но не является всюду плотным в пространстве $C[0,1]$;

г) множество

$$M = \left\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0 \right\}$$

всюду плотно в пространстве ℓ_2;

д) множество

$$M = \left\{ x \in L_2[0,1] \colon x(t) = 0,\ t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \right\}$$

нигде не плотно в пространстве $L_2[0,1]$;

е) множество тригонометрических полиномов вида

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad n \in \mathbb{N},$$

всюду плотно в пространствах $L_p[-\pi,\pi]$.

☞ Пусть X – метрическое пространство. Доказать утверждения 3.8–3.10.

3.8. Дополнение к нигде не плотному в X множеству всюду плотно. Справедливо ли обратное утверждение?

3.9. Дополнение к открытому всюду плотному в X множеству нигде не плотно.

3.10. Замыкание нигде не плотного в X множества нигде не плотно.

3.11. Привести пример метрического пространства X и множества в нем, которое не является нигде не плотным в X и не является всюду плотным в X.

☞ Доказать утверждения 3.12–3.19.

3.12. ✯ Метрическое пространство несепарабельно тогда и только тогда, когда в нем существует более чем счетное множество попарно непересекающихся шаров некоторого радиуса $r > 0$.

3.13. Пространства ℓ_p^n $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$, c_0, c, $C^{(k)}[a,b]$, $C[a,b]$, $L_p[a,b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ сепарабельны.

3.14. Пространство ℓ_∞ несепарабельно.

3.15. Пространство s сепарабельно.

3.16. Мощность сепарабельного метрического пространства не может быть больше, чем континуум.

3.17. Конечномерное нормированное пространство сепарабельно.

3.18. Пусть L – замкнутое линейное подмножество в нормированном пространстве X, $L \neq X$. Тогда L нигде не плотно в X.

3.19. Пусть метрические пространства X и Y гомеоморфны. Тогда если одно из них сепарабельно, то сепарабельно и другое.

Тема 4. Полные метрические и нормированные пространства, пополнения

Определение 4.1. Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического (нормированного) пространства X называется *фундаментальной*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)\ \forall\, n, m > N(\varepsilon) \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Определение 4.2. Метрическое (нормированное) пространство X называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится. Полное метрическое пространство называют также *пространством Фреше*, полное нормированное пространство – *банаховым пространством.*

Определение 4.3. Метрические пространства X и Y называются *изометричными* ($X \cong Y$), если существует биекция $f\colon X \to Y$ такая, что

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \quad \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) = \rho_X(x_1, x_2).$$

Нормированные пространства X и Y называются *линейно изометричными* ($X \cong Y$), если существует линейная биекция $f\colon X \to Y$ такая, что

$$\forall\, x \in X \quad \|f(x)\|_Y = \|x\|_X.$$

Теорема 4.1 (о пополнении пространства). *Для любого метрического пространства $\langle X, \rho_X \rangle$ существуют полное метрическое пространство $\langle Y, \rho_Y \rangle$ и подмножество $Y_1 \subset Y$ такие, что $\langle X, \rho_X \rangle \cong \langle Y_1, \rho_Y \rangle$ и $\overline{Y_1} = Y$.*

Для любого нормированного пространства $\langle X, \|\cdot\|_X \rangle$ существуют полное нормированное пространство $\langle Y, \|\cdot\|_Y \rangle$ и линейное многообразие $Y_1 \subset Y$ такие, что $\langle X, \|\cdot\|_X \rangle \cong \langle Y_1, \|\cdot\|_Y \rangle$ и $\overline{Y_1} = Y$.

Определение 4.4. Полное метрическое (нормированное) пространство Y из теоремы 4.1 называется *пополнением* метрического (нормированного) пространства X.

Пример 4.1. Пусть $X = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Проверить, что

$$\rho(x, y) = |\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 2y|$$

есть метрика на X. Доказать, что $\langle X, \rho \rangle$ – полное метрическое пространство.

Решение. Метрика ρ порождается убывающей функцией $f(t) = \operatorname{ctg} 2t$. Следовательно, f – биекция $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ на $\mathbb{R}$, а значит, $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Справедливость двух других аксиом метрики очевидна. Итак, $\langle X, \rho \rangle$ – метрическое пространство.

Полагая $f(x) = u$, $f(y) = v$, получаем

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)| = |u - v| = \rho_{|\cdot|}(u, v) = \rho_{|\cdot|}(f(x), f(y)).$$

Так как f – биекция X на $\mathbb{R}$ и $\rho(x, y) = \rho_{|\cdot|}(f(x), f(y))$, то метрические пространства $\langle X, \rho \rangle$ и $\langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|} \rangle$ изометричны. Пространство $\langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|} \rangle$ полное, значит, $\langle X, \rho \rangle$ – полное метрическое пространство (см. задачу 4.6). ✌

Пример 4.2. Показать, что пространство $\langle X, \rho \rangle$, где $X = (0, +\infty)$,

$$\rho(x, y) = |x \operatorname{sign}(x-1) - y \operatorname{sign}(y-1)|,$$

является неполным метрическим пространством. Найти его пополнение.

Решение. Первая аксиома метрики верна, так как метрика ρ порождается функцией $f(t) = t \operatorname{sign}(t-1)$, которая является биекцией множества X на множество $M = (-1, 0] \cup (1, +\infty)$. Справедливость двух других аксиом метрики очевидна.

Полагая $f(x) = u$, $f(y) = v$, получаем

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)| = |u - v| = \rho_{|\cdot|}(u, v) = \rho_{|\cdot|}(f(x), f(y)).$$

Так как f – биекция X на M и $\rho(x, y) = \rho_{|\cdot|}(f(x), f(y))$, то метрические пространства $\langle X, \rho \rangle$ и $\langle M, \rho_{|\cdot|} \rangle$ изометричны. Пространство $\langle X, \rho \rangle$ полно тогда и только тогда, когда $\langle M, \rho_{|\cdot|} \rangle$ – полное метрическое пространство (см. задачу 4.6).

Так как $M \subset \mathbb{R}$, метрическое пространство $\langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|} \rangle$ полное, а M не является замкнутым множеством в этом пространстве, то пространство $\langle M, \rho_{|\cdot|} \rangle$ не является полным (см. задачу 4.4), а его пополнение – это пространство $\langle \overline{M}, \rho_{|\cdot|} \rangle = \langle [-1, 0] \cup [1, +\infty), \rho_{|\cdot|} \rangle$ (см. задачу 4.5). Следовательно, $\langle X, \rho \rangle$ не является полным метрическим пространством, а его пополнение – это пространство $\langle Y, \rho_{|\cdot|} \rangle$, где $Y = [-1, 0] \cup$ $\cup [1, +\infty)$ (см. определение 4.4). ✌

Пример 4.3. Описать пополнение множества функций, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$, относительно нормы

$$\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} |x'(t)|.$$

Решение. Введем следующие обозначения:

$$X = C^1[0, 1], \qquad Y = \left\{ x \in C[0, 1] \colon x \in C^1\left[0, \tfrac{1}{2}\right] \right\},$$

$$\|x\|_X = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |x'(t)|.$$

Докажем, что пространство $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$ не является полным, а $\langle Y, \|\cdot\|_X\rangle$ – полное нормированное пространство и является пополнением пространства $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$.

Пусть для $n > 4$

$$x_n(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{n} - \sqrt{\dfrac{2}{n^2} - \left(t - \dfrac{3}{4}\right)^2}, & \left|t - \dfrac{3}{4}\right| \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ \left|t - \dfrac{3}{4}\right|, & t \in \left[0, \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{n}\right) \cup \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $x_n \in X$. Обозначим $x(t) = \left|t - \dfrac{3}{4}\right|$. Очевидно, $x \notin X$ и $x \in Y$. Так как

$$\|x_n - x\|_X = \max_{t:\left|t-\frac{3}{4}\right|\leqslant\frac{1}{n}} \left|\frac{2}{n} - \sqrt{\frac{2}{n^2} - \left(t - \frac{3}{4}\right)^2} - \left|t - \frac{3}{4}\right|\right| \leqslant \frac{3+\sqrt{2}}{n},$$

то $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x,\ n \to \infty$. Отсюда следует, что $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в пространстве $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$ и сходится к $x \notin X$. Значит, $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$ не является банаховым пространством.

Покажем, что пространство $\langle Y, \|\cdot\|_X\rangle$ банахово. Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в этом пространстве. Так как

$$\|x_n - x_m\|_{C[0,1]} \leqslant \|x_n - x_m\|_X,$$

то $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в банаховом пространстве $C[0,1]$. Следовательно,

$$x_n \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} x \in C[0,1], \quad n \to \infty,$$

(см. задачу 2.9). Аналогично, так как

$$\|x_n - x_m\|_{C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]} \leqslant \|x_n - x_m\|_X,$$

то $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в банаховом пространстве $C^1[0, \frac{1}{2}]$, значит,

$$x_n \overset{\left[0,\frac{1}{2}\right]}{\rightrightarrows} y, \quad x_n' \overset{\left[0,\frac{1}{2}\right]}{\rightrightarrows} y' \in C\left[0, \tfrac{1}{2}\right], \quad n \to \infty$$

(см. задачу 2.11). Поскольку $x(t) = y(t)$ для $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, то на этом отрезке существует $x'(t) = y'(t)$ и $x \in Y$, а $\|x_n - x\|_X \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Итак, фундаментальная в пространстве $\langle Y, \|\cdot\|_X\rangle$ последовательность $\{x_n\}$ сходится по $\|\cdot\|_X$ к элементу $x \in Y$. Полнота пространства $\langle Y, \|\cdot\|_X\rangle$ доказана.

Докажем, что $\langle Y, \|\cdot\|_X\rangle$ – пополнение пространства $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$ относительно нормы $\|\cdot\|_X$. Для этого нужно показать, что замыкание X по $\|\cdot\|_X$ есть Y.

Для любого $y \in Y$ существует последовательность $\{p_n\}$ алгебраических многочленов: $p_n \overset{\left[\frac{1}{2},1\right]}{\rightrightarrows} y$, $n \to \infty$. Рассмотрим последовательность

$$y_n(t) = \begin{cases} y(t), & t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ p_n(t) - p_n\left(\dfrac{1}{2}\right) + y\left(\dfrac{1}{2}\right) + & \\ \quad + \left(y'\left(\dfrac{1}{2}\right) - p_n'\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) \dfrac{\sin c_n\left(t - \dfrac{1}{2}\right)}{c_n}, & t \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]; \end{cases}$$

здесь c_n – некоторая отличная от нуля величина, которая будет специальным образом выбрана ниже. Функции y_n непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, 1]$, т. е. $y_n \in X$.

На отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ выполняются следующие соотношения:

$$|y_n(t) - y(t)| = \left|\big(p_n(t) - y(t)\big) + \left(y\left(\frac{1}{2}\right) - p_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \left(y'\left(\frac{1}{2}\right) - p_n'\left(\frac{1}{2}\right)\right)\frac{\sin c_n(t - \frac{1}{2})}{c_n}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \big|p_n(t) - y(t)\big| + \left|y\left(\frac{1}{2}\right) - p_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| +$$
$$+ \left|y'\left(\frac{1}{2}\right) - p_n'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \cdot \frac{1}{|c_n|}.$$

Полагая

$$c_n = n \cdot \left(1 + \left|y'\left(\frac{1}{2}\right) - p_n'\left(\frac{1}{2}\right)\right|\right),$$

получим

$$\max_{t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]} |y_n(t) - y(t)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

а значит, и

$$\max_{t \in [0,1]} |y_n(t) - y(t)| = \max_{t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]} |y_n(t) - y(t)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Итак, для всякого $y \in Y$ существует $\{y_n\} \in X$ такая, что

$$\|y_n - y\|_X = \max_{t \in [0,1]} |y_n(t) - y(t)| + \max_{t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} |y_n'(t) - y'(t)| =$$
$$= \max_{t \in [0,1]} |y_n(t) - y(t)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Следовательно, $\overline{X} = Y$ относительно $\|\cdot\|_X$. ✌

☞ Доказать утверждения 4.1–4.10.

4.1. Всякая фундаментальная последовательность в метрическом пространстве ограничена.

4.2. Если $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в метрическом пространстве, то $\rho(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$.

4.3. Метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда всякая фундаментальная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

4.4. Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – полное метрическое пространство и $M \subset X$. Пространство $\langle M, \rho\rangle$ полно тогда и только тогда, когда множество M замкнуто в X.

4.5. Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – полное метрическое пространство, $M \subset X$ и пространство $\langle M, \rho\rangle$ не является полным. Тогда пополнением этого пространства является пространство $\langle \overline{M}, \rho\rangle$.

4.6. Если X и Y – изометричные метрические пространства и одно из них полно, то полно и другое.

4.7. Пусть линейные нормированные пространства X и Y линейно гомеоморфны. Тогда, если одно из них является полным (сепарабельным), то и другое является полным (сепарабельным).

4.8. Нормированные пространства ℓ_p^n, c_0, c, ℓ_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $C[a, b]$, $C^k[a, b]$, $L_p[a, b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ полны.

4.9. Метрическое пространство s является полным.

4.10. Конечномерное нормированное пространство полно.

4.11. Показать, что пространство $\widetilde{L}_1[a, b]$ неполно. Найти его пополнение.

4.12. На множестве X финитных числовых последовательностей заданы нормы

а) $\|x\|_1 = \sup\limits_k |\xi_k|$, б) $\|x\|_2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$.

Показать, что пространства $\langle X, \|\cdot\|_1\rangle$ и $\langle X, \|\cdot\|_2\rangle$ не являются полными. Найти их пополнения.

4.13. В цепочках пространств из задач 2.20, 2.25 найти пополнение предыдущего по норме последующего. Например, для пары $\ell_1 \subset \ell_p$ нужно найти пополнение пространства $X = \{x = \{\xi_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty\}$ по норме $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p}$.

4.14. Описать пополнение пространства вещественных алгебраических многочленов от переменной t, снабженного нормой

а) $\|p\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |p(t)|$;

б) $\|p\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |p(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |p'(t)|$;

в) ✯ $\|p\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |p(t)| + |p'(a)|$;

г) ✯ $\|p\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |p(t)| + \max\limits_{t\in[c,d]} |p'(t)|$;

д) $\|p\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |p(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |p''(t)|$;

е) ✯ $\|p\| = \max\limits_{k\in\{0\}\cup\mathbb{N}} \dfrac{|p^{(k)}(0)|}{k!}$;

ж)✯ $\|p\| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{|p^{(k)}(0)|}{k!} + \max\limits_{t\in[-1,1]} |p(t)|$.

4.15. Рассмотрим линейные пространства функций, определенных на вещественной прямой $\mathbb{R}$:

а) $C(\mathbb{R})$ – все ограниченные непрерывные функции;

б) $C_0(\mathbb{R})$ – все непрерывные функции, у которых $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$;

в) $C_1(\mathbb{R})$ – все финитные непрерывные функции (т. е. функции, равные нулю вне некоторого конечного интервала).

В этих пространствах введем норму

$$\|x\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|.$$

Будут ли эти пространства полными? Будут ли они сепарабельными?

4.16. На множестве натуральных чисел положим

$$\rho(n,m) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n+m}, & n \neq m, \\ 0, & n = m. \end{cases}$$

Доказать, что $\langle \mathbb{N}, \rho\rangle$ – полное метрическое пространство. Построить последовательность замкнутых вложенных шаров, имеющих пустое пересечение.

4.17. Доказать, что в полном линейном нормированном пространстве любая последовательность замкнутых вложенных шаров имеет непустое пересечение.

4.18. Пусть $f\colon M \to \mathbb{P}$ – инъективная функция, $\rho_f(x,y) = |f(x)-f(y)|$. Доказать, что пространство $\langle M, \rho_f\rangle$ полно тогда и только тогда, когда множество $f(M)$ замкнуто в пространстве $\langle \mathbb{P}, \rho_{|\cdot|}\rangle$.

4.19. Проверить, что $\langle X, \rho_f\rangle$, где $\rho_f(x,y) = |f(x) - f(y)|$, – метрическое пространство. Является ли оно полным? Если нет, описать его пополнение:

а) $X = \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{arctg} x$;

б) $X = \mathbb{R},\ f(x) = x^5$;

в) $X = [0,\infty),\ f(x) = \ln(x+1)$;

г) $X = [0,\infty),\ f(x) = e^{-x}$;

д) $X = [-1,1),\ f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1,0], \\ x+1, & x \in (0,1); \end{cases}$

е) $X = [-1,1),\ f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1,0), \\ x+1, & x \in [0,1); \end{cases}$

ж) $X = \mathbb{N},\ f(n) = \dfrac{1}{n}.$

Будут ли эквивалентны метрики для пар: «а» и «б»; «в» и «г»; «д» и «е»?

4.20. ✯ Доказать, что метрическое пространство $\langle \mathbb{N}, \rho \rangle$, где $\rho(m,n) = |e^{in} - e^{im}|$, не является полным. Найти его пополнение.

4.21. На множестве X заданы две эквивалентные метрики. Сохраняются ли свойства полноты и сепарабельности при переходе к эквивалентной метрике?

Тема 5. Непрерывные и равномерно непрерывные отображения. Сжимающие отображения

Определение 5.1. Пусть X и Y – метрические пространства. Отображение $F\colon X \to Y$ называется

- ✓ *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\ \forall\, x \in X$$

$$\rho_X(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow\ \rho_Y(Fx, Fx_0) < \varepsilon;$$

- ✓ *непрерывным на множестве* $M \subset X$, если оно непрерывно в каждой точке множества M;

- ✓ *равномерно непрерывным на множестве* $M \subset X$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\ \forall\, x_1, x_2 \in M$$

$$\rho_X(x_1, x_2) < \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow\ \rho_Y(Fx_1, Fx_2) < \varepsilon.$$

Определение 5.2. Пусть $\langle X, \rho \rangle$ – метрическое пространство. Отображение $F\colon X \to X$ называется *сжимающим*, если

$$\exists\, \alpha \in [0,1)\ \forall\, x, y \in X \quad \rho(Fx, Fy) \leqslant \alpha \rho(x, y).$$

Определение 5.3. Пусть $F\colon X \to X$. Точка $x^* \in X$ называется *неподвижной точкой* отображения F, если $Fx^* = x^*$.

Теорема 5.1 (теорема Банаха). *Пусть $\langle X, \rho \rangle$ – полное метрическое пространство, $F\colon X \to X$ – сжимающее отображение. Тогда существует единственная неподвижная точка отображения F.*

Пример 5.1. Доказать, что отображение

$$F\colon C[-1,1] \to L_1[-1,1],$$

действующее по правилу

$$(Fx)(t) = (2t-5)x(t) - 3\int_{-1}^{1} 2^{t-s} \sin x(s)\, ds,$$

равномерно непрерывно на $C[-1,1]$.

Решение. Представим отображение F в виде $F = G + H$, где

$$(Gx)(t) = (2t-5)x(t), \quad (Hx)(t) = -3\int_{-1}^{1} 2^{t-s} \sin x(s)\, ds.$$

Докажем, что отображения G и H равномерно непрерывны на $C[-1,1]$, тогда и отображение F будет равномерно непрерывным на $C[-1,1]$. Пусть $x_1, x_2 \in C[-1,1]$. Тогда

$$|(Gx_1)(t) - (Gx_2)(t)| = |(2t-5)(x_1(t) - x_2(t))| \leqslant$$
$$\leqslant |2t-5| \cdot |x_1(t) - x_2(t)| \leqslant 7\|x_1 - x_2\|_{C[-1,1]}$$

и, следовательно,

$$\|Gx_1 - Gx_2\|_{L_1[-1,1]} = \int_{-1}^{1} |(Gx_1)(t) - (Gx_2)(t)| dt \leqslant$$
$$\leqslant 14\|x_1 - x_2\|_{C[-1,1]}.$$

Из этой оценки следует равномерная непрерывность G на $C[-1,1]$. Для отображения H имеем

$$|(Hx_1)(t) - (Hx_2)(t)| = \left|3\int_{-1}^{1} 2^{t-s}(\sin x_1(s) - \sin x_2(s))\, ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant 3\int_{-1}^{1} 2^{t-s} \cdot 2\left|\sin\frac{x_1(s) - x_2(s)}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x_1(s) + x_2(s)}{2}\right| ds \leqslant$$
$$\leqslant 6 \cdot 2^t \int_{-1}^{1} |x_1(s) - x_2(s)|\, ds \leqslant 12\|x_1 - x_2\|_{C[-1,1]} \cdot 2^t.$$

Таким образом,

$$\|Hx_1 - Hx_2\|_{L_1[-1,1]} = \int_{-1}^{1} |(Hx_1)(t) - (Hx_2)(t)| dt \leqslant$$
$$\leqslant 12\|x_1 - x_2\|_{C[-1,1]} \int_{-1}^{1} 2^t\, dt \leqslant 48 \cdot \|x_1 - x_2\|_{C[-1,1]}$$

и отображение H также равномерно непрерывно на $C[-1,1]$. ✌

Пример 5.2. Исследовать на равномерную непрерывность и непрерывность отображения

а) $(Fx)(t) = e^{-|x(t)|}$; б) $(Gx)(t) = x^2(t) - x(t) + 1$,
действующие из $C[a,b]$ в $C[a,b]$.

Решение. Так как функции

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{и} \quad g(x) = x^2 - x + 1$$

непрерывны на $\mathbb{R}$, то порождаемые ими отображения F и G непрерывны в $C[a,b]$, а равномерная непрерывность этих отображений на $C[a,b]$ эквивалентна равномерной непрерывности функций f и g на $\mathbb{R}$ (см. задачу 5.5).

а) Функция f дифференцируема на $(-\infty, 0]$ и на $[0, +\infty)$. На каждом из этих множеств $|f'(x)| \leqslant 1$. Следовательно, функция f равномерно непрерывна на $(-\infty, 0]$ и на $[0, +\infty)$. В силу непрерывности f на $\mathbb{R}$, она равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Следовательно, отображение F равномерно непрерывно на $C[a,b]$.

б) Функция $g(x) = x^2 - x + 1$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$, так как последовательности $x_n' = n$ и $x_n'' = n + \dfrac{1}{n}$ обладают свойством $|x_n' - x_n''| = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, но

$$|g(x_n') - g(x_n'')| = |x_n' - x_n''| \cdot |x_n' + x_n'' - 1| =$$
$$= \frac{1}{n}\left|2n + \frac{1}{n} - 1\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \neq 0.$$

Значит, и отображение G из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, порождаемое функцией g, не является равномерно непрерывным.

Приведем прямое доказательство непрерывности отображения G на $C[a,b]$ (без ссылки на задачу 5.5). Пусть $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in C[a,b]$, тогда для любой функции $x \in C[a,b]$ со свойством $\|x - x_0\| \leqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned}|(Gx)(t) - (Gx_0)(t)| &= |(x^2(t) - x(t) + 1) - (x_0^2(t) - x_0(t) + 1)| = \\ &= |x(t) - x_0(t)| \cdot |x(t) + x_0(t) - 1| \leqslant \\ &\leqslant |x(t) - x_0(t)| \cdot (|x(t) - x_0(t)| + 2|x_0(t)| + 1).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|Gx - Gx_0\| &= \max_{t\in[a,b]} |G(x)(t) - G(x_0)(t)| \leqslant \\ &\leqslant \|x - x_0\| \cdot (\|x - x_0\| + 2\|x_0\| + 1) \leqslant \\ &\leqslant (2 + 2\|x_0\|)\|x - x_0\|.\end{aligned}$$

Из этой оценки следует, что отображение G непрерывно на $C[a,b]$ $\left(\delta(\varepsilon) = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{2 + 2\|x_0\|}\right\}\right)$. ✌

Пример 5.3. Доказать, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений

$$23 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^{k+m}} \xi_k - \frac{2}{m} = \xi_m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

имеет единственное решение в пространстве ℓ_2.

Решение. Введем оператор $A\colon \ell_2 \to \ell_2$,

$$Ax = \left\{ 23 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^{k+m}} \xi_k \right\}_{m=1}^{\infty}.$$

Это оператор сжатия (см. задачу 5.16 «а»), так как

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} \left(\frac{23}{5^{k+m}} \right)^2 = 23^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{25^k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{25^m} = \frac{23^2}{24^2} < 1.$$

Полагая $y_0 = \left\{ \dfrac{2}{m} \right\}_{m=1}^{\infty}$, $Bx = Ax - y_0$, запишем исходную систему уравнений в операторном виде:

$$Bx = x. \tag{5.1}$$

Так как

$$\rho(Bx, By) = \|Bx - By\| = \|Ax - Ay\| = \rho(Ax, Ay)$$

и A – оператор сжатия, то и B – оператор сжатия. Следовательно, по теореме Банаха (см. теорему 5.1) операторное уравнение (5.1), а значит, и исходная система уравнений, имеет единственное решение в пространстве ℓ_2. ✌

5.1. Является ли непрерывным на своей области определения отображение $Fx = x(1)$, если

а) $F\colon C[0,1] \to \langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|} \rangle$; б) $F\colon \widetilde{L}_1[0,1] \to \langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|} \rangle$?

5.2. Исследовать на непрерывность и равномерную непрерывность отображение $(Fx)(t) = x^2(t)$ на области определения:

а) $F\colon C[0,1] \to C[0,1]$; б) $F\colon C[0,1] \to \widetilde{L}_1[0,1]$;

в) $F\colon \widetilde{L}_1[0,1] \to \widetilde{L}_1[0,1]$.

5.3. Показать, что отображение $(Fx)(t) = x'(t) - 3x(t)$ непрерывно на своей области определения, если $F\colon C^1[a,b] \to C[a,b]$, и не является непрерывным, если $F\colon C^1[a,b] \subset C[a,b] \to C[a,b]$.

5.4. Пусть X, Y – метрические пространства, $F\colon X \to Y$. Докажите, что F не является равномерно непрерывным на X тогда и только тогда, когда найдутся последовательности $\{x'_n\}$, $\{x''_n\} \subset X$ такие, что $\rho_X(x'_n, x''_n) \to 0$, а $\rho_Y(Fx'_n, Fx''_n) \not\to 0$ при $n \to \infty$.

5.5. Пусть отображение $F\colon C[a,b] \to C[a,b]$ определено формулой $(Fx)(t) = f(x(t))$, где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Доказать, что отображение F непрерывно (равномерно непрерывно) на $C[a,b]$ тогда и только тогда, когда функция f непрерывна (равномерно непрерывна) на $\mathbb{R}$.

5.6. Исследовать на равномерную непрерывность на $C[0,2]$ отображение $F\colon C[0,2] \to C[0,2]$, если

а) $(Fx)(t) = \sqrt[3]{x(t)}$;

б) $(Fx)(t) = x^3(t)$;

в) $(Fx)(t) = \operatorname{arctg} x(t)$;

г) $(Fx)(t) = \cos x^2(t)$;

д) $(Fx)(t) = \dfrac{x^2(t)}{1 + x^4(t)}$;

е) $(Fx)(t) = \displaystyle\int_0^2 (t+s) \ln(1 + 3x^2(s))\, ds$.

5.7. Исследовать на равномерную непрерывность на $C[0,2]$ отображения «а»–«е» из задачи 5.6, если $F\colon C[0,2] \to \widetilde{L}_1[0,2]$.

5.8. Исследовать на непрерывность на области определения отображения

а) $F\colon C^1[0,3] \subset C[0,3] \to C[0,3]$,
$$(Fx)(t) = x(2) - 5\int_0^t 2^s x'(s)ds;$$

б) $F\colon C^1[0,1] \to C^1[0,1]$,
$$(Fx)(t) = 3x(t) + \int_0^t \ln(1+s)\, x(s)\, ds;$$

в) $F\colon C^1[0,1] \subset C[0,1] \to C^1[0,1]$,
$$(Fx)(t) = 3x(t) + \int_0^t \ln(1+s)\, x(s)\, ds;$$

г) $F\colon C[0,1] \to C^1[0,1]$,
$$(Fx)(t) = \cos t \cdot \int_t^1 (s^2+4)\, x(s)\, ds.$$

5.9. Будет ли отображение $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ сжимающим на множестве $M \subset \mathbb{R}$, если $Fx = x^3$, метрика на $\mathbb{R}$ естественная,

а) $M = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$; б) $M = [0,2]$; в) $M = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$?

