Глава 1. Вывод ММ Физических процессов

§1.1. Сущность МММ Физических процессов

0. МММ применяется для исследования “идеального” процесса. От него требуется ...

Основные этапы

1. Выбираются величины u, v, ... Они зависят от x и от t.

2. На основании законов для идеального процесса выводится система математических соотношений – ММ

3. Добавляются начальные и краевые условия

4. Исследуется корректность

5. Находится искомое решение: точно или приближенно

6. На основе анализа свойств решения делаются выводы ...

Обозначим через $\mathbb{R}^3$ трехмерное афинно-евклидово пространство, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, ... – точки в $\mathbb{R}^3$.

Лемма 1.1. Пусть D – произвольная область с границей S и пусть непрерывная в D функция ψ такова, что для любой ограниченной (кубируемой) области $\Omega \subset D$ $\int_\Omega \psi(x)dx = 0$. Тогда $\psi(x) = 0$ в D.

§1.2. Математические модели механики точки

Рассмотрим задачу механики: телу массы m на Земле сообщена начальная скорость $\mathbf{v}_0$ ...

Пусть выполняются условия

1. Земля – инерциальная система отсчета.

2. Ускорение свободного падения g постоянно.

3. Кривизной Земли можно пренебречь.

4. Камень моделируется материальной точкогй массы m.

Введем систему координат x, y с центром в точке вылета камня из катапульты, причем ось x направим ... Движение камня при выполнении 1)–4) описывается вторым законом Ньютона

$$m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}, \;\; \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \tag{2.1}$$

где $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'' = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$. Ясно, что

$$\mathbf{f} = m\mathbf{g}, \; \mathbf{g} = -g\mathbf{j}, \; g = 9.8\text{м/сек}. \tag{2.2}$$

Добавляя начальные условия, приходим к задаче Коши

$$m\ddot{x} = 0, \; x(0) = 0, \; \dot{x}(0) = v_0\cos\alpha, \; v_0 = |\mathbf{v}_0|,$$

$$m\ddot{y} = -mg,\ y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha. \qquad (2.3)$$

Решив систему (2.3), получаем

$$x = tv_0 \cos\alpha,\ y = tv_0 \sin\alpha - gt^2/2, \qquad (2.4)$$

$$y = xtg\alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}, \qquad (2.5)$$

$$x = l = \frac{2v_0^2 \cos^2\alpha tg\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha. \qquad (2.6)$$

Оптимизация: l максимально при $\alpha = \pi/4$.

Усложненная модель движения тела. Подъемная сила.

Братья Райт. Жуковский, Чаплыгин, Сикорский.

1.3. Математические модели гравитационного поля

$$u(\mathbf{x}) = \gamma \frac{m}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}, \qquad (3.1)$$

$$\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad \gamma = 6.673210^{-11} H \cdot M^2/\text{кг}^2,$$

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|, \quad \mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z) = \text{grad} u,$$

$$\text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}.$$

u – гравитационный потенциал

$$f_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad f_z = \frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (3.4)$$

Принцип суперпозиции

$$u(\mathbf{x}) = \gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}, \tag{3.5}$$

$$u_i(\mathbf{x}) = \gamma \frac{m_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}, \tag{3.6}$$

$$r_i(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|, \quad \frac{\partial r_i}{\partial x} = \frac{x - x_i}{r},$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = -\gamma m_i \frac{x - x_i}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \gamma m_i \left[-\frac{1}{r^3} + 3\frac{(x - x_i)^2}{r^5} \right],$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = 0, \ x \neq x_i.$$

Уравнение Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} = 0. \tag{3.10}$$

Применение схемы ММ: $\Omega \to \Omega_i$ с объемом ΔV_i, массой $\rho(\mathbf{x}_i)\Delta V_i$ и потенциалом

$$u_i(\mathbf{x}_0) \approx \frac{\gamma \rho(\mathbf{x}_i) \Delta V_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0|} \text{ в точке } \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_i.$$

