ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Часть 2

ВВЕДЕНИЕ

Данная часть учебного пособия содержит главы "Линейные ограниченные функционалы", "Вполне непрерывные операторы", "Операторы в гильбертовом пространстве", "Приближенные методы решения операторных уравнений".

Материал главы о функционалах концентрируется вокруг фундаментальной теоремы Хана - Банаха и ее следствий. Здесь же изложены некоторые результаты об общем виде функционалов в конкретных пространствах, определение сопряженного оператора и теоремы о слабой сходимости и слабой компактности.

В главе о вполне непрерывных операторах центральное место занимает теория Рисса - Шаудера – теория разрешимости операторных уравнений с оператором вида "единичный плюс вполне непрерывный". К таким уравнениям сводятся многие прикладные задачи.

Наибольшей по объему является глава об операторах в гильбертовом пространстве. Здесь рассмотрены важные классы операторов: унитарные операторы, самосопряженные операторы, самосопряженные вполне непрерывные операторы. Для самосопряженных операторов изложены теорема о функциональном исчислении и спектральная теорема, фундаментальная теорема Гильберта - Шмидта о самосопряженных вполне непрерывных операторах.

Последняя глава посвящена проекционным методам решения операторных уравнений. Она содержит критерий применимости проекционного метода, некоторые достаточные условия, теоремы об устойчивости проекционного метода относительно малых и вполне непрерывных возмущений, примеры применимости проекционного метода к конкретным задачам.

Глава 1

ЛИНЕЙНЫЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Линейный функционал является частным случаем линейного оператора, когда его область значений совпадает с числовым пространством. Это определяет специфические особенности функционалов по сравнению с операторами и необходимость их отдельного, более глубокого рассмотрения. Центральным результатом главы является теорема Хана - Банаха о продолжении функционала, позволяющая строить функционалы с наперед заданными свойствами.

1.1 ТЕОРЕМА ХАНА - БАНАХА

Теорема 1.1.1 *Пусть X – банахово пространство, L – его линейное многообразие, f - линейный ограниченный функционал, определенный на L. Тогда его можно продолжить с сохранением нормы на все пространство X, т.е. существует линейный ограниченный функционал F, определенный на X, для которого выполняются условия:*

1. $f(x) = F(x)\ \forall x \in L$;

2. $\|F\|_X = \|f\|_L$.

Доказательство. Доказательство проведем для вещественного сепарабельного банахова пространства.

1. Существенным моментом является продолжение на одно измерение. Пусть $x_0 \notin L$ и L_1 – линейное многообразие, порожденное L и x_0:

$$L_1 = \{L, x_0\} = \{x + tx_0;\ t \in \mathbb{R},\ x \in L\}.$$

Построим продолжение функционала f на L_1 с сохранением нормы. Предварительно заметим, что для любого элемента $u \in L_1$ представление $u = x + tx_0,\ x \in L$ единственно.

Пусть $x', x'' \in L$. Для разности $f(x') - f(x'')$ имеем оценку

$$f(x') - f(x'') = f(x' - x'') \leq \|f\|\|x' - x''\| \leq \|f\|(\|x' + x_0\| + \|x'' + x_0\|).$$

Полученное неравенство эквивалентно неравенству

$$f(x') - \|f\|\|x' + x_0\| \leq f(x'') + \|f\|\|x'' + x_0\|.$$

Последнее неравенство верно для любых элементов $x', x'' \in L$, поэтому

$$m = \sup_{x' \in L}(f(x') - \|f\|\|x' + x_0\|) \leq \inf_{x'' \in L}(f(x'') + \|f\|\|x'' + x_0\|) = M.$$

Выберем константу c так, чтобы $m \leq c \leq M$. Определим продолжение формулой

$$F(x + tx_0) = f(x) - tc.$$

Данное определение корректно ввиду единственности представления элементов из L_1 в форме $x + tx_0,\ x \in L$. Покажем ограниченность функционала F и вычислим его норму.

Пусть $t > 0$. Тогда

$$F(x + tx_0) = t(f(x/t) - c).$$

Выбираем в качестве x' элемент x/t и воспользуемся неравенством

$$f(x') - \|f\|\|x' + x_0\| \leq c.$$

Тогда получим

$$F(x + tx_0) = t(f(x/t) - c) \leq t(\|f\|\|x/t + x_0\|).$$

Окончательно в силу положительности t

$$F(x + tx_0) \leq \|f\| \|x + tx_0\|.$$

Далее, аналогично предыдущему устанавливается, что данное неравенство верно и при $t < 0$ (докажите). Таким образом, установлено, что для любого элемента $u \in L_1$ верно неравенство

$$F(u) \leq \|f\| \|u\|.$$

Заменив u на $-u$, имеем

$$-F(u) \leq \|f\| \|u\|.$$

Следовательно, верна оценка

$$|F(u)| \leq \|f\| \|u\|.$$

Ввиду того, что F является продолжением f справедливо неравенство $\|f\| \leq \|F\|$. Поэтому окончательно получаем, что

$$\|F\|_{L_1} = \|f\|_L.$$

Итак, доказана возможность продолжения на одно измерение.

2. Продолжение на все пространство X.

Пусть $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ – счетное всюду плотное множество в пространстве X. Рассмотрим линейные многообразия:

$$L_1 = \{L, x_0\},\ L_2 = \{L_1, x_1\}, ...L_n = \{L_{n-1}, x_{n-1}\}, ...$$

По доказанной части теоремы будем последовательно продолжать функционал на многообразия $L_1,\ L_2, ...$ и в результате продолжим на многообразие $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$. Это многообразие всюду плотно в X. Поэтому продолжение на все X можно осуществить по теореме о непрерывном продолжении.■

Замечание. Установленное продолжение даже на одно измерение, вообще говоря, неединственно.

Следствие 1. (существование нетривиальных функционалов)

Пусть x_0 – ненулевой элемент банахова пространства X. Тогда существует линейный ограниченный функционал f на X такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x_0) = \|x_0\|$.

Доказательство. На одномерном подпространстве $L = \{\lambda x_0\}$ определим функционал $f(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|$. (На L он удовлетворяет всем нужным условиям.) Остается продолжить его на все пространство с сохранением нормы.■

Следствие 2. *Элемент $x_0 = 0$ тогда и только тогда, когда для любого линейного ограниченного функционала f выполняется условие $f(x_0) = 0$.*

Следствие 3. (о разделении подпространства и элемента)

Пусть L – подпространство в банаховом пространстве X и элемент $x_0 \notin L$. Тогда существует линейный ограниченный функционал f на пространстве X, для которого выполняются условия:

1. $f(x_0) = 1$;

2. $f(x) = 0 \ \forall x \in L$;

3. $\|f\| = 1/d$, *где* $d = \inf\limits_{x \in L} \|x - x_0\|$.

Доказательство. Рассмотрим линейное многообразие $L_1 = \{L, x_0\}$. Отметим, что каждый его элемент однозначно представим в виде $x + tx_0$, где $x \in L$. Определим функционал формулой $f(x + tx_0) = t$. Свойства 1. и 2. на L_1 выполняются очевидным образом. Для проверки условия 3. на L_1 используем соотношение

$$|f(x + tx_0)| = \frac{|t|\|x + tx_0\|}{\|x + tx_0\|} = \frac{\|x + tx_0\|}{\|x/t + x_0\|}.$$

Остается заметить, что, с одной стороны, для любого $x \in L$ $\|x/t + x_0\| \geq d$, а с другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент x_ε, для которого $\|x_\varepsilon/t + x_0\| < d + \varepsilon$. Поэтому $\|f\| = 1/d$. После этого остается воспользоваться теоремой Хана-Банаха.■

Следствие 4. (существование биортогональных систем функционалов)

Пусть $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ – система элементов банахова пространства X. Если для любого k элемент x_k не принадлежит замыканию линейной оболочки оставшихся элементов $\{x_j\}_{j=1, j\neq k}^{\infty}$, то существует биортогональная *система ограниченных функционалов* $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$. *Это означает, что выполняются условия биортогональности* $f_j(x_k) = \delta_{jk}$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться следствием 3.■

Следующий результат не является следствием теоремы Хана - Банаха, но аналогичен следствию 4.

Лемма 1.1.1 *(существование биортогональной системы элементов) Пусть* $f_1, ...f_n$ *– линейно независимая система линейных ограниченных функционалов на банаховом пространстве* X. *Тогда существует система элементов* $a_1, ...a_n$, *биортогональная данной системе функционалов:* $f_k(a_j) = \delta_{kj}$.

Доказательство. Применяем индукцию. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что $a_1, ...a_{n-1}$ – биортогональная система элементов для функционалов $f_1, ...f_{n-1}$. Требуется доказать существование элемента a_n, для которого $f_j(a_n) = \delta_{jn}$.

Заметим, что для произвольного элемента $x \in X$ выполняется соотношение

$$x - \sum_{j=1}^{n} f_j(x)a_j \in N = \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{Ker} f_j.$$

Если $\mathrm{Ker} f_n \supset N$, то для любого $x \in X$ выполняется равенство

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) f_n(a_j),$$

т.е. функционал f_n является линейной комбинацией функционалов $f_1, ...f_{n-1}$:

$$f_n = \sum_{j=1}^{n} f_n(a_j) f_j,$$

что невозможно.

Поэтому существует элемент $a_n \in N$, для которого $f_n(a_n) = 1,\ f_j(a_n) = 0,\ j < n$.■

1.2 ФУНКЦИОНАЛЫ В КОНКРЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Общий вид функционала на $\mathbb{R}^n$. Пусть f – линейный функционал на $\mathbb{R}^n$. Осуществляя разложение произвольного элемента по базису $x =$

$\sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$, получаем следующее представление

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j).$$

Таким образом, каждому функционалу на $\mathbb{R}^n$ можно сопоставить набор его координат $f \to (f_1, ...f_n)$, $f_j = f(e_j)$, причем это соответствие линейно, взаимно однозначно и отождествляет $(\mathbb{R}^n)^*$ и $\mathbb{R}^n$.

Аналогичные результаты известны для многих конкретных банаховых пространств. Ниже приводятся некоторые из них.

Теорема Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве

Теорема 1.2.1 *Пусть H – гильбертово пространство, f – линейный ограниченный функционал на H. Тогда существует единственный элемент $h \in H$, для которого $f(x) = (x, h)$ и $\|h\| = \|f\|$. Обратно, для любого элемента h установленная формула определяет линейный ограниченный функционал с нормой, равной $\|h\|$.*

Доказательство. Будем считать, что $f \neq 0$. Рассмотрим

$$\text{Ker } f = \{x;\ f(x) = 0\}.$$

Очевидно, Ker f –подпространство в H. По теореме об ортогональном разложении

$$H = \text{Ker } f \bigoplus (\text{Ker } f)^{\perp}.$$

Так как Ker $f \neq H$, то существует элемент $z_0 \in (\text{ Ker } f)^{\perp}$, для которого $f(z_0) = 1$. Заметим, что очевидное равенство

$$x = (x - f(x)z_0) + f(x)z_0$$

представляет собой ортогональное разложение элемента x, так как элемент $y = x - f(x)z_0$ принадлежит подпространству Ker f. Возьмем произвольный элемент x и рассмотрим его ортогональное разложение $x = y + \lambda z_0$, $y \in$ Ker f. Тогда $f(x) = \lambda$. С другой стороны, возьмем элемент $h = z_0/\|z_0\|^2$.

Тогда $(x,h) = (y + \lambda z_0, z_0/\|z_0\|^2) = \lambda(z_0, z_0/\|z_0\|^2) = \lambda$. Таким образом, установлено, что $f(x) = (x,h)$.

Докажем единственность этого представления. Допуская возможность другого представления $f(z) = (x,h_1)$ и вычитая одно представление из другого, получаем, что для любого элемента x выполняется равенство $(x, h - h_1) = 0$. В частности, выбирая $x = h - h_1$, устанавливаем, что $h = h_1$.

Докажем равенство норм: $\|f\| = \|h\|$. Это следует из неравенства

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0}\frac{|(x,h)|}{\|x\|} \leq \|h\|,$$

причем равенство достигается при $x = h$.

Вторую часть теоремы докажите самостоятельно.$\blacksquare$

Теорема Рисса об общем виде функционала в пространстве $C[0,1]$

Определение. Говорят, что функция $g(t)$, определенная на $[0,1]$, имеет ограниченную вариацию, если

$$\operatorname{Var} g \overset{def}{=} \sup\sum_{i=0}^{n-1}|g(t_{i+1}) - g(t_i)| < \infty,$$

где sup берется по всевозможным разбиениям $0 = t_0 < t_1 < t_2, ...t_n = 1,\ n = 1,2,...$ отрезка $[0,1]$.

Определение. Интегралом Стилтьеса называется следующий предел

$$\int\limits_0^1 x(t)\,dg(t) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}x(\xi_i)[g(t_{i+1}) - g(t_i)],$$

где $\lambda = \max\triangle t_i,\ t_i \leq \xi_i \leq t_{i+1}$. (напомним, что предел не должен зависеть от выбора разбиения и промежуточных точек)

Из курса математического анализа известно, что для непрерывной функции $x(t)$ и функции ограниченной вариации $g(t)$ интеграл Стилтьеса существует и справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_0^1 x(t)\,dg(t)\right| \leq \max_{t\in[0,1]}|x(t)|\operatorname{Var} g.$$

Интеграл Стилтьеса можно рассматривать как функционал на пространстве $C[0,1]$:

$$G(x) = \int_0^1 x(t)\,dg(t).$$

Тогда этот функционал линеен, а последнее неравенство означает, что он ограничен и

$$\|G\| \le \operatorname{Var} g.$$

Оказывается, в таком виде можно представить любой линейный ограниченный функционал на пространстве $C[0,1]$. Этот факт доказан Риссом и приводится без доказательства. Отметим, что изменение значений функции $g(t)$ на конечном или счетном множестве точек не меняет значения интеграла Стилтьеса, поэтому функция g определяется функционалом G неоднозначно. Однако, если для функции g выполняются некоторые дополнительные условия (условия нормировки), то она определяется однозначно.

Теорема 1.2.2 *Пусть G – линейный ограниченный функционал на пространстве $C[0,1]$. Тогда существует единственная функция ограниченной вариации $g(t)$, удовлетворяющая условиям $g(0) = 0,\ g(t) = g(t-0),\ 0 < t \le 1$ и такая, что*

$$G(x) = \int_0^1 x(t)\,dg(t),$$

причем

$$\|G\| = Var\, g.$$

Пример. Рассмотрим функционал $\delta_{t_0}(x) = x(t_0)$ – δ-функция Дирака. По теореме Рисса

$$\delta_{t_0}(x) = \int_0^1 x(t)\,dg_{t_0}(t),$$

где

$$g_{t_0}(t) = \begin{cases} 0, & t \le t_0, \\ 1, & t > t_0. \end{cases}$$

Следующие теоремы приводятся без доказательства.

Теорема 1.2.3 *Пусть f – линейный ограниченный функционал на пространстве l_p, $1 \le p < \infty$. Тогда существует единственный элемент $\xi \in l_q$ (q – сопряженный показатель : $1/p + 1/q = 1$) такой, что*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \xi_j,$$

причем

$$\|f\| = \|\xi\|_{l_q}.$$

Обратно, для любого элемента $\xi \in l_q$ приведенная формула определяет линейный ограниченный функционал f на пространстве l_p и выполняется равенство норм.

Теорема 1.2.4 *Пусть F – линейный ограниченный функционал на пространстве $L_p(0,1)$, $1 \le p < \infty$. Тогда существует единственный элемент $f(t) \in L_q(0,1)$ (q – сопряженный показатель : $1/p+1/q = 1$) такой, что*

$$F(x) = \int_0^1 x(t) f(t)\, dt,$$

причем

$$\|F\| = \|f\|_{L_q(0,1)}.$$

Обратно, для любого элемента $f \in L_q(0,1)$ приведенная формула определяет линейный ограниченный функционал F на пространстве $L_p(0,1)$ и выполняется равенство норм.

Данные теоремы о представлении функционалов можно рассматривать с другой точки зрения – как теоремы об описании сопряженных пространств.

Определение. Два банаховых пространства X и Y будем называть изометрически изоморфными $X \cong Y$, если они изоморфны, а оператор $J : X \to Y$, осуществляющий их изоморфизм – изометричен:

$$\|Jx\|_Y = \|x\|_X, \ \forall x \in X.$$

Используя данное определение, можно переформулировать, например, теорему для l_p следующим образом.

Теорема 1.2.5 *Пусть l_p^*, $1 \leq p < \infty$ – пространство сопряженное к l_p. Отображение $f \to \xi$, сопоставляющее каждому функционалу $f \in l_p^*$ представляющий его элемент $\xi \in l_q$, является изометрическим изоморфизмом пространств l_p^* и l_q.*

Упражнение. Сформулируйте аналогичную теорему для функциональных пространств $L_p(0,1)$, $1 \leq p < \infty$.

Упражнение. Введите пространство $\mathrm{Var}[0,1]$ функций ограниченной вариации на $[0,1]$ и сформулируйте соответствующую теорему для пространства $C[0,1]$.

Замечание. Для гильбертового пространства теорема Рисса определяет изометрический изоморфизм $H^* \cong H$ в вещественном случае. В комплексном случае отображение $f \to h$, сопоставляющее функционалу $f \in H^*$ представляющий его элемент $h \in H$, является антилинейной изометрией, т.е. функционал αf представляет элемент $\bar{\alpha} h$, где $\bar{\alpha}$– число, комплексно сопряженное к α.

Обычно изометрически изоморфные пространства отождествляют. Таким образом, при $1 \leq p < \infty$ имеем $l_p^* = l_q$, $L_p^*(0,1) = L_q(0,1)$, для вещественного гильбертового пространства $H^* = H$, для пространства непрерывных функций $C^*[0,1] = Var[0,1]$.

1.3 ВЛОЖЕНИЕ ВО ВТОРОЕ СОПРЯЖЕННОЕ

Пусть X – линейное нормированное пространство. Тогда для него определено сопряженное пространство X^*, которое является банаховым пространством. Поэтому определено второе сопряженное $X^{**} \overset{def}{=} (X^*)^*$. Аналогично определяется третье сопряженное $X^{***} = (X^{**})^*$ и т.д.

Зафиксируем элемент $x \in X$ и рассмотрим отображение, сопоставляющее функционалу $f \in X^*$ число $f(x)$. Очевидно, что это отображение является линейным функционалом на пространстве X^*. Будем обозначать его F_x. Таким образом: $F_x(f) = f(x)$.

Теорема 1.3.1 *Отображение $x \to F_x$ есть изометрическое вложение пространства X в его второе сопряженное X^{**}. Это означает, что*

1. это отображение линейно, т.е.

$$F_{\alpha x+\beta y} = \alpha F_x + \beta F_y;$$

2. оно изометрично

$$\|F_x\| = \|x\|.$$

Доказательство.

1. Линейность отображения $x \to F_x$ вытекает из цепочки равенств

$$F_{\alpha x+\beta y}(f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) =$$
$$= \alpha F_x(f) + \beta F_y(f) = (\alpha F_x + \beta F_y)(f).$$

2. Ограниченность функционала F_x и оценка $\|F_x\| \leq \|x\|$ следует из неравенства

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\|.$$

Для доказательства равенства норм применим следствие 1 из теоремы Хана - Банаха. Согласно этому следствию существует такой функционал $f_0 \in X^*$ такой, что для данного элемента x имеем $f_0(x) = \|x\|,\ \|f_0\| = 1$. Поэтому

$$F_x(f_0) = f_0(x) = \|x\| = \|f_0\|\|x\|$$

и, следовательно,

$$\|F_x\| = \|x\|. \blacksquare$$

Определение. Линейное нормированное пространство X называется рефлексивным, если отображение $x \to F_x$ взаимно однозначно отображает X на X^{**}.

Очевидно, что пространство X рефлексивно тогда и только тогда, когда каждый функционал F на пространстве X^* имеет вид $F = F_x$ для некоторого $x \in X$.

В случае рефлексивности пространство X изометрически изоморфно пространству X^{**}. Поэтому рефлексивное пространство является банаховым.