5.10. Пусть вещественная функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$. Доказать, что f – сжимающее отображение в пространстве $\langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|}\rangle$ тогда и только тогда, когда существует $\alpha \in [0,1)$ такое, что $|f'(x)| \leqslant \alpha$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

5.11. Пусть вещественная функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$. Доказать, что уравнение $f(x) = x$ имеет единственное решение на $\mathbb{R}$, если
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < 1 \qquad \text{или} \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| > 1.$$

Являются ли эти условия необходимыми для существования единственного решения?

5.12. Доказать, что уравнение $2xe^x = 1$ имеет единственное решение, принадлежащее промежутку $(0, 1)$.

5.13. Достаточно ли для существования неподвижной точки отображения f в полном метрическом пространстве выполнения условия $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ для всех $x \neq y$?

☞ Доказать утверждения 5.14–5.21.

5.14. Пусть $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + x - \operatorname{arctg} x$. Для любых x, y существует постоянная $\alpha < 1$ такая, что $|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x - y|$, но отображение f не имеет неподвижных точек.

5.15. Пусть $A\colon \ell_p^n \to \ell_p^n$, $Ax = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} \xi_j \right\}_{k=1}^{n}$. Тогда A – сжимающее отображение в пространстве ℓ_p^n, если

а) $\sum\limits_{k,j=1}^{n} |a_{kj}|^2 < 1$ при $p = 2$;

б) $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}| < 1$ при $p = \infty$;

в) $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{kj}| < 1$ при $p = 1$.

5.16. Пусть $A\colon \ell_p \to \ell_p$, $Ax = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{kj} \xi_j \right\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда A – сжимающее отображение в пространстве ℓ_p, если

а) $\sum\limits_{k,j=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 < 1$ при $p = 2$;

б) $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1$ при $p = \infty$;

в) $\sup\limits_{j \in \mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1$ при $p = 1$.

5.17. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений

$$\xi_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}\xi_j + \eta_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

имеет единственное решение $x = \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ для любого $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$, если выполнено условие

а) $\sum\limits_{k,j=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 < 1$ при $p = 2$;

б) $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1$ при $p = \infty$;

в) $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1$ при $p = 1$.

5.18. Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – полное метрическое пространство и отображение $f\colon X \to X$ таково, что некоторая его степень $g = f^n$ является сжимающим отображением. Тогда уравнение $fx = x$ имеет единственное решение.

5.19. Пусть A – интегральный оператор Вольтерра:

$$Ax(t) = \int_a^t K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

ядро $K(t, s)$ непрерывно на треугольнике

$$\Delta = \bigl\{(t, s)\colon t \in [a, b],\ s \in [a, t]\bigr\}.$$

Тогда существует такое $m \in \mathbb{N}$, что A^m является сжимающим отображением в пространстве $C[a, b]$.

5.20. Пусть ядро $K(t, s)$ непрерывно на $[a, b] \times [a, b]$ и

$$\int_a^b |K(t, s)| ds \leqslant d < 1, \quad t \in [a, b].$$

Тогда интегральное уравнение Фредгольма

$$x(t) - \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds = y(t)$$

имеет единственное решение $x \in C[a,b]$ для любой функции $y \in C[a,b]$.

5.21. Уравнение

$$x(t) = t^2 + \int_0^3 \sin\left(s + \frac{t}{10} \cdot x(s)\right) ds$$

имеет единственное непрерывное на $[0,3]$ решение $x(t)$.

5.22. Являются ли отображения $A\colon X \to X$ сжимающими, если

а) $(Ax)(t) = \int_0^1 e^{-t|x(s)|}\, ds, \quad X = C[0,1];$

б) $(Ax)(t) = \int_0^1 e^{-t|x(s)|}\, ds, \quad X = \widetilde{L}_2[0,1];$

в) $(Ax)(t) = \int_0^2 t \cdot \sin x(s)\, ds, \quad X = C[0,2];$

г) $(Ax)(t) = \lambda \int_0^1 t^2 s^2 x(s)\, ds, \quad X = C[0,1]?$

5.23. В пространстве $C[0,1]$ решить уравнение

$$x(t) = \lambda \int_0^t x(s)ds + t^2, \quad \lambda \neq 0.$$

5.24. Доказать, что любое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

5.25. Пусть B и C – отображения полного метрического пространства в себя, B и C коммутируют, B – сжимающее. Доказать, что уравнение $Cx = x$ имеет решение.

Тема 6. Компактность, предкомпактность

☛ Во всех определениях и теоремах этой темы через X обозначено метрическое пространство $\langle X, \rho \rangle$.

Определение 6.1. Метрическое пространство X называется *компактным*, если из любого открытого покрытия X можно выделить конечное подпокрытие.

Множество $M \subset X$ называется *компактным*, если компактно подпространство $\langle M, \rho \rangle$, им порожденное.

Определение 6.2. Множество $M \subset X$ называется *секвенциально компактным*, если

$$\forall \, \{x_n\} \subset M \quad \exists \, \{x_{n_k}\} \quad \exists \, x_0 \in M \qquad x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x_0.$$

Теорема 6.1. *В метрическом пространстве компактность эквивалентна секвенциальной компактности.*

Теорема 6.2 (необходимые условия компактности). *Если множество $M \subset X$ компактно, то M ограничено и замкнуто, а $\langle M, \rho \rangle$ – полное метрическое пространство.*

Определение 6.3. Множество $M \subset X$ называется *предкомпактным*, если $\overline{M}$ компактно.

Теорема 6.3. *Множество $M \subset X$ предкомпактно тогда и только тогда, когда*

$$\forall \{x_n\} \subset M \quad \exists \{x_{n_k}\} \quad \exists x_0 \in X \qquad x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0.$$

Определение 6.4. Множество $A \subset X$ называется *ε-сетью для множества $M \subset X$*, если

$$\forall x \in M \quad \exists a \in A \quad \rho(x, a) < \varepsilon.$$

Определение 6.5. Множество $M \subset X$ называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть для M.

Теорема 6.4. *Пусть X – полное метрическое пространство, $M \subset X$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *M предкомпактно*;

2) *M вполне ограничено*;

3) *из любой последовательности, принадлежащей M, можно выделить фундаментальную подпоследовательность.*

Теорема 6.5 (теорема Хаусдорфа, критерий компактности в метрическом пространстве). *Множество $M \subset X$ компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено и $\langle M, \rho \rangle$ – полное метрическое пространство.*

Следствие 6.1. *Для того чтобы множество $M \subset X$ было предкомпактным, необходимо, а в случае полноты X и достаточно, чтобы M было вполне ограниченно.*

Определение 6.6. Семейство Φ отображений $f \colon X \to \mathbb{P}$ называется *равномерно ограниченным*, если

$$\exists K > 0 \quad \forall f \in \Phi \quad \forall x \in X \qquad |f(x)| \leqslant K.$$

Определение 6.7. Пусть X – метрическое пространство с метрикой ρ. Семейство Φ непрерывных на X отображений $f\colon X \to \mathbb{P}$ называется *равностепенно непрерывным*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, f \in \Phi \quad \forall\, x_1, x_2 \in X$$

$$\rho(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Пусть X – компактное метрическое пространство. Обозначим $C(X)$ пространство непрерывных на X отображений $f\colon X \to \mathbb{P}$ с нормой

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|.$$

Теорема 6.6 (теорема Арцела–Асколли, критерий предкомпактности в $\boldsymbol{C(X)}$). *Пусть X – компактное метрическое пространство. Семейство отображений $\Phi \subset C(X)$ предкомпактно $\Longleftrightarrow$ Φ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Теорема 6.7. *Пусть X, Y – метрические пространства, отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно на X и множество $M \subset X$ компактно. Тогда множество $f(M)$ компактно.*

Пример 6.1. Пусть $M = \{x \in C^1[a,b] \colon |x'(t)| \leqslant c_0\}$. Доказать, что множество M предкомпактно в пространстве $C[a,b]$ тогда и только тогда, когда существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что для всех $x \in M$

$$\left| \int_a^b x(t)dt \right| \leqslant c_1.$$

Решение. *Необходимость.* Из предкомпактности множества M следует его ограниченность (см. теорему 6.2), т. е. существование постоянной $K > 0$ такой, что для всех $x \in M$

$$\|x\| = \max_{[a,b]} |x(t)| \leqslant K.$$

Отсюда получаем оценку

$$\left|\int_a^b x(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |x(t)|\,dt \leqslant K(b-a) = c_1$$

для всех $x \in M$.

Достаточность. Для доказательства предкомпактности множества M воспользуемся теоремой Арцела – Асколли (см. теорему 6.6).

Равностепенная непрерывность семейства функций M следует из оценки

$$|x(t_1) - x(t_2)| = |x'(\xi)| \cdot |t_1 - t_2| \leqslant c_0|t_1 - t_2| < \varepsilon$$

для $\delta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{c_0}$, справедливой для всех $x \in M$ и любых $t_1, t_2 \in [a, b]$ (применили формулу Лагранжа, $\xi \in (a, b)$).

Докажем, что семейство функций M равномерно ограничено. Согласно теореме о среднем для непрерывной функции $x \in M$ существует точка $\eta \in [a, b]$ такая, что

$$x(\eta) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x(s)ds.$$

Из формулы Ньютона – Лейбница для $t \in [a, b]$ получаем

$$x(t) = \int_\eta^t x'(s)ds + x(\eta) = \int_\eta^t x'(s)ds + \frac{1}{b-a}\int_a^b x(s)ds.$$

Значит,

$$|x(t)| \leqslant \int_a^b |x'(s)|\,ds + \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b x(s)\,ds\right| \leqslant c_0(b-a) + \frac{c_1}{b-a},$$

т. е. семейство функций M равномерно ограничено.

По теореме Арцела – Асколли множество M предкомпактно в $C[a, b]$. ✌

Пример 6.2. Пусть $M = \{\ln(2 + t^\alpha)\}_{\alpha\in(0,2]}$. Будет ли это множество предкомпактным (компактным) в пространствах $C[0, 1]$ и $L_1[0, 1]$?

Решение. Воспользуемся теоремой 6.3. Пусть $\{x_n\} \subset M$. Тогда x_n имеет вид $x_n(t) = \ln(2 + t^{\alpha_n})$, где $\alpha_n \in (0, 2]$. Из ограниченной последовательности $\{\alpha_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = \alpha_0 \in [0, 2]$.

Если $\alpha_0 \neq 0$, то при $k \to \infty$ последовательность функций $\{x_{n_k}\}$ поточечно сходится к функции $y_1(t) = \ln(2 + t^{\alpha_0}) \in M$.

Если $\alpha_0 = 0$, то последовательность функций $\{x_{n_k}\}$ поточечно сходится к функции

$$y_2(t) = \begin{cases} \ln 2, & t = 0, \\ \ln 3, & t \in (0, 1], \end{cases}$$

которая не принадлежит пространству $C[0, 1]$. Отсюда следует, что в этом случае последовательность $\{x_{n_k}\}$ и любая ее подпоследовательность не являются равномерно сходящимися на отрезке $[0, 1]$, а значит и сходящимися в пространстве $C[0, 1]$.

Итак, множество M непредкомпактно в $C[0, 1]$, так как существует последовательность $\{\widetilde{x}_n\} \in M$ (например, $\widetilde{x}_n(t) = \ln(2+t^{1/n})$), из которой нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся в пространстве $C[0, 1]$. Отсюда следует, что множество M некомпактно в $C[0, 1]$.

Докажем, что множество M предкомпактно в пространстве $L_1[0, 1]$. Действительно, как показано выше, из любой последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к функции y_1 или y_2 при $k \to \infty$. Функции $y_1, y_2 \in L_1[0, 1]$. При этом последовательности $\{x_{n_k}(t) - y_j(t)\}$ $(j = 1$ или $2)$ всюду на $[0, 1]$ поточечно сходятся к 0, $|x_{n_k}(t) - y_j(t)| \leqslant 2\ln 3$, функция $y(t) \equiv 2\ln 3$ интегрируема на $[0, 1]$. Поэтому согласно теореме Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла

$$\|x_{n_k} - y_j\|_{L_1[0,1]} = \int_0^1 |x_{n_k}(t) - y_j(t)|\, dt \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_0^1 0\, dt = 0.$$

Итак, множество M предкомпактно в пространстве $L_1[0, 1]$, так как из любой последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выделить сходящуюся в $L_1[0, 1]$ подпоследовательность.

Покажем, что множество M некомпактно в $L_1[0,1]$. Действительно, если бы M было компактно, то оно было бы и секвенциально компактно (теорема 6.1), а значит, из последовательности $\widetilde{x}_n(t) = \ln\left(2 + t^{1/n}\right)$ можно было бы выделить подпоследовательность, сходящуюся по норме к некоторой функции из M. Но так как $\{\widetilde{x}_n\}$ сходится по норме в $L_1[0,1]$ и поточечно на $[0,1]$ к функции y_2, то и любая ее подпоследовательность сходится по норме и поточечно на $[0,1]$ к y_2. Следовательно, y_2 должна быть эквивалентна некоторой функции из M (см. задачу 2.13). Но y_2 не эквивалентна ни одной функции из M. Следовательно, M некомпактно. ✌

Пример 6.3. Доказать, что для предкомпактности множества M в пространстве ℓ_1 необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M \quad \sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} |\xi_k| < \varepsilon.$$

Решение. Для доказательства можно воспользоваться следствием 6.1 из теоремы Хаусдорфа, так как пространство ℓ_1 полное.

Необходимость. Предположим, что множество M предкомпактно в пространстве ℓ_1. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует набор $\{y_j\}_{j=1}^m \subset \ell_1 \colon M \subset \bigcup\limits_{j=1}^m B(y_j, \varepsilon)$. Отсюда следует, что множество M ограничено. Для $y_j = \{\eta_k^j\}$ существует $N_\varepsilon^j \in \mathbb{N} \colon \sum\limits_{k=N_\varepsilon^j}^{\infty} |\eta_k^j| < \varepsilon$. Положим $N_\varepsilon = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \{N_\varepsilon^j\}$. Для всякого элемента $x \in M$ существует $y_j \colon \|x - y_j\| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} |\xi_k| \leqslant \sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} |\xi_k - \eta_k^j| + \sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} |\eta_k^j| \leqslant$$

$$\leqslant \|x - y_j\| + \sum_{k=N_\varepsilon^j}^{\infty} |\eta_k^j| < 2\varepsilon.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Известно, что

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, x \in M \quad \|x\| \leqslant C$$

и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M \quad \sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} |\xi_k| < \varepsilon.$$

Докажем, что множество M предкомпактно.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное. Каждому $x \in M$ поставим в соответствие элемент

$$x_\varepsilon = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N_\varepsilon}, 0, 0, \ldots).$$

Справедливы неравенства

$$\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon, \quad \|x_\varepsilon\| \leqslant \|x\| \leqslant C.$$

Пусть Y – подпространство пространства ℓ_1, элементами которого являются последовательности

$$y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{N_\varepsilon}, 0, 0, \ldots).$$

Пространство Y конечномерно, а множество $M_\varepsilon = \bigcup\limits_{x \in M} \{x_\varepsilon\}$ является его ограниченным подмножеством. В силу задачи 6.17 множество M_ε предкомпактно в пространстве Y. Следовательно, существует набор $\{y_j\}_{j=1}^m \subset Y$ такой, что $M_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} B(y_j, \varepsilon)$ (здесь $B(y_j, \varepsilon) \subset Y$). Покажем, что $\{y_j\}_{j=1}^m$ есть 2ε-сеть для множества M в пространстве ℓ_1.

Для любого $x \in M$ существует y_j такой, что $\|y_j - x_\varepsilon\| < \varepsilon$ и

$$\|x - y_j\| \leqslant \|x - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon - y_j\| < 2\varepsilon.$$

Таким образом, M вполне ограничено, а значит, предкомпактно. Достаточность доказана. ✌

6.1. Привести пример метрического пространства $\langle X, \rho \rangle$ и множества $M \subset X$ таких, что

а) M вполне ограниченно, но непредкомпактно;

б) M предкомпактно, но некомпактно.

6.2. Будет ли предкомпактным (компактным) множество M из метрического пространства X, если

а) M конечно;

б) M – сходящаяся последовательность;

в) M – фундаментальная последовательность (рассмотреть два случая: X – полное, X – не полное)?

6.3. Пусть на множестве X заданы метрики ρ_1 и ρ_2, причем $\rho_1 \succeq \rho_2$. Доказать, что из предкомпактности (компактности) множества M в метрическом пространстве $\langle X, \rho_1 \rangle$ следует предкомпактность (компактность) M в метрическом пространстве $\langle X, \rho_2 \rangle$.

6.4. Выяснить, при каких условиях на мощность множества X пространство $\langle X, \rho_T \rangle$ является

а) полным; б) сепарабельным; в) компактным.

☞ Доказать утверждения 6.5–6.14.

6.5. Для предкомпактности множества M в метрическом пространстве X необходимо, а в случае полноты X – и достаточно, существование для всякого $\varepsilon > 0$ предкомпактной ε-сети, т. е. предкомпактного множества $N \subset X$ такого, что

$$M \subset \bigcup_{x \in N} B(x, \varepsilon).$$

6.6. Если $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ – ε-сеть для множества M из метрического пространства X, то найдется множество $\{\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \ldots, \widetilde{a}_k\} \subset M$, являющееся 2ε-сетью для M.

6.7. Множество $M \subset \ell_p^n$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в ℓ_p^n.

6.8. Множество $M \subset c_0$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в c_0 и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M$$

$$|\xi_n| < \varepsilon.$$

6.9. Множество $M \subset c_0$ предкомпактно $\iff$

$$\exists\, x_0 = \{\xi_k^0\} \in c_0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M \quad |\xi_n| \leqslant |\xi_n^0|.$$

6.10. Множество $M \subset c$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в c и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m > N \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M$$

$$|\xi_n - \xi_m| < \varepsilon.$$

6.11. Множество $M \subset \ell_p,\ 1 \leqslant p < \infty$, предкомпактно $\iff$ оно ограничено в ℓ_p и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon.$$

6.12. ✯ *Критерий М. Рисса.* Множество $M \subset L_p[a,b]$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в $L_p[a,b]$ и равностепенно непрерывно в среднем, т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, h,\ |h| < \delta, \quad \forall\, x \in M$$

$$\int_a^b |x(t+h) - x(t)|^p \, dt < \varepsilon$$

(считаем $x(t) = 0$, если $t \notin [a,b]$).

6.13. ✯ *Критерий А. Н. Колмогорова.* Множество $M \subset L_p[a,b]$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в $L_p[a,b]$ и

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\ h,\ 0 < h < \delta, \quad \forall\ x \in M$$

$$\int_a^b |x_h(t) - x(t)|^p\,dt < \varepsilon,$$

где

$$x_h(t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} x(\tau)\,d\tau$$

(считаем $x(t) = 0$, если $t \notin [a,b]$).

6.14. ✯ Множество $M \subset L_p(\mathbb{R})$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в $L_p(\mathbb{R})$ и равностепенно непрерывно в среднем, т. е.

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\ h,\ |h| < \delta, \quad \forall\ x \in M$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t+h) - x(t)|^p\,dt < \varepsilon$$

и

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ A = A(\varepsilon) > 0 \quad \forall\ x \in M$$

$$\int_{-\infty}^{-A} |x(t)|^p\,dt + \int_A^{\infty} |x(t)|^p\,dt < \varepsilon.$$

6.15. Доказать, что в метрическом пространстве

а) если множество M предкомпактно, то оно ограничено;

б) множество M компактно тогда и только тогда, когда оно предкомпактно и замкнуто.

6.16. Пусть метрические пространства X и Y гомеоморфны и τ – гомеоморфизм X на Y. Доказать, что множество M предкомпактно в X тогда и только тогда, когда множество $\tau(M)$ предкомпактно в Y.

6.17. Доказать, что предкомпактность (компактность) множества в конечномерном нормированном пространстве эквивалентна его ограниченности (ограниченности и замкнутости).

6.18. Пусть M – некоторое множество алгебраических многочленов степени не выше n. Указать условия на коэффициенты многочленов, необходимые и достаточные для предкомпактности множества M в пространстве $C[a,b]$.

6.19. Доказать, что множество $\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограниченно, замкнуто, непредкомпактно в пространстве $L_2[a,b]$.

6.20. Являются ли следующие множества предкомпактными (компактными) в пространствах $C[0,1]$ и $L_p[0,1]$:

а) $M = \{t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$; б) $M = \{(\alpha t)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$;

в) $M = \{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$; г) $M = \{\sin \alpha t\}_{\alpha\in[a,b]}$;

д) $M = \{\sin \alpha t\}_{\alpha\in[a,b)}$;

е) $M = \{\sin(t+\alpha)\}_{\alpha\in[a,b)}$; ж)✯ $M = \{\sin(t+n)\}_{n\in\mathbb{N}}$;

з) $M = \left\{e^{t-\alpha}\right\}_{\alpha\in[0,+\infty)}$;

и) $M = \left\{\operatorname{arctg}\alpha\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\right\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$;

к) $M = \left\{n\left(\sqrt[3]{t+\dfrac{1}{n}}-\sqrt[3]{t}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$?

6.21. Являются ли следующие множества предкомпактными (компактными) в пространстве $C[a,b]$:

а) $\left\{x\in C^1[a,b]\colon |x(t)|\leqslant B_0,\ |x'(t)|\leqslant B_1\right\}$;

б) $\left\{x\in C^1[a,b]\colon |x(a)|\leqslant B_0,\ |x'(t)|\leqslant B_1\right\}$;

в) $\left\{x\in C^2[a,b]\colon |x(t)|\leqslant B_0,\ |x'(t)|\leqslant B_1,\ |x''(t)|\leqslant B_2\right\}$;

г)✯ $\{x \in C^2[a,b]\colon |x(t)| \leqslant B_0,\ |x''(t)| \leqslant B_1\}$;

д) $\{x \in C^2[a,b]\colon |x'(t)| \leqslant B_0,\ |x''(t)| \leqslant B_1\}$;

е) $\{x \in C[a,b]\colon |x(t)| \leqslant B_0,$
$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant L|t_1 - t_2|\};$$

ж) $\Big\{x \in C[a,b]\colon$
$$x(t) = \int_a^t y(\tau)\,d\tau,\ y \in \widetilde{L}_1[a,b],\ |y(\tau)| \leqslant B\Big\}?$$

6.22. Доказать предкомпактность следующих множеств в пространстве $C[0,1]$ над полем $\mathbb{P} = \mathbb{R}$:

а)✯ $$\left\{x \in C^1[0,1]\colon \int_0^1 (|x'(t)|^2 + |x(t)|^2)\,dt \leqslant B\right\};$$

б) $\Big\{x \in C^1[0,1]\colon$
$$\int_0^1 |x'(t)|^p dt \leqslant 1,\ 1 < p < \infty,\ |x(0)| \leqslant 1\Big\}.$$

6.23. Являются ли следующие множества предкомпактными в пространстве $L_2[0,1]$:

а) $M = \{t^\alpha\}_{\alpha > -\frac{1}{2}}$;

б) $M = \{(\ln t)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$;

в) $M = \Big\{x \in L_2[0,1]\colon$
$$x(t) = \int_0^t y(\tau)\,d\tau,\ \int_0^1 |y(\tau)|^2 d\tau \leqslant 1\Big\}?$$

6.24. Являются ли следующие множества предкомпактными в пространстве $L_2(\mathbb{R})$:

а) $$M = \left\{\frac{1}{1 + (t+\alpha)^2}\right\}_{\alpha \in \mathbb{R}};$$

б) $M = \left\{ \dfrac{|t|^{\beta}}{1+(t+\alpha)^2} \right\}_{|\alpha|<1,\, \beta\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)}$?

6.25. Пусть X – одно из пространств c_0, c, ℓ_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$,

$$M = \left\{ x \in X\colon |\xi_k| \leqslant k^{-\frac{1}{3}} \right\}.$$

Будет ли множество M компактным в X?

6.26. Доказать, что множество

$$M = \left\{ x \in \ell_3\colon \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^3 \ln(k+1) \leqslant 1 \right\}.$$

компактно в пространствах c_0, c, ℓ_p $(3 \leqslant p \leqslant \infty)$.

6.27. Доказать, что множество

$$M = \left\{ x \in \ell_p\colon |\xi_k| \leqslant |\xi_k^0| \right\}$$

компактно в пространствах ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$ $\iff$ $x_0 = \{\xi_k^0\} \in \ell_p$.

6.28. Доказать, что множество

$$M = \left\{ x \in \ell_p\colon \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p |\alpha_k| \leqslant 1,\ \alpha_k \neq 0,\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

компактно в пространствах ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, $\iff$ $\alpha_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$.

6.29. Доказать, что множество M предкомпактно в пространстве s $\iff$

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, C_k > 0 \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M \quad |\xi_k| \leqslant C_k.$$

6.30. Пусть A и B – подмножества нормированного пространства X. Доказать, что а) A и B – компакты $\Rightarrow$ множество $A + B$ – компакт;

б) A и B – предкомпакты $\Rightarrow$ множество $A+B$ – предкомпакт;

в) A – компакт, B замкнуто $\Rightarrow$ множество $A+B$ замкнуто. Будет ли $A+B$ замкнутым, если A и B замкнуты?

6.31. Всегда ли достигается расстояние между точкой и замкнутым множеством в полном нормированном пространстве?

6.32. Пусть A – компактное, а B – замкнутое множества в метрическом пространстве $\langle X, \rho \rangle$ и $A \cap B = \varnothing$. Доказать, что $\rho(A, B) > 0$.

6.33. Пусть A и B – компактные множества в метрическом пространстве, $A \cap B = \varnothing$. Доказать, что расстояние между ними достигается на некоторой паре точек, т. е.

$$\exists\, x \in A,\ y \in B \quad \rho(A, B) = \rho(x, y).$$

6.34. Докажите, что в нормированном пространстве расстояние от точки до любого конечномерного линейного подмножества достигается.

Тема 7. Выпуклые множества, подпространства в нормированных пространствах

Определение 7.1. Множество M называется

✓ *выпуклым* в линейном пространстве, если

$$\forall\ x, y \in M \quad \forall\ \alpha \in (0,1) \quad \alpha x + (1-\alpha)y \in M;$$

✓ *строго выпуклым* в нормированном пространстве, если

$$\forall\ x, y \in M \quad \forall\ \alpha \in (0,1) \quad \alpha x + (1-\alpha)y \in \overset{\circ}{M}.$$

Определение 7.2. Нормированное пространство X называется *строго выпуклым*, если его единичный шар $B[0,1]$ – строго выпуклое множество.

Определение 7.3. Нормированное пространство X называется *строго нормированным*, если в нем

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|, \quad x \neq 0,\ y \neq 0, \quad \Longrightarrow \quad \exists\ \lambda > 0 \quad y = \lambda x.$$

Теорема 7.1. *Нормированное пространство строго нормированно* $\iff$ *оно строго выпукло.*

Определение 7.4. Пусть X – нормированное пространство. Множество $M \subset X$ называется *линейным многообразием*, если

$$\forall\, x, y \in M \quad x + y \in M \quad \text{(линейность)},$$

$$\forall\, x \in M \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{P} \quad \alpha x \in M \quad \text{(однородность)}.$$

Замкнутое линейное многообразие называется *подпространством* X.

Определение 7.5. Пусть M – подмножество линейного пространства X. *Линейной оболочкой* $\langle M \rangle$ множества M называется наименьшее линейное многообразие, содержащее M.

Линейная оболочка любого непустого множества $M \subset X$ обязательно существует и совпадает с пересечением всех линейных многообразий, содержащих M. Линейную оболочку множества M составляет множество всевозможных линейных комбинаций $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ конечных наборов элементов $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset M$ и коэффициентов $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{P}$.

Определение 7.6. Пусть M – подмножество линейного пространства X. *Выпуклой оболочкой* $\operatorname{conv} M$ множества M называется наименьшее выпуклое множество, содержащее M.