Суммируем:

$$\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho(\mathbf{x}_i) \Delta V_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0|}.$$

Переходим к пределу:

$$u(\mathbf{x}_0) = \gamma \int_\Omega \frac{\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}. \tag{3.11}$$

(3.11) – ньютоновский потенциал

$$\Delta u = -4\pi\gamma\rho(\mathbf{x}). \tag{3.12}$$

Модели электростатического поля

(3.12) используется также в электростатике в виде

$$\Delta u = -\frac{\rho_\varepsilon}{\varepsilon_0\varepsilon}, \tag{3.14}$$

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad} u, \tag{3.15}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + ... + \frac{\partial E_2}{\partial y} + ...,$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + ...,$$

$$\mathrm{rotgrad} u = 0,\ \mathrm{divgrad} u = \Delta u,$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\rho_\varepsilon}{\varepsilon_0\varepsilon},\ \mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}. \tag{3.19}$$

1.3.3. Постановка граничных условий

$$u = g \text{ на } \Gamma,\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ на } \Gamma, \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g \text{ на } \Gamma, \tag{3.22}$$

$$\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ на } \Gamma. \tag{3.23}$$

Замечание 3. Если уравнение Пуассона рассматривается в неограниченной области, то добавляется условие на ∞:

$$u(\mathbf{x}) = o(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{3.24}$$

§1.4. Модели переноса тепла и диффузии. Рассмотрим области D, Ω и вектор потока тепла

$$D, \Omega \subset D,\ \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t).$$

Физический смысл вектора $\mathbf{q}$ состоит в ...

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS. \tag{4.1}$$

Закон Фурье

$$\mathbf{q} = -k \mathrm{grad} T. \tag{4.2}$$

Рассматриваем изотропные среды $\Longrightarrow$

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Gamma} k \mathrm{grad} T \cdot \mathbf{n} dS.$$

Используем формулу Г.О.

$$\int_{\Omega} \mathrm{div} \mathbf{v} dx = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \Longrightarrow \tag{4.3}$$

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \mathrm{div}(k \mathrm{grad} T) dx. \tag{4.4}$$

Пусть в Ω сосредоточены источники тепла с плотностью $F \Longrightarrow$

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega F dx.$$

Получаемое областью Ω тепло идет на нагрев сред $\Longrightarrow$

$$Q = \int_\Omega \rho c (T_2 - T_1) d\mathbf{x} = \int_\Omega \rho c \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\mathbf{x}. \qquad (4.5)$$

Закон сохранения: $Q = Q_1 + Q_2 \Longrightarrow$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega \rho C \frac{\partial T}{\partial t} d\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) dx + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega F dx$$

$$\Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega [\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) - F] d\mathbf{x} = 0. \Longrightarrow$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) - F = 0. \qquad (4.7)$$

В декартовой системе координат

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + f, \qquad (4.8)$$

$$a = \sqrt{k/\rho c}, \quad f = F/\rho c, \qquad (4.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T (\text{при } f = 0). \qquad (4.10)$$

Начальные и граничные условия имеют вид

$$T|_{t=0} = T_0(\mathbf{x}), \quad \alpha T + \beta \frac{\partial T}{\partial n} = g \text{ на } \Gamma. \qquad (4.12)$$

В одномерном случае

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f. \tag{4.14}$$

В стационарном случае

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) \equiv \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial T}{\partial z}) = -F, \tag{4.15}$$

$$\Delta T = -f, \quad f = F/k, \quad k = \text{const}. \tag{4.16}$$

Учет конвекции. Пусть $\mathbf{u}$ – скорость. Поток тепла, переносимого через элемент dS границы Γ области Ω в единицы времени, равен

$$-T\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}dS \Rightarrow$$

$$Q_3 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Gamma T\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}dS =$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega \operatorname{div}(T\mathbf{u})dx \Rightarrow$$

Закон сохранения:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \Rightarrow$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) - \operatorname{div}(T\mathbf{u}) + F, \tag{4.19}$$

