

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ДАЛЬНЕВОСТОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

---

Институт прикладной математики

Г.В. Алексеев

КЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



Владивосток  
Дальнаука  
2011

ББК 22.311

А47

Алексеев Г.В.

**Классические модели и методы математической физики.**

Учебное пособие. – Владивосток: Дальнаука, 2011. – 452 с.

ISBN 978-5-8044-1245-7

А47 Настоящая книга представляет собой учебное пособие по классическим моделям и методам математической физики. В нем выводятся модели разнообразных физических процессов в виде дифференциальных уравнений в частных производных и их систем и излагаются классические методы их решения. В последней главе излагаются элементы теории обобщенных функций и на ее основе строится теория волновых полей в однородных средах. Книга написана на основе методологии математического моделирования. Большое внимание в ней уделяется как изложению строгих математических методов решения задач математической физики, так и физическому анализу полученных решений.

Книга будет полезной для студентов и аспирантов физико-математических специальностей, а также специалистов, интересующихся прикладными вопросами теории дифференциальных уравнений с частными производными. Она может быть также полезной для студентов и аспирантов естественных специальностей, интересующихся методикой применения метода математического моделирования для исследования естественных процессов.

А 1704020000  
180(03)-2006

ББК 22.311

**Научный редактор** академик В.А. Левин

**Рецензенты:**

*А.А. Буренин*, чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор;

*В.В. Васин*, чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор;

*Н.Н. Фролов*, д-р физ.-мат. наук, профессор

© Г.В. Алексеев, 2011

ISBN 978-5-8044-1245-7

© Дальнаука, 2011

# Предисловие ко второму изданию

Прошло 8 лет после выхода в свет в Издательстве Дальневосточного университета 1-го издания данного пособия. За это время оно активно использовалось студентами физико-математических специальностей Дальневосточного государственного (ныне федерального) университета и других вузов Дальнего Востока при изучении дисциплины “Уравнения математической физики” и спецкурса “Математическое моделирование”. Заинтересованными читателями и слушателями курсов был высказан ряд замечаний и пожеланий, направленных на улучшение содержания пособия.

Нужно отметить, что за это время в Дальневосточном регионе произошло важное событие. На базе Дальневосточного государственного университета и еще трех других вузов Приморья решением Правительства Российской Федерации в 2010 г. был создан Дальневосточный федеральный университет (ДВФУ), состоящий по своей структуре из девяти школ. В частности, все естественные и математические специальности были объединены в Школу естественных наук ДВФУ.

Предлагаемая книга, являющаяся дополненным переизданием указанного пособия, предназначена прежде всего для студентов, магистрантов и аспирантов Школы естественных наук ДВФУ. Во второе издание внесены исправления, учитывающие замечания и пожелания читателей, и в частности студентов ДВГУ–ДВФУ, добавлен ряд редакционных исправлений, приведены новые примеры математических моделей для ряда физических явлений и добавлена новая глава. Она посвящена краткому изложению теории обобщенных функций как основы математического аппарата современной математической физики и применению изложенного аппарата для исследования процессов распространения волн в однородных средах. Кроме того, добавлен очерк исторического развития метода математического моделирования, на базе которого написано это пособие.

В книге принята единая двузначная нумерация теорем, лемм, следствий, замечаний, формул и рисунков. Так, в формуле (3.4) главы 5 первая цифра обозначает номер параграфа в этой главе, а вторая цифра – порядковый номер в этом параграфе. Точно так же в названии “Теорема 5.7” в главе 6 первая цифра обозначает номер параграфа этой главы, а вторая цифра – порядковый номер теоремы в этом параграфе. Символ ■ обозначает конец доказательства теоремы или леммы. К главам 3–6 приводятся задачи повышенной сложности, которые могут предлагаться студентам в качестве тем рефератов в целях углубленного изучения отдельных разделов курса математической физики.

2011 г.

Г.В. Алексеев

# Предисловие научного редактора

Предлагаемая читателю книга представляет собой учебное руководство по классическим моделям и методам математической физики для студентов физико-математических специальностей. В нем выводятся математические модели физических процессов в виде дифференциальных уравнений в частных производных либо их систем, и излагаются основные методы решений начально-краевых задач для указанных уравнений.

Хочу отметить две особенности настоящего руководства. Первая связана с тем, что оно написано на основе методологии математического моделирования. Сущность этой методологии заключается в сведении задачи изучения конкретного объекта, процесса или явления к задаче изучения его математического “образа” или математической модели и применении для исследования последней хорошо развитых к настоящему времени абстрактных математических методов и современных численных алгоритмов. Второй особенностью руководства, тесно связанной с первой, является то, что наряду с изложением ряда строгих математических методов решения рассматриваемых дифференциальных уравнений, большое внимание в книге уделяется и физическому анализу полученных решений. Поэтому изучение данного учебника будет представлять интерес как для математиков, которые всегда большое внимание уделяют строгому обоснованию построенных решений рассматриваемых задач, так и для студентов физических специальностей. Последних, может быть, не всегда интересуют детали доказательства той или иной формулы и ее строгое обоснование, но всегда интересуют те выводы о протекании изучаемого физического процесса, которые можно сделать на основе анализа полученных решений.

Как следует из названия, в данной книге излагаются классические, т.е. устоявшиеся модели и методы математической физики. Указанные методы, создавались в основном в трудах математиков и физиков в XVIII и XIX веках. Однако материал этой книги не устарел и не может устареть, так как он является необходимой базой современного образования по целому ряду физико-математических специальностей. Поскольку идеи математического моделирования глубоко проникли и в другие естественные науки то убежден, что эта книга может быть полезной не только для физиков и математиков, но и для студентов других специальностей, обучающихся в Школе естественных наук Дальневосточного федерального университета.

2011 г.

Академик В.А. Левин

# Введение

Настоящая книга представляет собой учебное руководство по методам математической физики, подготовленное для студентов физико-математических специальностей университетов. Оно написано на основе лекций, которые автор неоднократно читал студентам Дальневосточного государственного (ныне федерального) университета и других вузов Приморского края. В нем выводятся математические модели ряда физических процессов в виде дифференциальных уравнений в частных производных либо их систем и излагаются основные методы решений начально-краевых задач для указанных дифференциальных уравнений.

К настоящему времени в научных кругах сложилось мнение, что ряд курсов, преподаваемых в университетах, можно рассматривать с единых позиций метода математического моделирования. Особенно это относится к курсу “Уравнения математической физики”, входящему в обязательную программу ряда физико-математических специальностей университетов. В этом можно убедиться из оглавления практически любого учебника по уравнениям математической физики, где можно найти как вывод основных уравнений математической физики, так и применение математических методов для нахождения решений краевых и начально-краевых задач для этих уравнений, а также физическую интерпретацию построенных решений. И то, и другое, и третье входит в методологию математического моделирования. На основе идеологии математического моделирования написано и настоящее пособие. Фактически данное пособие можно рассматривать как введение в математическое моделирование физических процессов.

По своей структуре учебное пособие состоит из введения, восьми глав и двух приложений. В первой главе приводится вывод математических моделей физических процессов, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных. К ним относятся модели движения точки и обращения планет вокруг Солнца, модели гравитационного поля, процессов теплопроводности и диффузии, процессов движения жидкостей и газов, распространения звуковых и электромагнитных волн, распространения электромагнитных колебаний в проводах, переноса излучения в пространстве и еще ряд других моделей.

Большое внимание в этой главе уделяется постановке и анализу дополнительных условий, служащих для обеспечения единственности решения рассматриваемой модели. В случае стационарных процессов, т. е. процессов, не зависящих от времени, к ним относятся *краевые* условия, задаваемые на границе рассматриваемой области, а также условия на бесконечности для неограниченной области. На примере уравнения Пуассона формулируются основные типы краевых задач: *Дирихле*, *Неймана*, *третья* краевая задача и *смешанная* краевая задача. При рассмотрении нестациона-

нарных процессов переноса тепла или вещества либо распространения волн вводятся *начальные* условия, служащие вместе с краевыми условиями для выделения единственного решения. При рассмотрении гармонических звуковых процессов приводятся другие часто используемые в прикладной акустике задачи. К ним относятся задача *излучения* и задача *дифракции* (или *рассеяния*) звука. При рассмотрении электромагнитных процессов рассматриваются еще две специальные задачи: *электрическая* и *магнитная краевые* задачи, играющие важную роль в электростатике и магнитостатике. Обсуждается характерная неединственность решений указанных задач, вызванная несвязностью границы рассматриваемой области в случае электрической задачи и неоднозначностью области для магнитной задачи.

В гл. 2 излагаются элементы классификации уравнений в частных производных второго порядка и детально обсуждается фундаментальное понятие *корректно поставленной математической задачи* как задачи, решение которой существует, единственно и устойчиво, т. е. непрерывно зависит от исходных данных. Показывается, что все линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения второго порядка можно разбить на три типа: *эллиптический*, *параболический* и *гиперболический*. Простейшими представителями этих типов являются: *уравнение Пуассона*, *уравнение теплопроводности* и *волновое уравнение*, называемые основными уравнениями математической физики. Вводится фундаментальное понятие *характеристики* уравнения второго порядка, изучается ее роль с точки зрения корректности постановки соответствующей задачи Коши, приводятся примеры характеристик. Отдельный параграф посвящается изучению свойств решений уравнений в частных производных 1-го порядка, описывающих перенос в среде какой-либо физической величины вследствие явления конвекции. Основное внимание в нем уделяется изложению метода характеристик решения начально-краевых задач и детальному обсуждению двух методов исследования единственности и устойчивости решений: методу *энергетических неравенств* и методу, основанному на *принципе максимума*.

В гл. 3 излагаются математические методы исследования волновых процессов и волновых уравнений в неограниченном пространстве  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Исследуются свойства частных решений волнового уравнения в  $\mathbb{R}^n$ , формулируется задача Коши, доказываются существование, единственность и устойчивость ее решения, выводятся явные формулы (Даламбера, Пуассона, Кирхгофа) для решения, вводится фундаментальное понятие *волны*, и на основе этого приводится детальный физический анализ полученных решений. Путем сравнения формул Кирхгофа и Пуассона делается вывод о значительном отличии в протекании волнового процесса в трехмерном пространстве и на плоскости. В первом случае выполняется *принцип Гюйгенса*, согласно которому всякое начальное возмущение, локализованное в пространстве, вызывает в каждой точке пространства действие, локализо-

ванное по времени. При этом имеет место распространение волны с четко выраженными передним и задним фронтами. В то же время на плоскости происходит нарушение указанного принципа. Дается математическое и физическое объяснение этому факту.

В гл. 4 волновое уравнение рассматривается в ограниченной области пространства  $\mathbb{R}^n$  либо в ее внешности, а для нахождения решений соответствующих начально-краевых задач применяется *метод Фурье*. Известно, что успех в применении метода Фурье основывается на возможности разделения переменных в дифференциальном уравнении и соответствующих граничных условиях. С учетом этого волновое уравнение рассматривается лишь в канонических областях: отрезке вещественной оси, прямоугольнике либо круге на плоскости, а также во внешности шара. Приводится физический анализ полученных решений. Единственность и устойчивость решений доказываются методом энергетических неравенств.

В гл. 5 излагаются основные свойства решений параболических уравнений на примере уравнения теплопроводности. К ним относятся *принцип максимума*, *бесконечная дифференцируемость* решения однородного уравнения внутри рассматриваемой области и *бесконечная скорость* распространения возмущений. Излагаются два метода нахождения решений начально-краевых и начальных задач для уравнения теплопроводности: метод Фурье и метод интегральных преобразований. С помощью принципа максимума доказываются единственность и устойчивость решений.

В гл. 6 излагаются элементы теории эллиптических уравнений и гармонических функций. Вводятся фундаментальные понятия *гармонической функции* и *сингулярного решения* оператора Лапласа в пространстве  $n$  измерений. Исследуются основные свойства сингулярного решения и устанавливается его физический смысл путем анализа потенциалов монополя, диполя и других точечных источников. Выводятся формулы для потенциалов полей, создаваемых источниками, распределенными по объему либо поверхности. Эти потенциалы, называемые соответственно объемным потенциалом либо потенциалом простого или двойного слоя, описываются кратными либо поверхностными интегралами, зависящими от параметра. Указанные интегралы являются несобственными в случае, когда значения параметра принадлежат области интегрирования. С учетом этого излагаются элементы теории кратных несобственных интегралов, зависящих от параметра. Вводится математический аппарат исследования гармонических функций, основанный на формулах Грина и интегральном представлении гладкой функции в виде суммы трех гармонических потенциалов: объемного, простого слоя и двойного слоя. С использованием его выводятся основные свойства гармонических функций, близкие к свойствам решений параболических уравнений: принцип максимума, бесконечная дифференцируемость и аналитичность внутри рассматриваемой области. Детально

изучаются краевые задачи для уравнения Лапласа в круге и вне круга, а также в шаре и вне шара. С помощью метода Фурье находятся их решения, которые далее преобразуются к интегральным формулам Пуассона. На основе указанных формул выводятся оценки гармонической функции, заданной во внешности ограниченной области, описывающие ее поведение на бесконечности. Формулируются четыре основные краевые задачи для уравнения Пуассона: задача Дирихле, задача Неймана, третья краевая задача и смешанная краевая задача. С помощью принципа максимума и формул Грина доказываются теоремы единственности и устойчивости решений указанных задач. С использованием интегральной формулы Пуассона выводится ряд дополнительных свойств гармонических функций.

В гл. 7 излагаются элементы теории потенциала. В § 7.1 выводятся основные свойства *объемного потенциала*: доказывается его непрерывная дифференцируемость во всех точках пространства в случае ограниченной плотности и двухкратная непрерывная дифференцируемость для плотности с ограниченными производными. Показывается, что объемный потенциал является решением уравнения Пуассона, правая часть которого определяется плотностью источников поля. В § 7.2 приводятся основные свойства *потенциалов простого и двойного слоя* и, в частности, формулы скачка потенциала двойного слоя либо нормальных производных потенциала простого слоя при переходе через границу рассматриваемой области. В § 7.3 излагается сущность *метода граничных интегральных уравнений*, который далее применяется для исследования внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона. В § 7.4 излагается сущность метода функций Грина решения смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона. Устанавливаются основные свойства функций Грина и выводятся явные формулы решения в предположении его существования. Обсуждается физический смысл функций Грина. В § 7.5 кратко излагаются элементы теории интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода.

В § 8.1 гл. 8 сначала дается краткое изложение теории обобщенных функций. В следующих параграфах на ее основе строится теория волновых полей в однородных средах, описываемых скалярным уравнением Гельмгольца. Указанная теория включает в себя исследование разрешимости задач излучения звука в классах обобщенных функций и доказательство единственности решений основных краевых задач для уравнения Гельмгольца.

При подготовке и оформлении пособия большую помощь автору оказали сотрудники лаборатории вычислительной аэрогидродинамики Института прикладной математики ДВО РАН Р.В. Бризицкий, О.В. Соболева и Д.А. Терешко. Очень ценными для автора были советы доцента И.А. Терлецкого, профессора Н.Н. Фролова, членов-корреспондентов РАН А.А. Буренина, В.В. Васина и академика В.А. Левина. Всем перечисленным товарищам автор выражает свою искреннюю признательность.



# ГЛАВА 1. Вывод классических математических моделей физических процессов

## § 1.1. Сущность метода математического моделирования физических процессов

В этом параграфе мы изложим краткую схему применения метода математического моделирования (МММ) для изучения различного рода физических процессов и явлений. Прежде всего отметим, что МММ применяется для вывода математической модели и исследования не реального физического процесса, а некоторого его “идеального” аналога или “идеального” процесса. От него требуется, чтобы он сохранял основные черты рассматриваемого процесса и в то же время был настолько простым, чтобы его можно было исследовать имеющимися математическими методами. При построении математической модели, описывающей указанный идеальный процесс, можно выделить следующие основные этапы.

1. Выбираются величины  $u, v, \dots$ , характеризующие процесс. Как правило, эти величины зависят от точек  $\mathbf{x}$  области  $D$ , где рассматривается процесс, и времени  $t$ .

2. На основании законов, которым подчиняется идеальный процесс, вводится система математических соотношений относительно величин  $u, v, \dots$ , состоящая обычно из дифференциальных, интегральных и функциональных уравнений (или неравенств) и называемая *математической моделью* рассматриваемого физического процесса.

3. Так как система дифференциальных уравнений, как правило, имеет бесчисленное множество решений, то ее недостаточно для описания конкретного процесса. Поэтому вводятся некоторые дополнительные условия, характеризующие процесс. Такими условиями чаще всего являются *граничные* (краевые) условия, т. е. условия, заданные на границе области  $D$ , и *начальные* условия, относящиеся к моменту времени, с которого начинается процесс. Совокупность математической модели и дополнительных условий представляет собой математическую формулировку рассматриваемой физической задачи и называется *задачей математической физики*.

4. Исследуется *корректность* указанной краевой задачи, т. е. устанавливаются условия на исходные данные, при которых ее решение *существует, единственно и устойчиво*.

5. С использованием математических методов, аналитических или численных, ориентированных на ЭВМ, находится искомое решение – точно или приближенно.

6. На основе анализа свойств полученного решения делаются выводы о свойствах изучаемого процесса (в рамках рассматриваемой модели).

Подчеркнем, что приведенная схема применяется при моделировании не только физических, но и ряда других естественных процессов, а также техногенных и финансовых объектов, социальных и экономических явлений. В этом смысле МММ является универсальным методом научного познания различного рода процессов, явлений и техногенных объектов (см. об этом подробнее в прил. 1). Ниже мы применим приведенную схему при выводе математических моделей ряда важнейших физических процессов, таких как диффузия, распространение тепла, движение жидкостей и газов, излучение волн и др.

Обозначим через  $\mathbb{R}^3$  трехмерное аффинно-евклидово пространство. Через  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$  будем обозначать точки  $\mathbb{R}^3$  либо их радиус-векторы относительно начала координат. Наряду с пространством  $\mathbb{R}^3$  будем также рассматривать плоскость  $\mathbb{R}^2$  либо вещественную ось  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ , а также произвольное  $n$ -мерное пространство  $\mathbb{R}^n$ . Важную роль при выводе математических моделей физических процессов будет играть следующая лемма.

**ЛЕММА 1.1.** Пусть  $D$  – произвольная область с границей  $S$ , и пусть непрерывная в  $D$  функция  $\psi$  такова, что для любой ограниченной (кубируемой) области  $\Omega \subset D$   $\int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ . Тогда  $\psi(\mathbf{x}) \equiv 0$  в  $D$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим противное, что  $\psi(\mathbf{x}) \not\equiv 0$ . Тогда найдется такая точка  $\mathbf{x}_0 \in D$ , что  $\psi(\mathbf{x}_0) = \varepsilon \neq 0$ . Пусть, например,  $\varepsilon > 0$ . В силу непрерывности  $\psi$  существует такая окрестность  $B_{\delta} = B_{\delta}(\mathbf{x}_0)$  с центром в точке  $\mathbf{x}_0$  радиуса  $\delta$ , что  $\psi(\mathbf{x}) \geq \varepsilon/2 \forall \mathbf{x} \in B_{\delta}$ . Полагая  $\Omega = B_{\delta}(\mathbf{x}_0)$ , имеем в силу условия на функцию  $\psi$ , что

$$0 = \int_{U_{\delta}} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \frac{\varepsilon}{2} \int_{U_{\delta}} d\mathbf{x} = \frac{2\varepsilon}{3} \pi \delta^3 > 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму. ■

## § 1.2. Математические модели механики материальной точки. Второй закон Ньютона. Законы Кеплера

С построением математических моделей мы встречались еще в школе, решая задачи по физике. В них обычно задается некоторая физическая система и описываются условия, в которых она находится. При этом необходимо сделать предположение о возможной идеализации этой системы (например, некоторое реальное тело моделируется материальной точкой), определить физические законы, которые нужно принять во внимание при ее изучении и записать в виде математических уравнений. В результате получим математическую модель рассматриваемой физической системы.

**1.2.1. Простейшая модель движения тела.** В этом и следующем пунктах, написанных по материалам [55, гл. 1], мы применим метод математического моделирования для решения следующей задачи механики:

телу массы  $m$  на Земле сообщена начальная скорость  $\mathbf{v}_0$ , направленная под углом  $\alpha$  к ее поверхности; требуется найти траекторию движения тела и вычислить расстояние между ее начальной и конечной точками. Как и в [55], будем предполагать, что речь идет о камне, брошенном с помощью катапульты. Это уточнение определяет характерные размеры тела, его массу и возможную начальную скорость. Построим для данного случая математическую модель, основанную на следующих предположениях:

- 1) Земля – инерциальная система отсчета;
- 2) ускорение свободного падения  $g$  постоянно;
- 3) кривизной Земли можно пренебречь, считая ее плоской;
- 4) камень моделируется материальной точкой массы  $m$ , вылетающей с уровня Земли, причем действием воздуха на движущийся камень можно пренебречь.

Введем систему координат  $x, y$  с центром в точке вылета камня из катапульты, причем ось  $x$  направим горизонтально в сторону движения камня, а ось  $y$  – вертикально вверх. При сделанных предположениях движение камня будет описываться известным из школьного курса физики вторым законом Ньютона, названным так в честь великого английского математика, механика, физика, астронома и философа I. Newton (1643–1727). Указанный закон имеет вид

$$m\mathbf{a} \equiv m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}. \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$  – положение камня в плоскости  $x, y$  в момент  $t$ , где  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  – единичные орты введенной (плоской) декартовой системы координат (декартова базиса),  $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$  – ускорение движущейся точки,  $\mathbf{f}$  – вектор внешних сил и  $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$  обозначает вторую производную по времени. Поскольку при наших предположениях на камень при его движении действует только массовая сила, то вектор  $\mathbf{f}$  определяется формулой

$$\mathbf{f} = m\mathbf{g}, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$ . Здесь  $g$  – ускорение свободного падения. Его величина на средних широтах равна  $9.8 \text{ м/с}^2$ . Подставляя (2.2) в уравнение (2.1), записанное в проекциях на оси координат, и добавляя начальные условия, приходим к искомой математической модели рассматриваемого процесса, имеющей вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \quad v_0 = |\mathbf{v}_0|, \\ m\ddot{y} &= -mg, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Математически полученная модель представляет собой задачу Коши для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Указанная задача элементарно решается, а ее решение, как легко проверить, имеет вид

$$x = tv_0 \cos \alpha, \quad y = tv_0 \sin \alpha - gt^2/2. \quad (2.4)$$

Физически соотношения (2.4) означают, что проекция камня на ось  $x$  будет двигаться равномерно со скоростью  $v_x = v_0 \cos \alpha$ , тогда как проекция на ось  $y$  будет двигаться с постоянным ускорением  $a_y = -g$ , имея своей начальной скоростью  $v_y = v_0 \sin \alpha$ . Выражая из первого уравнения в (2.4) время  $t$  через  $x$  и подставляя во второе уравнение (2.4), получаем искомое уравнение траектории камня. Оно имеет вид параболы (см. рис. 2.1):

$$y = xtg\alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (2.5)$$

Указанная парабола пересекает ось  $x$  в двух точках:  $x = 0$  и  $x = l$ , где

$$l = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha tg\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (2.6)$$

Первая точка  $x = 0$  является начальной точкой траектории, в ней камень вылетает из катапульты. Вторая точка соответствует месту падения камня на землю. Формула (2.6) и определяет в рамках принятой модели искомое расстояние  $l$ . Эта формула хорошо известна из школьного учебника по физике, где она выводится и подробно обсуждается.

В прикладных задачах построение математической модели представляет собой один из наиболее сложных и ответственных этапов. Трудность данного этапа состоит в том, что он требует соединения математических и специальных знаний. Опыт показывает, что во многих случаях правильный выбор модели означает половину решения рассматриваемой задачи.

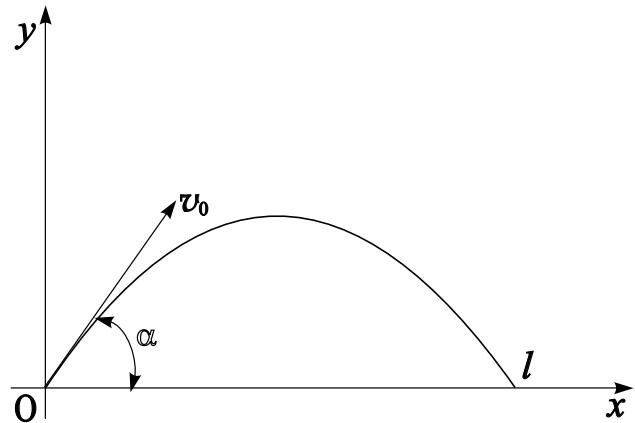


Рис. 2.1

Более сложная ситуация возникает тогда, когда наших знаний об изучаемом объекте недостаточно. В этом случае при построении математической модели приходится делать дополнительные предположения, или *гипотезы*. Выводы, полученные в результате исследования такой *гипотетической модели*, носят для изучаемого объекта условный характер. Они справедливы для него настолько, насколько правильны исходные предположения. Для их проверки необходимо сопоставить результаты исследования модели со всей имеющейся информацией об изучаемом объекте. Степень близости расчетных и экспериментальных данных позволяет судить о качестве гипотетической модели, о справедливости или ошибочности исходных предположений. Таким образом, вопрос применения некоторой модели к изучению рассматриваемого объекта не является чисто математическим

вопросом и не может быть решен лишь математическими методами. Основным критерием истинности является эксперимент или практика. Критерий практики позволяет сравнить различные гипотетические модели и выбрать из них такую, которая является наиболее простой и в то же время в рамках требуемой точности правильно передает свойства изучаемого объекта.

**1.2.2. Усложненная модель движения тела.** Вновь обратимся к задаче нахождения траектории полета камня, выбрасываемого катапультией, и продолжим ее исследование. В разд. 1.2.1 мы построили математическую модель движения камня, основанную на четырех упрощающих предположениях, и получили исходную формулу (2.6) для дальности броска. Теперь нам необходимо оценить точность этой формулы и установить пределы ее применимости. Для такого анализа нет нужды строить катапультию по сохранившимся чертежам и проводить соответствующие натурные эксперименты. Это объясняется тем, что по указанному материалу накоплен огромный экспериментальный и теоретический материал, так что нужно только умело воспользоваться им для анализа поставленной задачи.

Предположим, что катапульта может метать камни размером до 0.2 м на расстояние до 100 м, для чего она должна сообщить им начальную скорость порядка 30 м/с. При этом камень поднимется на высоту 20–30 м и пробудет в воздухе около 3 с. В этих условиях первые три предположения выглядят совершенно оправданными, и нам остается только проанализировать справедливость четвертого предположения о влиянии воздуха.

Касаясь вопроса о правомерности этого предположения, отметим, что согласно данным многочисленных опытов на всякое тело, движущееся в воздухе, последний действует с некоторой силой  $\mathbf{F}$ . Ее модуль  $F = |\mathbf{F}|$  и направление зависят от формы тела и скорости движения. Указанную силу  $\mathbf{F}$  можно разложить на две составляющие: параллельную  $F_r$  и перпендикулярную  $F_\perp$  скорости  $\mathbf{v}$ . Перпендикулярная составляющая возникает только при *асимметрии* тела по отношению к направлению движения.

Наиболее характерным ее проявлением является *подъемная сила*, действующая на крыло самолета при его полете, на чем основана вся авиация. Для того чтобы эта сила могла оторвать самолет от земли и поддерживать его в воздухе, крылу придают специальную форму и располагают его под определенным углом атаки к набегающему воздушному потоку (см. рис. 2.2). Однако для камня, форма которого близка к сферической, перпендикулярная составляющая  $F_\perp$  силы  $\mathbf{F}$  мала, и ею можно пренебречь (для шара указанная сила в точности равна нулю в силу его симметричности).

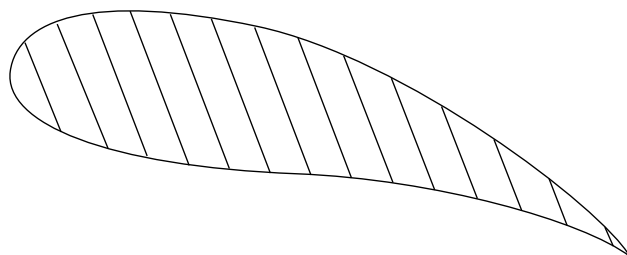


Рис. 2.2

Однако для камня, форма которого близка к сферической, перпендикулярная составляющая  $F_\perp$  силы  $\mathbf{F}$  мала, и ею можно пренебречь (для шара указанная сила в точности равна нулю в силу его симметричности).

Параллельная составляющая  $F_r$  силы  $\mathbf{F}$  возникает при движении любого тела. Она направлена в сторону, противоположную движению, и стремится затормозить тело, ее называют *силой лобового сопротивления*. Таким образом, в рассматриваемом нами случае можно считать, что

$$F \approx F_r. \quad (2.7)$$

Вопрос о конкретном выражении для силы  $F_r$  является достаточно сложным и требует привлечения законов аэрогидродинамики. Не имея здесь возможности останавливаться на приведении законов аэрогидродинамики, которые, к слову сказать, также выводятся путем математического моделирования процессов движения тел в сплошных жидких или газообразных средах (см. об этом в § 1.5), отметим, что указанную формулу можно записать в следующем виде:

$$F_r = a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3 + \dots \quad (2.8)$$

Здесь  $v = |\mathbf{v}|$  – модуль скорости  $\mathbf{v}$ , а  $a_1, a_2, \dots$  – коэффициенты, которые зависят от ряда факторов: формы камня, параметров воздуха и т. д. Часто вместо формулы (2.8) пользуются более простой формулой [55, с. 16]:

$$F_r = CS \frac{\rho v^2}{2}, \quad (2.9)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения тела,  $\rho$  – плотность воздуха,  $C$  – безразмерный множитель, называемый *коэффициентом лобового сопротивления*. Указанный коэффициент зависит от формы тела и безразмерной характеристики  $Re$  процесса обтекания, называемой *числом Рейнольдса*:  $C = C(Re)$ ,  $Re = v\rho d/\mu$ . Здесь  $d$  – характерный размер тела,  $\rho$  и  $\mu$  – плотность и вязкость воздуха. Нетрудно проверить, что  $Re$  – безразмерная величина, но на этом мы не будем останавливаться.

Оценивая величину  $Re$  в интересующем нас случае, когда  $\rho = 1.3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu = 1.7 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м·с)}$ ,  $v = 30 \text{ м/с}$ ,  $d = 0.2 \text{ м}$ , имеем

$$Re = \frac{30 \cdot 1.3 \cdot 0.2}{1.7 \cdot 10^{-5}} \approx 4.6 \cdot 10^5. \quad (2.10)$$

Эксперименты и теоретические исследования показывают, что для шара в широком диапазоне  $3 \cdot 10^5 \leq Re \leq 7 \cdot 10^6$  изменения числа Рейнольдса, содержащем значение  $Re$  из (2.10), коэффициент  $C$  очень слабо зависит от  $Re$ , и его можно считать постоянным и равным 0.15:  $C \approx 0.15$ .

Предполагая, что форма камня близка к форме шара радиуса  $R$ , и полагая в (2.9)  $S = \pi R^2$ , приходим к следующей простой формуле для модуля лобового сопротивления шара в указанном диапазоне изменения числа  $Re$ :

$$F_r = \frac{C\pi}{2} R^2 \rho v^2. \quad (2.11)$$

Из этой формулы, в частности, вытекает, что зависимость силы лобового сопротивления от скорости носит квадратичный характер.

Для того чтобы оценить влияние сопротивления воздуха на характер движения камня, сравним его с основной силой в рассматриваемой задаче – силой тяжести  $P$ , действующей вертикально вниз. В случае, когда форма камня является сферической, сила  $P$  определяется формулой  $P = mg = (4\pi/3)R^3\rho_0g$ . Здесь  $\rho_0 = 2.3 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> – плотность камня. Заменим в (2.11)  $v^2$  на  $lg$  (приблизленно) и составим отношение  $F_r/P$ . Получим:

$$\frac{F_r}{P} \approx \frac{C\pi R^2 \rho l g / 2}{4\pi R^3 \rho_0 g / 3} = \frac{3}{8} \cdot \frac{C \rho l}{\rho_0 R}.$$

При  $l = 100$  м,  $R = 0,1$  м и  $C \approx 0.15$  получаем  $F_r/P \approx 0.03$ .

Обозначим через  $\Delta l$  абсолютную погрешность, которую мы допускаем в определении дальности броска  $l$ , если пренебречь сопротивлением воздуха. При малом сопротивлении воздуха ( $F_r/P \ll 1$ ) относительную погрешность  $\Delta l/l$  можно считать пропорциональной  $F_r/P$  с коэффициентом пропорциональности порядка единицы, т. е. в рассматриваемом диапазоне изменения параметров задачи получаем  $\Delta l/l \approx 3\%$  и, следовательно,  $\Delta l = (2 - 3)$  м. Если не требуется высокой точности, то такая ошибка допустима, так что применение модели, полученной при выполнении условий 1)–4), оправдано. В противном случае ее следует заменить более сложной моделью, учитывающей трение воздуха.

**1.2.3. Дифференциальные уравнения небесной механики. Законы Кеплера как следствие закона тяготения Ньютона.** В рассмотренной в п. 1.2.1 задаче векторное дифференциальное уравнение движения можно было разделить на отдельные скалярные уравнения. Таким образом, каждая координата удовлетворяла своему отдельному дифференциальному уравнению, решив которое мы определили эту координату как функцию времени. Теперь же поставим и решим задачу другого типа, когда систему уравнений движения уже не удастся разбить простым путем на отдельные уравнения для каждой из искоемых функций, и интегрирование такой системы требует более сложных вычислений. В качестве указанной задачи рассмотрим актуальную для человечества задачу определения траектории (или, как говорят астрономы, *орбиты*) движения планеты вокруг Солнца. Данную задачу будем рассматривать при следующих предположениях:

- 1) Солнце имеет вид материальной точки массы  $\mu$ , расположенной в начале декартовой системы координат;
- 2) движущаяся планета моделируется материальной точкой массы  $m$ , которая в момент  $t = 0$  занимает положение  $\mathbf{r}_0$  с  $r_0 = |\mathbf{r}_0| > 0$ , имея начальную скорость  $\mathbf{v}_0$ ;

3) тело массой  $\mu$  притягивает материальную точку массой  $m$  с силой  $\mathbf{f}$ , определяемой формулой

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\gamma\mu m \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.12)$$

Здесь  $\gamma$  – гравитационная постоянная (см. ее значение в § 1.3),  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  – положение точки (планеты) в момент времени  $t$ , где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  – единичные орты декартовой системы координат в  $\mathbb{R}^3$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

В механике указанная сила называется *центральной*. В результате мы пришли к хорошо известной в механике задаче нахождения движения материальной точки (планеты) массой  $m$  под действием центрального силового поля (2.12). Для решения этой задачи опять выберем в качестве основной математической модели второй закон Ньютона (2.1), который с учетом (2.12) перепишем в виде:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \equiv -\frac{\gamma\mu m}{r^3}\mathbf{r} \quad \text{или} \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\gamma\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.13)$$

В проекциях на оси координат уравнение (2.13) принимает вид:

$$\ddot{x} = -\gamma\mu \frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\gamma\mu \frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\gamma\mu \frac{z}{r^3}. \quad (2.14)$$

Подчеркнем, что в отличие от (2.3) система (2.14) состоит из трех *нелинейных* обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Хорошо известно, что нахождение точных решений систем нелинейных уравнений в явном виде возможно только в некоторых исключительных случаях. К счастью, в данной ситуации мы имеем тот исключительный случай, когда это возможно. Но для того, чтобы найти точное решение системы (2.14), придется провести ряд математических выкладок.

Мы начнем с того, что выведем в качестве следствия модели (2.13) дифференциальное уравнение первого порядка, выражающее закон сохранения энергии. Для получения этого уравнения умножим первое уравнение в (2.14) на  $\dot{x}$ , второе – на  $\dot{y}$ , третье уравнение – на  $\dot{z}$  и сложим полученные соотношения. Учитывая соотношения  $\ddot{x}\dot{x} = (1/2)d/dt(\dot{x}^2)$ ,  $x\dot{x} = (1/2)d/dt(x^2)$  и аналогичные для  $y$  и  $z$ , получим после умножения на  $m$ :

$$\frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -\gamma\mu m \frac{1}{2} \frac{1}{r^3} \frac{d}{dt}(r^2) = -\gamma\mu m \frac{\dot{r}}{r^2} = \gamma\mu m \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right). \quad (2.15)$$

Интегрируя (2.15), будем иметь

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\gamma\mu m}{r} = C. \quad (2.16)$$

Здесь  $C$  – некоторая константа, определяемая, например, из начальных условий. Левая часть (2.16) представляет собой сумму двух слагаемых:



первое слагаемое  $(1/2)m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$  в точности равно *кинетической энергии* движущейся точки, второе слагаемое  $-\gamma\mu m/r$  имеет смысл *потенциальной энергии*. Более подробно о физическом содержании этих понятий можно прочесть, например, в [29]. Равенство (2.16) выражает закон сохранения энергии, а именно: *при движении материальной точки в центральном поле сил полная энергия, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, остается постоянной*.

Кроме (2.16) из уравнений (2.14) можно вывести еще три уравнения 1-го порядка. Они имеют вид:

$$y\dot{z} - z\dot{y} = C_1, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = C_2, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = C_3. \quad (2.17)$$

Здесь  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  – произвольные константы. Для вывода, например, первого уравнения (2.17) умножим третье уравнение системы (2.14) на  $y$ , второе – на  $z$  и вычтем одно из другого. Получим  $y\ddot{z} - z\ddot{y} = 0$ , или  $d/dt(y\dot{z} - z\dot{y}) = 0 \implies y\dot{z} - z\dot{y} = C_1$ . Не умаляя общности, систему координат можно выбрать так, чтобы при  $t = 0$  материальная точка находилась в плоскости  $xy$  и чтобы ее начальная скорость лежала в той же плоскости, т. е. чтобы в дополнение к 1)–3) выполнялись условия

$$4) \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0.$$

В таком случае будем иметь  $(y\dot{z} - z\dot{y})|_{t=0} = 0$ ,  $(z\dot{x} - x\dot{z})|_{t=0} = 0$ . С учетом этого и (2.17) приходим к соотношениям

$$y\dot{z} - z\dot{y} = 0, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = 0, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = k \equiv \text{const} \quad \forall t. \quad (2.18)$$

Из уравнений (2.18) и предположения 4) вытекает, что процесс движения точки происходит в плоскости  $z = 0$ . Действительно, поскольку  $z(0) = 0$ , то в силу предположения 2) либо  $x(0) \neq 0$ , либо  $y(0) \neq 0$ . Пусть, например,  $x(0) \neq 0$ . Тогда из равенства  $z\dot{x} - x\dot{z} = 0$  вытекает, что

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{z}{x} \right) = \frac{\dot{z}x - z\dot{x}}{x^2} = 0 \implies z = ax, \quad a = \text{const}.$$

Но при  $t = 0$  имеем  $0 = z|_{t=0} = ax|_{t=0} = ax(0) \implies a = 0, z = 0$ . Это означает, что  $z(t) \equiv 0$ . В результате задача интегрирования уравнений (2.14) свелась к решению двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\gamma\mu m}{r} = C, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = k, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.19)$$

Для нахождения решения системы (2.19) введем полярные координаты  $r$  и  $\theta$  по формулам  $x = r\cos\theta$ ,  $y = r\sin\theta$ . Легко проверить, что  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ ,  $x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\theta}$ . С учетом этого из (2.19) приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для  $r$  и  $\theta$ :

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\gamma\mu m}{r} = C, \quad r^2\dot{\theta} = k. \quad (2.20)$$

Как уже указывалось, первое уравнение в (2.20) выражает закон сохранения энергии. Выясним смысл второго уравнения. Хорошо известно [24], что выражение  $(1/2)r^2\dot{\theta}$  равно производной по времени от площади сектора, описываемого радиус-вектором движущейся точки, т. е. равно скорости изменения площади этого сектора. В таком случае второе уравнение в (2.20) утверждает, что эта скорость постоянна. Этот результат получил название второго закона Кеплера или закона площадей: *радиус-вектор планеты, движущейся вокруг Солнца, заметает в равные промежутки времени равные площади*.

Если “постоянная площадей”  $k$  равна нулю, то  $\dot{\theta} = 0$  и  $\theta = \text{const}$ . Этот случай отвечает движению материальной точки по прямой, проходящей через начало координат, и ниже не будет рассматриваться.