Выпуклая оболочка любого непустого множества $M \subset X$ обязательно существует и совпадает с пересечением всех выпуклых множеств, содержащих M. Выпуклую оболочку множества M составляет множество всевозможных выпуклых комбинаций $\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k x_k$ конечных наборов элементов $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset M$ и коэффициентов $\{\theta_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{R}$ таких, что $\theta_k \geqslant 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n,$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k = 1.$

Пример 7.1. Будут ли следующие множества выпуклыми в пространстве $\mathbb{R}^n$:

а) $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|^3 \leqslant 1 \right\}$;

б) $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|^{\frac{1}{3}} \leqslant 1 \right\}$?

Решение. а) Заметим, что

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^3 \right)^{\frac{1}{3}} = \|x\|_{\ell_3^n}.$$

Значит, $M = B[0,1] \subset \ell_3^n$. Покажем, что это выпуклое множество.

Пусть $x', x'' \in M$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда для $x = \alpha x' + (1-\alpha)x''$ имеем

$$\|x\|_{\ell_3^n} = \|\alpha x' + (1-\alpha)x''\|_{\ell_3^n} \leqslant \alpha \|x\|_{\ell_3^n} + (1-\alpha)\|x''\|_{\ell_3^n} \leqslant 1,$$

т. е. $x \in B[0,1]$ и множество M выпукло.

б) Покажем, что множество M не является выпуклым. Возьмем $x' = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $x'' = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Тогда

$$x = \alpha x' + (1-\alpha)x'' = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{2} \right)$$

и

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{2}{3}} > 1,$$

т. е. $x \notin M$, а значит, множество M не выпукло. ✌

Пример 7.2. Будет ли множество

$$M = \left\{ x \in L_2[-1,1] \colon \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[4]{|t|}}\, x(t)\, dt = 0 \right\}$$

подпространством в пространстве

а) $L_2[-1,1]$; б) $L_1[-1,1]$?

Решение. Из включения $L_2[-1,1] \subset L_1[-1,1]$ (см. задачу 2.26) следует, что $M \subset L_2[-1,1] \subset L_1[-1,1]$.

Множество M – линейное многобразие, так как для любых $x_1, x_2 \in M$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{P}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[4]{|t|}}(\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t))dt = 0.$$

Докажем, что множество M замкнуто в пространстве $L_2[-1,1]$ и не замкнуто в пространстве $L_1[-1,1]$.

а) Пусть $\{x_n\} \subset M$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ в пространстве $L_2[-1,1]$. Неравенство Коши – Буняковского дает следующую оценку:

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[4]{|t|}}\, x(t)\, dt\right| = \left|\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[4]{|t|}}\, (x(t) - x_n(t))\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{|t|}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^{1} |x(t) - x_n(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|\frac{1}{\sqrt[4]{|t|}}\right\| \cdot \|x - x_n\|.$$

Следовательно, $x \in M$ и множество M замкнуто в пространстве $L_2[-1,1]$, а значит является подпространством в $L_2[-1,1]$.

б) Рассмотрим последовательность $\{x_n\} \subset M$,

$$x_n(t) = \begin{cases} -|t|^{-\frac{3}{4}}, & t \in \left[-1, -\dfrac{1}{n}\right), \\ 0, & t \in \left[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right], \\ |t|^{-\frac{3}{4}}, & t \in \left(\dfrac{1}{n}, 1\right], \end{cases}$$

и элемент $x(t) = \operatorname{sign} t \cdot |t|^{-\frac{3}{4}} \in L_1[-1,1]$. В пространстве $L_1[-1,1]$

$$\|x_n - x\| = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |t|^{-\frac{3}{4}}\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Однако $x \notin L_2[-1,1]$, а значит, $x \notin M$. Это означает, что множество M не замкнуто, следовательно, оно не является подпространством в $L_1[-1,1]$. ✌

Пример 7.3. Доказать, что пространство $C[a,b]$ не является строго нормированным.

Решение. Достаточно привести пример отрезка $[x_1, x_2]$, который принадлежит единичной сфере $S[0,1]$ пространства $C[a,b]$ (см. задачу 7.15). Рассмотрим две функции:

$$x_1(t) = \frac{t-a}{b-a}, \quad x_2(t) \equiv 1.$$

Обе функции линейные и $x_1(a) = 0$, $x_1(b) = 1$, следовательно, $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, т. е. $x_1, x_2 \in S[0,1]$. Для функции

$$\varphi_\alpha(t) = \alpha x_1(t) + (1-\alpha)x_2(t) = \alpha\,\frac{t-a}{b-a} + (1-\alpha), \quad \alpha \in [0,1],$$

имеем $\varphi_\alpha(a) = 1-\alpha$, $\varphi_\alpha(b) = 1$. Так как φ_α – линейная функция, то $\|\varphi_\alpha\| = 1$. Следовательно, $\varphi_\alpha \in S[0,1]$ для любого $\alpha \in [0,1]$. Значит, $[x_1, x_2] \in S[0,1]$ и пространство $C[a,b]$ не является строго нормированным. ✌

7.1. Доказать, что пересечение любого семейства выпуклых множеств из линейного пространства – выпуклое множество. Является ли выпуклым объединение двух выпуклых множеств?

7.2. Пусть $\{M_k\}_{k=1}^n$ – семейство выпуклых множеств из линейного пространства над полем $\mathbb{P}$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{P}$. Доказать, что множество

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k M_k$$

выпукло.

7.3. Множество $x_0 + L$, где L – линейное многообразие из линейного пространства, называется *афинным многообразием.* Доказать, что всякое афинное многообразие является выпуклым множеством. Будет ли оно линейным многообразием?

7.4. Доказать, что замыкание выпуклого множества из нормированного пространства – выпуклое множество. Является ли замкнутой выпуклая оболочка замкнутого множества?

7.5. Доказать, что внутренность выпуклого множества из нормированного пространства выпукла.

7.6. Доказать, что шары $B[x_0, r]$, $B(x_0, r)$ из нормированного пространства выпуклы. Будет ли выпуклым множеством сфера $S[x_0, r]$?

7.7. Доказать, что аксиома треугольника в определении нормы эквивалентна выпуклости шара $B[0, 1]$.

7.8. В пространстве ℓ_1 найти плотное выпуклое множество, не совпадающее с ℓ_1.

7.9. Будут ли следующие множества выпуклыми в вещественном пространстве $C[a, b]$:

а) алгебраические многочлены степени точно n;

б) алгебраические многочлены степени не выше n;

в) непрерывные возрастающие функции;

г) непрерывные монотонные функции;

д) $M = \{x \in C[a, b]\colon \ \|x\|^p_{L_p[a,b]} \leqslant r\}$;

е) $M = \{x \in C[a, b]\colon x(t) < x_0(t), \ t \in [a, b]\}$, где x_0 – некоторая функция из $C[a, b]$?

7.10. Доказать, что следующие множества являются выпуклыми в пространстве ℓ_2:

а) параллелепипед

$$\{x = \{\xi_k\} \in \ell_2\colon |\xi_k| \leqslant \alpha_k, \ \{\alpha_k\} \in \ell_2\};$$

б) эллипсоид

$$\left\{x \in \ell_2\colon \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\xi_k}{\alpha_k}\right|^2 \leqslant 1,\ \{\alpha_k\} \in \ell_\infty,\ \alpha_k \neq 0\right\}.$$

Компактны ли они?

7.11. Пусть X_0 – конечномерное линейное подмножество в нормированном пространстве X. Доказать, что X_0 – подпространство в X.

7.12. Пусть L_1, L_2 – подпространства в нормированном пространстве X, причем L_1 конечномерно. Доказать, что множество $L_1 + L_2$ является подпространством в X.

7.13. Будут ли следующие множества подпространствами в пространстве $C[-1,1]$ над полем $\mathbb{R}$:

а) монотонные функции из $C[-1,1]$;

б) четные функции из $C[-1,1]$;

в) алгебраические многочлены степени не выше n;

г) алгебраические многочлены;

д) непрерывно дифференцируемые функции;

е) $\{x \in C[-1,1]\colon x(0) = 0\}$;

ж) $\left\{x \in C[-1,1]\colon \displaystyle\int_{-1}^{1} x(t)\,dt = 0\right\}$;

з) $\left\{x \in C[-1,1]\colon \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x(t)}{t}\,dt = 0\right\}$;

и)✯ $\Big\{x \in C[-1,1]\colon \exists\, B_x > 0\ \forall\, t_1, t_2 \in [-1,1]$

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant B_x |t_1 - t_2|^{\alpha}\Big\}$$

для некоторого $0 < \alpha \leqslant 1$?

7.14. Будет ли множество M подпространством в пространстве X, если а)✯ $M = \left\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_p \colon \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0 \right\}$,

$X = \ell_p,\ p = 1,\ p = 2,\ p = \infty$;

б) $M = c_0,\ X = c$;

в) $M = c,\ X = \ell_\infty$;

г) $M = \ell_1,\ X = c_0$;

д) $M = \left\{ x = \{\xi_k\}_{k=1}^{n} \colon \xi_k \geqslant 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n \right\},\ X = \ell_2^n$;

е) $M = \left\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, \xi_k = c \right\},\ X = \ell_2$;

ж) $M = L_q[a,b],\ X = L_p[a,b],\ 1 \leqslant p < q < \infty$?

7.15. Доказать, что нормированное пространство является строго нормированным $\Longleftrightarrow$ сфера $S[0,1]$ не содержит никакого отрезка.

7.16. Покажите, что пространства $\ell_p^n,\ \ell_p,\ L_p[a,b]$ – строго нормированные пространства при $1 < p < \infty$ и не являются строго нормированными, если $p = 1$ или $p = \infty$.

7.17. Покажите, что пространства $c_0,\ c,\ C[a,b], C^k[a,b]$ не являются строго нормированными.

7.18. Пусть X – строго выпуклое нормированное пространство, множество $M \subset X$ выпукло, $x_0 \in X \setminus M$ и

$$N = \{x \in M \colon \rho(x_0, M) = \rho(x_0, x)\} \neq \varnothing.$$

Доказать, что мощность множества N равна единице.

7.19. Привести пример нормированного пространства X, выпуклого множества $M \subset X$ и точки $x_0 \in X \setminus M$ таких, что расстояние от точки x_0 до множества M реализуется неединственным образом.

7.20. Достигается ли расстояние от элемента x_0 до множества M, а если достигается, то будет ли ближайший элемент единственным?

а) $X = C[-1,1],\ x_0(t) = 1,$

$M = \{x \in C[-1,1] \colon x(0) = 0\}$;

б) $X = \widetilde{L}_2[-1,1],\ x_0(t) = 1,$

$M = \left\{x \in \widetilde{L}_2[-1,1] \colon x(0) = 0\right\}$;

в) $X = L_2[-1,1],\ x_0(t) = e^t,$

$$M = \left\{x \in L_2[-1,1] \colon x(t) = \sum_{k=1}^{10} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)\right\};$$

г) $X = \ell_1^2,\ x_0 = (1,0),$

$M = \left\{x = (\xi_1, \xi_2) \in \ell_1^2 \colon \xi_1 = 0\right\}$;

д) $X = \ell_1^2,\ x_0 = (1,0),$

$M = \left\{x = (\xi_1, \xi_2) \in \ell_1^2 \colon \xi_1 = \xi_2\right\}$.

7.21. Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ – эквивалентные нормы на линейном пространстве X, пространство X строго выпукло в смысле одной из этих норм. Будет ли оно строго выпукло в смысле другой?

Тема 8. Евклидовы и гильбертовы пространства

Определение 8.1. Пусть X – линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Отображение $(\cdot,\cdot)\colon X^2 \to \mathbb{P}$ называется *скалярным произведением* на X, если

1) $\forall\, x \in X \quad (x,x) \geqslant 0$;

2) $(x,x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$;

3) $\forall\, x,y,z \in X \quad \forall\, \lambda,\mu \in \mathbb{P} \quad (\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z)$ (линейность по первому аргументу);

4) $\forall\, x,y \in X \quad (x,y) = \overline{(y,x)}$ (здесь черта означает комплексное сопряжение).

Определение 8.2. Линейное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым пространством.*

Теорема 8.1. *Для любых двух элементов x, y евклидова пространства X выполняется неравенство Коши–Буняковского*

$$|(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)};$$

выражение $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ задает норму на X.

Определение 8.3. Полное евклидово пространство называется *гильбертовым пространством.*

Определение 8.4. Пусть X – нормированное пространство.

✓ Система векторов $\{e_\alpha\} \subset X$ называется *нормированной*, если

$$\forall\ \alpha \quad \|e_\alpha\| = 1.$$

✓ Система векторов $\{e_\alpha\} \subset X$ называется *полной* в X, если $\overline{\langle\{e_\alpha\}\rangle} = X$.

✓ Система векторов $\{e_\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ в бесконечномерном нормированном пространстве X называется *базисом*, если

$$\forall\ x \in X \quad \exists!\ \{\lambda_n\} \subset \mathbb{P}: \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n.$$

Определение 8.5. Пусть X – евклидово пространство. Говорят, что элементы $x, y \in X$ *ортогональны*, и пишут $x \perp y$, если $(x, y) = 0$. Множество элементов, ортогональных множеству $M \subset X$, обозначают $M^\perp$, т. е.

$$M^\perp = \{x \in X : \forall\ y \in M \quad x \perp y\}.$$

Если $x \in M^\perp$, пишут также $x \perp M$.

Если M – подпространство X, то множество $M^\perp$ называют *ортогональным дополнением* M *(до* X*)*.

Определение 8.6. Пусть X – евклидово пространство.

✓ Система векторов $\{e_\alpha\} \subset X$ называется *ортогональной*, если

$$\forall\ \alpha, \beta \quad (\alpha \neq \beta \implies e_\alpha \perp e_\beta).$$

✓ Система векторов $\{e_\alpha\} \subset X$ называется *ортонормированной*, если она ортогональная и нормированная, т. е.

$$\forall\, \alpha, \beta \quad (e_\alpha, e_\beta) = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta; \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Таким образом, если $\{e_\alpha\}$ – ортогональная система и все $e_\alpha \neq 0$, то $\left\{\dfrac{e_\alpha}{\|e_\alpha\|}\right\}$ – ортонормированная система.

✓ Система векторов $\{e_\alpha\} \subset X$ называется *тотальной*, если

$$(\forall\ \alpha\ \ x \perp e_\alpha) \implies x = 0.$$

Теорема 8.2 (теорема Шмидта об ортогонализации). *Для любой счетной линейно независимой системы векторов $\{x_n\}$ в евклидовом пространстве X существует ортонормированная система векторов $\{e_n\}$ такая, что*

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle.$$

Ортогонализация проводится по следующей схеме. Полагаем $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$. Если построены элементы $e_1, \ldots, e_n$, то

$$\widetilde{e}_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (x_{n+1}, e_k) e_k, \quad e_{n+1} = \frac{\widetilde{e}_{n+1}}{\|\widetilde{e}_{n+1}\|}.$$

Определение 8.7. Пусть M – линейное многообразие в евклидовом пространстве X. *Ортогональной проекцией вектора x на M* называется вектор $y \in M$ такой, что $(x - y) \perp M$. Ортогональную проекцию x на M будем обозначать $\mathrm{Pr}_M\,(x)$.

Определение 8.8. Пусть $\langle X, \rho \rangle$ – метрическое пространство, $x \in X$ и $M \subset X$. Величина

$$\rho(x, M) = \inf\{\rho(x, y) \colon y \in M\}$$

называется *расстоянием от элемента x до множества M* или *наилучшим приближением элемента x множеством M*. Если существует элемент $y \in M$ такой, что $\rho(x, y) = \rho(x, M)$, то говорят, что расстояние от x до M *достигается*, а y называют *элементом наилучшего приближения элемента x множеством M*.

Теорема 8.3. *Если M – конечномерное подпространство евклидова пространства X, то для любого $x \in X$ существует элемент наилучшего приближения $y \in M$; при этом $y = \mathrm{Pr}_M\,(x)$.*

Теорема 8.4. *Если M – подпространство гильбертова пространства X, то для любого $x \in X$ существует элемент наилучшего приближения $y \in M$; при этом $y = \mathrm{Pr}_M\,(x)$.*

Определение 8.9. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в евклидовом пространстве X. *Рядом Фурье элемента $x \in X$* (*по ортонормированной системе $\{e_n\}$*) называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\, e_n, \quad \text{где} \quad c_n(x) = (x, e_n).$$

Теорема 8.5 (экстремальное свойство коэффициентов ряда Фурье). *Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в евклидовом пространстве X, то*

$$\widehat{x}_m = \sum_{n=1}^{m} c_n(x)\, e_n = \mathrm{Pr}_{\langle e_1, e_2, \ldots, e_m\rangle}\,(x).$$

Таким образом, $\widehat{x}_m$ – элемент наилучшего приближения вектора x элементами из $\langle e_1, e_2, \ldots, e_m\rangle$.

Теорема 8.6. *Если M – подпространство гильбертова пространства X, то $X = M \oplus M^{\perp}$.*

Теорема 8.7. *Пусть $\{e_n\}$ – счетная ортонормированная система в евклидовом пространстве. Следующие условия эквивалентны*:

1) $\{e_n\}$ *замкнута, т. е.* $\forall\ x \in X \quad \|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$;

2) $\{e_n\}$ *– базис в* X*;*

3) $\{e_n\}$ *полна в* X*.*

Утверждение 8.1. *В любом евклидовом пространстве существуют максимальные* (*по включению*) *ортонормированные системы.*

Теорема 8.8 [1, с. 65, теорема 2.7.1]. *Пусть* $\{e_\gamma\}$ *– максимальная ортонормированная система в гильбертовом пространстве* X*. Тогда*

1) $\{e_\gamma\}$ *– тотальная в* X (*и, следовательно, полная*);

2) $\forall\ x \in X$ *множество* $\Gamma(x) = \{\gamma\colon (x, e_\gamma) \neq 0\}$ *не более чем счетно*;

3) $\forall\ x \in X \quad x = \sum_{\gamma \in \Gamma(x)} (x, e_\gamma) e_\gamma$.

Замечание. Теорема 8.8 позволяет назвать максимальную ортонормированную систему $\{e_\gamma\}$ в гильбертовом пространстве X базисом.

Пример 8.1. В пространстве ℓ_2 найти ортогональное дополнение до подпространства

$$L = \Big\{x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \xi_1 - 2\xi_3 + 3\xi_4 = 0\Big\},$$

ортогональную проекцию элемента $x_0 = \left\{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ на L, расстояние от x_0 до L и до $L^\perp$.

Решение. Из определения подпространства L следует, что

$$L = \{z_0\}^\perp, \quad \text{где} \quad z_0 = (1, 0, -2, 3, 0, 0, \ldots).$$

Докажем, что $L^\perp = \langle z_0 \rangle$. Используя задачу 8.16, получаем, что $\{z_0\}^\perp = \overline{\langle z_0 \rangle}^\perp$. Так как одномерное линейное множество замкнуто в пространстве ℓ_2, то (см. задачу 8.21)

$$L^\perp = \{z_0\}^{\perp\perp} = \overline{\langle z_0 \rangle}^{\perp\perp} = \overline{\langle z_0 \rangle} = \langle z_0 \rangle.$$

Найдем ортогональную проекцию элемента x_0 на L. Заметим, что L – подпространство в ℓ_2 (см. задачу 8.13). Значит, $\ell_2 = L \oplus L^\perp = L \oplus \langle z_0 \rangle$, а $x_0 = y + z$, где $y \in L, z \in \langle z_0 \rangle$. Следовательно,

$$\mathrm{Pr}_L\,(x_0) = y = x_0 - \alpha z_0.$$

Чтобы найти α, запишем скалярное произведение

$$0 = (y, z_0) = (x_0, z_0) - \alpha(z_0, z_0),$$

отсюда

$$\alpha = \frac{(x_0, z_0)}{(z_0, z_0)} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{14} = -\frac{1}{63}.$$

Итак,

$$\mathrm{Pr}_L\,(x_0) = \left\{ \left(-\frac{1}{3} \right)^k \right\}_{k=1}^\infty + \frac{1}{63}(1, 0, -2, 3, 0, 0, \ldots).$$

Для нахождения $\rho(x_0, L)$ применим теорему Пифагора (см. задачу 8.12 «а»): $\|x_0\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$. Так как

$$\|x_0\|^2 = \frac{1}{8}, \quad \|z\|^2 = \|\alpha z_0\|^2 = \frac{1}{63^2} \cdot 14 = \frac{2}{567},$$

то

$$\rho(x_0, L) = \|z\| = \sqrt{\frac{2}{567}},$$

$$\rho(x_0, L^\perp) = \|y\| = \sqrt{\|x_0\|^2 - \|z\|^2} = \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{2}{567}} = \frac{1}{18}\sqrt{\frac{551}{14}}. \quad ✌$$

Пример 8.2. В пространстве $L_2[-1,1]$ найти элемент наилучшего приближения для $x(t) = 1 + t^{-\frac{1}{3}}$ подпространством $L = \langle t, t^2, t^3 \rangle$.

Решение. Множество L – подпространство гильбертова пространства $L_2[-1,1]$, поэтому по теореме 8.3 существует $y \in L$ – элемент наилучшего приближения вектора x элементами из L и $y = Pr_L(x)$. Ортонормируем линейно независимую систему $\{t, t^2, t^3\}$ в пространстве $L_2[-1,1]$. Новую систему обозначим $\{e_1, e_2, e_3\}$. Тогда $L = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ и по теореме 8.5

$$y = \mathrm{Pr}_L\,(x) = \sum_{k=1}^{3} (x, e_k) e_k.$$

Найдем y. Пусть $x_k(t) = t^k$, $k = 1, 2, 3$. Элементы x_1 и x_2 ортогональны. Подберем $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ так, чтобы элемент $\widetilde{x}_3 = x_3 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ был ортогонален x_1 и x_2, т. е. чтобы выполнялись соотношения

$$0 = (\widetilde{x}_3, x_1) = \int_{-1}^{1} (t^3 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2)\, t\, dt = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\,\alpha_1,$$

$$0 = (\widetilde{x}_3, x_2) = \int_{-1}^{1} (t^3 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2)\, t^2\, dt = \frac{2}{5}\,\alpha_2.$$

Отсюда $\alpha_1 = -\dfrac{3}{5}$, $\alpha_2 = 0$ и $\widetilde{x}_3 = t^3 - \dfrac{3}{5}\,t$. Система функций $\{x_1, x_2, \widetilde{x}_3\}$ ортогональна. Чтобы нормировать ее, вычислим нормы:

$$\|x_1\| = \left(\int_{-1}^{1} t^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \|x_2\| = \left(\int_{-1}^{1} t^4\, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}},$$

$$\|\widetilde{x}_3\| = \left(\int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{3}{5}\, t \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

В результате отсюда получаем ортонормированную систему $\{e_1, e_2, e_3\}$, где

$$e_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t, \quad e_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}\, t^2, \quad e_3 = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}} \left(t^3 - \frac{3}{5}\, t \right).$$

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$(x, e_1) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} \left(1 + t^{-\frac{1}{3}} \right) t\, dt = \frac{6}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}\,,$$

$$(x, e_2) = \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^{1} \left(1 + t^{-\frac{1}{3}} \right) t^2\, dt = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}\,,$$

$$(x, e_3) = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}} \int_{-1}^{1} \left(1 + t^{-\frac{1}{3}} \right) \left(t^3 - \frac{3}{5} t \right) dt = -\frac{24}{55}\sqrt{\frac{7}{2}}\,.$$

Итак,

$$y = \frac{9}{5}\, t + \frac{5}{3}\, t^2 - \frac{42}{11} \left(t^3 - \frac{3}{5}\, t \right) = \frac{45}{11}\, t + \frac{5}{3}\, t^2 - \frac{42}{11}\, t^3.$$ ✌

☞ В евклидовом пространстве проверить тождества 8.1–8.3.

8.1. Равенство параллелограмма

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

8.2. $4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$, если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$.

8.3. Полярное тождество

$$4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\, \|x + iy\|^2 - i\, \|x - iy\|^2\,,$$

если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$.

☞ Доказать утверждения 8.4–8.7.

8.4. ✯ В нормированном пространстве X можно ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой в X, т. е. такое, что $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in X$ выполняется равенство параллелограмма (см. задачу 8.1).

8.5. Скалярное произведение в евклидовом пространстве непрерывно по совокупности переменных.

8.6. Пусть X – евклидово пространство, последовательности $\{x_n\}, \{y_n\} \subset B[0,1] \subset X$ таковы, что $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Тогда $\|x_n - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

8.7. Евклидово пространство является строго нормированным.

8.8. Проверить, что следующие линейные пространства над полем $\mathbb{P}$ являются гильбертовыми:

а) ℓ_2^n, если $(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k$;

б) ℓ_2, если $(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k$;

в) $L_2[a,b]$, если $(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$;

г) $L_2(\mathbb{R})$, если $(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)}\,dt$;

д) H_c – линейное пространство функций, определенных на $\mathbb{R}$, отличных от нуля на не более чем счетном множестве точек и таких, что $\sum\limits_t |x(t)|^2 < \infty$ со скалярным произведением $(x,y) = \sum\limits_t x(t)\overline{y(t)}$.

8.9. Доказать, что пространство H_c (см. задачу 8.8) несепарабельно.

8.10. Показать, что в нормированных пространствах c_0, c, $C[a,b]$, ℓ_p^n, ℓ_p, $L_p[a,b]$, $L_p(\mathbb{R})$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $p \neq 2$, нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормами этих пространств.

8.11. Доказать, что следующие линейные пространства над полем $\mathbb{P}$ являются евклидовыми, но не гильбертовыми:

а) пространство непрерывных на $[a,b]$ функций со скалярным произведением

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt;$$

б) пространство суммируемых по модулю последовательностей со скалярным произведением

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\,\overline{\eta_k};$$

в) $\widetilde{W}_2^1[a,b]$ – пространство непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций со скалярным произведением

$$(x,y) = \int_a^b \left(x(t)\,\overline{y(t)} + x'(t)\,\overline{y'(t)}\right)\,dt.$$

8.12. Пусть X – евклидово пространство, $x, y \in X$. Доказать, что

а) если $x \perp y$, то $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (теорема Пифагора);

б) если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, то справедлива теорема, обратная теореме Пифагора;

в) если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, то теорема, обратная теореме Пифагора, несправедлива;

г) если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, то $x \perp y$ тогда и только тогда, когда $\|\lambda x + \mu y\|^2 = \|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

☞ Пусть X – евклидово пространство, $M, N \subset X$. Доказать утверждения 8.13–8.17.

8.13. $M^{\perp}$ – подпространство в X.

8.14. Если $M \subset N$, то $M^{\perp} \supset N^{\perp}$.

8.15. $M \subset M^{\perp\perp}$ и $M^{\perp} = M^{\perp\perp\perp}$.

8.16. $M^{\perp} = \overline{\langle M \rangle}^{\perp}$.

8.17. Пусть $\overline{\langle M \rangle} = X$. Тогда из условия $x \perp M$ следует, что $x = 0$.

8.18. Пусть X – гильбертово пространство, $M \subset X$. Доказать, что $\overline{\langle M \rangle} = X$ тогда и только тогда, когда $M^{\perp} = \{0\}$.

8.19. ✯ Пусть X – неполное евклидово пространство. Показать, что из равенства $M^{\perp} = \{0\}$, вообще говоря, не следует, что $\overline{\langle M \rangle} = X$.

8.20. ✯ Доказать, что всякое неполное евклидово пространство X содержит подпространство X_0 такое, что $X_0 \neq X$ и $X_0^{\perp} = \{0\}$.

8.21. Пусть X – гильбертово пространство, $M \subset X$. Доказать, что $M^{\perp\perp} = \overline{\langle M \rangle}$.

8.22. ✯ Привести пример евклидова пространства X и множества $M \subset X$, для которого $M^{\perp\perp} \neq \overline{\langle M \rangle}$.

8.23. Пусть M и N – подпространства в гильбертовом пространстве X, $M \perp N$. Доказать, что $M + N$ – подпространство в X.

8.24. Найти замыкание множества M в пространстве $L_2[-1,1]$, если

а) $M = \langle \{t^{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}} \rangle$; б) $M = \langle \{t^{2k-2}\}_{k\in\mathbb{N}} \rangle$.