Примеры рефлексивных пространств

1. При $1 < p < \infty$ пространства $l_p,\ L_p(0,1)$ являются рефлексивными.

Действительно, пусть $J_p : l_p^* \to l_q$ – изометрический изоморфизм, определяемый теоремой Рисса, т.е. $\xi = J_p(f)$ такой единственный элемент из пространства l_q, для которого $f(x) =< x, \xi >$, где $< x, \xi >= \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j \xi_j$. Рассмотрим линейный ограниченный функционал F на пространстве l_p^*. Тогда $F \circ J_p^{-1}$ – линейный ограниченный функционал на пространстве l_q. Согласно теореме Рисса существует единственный элемент $x \in l_p$, представляющий этот функционал, т.е. для любого элемента $\xi \in l_q$ имеем

$$F \circ J_p^{-1}(\xi) =< \xi, x > .$$

Полагая $\xi = J_p(f)$, имеем

$$F(f) =< \xi, x >=< x, \xi >= f(x),$$

т.е. $F = F_x$.■

Аналогично устанавливается рефлексивность пространств $L_p(0,1)$ при $1 < p < \infty$.

2. ***Упражнение.*** Доказать, что гильбертово пространство рефлексивно.

3. Пространства $C[0,1],\ l_1,\ l_\infty,\ L_1(0,1),\ L_\infty(0,1)$ не являются рефлексивными.

Приведем доказательство для пространства l_1. Для этого достаточно установить, что на пространстве l_∞ существуют функционалы, которые нельзя представить в виде $f(x) =< x, \xi >= \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j \xi_j$, где $\xi \in l_1$. Рассмотрим подпространство $l \subset l_\infty$, состоящее из последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Пусть x^0 – элемент, не принадлежащий l. Тогда существует функционал f_0 такой, что $f_0(x^0) = 1,\ f(x) = 0\ \forall x \in l$. Ясно, что f_0 нельзя представить в виде $f_0(x) =< x, \xi^0 >$, где $\xi^0 \in l_1$ (объясните почему). ■

1.4 СОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР

Понятие сопряженного оператора является обобщением транспонированной матрицы.

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$, где X и Y – линейные нормированные пространства. Сопоставим оператору A сопряженный оператор $A^* : Y^* \to X^*$ по следующему правилу: для любого $f \in Y^*$ определяем функционал $A^* f \in X^*$ с помощью формулы

$$(A^* f)(x) = f(Ax).$$

Теорема 1.4.1 *Сопряженный оператор ограничен и выполняется равенство норм* $\|A^*\| = \|A\|$.

Доказательство. Ограниченность сопряженного оператора и оценка

$$\|A^*\| \le \|A\|$$

вытекает из неравенства

$$|(A^* f)(x)| = |f(Ax)| \le \|f\|\|Ax\| \le \|f\|\|A\|\|x\|.$$

Для доказательства равенства норм зафиксируем элемент $x \in X$ и рассмотрим элемент Ax. По следствию из теоремы Хана - Банаха существует функционал $f_0 \in Y^*$, для которого выполняются соотношения

$$f_0(Ax) = \|Ax\|, \ \|f_0\| = 1.$$

Вследствие этого получаем неравенство

$$\|Ax\| = f_0(Ax) = |f_0(Ax)| = |(A^* f_0)(x)| \le \|A^* f\|\|x\| \le \|A^*\|\|x\|,$$

из которого вытекает, что $\|A\| \le \|A^*\|$. Так как обратное неравенство уже установлено, то $\|A^*\| = \|A\|$. ■

Примеры вычисления сопряженных операторов

Предварительно сделаем одно замечание. Пусть задан линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$ и $A^* : Y^* \to X^*$ – его сопряженный оператор. Предположим, что известны изометрические изоморфизмы

$$J_1 : X^* \to Z, \ J_2 : Y^* \to W.$$

Тогда оператору A^* можно сопоставить оператор $J_1 A J_2^{-1} : W \to Z$. В некоторых случаях введенный оператор имеет более простую форму. Поэтому удобно отождествлять эти операторы, что и осуществляется ниже в рассматриваемых примерах.

1. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$(Ax)_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k.$$

Сопряженное пространство $(\mathbb{R}^n)^*$ отождествляется с пространством $\mathbb{R}^n$ путем сопоставления функционалу F вектора $f = (f_1, f_2, ...f_n)$, для которого $F(x) = \sum\limits_{k=1} f_k x_k$. Ввиду этого отождествления будем рассматривать сопряженный оператор A^* как оператор в $\mathbb{R}^n$. Имеем следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
(A^*F)(x) & = & F(Ax) \\
\Big\| & & \Big\| \\
\sum\limits_{j=1}^{n} (A^*f)_j x_j & = & \sum\limits_{j=1}^{n} (\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} f_k) x_j
\end{array}$$

В результате получаем

$$(A^*f)_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} f_k,$$

т.е. сопряженный оператор определяется транспонированной матрицей.

2. Интегральный оператор в $L_2(0,1)$:

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 k(t,s) x(s)\, ds.$$

Предполагаем, что ядро $k(t,s)$ квадратично суммируемо. Поэтому оператор A ограничен и $\|A\| \le \|k\|_{L_2}$. Опять заметим, что сопряженное пространство $L_2^*(0,1)$ в силу теоремы Рисса отождествляется с пространством $L_2(0,1)$ путем сопоставления функционалу F его представляющего элемента $f(t)$, для которого $F(x) = \int\limits_0^1 f(t) x(t)\, dt$. Ввиду этого отождествления сопряженный оператор будем рассматривать как оператор в $L_2(0,1)$. Аналогично предыдущему примеру имеем

$$\begin{array}{ccc} (A^*F)(x) & = & F(Ax) \\ \| & & \| \\ \int\limits_0^1 (A^*f)(t)x(t)\,dt & = & \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 k(s,t)f(s)\,ds\right) x(t)\,dt. \end{array}$$

В результате получаем

$$(A^*f)(t) = \int\limits_0^1 k(s,t)f(s)\,ds,$$

т.е. сопряженный оператор определяется транспонированным ядром.

1.5 СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ И СЛАБАЯ КОМПАКТНОСТЬ

Слабая сходимость последовательностей функционалов

Пусть X – линейное нормированное пространство, X^* – его сопряженное пространство.

Определение. Говорят, что последовательность функционалов $f_n \in X^*$ слабо сходится к функционалу $f \in X^*$, если для любого элемента $x \in X$ числовая последовательность $f_n(x)$ сходится к числу $f(x)$.

Очевидно, что слабая сходимость для функционалов есть частный случай поточечной сходимости последовательности операторов. Поэтому на слабую сходимость переносятся результаты о поточечной сходимости. В частности, имеет место следующий критерий слабой сходимости.

Теорема 1.5.1 *Последовательность функционалов $f_n \in X^*$ слабо сходится к функционалу $f \in X^*$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1. $\sup\limits_n \|f_n\| < \infty$;

2. $f_n(x) \to f(x),\ \forall x \in M$, *где M всюду плотно в X.*

Используем этот критерий для исследования вопроса о сходимости последовательности квадратурных формул вида

$$\int_0^1 x(t)\,dt \sim \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} x(t_{k,n}),$$

где $0 \le t_{1,n} \le ..t_{n,n} \le 1$ – узлы квадратурной формулы, $\{A_k^{(n)}\}$ – ее коэффициенты.

Определение. Будем говорить, что заданная последовательность квадратурных формул сходится, если для каждой непрерывной функции $x(t)$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} x(t_{k,n}) = \int_0^1 x(t)\,dt.$$

Критерий сходимости квадратурных формул

Теорема 1.5.2 *Для того чтобы последовательность квадратурных формул сходилась, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1. $\sup\limits_n \sum\limits_{k=1}^n |A_k^{(n)}| < \infty$;

2. последовательность квадратурных формул сходится для любого многочлена.

Доказательство. Как известно, иногда полезно сформулировать задачу на другом языке. В данном случае сформулируем ее на языке функционалов. Рассмотрим функционалы

$$I(x) = \int_0^1 x(t)\,dt, \;\; I_n(x) = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} x(t_{k,n}).$$

Данные функционалы ограничены и $\|I_n\| = \sum\limits_{k=1}^n |A_k^{(n)}|$. Для доказательства последнего равенства, с одной стороны, имеем оценку

$$|I_n(x)| \le \sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}| \|x\|,$$

а с другой стороны, выбрав непрерывную функцию $x_0(t)$, для которой $|x_0(t)| \le 1,\ x_0(t_{k,n}) = \operatorname{sign} A_k^{(n)}$, имеем равенство

$$I_n(x_0) = \sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}| \|x_0\|.$$

Остается заметить, что на языке функционалов сходимость квадратурных формул есть слабая сходимость последовательности функционалов I_n к функционалу I, и воспользоваться критерием слабой сходимости функционалов. В данном случае в качестве всюду плотного множества в пространстве $C[0,1]$ выбирается множество всех многочленов.■

Слабая сходимость последовательностей элементов

Определение. Будем говорить, что последовательность элементов $\{x_n\}$ банахова пространства X слабо сходится к элементу $x \in X$, если для любого функционала $f \in X^*$ числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу $f(x)$.

В первую очередь установим единственность слабого предела.

Теорема 1.5.3 *Слабый предел единствен.*

Доказательство. Пусть

$$x_n \overset{\text{слабо}}{\to} x,\ x_n \overset{\text{слабо}}{\to} y.$$

Следовательно, для любого функционала $f \in X^*$ имеем $f(x_n) \to f(x)$ и $f(x_n) \to f(y)$. Поэтому для любого функционала $f \in X^*$ выполняется равенство $f(x) = f(y)$, из которого по следствию из теоремы Хана - Банаха вытекает, что $x = y$.■

Связь со сходимостью по норме

Теорема 1.5.4 *Если $x_n \to x$ по норме, то $x_n \to x$ слабо. Обратное, вообще говоря, неверно.*

Доказательство. Первое утверждение непосредственное следствие неравенства

$$|f(x_n) - f(x)| = \|f(x_n - x)| \le \|f\| \|x_n - x\|.$$

Для доказательства второго утверждения рассмотрим ортонормированную последовательность $\{e_n\}$ в гильбертовом пространстве H. По теореме Рисса для каждого функционала $f \in H^*$ существует единственный элемент h, для которого $f(x) = (x, h)$. Поэтому $f(e_n) = \overline{(h, e_n)}$ и согласно теореме Рисса - Фишера $f(e_n) \to 0$. Следовательно, e_n слабо сходится к 0. В то же время $\|e_n\| = 1$ и нет сходимости по норме.■

Критерий слабой сходимости последовательности элементов

Теорема 1.5.5 *Для того чтобы последовательность элементов $\{x_n\}$ банахова пространства X слабо сходилась к элементу x необходимо и достаточно выполнения условий:*

1. $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$;

2. $f(x_n) \to f(x)$ *для любого функционала $f \in M$, где M всюду плотно в X^*.*

Доказательство. В силу теоремы об изометрическом вложении $X \to X^{**}$ отображение $x \to F_x$, где $F_x(f) = f(x)$, является изометрией ($\|F_x\| = \|x\|$). Вследствие этого результата слабая сходимость $x_n \to x$ эквивалентна слабой сходимости $F_{x_n} \to F_x$. После этого остается воспользоваться критерием слабой сходимости для функционалов.■

Теорема 1.5.6 *Если последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к элементу x, то x принадлежит замыканию L линейной оболочки $L(\{x_n\})$ всех элементов x_n.*

Доказательство. Предположим, что $x \notin L$. Тогда по следствию из теоремы Хана-Банаха существует функционал $f \in X^*$, для которого $f(x) = 1,\ f(y) = 0$ для любого $y \in L$. Но это противоречит слабой сходимости $x_n \to x$.■

Упражнение. Доказать, что слабая сходимость в конечномерном пространстве эквивалентна сходимости по норме.

Слабая сходимость в гильбертовом пространстве

На основании теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве H слабая сходимость $x_n \to x$ эквивалентна тому, что $(x_n, h) \to (x, h)$ для любого $h \in H$.

Заметим, что скалярное произведение не является непрерывным относительно слабой сходимости. Например, любая ортонормированная последовательность e_n слабо сходится к нулю, но $(e_n, e_n) = 1$.

Теорема 1.5.7 *Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов гильбертова пространства H слабо сходится к элементу x. Если $\|x_n\| \to \|x\|$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу x по норме.*

Доказательство. Имеем $(x, x_n) \to \|x\|^2,\ (x_n, x) \to \|x\|^2,\ \|x_n\|^2 \to \|x\|^2$. Поэтому

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - (x, x_n) - (x_n, x) + \|x\|^2 \to 0. \blacksquare$$

Теоремы о слабой компактности

Теорема 1.5.8 *Пусть X – сепарабельное банахово пространство. Тогда единичный шар S^* в сопряженном пространстве X^* слабо компактен, т.е. из любой последовательности функционалов $f_n \in S^*$ ($\|f_n\| \leq 1$) можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Вот одно из применений процесса диагонализации. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – счетное всюду плотное множество. Рассмотрим числовую последовательность $\{f_n(x_1)\}$. Ввиду неравенства $|f_n(x_1)| \leq \|f_n\|\|x_1\| \leq \|x_1\|$ она ограничена. Поэтому существует подпоследовательность $\{f_n^{(1)}\}$ исходной последовательности функционалов, для которой сходится числовая последовательность $\{f_n^{(1)}(x_1)\}$. Аналогично рассматриваем числовую последовательность $\{f_n^{(1)}(x_2)\}$ и выбираем подпоследовательность функционалов $\{f_n^{(2)}\}$, для которой сходится числовая последовательность $\{f_n^{(2)}(x_2)\}$. Продолжая этот процесс, получаем подпоследовательности функционалов

$$\{f_n\} \supset \{f_n^{(1)}\} ... \supset \{f_n^{(k)}\} ...,$$

для которых сходятся числовые последовательности $\{f_n^{(k)}(x_j)\}$ при $j = 1, 2, ...k$. Рассмотрим диагональную (!) последовательность функционалов

$\{f_n^{(n)}\}$. Она сходится на любом элементе x_k, $k = 1, 2, \ldots$ Покажем, что для любого $x \in X$ сходится числовая последовательность $\{f_n^{(n)}(x)\}$. Для этого достаточно установить ее фундаментальность. Используя "промежуточный"элемент x_k, имеем очевидную цепочку неравенств

$$|f_n^{(n)}(x) - f_m^{(m)}(x)| \leq |f_n^{(n)}(x) - f_n^{(n)}(x_k)| + |f_n^{(n)}(x_k) - f_m^{(m)}(x_k)| +$$
$$+ |f_m^{(m)}(x_k) - f_m^{(m)}(x)| \leq 2\|x - x_k\| + |f_n^{(n)}(x_k) - f_m^{(m)}(x_k)|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем элемент x_k, для которого $\|x - x_k\| < \varepsilon/3$. После этого для фиксированного k существует номер N такой, что $|f_n^{(n)}(x_k) - f_m^{(m)}(x_k)| < \varepsilon/3$ при $n, m > N$. Следовательно,

$$|f_n^{(n)}(x) - f_m^{(m)}(x)| < \varepsilon \text{ при } n, m > N.$$

Таким образом, для любого $x \in X$ существует

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(n)}(x) = f(x).$$

Очевидно, что данный предел определяет линейный ограниченный функционал f, являющийся слабым пределом последовательности $\{f_n^{(n)}\}$. ■

Следствие 1. *Пусть X – рефлексивное сепарабельное пространство. Тогда единичный шар S в X слабо компактен, т.е. из любой последовательности элементов $\{x_n\}$ с $\|x_n\| \leq 1$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Так как X – рефлексивно, то X отождествляется со вторым сопряженным $X^{**} = (X^*)^*$ и поэтому пространство X можно рассматривать как сопряженное к пространству X^*. Напомним, что отождествление осуществляется сопоставлением элементу x функционала F_x, определяемого формулой $F_x(f) = f(x)$, причем $\|x\| = \|F_x\|$. При этом отождествлении слабая сходимость $x_n \to x$ эквивалентна слабой сходимости функционалов $F_{x_n} \to F_x$. Поэтому согласно теореме о слабой компактности следствие будет установлено, если будет доказана сепарабельность пространства X^*. Действительно, справедлива

Лемма 1.5.1 *Если сопряженное пространство X^* сепарабельно, то пространство X также сепарабельно.*

Доказательство. Выберем счетное множество функционалов $\{f_n\}$, плотное на единичной сфере S^*. Для любого функционала f_n найдется элемент x_n, для которого $\|x_n\| = 1$, $|f_n(x_n)| > 1/2$. Покажем, что X совпадает с замыканием M линейной оболочки множества $\{x_n\}$. Если $X \neq M$, то существует элемент $x \notin M$ и функционал $f \in S^*$, для которого $f(x) \neq 0$, $f(x_n) = 0$ $\forall n$. Выберем m так, что $\|f - f_m\| < 1/2$, тогда $1/2 < |f_m(x_m)| = |f(x_m) - f_m(x_m)| < 1/2$ что и приводит к противоречию.■

Следствие 2. *Единичные шары в сепарабельном гильбертовом пространстве и в пространствах l_p, $L_p(0,1)$ при $1 < p < \infty$ слабо компактны.*

Вопросы для самоконтроля

1. Как в доказательстве теоремы Хана - Банаха осуществляется продолжение функционала на одно измерение?

2. В каком смысле функционал может разделять элемент и подпространство?

3. Как определяется сопряженное пространство к линейному нормированному пространству?

4. Как определяется норма в сопряженном пространстве?

5. Является ли сопряженное пространство полным?

6. Какой общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве?

7. Какой общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве непрерывных функций?

8. Как определяется второе сопряженное пространство?

9. Как осуществляется вложение банахова пространства во второе сопряженное?

10. Как определяется сопряженный оператор?

11. Как связаны матрицы оператора и сопряженного оператора в $\mathbb{R}^n$?

12. Как определяется слабая сходимость последовательностей функционалов?

13. Как связаны слабая сходимость и сходимость по норме?

14. Как вопрос о сходимости квадратурных формул сводится к вопросу о слабой сходимости функционалов?

15. При каком условии из слабой сходимости последовательности элементов в гильбертовом пространстве следует ее сходимость по норме?

16. Как определяется понятие слабой компактности множества элементов?

Глава 2

ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Вполне непрерывные операторы образуют важный для приложений класс операторов. Многие прикладные задачи сводятся к операторным уравнениям с операторами вида "единичный плюс вполне непрерывный". Центральное место в этой главе занимает изложение теории Рисса - Шаудера – теории разрешимости указанного класса операторных уравнений.

2.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Определение. Пусть X и Y – линейные нормированные пространства. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется вполне непрерывным, если он переводит каждое ограниченное множество в пространстве X в относительно компактное множество в пространстве Y.
Эквивалентное определение. Оператор A вполне непрерывен, если для любой ограниченной последовательности элементов $\{x_n\}$ ($\|x_n\| \leq R$) из последовательности $\{Ax_n\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Так как любое относительно компактное множество ограничено, то вполне непрерывный оператор ограничен. Обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема 2.1.1 *Единичный оператор в бесконечномерном нормированном пространстве не является вполне непрерывным.*

Доказательство. В случае гильбертова пространства достаточно рассмотреть ортонормированную последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ввиду равенства $\|e_k - e_j\| = \sqrt{2}$ при $j \neq k$ из нее нельзя извлечь сходящейся подпоследовательности. Поэтому единичный оператор I не является вполне непрерывным, так как $Ie_n = e_n$.

В общем случае можно сослаться на лемму Рисса о существовании "почти ортогонального"элемента, доказательство которой приводится ниже.