Займёмся теперь определением геометрической формы орбиты планеты. Для этого будем рассматривать  $r$  как функцию от  $\theta$ . Из второго уравнения (2.20) выводим, что

$$\dot{\theta} = \frac{k}{r^2}, \quad \dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{r^2} \frac{dr}{d\theta}.$$

Подставляя эти соотношения в первое уравнение (2.20), приходим к следующему дифференциальному уравнению для функции  $r = r(\theta)$ , описывающей орбиту планеты при ее движении вокруг Солнца:

$$\frac{m}{2} \left\{ \frac{k^2}{r^4} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{k^2}{r^2} \right\} - \frac{\gamma\mu m}{r} = C \Rightarrow \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = r^4 \left( \frac{2C}{mk^2} + \frac{2\gamma\mu}{k^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (2.21)$$

Выражение в скобках в правой части (2.21) можно преобразовать так:

$$\frac{2C}{mk^2} + \frac{2\gamma\mu}{k^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} = - \left( \frac{1}{r} - \frac{\gamma\mu}{k^2} \right)^2 + \frac{\gamma^2\mu^2}{k^4} + \frac{2C}{mk^2} = - \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{p^2},$$

где

$$\frac{1}{p} = \frac{\gamma\mu}{k^2}, \quad \varepsilon^2 = 1 + \frac{2Ck^2}{m\gamma^2\mu^2}. \quad (2.22)$$

С учетом этого уравнение (2.21) примет следующий вид:

$$\left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = r^4 \left\{ \frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2 \right\}.$$

Оно упростится, если ввести вместо  $r$  новую неизвестную функцию  $u$ , где

$$u = \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}. \quad (2.23)$$

Новая искомая функция  $u$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{p^2} - u^2 \quad \text{или} \quad \frac{du}{d\theta} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - u^2}. \quad (2.24)$$

Это – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Оно легко интегрируется, в результате чего получаем

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{du}{\sqrt{\varepsilon^2/p^2 - u^2}} = \arcsin \frac{pu}{\varepsilon}. \quad (2.25)$$

Здесь  $\theta_0$  – константа интегрирования. Ее можно выбрать произвольным образом, так как безразлично, от какого фиксированного радиус-вектора следует отсчитывать угол  $\theta$ . Примем  $\theta_0 = \pi/2$ , так что значению  $u = 0$  соответствует значение  $\theta = \pi/2$ . Тогда, взяв синус от (2.25), имеем с учетом (2.23), что

$$\begin{aligned} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos\theta = \frac{pu}{\varepsilon} \Rightarrow u = -\frac{\varepsilon}{p}\cos\theta \Rightarrow \\ \frac{1}{r} - \frac{1}{p} &= -\frac{\varepsilon}{p}\cos\theta \Rightarrow r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\theta}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Из аналитической геометрии известно [43, с. 173], что (2.26) представляет собой полярное уравнение кривой второго порядка, один из фокусов которой находится в начале координат. Полученный результат дает первый закон Кеплера: *планеты (и кометы) движутся по коническим сечениям, в одном из фокусов которых находится Солнце.*

Известно, что существует три типа кривых второго порядка: эллипс, гипербола и парабола. Две возможные в силу первого закона Кеплера ситуации, когда планета движется по эллипсу или по гиперболе, изображены на рис. 2.3,а и 2.3,б. Отметим, что величина  $p = k^2/\gamma\mu$  называется *параметром конического сечения*, или *фокальным параметром*; у эллипса и гиперболы параметр  $p$  связан с большой и малой полуосями  $a$  и  $b$  формулой  $p = b^2/a$ . Величина  $\varepsilon > 0$ , определенная в (2.22), называется *эксцентриситетом*. Она определяет форму конического сечения, которое является эллипсом при  $\varepsilon < 1$ , параболой при  $\varepsilon = 1$  и гиперболой при  $\varepsilon > 1$ . Из второго равенства в (2.22) сразу видно, что эти три различные возможности зависят от значений постоянной  $C$ , характеризующей энергию: орбита будет эллипсом, если  $C < 0$ , параболой, если  $C = 0$ , и гиперболой, если  $C > 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.** Отметим, что при  $t = 0$  первое соотношение в (2.19) принимает вид

$$C = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\gamma\mu m}{r_0}, \quad (2.27)$$

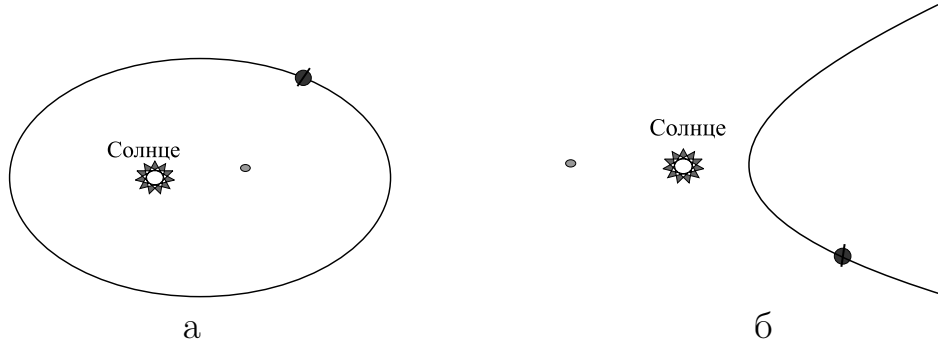


Рис. 2.3

где  $r_0 = r(0)$  – расстояние от точки (планеты) до центра (Солнца) в начальный момент времени, а  $v_0 = v(0) = |\mathbf{v}(0)| = \sqrt{\dot{x}^2(0) + \dot{y}^2(0)}$ . Поскольку  $C$  – абсолютная константа на всем временном интервале, определяющая вид орбиты (являющейся эллипсом, параболой или гиперболой), то из (2.27) следует, что вид орбиты зависит лишь от начального расстояния  $r_0$  планеты до Солнца и модуля  $v_0$  ее начальной скорости  $\mathbf{v}(0)$ , но не зависит от направления  $\mathbf{v}(0)$  (при используемом нами предположении, что  $k \neq 0$ ). В небесной механике показывается, что константа  $C$  в (2.27) отрицательна. Отсюда следует очень важный вывод о том, что орбитой Земли является эллипс. Нужно признать, что землянам крупно повезло, поскольку для Земли реализуется именно та благоприятная для существования жизни ситуация, которая изображена на рис. 2.3,а.

Для полного решения задачи осталось определить некоторые количественные характеристики процесса движения планеты и, в частности, период ее обращения вокруг Солнца. Пусть в момент  $t_0$  точка занимает положение  $\mathbf{r}_0$  с координатами  $(r_0, \theta_0)$ , а в момент  $t > t_0$  – положение  $\mathbf{r} = (r, \theta)$ . Интегрируя второе уравнение в (2.20), записанное в виде  $r^2 d\theta = k dt$ , имеем с учетом (2.26), что

$$\int_{\theta_0}^{\theta} r^2 d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{p^2 d\theta}{(1 - \varepsilon \cos \theta)^2} = \int_{t_0}^t k dt = k(t - t_0). \quad (2.28)$$

Рассмотрим важный для жителей Земли случай, когда орбита имеет вид эллипса (т. е.  $C < 0$ ). Пусть  $t$  таково, что  $\theta = \theta_0 \pm 2\pi$  и, следовательно,  $r = r_0$ . Этому моменту отвечает полное обращение планеты вокруг Солнца, причем величина  $T = t - t_0$  имеет смысл периода обращения вокруг центра. Поскольку интеграл слева в пределах от  $\theta_0$  до  $\theta_0 \pm 2\pi$  дает удвоенную площадь орбитального эллипса [24], равную  $2\pi ab$ , то из (2.28) приходим к формуле:  $2\pi ab = kT$ . С другой стороны, постоянная  $k$  связана с полуосями  $a$  и  $b$  соотношением  $k^2/\gamma\mu = b^2/a = p$ . Исключив из этих двух равенств  $k$ ,

получим соотношение

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma\mu}, \quad (2.29)$$

выражающее третий закон Кеплера, который мы получили как следствие первых двух законов. Этот закон утверждает: *у эллиптических орбит отношение квадрата периода обращения к кубу большой полуоси есть величина постоянная, одинаковая для всех планет и однозначно определяемая заданным гравитационным полем, т. е. парой  $(\gamma, \mu)$* . Подчеркнем, что эта величина не зависит от массы  $m$  самой планеты.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.** Подчеркнем, что выведенные здесь законы Кеплера, названные так в честь выдающегося немецкого ученого и мыслителя I. Kepler (1571 – 1630), получены нами методом математического моделирования, т. е., образно выражаясь, на кончике пера. Однако если обратиться в глубь веков лет на 400 назад, то необходимо отметить, что указанные законы были установлены И. Кеплером совсем другим путем, а именно путем неустанных размышлений над огромным числом поразительно точных наблюдений о движениях планет и Солнца, сделанных датским астрономом Тихо Браге (T. Brahe, 1546 – 1601). Открытые Кеплером законы находились в явном противоречии с пропагандируемым Церковью учением о том, что не Земля вращается вокруг Солнца, а, наоборот, Солнце вращается вокруг Земли. Из истории хорошо известно, что церковь ненавидела людей, нарушающих ее устои и жестоко наказывала их через публичное сожжение, повешение и т. д. Достаточно вспомнить итальянского философа Джордано Бруно (G. Bruno, 1548 – 1600), который был публично сожжен за высказанное им предположение о том, что пространство бесконечно и за поддержку им гелиоцентрической системы мира Коперника, созданной гениальным польским ученым Н. Коперником (N. Kopernik, 1473 – 1543), а также выдающегося итальянского ученого Галилео Галилея (G. Galilei, 1564 – 1642), которому во имя спасения жизни пришлось публично отречься от учения Коперника. К счастью, И. Кеплеру удалось избежать этих неприятных последствий. Ну, а в настоящее время, когда законы Кеплера можно вывести чисто математическим путем, используя идеи математического моделирования, как это было показано выше, их справедливость вряд ли у кого-либо может вызвать сомнение.

## **§ 1.3. Математические модели гравитационного и электростатического поля. Уравнение Лапласа**

**1.3.1. Модели гравитационного поля.** Как уже указывалось в § 1.2, знаменитый немецкий ученый Иоганн Кеплер, обрабатывая наблюдения другого знаменитого датского астронома Тихо Браге, открыл три замечательных закона (законы Кеплера), по которым планеты солнечной системы движутся вокруг Солнца. Указанные законы, хотя и являются очень

красивыми, обладают, к сожалению, одним недостатком: они не указывают причину, заставляющую планеты вращаться вокруг Солнца. В дальнейшем великий английский ученый Исаак Ньютон, однажды, отдыхая, по словам историков, в яблоневом саду после сытного обеда и размышляя над этими законами, был внезапно разбужен слетевшим с яблони яблоком и, не успев рассердиться, был озарен открытием весьма простого, но не менее удивительного объяснения законов Кеплера. В настоящее время это объяснение носит название закона всемирного тяготения и звучит так:

**ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ:** *Между любыми двумя телами в пространстве действует сила притяжения, прямо пропорциональная их массам и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними.*

Отметим при этом, что пространство и время Ньютон считал абсолютными, т. е. без искривлений, изгибаний и других ставших модными после работ знаменитого физика Альберта Эйнштейна (1879–1955) веяний.

Законы Кеплера, закон всемирного тяготения Ньютона и связь между ними подробно изучаются в небесной механике. Здесь же мы ограничимся выводом на основе закона всемирного тяготения математической модели гравитационного поля. Основная заслуга в построении указанной модели принадлежит французскому математику, механику, физику и астроному Пьеру Симону Лапласу (P.S. Laplace, 1749–1827). Размышляя, как и многие другие видные умы человечества, над законом всемирного тяготения, он никак не мог понять причину притяжения двух тел, например, Земли и Солнца, находящихся на колоссальном расстоянии друг от друга. Это дальное действие всегда казалось ему удивительным, если не сказать более того – волшебным, и в мучительной попытке понять причину указанного дального действия он пришел к следующей гипотезе:

**ГИПОТЕЗА ДАЛЬНОДЕЙСТВИЯ ЛАПЛАСА:** Наличие любого *притягивающего* (т. е. с положительной массой) *тела* влечет за собой возникновение во всем пространстве некоторой субстанции, интенсивность  $u(\mathbf{x})$  которой в произвольной точке  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  вычисляется по формуле:

$$u(\mathbf{x}) = \gamma \frac{m}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (3.1)$$

Здесь  $m$  – масса данного тела,  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  – место (точка) расположения тела,  $\gamma$  – абсолютная константа, называемая *гравитационной постоянной*, ее численное значение в системе СИ равно  $6.6732 \cdot 10^{-11} \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ , наконец,  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$  – расстояние между  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}_0$ , определяемое формулой

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \quad (3.2)$$

Смысл субстанции  $u$  заключается в том, что ее знание позволяет вычислить вектор  $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$  силы притяжения, действующей со стороны

тела на тело единичной массы, расположенное в точке  $\mathbf{x}$ , по формуле

$$\mathbf{f} = \text{grad}u. \quad (3.3)$$

Вектор  $\text{grad}u$  в (3.3) называется *градиентом* функции  $u$ . По своему смыслу  $\text{grad}u(\mathbf{x})$  указывает направление быстрейшего возрастания функции  $u$  в точке  $\mathbf{x}$ . В декартовом базисе с ортами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  он определяется формулой

$$\text{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}.$$

С учетом этого векторное равенство (3.3) можно записать в эквивалентном виде трех скалярных равенств для декартовых компонент  $f_x$ ,  $f_y$  и  $f_z$ :

$$f_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad f_z = \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (3.4)$$

Поскольку вектор  $\mathbf{f}$  описывает силу тяготения, то функцию  $u$  принято называть потенциалом поля силы тяготения (создаваемой в данном случае *парой*  $(\mathbf{x}_0, m)$ ) или просто *гравитационным потенциалом*. При этом само поле тяготения часто называют *гравитационным полем*.

Подчеркнем, что для гравитационного поля справедлив *принцип суперпозиции*. Согласно этому принципу гравитационное поле, создаваемое совокупностью притягивающих тел, равно сумме гравитационных полей, создаваемых каждым из этих тел. Отсюда вытекает, что гравитационный потенциал поля, создаваемого  $N$  парами  $(\mathbf{x}_1, m_1), (\mathbf{x}_2, m_2), \dots, (\mathbf{x}_N, m_N)$ , определяется в произвольной точке  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_j$  формулой

$$u(\mathbf{x}) = \gamma \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}. \quad (3.5)$$

Огромная заслуга Лапласа в деле дальнейшего изучения свойств явления всемирного тяготения заключается в том, что он предложил использовать при изучении тяготения не сам потенциал  $u$ , а то дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет  $u$ . Выведем это уравнение. Для этого выберем  $i$ -е слагаемое

$$u_i(\mathbf{x}) = \gamma \frac{m_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} \quad (3.6)$$

в сумме (3.5) и вычислим вторые производные от функции  $u_i$ . Полагая для простоты  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| = r_i(\mathbf{x})$ , имеем:

$$\frac{\partial r_i(\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{x - x_i}{r}, \quad \frac{\partial r_i(\mathbf{x})}{\partial y} = \frac{y - y_i}{r}, \quad \frac{\partial r_i(\mathbf{x})}{\partial z} = \frac{z - z_i}{r}. \quad (3.7)$$

Отсюда и из (3.6) вытекает, что

$$\frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x} = -\gamma m_i \frac{x - x_i}{r^3}, \quad \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial y} = -\gamma m_i \frac{y - y_i}{r^3}, \quad \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial z} = -\gamma m_i \frac{z - z_i}{r^3}. \quad (3.8)$$

Дифференцируя еще раз, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x})}{\partial x^2} &= \gamma m_i \left[ -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(x - x_i)^2}{r^5} \right], \quad \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x})}{\partial y^2} = \gamma m_i \left[ -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(y - y_i)^2}{r^5} \right], \\ \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x})}{\partial z^2} &= \gamma m_i \left[ -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(z - z_i)^2}{r^5} \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Складывая найденные частные производные, получаем

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i.$$

Отсюда и из того условия, что  $u = \sum_{i=1}^N u_i$ , приходим к уравнению

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (3.10)$$

которому в каждой точке  $\mathbf{x}$  области  $D \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$  удовлетворяет потенциал  $u$  гравитационного поля. Символ  $\Delta$ , введенный в (3.10) (см. также (3.18)), называется *оператором Лапласа*, а уравнение (3.10) принято называть *уравнением Лапласа*.

Заслуга Лапласа, таким образом, заключается в том, что он предложил отказаться от явной формулы (3.3) для сил гравитационного взаимодействия в пользу уравнения (3.10) для потенциала  $u$ . Можно считать, что дифференциальное уравнение описывает взаимодействие между соседними элементами поля, так что введение гравитационного потенциала подменяет задачу о дальном действии между реальными телами задачей о “близком действующем” взаимодействии между соседними областями пространства, наполненного некоторой искусственно придуманной гравитационной субстанцией интенсивности  $u$ .

Подчеркнем, что потенциал  $u$  удовлетворяет уравнению Лапласа всюду в  $\mathbb{R}^3$ , кроме точек  $\mathbf{x}_i$ , где сосредоточены притягивающие массы. На практике обычно приходится иметь дело с полем тяготения, созданным массой, распределенной с плотностью  $\rho$  по некоторой области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ . Представляет интерес вывести формулу для потенциала указанного объемного распределения масс. Применим для этого следующую схему, на которую в дальнейшем будем ссылаться как на *стандартную схему метода*



математического моделирования. Разобьем область  $\Omega$  на элементарные подобласти  $\Omega_i$  с объемами  $\Delta V_i$  и будем считать, что в каждом из них сосредоточена масса, равная  $\rho(\mathbf{x}_i)\Delta V_i$ , где  $\mathbf{x}_i$  – некоторая “средняя” точка подобласти  $\Omega_i$ . В таком случае создаваемый указанной точечной массой потенциал  $u_i$  силы притяжения, соответствующий этой массе, определяется в каждой точке  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_i$  формулой  $\gamma\rho(\mathbf{x}_i)\Delta V_i/|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0|$ . Суммируя по всем  $i = 1, 2, \dots, N$ , приходим в силу принципа суперпозиции к формуле

$$\gamma \sum_{i=1}^N \frac{\rho(\mathbf{x}_i)\Delta V_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0|},$$

которая приближенно описывает потенциал пары  $(\Omega, \rho)$  в произвольной точке  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_i$ . Наконец, переходя здесь к пределу при неограниченном измельчении области  $\Omega$ , приходим по определению тройного интеграла к формуле

$$u(\mathbf{x}_0) = \gamma \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}, \quad (3.11)$$

которая уже точно определяет потенциал гравитационного поля тела  $(\Omega, \rho)$  в произвольной точке  $\mathbf{x}_0$ , расположенной вне замыкания  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  области  $\Omega$ . Здесь и ниже  $d\mathbf{x}$  обозначает элемент объема. Формула (3.11) носит название *объемного, или ньютоновского потенциала*.

Можно показать (этим мы займемся в гл. 7), что для плотности  $\rho$ , обладающей некоторой гладкостью, например имеющей непрерывные производные 1-го порядка в  $\mathbb{R}^3$ , потенциал (3.11) удовлетворяет в каждой точке  $\mathbf{x}$  пространства  $\mathbb{R}^3$  так называемому *уравнению Пуассона*

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi\gamma\rho(\mathbf{x}), \quad (3.12)$$

названному в честь французского математика S.D. Poisson (1781–1840). Вне притягивающих масс, где  $\rho = 0$ , уравнение (3.12) переходит в уравнение Лапласа (3.10). Подчеркнем, что уравнения (3.12) и (3.10) являются простейшими и в то же время наиболее яркими представителями уравнений эллиптического типа согласно общепринятой классификации уравнений в частных производных второго порядка, приводимой в гл. 2.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.** Из формулы (3.8) при  $i = 1$  вытекает, в частности, что сила  $\mathbf{f}$  притяжения, действующая со стороны пары  $(\mathbf{x}_1, m_1)$  на пару  $(\mathbf{x}_2, m_2)$ , определяется следующими соотношениями:

$$\mathbf{f} = -\gamma m_1 m_2 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^3} \Rightarrow f = |\mathbf{f}| = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (3.13)$$

Вторая формула в (3.13) представляет собой хорошо известную из курса школьной механики формулу для величины силы притяжения двух то-

чечных масс  $m_1$  и  $m_2$ , расположенных в точках  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$  на расстоянии  $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$  друг от друга.

**1.3.2. Модели электростатического поля.** В физике имеется еще одна область, в которой сила взаимодействия между двумя телами, как и в теории тяготения, описывается соотношениями (3.13), где  $r$  – расстояние между двумя телами. Этим разделом является электростатика. При этом  $m_1$  и  $m_2$  имеют смысл электрических зарядов рассматриваемых материальных тел, которые в физике обычно обозначаются через  $q_1$  и  $q_2$ , а  $\gamma$  имеет смысл некоторой электростатической постоянной, зависящей от выбора системы единиц. Таким образом, в этом случае соотношения (3.13) описывают закон электростатического взаимодействия двух заряженных тел, который часто называют *законом Кулона* по имени французского физика S.O.Coulomb (1736–1806), открывшего этот закон. Как в гравитационном случае, для описания этого закона вводят *электростатический*, или *кулонов* потенциал  $u$ , удовлетворяющий уравнению Пуассона вида

$$\Delta u = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (3.14)$$

Здесь  $\rho_e$  имеет смысл плотности зарядов,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная (см. об этих величинах подробнее в § 1.7).

Основной силовой характеристикой электростатического поля является вектор напряженности  $\mathbf{E}$  электрического поля, связанный с кулоновым потенциалом  $u$  формулой

$$\mathbf{E} = -\text{grad } u. \quad (3.15)$$

Из математического анализа известно, что с каждым дифференцируемым векторным полем  $\mathbf{E}$  можно связать скалярное поле  $\text{div} \mathbf{E}$ , определяемое в декартовом базисе формулой

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}, \quad (3.16)$$

и векторное поле  $\text{rot} \mathbf{E}$ , определяемое в декартовом базисе формулой

$$\text{rot } \mathbf{E} = \left( \frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (3.17)$$

Здесь  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  – декартовы компоненты вектора  $\mathbf{E}$ . Применяя к (3.15) операторы  $\text{rot}$  либо  $\text{div}$  и используя известные соотношения (см. прил. 2)

$$\text{rot grad } u = 0, \quad \text{div grad } u = \Delta u, \quad (3.18)$$

приходим с учетом (3.14) к следующей системе уравнений относительно  $\mathbf{E}$ :

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

Уравнения (3.19) так же, как и (3.14), образуют математическую модель электростатического поля. К этому вопросу мы еще вернемся в § 1.7.

**1.3.3. Постановка граничных условий.** Для выделения единственного решения уравнения (3.14), либо системы (3.19), рассматриваемой в некоторой ограниченной области  $\Omega$ , необходимо задать дополнительные граничные условия для  $u$  либо  $\mathbf{E}$  на  $\Gamma$ . В частности, для электростатического потенциала  $u$  задают одно из следующих граничных условий:

$$u = g \quad \text{на } \Gamma, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{на } \Gamma, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g \quad \text{на } \Gamma. \quad (3.22)$$

Здесь  $g$  и  $\alpha : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  – заданные функции на границе  $\Gamma$ . Граничное условие (3.20) принято называть *условием 1-го рода*, или *условием Дирихле*; условие (3.21) называют *условием 2-го рода*, или *условием Неймана*; условие (3.22) – *условием 3-го рода*. При этом саму краевую задачу (3.14), (3.20), либо (3.14), (3.21), либо (3.14), (3.22) называют соответственно *первой краевой задачей*, или *задачей Дирихле*, *второй краевой задачей*, или *задачей Неймана*, наконец, *третьей краевой задачей* для уравнения (3.14).

Наряду с указанными краевыми задачами на практике часто рассматривают и *смешанную краевую задачу*, заключающуюся в нахождении решения  $u$  уравнения (3.14), удовлетворяющего общему граничному условию

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{на } \Gamma. \quad (3.23)$$

Здесь  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $g$  – заданные функции на границе  $\Gamma$ . Условие (3.23), очевидно, объединяет все введенные выше условия (3.20)–(3.22). В частности, при  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  оно переходит в (3.20), при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  оно переходит в (3.21), при  $\beta = 1$ ,  $\alpha \neq 0$  оно переходит в (3.22). Что касается граничных условий для электрического поля  $\mathbf{E}$ , то к этому вопросу мы вернемся в § 1.7 при обсуждении математических моделей электромагнитного поля.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.** Обратим внимание на тот важный факт, что граничные условия (3.20)–(3.23) ставятся и имеют физический смысл именно для электростатического потенциала. Так, условие (3.20) при  $g = 0$  физически означает, что граница  $\Gamma$  является эквипотенциальной, т. е. своего рода экраном для электрического поля [38]. Что касается гравитационного потенциала  $u$ , то отвечающее ему уравнение Пуассона (3.12) следует рассматривать во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$  без каких-либо граничных условий. Действительно, вряд ли можно создать такой экран, который бы полностью экранировал в некоторой области пространства действие гравитационного поля.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Ниже в гл. 2 мы покажем, что уравнение Пуассона (3.14) является простейшим представителем так называемых уравнений эллиптического типа, так что (3.14), (3.23) представляют собой эллиптическую краевую задачу. Данная эллиптическая задача подробно изучается в курсе дифференциальных уравнений в частных производных, где показано, что при некоторых естественных условиях на исходные данные она имеет единственное решение (потенциал  $u$ ), непрерывно зависящее от исходных данных. Это означает, что при указанных условиях задача (3.14), (3.23) корректно поставлена. В данной книге задача (3.14), (3.23) будет изучаться в некоторых частных случаях. К их числу относится задача Дирихле для *канонической области* типа круга в  $\mathbb{R}^2$  либо шара в  $\mathbb{R}^3$ . Можно показать, что в этих случаях точное решение соответствующей краевой задачи для уравнения Пуассона (3.14) существует и, более того, может быть представлено в виде ряда Фурье. Именно этим вопросом мы займемся детально в гл. 6. Что касается общей задачи (3.14), (3.23) в произвольной области  $\Omega$ , то найти ее точное решение в явном виде средствами классической математики невозможно. Поэтому для решения указанной задачи необходимо использовать приближенные методы, например, численные методы, ориентированные на ЭВМ. Это составляет содержание курса “Численные методы математической физики” (см., например, [44]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. В случае, когда  $\Omega$  является ограниченной областью, каждая из рассмотренных выше краевых задач для уравнения (3.14) относится к классу так называемых *внутренних* эллиптических краевых задач. На практике часто возникает необходимость исследовать какое-либо эллиптическое уравнение в неограниченной области  $\Omega$ . Для выделения единственного решения эллиптического уравнения в такой области необходимо задавать кроме одного из введенных выше граничных условий дополнительное условие на бесконечности, т. е. при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Для уравнения Пуассона, рассматриваемого во внешности компакта в  $\mathbb{R}^3$ , указанное условие, обеспечивающее корректность рассматриваемой краевой задачи, имеет вид

$$u(\mathbf{x}) = o(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (3.24)$$

Это условие означает согласно определению величины  $o(1)$ , что потенциал  $u(\mathbf{x})$  равномерно стремится к нулю на бесконечности. В случае, когда  $\Omega = \mathbb{R}^3$ , как это имеет место при исследовании свойств гравитационного потенциала, (3.24) является единственным условием, обеспечивающим корректность задачи нахождения гравитационного потенциала в  $\mathbb{R}^3$  (см. об этом в гл. 7).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Выше мы ввели фактически два определения оператора Лапласа  $\Delta$ : одно в виде суммы вторых частных производных в (3.10), другое – с помощью второго соотношения в (3.18). Первое использует декартову систему координат и, следовательно, не является *инвариантным*,

ибо оно зависит от выбора системы координат. В противоположность ему второе определение носит *инвариантный*, т. е. не зависящий от выбора системы координат характер, поскольку оно определяет оператор  $\Delta$  через инвариантные дифференциальные операции векторного анализа:  $\text{div}$  и  $\text{grad}$  (см. подробнее об этом в прил. 2). Второе определение, конечно, более удобно, поскольку оно позволяет записывать выражения для  $\Delta u$  в любой криволинейной системе координат путем использования соответствующих выражений для  $\text{div}$  и  $\text{grad}$ . Ниже, наряду с выражением оператора Лапласа в декартовых координатах, мы будем также использовать его выражения в цилиндрических  $(\rho, \varphi, z)$  и сферических  $(r, \theta, \varphi)$  координатах. Указанные выражения, приведенные в прил. 2, имеют соответственно вид:

$$\Delta u = \Delta_{\rho, \varphi, z} u \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (3.25)$$

$$\Delta u = \Delta_{r, \theta, \varphi} u \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (3.26)$$

## § 1.4. Модели процессов переноса тепла и диффузии

**1.4.1. Модели переноса тепла.** Одним из важнейших жизненных процессов является процесс распространения тепла от одного участка рассматриваемой среды к другим. Указанный процесс вызывается несколькими механизмами, и в частности: молекулярной диффузией, т. е. передачей кинетической энергии движущихся частиц (молекул и атомов), конвекцией (или движением) среды, лучеиспусканием, химическими процессами и т. д. Ниже мы выведем математическую модель распространения тепла, учитывающую первый механизм переноса тепла, а далее усложним ее за счет учета второго механизма, т. е. конвективного переноса тепла.

Предположим, что среда, в которой происходит тепловой процесс, занимает некоторую область  $D$  пространства  $\mathbb{R}^3$ . Обозначим через  $\Omega$  произвольную ее ограниченную подобласть с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ . Для математического описания процесса переноса тепла принято вводить *вектор потока тепла*  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ . Физический смысл вектора  $\mathbf{q}$  заключается в том, что с его помощью можно определить количество  $Q_1$  тепла, вносимое за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  в произвольную подобласть  $\Omega$  области  $D$  со стороны оставшейся части  $\Omega_e = D \setminus \overline{\Omega}$ , по формуле

$$Q_1 = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.1)$$

Здесь  $\Gamma$  – граница между  $\Omega$  и  $\Omega_e$  (рис. 4.1),  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\Gamma$ ,  $dS$  – элемент площади поверхности  $\Gamma$ . Знак “–” выбран с учетом ориентации нормали  $\mathbf{n}$ .

Из школьного курса термодинамики хорошо известно, что мерой тепла является температура  $T$ . В связи с этим возникает принципиально важный вопрос о том, как связать поток тепла с температурой  $T$ . Основовоплагающую роль в термодинамике играет закон Фурье, названный так в честь известного французского математика и физика S.B. Fourier (1768–1830). Указанный закон постулирует, что вектор потока тепла  $\mathbf{q}$  связан с температурой  $T$  формулой

$$\mathbf{q} = -k \text{grad } T. \quad (4.2)$$

Здесь  $k$  – параметр состояния среды, называемый *коэффициентом теплопроводности*, а знак “–” в законе Фурье отражает тот известный опытный факт, что тепло всегда течет от горячей части среды к холодной. В словесной форме закон Фурье выражается так: *если температура тела неравномерна, то в нем возникают тепловые потоки, направленные из мест с более высокой температурой в места с более низкой температурой*. Размерности величин  $\mathbf{q}$ ,  $k$  и  $T$  в системе СИ указаны в приведенной ниже таблице 4.1.

Напомним, что среда, занимающая область  $D$ , называется *однородной*, если ее свойства не меняются при переходе от одной точки  $\mathbf{x} \in D$  к другой. Среда называется *изотропной* в точке  $\mathbf{x}$ , если ее свойства одинаковы по всем направлениям, выходящим из точки  $\mathbf{x}$ , и *анизотропной* в противном случае. Если среда изотропна, то  $k$  является скалярной величиной, зависящей в общем случае от точек  $\mathbf{x} \in D$ , времени  $t$  и температуры  $T$ . В случае анизотропной среды  $k$  является тензорной функцией, а вектор потока тепла представляет собой (скалярное) произведение тензора  $k$  на вектор  $-\text{grad } T$ . Ниже мы будем рассматривать только изотропные среды. Для таких сред формула (4.1) принимает с учетом (4.2) вид

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Gamma} k \text{grad } T \cdot \mathbf{n} dS.$$

Воспользуемся формулой Гаусса–Остроградского (см. §6.2 и [19, с. 192]):

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (4.3)$$

названной так в честь знаменитого немецкого математика J.C.F. Gauss (1777 – 1855) и русского математика М.В. Остроградского (1801 – 1862).

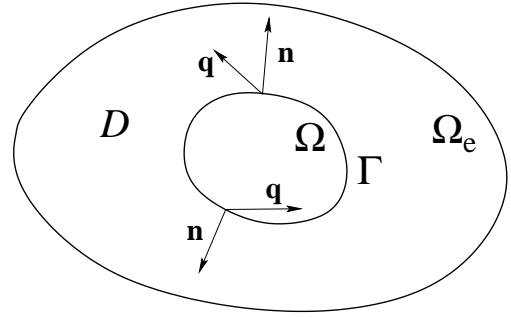


Рис. 4.1

Полагая в (4.3)  $\mathbf{v} = k \text{ grad } T$ , выражение для  $Q_1$  можно переписать в виде

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \text{div} (k \text{ grad } T) d\mathbf{x}. \quad (4.4)$$

Формула (4.4) описывает количество тепла, поступающее в область  $\Omega$  за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , вследствие потоков тепла, вызываемых неравномерным распределением температуры в  $D$ .

Предположим далее, что в области  $\Omega$  распределены источники тепла с объемной плотностью  $F$ . Тогда количество тепла  $Q_2$ , выделяемое ими в область  $\Omega$  за время  $\Delta t = t_2 - t_1$ , будет равно

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} F d\mathbf{x}.$$

Ясно, что получаемое областью  $\Omega$  тепло идет на нагрев среды, т. е. на увеличение ее температуры. Если в момент  $t_1$  температура в произвольной точке  $\mathbf{x}$  области  $\Omega$  равна  $T_1(\mathbf{x})$ , а в момент  $t_2$  равна  $T_2(\mathbf{x})$ , то количество тепла, необходимое для указанного увеличения температуры, равно в силу законов термодинамики  $Q$ , где

$$Q = \int_{\Omega} \rho c (T_2 - T_1) d\mathbf{x} \equiv \int_{\Omega} \rho c \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial t} dt d\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\mathbf{x}. \quad (4.5)$$

Здесь параметры  $\rho$  (плотность среды) и  $c$  (коэффициент удельной теплоемкости при постоянном давлении) являются в общем случае функциями от  $\mathbf{x} \in D$ .

В силу *фундаментального закона сохранения тепла*, примененного к области  $\Omega$ , должно выполняться соотношение:  $Q = Q_1 + Q_2$ , или

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \text{div}(k \text{ grad } T) d\mathbf{x} + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} F d\mathbf{x}. \quad (4.6)$$

Оно называется *уравнением баланса тепла*. В словесной форме соотношение (4.6) можно выразить так: изменение количества тепла в области  $\Omega$  за время  $\Delta t = t_2 - t_1$  (см. левую часть в (4.6)) обусловлено притоком тепла в область  $\Omega$  через граничную поверхность  $\Gamma$  за счет молекулярной диффузии и количеством тепла, выделившимся в  $\Omega$  за время  $\Delta t$  в результате действия объемных источников тепла с плотностью  $F$ .

Переписав соотношение (4.6) в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \left[ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div} (k \text{ grad } T) - F \right] d\mathbf{x} = 0,$$

предположим, что подынтегральная функция здесь является непрерывной в области  $D$ . Поскольку в этом соотношении  $\Omega$  – произвольная область с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , то тем самым мы находимся в условиях леммы 1.1. Согласно этой лемме указанная подынтегральная функция равна нулю всюду в области  $D$ , т. е. выполняется соотношение

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) + F. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) и является искомой математической моделью, описывающей процесс распространения тепла в области  $D$ . Как уже указывалось, коэффициенты  $\rho$  и  $c$  в (4.7) являются в общем случае функциями от  $\mathbf{x}$ , а коэффициент  $k$  к тому же может зависеть и от  $t$ , а также от температуры  $T$ . Поэтому (4.7) является в общем случае нелинейным уравнением.

В декартовой системе координат уравнение (4.7) имеет вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + F. \quad (4.8)$$

В частном случае, когда среда однородна, так что величины  $\rho$ ,  $c$  и  $k$  есть константы, уравнение (4.7) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + f, \quad (4.9)$$

где  $a = \sqrt{k/\rho c}$ ,  $f = F/\rho c$ . Уравнение (4.9) называется *неоднородным уравнением теплопроводности*, а  $a^2$  называется *коэффициентом температуропроводности*. Если объемные источники тепла отсутствуют, так что  $f = 0$ , то уравнение (4.9) становится однородным. Указанное уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T \quad (4.10)$$

является важнейшим и в то же время простейшим представителем уравнений *параболического типа* согласно классификации, приведенной в гл. 2.

Для выделения единственного решения уравнения (4.7) необходимо задать дополнительные условия. В случае, когда процесс распространения тепла рассматривается во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$ , так что  $\Omega = \mathbb{R}^3$ , роль таких условий играет начальное условие

$$T|_{t=0} = T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.11)$$

где  $T_0(\mathbf{x})$  – заданная функция, а задача (4.7), (4.11) при  $\Omega = \mathbb{R}^3$  называется *задачей Коши* в честь великого французского математика О.Л. Cauchy (1789 – 1857), автора 789 опубликованных работ и ряда монографий. Если процесс распространения тепла рассматривается в некоторой области



$\Omega$  пространства  $\mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma = \partial\Omega$ , то на границе  $\Gamma$  следует задавать краевые условия, имеющие в общем случае вид (сравните с (3.23)):

$$\alpha T + \beta \frac{\partial T}{\partial n} = g \quad \text{на } \Gamma. \quad (4.12)$$

Здесь  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $g$  – заданные на  $\Gamma$  функции. Задача (4.7), (4.11), (4.12) называется *начально-краевой задачей* для уравнения (4.7): *первой краевой задачей, или задачей Дирихле* при  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 1$ , *второй краевой задачей, или задачей Неймана* при  $\beta = k|_{\Gamma}$ ,  $\alpha = 0$  и *третьей краевой задачей* при  $\beta = k|_{\Gamma}$ ,  $\alpha \neq 0$ .

В физическом плане условие Дирихле ( $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ) в (4.12) отвечает заданию температуры на границе  $\Gamma$ , условие Неймана ( $\alpha = 0$ ,  $\beta = k|_{\Gamma}$ ) в (4.12) отвечает заданию теплового потока на  $\Gamma$ , наконец, условие 3-го рода означает, что на границе происходит теплообмен с внешней средой, температура которой известна. Подробнее о физическом смысле различных граничных условий для температуры  $T$  можно прочитать в [21, с. 27–28], [22, с. 15–16], [49, с. 28], [56, с. 196–202].

В частном случае, когда температура  $T$  зависит лишь от координат  $x, y$  и времени  $t$ , что имеет место, например при изучении распространения тепла в тонкой однородной пластине или мембране, (4.9) принимает вид *двумерного* уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + f. \quad (4.13)$$

Наконец, для одномерного однородного тела, например для однородного стержня, когда  $T$  зависит только от  $x$  и  $t$ , (4.9) переходит в *одномерное* уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f. \quad (4.14)$$

Следует, однако, отметить, что уравнения (4.13) и (4.14) не учитывают теплообмен между поверхностью пластинки или стержня с окружающей средой (точнее, мы пренебрегаем им при выводе этих уравнений).

В ряде случаев зависимостью температуры  $T$  от времени  $t$  можно пренебречь. В этих случаях (4.7) либо (4.8) переходит в стационарное уравнение

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -F. \quad (4.15)$$

В случае, когда  $k = \operatorname{const}$ , (4.15) переходит в уравнение Пуассона

$$\Delta T = -f, \quad (4.16)$$

где  $f = F/k$ . В обоих случаях начальное условие (4.11), естественно, снимается, так что изучение процесса переноса тепла сводится к решению краевой задачи для уравнения с переменными коэффициентами (4.15) либо уравнения Пуассона (4.16). В простейшем случае, отвечающем распределению температуры в одномерном стержне длины  $l$ , уравнение (4.16) вместе с однородным граничным условием 1-го рода в (4.12) принимает вид краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -f, \quad T(0) = T(l) = 0. \quad (4.17)$$

Граничные условия в (4.17) означают, что температура  $T$  на концах стержня, в котором изучается тепловой процесс, поддерживается равной нулю.

Введенные выше модели переноса тепла отвечают средам, в которых основным механизмом переноса тепла является диффузия. Для жидких и газообразных сред, наряду с диффузией, важную роль играет механизм переноса тепла движущимися частицами жидкости и газа. В физике указанный механизм называется (тепловой) *конвекцией*. Для вывода модели переноса тепла с учетом молекулярной диффузии и конвекции нужно дополнительно определить количество тепла, вносимое в область  $\Omega$  со стороны оставшейся части  $\Omega_e = D \setminus \overline{\Omega}$  движущимися частицами. Обозначив через  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  скорость жидкости в точке  $\mathbf{x}$  в момент  $t$ , заметим что в соответствии с физическим смыслом поток тепла, переносимого движущимися частицами через элемент  $dS$  границы  $\Gamma$  области  $\Omega$  в единицу времени, равен  $-T\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}dS$ . В таком случае количество тепла  $Q_3$ , поступающее за время  $\Delta t = t_2 - t_1$  в область  $\Omega$  за счет конвекции, определяется формулой

$$Q_3 = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Gamma} T\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}dS = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \operatorname{div}(T\mathbf{u})d\mathbf{x}. \quad (4.18)$$

С учетом этого закон сохранения тепла принимает вид:  $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$  или

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} [\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + F - \operatorname{div}(T\mathbf{u})] d\mathbf{x}.$$

Применяя к этому соотношению лемму 1.1, приходим к уравнению

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) - \operatorname{div}(T\mathbf{u}) + F. \quad (4.19)$$

Уравнение (4.19) является усложненной математической моделью, описывающей процесс распространения тепла в движущейся жидкости, занимающей область  $\Omega$ , за счет молекулярной диффузии, конвекции и действия

объемных источников тепла. В частном случае, когда жидкость несжимаема, так что скорость  $\mathbf{u}$  удовлетворяет условию несжимаемости  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , имеем в силу известной формулы (см. прил. 2), что

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (4.20)$$

что  $\operatorname{div}(T \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} T$ . С учетом этого (4.19) принимает вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) - \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} T + F. \quad (4.21)$$

Если же рассматриваемый процесс является стационарным, так что  $\partial T / \partial t = 0$ , то (4.19) принимает вид

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) - \operatorname{div}(T \mathbf{u}) = -F.$$

**1.4.2. Модели конвекции-диффузии вещества.** Выведем здесь математическую модель, описывающую процесс переноса в жидкости какого-либо вещества, например, загрязняющей примеси. Наличие этого вещества в жидкости описывается его концентрацией  $C$ , имеющей размерность  $[C] = \text{кг/м}^3$  в системе СИ. Как и для модели переноса тепла в жидкости, будем рассматривать следующие механизмы переноса вещества: *диффузию, конвекцию и внутренние источники*.