8.25. В пространстве ℓ_2 рассмотрим подпространства

$$M = \Big\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon x = (\xi_1, 0, \xi_3, 0, \xi_5, 0, \ldots) \Big\},$$

$$N = \left\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon x = \left(\xi_1, \xi_1, \xi_3, \frac{\xi_3}{3}, \xi_5, \frac{\xi_5}{5}, \ldots \right) \right\}.$$

Показать, что $\overline{M+N} = \ell_2$, но $M + N \neq \ell_2$, т. е. множество $M + N$ не является подпространством в ℓ_2.

8.26. В пространстве $L_2[0,1]$ найти $M^\perp$, если M – множество

а) многочленов от t;

б) многочленов от t^2;

в) алгебраических многочленов с нулевым свободным членом;

г) алгебраических многочленов с нулевой суммой коэффициентов;

д) функций из пространства $L_2[0,1]$, которые равны нулю почти всюду на отрезке $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$;

е) функций $x \in L_2[0,1]$ таких, что $\displaystyle\int_0^1 x(t)\,dt = 0$.

8.27. В пространстве $\widetilde{L}_2[-1,1]$ найти $M^\perp$, если M – множество функций из $\widetilde{L}_2[-1,1]$, равных нулю

а) при $t \leqslant 0$; б) при $t = 0$.

8.28. В пространстве ℓ_2 найти $M^\perp$, если

а) $M = \left\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \sum\limits_{k=1}^{10} \xi_k = 0 \right\}$;

б) $\quad M = \Big\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon$

$$\xi_2 - 3\xi_3 - \xi_5 = 0,\ \xi_1 + 2\xi_2 + 4\xi_3 = 0 \Big\};$$

в) $\quad M = \Big\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0 \Big\};$

г) ✯ $M = \Big\{ x_n = \Big(1, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{2n}}, \frac{1}{2^{3n}}, \ldots\Big),\ n \in \mathbb{N} \Big\}.$

8.29. Пусть H_0 – подпространство в гильбертовом пространстве H, $x \in H$ и $x = y + z$, где $y \in H_0$, $z \in H_0^{\perp}$. Доказать, что

$$\rho(x, H_0) = \rho(x, y) = \|z\|,$$

$$\rho(x, H_0^{\perp}) = \rho(x, z) = \|y\|.$$

8.30. Пусть H_0 – одномерное подпространство в гильбертовом пространстве H, $x_0 \in H_0$, $x_0 \neq 0$. Доказать, что для любого $x \in H$

$$\rho(x, H_0^{\perp}) = \frac{|(x, x_0)|}{\|x_0\|}.$$

8.31. В пространстве $L_2[0,1]$ найти $\rho(x, H_1)$, если $x(t) = t^2$,

$$H_1 = \Big\{ x \in L_2[0,1] \colon \int_0^1 x(t)\,dt = 0 \Big\}.$$

8.32. В пространстве ℓ_2 найти $\rho(x, H_1)$, если $x = (1, 0, 0, \ldots)$,

$$H_1 = \Big\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \sum_{k=1}^{10} \xi_k = 0 \Big\}.$$

8.33. Найти ортогональную проекцию элемента

$$x_0 = \left\{ \frac{1}{k} \right\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$$

на подпространство L, а также расстояния $\rho(x_0, L)$ и $\rho(x_0, L^{\perp})$, если а) $L = \Big\{x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \xi_1 - 3\xi_3 + \xi_5 = 0\Big\}$;

б) $L = \langle x_1, x_2, x_3\rangle$, где

$$x_1 = (1, 0, -1, 0, 0, \ldots),$$
$$x_2 = (0, 1, 0, -1, 0, 0, \ldots),$$
$$x_3 = (0, 0, 1, 0, -1, 0, 0, \ldots).$$

8.34. В пространстве $L_2[-1, 1]$ построить ортогональную проекцию элемента $x \in L_2[-1, 1]$ на подпространство четных функций.

8.35. Для $x \in L_2[-1, 1]$ найти многочлен наилучшего приближения $p \in P_n,\ n = 0, 1, 2$, если

а) $x(t) = e^t$; б) $x(t) = t^3$.

8.36. ✯ Построить пример евклидова пространства X, линейного многообразия $L \subset X$ и элемента $x \in X$, для которых не существует ортогональной проекции x на L.

8.37. Доказать, что в сепарабельном евклидовом пространстве всегда существует ортонормированный базис.

8.38. Доказать, что во всяком гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис.

8.39. Найти ортонормированный базис в пространстве H_c (см. задачу 8.8 «д»).

☞ Доказать утверждения 8.40–8.46.

8.40. Система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \left\{\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \left\{\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

является ортонормированным базисом в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$.

8.41. Система функций $\{\cos nt\}_{n=0}^{\infty}$ является ортогональным базисом в пространстве $L_2[0,\pi]$ над $\mathbb{R}$. Замыкание в $L_2[-\pi,\pi]$ множества $\langle\{\cos nt\}_{n=0}^{\infty}\rangle$ есть множество четных функций в $L_2[-\pi,\pi]$.

8.42. Система функций $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ является ортогональным базисом в пространстве $L_2[0,\pi]$ над $\mathbb{R}$. Замыкание в $L_2[-\pi,\pi]$ множества $\langle\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}\rangle$ есть множество нечетных функций в $L_2[-\pi,\pi]$.

8.43. В пространстве $L_2[a,b]$ над полем $\mathbb{P}=\mathbb{R}$ есть ортонормированные базисы, состоящие из

а) алгебраических многочленов;

б) ступенчатых функций;

в) тригонометрических многочленов;

г) функций, лежащих в заданном плотном в $L_2[a,b]$ линейном многообразии.

8.44. Система функций $\left\{e^{2\pi int}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является ортонормированным базисом в пространстве $L_2[0,1]$ над $\mathbb{C}$.

8.45. Ортогональное дополнение к системе функций $\left\{e^{2\pi int}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $L_2[a,b]$ над $\mathbb{C}$

1) состоит из нуля при $|a-b|\leqslant 1$;

2) отлично от нуля при $|a-b|>1$.

8.46. На отрезке $[0,1]$ рассмотрим систему функций Радемахера

$$x_0(t)=1,\quad x_n(t)=\begin{cases}(-1)^k, & t\in\left(\dfrac{k}{2^n},\dfrac{k+1}{2^n}\right),\\[2mm] 0, & t=\dfrac{k}{2^n},\end{cases}$$

если $n\in N$, $k=0,1,2,2^2,\ldots,2^{n-1}$. Эта система ортонормирована в пространстве $L_2[0,1]$, но не является базисом.

8.47. Показать, что система *многочленов Лежандра*

$$p_n(t) = c_n \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n, \quad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots,$$

получающаяся при ортогонализации системы функций $1, t, t^2, \ldots$ в пространстве $L_2[-1,1]$, является ортогональным базисом в пространстве $L_2[-1,1]$.

8.48. В пространстве $L_2[-1,1]$ найти $M^\perp$, если $M = \{\cos \pi t, t\}$.

8.49. В линейном пространстве функций, измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}$ и таких, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} |x(t)|^2 dt$$

конечен, положим

$$(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} x(t)\, y(t)\, dt.$$

Полученное пространство $L_{2,q}(\mathbb{R})$ будет гильбертовым с весом $q(t) = e^{-t^2}$. Ортогонализация системы функций $1, t, t^2, \ldots$ в пространстве $L_{2,q}(\mathbb{R})$ с весом $q(t)$ дает систему многочленов Чебышева–Эрмита, полную в $L_{2,q}(\mathbb{R})$. Найти первые три многочлена этой системы.

8.50. В линейном пространстве функций, измеримых по Лебегу на $[0,+\infty)$ и таких, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} |x(t)|\, dt$$

конечен, положим

$$(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-t} x(t)\, y(t)\, dt.$$

Полученное пространство $L_{2,p}(0,+\infty)$ будет гильбертовым с весом $p(t) = e^{-t}$. Ортогонализация системы функций $1, t, t^2, \ldots$ в пространстве $L_{2,p}(0,+\infty)$ с весом $p(t) = e^{-t}$ дает систему многочленов Чебышева–Лагерра, полную в $L_{2,p}(0,+\infty)$. Найти первые три многочлена этой системы.

Тема 9. Функционалы и операторы в линейных нормированных пространствах

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{P}$. Отображение A, действующее из пространства X в пространство Y, называют *оператором*, а если $Y = \mathbb{P}$, то A называют *функционалом.* Через $D(A)$ будем обозначать область определения A и сокращенно писать $A\colon D(A) \subset X \to Y$; если $D(A) = X$, будем писать $A\colon X \to Y$.

Определение 9.1. Оператор (функционал) A называется

✓ *непрерывным в точке* $x_0 \in D(A)$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, x \in D(A) \quad \|x - x_0\|_X < \delta \;\Rightarrow\; \|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon;$$

✓ *непрерывным*, если он непрерывен в каждой точке $D(A)$;

✓ *ограниченным*, если A переводит каждое ограниченное множество из $D(A)$ в ограниченное;

✓ *линейным*, если $D(A)$ – линейное многообразие и для любых $x_1, x_2 \in D(A)$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{P}$

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2.$$

Теорема 9.1. *Оператор (функционал) A непрерывнен в точке $x_0 \in D(A)$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\} \subset D(A)$*

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \quad \Longrightarrow \quad Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax_0.$$

Теорема 9.2. *Для линейного оператора A следующие условия эквивалентны:*

1) *A непрерывен;*

2) *A непрерывен в точке $x = 0$;*

3) *A ограничен;*

4) *существует $K > 0$ такое, что $\|Ax\| \leqslant K\|x\|$ для всех $x \in D(A)$.*

Теорема 9.3 (неравенство Гельдера). *Пусть числа $p, q \in (1, \infty)$ являются сопряженными показателями, т. е. связаны соотношением $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Тогда для любых функций $f \in L_p(E)$, $g \in L_q(E)$ их произведение fg суммируемо ($fg \in L(E)$) и имеет место неравенство Гельдера*

$$\left| \int\limits_E f(x)g(x)\,dx \right| \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, неравенство Гельдера обращается в равенство тогда и только тогда, когда функции f и g удовлетворяют хотя бы одному из следующих двух условий:

(Γ') *существует константа C_1 такая, что*

$$f = C_1 |g|^{q-1} \operatorname{sign} g \quad \textit{п. в.} \quad \textit{на} \quad E;$$

(Γ'') *существует константа C_2 такая, что*

$$g = C_2 |f|^{p-1} \operatorname{sign} f \quad \textit{п. в.} \quad \textit{на} \quad E.$$

Множество линейных непрерывных операторов, определенных на X со значениями в Y, будем обозначать $\mathcal{L}(X,Y)$. Если $Y = X$, то будем кратко писать $\mathcal{L}(X)$ вместо $\mathcal{L}(X,X)$. Отметим, что $\mathcal{L}(X,Y)$ есть линейное пространство над $\mathbb{P}$. Пространство $\mathcal{L}(X,\mathbb{P})$ линейных непрерывных функционалов на X называется *сопряженным к пространству* X и обозначается X^*.

Пример 9.1. Пусть оператор $A\colon C^1[a,b] \to C[a,b]$ действует по правилу

$$(Ax)(t) = x(a) + x'(a)(t-a).$$

Проверить, является ли A линейным, ограниченным, непрерывным?

Решение. Линейность A легко проверить по определению. По теореме 9.2 свойства ограниченности и непрерывности для A эквивалентны, поэтому достаточно проверить лишь одно из них. В данном случае проще исследовать A на ограниченность.

Пусть E – произвольное ограниченное множество из $D(A) = C^1[a,b]$. Докажем, что множество $A(E) = \{Ax : x \in E\}$ также ограничено.

Ограниченность E означает, что найдется число K такое, что для всех $x \in E$ $\|x\| \leqslant K$, т. е. в данном случае

$$\|x\| = \|x\|_{C^1[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| \leqslant K. \tag{9.1}$$

Используя неравенство (9.1), оценим $\|Ax\|$. По условию

$$\|Ax\| = \|Ax\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |(Ax)(t)| = \max_{t\in[a,b]} |x(a) + x'(a)(t-a)|.$$

Для любого $t \in [a,b]$ справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned}
|x(a) + x'(a)(t-a)| &\leqslant |x(a)| + |x'(a)||t-a| \leqslant \\
&\leqslant |x(a)| + |x'(a)|(b-a) \leqslant \\
&\leqslant \max\{1, b-a\} \cdot (|x(a)| + |x'(a)|) \leqslant \\
&\leqslant \max\{1, b-a\} \cdot \max_{t\in[a,b]} \{|x(t)| + |x'(t)|\} \leqslant \\
&\leqslant \max\{1, b-a\} \cdot \|x\| \leqslant \max\{1, b-a\} \cdot K.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\|Ax\| = \max_{t\in[a,b]} |x(a) + x'(a)(t-a)| \leqslant \max\{1, b-a\} \cdot K.$$

Следовательно, множество $A(E)$ ограничено.

Итак, оператор A – линейный, ограниченный и непрерывный. ✌

Пример 9.2. Функционал $f\colon \widetilde{L}_2[0,1] \to \mathbb{R}$ действует по правилу

$$f(x) = |x(1)|.$$

Проверить, является ли f линейным, ограниченным, непрерывным?

Решение. Очевидно, f не является линейным, поскольку если $\lambda < 0$ и $x(1) \neq 0$, то $f(\lambda x) = |\lambda x(1)| \neq \lambda |x(1)| = \lambda f(x)$.

1. Докажем сначала, что f разрывен в точке $x_0(t) \equiv 0$. Поскольку $f(x_0) = |x_0(1)| = 0$, мы должны построить последовательность функций $\{x_n\} \subset \widetilde{L}_2[0,1]$ такую, что $\|x_n - x_0\| \to 0$, а $f(x_n) = |x_n(1)| \not\to 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим последовательность

$$x_n(t) = t^n, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Ясно, что $f(x_n) = 1$. С другой стороны,

$$\|x_n\| = \|x_n\|_{\widetilde{L}_2[0,1]} = \left(\int_0^1 t^{2n}\, dt\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, f терпит разрыв в точке x_0, а значит, не является непрерывным на всем пространстве $\widetilde{L}_2[0,1]$.

Докажем, что f не является непрерывным в любой другой точке из $\widetilde{L}_2[0,1]$. Для этого рассмотрим последовательность

$$\widetilde{x}_n(t) = x_0(t) + (-1)^n t^n.$$

Имеем

$$\|\widetilde{x}_n - x_0\| = \|(-1)^n t^n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

а

$$f(\widetilde{x}_n) = |x_0(1) + (-1)^n| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f(x_0) = |x_0(1)|.$$

2. Докажем теперь, что f не ограничен. Для этого модифицируем последовательность $\{x_n\}$ следующим образом:

$$\overline{x}_n(t) = \frac{x_n(t)}{\|x_n\|}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда $\|\overline{x}_n\| = 1$ и, следовательно, множество $\{\overline{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено. С другой стороны, множество $\left\{f(\overline{x}_n) = \dfrac{1}{\|x_n\|} : n \in \mathbb{N}\right\}$, очевидно, не ограничено.

Можно доказать неограниченность f и несколько иначе. Функционал f есть суперпозиция линейного функционала $g\colon \widetilde{L}_2[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x(1)$ и функционала (функции) $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(y) = |y|$. Функция ϕ непрерывна в точке $x = 0$. Отсюда следует, что g разрывен в точке 0, поскольку в противном случае f, как суперпозиция непрерывных функционалов, был бы непрерывным в точке 0. Поскольку g линейный и разрывный, то g не ограничен. Это означает, что образ единичного шара $B = \{x \in \widetilde{L}_2[0,1]\colon \|x\| \leqslant 1\}$ при отображении g, т.е. множество $g(B) = \{x(1)\colon x \in B\}$ не ограничено. Но $g(B)$ ограничено или не ограничено одновременно с множеством $f(B) = \{|x(1)|\colon x \in B\}$. Следовательно, множество $f(B)$ не ограничено и функционал f не ограничен. ✌

Пример 9.3. Проверить, является ли оператор J, заданный формулой $Jx = x$, ограниченным и непрерывным, если

а) $D(J) = X = L_q[0,1], \quad Y = L_p[0,1], \quad p < q$;

б) $D(J) = L_q[0,1], \quad X = L_p[0,1], \quad Y = L_q[0,1], \quad p < q$.

Решение. Очевидно, что оператор вложения одного линейного нормированного пространства в другое является линейным. Следовательно, в силу теоремы 9.2 ограниченность и непрерывность этого оператора эквивалентны.

а) Оператор J является ограниченным и непрерывным, так как при $p < q$ имеет место строгое вложение $L_q[a,b] \subset L_p[a,b]$, причем $\|\cdot\|_q$ сильнее нормы $\|\cdot\|_p$, а значит, выполняется условие 4 теоремы 9.2.

б) Заметим, что функция $x(t) = t^{-\alpha}$ при $\dfrac{1}{q} \leqslant \alpha < \dfrac{1}{p}$ принадлежит пространству $L_p[0,1]$, но не принадлежит пространству $L_q[0,1]$. Для произвольного α с таким свойством рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ t^{-\alpha}, & t \in \left(\dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Она принадлежит обоим пространствам и поточечно сходится к x при $n \to \infty$. При этом

$$\|x_n - x\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \|x_n\|_q \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Следовательно, оператор J не является непрерывным, а значит, и ограниченным. ✌

☞ В задачах **9.1–9.9** X – линейное нормированное пространство. Проверить, является ли функционал $f : D(f) \subset X \to \mathbb{P}$ линейным, ограниченным, непрерывным.

9.1. $f(x) = \displaystyle\int_0^1 |x(t)|\, dt,$

а) $D(f) = X = C[0,1]$; б) $D(f) = X = L_p[0,1]$.

9.2. $f(x) = \left| x\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|,$

а) $D(f) = X = C[0,1]$; б) $D(f) = X = \widetilde{L}_2[0,1]$.

9.3. $f(x) = x'(t_0)$, $t_0 \in [0,1]$,

а) $D(f) = X = C^1[0,1]$;

б) $D(f)$ – множество полиномов, $X = C[0,1]$;

в) $D(f) = C^1[0,1]$, $X = L_p[0,1]$.

9.4. $f(x) = \int_0^1 x'(t)\cos t\,dt,\;\; D(f) = C^1[0,1],\;\; X = C[0,1].$

9.5. $f(x) = \int_0^1 x'(t)\sin t\,dt,\;\; D(f) = C^1[0,1],\;\; X = L_p[0,1].$

9.6. $f(x) = x'(0) + 5,\;\; D(f) = C^1[0,1],\;\; X = C[0,1].$

9.7. $f(x) = \sup\limits_k \xi_k,\;\; D(f) = X = m$ над $\mathbb{R}$.

9.8. $f(x) = \max\limits_{t\in[0,1]} x(t),$

а) $D(f) = X = C[0,1]$ над $\mathbb{R}$;

б) $D(f) = C[0,1]$, $X = L_p[0,1]$ над $\mathbb{R}$.

9.9. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k,$

$$M = \left\{ x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} :\ \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \text{ сходится} \right\},$$

а) $D(f) = X = \ell_1$; б) $D(f) = M,\;\; X = m$;

в) $D(f) = \ell_p \cap M,\;\; X = \ell_p,\;\; 1 < p < \infty.$

9.10. Пусть X – бесконечномерное линейное нормированное пространство. Привести пример оператора $A\colon X \to X$, который не является линейным и ограниченным, но непрерывен на X.

9.11. Оператор A определен на пространстве ℓ_2 формулой $Ax = \{\alpha_k \xi_k\},\;\; x = \{\xi_k\}$. Найти необходимые и достаточные условия на последовательность $\alpha = \{\alpha_k\}$, при которых $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$.

☞ В задачах **9.12–9.25** X, Y – линейные нормированные пространства. Проверить, является ли оператор $A\colon D(A) \subset X \to Y$ линейным, ограниченным, непрерывным.

9.12. $(Ax)(t) = tx'(t)$,

а) $A\colon C^1[a,b] \to C[a,b]$;

б) $D(A) = C^1[a,b]$, $X = Y = C[a,b]$.

9.13. $(Ax)(t) = x^2(t)$,

а) $A\colon C[a,b] \to C[a,b]$;

б) $D(A) = \big\{x \in L_p[a,b] : x^2(t) \in L_p[a,b]\big\}$,
$X = Y = L_p[a,b]$.

9.14. $(Ax)(t) = \sqrt{|x(t)|}$,

а) $A\colon C[a,b] \to C[a,b]$; б) $A\colon L_p[a,b] \to L_p[a,b]$.

9.15. ✯ $(Ax)(t) = \sqrt[k]{|x(t)|}$, $k \in \mathbb{N}$, $A\colon L_p[a,b] \to L_p[a,b]$.

9.16. $Ax = \{\xi_k^2\}_{k=1}^{\infty}$,

а) $A\colon c \to c$; б) $A\colon \ell_p \to \ell_p$.

9.17. $Ax = \{\sqrt{|\xi_k|}\,\}_{k=1}^{\infty}$,

а) $A\colon c_0 \to c_0$; б) $A\colon m \to m$;

в) $D(A) = \big\{x = \{\xi_k\} \in \ell_p : Ax \in \ell_p\big\}$, $X = Y = \ell_p$.

9.18. $Ax = \{\operatorname{sign}\xi_k\}$, $A\colon m \to m$, $\mathbb{P} = \mathbb{R}$.

9.19. $(Ax)(t) = e^t x(t) + x(0)$, $A\colon \widetilde{L}_1[0,1] \to \widetilde{L}_1[0,1]$.

9.20. $Ax = \{|\xi_k|\}_{k=1}^{\infty}$,

а) $A\colon \ell_p \to \ell_p$; б) $A\colon c \to c$.

9.21. $Ax = \{|\xi_k|^m\}_{k=1}^{\infty}$, $m \in \mathbb{N}$,

а) $A\colon \ell_p \to \ell_p$; б) $A\colon c \to c$.

9.22. $Ax = \{|\xi_k|^\alpha\}_{k=1}^{\infty}$, $\alpha > 0$,

а)✯ $D(A) = \big\{x = \{\xi_k\} \in \ell_p : Ax \in \ell_p\big\}$, $X = Y = \ell_p$;

б) $A\colon c \to c$.

9.23. $(Ax)(t) = x(a) + x'(a)(t-a),$

$D(A) = C^1[a,b], \;\; X = Y = C[a,b].$

9.24. $(Ax)(t) = \dfrac{|x(t)| - x(t)}{2},$

$A\colon C[0,2] \to L_2[0,2].$

9.25. $(Ax)(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{x^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!},$

а) $D(A) = C^m[a,b], \;\; X = Y = C[a,b];$

б) $A\colon C^m[a,b] \to C[a,b].$

9.26. Докажите, что во всяком бесконечномерном линейном нормированном пространстве X можно определить разрывный линейный функционал f с $D(f) = X$.

Тема 10. Нормы линейных функционалов и операторов

Определение 10.1. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$, $A\colon X \to Y$ – линейный ограниченный оператор. *Нормой* оператора A называется величина

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|.$$

Справедливы равенства

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \\ = \inf\{K : \forall\, x \in X \quad \|Ax\| \leqslant K\|x\|\}.$$

Если в пространстве X существует элемент x такой, что $\|x\| = 1$ и $\|Ax\| = \|A\|$, то говорят, что норма A *достижима*, если же такого элемента не существует, норма A *недостижима*.

Пример 10.1. Оператор $A\colon C[0,2] \to C[0,2]$ задан формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds.$$

Найти норму A, выяснить, является ли она достижимой.

Решение. Сначала оценим $\|A\|$ сверху:

$$\begin{aligned} \|Ax\| = \max_{t\in[0,2]} \left| \int_0^t x(s)\,ds \right| \leqslant \max_{t\in[0,2]} \int_0^t |x(s)|\,ds \leqslant \\ \leqslant \max_{t\in[0,2]} \max_{s\in[0,1]} |x(s)| \int_0^t 1\,ds = \max_{t\in[0,2]} \|x\| t = \|x\| \cdot 2. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Таким образом, мы получили оценку $\|Ax\| \leqslant 2\,\|x\|$, следовательно $\|A\| \leqslant 2$. Если взять $x(t) \equiv 1$, все неравенства (10.1) обратятся в равенства. Значит, $\|A\| = 2$, норма достигается. ✌

Пример 10.2. Функционал $f\colon C[0,3] \to \mathbb{R}$ задан формулой

$$f(x) = \int_0^2 tx(t)\,dt - \int_2^3 tx(t)\,dt.$$

Найти норму f, выяснить, является ли она достижимой.

Решение. Мы можем записать f в виде

$$f(x) = \int_0^3 \varphi(t) \cdot x(t)\,dt, \quad \text{где} \quad \varphi(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,2], \\ -t, & t \in (2,3]. \end{cases}$$

Сначала оценим $\|f\|$ сверху:

$$\begin{aligned} |f(x)| = \left| \int_0^3 \varphi(t) \cdot x(t)\,dt \right| \overset{(*)}{\leqslant} \int_0^3 |\varphi(t) \cdot x(t)|\,dt \overset{(**)}{\leqslant} \\ \leqslant \max_{t\in[0,3]} |x(t)| \int_0^3 |\varphi(t)|\,dt = \|x\| \cdot \frac{9}{2}. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Следовательно, $\|f\| \leqslant \dfrac{9}{2}$. Проанализируем, возможна ли ситуация, когда оба неравенства в (10.2) обратятся в равенство. Неравенство $(*)$ обращается в равенство, когда функция $\varphi(t) \cdot x(t)$ сохраняет знак п. в. на $[0,3]$, что для непрерывной функции x возможно, только если $x(t) \geqslant 0$, $t \in [0,2)$, и $x(t) \leqslant 0$, $t \in (2,3]$. Неравенство $(**)$ обращается в равенство, когда $|x(t)| = \mathrm{const}$ на $[0,3]$. Таким образом, «идеальная» функция должна иметь вид

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,2), \\ -1, & t \in (2,3]. \end{cases}$$

Функция x не определена в точке $t = 2$. При этом ясно, что доопределить функцию x так, чтобы она стала непрерывной в этой точке, невозможно. Рассмотрим последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, 2 - \dfrac{1}{n}\right], \\ n(2-t), & t \in \left(2 - \dfrac{1}{n}, 2 + \dfrac{1}{n}\right), \\ -1, & t \in \left[2 + \dfrac{1}{n}, 3\right]. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\|x_n\| = 1$, а $|f(x_n)| \to \dfrac{9}{2}$ при $n \to \infty$. Поскольку

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \geqslant |f(x_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{9}{2},$$

то $\|f\| \geqslant \dfrac{9}{2}$, а значит, $\|f\| = \dfrac{9}{2}$.

Из приведенных выше рассуждений следует, что не существует такого элемента x, для которого $\|x\| = 1$ и $|f(x)| = \dfrac{9}{2}$, следовательно, норма не достигается. ✌

Пример 10.3. Оператор $A\colon L_1[0,1] \to C[0,1]$ задан формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^1 (e^t + e^{-s})x(s)\,ds.$$

Найти норму A.

Решение. Сначала оценим $\|A\|$ сверху:

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} \left| \int_0^1 (e^t + e^{-s})x(s)\,ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 (e^t + e^{-s})|x(s)|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in[0,1]} \max_{s\in[0,1]} (e^t + e^{-s}) \int_0^1 |x(s)|\,ds = (e+1)\|x\|.$$

Итак, $\|A\| \leqslant e+1$. Выражение $(e^t + e^{-s})$ достигает своего максимума по s в точке $s = 0$. Рассмотрим последовательность функций, сосредоточенных в окрестности 0:

$$x_n(s) = \begin{cases} 1, & s \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ 0, & s \in \left(\dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Ясно, что $\|x_n\| = \dfrac{1}{n}$. При этом

$$\|Ax_n\| = \max_{t\in[0,1]} \int_0^{\frac{1}{n}} (e^t + e^{-s})\,ds =$$
$$= \max_{t\in[0,1]} \left(\frac{e^t}{n} - e^{-1/n} + 1 \right) = \frac{e}{n} - e^{-1/n} + 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{e}{n} - e^{-1/n} + 1\right) = e + 1.$$

Таким образом, $\|A\| \geqslant e+1$. Оценка сверху и оценка снизу совпали, значит, $\|A\| = e+1$. ✌

☞ В задачах **10.1–10.8** вычислить норму функционала.