или

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) - \mathbf{u}\cdot\operatorname{grad} T + F, \tag{4.20}$$

В стационарном случае если $\mathrm{div}\mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\, T\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \nabla T + T \,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$

$$\mathrm{div}(k \,\mathrm{grad}\, T) - \mathrm{div}(Tu) = -F. \tag{4.21}$$

1.4.2. Модели конвекции–диффузии

Наличие загрязняющего вещества описывается концентрацией: С $[C]$ = кг/м^3 в СИ. A. Fick (1829–1901) $\mathbf{J} = -\eta \,\mathrm{grad}\, C$, где η – коэффициент диффузии. Рассуждая, как при выводе модели теплопроводности, имеем

$$R_1 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Gamma \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{J} dx =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega \mathrm{div}(\eta \mathrm{grad} C) dx,$$

$$R_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega F_c dx dt,$$

где F_c – плотность источников вещества,

$$R_3 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Gamma C\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega \mathrm{div}(C\mathbf{u}) dx,$$

$$R = \int_\Omega [C(\mathbf{x}, t_2) - C(\mathbf{x}, t_1)] dx = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega \frac{\partial C}{\partial t} dx. \tag{4.22}$$

Закон сохранения:

$$R = R_1 + R_2 + R_3. \tag{4.23}$$

Рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к моделям:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(C\mathbf{u}) + F_c, \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \eta \Delta C - \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} C + F_c \; (\operatorname{div}\mathbf{u} = 0), \tag{4.25}$$

$$\operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(C\mathbf{u}) = -F_c. \tag{4.26}$$

О химической реакции взаимодействия вещества с веществом основной среды

Пусть γ – коэффициент реакции взаимодействия вещества с жидкостью $\Rightarrow$

$$R_4 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \gamma C(\mathbf{x}, t) dx, \tag{4.27}$$

Закон сохранения: $R = R_1 + R_2 + R_3 - R_4 \Longrightarrow$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(C\mathbf{u}) - \gamma C + F_c, \tag{4.28}$$

$$\operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(C\mathbf{u}) - \gamma C = -F_c, \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} C + \gamma C = \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) + F_c, \tag{4.30}$$

если $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$. В частном случае, когда также $\eta = 0$,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} C + \gamma C = F_c.$$

Это – уравнение конвекции-реакции. Начальные и граничные условия имеют вид

$$C|_{t=0} = C_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{4.32}$$

$$C = g_1 \text{ на } \Gamma_D, \quad -\eta \frac{\partial C}{\partial n} = g_2 \text{ на } \Gamma_N.$$

1.5. Математические модели движения жидкостей

1.5.1. Феноменологические модели

Пусть жидкость занимает область D, Ω – ее подобласть с границей Γ, ψ – произвольная величина, относящаяся к единице объема. Тогда

$$\Psi(t) = \int_\Omega \psi(\mathbf{x}, t) dx$$

количество величины ψ в Ω, а ψ – объемная плотность величины Ψ в точке $\mathbf{x}$. Пусть q – плотность объемных источников величины ψ. В силу закона сохранения приращение $\Psi(t + \Delta t) - \Psi(t)$ за время Δt происходит за счет действия объемных источников

$$\int_t^{t+\Delta t} dt \int_\Omega q dx$$

и за счет потока величины ψ со стороны оставшейся части за время от t до $t+\Delta t$, равного

$$-\int_t^{t+\Delta t} dt \int_\Gamma \psi \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} dS = -\int_t^{t+\Delta t} dt \int_\Omega \operatorname{div}(\psi\mathbf{u}) dx.$$

Согласно закону сохранения, имеем

$$\Psi(t+\Delta t) - \Psi(t) = \int_t^{t+\Delta t} dt \int_\Omega q dx -$$

$$\int_t^{t+\Delta t} dt \int_\Omega \operatorname{div}(\psi\mathbf{u}) dS. \qquad (5.1)$$