Обозначим через  $\mathbf{J}$  вектор потока вещества за счет диффузии. Известно, что он связан с концентрацией законом Фика, названного так в честь немецкого физика А. Фика (1829–1901), открывшего его в 1855 г. Указанный закон имеет вид  $\mathbf{J} = -\eta \operatorname{grad} C$ . Здесь параметр  $\eta$ , имеющий смысл коэффициента диффузии, зависит в общем случае как от точек  $\mathbf{x} \in D$  и времени  $t$ , так и от концентрации  $C$ . Рассуждая, как в п. 1.4.1, можно показать, что количество  $R_1$  вещества, поступающего за промежуток  $(t_1, t_2)$  в произвольную область  $\Omega$  с границей  $\Gamma$  со стороны оставшейся подобласти  $\Omega_e$  области  $D$  за счет диффузии, определяется формулой

$$R_1 = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{J} d\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) d\mathbf{x}.$$

Если внутри  $\Omega$  имеются источники вещества с объемной плотностью  $F_C$ , вырабатывающие это вещество, то полное количество вещества  $R_2$ , вносимое ими в  $\Omega$  за промежуток времени  $(t_1, t_2)$ , а также количество вещества  $R_3$ , переносимое в  $\Omega$  за счет конвекции, определяются формулами

$$R_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} F_C d\mathbf{x} dt, \quad R_3 = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Gamma} C \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \operatorname{div}(C \mathbf{u}) d\mathbf{x}.$$

В результате поступления вещества в  $\Omega$  концентрация его меняется, а изменение количества вещества в  $\Omega$  за интервал  $(t_1, t_2)$  выражается формулой

$$R = \int_{\Omega} [C(\mathbf{x}, t_2) - C(\mathbf{x}, t_1)] d\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\mathbf{x}. \quad (4.22)$$

В силу закона сохранения массы должно выполняться уравнение баланса вещества:  $R = R_1 + R_2 + R_3$ . В подробной записи оно имеет вид

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\mathbf{x} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [\operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(C\mathbf{u}) + F_C] d\mathbf{x} dt. \quad (4.23)$$

Применяя лемму 1.1 к (4.23), приходим к уравнению

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(C\mathbf{u}) + F_C. \quad (4.24)$$

Оно называется *нестационарным уравнением конвекции-диффузии* вещества. В частном случае, когда  $\eta = \operatorname{const}$ , а вектор  $\mathbf{u}$  удовлетворяет условию  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , уравнение (4.24) можно переписать в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \eta \Delta C - \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} C + F_C. \quad (4.25)$$

Если же рассматриваемый процесс переноса (конвекции-диффузии) вещества является стационарным, так что  $\partial C / \partial t = 0$ , то (4.25) принимает вид

$$\operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(C\mathbf{u}) = -F_C. \quad (4.26)$$

Распространение вещества в некоторых средах сопровождается химической реакцией взаимодействия диффундирующего вещества с веществом основной среды. Это приводит к поглощению вещества, причем скорость поглощения в каждой точке  $\mathbf{x} \in \Omega$  можно считать пропорциональной концентрации  $C(\mathbf{x}, t)$  с некоторым коэффициентом  $\gamma = \gamma(\mathbf{x})$ . Вследствие явления поглощения, количество диффундирующего вещества в рассматриваемой области  $\Omega$  уменьшается за промежуток  $(t_1, t_2)$  на величину

$$R_4 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \gamma(\mathbf{x}) C(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (4.27)$$

Чтобы учесть явление поглощения вещества, достаточно при выводе уравнения баланса вещества выражение (4.27) вычесть из правой части (4.24). С учетом этого основные модели переноса вещества принимают вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(C\mathbf{u}) - \gamma C + F_C, \quad (4.28)$$

$$\operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(C\mathbf{u}) - \gamma C = -F_C. \quad (4.29)$$

В частном случае, когда  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , (4.28) можно переписать в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} C + \gamma C = \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) + F_C. \quad (4.30)$$

На каждое из уравнений (4.28)–(4.30) часто ссылаются как на уравнение *конвекции-диффузии-реакции*.

В еще одном частном случае, когда  $\eta = 0$ , (4.30) принимает вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } C + \gamma C = F_C. \quad (4.31)$$

Уравнение (4.31), называемое уравнением *конвекции-реакции*, описывает перенос вещества за счет конвекции и его поглощение (или распад) за счет химической реакции взаимодействия с веществом основной среды. При  $\gamma = 0$  на уравнение (4.31) ссылаются как на уравнение *конвекции* или *адвекции*.

Для выделения единственного решения уравнения (4.24), рассматриваемого в некоторой области  $\Omega$ , задаются начальное и граничное условия. Начальное условие имеет стандартный вид

$$C|_{t=0} = C_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.32)$$

где  $C_0(\mathbf{x})$  – заданная в  $\Omega$  функция. Чтобы задать граничные условия, границу  $\Gamma$  разбивают в общем случае на две части:  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$ . На  $\Gamma_D$  задается условие Дирихле, тогда как на  $\Gamma_N$  задают диффузионный поток  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = -\eta \partial C / \partial n$  вещества:

$$C = g_1 \text{ на } \Gamma_D, \quad -\eta \frac{\partial C}{\partial n} = g_2 \text{ на } \Gamma_N. \quad (4.33)$$

Здесь  $g_1$  и  $g_2$  – заданные функции соответственно на участках  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$ . Начальное условие (4.32), описывающее распределение концентрации вещества в  $\Omega$  в момент  $t = 0$ , моделирует, например, мгновенный выброс загрязняющего вещества, что часто происходит при взрывах или авариях. Граничные условия (4.33) моделируют поведение вещества на разных участках границы рассматриваемой области. В случае, когда участок  $\Gamma_N$  является непроницаемым для вещества, в (4.33) следует положить  $g_2 = 0$ .

Что касается уравнения первого порядка (4.31), то соответствующие постановки начально-краевых задач для (4.31) либо краевых задач для его стационарного аналога будут сформулированы и исследованы в § 2.2.

Для удобства читателей ниже приводится таблица размерностей введенных в этом параграфе физических величин и параметров в системе СИ.

Таблица 4.1

Величины	$Q_i$	$\mathbf{q}$	$T$	$k$	$\rho$	$c$	$\mathbf{u}$	$C$	$\eta, a^2$	$\mathbf{J}$	$\gamma$	$\mu$	$F, F_\mu$	$F_C$
Размерности в СИ	$Q$	$\frac{Q}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$	$K$	$\frac{Q}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot K}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\frac{Q}{\text{кг} \cdot K}$	$\frac{\text{м}}{\text{с}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$	$\frac{1}{\text{с}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$	$\frac{K}{\text{с}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$

Здесь используются обычные сокращения. В частности,  $s$  обозначает секунду,  $m$  – метр,  $Q$  – джоуль,  $K$  – Кельвин (единица температуры).

## § 1.5. Математические модели движения жидкости и газов

**1.5.1. Феноменологический подход к построению математических моделей движения жидкости.** Как известно, жидкость или газ представляют собой совокупность большого числа частиц (молекул, атомов, ионов), находящихся в непрерывном хаотическом движении. Поэтому для того чтобы полностью охарактеризовать состояние жидкости в данный момент времени, необходимо задать положение и скорость каждой частицы жидкости. Из-за огромного количества частиц это практически невозможно осуществить. С учетом этого для описания движения жидкости применяют специальные приближенные методы. Из них наиболее распространены два: феноменологический и молекулярно-кинетический. Согласно первому подходу, который обычно используется в теоретической гидродинамике – науке о движении жидкостей и газов, считается, что частицы, составляющие жидкость, непрерывным образом заполняют ее объем. Это означает, что жидкость моделируется *сплошной средой*, при этом ее основными характеристиками в произвольной точке  $\mathbf{x}$  в момент  $t$  являются скорость  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , плотность  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  и давление  $p = p(\mathbf{x}, t)$ , имеющие в системе СИ соответственно размерности: м/с, кг/м<sup>3</sup> и Н/м<sup>2</sup>, где Н=кг·м/с<sup>2</sup> – сокращенное обозначение ньютона как единицы силы. Кроме указанных основных величин используются некоторые дополнительные характеристики: температура  $T$ , энтропия  $s$ , соленость  $S$ , концентрация  $C$  загрязняющего вещества в жидкости и т. д. Размерности этих величин в системе СИ можно найти в приведенной ниже таблице 5.1.

В результате задача построения той или иной математической гидродинамической модели сводится к выводу соответствующей системы дифференциальных уравнений относительно искомых функций  $\mathbf{u}, p, \rho, \dots$ , основываясь на тех фундаментальных законах, которые описывают процесс движения рассматриваемой жидкости. В качестве указанных законов используются *законы сохранения массы, импульса, энергии* и т. д. В соответствии с вышесказанным мы начнем изложение с вывода общего гидродинамического закона сохранения. Он имеет две формы: *интегральную*, относящуюся к произвольному объему, занимаемому жидкостью, и *дифференциальную*, относящуюся к произвольной точке  $\mathbf{x}$  рассматриваемой области и имеющую вид соответствующего дифференциального уравнения в частных производных относительно искомых функций.

**1.5.2. Общий закон сохранения.** Предположим, что жидкость занимает некоторую область  $D \subset \mathbb{R}^3$ . Обозначим через  $\Omega$  произвольную ее подобласть с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , неизменной во времени. Обычным образом, как это принято в механике сплошных сред [40], определяются бесконечно малые элементы объема и поверхности, а также понятие движущейся частицы. Пусть  $\psi$  – произвольная скалярная гидродинамическая ве-

личина, отнесенная к единице объема. Тогда интеграл  $\Psi(t) = \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$  будет иметь смысл количества величины  $\psi$  в области  $\Omega$ . В свою очередь, на  $\psi(\mathbf{x}, t)$  можно смотреть как на объемную плотность интегральной величины  $\Psi(t)$  в точке  $\mathbf{x}$  в момент времени  $t$ . Обозначим через  $q$  плотность объемных источников величины  $\Psi$ . В силу общего закона сохранения приращение величины  $\Psi$  в области  $\Omega$  за время от  $t$  до  $t + \Delta t$  происходит за счет действия объемных источников, изменяющих  $\Psi$  на величину

$$\int_t^{t+\Delta t} dt \int_{\Omega} q d\mathbf{x},$$

и за счет потока величины  $\Psi$  через поверхность  $\Gamma$  со стороны оставшейся части жидкости. Обозначим через  $\mathbf{n}$  единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\Gamma$ . По определению поток величины  $\Psi$  через элемент поверхности  $dS$  в единицу времени в направлении нормали  $\mathbf{n}$  равен  $\psi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$ , где  $\mathbf{u}$  – скорость жидкости. Следовательно, поток величины  $\Psi$  в область  $\Omega$  со стороны оставшейся части жидкости через  $\Gamma$  за время от  $t$  до  $t + \Delta t$  равен

$$- \int_t^{t+\Delta t} dt \int_{\Gamma} \psi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_t^{t+\Delta t} dt \int_{\Omega} \operatorname{div}(\psi \mathbf{u}) d\mathbf{x}.$$

Здесь при переходе от двойного к тройному интегралу мы воспользовались формулой (4.3), а знак “—” выбран с учетом ориентации нормали  $\mathbf{n}$ .

Согласно *общему закону сохранения* приращение величины  $\Psi$  за время  $\Delta t$  определяется соотношением (*уравнением баланса величины  $\Psi$  в  $\Omega$* ):

$$\Psi(t + \Delta t) - \Psi(t) = \int_t^{t+\Delta t} dt \int_{\Omega} q d\mathbf{x} - \int_t^{t+\Delta t} dt \int_{\Omega} \operatorname{div}(\psi \mathbf{u}) dS. \quad (5.1)$$

Разделив обе части на  $\Delta t$  и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем уравнение

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Psi(t + \Delta t) - \Psi(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} q d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\psi \mathbf{u}) d\mathbf{x}, \quad (5.2)$$

которое можно переписать в виде

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi \mathbf{u}) - q \right] d\mathbf{x} = 0. \quad (5.3)$$

Считая подынтегральную функцию в (5.3) непрерывной и применяя лемму 1.1, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi \mathbf{u}) = q. \quad (5.4)$$

Уравнение (5.4) называется *дифференциальным законом сохранения* величины  $\Psi$ , тогда как уравнение (5.1) имеет смысл *интегрального закона сохранения* величины  $\Psi$ . Применяя (5.4) к конкретным гидродинамическим величинам, теперь нетрудно вывести законы сохранения *массы, импульса* и т. д., на основе которых выводятся искомые математические модели движения жидкости.

**1.5.3. Модели движения идеальной жидкости.** Начнем с вывода закона сохранения массы. С этой целью положим в (5.4)  $\psi = \rho$ ,  $q = 0$  (последнее объясняется отсутствием внешних источников массы). В результате получим уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (5.5)$$

Оно называется *дифференциальным законом сохранения массы*, или просто уравнением *неразрывности*. В силу закона сохранения массы движение жидкости происходит так, что ее скорость  $\mathbf{u}$  и плотность  $\rho$  в каждой точке  $\mathbf{x} \in D$  в любой момент  $t$  удовлетворяет уравнению (5.5). Важно отметить, что (5.5) имеет инвариантный характер (в том смысле, что в его записи не участвует конкретная система координат). Однако для упрощения дальнейших выкладок нам будет удобно считать, что в области  $D$ , где рассматривается движение жидкости, введена декартова система координат  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$  с правым базисом  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , причем ось  $z$  будем считать направленной вверх. Обозначив декартовы компоненты вектора  $\mathbf{u}$  через  $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$  и учитывая формулу (3.16) для дивергенции в декартовой системе координат, уравнение (5.5) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0. \quad (5.6)$$

Прежде чем приступить к выводу уравнения сохранения импульса, рассмотрим силы, действующие на жидкость. В общем случае эти силы подразделяются на *внешние* и *внутренние*. Внешние силы, как правило, являются *массовыми* (либо *объемными*) и описываются массовой (либо объемной) плотностью. Таким образом, если  $\mathbf{f}$  – *массовая плотность внешней силы* (т. е. сила, действующая на единицу массы и имеющая размерность ускорения м/сек<sup>2</sup>), то  $\rho \mathbf{f}$  представляет собой ее *объемную плотность* (т. е. силу, действующую на единицу объема),  $\rho \mathbf{f} d\mathbf{x}$  – силу, действующую на элементарный объем  $d\mathbf{x}$  и, наконец,  $\int_{\Omega} \rho \mathbf{f} d\mathbf{x}$  – силу, действующую на область  $\Omega$ . Важным примером внешних сил является сила тяжести, массовая плотность которой определяется в выбранном декартовом базисе формулой

$$\mathbf{g} = (0, 0, -g). \quad (5.7)$$

Здесь  $g$  – ускорение свободного падения. Ясно, что сила тяжести, действующая на элементарный объем  $d\mathbf{x}$ , равна  $\rho g d\mathbf{x}$ . Другим примером внешней



силы, играющей важную роль при изучении гидродинамических процессов в океане, является сила Кориолиса. Речь о ней пойдет в п. 1.5.6.

Обратившись к анализу внутренних сил, заметим, что они существенно зависят от характера жидкости. Мы будем рассматривать в этом пункте *идеальную жидкость*, т. е. такую сплошную среду, в которой внутренние силы сводятся к давлению, причем независимо от того, находится ли среда в состоянии равновесия или движения. Это означает, что если выделить в жидкости некоторую область  $\Omega$ , ограниченную поверхностью  $\Gamma$ , то действие на нее остальной части жидкости описывается силой, направленной в каждой точке  $\mathbf{x} \in \Gamma$  по внутренней нормали. При этом сама величина  $p$  давления, приходящегося на единицу площади, зависит не от ориентации той бесконечно малой площадки, к которой давление приложено, а лишь от ее координат. Таким образом, на элемент поверхности  $dS$  в идеальной жидкости действует сила

$$-p\mathbf{n}dS = -(\mathbf{i}p \cos \alpha + \mathbf{j}p \cos \beta + \mathbf{k}p \cos \gamma)dS, \quad (5.8)$$

где  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  – направляющие косинусы внешней нормали  $\mathbf{n}$ . Знак “–” в (5.8) выбран в связи с тем, что положительное давление действует в направлении внутренней нормали. На всю область  $\Omega$  будет действовать сила, равная поверхностному интегралу

$$-\int_{\Gamma} p\mathbf{n}dS = -\left(\mathbf{i} \int_{\Gamma} p \cos \alpha dS + \mathbf{j} \int_{\Gamma} p \cos \beta dS + \mathbf{k} \int_{\Gamma} p \cos \gamma dS\right),$$

который с помощью формулы (4.3) можно свести к тройному интегралу

$$-\int_{\Omega} \nabla p d\mathbf{x}. \quad (5.9)$$

Формула (5.9) означает, что объемная плотность внутренних сил в идеальной жидкости равна  $-\nabla p$ . Из (5.9) и предыдущих результатов следует, что объемная плотность сил, действующих в идеальной жидкости, имеет вид

$$-\nabla p + \rho \mathbf{f}, \quad (5.10)$$

где  $\mathbf{f}$  – массовая плотность всех внешних сил (например, силы тяжести, силы Кориолиса и т. д.). В проекциях на оси координат (5.10) имеет вид

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.11)$$

Теперь мы в состоянии вывести уравнение, описывающее движение жидкости под действием сил с объемной плотностью (5.10). С этой целью подставим в (5.4) вместо  $\psi$  произведение  $\rho u_i$ , а вместо  $q$  компоненту (5.11) силы (5.10). В результате получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \operatorname{div}(\rho u_i \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i,$$

которое можно переписать в виде

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) \right] u_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i. \quad (5.12)$$

В силу уравнения неразрывности (5.6) выражение в квадратных скобках в (5.12) обращается в нуль. В результате приходим к уравнениям

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.13)$$

для компонент  $u_i$ , эквивалентных следующему векторному уравнению:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f}. \quad (5.14)$$

Здесь через  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  обозначен вектор, имеющий размерность ускорения, называемый в гидродинамике *конвективным ускорением*. Компоненты его в декартовом базисе определяются формулами

$$[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_i = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Уравнение (5.14) называется основным уравнением гидродинамики идеальной жидкости. Его также называют *уравнением Эйлера* в честь выдающегося ученого Леонардо Эйлера (1707–1783). Поскольку его вывод основан на интегральном законе сохранения импульса, то уравнение (5.14) называется также *дифференциальным законом сохранения импульса*.

Уравнения (5.5), (5.14) представляют собой систему четырех скалярных дифференциальных уравнений относительно пяти скалярных искомых функций: компонент  $u_1, u_2, u_3$  скорости  $\mathbf{u}$ , давления  $p$  и плотности  $\rho$ , т. е. они образуют *незамкнутую* (неполную) математическую модель. Для ее замыкания к (5.5), (5.14) следует присоединить еще одно скалярное уравнение. Для рассматриваемой нами идеальной жидкости в качестве такого уравнения можно использовать термодинамическое уравнение состояния, имеющее в простейшем случае вид

$$p = P(\rho), \quad (5.15)$$

где  $P(\rho)$  – заданная функция. В результате мы получим замкнутую систему пяти скалярных уравнений (5.5), (5.14) и (5.15) для пяти неизвестных  $u_1, u_2, u_3, p$  и  $\rho$ . Указанная система, называемая *математической моделью идеальной баротропной жидкости*, характеризует так называемую

*однопараметрическую* среду, т. е. среду, в которой все термодинамические величины зависят от одного параметра, в данном случае от плотности  $\rho$ .

Более реалистичны *двухпараметрические* среды, для которых все термодинамические величины зависят от двух параметров, например, плотности  $\rho$  и энтропии  $s$ . (О физическом смысле энтропии можно прочитать, например, в [30]). Для таких сред (5.15) следует заменить уравнением

$$p = P(\rho, s), \quad (5.16)$$

а для замыкания системы (5.5), (5.14), (5.16) следует добавить еще одно уравнение для энтропии  $s$ . Указанное уравнение легко получается из общего закона сохранения (5.4), в котором следует положить  $\psi = s$ ,  $q = 0$  (последнее условие объясняется отсутствием источников энтропии в идеальной жидкости). В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(s\mathbf{u}) = 0, \quad (5.17)$$

называемому уравнением *адиабатичности* и описывающему фактически сохранение энергии в идеальной жидкости. Уравнения (5.5), (5.14), (5.16), (5.17) образуют модель идеальной двухпараметрической жидкости.

Наряду с двухпараметрическими средами существуют среды, в которых давление зависит от трех и более параметров. Так, морскую воду, представляющую собой химический раствор, содержащий растворенные частицы соли и других веществ, можно считать трехпараметрической средой, в которой давление  $p$  будет зависеть не только от  $\rho$  и энтропии  $s$ , но и от солености  $S$ . Поэтому для более точного описания гидродинамических процессов в океане уравнение (5.16) следует заменить на уравнение

$$p = P(\rho, s, S), \quad (5.18)$$

а к системе (5.5), (5.14), (5.17), (5.18) следует добавить еще одно уравнение для  $S$ , получающееся из (5.4) при  $\psi = S$ ,  $q = F_S$ , и имеющее вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(S\mathbf{u}) = F_S. \quad (5.19)$$

Здесь  $F_S$  – объемная плотность источников солей.

Приведенные выше модели описывают сплошные среды, характеризующие газы и сжимаемые жидкости. Многие среды, как, например, обычная вода, практически несжимаемы. Поэтому для замыкания математических моделей, описывающих такие среды, вместо уравнений состояния вида (5.15), (5.16), (5.18) добавляют условие несжимаемости жидкости

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (5.20)$$

В силу (5.20) и (4.20) уравнение (5.5) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } \rho = 0. \quad (5.21)$$

Математическая природа уравнения 1-го порядка (5.21) такова (см. § 2.2), что его решения принимают постоянные значения на характеристиках уравнения (5.21), описывающих по своему физическому смыслу траектории частиц движущейся жидкости. Отсюда следует, что плотность  $\rho$  несжимаемой жидкости сохраняется вдоль любой траектории (т. е. вдоль характеристики уравнения (5.21)), хотя и может изменяться при переходе от одной траектории к другой. С учетом последнего обстоятельства указанную жидкость называют *неоднородной*, а соответствующую систему уравнений (5.14), (5.20) и (5.21) называют моделью идеальной несжимаемой неоднородной жидкости. В важном частном случае, когда  $\rho = \text{const}$ , жидкость называется *однородной*. Поскольку уравнение (5.21) тождественно выполняется при  $\rho = \text{const}$ , то модель идеальной несжимаемой однородной жидкости состоит из четырех скалярных уравнений (5.14), (5.20) относительно четырех скалярных функций  $u_1, u_2, u_3$  и  $p$ .

Итак, выше мы вывели пять математических моделей, описывающих движение идеальной жидкости. Перечислим их: 1) модель  $M_1$  идеальной баротропной жидкости, состоящая из пяти скалярных уравнений (5.5), (5.14), (5.15); 2) модель  $M_2$  идеальной двухпараметрической жидкости, состоящая из шести уравнений (5.5), (5.14), (5.16) и (5.17); 3) модель  $M_3$  идеальной трехпараметрической жидкости, состоящая из семи уравнений (5.5), (5.14), (5.17), (5.18) и (5.19); 4) модель  $M_4$  идеальной несжимаемой неоднородной жидкости, состоящая из пяти уравнений (5.14), (5.20), (5.21) и 5) модель  $M_5$  идеальной несжимаемой однородной жидкости, состоящая из четырех уравнений (5.14), (5.20) при  $\rho = \text{const}$ .

В заключение отметим, что все пять построенных моделей содержат дифференциальные уравнения лишь первого порядка. Это не случайно, а связано с тем фактом, что при их выводе мы пренебрегали действием эффектов вязкости, теплопроводности и химических реакций, которые описываются выражениями, содержащими производные второго и более высокого порядка от искомых функций. Таким образом, все построенные в п. 1.5.3 модели относятся к идеальной жидкости, в которой внутренние силы состоят из сил давления. В этом смысле все указанные модели описывают *идеальный* гидродинамический процесс по терминологии § 1.1.

**1.5.4. Модели движения вязкой жидкости. Шестая проблема тысячелетия.** Модели идеальной жидкости являются приближенными, поскольку в реальных жидкостях всегда присутствует трение, вызываемое наличием вязкости в жидкости. Наличие вязкости в жидкости приводит к возникновению дополнительной внутренней силы (препятствующей движе-

нию жидкости). В случае несжимаемой жидкости ее объемная плотность часто моделируется выражением (см., например, [40]):

$$\mu \Delta \mathbf{u}. \quad (5.22)$$

Здесь  $\Delta \mathbf{u}$  – векторный лапласиан от скорости  $\mathbf{u}$ , определяемый, в частности, в декартовом базисе формулой  $\Delta \mathbf{u} = \Delta u \mathbf{i} + \Delta v \mathbf{j} + \Delta w \mathbf{k}$ ,  $\mu$  – постоянный коэффициент динамической вязкости, имеющий размерность  $[\mu] = \text{кг/м}\cdot\text{с}$ . В общем случае  $\mu$  может зависеть как от точек  $\mathbf{x} \in D$ , так и от некоторых характеристик среды, например, температуры, причем выражение для силы вязкого трения имеет более сложный вид, чем в (5.22) (см., например, [40]). Однако рассмотрение более сложных моделей выходит за рамки данной книги. Добавив выражение (5.22) в правую часть основного уравнения движения идеальной жидкости (5.14), приходим к уравнению

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \quad (5.23)$$

представляющему собой основное уравнение динамики вязкой жидкости. Оно называется векторным *уравнением Навье-Стокса* в честь французского инженера А. Navier (1785–1836) и английского физика G.G. Stokes (1819–1903), много сделавших для становления и развития гидродинамики вязкой жидкости.

Заменив в моделях  $M_4$  и  $M_5$  идеальных жидкостей уравнение движения идеальной жидкости (5.14) уравнением (5.23), мы получим две математические модели, описывающие движение вязкой несжимаемой жидкости: модель  $M_6$  вязкой неоднородной жидкости и модель  $M_7$  вязкой несжимаемой однородной жидкости. Они описываются соответственно уравнениями:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0,$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \rho = \text{const}.$$

Последняя модель, называемая *моделью Навье-Стокса*, является одной из важнейших моделей в гидродинамике вязкой несжимаемой жидкости.

Наряду с приведенными моделями движения вязкой жидкости существует еще большое количество других моделей, в которых кроме сил вязкого трения учитываются и другие эффекты, описываемые дифференциальными операторами второго порядка. Среди них различают модели теплотеноса, учитывающие действие в жидкости как сил трения, так и тепловых эффектов, модели массотеноса, учитывающие влияние на движение жидкости различных загрязняющих веществ, модели вязкой токопроводящей жидкости, учитывающие эффекты действия электромагнитных сил на проводящую жидкость, и т. д.

Ограничимся здесь приведением трех математических моделей. Первая модель описывает движение вязкой однородной несжимаемой теплопроводной жидкости. Предварительно отметим, что наличие градиента температуры в жидкости приводит к возникновению в ней дополнительной объемной силы. Чтобы вывести выражение для ее плотности, рассмотрим область  $D$ , в которой находится жидкость с постоянными плотностью  $\rho_0$  и температурой  $T_0$ . Предположим, что после нагревания либо охлаждения некоторой подобласти  $\Omega$  области  $D$  плотность и температура жидкости в  $\Omega$  становятся равными  $\rho$  и  $T$ . Тогда на жидкость в области  $\Omega$  со стороны оставшейся жидкости будет действовать сила, имеющая смысл силы плавучести с объемной плотностью, равной  $(\rho - \rho_0)\mathbf{g}$ . Если разность  $\rho - \rho_0$  мала по сравнению с  $\rho_0$ , то термодинамическое уравнение состояния жидкости может быть приближенно записано в виде  $\rho = \rho_0 - \rho_0\alpha_T(T - T_0)$  [15, с.264]. Здесь параметр  $\alpha_T > 0$ , называемый *объемным коэффициентом теплового расширения*, имеет размерность  $K^{-1}$ , где  $K$  – сокращенное обозначение Кельвина как единицы температуры. Он так назван в честь знаменитого английского физика W. Thomson (1824–1907), получившего в 1892г. за выдающиеся научные заслуги титул барона Кельвина (Kelvin). С учетом указанного приближения объемную плотность  $\mathbf{f}_T$  силы плавучести можно записать в виде

$$\mathbf{f}_T = -\rho_0\alpha_T(T - T_0)\mathbf{g}. \quad (5.24)$$

Выражение (5.24) следует добавить в уравнение (5.23), в котором следует положить  $\rho = \rho_0$ . Поскольку в (5.24) входит неизвестная в общем случае температура  $T$ , то для построения замкнутой модели к построенной системе уравнений необходимо присоединить соответствующее уравнение для  $T$ . В качестве последнего можно взять уравнение (5.21) при  $\rho = \rho_0$ ,  $c = \text{const}$  и  $k = \text{const}$ . В результате приходим к следующей модели:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_0(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f} - \rho_0 \alpha_T(T - T_0)\mathbf{g}, \quad \text{div} \mathbf{u} = 0, \\ \rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} &= k \Delta T - \mathbf{u} \cdot \nabla T + F, \quad \rho_0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Модель (5.24) описывает процесс движения вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости. Указанная модель называется *моделью тепловой конвекции*. Данная модель была выведена нами при использовании так называемого *приближения Буссинеска*. Согласно этому приближению изменения плотности в жидкости, вызываемые наличием градиентов температуры, учитываются в соответствии с термодинамическим уравнением состояния лишь в записи дополнительной объемной силы – силы плавучести, в виде (5.25). Кроме того, коэффициенты  $\mu$ ,  $k$  и  $c$  считаются постоянными. Модель (5.24) также называют моделью Обербека–Буссинеска по именам

известного французского механика и физика J.V. Boussinesq (1842–1929) и немецкого физика А. Oberbeck (1846–1900).

В качестве второй модели выведем модель переноса вещества (например, загрязняющей примеси) в вязкой несжимаемой жидкости. Как и выше, воспользуемся приближением Буссинеска. Согласно ему коэффициенты вязкости и диффузии  $\mu$  и  $\eta$  считаются константами, тогда как сила плавучести, возникающая за счет изменения плотности среды, вызываемого наличием вещества с концентрацией  $C$ , является линейной функцией от  $C$ . Для вывода выражения этой силы рассмотрим область  $D$  жидкости постоянной плотности  $\rho_0$ , в которой находится вещество с постоянной концентрацией  $C_0$ . Предположим, что в некоторой части  $\Omega$  области  $D$  произошло изменение количества вещества, в результате чего плотность и концентрация приняли значения, равные  $\rho$  и  $C$ . Тогда со стороны оставшейся жидкости на область  $\Omega$  будет действовать сила плавучести, объемная плотность которой равна  $(\rho - \rho_0)\mathbf{g}$ . Если разность  $\rho - \rho_0$  мала, то уравнение состояния может быть записано в виде  $\rho = \rho_0 + \rho_0\alpha_C(C - C_0)$  [15, с.264]. Здесь параметр  $\alpha_C > 0$ , имеющий размерность  $\text{м}^3/\text{кг}$ , носит название *объемного коэффициента массового расширения* жидкости. С учетом этого объемную плотность  $\mathbf{f}_C$  силы плавучести можно записать в виде

$$\mathbf{f}_C = \rho_0\alpha_C(C - C_0)\mathbf{g}. \quad (5.26)$$

Выражение (5.26) следует добавить в уравнение (5.23). Поскольку (5.26) содержит неизвестную в общем случае концентрацию  $C$ , то для замыкания соответствующей модели к ней необходимо присоединить уравнение для концентрации  $C$ . В качестве его следует взять уравнение (4.24) при  $\eta = \text{const}$ . В результате приходим к следующей математической модели:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_0(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{u} + \rho_0\mathbf{f} + \rho_0\alpha_C(C - C_0)\mathbf{g}, \quad \text{div}\mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= \eta\Delta C - \mathbf{u} \cdot \nabla C + F_C, \quad \rho_0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Данная модель, называемая *моделью переноса масс Обербека-Буссинеска*, описывает процесс переноса вещества (или масс) в вязкой несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска.

В случае, если перенос вещества происходит в теплопроводной жидкости, в которой существенны тепловые эффекты, возникают две силы плавучести: одна вызывается наличием вещества в жидкости, а другая – температурными эффектами. Добавив выражения (5.25) и (5.26) для этих сил в уравнение сохранения импульса (5.23) и присоединив к полученному уравнению соответствующие уравнения для температуры  $T$  и концентрации  $C$  и условие несжимаемости, приходим к еще одной математической модели:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_0(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{u} + \rho_0\mathbf{f} - \rho_0[\alpha_T(T - T_0) - \alpha_C(C - C_0)]\mathbf{g},$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T - \mathbf{u} \cdot \nabla T + F, \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \eta \Delta C - \mathbf{u} \cdot \nabla C + F_C, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (5.28)$$

называемой *моделью тепло- и массопереноса в вязкой жидкости*.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Более строгий анализ показывает, что процесс переноса тепла в вязкой жидкости сопровождается переходом кинетической энергии жидкости в работу сил вязкого трения. Последнее приводит к появлению в жидкости дополнительного источника тепла, объемная плотность  $F_\mu$  которого определяется формулой [40, с.10]:

$$F_\mu = 2\mu \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.29)$$

Здесь  $u_i$  – компоненты скорости  $\mathbf{u}$ ,  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости, а  $F_\mu$  носит название *диссипативной функции*. С учетом этого более точная модель переноса тепла в движущейся жидкости имеет вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) - \operatorname{div}(T \mathbf{u}) + F + F_\mu.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Отметим, что для выделения единственного решения приведенных здесь математических моделей необходимо задавать начальные и краевые условия. Подробное обсуждение различных формулировок начально-краевых задач для указанных моделей можно найти в цитируемых выше учебниках по гидродинамике и тепломассопереносу [15], [30], [40]. В частности, для модели Навье–Стокса (5.23) при  $\rho = \rho_0 = \operatorname{const}$ , рассматриваемой в ограниченной области  $\Omega$  пространства  $\mathbb{R}^3$ , простейшая начально-краевая задача описывается соотношениями:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_0 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Здесь  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  – заданные функции своих аргументов. Подчеркнем, что несмотря на кажущуюся простоту начально-краевая задача (5.30) даже при  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  является одной из сложнейших математических задач современности. Это связано с тем, что математики до сих пор не смогли установить функциональный класс, в котором удалось бы доказать глобальную (т.е. на любом интервале  $[0, T]$  времени) разрешимость и единственность решения даже задачи Коши для уравнений Навье–Стокса, рассматриваемых во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$ , не говоря уже о более сложной краевой задаче (5.30). Недаром она вошла под номером 6 в знаменитый список семи задач 21-го столетия (“Millennium Prize Problems”), за решение каждой из которых назначена награда в 1 миллион долларов. Более подробно об этом



можно прочитать на сайте американского математического института Clay Mathematics Institute (<http://clay.math.org>).

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.3.** Все приведенные выше модели описывают *нестационарные* движения жидкости. В случае, когда процессы движения жидкости являются *стационарными*, т. е. не зависят от времени, мы приходим к стационарным моделям движения жидкости. Они получаются из приведенных моделей отбрасыванием в исходных уравнениях слагаемых вида  $\rho \partial \mathbf{u} / \partial t$ ,  $\partial \rho / \partial t$ ,  $\partial s / \partial t$  и т. д. Детальный анализ разрешимости различного рода краевых задач для стационарных уравнений гидродинамики, тепло-массопереноса и магнитной гидродинамики можно найти в [4,5].

**1.5.5. Модель стационарного безвихревого движения несжимаемой жидкости.** Рассмотрим стационарный процесс движения идеальной несжимаемой однородной жидкости под действием силы тяжести. Отвечающая этому случаю модель  $M_5$  принимает с учетом замечания 5.3 и условия  $\mathbf{f} = \mathbf{g}$  вид

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \rho = \text{const.} \quad (5.31)$$

Используя известное векторное тождество (см. прил. 2)

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{u} + \nabla \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right)$$

и предполагая, что массовая сила является потенциальной, так что  $\mathbf{g} = -\nabla G$ , где  $G$  – потенциал силы тяжести, перепишем (5.31) в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + G \right), \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (5.32)$$

Важную роль на практике играют *безвихревые* течения идеальной жидкости. Для таких течений скорость  $\mathbf{u}$  удовлетворяет условию  $\operatorname{rot} \mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ , так что модель (5.31) принимает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (5.33)$$

$$\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + G \right) = 0 \Rightarrow \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + G = \text{const}, \quad \rho = \text{const.} \quad (5.34)$$

Важно отметить, что гидродинамическая модель в данном случае разделилась, т. е. свелась к системе двух уравнений (5.33) для скорости  $\mathbf{u}$  и уравнению (5.34) для давления. Оно называется в гидродинамике *уравнением* или *законом Бернулли* [40] в честь швейцарско-голландского математика D. Bernoulli (1700–1782). Из закона Бернулли следует, что давление в безвихревом движении жидкости снижается при увеличении скорости ее

движения. Именно этот закон объясняет причину образования подъемной силы на крыльях летательных аппаратов.

Напомним, следуя [19, с.200], что трехмерная область  $D$  называется *поверхностно-односвязной* (или просто *односвязной*), если для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой  $\Gamma \subset D$  можно указать такую ориентируемую кусочно-гладкую поверхность в  $D$ , границей которой является  $\Gamma$ . Известно (см. § 6.2 и [19, с. 200]), что условие  $\text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{0}$  эквивалентно (по крайней мере для односвязных областей) условию потенциальности потока, т. е. существованию такой функции  $\varphi$ , называемой *потенциалом скорости*, что  $\mathbf{u} = -\text{grad}\varphi$ . Подставляя это соотношение во второе уравнение в (5.33), приходим с учетом (3.18) к уравнению Лапласа

$$\text{div}(\text{grad}\varphi) \equiv \Delta\varphi = 0 \quad (5.35)$$

для потенциала  $\varphi$ , которое тем самым образует математическую модель стационарного безвихревого движения идеальной однородной несжимаемой жидкости. Решив его при соответствующих граничных условиях на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  и на бесконечности, если  $\Omega$  – неограниченная область (см. об этом в § 1.3), мы найдем искомую скорость  $\mathbf{u}$  по формуле  $\mathbf{u} = -\text{grad}\varphi$ . Таким образом, выше построен пример еще одного физического процесса, а именно: стационарного потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости, исследование которого сводится к решению краевой задачи для уравнения Лапласа.

**1.5.6. Сила Кориолиса и элементы динамики океана.** Другим важным примером внешней силы является сила *Кориолиса*, названная в честь французского ученого G.G. Coriolis (1792–1842). Указанную силу, возникающую вследствие вращения Земли, необходимо учитывать при рассмотрении гидродинамических процессов в океане. Согласно теории вращающихся тел массовая плотность  $\mathbf{f}^c$  силы Кориолиса определяется формулой [57, с.21]

$$\mathbf{f}^c = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}. \quad (5.36)$$

Здесь  $\boldsymbol{\Omega}$  – вектор угловой скорости вращения Земли, направление которого совпадает с направлением оси Земли (с юга на север), а величина равна примерно  $1.46 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ . Предположим для определенности, что ось  $y$  направлена по касательной к поверхности Земли на север (см. рис. 5.1.), тогда как ось  $z$  направлена вертикально вверх. Ось  $x$  в таком случае будет направлена на восток, поскольку тройка единичных ортов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  образует правый базис.

Из рис. 5.1 видно, что угол между осью  $y$  и направлением вектора  $\boldsymbol{\Omega}$  в точке с широтой  $\theta$  равен

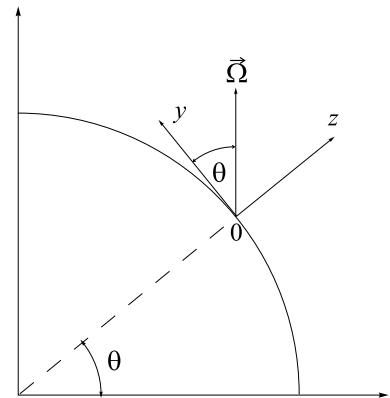


Рис. 5.1

$\theta$ . Отсюда следует, что

$$\Omega = |\Omega|(0, \cos \theta, \sin \theta). \quad (5.37)$$

Проекция на ось  $x$  вектора  $\Omega$  равна нулю, так как  $\Omega$  при любом  $\theta$  лежит в плоскости  $yz$ . С учетом (5.37) силу Кориолиса  $\mathbf{f}^c$  можно записать в виде

$$\mathbf{f}^c = -2|\Omega| [\mathbf{i}(w \cos \theta - v \sin \theta) + \mathbf{j}u \sin \theta - \mathbf{k}u \cos \theta]. \quad (5.38)$$

Добавление в правую часть (5.14) слагаемого  $\rho \mathbf{f}^c$  приводит к следующему уравнению движения, учитывающему вращение Земли:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} + \rho \mathbf{f}^c. \quad (5.39)$$

Уравнение (5.39), где вектор  $\mathbf{f}$  в правой части описывает остальные силы, действующие в океане, является основным уравнением динамики океана.