Лемма 2.1.1 *Пусть L – подпространство в линейном нормированном пространстве X и $L \neq X$. Тогда для любого ε : $0 < \varepsilon < 1$ существует элемент x_ε, для которого*

$$\|x_\varepsilon\| = 1,\ \rho(x_\varepsilon, L) = \inf_{x \in L} \|x_\varepsilon - x\| > 1 - \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $x \notin L$ и $\rho(x, L) = d$. Для заданного $\varepsilon > 0$ существует $y_\varepsilon \in L$, для которого $\|x - y_\varepsilon\| \leq d/(1-\varepsilon)$. Тогда можно положить $x_\varepsilon = (x - y_\varepsilon)/\|x - y_\varepsilon\|$. Действительно, для любого $y \in L$ имеем

$$\|x_\varepsilon - y\| = \frac{\|x - (y_\varepsilon + \|x - y_\varepsilon\| y)\|}{\|x - y_\varepsilon\|} \geq 1 - \varepsilon,$$

ввиду того, что $(y_\varepsilon + \|x - y_\varepsilon\| y) \in L$ и, следовательно, числитель дроби больше d.$\blacksquare$

Завершение доказательства теоремы.

Используя лемму Рисса, выберем последовательность $\{x_n\}$, для которой $\|x_j - x_k\| > 1/2$ при $k \neq j$. Построение последовательности осуществляется индуктивно: x_1 – произвольный элемент с $\|x_1\| = 1$; если элементы $x_2, ..x_{n-1}$ уже построены, то в качестве x_n выбирается элемент, для которого $\|x_n\| = 1$ и $\rho(x_n, L_{n-1}) > 1/2$, где L_{n-1} – линейная оболочка элементов $x_1, ...x_{n-1}$.

Из последовательности $\{x_n\}$ нельзя извлечь сходящейся подпоследовательности. $\blacksquare$

Примеры вполне непрерывных операторов

1. Линейный ограниченный функционал – вполне непрерывный оператор (объясните почему).

2. Конечномерный оператор.

Линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$ называется конечномерным, если $\operatorname{Im} A$ – конечномерное подпространство в Y. Полная непрерывность конечномерного оператора следствие того факта, что каждое ограниченное множество в конечномерном пространстве относительно компактно.

Упражнение. Доказать, что конечномерный оператор можно представить в виде

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} f_k(z) y_k,$$

где $\{y_k\}_{k=1}^n$ – базис в пространстве $\operatorname{Im} A$, а $\|f_k\}_{k=1}^n$ – линейно независимая система ограниченных функционалов.

3. Интегральный оператор в пространстве $C[0,1]$.

Оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$ определяется формулой

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 k(t,s)x(s)\,ds$$

с непрерывным ядром $k(t,s)$.

Для доказательства его полной непрерывности достаточно показать относительную компактность образа единичного шара $A(S)$. Воспользуемся критерием Арцела. Равномерная ограниченность множества $A(S)$ вытекает из оценки $\|Ax\| \le \|A\|$ при $x \in S$. Далее, ввиду непрерывности ядра на единичном квадрате оно равномерно непрерывно. И, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|k(t_1,s) - k(t_2,s)| < \varepsilon,$$

как только $|t_1 - t_2| < \delta$. Теперь при $|t_1 - t_2| < \delta$ имеем

$$|(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)| \le \int\limits_0^1 |k(t_1,s) - k(t_2,s)||x(s)|\,ds \le \varepsilon.$$

Таким образом, $A(S)$ равностепенно непрерывно. ∎

Свойства вполне непрерывных операторов

Теорема 2.1.2 *(полная непрерывность и слабая сходимость)*

Каждый вполне непрерывный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность в последовательность, сходящуюся по норме.

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Лемма 2.1.2 *Пусть последовательность $\{x_n\}$ относительно компактна и слабо сходится к элементу x. Тогда эта последовательность сходится к данному элементу x по норме.*

Доказательство леммы проведем от противного. Не нарушая общности, будем считать, что выполняется соотношение $\|x - x_n\| > \varepsilon_0 > 0$. С другой стороны, выберем сходящуюся по норме подпоследовательность $x_{n_k} \to y$. Сходимость по норме влечет слабую сходимость. Поэтому вследствие единственности слабого предела получаем, что $x = y$. Поэтому $\|x_{n_k} - x\| \to 0$. Полученное противоречие доказывает лемму. ■

Доказательство теоремы. Пусть x_n слабо сходится к x. Для применения леммы достаточно показать, что Ax_n слабо сходится к Ax. Для любого ограниченного функционала f выполняется соотношение

$$\begin{array}{ccc} (A^*f)(x_n) & \longrightarrow & (A^*f)(x) \\ \| & & \| \\ f(Ax_n) & \longrightarrow & f(Ax) \end{array}$$

Следовательно, для любого ограниченного функционала f получаем, что $f(Ax_n) \to f(Ax)$.■

Теорема 2.1.3 *(об алгебраических свойствах и предельном переходе)*

1. Пусть A и B – вполне непрерывные операторы. Тогда их линейная комбинация $\alpha A + \beta B$ – также вполне непрерывный оператор.

2. Пусть A – вполне непрерывный оператор, B – ограниченный оператор. Тогда операторы AB и BA в случае их определенности – вполне непрерывны.

3. Пусть A_n, $n = 1, 2, ...$ – вполне непрерывные операторы и $\|A_n - A\| \to 0$. Тогда A также вполне непрерывный оператор.

4. Пусть A – вполне непрерывный оператор и последовательность операторов $\{B_n\}$ сильно сходится к оператору B. Тогда последовательность операторов $\{B_nA\}$ сходится к оператору BA по норме.

Доказательство.

1. Докажите самостоятельно.

2. Рассмотрим случай оператора BA. Если M – ограниченное множество, то $A(M)$ относительно компактно. Далее, ограниченный оператор переводит относительно компактное множество в относительно компактное. Поэтому множество $B(A(M))$ относительно компактно.

3. Пусть M – ограниченное множество в X и при $x \in M$ выполняется неравенство $\|x\| \leq R$. Тогда $A_n(M)$ – относительно компактное множество. Покажем, что множество $A(M)$ также относительно компактно. Так как для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, что при $n > N$ $\|A_n - A\| < \varepsilon/R$, то ввиду неравенства

$$\|Ax - A_nx\| \leq \|A - A_n\|\|x\| \leq \varepsilon$$

при $n > N$ множество $A_n(M)$ при $n > N$ является относительно компактной ε-сетью для $A(M)$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ множество $A(M)$ относительно компактно.

4. Ввиду полной непрерывности оператора A множество $A(S)$, где S – единичный шар, относительно компактно. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и конечную ε-сеть $\{y_j\}$ для множества $A(S)$. Далее, для любого $x \in S$ справедливо неравенство

$$\|B_nAx - BAx\| \leq \|B_n(Ax - y_k)\| + \|B_ny_k - By_k\| + \|B(Ax - y_k)\|.$$

Выбрав y_k так, чтобы $\|Ax - y_k\| < \varepsilon$, получаем равномерную по $x \in S$ оценку

$$\|B_nAx - BAx\| \leq \sup(\|B_n\|, \|B\|)\varepsilon + \sup_k \|B_ny_k - By_k\|.$$

Следовательно, равномерно по x

$$\lim_{n\to\infty} \|B_nAx - BAx\| \leq \sup(\|B_n\|, \|B\|)\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \|B_n A - BA\| = 0.$■

Операторы Гильберта - Шмидта

Определение. Оператором Гильберта - Шмидта будем называть интегральный оператор

$$(Ax)(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)\,ds$$

с квадратично суммируемым ядром $k(t,s)$, рассматриваемый в пространстве $L_2(0,1)$.

Ранее было показано, что оператор $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ ограничен и верна оценка $\|A\| \leq \|k\|_{L_2(K)},\ K = (0,1)\times(0,1)$. Установим, что оператор A является вполне непрерывным. Пространство $L_2(K)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 x(t,s)\overline{y(t,s)}\,dt\,ds.$$

Функции $e_{nm}(t,s) = e^{2\pi int}e^{2\pi ims},\ n,m = 0,\pm 1, ...$ образуют ортонормированный базис в этом пространстве. Ядро $k(t,s)$ как элемент из $L_2(K)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$k(t,s) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} c_{n,m}e_{n,m}(t,s),$$

причем последовательность частичных сумм

$$k_N(t,s) = \sum_{n,m=-N}^{N} c_{n,m}e_{n,m}(t,s)$$

сходится по норме к ядру $k(t,s)$:

$$\|k(t,s) - k_N(t,s)\|_{L_2(K)} \to 0.$$

Рассмотрим оператор A_N с ядром $k_N(t,s)$:

$$(A_N x)(t) = \int_0^1 k_N(t,s)x(s)\,ds.$$

Оператор A_N – конечномерный и, следовательно, вполне непрерывный. С другой стороны,

$$\|A_N - A\| \leq \|k_N - k\|_{L_2(K)} \to 0.$$

Поэтому вследствие теоремы о предельном переходе оператор A вполне непрерывен.

Теорема Шаудера

Теорема 2.1.4 *Пусть X и Y – банаховы пространства. Оператор $A : X \to Y$ – вполне непрерывен тогда и только тогда, когда его сопряженный оператор $A^* : Y^* \to X^*$ также вполне непрерывен.*

Доказательство. Приведем простое доказательства для случая гильбертова сепарабельного пространства. В этом случае, как уже неоднократно указывалось, существует система конечномерных ортопроекторов $\{P_n\}$, сильно сходящихся к единичному оператору. Тогда операторы P_nA вместе со своими сопряженными $A^*P_n^*$ являются конечномерными и, следовательно, вполне непрерывными. Если оператор A вполне непрерывен, то

$$\|A^* - A^*P_n^*\| = \|A - P_nA\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, оператор A^* также вполне непрерывен.

В общем случае доказательство проводится с применением обобщенной теоремы Арцела. Рассмотрим последовательность функционалов $f_n \in S^*$, где S^* – замкнутый единичный шар в сопряженном пространстве Y^*. Каждому функционалу f_n сопоставим функцию $F_n : \overline{A(S)} \to \mathbb{R}$, определяемую соотношением

$$F_n(y) = f_n(y), \;\; y \in \overline{A(S)}.$$

Ввиду оценки $|F_n(y)| \leq \|A\|$ функция F_n является элементом пространства $C(\overline{A(S)}, I)$, где$I = [-\|A\|, \|A\|]$. Вследствие неравенства $|F_n(y_1) - F_n(y_2)| \leq \|y_1 - y_2\|$ семейство функций $\{F_n\}$ равностепенно непрерывно и согласно обобщенной теореме Арцела относительно компактно в пространстве $C(\overline{A(S)}, I)$. Поэтому, не нарушая общности, будем считать, что последовательность функций $\{F_n\}$ равномерно сходится на компактном пространстве $\overline{A(S)}$. Вследствие соотношения

$$\sup_{\|x\|\le 1} \|(A^* f_n)(x) - (A^* f_m)(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} \|(F_n)(Ax) - (F_m)(Ax)| \to 0$$

при $n, m \to \infty$ последовательность функционалов $\{A^* f_n\}$ сходится по норме. Таким образом, установлена полная непрерывность сопряженного оператора A^*.

Пусть теперь вполне непрерывен сопряженный оператор A^*. Тогда вследствие уже доказанной части теоремы вполне непрерывен его сопряженный $A^{**} : X^{**} \to Y^{**}$. В силу изометрического вложения $X \subset X^{**}$ множество $A(S)$ изометрически вложено в $A^{**}(S^{**})$ и, следовательно, относительно компактно.■

2.2 ТЕОРИЯ РИССА – ШАУДЕРА

Пусть $A : X \to X$ – вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве X. Рассмотрим четыре операторных уравнения:

неоднородное уравнение в пространстве X

$$Ax - x = y \in X; \tag{1}$$

однородное уравнение в пространстве X

$$Ax - x = 0; \tag{2}$$

неоднородное уравнение в пространстве X^*

$$A^* f - f = g \in X^*; \tag{1^*}$$

однородное уравнение в пространстве X^*

$$A^* f - f = 0. \tag{2^*}$$

Теорема 2.2.1 *Для того чтобы уравнение (1) было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие разрешимости:*

$f(y) = 0$ *для всех функционалов* f, *являющихся решением однородного уравнения* (2^*).

В частности, если уравнение (2^*) *имеет только тривиальное решение, то (1) разрешимо при любой правой части* $y \in X$.

Теорема 2.2.2 *Для того чтобы уравнение* (1^*) *было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие разрешимости:*

$g(x) = 0$ *для всех элементов* x, *которые являются решениями однородного уравнения (2).*

В частности, если уравнение (2) имеет только тривиальное решение, то уравнение (1^*) *разрешимо при любой правой части* $g \in X^*$.

Теорема 2.2.3 *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\mathrm{Im}\,(I - A) = X$;

2. $\mathrm{Ker}\,(I - A) = \{0\}$;

3. $\mathrm{Im}\,(I - A^*) = X^*$;

4. $\mathrm{Ker}\,(I - A^*) = \{0\}$;

Теорема 2.2.4 *Однородные уравнения (2) и* (2^*) *имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.*

Предварительно установим леммы о ядре и образе оператора $I - A$. Здесь и в дальнейших доказательствах используем обозначение: $T = I - A$.

Лемма 2.2.1 $\mathrm{Ker}\,T$ *конечномерно.*

Доказательство. На подпространстве $\mathrm{Ker}\,T$ единичный оператор I совпадает с вполне непрерывным оператором A. Но тогда $\mathrm{Ker}\,T$ конечномерно.■

Лемма 2.2.2 $\mathrm{Im}\,T$ *подпространство в пространстве* X.

Доказательство. Предварительно докажем следующий факт: существует такой линейный ограниченный оператор $S : \mathrm{Im}\,T \to X$ такой, что $TS = I$.

Пусть $\mathrm{Ker}\,T \neq \{0\}$, $\{e_j\}_{j=1}^n$ – базис в $\mathrm{Ker}\,T$ и $\{f_j\}_{j=1}^n$ – биортогональная этому базису система функционалов. Обозначим через $\tilde{X}$ – подпространство в X, состоящее из всех элементов x, удовлетворяющих условиям $f_j(x) = 0$, $j = 1, 2, ...n$. Определим оператор $S : \mathrm{Im}\,T \to X$, сопоставляя элементу $y \in \mathrm{Im}\,T$ элемент $\tilde{x}$ – единственное решение уравнения

$Tx = y$, принадлежащее пространству $\tilde{X}$. Докажем, что оператор S ограничен. Предполагая противное, получаем, что для любого n существует элемент $\tilde{x}_n \in \tilde{X}$, $\|\tilde{x}_n\| = 1$, $\|T\tilde{x}_n\| \leq 1/n$. Можно считать, что последовательность $\{A\tilde{x}_n\}$ сходится. Но тогда сходится и последовательность $\tilde{x}_n = T\tilde{x}_n + A\tilde{x}_n$. Если $\lim \tilde{x}_n = \tilde{x}$, то предельный переход в предыдущем равенстве устанавливает, что $\tilde{x} \in \operatorname{Ker} T$ и, следовательно, $\tilde{x} = 0$. Но это противоречит равенству $\|\tilde{x}\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|\tilde{x}_n\| = 1$.

Используя ограниченность оператора S, покажем замкнутость образа оператора T. Пусть $\{y_n\}$ – последовательность точек из $\operatorname{Im} T$, сходящаяся к элементу y. Положим $x_n = Sy_n$. Ввиду неравенства

$$\|x_n - x_m\| \leq \|S\|\|y_n - y_m\|$$

последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Если $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то $y = Tx \in \operatorname{Im} T$.■

Доказательство теоремы 2.2.1.

Из соотношения $f(Tx) = (T^*f)(x)$ вытекает, что $f \in \operatorname{Ker} T^*$ тогда и только тогда, когда $f(Tx) = 0$ для всех x. Следовательно, если $y \in \operatorname{Im} T$, то $f(y) = 0$ для любого $f \in \operatorname{Ker} T^*$. Обратно, пусть $f(y) = 0$ для любого функционала $f \in \operatorname{Ker} T^*$, но $y \notin \operatorname{Im} T$. Так как $\operatorname{Im} T$ – подпространство, то существует функционал $g \in X^*$, разделяющий $\operatorname{Im} T$ и элемент y, т.е. выполняются соотношения $g(y) \neq 0$, $g(Tx) = 0$ для всех x. Но это приводит к противоречию, так как в этом случае $g \in \operatorname{Ker} T^*$.■

Доказательство теоремы 2.2.2.

Если $f = T^*g$, то $f(x) = (T^*g)(x) = g(Tx) = 0$ для любого $x \in \operatorname{Ker} T$. Обратно, пусть $f(x) = 0$ для любого $x \in \operatorname{Ker} T$. Определим на $\operatorname{Im} T$ функционал $F(y) = f(Sy)$, где S оператор, определенный в лемме об образе. Согласно этому определению функционал F ограничен на $\operatorname{Im} T$. Обозначим через $\tilde{F}$ некоторое его продолжение на X. Тогда $f = T^*\tilde{F} \in Im\, T^*$.■

Доказательство теоремы 2.2.3.

1. $\to$ 2. Пусть $\operatorname{Im} T = X$, но $\operatorname{Ker} T = N_1 \neq \{0\}$. Образуем множества $N_k = \operatorname{Ker} T^k$. Имеют место строгие вложения $N_k \subset N_{k+1}$, $N_k \neq N_{k+1}$.

(Докажите) По лемме Рисса о "почти ортогональной"проекции существует последовательность элементов $z_k \in N_k$, для которых $\|z_k\| = 1$, $\|z_k - x\| > 1/2$ для любого $x \in N_{k-1}$. Для разности $Az_n - Az_m$ при $n > m$ верна оценка

$$\|Az_n - Az_m\| = \|z_n - Tz_n - z_m + Tz_m\| \geq 1/2,$$

так как $Tz_n + z_m - Tz_m \in N_{n-1}$. Но это противоречит полной непрерывности оператора A.■

2. → 3. Следует из теоремы 2.2.2.

3. → 4. Следует из доказанного перехода 1. → 2., так как T^* – вполне непрерывный оператор.

4. → 1. Следует из теоремы 2.2.1. ■

Доказательство теоремы 2.2.4.

Пусть $\{x_j\}_{j=1}^n$ – базис в $\operatorname{Ker} T$, $\{f_j\}_{j=1}^m$ – базис в $\operatorname{Ker} T^*$, $\{g_j\}_{j=1}^n$ – биортогональная система для $\{x_j\}_{j=1}^n$: $g_k(x_j) = \delta_{j,k}$, $\{z_j\}_{j=1}^m$ – биортогональная система элементов для функционалов $\{f_j\}_{j=1}^m$; $f_k(z_j) = \delta_{j,k}$.

Пусть $n < m$. Рассмотрим уравнение

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) z_j.$$

Если x – его решение, то из условий разрешимости (теорема 2.2.1) вытекает, что $g_j(x) = 0$ $j = 1, 2, ..n$. Поэтому $x \in \operatorname{Ker} T$ и, следовательно, справедливо разложение $x = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$. Но $c_j = g_j(x) = 0$. Поэтому $x = 0$. Введем оператор $\tilde{T}$:

$$\tilde{T}x = Tx - \sum_{j=1}^{n} g_j(x) z_j.$$

Предыдущие рассуждения показывают, что $\operatorname{Ker} \tilde{T} = \{0\}$. Рассмотрим оператор $\tilde{T}^*$:

$$\tilde{T}^* f = T^* f - \sum_{j=1}^{n} f(z_j) g_j.$$

Пусть $s > n$, тогда

$$\tilde{T}^* g_s = T^* g_s - \sum_{j=1}^{n} g_s(z_j) g_j = 0.$$

Но это означает, что $\operatorname{Ker} \tilde{T}^* \neq \{0\}$, что противоречит утверждению теоремы 2.2.3, примененной к оператору $\tilde{T}$.

Случай $n > m$ рассматривается аналогично с заменой A на A^*. (Проведите подробное доказательство).■

Замечание. Из теоремы 2.2.3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.2.5 *(альтернатива Фредгольма) Либо уравнение $Tx = y$ разрешимо при любой правой части $y \in X$, либо однородное уравнение $Tx = 0$ имеет нетривиальное решение.*

Теоремы этого раздела впервые были доказаны Фредгольмом для интегральных уравнений, а затем были распространены Риссом и Шаудером на операторные уравнения с вполне непрерывными операторами. Изложение метода Фредгольма содержится в [20].

Теорема о спектре вполне непрерывного оператора

Теорема 2.2.6 *Пусть A – вполне непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве X. Тогда*

1. Каждая ненулевая точка спектра является собственным значением конечной кратности.