10.1. $f(x) = \displaystyle\int_0^3 (s^3 - 9s)x(s)\,ds$,

а) $X = C[0,3]$; б) $X = L_1[0,3]$.

10.2. $f(x) = \int_{-1}^{3} (s^3 - 9s)x(s)\,ds,$

а) $X = C[-1,3]$; б) $X = L_1[-1,3]$.

10.3. $f(x) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 s \cdot \cos s \cdot x(s)\,ds,$

а) $X = C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; б) $X = L_1\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $X = L_p\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $1 < p < \infty$.

10.4. $f(x) = 2\int_{0}^{\frac{1}{2}} x(s)ds - \int_{\frac{1}{2}}^{1} x(s)ds,$

а) $X = C[0,1]$; б) $X = L_1[0,1]$.

Выяснить, является ли норма достижимой.

10.5. $f(x) = 2\int_{0}^{\frac{1}{3}} x(s)ds - \int_{\frac{2}{3}}^{1} x(s)ds,$

а) $X = C[0,1]$; б) $X = L_1[0,1]$.

Выяснить, является ли норма достижимой.

10.6. $f(x) = \alpha x(0) + \beta \int_{0}^{1} x(t)dt, \quad X = C[0,1].$

10.7. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\xi_n,$ а) $X = c_0$; б) $X = m$.

Выяснить, является ли норма достижимой.

10.8. $f(x) = \int_{0}^{1} \sqrt{t}x(t^2)dt,$

а) $X = C[0,1]$; б) $X = L_2[0,1]$;

в) $X = L_3[0,1]$.

10.9. Пусть $f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{x(s)}{\sqrt[3]{s}}\,ds$. Для каких значений p,

$1 \leqslant p \leqslant \infty$, f является непрерывным функционалом в пространстве $L_p[-1,1]$? Найти норму f.

☞ В задачах **10.10–10.23** вычислить норму оператора.

10.10. $(Ax)(t) = \displaystyle\int_1^2 (2t+s)x(s)ds,$

а) $A\colon C[1,2] \to C[0,1]$; б) $A\colon L_1[1,2] \to C[0,1]$;

в) $A\colon L_1[1,2] \to L_1[0,1]$.

10.11. $(Ax)(t) = \displaystyle\int_1^2 (2t-s)x(s)ds,$

а) $A\colon C[1,2] \to C[0,1]$; б) $A\colon L_1[1,2] \to C[0,1]$;

в) $A\colon L_1[1,2] \to L_1[0,1]$.

10.12. $(Ax)(t) = x\left(\dfrac{t^2}{2}\right),$

а) $A\colon C[0,2] \to C[0,2]$; б) $A\colon C[0,2] \to L_1[0,2]$.

10.13. $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^t (t-s)x(s)ds, \quad A\colon C[0,\pi] \to C[0,\pi].$

10.14. $Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots), \quad A\colon \ell_p \to \ell_p.$

10.15. $Ax = (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots), \quad A\colon \ell_p \to \ell_p.$

10.16. $Ax = (\xi_2, \xi_3, \xi_1 + \xi_2, \xi_4, \xi_5, \ldots),$

а) $A\colon \ell_1 \to \ell_1$; б)✯ $A\colon \ell_2 \to \ell_2$; в) $A\colon m \to m$.

10.17. $A\colon \ell_p \to \ell_p,$

а) $Ax = \left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \xi_n\right\}_{n=1}^{\infty};$

б) $Ax = \left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \xi_n\right\}_{n=1}^{\infty}.$

10.18. $Ax = \{ne^{-n/3}\xi_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad A\colon \ell_1 \to \ell_1.$

10.19. $Ax = \{\alpha_n \xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $|\alpha_n| \leqslant c$, $A\colon \ell_p \to \ell_q$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$.

10.20. $Jx = x$,

а) $J\colon C^1[a,b] \to C[a,b]$;

б) $J\colon L_q[a,b] \to L_p[a,b], \quad 1 \leqslant p < q \leqslant \infty$;

в) $J\colon \ell_p \to \ell_q, \quad 1 \leqslant p < q \leqslant \infty$.

10.21. $(Ax)(t) = \varphi(t)x(t)$,

а) $A\colon C[a,b] \to C[a,b], \quad \varphi \in C[a,b]$;

б) $A\colon L_2[a,b] \to L_1[a,b], \quad \varphi \in L_2[a,b]$;

в) $A\colon L_p[a,b] \to L_p[a,b]$,

$$\varphi(t) = \begin{cases} 5\cos t, & t \in \mathbb{Q} \cap [a,b], \\ -3\sin t, & t \in \mathbb{I} \cap [a,b]. \end{cases}$$

10.22. $(Ax)(t) = \varphi(t)x(t), \qquad A\colon L_p[0,2] \to L_p[0,2]$,

а) $\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \dfrac{3}{2}\right], \\ 1, & t \in \left(\dfrac{3}{2}, 2\right]; \end{cases}$ б) $\varphi(t) = t^2$;

в) $\varphi(t) = t(t-1)(t-2)$.

10.23. $(Ax)(t) = x'(t), \quad A\colon C^1[0,1] \to C[0,1]$.

10.24. Для каких α оператор $(Ax)(t) = x(t^\alpha)$ линеен и непрерывен в X? Найти норму A, если он ограничен.

а) $A\colon C[0,1] \to C[0,1]$; б) $A\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1]$.

10.25. Для каких α, β оператор $(Ax)(t) = t^\beta x(t^\alpha)$ линеен и ограничен в $L_2[0,1]$? Найти его норму A, если он ограничен.

10.26. Функционал $f : X \to \mathbb{R}$ задан формулой $f(x) = \displaystyle\int_a^b \varphi(s)x(s)\,ds$, $\varphi \in C[a,b]$. Докажите, что а) если $X = C[a,b]$, то $\|f\| = \int_a^b |\varphi(s)|\,ds$;

б) если $X = L_1[a,b]$, то $\|f\| = \max\limits_{s\in[a,b]} |\varphi(s)|$.

10.27. Оператор A задан формулой

$$(Ax)(t) = \int_c^d K(t,s)x(s)\,ds, \quad K(t,s) \in C\big([a,b]\times[c,d]\big).$$

Докажите, что

а) если $A : C[c,d] \to C[a,b]$, то

$$\|A\| = \sup_{t\in[a,b]} \int_c^d |K(t,s)|\,ds;$$

б) если $A : L_1[c,d] \to C[a,b]$, то

$$\|A\| = \sup_{t\in[a,b],\, s\in[c,d]} |K(t,s)|;$$

в) если $A : L_1[c,d] \to L_1[a,b]$, то

$$\|A\| = \sup_{s\in[c,d]} \int_a^b |K(t,s)|\,dt.$$

10.28. Пусть X – нормированное, а Y – банахово пространства и A_0 – линейный оператор с $D(A_0) \subset X$ и $R(A_0) \subset Y$, причем $\overline{D(A_0)} = X$ и на $D(A_0)$ оператор ограничен. Докажите, что оператор A_0 можно продолжить по непрерывности на все пространство X, т. е. существует оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ такой, что $Ax = A_0x$ для любого $x \in D(A_0)$, причем $\|A\| = \|A_0\|$ и продолжение единственно.

10.29. Оператор A задан формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^1 K(t,s)x'(s)\,ds,$$

где функция $K(t,s)$ и ее производная $K'_s(t,s)$ непрерывны на $[0,1]\times[0,1]$, $D(A) = C^1[0,1]$, $X = Y = C[0,1]$. Продолжите оператор A по непрерывности на $C[0,1]$.

Тема 11. Сходимость последовательности линейных операторов

Определение 11.1. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства. Говорят, что последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ сходится к оператору $A\colon X \to Y$

✓ *поточечно* (*или сильно*), если для любого $x \in X$

$$\|A_n x - Ax\|_Y \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

✓ *равномерно*, если она сходится к A по норме, т. е.

$$\|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Если последовательность операторов $\{A_n\}$ сходится к оператору A равномерно, то она сходится к A и поточечно.

Определение 11.2. Говорят, что последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *сходится* (поточечно или равномерно), если существует оператор $A\colon X \to Y$, удовлетворяющий соответствующему условию из определения 11.1.

Теорема 11.1 (критерий поточечной сходимости). *Пусть X – банахово пространство, Y – нормированное пространство. Последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ сходится поточечно к оператору $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ тогда и только тогда, когда*

1) (*числовая*) *последовательность $\{\|A_n\|\}$ ограничена*;

2) *найдется множество $M \subset X$ такое, что $\overline{\langle M \rangle} = X$ и $A_n x \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax$ для любого $x \in M$ (здесь $\langle M \rangle$ – линейная оболочка M, а черта означает замыкание множества*).

Пример 11.1. Сходится ли последовательность функционалов

$$f_n(x) = \int_0^1 y_n(t)\, x(t)\, dt, \tag{11.1}$$

где

$$y_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}; \\ \dfrac{n}{2}\left(t - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}; \\ 1, & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} < t \leqslant 1, \end{cases}$$

а) поточечно в $L[0,1]$; б) поточечно в $C[0,1]$;
в) равномерно в $C[0,1]$; г) равномерно в $L[0,1]$?

Решение. а) Пусть $x \in L[0,1]$. Проверим, что для последовательности функций $\{y_n(t)\, x(t)\}$ выполняются условия теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Функции $y_n(t)\, x(t)$ измеримы, имеют суммируемую мажоранту: $|y_n(t)\, x(t)| \leqslant |x(t)|$ и для всех $t \in [0,1]$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(t)\, x(t) = y(t)\, x(t)$, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{1}{2}, & t = \dfrac{1}{2}; \\ 1, & \dfrac{1}{2} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Поэтому по теореме Лебега

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 y_n(t)\,x(t)\,dt=\int_0^1 y(t)\,x(t)\,dt.$$

Положим

$$f(x)=\int_0^1 y(t)\,x(t)\,dt. \tag{11.2}$$

Очевидно, что $f\in(L[0,1])^*$. Таким образом, в пространстве $L[0,1]$ последовательность $\{f_n\}$ поточечно сходится к f.

б) Если $x\in C[0,1]$, то так же, как в предыдущем пункте, $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, которая задается формулой (11.2). Этот функционал непрерывен и в пространстве $C[0,1]$, т. е. $f\in(C[0,1])^*$. Таким образом, последовательность $\{f_n\}$ поточечно сходится к f в пространстве $C[0,1]$.

в) Покажем, что $\{f_n\}$ равномерно сходится к f в $C[0,1]$. Справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned}|(f_n-f)(x)|\leqslant\int_0^1 |y_n(t)-y(t)|\,|x(t)|\,dt\leqslant\\ \leqslant\|x\|_{C[0,1]}\cdot\int_0^1|y_n(t)-y(t)|\,dt=\\ =\|x\|_{C[0,1]}\cdot\int_{\frac12-\frac1n}^{\frac12+\frac1n}|y_n(t)-y(t)|\,dt=\frac{1}{2n}\,\|x\|_{C[0,1]}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\|f_n-f\|\leqslant\dfrac{1}{n}$, т. е. $\{f_n\}$ равномерно сходится к f в $C[0,1]$.

г) Если последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно, то ее равномерный предел должен совпадать с поточечным пределом. В пункте «а» мы доказали, что поточечно $\{f_n\}$ сходится к функционалу f, определенному формулой (11.2). Оценим

$\|f_n - f\|$. Для этого рассмотрим последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}; \\ n, & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}; \\ -n, & \dfrac{1}{2} < t \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}; \\ 0, & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Ясно, что $\|x_n\| = 2$ и

$$\|f_n - f\| \geqslant \left|(f_n - f)\left(\frac{x_n}{2}\right)\right| = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |y_n(t) - y(t)| \cdot \frac{n}{2}\, dt = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $\|f_n - f\| \not\to 0$ при $n \to \infty$ и последовательность $\{f_n\}$ не сходится равномерно в пространстве $L[0,1]$.

Отметим, что в будущем можно вычислять (оценивать) $\|f_n - f\|$, применяя теорему 12.4. По этой теореме

$$\|f_n - f\| = \|y_n - y\|_{L_\infty[0,1]} = \frac{1}{2}.$$ ✌

Пример 11.2. Сходится ли последовательность операторов

$$A_n x = \left(\frac{\xi_n}{n}, \frac{\xi_{n+1}}{n+1}, \ldots, \frac{\xi_{2n}}{2n}, 0, 0 \ldots\right), \qquad A_n : c_0 \to \ell_1,$$

поточечно? Сходится ли она равномерно?

Решение. Если последовательность операторов $\{A_n\}$ сходится к некоторому оператору A поточечно, то для всех $x \in c_0$ $\|A_n x - Ax\|_{\ell_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Из сходимости по норме в пространстве ℓ_1 следует покоординатная сходимость. Покоординатно $A_n x \to 0$, значит, оператор A может быть только нулевым.

Убедимся, что последовательность $\{A_n\}$ поточечно сходится к оператору $A = 0$. Действительно,

$$\|A_n x - 0x\|_{\ell_1} = \sum_{k=n}^{2n} \left|\frac{\xi_k}{k}\right| \leqslant \max_{n\leqslant k\leqslant 2n} |\xi_k| \cdot \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{n\leqslant k\leqslant 2n} |\xi_k| \cdot \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

так как $x \in c_0$.

Если бы последовательность операторов $\{A_n\}$ сходилась к некоторому оператору B равномерно, она сходилась бы к этому же оператору поточечно. Мы уже доказали, что $\{A_n\}$ поточечно сходится к $A = 0$, следовательно, B может быть только нулевым, но $\{A_n\}$ не сходится к нулевому оператору равномерно. Чтобы показать это, рассмотрим следующую последовательность $\{x_n\} \in c_0$:

$$x_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2n}, 0, 0, \ldots), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Имеем

$$\|A_n - 0\| = \|A_n\| \geqslant \|A_n x_n\| = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n+1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}.$$ ✌

Пример 11.3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость последовательность функционалов $\{f_n\} \subset C^*[0,2]$,

$$f_n(x) = \int_0^2 \frac{n}{n^2t^2+1}\, x(t)\, dt.$$

Решение. Докажем поточечную сходимость последовательности $\{f_n\}$, используя теорему 11.1. Имеем (см. задачу 10.26)

$$\|f_n\| = \int_0^2 \frac{n}{n^2t^2+1}\, dt = \operatorname{arctg} 2n \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Множество многочленов плотно в $C[0,2]$, т. е. $\overline{\langle M\rangle} = C[0,2]$, если $M = \{t^k\}_{k=0}^{\infty}$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$f_n(t^k) = \int_0^2 \frac{nt^k}{n^2t^2+1}\,dt \leqslant \max_{t\in[0,2]} |t^{k-1}| \cdot \int_0^2 \frac{nt}{n^2t^2+1}\,dt =$$

$$= 2^{k-1} \cdot \frac{\ln(4n^2+1)}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Для $k = 0$ имеем

$$f_n(t^0) = \int_0^2 \frac{n}{n^2t^2+1}\,dt = \operatorname{arctg} 2n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, на множестве M

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \frac{\pi}{2}\,x(0).$$

Согласно критерию поточечной сходимости последовательность $\{f_n\}$ поточечно сходится к f на $C[0,2]$.

Равномерной сходимости на $C[0,2]$ нет. Действительно, пусть

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 - n^2t, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{n^2}, \\ 0, & \dfrac{1}{n^2} \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

Тогда $\|x_n\| = 1$,

$$\|f_n - f\| = \sup_{\|x\|=1} |f_n(x) - f(x)| \geqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| =$$

$$= \left| \int_0^{\frac{1}{n^2}} \frac{n}{n^2t^2+1}\,x_n(t)\,dt - \frac{\pi}{2}\,x_n(0) \right| =$$

$$= \left| \int_0^{\frac{1}{n^2}} \frac{n}{n^2t^2+1}\,x_n(t)\,dt - \frac{\pi}{2} \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2},$$

так как

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n^2}} \frac{n}{n^2t^2+1}\,x_n(t)\,dt \right| \leqslant \int_0^{\frac{1}{n^2}} \frac{n}{n^2t^2+1}\,dt =$$

$$= \operatorname{arctg} nt\Big|_0^{\frac{1}{n^2}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$ ✌

11.1. Доказать, что последовательность операторов

$$\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\ell_2), \qquad A_n x = \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \ldots, \frac{\xi_n}{n}, 0, 0, \ldots\right)$$

равномерно сходится к оператору A: $Ax = \left\{\frac{\xi_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

11.2. Сходится ли последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\ell_p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $A_n x = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, \xi_1, \xi_2, \ldots)$ поточечно? Сходится ли она равномерно?

11.3. Сходится ли последовательность операторов $\{A_n\}$, где $A_n x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$, поточечно, если

а) $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\ell_p)$; б) $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(c_0)$; в) $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(c)$?

Сходится ли $\{A_n\}$ равномерно?

11.4. Пусть $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$,

$$A_n x = (\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, \ldots, \alpha_n\xi_n, 0, 0, \ldots).$$

При каких α последовательность $\{A_n\}$ сходится равномерно в пространстве X?

а) $X = \ell_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$; б) $X = c$; в) $X = c_0$.

При каких α последовательность $\{A_n\}$ сходится в пространстве X поточечно?

11.5. Доказать, что последовательность операторов

$$\{A_n\} \subset \mathcal{L}(C[0,1]), \quad (A_n x)(t) = \int_0^t \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!}\, x(s)\, ds$$

равномерно сходится к оператору A:

$$(Ax)(t) = \int_0^t e^s x(s)\, ds.$$

11.6. Пусть $A_n\colon D(A_n) \subset C[0,1] \to C[0,1]$, $D(A_n) = C^1[0,1]$, $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ и

$$(A_n x)(t) = n\left[x\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(t + \frac{1}{n}\right)\right) - x\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)t\right)\right].$$

Доказать, что

а) A_n – линейный непрерывный оператор при любом $n \in \mathbb{N}$;

б) последовательность операторов $\{A_n\}$ поточечно сходится к оператору D, $(Dx)(t) = x'(t)$;

в) последовательность операторов $\{A_n\}$ не сходится равномерно.

11.7. Сходится ли последовательность $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(L_1[0,2])$,

$$(A_n x)(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \leqslant t \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}, \\ 0, & 1 - \dfrac{1}{n} < t \leqslant 2, \end{cases}$$

равномерно? Сходится ли $\{A_n\}$ поточечно?

11.8. ✯ Доказать, что последовательность операторов $(A_n x)(t) = x\left(t^{\frac{n+1}{n}}\right)$ в пространстве $C[0,1]$ поточечно сходится к единичному оператору, но не сходится равномерно.

11.9. При каких α последовательность функционалов $\{f_n\} \subset (C[0,1])^*$,

$$f_n(x) = \int_0^1 n^\alpha t^n x(t)\,dt,$$

сходится равномерно? При каких α последовательность $\{f_n\}$ сходится поточечно?

11.10. Выяснить характер сходимости последовательности функционалов $\{f_n\}$:

а) $f_n(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\,dt, \quad X = L_2[-\pi,\pi];$

б) $f_n(x) = x\left(\dfrac{1}{n}\right), \quad X = C[0,1];$

в) $f_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (t^n - t^{n+1})x(t)\,dt, \quad X = L_p[0,1];$

г) $f_n(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{arctg}\,nt\,dt, \quad X = C[-1,1];$

д) $f_n(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{arctg}\,nt\,dt, \quad X = L[-1,1].$

11.11. Пусть X – одно из пространств ℓ_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, c, c_0. В каких пространствах последовательность $\{f_n\} \subset X^*$ сходится равномерно, в каких – поточечно, если

а) $f_n(x) = \xi_n;$ б) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{k}$?

Тема 12. Линейные непрерывные функционалы

Теорема 12.1 (теорема Хана – Банаха. Продолжение линейного непрерывного функционала с сохранением нормы). *Пусть* $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ *– линейное нормированное пространство над полем* $\mathbb{P}$*,* X_0 *– линейное многообразие в* X *и* f_0 *– линейный непрерывный функционал на* $\langle X_0, \|\cdot\|\rangle$*. Тогда* f_0 *может быть продолжен до некоторого линейного непрерывного функционала* f *на* X *с сохранением нормы, т. е. так, что*

$$\|f_0\|_{X_0^*} = \|f\|_{X^*}.$$

Теорема 12.2 (геометрический смысл нормы линейного функционала). *Пусть* X *– нормированное пространство. Если* $f \in X^*$*,* $f \neq 0$*, то*

$$\rho(0, f^{-1}(1)) = \frac{1}{\|f\|}.$$

Определение 12.1. Пусть X – линейное нормированное пространство, $f \in X^*$, $c \in \mathbb{P}$. *Гиперплоскостью* в X называется множество

$$f^{-1}(c) = \{x \in X : \ f(x) = c\}.$$

Геометрическая интерпретация теоремы Хана–Банаха. Уравнение $f_0(x) = 1$ задает в пространстве $\langle X_0, \|\cdot\|\rangle$ гиперплоскость L_0, которая является плоскостью в $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ и лежит на расстоянии $1/\|f_0\|$ от нуля. Продолжая функционал f_0 без увеличения нормы на все пространство $\langle X, \|\cdot\|\rangle$, мы получаем функционал $f \in X^*$, порождающий гиперплоскость $L = f^{-1}(1)$ в X. При этом L содержит в себе L_0 и тоже лежит на расстоянии $1/\|f_0\|$ от нуля в X.

Теорема 12.3. *Пусть* $X = c_0$ *или* $X = c$, $Y = \ell_1$; *или* $X = \ell_p$, $Y = \ell_q$ $\left(1 \leqslant p < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$. *Справедливы следующие утверждения.*

Для любого $f \in X^*$ *существует единственный элемент* $y = \{\eta_k\} \in Y$ *такой, что для всех* $x = \{\xi_k\} \in X$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k. \tag{12.1}$$

Обратно, любой элемент $y \in Y$ *порождает функционал* $f \in X^*$ *по формуле* (12.1). *В обоих случаях* $\|f\| = \|y\|_Y$.

Теорема 12.4. *Для любого* $f \in (L_p[a,b])^*$ $(1 \leqslant p < \infty)$ *существует единственный элемент* $y \in L_q[a,b]$ $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$ *такой, что*

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\,dt, \qquad x \in L_p[a,b]. \tag{12.2}$$

Обратно, любой элемент $y \in L_q[a,b]$ *порождает функционал* $f \in (L_p[a,b])^*$ *по формуле* (12.2). *В обоих случаях* $\|f\| = \|y\|_{L_q[a,b]}$.

Кратко теоремы 12.3 и 12.4 можно сформулировать так:

✓ $(c_0)^* \cong \ell_1$;

✓ $c^* \cong \ell_1$;

✓ $(\ell_p)^* \cong \ell_q,\ 1 \leqslant p < \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1;$

✓ $(L_p[a,b])^* \cong L_q[a,b],\ 1 \leqslant p < \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Символ $\cong$ означает изоморфизм нормированных пространств, т. е. существование между этими пространствами линейной биекции, сохраняющей нормы.

Нетрудно проверить, что $(\ell_p^n)^* \cong \ell_q^n,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Теорема 12.5. *Пусть H – гильбертово пространство. Для любого $f \in H^*$ существует единственный элемент $y \in H$ такой, что*

$$f(x) = (x, y), \qquad x \in H. \tag{12.3}$$

Обратно, любой элемент $y \in H$ порождает функционал $f \in H^*$ по формуле (12.3). *В обоих случаях $\|f\| = \|y\|_H$.*

Изоморфизм τ между H^* и H будет сопряженно-линейным, т. е.

$$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{P}\ \forall\ \varphi, \psi \in H^* \quad \tau(\alpha\varphi + \beta\psi) = \overline{\alpha}\tau(\varphi) + \overline{\beta}\tau(\psi).$$

Определение 12.2. Пусть X – линейное нормированное пространство, $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$. Последовательность элементов $\{x_n\}$ называется

✓ *сильно сходящейся к* x, если она сходится к x по норме;

✓ *слабо сходящейся к* x, если для любого $f \in X^*$ числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x)$.

Определение 12.3. Пусть X – линейное нормированное пространство, $\{f_n\} \subset X^*$, $f \in X^*$, $X^{**} = (X^*)^*$ – второе сопряженное к X.

Последовательность функционалов $\{f_n\}$ называется

✓ *сильно сходящейся к* f, если она сходится к f по норме;

✓ **слабо сходящейся к* f, если она сходится к f поточечно;

✓ *слабо сходящейся к* f, если для любого $\mathcal{F} \in X^{**}$ числовая последовательность $\{\mathcal{F}(f_n)\}$ сходится к $\mathcal{F}(f)$.

Определение 12.4. Пусть X – линейное нормированное пространство, f – линейный функционал, $f\colon D(f) \subset X \to \mathbb{P}$. Множество $f^{-1}(0) = \{x \in D(f)\colon f(x) = 0\}$ называется *ядром* функционала f и обозначается $\operatorname{Ker} f$. *Коразмерностью ядра* функционала f ($\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f$) называется размерность алгебраического дополнения ядра функционала в линейном пространстве $D(f)$.

Пример 12.1. Пусть $X = \mathbb{R}^2,\ x = (\xi_1, \xi_2) \in X$,

$$\|x\| = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}; \qquad X_0 = \{x \in \mathbb{R}^2\colon \xi_2 = 0\};$$

функционал f_0 задан на подпространстве X_0 формулой $f_0(x) = 2\xi_1$. Найти функционал f, который является продолжением функционала f_0 с X_0 на X с сохранением нормы.

Решение. 1. Найдем норму искомого функционала:

$$\|f\| = \|f_0\| = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ x \neq 0}} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{\xi_1 \in \mathbb{R} \\ \xi_1 \neq 0}} \frac{|2\xi_1|}{\max\{|\xi_1|, |0|\}} = 2.$$

Известно, что расстояние от гиперплоскости

$$f^{-1}(1) = \{x \in X\colon f(x) = 1\} \tag{12.4}$$

до начала координат выражается формулой (см. задачу 12.2)

$$\rho(0, f^{-1}(1)) = \frac{1}{\|f\|} = \frac{1}{2}. \tag{12.5}$$

2. Выберем базис в X:

$$e_1 = (1, 0), \qquad e_2 = (0, 1).$$

Любой элемент $x = (\xi_1, \xi_2) \in X$ можно представить в виде

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2.$$

Тогда любой линейный функционал, определенный на X, имеет вид

$$f(x) = \xi_1 f(e_1) + \xi_2 f(e_2) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2.$$

Таким образом, чтобы найти f, надо найти η_1 и η_2. Согласно (12.4), гиперплоскость $f^{-1}(1)$ задается уравнением $\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 = 1$. Следовательно, чтобы определить η_1 и η_2, достаточно построить гиперплоскость, обладающую свойством (12.5) и содержащую $f_0^{-1}(1)$.

3. Справедливо следующее включение:

$$f_0^{-1}(1) \subset f^{-1}(1).$$

Найдем $f_0^{-1}(1)$, т. е. точку $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0) \in X_0$ со свойством $f_0(x_0) = 1$. Имеем

$$f_0(x_0) = 2\xi_1^0 = 1, \qquad \xi_2^0 = 0.$$

Таким образом, $x_0 = \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$. При этом

$$\|x_0\| = \max\left\{\left|\frac{1}{2}\right|, |0|\right\} = \frac{1}{2},$$

т. е. $x_0 \in S\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, а точнее, $x_0 \in S\left[0, \dfrac{1}{2}\right] \cap f^{-1}(1)$.