При изучении динамических процессов в океане часто предполагается, что вертикальные перемещения жидкости малы по сравнению с горизонтальными, так что  $|w| \ll |u|$  и  $|w| \ll |v|$ . Кроме того, вертикальная ( $z$ ) компонента силы Кориолиса много меньше силы тяжести, и ее можно не учитывать. С учетом этого выражение (5.38) можно приближенно переписать в виде

$$\mathbf{f}^c = -2|\Omega|(-\mathbf{i}v \sin \theta + \mathbf{j}u \sin \theta) = f(\mathbf{i}v - \mathbf{j}u). \quad (5.40)$$

Величина  $f = 2|\Omega| \sin \theta$  в (5.38) зависит от широты  $\theta$ . Если область  $D$  имеет малые размеры (по сравнению с размерами Земли), указанной зависимостью от  $\theta$  можно пренебречь и считать, что  $f = \text{const}$ . В этом случае о соответствующем приближении для силы Кориолиса говорят как о *приближении  $f$ -плоскости*. Другое, более точное, приближение для величины  $f$  заключается в том, чтобы считать ее линейной функцией от  $y$ :  $f = f_0 + \beta y$ , где  $f_0$  и  $\beta$  – некоторые постоянные. В этом случае говорят о *приближении  $\beta$ -плоскости*. Более подробно об этих и других приближениях можно прочитать, например, в [57].

Размерности основных величин и параметров, используемых в этом параграфе, приведены в таб. 5.1.

Таблица 5.1

Величины	$\mathbf{u}$	$\rho$	$p$	$g, \mathbf{f}^c$	$s$	$\mu$	$T$	$\alpha_T$	$\mathbf{f}_T, \mathbf{f}_C$	$k, \eta, \varphi$	$F$	$\alpha_C$	$F_S$	$G$	$S$
Размерности в СИ	$\frac{\text{м}}{\text{с}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$	$\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{К}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$	К	$\text{К}^{-1}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2}$	$\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$	$\frac{\text{К}}{\text{с}}$	$\frac{\text{м}^3}{\text{кг}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$	$\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

## § 1.6. Математическая модель распространения звука в жидкости

В этом параграфе мы выведем математическую модель, описывающую распространение в жидкости *звуковых волн*, т. е. распространение в жидкости гидродинамических возмущений малой амплитуды. Физически звуковая волна представляет собой процесс попеременного сжатия или разряжения среды, который распространяется с так называемой скоростью звука во всех возможных направлениях от источника звука. Строгое математическое определение звуковой волны будет дано в § 3.3.

**1.6.1. Модель распространения звука в однородной среде.** Пусть  $\Omega$  – область пространства  $\mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma$ , занятая жидкостью. При рассмотрении звуковых процессов в жидкости либо в газе во многих случаях можно пренебречь эффектами вязкости, теплопроводности и солёности либо учесть их действие эмпирически в выражениях для скорости звука. Исходя из этого выберем в качестве основы для вывода уравнений акустики следующую гидродинамическую модель (модель  $M_1$  из § 1.5):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (6.1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f}, \quad (6.2)$$

$$p = P(\rho). \quad (6.3)$$

Здесь записаны соответственно уравнения неразрывности, сохранения импульса и состояния, где  $\mathbf{u}$  – скорость,  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{f}$  – массовая плотность внешних сил,  $P(\rho)$  – заданная функция плотности  $\rho$ .

Рассмотрим сначала случай, когда  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  и жидкость находится в покое:  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Нетрудно проверить, что в этом случае параметры  $\rho$  и  $p$  жидкости постоянны. Действительно, обозначив эти величины в состоянии покоя нулевым индексом внизу, имеем из (6.1)–(6.3), что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0(\mathbf{x}), \quad \nabla p = 0 \Rightarrow p = p_0(t), \quad (6.4)$$

$$p = P(\rho) \Rightarrow p = p_0 = \text{const}, \quad \rho = \rho_0 = \text{const}.$$

Рассмотрим далее движение жидкости, возникающее при малом возмущении указанного состояния равновесия. С этой целью представим гидродинамические параметры жидкости в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}', \quad p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad (6.5)$$

причем величины  $\mathbf{u}'$ ,  $p'$  и  $\rho'$  будем считать малыми по модулю вместе с их производными по сравнению с  $p_0$  и  $\rho_0$ . Подставляя (6.5) в уравнения (6.1) и (6.2), будем иметь с учетом равенств  $\partial\rho_0/\partial t = 0$ ,  $\nabla p_0 = 0$ , что

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \mathbf{u}' \cdot \nabla\rho' + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u}' + \rho' \operatorname{div} \mathbf{u}' &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \rho' \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \rho_0 (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' + \rho' (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' &= -\nabla p'.\end{aligned}$$

Пренебрегая в этих соотношениях величинами второго и третьего порядка малости, приходим к уравнениям

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u}' = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\nabla p'. \quad (6.6)$$

В силу уравнения состояния (6.3) величины  $\rho'$  и  $p'$  должны быть связаны друг с другом. Чтобы получить указанную связь, разложим функцию  $P(\rho)$  в ряд Тейлора в окрестности  $\rho_0$  с точностью до членов второго порядка малости. Учитывая в силу (6.4), что  $P(\rho_0) = p_0$ , будем иметь

$$p = P(\rho_0) + \frac{dP}{d\rho}|_{\rho=\rho_0}(\rho - \rho_0) + O[(\rho - \rho_0)^2] \approx p_0 + \frac{dP}{d\rho}|_{\rho=\rho_0}\rho'. \quad (6.7)$$

Величина  $dP/d\rho$  всегда существенно положительна, так как плотность растет с увеличением давления и наоборот. В силу этого можно положить

$$c^2 = (dP/d\rho)|_{\rho=\rho_0}. \quad (6.8)$$

С учетом (6.8) и (6.5) равенство (6.7) примет вид

$$p' = c^2 \rho'. \quad (6.9)$$

Подставляя (6.9) в (6.6) и опуская (для простоты обозначений) в дальнейшем штрихи над  $\mathbf{u}'$ ,  $p'$  и  $\rho'$ , приходим к искомой системе уравнений:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p, \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (6.11)$$

которая и описывает распространение малых гидродинамических возмущений, т.е. звуковых волн, в жидкости.

Рассмотрим теперь случай, когда в среде присутствуют внешние силы с плотностью  $\varepsilon \mathbf{f}$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр, а  $\mathbf{f}$  имеет физический смысл массовой плотности источников гидродинамических возмущений в среде. В этом случае, следуя теории возмущений, представим гидродинамические параметры  $\mathbf{u}$ ,  $p$  и  $\rho$  в среде в виде  $\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}'$ ,  $p = p_0 + \varepsilon p'$ ,  $\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho'$ , где величины

$\mathbf{u}'$ ,  $p'$  и  $\rho'$  имеют тот же смысл, что и в (6.5). Подставляя эти соотношения в (6.1)–(6.3) и заменив плотность  $\mathbf{f}$  на  $\varepsilon\mathbf{f}$ , приходим после отбрасывания слагаемых порядков  $O(\varepsilon^2)$  и  $O(\varepsilon^3)$  к системе уравнений, которая получается из (6.9)–(6.11) заменой уравнения (6.10) уравнением

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \rho_0 \mathbf{f}. \quad (6.12)$$

(Мы опять опускаем штрихи над  $\mathbf{u}'$ ,  $p'$  и  $\rho'$ ). Подробный вывод уравнения (6.12) можно найти, например, в [3, с.21]

Система (6.11), (6.12) состоит из четырех скалярных уравнений для четырех скалярных функций: трех компонент  $u$ ,  $v$ ,  $w$  вектора  $\mathbf{u}$  и функции  $p$ , и получается путем линеаризации нелинейной системы уравнений гидродинамики (6.1)–(6.3). Линеаризация возможна, поскольку мы рассматриваем распространение малых возмущений гидродинамических параметров в жидкости. Указанную систему (6.11), (6.12) называют *математической моделью* распространения звука в жидкости или просто системой уравнений *линейной акустики*, а величины  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ ,  $p$  и  $\rho = p/c^2$ , входящие в модель (6.11), (6.12), носят названия соответственно вектора *колебательной скорости* частиц, *звукового давления* и *звуковой плотности*.

**1.6.2. Волновое уравнение для звукового давления. Постановка начальных и граничных условий.** Следует отметить, что система уравнений (6.11), (6.12) неудобна для проведения математического анализа, поскольку она содержит четыре скалярных уравнения для четырех неизвестных функций, связанных друг с другом через коэффициенты. В математическом плане удобнее работать с одним уравнением, содержащим одну неизвестную функцию, например, звуковое давление  $p$ . Чтобы получить соответствующее уравнение, применим к уравнению (6.12) операцию  $c^2 \operatorname{div}$ , а к (6.11) – операцию  $\partial/\partial t$  (в предположении достаточной гладкости функций  $\mathbf{u}$  и  $p$ ) и вычтем друг из друга полученные соотношения. Используя (3.18), получим уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p + F, \quad (6.13)$$

где

$$F = -\rho_0 c^2 \operatorname{div} \mathbf{f}. \quad (6.14)$$

Математическая природа уравнения (6.13) такова, что оно описывает процесс распространения волн (см. гл. 3.). Поэтому уравнение (6.13) называют *волновым уравнением*, *однородным* при  $F = 0$  и *неоднородным* в противном случае. Коэффициент  $c$  в нем физически представляет собой скорость распространения волн и, следовательно, имеет в нашем случае смысл скорости звука. В результате мы заключаем, что звуковое поле в

однородной среде распространяется в виде волн со скоростью  $c$ . В декартовой системе координат  $x, y, z$  уравнение (6.13) имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + F. \quad (6.15)$$

Таким образом, задача нахождения звукового давления  $p$  сводится к нахождению решения уравнения (6.13), рассматриваемого в области  $\Omega$  пространства  $\mathbb{R}^3$ , где изучается звуковой процесс. Для выделения единственного решения к уравнению (6.13) необходимо добавить начальные и краевые условия. Если  $\Omega = \mathbb{R}^3$ , так что процесс распространения звука рассматривается во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$ , задаются лишь начальные условия:

$$p|_{t=0} = p_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial p}{\partial t}|_{t=0} = p_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (6.16)$$

Здесь  $p_0$  и  $p_1$  – некоторые заданные функции точек  $\mathbf{x} \in \Omega$ , а задача (6.13), (6.16) называется *задачей Коши* для уравнения (6.13). В случае, когда  $\Omega \neq \mathbb{R}^3$ , к начальным условиям следует добавить граничное условие на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ , имеющее в общем случае вид

$$ap + b \frac{\partial p}{\partial n} = g \text{ на } \Gamma, \quad (6.17)$$

где  $a, b$  и  $g$  – некоторые заданные функции точек границы  $\Gamma$  и времени  $t$ .

В соответствии с терминологией, введенной в § 1.3, задача (6.13), (6.16), (6.17) называется первой начально-краевой задачей, или задачей Дирихле, при  $a = 1, b = 0$ , второй начально-краевой задачей, или задачей Неймана, при  $a = 0, b = 1$ , третьей начально-краевой задачей при  $b = 1, a \neq 0$  и смешанной начально-краевой задачей в остальных случаях. Таким образом, изучение процесса распространения звуковых волн методом математического моделирования сводится к нахождению решений начально-краевой задачи (6.13), (6.16), (6.17) для конкретных функций  $p_0, p_1, a, b$  и  $g$ , физическому анализу полученных решений и применению полученных результатов для решения конкретных прикладных задач. Более подробно об этом можно прочитать, например, в [3].

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.1.** В гл. 2 будет показано, что волновое уравнение (6.13) является уравнением *гиперболического типа*. Гиперболическая начально-краевая задача (6.13), (6.16), (6.17) подробно изучается в общем курсе дифференциальных уравнений в частных производных, где доказывается ее корректность при некоторых естественных условиях на исходные данные (см., например, [11, 34, 35]). В настоящей книге задача (6.13), (6.16), (6.17) будет изучаться в некоторых частных случаях: в случае, когда  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2, 3$  (см. гл. 3), либо в случае, когда  $\Omega$  имеет вид некоторой канонической области типа отрезка на вещественной оси  $\mathbb{R}$ , прямоугольника

либо круга в  $\mathbb{R}^2$  и шара в  $\mathbb{R}^3$ , а решение может быть представлено в виде бесконечного ряда Фурье (см. гл. 4).

Из постановки задачи (6.13), (6.16), (6.17) вытекает, что существует три различных источника звуковых волн: *объемные* с плотностью  $F$ , *поверхностные* с (поверхностной) плотностью  $g$  и *начальные*, описываемые функциями  $p_0$  и  $p_1$ . Если, в частности,  $F = 0$ ,  $g = 0$ ,  $p_0 = 0$ ,  $p_1 = 0$ , то единственным решением задачи (6.13), (6.16), (6.17) в силу ее линейности и корректности является функция  $p = 0$ . Таким образом, в отсутствие источников волновое поле отсутствует, что физически совершенно естественно.

**1.6.3. Потенциал звукового поля.** Уравнения, аналогичные волновому уравнению (6.13), можно получить и для других акустических величин. Так, для плотности  $\rho$  указанное уравнение получается в силу соотношения  $p = c^2 \rho$  делением уравнения (6.13) на  $c^2$  и имеет вид

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c^2 \Delta \rho - \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{f}. \quad (6.18)$$

Чтобы получить соответствующее уравнение для  $\mathbf{u}$ , применим к уравнению (6.11) операцию  $(1/\rho_0) \operatorname{grad}$ , к уравнению (6.12) – операцию  $(1/\rho_0) \partial/\partial t$  и вычтем друг из друга полученные выражения. Используя известное тождество векторного анализа (см. прил. 2)

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}, \quad (6.19)$$

приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = c^2 (\Delta \mathbf{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}. \quad (6.20)$$

Если, в частности, поле  $\mathbf{u}$  является *безвихревым*, т. е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ в } \Omega \times (0, T), \quad (6.21)$$

то уравнение (6.20) принимает вид *векторного волнового уравнения*

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}. \quad (6.22)$$

Укажем достаточные условия, при которых выполняется условие (6.21). С этой целью применим оператор  $(1/\rho_0) \operatorname{rot}$  к (6.12) и проинтегрируем полученное выражение по  $t$ . Поскольку в силу (3.18)  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} p = \mathbf{0}$ , то будем иметь

$$\frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{u})}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{f} \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) + \int_0^t \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \tau) d\tau. \quad (6.23)$$



Из равенства (6.23) показывает, что достаточные условия, при которых выполняется условие (6.21), имеют вид

(i)  $\text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) \equiv \mathbf{0}$  в  $\Omega$ , (ii)  $\text{rot } \mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$  в  $\Omega \times (0, T)$ .

Следует отметить, что уравнение (6.22) используется очень редко, да и в этом нет необходимости, поскольку обычно колебательную скорость  $\mathbf{u}$  можно выразить через ее скалярный потенциал. Действительно, предположим в дополнение к (i), (ii), что выполняется условие

(iii)  $\Omega$  – односвязная область.

Условие (iii) заведомо выполняется, если  $\Omega = \mathbb{R}^3$ . Как уже указывалось в п. 1.5.5, при выполнении (iii) условие (6.21) эквивалентно условию потенциальности поля  $\mathbf{u}$ . Это означает существование такой функции  $\varphi$ , называемой *акустическим потенциалом* поля  $\mathbf{u}$ , что

$$\mathbf{u} = -\text{grad } \varphi. \quad (6.24)$$

При этом  $\varphi$  можно ввести по формуле [19, с. 196]:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = - \int_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} ds. \quad (6.25)$$

Здесь  $L$  – произвольная кусочно-гладкая кривая, соединяющая фиксированную точку  $\mathbf{x}_0$  с переменной точкой  $\mathbf{x}$  области  $\Omega$ ,  $\mathbf{t}$  – единичный вектор касательной к кривой  $L$ . Ясно в силу формулы (6.24), что потенциал  $\varphi$  определяется с точностью до произвольной функции от  $t$ .

Важно отметить, что знание акустического потенциала  $\varphi$  позволяет определить не только скорость  $\mathbf{u}$  по формуле (6.24), но и звуковое давление  $p$ . Действительно, в силу условий (i)–(iii) существуют такие функции  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\chi : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ , что

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = -\text{grad } \psi, \quad \mathbf{f} = -\text{grad } \chi. \quad (6.26)$$

С учетом (6.26) уравнение (6.12) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho_0} + \chi \right).$$

Интегрируя это уравнение по  $t$ , будем иметь

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) - \nabla \int_0^t \left( \frac{p}{\rho_0} + \chi \right) d\tau = -\nabla \left[ \psi + \int_0^t \left( \frac{p}{\rho_0} + \chi \right) d\tau \right]. \quad (6.27)$$

Из (6.24), (6.27) вытекает, что искомым потенциал  $\varphi$  определяется (с точностью до произвольной функции от  $t$ ) формулой

$$\varphi = \psi + \int_0^t \left( \frac{p}{\rho_0} + \chi \right) d\tau. \quad (6.28)$$

Дифференцируя (6.28) по  $t$ , приходим к искомой формуле

$$p = \rho_0 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \chi \right), \quad (6.29)$$

позволяющей определить давление  $p$  по потенциалу  $\varphi$ .

Используя формулы (6.29) и (6.24), нетрудно вывести дифференциальное уравнение для потенциала  $\varphi$ . Действительно, дифференцируя обе части равенства (6.29) по  $t$  и применяя операцию  $\operatorname{div}$  к (6.24), имеем:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_0 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right), \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = -\Delta \varphi. \quad (6.30)$$

Подставляя (6.30) в уравнение (6.11), приходим после деления на  $\rho_0$  к искомому волновому уравнению для потенциала  $\varphi$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi + \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (6.31)$$

Решив уравнение (6.31) при соответствующих начальных и краевых условиях, далее по формулам (6.24), (6.29) и (6.9) можно определить все акустические величины:  $\mathbf{u}$ ,  $p$  и  $\rho$ . Таким образом, знание потенциала  $\varphi$  позволяет определить все характеристики звукового поля. При этом для нахождения самого потенциала  $\varphi$  достаточно решить начально-краевую задачу для скалярного уравнения (6.31). В этом заключается смысл введения потенциала.

Отметим, что в приложениях часто встречаются звуковые поля, обладающие некоторой симметрией, например, не зависящие от одной или двух координат. Для таких полей волновое уравнение (6.13) принимает более простой вид. Так, в случае, когда все характеристики звукового поля зависят только от координат  $x$  и  $y$ , уравнение (6.13) принимает вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + F. \quad (6.32)$$

Уравнение (6.23), называемое *двумерным волновым уравнением*, описывает распространение двумерных звуковых волн. Оно также описывает другие двумерные волновые процессы, например, процесс колебания плоской мембраны около ее положения равновесия (см. § 1.8).

Точно так же если характеристики звукового поля зависят только от одной декартовой координаты  $x$ , то (6.13) принимает вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + F. \quad (6.33)$$

Уравнение (6.33), называемое *одномерным волновым уравнением*, описывает процесс распространения одномерных звуковых волн, и в частности

звуковых волн с так называемым *плоским фронтом*. Оно также описывает и другие одномерные волновые процессы, в частности, процесс колебания струны около положения своего равновесия (см. § 1.8).

**1.6.4. Гармонические звуковые волны. Уравнение Гельмгольца.** Важным классом решений уравнений (6.11), (6.12) являются *гармонические* звуковые волны, т. е. волны с гармонической зависимостью от времени. Для таких волн основные характеристики звукового поля определяются формулами

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad p(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x})e^{-i\omega t}. \quad (6.34)$$

Здесь  $i = +\sqrt{-1}$  – мнимая единица,  $\omega$  – круговая частота рассматриваемого гармонического процесса,  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  и  $P(\mathbf{x})$  – *комплексные* (в общем случае) *амплитуды* векторных полей  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  и скалярного поля  $p(\mathbf{x}, t)$ . Как обычно, при рассмотрении гармонических колебаний физический смысл следует придавать вещественным частям выражений в (6.34). Подставляя (6.34) в (6.11), (6.12), приходим к следующим соотношениям для комплексных амплитуд  $\mathbf{v}$  и  $P$ :

$$P = \frac{\rho_0 c^2}{i\omega} \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (6.35)$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{i\omega \rho_0} (\nabla P - \rho_0 \mathbf{F}). \quad (6.36)$$

Уравнения (6.35), (6.36) представляют собой математическую модель гармонического звукового процесса. Обычным образом из (6.35), (6.36) можно вывести одно скалярное уравнение для давления  $P$ . Для этого достаточно применить к (6.36) операцию  $(-c^2 \rho_0 / i\omega) \operatorname{div}$  и вычесть полученное выражение из (6.35). В результате приходим к следующему уравнению:

$$\Delta P + k^2 P = -f. \quad (6.37)$$

Здесь *волновое число*  $k$  и правая часть  $f$  определяются формулами

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad f = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{F}. \quad (6.38)$$

Уравнение (6.37) называется *уравнением Гельмгольца* в честь известного немецкого ученого и естествоиспытателя Н.Л.Ф. Helmholtz (1821–1894).

Таким образом, задача нахождения гармонического звукового поля сводится к нахождению решения уравнения Гельмгольца (6.37) в рассматриваемой области  $\Omega$ . Для выделения единственного решения уравнения Гельмгольца к нему следует добавить граничное условие на границе  $\Gamma$ . Оно получается из исходного граничного условия (6.17) для  $p$ , если там положить  $a(\mathbf{x}, t) = \alpha(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ ,  $b(\mathbf{x}, t) = \beta(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ ,  $g(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ , и имеет вид

$$\alpha P + \beta \frac{\partial P}{\partial n} = \gamma \text{ на } \Gamma. \quad (6.39)$$

Здесь  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  – соответствующие амплитуды функций  $a$ ,  $b$  и  $g$ , заданных на  $\Gamma$ . Задача (6.37), (6.39) носит название *задачи излучения*.

Приведенная здесь постановка задачи излучения относится к ограниченной области  $\Omega$ . Для неограниченной области постановка задачи излучения отличается тем, что к краевым условиям (6.39) необходимо добавить условия, характеризующие поведение давления  $P$  на бесконечности. В случае, когда  $\Omega$  является внешностью компакта в  $\mathbb{R}^3$ , роль этих условий играют так называемые *условия излучения Зоммерфельда*, названные по имени известного немецкого физика и математика А. Sommerfeld (1868–1951). Они имеют вид [11, с. 439], [3, с. 25]:

$$P(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \frac{\partial P(\mathbf{x})}{\partial |\mathbf{x}|} - ikP(\mathbf{x}) = o(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (6.40)$$

В том модельном случае, когда  $\Omega = \mathbb{R}^3$ , так что звуковое поле рассматривается во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$ , условия Зоммерфельда (6.40) выделяют единственное решение уравнения Гельмгольца, причем по своему физическому смыслу оно описывает волну, уходящую в бесконечность. Аналогичный результат справедлив и в случае, когда  $\Omega$  является внешностью компакта, при условии, что на границе  $\Gamma = \partial\Omega$  задано граничное условие Дирихле или Неймана. Более подробно об этом можно прочитать в [3, гл. 1], [11, §30] и [48, гл. 2], а также в гл. 8.

Отметим, что при изучении звуковых процессов в океане последний обычно моделируют областью типа трехмерного слоя, ограниченного по вертикали и неограниченного по горизонтали. Для таких областей условия на бесконечности, выделяющие единственное решение соответствующей краевой задачи для уравнения Гельмгольца (6.37), отличаются от условий (6.40). Формулировку некоторых таких условий можно найти в [3] и цитируемых там ссылках.

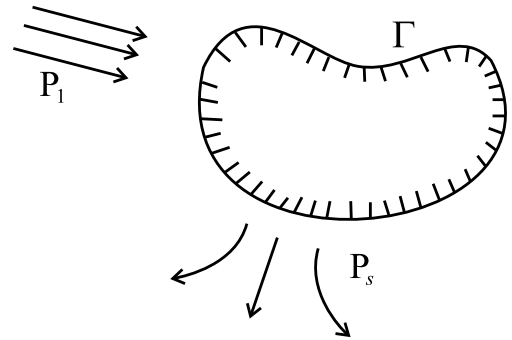


Рис. 6.1

Наряду с задачей излучения звука важную роль играет задача дифракции звука, которую математически можно сформулировать следующим образом. На некоторое тело (препятствие), ограниченное поверхностью  $\Gamma$  (см. рис. 6.1), падает волна, излучаемая, например, объемными источниками и описываемая звуковым давлением  $P_1$ . Падение волны на тело сопровождается образованием новой волны  $P_s$ , распространяющейся от тела обратно в среду, из которой пришла падающая волна. Указанная волна  $P_s$  называется *отраженной* волной, а само явление образования отраженной волны – *отражением* звука. Требуется определить  $P_s$  таким образом, чтобы пол-

ное давление  $P = P_1 + P_s$  удовлетворяло уравнению Гельмгольца (6.37) вне  $\Gamma$ , однородному граничному условию (6.39) (при  $\gamma = 0$ ) при определенном выборе функций  $\alpha$  и  $\beta$ , описывающих акустические свойства границы  $\Gamma$  препятствия, и условиям излучения (6.40). В том модельном случае, когда на  $\Gamma$  падает волна, идущая из бесконечности, условиям излучения должна удовлетворять только отраженная волна  $P_s$ .

Термин “отражение” звука часто используется в узком смысле в тех случаях, когда распространение волны удовлетворяет законам так называемой *геометрической акустики*. Если же указанные законы неприменимы (например, размеры тела малы по сравнению с длиной волны звука либо излучение происходит на низких частотах), то вместо термина “отражение” часто употребляют термины “дифракция” или “рассеяние” звука, а на сформулированную выше задачу нахождения волны  $P_s$  ссылаются как на задачу *дифракции* или задачу *рассеяния* звука.

Роль препятствия для звуковых волн может играть и граница  $\Gamma_s$  двух различных сред. Падение волны на указанную границу сопровождается (наряду с отражением) явлением образования волны, распространяющейся от границы во вторую среду. Указанная волна называется *преломленной* волной, а само явление образования преломленной волны – *преломлением* звука. Физические законы распространения звука налагают определенные условия на поведение звуковых полей вблизи границы  $\Gamma_s$  раздела обеих сред. В случае жидких сред они заключаются в непрерывности давлений и нормальных компонент колебательных скоростей частиц при переходе через  $\Gamma_s$ . При этом со стороны первой среды должен учитываться вклад падающей и отраженной волн, со стороны второй среды – вклад преломленной волны. Математически указанные условия, называемые *условиями сопряжения*, можно записать в виде:

$$P_1 + P_s = P_2, \quad (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} \quad \text{на } \Gamma_s. \quad (6.41)$$

Здесь  $\mathbf{v}_1$  (либо  $\mathbf{v}_s$ ) – колебательная скорость частиц в падающей (либо отраженной) волне,  $P_2$  и  $\mathbf{v}_2$  – звуковое давление и колебательная скорость частиц во второй среде. В случае, когда объемные источники отсутствуют, условия (6.41) можно переписать с учетом соотношения (6.36) между колебательной скоростью и звуковым давлением в следующем виде:

$$P_1 + P_s = P_2, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(P_1 + P_s)}{\partial n} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma_s. \quad (6.42)$$

Здесь  $\rho_2$  – плотность второй среды. Таким образом, в данном случае задача дифракции заключается в нахождении звуковых давлений  $P_s$  и  $P_2$ , удовлетворяющих соответствующим уравнениям Гельмгольца в своих областях, условиям (6.42) на границе  $\Gamma_s$  и условиям излучения на бесконечности (ему должна удовлетворять только функция  $P_s$ , если вторая среда занимает ограниченную область  $\Omega$ ).

Размерности основных используемых здесь величин и параметров в системе СИ приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1

Величины	$u, v, w, c$	$\rho, \rho', \rho_0$	$p', p, p_0, P, P_i, P_s$	$\varphi, \psi$	$\mathbf{f}, \mathbf{F}$	$F$	$\chi$	$\omega$	$k$
Размерности в СИ	$\frac{\text{м}}{\text{с}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$	$\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$	$\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$\frac{\text{кг}}{\text{с}^4 \cdot \text{м}}$	$\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$	$\frac{1}{\text{с}}$	$\frac{1}{\text{м}}$

## § 1.7. Математические модели электромагнитного поля

**1.7.1. Основные величины и уравнения, описывающие электромагнитные процессы.** Как и в §§ 1.4–1.6, будем рассматривать жидкую или газообразную среду, занимающую некоторую область  $\Omega$  трехмерного пространства  $\mathbb{R}^3$ . Не останавливаясь здесь на строгом определении электромагнитного процесса, отметим, что при всем огромном многообразии электромагнитных явлений существует фундаментальное теоретическое понятие, позволяющее говорить об их единой основе. Таким понятием является *электромагнитное поле*. С математической точки зрения под электромагнитным полем можно понимать набор вектор-функций  $\mathbf{E}$  (либо  $\mathbf{D}$ ),  $\mathbf{H}$  (либо  $\mathbf{B}$ ),  $\mathbf{J}$  и скалярной функции  $\rho_e$ , называемых соответственно *вектором напряженности (либо индукции) электрического поля*, *вектором напряженности (либо индукции) магнитного поля*, *вектором плотности электрического тока* и *плотностью электрических зарядов* в среде, удовлетворяющих в области  $\Omega$  определенным дифференциальным и функциональным уравнениям.

Указанные уравнения можно разбить на две группы. Первая группа носит название *уравнений Максвелла* по имени выдающегося английского физика D. Maxwell (1831–1879), который впервые вывел их в 19-ом веке. Эти уравнения, полученные Максвеллом путем обобщения известных к тому времени законов электричества и магнетизма и устранения имеющихся в них противоречий, в современной записи имеют (в системе СИ) вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_e, \quad (7.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (7.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (7.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}. \quad (7.4)$$

Уравнение (7.1) является дифференциальным следствием основного закона электростатики – закона *Кулона* (см. § 1.3) и справедливо не только для

статических, но и для нестационарных полей. Уравнение (7.2) является математическим отражением известного физического факта об отсутствии магнитных зарядов как источников магнитного поля. Уравнение (7.3) является следствием закона *электромагнитной индукции Фарадея*, названного так в честь известного английского физика – первооткрывателя явления электромагнитной индукции М. Faraday (1791–1867). Согласно этому закону всякое переменное во времени магнитное поле индуцирует связанное с ним электрическое поле (имеющее в отличие от электростатического поля вихревой характер) и выражает количественную характеристику вихря индуцированного поля. Наконец, уравнение (7.4) представляет собой обобщение дифференциальной формы

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (7.5)$$

известного закона *Био–Савара*, названного так в честь французских физиков J.B. Biot (1774–1862) и F. Savart (1791–1841), открывших его в 1820 г. Он выражает зависимость напряженности магнитного поля от плотности создающего его тока. Уравнение (7.4) отличается от (7.5) дополнительным членом  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ , введенным Максвеллом. Указанный член имеет размерность плотности тока и называется *плотностью токов смещения*. Таким образом, из (7.4) следует, что магнитное поле может создаваться не только электрическим током, но и переменным во времени электрическим полем. В совокупности уравнения (7.3) и (7.4) означают, что нестационарные электрические или магнитные поля не могут существовать в пространстве отдельно, независимо друг от друга, а образуют по сути дела две стороны единого электромагнитного поля.

Важно отметить, что уравнения Максвелла образуют точную универсальную систему дифференциальных уравнений электромагнитного поля, т. е. абсолютно точно описывают электромагнитные процессы в любой среде. Однако система (7.1)–(7.4) не является замкнутой, поскольку число неизвестных функций в ней превосходит число уравнений. Чтобы замкнуть систему (7.1)–(7.4), к ней необходимо присоединить дополнительные уравнения, вид которых уже целиком определяется свойствами среды, в которой рассматривается электромагнитное поле. Указанные уравнения, называемые *материальными* уравнениями электромагнитного поля, во многих случаях имеют следующий вид (мы запишем их в системе СИ):

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}^{ct}. \quad (7.6)$$

Здесь  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  – *электрическая и магнитная* постоянные, определяемые (приближенно) формулами:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\Phi}{\text{м}}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{м}}, \quad (7.7)$$

где  $\Phi$  и Гн – сокращенные обозначения фарады и генри как единиц размерностей,  $\varepsilon$  и  $\mu$  – относительные *диэлектрическая и магнитная проницаемости* среды,  $\sigma$  – *удельная проводимость* среды,  $\mathbf{J}^{ct}$  – заданная функция, имеющая смысл плотности токов, происходящих от действия сторонних электродвижущих сил. Последнее уравнение в (7.6) является дифференциальной формой закона Ома, связывающего силу тока, протекающего в электрическом проводнике, с падением напряжения на нем. Указанный закон открыл в 1826 г. известный немецкий физик G.S. Ohm (1787–1854). В случае однородной изотропной среды величины  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  являются константами, причем  $\varepsilon > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $\sigma \geq 0$ . В частности, для вакуума  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$ . Если среда неоднородна, то  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  являются скалярными функциями координат точек среды, если к тому же среда анизотропна, то эти функции становятся тензорными. Размерности введенных величин можно найти в табл. 7.1, где А и В обозначают ампер и вольт (размерности силы тока и напряжения).

Таблица 7.1

Величины	<b>Е</b>	<b>Н, <math>\mathbf{J}_s</math></b>	<b>Д, <math>\rho_s</math></b>	<b>В</b>	<b>Ж</b>	$\rho_e$	$\sigma$	$\varepsilon_0$	$\mu_0$	$a$	$c^2$	$\omega$	$k$
Размерности в СИ	$\frac{В}{М}$	$\frac{А}{М}$	$\frac{А \cdot с}{М^2}$	$\frac{В \cdot с}{М^2}$	$\frac{А}{М^2}$	$\frac{А \cdot с}{М^3}$	$\frac{А}{В \cdot М}$	$\frac{А \cdot с}{В \cdot М}$	$\frac{В \cdot с}{А \cdot М}$	$\frac{М}{с}$	$\frac{М^2}{с}$	$\frac{1}{с}$	$\frac{1}{М}$

**1.7.2. Векторное волновое уравнение в непроводящей среде.**  
**Уравнение диффузии в сильно проводящей среде.** Подставим в (7.4) вместо  $\mathbf{J}$  его выражение из закона Ома в (7.6). Получим

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}^{ct}. \quad (7.8)$$

Правая часть в (7.8) представляет по физическому смыслу сумму плотностей токов смещения  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ , токов проводимости  $\sigma \mathbf{E}$  и токов сторонних э.д.с.  $\mathbf{J}^{ct}$ . Применим к уравнению (7.8) оператор rot. Будем иметь

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{rot} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \text{rot}(\sigma \mathbf{E}) + \text{rot} \mathbf{J}^{ct}.$$

Предположим, что среда, заполняющая область  $D$ , однородна и изотропна, так что  $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $\sigma = \text{const}$ . В этом случае последнее уравнение с учетом (7.3) и первых двух уравнений в (7.6) можно записать в виде

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = -\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{J}^{ct}$$

или в виде

$$\Delta \mathbf{H} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \text{rot} \mathbf{J}^{ct}, \quad (7.9)$$



если воспользоваться векторным тождеством (6.19). Константа  $a^2$  в (7.9) определяется формулой

$$a^2 = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}. \quad (7.10)$$

По аналогичной схеме выводится соответствующее уравнение для  $\mathbf{E}$ , имеющее при  $\rho_e = 0$  вид

$$\Delta\mathbf{E} = \sigma\mu\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\mu_0\frac{\partial\mathbf{J}^{ct}}{\partial t}. \quad (7.11)$$

Характер электромагнитного процесса определяется свойствами среды. Если среда является непроводящей, так что  $\sigma = 0$ , или обладает очень малой проводимостью  $\sigma$ , так что в (7.8) можно пренебречь плотностью токов проводимости  $\sigma\mathbf{E}$  по сравнению с плотностью токов смещения  $\partial\mathbf{D}/\partial t$ , то, отбрасывая в (7.9) и (7.11) “малые” слагаемые  $\sigma\mu\mu_0 \partial\mathbf{D}/\partial t$  и  $\sigma\mu\mu_0 \partial\mathbf{E}/\partial t$ , приходим к уравнениям

$$\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = a^2\Delta\mathbf{H} + \mathbf{F}_1, \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = a^2\Delta\mathbf{E} + \mathbf{F}_2. \quad (7.13)$$

Здесь  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  – заданные вектор-функции, определяемые формулами

$$\mathbf{F}_1 = a^2\text{rot}\mathbf{J}^{ct}, \quad \mathbf{F}_2 = -a^2\mu\mu_0\frac{\partial\mathbf{J}^{ct}}{\partial t}. \quad (7.14)$$

Каждое из уравнений (7.12), (7.13) представляет собой *векторное волновое уравнение*, в котором вектор-функции  $\mathbf{F}_1 = a^2\text{rot}\mathbf{J}^{ct}$  и  $\mathbf{F}_2 = -a^2\mu\mu_0\partial\mathbf{J}^{ct}/\partial t$  играют роль объемных источников поля. На основании этого и свойств волнового уравнения (см. § 3.3), приходим к важному выводу, что в непроводящей среде электромагнитное поле распространяется в виде незатухающих волн, скорость  $a$  которых определяется формулой (7.10). Указанные волны, естественно, носят название *электромагнитных волн*, а константа  $a$  в (7.10) называется *скоростью* электромагнитных волн. В частном случае, когда среда является вакуумом, подстановка значений  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$  и (7.7) для  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  в (7.10) приводит к следующей формуле для скорости  $a_0$  электромагнитных волн в вакууме:

$$a_0 = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}}. \quad (7.15)$$

Для других сред скорость распространения электромагнитных волн отличается от значения  $a_0$  в (7.15) множителем  $(\varepsilon\mu)^{-1/2}$ , который для большинства сред, и в частности для воздуха, близок к 1.

Согласно (7.15) скорость  $a_0$  фактически совпадает со скоростью света в вакууме. Это не случайно, а является следствием волновой теории света, согласно которой свет распространяется в виде электромагнитных волн определенных частот. Строго говоря, скорость света в вакууме равна согласно последним измерениям 299792458 м/сек, что несколько меньше величины  $a_0$  в (7.15). Однако это несовпадение объясняется тем, что при выводе (7.15) мы использовали округленные значения для постоянных  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  в (7.5).

Отметим, что Максвеллу удалось вывести волновое уравнение для электромагнитного поля только благодаря осенившей его гениальной догадке ввести в закон Био–Савара (7.5) странное и непонятное на первый взгляд слагаемое  $\partial \mathbf{D}/\partial t$ , названное им плотностью токов смещения. В итоге это позволило сделать ему величайшее открытие, доказав, что называется, на кончике пера, факт распространения электромагнитного поля в пространстве в виде электромагнитных волн со скоростью света. До выхода работ Максвелла волновые уравнения вида (7.12), (7.13) в принципе нельзя было получить, поскольку все исследователи использовали вместо (7.4) закон Био–Савара (7.5).

Если же среда, наоборот, обладает большой проводимостью  $\sigma$ , так что в (7.8) можно пренебречь плотностью токов смещения  $\partial \mathbf{D}/\partial t$  по сравнению с плотностью токов проводимости  $\sigma \mathbf{E}$ , то уравнения (7.9) и (7.11) после отбрасывания соответствующих членов принимают вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = c^2 \Delta \mathbf{H} + \tilde{\mathbf{F}}_1, \quad (7.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \Delta \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{F}}_2. \quad (7.17)$$

Здесь  $\tilde{\mathbf{F}}_1, \tilde{\mathbf{F}}_2$  – заданные вектор-функции, определяемые формулами

$$\tilde{\mathbf{F}}_1 = \frac{1}{\sigma \mu \mu_0} \text{rot } \mathbf{J}^{ct}, \quad \tilde{\mathbf{F}}_2 = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{J}^{ct}}{\partial t}. \quad (7.18)$$

Каждое из уравнений (7.16), (7.17) представляет собой *векторное параболическое уравнение диффузии*, в котором вектор-функции  $\tilde{\mathbf{F}}_1$  и  $\tilde{\mathbf{F}}_2$  играют роль плотностей объемных источников поля. Коэффициент диффузии  $c$  для обоих уравнений определяется формулой

$$c^2 = \frac{1}{\sigma \mu \mu_0}. \quad (7.19)$$

На основании этого приходим к выводу о том, что в сильно проводящей среде основным механизмом распространения электромагнитного поля является процесс диффузии. В общем случае, когда токи проводимости и

токи смещения сравнимы по порядку, уравнения (7.9) и (7.11) представляют собой уравнения гиперболического типа, описывающие распространение электромагнитного поля в среде в виде затухающих электромагнитных волн с затуханием, вызываемым диссипацией энергии вследствие ненулевой проводимости среды.

**1.7.3. Граничные условия и условия сопряжения для электромагнитного поля.** Если среда кусочно-однородна, то уравнения (7.9), (7.11) следует использовать в каждом однородном куске среды. На границе  $\Gamma_s$  раздела двух сред нужно использовать так называемые условия *сопряжения*. В общем случае указанные условия имеют вид [38, с. 31], [59, р. 69]:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \text{ на } \Gamma_s, \quad (7.20)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \text{ на } \Gamma_s.$$

Здесь индексами 1 и 2 отмечены предельные значения векторов поля при приближении к поверхности раздела, соответственно, со стороны сред 1 и 2,  $\mathbf{J}_s$  и  $\rho_s$  – поверхностные плотности токов и зарядов на границе раздела,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали, направленный от среды 1 к среде 2. Условия (7.20) легко выводятся с использованием интегральных аналогов уравнений Максвелла.

В теории электромагнетизма важную роль играет разбиение различных сред на два типа: проводники и диэлектрики. Под *проводником* принято понимать любую среду (твердую, жидкую, газообразную), в которой существуют заряды, способные перемещаться (на макроскопическом уровне) под действием электрического поля. *Омическим проводником* называют среду, в которой закон Ома в (7.6) выполняется с константой  $\sigma > 0$ . *Идеальным проводником* называют среду с “очень большим” значением коэффициента проводимости  $\sigma$  ( $\sigma \rightarrow \infty$ ). Такая ситуация реализуется, например, для металлов, которые с высокой степенью точности можно считать идеальными проводниками. Внутри идеального проводника электромагнитное поле равно нулю. Мы также отметим, что *сверхпроводники* по определению относятся к идеальным проводникам.