2. Спектр $\sigma(A)$ оператора A есть конечное или счетное множество точек комплексной плоскости, не имеющее предельных точек, за исключением, быть может, нуля.

3. Если X бесконечномерно, то точка $\lambda = 0$ принадлежит спектру $\sigma(A)$.

Доказательство.

1. Рассмотрим уравнение $Ax - \lambda x = y$. Если $\lambda \neq 0$, то придав уравнению вид $1/\lambda Ax - x = y/\lambda$, можем применить к нему теорию Рисса - Шаудера.

Из альтернативы Фредгольма вытекает, что либо однородное уравнение $1/\lambda Ax - x = 0$ имеет нетривиальное решение, либо неоднородное уравнение имеет решение при любой правой части. В первом случае альтернативы точка λ является собственным значением. Из теоремы 2.2.4 следует, что его кратность конечна. Напомним, что кратностью собственного значения в данном случае называется размерность собственного подпространства. Во втором случае согласно теореме Банаха об обратном операторе λ регулярное значение оператора A.

2. Покажем, что спектр $\sigma(A)$ не имеет ненулевых предельных точек. Доказываем от противного. Пусть существует последовательность различных собственных чисел λ_n, сходящаяся к числу $\lambda_0 \neq 0$. Пусть e_n – собственный вектор для собственного значения λ_n. Образуем подпространства L_n, являющиеся линейными оболочками векторов $\{e_j\}_{j=1}^{n}$. Имеют место строгие вложения $L_n \subset L_{n+1},\ L_n \neq L_{n+1}$. По лемме Рисса о "почти ортогональной"проекции существует последовательность элементов $y_n \in L_n$, для которых $\|y_n\| = 1,\ \|y_n - y_m\| > 1/2$ при $n \neq m$. Далее, при $n > m$ и достаточно большом n справедлива оценка

$$\|Ay_n - Ay_m\| = \|\lambda_n y_n + (Ay_n - \lambda_n y - Ay_m)\| > 1/2|\lambda_n| > 1/4|\lambda_0| > 0,$$

вследствие включения $Ay_n - \lambda_n y - Ay_m \in L_{n-1}$. Для того чтобы установить указанное включение заметим, что $y_n = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j e_j$. Поэтому

$$Ay_n - \lambda_n y_n = \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_n) e_j \in L_{n-1}.$$

3. Предположим, что X – бесконечномерно и $\lambda = 0 \neq \sigma(A)$. Тогда существует ограниченный обратный оператор A^{-1}. Поэтому произведение $A^{-1}A = I$ является вполне непрерывным оператором, что невозможно в бесконечномерном пространстве.

Замечание. Доказанная теорема устанавливает структуру спектра вполне непрерывного оператора, но не утверждает существования собственных значений. Следующий пример показывает, что существуют вполне непрерывные операторы, не имеющие собственных значений.

Пример. Рассмотрим оператор интегрирования

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds$$

в пространстве $C[0,1]$. Пусть $x(t)$ – собственный вектор с ненулевым собственным значением λ. Дифференцируя равенство

$$\int_0^t x(s)\,ds - \lambda x(t) = 0,$$

получаем, что $x(t)$ – решение задачи Коши

$$\begin{cases} x' = 1/\lambda x \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Из теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши следует, что $x(t) = 0$. Полученное противоречие показывает, что у оператора интегрирования нет ненулевых собственных значений. Аналогично устанавливается, что $\lambda = 0$ также не является собственным значением. Таким образом, $\sigma(A) = \{0\}$ и является остаточным (поясните почему).

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется вполне непрерывный оператор?

2. Является ли он ограниченным?

3. Является ли единичный оператор вполне непрерывным?

4. На основании какого результата устанавливается полная непрерывность интегрального оператора в пространстве непрерывных функций?

5. Как устанавливается полная непрерывность оператора Гильберта - Шмидта?

6. Почему ядро оператора вида "единичный плюс вполне непрерывный" является конечномерным подпространством?

7. Может ли ядро вполне непрерывного оператора быть бесконечномерным?

8. Является ли образ оператора вида "единичный плюс вполне непрерывный"замкнутым?

9. Следует ли из теоремы о спектре вполне непрерывного оператора существование ненулевого собственного значения?

10. Может ли вполне непрерывный оператор для ненулевого собственного значения иметь бесконечную линейно независимую систему собственных векторов?

11. Пусть при при некоторой фиксированной правой части операторное уравненние с оператором вида "единичный плюс вполне непрерывный"имеет единственное решение. Что можно сказать о разрешимости этого уравнения при любой правой части? Сохранится ли единственность?

12. Как формулируются условия разрешимости операторного уравнения пункта 11?

Глава 3

ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Основные результаты этой главы концентрируются вокруг понятия самосопряженного оператора. Именно для этого класса операторов построена глубокая теория и именно с этим классом связаны фундаментальные приложения функционального анализа. Ниже излагаются основы теории самосопряженных операторов.

3.1 ОГРАНИЧЕННЫЕ САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Гильбертово сопряженный оператор

Определение. Пусть H – гильбертово пространство, $A : H \to H$ – линейный ограниченный оператор. Линейный ограниченный оператор $A^* : H \to H$ называется его гильбертово сопряженным, если для любых $x, y \in H$ выполняется соотношение

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

Теорема 3.1.1 *Для любого линейного ограниченного оператора $A : H \to H$ существует единственный гильбертово сопряженный оператор A^*, причем*

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Доказательство.

Единственность. Если B – еще один оператор, удовлетворяющий соотношению $(Ax, y) = (x, By)$, то для любых $x, y \in H$ выполняется равенство $(x, (A^* - B)y) = 0$. Отсюда непосредственно следует, что $A^* = B$.

Существование. Зафиксируем элемент $y \in H$ и рассмотрим функционал

$$f_y(x) = (Ax, y).$$

Ввиду неравенства $|f_y(x)| \leq \|A\|\|y\|\|x\|$ он ограничен и справедлива оценка $\|f_y\| \leq \|A\|\|y\|$. По теореме Рисса существует единственный элемент $y^* \in H$, для которого

$$f_y(x) = (x, y^*),\ \ \|f_y\| = \|y^*\|.$$

Таким образом, определен линейный оператор $A^*y = y^*$, для которого $(Ax, y) = (x, A^*y)$. Из цепочки неравенств

$$\|A^*y\| = \|y^*\| = \|f_y\| \leq \|A\|\|y\|$$

следует оценка

$$\|A^*\| \leq \|A\|.$$

Для доказательства равенства норм установим соотношение $(A^*)^* = A$. Это следует из равенств

$$(Ax, y) = (x, A^*y) = \overline{(A^*y, x)} = \overline{(y, (A^*)^*x)} = ((A^*)^*x, y).$$

Поэтому, учитывая уже установленное неравенство, выводим противоположное неравенство $\|A\| = \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|$. В результате имеет место равенство норм $\|A^*\| = \|A\|$. ■

Определение. Оператор $A : H \to H$ называется самосопряженным, если $A = A^*$.

Пример. Рассмотрим в комплексном пространстве $L_2(0,1)$ интегральный оператор с квадратично суммируемым ядром

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 k(t,s)x(s)\,ds.$$

Найдем A^*. Имеем

$$(Ax, y) = \int_0^1 (Ax)(s)\overline{y(s)}\,ds = \int_0^1 \left(\int_0^1 k(s,t)x(t)\,dt \right) \overline{y(s)}\,ds.$$

Изменяя порядок интегрирования (обоснуйте с использованием теоремы Фубини), получаем

$$(Ax, y) = \int_0^1 x(t) \left(\int_0^1 k(s,t)\overline{y(s)}\,ds \right)\,dt =$$

$$= \int_0^1 x(t)\overline{\left(\int_0^1 \overline{k(s,t)}y(s)\,ds \right)}\,dt = (x, A^*y).$$

Следовательно, сопряженный оператор имеет вид

$$(A^*y)(t) = \int_0^1 \overline{k(s,t)}y(s)\,ds,$$

т.е. ядро сопряженного оператора получается из ядра исходного оператора транспонированием и комплексным сопряжением:

$$k_{A^*}(t,s) = \overline{k(s,t)}.$$

Эту операцию называют эрмитовым сопряжением. Отметим, что интегральный оператор самосопряжен, если $k(t,s) = \overline{k(s,t)}$.

Теорема о норме самосопряженного оператора

Теорема 3.1.2 *Если $A : H \to H$ – самосопряженный оператор, то*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Доказательство. Пока не доказано равенство обозначим правую часть соотношения через Q. Очевидно, что $Q \leq \|A\|$. Далее, заметим, что для самосопряженного оператора A справедливо поляризационное тождество (проверьте)

$$(Ax, y) = \frac{1}{4}\left\{(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) + \right.$$

$$+i(A(x+iy),x+iy)-i(A(x-iy),x-iy)\}\,.$$

Отметим также, что для самосопряженного оператора форма (Ax,x) вещественна:

$$(Ax,x)=(x,Ax)=\overline{(Ax,x)}.$$

Используя этот факт и поляризационное тождество, получаем

$$\mathrm{Re}(Ax,y)=\frac{1}{4}\left\{(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)\right\}.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$|\mathrm{Re}(Ax,y)|\le\frac{1}{4}Q\left(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\right)=\frac{1}{2}Q(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

Последнее равенство – тождество параллелограмма. Теперь считаем, что для x выполняются условия: $\|x\|=1,\ Ax\neq 0$. Полагая в установленном неравенстве $y=Ax/\|Ax\|$, получаем, что

$$\|Ax\|\le Q,$$

что влечет $\|A\|\le Q$.■

Спектральные свойства самосопряженных операторов

Упражнение. Докажите следующие утверждения:

1. собственные числа самосопряженного оператора вещественны;

2. собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Теорема о регулярном значении

Теорема 3.1.3 *Точка $\lambda\in\mathbb{C}$ является регулярным значением самосопряженного оператора A тогда и только тогда, когда существует такое число $c>0$, что для любого $x\in H$ выполняется неравенство*

$$\|(A-\lambda)x\|\ge c\|x\|. \tag{3.1}$$

Доказательство.

Необходимость очевидна (приведите подробное доказательство).

Достаточность. Предположим, что выполнено неравенство 3.1. Вследствие одной из теорем о существовании ограниченного обратного оператора достаточно установить, что $Im\,(A-\lambda I)=H$.

1. Сначала докажем, что $\overline{Im(A-\lambda I)}=H$, т.е. образ оператора $A-\lambda I$ всюду плотен в H. Предположим, что это неверно, тогда вследствие теоремы об ортогональном разложении существует элемент $y\neq 0$, для которого при любом $x\in H$ выполняется соотношение

$$((A-\lambda I)x,y)=0.$$

Так как оператор A самосопряжен, то $((A-\lambda I)x,y)=(x,(A-\overline{\lambda}I)y)=0$, что влечет $(A-\overline{\lambda}I)y=0$. Из последнего соотношения следует, что $\overline{\lambda}$ – собственное значение. Но тогда оно – вещественно и поэтому $(A-\lambda I)y=0$, что невозможно ввиду выполнения неравенства $\|y\|\leq\|(A-\lambda I)y\|$.

2. Покажем, что $Im\,(A-\lambda I)=H$. Пусть $z\in H$. На основании доказанного существует последовательность $\{x_n\}$, для которой $(A-\lambda I)x_n\to z$. Вследствие неравенства

$$\|x_n-x_m\|\leq 1/c\|(A-\lambda I)x_n-(A-\lambda I)x_m\|$$

последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и, следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. Поэтому $(A-\lambda I)x=z$. Ввиду произвольности $z\in H$ установлено, что $Im(A-\lambda I)=H$ и теорема доказана. ■

Следствие 1. (критерий Вейля) Число λ принадлежит спектру самосопряженного оператора A тогда и только тогда, когда существует последовательность элементов x_n, для которых

$$\|x_n\|=1,\ \|(A-\lambda I)x_n\|\to 0.$$

Упражнение. Докажите критерий Вейля.

Следствие 2. Если $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$, то λ – регулярное значение оператора A и для резольвенты $R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}$ справедлива оценка

$$\|R_\lambda\|\leq 1/|\mathrm{Im}\lambda|.$$

Доказательство. Рассмотрим форму $((A-\lambda I)x,x) = (Ax,x) - \lambda(x,x)$ и выделим ее мнимую часть: $\mathrm{Im}((A-\lambda I)x,x) = -\mathrm{Im}\lambda(x,x)$. Используя это соотношение, получаем оценку

$$|\mathrm{Im}\lambda|\|x\|^2 \leq \|(A-\lambda I)x\|\|x\|,$$

вследствие которой λ является регулярным значением. ■

Теорема о спектре самосопряженного оператора

Теорема 3.1.4 *Справедливы следующие утверждения:*
1. спектр $\sigma(A)$ самосопряженного оператора A веществен;
2. он расположен на отрезке вещественной оси $[m,M]$, где

$$M = \sup_{\|x\|=1}(Ax,x),\ m = \inf_{\|x\|=1}(Ax,x);$$

3. верхняя и нижняя грани оператора A принадлежат спектру:

$$m, M \in \sigma(A).$$

Доказательство.

1. Вещественность спектра уже доказана (следствие 2).

2. Покажем, что точки вещественной оси, расположенные вне отрезка $[m,M]$ регулярные значения оператора A. Пусть $\lambda > M$. Тогда

$$(Ax,x) \leq M(x,x)$$

и поэтому

$$-((A-\lambda I)x,x) \geq (\lambda - M)\|x\|^2 \geq 0.$$

В силу неравенства Коши - Буняковского получаем, что

$$\|(A-\lambda I)x\|\|x\| \geq (\lambda - M)\|x\|^2.$$

После чего, сократив обе части неравенства на $\|x\|$, устанавливаем оценку $\|(A-\lambda I)x\| \geq (\lambda - M)\|x\|$, согласно которой λ регулярно.

Аналогично доказывается регулярность всех вещественных чисел $\lambda < m$.

3. Докажем, что $M \in \sigma(A)$. Сначала заметим, что при переходе от оператора A к оператору $A + aI$ происходит сдвиг на a верхней и нижней граней

и спектра, т.е. $m(A+aI) = m+a$, $M(A+aI) = M+a$, $\sigma(A+aI) = \sigma(A)+a$. Поэтому, не нарушая общности, будем считать, что $M > |m|$. В этом случае $\|A\| = M$, так как

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \max\{|M|, |m|\} = M.$$

По определению точной верхней грани существует последовательность точек $\{x_n\}$, для которых $\|x_n\| = 1$, $(Ax_n, x_n) = M - \delta_n$, где $\delta_n \geq 0$, $\delta_n \to 0$. Учитывая этот факт, получаем, что

$$\|(A - MI)x_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 - 2M(M - \delta_n) + M^2 \leq 2M\delta_n \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Вследствие критерия Вейля $M \in \sigma(A)$.

Аналогично устанавливается, что нижняя грань оператора A также принадлежит его спектру. ■

3.2 САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Теорема о существовании ненулевого собственного значения

Теорема 3.2.1 *Пусть $A \neq 0$ – самосопряженный вполне непрерывный оператор. Тогда у него существует, по крайней мере, одно ненулевое собственное значение.*

Доказательство. Согласно теореме о спектре оба числа m и M принадлежат спектру оператора A. Очевидно, хотя бы одно из них не равно нулю. Пусть это будет M. Но согласно теореме о спектре вполне непрерывного оператора каждая ненулевая точка спектра есть собственное значение. Таким образом, M – ненулевое собственное значение.■

Теорема Гильберта - Шмидта

Теорема 3.2.2 *Пусть $A : H \to H$ – вполне непрерывный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A.*

Доказательство. Предполагаем, что $A \neq 0$. Рассмотрим множество всех ненулевых собственных значений оператора A. Это конечное или счетное множество вещественных чисел, не имеющее предельных точек, за исключением нуля (почему?). Кратностью собственного значения будем называть размерность подпространства собственных векторов, отвечающих этому собственному значению. Упорядочим положительные собственные значения по убыванию, отрицательные собственные значения по возрастанию:

$$\lambda_1 > \lambda_2 .... > 0; \ \lambda_{-1} < \lambda_{-2} < ... < 0.$$

В каждом собственном подпространстве, отвечающему собственному значению λ_j, выберем ортонормированный базис $e_{j1}, e_{j2}..e_{jm_j}$, где m_j – кратность собственного значения λ_j. Таким образом, получаем ортонормированную систему $\{e_{jk}\}$ собственных векторов оператора $A: \ Ae_{jk} = \lambda_j e_{jk}$. Обозначим через $H_1 (\subset H)$ – подпространство, являющееся замыканием линейной оболочки системы $\{e_{jk}\}$. Ясно, что $\{e_{jk}\}$ – ортонормированный базис в подпространстве H_1. Очевидно также, что оператор A переводит подпространство H_1 в себя: $A(H_1) \subset H_1$. Введем обозначение $H_0 = H_1^{\perp}$ и докажем, что для любого $x_0 \in H_0 \ Ax_0 = 0$. Если $h_0 \in H_0, \ h_1 \in H_1$, то $(Ah_0, h_1) = (h_0, Ah_1) = 0$. Поэтому $A(H_0) \subset H_0$. Пусть A_0 – ограничение оператора A на подпространство H_0. Тогда $A_0 : H_0 \to H_0$ – самосопряженный вполне непрерывный оператор. Если он отличен от нуля, то у него существует ненулевое собственное значение λ. Пусть e – соответствующий собственный вектор. Тогда $A_0 e = Ae = \lambda e$, что невозможно, так как все собственные векторы оператора A с ненулевыми собственными значениями содержатся в подпространстве H_1. Таким образом, $A(H_0) = \{0\}$ и, следовательно, каждый вектор из H_0 является собственным вектором оператора A с нулевым собственным значением. Выбрав произвольный ортонормированный базис в подпространстве H_0 и взяв его объединение с построенным ортонормированным базисом в подпространстве H_1, получим ортонормированный базис во всем пространстве H.■

Замечание. Произвольный элемент $x \in H$ можно представить в виде

$x = \sum c_{jk}e_{jk} + x_0$, где $c_{jk} = (x, e_{jk})$ – коэффициенты Фурье, $x_0 \in H_0$. Тогда значение оператора A на элементе x определяется соотношением

$$Ax = \sum \lambda_{jk} c_{jk} e_{jk}.$$

Представление вполне непрерывного оператора

Теорема 3.2.3 *Пусть $T : H \to H$ – вполне непрерывный оператор и $H_0 = Ker\, T$. Тогда существуют две ортонормированные системы $\{f_k\}$, $\{g_k\}$ и последовательность положительных чисел $\{\mu_k\}$ такие, что для любого элемента $x \in H$ справедливы представления*

$$x = x_0 + \sum (x, f_j) f_j,\ \ x_0 \in H_0,$$

$$Ax = \sum \mu_j (x, f_j) g_j.$$

Доказательство. Рассмотрим самосопряженный вполне непрерывный оператор $A = T^*T$. Согласно теореме Гильберта - Шмидта существует конечная или счетная ортонормированная система $\{f_j\}$ собственных векторов оператора A : $Af_j = \lambda_j f_j$ такая, что для любого элемента $x \in H$ справедливы разложения

$$x = \sum (x, f_j) f_j + x_0,\ \ Ax_0 = 0,$$

$$Ax = \sum \lambda_j (x, f_j) f_j.$$

Предварительно заметим, что $Ax_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $Tx_0 = 0$, что следует из равенства $(Ax_0, x_0) = \|Tx_0\|^2$. Таким образом, $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} A$. Действуя оператором T на разложение элемента x, получаем

$$Tx = \sum (x, f_j) T f_j.$$

Собственные числа оператора A положительны:

$$\lambda_j = (Af_j, f_j) = (Tf_j, Tf_j) > 0.$$

Положим $\mu_j = \sqrt{\lambda_j} > 0$. Из соотношения

$$(Tf_j, Tf_k) = (Af_j, f_k) = \lambda_j \delta_{jk} = \mu_j^2 \delta_{jk}$$

вытекает, что элементы $g_j = 1/\mu_j T f_j$ образуют ортонормированную систему и справедливо разложение

$$Tx = \sum \mu_j (x, f_j) g_j.$$

■

Теорема об аппроксимации

Теорема 3.2.4 *Пусть $T : H \to H$ – вполне непрерывный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой конечномерный оператор $T_\varepsilon : H \to H$, что $\|T - T_\varepsilon\| < \varepsilon$.*

Доказательство. Применим к оператору T предыдущую теорему. Считаем, что ортонормированные системы бесконечны, иначе сам оператор T является конечномерным. Рассмотрим конечномерный оператор

$$T_n x = \sum_{j=1}^{n} \mu_j (x, f_j) g_j.$$

Тогда

$$\|T_n x - Tx\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu_j^2 |(x, f_j)|^2 \le \sup_{j>n} \mu_j^2 \|x\|^2.$$

Так как $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$, то в качестве T_ε можно взять T_n с таким номером n, для которого $\sup\limits_{j>n} \mu_j^2 < \varepsilon^2$.■

Принцип минимакса

Определение. Оператор $A : H \to H$ будем называть положительным, если для любого $x \ne 0$ выполняется условие $(Ax, x) > 0$.