4. Уравнение $\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 = 1$ на плоскости задает прямую. Если прямая, проходящая через точку x_0, пересекает шар $B\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, расстояние от тех ее точек, которые находятся внутри шара, до начала координат меньше, чем $\dfrac{1}{\|f_0\|}$. Таким образом, гиперплоскость $f^{-1}(1)$ не должна пересекать шар $B\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. В данном случае гиперплоскость – это прямая

линия, касательная к шару $B\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ в точке x_0; ее уравнение мы можем вывести из геометрических соображений. Оно имеет вид $\xi_1 = \dfrac{1}{2}$ или $2\xi_1 = 1$. Следовательно (см. (12.4)), $f(x) = 2\xi_1$, $x \in X$. ✌

Пример 12.2. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $x = (\xi_1, \xi_2) \in X$,

$$\|x\| = 2|\xi_1| + 3|\xi_2|; \qquad X_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \xi_1 = 0\};$$

функционал f_0 задан на подпространстве X_0 формулой $f_0(x) = \xi_2$. Найти функционал f, который является продолжением функционала f_0 с X_0 на X с сохранением нормы.

Решение. Найдем норму искомого функционала:

$$\|f\| = \|f_0\| = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ x \neq 0}} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{\xi_2 \in \mathbb{R} \\ \xi_2 \neq 0}} \frac{|\xi_2|}{2|0| + 3|\xi_2|} = \frac{1}{3}.$$

Далее, рассуждая как в предыдущей задаче, найдем $f_0^{-1}(1)$, т. е. точку $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0) \in X_0$ со свойством $f_0(x_0) = 1$. Имеем

$$f_0(x_0) = \xi_2^0 = 1, \qquad \xi_1^0 = 0.$$

Таким образом, $x_0 = (0, 1)$. При этом

$$\|x_0\| = 2 \cdot |0| + 3 \cdot |1| = 3,$$

т. е. $x_0 \in S[0, 3]$, а точнее, $x_0 \in S[0, 3] \cap f^{-1}(1)$.

В пространстве с заданной нормой через точку $x_0 = (0, 1)$ можно провести много прямых, не пересекающих шар $B(0, 3)$. Поэтому продолжение функционала f_0 в данном случае не единственно. Из геометрических соображений выводим, что множество таких прямых описывается уравнением

$$\xi_2 = k\xi_1 + 1, \qquad -\frac{2}{3} \leqslant k \leqslant \frac{2}{3}.$$

Следовательно, искомый функционал имеет вид

$$f(x) = -k\xi_1 + \xi_2, \qquad -\frac{2}{3} \leqslant k \leqslant \frac{2}{3}.$$ ✌

12.1. Пусть $X = \mathbb{R}^2$. Описать $Y \cong X^*$, если

а) $\|x\| = \sqrt{a^2\xi_1^2 + b^2\xi_2^2} \qquad (a > 0,\, b > 0)$;

б) $\|x\| = \max\{|a\,\xi_1|, |b\,\xi_2|\} \qquad (a > 0,\, b > 0)$;

в) $\|x\| = |a\,\xi_1| + |b\,\xi_2| \qquad (a > 0,\, b > 0)$;

г) $\|x\| = |2\,\xi_1 - \xi_2| + |2\,\xi_1 + \xi_2|$;

д) $\|x\| = \max\{|\xi_1 - 3\,\xi_2|, |\xi_2|\}$;

е) $\|x\| = \sqrt{2\,|\xi_1 - \xi_2|^2 + |\xi_1 + \xi_2|^2}$.

12.2. Путь X – линейное нормированное пространство, $f \in X^*$, $f \neq 0$, $C \in \mathbb{P}$. Доказать, что

$$\rho(x_0, f^{-1}(C)) = \frac{|f(x_0) - C|}{\|f\|}.$$

12.3. Найти продолжение линейного непрерывного функционала с одномерного подпространства в двумерном вещественном нормированном пространстве с сохранением нормы:

1) $\|x\| = \sqrt{8\,\xi_1^2 + \frac{1}{4}\,\xi_2^2}, \quad X_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ \xi_2 = 2\,\xi_1\}$,

$f_0(x) = -6\,\xi_1$;

2) $\|x\| = \max\{|\xi_1|, |\xi_1 - 2\,\xi_2|\}, \quad f_0(x) = \xi_2$,

а) $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ \xi_2 = 3\,\xi_1\}$;

б) $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ \xi_2 = \xi_1\}$;

3) $\|x\| = |\xi_1 + \xi_2| + |2\,\xi_1 - 4\,\xi_2|, \quad f_0(x) = 9\,\xi_1$,

а) $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ \xi_2 = 0\}$;

б) $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ \xi_1 - 2\,\xi_2 = 0\}$.

12.4. Указать условие единственности продолжения (с сохранением нормы) функционала с одномерного подпространства двумерного вещественного нормированного пространства.

12.5. Доказать, что норма линейного непрерывного функционала достижима тогда и только тогда, когда достижимо расстояние от нуля до гиперплоскости $f^{-1}(1)$.

12.6. Пусть $f \in X^*$, $f \neq 0$. Доказать, что $\operatorname{Ker} f$ – замкнутое линейное многообразие, $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$.

12.7. Пусть f – неограниченный линейный функционал, заданный на всюду плотном линейном подмножестве нормированного пространства X. Доказать, что $\operatorname{Ker} f$ плотно в X, $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$ на $D(f)$.

12.8. В пространствах $C[0,3]$ и $L_1[0,3]$ найти расстояние от элемента x_0 до гиперплоскости M. Достижимо ли это расстояние?

а) $M = \left\{ x : \displaystyle\int_0^3 x(t)\, dt = 1 \right\}, \quad x_0 = 2^t;$

б) $M = \left\{ x : \displaystyle\int_0^2 t\, x(t)\, dt - \int_2^3 t\, x(t)\, dt = 0 \right\}, \quad x_0 = t^2.$

12.9. В линейном нормированном пространстве X найти расстояние от элемента x_0 до множества M:

а) $X = L_2[0,1], \quad M = \left\{ x(t) : \displaystyle\int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)\, dt = 0 \right\},$ $x_0(t) = t;$

б) $X = C[0,1], \quad M = \left\{ x(t) : x(0) + \displaystyle\int_0^1 x(t)\, dt = 2 \right\}$, $x_0(t) = \cos t;$

в) $X = C[0,1], \quad M = \{ x(t) : x(0) = x(1) \},$ $x_0(t) = \sin t;$

г) $X = L_1 \left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3} \right], \quad x_0(t) = t + 1,$

$$M = \left\{ x(t) : \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x(t)\, \sin t\, dt > 1 \right\};$$

д) $X = \ell_1, \quad M = \left\{ x : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\,\xi_n \leqslant \frac{1}{2} \right\},$

$x_0 = \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty};$

е) $X = c_0,\ M = \left\{ x : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\,\xi_n = 1 \right\},$

$x_0 = \left\{ \frac{1}{3^n} \right\}_{n=1}^{\infty}.$

12.10. Исследовать на сильную и слабую сходимость в c_0 и ℓ_p последовательность элементов $x_n = \{\delta_{nk}\}_{n=1}^{\infty}$.

12.11. При каких $a > 0$ последовательность $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится сильно в $C[0, a]$, при каких – слабо?

12.12. Показать, что последовательность $x_n(t) = \sin nt$ не сходится сильно в $L_2[0, \pi]$ и в $C[0, \pi]$. Сходится ли она слабо?

12.13. Доказать, что последовательность элементов

$$x_n(t) = \begin{cases} n, & t \in \left[0, \dfrac{1}{n^p}\right], \\ 0, & t \in \left(\dfrac{1}{n^p}, 1\right], \end{cases}$$

слабо сходится в $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, а сильно не сходится.

12.14. Исследовать на сильную, слабую и *слабую сходимость последовательность функционалов $f_n \in X^*$, если

а) $X = L_2[-\pi, \pi], \quad f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{int} dt;$

б) $f_n(x) = \xi_n, \quad X = c_0 \quad$ и $\quad X = \ell_p \quad (1 < p < \infty);$

в) $f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{n} \dfrac{\xi_n}{n}, \quad X = \ell_p \quad (1 < p < \infty).$

12.15. Пусть $\{f_n\} \subset X^*$. Указать связь между различными видами сходимости: сильная, слабая и *слабая. Показать, что они, вообще говоря, неэквивалентны.

12.16. Пусть $X = C^1[-1,1]$, $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{2\varepsilon}\big(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)\big)$, $f(x) = x'(0)$. Доказать, что f_ε *слабо сходится к f при $\varepsilon \to 0$, а сильно не сходится.

Тема 13. Сопряженные операторы

Пусть X – линейное нормированное пространство, $x^* \in X^*$, значение функционала x^* на элементе x будем обозначать $\langle x, x^* \rangle$, т. е. $\langle x, x^* \rangle \equiv x^*(x)$.

Определение 13.1. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Сопряженным к* A называется оператор $A^* \colon Y^* \to X^*$, который функционалу $y^* \in Y^*$ ставит в соответствие функционал $(A^* y^*) \in X^*$ по правилу

$$\langle x, A^* y^* \rangle = \langle Ax, y^* \rangle, \quad x \in X. \tag{13.1}$$

Известно, что $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ и $\|A^*\| = \|A\|$.

Определение 13.2. Пусть H_1, H_2 – гильбертовы пространства, $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. *Эрмитово сопряженным* к A называется оператор $A^{\otimes} \colon H_2 \to H_1$, действующий по правилу

$$(x, A^{\otimes} y) = (Ax, y), \quad x \in H_1,\ y \in H_2. \tag{13.2}$$

Если $A \in \mathcal{L}(H_1)$ совпадает с $A^{\otimes}$, то A называется *самосопряженным* или *эрмитовым*.

Известно, что $A^{\otimes} \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ и $\|A^{\otimes}\| = \|A\|$.

Подчеркнем, что в отличие от сопряженного оператора эрмитово сопряженный оператор действует в исходных пространствах H_2, H_1, а не в сопряженных к ним.

При решении задач удобно работать не в самих сопряженных пространствах, а в изоморфных им пространствах функций или последовательностей, см. теоремы 12.3, 12.4. Пусть μ – изоморфизм X^* на X', а ν – изоморфизм Y^* на Y'. Оператору $A^*\colon Y^* \to X^*$ поставим в соответствие оператор $A'\colon Y' \to X'$ по формуле

$$A'y' = \mu A^* \nu^{-1} y', \quad y' \in Y'.$$

Положим $y' = \nu y^*$, тогда $A'y' = \mu A^* y^*$ и

$$A^* y^* = \mu^{-1} A' \nu y^*, \quad y^* \in Y^*,$$

т. е. $A^* = \mu^{-1} A' \nu$.

Если H_1, H_2 – гильбертовы пространства, $\widetilde{\mu}$ – сопряженно-линейная изометрия H_1^* на H_1, описанная в теореме 12.5, а $\widetilde{\nu}$ – соответствующая сопряженно-линейная изометрия H_2^* на H_2, то $A^* = \widetilde{\mu}^{-1} A^{\otimes} \widetilde{\nu}$.

☛ Ответы к задачам даны в терминах A' и X', Y', соответствующие изоморфизмы μ, ν описаны в теоремах 12.3, 12.4. В том случае, когда оба пространства гильбертовы, в ответе приведен эрмитово сопряженный оператор.

Пример 13.1. Пусть $A\colon L_5[0,1] \to L_3[0,1]$, $(Ax)(t) = e^t x(t)$. Найти сопряженный оператор.

Решение. Оператор A^* действует из $(L_3[0,1])^*$ в $(L_5[0,1])^*$. По теореме 12.4 пространство $(L_5[0,1])^*$ изоморфно пространству $L_{5/4}[0,1]$ $\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5} = 1\right)$, а пространство $(L_5[0,1])^*$ – пространству $L_{5/4}[0,1]$ $\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5} = 1\right)$, т. е. существуют линейные изометрии ν, μ, переводящие $(L_3[0,1])^*$ на $L_{3/2}[0,1]$ и $(L_5[0,1])^*$ на $L_{5/4}[0,1]$ соответственно. Таким образом, можно изобразить схему:

$$
\begin{array}{rcccl}
x \in & L_5[0,1] & \xrightarrow{A} & L_3[0,1] & \ni Ax \\
x^* = A^*y^* \in & (L_5[0,1])^* & \xleftarrow{A^*} & (L_3[0,1])^* & \ni y^* \\
 & \Big\downarrow \mu & & \Big\downarrow \nu & \\
\mu A^*y^* = A'y \in & L_{5/4}[0,1] & \xleftarrow{A'} & L_{3/2}[0,1] & \ni \nu y^* = y
\end{array}
$$

Сопряженный оператор определяется с помощью равенства (13.1). Зная общий вид линейного функционала в пространстве $L_3[0,1]$, можем записать

$$\langle Ax, y^* \rangle = \int_0^1 (Ax)(t) \cdot (\nu y^*)(t)\,dt = \int_0^1 e^t x(t) y(t)\,dt. \qquad (13.3)$$

С другой стороны, в пространстве $L_5[0,1]$

$$\langle x, A^*y^* \rangle = \int_0^1 x(t)(\mu A^*y^*)(t)\,dt = \int_0^1 x(t)(A'y)(t)\,dt. \qquad (13.4)$$

Подставив в (13.1) правые части (13.3) и (13.4), для всех $x \in X$ получим равенство

$$\int_0^1 x(t) e^t y(t)\,dt = \int_0^1 x(t)(A'y)(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$(A'y)(t) = e^t y(t).$$

✌

Пример 13.2. Пусть $A\colon \ell_2 \to \ell_2^3$, $Ax = (\xi_1 - \xi_2, \xi_5 + 3\xi_3, \xi_6)$, $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$. Найти сопряженный оператор.

Решение. Пространства ℓ_2 и ℓ_2^3 являются гильбертовыми, поэтому ищем эрмитово сопряженный оператор $A^{\otimes}$. Схема в этом случае имеет вид

$$
\begin{array}{rcccl}
x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in & \ell_2 & \xrightarrow{A} & \ell_2^3 & \ni Ax = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \\
(\nu_1, \nu_2, \ldots) = A^{\otimes} y \in & \ell_2 & \xleftarrow{A^{\otimes}} & \ell_2^3 & \ni y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3).
\end{array}
$$

Применяем формулу (13.2):

$$
\begin{aligned}
(Ax, y) &= \sum_{k=1}^{3} \mu_k \overline{\eta_k} = (\xi_1 - \xi_2)\overline{\eta_1} + (\xi_5 + 3\xi_3)\overline{\eta_2} + \xi_6 \overline{\eta_3} = \\
&= \xi_1 \overline{\eta_1} + \xi_2 \overline{(-\eta_1)} + \xi_3 \overline{3\eta_2} + \xi_5 \overline{\eta_2} + \xi_6 \overline{\eta_3} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \, \overline{\nu_k} = (x, A^{\otimes} y).
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
A^{\otimes} y = (\eta_1, -\eta_1, 3\eta_2, 0, \eta_2, \eta_3, 0, 0, \ldots). \qquad ✌
$$

Пример 13.3. Пусть $A\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, $(Ax)(t) = x(t + t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Найти сопряженный оператор. Является ли A самосопряженным?

Решение. Пространство $L_2(\mathbb{R})$ является гильбертовым. В этом случае ищем эрмитово сопряженный оператор $A^{\otimes}\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ по формуле (13.2):

$$
\begin{aligned}
(Ax, y) = \int_{-\infty}^{\infty} (Ax)(t) \cdot \overline{y(t)} \, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + t_0) \overline{y(t)} \, dt = \\
= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t - t_0)} \, dt &= (x, A^{\otimes} y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{(A^{\otimes} y)(t)} \, dt.
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\big(A^{\otimes} y\big)(t) = y(t - t_0).
$$

Если $t_0 \neq 0$, то $A^{\otimes} \neq A$ и A – несамосопряженный. ✌

Пример 13.4. Пусть оператор A действует из пространства $L_2[0, 1]$ в пространство $L_2[1, 3]$ по правилу

$$
(Ax)(t) = \int_0^1 (t + e^s) x(s) \, ds.
$$

Найти сопряженный оператор.

Решение. Эрмитово сопряженный оператор A находим по формуле (13.2). Он действует из пространства $L_2[1,3]$ в $L_2[0,1]$. Пусть $x \in L_2[0,1]$, а $y \in L_2[1,3]$. Имеем с использованием теоремы Фубини [4, гл. V, § 6, теорема 5]

$$\begin{aligned}
(Ax,y) &= \int_1^3 (Ax)(s)\cdot\overline{y(s)}\,ds = \int_1^3\left(\int_0^1 (s+e^\tau)x(\tau)\,d\tau\right)\overline{y(s)}\,ds = \\
&= \int_1^3\left(\int_0^1 (s+e^\tau)x(\tau)\overline{y(s)}\,d\tau\right)ds = \\
&= \int_0^1\left(\int_1^3 (s+e^\tau)x(\tau)\overline{y(s)}\,ds\right)d\tau = \\
&= \int_0^1 x(\tau)\overline{\left(\int_1^3 (s+e^\tau)y(s)\,ds\right)}\,d\tau = (x, A^{\otimes}y) = \\
&= \int_0^1 x(\tau)\overline{(A^{\otimes}y)(\tau)}\,d\tau.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$(A^{\otimes}y)(t) = \int_1^3 (s+e^t)y(s)\,ds.$$ ✌

☞ В задачах **13.1–13.20** найти сопряженный оператор. Выяснить, является ли исходный оператор самосопряженным в случае, если он действует в гильбертовых пространствах.

13.1. $A:\ell_2\to\ell_2^2,\quad Ax = (\xi_1-\xi_2, \xi_5+3\xi_3).$

13.2. $A:\ell_2\to\ell_2,\quad Ax = (\xi_2,\xi_4,\xi_6,0,0,\ldots).$

13.3. $A:L_2[0,1]\to L_2[-1,0],\quad Ax(t) = \displaystyle\int_0^1 e^{t\pm s}x(s)\,ds.$

13.4. $A,B:\ell_2\to\ell_2,$

а) $Ax = (0,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots)$; б) $Bx = (\xi_2,\xi_3,\xi_4,\ldots)$.

13.5. $A:\ell_2\to\ell_2,\quad Ax = \{\alpha_k\xi_k\}_{k=1}^{\infty},\quad |\alpha_k|\leqslant c.$

13.6. $A:\ell_2\to\ell_2$,

$$Ax=\left(2\xi_3-\xi_1,\xi_2+4\xi_1,6\xi_1,\frac{3}{4}\,\xi_4,\frac{4}{5}\,\xi_5,\ldots,\frac{n}{n+1}\,\xi_{n+1},\ldots\right).$$

13.7. $A : L_2[-3,3] \to L_2[-3,3]$, $Ax(t) = \displaystyle\int_t^3 (4st - 5s^2)x(s)\,ds$.

13.8. $A:\ell_2\to c_0$, $Ax=x$.

13.9. $A:\ell_1\to\ell_1$, $Ax=(\xi_1+\xi_2,\xi_3+\xi_4,\xi_5+\xi_6,\ldots)$.

13.10. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $Ax(t)=e^{it}x(t)$.

13.11. $A:L_3[0,1]\to L_5[0,1]$, $Ax(t)=\displaystyle\int_0^t ts^2x(s)\,ds$.

13.12. $A:L_2\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to L_2\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $Ax(t)=(3+\cos 2t)x(t)$.

13.13. $A\colon \ell_p^n\to\ell_q^m$, $Ax=\left\{\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n}a_{k\ell}\xi_\ell\right\}_{k=1}^{m}$.

13.14. $Ax=(\alpha_n\xi_n,\alpha_{n+1}\xi_{n+1},\ldots)$, $\{\alpha_k\}\in m$,

а) $A\colon \ell_1\to\ell_4$; б) $A\colon \ell_1\to c_0$.

13.15. $A\colon \ell_2\to\ell_3$, $Ax=(0,0,0,\xi_4,\xi_5,\xi_6,\ldots)$.

13.16. $Ax=\left\{\displaystyle\sum_{\ell=1}^{5}\Big(2^ik+(2+i)\ell\Big)\xi_\ell\right\}_{k=1}^{3}$,

а) $A\colon \ell_3^5\to\ell_5^3$; б) $A\colon \ell_2^5\to\ell_2^3$.

13.17. $A\colon L_3[0,1]\to L_3[0,1]$, $(Ax)(t)=x(\sqrt{t})$.

13.18. $A\colon L_4[1,2]\to L_2[2,3]$, $(Ax)(t)=\cos(\pi t)\displaystyle\int_1^2 x(s)\,ds$.

13.19. $A\colon L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$, $(Ax)(t)=e^{it}x(3t-2)$.

13.20. $A\colon \ell_1 \to \ell_2, \;\; Ax = x.$

13.21. Пусть $A, A_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B, B_0 \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $C \in \mathcal{L}(Z, X)$, $D \in \mathcal{L}(H_3, H_1)$, пространства H_1, H_2, H_3 гильбертовы. Докажите, что

$$(\lambda A)^* = \lambda A^*, \qquad (\lambda B)^{\otimes} = \overline{\lambda} B^{\otimes},$$
$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}, \qquad (B^{-1})^{\otimes} = (B^{\otimes})^{-1}$$
$$(\text{если } \exists\, A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X),\ \exists\, B^{-1} \in \mathcal{L}(H_2, H_1)),$$
$$(A + A_0)^* = A^* + A_0^*, \qquad (B + B_0)^{\otimes} = B^{\otimes} + B_0^{\otimes},$$
$$(AC)^* = C^* A^*, \qquad (BD)^{\otimes} = D^{\otimes} B^{\otimes}.$$

Тема 14. Обратные операторы

Определение 14.1. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, оператор $A\colon D(A) \subset X \to Y$ называется *обратимым*, если для любого $y \in Im(A)$ уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение.

Если A обратим, то каждому $y \in Im(A)$ можно поставить в соответствие единственный элемент $x \in D(A)$, являющийся решением уравнения $Ax = y$. Оператор, осуществляющий это соответствие, называется *обратным к* A и обозначается A^{-1}.

Линейный оператор A, действующий из X в Y, обратим тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Ker} A = \{0\}, \tag{14.1}$$

где $\operatorname{Ker} A = \{x \in X\colon\ Ax = 0\}$ – ядро оператора A.

Нетрудно проверить, что если A – линейный оператор и A^{-1} – обратный к A, то A^{-1} также линеен.

Теорема 14.1 (теорема Банаха о непрерывности обратного оператора). *Пусть X и Y – банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, A – биекция X на Y. Тогда существует обратный оператор A^{-1} и он непрерывен.*

Пример 14.1. Выяснить, обратим ли оператор A, действующий в пространстве X. Если обратим, найти A^{-1}.

а) $X = C[0,1], \quad (Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds.$

б) $X = \ell_p, \quad Ax = (0, \xi_1, 0, \xi_2, 0, \xi_3, \ldots).$

в) $X = m, \quad Ax = (\xi_1, \xi_2^2, \xi_3^2, \xi_4^2, \ldots).$

Решение. а) Оператор, заданный формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds,$$

является линейным в $C[0,1]$. Обозначим $y(t) = Ax(t)$. Если функция $x \in \operatorname{Ker} A$, то $y(t) \equiv 0$. Так как функция y – это интеграл с переменным верхним пределом, то для $x \in \operatorname{Ker} A$ получаем

$$x(t) = y'(t) \equiv 0.$$

Следовательно, оператор A обратим. При этом обратный оператор задается формулой

$$A^{-1}y(t) = y'(t).$$

Найдем область определения A^{-1}. Покажем, что $D(A^{-1})$ или, то же самое, $Im(A)$ совпадает с множеством

$$M = \{y \in C^1[0,1] : \; y(0) = 0\}.$$

Действительно, если $x \in C[0,1]$, то функция $y(t) = Ax(t)$ непрерывно дифференцируема как интеграл с переменным верхним пределом и $y(0) = \int_0^0 x(s)\,ds = 0$, т. е. $D(A^{-1}) \subset M$. С другой стороны, для $y \in M$ имеем $x(t) = y'(t)$; следовательно,

$$Ax(t) = \int_0^t x(s)\,ds = \int_0^t y'(s)\,ds = y(t) - y(0) = y(t),$$

т. е. $M \subset D(A^{-1})$. Таким образом, действительно, $D(A^{-1}) = M$.

б) Обозначим $y = Ax = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots)$. Ясно, что оператор A, заданный формулой $Ax = (0, \xi_1, 0, \xi_2, 0, \xi_3, \ldots)$, является линейным в ℓ_p. Проверим, обратим ли он. Если $Ax = (0, \xi_1, 0, \xi_2, 0, \xi_3, \ldots) = (0, 0, 0, \ldots)$, то $x = (0, 0, 0, \ldots)$ и в силу (14.1) A обратим. Обратный оператор задается формулой

$$A^{-1}y = (\eta_2, \eta_4, \eta_6, \ldots).$$

Покажем, что $D(A^{-1}) = Im(A) = M$, где

$$M = \{y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots) \in \ell_p : \ \eta_{2j-1} = 0, \ j \in \mathbb{N}\}. \tag{14.2}$$

Действительно, для $x \in \ell_p$ последовательность $y = Ax \in \ell_p$, поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\eta_{2j}|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p,$$

т. е. $D(A^{-1}) \subset M$. Обратно, для $y \in M$ последовательность $x = A^{-1}y = (\eta_2, \eta_4, \eta_6, \ldots) \in \ell_p$, поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_{2k}|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p,$$

т. е. $M \subset D(A^{-1})$. Таким образом, равенство $D(A^{-1}) = M$ проверено.

в) Оператор, заданный формулой $Ax = (\xi_1, \xi_2^2, \xi_3^2, \xi_4^2, \ldots)$, не является линейным в пространстве m. По определению оператор обратим, если для любого $y \in Im(A)$ уравнение

$$Ax = y \tag{14.3}$$

имеет единственное решение. Рассмотрим произвольный

$$y \in Im(A) = \{y = \{\eta_k\} \in m : \ \eta_k \geqslant 0, \ k \geqslant 2\}, \quad \text{если} \quad \mathbb{P} = \mathbb{R},$$

$$y = \{\eta_k\} \in Im(A) = m, \quad \text{если} \quad \mathbb{P} = \mathbb{C}.$$

Тогда $x_1 = (\eta_1, \sqrt{\eta_2}, \sqrt{\eta_3}, \ldots)$ и $x_2 = (\eta_1, -\sqrt{\eta_2}, -\sqrt{\eta_3}, \ldots)$ являются решениями уравнения (14.3). Следовательно, оператор A необратим. ✌

☞ В задачах **14.1–14.12** выяснить, является ли оператор обратимым. Если обратим, найти обратный. Будет ли обратный оператор непрерывным?

14.1. $A, B\colon \ell_1 \to \ell_1, \quad Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots), \quad Bx = (\xi_2, \xi_3, \ldots)$.

14.2. $A\colon C[-1,1] \to C[-1,1]$,

$$(Ax)(t) = \int_{-1}^{t} (1 + \operatorname{sign} s)\, x(s)\, ds.$$

14.3. $A\colon \ell_2 \to \ell_2, \quad Ax = \big\{\lambda_n \xi_n\big\}_{n=1}^{\infty}, \ \sup\limits_n |\lambda_n| < \infty.$

14.4. $A\colon D(A) \subset C[0,1] \to C[0,1], \ (Ax)(t) = x'(t)$,

а) $D(A) = C^1[0,1]$;

б) $D(A) = \{x \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}$;

в) $D(A) = \{x \in C^1[0,1] : x(0) = x'(1)\}$;

г) $D(A) = \{x \in C^1[0,1] : x(0) = kx(1)\}$.

14.5. $A\colon \ell_1 \to \ell_1, \ Ax = (\xi_1, \xi_2^3, \xi_3^5, \ldots, \xi_k^{2k-1}, \ldots)$.

14.6. $(Ax)(t) = \sqrt{t}x(t)$,

а) $A\colon C[0,1] \to C[0,1]$; б) $A\colon L_1[0,1] \to L_1[0,1]$.

14.7. $A\colon C[0,1] \to C[0,1], \ (Ax)(t) = x(t) + \displaystyle\int_0^1 e^{s+t} x(s)\, ds.$

14.8. $A\colon C^1[a,b] \to C[a,b], \ (Ax)(t) = (t^2+1)x(t)$.

14.9. $A\colon L_3[a,b] \to L_1[a,b], \ (Ax)(t) = x^3(t)$.