*Идеальным изолятором* называется среда, в которой  $\sigma = 0$ . Среда, в которой отсутствуют свободные электроны, способные нести электрический ток, называется *диэлектриком*. Среда называется *идеальным диэлектриком*, если в ней соотношение  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$  выполняется с  $\varepsilon = \text{const}$ . Если среда является одновременно идеальным изолятором и идеальным диэлектриком, то в ней выполняется условие  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ . Среда называется *идеальной магнитной средой*, если в ней соотношение  $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$  выполняется с  $\mu = \text{const}$ . Мы также будем использовать термин “идеальная среда” для среды, которая является одновременно однородной и изотропной.

В случае, когда область  $\Omega$  граничит с идеальным проводником, задача нахождения электромагнитного поля упрощается. Действительно, в этом

случае электромагнитное поле вне  $\Omega$  отсутствует, так что имеем  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{D}_2 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{B}_2 = \mathbf{0}$ . С учетом этого условия сопряжения (7.20) переходят в следующие граничные условия на границе  $\Gamma \equiv \Gamma_s$  для  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$ :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = -\mathbf{J}_s, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = -\rho_s, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (7.21)$$

Подчеркнем, что функции  $\mathbf{J}_s$  и  $\rho_s$  в (7.21) в общем случае являются неизвестными, хотя в приложениях часто рассматриваются ситуации, когда одна из этих функций либо обе известны.

Предположим в рассматриваемой ситуации, что область  $\Omega$  заполнена идеальной средой, так что  $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ , причем плотность  $\rho_e$  известна. Переписав с помощью соотношений (7.6) уравнения Максвелла (7.1)–(7.4) только в переменных  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  и добавив к ним в качестве граничных условий последние два условия в (7.21) и соответствующие начальные условия для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , мы получим исходную начально - краевую задачу относительно величин  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Решив указанную задачу относительно  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , далее определяем остальные величины  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{J}$  из (7.6), а подставляя найденные величины  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{D}$  в первые два уравнения в (7.21), мы также определяем и граничные плотности  $\mathbf{J}_s$  и  $\rho_s$ . При таком подходе основная трудность падает на решение сформулированной выше начально-краевой задачи для пары  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ . О методах и трудностях исследования этой задачи, а также о достаточных условиях, обеспечивающих единственность решения можно прочитать, например, в [59, гл. 1], [60, гл. 9].

Используя (7.20) и (7.21), нетрудно вывести частные формы граничных условий для электромагнитного поля, например, в случае, когда  $\mathbf{J}_s = \mathbf{0}$  или  $\rho_s = 0$ , и указать их физический смысл. Можно также переформулировать все граничные условия относительно векторов напряженностей либо векторов индукции, но на этих деталях мы не будем здесь останавливаться, отсылая заинтересованного читателя, например, к [38], [59, гл. 1].

Подчеркнем, однако, что поскольку условия (7.20) и (7.21) являются следствиями уравнений Максвелла, то, как и уравнения Максвелла, они имеют универсальный характер, т. е. справедливы для любого электромагнитного поля. При решении конкретных задач излучения и распространения электромагнитных волн наряду с условиями (7.20), (7.21) иногда используют и так называемые *независимые граничные условия*, которые обычно выражают внешнюю причину существования электромагнитного поля. Так, если на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  или на некоторой ее части  $\Gamma_1$  действует стороннее электромагнитное поле, описываемое заданными функциями  $\mathbf{E}^{ct}$  и  $\mathbf{H}^{ct}$ , то математическая формализация этого факта приводит к следующему требованию, налагаемому на решения уравнений Максвелла на  $\Gamma_1$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{ct}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^{ct} \text{ на } \Gamma_1. \quad (7.22)$$

Уравнения (7.22) при естественном условии совместности с универсальными уравнениями (7.20), (7.21) играют в таком случае роль внешних источников существования электромагнитного поля.

**1.7.4. Гармонические электромагнитные поля.** Важный частный случай представляют собой *гармонические* электромагнитные поля. Любую характеристику  $\mathbf{U}$  такого поля и, в частности, векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{J}^{ct}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{J} &= \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{J}^{ct} = \tilde{\mathbf{J}}^{ct}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}.\end{aligned}\tag{7.23}$$

Здесь векторы  $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{J}}, \tilde{\mathbf{J}}^{ct}$  имеют смысл *комплексных амплитуд* соответственно вектора напряженности электрического поля, вектора напряженности магнитного поля, вектора плотности тока и вектора плотности сторонних токов.

Подставляя (7.23) в (7.3) и (7.4) и опуская в дальнейшем знак волны над амплитудами полей, приходим с учетом (7.5) и в предположении, что  $\rho_e = 0$ , к следующим уравнениям для комплексных амплитуд:

$$\text{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad \text{rot}\mathbf{H} = -i\omega\dot{\epsilon}\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{J}^{ct}.\tag{7.24}$$

Величина  $\dot{\epsilon} = \varepsilon + i\sigma/\omega\varepsilon_0$  в (7.24) называется *комплексной диэлектрической проницаемостью*. Применяя, как и выше, к уравнениям в (7.24) оператор  $\text{rot}$ , получаем следующие два векторных уравнения второго порядка для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\Delta\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{J}^{ct},\tag{7.25}$$

$$\Delta\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = -\text{rot}\mathbf{J}^{ct}.\tag{7.26}$$

Здесь комплексная величина  $k = \omega\sqrt{\dot{\epsilon}\varepsilon_0\mu_0}$  носит название *комплексного волнового числа*, а каждое из уравнений (7.25), (7.26) называется *векторным волновым уравнением Гельмгольца*.

Подставляя далее (7.23) в одно из граничных условий (7.20), (7.21) и сокращая на  $e^{-i\omega t}$  (в предположении, что правые части в (7.20), (7.21) также гармонически зависят от времени  $t$ ), приходим к граничным условиям для векторных амплитуд, которые формально совпадают с соответствующими граничными условиями в (7.20), (7.21). Таким образом, амплитуды векторов напряженностей электромагнитного поля удовлетворяют *векторным уравнениям Гельмгольца* (7.25), (7.26) и векторным краевым условиям, формально совпадающим с выписанными ранее условиями (7.20), (7.21). Кроме того, параметры  $\dot{\epsilon}$  и  $k$ , входящие в уравнения (7.24)–(7.26), являются комплексными числами. Последнее объясняется наличием явления диссипации электромагнитной энергии в проводящей среде, возникающей вследствие ее проводимости.

**1.7.5. Статические электромагнитные поля. Модель электростатики. Электрическая краевая задача.** Еще один важный частный случай представляют собой электромагнитные поля, не зависящие от времени и, следовательно, удовлетворяющие в силу (7.1)–(7.4) уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_e, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (7.27)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (7.28)$$

Если, более того,  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ , т. е. магнитное поле отсутствует, так что уравнения (7.28) автоматически удовлетворяются, то задача нахождения электромагнитного поля сводится к нахождению тройки  $(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \rho_e)$  либо только пары векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ , если плотность  $\rho_e$  известна, из соотношений (7.27), называемых *уравнениями или моделью электростатики*.

Для выделения единственного решения уравнений электростатики необходимо задать дополнительные условия. Роль их могут играть как материальные уравнения, так и краевые условия либо условия сопряжения, а также условия на бесконечности. Рассмотрим ниже два случая, отвечающие использованию тех или иных дополнительных условий.

1. Предположим, что все пространство  $\mathbb{R}^3$  заполнено идеальной диэлектрической средой. Это означает, что в  $\mathbb{R}^3$  выполняется соотношение  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$  с  $\varepsilon = \text{const}$ . Как уже неоднократно указывалось, уравнение  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$  в  $\mathbb{R}^3$  эквивалентно существованию потенциала  $\varphi$ , с которым выполняются соотношения

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \implies \mathbf{D} = -\varepsilon_0 \varepsilon \operatorname{grad} \varphi. \quad (7.29)$$

Подставляя (7.29) в первое уравнение модели (7.27), приходим с учетом (3.18) к уравнению Пуассона для потенциала  $\varphi$ , имеющему вид

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (7.30)$$

(Оно, конечно, совпадает с выведенным в § 1.3 уравнением (3.14)). Чтобы выделить единственное решение уравнения (7.30), а следовательно, и рассматриваемой модели электростатики, достаточно в соответствии с замечанием 3.4 присоединить к (7.30) условие на бесконечности

$$\varphi(\mathbf{x}) = o(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (7.31)$$

Из результатов § 1.3 и гл. 7 вытекает, что решение  $\varphi$  задачи (7.30), (7.31) существует, единственно и определяется в произвольной точке  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  с помощью так называемого объемного потенциала:

$$\varphi(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{\rho_e(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (7.32)$$

При этом от плотности  $\rho_e$  требуется некоторая регулярность. В частности, она может быть как гладкой финитной в  $\mathbb{R}^3$  функцией, так и функцией, лишь интегрируемой либо интегрируемой с квадратом в  $\mathbb{R}^3$ . Она может быть также обобщенной функцией, сосредоточенной в некоторых точках, линиях или поверхностях в  $\mathbb{R}^3$ . В последнем случае интеграл в (7.32) заменяется сверткой обобщенной функции  $\rho_e$  и функции  $1/4\pi|\mathbf{x}|$ , являющейся сингулярным решением оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^3$  (см. об этом подробнее в [59], [60] и в § 6.1).

2. Предположим теперь, что  $\mathbb{R}^3 = \Omega_1 \cup \bar{\Omega}_2$ , где  $\Omega_1$  – ограниченное открытое множество. Будем считать, что множества  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  заполнены разными идеальными средами диэлектрического типа с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1 = \text{const}$  и  $\varepsilon_2 = \text{const}$ . Это означает, что выполняются соотношения

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 \text{ в } \Omega_1, \quad \mathbf{D}_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \mathbf{E}_2 \text{ в } \Omega_2. \quad (7.33)$$

Предположим для простоты, что каждое из множеств  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , является односвязной областью. Отсюда, в частности, следует, что граница раздела  $\Gamma_s$  состоит только из одной связной компоненты. Уравнение  $\text{rot } \mathbf{E}_i = \mathbf{0}$  в  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$  позволяет ввести для каждой области  $\Omega_i$  скалярный потенциал  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2$ , так что выполняются соотношения

$$\mathbf{E}_i = -\text{grad } \varphi_i, \quad \mathbf{D}_i = -\varepsilon_0 \varepsilon_i \text{grad } \varphi_i \text{ в } \Omega_i, \quad i = 1, 2. \quad (7.34)$$

Положим

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{в } \Omega_1, \\ \varepsilon_2 & \text{в } \Omega_2, \end{cases} \quad \varphi = \begin{cases} \varphi_1 & \text{в } \Omega_1, \\ \varphi_2 & \text{в } \Omega_2, \end{cases} \quad \mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{E}_1 & \text{в } \Omega_1, \\ \mathbf{E}_2 & \text{в } \Omega_2, \end{cases} \quad \mathbf{D} = \begin{cases} \mathbf{D}_1 & \text{в } \Omega_1, \\ \mathbf{D}_2 & \text{в } \Omega_2. \end{cases} \quad (7.35)$$

Подставляя (7.34) в первое уравнение модели (7.27), рассматриваемое в области  $\Omega_1$ , а затем в  $\Omega_2$ , приходим с учетом обозначений (7.35) к следующему уравнению с разрывным коэффициентом  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon_0 \text{div} (\varepsilon \text{grad } \varphi) = -\rho_e \text{ в } \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_s. \quad (7.36)$$

Для выделения единственного решения к уравнению (7.36) следует добавить условие на бесконечности (7.31), а также соответствующие условия на поверхности раздела  $\Gamma_s$ . Они вытекают из общих условий сопряжения (7.20) которые для рассматриваемой модели электростатики сводятся к условиям:

$$\mathbf{E}_2 \times \mathbf{n} - \mathbf{E}_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} = \rho_s \text{ на } \Gamma_s. \quad (7.37)$$

Для наших целей достаточно воспользоваться первым соотношением в (7.37), означающим непрерывность тангенциальной компоненты вектора  $\mathbf{E}$  при переходе через  $\Gamma_s$ . Записав с учетом (7.34) указанное соотношение в виде

$$\text{grad } \varphi_2 \times \mathbf{n} - \text{grad } \varphi_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma_s, \quad (7.38)$$

приходим к искомой задаче для определения потенциала  $\varphi$  электростатического поля в  $\mathbb{R}^3$ . Она состоит из соотношений (7.36), (7.38) и (7.31). О методах ее решения можно прочесть в [59], [60]. Мы лишь отметим, что после нахождения  $\varphi$  векторы  $\mathbf{E}_i$  и  $\mathbf{D}_i$  определяются по  $\varphi_i$  соотношениями (7.34). Наконец, подставляя  $\mathbf{D}_2$  и  $\mathbf{D}_1$  во второе уравнение (7.37), находим поверхностную плотность  $\rho_s$ , являющуюся для рассматриваемой модели искомой величиной.

Рассмотрим теперь в рамках случая 2 ситуацию, когда область  $\Omega_2$  заполнена идеальным проводником и следовательно, в  $\Omega_2$  выполняются условия  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{D}_2 = \mathbf{0}$ . В этом случае задача нахождения электростатического поля в области  $\Omega \equiv \Omega_1$  сводится к нахождению в области  $\Omega$  решения  $\varphi$  уравнения Пуассона (7.30), удовлетворяющего краевому условию

$$\text{grad } \varphi \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma. \quad (7.39)$$

Оно вытекает из (7.38), если там положить  $\varphi_2 = 0$ ,  $\varphi_1 = \varphi$ ,  $\Gamma = \Gamma_s$ . Условие (7.39) означает, что тангенциальные производные от потенциала  $\varphi$  исчезают на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ . Отсюда следует, что потенциал  $\varphi$  должен принимать постоянное значение на  $\Gamma$ . Если граница  $\Gamma$  является связной, то тогда эту константу можно выбрать равной нулю, полагая

$$\varphi = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (7.40)$$

Тем самым для нахождения потенциала  $\varphi$  мы получили однородную задачу Дирихле (7.30), (7.40), имеющую при определенных условиях на исходные данные (пару  $\Gamma$  и  $\rho_e$ ) единственное решение. Определив потенциал  $\varphi$ , далее однозначно определяем векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  в  $\Omega$  из (7.29), а также поверхностную плотность зарядов  $\rho_s$  из соотношения  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = -\rho_s$  на  $\Gamma$ , вытекающего из (7.37).

Задача нахождения в области  $\Omega$  вектора  $\mathbf{E}$  из условий

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}, \text{ div } \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0 \varepsilon} \text{ в } \Omega, \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma \quad (7.41)$$

носит название *электрической краевой задачи*, поскольку именно к ней сводится задача определения вектора напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  в области  $\Omega$ , заполненной идеальной диэлектрической средой, граничащей с идеальным проводником. Из свойств решения задачи (7.30), (7.40) вытекает существование и единственность решения задачи (7.41), но в предположении, что  $\Omega$  – односвязная область со связной границей  $\Gamma$ .

Более сложным является рассмотрение случая, когда граница  $\Gamma$  состоит из нескольких, например,  $p + 1$  связных компонент  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_p$ , где  $\Gamma_0$  – внешняя компонента границы  $\Gamma$  (см. рис. 7.1,а, где изображена область  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ , состоящей из трех компонент  $\Gamma_0, \Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ). Рассмотрим для



этого случая неоднородную краевую задачу

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{F}, \operatorname{div} \mathbf{E} = \theta \text{ в } \Omega, \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad (7.42)$$

где  $\theta$  и  $\mathbf{g}$  – некоторые функции. Указанная задача является обобщением задачи (7.41) и переходит в нее при  $\mathbf{F} = 0$ ,  $\theta = \rho_e/\varepsilon_0\varepsilon$ ,  $\mathbf{g} = 0$ . С учетом этого будем ссылаться на (7.42) как на *неоднородную краевую задачу электрического типа*.

Ограничимся здесь исследованием единственности решения задачи (7.42). Для этого заметим, что разность  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1$  двух возможных решений задачи (7.42) является решением следующей однородной краевой задачи:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \text{ в } \Omega, \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma. \quad (7.43)$$

Поставим своей целью описать класс всех возможных решений задачи (7.43). С этой целью рассмотрим  $p$  задач Дирихле:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega, \varphi = 1 \text{ на } \Gamma_i, \varphi = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \Gamma_i, i = 1, 2, \dots, p. \quad (7.44)$$

Пусть  $\varphi_i$  – решение задачи (7.44) (существование и единственность его доказывается в теории потенциала, см. гл. 7). Введем векторы

$$\mathbf{E}_i = -\operatorname{grad} \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (7.45)$$

Ясно, что векторы  $\mathbf{E}_i$  удовлетворяют первым двум уравнениям в (7.43), ибо в силу (3.18)  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi_i = 0$ ,  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_i \equiv \Delta\varphi_i = 0$ . Кроме того, так как функция  $\varphi_i$  принимает постоянное значение на каждой связной компоненте  $\Gamma_j$  границы  $\Gamma$ , то вектор  $\operatorname{grad} \varphi_i$  направлен по нормали всюду на  $\Gamma$ . Это означает, что  $\operatorname{grad} \varphi_i \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$  на  $\Gamma$ . Тем самым доказано, что каждый вектор  $\mathbf{E}_i$  является решением однородной задачи (7.43). Поскольку к тому же они линейно независимы (это легко проверяется методом от противного), то тем самым мы построили  $p$  линейно независимых решений однородной задачи (7.43). Можно показать, что они исчерпывают совокупность всех решений

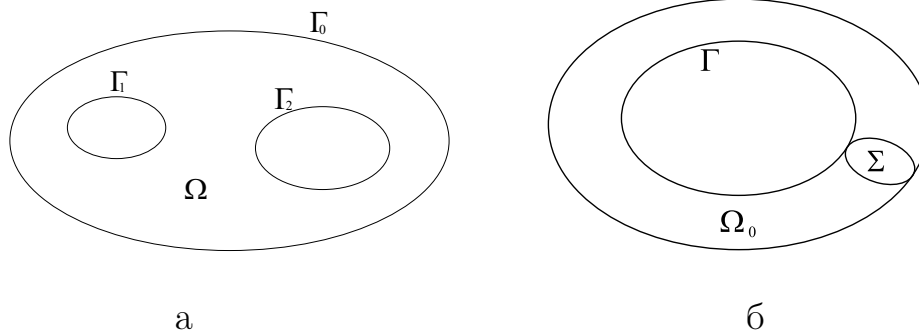


Рис. 7.1

однородной задачи (7.43) (см., например, [60]). Указанные векторы  $\mathbf{E}_i$  называются *гармоническими векторами электрического типа*. В результате мы доказали, что решение  $\mathbf{E}$  неоднородной задачи (7.42) определяется с точностью до  $p$  гармонических векторов  $\mathbf{E}_i$  электрического типа. Подчеркнем, что число  $p$  всех векторов  $\mathbf{E}_i$  совпадает с числом внутренних связных компонент границы  $\Gamma$ , т. е. определяется топологией границы  $\Gamma$ . Его называют *вторым числом Бетти*. В частном случае, когда  $p = 0$ , т. е.  $\Gamma$  состоит только из одной связной компоненты, решение  $\mathbf{E}$  задачи (7.42) единственно. Более подробную информацию о свойствах гармонических векторов  $\mathbf{E}_i$ , а также о необходимых и достаточных условиях существования решения краевой задачи (7.42) можно найти в [5, гл. 6], [12, гл. 1] и [60, гл. 9].

**1.7.6. Модель магнитостатики. Магнитная краевая задача.** Рассмотрим в рамках модели статического электромагнитного поля случай, когда

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}, \mathbf{D} = \mathbf{0}, \rho_e = 0, \quad (7.46)$$

так что электрическое поле отсутствует, а статическая модель примет вид уравнений (7.28), называемых *уравнениями или моделью магнитостатики*. Для выделения единственного решения уравнений (7.28) необходимо задать дополнительные условия, вид которых зависит от рассматриваемой задачи. Как в п. 1.7.5, мы рассмотрим два возможных случая.

1. Предположим, что все пространство заполнено идеальной магнитной средой. Это означает, что в  $\mathbb{R}^3$  выполняется соотношение  $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$  с  $\mu = \text{const}$ . С учетом этого соотношения уравнения (7.28) принимают вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}, \text{ div } \mathbf{H} = 0 \text{ в } \mathbb{R}^3. \quad (7.47)$$

Задача (7.47) представляет собой частный случай классической задачи

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}, \text{ div } \mathbf{H} = \theta \text{ в } \mathbb{R}^3, \quad (7.48)$$

закключающейся в нахождении векторного поля в пространстве  $\mathbb{R}^3$  по заданным ротору и дивергенции этого поля. Хорошо известно, что для выделения единственного решения этой задачи достаточно задать соответствующее условие на бесконечности. О методах решения такой задачи во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$  можно прочесть, например, в [59, гл. 1] и [60, гл. 9].

2. Рассмотрим более подробно второй случай, когда  $\mathbb{R}^3 = \Omega_1 \cup \overline{\Omega}_2$ , где  $\Omega_1$  – ограниченное открытое множество, причем  $\Omega_1$  заполнено идеальной магнитной средой, а второе множество  $\Omega_2$  является идеальным проводником. Эти предположения означают, что электрическое поле в  $\Omega_2$  отсутствует, а в области  $\Omega = \Omega_1$  оно определяется вектором  $\mathbf{H}$ , удовлетворяющим уравнениям магнитостатики (7.47). К уравнениям (7.47) следует добавить условия на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ , которые с учетом сделанных предположений и (7.21) сводятся к двум условиям

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = -\mathbf{J}_s, \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (7.49)$$

В рассматриваемой постановке граничную функцию  $\mathbf{J}_s$ , имеющую смысл плотности поверхностных токов на  $\Gamma$ , следует считать неизвестной функцией. В противном случае уравнения (7.47) пришлось бы рассматривать при двух граничных условиях (7.49), что заведомо переопределяет рассматриваемую задачу, делая ее некорректной. Присоединив к уравнениям (7.47) второе граничное условие (7.49), приходим к задаче нахождения вектора  $\mathbf{H}$  из условий

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \text{ в } \Omega, \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (7.50)$$

Указанная задача, называемая *магнитной краевой задачей*, является частным случаем общей неоднородной краевой задачи

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \operatorname{div} \mathbf{H} = \theta \text{ в } \Omega, \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = g \text{ на } \Gamma. \quad (7.51)$$

Здесь  $\theta$  и  $g$  – некоторые заданные функции. Задачу (7.51) принято называть *неоднородной краевой задачей магнитного типа*.

Как и выше, ограничимся исследованием единственности решения задачи (7.51). Для этого заметим, что разность  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1$  двух возможных решений задачи (7.51) является решением следующей краевой задачи:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0}, \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \text{ в } \Omega, \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (7.52)$$

Мы рассмотрим случай, когда область  $\Omega$  имеет вид тора (см. рис. 7.1,б). Как известно, тор не является односвязной областью. Однако его можно превратить в односвязную область, проведя в нем *разрез*  $\Sigma$  вдоль поперечного сечения, имеющий вид круга на рис. 7.1,б. Обозначим через  $\Omega_\Sigma = \Omega \setminus \Sigma$  соответствующую односвязную область и рассмотрим задачу нахождения функции  $\varphi$  из условий

$$\Delta \varphi = 0 \text{ в } \Omega_\Sigma, \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (7.53)$$

$$[\varphi]_\Sigma = C = \text{const}, \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_\Sigma = 0 \text{ на } \Sigma. \quad (7.54)$$

Здесь  $[\varphi]_\Sigma$  (либо  $[\partial \varphi / \partial n]_\Sigma$ ) обозначает скачок функции  $\varphi$  (либо ее нормальной производной  $\partial \varphi / \partial n$ ) при переходе через  $\Sigma$ , а условия (7.54) имеют смысл условий сопряжения на  $\Sigma$ . Можно показать (см. [59, гл. 1, §4] и ссылки там), что задача (7.53), (7.54) имеет единственное с точностью до мультипликативной константы решение  $\varphi$ . Положим

$$\mathbf{H} = \operatorname{grad} \varphi \quad (7.55)$$

и докажем, что вектор  $\mathbf{H}$  является искомым решением задачи (7.52). Действительно, используя (3.18) и (7.53), имеем:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{0}, \operatorname{div} \mathbf{H} = \Delta \varphi = 0 \text{ в } \Omega_\Sigma, \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Отсюда следует, что первые два уравнения в (7.52) выполняются всюду в области  $\Omega$ , кроме точек выбранного разреза  $\Sigma$ , которые являются внутренними для исходной области  $\Omega$ . Тем самым остается лишь показать, что уравнения в (7.52) выполняются также и в точках разреза  $\Sigma$ . Это можно сделать, используя условия (7.54) на разрезе, но требует использования дополнительного математического аппарата. Поэтому мы не будем на этом останавливаться, но отметим, что для области типа тора существует лишь единственный (с точностью до мультипликативной константы) вектор  $\mathbf{H}$ , являющийся решением однородной задачи (7.52). Чтобы получить этот вектор, надо провести в торе разрез  $\Sigma$ , превратив его в односвязную область, найти решение  $\varphi$  задачи (7.53), (7.54) и далее определить искомый вектор с помощью формулы (7.55).

Важно отметить, что аналогичный подход можно использовать и при нахождении всех решений задачи (7.52) в произвольной многосвязной области  $\Omega$ , т. е. опять нужно провести *разрезы*  $\Sigma_i$ , превращающие  $\Omega$  в односвязную область  $\Omega_*$ . Предположим, что число таких разрезов равно  $q$ . Мы отметим, что это число  $q$  является *инвариантом* области  $\Omega$ , т. е. оно не зависит от вида разрезов, а зависит лишь от топологической структуры области  $\Omega$ . Указанное число  $q$  называется *первым числом Бетти*. Можно показать, что задача (7.52) имеет ровно  $q$  линейно независимых решений  $\mathbf{H}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ . При этом  $\mathbf{H}_i = \text{grad} \varphi_i$ , где  $\varphi_i$  является решением задачи вида (7.53), (7.54) при  $\Sigma = \Sigma_i$ . Указанные векторы  $\mathbf{H}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ , называются *гармоническими векторами магнитного типа*. Таким образом, решение  $\mathbf{H}$  неоднородной задачи (7.51) определяется с точностью до  $q$  гармонических векторов  $\mathbf{H}_i$  магнитного типа. В частном случае, когда  $q = 0$ , т. е.  $\Omega$  является односвязной областью, решение  $\mathbf{H}$  задачи (7.51) единственно. Этот случай детально исследован в [56, с. 408–411], где приведена подробная процедура построения единственного решения задачи (7.51) для односвязной области. Более подробную информацию о свойствах гармонических векторов  $\mathbf{H}_i$ , а также необходимых и достаточных условиях существования решения краевой задачи (7.51) можно прочитать в [5, гл. 6], [12, гл. 1], [59, гл. 1], [60, гл. 9].

## § 1.8. Обзор других математических моделей

В этом параграфе приведем краткий вывод либо обзор ряда других математических моделей, описывающих некоторые важные физические процессы. Начнем с рассмотрения так называемых *сосредоточенных систем*, поведение которых зависит лишь от времени  $t$  и, следовательно, описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. В качестве сосредоточенных систем рассмотрим материальную точку, колеблющуюся вокруг положения равновесия, и колебательный контур.

**1.8.1. Модели колебательных процессов в сосредоточенных системах.** Пусть материальная точка массы  $m$  движется вдоль оси  $x$  под действием упругой силы, связанной с точкой покоя  $x = 0$ . Как известно, величина возвращающей упругой силы пропорциональна отклонению  $x$  и, стало быть, равна  $-kx$ , где  $k = \text{const} > 0$  – коэффициент упругости. Предположим также, что существует еще сила трения, пропорциональная скорости  $\dot{x}$  точки, направленная в сторону, ей противоположную, и, следовательно, равная  $-r\dot{x}$ , где  $r = \text{const} > 0$  – коэффициент трения. Пусть, наконец, на точку действует еще внешняя сила, заданная как функция  $F(t)$  времени  $t$ . Тогда по закону Ньютона произведение  $m\ddot{x}$  должно быть равно упругой силе, сложенной с силой трения и внешней силой. Это выражается следующим уравнением:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t), \quad (8.1)$$

которое является искомой моделью колебательного движения точки. Движение точки называется *свободным*, если  $F=0$ , и *вынужденным*, если  $F \neq 0$ .

В качестве второго примера рассмотрим колебательный контур, изображенный на рис. 8.1, обладающий индуктивностью  $L$ , сопротивлением  $R$  и емкостью  $C$ . Кроме того, пусть на контур действует внешняя э.д.с. (*электродвижущая сила*)  $\varphi(t)$ , вызванная, например, электромагнитными волнами. Обозначим зависящий от времени заряд конденсатора через  $Q$ , силу тока, протекающего в колебательном контуре, через  $I$ , а напряжение на его обкладках (*разность потенциалов*) через  $E$ . Как известно из школьного курса физики,  $Q = CE$ , а сила тока  $I$  равна скорости изменения заряда на обкладках конденсатора, взятой с противоположным знаком, т. е.  $I = -\dot{Q} = -C\dot{E}$ . Согласно закону Ома, произведение  $RI$  равно суммарной э.д.с., т. е. равно в данном случае напряжению  $E$  минус э.д.с. самоиндукции  $LI$  (она действует в противоположном направлении) плюс внешняя э.д.с.  $\varphi(t)$ . Математическое выражение этого закона имеет вид:  $RI = E - LI + \varphi(t)$  или  $-RC\dot{E} = E + LC\ddot{E} + \varphi(t)$ . Разделив на  $C$ , приходим к уравнению

$$L\ddot{E} + R\dot{E} + C^{-1}E = F(t), \quad F(t) = C^{-1}\varphi(t). \quad (8.2)$$

В результате для напряжения  $E$  в контуре мы получили уравнение того же типа, что и (8.1). Роль массы здесь играет индуктивность, роль трения

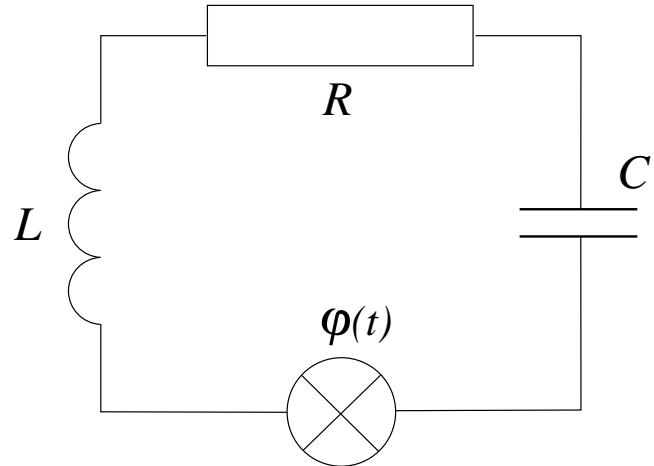


Рис. 8.1. Колебательный контур

– сопротивление, роль упругости – величина, обратная емкости, наконец, внешней силе соответствует внешняя э.д.с. (умноженная на константу).

**1.8.2. Модели процессов колебания струны, стержня и мембраны.** Струны, стержни и мембраны относятся к распределенным телам. Поэтому, в отличие от п. 1.8.1, происходящие в них колебательные процессы будут зависеть как от времени  $t$ , так и от одной или двух пространственных переменных. Строгий вывод моделей, описывающих поперечные колебания струны и мембраны либо продольные колебания стержня, можно найти во многих учебниках (см., например, [6, 11, 21, 49, 56]). Поэтому ограничимся здесь в основном обсуждением соответствующих моделей. Начнем рассмотрение со струны, закрепленной на концах. Если ее вывести из положения равновесия, то она начнет совершать колебания, издавая при этом звук. Определим физическую модель струны так: струна есть упругая, невесомая и абсолютно гибкая нить. Указанный выбор физической модели струны позволяет пренебречь толщиной струны, силой тяжести, а также силами, возникающими при ее изгибании. В качестве основной силы, действующей на струну, выберем силу натяжения, которая подчиняется закону Гука: натяжение струны пропорционально ее удлинению.

Предположим, что струна совершает поперечные колебания около своего положения равновесия, совпадающего с осью  $x$ . Обозначив величину отклонения струны от положения равновесия в точке  $x$  в момент  $t$  через  $u(x, t)$ , рассмотрим малые колебания струны, т. е. такие, в которых можно пренебречь величиной  $(u_x)^2$  по сравнению с единицей. Можно показать, что при выполнении указанных предположений процесс колебания струны описывается уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F. \quad (8.3)$$

Здесь  $T_0$  – постоянное натяжение,  $\rho$  – линейная плотность струны,  $F$  – плотность внешних сил, действующая на единицу длины. В случае, когда  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ , уравнение (8.3) принимает вид одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (8.4)$$

где  $a^2 = T_0/\rho_0$ ,  $f = F/\rho_0$ .

Для выделения единственного решения уравнения (8.3) либо (8.4) необходимо задать начальные условия, имеющие вид:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in (0, l), \quad (8.5)$$

и граничные условия на концах струны. В случае струны, закрепленной на

концах, они имеют вид

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0. \quad (8.6)$$

Если один из концов струны, например левый, закреплен, а правый – свободен, то вместо (8.6) используются условия

$$u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0. \quad (8.7)$$

Уравнение (8.3) либо (8.4) вместе с начальными условиями (8.5) и соответствующими краевыми условиями представляет собой начально-краевую задачу, которую следует решить для нахождения закона колебания струны.

Рассмотрим теперь стержень, расположенный вдоль оси  $x$ . Введем аналогично [6, с. 21] следующие обозначения:  $S(x)$  – площадь сечения стержня плоскостью, перпендикулярной к оси  $x$ , проведенной через точку  $x$ ,  $k(x)$  и  $\rho(x)$  – модуль Юнга и плотность стержня в сечении с абсциссой  $x$ ;  $u(x, t)$  – величина смещения вдоль стержня сечения с абсциссой  $x$  в момент  $t$ . Мы предполагаем, конечно, что величина смещения всех точек фиксированного сечения одинакова. Ясно, что продольные колебания полностью описываются функцией  $u$ . Будем рассматривать малые продольные колебания, т. е. такие колебания, в которых *натяжения*, возникающие в процессе колебаний, подчиняются закону Гука.

При указанных предположениях процесс продольных колебаний в стержне описывается следующим уравнением:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k S \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F, \quad (8.8)$$

где  $F$  – объемная плотность внешних сил. В случае, когда  $S = S_0 = \text{const}$ ,  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  и  $k = k_0 = \text{const}$ , уравнение (8.8) переходит в одномерное волновое уравнение (8.4), где  $a^2 = k_0/\rho_0$ ,  $f = F/\rho_0 S_0$ . Присоединив к (8.8) либо (8.4) начальные условия вида (8.5) и краевые условия вида (8.6), означающие, что стержень закреплен на обоих концах [21, с. 66], либо условия (8.7), если левый конец стержня закреплен, а правый конец стержня свободен, получим начально-краевую задачу, которую необходимо решить для нахождения закона продольных колебаний рассматриваемого стержня.

Рассмотрим далее мембрану, под которой будем понимать натянутую плоскую пленку, не сопротивляющуюся изгибу и сдвигу, но оказывающую сопротивление растяжению. Предположим, что мембрана совершает поперечные колебания, в которых смещение перпендикулярно плоскости  $x, y$ , где находится мембрана в состоянии равновесия. Обозначив через  $u(x, y, t)$  величину смещения точки  $(x, y)$  мембраны в момент  $t$ , будем рассматривать *малые колебания*, в которых можно пренебречь величинами  $u_x^2$  и  $u_y^2$  по сравнению с единицей.

Можно показать (см., например, [6, с. 26]), что при выполнении указанных предположений процесс колебания мембраны описывается уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F. \quad (8.9)$$

Здесь  $T_0$  – постоянное натяжение,  $\rho$  – поверхностная плотность мембраны,  $F$  – плотность внешних сил, действующих на единицу площади. В частном случае, когда  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ , уравнение (8.9) принимает вид двумерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f, \quad (8.10)$$

где  $a^2 = T_0/\rho_0$ ,  $f = F/\rho_0$ . Присоединив к (8.9) или (8.10) начальные условия и соответствующее краевое условие на границе  $\Gamma$ , получим начально-краевую задачу, которую необходимо решить для нахождения решения  $u$ .

**1.8.3. Модели электрических колебаний в проводах.** Из физики известно, что процесс прохождения электрического тока в проводе сопровождается появлением в его окрестности электромагнитного поля. Оно вызывает изменение как силы тока, так и напряжения. В результате в проводе возникает определенный колебательный процесс. Нашей целью является построение математической модели, описывающей этот процесс.

Проведем ось  $Ox$  вдоль оси провода, а начало координат поместим в один из его концов, длину провода обозначим через  $l$ . Силу тока  $I$  и напряжение  $v$  в каждой точке провода будем считать функциями абсциссы  $x$  и времени  $t$ . В силу законов, управляющих поведением электромагнитного поля, величины  $I$  и  $v$  связаны между собой некоторыми дифференциальными уравнениями с частными производными. При выводе этих уравнений будем предполагать, как в [21, с. 89], что *емкость, активное сопротивление, самоиндукция и утечка* распределены вдоль провода непрерывно и равномерно и определяются соответственно коэффициентами  $C$ ,  $R$ ,  $L$  и  $G$ , рассчитанными на единицу длины провода.

Рассмотрим часть провода, заключенную между двумя сечениями  $x = x_1$  и  $x = x_2$ . Применяя закон Ома к этой части провода, будем иметь:

$$R \int_{x_1}^{x_2} I(x, t) dx = v(x_1, t) - v(x_2, t) - L \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} dx. \quad (8.11)$$

В словесной форме закон Ома гласит: произведение сопротивления на величину тока, протекающего по участку  $(x_1, x_2)$  провода в момент  $t$ , равно сумме падения напряжения на участке  $(x_1, x_2)$  в момент  $t$  и э.д.с. самоиндукции участка  $(x_1, x_2)$  в момент  $t$  (сравните с законом Ома для сосредоточенной системы – колебательного контура, приведенным в п. 1.8.1).



Так как, с другой стороны,  $v(x_1, t) - v(x_2, t) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} dx$ , то из (8.11) приходим к соотношению

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial I}{\partial t} + RI \right) dx = 0.$$

Из него с учетом произвольности  $x_1$  и  $x_2$  следует в силу леммы 1.1, что

$$\frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial I}{\partial t} + RI = 0. \quad (8.12)$$

Чтобы получить второе уравнение относительно  $I$  и  $v$ , воспользуемся фундаментальным законом сохранения количества электричества на участке  $(x_1, x_2)$ . Согласно этому закону количество электричества

$$I(x_1, t) - I(x_2, t) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial I}{\partial x} dx,$$

протекающего через рассматриваемый участок  $(x_1, x_2)$  провода за единицу времени, равно сумме количества электричества  $C \int_{x_1}^{x_2} (\partial v / \partial t) dx$ , необходимого для зарядки этого участка провода и количества электричества  $G \int_{x_1}^{x_2} v dx$ , “утекающего” из провода вследствие несовершенства изоляции. С учетом этого приходим к следующему соотношению:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial I}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv \right) dx = 0. \quad (8.13)$$

Из него, как и выше, получаем уравнение

$$\frac{\partial I}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0. \quad (8.14)$$

Уравнения (8.12), (8.14) и представляют собой искомую математическую модель относительно величин  $I$  и  $v$ , описывающую при сделанных выше предположениях распространение электрических колебаний в проводах.

**1.8.4. Телеграфное уравнение.** Как уже указывалось в § 1.6, с математической точки зрения удобнее работать с одним скалярным уравнением относительно одной неизвестной функции  $v$  или  $I$ , нежели с двумя уравнениями относительно двух функций  $v$  и  $I$ . Чтобы получить соответствующее уравнение, продифференцируем уравнение (8.12) по  $x$ , а уравнение (8.14) – по  $t$  и затем из найденных выражений исключим производную  $\partial^2 I / \partial x \partial t$ . В результате получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка относительно  $v$ :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial v}{\partial t} + GRv.$$

Аналогично выводится уравнение для силы тока  $I$ , имеющее вид

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial I}{\partial t} + GRI.$$

Таким образом, напряжение  $v$  и сила тока  $I$  удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению вида

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2b_0 \frac{\partial w}{\partial t} + c_0 w. \quad (8.15)$$

Здесь постоянные коэффициенты  $a_0, b_0, c_0$  определяется формулами:  $a_0 = LC$ ,  $2b_0 = RC + GL$ ,  $c_0 = GR$ . (8.15) называют *телеграфным уравнением*.

Если ввести новую функцию  $u$ , полагая  $w = e^{(-b_0/a_0)t}u$ , то уравнение (8.15) примет более простой вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 u, \quad (8.16)$$

где  $a = 1/\sqrt{a_0}$ ,  $b = \sqrt{b_0^2 - a_0 c_0}/a_0$ . Если, кроме того, пренебречь потерями через изоляцию и сопротивлением току, полагая  $G = R = 0$ , то (8.16) переходит в одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (8.17)$$

где  $a = \sqrt{1/LC}$ . Интересно, что к этому же уравнению сводится уравнение (8.16) в случае, когда  $G$  и  $R$  не равны нулю, а связаны между собой соотношением  $GL = RC$ . При выполнении этого условия электрические линии называются *линиями без искажения*. Присоединив к (8.16) или (8.17) начальные условия вида (8.5) и соответствующие краевые условия на концах провода  $x = 0$  и  $x = l$ , приведённые, например в [21, с. 97], получим начально-краевую задачу, которую необходимо решить для нахождения искомой функции  $u$ . Впрочем, в некоторых случаях провод является настолько длинным, что его можно считать простирающимся в обе стороны до бесконечности. В этом случае для выделения единственного решения достаточно задать лишь начальные условия на всей вещественной оси  $\mathbb{R}$  (см. об этом подробнее в [21, гл. 7]).