Теорема 3.2.5 *Пусть A – положительный самосопряженный вполне непрерывный оператор. Тогда все его собственные значения положительны. Упорядочим их по убыванию $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots$, повторяя в этом ряду каждое собственное значение столько раз, какова его кратность. Справедливы следующие соотношения:*

$$\lambda_1 = \sup_{x \ne 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \quad \textit{(принцип Рэлея)};$$

$$\lambda_n = \inf_{y_1, y_2 .. y_{n-1}} \sup_{x \neq 0, (x, y_j) = 0, j = 1, \dots n-1} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

Доказательство. Пусть $\{e_j\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов оператора A. Тогда каждый вектор x представляется рядом Фурье

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j, \;\; x_j = (x, e_j).$$

Для элемента Ax ряд Фурье имеет вид

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j e_j.$$

Поэтому

$$(Ax, x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |x_j|^2.$$

Но тогда верна оценка

$$(Ax, x) \leq \lambda_1 (x, x),$$

вследствие которой справедлив принцип Рэлея:

$$\lambda_1 = \frac{(Ae_1, e_1)}{(e_1, e_1)} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \leq \lambda_1.$$

Аналогично верно соотношение

$$\lambda_n = \frac{(Ae_n, e_n)}{(e_n, e_n)} \leq \sup_{x \neq 0, \; (x, e_j) = 0, j = 1, \dots n-1} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \leq \lambda_n.$$

Пусть теперь $y_1, y_2, .. y_{n-1}$ – произвольные элементы, тогда существует линейная комбинация $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots \alpha_n e_n \neq 0$, ортогональная всем элементам $y_1, y_2, .. y_{n-1}$. Для доказательства этого факта рассмотрим ортогональное разложение

$$H = L_{n-1} \oplus L_{n-1}^{\perp},$$

где L_{n-1} – линейная оболочка векторов $y_1, y_2, .. y_{n-1}$. Пусть $e_j = e_j' + e_j''$ – разложение вектора e_j. Векторы $e_1', e_2', \dots e_n'$ принадлежат подпространству L_{n-1} и, следовательно, линейно зависимы. Поэтому существует линейная комбинация (среди α_j обязательно есть ненулевые) $\alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + ... + \alpha_n e'_n = 0$. Рассмотрим элемент $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... \alpha_n e_n$. Он принадлежит подпространству $L^{\perp}_{n-1}$ и, следовательно, ортогонален всем элементам $y_1, y_2, ..y_{n-1}$. Для данного элемента справедливо неравенство

$$(A(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... \alpha_n e_n), \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... \alpha_n e_n) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \lambda_j \geq \lambda_n \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2.$$

Поэтому имеем

$$\sup_{x \neq 0,\ (x, y_j)=0, j=1,...n-1} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \geq \lambda_n.$$

Минимизируя последнее неравенство по всем наборам $y_1, y_2, ..y_{n-1}$, устанавливаем, что

$$\inf_{y_1, y_2, ..y_{n-1}} \sup_{x \neq 0,\ (x, y_j)=0, j=1,...n-1} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \geq \lambda_n.$$

На самом деле выполняется равенство, так как уже было доказано, что

$$\sup_{x \neq 0,\ (x, e_j)=0, j=1,...n-1} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \lambda_n. \blacksquare$$

3.3 УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Определение. Линейный ограниченный оператор $U : H \to H$, действующий в гильбертовом пространстве H, называется унитарным, если

$$\operatorname{Im} U = H,\ \|Ux\| = \|x\| \text{ для любого } x \in H.$$

Теорема 3.3.1 *Оператор U является унитарным тогда и только тогда, когда у него существует ограниченный обратный и выполняется равенство $U^{-1} = U^*$.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть U – унитарный оператор. Тогда согласно первой теореме о существовании ограниченного обратного у него существует ограниченный обратный оператор U^{-1}. Далее, ввиду равенства

$$(x, x) = (Ux, Ux) = (x, U^* Ux),$$

верного для любого $x \in H$, получаем, что

$$((U^*U - I)x, x) = 0.$$

Так как $U^*U - I$ – самосопряженный оператор, то согласно теореме о норме $U^*U = I$. Умножая это равенство справа на оператор U^{-1}, имеем $U^*UU^{-1} = U^{-1}$, что влечет $U^* = U^{-1}$.

Достаточность. Пусть $U^* = U^{-1}$. Тогда, очевидно, что $Im\, U = H$, а свойство сохранения нормы любого элемента вытекает из соотношения

$$(Ux, Ux) = (x, U^*Ux) = (x, x).$$

Заметим здесь же, что унитарный оператор сохраняет скалярное произведение любых элементов, т.е. $(Ux, Uy) = (x, y)$.

Теорема 3.3.2 *(о спектре) Спектр унитарного оператора расположен на единичной окружности комплексной плоскости.*

Доказательство. Пусть $|\lambda| > 1$. Тогда из представления

$$U - \lambda I = -\lambda(I - 1/\lambda U)$$

согласно теореме об обратимости оператора, близкого к единичному, следует, что данное λ является регулярным значением. В случае $|\lambda| < 1$ регулярность λ получается аналогично с использованием представления $U - \lambda I = U(I - \lambda U^{-1})$.

Пример. Важнейшим примером унитарного оператора является оператор преобразования Фурье. Напомним, что ранее были установлены следующие факты. Операторы $F^{\pm 1}$ преобразования Фурье, определяемые формулами

$$(F^{\pm 1}\varphi)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\mp its}\varphi(s)\, ds$$

взаимно однозначно отображающие $S(\mathbb{R})$ на $S(\mathbb{R})$, продолжаются по непрерывности до взаимно обратных операторов

$$F^{\pm 1} : L_2(-\infty, +\infty) \to L_2(-\infty, +\infty).$$

Так как выполняется равенство Парсеваля $\|F^{\pm 1}g\|_{L_2} = \|g\|_{L_2}$, то данные операторы являются взаимно обратными унитарными операторами.

3.4 НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Замкнутые операторы

Как уже отмечалось, оператор дифференцирования, если его рассматривать в пространстве непрерывных функций, не является ограниченным, при этом он определен только на некотором линейном многообразии. Поэтому в дальнейшем линейным оператором $A : H \to H$ будем называть линейное отображение $A : D(A) \to H$, где $D(A)$ – линейное многообразие в H, называемое областью определения оператора A. Обычно предполагается, что оно всюду плотно в H. Далее это предположение считается выполненным.

При исследовании неограниченных операторов удобно использовать понятие графика оператора, введенного фон Нейманом.

Определение. Графиком $\Gamma(A)$ оператора $A : H \to H$ называется множество всех пар вида $(x, Ax), x \in D(A)$.

Заметим, что декартово произведение $H \times H$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2$ (проверьте). Таким образом, график оператора является линейным многообразием в гильбертовом пространстве $H \times H$.

Определение. Оператор A называется замкнутым, если его график $\Gamma(A)$ – замкнутое множество в $H \times H$.

Во многих случаях удобно пользоваться эквивалентным определением на языке последовательностей.

Определение. Оператор A называется замкнутым, если для любой последовательности элементов $x_n \in D(A)$, такой, что последовательности $\{x_n\}$, $\{Ax_n\}$ одновременно сходятся в норме пространства H соответственно к элементам x и y, выполняются соотношения $x \in D(A)$ и $Ax = y$.

Второе определение естественным образом распространяется на операторы, действующие в банаховых пространствах.

Определение. Оператор $A : D(A) \subset X \to Y$ называется замкнутым, если из сходимости последовательностей элементов $x_n \in D(A)$ и Ax_n соответственно в пространствах X и Y к элементам x и y следует, что $x \in D(A)$ и $Ax = y$.

Пример. Рассмотрим оператор дифференцирования $A = d/dt : C[0,1] \to C[0,1]$ с областью определения $D(A) = C^1[0,1]$. Покажем, что он замкнут. Пусть $x_n(t) \in C^1[0,1]$ – последовательность непрерывно дифференцируемых функций, для которой последовательности $\{x_n(t)\}$ и $\{x_n'(t)\}$ сходятся в пространстве $C[0,1]$ соответственно к функциям $x(t)$ и $y(t)$. Переходя к пределу в формуле Ньютона - Лейбница $x_n(t) = x_n(0) + \int\limits_0^t x_n'(s)\,ds$, получаем, что $x(t) = x(0) + \int\limits_0^t y(s)\,ds$. Но тогда $x(t) \in C^1[0,1]$, т.е. $x \in D(A)$ и $dx(t)/dt = y(t)$.

Определение. Оператор B называют расширением оператора A и обозначают $A \subset B$, если $D(A) \subset D(B)$ и $Ax = Bx$ для всех $x \in D(A)$.

Определение. Оператор A называется замыкаемым, если у него существует замкнутое расширение. В этом случае у оператора существует наименьшее замкнутое расширение, которое называется замыканием оператора A и обозначается $\overline{A}$.

Замкнутые операторы в неограниченном случае играют роль непрерывных операторов. Поэтому важно выяснить допускает ли оператор замыкание и в случае положительного ответа построить его. Казалось бы замыкание оператора можно построить, осуществляя замыкание его графика. Однако здесь нас подстерегают неприятности, связанные с тем, что замыкание графика, вообще говоря, не является графиком оператора.

Теорема 3.4.1 *Оператор A допускает замыкание тогда и только тогда, когда замыкание его графика $\overline{\Gamma(A)}$ не содержит пар вида $(0, y), y \neq 0$.*

Доказательство. Сначала заметим, что линейное многообразие $L \subset H \times H$, является графиком некоторого оператора тогда и только тогда, когда оно не содержит пар вида $(0, y)$, $y \neq 0$,. Необходимость этого условия очевидна. Докажем его достаточность.

Пусть линейное многообразие L не содержит пар вида $(0, y)$, $y \neq 0$. Тогда соответствующий оператор, обозначим его B, определяется следующим образом: $D(B)$ состоит из всех элементов x, для которых существует элемент y такой, что $(x, y) \in L$, ввиду единственности(!) этого элемента на $D(B)$ определен оператор B посредством соотношения $Bx = y$. Очевидно, что для замкнутого L оператор B замкнут.

Применив описанную процедуру для $\overline{\Gamma(A)}$ получим замыкание $\overline{A}$ оператора A.

Пример оператора, не допускающего замыкания.

Пусть $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ определяется следующим образом: $D(A) = C[0,1]$, $(Ax)(t) = x(1)e(t)$, где $e(t) \equiv 1$. Рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = t^n$. Тогда $(Ax_n)(t) = e(t) \neq 0$ и в то же время $\|x_n\|_{L_2} \to 0$. Таким образом, замыкание графика оператора содержит пару $(0, e(t))$. Следовательно, оператор A не допускает замыкания.

Пример построения замыкания. Пусть $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ – оператор дифференцирования $A = d/dt$ с областью определения $D(A) = C^1[0,1]$. Данный оператор не является замкнутым. Для доказательства этого факта достаточно построить последовательность функций из $C^1[0,1]$, сходящуюся в пространстве $L_2(0,1)$, для которой последовательность производных сходится в $L_2(0,1)$ к разрывной функции (приведите пример такой последовательности).

Рассмотрим все последовательности функций $x_n(t)$, которые сходятся в пространстве $L_2(0,1)$ вместе со своими производными. Для построения замыкания оператора A нужно описать множество пределов указанных последовательностей. Для этого воспользуемся формулой Ньютона - Лейбница

$$x_n(t) = x_n(0) + \int\limits_0^t x_n'(s)\, ds.$$

Ввиду оценки

$$\left|\int\limits_0^t (x_n'(s) - x_m'(s))\, ds\right| \le \|x_n' - x_m'\|_{L_2}$$

получаем равномерную сходимость интегралов. Аналогично проинтегрировав от 0 до 1 формулу Ньютона - Лейбница устанавливаем сходимость числовой последовательности $x_n(0)$. Пусть $x(t)-$ L_2-предел для $x_n(t)$, $y(t)-$ L_2-предел для $x_n'(t)$, c – предел числовой последовательности $x_n(0)$. Тогда предельный переход в L_2-норме в формуле Ньютона - Лейбница приводит к соотношению

$$x(t) = c + \int\limits_0^t y(s)\, ds.$$

Как известно из теории интеграла Лебега функции, представимые неопределенным интегралом Лебега от интегрируемых функций (называемые абсолютно непрерывными функциями), имеют почти всюду производную. Эта производная является интегрируемой функцией, причем справедлива формула Ньютона - Лейбница:

$$x(t) - x(0) = \int\limits_0^t x'(s)\, ds.$$

Таким образом, можем констатировать, что в предыдущих рассуждениях установлено, что любая пара из замыкания графика оператора A имеет вид $(x(t), x'(t))$, где $x(t)$ – абсолютно непрерывная функция, производная которой принадлежит пространству $L_2(0,1)$. Множество всех таких функций со скалярным произведением $(x,z) = (x,z)_{L_2} + (x',z')_{L_2}$ является гильбертовым пространством и называется пространством Соболева $W_2^1(0,1)$. Обратно, если $x \in W_2^1(0,1)$, то пара (x,x') принадлежит замыканию графика оператора A. Действительно, достаточно выбрать последовательность непрерывных функций $y_n(t)$, сходящихся в пространстве $L_2(0,1)$ к функции $x'(t)$. Теперь положив $x_n(t) = x(0) + \int\limits_0^t y_n(s)\, ds$, получим, что пара $(x_n(t), y_n(t))$ принадлежит графику оператора A и сходится в норме графика к паре $(x(t), x'(t))$.

Окончательно заключаем, что замыкание $\overline{A}$ оператора A описывается следующим образом: $D(\overline{A}) = W_2^1(0,1)$, $(\overline{A}x)(t) = dx(t)/dt$, где производная понимается в обычном смысле, но определена лишь почти всюду.

Обратимые операторы

Определение. Оператор $A : H \to H$ с областью определения $D(A)$ называется обратимым, если отображение $A : D(A) \to \operatorname{Im} A$ взаимно однозначно. Так как обратное отображение $A^{-1} : \operatorname{Im} A \to D(A)$ линейно (проверьте), то A^{-1} – линейный оператор с областью определения $D(A^{-1}) = \operatorname{Im} A$ и множеством значений $\operatorname{Im}(A^{-1}) = D(A)$.

Теорема о замкнутости обратного оператора

Теорема 3.4.2 *Если оператор A замкнут, то обратный оператор A^{-1} также замкнут.*

Доказательство. Определим отображение $U : H \times H \to H \times H$ посредством формулы $U(x, y) = (y, x)$. Заметим, что U является унитарным оператором. Рассмотрим график обратного оператора

$$\Gamma(A^{-1}) = \{(x, A^{-1}x); x \in D(A^{-1})\}.$$

Вследствие равенства $D(A^{-1}) = \operatorname{Im} A$ получаем, что

$$\Gamma(A^{-1}) = \{(x, A^{-1}x); x \in \operatorname{Im} A\} = \{(Az, z); z \in D(A)\}.$$

Следовательно, графики операторов A и A^{-1} связаны соотношением

$$\Gamma(A^{-1}) = U\Gamma(A)$$

и поэтому одновременно замкнуты или не являются таковыми. ■

Сопряженный оператор

Понятие сопряженного оператора можно распространить на случай неограниченных операторов.

Определение сопряженного оператора

Пусть $A : H \to H$ – оператор с плотной областью определения. Через $D(A^*)$ обозначим множество всех элементов y, для которых отображение $x(\in D(A)) \to (Ax, y)$ продолжается до линейного ограниченного функционала, который мы обозначим через f_y. Согласно теореме Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существует единственный элемент y^*, для которого $f_y(x) = (x, y^*)$. Отображение $A^* : D(A^*) \to H$, определяемое осоотношением $A^*y = y^*$ является линейным оператором, который называется сопряженным к оператору A.

Согласно теореме Рисса элемент y принадлежит $D(A^*)$ тогда и только тогда, когда существует константа $c(y)$, что $|(Ax, y)| \leq c(y)\|x\|$.

Вследствие определения сопряженного оператора выполняется соотношение $(Ax, y) = (x, A^*y)$ для всех $x \in D(A),\ y \in D(A^*)$.

Упражнение. Доказать, что $A^* \subset B^*$, если $B \subset A$.

Заметим, что область определения сопряженного оператора может не быть плотной. Может оказаться, что $D(A^*) = \{0\}$.

Пример. Пусть оператор $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ определяется формулой $(Ax)(t) = x(1)e(t),\ e(t) \equiv 1$ на $D(A) = C[0,1]$. Тогда $(Ax, y) = x(1)\int\limits_0^1 y(s)\,ds$. Далее, неравенство $|(Ax, y)| \leq c\|x\|_{L_2}$ может выполняться для всех $x \in D(A)$ только при выполнении условия $\int\limits_0^1 y(s)\,ds = 0$. Поэтому $D(A^*)$ состоит из $y(t)$, удовлетворяющих этому условию, и, следовательно, $D(A^*)$ не является плотным в $L_2(0,1)$. Кроме того $A^*y = 0$.

Упражнение. Привести пример оператора, для которого $D(A^*) = \{0\}$.

Пример. Рассмотрим оператор дифференцирования, действующий в пространстве $L_2(0,1)$, с различными областями определения:

$D(A_1) = \{x \in C^1[0,1],\ x(0) = 0\}, A_1x = dx/dt;$

$D(A_2) = \{x \in C^1[0,1]\}, A_2x = dx/dt.$

Найдем сопряженные операторы $A_1^*,\ A_2^*$. Так как $A_1 \subset A_2$, то $A_2^* \subset A_1^*$. Пусть $y \in D(A_1^*)$. Тогда существует элемент y^*, такой, что $(x', y) =$

(x, y^*) $\forall x \in D(A_1)$. Рассмотрим функцию $z(t) = \int\limits_t^1 y^*(s)\,ds \in W_2^1(0,1)$. Как известно, для абсолютно непрерывных функций справедлива формула интегрирования по частям. Поэтому верно равенство $(x', z) = -(x, z') = (x, y^*)$. Следовательно, $(x', y - z) = 0$ и ввиду плотности $C[0,1]$ в пространстве $L_2(0,1)$ имеем $y = z$. В результате получаем, что для $y \in D(A_1^*)$ выполняются условия $y \in W_2^1(0,1)$, $y(1) = 0$ и $A_1^* y = y^* = -dy/dt$. На самом деле $D(A_1^*) = \{y \in W_2^1(0,1);\ y(1) = 0\}$. Проверка осуществляется интегрированием по частям.

Пусть $y \in D(A_2^*) \subset D(A_1^*)$. После интегрирования по частям имеем $(x', y) = -(x, y') - x(0)y(0)$. Но тогда должна выполняться оценка

$$|x(0)y(0)| \leq c\|x\|_{L_2},$$

что возможно лишь при $y(0) = 0$. В этом случае $(x', y) = -(x, y')$. Следовательно, окончательно получаем, что

$$D(A_2^*) = \{y \in W_2^1(0,1);\ y(1) = 0,\ y(0) = 0\},\ A_2^* y = -dy/dt. \ \blacksquare$$

Если область определения оператора A^* плотна, то можно определить второй сопряженный $A^{**} = (A^*)^*$.