14.10. $A\colon \ell_1 \to \ell_2, \ Ax = x$.

14.11. $A\colon D(A) \subset \ell_2 \to \ell_1,\ \ D(A) = \{x \in \ell_2 : Ax \in \ell_1\},$
$Ax = \{n\xi_n\}.$

14.12. $A\colon D(A) \subset C[0,1] \to C[0,1],\ \ (Ax)(t) = x''(t),$
$D(A) = \{x \in C^2[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}.$

14.13. Пусть $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, X – банахово пространство, A – инъективно. Докажите, что A^{-1} непрерывен тогда и только тогда, когда $Im(A)$ – банахово пространство.

Тема 15. Спектр линейного оператора

Пусть X – банахово пространство над полем $\mathbb{C}$, A – линейный оператор, $A\colon D(A) \subset X \to X$, E – тождественный оператор из X в X.

Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярной точкой оператора* A, если $\operatorname{Ker}(A - \lambda E) = \{0\}$, $Im(A - \lambda E) = X$, оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ ограничен, т. е. оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ существует и $(A - \lambda E)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Множество всех регулярных точек оператора A называется *резольвентным множеством оператора* A и обозначается $\rho(A)$.

Множество $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$ называется *спектром оператора* A и обозначается $\sigma(A)$.

Операторная функция $R_A : \rho(A) \to \mathcal{L}(X)$, определенная формулой $R_A(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}$, называется *резольвентой оператора* A.

Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением оператора* A, если существует элемент $e_\lambda \in X$ такой, что $e_\lambda \neq 0$ и $Ae_\lambda = \lambda e_\lambda$. При этом e_λ называется *собственным вектором оператора* A*, соответствующим собственному значению* λ.

Множество собственных значений оператора A называется *дискретным спектром* оператора A (или *точечным спектром*) и обозначается $\sigma_d(A)$. Ясно, что все собственные значения оператора A принадлежат $\sigma(A)$.

Часто спектр оператора A делят на три части:
$\sigma_d(A)$ – *точечный*,
$\sigma_c(a) = \{\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_d(A) : \overline{Im(A - \lambda E)} = X\}$ – *непрерывный*,
$\sigma_r(a) = \{\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_d(A) : \overline{Im(A - \lambda E)} \neq X\}$ – *остаточный*.

Теорема 15.1. *Пусть X – банахово пространство над $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(X)$.*

1. *Если $|\lambda| > \|A\|$, то $\lambda \in \rho(A)$ и при этом*

$$R_A(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n.$$

2. *Спектр $\sigma(A)$ замкнут и* $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} \leqslant \|A\|$.
3. $\sigma(A) \neq \varnothing$.

Определение 15.1. Пусть X и Y – нормированные пространства. Оператор $A\colon D(A) \subset X \to Y$ называется *замкнутым*, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset D(A)$ из условий $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ и $Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$ следует, что $x_0 \in D(A)$ и $Ax_0 = y_0$.

Теорема 15.2. *Если $\rho(A) \neq \varnothing$, то A замкнут.*

Пример 15.1. Пусть

$$\varphi(t) = \begin{cases} \operatorname{tg} t, & t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right], \\ 0, & t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right), \end{cases} \qquad (Ax)(t) = \varphi(t) \cdot x(t),$$

а) $X = C\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$; б) $X = L_2\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Найти спектр и резольвенту оператора A. Провести классификацию точек спектра.

Решение. Множество значений функции $\varphi(t)$ есть отрезок $[0,1]$. Если $\lambda \notin [0,1]$, то уравнение $(A-\lambda E)x = y$ разрешимо для всякого y и в пространстве $C\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$, и в пространстве $L_2\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$. Его решение $x(t) = (\varphi(t)-\lambda)^{-1}y(t)$, при этом для обоих пространств справедлива оценка

$$\|x\| \leqslant \max_{t\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]} |(\varphi(t)-\lambda)^{-1}| \cdot \|y\|.$$

Значит, для всякого $\lambda \notin [0,1]$ существует оператор $(A-\lambda E)^{-1}$, определенный и ограниченный на X; т. е. эти значения λ являются регулярными; другими словами, $\mathbb{C}\setminus[0,1] \subset \rho(A)$.

Если $\lambda = 0$, то уравнение $(A-\lambda E)x = 0$ имеет нетривиальное решение как в случае «а», так и в случае «б». Например,

$$x(t) = \begin{cases} -t, & t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right), \\ 0, & t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

Поэтому $0 \in \sigma_d(A)$.

Пусть $\lambda \in (0,1]$ и точка $t_0 \in \left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ такова, что $\operatorname{tg} t_0 = \lambda$. Уравнение $(A-\lambda E)\,x = 0$ имеет единственное решение $x(t) \equiv 0$ в $C\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ и $x(t)$ эквивалентно 0 в $L_2\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$. Следовательно, точки полуинтервала $(0,1]$ не могут быть точками дискретного (точечного) спектра оператора A.

Уравнение $(A-\lambda E)\,x = y$ неразрешимо при $y(t) \equiv 1$ ни в случае «а», ни в случае «б». В случае «а» его формальное решение

$$x(t) = (\varphi(t)-\lambda)^{-1} = \begin{cases} -\lambda^{-1}, & t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right), \\ (\operatorname{tg} t - \lambda)^{-1}, & t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \setminus \{t_0\} \end{cases}$$

терпит разрыв в точке t_0 со свойством $\operatorname{tg}(t_0) = \lambda$. В случае «б», как нетрудно видеть, функция $|x(t)|^2$ неинтегрируема по Риману в несобственном смысле на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$, а значит, неинтегрируема и по Лебегу. Поэтому она не принадлежит и $L_2\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. Следовательно, $(0,1]\subset\sigma(A)$.

Итак, $\sigma(A)=[0,1],\ \sigma_d(A)=\{0\}$,

$$(R_A(\lambda)y)(t)=(\varphi(t)-\lambda)^{-1}y(t).$$

Осталось среди точек $(0,1]$ выделить точки непрерывного и остаточного спектра. Если $\lambda\in(0,1]$, то все функции $y(t)\in Im(A-\lambda E)$ равны 0 в точке t_0 ($\operatorname{tg}t_0=\lambda$). Отсюда мы заключаем, что в пространстве $C\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ замыкание $\overline{Im(A-\lambda E)}$ не совпадает с $C\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. Поэтому полуинтервал $(0,1]$ является остаточным спектром A, т. е. $(0,1]=\sigma_r(A)$.

Убедимся, что в пространстве $L_2\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ точки $(0,1]$ являются точками непрерывного спектра оператора A. Для этого достаточно показать, что для любого $y\in L_2\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ найдется последовательность $\{y_n\}\subset(A-\lambda E)X$ такая, что $y_n\to y$ при $n\to\infty$. Пусть $\lambda\in(0,1)$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}\subset L_2\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$:

$$x_n(t)=y(t)\cdot\begin{cases}-\lambda^{-1}, & t\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right);\\ (\operatorname{tg}t-\lambda)^{-1}, & t\in\left[0,t_0-\frac{1}{n}\right]\cup\left[t_0+\frac{1}{n},\frac{\pi}{4}\right];\\ 0, & t\in\left(t_0-\frac{1}{n},t_0+\frac{1}{n}\right),\end{cases}$$

для достаточно больших n. Имеем

$$y_n(t)=\Big((A-\lambda E)x_n\Big)(t)=$$
$$=\begin{cases}y(t), & t\in\left[-\frac{\pi}{4},t_0-\frac{1}{n}\right]\cup\left[t_0+\frac{1}{n},\frac{\pi}{4}\right];\\ 0, & t\in\left(t_0-\frac{1}{n},t_0+\frac{1}{n}\right),\end{cases}$$

$$\|y - y_n\|^2 = \int_{t_0-\frac{1}{n}}^{t_0+\frac{1}{n}} |y(t)|^2\,dt.$$

В силу свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега последнее выражение стремится к 0 при $n \to \infty$. Отсюда $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Значит, в случае «б» точки интервала $(0,1)$ принадлежат непрерывному спектру оператора A.

Аналогично доказывается, что $\lambda = 1 \in \sigma_c(A)$. Таким образом, $\sigma_c(A) = (0,1]$. ✌

Пример 15.2. Пусть $Ax = \left\{ \dfrac{n+1}{n}\,\xi_n \right\}_{n=1}^{\infty}$,

а) $X = \ell_1$; б) $X = \ell_\infty$.

Найти спектр и резольвенту оператора A. Провести классификацию точек спектра.

Решение. Найдем сначала дискретный спектр оператора A. Для этого решим однородное уравнение

$$Ax - \lambda x = 0 \tag{15.1}$$

или, эквивалентно, систему уравнений

$$\left(\frac{n+1}{n} - \lambda\right)\xi_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{15.2}$$

Если $\lambda \neq \dfrac{n+1}{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то эта система имеет только тривиальное решение. Если же $\lambda = \dfrac{n_0+1}{n_0}$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$, то существует нетривиальное решение системы (15.2):

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & n = n_0, \\ 0, & n \neq n_0, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

т. е. уравнение (15.1) имеет нетривиальное решение $x = \{\delta_{n_0 k}\}_{k=1}^{\infty}$ для $\lambda = \dfrac{n_0+1}{n_0}$. Следовательно, для любого $\lambda = \dfrac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, уравнение (15.1) имеет нетривиальное решение $x = \{\delta_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$. Значит, $\sigma_d(A) = \left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ в обоих случаях.

Пусть теперь $\lambda \notin \sigma_d(A)$. Для $y = \{\eta_n\} \in X$ решим неоднородное уравнение

$$Ax - \lambda x = y$$

или, эквивалентно, систему уравнений

$$\left(\frac{n+1}{n} - \lambda\right)\xi_n = \eta_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Формальное решение этой системы есть

$$x = \{\xi_n\} = \left\{\frac{\eta_n}{\dfrac{n+1}{n} - \lambda}\right\} = (A - \lambda E)^{-1}y.$$

Это решение принадлежит пространству X, если

$$\text{а) } \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\eta_n|}{\left|\dfrac{n+1}{n} - \lambda\right|} < \infty; \quad \text{б) } \|x\| = \sup_n \frac{|\eta_n|}{\left|\dfrac{n+1}{n} - \lambda\right|} < \infty.$$

Пусть $d = \inf\limits_n \left|\dfrac{n+1}{n} - \lambda\right|$. Поскольку $\dfrac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, то если $\lambda \neq 1$, то $d > 0$ и $\|x\| \leqslant \dfrac{\|y\|}{d} < \infty$ в обоих случаях. Таким образом, если $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq \dfrac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, то неоднородное уравнение $Ax - \lambda x = y$ разрешимо для всякого $y \in X$. Так как оператор $A - \lambda E$ – линейная непрерывная биекция банахова пространства X на X, то по теореме Банаха оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ непрерывен на X. Значит, λ является регулярным значением.

Пусть $\lambda = 1$. Поскольку спектр – множество замкнутое, то из того, что $\sigma_d(A) = \left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, можно сразу заключить, что

λ – точка спектра. Итак,

$$\sigma(A) = \{1\} \cup \left\{ \frac{n+1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \qquad R_A(\lambda)y = \left\{ \frac{\eta_n}{\dfrac{n+1}{n} - \lambda} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Определим, принадлежит ли $\lambda = 1$ остаточному или непрерывному спектру. Формально имеем $(A - E)^{-1}y = \{n\eta_n\}$. Так как множество финитных последовательностей плотно в ℓ_1 и принадлежит образу $Im(A - \lambda E)$, то замыкание $\overline{Im(A - \lambda E)} = \ell_1$. Значит, в случае «а» $1 \in \sigma_c(A)$.

В случае «б»

$$y = (A - E)x = \left\{ \frac{\xi_n}{n} \right\} \in c_0.$$

Как известно, c_0 есть замкнутое подпространство ℓ_∞ и $c_0 \neq \ell_\infty$. Отсюда $\overline{Im(A - \lambda E)} \subset c_0 \neq \ell_\infty$. Поэтому в случае «б» $1 \in \sigma_r(A)$. ✌

☞ В задачах **15.1–15.11** найти спектр и резольвенту оператора $A \in \mathcal{L}(X)$. Провести классификацию точек спектра.

15.1. $X = \ell_2$, $Ax = (\xi_1 - \xi_2, \xi_1 + \xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots, \xi_n, \ldots)$.

15.2. $X = \ell_1$, $Ax = \left\{ \frac{1}{n} \xi_n \right\}$.

15.3. $X = \ell_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $Ax = (\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \ldots)$.

15.4. ✫ $X = \ell_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$.

15.5. $X = C\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$, $(Ax)(t) = \sin t \cdot x(t)$.

15.6. $X = L_1[0, 1]$, $(Ax)(t) = \sqrt{t} \cdot x(t)$.

15.7. $X = C[0, 2\pi]$, $(Ax)(t) = e^{it} \cdot x(t)$.

15.8. $X = L_2[0,1]$,

$$(Ax)(t) = \begin{cases} 5x(t), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ 0, & \dfrac{1}{3} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

15.9. $X = C[1,2]$, $(Ax)(t) = \displaystyle\int_1^t x(s)\,ds$.

15.10. $X = C[0,1]$, $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^1 (t-s)x(s)\,ds$.

15.11. ✯ $X = C[0,1]$, $(Ax)(t) = x(0) + t \cdot x(1)$.

☞ В задачах **15.12–15.15** доказать, что оператор $A\colon D(A) \subset X \to X$ замкнут, найти его спектр; в задачах **15.12–15.14** найти резольвенту в тех случаях, когда она существует.

15.12. $X = \ell_2$, $Ax = \{n\xi_n\}$, $D(A) = \{x \in \ell_2 : Ax \in \ell_2\}$.

15.13. $X = L_1[0,1]$, $(Ax)(t) = \dfrac{x(t)}{\sqrt{t}}$,

$D(A) = \{x \in L_1[0,1] : Ax \in L_1[0,1]\}$.

15.14. $X = C[a,b]$, $(Ax)(t) = x'(t)$,

а) $D(A) = C^1[a,b]$; б) $D(A) = \{x \in C^1[a,b] : x(a) = 0\}$;

в) $D(A) = \{x \in C^1[a,b] : x(a) = x(b)\}$.

15.15. $X = C[0,\pi]$, $(Ax)(t) = x''(t)$,

а) $D(A) = \{x \in C^2[0,\pi] : x(0) = x(\pi) = 0\}$;

б) $D(A) = \{x \in C^2[0,\pi] : x'(0) = x'(\pi) = 0\}$;

в) $D(A) = \{x \in C^2[0,\pi] : x(0) = x(\pi),\ x'(0) = x'(\pi)\}$;

г) $D(A) = \{x \in C^2[0,\pi] : x(0) = x'(0) = 0\}$.

15.16. Пусть $Ax = x$, а) $A\colon C[a,b] \to C[a,b]$;

б) $A\colon C^1[a,b] \subset C[a,b] \to C[a,b]$.

Замкнут ли оператор A? Найти его спектр, определить характер точек спектра.

☞ Доказать утверждения **15.17–15.22**.

15.17. Пусть $A\colon D(A) \subset X \to X$, A – линейный оператор, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Тогда

а) $\sigma(A + \lambda_0 E) = \sigma(A) + \lambda_0$;

б) $\sigma(\lambda_0 A) = \lambda_0 \sigma(A)$, если $\lambda_0 \neq 0$.

15.18. Пусть $A\colon D(A) \subset X \to X$, A – линейный оператор, существует оператор A^{-1}. Тогда $\sigma_d(A^{-1}) = \big(\sigma_d(A)\big)^{-1}$, где $\big(\sigma_d(A)\big)^{-1} = \left\{\dfrac{1}{\lambda} :\ \lambda \in \sigma_d(A)\right\}$.

15.19. Если $A \in \mathcal{L}(X)$ и $0 \notin \sigma(A)$, то $\sigma(A^{-1}) = 1/\sigma(A)$.

15.20. Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$. Тогда если существует последовательность $\{x_n\} \subset X$ такая, что $\|x_n\| = 1$ и $\|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, то $\lambda \in \sigma(A)$.

15.21. Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда

а) $\sigma_d(A^n) = \big(\sigma_d(A)\big)^n$, где $\big(\sigma_d(A)\big)^n = \{\lambda^n :\ \lambda \in \sigma_d(A)\}$;

б) $\sigma(A^n) = \big(\sigma(A)\big)^n$, где $\big(\sigma(A)\big)^n = \{\lambda^n :\ \lambda \in \sigma(A)\}$.

15.22. Пусть $A \in \mathcal{L}(H)$, H – гильбертово пространство. Тогда

а) $\sigma(A^{\otimes}) = \overline{\sigma(A)}$;

б) $\lambda \in \sigma_d(A) \implies \overline{\lambda} \in \sigma_d(A^{\otimes}) \cup \sigma_r(A^{\otimes})$;

в) $\lambda \in \sigma_r(A) \implies \overline{\lambda} \in \sigma_d(A^{\otimes})$;

г) $\sigma_c(A^{\otimes}) = \overline{\sigma_c(A)}$.

15.23. Возможно ли, что $A \in \mathcal{L}(X)$, $A^2 = 0$, $\lambda \in \sigma_d(A)$, $\lambda \neq 0$?

15.24. Построить линейный оператор, для которого спектром является данное замкнутое множество в комплексной плоскости.

15.25. Построить линейный оператор, для которого множество собственных значений совпадает с заданным множеством в комплексной плоскости.

Тема 16. Вполне непрерывные (компактные) операторы

Определение 16.1. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства. Оператор $A\colon X \to Y$ называется *компактным*, если он каждое ограниченное множество переводит в предкомпактное.

Непрерывный компактный оператор называется *вполне непрерывным.*

Любой компактный оператор является ограниченным.

Для линейных операторов понятия *компактный* и *вполне непрерывный* совпадают.

Линейный оператор A компактен тогда и только тогда, когда предкомпактно множество $A(B[0,1])$.

Линейная комбинация вполне непрерывных (компактных) операторов является вполне непрерывным (компактным) оператором.

Теорема 16.1. *Пусть X – линейное нормированное пространство, Y – банахово пространство, $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ –*

последовательность компактных операторов. Если последовательность $\{A_n\}$ сходится по норме к оператору A, то A – линейный компактный оператор.

Теорема 16.2. *Пусть X, Y, Z – линейные нормированные пространства. Если $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, а $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ и хотя бы один из них компактен, то оператор BA компактен.*

Следствие 16.1. *Пусть X, Y – бесконечномерные линейные нормированные пространства, оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ компактен и $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Тогда A^{-1} – неограниченный линейный оператор.*

Теорема 16.3. *Если X – бесконечномерное банахово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $A \in \mathcal{L}(X)$ – вполне непрерывный оператор, то $\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \{0\}$, $\sigma_d(A)$ не более чем счетный.*

Пример 16.1. Будет ли оператор $A\colon C\,[0, \pi] \to C\,[0, \pi]$, действующий по правилу

$$(Ax)(t) = \sin(3t) \cdot x(t),$$

вполне непрерывным?

Решение. Докажем, что оператор A не является вполне непрерывным. Построим ограниченное множество (последовательность) функций $\{x_n\}$ так, чтобы множество $\{Ax_n\}$ не являлось предкомпактным. По теореме Арцела множество функций M предкомпактно в пространстве $C[a, b]$ тогда и только тогда, когда M равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Мы будем строить множество $\{x_n\}$ так, чтобы множество $\{Ax_n\}$ не являлось равностепенно непрерывным.

Возьмем произвольную точку $t_0 \in (0, \pi)$, в которой $\sin(3t_0) \neq 0$. Определим последовательность непрерывных функций $\{x_n\}$ следующим образом: $x_n(t) = 0$ вне промежутка $\left(t_0 - \dfrac{1}{n}, t_0 + \dfrac{1}{n}\right)$, $x_n(t_0) = \dfrac{1}{\sin(3t_0)}$, а на отрезках $\left[t_0 - \dfrac{1}{n}, t_0\right]$, $\left[t_0, t_0 + \dfrac{1}{n}\right]$ функция x_n линейна.

Множество $\{Ax_n\}$ не является равностепенно непрерывным, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки $t', t'' \in [0, \pi]$ и функция $Ax_n(t)$ со свойством

$$|t' - t''| < \delta, \quad \text{а} \quad |(Ax_n)(t') - (Ax_n)(t'')| \geqslant \varepsilon.$$

Положим $\varepsilon = 1$, $t' = t_0$, $t'' = t_0 + \dfrac{\delta}{2}$ и выберем номер n из условия $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\delta}{2}$. Тогда

$$\big|(Ax_n)(t') - (Ax_n)(t'')\big| = 1 - 0 = \varepsilon.$$

Следовательно, оператор A не является вполне непрерывным.

✌

Пример 16.2. Будет ли оператор $A\colon L\,[0,1] \to L\,[0,1]$,

$$(Ax)(t) = \sqrt{t} \cdot x(t),$$

вполне непрерывным?

Решение. Докажем, что оператор A не является вполне непрерывным. Для этого достаточно привести пример множества M, ограниченного в $L[0,1]$ и такого, что его образ $N = A(M)$ непредкомпактен в $L[0,1]$. Рассмотрим множество функций $N = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$y_n(t) = \begin{cases} 2^n, & t \in E_n, \\ 0, & t \in [0,1] \setminus E_n, \end{cases} \qquad E_n = \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right].$$

Убедимся, что множество N ограничено, но непредкомпактно. Действительно, $\|y_n\| = \displaystyle\int_{E_n} 2^n\,dt = 1$, и, следовательно, N ограничено. Далее, если $n > m$ (для определенности), то $E_n \subset E_m$ и

$$\|y_n - y_m\| = \int_{E_n} (2^n - 2^m)\,dt + \int_{E_m \setminus E_n} 2^m\,dt >$$
$$> \int_{E_n} (2^n - 2^m)\,dt = 1 - \frac{2^m}{2^n} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Поскольку расстояние между любыми двумя элементами последовательности $\{y_n\}$ больше $\frac{1}{2}$, из нее нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность; значит, множество N не предкомпактно. Возьмем в качестве множества M прообраз N, т. е.

$$M = \left\{ \frac{y_n}{\sqrt{t}} \right\}.$$

Нам осталось проверить, что M ограничено. Функция $\frac{1}{\sqrt{t}}$ на промежутке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, а значит, и на каждом множестве E_n, ограничена числом 2. Отсюда легко заключаем, что

$$\left\| \frac{y_n}{\sqrt{t}} \right\| = \int_{E_n} \left| \frac{y_n(t)}{\sqrt{t}} \right| dt \leqslant 2\|y_n\| = 2.$$

Таким образом, мы доказали, что оператор A не является предкомпактным. ✌

Пример 16.3. Доказать, что оператор $A\colon C[0,1] \to L[0,1]$,

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\, ds,$$

вполне непрерывен.

Решение. Оператор A можно представить в виде суперпозиции двух линейных операторов: $A = J \cdot A_0$, где

$$(A_0 x)(t) = \int_0^t x(s)\, ds, \qquad A_0\colon C[0,1] \to C[0,1],$$
$$(Jy)(t) = y(t), \qquad J\colon C[0,1] \to L[0,1].$$

Покажем, что оператор J непрерывен, а оператор A_0 вполне непрерывен. Отсюда по теореме 16.2 будет следовать, что оператор A вполне непрерывен.

Непрерывность оператора J легко следует из оценки

$$\|Jy\| = \int_0^1 |y(t)|\,dt \leqslant \max_{t\in[0,1]} |y(t)| = \|y\|.$$

Докажем, что оператор A_0 вполне непрерывен. Пусть M – ограниченное подмножество из $C[0,1]$. Убедимся, что для его образа, т. е. для множества $N = A_0(M)$, выполняются условия теоремы Арцела, и, значит, оно предкомпактно. Пусть число $R > 0$ таково, что для любого $x \in M$ выполняется неравенство $\|x\| \leqslant R$. Тогда для $y \in N = A_0(M)$ имеем

$$\|y\| = \max_{t\in[0,1]} \left| \int_0^t x(s)\,ds \right| \leqslant R,$$

т. е. множество N ограничено. Далее, семейство функций N равностепенно непрерывно, поскольку

$$|y(t') - y(t'')| = \left| \int_{t'}^{t''} x(s)\,ds \right| \leqslant R|t'' - t'| < \varepsilon,$$

если $|t'' - t'| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{R}$. Итак, мы проверили, что множество N предкомпактно. Таким образом, вполне непрерывность оператора A_0, а значит и оператора A, доказана. ✌

☞ В задачах **16.1–16.10** выяснить, является ли оператор вполне непрерывным.

16.1. $(Ax)(t) = \displaystyle\int_2^5 e^{ts} x(s)\,ds,$

а) $A\colon C[2,5] \to C[2,5]$; б) $A\colon L_2[2,5] \to L_2[2,5]$;

в) $A\colon C[2,5] \to L_1[2,5]$; г) $A\colon L_1[2,5] \to C[2,5]$.

16.2. $(Ax)(t) = x(t^{2/3}),\ \ A\colon C[0,1] \to C[0,1]$.

16.3. $Ax = \left\{ \dfrac{\xi_k}{k} \right\}_{k=1}^{\infty},\ \ A\colon \ell_1 \to \ell_2$.

16.4. $(Ax)(t) = \operatorname{tg} t \cdot x(t),\ \ A\colon C\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \to C\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right].$

16.5. $(Ax)(t) = \ln(1+t)\cdot x(t), \quad A\colon C^1[0,2] \to C[0,2].$

16.6. $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^t \sin(ts)\cdot x(s)\,ds + 3x(t),\ \ A\colon C[0,1] \to C[0,1].$

16.7. $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^t \sin(ts)\cdot x(s)\,ds + x\left(\frac{1}{2}\right),$
$A\colon C[0,1] \to C[0,1].$

16.8. $Ax = x,$

а) $A\colon C[a,b] \to L_2[a,b]$; б) $A\colon C^1[a,b] \to C[a,b]$;

в) $A\colon \ell_1 \to \ell_2$.

16.9. $Ax = (0, \xi_1, 0, \xi_2, 0, \xi_3, 0, \xi_4, \ldots), \quad A\colon \ell_p \to \ell_p.$

16.10. $Ax = (0, \xi_1, 0, \xi_2, 0, \xi_3, 0, 0, 0 \ldots), \quad A\colon \ell_p \to \ell_p.$

16.11. Доказать, что оператор $(Ax)(t) = \displaystyle\int_c^d K(t,s)x(s)\,ds$ с ядром $K(t,s) \in C\big([a,b]\times[c,d]\big)$ является вполне непрерывным, если

а) $A\colon C[c,d] \to C[a,b]$; б) $A\colon C[c,d] \to L_p[a,b]$;

в) $A\colon L_p[c,d] \to C[a,b]$; г) $A\colon L_p[c,d] \to L_q[a,b]$.

16.12. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$, оператор A – вполне непрерывный, оператор B не является вполне непрерывным. Будет ли оператор $A+B$ вполне непрерывным?

16.13. Для каких $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператор $Ax = \{\alpha_k \xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $A\colon \ell_p \to \ell_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ вполне непрерывен?

☞ В задачах **16.14–16.17** выяснить, является ли оператор A вполне непрерывным.

16.14. ✯ $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x(s)}{|t-s|^{\alpha}}\,ds,\ \ A\colon C[0,1] \to C[0,1].$

16.15. $(Ax)(t)=\begin{cases} x(t), & t\in[1,2]\,; \\ 0, & t\in[0,3]\setminus[1,2]\,; \end{cases}$ $A\colon L_2[0,3]\to L_2[0,3]$.

16.16. $(Ax)(t)=x'(t)$, $A\colon C^1[a,b]\to C[a,b]$.

16.17. $(Ax)(t)=x''(t)$, $A\colon C^2[a,b]\to C[a,b]$.

☞ В задачах **16.18–16.22** выяснить, является ли оператор A компактным, вполне непрерывным.

16.18. $(Ax)(t)=|x(t)|$,

а) $A\colon C[a,b]\to C[a,b]$; б) $A\colon L_p[a,b]\to L_p[a,b]$.

16.19. $(Ax)(t)=\cos(x(t))$, $A\colon C[a,b]\to C[a,b]$.