**1.8.5. Уравнение Шрёдингера.** Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{R}^3$  внешнее потенциальное силовое поле с потенциалом  $V(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ . Предположим, что под действием указанного силового поля движется квантовая частица массы  $m$ . Состояние частицы в квантовой механике принято описывать с помощью так называемой волновой функции (см., например, [31]). Согласно определению волновой функции выражение  $|\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}$  описывает вероятность того, что частица будет находиться в окрестности точки

$\mathbf{x}$  в момент времени  $t$ . В квантовой механике постулируется (см., например, [31]), что поведение функции  $\psi$  описывается так называемым *уравнением Шрёдингера*, названным так в честь известного австрийского физика Schrödinger (1887–1961). Оно имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi. \quad (8.18)$$

Здесь  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$  эрг.с – постоянная Планка, введенная знаменитым немецким физиком М. Планк (1858–1947). Если энергия  $E$  частицы имеет определенное значение, то такое ее состояние называется *стационарным*. В этом случае *волновая функция*  $\psi$  представима в виде

$$\psi(x, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right) \Psi(\mathbf{x}).$$

Здесь  $\Psi$  – *стационарная волновая функция*, удовлетворяющая в силу (8.18) *стационарному уравнению Шрёдингера*

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \Psi + V\Psi = E\Psi. \quad (8.19)$$

Если  $V = 0$ , что физически отвечает случаю *свободной частицы*, то стационарное уравнение Шрёдингера превращается в уравнение

$$\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi + E\psi = 0, \quad (8.20)$$

формально совпадающее с уравнением Гельмгольца (6.37). Уравнения (8.18) и (8.19) представляют собой простейшие математические модели, используемые в квантовой механике. Начальные и краевые условия для них формулируются так же, как и для уравнения теплопроводности либо уравнения Пуассона.

**1.8.6. Уравнение переноса излучения.** Если длина свободного пробега частиц среды значительно больше их размеров, то для описания процесса распространения частиц вместо приближения сплошной среды используется другое приближение, приводящее к так называемому *уравнению переноса*. Следуя [11, с. 51], приведем здесь уравнение переноса при следующих предположениях:

- 1) скорости всех частиц одинаковы и равны  $v$ ;
- 2) столкновения частиц пренебрежимо редки;
- 3) частицы сталкиваются с неподвижными ядрами среды;  $l(\mathbf{x})$  – их средняя длина свободного пробега в точке  $\mathbf{x}$ ;
- 4) при столкновении частицы с неподвижным ядром в точке  $\mathbf{x}$  происходит одно из следующих трех случайных событий: а) с вероятностью  $p_1(\mathbf{x})$

частица рассеивается на ядре, отскакивая от него, как упругий шарик; b) с вероятностью  $p_2(\mathbf{x})$  частица захватывается ядром; c) с вероятностью  $p_3 = 1 - p_1 - p_2$  частица делит ядро, в результате чего появляется  $\nu(\mathbf{x}) > 1$  таких же частиц (при этом считается, что частица, разделившая ядро, исчезает);

5) распределение частиц по направлениям как после рассеяния, так и после деления является равномерным (т. е. изотропным).

Обозначим через  $n(\mathbf{x}, \mathbf{s}, t)$  плотность частиц в точке  $\mathbf{x}$ , летящих в направлении  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ ,  $|\mathbf{s}| = 1$ , в момент  $t$ , через  $F(\mathbf{x}, \mathbf{s}, t)$  - плотность объемных источников. Введём функцию  $\psi = vn$ , зависящую от  $\mathbf{x}, \mathbf{s}, t$  и называемую *потоком частиц*. Можно показать, что при указанных предположениях поведение функции  $\psi$  описывается следующим интегродифференциальным уравнением:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{s} \cdot \text{grad} \psi + \alpha \psi = \frac{\alpha h}{4\pi} \int_{S_1} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{s}', t) d\mathbf{s}' + F, \quad (8.21)$$

где  $\alpha = 1/l$ ,  $h = p_1 + \nu p_3$ . Уравнение (8.21) называется *односкоростным уравнением переноса* для процессов с изотропным рассеянием.

Если процесс переноса стационарен, так что функции  $\psi$  и  $F$  не зависят от  $t$ , то уравнение переноса (8.21) принимает вид

$$\mathbf{s} \cdot \text{grad} \psi + \alpha \psi = \frac{\alpha h}{4\pi} \int_{S_1} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{s}') d\mathbf{s}' + F. \quad (8.22)$$

Уравнения (8.21) и (8.22) представляют собой простейшие математические модели, используемые в теории переноса излучения.

# ГЛАВА 2. Общие вопросы теории уравнений в частных производных

## § 2.1. Основные понятия теории уравнений в частных производных

**2.1.1. Уравнения в частных производных и их решения.** В гл. 1 на достаточно большом количестве примеров было показано, что математическое моделирование физических процессов приводит к необходимости решения начально-краевых либо краевых задач для волнового уравнения, уравнения теплопроводности, уравнений Лапласа, Пуассона, Гельмгольца и других дифференциальных уравнений либо их систем. Указанные уравнения являются важными представителями широкого класса математических объектов, называемых дифференциальными уравнениями в частных производных.

В общем случае под *дифференциальным уравнением в частных производных*, рассматриваемым в некоторой области  $\Omega$  пространства  $\mathbb{R}^n$ , понимается соотношение, связывающее неизвестную функцию  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  независимых переменных  $x_1, \dots, x_n$  — координат произвольной точки  $x \in \Omega$  и частные производные от функции  $u$  вида

$$F \left( x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $F$  — заданная функция своих аргументов. Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение (1.1), называется *порядком уравнения в частных производных*. В соответствии с введенным определением уравнение (1.1) является уравнением второго порядка, если  $F$  явно зависит хотя бы от одной производной второго порядка, скажем  $r = \partial^2 u / \partial x_1^2$ , в том смысле, что  $\partial F / \partial r \neq 0$ , причем  $F$  не зависит от производных более высокого порядка.

Общее уравнение в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными  $x$  и  $y$  может быть записано в виде

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0. \quad (1.2)$$

Здесь  $F$  — заданная функция своих аргументов. В частности, она может не зависеть от  $x, y, u$  и одной из производных  $p = \partial u / \partial x$  или  $q = \partial u / \partial y$ , но непременно должна зависеть от другой производной, так что выполняется условие

$$\left| \frac{\partial F}{\partial p} \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial q} \right| \neq 0.$$

Аналогично общее уравнение в частных производных второго порядка имеет вид

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0, \quad (1.3)$$

где функция  $F$  явно зависит хотя бы от одной производной второго порядка. В дальнейшем при рассмотрении общих уравнений второго порядка указанное свойство явной зависимости функции  $F$  хотя бы от одной производной второго порядка всегда будет предполагаться выполненным.

Очень часто рассматриваемые уравнения являются линейными или квазилинейными. Уравнение в частных производных называется *квазилинейным*, если оно линейно относительно всех старших производных от неизвестной функции. Так, уравнение

$$A(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(\dots) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(\dots) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(\dots) = 0, \quad (1.4)$$

где коэффициенты  $B$ ,  $C$  и правая часть  $F$  зависят от тех же аргументов, что и  $A$ , есть квазилинейное уравнение второго порядка. Уравнение в частных производных называется *линейным*, если оно линейно относительно искомой функции и ее частных производных. Так, уравнение

$$\begin{aligned} & A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + G(x, y)u = F(x, y) \end{aligned}$$

есть линейное уравнение второго порядка относительно функции  $u$ . *Решением* уравнения в частных производных (1.1) в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  называется любая дифференцируемая нужное количество раз функция  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , которая, будучи подставлена в (1.1) вместо неизвестной функции, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным.

Несмотря на то что в гл. 1 был рассмотрен широкий класс физических процессов и явлений, применение для их исследования идей математического моделирования привело нас фактически к трем уравнениям второго порядка. Уравнение Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f \quad (1.5)$$

моделирует распределение гравитационного или электростатического потенциала в пространстве, стационарные процессы переноса тепла и диффузии, поведение потенциала скорости безвихревого движения идеальной жидкости и другие стационарные процессы. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f \quad (1.6)$$

моделирует нестационарные процессы переноса тепла и диффузии вещества, диффузию электромагнитного поля в электропроводящей среде и т. д. Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u + f \quad (1.7)$$

моделирует распространение в однородных средах звуковых и электромагнитных волн, поперечные колебания струны и мембраны, продольные колебания в однородном стержне, свободные электрические колебания в электрической линии без искажений и т. д. Мы также вывели в гл. 1 уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = -f, \quad (1.8)$$

моделирующее гармонические волновые процессы. Однако, как будет дальше показано, свойства решений уравнения Гельмгольца близки к свойствам решений уравнения Пуассона, поскольку оба уравнения отличаются лишь младшими членами, имея одну и ту же главную часть  $\Delta u$ .

Оказывается, что именно эти три уравнения (1.5)–(1.7) определяют основные типы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (см. п. 2.1.2.). Поэтому уравнения (1.5)–(1.7) часто называют *основными уравнениями математической физики*. Строгое математическое изучение указанных уравнений позволит заложить, с одной стороны, основы теории уравнений с частными производными второго порядка. С другой стороны, это позволит изучить свойства широкого класса физических процессов и явлений, описываемых указанными уравнениями.

Подчеркнем, что каждое из уравнений (1.5)–(1.8) имеет бесчисленное множество решений. При решении конкретной физической задачи необходимо из всех этих решений выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из ее физического смысла. Как следует из гл. 1, такими дополнительными условиями чаще всего являются *начальные условия*, относящиеся к моменту времени, с которого начинается изучение данного физического процесса или явления, и/или *граничные условия*, т. е. условия, заданные на границе рассматриваемой области. Таким образом, *задачи математической физики состоят в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих начальным и/или граничным условиям*.

Отметим, что уравнение (1.6) является частным случаем нестационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} u) + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} u + \gamma u = f, \quad (1.9)$$

моделирующего распространение вещества в среде с переменным коэффициентом диффузии  $\eta$ , движущейся со скоростью  $\mathbf{a}$ , с учетом эффекта поглощения вещества за счет химических реакций, описываемого слагаемым

$\gamma u$ . При  $\gamma = 0$  и  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$  уравнение (1.9) совпадает с точностью до обозначений с уравнением распространения тепла (4.21) гл. 1 в движущейся среде. В другом важном частном случае, когда эффектами диффузии можно пренебречь по сравнению с конвекцией, полагая  $\eta = 0$ , уравнение (1.9) переходит в уравнение 1-го порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} u + \gamma u = f. \quad (1.10)$$

При  $\gamma = 0$  уравнение (1.10) описывает перенос вещества либо тепла за счет конвекции и называется уравнением переноса либо уравнением адвекции.

Уравнение (1.10) играет важную роль при изучении процессов распространения вещества или тепла в средах, в которых можно пренебречь эффектами диффузии. Кроме того, необходимость в исследовании уравнения (1.10) возникает и в случае, когда для изучения общего уравнения конвекции-диффузии (1.9) применяется метод расщепления по физическим процессам (см. [44]). Ввиду важности уравнения (1.10) следующий параграф будет целиком посвящен изучению свойств его решений и изучению корректных постановок начально-краевых задач для уравнения (1.10), а также для его одномерного либо стационарного аналогов. Там же мы введем фундаментальное понятие характеристики уравнения (1.10) и покажем, что задача интегрирования уравнения (1.10) эквивалентна интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений для его характеристик.

**2.1.2. Типы уравнений второго порядка.** Пусть  $\Omega$  – произвольная область в  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим в  $\Omega$  уравнение второго порядка вида

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f \left( x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = 0. \quad (1.11)$$

Здесь коэффициенты  $a_{ij}$  – заданные функции координат  $x_1, \dots, x_n$  точки  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f$  – заданная функция своих аргументов, причем предполагается, что  $a_{ij} = a_{ji}$ . Все функции и независимые переменные считаем вещественными.

В этом пункте мы приведем классификацию уравнений вида (1.11) в точке. Зафиксируем определенную точку  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  в области  $\Omega$  и составим квадратичную форму, действующую по формуле:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 t_i t_j \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1^0, \dots, x_n^0) t_i t_j. \quad (1.12)$$

Напомним, что квадратичная форма вида (1.12) называется *положительно либо отрицательно определенной*, если существует такая констан-



та  $c > 0$ , что выполняется условие

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 t_i t_j \geq c \sum_{i=1}^n t_i^2, \text{ либо } \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 t_i t_j \leq -c \sum_{i=1}^n t_i^2 \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Из курса алгебры хорошо известно [17, с. 192], что существует невырожденное линейное преобразование переменных

$$t_k = \sum_{i=1}^n c_{ik} \xi_i, \quad (1.13)$$

которое приводит матрицу  $((a_{ij}^0))$  квадратичной формы (1.12) к *каноническому* (диагональному) виду, а каноническую формулу (1.12) – к виду

$$\sum_{i=1}^m \pm \xi_i^2, \quad 1 \leq m \leq n. \quad (1.14)$$

Существует много невырожденных вещественных преобразований, приводящих форму (1.12) к виду (1.14), но согласно закону инерции квадратичных форм число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы *инвариантно относительно линейного преобразования*, т. е. не зависит от выбора линейного преобразования [17, с. 198]. Известно также, что уравнение  $|a_{ij}^0 - \lambda \delta_{ij}| = 0$ , где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, имеет лишь вещественные корни, называемые *собственными значениями* матрицы  $((a_{ij}^0))$ , причем число членов в (1.14) с положительными либо отрицательными знаками равно числу положительных либо отрицательных собственных значений матрицы  $((a_{ij}^0))$ .

Если преобразование (1.13) приводит форму (1.12) к каноническому виду (1.14), то, как легко проверить, преобразование

$$\xi_k = \sum_{i=1}^n c_{ki} x_i \quad (1.15)$$

приводит уравнение (1.11) к виду

$$\sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \dots = 0. \quad (1.16)$$

Здесь коэффициенты  $\tilde{a}_{ij}(x)$  таковы, что в точке  $x_0$  выполняются соотношения

$$\tilde{a}_{ij}(x_0) = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } i = j \leq m, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \text{ или если } i = j > m. \end{cases}$$

Мы выписали только члены со старшими производными от функции  $u$ . Вид (1.16) уравнения (1.11) называется *каноническим видом* в точке  $x_0$ .

Итак, для каждой точки  $x_0 \in \Omega$  можно указать такое невырожденное преобразование (1.15) независимых переменных, которое приводит уравнение (1.11) к каноническому виду в этой точке. Именно на этом свойстве основана классификация уравнений второго порядка. Введем следующее определение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.** Уравнение (1.11) называется *эллиптическим* в точке  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ , если в уравнении (1.16) при  $x = x_0$  все коэффициенты  $\tilde{a}_{ii}(x_0)$ ,  $i = 1, \dots, n$  отличны от нуля и имеют один знак, причем  $m = n$ . Уравнение (1.11) называется *гиперболическим* в точке  $x_0$ , если в (1.16) все коэффициенты  $\tilde{a}_{ii}(x_0)$  имеют один и тот же знак, за исключением одного, который имеет противоположный знак, причем  $m = n$ . Уравнение (1.11) называется *ультрагиперболическим* в точке  $x_0$ , если в (1.16) имеется больше одного положительного коэффициента  $\tilde{a}_{ii}(x_0)$  и больше одного отрицательного, причем  $m = n$ . Уравнение (1.11) называется *параболическим* в широком смысле в точке  $x_0$ , если среди  $\tilde{a}_{ii}(x_0)$  имеются равные нулю, т. е. если  $m < n$ . Уравнение (1.11) называется *параболическим* в узком смысле или просто *параболическим* в точке  $x_0$ , если только один из коэффициентов  $\tilde{a}_{ii}(x_0)$ , пусть это будет  $\tilde{a}_{nn}(x_0)$ , равен нулю, а другие имеют одинаковые знаки, причем коэффициент при  $\partial u / \partial \xi_n$  отличен от нуля.

В основу определения 1.1 взяты свойства в точке  $x_0$  коэффициентов уравнения (1.16), полученного преобразованием исходного уравнения (1.11) с помощью линейной замены переменных. Можно дать эквивалентное определение, основываясь на свойствах квадратичной формы (1.12). Ограничившись рассмотрением лишь чисто эллиптических, гиперболических и параболических уравнений, приведем следующее определение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1а.** Уравнение (1.11) называется *уравнением эллиптического типа* в точке  $x_0$ , если в этой точке квадратичная форма (1.12) положительно или отрицательно определена. Уравнение (1.11) называется *уравнением гиперболического типа* в точке  $x_0$ , если в этой точке квадратичная форма (1.12) при приведении ее к сумме квадратов имеет все коэффициенты, кроме одного, определенного знака, а оставшийся один коэффициент — противоположного знака. Уравнение (1.11) называется *параболическим* в узком смысле или просто *уравнением параболического типа* в точке  $x_0$ , если в этой точке квадратичная форма (1.12) при приведении ее к сумме квадратов имеет лишь один коэффициент, равный нулю, а все остальные коэффициенты имеют одинаковые знаки.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.** Уравнение (1.11) называют *уравнением эллиптического (соотв. гиперболического либо параболического) типа* в области  $\Omega$ , если в каждой точке  $x_0 \in \Omega$  оно является уравнением эллиптического

(соотв. гиперболического либо параболического) типа.

Подчеркнем, что тип уравнения в частных производных второго порядка определяется только коэффициентами уравнения, стоящими при старших производных, т. е. при производных второго порядка. Таким образом, тип не зависит от характера вхождения в него самой функции и ее частных производных  $\partial u / \partial x_i$ . Последние могут даже отсутствовать либо входить в уравнение достаточно сложным нелинейным образом. Легко убедиться, основываясь на приведенных определениях, что в любой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  уравнение Лапласа (либо Пуассона, Гельмгольца) имеет эллиптический тип, волновое уравнение имеет гиперболический тип, а уравнение теплопроводности имеет параболический тип.

Конечно, среди огромного количества уравнений в частных производных, описывающих разнообразные процессы, встречаются уравнения *смешанного типа*, т. е. уравнения, тип которых является различным в различных подобластях рассматриваемой области. Так, в линейной газовой динамике широко используется *уравнение Трикоми*:

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1.17)$$

Уравнение (1.17) является эллиптическим в любой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , лежащей выше оси  $x$ , тогда как в любой области  $\Omega$ , лежащей ниже оси  $x$ , оно имеет гиперболический тип. Указанные факты означают, что в любой области  $\Omega$ , имеющей непустое пересечение с осью  $x$ , уравнение (1.17) является уравнением смешанного типа. В физическом плане уравнение (1.17) моделирует дозвуковое течение газа в области эллиптичности и сверхзвуковое течение – в области гиперболичности. Исследованию уравнений смешанного типа посвящено большое количество работ. Однако ниже мы не будем заниматься изучением уравнений смешанного типа, поскольку это выходит за рамки программы курса “Уравнения математической физики”. Мы также не будем заниматься ультрагиперболическими уравнениями и уравнениями, параболическими в широком смысле. В соответствии с этим ниже под термином “параболические уравнения” будем понимать только уравнения, параболические в узком смысле.

В силу определения 1.2 уравнение (1.11) является эллиптическим в области  $\Omega$  тогда и только тогда, когда коэффициенты  $a_{ij}$  удовлетворяют (быть может, после умножения на  $-1$ ) условию

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) t_i t_j \geq \alpha(x) \sum_{i=1}^n t_i^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (1.18)$$

Здесь  $\alpha$  – некоторая положительная в  $\Omega$  функция. Если, более того, суще-

ствуют такие положительные константы  $\alpha$  и  $\beta$ , что выполняются условия

$$\alpha \sum_{i=1}^n t_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) t_i t_j \leq \beta \sum_{i=1}^n t_i^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.19)$$

то уравнение (1.11) называется *равномерно эллиптическим* в  $\Omega$ . Ясно, что каждое эллиптическое уравнение с постоянными коэффициентами является равномерно эллиптическим в области  $\Omega$ . Но не каждое эллиптическое в  $\Omega$  уравнение является равномерно эллиптическим. Примером является уравнение Трикоми (1.17), которое, будучи эллиптическим в любой области  $\Omega$ , лежащей выше оси  $x$ , не является равномерно эллиптическим в указанной области  $\Omega$ , если ее замыкание  $\bar{\Omega}$  содержит точки оси  $x$ .

По аналогичной схеме можно ввести понятие равномерной гиперболичности и параболичности дифференциального уравнения. Ограничимся здесь рассмотрением уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x, t, u, \nabla u, \frac{\partial u}{\partial t}), \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x, t, u, \nabla u), \quad (1.21)$$

где  $\nabla u = (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2, \dots, \partial u / \partial x_n)$ . В соответствии с определением 1.2 условие гиперболичности уравнения (1.19) (либо параболичности уравнения (1.20) в произвольной области  $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t^1$  эквивалентно условию

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) t_i t_j \geq \alpha(x, t) \sum_{i=1}^n t_i^2 \quad \forall (x, t) \in D, \quad (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.22)$$

где  $\alpha$  – положительная функция точек  $(x, t) \in D$ . Если к тому же существуют положительные константы  $\alpha$  и  $\beta$ , с которыми выполняются условия

$$\alpha \sum_{i=1}^n t_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) t_i t_j \leq \beta \sum_{i=1}^n t_i^2 \quad \forall (x, t) \in D, \quad (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.23)$$

то уравнение (1.19) (либо (1.20) называется *равномерно гиперболическим* (либо *параболическим*) в области  $D$ .

**2.1.3. Корректно и некорректно поставленные задачи.** Всякую задачу математической физики можно записать в виде

$$Lu = f, \quad u \in U, \quad f \in F. \quad (1.24)$$

Здесь  $u$  – неизвестная функция (либо вектор-функция),  $f$  – заданная функция (либо вектор-функция),  $L$  – дифференциальный оператор, который символически показывает, какие действия нужно проделать с функцией  $u$ , чтобы получить правую часть  $f$ ,  $U$  – пространство, в котором ищется решение  $u$ ,  $F$  – пространство, которому принадлежит  $f$ . Пространства  $U$  и  $F$  обычно можно считать нормированными с нормами  $\|\cdot\|_U$  и  $\|\cdot\|_F$  соответственно.

Напомним, что линейное пространство  $U$  называется *нормированным*, если каждому его элементу  $u$  можно поставить в соответствие вещественное число  $\|u\|$  (норму  $u$ ) так, что выполняются следующие три условия:

- 1)  $\|u\| \geq 0 \forall u \in U$ ,  $\|u\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $u = 0$ ;
- 2)  $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| \forall u \in U, \lambda \in \mathbb{R}$ ; 3)  $\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\| \forall u_1, u_2 \in U$ .

Последовательность  $\{u_n\} \in U$  называют *фундаментальной*, если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N = N(\varepsilon)$  такой, что выполняется неравенство  $\|u_{n+p} - u_n\| < \varepsilon \forall n \geq N$  и любого натурального числа  $p$ .

Нормированное пространство называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность  $\{u_n\}$  сходится к элементу из пространства  $U$ . Полное нормированное пространство называется *банаховым*.

Приведем примеры нормированных пространств. Пусть  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$  (либо  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ) обозначает множество всех целых неотрицательных (либо целых положительных) чисел. Через  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  обозначим мультииндекс, т. е. вектор с компонентами  $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ . Для функции  $f$  будем обозначать через  $D^\alpha f$  частную производную порядка  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  вида

$$D^\alpha f(x) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  с границей  $\Gamma$ . Обозначим через  $C^m(\Omega)$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ , множество всех функций  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $m$  раз непрерывно дифференцируемых в  $\Omega$ . При  $m = 0$  имеем пространство  $C(\Omega) = C^0(\Omega)$ , состоящее из непрерывных в  $\Omega$  функций. Через  $C^\infty(\Omega)$  обозначим пространство функций  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , бесконечно дифференцируемых в  $\Omega$ . Через  $C^m(\overline{\Omega})$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$  (либо  $C^\infty(\overline{\Omega})$ ) обозначим множество функций из  $C^m(\Omega)$  (либо  $C^\infty(\Omega)$ ), все производные которых порядка  $\leq m$  (либо любого порядка) допускают непрерывное продолжение на  $\overline{\Omega}$ .

Известно [28], что в случае ограниченной области  $\Omega$  пространство  $C^m(\overline{\Omega})$  является нормированным и, более того, *банаховым* по норме

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{k=0}^m \sup_{|\alpha|=k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)|. \quad (1.25)$$

В то же время пространства  $C^m(\Omega)$  и  $C^\infty(\overline{\Omega})$ , в отличие от  $C^m(\overline{\Omega})$ , не являются банаховыми. В случае неограниченной области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$  положим  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  и условимся под  $C^m(\overline{\Omega})$  понимать множество функций в  $\Omega$ , все производные которых до порядка  $m$  включительно существуют, ограничены в  $\Omega$  и допускают непрерывное продолжение на  $\Omega \cup \Gamma$ . Можно показать, что указанное пространство также является банаховым по норме (1.25). Другие примеры нормированных пространств будут приводиться ниже при рассмотрении конкретных задач математической физики. Предполагая, что линейные пространства  $U$  и  $F$  в (1.25) являются нормированными с нормами  $\|\cdot\|_U$  и  $\|\cdot\|_F$  соответственно, введем следующее фундаментальное понятие.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.** *Задача нахождения решения  $u \in U$  уравнения (1.25) называется корректно поставленной на паре  $(F, U)$ , если: 1) решение  $u \in U$  существует для любого элемента  $f \in F$ , 2) решение  $u \in U$  уравнения (1.25) единственно в  $U$ , 3) решение  $u \in U$  непрерывно зависит от  $f$  в том смысле, что малому в норме пространства  $F$  изменению правой части  $f$  отвечает малое в норме пространства  $U$  изменение решения  $u$ . Если не выполняется хотя бы одно из условий 1) - 3), то данная задача называется некорректно поставленной.*

Свойство 3) называется также *устойчивостью* решения. Согласно ему для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такое число  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , что если  $\|f_1 - f_2\|_F \leq \delta$  и  $Lu_1 = f_1$ ,  $Lu_2 = f_2$ , то  $\|u_1 - u_2\|_U \leq \varepsilon$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.** В задачах математической физики оператор  $L$  обычно линеен, т. е. удовлетворяет условию

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha Lu + \beta Lv \quad \forall u, v \in U \text{ и } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Хорошо известно, что свойство единственности решения линейного уравнения (1.25) эквивалентно *обратимости* оператора  $L$ , т. е. существованию обратного оператора  $L^{-1}$ . Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что однородное уравнение  $Lu = 0$  имеет лишь тривиальное решение. Поэтому для линейных задач доказательство единственности сводится к доказательству единственности тривиального (нулевого) решения однородного уравнения (1.25) (при  $f = 0$ ). Точно так же доказательство устойчивости (либо неустойчивости) сводится к доказательству устойчивости (либо неустойчивости) тривиального решения. Этими фактами мы в дальнейшем часто будем пользоваться при исследовании единственности и устойчивости решений линейных задач математической физики.

Примером корректно поставленной задачи является задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Здесь  $f$  – непрерывная в некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  функция, удовлетворяющая условию Липшица по  $y$ . Доказательство корректности этой задачи,

т. е. существования, единственности и непрерывной зависимости решения  $u$  от исходных данных  $x_0$  и  $y_0$ , можно найти, например, в [51, гл. 2].

Существуют, конечно, и некорректно поставленные задачи. Ограничимся здесь приведением примера задачи, в которой отсутствует непрерывная зависимость решения от исходных данных. Первый пример такого типа был построен, по-видимому, французским математиком Жаком Адамаром (J.S. Hadamard, 1865 – 1963) в начале 20-го столетия (см. [1]). Он рассмотрел следующую задачу Коши для двумерного уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ в } \mathbb{R}^2, \quad u|_{y=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \psi(x) \text{ в } \mathbb{R}. \quad (1.26)$$

В случае, когда функции  $\varphi$  и  $\psi$  аналитичны в  $\mathbb{R}$ , решение  $u$  задачи Коши существует и единственно. Это вытекает, например, из теоремы Ковалевской (см. п. 2.1.4). Легко проверить, что при  $\varphi = \varphi_1 = 0$ ,  $\psi = \psi_1(x) = (1/a)\sin ax$ , где  $a = \text{const} > 0$ , решение  $u$  задачи (1.26) имеет вид

$$u(x, y) = \frac{1}{a^2} \sin ax \operatorname{sh} ay, \quad (1.27)$$

тогда как при  $\varphi = \varphi_2 = 0$ ,  $\psi = \psi_2 = 0$  единственным решением задачи (1.26) является (в силу той же теоремы Ковалевской) функция  $u \equiv 0$ . Рассматривая для конкретности решение  $u$  в полосе  $\Omega = \{-\infty < x < \infty, 0 < y < b\}$ ,  $b > 0$ , условимся оценивать отклонения начальных данных и решений соответственно в нормах пространств  $C(\mathbb{R})$  и  $C(\overline{\Omega})$ , где  $\overline{\Omega} = \{-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq b\}$ . Поскольку по определению

$$\|\psi\|_{C(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)|, \quad \|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{(x,y) \in \overline{\Omega}} |u(x, y)|,$$

то имеем

$$\|\psi_1 - \psi_2\|_{C(\mathbb{R})} = \|\psi_1\|_{C(\mathbb{R})} \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_1(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{a} \sin ax \right| = \frac{1}{a},$$

$$\|u_1 - u_2\|_{C(\overline{\Omega})} = \|u_1\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{(x,y) \in \overline{\Omega}} |u_1(x, y)| = \frac{1}{a^2} \sup_{y \in [0, b]} \operatorname{sh} ay = \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} ab.$$

Отсюда видно, что величина  $\|\psi_1\|_{C(\mathbb{R})}$  может быть сделана сколь угодно малой при достаточно больших  $a$ . В то же время величина  $\|u_1\|_{C(\overline{\Omega})}$ , наоборот, может быть сделана сколь угодно большой при больших значениях  $a$ . Это означает неустойчивость нулевого решения однородной задачи (1.26). Отсюда вытекает с учетом замечания 1.1 некорректность задачи (1.26).

Понятие корректно поставленной задачи было введено в 1923 г. Жаком Адамаром. Он высказал свою точку зрения о том, что всякая математическая задача, отвечающая какой-либо физической задаче, должна быть

корректной и, в частности, устойчивой. Требование устойчивости решения Адамар мотивировал тем обстоятельством, что физические данные определяются, как правило, приближенно с помощью экспериментов. В связи с этим “физикам” надо иметь уверенность в том, что решение рассматриваемой ими математической задачи, моделирующей физический процесс, не будет сильно зависеть от погрешностей измерений. В самом деле, какую физическую интерпретацию может иметь решение задачи, у которой сколь угодно малым изменениям исходных данных могут отвечать достаточно большие изменения решения? Кроме того, к задачам такого типа затруднительно применять приближенные методы решения.

Долгое время в математической литературе господствовала точка зрения Адамара о нецелесообразности изучения некорректно поставленных, по Адамару, задач. Такая точка зрения сохранялась и после появления в 1943г. фундаментальной работы А.Н. Тихонова [52], в которой впервые была указана практическая важность некорректных, по Адамару, задач и сформулированы новые требования, предъявляемые к их постановкам. Дальнейшее интенсивное проникновение идей математического моделирования в разные области знаний и, в частности, в геофизику, гидрофизику, биофизику, химию, экономику, социологию, а с другой стороны, бурное развитие средств вычислительной техники привели к появлению достаточно большого числа прикладных математических задач, не являющихся корректными, по Адамару. К числу таких задач относятся задачи интерпретации данных физических экспериментов, задачи зондирования океана и атмосферы, задачи спектроскопии, а также обратные задачи, возникающие в геофизике, гидрофизике, астрономии, радиоастрономии и других областях. Указанные обратные задачи заключаются в нахождении неизвестных параметров, например, плотностей источников либо коэффициентов уравнений или граничных условий по определенной дополнительной информации о решении. В частности, выяснилось, что рассмотренная выше задача Коши для уравнения Лапласа играет важную роль в геофизике, поскольку к ее исследованию сводится решение ряда обратных геофизических задач.

Появление такого типа задач привело к необходимости пересмотреть требования, указанные Ж. Адамаром к постановке прикладных математических задач, и разработать методы решения некорректных, по Адамару, задач. Основополагающую роль в этом направлении сыграли работы российских математиков А.Н. Тихонова (1906 – 1993), В.К. Иванова (1908 – 1992) и М.М. Лаврентьева (1932 – 2010). Ими, в частности, было введено следующее определение корректности, по Тихонову (см. [53]).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.** *Задача (1.24) называется корректно поставленной, по Тихонову, если: 1) априори известно, что решение и существует и принадлежит некоторому множеству  $U_0$  в  $U$ ; 2) решение и единственно; 3) бесконечно малым вариациям исходных данных, не выводящих ре-*



шение и из множества  $U_0$ , соответствуют бесконечно малые вариации решения  $u$ .

Множество  $U_0$  получило название множества *корректности* задачи. Непрерывная зависимость решения от исходных данных для задачи, поставленной корректно, по Тихонову, восстанавливается сужением множества допустимых исходных данных, поэтому такие задачи называются также *условно-корректными*. Так, для того чтобы сделать рассмотренную выше задачу Коши (1.26) условно-корректной, достаточно выбрать в качестве множества  $U_0$  множество функций  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , ограниченных по модулю некоторой константой. Соответствующее априорное условие на решение данной задачи вместе с условием его существования, естественно, приводит к некоторым ограничениям на множество допустимых исходных данных в рассматриваемой задаче Коши. Более подробно о корректных постановках задачи Коши для уравнения Лапласа и методах решения можно прочитать в книге [27].

Следует отметить, что разработанная в трудах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева и В.К. Иванова теория условно-некорректных задач не дает ответа на все вопросы, возникающие при исследовании некорректных задач. Однако из нее следует важный вывод о том, что указанные задачи не являются безнадежно плохими, а могут допускать вполне разумную физическую интерпретацию.

**2.1.4. Теорема Ковалевской.** В этом пункте мы выделим общий класс задач, а именно: задач Коши для так называемых нормальных относительно времени  $t$  систем дифференциальных уравнений произвольного порядка, для которых решение существует и единственно. Начнем с введения некоторых определений. Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ -произвольная область.

1) Функция  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется *аналитической в точке*  $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$ , если в некоторой окрестности этой точки она представляется в виде равномерно сходящегося степенного ряда

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{c_\alpha}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha. \quad (1.28)$$

Здесь  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  – мультииндекс, причем для краткости используются обозначения  $(x - x_0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} (x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$ ,  $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$ . Если функция  $f$  аналитична в каждой точке области  $\Omega$ , то говорят, что она *аналитична в области*  $\Omega$ .

Отметим некоторые свойства аналитических функций. Первое свойство заключается в том, что ряд (1.28) является степенным рядом Тейлора функции  $u$ , аналитической в точке  $x_0$ . Для доказательства этого свойства достаточно воспользоваться тем известным фактом, что степенной ряд внутри шара  $B_r(x_0)$ , целиком лежащего в области его сходимости,

можно почленно дифференцировать сколь угодно раз, причем ряд, полученный дифференцированием исходного ряда, будет также равномерно сходиться в  $B_r(x_0)$ . Отсюда следует, что сумма ряда (1.28) бесконечно дифференцируема в  $B_r(x_0)$ . Применяя далее к (1.28) оператор дифференцирования  $D^\alpha$  и полагая в полученных соотношениях  $x = x_0$ , получим  $c_0 = f(x_0)$ ,  $c_\alpha = D^\alpha f(x_0)$ . Эти соотношения и означают, что ряд (1.28) является рядом Тейлора для суммы  $f$ . Отсюда, в частности, вытекает, что аналитическая в области  $\Omega$  функция  $f$  однозначно определяется во всей области  $\Omega$  значениями  $f$  и всех ее производных в фиксированной точке  $x_0 \in \Omega$ . В частности, из обращения в нуль самой функции  $f$  и всех ее производных в точке  $x_0 \in \Omega$  вытекает, что  $f \equiv 0$  в  $\Omega$ . Это утверждение составляет содержание так называемой *теоремы единственности* аналитических функций.

Другим важным свойством аналитической функции является то, что из аналитичности в точке  $x_0 \in \Omega$  вытекает аналитичность ее в некоторой окрестности. Доказательство этого факта можно найти в [34, с. 20].

2) Система  $N$  дифференциальных уравнений с  $N$  неизвестными функциями  $u_1, u_2, \dots, u_N$  вида

$$\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial t^{k_i}} = \Phi_i(x, t, u_1, u_2, \dots, u_N, \dots, D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha u_j, \dots), \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (1.29)$$

называется *нормальной относительно переменной  $t$* , если правые части  $\Phi_i$  не содержат производных порядка выше  $k_i$  и производных по  $t$  порядка выше  $k_i - 1$ , так что  $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k_i$ ,  $\alpha_0 \leq k_i - 1$ . Здесь  $D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha u_j$  обозначает следующую производную:

$$D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha u_j(x, t) = \frac{\partial^{\alpha_0 + |\alpha|} u_j(x, t)}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Например, волновое уравнение, уравнение Лапласа и уравнение теплопроводности нормальны относительно каждой переменной  $x_i$ ; волновое уравнение, кроме того, нормально относительно  $t$ .

Для нормальной относительно  $t$  системы уравнений (1.29) поставим следующую задачу Коши: найти решение  $(u_1, u_2, \dots, u_N)$  этой системы, удовлетворяющее следующим начальным условиям при  $t = t_0$ :

$$\left. \frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} \right|_{t=t_0} = \varphi_{ik}(x), \quad k = 0, 1, \dots, k_i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.30)$$

Здесь  $\varphi_{ik}$  – заданные функции в некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

**ТЕОРЕМА КОВАЛЕВСКОЙ** ([11, с. 79]). *Если все функции  $\varphi_{ik}$  в (1.30) аналитичны в некоторой окрестности точки  $x_0$ , и все функции  $\Phi_i$  в (1.28) аналитичны в некоторой окрестности точки  $(x_0, t_0, \dots, D^\alpha \varphi_{j\alpha_0}(x_0), \dots)$ ,*

то задача Коши (1.29), (1.30) имеет аналитическое решение в некоторой окрестности точки  $(x_0, t_0)$ , и притом единственное в классе аналитических функций.

Доказательство теоремы основано на отыскании решения  $(u_1, u_2, \dots, u_N)$  в окрестности точки  $(x_0, t_0)$  в виде степенного ряда:

$$u_i(x, t) = \sum_{\alpha_0 \geq 0, |\alpha| \geq 0} \frac{D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha u_i(x_0, t_0)}{\alpha_0! \alpha!} (t - t_0)^{\alpha_0} (x - x_0)^\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.31)$$

Коэффициенты  $D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha u_i(x_0, t_0)$  этого ряда определяются из начальных условий (1.30) и уравнений (1.28). Остается доказать равномерную сходимость рядов (1.31) в некоторой окрестности точки  $(x_0, t_0)$ , для чего используется метод мажорант. Единственность решения в классе аналитических функций следует из теоремы единственности для аналитических функций.

Теорема Ковалевской, которую часто называют также теоремой Коши–Ковалевской, носит фундаментальный характер, поскольку она указывает, как надо задавать дополнительные условия для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, которые позволяют выделить ее единственное решение. Роль их для нормальной системы уравнений вида (1.29) играют условия Коши, задаваемые при  $t = t_0$ . Позже в § 2.4 мы еще раз обсудим аналогичные вопросы на примере задачи Коши для уравнения второго порядка. Там мы введем фундаментальное понятие характеристики для рассматриваемого дифференциального уравнения и, основываясь на теореме Ковалевской, покажем, что данные Коши, выделяющие единственное решение уравнения второго порядка, можно задавать и на произвольной (аналитической) поверхности в  $\mathbb{R}^n$ , не являющейся характеристикой.

Теорема Ковалевской является одной из самых красивых теорем теории уравнений в частных производных. В этом можно убедиться, познакомившись с ее полным доказательством по книгам И.Г. Петровского [41] и В.П. Михайлова [34]. Это естественно, поскольку она была доказана молодой талантливой женщиной – нашей соотечественницей Софьей Ковалевской (1850 – 1891) в 1874 г. Однако указанная теорема несмотря на ее достаточно общий характер не решает полностью вопроса о корректности постановки задачи Коши даже для нормальной системы дифференциальных уравнений. Действительно, эта теорема гарантирует существование и единственность решения рассматриваемой задачи Коши лишь в достаточно малой окрестности, или, как говорят, *в малом*. В то же время существование и единственность обычно требуется установить во всей рассматриваемой области, т. е., как говорят, *в целом*. Кроме того, в прикладных задачах начальные данные, а также коэффициенты и правая часть, как правило, не являются аналитическими функциями, и в этих случаях заведомо не существует аналитического решения. Наконец, даже если аналитическое

решение рассматриваемой задачи существует и единственно, то из теоремы Ковалевской не вытекает, что данное решение непрерывно зависит от исходных данных. Более того, приведенный в п. 2.1.3 пример задачи Коши для уравнения Лапласа показывает, что решение может быть неустойчивым.

С учетом приведенных фактов при рассмотрении конкретных задач математической физики обычно приходится отказываться от нахождения аналитического решения и заниматься поиском решения, обладающего конечной гладкостью. К настоящему времени в теории уравнений в частных производных наиболее распространены два типа решений: *классическое* решение, основанное на классической постановке рассматриваемой задачи, и *обобщенное* решение, основанное на ее обобщенной постановке.