Теорема 3.4.3 *Пусть $D(A)$ плотна в H. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. оператор A^* замкнут;

2. оператор A замыкаем тогда и только тогда, когда $D(A^*)$ плотна в H, причем в этом случае выполняется равенство $\bar{A} = A^{**}$;

3. если A допускает замыкание, то $(\bar{A})^* = A^*$.

Доказательство.

1. Из соотношения $(Ax, y) = (x, A^* y)$, приведенного к виду равенства нулю скалярного произведения в $H \times H$:

$$((y, A^* y), (Ax, -x)) = 0,$$

вытекает, что график сопряженного оператора $\Gamma(A^*) = (V[\Gamma(A)])^{\perp}$, где $V : H \times H \to H \times H$ – унитарный оператор вида $V(x, y) = (y, -x)$. Теперь остается заметить, что ортогональное дополнение к любому множеству в гильбертовом пространстве всегда замкнуто.

2. Так как $\Gamma(A)$ – линейное многообразие в $H \times H$, то $\overline{\Gamma(A)}$ – подпространство в $H \times H$. Но тогда замыкание графика совпадает с его вторым ортогональным дополнением:

$$\overline{\Gamma(A)} = ((\Gamma(A))^{\perp})^{\perp}.$$

В следующей цепочке равенств используется равенство $V^2 = I$ и то, что унитарный оператор сохраняет скалярное произведение,

$$((\Gamma(A))^{\perp})^{\perp} = ((V^2\Gamma(A))^{\perp})^{\perp} = (V(V\Gamma(A))^{\perp})^{\perp} = (V(\Gamma(A^*)))^{\perp}.$$

Отсюда, если область определения сопряженного оператора A^* плотна в H, то определен оператор A^{**} и в силу пункта 1

$$\Gamma(A^{**}) = (V(\Gamma(A^*)))^{\perp} = \overline{\Gamma(A)}.$$

Таким образом, $\overline{A} = A^{**}$.

Обратно, если $D(A^*)$ не плотна, то существует ненулевой элемент z, ортогональный $D(A^*)$. Поэтому пара $(0, z)$ принадлежит $(V(\Gamma(A^*)))^{\perp} = \overline{\Gamma(A)}$. Поэтому A не допускает замыкания.

3. Если A допускает замыкание, то справедливо равенство $A^* = \overline{A^*} = A^{***} = (\overline{A})^*$. ■

Спектр замкнутого оператора

Определение. Пусть A – замкнутый оператор в комплексном гильбертовом пространстве H. Комплексное число λ называется его регулярным значением, если оператор $A - \lambda I$ взаимно однозначно отображает $D(A)$ на H, причем обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1} : H \to D(A)$ ограничен.

Множество всех регулярных значений называется резольвентным множеством и обозначается $\rho(A)$. Если $\lambda \in \rho(A)$, то оператор

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

называется резольвентой оператора A в точке λ.

Как и в ограниченном случае спектр $\sigma(A)$ оператора A определяется как дополнение резольвентного множества:

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Аналогично случаю ограниченного оператора λ регулярно тогда и только тогда, когда отображение $A - \lambda I : D(A) \to H$ взаимно однозначно.

Это утверждение может быть получено как следствие теоремы о замкнутом графике, которая формулируется следующим образом.

Теорема 3.4.4 *Пусть X, Y – банаховы пространства, $A : X \to Y$ – замкнутый оператор, определенный на всем пространстве X. Тогда оператор A ограничен.*

Доказательство. Рассмотрим случай оператора $A : H \to H$ в гильбертовом пространстве H. График $\Gamma(A)$ – подпространство в $H \times H$. Рассмотрим операторы $B : \Gamma(A) \to H,\ C : \Gamma(A) \to H$, определяемые формулами $B(x, Ax) = x,\ C(x, Ax) = Ax$. Оба оператора ограничены, причем оператор B имеет ограниченный обратный (объясните почему). Оператор A является прозведением ограниченных операторов: $A = CB^{-1}$. ■

Вернемся к доказательству утверждения о регулярном значении. Обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1} : H \to D(A)$ замкнут, определен на всем пространстве H и, следовательно, ограничен. Таким образом, λ – регулярное значение. ■

Теорема о резольвентном множестве

Теорема 3.4.5 *Резольвентное множество открыто.*

Доказательство. Пусть λ – регулярное значение. Представим оператор $A - (\lambda + \triangle\lambda)I$ в виде $(I - \triangle\lambda R_\lambda(A))(A - \lambda I)$. При выполнении условия $|\triangle\lambda| < \|R_\lambda(A)\|^{-1}$ оператор $(I - \triangle\lambda R_\lambda(A))$ обратим как близкий к единичному. Таким образом, при выполнении этого условия отображение $A - (\lambda + \triangle\lambda)I : D(A) \to H$ взаимно однозначно. ■

Однако не все свойства резольвенты и спектра для ограниченных операторов сохраняются для неограниченных. Спектр замкнутого оператора может быть пустым, совпадать со всем пространством, более того, для любого замкнутого множества комплексной существует оператор, спектр которого совпадает с данным множеством.

Пример. Рассмотрим оператор дифференцирования $A = d/dt$ в пространстве $L_2(0,1)$ с областью определения $D(A) = W_2^1(0,1)$. Так как $de^{\lambda t}/dt = \lambda e^{\lambda t}$, то каждая точка λ плоскости $\mathbb{C}$ является собственным значением, т.е. спектр совпадает со всей комплексной плоскостью.

Пример. Рассмотрим оператор дифференцирования $A = d/dt$ в пространстве $L_2(0,1)$ с областью определения $D(A) = \{x \in W_2^1(0,1); x(0) = 0\}$. Так как задача Коши

$$\begin{cases} dx/dt - \lambda x = y \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение

$$x(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} y(s)\, ds,$$

то для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ существует резольвента:

$$(R_\lambda(A)y)(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} y(s)\, ds.$$

Следовательно, в данном случае спектр пуст.

Пример. Пусть $F \neq \varnothing$ – произвольное замкнутое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Выберем в F счетное плотное множество точек $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$. В пространстве l_2 определим на финитных последовательностях оператор

$$(Ax)_j = \lambda_j x_j \ j = 1, \dots$$

Последовательность называется финитной, если у нее конечное число ненулевых координат. Оператор A допускает замыкание $\overline{A}$ (докажите) и каждое λ_j является собственным значением оператора $\overline{A}$. Далее, любая точка вне

F является регулярным значением оператора $\overline{A}$. Вследствие замкнутости $\sigma(\bar{A}) = F$.

Самосопряженные операторы

Определение. Оператор A, для которого выполняется условие

$$(Ax, y) = (x, Ay), \forall x, y \in D(A)$$

называется симметрическим.

Определение. Оператор A называется самосопряженным, если он совпадает со своим сопряженным: $A = A^*$.

Более подробно это означает, что $D(A) = D(A^*)$ и для любых $x, y \in D(A)$

$$(Ax, y) = (x, Ay).$$

Предостережение! Симметрический оператор, вообще говоря, не является самосопряженным.

Так как для симметрического оператора выполняется условие $D(A) \subset D(A^*)$, а сопряженный оператор всегда замкнут, то симметрический оператор допускает замыкание.

Самосопряженный оператор автоматически замкнут.

Симметрический оператор может иметь много самосопряженных расширений, но может не иметь их вовсе.

Важно уметь определять является ли данный симметрический оператор самосопряженным. Для этого развиты различные методы. Здесь мы рассмотрим основной критерий самосопряженности.

Теорема 3.4.6 *Пусть A – симметрический оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. оператор A самосопряжен;

2. оператор A замкнут и $\mathrm{Ker}\,(A^* \pm iI) = \{0\}$;

3. $\mathrm{Im}\,(A \pm iI) = H$.

Доказательство.

1. $\to$ 2. Пусть A самосопряжен и существует элемент z, для которого $A^*z = iz(= Az)$. Тогда

$$-i(z,z) = \overline{(iz,z)} = \overline{(Az,z)} = \overline{(z,Az)} = (Az,z) = i(z,z)$$

и, значит, $z = 0$.

2. $\to$ 3. При выполнении 2. $\mathrm{Im}\,(A - iI)$ плотен в H. Иначе, существует z, для которого $((A-iI)x, z) = 0$ для всех $x \in D(A)$. Но тогда $((A-iI)x, z) = (x, (A^* + iI)z)$ и поэтому $z = 0$. Следовательно, остается показать, что $\mathrm{Im}\,(A - iI)$ замкнут. Заметим, что справедливо равенство

$$\|(A - iI)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2$$

для всех $x \in D(A)$. Поэтому из сходимости последовательности $(A - iI)x_n$ вытекает сходимость последовательности x_n. Если $(A - iI)x_n \to y,\ x_n \to x$, то в силу замкнутости оператора A выполняются соотношения $x \in D(A),\ (A - iI)x = y$.

Аналогично доказывается, что $Im\,(A + iI) = H$.

3. $\to$ 1. Ввиду равенства $\mathrm{Im}\,(A-iI) = H$ для любого элемента $z \in D(A^*)$ найдется такой элемент $x \in D(A)$, что $(A - iI)x = (A^* - iI)z$. Но для симметрического оператора сопряженный оператор является его расширением, поэтому верно равенство $(A^* - iI)(z - x) = 0$. Равенство $\mathrm{Im}\,(A + iI) = H$ влечет тривиальность ядра сопряженного оператора: $\mathrm{Ker}\,(A^* - iI) = \{0\}$. Следовательно, $z = x \in D(A)$. Этим доказано, что $D(A) = D(A^*)$, т.е. оператор A самосопряжен. ■

3.5 СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Непрерывные функции от самосопряженного оператора

Пусть $A : H \to H$ – ограниченный самосопряженный оператор. Напомним, что его спектр $\sigma(A)$ расположен на отрезке $[m, M]$, где m и M соответственно нижняя и верхняя грани оператора A, определяемые формулами $m = inf_{\|x\|=1}(Ax, x)$ и $M = sup_{\|x\|=1}(Ax, x)$. Обе грани принадлежат спектру: $m, M \in \sigma(A)$ и $\|A\| = \sup(|m|, |M|)$. Из курса линейной алгебры известно какую важную роль при изучении операторов в конечномерных пространствах играют функции от оператора. Столь же или даже более важна роль функций от самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Каждому многочлену $P(t) = \sum_{j=1}^{n} p_j t^j$ сопоставим оператор $P(A) = \sum_{j=1}^{n} p_j A^j$. Конечно, такое сопоставление можно осуществить для любого оператора. Но для самосопряженных операторов это соответствие можно распространить на множество $C[m, M]$ всех непрерывных функций на отрезке $[m, M]$.

Справедлива следующая теорема о функциональном исчислении для самосопряженных операторов.

Теорема 3.5.1 *Существует единственное отображение* $\Phi : C[m, M] \to L(H)$, *сопоставляющее каждой функции* $f \in C[m, M]$ *ограниченный оператор* $f(A)$ *со следующими свойствами:*

1. если $f(t) \equiv 1$, *то* $f(A) = I$;

2. если $f(t) = t$, *то* $f(A) = A$;

3. линейность: $(\alpha f + \beta g)(A) = \alpha f(A) + \beta g(A)$;

4. мультипликативность: $(fg)(A) = f(A)g(A)$;

5. инволютивность: $\bar{f}(A) = (f(A))^*$;

6. непрерывность: $\|f(A)\| \le \|f\|_{C[m,M]}$, *более точно*

$$\|f(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)|;$$

7. если $Ae = \lambda e$, *то* $f(A)e = f(\lambda)e$;

8. если оператор B *коммутирует с оператором* $A :\ AB = BA$, *то для любой функции* $f \in C[m, M]$ *оператор* B *коммутирует с оператором* $f(A) :\ f(A)B = Bf(A)$;

9. позитивность: если $f \ge 0$, *то* $f(A) \ge 0$;

10. теорема об отображении спектра:

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) = \{f(\lambda);\ \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Замечание. Выполнение условий 1.– 4. означает, что отображение

$$\Phi : C[m, M] \to L(H)$$

является гомоморфизмом алгебр. Далее, легко проверяется, что соответствие

$$P(t) = \sum_{j=0}^{n} p_j A^j \mapsto P(A) = \sum_{j=1}^{n} p_j A^j$$

является единственным гомоморфизмом алгебры многочленов в алгебру операторов, удовлетворяющим свойствам 5, 7, 8.

Идея доказательства состоит в том, чтобы распространить гомоморфизм с алгебры многочленов на алгебру функций, используя теорему Вейерштрасса. Для этого достаточно установить оценку 6. для многочленов. В свою очередь, для этого используется теорема об отображении спектра для многочленов.

Лемма 3.5.1 *Для любого многочлена* $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$.

Доказательство. Ввиду разложения $P(t) - P(\lambda) = (t - \lambda)Q(t)$ имеем $P(A) - P(\lambda)I = (A - \lambda I)Q(A)$. Поэтому, если $\lambda \in \sigma(A)$, то $P(\lambda) \in \sigma(P(A))$, иначе оператор $P(A) - P(\lambda)I$ обратим, т.е. $P(\sigma(A)) \subset \sigma(P(A))$. Далее, из разложения $P(t) - \mu = a \prod_{j=1}^{n} (t - \lambda_j)$ вытекает представление $P(A) - \mu I = a \prod_{j=1}^{n} (A - \lambda_j I)$. Если $\mu \in \sigma(P(A))$, то среди корней $\{\lambda_j\}$ найдется корень λ, принадлежащий $\sigma(A)$. Из разложения на множители для многочлена $P(t) - \mu$ при $t = \lambda$ имеем $P(\lambda) = \mu$, т.е. $\sigma(P(A)) \subset P(\sigma(A))$. ■

Лемма 3.5.2 *Для любого многочлена*

$$\|P(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|.$$

Доказательство. Сначала заметим, что для любого ограниченного оператора B оператор B^*B самосопряжен и поэтому справедливо равенство

$$\|B^*B\| = \sup_{\|x\|=1} |(B^*Bx, x)| = \sup_{\|x\|=1} \|Bx\|^2 = \|B\|^2.$$

Вследствие этого

$$\|P(A)\|^2 = \|P^*(A)P(A)\| = \||P|^2(A)\| =$$
$$= \sup_{\mu\in\sigma(|P|^2(A))} |\mu| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |P(\lambda)|^2.$$

В последней строчке использована лемма 3.5.1. ■

Доказательство теоремы. Как уже отмечалось, отображение Φ, определенное на многочленах формулой $\Phi(P) = P(A)$, удовлетворяет условиям 1.-8. Из леммы 3.5.2 верна оценка $\|\Phi(P)\| \le \|P\|_{C[m,M]}$. Поэтому линейный оператор Φ, продолжается по непрерывности до ограниченного оператора $\Phi : C[m, M] \to L(H)$. Вследствие этого для произвольной непрерывной функции f оператор $f(A)$ определяется следующим образом: выбираем последовательность многочленов $P_n(t)$, которая сходится в пространстве $C[m, M]$ к функции $f(t)$ и полагаем $f(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \Phi(P_n)$. Справедливость свойств 1.-8. доказывается предельным переходом. Например, для доказательства мультипликативности выбираем последовательности многочленов P_n и Q_n, сходящиеся в пространстве $C[m, M]$ к функциям f и g. Тогда

$$(fg)(A) = \lim_{n\to\infty} \Phi(P_nQ_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(P_n)\Phi(Q_n) = f(A)g(A).$$

Для доказательства свойства 9. заметим, что для неотрицательной непрерывной функции f функция $g = \sqrt{f}$ неотрицательна и непрерывна. Из свойства 4. следует, что для вещественной функции оператор самосопряжен. Поэтому

$$(f(A)x, x) = (g^2(A)x, x) = (g(A)x, g(A)x) \ge 0.$$

Доказательство свойства 10. требует больших усилий. Предположим, что точка λ принадлежит резольвентному множеству оператора $f(A)$: $\lambda \in \varrho(f(A))$. Пусть $\{P_n(t)\}$ – последовательность многочленов, равномерно сходящаяся к функции $f(t)$. Тогда, начиная с некоторого номера n_0, выполняется включение $\lambda \in \varrho(P_n(A))$ (вследствие устойчивости обратимости при малых возмущениях). Таким образом, установлено включение

$$\varrho(f(A)) \subset \varrho(P_n(A)) \text{ при } n > n_0,$$

и, следовательно,

$$\sigma(P_n(A)) \subset \sigma(f(A)).$$

Так как

$$f(\sigma(A)) = \{\lim_{n\to\infty} P_n(\lambda);\ \lambda \in \sigma(A)\}$$

и $P_n(\sigma(A)) = \sigma(P_n(A))$, то справедливо соотношение

$$f(\sigma(A)) \subset \sigma(f(A)).$$

Предположим, что полученное включение строгое. Тогда найдется точка λ, принадлежащая множеству $f(\sigma(A))$, и не принадлежащая множеству $\sigma(f(A))$. Вследствие этого оператор $f(A)-\lambda I$ обратим и существует точка $\mu \in \sigma(A)$, для которой

$$\lambda = f(\mu) = \lim_{n\to\infty} P_n(\mu).$$

Рассмотрим последовательность операторов $P_n(A) - P_n(\mu)I$. Каждый из этих операторов не является обратимым (почему?). Но, с другой стороны, они сходятся по норме к обратимому оператору $f(A)-\lambda I$, что противоречит свойству устойчивости обратимости.

Таким образом, установлено равенство

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)). \blacksquare$$

Упражнение. Докажите единственность отображения Φ.

Упражнение. Доказать, что для любого неотрицательного самосопряженного оператора A существует квадратный корень, т.е. существует такой неотрицательный самосопряженный оператор B, для которого $B^2 = A$.

Операторные интегралы Стилтьеса

Альтернативный подход к операторному исчислению состоит в построении операторных интегралов Стилтьеса. Предполагается, что читатель владеет понятием интеграла Стилтьеса и знает его основные свойства.

Определение. Семейство операторов $\{E_\lambda\}_{\lambda=-\infty}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве H называется разложением единицы, если

1. E_λ – ортопроектор;

2. $E_\lambda E_\mu = E_\nu,\ \nu = \min(\lambda, \mu)$;

3. E_λ сильно непрерывна слева, т.е. для любого x $\lim\limits_{\mu\to\lambda-0} E_\mu x = E_\lambda x$;

4. существую такие числа $m < M$, что $E_\lambda = 0$ при $\lambda \le m$ и $E_\lambda = I$ при $\lambda > M$.

Для каждого $x \in H$ рассмотрим функцию $g(\lambda, x) = (E_\lambda x, x)$. Она обладает следующими свойствами:

1. $0 \le g(\lambda, x) \le (x, x)$, причем $g(\lambda, x) = 0$ при $\lambda \le m$ и $g(\lambda, x) = (x, x)$ при $\lambda > M$;

2. $g(\lambda, x)$ монотонно возрастает и непрерывна слева.