После деления на Δt и предельного перехода при $\Delta t \to 0$ получим

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt}\int_\Omega \Psi dx = \int_\Omega q dx - \int_\Omega \operatorname{div}(\psi\mathbf{u}) dx, \qquad (5.2)$$

или

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi\mathbf{u}) - q\right] dx = 0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi\mathbf{u}) = q. \qquad (5.4)$$

1.5.3. Модели движения идеальной жидкости

Пусть $\psi = \rho$, $q = 0$ в (5.4) $\Longrightarrow$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0. \qquad (5.5)$$

Это – дифференциальный закон сохранения массы или уравнение неразрывности. В ДСК

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0. \qquad (5.6)$$

Силы: внутренние и внешние.

$\mathbf{f}$ – массовая плотность,

$\rho\mathbf{f}$ – объемная плотность,

$\rho\mathbf{f}dx$ – сила на элемент dx,

$\int_\Omega \rho\mathbf{f}dx$ – сила на область Ω.

Пример: $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$.

Рассмотрим идеальную жидкость. На элемент поверхности dS границы Γ действует сила давления

$$-p\mathbf{n}dS = -(\mathbf{i}p\mathrm{cos}\alpha + \mathbf{j}p\mathrm{cos}\beta + \mathbf{k}p\mathrm{cos}\gamma)dS.$$

На $\partial\Omega$ действует сила

$$-\int_{\partial\Omega} p\mathbf{n}dS = -\int_\Omega \nabla p dx. \tag{5.9}$$

Следовательно, объемная плотность всех сил имеет вид

$$-\nabla p + \rho\mathbf{f}, \tag{5.10}$$

либо в проекциях на оси координат вид

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.11}$$

Подставим $\psi = \rho u_i$ и (5.11) вместо q в (5.6). Получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \mathrm{div}(\rho u_i \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i$$

или

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho\sum_{j=1}^{3}u_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j)\right]u_i=$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho f_i. \tag{5.12}$$

В силу (5.6) из (5.12) следует, что

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho\sum_{j=1}^{3}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho f_i,\quad i=1,2,3. \tag{5.13}$$

Уравнения (5.13) эквивалентны векторному уравнению

$$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=-\nabla p+\rho\mathbf{f}. \tag{5.14}$$

Здесь $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ – вектор такой, что

$$\rho[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}]_i=\sum_{j=1}^{3}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j},\quad i=1,2,3.$$

Уравнение (5.14) – основное уравнение динамики идеальной жидкости или уравнение Эйлера или дифференциальный закон сохранения импульса.

Уравнения (5.5), (5.14) – незамкнутая модель ГД. Замкнутая модель имеет вид

$$p=P(\rho), \tag{5.15}$$

$$(5.5)+(5.14)+(5.15) \tag{$M1$}$$

и называется ММ идеальной баротропной жидкости или модельно однопараметрической жидкости.

Более реалистической является модель двухпараметрической жидкости:

$$(5.5) + (5.14) + (5.16) + (5.17) \tag{$M2$}$$

где (5.16) и (5.17) имеют вид

$$p = P(\rho, s), \tag{5.16}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathrm{div}(su) = 0. \tag{5.17}$$

Здесь s – энтропия жидкости. Кроме моделей сжимаемой жидкости, существуют модели несжимаемой жидкости

$$(5.5) + (5.14) + (5.20) + (5.21), \tag{$M3$}$$

где (5.20) и (5.21) имеют вид

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \tag{5.20}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \mathrm{grad}\rho = 0. \tag{5.21}$$

Это – модель Эйлера идеальной несжимаемой неоднородной жидкости. Если, кроме того, жидкость является однородной в том смысле, что выполняется условие $\rho = \mathrm{const}$, модель (M3) принимает вид

$$(5.14) + (5.20) \tag{$M4$}$$

и называется моделью Эйлера идеальной несжимаемой однородной жидкости.

Модель Навье-Стокса вязкой жидкости

Наличие вязкости в жидкости приводит к возникновению дополнительной внутренней силы (препятствующей движению жидкости).