**2.1.5. Классическое и обобщенное решения.** Напомним, что решением уравнения  $n$ -го порядка (1.1) в области  $\Omega$  мы называли такую функцию  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , которая обращает уравнение (1.1) в тождество в области  $\Omega$ . Это определение автоматически предполагает, что функция  $u$  обладает определенной гладкостью, а именно, что в каждой точке  $x \in \Omega$  существуют все ее производные, входящие в это уравнение. Если дополнительно предположить, что указанные производные непрерывны всюду в  $\Omega$ , то такую функцию принято называть *классическим решением* уравнения (1.1).

Данное определение не накладывает каких-либо ограничений на поведение решений на границе области  $\Omega$ . Однако если уравнение (1.1) рассматривается при определенных граничных условиях, то в определение классического решения соответствующей краевой задачи следует добавить условие непрерывности вплоть до границы тех производных от функции  $u$ , которые входят в краевые условия. Так, классическим решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области  $\Omega$

$$\Delta u = -f \text{ в } \Omega, \quad u = g \text{ на } \Gamma \quad (1.32)$$

принято называть функцию  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , удовлетворяющую уравнению Пуассона в (1.32) в каждой точке  $x \in \Omega$  и граничному условию в (1.32) в каждой точке  $x \in \Gamma$ . Определения классических решений других задач будут введены в следующих главах, посвященных строгому математическому исследованию конкретных задач математической физики.

Здесь же отметим, что классическая постановка задачи предполагает, что коэффициенты и правая часть рассматриваемого уравнения также обладают определенной гладкостью, скажем, непрерывны в  $\Omega$ . Вместе с тем на практике часто приходится рассматривать ситуации, когда, например, правая часть уравнения, описывающая плотность внешних источников, имеет определенные особенности в некоторых изолированных точках или даже подобластях области  $\Omega$ . В этих случаях классического решения рассматриваемой задачи может не существовать. Поэтому приходится отказы-

ваться от требования гладкости решения внутри области или на границе и вводить так называемое *обобщенное решение* рассматриваемой задачи математической физики.

Существуют два основных подхода к введению обобщенного решения. В первом рассматриваемое дифференциальное уравнение умножается на *тестовую* функцию  $v$  из некоторого пространства функций  $V$ , тесно связанного с изучаемой задачей, и далее полученное соотношение интегрируется по рассматриваемой области. После применения формулы интегрирования по частям с использованием краевых и начальных условий возникает интегральное тождество, содержащее искомую функцию  $u$  и некоторые ее производные. Важно отметить, что порядок входящих в это тождество старших производных от функции  $u$  меньше порядка дифференциального уравнения. Это позволяет ослабить требования на гладкость функции  $u$ , которая и принимается за обобщенное решение. Описанный подход к определению обобщенного решения используется, например, в [13, 28, 32, 34]. Другой подход к введению обобщенного решения, основанный на понятии обобщенной функции, излагается в [11].

Не останавливаясь детально на обсуждении указанных подходов, отметим лишь, что цель введения обобщенного решения можно считать достигнутой, если в отсутствие существования классического решения удастся доказать существование, единственность и устойчивость обобщенного решения. Важно также установить, что гладкость обобщенного решения растет с ростом гладкости исходных данных. Именно эти вопросы исследуются в руководствах по современной математической физике (см. цитируемые книги). Мы же в этой книге будем рассматривать в основном классические постановки задач математической физики и исследовать вопросы существования, единственности и устойчивости классических решений. Более конкретно, мы будем заниматься *исследованием корректности основных начально-краевых задач для линейных дифференциальных уравнений математической физики и изучением качественных свойств решений и классических методов построения точных или приближенных решений этих задач*. Еще одной целью будет являться вывод и анализ явных представлений решений рассматриваемых задач в виде интегральных формул, либо рядов Фурье, либо интегральных преобразований.

## § 2.2. Уравнения в частных производных 1-го порядка

В гл. 1 было показано, что применение метода математического моделирования для исследования процессов тепло- и массопереноса в некоторой области  $\Omega$  пространства  $\mathbb{R}^3$  приводит к необходимости нахождения решения следующего уравнения в частных производных 1-го порядка:

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \text{grad} u = f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T]. \quad (2.1)$$

Здесь  $u$  – искомая функция,  $\mathbf{a}$  и  $f$  – заданные в области  $Q = \Omega \times (0, T]$  функции. Первая из них имеет смысл скорости движущейся жидкости, а вторая описывает объемную плотность величины  $u$ . В соответствии с физическим смыслом уравнение (2.1) описывает *конвективный перенос* некоторой субстанции (плотности, солености, температуры и т. д.) вдоль траекторий частиц движущейся жидкости в отсутствие эффектов диффузии. Поэтому на уравнение (2.1) часто ссылаются как на *уравнение переноса*. В этом параграфе мы исследуем некоторые свойства решений уравнения (2.1) и его стационарного аналога

$$\mathbf{a} \cdot \text{grad} u = f \quad \text{в } \Omega, \quad (2.2)$$

а также укажем, как надо задавать дополнительные (начальные и краевые) условия, выделяющие единственное решение уравнения (2.1) либо (2.2). Начнем рассмотрение с простейшего одномерного аналога уравнения (2.1).

**2.2.1. Одномерное уравнение с постоянным коэффициентом.**  
**Условия Коши.** Рассмотрим простейшее (одномерное по пространственным переменным) уравнение в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.3)$$

Поставим задачу: найти общее решение уравнения (2.3). Под *решением*  $u$  уравнения (2.3) в некоторой области  $Q$  плоскости  $(x, t)$  будем понимать дифференцируемую в области  $Q$  функцию, удовлетворяющую в каждой точке  $(x, t) \in Q$  уравнению (2.3). Что касается термина “общее решение”, то, как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, под ним будем понимать некоторое семейство решений (зависящее от одного или нескольких параметров), из которого можно получить любое частное решение уравнения (2.3), удовлетворяющее определенному классу условий. Речь об этих условиях пойдет ниже.

Чтобы получить формулу общего решения уравнения (2.3), сделаем, как в [14, с.55], следующее построение. Проведем на плоскости  $(x, t)$  прямые  $x - t = c$ , где  $c$  – произвольная постоянная (см. рис. 2.1,а). Любую такую прямую будем называть *характеристикой* уравнения (2.3). Мы пока не даем строгого определения этого важного понятия, но вернемся к нему в конце этого пункта. Ясно, что дифференциальное уравнение характеристик имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = 1. \quad (2.4)$$

Значения постоянных  $c$  как бы нумеруют эти характеристики. Поэтому можно считать, что постоянная  $c$  в уравнении прямой  $x - t = c$  является “номером” прямой семейства характеристик, задаваемых уравнением

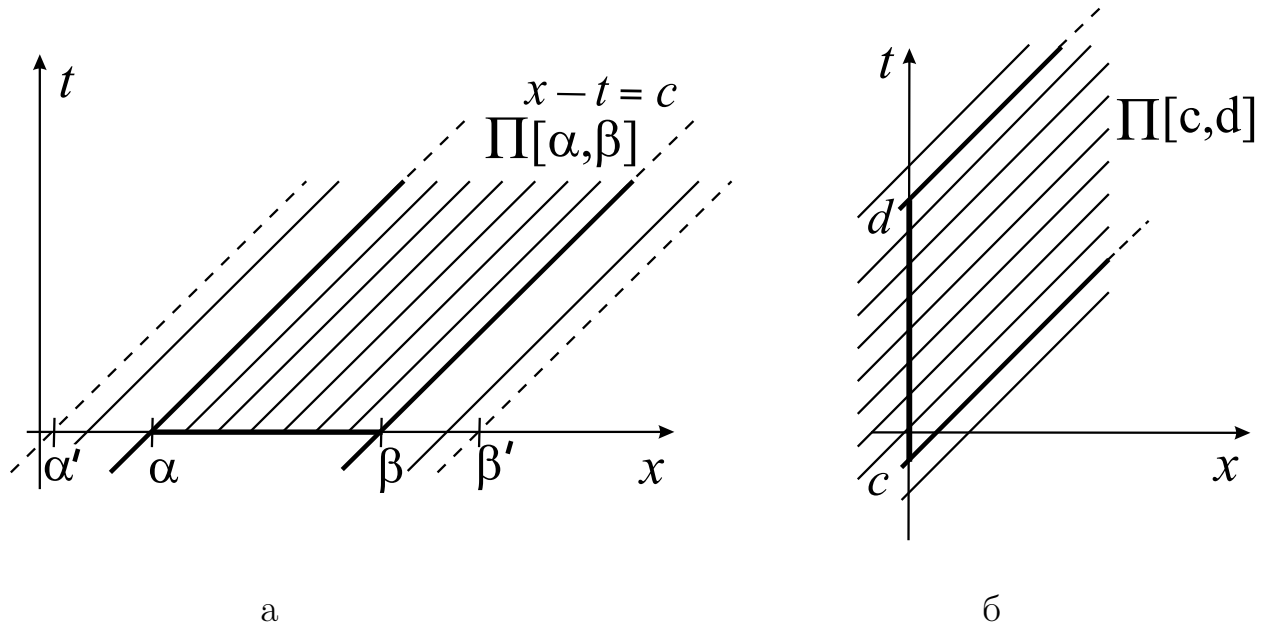


Рис. 2.1

(2.4). В то же время на  $t$  можно смотреть как на параметр, который изменяется вдоль характеристик данного семейства.

Рассмотрим теперь произвольную функцию  $u$ , зависящую от двух переменных  $x$  и  $t$ . Вдоль каждой характеристики функция  $u$  является сложной функцией параметра  $t$ . Предполагая функцию  $u$  дифференцируемой, обозначим через  $du/dt$  ее производную по параметру  $t$ . Используя правило дифференцирования сложной функции, имеем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Если теперь предположить, что функция  $u$  является решением уравнения (2.3), то из этой формулы следует, что вдоль любой характеристики выполняется соотношение  $du/dt = 0$ . Это означает, что  $u$  постоянна вдоль каждой из этих прямых. Таким образом, значение  $u(x, t)$  решения  $u$  в точке  $(x, t)$  зависит лишь от “номера”  $c$  той характеристики  $x - t = c$ , на которой лежит точка  $(x, t)$ . Это означает, что решение  $u$  определяется формулой

$$u(x, t) = \Phi(x - t). \quad (2.5)$$

Здесь  $\Phi$  – некоторая дифференцируемая функция одной переменной. В справедливости этого можно убедиться и непосредственной проверкой, если воспользоваться следующими соотношениями, вытекающими из (2.5):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Phi'(x - t), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\Phi'(x - t).$$

Итак, для любой дифференцируемой функции одной переменной  $\Phi$  формула (2.5) дает решение уравнения (2.3). Фактически (2.5) представляет собой целое семейство решений уравнения (2.3), зависящее от одного функционального параметра. Роль его как раз играет функция  $\Phi$ . С учетом этого будем ссылаться ниже на формулу (2.5) как на общее решение уравнения (2.3). Чтобы это утверждение было корректным, достаточно показать, что с помощью формулы (2.5) можно получить любое решение уравнения (2.3), удовлетворяющее дополнительным условиям, в качестве которых будем использовать условия Коши. Чтобы их вывести, выберем сначала на оси  $x$  отрезок  $[\alpha, \beta]$  (см. рис. 2.1,а) и зададим на этом отрезке дифференцируемую функцию  $\varphi$ . Поставим задачу: найти функцию  $u$ , удовлетворяющую уравнению (2.3) и принимающую заданные значения  $\varphi(x)$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , т. е. удовлетворяющую условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [\alpha, \beta]. \quad (2.6)$$

Условие (2.6) и называют (по историческим причинам) *условием Коши* для уравнения (2.3) на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , а саму задачу (2.3), (2.6) – *задачей Коши* для уравнения (2.3). Поскольку условие (2.6) задано при  $t = 0$ , то это условие также называют *начальным условием* для уравнения (2.3).

Легко убедиться, что если в качестве функции  $\Phi$  в (2.5) выбрать начальную функцию  $\varphi$ , то построенная таким образом функция  $u(x, t) = \varphi(x - t)$  описывает решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условию (2.6). Указанное решение будет определено в области  $Q$ , содержащей все такие точки  $(x, t)$  плоскости  $x, t$ , для которых определено значение  $\varphi(x - t)$  функции  $\varphi$ . Роль такой области  $Q$  играет “характеристическая” полоса  $\Pi[\alpha, \beta]$ , образованная всеми характеристиками уравнения (2.3), пересекающими отрезок  $[\alpha, \beta]$  оси  $x$  (см. рис. 2.1,а). Более того, решение  $u$  задачи (2.3), (2.6) единственно в полосе  $\Pi[\alpha, \beta]$ .

Для доказательства единственности воспользуемся методом от “противного”, который обычно используется при доказательстве единственности решений задач математической физики. Следуя этому методу, предположим, что в полосе  $\Pi[\alpha, \beta]$  существует два решения  $u_1$  и  $u_2$  задачи (2.3), (2.6). Тогда в силу линейности уравнения (2.3) их разность  $u = u_1 - u_2$  будет по-прежнему являться решением уравнения (2.3), но удовлетворять нулевому условию вида

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [\alpha, \beta]. \quad (2.7)$$

Ясно, с одной стороны, что функция  $u$ , будучи решением уравнения (2.3), сохраняет постоянное значение вдоль каждой характеристики уравнения (2.3). С другой стороны, в силу (2.7)  $u$  равна нулю в точке  $(x_0, 0)$  любой характеристики, лежащей в полосе  $\Pi[\alpha, \beta]$ . Отсюда следует, что  $u$  необходимо равна нулю на каждой характеристике из полосы  $\Pi[\alpha, \beta]$ , т. е.  $u(x, t) \equiv 0$  в  $\Pi[\alpha, \beta]$ .



Если продолжить начальную функцию  $\varphi$  на больший отрезок  $[\alpha', \beta'] \supset [\alpha, \beta]$ , то мы сможем построить решение  $u$  в более широкой полосе  $\Pi' = \Pi[\alpha', \beta']$ , границы которой помечены пунктиром на рис. 2.1,а. Так как такое продолжение функции  $\varphi$  может быть выполнено бесконечным количеством способов, то и решений задачи (2.1), (2.4) в более широкой полосе будет бесконечно много. Отсюда следует, что именно полоса  $\Pi[\alpha, \beta]$  имеет смысл *области единственности* для задачи Коши (2.3), (2.6). Указанный факт можно доказать и другим методом, используя соображения, основанные на фундаментальном законе сохранения энергии. К этому вопросу мы вернемся в п. 2.2.3.

Подчеркнем, что с ростом гладкости начальной функции  $\varphi$  в (2.6) гладкость решения  $u$  также растет. Если, в частности,  $\varphi$  непрерывно дифференцируема в  $[\alpha, \beta]$ , то и решение  $u$  является непрерывно дифференцируемой функцией в  $\Pi[\alpha, \beta]$ , т. е. классическим решением уравнения (2.3) (согласно определению из п. 2.1.5). С использованием определения пространства  $C^m(\bar{\Omega})$ , введенного в п. 2.1.3, соответствующий факт кратко можно записать так: если  $\varphi \in C^m[\alpha, \beta]$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , то  $u \in C^m(\Pi[\alpha, \beta])$ .

Если, более того,  $\varphi$  является аналитической функцией, то и решение задачи Коши (2.3), (2.6) является аналитической функцией по крайней мере в окрестности участка  $[\alpha, \beta]$ . Поскольку уравнение (2.3) является простейшим примером системы, нормальной относительно переменной  $t$  (как и  $x$ ), то указанный факт является следствием теоремы Ковалевской (см. п. 2.1.4). Впрочем, это вытекает и из представления решения в виде  $u(x, t) = \varphi(x - t)$ .

В качестве отрезка, на котором задаются данные Коши, можно выбрать и отрезок  $[c, d]$  оси  $t$  (см. рис. 2.1,б), задавая начальные данные в виде

$$u(0, t) = g(t), \quad t \in [c, d], \quad (2.8)$$

где  $g$  – некоторая дифференцируемая функция. Простой анализ показывает, что решение  $u$  задачи (2.3), (2.8) в полосе  $\Pi[c, d]$ , образованной всеми характеристиками уравнения (2.3), пересекающими интервал  $[c, d]$ , существует, единственно и определяется формулой:  $u(x, t) = g(t - x)$ . Более того, данные Коши для уравнения (2.3) можно задавать и на произвольной гладкой кривой  $\Gamma$  в плоскости  $(x, t)$  при условии, что с каждой из характеристик кривая  $\Gamma$  пересекается не более, чем в одной точке (см. рис. 2.2,а).

Для построения решения уравнения (2.3), удовлетворяющего условию

$$u|_{\Gamma} = \varphi, \quad (2.9)$$

достаточно подобрать нужный вид гладкой функции  $\Phi$  в (2.5). Это можно сделать, например, следующим образом. Предположим, что  $\Gamma$  задана параметрически в виде  $x = x_s \equiv \xi(s)$ ,  $t = t_s \equiv \eta(s)$ ,  $s \in [s_1, s_2]$ , причем функция  $\varphi$  зависит от параметра  $s$  кривой  $\Gamma$ . Проведем через каждую

точку  $(x_s, t_s) \in \Gamma$  характеристику. Ее уравнение, очевидно, имеет вид:

$$x - t = x_s - t_s = \xi(s) - \eta(s). \quad (2.10)$$

Сравнивая это уравнение с общим уравнением характеристики  $x - t = c$ ,

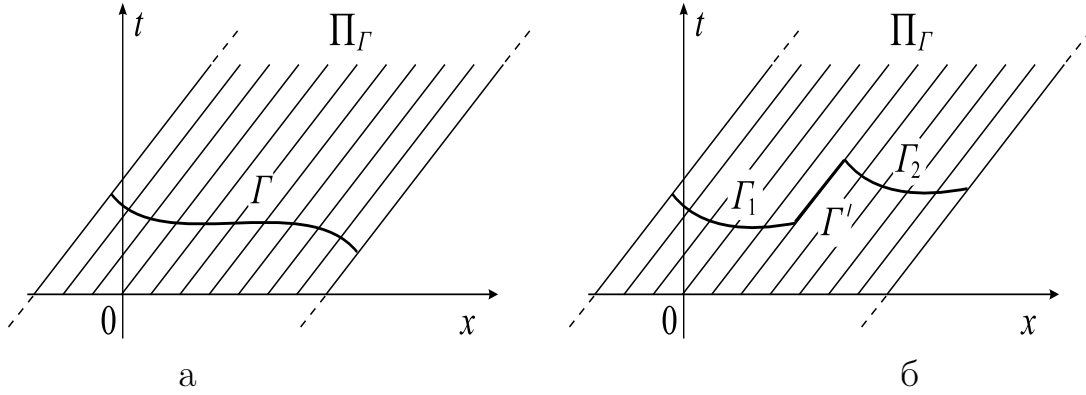


Рис. 2.2

приходим к следующему соотношению:

$$c = \xi(s) - \eta(s). \quad (2.11)$$

Оно связывает значения параметра  $s$  кривой  $\Gamma$  с соответствующим “номером”  $c$  характеристики, проходящей через точку  $(\xi_s, \eta_s)$ . Предположим, что выполняются условия:

(i)  $\varphi \in C^1(\Gamma)$ ,  $\Gamma \in C^1$  (т.е.  $\xi$  и  $\eta \in C^1[s_1, s_2]$ ),  $\xi'(s) - \eta'(s) > 0 \quad \forall s \in [s_1, s_2]$ .

Подчеркнем, что именно последнее условие в (i) обеспечивает наше предположение о том, что кривая  $\Gamma$  пересекается с каждой из характеристик, лежащей в полосе  $\Pi_\Gamma$ , лишь в одной точке. В силу этого условия имеем  $c'_s(s) \equiv \xi'(s) - \eta'(s) > 0 \quad \forall s \in [s_1, s_2]$ . Поэтому, когда параметр  $s$  пробегает интервал  $[s_1, s_2]$ , отвечающий ему в силу (2.11), “номер”  $c$ , монотонно возрастаая, согласно последнему условию в (i), пробегает интервал  $[c_1, c_2]$ , где  $c_1 = \xi(s_1) - \eta(s_1)$ ,  $c_2 = \xi(s_2) - \eta(s_2)$ . Ясно, что  $c_i$  отвечает характеристике, проходящей через граничную точку кривой  $\Gamma$ , соответствующую значению  $s_i$ ,  $i = 1, 2$  параметра  $s$ .

Обозначим через  $\tilde{s} : [c_1, c_2] \rightarrow [s_1, s_2]$  функцию, обратную к функции (2.11), с которой выполняется равенство  $\tilde{s}(c) = s \quad \forall c \in [c_1, c_2]$ . Из свойств обратных функций и условий (i) вытекает, что  $\tilde{s} \in C^1[c_1, c_2]$ . Рассмотрим в полосе  $\Pi_\Gamma$  функцию  $u$ , действующую по формуле

$$u(x, t) = \varphi \circ \tilde{s}(x - t) \equiv \varphi[\tilde{s}(x - t)]. \quad (2.12)$$

Справедливы следующие свойства функции  $u$  при выполнении (i):

1) функция  $u$  определена в полосе  $\Pi_\Gamma$ . Действительно, когда точка  $(x, t)$  пробегает полосу  $\Pi_\Gamma$ , разность  $x - t = c$  пробегает интервал  $[c_1, c_2]$ , тогда как  $\tilde{s}(x - t)$  пробегает интервал  $[s_1, s_2]$ , где определена функция  $\varphi$ ;

2) функция  $u$  как композиция непрерывно дифференцируемых функций принадлежит  $C^1(\Pi_\Gamma)$  и удовлетворяет уравнению (2.3) в каждой точке  $\Pi_\Gamma$ ;

3) функция  $u$  удовлетворяет условию

$$u(x_s, t_s) = \varphi \circ \tilde{s}[\xi(s) - \eta(s)] = \varphi \circ \tilde{s}(c) = \varphi(s) \quad \forall s \in [s_1, s_2] \Rightarrow u|_\Gamma = \varphi.$$

На основании свойств 1)–3) приходим к выводу, что при выполнении условий (i) функция (2.12) является искомым классическим решением задачи (2.3), (2.9), причем единственным в полосе  $\Pi_\Gamma$ . Более того, из формулы (2.12) вытекает, что с ростом гладкости исходных данных, роль которых в данном случае играют как функция  $\varphi$ , так и сама кривая  $\Gamma$ , на которой задана функция  $\varphi$ , растет также и гладкость решения  $u$  задачи (2.3), (2.9).

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 2.1.** Пусть выполняются условия (i). Тогда классическое решение  $u \in C^1(\Pi_\Gamma)$  задачи Коши (2.3), (2.9) в полосе  $\Pi_\Gamma$  существует, единственно и определяется формулой (2.12). Если, более того,  $\Gamma \in C^m$  (т.е.  $\xi, \eta \in C^m[s_1, s_2]$ ), а  $\varphi \in C^m(\Gamma)$ ,  $m = 2, 3, \dots$ , то  $u \in C^m(\Pi_\Gamma)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.** Подчеркнем, что последнее условие в (i) является необходимым условием существования решения задачи (2.3), (2.9) для произвольной дифференцируемой функции  $\varphi$ . Если оно не выполняется, то в общем случае решение задачи (2.3), (2.9) не существует. Тем не менее можно доказать его существование при выполнении некоторых дополнительных предположений на  $\varphi$ . Рассмотрим, например, случай, когда  $\Gamma$  состоит из трех участков:  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma' \cup \Gamma_2$ , причем на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  последнее условие в (i) выполняется, тогда как на участке  $\Gamma'$  границы  $\Gamma$ , отвечающем изменению параметра  $s$  в интервале  $[s'_1, s'_2] \subset [s_1, s_2]$ , выполняется условие:  $\xi'(s) - \eta'(s) = 0$  или  $\xi(s) - \eta(s) = \text{const} \quad \forall s \in [s'_1, s'_2]$ . Это условие означает в силу (2.11), что участок  $\Gamma'$  является отрезком характеристики для уравнения (2.3), так что кривая  $\Gamma$  имеет вид, изображенный на рис. 2.2,б. Поскольку любое решение уравнения (2.3) остается постоянным на характеристике, то становится ясно, что функцию  $\varphi$  нельзя задавать произвольным образом на  $\Gamma'$ : необходимое условие существования решения задачи (2.3), (2.9) в этом случае заключается в том, чтобы функция  $\varphi$  в (2.9) принимала постоянное значение на  $\Gamma'$ . Но это условие не является достаточным условием существования решения. Чтобы убедиться в этом, проведем дополнительные построения.

Разобьем характеристическую полосу  $\Pi_\Gamma$  на две:  $\Pi_{\Gamma_1}$  и  $\Pi_{\Gamma_2}$ . Первая представляет собой характеристическую полосу, образованную характеристиками, пересекающими участок  $\Gamma_1$  кривой  $\Gamma$ . Вторая полоса представляет собой характеристическую полосу, образованную характеристиками, пере-

секающими участок  $\Gamma_2$  кривой  $\Gamma$ . Ясно, что обе полосы разделяются между собой общей характеристикой  $x - t = c'$ , проходящей через участок  $\Gamma'$  (рис. 2.2,б). Обозначим сужения начальной функции  $\varphi$  на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  соответственно.

Рассмотрим функции  $u_1$  и  $u_2$ , определяемые в  $\Pi_{\Gamma_1}$  и  $\Pi_{\Gamma_2}$  соотношениями:

$$u_1(x, t) = \varphi_1(x - t), \quad (x, t) \in \Pi_{\Gamma_1}, \quad u_2(x, t) = \varphi_2(x - t), \quad (x, t) \in \Pi_{\Gamma_2}.$$

Из теоремы 2.1, примененной к каждой из полос  $\Pi_{\Gamma_1}$  и  $\Pi_{\Gamma_2}$ , следует, что функция  $u_1$  является решением уравнения (2.3) в полосе  $\Pi_{\Gamma_1}$  удовлетворяющим начальному условию  $u|_{\Gamma_1} = \varphi_1$ , тогда как  $u_2$  является решением уравнения (2.3) в полосе  $\Pi_{\Gamma_2}$ , удовлетворяющим условию  $u|_{\Gamma_2} = \varphi_2$ .

Чтобы построить решение  $u$  исходной задачи (2.3), (2.9) во всей полосе  $\Pi_{\Gamma}$ , “склеим” функции  $u_1$  и  $u_2$  на общей характеристике  $x - t = c'$ , полагая

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & (x, t) \in \Pi_{\Gamma_1}, \\ u_2(x, t), & (x, t) \in \Pi_{\Gamma_2}. \end{cases}$$

По построению функция  $u$  удовлетворяет условию (2.9), в том числе и на участке  $\Gamma'$  кривой  $\Gamma$  в силу нашего предположения на функцию  $\varphi$ , а также уравнению (2.3) всюду в  $\Pi_{\Gamma}$ , кроме общей характеристики  $x - t = c'$ , играющей, таким образом, особую роль для задачи (2.3), (2.9). Чтобы функция  $u$  удовлетворяла уравнению (2.3) и на этой “особой” характеристике, нужно потребовать от функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , чтобы они удовлетворяли условиям

$$\varphi_1(s'_1) = \varphi_2(s'_2), \quad \frac{d\varphi_1(s'_1)}{ds} = \frac{d\varphi_2(s'_2)}{ds}.$$

Указанные условия служат для обеспечения соответственно непрерывно-

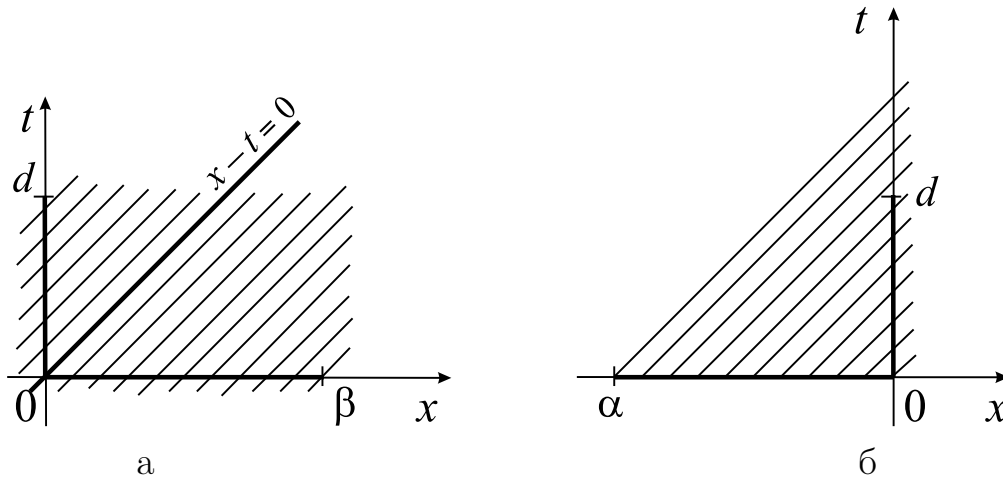


Рис. 2.3

сти и непрерывной дифференцируемости решения  $u$  на особой характеристике  $x - t = c'$ , а следовательно, и всюду в полосе  $\Pi_{\Gamma}$ . Их называют *условиями согласования* исходных данных рассматриваемой задачи.

Из проведенного анализа следует, что условия согласования для задачи Коши (2.3), (2.9) должны задаваться в одном из двух случаев: 1) кривая  $\Gamma$ , на которой задано условие Коши, является гладкой, но она содержит участок, совпадающий с частью характеристики уравнения (2.3), либо содержит точки, в которых направление  $\Gamma$  совпадает с характеристическим направлением; 2) кривая  $\Gamma$  является кусочно-гладкой, в этом случае условия согласования следует задавать в каждой точке кривой  $\Gamma$ , где нарушается ее гладкость.

В качестве кривой  $\Gamma$  можно выбрать, например, примыкающие друг к другу отрезки  $[0, \beta]$  оси  $x$  и  $[0, d]$  оси  $t$  (см. рис. 2.3,а). Правда, поскольку гладкость такой кривой  $\Gamma$  нарушается в точке  $(0, 0)$ , то при этом придется позаботиться (с помощью условий согласования) о том, чтобы элементы функции  $\varphi$ , заданные на отрезках  $[0, \beta]$  оси  $x$  и  $[0, d]$  оси  $t$ , определяли функцию  $u$  в (2.5), дифференцируемую на характеристике  $x = t$ , проходящей через точку  $(0, 0)$ . К вопросу, как это сделать, мы еще вернемся в п. 2.2.2. А вот отрезки  $[\alpha, 0]$  оси  $x$  и  $[0, d]$  оси  $t$ , которые изображены на рис. 2.3,б, использовать для постановки задачи Коши следует очень осторожно, так как в этом случае есть характеристики, которые пересекают как отрезок  $[\alpha, 0]$  оси  $x$ , так и отрезок  $[0, d]$  оси  $t$ . Поскольку вдоль каждой такой характеристики решение  $u$  сохраняет постоянное значение, то задавать значения  $\varphi$  на указанных отрезках произвольным образом нельзя.

Рассмотрим теперь случай, когда данные Коши задаются на отрезке  $AB$  одной из характеристик, например  $x - t = 0$  (см. рис. 2.4,а). Поскольку любое решение уравнения (2.3) постоянно на отрезке  $AB$ , то ясно, что функцию  $\varphi$  задавать на отрезке  $AB$  произвольным образом нельзя. Более того, в качестве функции  $\varphi$  можно задать лишь константу. Если же функция  $\varphi$  постоянна, т. е.  $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$  на  $AB$ , то решением такой задачи Коши будет являться функция  $u = \Phi(x - t)$ , где функция  $\Phi$  подчинена единственному условию  $\Phi(0) = \varphi_0$ , а в остальном произвольна. Таким образом, область единственности в этом случае стягивается в одну прямую (характеристику)  $x - t = 0$ .

Из приведенных результатов следует вывод, что выбор кривых или отрезков, на которых разумно задавать дополнительные условия, не может быть произвольным. Нужно учитывать расположение этих участков относительно прямых  $x - t = c$ , которые играют, таким образом, особую роль для уравнения (2.3). Поэтому эти прямые получили особое название *характеристик* уравнения (2.3).

В дальнейшем, задавая дополнительные условия на отрезке оси  $x$  в виде (2.3) и разыскивая решение уравнения (2.3) в характеристической полосе  $\Pi[\alpha, \beta]$ , опирающейся на этот отрезок, только для значений времени  $t \geq 0$ , мы будем ссылаться на (2.6) как на *начальное условие*. Если же дополнительное условие задается на некотором отрезке оси  $t$ , т. е. при  $x = 0$ , в виде

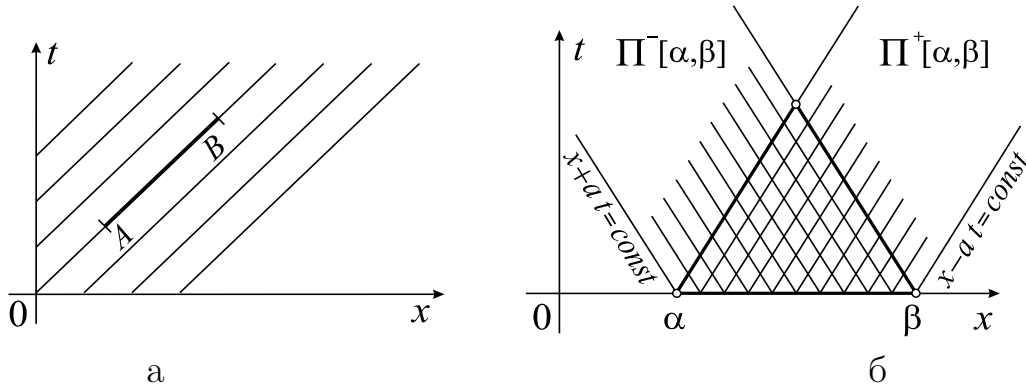


Рис. 2.4

(2.8), то на него будем ссылаться как на *граничное условие*.

Рассмотрим теперь более общее уравнение 1-го порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.13)$$

где  $a = \text{const} > 0$ . Рассуждая, как и выше, поставим в соответствие уравнению (2.13) следующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad x|_{t=t_0} = x_0. \quad (2.14)$$

Поскольку  $a = \text{const}$ , то согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений [51] решение задачи (2.14) существует, единственно и описывает прямую (интегральную кривую задачи (2.14)):

$$x = a(t - t_0) + x_0. \quad (2.15)$$

Указанную прямую называют *характеристикой* уравнения (2.13), проходящей через точку  $(x_0, t_0)$ . Когда точка  $(x_0, t_0)$  пробегает некоторую область в плоскости  $x, t$ , прямые (2.15) пробегает однопараметрическое семейство прямых  $x - at = \text{const}$ , изображенных на рис. 2.4,б.

Рассуждая, как и выше, легко показываем, что общее решение уравнения (2.13) имеет вид

$$u(x, t) = \Phi(x - at), \quad (2.16)$$

где  $\Phi$  – произвольная дифференцируемая функция, тогда как частное решение уравнения (2.13), удовлетворяющее начальному условию (2.6), имеет вид:

$$u(x, t) = \varphi(x - at). \quad (2.17)$$

Точно так же частное решение уравнения (2.13), удовлетворяющее граничному условию (2.8), имеет вид:

$$u(x, t) = g(t - x/a). \quad (2.18)$$

По аналогичной схеме исследуется уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.19)$$

Интегральная кривая (в данном случае прямая) задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = -a, \quad x|_{t=t_0} = x_0$$

называется *характеристикой* уравнения (2.19), проходящей через точку  $(x_0, t_0)$ . Поскольку  $a = \text{const}$ , то решение последней задачи существует, единственно и описывает прямую  $x = -a(t - t_0) + x_0$ . Когда точка  $(x_0, t_0)$  пробегает некоторую область, указанные прямые пробегает однопараметрическое семейство прямых  $x + at = \text{const}$ , изображенных вместе с характеристиками уравнения (2.13) на рис. 2.4,б. Простой анализ показывает, что общее решение уравнения (2.19), частное его решение, удовлетворяющее начальному условию (2.6), и частное его решение, удовлетворяющее граничному условию (2.8), имеют соответственно вид  $\Phi(x + at)$ ,  $\varphi(x + at)$  и  $g(t + x/a)$ . При этом решение, например задачи (2.6), (2.19), единственно в полосе  $\Pi^-[\alpha, \beta]$ , образованной всеми характеристиками уравнения (2.19), пересекающими  $[\alpha, \beta]$ .

**2.2.2. Начально-краевая задача для одномерного неоднородного уравнения.** Рассмотрим в этом пункте неоднородное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f. \quad (2.20)$$

Здесь  $f$  - заданная функция. Поставим задачу: найти в полосе  $\Pi[\alpha, \beta]$  решение уравнения (2.20), удовлетворяющее начальному условию (2.6).

В силу линейности уравнения (2.20) для решения задачи (2.20), (2.6) справедлив *принцип суперпозиции*. Согласно ему, решение задачи Коши (2.20), (2.6) можно представить в виде суммы

$$u = u_1 + u_2. \quad (2.21)$$

Здесь  $u_1$  - решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [\alpha, \beta], \quad (2.22)$$

тогда как  $u_2$  - решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad u|_{t=0} = 0, \quad x \in [\alpha, \beta]. \quad (2.23)$$

Поскольку решение  $u_1$  задачи (2.22) уже построено в п. 2.2.1 и имеет вид (2.17) в полосе  $\Pi[\alpha, \beta]$ , то нам остается найти лишь решение задачи (2.23).

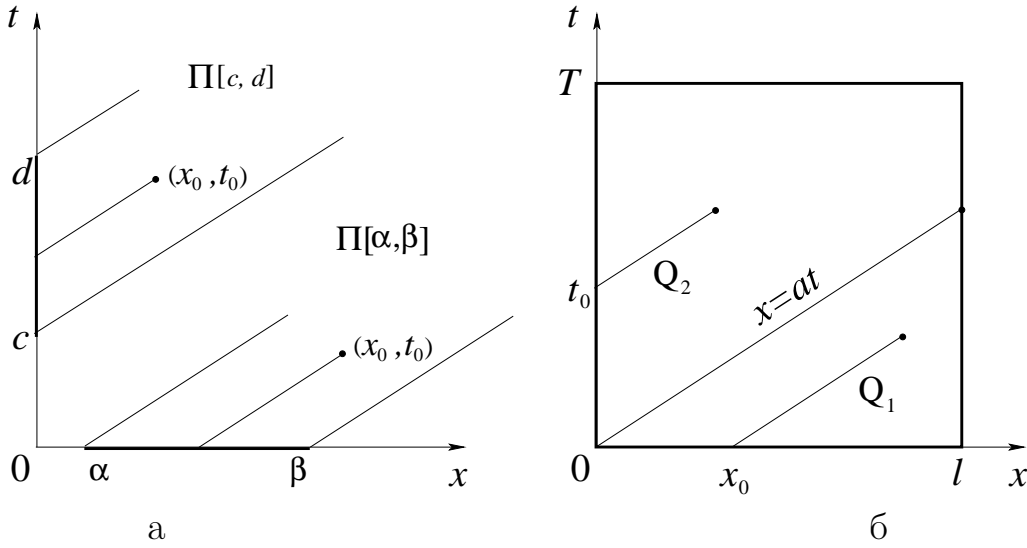


Рис. 2.5

Для нахождения  $u_2$  сделаем следующее построение. Введем в рассмотрение характеристики уравнения (2.20). Как и для однородного уравнения (2.13), под ними будем понимать интегральные кривые задачи Коши (2.14), т. е. в данном случае (при  $a = \text{const}$ ) прямые (2.15). Возьмем произвольную точку  $(x_0, t_0)$  характеристической полосы  $\Pi[\alpha, \beta]$  для уравнения (2.20) и проведем через нее характеристику до пересечения с осью  $x$  (см. рис. 2.5,а). Уравнение указанной характеристики имеет вид (2.15). Вдоль каждой такой характеристики решение  $u_2$  является сложной функцией параметра  $t$ . Обозначим через  $du_2/dt$  соответствующую производную от  $u_2$  по  $t$ . Рассуждая, как в начале п. 2.2.1, имеем

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + a \frac{\partial u_2}{\partial x}.$$

Сравнивая это соотношение с (2.20), приходим к выводу, что вдоль каждой характеристики (2.15) уравнение в (2.23) сводится к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{du}{dt} = f[x_0 + a(t - t_0), t] \quad (2.24)$$

для функции  $u_2[x_0 + a(t - t_0), t]$  как функции одной переменной  $t$ . Интегрируя уравнение (2.24) на интервале  $[0, t_0]$ , получаем с учетом однородности начального условия в (2.23), что

$$u_2(x_0, t_0) = \int_0^{t_0} f[x_0 + a(t - t_0), t] dt = \int_0^{t_0} f[x_0 + a(\tau - t_0), \tau] d\tau. \quad (2.25)$$

(В последнем интеграле мы изменили для последующего удобства переменную интегрирования  $t$  на  $\tau$ ). Формула (2.25) описывает решение  $u_2$  в



фиксированной точке  $(x_0, t_0)$ . Если теперь  $(x, t)$  – переменная точка полосы  $\Pi[\alpha, \beta]$ , то, заменяя в (2.25)  $(x_0, t_0)$  на  $(x, t)$ , приходим к формуле

$$u_2(x, t) = \int_0^t f[x + a(\tau - t), \tau] d\tau, \quad (x, t) \in \Pi[\alpha, \beta]. \quad (2.26)$$

Из построения вытекает, что функция  $u_2$  является искомым решением задачи Коши (2.23). В этом можно убедиться и проверкой. В самом деле, очевидно, что  $u_2(x, 0) = 0$ . Дифференцируя далее  $u_2$  по  $t$ , имеем

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = -a \int_0^t f_y[x + a(\tau - t), \tau] d\tau + f(x, t),$$

где через  $f_y$  обозначена производная функции  $f$  по первому аргументу. Мы предполагаем, конечно, что она существует и непрерывна. Это заведомо имеет место, если функция  $f$  задана и непрерывно-дифференцируема в полосе  $\Pi[\alpha, \beta]$ . Аналогично

$$a \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} = a \int_0^t f_y[x + a(\tau - t), \tau] d\tau.$$

Складывая последние два равенства, получаем

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} = f(x, t).$$

Из (2.26) и (2.21) следует, что решение Коши (2.20), (2.6) имеет вид

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \int_0^t f[x + a(\tau - t), \tau] d\tau, \quad (x, t) \in \Pi[\alpha, \beta] \quad (2.27)$$

при условии, что  $f$  и  $\varphi$  являются непрерывно-дифференцируемыми функциями. С помощью метода от противного легко показывается, что решение  $u$  задачи (2.20), (2.6) единственно в полосе  $\Pi[\alpha, \beta]$ . Изложенный метод решения задачи Коши (2.20), (2.6) носит название *метода характеристик*.