В доказательстве нуждается лишь монотонное возрастание. Пусть $\lambda < \mu$, тогда

$$g(\lambda, x) = (E_\lambda x, x) = (E_\lambda x, E_\lambda x) = (E_\lambda E_\mu x, E_\lambda E_\mu x) \le (E_\mu x, E_\mu x) = g(\mu, x).$$

Отметим, что $g(\lambda, x)$ есть функция ограниченной вариации и

$$\operatorname{Var} g(\lambda, x) \le \|x\|^2.$$

Введем также функцию $g(\lambda, x, y) = (E_\lambda x, y)$. Из поляризационного тождества следует, что

$$g(\lambda, x, y) = \frac{1}{4}\{g(\lambda, x + y) - g(\lambda, x - y) + i[g(\lambda, x + iy) - g(\lambda, x - iy)]\}.$$

Поэтому $g(\lambda, x, y)$ также функция ограниченной вариации, причем

$$\operatorname{Var} g(\lambda, x, y) \le \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Тогда для любой непрерывной на $\mathbb{R}$ функции $\varphi(\lambda)$ существует интеграл Стилтьеса

$$J(\varphi, x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)\, d(E_\lambda, x, y),$$

который линеен по x:

$$J(\varphi, \alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha J(\varphi, x_1, y) + \beta J(\varphi, x_2, y);$$

антилинеен по y:

$$J(\varphi, x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha} J(\varphi, x, y_1) + \overline{\beta} J(\varphi, x, y_2);$$

и для него справедлива оценка

$$|J(\varphi, x, y)| \leq \max_{\lambda \in [m,M]} |\varphi(\lambda)|(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Зафиксировав x рассмотрим функционал $f_x(y) = \overline{J(\varphi, x, y)}$. Так как

$$\sup_{\|y\| \leq 1} |f_x(y)| \leq \max_{\lambda \in [m,M]} |\varphi(\lambda)|(\|x\|^2 + 1),$$

то данный функционал ограничен и по теореме Рисса существует единственный элемент $\tilde{x}$, для которого $f_x(y) = (y, \tilde{x})$, т.е.

$$J(\varphi, x, y) = (\tilde{x}, y).$$

Следовательно, определен такой линейный оператор $J(\varphi)$, что

$$(J(\varphi)x, y) = J(\varphi, x, y).$$

Так как для произвольного оператора A

$$\|A\| = \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} |(Ax, y)|,$$

то из неравенства

$$|J(\varphi, x, y)| \leq \max_{\lambda \in [m,M]} |\varphi(\lambda)|(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

следует, что оператор $J(\varphi)$ ограничен и $\|J(\varphi)\| \leq 2 \max_{\lambda \in [m,M]} |\varphi(\lambda)|$.

Таким образом, существует ограниченный оператор $J(\varphi)$ такой, что

$$(J(\varphi)x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)\, d(E_\lambda, x, y).$$

Это слабое определение операторного интеграла Стилтьеса

$$J(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)\, dE_\lambda.$$

Покажем, что оператор $J(\varphi)$ является равномерным пределом интегральных сумм:

$$J(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Sigma,$$

где

$$\Sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\xi_k)(E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}).$$

Здесь $-\infty < \lambda_0 \le m < \lambda_1 < ...\lambda_{n-1} \le M < \lambda_n < +\infty,\ \lambda_k \le \xi_k \le \lambda_{k+1},\ \varepsilon = \max \triangle\lambda_k$.

Имеем

$$((J(\varphi) - \Sigma)x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\varphi(\lambda) - \varphi(\xi_k))\, d(E_\lambda x, y).$$

Ввиду оценки интеграла Стилтьеса

$$\left| \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\varphi(\lambda) - \varphi(\xi_k))\, d(E_\lambda x, y) \right| \le \max_{\lambda\in[\lambda_k,\lambda_{k+1}]} |\varphi(\lambda) - \varphi(\xi_k)| \mathrm{Var}_{[\lambda_k,\lambda_{k+1}]}(E_\lambda x, y)$$

получаем, что

$$|((J(\varphi) - \Sigma)x, y)| \le 2\omega(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

где $\omega = \sup\limits_k \sup\limits_{\lambda\in[\lambda_k,\lambda_{k+1}]} |\varphi(\lambda) - \varphi(\xi_k)|$. Так как $\omega \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то

$$\|J(\varphi) - \Sigma\| \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Отметим следующие свойства операторного интеграла $J(\varphi)$.

Теорема 3.5.2 *Отображение $\varphi \to J(\varphi)$ является непрерывным инволютивным гомоморфизмом из алгебры $C(\mathbb{R})$ в алгебру $L(H)$, т.е. выполняются следующие условия:*

1. если $e(\lambda) = 1$, то $J(e) = I$;

2. линейность по φ;

$$J(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha J(\varphi_1) + \beta J(\varphi_2);$$

3. мультипликативность:

$$J(\varphi_1\varphi_2) = J(\varphi_1)J(\varphi_2);$$

4. инволютивность:

$$(J(\varphi))^* = J(\bar{\varphi});$$

5. непрерывность:

$$\|J(\varphi)\| \leq 2 \max_{\lambda\in[m,M]} |\varphi(\lambda)|.$$

Доказательство. Остановимся на доказательстве свойства 3. Заметим, что при $j < k$ имеем $\lambda_j < \lambda_{j+1} < \lambda_k \leq \lambda_{k+1}$. Поэтому $(E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k})((E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j}) = 0$ и, следовательно, $\Sigma_1\Sigma_2 = \Sigma$, где Σ_1, Σ_2, Σ – соответственно интегральные суммы с одним и тем же разбиением для интегралов $J(\varphi_1)$, $J(\varphi_2)$, $J(\varphi)$. Осуществляя в этом равенстве предельный переход, устанавливаем мультипликативность.■

Следствие. Если $\varphi(\lambda) = 0$ при $\lambda \in [m, M]$, то $J(\varphi) = 0$.

Спектральная теорема

Теорема 3.5.3 *Пусть $A : H \to H$ – ограниченный самосопряженный оператор. Тогда существует единственное разложение единицы E_λ такое, что*

$$A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dE_\lambda.$$

Если $f \in C[m, M]$ и $f(A)$ – оператор, определяемый теоремой о функциональном исчислении, то

$$f(A) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda)\, dE_\lambda,$$

где $\tilde{f}$– любое непрерывное продолжение функции f на всю вещественную ось.

Дальнейшее изложение направлено на доказательство спектральной теоремы, причем мы ограничимся доказательством существования разложения единицы, опуская доказательство единственности.

Монотонные последовательности самосопряженных операторов

Определение. Пусть B и C – самосопряженные операторы. Тогда неравенство $B \leq C$ означает, что для любого элемента x выполняется соотношение $((C-B)x, x) \geq 0$.

Лемма 3.5.3 *Пусть $0 \leq A_1 \leq A_2 \leq ...A_n.. \leq I$ – последовательность взаимно перестановочных самосопряженных операторов. Тогда существует самосопряженный оператор A, являющийся ее сильным пределом, причем для любого n выполняется соотношение $A_n \leq A \leq I$,.*

Доказательство. Предварительно заметим, что произведение перестановочных неотрицательных самосопряженных операторов B и C также неотрицательный самосопряженный оператор. Пусть $D = \sqrt{B}$. Тогда

$$(BCx, x) = (DCx, Dx) = (CDx, Dx) \geq 0.$$

Учитывая этот факт, получаем, что $0 \leq A_1^2 \leq ... \leq A_n^2.. \leq I$. Поэтому для любого x существует $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n^2x, x)$. Далее, при $n > m$ выполняется неравенство $A_n^2 \geq A_nA_m \geq A_m^2$, из которого вытекают два неравенства $A_nA_m - A_m^2 \leq A_n^2 - A_m^2$, $A_n^2 - A_nA_m \leq A_n^2 - A_m^2$. Поэтому для любого элемента x выполняется неравенство

$$\|A_nx - A_mx\|^2 = ((A_n - A_m)^2x, x) =$$

$$= ((A_n^2 - A_nA_m)x, x) - ((A_nA_m - A_m^2)x, x) \leq 2((A_n^2 - A_m^2)x, x).$$

Вследствие этого $\|A_nx - A_mx\| \to 0$ при $n, m \to \infty$, что влечет существование нужного предела.■

Построение разложения единицы для самосопряженного оператора

Для каждого $\tau \in \mathbb{R}$ рассмотрим последовательность непрерывных функций $f_{n,\tau}(t)$, определяемых формулой

$$f_{n,\tau}(t) = \begin{cases} 1, & t \le \tau - 1/n, \\ 2n(\tau - 1/(2n) - t, & \tau - 1/n \le t \le \tau - 1/(2n), \\ 0, & t \ge \tau - 1/(2n). \end{cases}$$

Пусть $\chi_\tau(t)$ – характеристическая функция множества $\{t \in \mathbb{R}; t < \tau\}$. Тогда вследствие неравенств $0 \le f_{n,\tau}(t) \le f_{n+1,\tau}(t) \le \chi_\tau(t) \le 1$ операторы $f_{n,\tau}(A)$, определяемые согласно теореме о функциональном исчислении образуют монотонно возрастающую ограниченную последовательность неотрицательных самосопряженных операторов $0 \le f_{n,\tau}(A) \le f_{n+1,\tau}(A).... \le I$. Вследствие леммы 3.5.3 существует

$$\chi_\tau(A) \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} f_{n,\tau}(A).$$

Покажем, что семейство операторов $E_\tau = \chi_\tau(A)$ образует разложение единицы.

1. E_τ – ортопроектор. Для этого достаточно показать, что $E_\tau = E_\tau^*$, $E_\tau^2 = E_\tau$. Самосопряженность очевидна. Для доказательсва второго соотношения достаточно заметить, что $f_{n,\tau}(t) \le f_{2n,\tau}^2(t) \le f_{2n,\tau}(t)$. Поэтому аналогичное неравенство верно для операторов $f_{n,\tau(A)} \le f_{2n,\tau}^2(A) \le f_{2n,\tau}(A)$, предельный переход в котором приводит к нужному соотношению.

2. $E_\tau E_s = E_s$ при $s < \tau$. Достаточно заметить, что при достаточно большом n выполняется соотношение $f_{n,\tau}(t) f_{n,s}(t) = f_{n,s}(t)$.

3. Непрерывность слева. Ввиду неравенства $\chi_s(t) \le \chi_\tau(t) \le \chi_u(t)$ при $s < \tau < u$ существуют сильные пределы $E_{\tau-0} = \lim\limits_{s\to\tau} E_s$, $E_{\tau+0} = \lim\limits_{u\to\tau} E_u$, причем $E_{\tau-0} \le E_\tau \le E_{\tau+0}$. Обозначим через P – ортопроектор $E_\tau - E_{\tau-0}$. Заметим, что $AP = \tau P$. Для доказательства этого факта достаточно воспользоваться неравенством $(s-1/n)(f_{n,\tau}(t) - f_{n,s}(t)) \le t(f_{n,\tau}(t) - f_{n,s}(t)) \le \tau(f_{n,\tau}(t) - f_{n,s}(t))$, $s < \tau$. Если в соответствующем неравенстве для операторов перейти к пределу, то получим, что $s(E_\tau - E_s) \le A(E_\tau - E_s) \le \tau(E_\tau - E_s)$ и остается перейти к пределу при $s \to \tau$. Пусть теперь для элемента y выполнено равенство $Py = y$. Тогда $f_{n,\tau}(A)y = f_{n,\tau}(\tau)y = 0$ и,

следовательно, $E_\tau P = 0$. Но тогда $P = 0$.

Для данного разложения единицы вычислим интеграл Стилтьеса

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE_\lambda.$$

Пусть

$$\Sigma = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j (E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j})$$

– его интегральная сумма. Для оператора A справедливо равенство

$$A = \sum_{j=0}^{n-1} A(E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j}).$$

Введем еще верхнюю и нижнюю суммы Стилтьеса

$$\Sigma_m = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j (E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j}), \ \Sigma_M = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda (E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j}).$$

Очевидно выполняются неравенства

$$\Sigma_m \leq J \leq \Sigma_M, \ \Sigma_m \leq \Sigma \leq \Sigma_M.$$

Поэтому

$$\|J - \Sigma\| = \sup_{\|x\|=1} |((J - \Sigma)x, x)| \leq \sup_{\|x\|=1} |((\Sigma_M - \Sigma_m)x, x)| \leq \max_j |\lambda_{j+1} - \lambda_j|.$$

Таким образом, установлена формула

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE_\lambda,$$

которая называется спектральным разложением самосопряженного оператора A. Разложение единицы E_λ называют также спектральной мерой оператора A. ■

Теперь легко устанавливается связь между двумя подходами для построения функций от самосопряженного оператора.

Теорема 3.5.4 *Если* $f(t) \in C[m, M]$, *то справедлива формула*

$$f(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda)\, dE_\lambda,$$

где $\tilde{f}$ *– любое непрерывное продолжение* f *на всю вещественную ось.*

Докажите самостоятельно.

В качестве следствия приведем теорему о представлении резольвенты.

Теорема 3.5.5 λ_0 *является регулярным значением, если либо* $\operatorname{Im}\lambda_0 \neq 0$, *либо* $\operatorname{Im}\lambda_0 = 0$, *но существует окрестность точки* λ_0, *в которой* E_λ *постоянна. Как в первом, так и во втором случае*

$$R_{\lambda_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^{-1}\, dE_\lambda.$$

Доказательство. Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dE_\lambda = I,$$

то верна формула

$$A - \lambda_0 I = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)\, dE_\lambda = J(\lambda - \lambda_0).$$

Если $Im\,\lambda_0 \neq 0$, то

$$J(\frac{1}{\lambda - \lambda_0}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_0}\, dE_\lambda.$$

Но тогда из равенства $J(\lambda - \lambda_0)J((\lambda - \lambda_))^{-1}) = I$ следует, что

$$R_{\lambda_0}(A) = J((\lambda - \lambda_0)^{-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^{-1}\, dE_\lambda.$$

Во втором случае доказательство проводится аналогично. Следует лишь заметить, что если E_λ постоянна при $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, dE_\lambda$ не зависит от значений функции f на множестве $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$. ■

Упражнение. Докажите, что λ является собственным значением тогда и только тогда, когда $E_{\lambda+0} \neq E_\lambda$.

Замечание о спектральном разложении неограниченного самосопряженного оператора

Спектральная теорема обобщается на случай неограниченного самосопряженного оператора. Несколько видоизменяется определение разложения единицы. Условия $E_\lambda = 0$ при $\lambda \leq m$ и $E_\lambda = I$ $\lambda > M$ заменяются условиями $s-\lim\limits_{\lambda\to-\infty} E_\lambda = 0$ и $s-\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E_\lambda = I$, остальные условия остаются без изменений.

Справедлива следующая

Теорема 3.5.6 *Пусть A – неограниченный самосопряженный оператор. Тогда существует единственное разложение единицы E_λ такое, что*

$$D(A) = \{x \in H;\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 \, d(E_\lambda x, x) < \infty\},$$

для любых $x \in D(A),\ y \in H$

$$(Ax, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d(E_\lambda x, y).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется гильбертово сопряженный оператор?

2. На основании какой теоремы утверждается его существование?

3. Как устанавливается вещественность собственных значений самосопряженного оператора?

4. Как используется вещественность собственных значений ССО в доказательстве теоремы о регулярном значении?

5. Как устроен спектр вполне непрерывного самосопряженного оператора?

6. Из каких результатов следует существование ненулевого собственного значения у самосопряженного вполне непрерывного оператора?

7. Как формулируется принцип минимакса?

8. Пусть оператор в гильбертовом пространстве сохраняет норму любого элемента. Является ли он унитарным? Приведите примеры.

9. Как определяется график оператора?

10. Как определяется замкнутый оператор в терминах графика?

11. Как определяется замкнутый оператор в терминах последовательностей?

12. Является ли замыкание графика графиком оператора?

13. Как связаны графики оператора и его обратного оператора? (Предполагается, что обратный оператор существует.)

14. Как определяются спектр и резольвента для замкнутого оператора?

15. Может ли спектр замкнутого оператора быть неограниченным множеством? Приведите примеры.

16. Как различаются симметричные и самосопряженные операторы?

17. Как определяются непрерывные функции от ограниченного самосопряженного оператора?

18. Как определяются операторные интегралы Стилтьеса?

19. Как определяется разложение единицы?

20. Как формулируется спектральная теорема для ограниченного самосопряженного оператора?

21. Как представляется резольвента самосопряженного оператора в форме операторного интеграла Стилтьеса?

Глава 4

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Многочисленные теоретические и прикладные задачи, связанные с решением дифференциальных, интегральных уравнений, краевых задач для уравнений в частных производных и т. д., могут быть сформулированы как операторные уравнения в подходящих пространствах. Для приближенного решения указанных задач создано и применяется огромное число методов. С точки зрения функционального анализа их можно рассматривать как приближенные методы решения операторных уравнений. Вопросы общей теории приближенных методов рассмотрены в [9].

В данной главе рассматриваются проекционные методы решения линейных операторных уравнений. Приведены критерий сходимости, теоремы об устойчивости, некоторые достаточные условия прменимости проекционных методов. Показано, что известный метод Галеркина является проекционным. В качестве примера рассмотрена краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

4.1 ПРОЕКЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Напомним, что каждому подпространству L гильбертового пространства H взаимно однозначно соответствует оператор ортогонального проектирования $P = P_L$ на подпространство L, определяемый соотношением

$$Px = y, \text{где } x = y + z,\ y \in L,\ z \in L^{\perp}$$

– разложение элемента x в ортогональную сумму.

Справедлива следующая

Теорема 4.1.1 *Ограниченный оператор P является ортопроектором, тогда и только тогда, когда*

1. *он самосопряжен: $P^* = P$;*
2. *удовлетворяет соотношению $P^2 = P$.*

Доказательство. Пусть L – подпространство, $P = P_L$ – ортопроектор. Легко проверяется, что из ортогональности разложения $H = L \oplus L^{\perp}$ вытекает самосопряженность ортопроектора P, а из из единственности разложения $x = y + z$ – соотношение $P^2 = P$ (проведите подробное доказательство).

Пусть теперь для оператора P выполнены условия теоремы. Покажем, что

$$\operatorname{Ker} P = \operatorname{Im}(I - P),\ \operatorname{Ker}(I - P) = \operatorname{Im} P.$$

Действительно, если, например, $x \in \operatorname{Ker} P$, то $x = (I - P)x \in \operatorname{Im}(I - P)$, а если $x = (I - P)y \in \operatorname{Im}(I - P)$, то $Px = P(I - P)y = 0$. Далее, каждый элемент x можно представить в виде

$$x = Px + (I - P)x,$$

причем вследствие самосопряженности оператора P это разложение является ортогональным. Таким образом, P является ортопроектором на подпространство $\operatorname{Im} P$. ■

Определение. Ограниченный оператор $P : X \to X$, действующий в банаховом пространстве X, называется проектором, если выполнено соотношение $P^2 = P$.

Из доказательства предыдущей теоремы следует, что $\operatorname{Im} P$ и $\operatorname{Im}(I - P)$ являются подпространствами и имеют нулевое пересечение. Поэтому для любого элемента x справедливо единственное разложение

$$x = y + z,$$

где $y = Px \in \operatorname{Im} P$, $z = (I - P)x \in \operatorname{Im}(I - P)$.

Определение. Говорят, что банахово пространство X является прямой суммой своих подпространств L и M и обозначают

$$X = L \oplus M,$$

если каждый элемент x единственным образом представим в виде

$$x = y + z,\ y \in L,\ z \in M.$$

Ясно, что в этом случае $L \cap M = \{0\}$.

Таким образом, установлено, что каждый проектор P определяет разложение в прямую сумму

$$X = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Im}(I - P).$$

Естественно возникает вопрос можно ли как в случае гильбертова пространства связать с каждым подпространством проектор?

Сначала введем следующее

Определение. Подпространство L в банаховом пространстве X будем называть дополняемым, если существует подпространство M, такое, что

$$X = L \oplus M.$$

Подпространство M называется дополнением подпространства L. Справедлива

Теорема 4.1.2 *Если подпространство L дополняемо и M – его дополнение, то существует проектор P, для которого $L = \operatorname{Im} P$, $M = \operatorname{Im}(I-P)$.*

Доказательство. Определим оператор P, полагая $Px = y$, где $y \in L$ – элемент разложения $x = y + z$. Ясно, что P – линейный оператор, удовлетворяющий условию $P^2 = P$. Остается показать, что он ограничен. В пространстве X введем новую норму, полагая

$$\|x\|_n = \|y\| + \|z\|.$$

Пусть X_n – пространство с новой нормой. Оно является полным, так как из фундаментальности последовательности $\{x_k = y_k + z_k\}$ вытекает фундаментальность последовательностей $\{y_k\}$ и $\{z_k\}$ и, следовательно, их сходимость. В свою очередь, это влечет сходимость последовательности $\{x_k\}$ в новой норме. Рассмотрим тождественный оператор

$$I : X_n \to X.$$

Ввиду неравенства

$$\|Ix\| = \|x\| = \|y + z\| \leq \|y\| + \|z\| = \|x\|_n$$

данный оператор ограничен. Поэтому вследствие теоремы Банаха об обратном операторе оператор $I : X \to X_n$ также ограничен. Следовательно, существует такая костанта c, что

$$\|y\| + \|z\| \leq c\|x\|.$$

Вследствие этого неравенства оператор P ограничен. ■

Существуют ли недополняемые подпространства? Известен следующий результат: в любом банаховом пространстве, не являющемся гильбертовым, существует недополняемое подпространство. Таким образом, существуют подпространства, для которых нет ограниченных проекторов.