16.20. $(Ax)(t)=x^2(t)$, $A\colon C^1[a,b]\to C[a,b]$.

16.21. $Ax=\{\xi_k^2\}_{k=1}^{\infty}$, $A\colon \ell_p\to\ell_p$.

16.22. $Ax=\left\{\dfrac{\xi_k^2}{k^2}\right\}_{k=1}^{\infty}$, $A\colon \ell_2\to\ell_2$.

16.23. $A\colon C[0,1]\to\langle\mathbb{R},\|\cdot\|_{|\cdot|}\rangle$, Ax равно наибольшему значению аргумента t, при котором $x(t)$ принимает наибольшее значение.

16.24. $Ax=\{\operatorname{sign}\xi_k\}$, $A\colon m\to m$, $\mathbb{P}=\mathbb{R}$.

Тема 17. Интегральные уравнения

Пусть X – банахово пространство, $A : X \to X$ – компактный линейный оператор. Рассмотрим четыре уравнения:

$$(1)\quad x = Ax + y; \qquad (1^*)\quad x^* = A^*x^* + y^*;$$
$$(1^\circ)\quad z = Az; \qquad (1^{*\circ})\quad z^* = A^*z^*.$$

Следующие теоремы Фредгольма устанавливают связь между свойствами решений этих четырех уравнений.

Теорема 17.1 (альтернатива Фредгольма). *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *уравнение* (1) *разрешимо при любом* y;
2) *уравнение* (1°) *имеет только нулевое решение*;
3) *уравнение* (1^*) *разрешимо при любом* y;
4) *уравнение* $(1^{*\circ})$ *имеет только нулевое решение.*

Теорема 17.2. *Однородные уравнения* (1°) *и* $(1^{*\circ})$ *имеют одно и то же и притом конечное число линейно независимых решений.*

Теорема 17.3. *Уравнение* (1) *разрешимо для тех и только для тех* y, *которые ортогональны каждому решению* z^* *уравнения* $(1^{*\circ})$, *т. е.* $\langle y, z^* \rangle = 0$.

Уравнение (1^*) *разрешимо для тех и только для тех* y^*, *которые ортогональны каждому решению* z *уравнения* (1°), *т. е.* $\langle z, y^* \rangle = 0$.

Важными частными случаями уравнения (1) являются интегральные уравнения Фредгольма

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds + y(t) \tag{17.1}$$

и Вольтерра

$$x(t) = \int_a^t K(t,s) x(s)\, ds + y(t).$$

Ясно, что для уравнения Фредгольма оператор A задается равенством $(Ax)(t) = \displaystyle\int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds$, а для уравнения Вольтерра – равенством $(Ax)(t) = \displaystyle\int_a^t K(t,s)\, x(s)\, ds$. Функция $K(t,s)$ называется *ядром* интегрального оператора A.

Если ядро $K \in L_2([a,b]^2)$, то A – компактный оператор в $L_2[a,b]$. Если ядро K непрерывно по совокупности переменных, то A – компактный оператор в $C[a,b]$.

Некоторые методы решения интегральных уравнений

1. Уравнения с вырожденным ядром

Ядро $K(t,s)$ называется *вырожденным*, если оно представимо в виде

$$K(t,s) = \sum_{\ell=1}^{n} P_\ell(t) Q_\ell(s).$$

Можно считать, что $\{P_\ell\}_{\ell=1}^n$ – линейно независимая система функций.

Уравнение (17.1) в этом случае можно записать следующим образом:

$$x(t) = \sum_{\ell=1}^{n} P_\ell(t) \int_a^b Q_\ell(s) x(s)\, ds + y(t). \tag{17.2}$$

Обозначим $\int_a^b Q_\ell(s)x(s)\,ds = q_\ell$. Тогда, если решение уравнения (17.1) существует, оно имеет вид

$$x(t) = \sum_{\ell=1}^{n} q_\ell P_\ell(t) + y(t). \tag{17.3}$$

Подставив это выражение для x в уравнение (17.1), получим для неизвестных коэффициентов $\{q_\ell\}_{\ell=1}^n$ систему линейных уравнений. Решение уравнения (17.1) сводится к решению системы n линейных уравнений. Этот метод решения называют «методом неопределенных коэффициентов».

2. Уравнения Вольтерра

Пусть $P \in C^1[a,b]$ и $P(t) \neq 0,\ t \in [a,b]$; $Q \in C[a,b]$, тогда для уравнений Вольтерра вида

$$x(t) = P(t)\int_a^t Q(s)\,x(s)\,ds + y(t)$$

в пространстве $C[a,b]$ нахождение решения эквивалентно решению следующей задачи Коши, если $y \in C^1[a,b]$:

$$\left(\frac{x(t) - y(t)}{P(t)}\right)' = Q(t)\,x(t), \qquad x(a) = y(a).$$

3. Нахождение решений в виде ряда

Уравнение

$$x = \lambda Ax + y \tag{17.4}$$

в случае непрерывной обратимости оператора $E - \lambda A$ равносильно соотношению $x = (E - \lambda A)^{-1}y$. Поэтому если $\|\lambda A\| < 1$, то

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n y. \tag{17.5}$$

Известно, что если A – оператор Вольтерра и ядро $K(t,s) \in C([a,b]^2)$ или $K \in L_2([a,b]^2)$, то в $C[a,b]$ и в $L_2[a,b]$

соответственно оператор $E - \lambda A$ непрерывно обратим и существуют такие число $\alpha > 0$ и номер N, что для всех $n > N$ справедлива оценка $\|\lambda^n A^n\| \leqslant \alpha^n/n!$. Следовательно, ряд (17.5) сходится и его сумма является решением уравнения (17.4).

Пример 17.1. Решить интегральное уравнение

$$x(t) - \lambda \int_{-1}^{1} (ts - t^2 s^2)\, x(s)\, ds = t^2 + t^4$$

и найти спектр соответствующего интегрального оператора в пространстве $C[-1,1]$.

Решение. Ядро интегрального оператора

$$(Ax)(t) = \int_{-1}^{1} (ts - t^2 s^2)\, x(s)\, ds$$

вырожденное, поэтому уравнение можно решать методом неопределенных коэффициентов. Вынесем функции, зависящие от t, за знак интеграла и запишем исходное уравнение в виде

$$x(t) = \lambda \left(t \int_{-1}^{1} s x(s)\, ds - t^2 \int_{-1}^{1} s^2 x(s)\, ds \right) + t^2 + t^4. \qquad (17.6)$$

Отсюда следует, что если решение уравнения (17.6) существует, то оно имеет вид

$$x(t) = \lambda(t \cdot c_1 - t^2 \cdot c_2) + t^2 + t^4. \qquad (17.7)$$

Подставив (17.7) в (17.6), получим тождество (на $[-1,1]$)

$$\begin{aligned} &\lambda(c_1 t - c_2 t^2) + t^2 + t^4 \equiv \\ &\qquad \equiv \lambda \Bigg(t \int_{-1}^{1} \big(s\lambda(c_1 s - c_2 s^2) + s(s^2 + s^4) \big)\, ds - \\ &\qquad - t^2 \int_{-1}^{1} \big(s^2 \lambda(c_1 s - c_2 s^2) + s^2(s^2 + s^4) \big)\, ds \Bigg) + t^2 + t^4. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при t и t^2, получим два уравнения:

$$c_1 - \int_{-1}^{1} \big(\lambda s(c_1 s - c_2 s^2) + s(s^2 + s^4)\big)\, ds = 0,$$

$$-c_2 + \int_{-1}^{1} \big(\lambda s^2(c_1 s - c_2 s^2) + s^2(s^2 + s^4)\big)\, ds = 0.$$

Вычислив интегралы, получим систему линейных уравнений для нахождения c_1 и c_2:

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{2}{3}\lambda\right) c_1 = 0, \\ \left(1 + \dfrac{2}{5}\lambda\right) c_2 = \dfrac{24}{35}. \end{cases}$$

Определитель системы $\Delta(\lambda) = \left(1 - \dfrac{2}{3}\lambda\right)\left(1 + \dfrac{2}{5}\lambda\right)$ обращается в 0 при $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$ и $\lambda_2 = -\dfrac{5}{2}$.

Если $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$, то система имеет единственное решение $c_1 = 0$, $c_2 = \dfrac{24}{35}\left(1 + \dfrac{2}{5}\lambda\right)^{-1}$, а решением исходного уравнения является функция

$$x(t) = -\frac{24\lambda}{35 + 14\lambda} t^2 + t^2 + t^4.$$

Если $\lambda = \dfrac{3}{2}$, то система, а значит и интегральное уравнение, имеет неединственное решение:

$$c_1 = c, \qquad c_2 = \frac{3}{7}; \qquad x(t) = ct + \frac{5}{14} t^2 + t^4.$$

Если $\lambda = -\dfrac{5}{2}$, то система, а значит и интегральное уравнение, неразрешимы.

Осталось найти спектр оператора A. Оператор A является вполне непрерывным, так как его ядро непрерывно на

$[0,1]\times[0,1]$. Из теоремы 16.3 следует, что $\sigma(A)=\sigma_d(A)\cup\{0\}$. Итак, надо найти собственные значения оператора A, т. е. решить уравнение $Ax-\lambda x=0$. Решив его методом неопределенных коэффициентов, мы получим значения $\mu_1=\lambda_1^{-1}=\dfrac{2}{3}$, $\mu_2=\lambda_2^{-1}=-\dfrac{2}{5}$. Таким образом,

$$\sigma(A)=\left\{0,\frac{2}{3},-\frac{2}{5}\right\}.$$ ✌

Пример 17.2. В пространстве $C[0,a]$ решить интегральное уравнение

$$x(t)=e^{t^2+2t}+2\int_0^t e^{t^2-s^2}x(s)\,ds \tag{17.8}$$

методом нахождения решения в виде ряда (см. (17.5)).

Решение. Уравнение (17.8) содержит интегральный оператор, который задается формулой

$$(Ax)(t)=\int_0^t e^{t^2-s^2}x(s)\,ds=\int_0^t K_1(t,s)\,x(s)\,ds,$$

$$K_1(t,s)=e^{t^2-s^2}.$$

Тогда функция

$$K_2(t,s)=\int_s^t e^{t^2-\tau^2}e^{\tau^2-s^2}\,d\tau=e^{t^2-s^2}(t-s)$$

является ядром оператора A^2, функция

$$K_3(t,s)=\int_s^t e^{t^2-\tau^2}e^{\tau^2-s^2}(\tau-s)\,d\tau=e^{t^2-s^2}\frac{(t-s)^2}{2!}$$

есть ядро оператора A^3, функция

$$K_n(t,s)=e^{t^2-s^2}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$$

есть ядро оператора A^n. Отсюда

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n A^n x\right)(t) =$$

$$= x(t) + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t e^{t^2-s^2}\,\frac{\lambda^{n-1}(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,x(s)\,ds =$$

$$= x(t) + \lambda\int_0^t e^{t^2-s^2}e^{\lambda(t-s)}x(s)\,ds.$$

Уравнение (17.8) есть уравнение вида $x = \lambda Ax + y$, где $\lambda = 2$, $y = e^{t^2+2t}$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda^n A^n$ сходится, значит, решением уравнения (17.8) является функция

$$x(t) = e^{t^2+2t} + 2\int_0^t e^{t^2-s^2}e^{2(t-s)}e^{s^2+2s}ds = e^{t^2+2t}(1+2t).$$ ✌

Пример 17.3. В пространстве $C[-1,1]$ решить интегральное уравнение

$$x(t) = e^t + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(ts + t^2s^2)x(s)\,ds$$

методом нахождения решения в виде ряда (см. (17.5)).

Решение. Здесь

$$(Ax)(t) = \int_{-1}^{1}K_1(t,s)\,x(s)\,ds, \qquad K_1(t,s) = ts + t^2s^2.$$

Ядро оператора A^2 имеет вид

$$K_2(t,s) = \int_{-1}^{1}(t\tau + t^2\tau^2)(\tau s + \tau^2 s^2)\,d\tau =$$

$$= \int_{-1}^{1}(t\tau^2 s + t^2\tau^4 s^2)\,d\tau = \frac{2}{3}\,ts + \frac{2}{5}\,t^2s^2,$$

ядро A^3 имеет вид

$$K_3(t,s) = \int_{-1}^{1} (t\tau + t^2\tau^2)\left(\frac{2}{3}\,\tau s + \frac{2}{5}\,\tau^2 s^2\right) d\tau = \\ = \left(\frac{2}{3}\right)^2 ts + \left(\frac{2}{5}\right)^2 t^2 s^2,$$

ядро A^n имеет вид

$$K_n(t,s) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} ts + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} t^2 s^2.$$

Отсюда для $n \geqslant 1$

$$\left(\lambda^n A^n x\right)(t) = \lambda \int_{-1}^{1} \left(\left(\frac{2}{3}\,\lambda\right)^{n-1} ts + \left(\frac{2}{5}\,\lambda\right)^{n-1} t^2 s^2\right) x(s)\, ds$$

и

$$\|\lambda^n A^n\| \leqslant 2|\,\lambda| \left(\left(\frac{2}{3}\,|\lambda|\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{5}\,|\lambda|\right)^{n-1}\right).$$

Следовательно, если $|\lambda| < \dfrac{3}{2}$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n$ сходится и

$$\big((E - \lambda A)^{-1} x\big)(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n x\right)(t) = \\ = x(t) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^{1} \left(\left(\frac{2}{3}\,\lambda\right)^{n-1} ts + \left(\frac{2}{5}\,\lambda\right)^{n-1} t^2 s^2\right) x(s)\, ds = \\ = x(t) + \lambda \int_{-1}^{1} \left(\frac{ts}{1 - \frac{2}{3}\,\lambda} + \frac{t^2 s^2}{1 - \frac{2}{5}\,\lambda}\right) x(s)\, ds.$$

Решением исходного уравнения является функция

$$x(t) = \left(E - \frac{1}{2}\,A\right)^{-1} (e^t) = e^t + \frac{3}{2e}\,t + \frac{5(e^2 - 5)}{8e}\,t^2.$$ ✌

☞ В задачах **17.1–17.8** найти решение интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds = y(t)$$

и спектр соответствующего интегрального оператора в пространстве $C[a,b]$.

17.1. $K(t,s) = t^2 - ts, \quad y(t) = t^2 + t, \quad [a,b] = [-1,1].$

17.2. $K(t,s) = t - s, \quad y(t) = t, \quad [a,b] = [0,1].$

17.3. $K(t,s) = \sin(2t+s), \quad y(t) = \pi - 2t, \quad [a,b] = [0,\pi].$

17.4. $K(t,s) = \sin s + s\cos t, \quad y(t) = 1 - \dfrac{2t}{\pi}, \quad [a,b] = [0,\pi].$

17.5. $K(t,s) = \sin(t-2s), \quad y(t) = \cos 2t, \quad [a,b] = [0,\pi].$

17.6. $K(t,s) = \sin(t-s), \quad y(t) = \cos t, \quad [a,b] = [0,\pi].$

17.7. $K(t,s) = \sin t\cos s - \sin 2t\cos 2s + \sin 3t\cos 3s,$

$y(t) = \cos t, \quad [a,b] = [0,2\pi].$

17.8. $K(t,s) = e^{2t+s}, \quad y(t) = t, \quad [a,b] = [-1,1], \quad \lambda = \dfrac{3}{2}.$

17.9. Пусть $K_i(t,s) \in C([a,b]\times[a,b]), \ i = 1,2,$

$$(A_i x)(t) = \int_a^t K_i(t,s)\,x(s)\,ds,$$

$$(B_i x)(t) = \int_a^b K_i(t,s)\,x(s)\,ds.$$

Доказать, что

$$(A_1 A_2 x)(t) = \int_a^t K(t,s)\,x(s)\,ds$$

с ядром

$$K(t,s) = \int_s^t K_1(t,\tau)K_2(\tau,s)\,d\tau;$$

$$(B_1B_2x)(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds$$

с ядром

$$K(t,s) = \int_a^b K_1(t,\tau)K_2(\tau,s)\,d\tau.$$

☞ Решить интегральное уравнение Вольтерра

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_0^t K(t,s)\,x(s)\,ds$$

в пространстве $C[0,b]$, решив соответствующее ему дифференциальное уравнение (задачи **17.10–17.14**) при $\lambda = 1$ и методом нахождения решения в виде ряда (см. (17.5)) (задачи **17.15–17.18**).

17.10. а) $K(t,s) = 1, \quad y(t) = \dfrac{t^2}{2} + t;$

б) $K(t,s) = -1, \quad y(t) = \dfrac{t^2}{2}.$

17.11. $K(t,s) = s^2, \quad y(t) = t^3 + 2.$

17.12. $K(t,s) = s - t,$ а) $y(t) = t;$ б) $y(t) = \cos t.$

17.13. $K(t,s) = 4(t-s), \quad y(t) = e^t.$

17.14. $K(t,s) = 2e^{t-s}, \quad y(t) = \sin t.$

17.15. $K(t,s) = \dfrac{1+t^2}{1+s^2}, \quad y(t) = 1 + t^2.$

17.16. $K(t,s) = t - s, \quad y(t) = 1, \quad \lambda > 0.$

17.17. $K(t,s) = \dfrac{2+\cos t}{2+\cos s}, \quad y(t) = e^{\lambda t}\sin t.$

17.18. $K(t,s) = 2^{\sin t - \sin s}, \quad y(t) = 2^{\sin t}.$

☞ В задачах **17.19–17.21** решить интегральное уравнение Фредгольма

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds = y(t)$$

методом нахождения решения в виде ряда (см. (17.5)).

17.19. $K(t,s) = te^s, \quad y(t) = e^{-2t}, \quad [a,b] = [1,2].$

17.20. $K(t,s) = 1 + (2t-1)(2s-1), \quad y(t) = t^2, \quad [a,b] = [0,1].$

17.21. $K(t,s) = \sin t \sin s + \cos t \cos s, \quad y(t) = \sin \dfrac{t}{2},$

$[a,b] = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right].$

Тема 18. Исследование некоторых операторов

Дополнительно к изложенному в предыдущих темах теоретическому материалу при решении задач могут оказаться полезными следующие факты.

Пусть H, H_1 – гильбертовы пространства, $A \in \mathcal{L}(H, H_1)$. Тогда $\|A\|^2 = \|A^{\otimes} A\|$.

Если $A \in \mathcal{L}(H)$, $A = A^{\otimes}$ и A – компактный оператор, то $\|A\| = \max\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma_d(A)\}$.

18.1. Пусть $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, $A\colon L_{2k+1}[0,1] \to L_1[0,1]$, $k \in \mathbb{N}$,

$$(Ax)(t) = x^{2k+1}(t).$$

Найти оператор A^{-1}. Будут ли операторы A и A^{-1} непрерывными, ограниченными, равномерно непрерывными, компактными, вполне непрерывными?

18.2. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в гильбертовом пространстве H, $\xi_k = (x, e_k)$ для $x \in H$, $A_j \colon H \to \ell_2$, $j = 1, 2$, $A_1 x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $A_2 x = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $\eta_k = \begin{cases} 0, & k = 2\ell - 1,\ \ell \in \mathbb{N}; \\ \xi_\ell/\ell, & k = 2\ell. \end{cases}$ Доказать, что операторы A_1 и A_2 непрерывны. Будут ли они вполне непрерывными? Найти $\|A_j\|$, $A_j^{\otimes}$, $j = 1, 2$, и A_j^{-1}, если они существуют.

18.3. Пусть H – гильбертово пространство, H_1 – его подпространство; $H_2 = H_1^{\perp}$, $A_j \in \mathcal{L}(H_j)$, $j = 1, 2$, $A = A_1 + A_2$. Доказать, что $\|A\| = \max\{\|A_1\|, \|A_2\|\}$.

☞ В задачах **18.4–18.10** провести исследование операторов:

1. Являются ли они непрерывными, замкнутыми, ограниченными, компактными, вполне непрерывными?

2. Существует ли A^{-1}? Если да, то найти его.

3. Найти норму для ограниченных операторов.

4. Найти спектр оператора A (кроме 18.5, 18.9).

5. В задачах 18.4, 18.7, 18.8, 18.10 найти сопряженный оператор.

18.4. $A\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad (Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds.$

18.5. $A\colon L[0,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds - 3x(t).$

18.6. $A\colon D(A) \subset C[0,1] \to C[0,1],$

$D(A) = \{x \in C^1[0,1],\ x(0) = 0\},$

$(Ax)(t) = x'(t) + \varphi(t)\,x(t), \ \ \varphi \in C[0,1].$

18.7. $A\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1],$

$$(Ax)(t) = \int_0^1 (s\ln t - t\ln s)\,x(s)\,ds.$$

18.8. $A\colon \ell_2 \to \ell_2,$

$$Ax = \left(0, \frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_2}{3}, \ldots, \frac{\xi_k}{k+1}, \ldots\right);$$

$$B\colon D(B) \subset \ell_2 \to \ell_2,\ D(B) = \{x \in \ell_2\colon Bx \in \ell_2\},$$
$$Bx = (2\xi_2, 3\xi_3, \ldots, k\xi_k, \ldots).$$

18.9. $A\colon C[-1,1] \to C[-1,1]$,
$$(Ax)(t) = \int_{-1}^{t} x(s)\,ds - \int_0^1 sx(s)\,ds.$$

18.10. $A\colon \ell_2 \to \ell_2,\ Ax = (\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_4, \ldots).$

Тема 19. Обобщенные функции

Определение 19.1. *Носителем функции* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{P}$ называется множество $\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R} \colon \varphi(x) \neq 0\}}$.

Множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем обозначают $\mathcal{D}$. Функции, принадлежащие $\mathcal{D}$, образуют линейное пространство. В пространстве $\mathcal{D}$ определим сходимость. Последовательность $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}$ сходится к функции $\varphi \in \mathcal{D}$, если существует компакт K такой, что носители всех функций φ_n и функции φ содержатся в K и для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$ последовательность $\varphi_n^{(m)} \overset{K}{\rightrightarrows} \varphi^{(m)}$ при $n \to \infty$. Пространство с такой сходимостью называется *пространством основных функций* и обозначается также $\mathcal{D}$.

Обобщенной функцией или *распределением на* $\mathbb{R}$ называется всякий линейный секвенциально непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathcal{D}$. Множество обобщенных функций обозначают $\mathcal{D}'$.

На множестве $\mathcal{D}'$ рассматривают *слабую сходимость, т. е. последовательность обобщенных функций $\{f_n\} \subset \mathcal{D}'$ сходится к $f \in \mathcal{D}'$, если

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle \varphi, f_n \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle \varphi, f \rangle.$$

Пространство $\mathcal{D}'$ с такой сходимостью называется *пространством обобщенных функций произвольного роста.*

Всякая интегрируемая на любом отрезке (компакте) функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{P}$ порождает обобщенную функцию $\{f\}$ по формуле

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle \varphi, \{f\} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\, dx.$$

Такие обобщенные функции называются *регулярными.* Все остальные обобщенные функции называются *сингулярными.*

Определение 19.2. *Произведение функции $\alpha \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ на обобщенную функцию f* определяется формулой

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle \varphi, \alpha \cdot f \rangle = \langle \alpha \cdot \varphi, f \rangle.$$

Определение 19.3. *Производной $D^m f$ порядка m обобщенной функции f* называется функционал, определяемый формулой

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}' \quad \langle \varphi, D^m f \rangle = (-1)^m \langle D^m \varphi, f \rangle.$$

Нетрудно проверить, что $D^m f$ – снова обобщенная функция.

Теорема 19.1 (свойства операции дифференцирования).

1. *D^m – линейный секвенциально непрерывный оператор, действующий в $\mathcal{D}'$.*

2. *Всякая обобщенная функция имеет производные всех порядков.*

3. *Если функция f непрерывно (кусочно непрерывно) дифференцируема, то $D\{f\} = \{Df\}$.*

4. *Если функция α бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, то*

$$D(\alpha \cdot f) = D\alpha \cdot f + \alpha \cdot Df.$$

Теорема 19.2 (о существовании первообразной обобщенной функции). *Пусть* $f \in \mathcal{D}'$. *Тогда существует* $g \in \mathcal{D}'$ *такая, что* $Dg = f$. *При этом если* $Dg = Dg_1$, *то* $g - g_1 = \mathrm{const}$.

Примеры обобщенных функций:

1) δ-функция:

$$\langle \varphi, \delta \rangle = \varphi(0);$$

$\delta(x-c)$ – сдвинутая δ-функция:

$$\langle \varphi, \delta(x-c) \rangle = \varphi(c);$$

2) χ – функция Хевисайда:

$$\langle \varphi, \chi \rangle = \int_0^\infty \varphi(x)\, dx;$$

3) функция $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$:

$$\left\langle \varphi, \mathcal{P}\frac{1}{x} \right\rangle = V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_{-R_\varphi}^{-\varepsilon} \varphi(x) \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{R_\varphi} \varphi(x) \frac{dx}{x} \right) = \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx,$$

где R_φ такое, что $\operatorname{supp} \varphi \subset [-R_\varphi, R_\varphi]$.

Пример 19.1. Найти производную от распределения

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 1; \\ x, & x \leqslant 1. \end{cases}$$

Распределение f является регулярным, поэтому по определению производной мы получаем равенства

$$\langle \varphi, Df \rangle = -\langle D\varphi, f \rangle = -\langle \varphi', f \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) f(x)\, dx.$$

Возьмем этот интеграл по частям и учтем, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varphi(x)=0$:

$$-\int_{\mathbb{R}}\varphi'(x)f(x)\,dx=-\int_{-\infty}^{1}\varphi'(x)x\,dx-\int_{1}^{\infty}\varphi'(x)\ln x\,dx=$$
$$=-\varphi(x)x\Big|_{-\infty}^{1}+\int_{-\infty}^{1}\varphi(x)\,dx-\varphi(x)\ln x\Big|_{1}^{\infty}+\int_{1}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=$$
$$=-\varphi(1)+\int_{-\infty}^{1}\varphi(x)\,dx+\int_{1}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Положим $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>1;\\ 1, & x\leqslant 1,\end{cases}$ тогда производная f запишется в виде $Df(x)=-\delta(x-1)+g(x)$.

19.1. Найти производные первого порядка от распределений

а) $\chi(t)$; б) $\operatorname{sign}t$; в) $\delta(t-t_0)$; г) $|t|$; д) $\ln|t|$;

е) $\chi(t)\cos t$; ж) $f(t)=\begin{cases}e^t, & t>0;\\ 1, & t\leqslant 0;\end{cases}$

з) $f(t)=\begin{cases}\ln(t+1), & t\geqslant 0;\\ e^t, & t<0.\end{cases}$

19.2. Найти производные третьего порядка от распределений

а) $f(t)=\begin{cases}2e^t, & t\leqslant 0;\\ 1+2t, & t>0;\end{cases}$

б) $f(t)=|t^3-1|$; в) $f(t)=|t|\cdot\sin t$; г) $|t^2-4|$.

19.3. Найти производные порядка m от распределений

а) $\delta(t)$; б) $|t|$; в) $\chi(t)\cos t$; г) $\chi(t)t^{m+k}$.

19.4. Найти пределы следующих функций в пространстве $\mathcal{D}'$ при $\varepsilon\to+0$:

а) $f_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |t|\leqslant\varepsilon;\\ 0, & |t|>\varepsilon;\end{cases}$

б) $f_\varepsilon(t) = \dfrac{\varepsilon}{\pi(t^2+\varepsilon^2)}$; в) $f_\varepsilon(t) = \dfrac{1}{t}\sin\dfrac{t}{\varepsilon}$.

19.5. Решить уравнения в пространстве D':

а) $t \cdot f(t) = 0$; б) $(t-1) \cdot f(t) = 0$;

в) $t \cdot f(t) = 1$; г) $(t-1) \cdot t \cdot f(t) = 0$.

19.6. Решить дифференциальные уравнения в пространстве D':

а) $t \cdot f'(t) = 1$; б) $t^2 \cdot f'(t) = 1$; в) $t^2 \cdot f'(t) = \delta(t)$;

г) $f'(t) - t \cdot f(t) = \delta''(t)$; д) $f'(t) + t \cdot f(t) = \delta'(t)$.

Для заметок

Для заметок