В следующих упражнениях приведены результаты о дополняемости некоторых подпространств.

Упражнение. Докажите, что любое конечномерное подпространство дополняемо. Как построить проектор на такое подпространство?

Упражнение. Подпространство L в банаховом пространстве X имеет конечную коразмерность, если фактор-пространство X/L конечномерно. Докажите, что подпространство конечной коразмерности дополняемо.

4.2 ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Критерий применимости проекционного метода

Пусть $A : X \to Y$ – ограниченный линейный оператор, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y. Рассмотрим операторное уравнение

$$Ax = y, \tag{4.1}$$

которое в дальнейшем будем называть точным.

Пусть в пространствах X и Y действуют системы проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$, причем обе системы сильно сходятся к единичному оператору.

Приближенным уравнением будем называть уравнение

$$(Q_n A P_n) x_n = Q_n y. \tag{4.2}$$

Решение приближенного уравнения будем разыскивать в пространстве $X_n = \operatorname{Im} P_n$.

Основное определение. Будем говорить, что к оператору A применим проекционный метод по системам проекторов $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ (и обозначать $A \in \Pi(P_n, Q_n)$), если приближенное уравнение, начиная с некоторого номера N, при любом $y \in Y$ имеет единственное решение $x_n \in X_n$, причем последовательность приближенных решений x_n сходится к некоторому решению x точного уравнения.

Отметим, что условие $A \in \Pi(P_n, Q_n)$ требует, чтобы точное уравнение было разрешимо при любой правой части, но не требует единственности решения, в то же время требования, предъявляемые к приближенному уравнению, влекут при $n > N$ существование обратного оператора $(Q_n A P_n)^{-1} : \operatorname{Im} Q_n \to \operatorname{Im} P_n$.

Установим следующий критерий применимости проекционного метода.

Теорема 4.2.1 *К оператору A применим проекционный метод: $A \in \Pi(P_n, Q_n)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1. *оператор A обратим;*

2. $$\sup_{n>N} \|(Q_n A P_n)^{-1} Q_n\| < \infty.$$

Доказательство.

Необходимость. Предполагается, что к оператору A применим проекционный метод. Поэтому для любого элемента $y \in Y$ последовательность элементов $\{(Q_nAP_n)^{-1}Q_ny\}$ является сходящейся. Вследствие полноты пространства операторов $L(X,Y)$ относительно сильной сходимости существует оператор $B \in L(Y,X)$, к которому сильно сходится последовательность операторов $\{(Q_nAP_n)^{-1}Q_n\}$. Но тогда в силу критерия сильной сходимости выполнено условие 2.

Далее, для любого $x \in X$ выполняется соотношение

$$(Q_nAP_n)^{-1}Q_n(Q_nAP_n)x = P_nx. \tag{4.3}$$

Осуществляя предельный переход в равенстве 4.3 с учетом сильной сходимости $P_n \xrightarrow{s} I$, приходим к соотношению

$$BAx = x.$$

Аналогично для любого $y \in Y$ устанавливается соотношение

$$ABy = y.$$

Поэтому оператор B является обратным оператором к оператору A. Следовательно, установлено и выполнения условия 1.

Достаточность. Предполагаются выполненными условия 1. и 2. Следует доказать сходимость приближенных решений x_n к точному решению x. Будем исходить из соотношения

$$(Q_nAP_n)(x_n - P_nx) = Q_ny - (Q_nAP_n)x = Q_nA(I - P_n)x.$$

Действуя на него оператором $(Q_nAP_n)^{-1}$, получим равенство

$$x_n - P_nx = (Q_nAP_n)^{-1}Q_nA(I - P_n)x.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\|x_n - P_nx\| \le c\|(I - P_n)x\|,$$

где

$$c = \sup_{n>N} \|(Q_nAP_n)^{-1}Q_n\|\|A\|.$$

Оценка нормы разности $x_n - x$ следует из неравенства

$$\|x_n - x\| \le \|x_n - P_n x\| + \|P_n x - x\| \le (c+1)\|(I - P_n)x\|. \tag{4.4}$$

Поэтому вследствие сильной сходимости $P_n \xrightarrow{s} I$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0. \blacksquare$$

Устойчивость проекционных методов

Одним из важных требований, предъявляемых к приближенному методу, является требование его устойчивости относительно малых возмущений. Ниже этот факт доказывается для проекционных методов. Но для проекционных методов справедлив более сильный результат об устойчивости относительно вполне непрерывных возмущений, сохраняющих обратимость.

Теорема 4.2.2 *(об устойчивости относительно малых возмущений.) Пусть $A : X \to Y$ – ограниченный оператор, причем $A \in \Pi(P_n, Q_n)$. Тогда существует такая константа $\gamma > 0$, что для любого оператора B, удовлетворяющего условию $\|B\| < \gamma$, к возмущенному оператору $A + B$ применим проекционный метод: $(A + B) \in \Pi(P_n, Q_n)$.*

Доказательство. Достаточно проверить устойчивость относительно малых возмущений обоих условий критерия применимости проекционного метода. Устойчивость обратимости оператора относительно малых возмущений доказана в главе 3. Для доказательстве устойчивости второго условия рассмотрим оператор $Q_n(A + B)P_n$ и представим его при $n > N$ в виде

$$Q_n(A + B)P_n = Q_n A P_n (P_n + (Q_n A P_n)^{-1}(Q_n B P_n)).$$

Оператор $C_n = (Q_n A P_n)^{-1}(Q_n B P_n)$ допускает следующую оценку нормы

$$\|C_n\| \le \sup_{n>N} \|(Q_n A P_n)^{-1} Q_n\| \sup \|P_n\| \|B\|,$$

и поэтому при достаточно малой норме $\|B\|$ также имеет малую норму при $n > N$. Вследствие этого при достаточно малом γ оператор

$$(P_n + C_n) : \operatorname{Im} P_n \to \operatorname{Im} P_n,$$

обратим как близкий к единичному. (Оператор P_n является единичным в пространстве $\operatorname{Im} P_n$.) При этом нормы обратных $(P_n + C_n)^{-1}$ равномерно ограничены. Но тогда при $n > N$ оператор $Q_n(A+B)P_n$ обратим и выполнено условие

$$\sup_{n>N} \|(Q_n(A+B)P_n)^{-1}Q_n\| < \infty. \blacksquare$$

Теорема 4.2.3 *(устойчивость относительно вполне непрерывных возмущений) Пусть $A \in \Pi(P_n, Q_n)$ и T – вполне непрерывный оператор, причем оператор $A+T$ обратим. Тогда $(A+T) \in \Pi(P_n, Q_n)$.*

Доказательство. Напомним следующий факт: если оператор T – вполне непрерывен, а последовательность операторов $\{B_n\}$ сильно сходится к оператору B, то последовательность операторов $\{B_nT\}$ сходится по норме к оператору BT. Как было установлено в доказательстве критерия применимости проекционного метода оператор $(Q_nAP_n)^{-1}Q_n$ сильно сходится к оператору A^{-1}. Поэтому оператор $(Q_nAP_n)^{-1}Q_nT$ сходится по норме к оператору $A^{-1}T$. Вследствие этого факта и обратимости оператора $I + A^{-1}T$, начиная с некоторого номера $n > N$, операторы $I + (Q_nAP_n)^{-1}Q_nT$ обратимы и их обратные имеют равномерно ограниченные нормы. Но тогда справедливы равномерные оценки

$$\|(P_n + (Q_nAP_n)^{-1}Q_nTP_n)x\| \geq c\|P_nx\|.$$

Оператор $(P_n + (Q_nAP_n)^{-1}Q_nTP_n) : \mathrm{Im}P_n \to \mathrm{Im}P_n$ является оператором вида "единичный + вполне непрерывный". Из предыдущей оценки вытекает, что ядро данного оператора тривиально. Но тогда из альтернативы Фредгольма следует, что данный оператор обратим. Из первой теоремы об обратимости получаем, что при $n > N$ справедлива оценка

$$\sup_{n>N} \|(P_n + (Q_nAP_n)^{-1}Q_nTP_n)^{-1}\| \leq 1/c.$$

Вследствие этого и из условия $A \in \Pi(P_n, Q_n)$ получаем, что

$$(A+T) \in \Pi(P_n, Q_n). \blacksquare$$

Достаточные условия применимости проекционного метода в гильбертовом пространстве

Теорема 4.2.4 *Пусть $A : H \to H$ – оператор в гильбертовом пространстве, имеющий вид $A = B+iC$, где B и C – самосопряженные операторы, причем оператор B положительно определен, т.е. существует положительная константа γ, что*

$$(Bx, x) \geq \gamma(x, x).$$

Тогда $A \in \Pi(P_n, P_n)$ для любой системы ортопроекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, сильно сходящихся к единичному оператору.

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$A_n = P_n A P_n,\ B_n = P_n B P_n,\ C_n = P_n C P_n$$

и будем рассматривать данные операторы в гильбертовом пространстве $H_n = \operatorname{Im} P_n$. Ясно, что операторы B_n и C_n самосопряжены, причем B_n – положительно определен:

$$(P_n B P_n x, P_n x) = (B P_n x, P_n x) \geq \gamma(P_n x, P_n x).$$

Покажем, что оператор $A_n : H_n \to H_n$ обратим и нормы обратных операторов равномерно ограничены. Доказательство этих фактов аналогично доказательству теоремы о регулярном значении самосопряженного оператора. Именно, достаточно установить, что $\operatorname{Im} A_n = H_n$. Сначала покажем, что $\operatorname{Im} A_n$ всюду плотен в H_n. Действительно, если это не так, то существует ненулевой элемент y, ортогональный $\operatorname{Im} A_n$. Вследствие этого

$$A_n^* y = B_n y - iC_n y = 0.$$

Но тогда

$$0 = \operatorname{Re}(A_n^* y, y) = (B_n y, y) \geq \gamma(y, y),$$

что невозможно ввиду $y \neq 0$. Следовательно, $\operatorname{Im} A_n$ плотен в H_n.

Пусть теперь z – произвольный элемент из H_n и последовательность $\{A_n x_m\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к z. Ввиду оценки

$$\operatorname{Re}(A_n(x_m - x_p), x_m - x_p) \geq \gamma(x_m - x_p, x_m - x_p)$$

последовательность $\{x_m\}$ является сходящейся. Если

$$x = \lim_{m\to\infty} x_m,$$

то

$$z = \lim_{m\to\infty} A_n x_m = A_n x \in \mathrm{Im} A_n.$$

Таким образом, установлено, что

$$\mathrm{Im}\, A_n = H_n,\ \mathrm{Ker}\, A_n = \{0\}.$$

Следовательно, оператор A_n обратим. А из оценки

$$\|A_n x\| \|x\| \geq \mathrm{Re}(A_n x, x) \geq \gamma(x, x),\ x \in H_n$$

вытекает, что

$$\|A_n^{-1}\| \leq 1/\gamma,$$

т.е.

$$\sup \|(P_n A P_n)^{-1}\| < \infty.$$

Обратимость оператора A устанавливается аналогично обратимости оператора A_n.

Таким образом, выполнены условия критерия применимости проекционного метода к оператору A. ■

4.3 МЕТОД ГАЛЕРКИНА

Пусть X – гильбертово пространство, непрерывно вложенное в гильбертово пространство H, $A : X \to H$ – линейный ограниченный оператор. Рассмотрим уравнение

$$Ax = y,\ \ y \in H. \tag{4.5}$$

В пространствах X и H выберем ортонормированные базисы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$. Согласно методу Галеркина приближенное решение разыскивается в виде

$$x_n = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j, \tag{4.6}$$

причем коэффициенты a_j определяются из соотношений

$$(Ax_n - y, f_j)_H = 0,\ j = 1, 2, ...n. \tag{4.7}$$

Заметим, что условия (4.7) представляют следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_j

$$\sum_{k=1}^{n} (Ae_k, f_j)_H a_k = (y, f_j)_H.$$

Будем говорить, что метод Галеркина сходится, если последовательность приближенных решений $\{x_n\}$ сходится к точному решению x уравнения (4.5).

Покажем, что метод Галеркина является проекционным методом. Введем ортопроекторы

$$P_n : X \to X,\ Q_n : H \to H,$$

полагая

$$P_n x = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j)_X e_j,\ x \in X,\ \ Q_n z = \sum_{j=1}^{n} (z, f_j)_H f_j,\ z \in H.$$

Из соотношений (4.7) следует, что x_n является галеркинским приближением тогда и только тогда, когда x_n является решением уравнения

$$(Q_n A P_n) x_n = Q_n y \tag{4.8}$$

Таким образом, для доказательства сходимости метода Галеркина можно использовать критерий применимости проекционного метода.

Отметим, что методу Галеркина посвящена огромная литература, в которой этот метод обобщался в различных направлениях для операторов в банаховых пространствах, для неограниченных нелинейных операторов и применялся к конкретным прикладным задачам.

В качестве примера рассмотрим вопрос о применимости метода Галеркина к следующей краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке $[0, 1]$

$$\begin{cases} -y'' + a(x)y = f(x), \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \tag{4.9}$$

где $a(x)$ – непрерывная функция на $[0,1]$.

Сведем задачу (4.9) к операторному уравнению. Предварительно рассмотрим оператор

$$By = -y'',$$

с областью определения $D(B)$, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям $y(0) = y(1) = 0$:

$$D(B) = \{y \in C^2[0,1];\ y(0) = y(1) = 0\}.$$

Каждая из функций $\varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin\pi nx$, $n = 1,2...$ является собственной функцией оператора B : $B\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$, $\lambda_n = (n\pi)^2$. Далее, система собственных функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора B образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(0,1)$. Рассмотрим линейное многообразие L элементов вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \sin j\pi x.$$

Из теоремы Рисса-Фишера, примененной к данному базису, следует, что L всюду плотно в $L_2(0,1)$. Далее, оператор B взаимно однозначно отображает L на себя. Поэтому на L можно ввести норму, полагая

$$\|y\| = \|By\|_{L_2(0,1)}.$$

Очевидно, что для $y = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j\varphi_n(x)$ имеем $\|y\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_j|^2\lambda_j^2$. Пополнение L по этой норме обозначим через X. В дальнейшем норму в пространстве X будем обозначать $\|.\|_X$. Ясно, что пространство X есть гильбертово пространство, элементами которого являются функции $y(x)$ из $L_2(0,1)$, для которых выполнено условие:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2\lambda_j^2 < \infty,$$

где $a_j = (y,\varphi_j) = \int\limits_0^1 y(x)\varphi_j(x)\,dx$, $j = 1,2,...$ – коэффициенты Фурье элемента y, а скалярное произведение двух таких элементов

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(x) \text{ и } z = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \varphi_j(x)$$

определяется формулой

$$(y, z)_X = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \lambda_j^2.$$

Вследствие определения нормы в пространстве X оператор B продолжается до изометрического изоморфизма пространства X на пространство $Y = L_2(0,1)$. Для этого продолжения сохраним прежнее обозначение. Заметим, что пространство X совпадает с пространством Соболева $H_0^2(0,1)$, которое является пополнением $D(B)$ по норме

$$\|y\|^2_{H_0^2(0,1)} = \int\limits_0^1 \sum_{j=0}^{2} |y^{(j)}(x)|^2 \, dx.$$

Оператор B является оператором обобщенного дифференцирования.

В пространствах X и Y введем ортопроекторы P_n и Q_n, проектирующие на подпространства в X и Y, порожденное системой функций $\{\varphi_1, \varphi_2 ... \varphi_n\}$. Заметим, что оператор $Q_n B P_n$ является изометрическим изоморфизмом пространства $P_n X$ на пространство $Q_n Y$. Поэтому к оператору B применим проекционный метод по системе проекторов $(P_n, Q_n): \ B \in \Pi(P_n, Q_n)$.

Теперь сопоставим краевой задаче операторное уравнение

$$Ay = f(x),$$

где оператор $A : X \to Y$ определяется формулой

$$Ay = By + a(x)y.$$

Предположим, что оператор A обратим и покажем, что $A \in \Pi(P_n, Q_n)$. Для доказательства этого факта достаточно установить, что оператор вложения $J : X \to Y$ вполне непрерывен и воспользоваться теоремой об устойчивости проекционного метода относительно вполне непрерывных возмущений.

Итак, пусть множество

$$M = \{f \in X; f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \varphi_j(x), \sum_{j=1}^{\infty} f_j^2 \lambda_j^2 \leq R\}$$

–ограниченное множество в пространстве X. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что

$$\sum_{j=N}^{\infty} f_j^2 \lambda_j^2 \leq \varepsilon^2.$$

Поэтому, сопоставив каждому элементу $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \varphi_j(x) \in M$ элемент $f^{(N)} = \sum_{j=1}^{N} f_j \varphi_j(x)$, получим, что множество M_N всех таких элементов образует относительно компактную ε-сеть для множества M.

Таким образом, установлено, что оператор вложения $J : X \to Y$ вполне непрерывен. Отсюда следует, что оператор A является вполне непрерывным возмущением оператора B.

Учитывая изложенное, приходим к следующему результату.

Теорема 4.3.1 *Пусть сопоставляемый краевой задаче оператор* $A : X \to Y$ *обратим, тогда* $A \in \Pi(P_n, Q_n)$.

Детализируем это утверждение в терминах самой краевой задачи. Решение операторного уравнения $Ay = f$ будем называть обобщенным решением краевой задачи. Приближенное решение y_n разыскивается в виде $y_n = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x)$, где коэффициенты c_j определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\lambda_j c_j + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} c_k = f_j,\ j = 1, 2, ...n,$$

где

$$a_{jk} = \int_0^1 a(x) \varphi_k(x) \varphi_j(x)\, dx,$$

а f_j – коэффициенты Фурье функции $f \in L_2(0,1) :\ f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \varphi_j(x)$.

Если оператор A обратим (иначе при любой правой части f краевая задача имеет единственное обобщенное решение), то

- для любой функции $f \in L_2(0,1)$, начиная с некоторого n_0, данная система имеет единственное решение;
- приближенное решение $y_n = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x)$ сходится к точному решению $y = \sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j(x)$ в норме пространства X.

Упражнение. Распространить теорему 4.3.1 на случай других краевых условий.

Упражнение. Применить метод Галеркина для приближенного решения интегральных уравнений.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется оператор проектирования в банаховом пространстве?

2. Как формулируется критерий применимости проекционного метода?

3. Каким условиям удовлетворяют системы проекторов в проекционном методе?

4. Как формулируются достаточные условия применимости проекционного метода в гильбертовом пространстве?

5. Относительно каких возмущений проекционный метод является устойчивым?

6. Как осуществляется метод Галеркина?

7. Является ли метод Галеркина проекционным методом?

8. На основании какого результата устанавливается применимость метода Галеркина к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка?

Литература

[1] *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.

[2] *Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я.В.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Выш. школа, 1978.

[3] *Босс В.* Лекции по математике: функциональный анализ. Т. 5. 2005.

[4] *Городецкий В.В.* Методы решения задач по функциональному анализу. 1990.

[5] *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Мир, 1962.

[6] *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.

[7] *Вайнберг М. М.* Функциональный анализ. М.: Просвещение, 1979.

[8] *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

[9] *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

[10] *Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.

[11] *Князев П.Н.* Функциональный анализ. 2003.

[12] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

[13] *Кутателидзе С.С.* Основы функционального анализа. 1983.

[14] *Люстерник Л.А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

[15] *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. школа, 1982.

[16] *Пим Дж., Хадсон В.* Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.

[17] *Пугачев В.С.* Лекции по функциональному анализу. М.: Из-во МАИ, 1996.

[18] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

[19] *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

[20] *Рисс Ф., Сёкефальви - Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.

[21] *Садовничий В. А.* Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1986.

[22] *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

[23] *Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.

[24] *Хелемский А.Я.* Лекции по функциональному анализу. Москва, МЦНМО, 2004.

[25] *Хилле Е., Филлипс Р.С.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.

[26] *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Москва: Мир, 1967.

Оглавление