По аналогичной схеме метод характеристик применяется для решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad u|_{x=0} = g(t), \quad t \in [c, d], \quad (2.28)$$

отвечающей ситуации, когда данные Коши задаются на отрезке  $[c, d]$  оси  $t$ . Возьмем произвольную точку  $(x_0, t_0)$  характеристической полосы  $\Pi[c, d]$  для уравнения (2.20) и проведем через нее характеристику (2.15), являющуюся решением задачи (2.14), до пересечения с осью  $t$  в точке  $t'_0 = t_0 - x_0/a$ . Вдоль этой характеристики уравнение (2.20) сводится к обыкновенному

дифференциальному уравнению (2.24). Предположим сначала, что в (2.28)  $g = 0$ . Интегрируя (2.24) на интервале  $[t_0 - x_0/a, t_0]$ , приходим к равенству

$$u(x_0, t_0) = \int_{t_0 - x_0/a}^{t_0} f[x_0 + a(\tau - t_0), \tau] d\tau.$$

Заменяя  $(x_0, t_0)$  на переменную точку  $(x, t)$  полосы  $\Pi[c, d]$ , получим

$$u(x, t) = \int_{t-x/a}^t f[x + a(\tau - t), \tau] d\tau, \quad (x, t) \in \Pi[c, d]. \quad (2.29)$$

Простой проверкой убеждаемся, что функция (2.29) является решением задачи (2.28) при  $g = 0$ , тогда как функция

$$u(x, t) = g(t - x/a) + \int_{t-x/a}^t f[x + a(\tau - t), \tau] d\tau, \quad (x, t) \in \Pi[c, d] \quad (2.30)$$

является решением неоднородной задачи (2.28) при условии, конечно, что функции  $f$  и  $g$  являются непрерывно-дифференцируемыми функциями своих аргументов. Указанное решение единственно в полосе  $\Pi[c, d]$ .

Рассмотрим теперь следующую общую неоднородную задачу для уравнения (2.20) в области  $Q = (0, l] \times (0, T]$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f \text{ в } Q, \quad (2.31)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad u|_{x=0} = g(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.32)$$

Поскольку дополнительные условия для решения  $u$  уравнения (2.31) задаются как при  $t = 0$ , так и на конце  $x = 0$  интервала  $(0, l)$ , то задача (2.31), (2.32) имеет смысл начально-краевой задачи для уравнения (2.31). Для краткости на неё будем ссылаться как на задачу 1. Поставим цель: построить классическое решение  $u$  задачи 1. Приведем строгое определение этого понятия, руководствуясь соображениями, изложенными в п. 2.1.5

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** *Классическим решением задачи 1 будем называть функцию  $u \in C^1(Q) \cap C^0(\overline{Q})$ , удовлетворяющую уравнению (2.31) в каждой точке  $(x, t) \in Q$ , начальному условию в (2.32) в каждой точке  $x \in [0, l]$  и граничному условию в (2.32) при каждом значении  $t \in [0, T]$ .*

Подчеркнем, что в соответствии с определением 2.1 классическое решение  $u$  задачи 1 является непрерывно-дифференцируемой в  $Q$  функцией, удовлетворяющей уравнению (2.31) в каждой точке  $(x, t) \in Q$ , в том числе и в точках  $(l, t)$  и  $(x, T)$ , лежащих на правой и верхней границах  $Q$ . Но оно не обязано, вообще говоря, удовлетворять уравнению (2.31) и быть непрерывно-дифференцируемым в точках  $(x, 0)$  нижней границы области

$Q$ , где задано начальное условие, и в точках  $(0, t)$  левой границы, где задано граничное условие в (2.32).

Предположим, что выполняются следующие условия:

$$f \in C^m(\overline{Q}), \quad \varphi \in C^m[0, l], \quad g \in C^m[0, T]. \quad (2.33)$$

Здесь  $m \in \mathbb{N}$  – некоторое положительное целое число. Положим

$$Q_1 = \{(x, t) \in Q : x > at\}, \quad Q_2 = \{(x, t) \in Q : x < at\}, \quad (2.34)$$

$$u_1(x, t) = \varphi(x - at) + \int_0^t f[x + a(\tau - t), \tau] d\tau \text{ в } Q_1, \quad (2.35)$$

$$u_2(x, t) = g(t - x/a) + \int_{t-x/a}^t f[x + a(\tau - t), \tau] d\tau \text{ в } Q_2. \quad (2.36)$$

Из предыдущего анализа следует, что при выполнении условий (2.33)  $u_i \in C^m(\overline{Q}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , причем функция  $u_1$  удовлетворяет уравнению (2.31) в каждой точке области  $\overline{Q}_1$  и начальному условию в (2.32), а функция  $u_2$  удовлетворяет уравнению (2.31) всюду в  $\overline{Q}_2$  и граничному условию в (2.32). Для построения решения во всей области  $Q$  “склеим” функции  $u_1$  и  $u_2$  на “особой” для задачи 1 характеристике  $x = at$ , проходящей через угловую точку  $(0, 0)$ , полагая

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & (x, t) \in Q_1, \\ u_2(x, t), & (x, t) \in Q_2. \end{cases} \quad (2.37)$$

Ясно, что так введенная функция  $u$  принадлежит  $C^m(\overline{Q})$ ,  $m \geq 1$  тогда и только тогда, когда функции  $u_1$  и  $u_2$  совпадают на особой характеристике  $x = at$  вместе со всеми производными до порядка  $m$  включительно. Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы исходные данные задачи (2.31), (2.32), т.е. функции  $f$ ,  $\varphi$  и  $g$ , удовлетворяли вместе со своими производными до порядка  $m$  включительно определенным условиям согласования в точке  $(0, 0)$ . Простейшие из них, имеющие вид

$$\varphi(0) = g(0); \quad g'(0) + a\varphi'(0) = f(0, 0), \quad (2.38)$$

служат для обеспечения соответственно непрерывности и непрерывной дифференцируемости функции (2.37) на характеристике  $x = at$ , а следовательно, и во всей области  $\overline{Q}$ . Это составляет содержание следующей леммы, доказательство которой предоставляем читателю.

**ЛЕММА 2.1.** Пусть выполняются условия (2.33) при  $m = 1$  и условия согласования (2.38). Тогда функция  $u$ , определяемая формулой (2.31), принадлежит пространству  $C^1(\overline{Q})$ .

Из леммы 2.1 и свойств функций  $u_1, u_2$  вытекает, в свою очередь, что функция  $u$  удовлетворяет уравнению (2.31) и на характеристике  $x = at$ , а следовательно, и всюду в  $\overline{Q}$ . Таким образом, функция  $u$  в (2.31) обладает всеми свойствами, входящими в определение классического решения задачи (2.31), (2.32). Более того,  $u$  непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (2.31) не только в  $Q$ , как это требуется в определении классического решения, но и всюду в  $\overline{Q}$ , т. е., кроме того, и в граничных точках  $(0, t)$  и  $(x, 0)$  множества  $Q$ . Единственность решения легко доказывается методом от противного. Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 2.1.** *Пусть выполняются условия леммы 2.1. Тогда классическое решение  $u$  задачи 1 существует, единственно, принадлежит пространству  $C^1(\overline{Q})$  и определяется соотношениями (2.35)–(2.37).*

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.** Отметим, что построенное с помощью формул (2.35)–(2.37) решение задачи 1 принадлежит пространству  $C^1(\overline{Q})$ , т. е. обладает более гладкими свойствами, чем указано в определении классического решения. Ситуация, когда построенное решение рассматриваемой задачи обладает более гладкими свойствами, чем полагается классическому решению в соответствии с его определением, будет часто встречаться далее при рассмотрении других задач математической физики. Чтобы отличить более гладкое классическое решение от чисто классического решения, на первое будем обычно ссылаться как на *регулярное* решение.

Из (2.35)–(2.37), в частности, следует, что для решения  $u$  задачи 1 справедлива оценка

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} \leq \max(\|\varphi\|_{C[0,l]}, \|g\|_{C[0,T]}) + T\|f\|_{C(\overline{Q})}. \quad (2.39)$$

Здесь в соответствии с определениями разд. 2.1.3

$$\|\varphi\|_{C[0,l]} = \max_{x \in [0,l]} |\varphi(x)|, \quad \|g\|_{C[0,T]} = \max_{t \in [0,T]} |g(t)|, \quad \|f\|_{C(\overline{Q})} = \max_{(x,t) \in \overline{Q}} |f(x,t)|.$$

При  $f = 0$  решение  $u$ , кроме того, сохраняется вдоль характеристик и удовлетворяет “чистому” принципу максимума, а именно:

$$m \leq u(x, t) \leq M \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}. \quad (2.40)$$

Здесь

$$m = \min(\min_{x \in [0,l]} \varphi(x), \min_{t \in [0,T]} g(t)); \quad M = \max(\max_{x \in [0,l]} \varphi(x), \max_{t \in [0,T]} g(t)).$$

Указанные оценки получены на основе явного представления решения в виде (2.35)–(2.37). Оценки такого рода (полученные с использованием информации о решении) называются *апостериорными*. Роль этих оценок в

общем-то невелика, так как найти явное представление точного решения удаётся в редких случаях. Так, для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma(x, t)u = f \text{ в } Q \quad (2.41)$$

построение аналогичного представления решения становится проблематичным. Важно, однако, отметить, что оценки вида (2.39) можно получать и без использования информации о точном решении  $u$ , а с использованием лишь свойств самого дифференциального уравнения, которому удовлетворяет  $u$ . Поясним идею такого подхода к получению оценок решения на примере более общего уравнения (2.41). Напомним, что в соответствии с физическим смыслом (см. разд. 1.4) слагаемое  $\gamma u$  описывает при  $\gamma \geq 0$  эффект поглощения переносимой в среде субстанции, вызванного, например, действием химических реакций. Для краткости на задачу (2.41), (2.32) будем ссылаться как на задачу 2.

**2.2.3. Метод энергетических неравенств.** Введём в рассмотрение пространство функций, определенных и непрерывных на интервале  $[0, l]$ . Определив в нем скалярное произведение и норму по формулам

$$(u, v) = (u, v)_H = \int_0^l u(x)v(x)dx, \quad \|u\| = \|u\|_H = (u, u)^{1/2}, \quad (2.42)$$

получим бесконечномерное евклидово (или предгильбертово) пространство, т. е. неполное по введенной норме функциональное пространство. Обозначим его через  $H = H[0, l]$ . Точно так же через  $G = G[0, T]$  обозначим пространство непрерывных на интервале  $[0, T]$  функций с нормой  $\|g\|_G = \left( \int_0^T g^2(t)dt \right)^{1/2}$ . Введем два нормированных пространства  $U = C[0, T; H]$  и  $F = L^1(0, T; H)$ , состоящие из функций, зависящих от  $(x, t) \in Q$ , с нормами

$$\|u\|_U = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_H, \quad \|f\|_F = \int_0^T \|f(\cdot, t)\|_H dt. \quad (2.43)$$

Первое из них состоит из функций  $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , нормы которых в пространстве  $H$ , зависящие от  $t$ , являются непрерывными функциями от  $t$  на интервале  $[0, T]$ . Второе состоит из функций  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , нормы которых в  $H$  являются интегрируемыми функциями на  $(0, T)$ . Выражения в (2.43) удовлетворяют всем трем условиям, входящим в определение нормы (см. п. 2.1.3). Это означает, что формулы в (2.43) действительно определяют нормы в пространствах  $U$  и  $F$ .

Предполагая, что решение  $u$  задачи 2 существует и принадлежит пространству  $C^1(\overline{Q})$ , т. е. является регулярным, умножим уравнение (2.41) на

$u$  и проинтегрируем на интервале  $(0, l)$ . Учитывая, что

$$\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} u dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{d}{dt} u^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l u^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|^2,$$

$$\int_0^l a \frac{\partial u}{\partial x} u dx = \frac{a}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} (u^2) dx = \frac{a}{2} [u^2(l, t) - u^2(0, t)],$$

приходим с учетом граничного условия в (2.32) к соотношению

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|^2 + au^2(l, t) - ag^2(t) + 2 \int_0^l \gamma u^2 dx = 2(f, u). \quad (2.44)$$

Предположим сначала, что  $g(t) = 0$ ,  $\gamma(x, t) \geq 0$ . Оставляя в левой части (2.44) первое слагаемое и применяя к правой части неравенство Коши, согласно которому  $|(f, u)| \leq \|f\| \|u\|$ , получим

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|^2 \equiv 2\|u\| \frac{d}{dt} \|u\| \leq 2\|f\| \|u\|.$$

Предполагая, что  $\|u\| > 0$ , сократим обе части на  $2\|u\|$  и проинтегрируем полученное выражение на интервале  $(0, t)$ . Учитывая начальное условие в (2.32), получим неравенство

$$\|u(\cdot, t)\| \leq \|\varphi\|_H + \int_0^t \|f(\cdot, \tau)\| d\tau \leq \|\varphi\|_H + \int_0^T \|f(\cdot, \tau)\| d\tau \quad \forall t \in [0, T].$$

При  $\|u\| = 0$  это неравенство и тем более справедливо. Из него вытекает с учетом обозначений (2.43), что

$$\|u\|_U \leq \|\varphi\|_H + \|f\|_F. \quad (2.45)$$

Пусть теперь  $f = 0$ ,  $\gamma \geq 0$ . Интегрируя (2.44) при  $f = 0$  на  $(0, t)$ , получим

$$\|u(\cdot, t)\|^2 = \|\varphi\|^2 + a \int_0^t g^2(\tau) d\tau - a \int_0^t u^2(l, \tau) d\tau - 2 \int_0^t \int_0^l \gamma u^2 dx d\tau. \quad (2.46)$$

Поскольку последние два слагаемых в правой части (2.46) неположительны, то, отбрасывая их, приходим к неравенству

$$\|u(\cdot, t)\|^2 \leq \|\varphi\|^2 + a \int_0^t g^2(\tau) d\tau = \|\varphi\|_H^2 + a\|g\|_G^2 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.47)$$

В частном случае, когда  $\varphi = 0$ , из (2.45) приходим к оценке

$$\|u\|_U \leq \sqrt{a} \|g\|_G. \quad (2.48)$$

Из (2.45) и (2.48) вытекает в силу линейности задачи 2 неравенство

$$\|u\|_U \leq \|\varphi\|_H + \sqrt{a}\|g\|_G + \|f\|_F. \quad (2.49)$$

Оно обобщает (2.45) на случай, когда  $g(t) \neq 0$ . Сформулируем полученные результаты в виде леммы.

**ЛЕММА 2.2.** Пусть функция  $u$  является регулярным решением задачи 2, отвечающим тройке  $(\varphi, g, f)$ , причем  $\gamma \geq 0$  в  $Q$ . Тогда справедлива оценка (2.47).

Неравенство (2.49) означает, что при  $\gamma \geq 0$  норма регулярного решения  $u$  задачи 2 ограничена сверху постоянной, равной сумме норм исходных данных  $\varphi$ ,  $g$  и  $f$ . Таким образом, (2.49) играет роль простейшей оценки на решение  $u$  сверху, причем указанная оценка получена не из представления решения, а исходя лишь из свойств самого уравнения (2.41) и предположения о существовании и непрерывной дифференцируемости решения. Оценки такого типа, устанавливающие соответствующую информацию о решении до его нахождения, называются *априорными*. В отличие от апостериорных оценок, априорные оценки играют важную роль в теории дифференциальных уравнений и используются, например, для доказательства существования, единственности и устойчивости решений краевых задач. Причем поскольку при этом совершенно не используется явное представление решения, то с помощью такого подхода можно получать оценки как для уравнений с постоянными или переменными коэффициентами, так даже и для нелинейных дифференциальных уравнений.

Метод исследования корректности краевых задач, основанный на получении и использовании априорных оценок, называется методом *априорных оценок*. Его также называют методом *энергетических неравенств* или просто *энергетическим методом*. Последнее название связано с тем, что оцениваемая величина, в частности  $\|u\|^2$ , часто имеет смысл энергии рассматриваемой физической системы. Хотя в нашем случае термин “энергия” скорее носит математический характер и обозначает величину  $E(t) = \|u(\cdot, t)\|_H^2$  независимо от физического смысла последней.

В частности, из оценки (2.49) вытекает в силу линейности задачи 2 единственность решения  $u$  и устойчивость его в выбранных нормах. Действительно, пусть функции  $u_i$  являются регулярными решениями задачи 2, отвечающими тройкам  $(\varphi_i, g_i, f_i)$  исходных данных,  $i = 1, 2$ . Тогда разность  $u_1 - u_2$  является регулярным решением, отвечающим тройке  $(\varphi_1 - \varphi_2, g_1 - g_2, f_1 - f_2)$ . Поэтому в силу леммы 2.2 справедлива оценка

$$\|u_1 - u_2\|_U \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_H + \sqrt{a}\|g_1 - g_2\|_G + \|f_1 - f_2\|_F. \quad (2.50)$$

Из (2.50), в частности, следует, что малым возмущениям правой части в норме пространства  $F$ , начальной функции в норме  $H$  и граничной функции в норме  $G$  отвечают малые возмущения решения в  $U$ . Это и означает

устойчивость регулярного решения задачи 2. Из (2.50) также вытекает, что  $u_1 = u_2$  при  $\varphi_1 = \varphi_2, g_1 = g_2, f_1 = f_2$ . Последнее означает единственность регулярного решения задачи 2. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 2.2.** *При выполнении условия  $\gamma \geq 0$  в  $Q$  регулярное решение  $u \in C^1(\overline{Q})$  задачи 2 единственно и непрерывно зависит от исходных данных  $(\varphi, g, f)$  в том смысле, что выполняется оценка (2.50).*

В случае  $\gamma = 0$  из теорем 2.1 и 2.2 вытекает следующий результат.

**СЛЕДСТВИЕ 2.1.** *При выполнении условий теоремы 2.1 регулярное решение  $u \in C^1(\overline{Q})$  задачи 1 существует, единственно, и для него выполняется оценка (2.47), означающая непрерывную зависимость решения  $u$  от данных  $(\varphi, g, f)$ .*

Итак, мы доказали существование и единственность регулярного решения задачи 1 при выполнении определенных условий на исходные данные. Подчеркнем, что доказательство существования решения основывалось на методе характеристик, с помощью которого фактически было построено явное представление решения в виде (2.35)–(2.37). В то же время при доказательстве устойчивости и единственности мы использовали совсем другой подход, основанный на методе энергетических неравенств. Такая ситуация, когда для доказательства существования и единственности решения рассматриваемой задачи используются разные методы, является обычным делом при теоретическом изучении задач математической физики. Отметим при этом, что метод характеристик, используемый при выводе явного представления решения задачи 1, является весьма специфическим и используется для нахождения решений лишь некоторых специальных уравнений математической физики. В противоположность ему метод энергетических неравенств, используемый нами выше при доказательстве единственности решения задачи 2, является достаточно универсальным и с успехом будет применяться в следующих главах при исследовании единственности решений других задач математической физики.

Наряду с априорными оценками важную роль играют так называемые интегральные законы сохранения, устанавливающие некоторые интегральные свойства решений рассматриваемой задачи. Простейший из них для задачи (2.41), (2.32) имеет вид (2.46). В частном случае, когда  $g(t) = 0$ , он означает, что при  $f = 0$  и  $\gamma \geq 0$  энергия  $E(t)$  убывает с ростом  $t$  (так как с ростом  $t$  убывают последние два слагаемых в правой части (2.46)). Это естественно с физической точки зрения, поскольку условия  $f = 0, g = 0$  означают отсутствие притока энергии в рассматриваемую систему. Так как при этом частицы, выходящие из  $(0, l)$  через конец  $x = l$  выносят с собой часть энергии, то энергия может лишь убывать. Предпоследнее слагаемое в правой части (2.46) как раз и описывают теряемую за счет выхода частиц энергию за время  $t$ , тогда как последнее слагаемое описывает теряемую



энергию за счет действия химических реакций. Отбрасывая их, мы получили выше априорную оценку (2.47), справедливую при  $f = 0$ , которая является следствием закона сохранения.

При  $\gamma \equiv 0$  закон сохранения (2.46) принимает вид

$$\|u(\cdot, t)\|_H^2 = \|\varphi\|_H^2 + a \int_0^t g^2(\tau) d\tau - a \int_0^t u^2(l, \tau) d\tau.$$

Данное соотношение связывает значения  $u$  в точках, расположенных лишь на границах прямоугольника  $Q_t = (0 < x < l, 0 < \tau < t)$ . Это объясняется тем обстоятельством, что уравнение (2.31) имеет *дивергентный* вид (так как левая часть в (2.31) представляет собой двумерную дивергенцию вектора  $(u, au)$ ). Дивергентность играет важную роль при построении разностных схем, аппроксимирующих уравнение переноса [44].

**2.2.4. Начально-краевая задача для двумерного уравнения переноса в прямоугольнике.** Пусть  $\Omega = (0 < x < l, 0 < y < h)$  – прямоугольник в плоскости  $x, y$ . В области  $Q = \{(x, y, t), (x, y) \in \Omega, t \in (0, T)\}$  рассмотрим двумерное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \text{grad} u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = f. \quad (2.51)$$

Здесь  $a$  и  $b$  – заданные в  $Q$  компоненты вектора скорости  $\mathbf{a} = (a, b)$  движущейся жидкости,  $f$  – заданная в  $Q$  правая часть. Функции  $a$  и  $b$  будем считать удовлетворяющими условиям:

- (i)  $a, b \in C^{1,0}(\overline{Q})$ ,
- (ii)  $a|_{x=0} = a_1(y, t) > 0$ ,  $a|_{x=l} = a_2(y, t) > 0$ ,  $y \in [0, h]$ ,  $t \in [0, T]$ ;  
 $b|_{y=0} = b|_{y=h} = 0$ ,  $x \in [0, l]$ ,  $t \in [0, T]$ ,
- (ii')  $\text{div } \mathbf{a} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = 0$  в  $Q$ ,  $\int_{\Gamma_1} a_1 ds = \int_{\Gamma_2} a_2 ds$ .

Здесь  $C^{1,0}(\overline{Q})$  обозначает пространство функций  $w : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывных на  $\overline{Q}$  вместе с производными  $\partial w / \partial x$  и  $\partial w / \partial y$ .

Условия (ii) физически означают, что жидкость втекает в область  $\Omega$  слева через участок  $\Gamma_1 = \{(x, y), x = 0, y \in (0, h)\}$ , а вытекает из  $\Omega$  справа через участок  $\Gamma_2 = \{(x, y), x = l, y \in (0, h)\}$ , причем горизонтальные стенки  $y = 0$  и  $y = h$  являются непроницаемыми для жидкости. Первое условие  $\text{div } \mathbf{a} = 0$  в (ii') означает, что жидкость, в которой происходит процесс переноса субстанции  $u$ , описываемый уравнением (2.51), является несжимаемой. Последнее условие в (ii') является следствием условия  $\text{div } \mathbf{a} = 0$  и двумерной формулы Гаусса–Остроградского. Оно означает физически, что количество жидкости, втекающее в каждый момент времени  $t$  в область  $\Omega$

через участок  $\Gamma_1$ , равно количеству жидкости, вытекающей из  $\Omega$  в тот же момент  $t$  через участок  $\Gamma_2$ .

Положим  $\Sigma_i = \Gamma_i \times (0, T]$ ,  $i = 1, 2$ . Уравнение (2.51) будем рассматривать при следующих начальных и граничных условиях:

$$u|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega, \quad u|_{x=0} = g(y, t), \quad (y, t) \in \Sigma_1. \quad (2.52)$$

Здесь  $\varphi$  и  $g$  – заданные функции своих аргументов. Отметим, что на условия (2.52) можно смотреть как на условия Коши для двумерного уравнения (2.51), задаваемые на поверхности (носителе данных Коши), состоящей из нижней границы  $\Omega_0 = \{(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q} : \mathbf{x} \in \Omega, t = 0\}$  (основания) параллелепипеда  $Q$  и его боковой левой грани  $\Sigma_1$ . При такой интерпретации участок  $\overline{\Gamma}_1$  области  $\overline{Q}$ , являющийся пересечением  $\overline{\Omega}_0$  и  $\overline{\Sigma}_1$ , играет особую роль для задачи Коши, ибо он состоит из точек, в которых нарушается гладкость носителя данных Коши.

Ниже на задачу (2.51), (2.52) для краткости будем ссылаться как на задачу 3. Будем предполагать, что выполняются условия

$$(iii) \quad \varphi \in C^1(\overline{\Omega}), \quad g \in C^1(\overline{\Sigma}_1), \quad f \in C^1(\overline{Q}).$$

Нашей целью является доказательство существования и единственности регулярного решения задачи 3 из пространства  $C^1(\overline{Q})$  при выполнении введенных условий на исходные данные и некоторых условий согласования на них. Для этого мы так же, как и в п. 2.2.2, построим формулу, описывающую явное представление ее решения через исходные данные.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно [51], что нахождение решения уравнения (2.51) эквивалентно, по крайней мере для гладкой вектор-функции  $\mathbf{a}$ , нахождению его характеристик. Поэтому мы начнем с введения строгого понятия характеристики уравнения (2.51). Пусть  $(\mathbf{x}, t) \in Q$  – произвольная точка. Рассмотрим задачу Коши, заключающуюся в нахождении вектор-функции  $\mathbf{y}$  в некоторой окрестности точки  $(\mathbf{x}, t)$  из условий

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{a}(\mathbf{y}, \tau), \quad (2.53)$$

$$\mathbf{y}|_{\tau=t} = \mathbf{x}. \quad (2.54)$$

Из [51, гл.7] вытекает, что при выполнении условий (i) решение задачи (2.53), (2.54) существует и единственно по крайней мере в некоторой окрестности любой точки  $(\mathbf{x}, t) \in Q$ .

Условимся о следующих обозначениях и терминологии. Через  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\tau)$  будем обозначать произвольное решение векторного обыкновенного дифференциального уравнения (2.53), через  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau)$  будем обозначать решение задачи (2.53), (2.54). Хорошо известно (см. [51, гл.7]), что при выполнении условий (i) каждая из этих двух вектор-функций является непрерывно дифференцируемой функцией аргумента  $\tau$ , а вторая –  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau)$ ,

является к тому же непрерывно-дифференцируемой функцией от параметров  $\mathbf{x}$  и  $t$ . Когда  $\tau$  пробегает некоторое множество на оси  $t$ , точка  $\mathbf{y}(\tau)$  пробегает некоторую кривую в плоскости  $x, y$  (эту плоскость принято называть *фазовой плоскостью*), а соответствующая трехмерная точка  $(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau), \tau)$  пробегает некоторую “пространственную” кривую в пространстве  $x, y, t$ . Последнюю кривую, имеющую смысл интегральной кривой уравнения (2.53), будем называть *характеристикой уравнения* (2.51), а интегральную кривую задачи (2.53), (2.54) будем называть *характеристикой уравнения* (2.51), *проходящей через точку*  $(\mathbf{x}, t)$ . В свою очередь, первую кривую, являющуюся проекцией характеристики на фазовую плоскость  $x, y$ , будем называть *фазовой траекторией* уравнения (2.53). Последнее название связано с тем, что при гидродинамической интерпретации поля  $\mathbf{a}$  как поля скоростей движущейся жидкости именно уравнение (2.53) описывает траектории, т. е. кривые, по которым движутся частицы жидкости в поле скоростей  $\mathbf{a}$ .

Наконец, отметим, что с учетом гидродинамической интерпретации векторного поля  $\mathbf{a}$  как поля скоростей движущейся жидкости векторное уравнение (2.53) часто называют *динамической системой*, а раздел курса теории обыкновенных дифференциальных уравнений, где изучаются свойства динамических систем, называется *теорией динамических систем*.

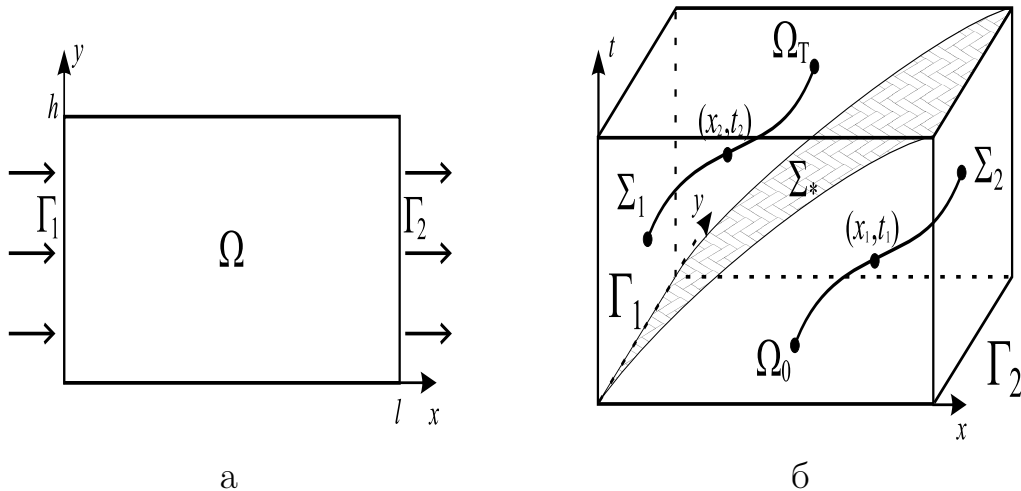


Рис. 2.6

Одним из основных результатов теории динамических систем является свойство *глобальной разрешимости* задачи (2.53), (2.54) при выполнении условий (i), (ii). Это свойство означает, что ее решение, о локальном существовании которого было сказано выше, может быть продолжено, причем единственным образом, вплоть до границ области  $Q$ . Применяя это свойство к характеристикам, приходим к выводу, что через каждую точку  $(\mathbf{x}, t) \in Q$  проходит единственная характеристика уравнения (2.51). Указанная характеристика начинается, т. е. входит в область  $Q$ , в некоторой

точке  $(\mathbf{x}', t') \in \overline{\Omega}_0 \cup \overline{\Sigma}_1$  и заканчивается, т. е. выходит из области  $Q$ , в некоторой точке  $(\mathbf{x}'', t'') \in \overline{\Omega}_T \cup \overline{\Sigma}_2$ . Здесь  $\Omega_T = \{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \Omega, t = T\}$  – верхнее основание параллелепипеда  $Q$ .

Поскольку каждая характеристика начинается в точках  $\overline{\Omega}_0 \cup \overline{\Sigma}_1$ , то возможны два варианта: либо для всех  $\tau \in [0, t]$   $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau) \notin \overline{\Gamma}_1$ , либо  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau') \in \overline{\Gamma}_1$  в некоторый момент времени  $\tau'(\mathbf{x}, t)$  ( $0 \leq \tau' \leq t$ ). Определим функцию  $\tau_0$ , зависящую от  $\mathbf{x}$  и  $t$ , считая, что в первом случае она равна нулю, а во втором случае принимает значение  $\tau'(\mathbf{x}, t)$ . Положим также  $\mathbf{y}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau_0(\mathbf{x}, t))$ . Очевидно,  $(\tau_0(\mathbf{x}, t), \mathbf{y}_0(\mathbf{x}, t))$  – точка на участке  $\overline{\Omega}_0 \cup \overline{\Sigma}_1$  границы области  $Q$ , через которую в область  $Q$  входит характеристика уравнения (2.51), проходящая через точку  $(\mathbf{x}, t)$ . Физически  $\tau_0(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathbf{y}_0(\mathbf{x}, t)$  обозначают время и место появления в  $\overline{\Omega}$  частицы жидкости, проходящей в момент  $t$  через точку  $\mathbf{x}$ . Из теории динамических систем вытекает, что  $\tau_0$  и  $\mathbf{y}_0$  являются непрерывно-дифференцируемыми функциями точек  $(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}$ .

Фундаментальным свойством характеристик уравнения (2.51) является тот факт, что решение  $u$  однородного аналога

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \mathbf{a} \cdot \text{grad} u = 0 \quad (2.55)$$

уравнения (2.51) сохраняется вдоль любой характеристики. (Здесь для единообразия с уравнением (2.53) мы обозначаем произвольную точку области  $Q$  через  $(\mathbf{y}, \tau)$ , считая тем самым, что функция  $u$  зависит от переменных  $\mathbf{y}$  и  $\tau$ .) Для доказательства этого факта рассмотрим функцию  $U$  одной переменной  $\tau$ , зависящую от  $\mathbf{x}$  и  $t$  как от параметров, определяемую формулой  $U(\tau) = U_{\mathbf{x},t}(\tau) \equiv u[\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau), \tau]$ . Здесь  $u$  – произвольная непрерывно-дифференцируемая в  $Q$  функция. При изменении  $\tau$  в окрестности точки  $t$  точка  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau)$  пробегает характеристику уравнения (2.51), проходящую через точку  $(\mathbf{x}, t)$ . Поэтому функция  $U$  описывает поведение функции  $u$  вдоль этой характеристики. Используя правило дифференцирования сложной функции и (2.53), имеем

$$\frac{dU_{\mathbf{x},t}}{d\tau} = \nabla u[\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau), \tau] \cdot \frac{d\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau)}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial \tau}[\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau), \tau] = \mathbf{a} \cdot \nabla u + \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (2.56)$$

Пусть теперь  $u$  является решением однородного уравнения (2.55). Тогда правая часть (2.56) равна нулю и, следовательно, (2.56) принимает вид

$$\frac{dU_{\mathbf{x},t}}{d\tau} = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in Q.$$

Это условие и означает, что всякое решение  $u$  однородного уравнения (2.55) принимает постоянные значения на характеристиках уравнения (2.51), хотя и разные для разных характеристик.

Введем еще одно важное определение из теории обыкновенных дифференциальных уравнений: функция  $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , не равная тождественно константе, называется *первым интегралом* уравнения (2.53), если она обращается в константу на любом решении  $\mathbf{y}(\tau)$  уравнения (2.53). В некоторых учебниках под первым интегралом понимают само соотношение

$$u(\mathbf{y}, \tau) = C, \quad (2.57)$$

справедливое на любом решении  $\mathbf{y}$  уравнения (2.53). Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [51, с. 310], [54, с. 218]) известно, что функция  $u \in C^1(Q)$  является первым интегралом уравнения (2.53) в области  $Q$  тогда и только тогда, когда  $u$  – решение уравнения (2.55) в  $Q$ . Ввиду важности этого факта приведем его доказательство.

Пусть функция  $u$  является первым интегралом уравнения (2.53). Тогда, подставляя в (2.57) вместо  $\mathbf{y}$  какое-либо решение уравнения (2.53), получаем тождество относительно  $\tau$  вида

$$u[\mathbf{y}(\tau), \tau] \equiv C. \quad (2.58)$$

Дифференцируя обе части по  $\tau$ , будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \text{grad} u \cdot \frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = 0. \quad (2.59)$$

Заменяя в (2.59) производную  $d\mathbf{y}/d\tau$  правой частью уравнения (2.53), получим

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \mathbf{a}[\mathbf{y}(\tau), \tau] \cdot \text{grad} u = 0. \quad (2.60)$$

В равенстве (2.60)  $\mathbf{y}(\tau)$  является некоторым решением уравнения (2.53). Это означает, что в данном тождестве пара  $(\mathbf{y}, \tau)$  пробегает точки в области  $Q$ , через которые проходит интегральная кривая данного решения. Но поскольку результат дифференцирования равенства (2.58) не зависит от  $C$ , то равенство (2.60) выполняется для точек  $(\mathbf{y}, \tau)$ , лежащих на любой интегральной кривой уравнения (2.53), расположенной в рассматриваемой области. Так как в силу условий (i) через каждую точку  $(\mathbf{y}, \tau) \in Q$  проходит интегральная кривая уравнения (2.53), то равенство (2.60) выполняется тождественно относительно  $(\mathbf{y}, \tau) \in Q$ . Это означает, что  $u$  является решением уравнения (2.55) в  $Q$ .

Пусть, обратно, функция  $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$  является решением уравнения (2.55) в  $Q$ . Тогда вдоль любой характеристики уравнения (2.55), т. е. вдоль любой интегральной кривой уравнения (2.53), функция  $u$  принимает постоянное значение, т. е. выполняется тождество (2.58). Последнее означает, что функция  $u$  является общим интегралом уравнения (2.53).

Сформулируем полученные результаты в виде следующей леммы, являющейся отражением эквивалентности задачи решения уравнения первого

порядка в частных производных и соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно его характеристик.

ЛЕММА 2.3. Пусть выполняются условия (i) и  $u \in C^1(Q)$  – заданная в  $Q$  функция. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) функция  $u$  является решением уравнения (2.55) в области  $Q$ ;
- 2) функция  $u$  принимает постоянное значение на любой характеристике уравнения (2.55), проходящей через  $Q$ ;
- 3) функция  $u$  является первым интегралом уравнения (2.53) в  $Q$ .

Из леммы 2.3 вытекает следующий элегантный способ построения решения рассматриваемой задачи Коши для однородного уравнения (2.51) (при  $f = 0$ ). Через каждую точку  $(\mathbf{x}, t) \in Q$  проводим характеристику  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau)$ . Если она начинается в некоторой точке  $(\mathbf{x}_0, 0) \in \bar{\Omega}_0$ , то вдоль этой характеристики полагаем решение  $u$  равным  $\varphi(\mathbf{x}_0)$ . Если она начинается в некоторой точке  $(y_0, t_0) \in \bar{\Sigma}_1$ , то вдоль этой характеристики полагаем решение равным  $g(y_0, t_0)$ . В результате получим функцию  $u$ , определенную во всех точках  $(\mathbf{x}, t) \in Q$ . Остается только найти условия на исходные данные, при которых построенная таким образом функция  $u$  является непрерывно-дифференцируемым в  $Q$  решением задачи 3 при  $f = 0$  и допускает непрерывно-дифференцируемое продолжение на замыкание  $\bar{Q}$ . К установлению указанных условий мы вернемся несколько позже, а пока отметим, что на основе свойства 2) решения уравнения (2.55) (см. лемму 2.3) легко доказывается единственность решения задачи 3. Действительно, если предположить, что существуют два решения  $u_1$  и  $u_2$  задачи 3, то их разность  $u = u_2 - u_1$  будет удовлетворять однородному уравнению (2.51) и однородным условиям в (2.52). В таком случае из свойства постоянства решения однородного уравнения (2.51) на характеристиках вытекает, что функция  $u$  равна нулю вдоль любой характеристики, проходящей через область  $Q$ . Это означает, что  $u$  равна нулю всюду в  $Q$ .

Вернемся теперь к вопросу о построении решения задачи 3 в общем случае, когда  $f \neq 0$ . Рассуждая, как в п. 2.2.2, положим:

$$Q_1 = \{(\mathbf{x}, t) \in Q : \tau_0(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{y}_0(\mathbf{x}, t) \notin \bar{\Gamma}_1\}, Q_2 = \{(\mathbf{x}, t) \in Q : \tau_0(\mathbf{x}, t) > 0\}, \quad (2.61)$$

$$u_1(\mathbf{x}, t) = \varphi[\mathbf{y}_0(\mathbf{x}, t)] + \int_0^t f[\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau), \tau] d\tau \text{ в } Q_1, \quad (2.62)$$

$$u_2(\mathbf{x}, t) = g[\mathbf{y}_0(\mathbf{x}, t), \tau_0(\mathbf{x}, t)] + \int_{\tau_0(\mathbf{x}, t)}^t f[\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau), \tau] d\tau \text{ в } Q_2. \quad (2.63)$$

Обозначим через  $\Sigma_* \in \bar{Q}$  множество, образованное характеристиками (или траекториями движущихся частиц), входящими в  $Q$  через участок  $\bar{\Gamma}_1$  при  $t = 0$ . Формулы (2.61)–(2.63) являются двумерными аналогами формул (2.34)–(2.36), а множество  $\Sigma_*$  является двумерным аналогом особой для

уравнения (2.31) характеристики  $x = at$ . Оно состоит из “особых” характеристик уравнения (2.51), входящих в область  $Q$  через точки особого множества  $\bar{\Gamma}_1$  носителя данных Коши задачи 3. Геометрически множество  $\Sigma_*$  изображено на рис. 2.6,б для случая, когда все особые характеристики, входящие в  $Q$  через участок  $\bar{\Gamma}_1$  в момент времени  $t = 0$ , выходят из  $Q$  через участок  $\bar{\Gamma}_2$  в момент  $t = T$ .

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что при выполнении условий (i)–(iii)  $u_i \in C^1(\bar{Q}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , причем функция  $u_1$  удовлетворяет уравнению (2.51) в каждой точке  $(x, t) \in \bar{Q}_1$  и начальному условию в (2.52), а  $u_2$  удовлетворяет уравнению (2.51) всюду в  $\bar{Q}_2$  и граничному условию в (2.52). Для построения решения  $u$  во всей области  $\bar{Q}$  “склеим” функции  $u_1$  и  $u_2$  на характеристиках, принадлежащих “особому” множеству  $\Sigma_*$ , полагая

$$u(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} u_1(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in Q_1, \\ u_2(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in Q_2. \end{cases} \quad (2.64)$$

Ясно, что введенная с помощью формулы (2.64) функция  $u$  является непрерывно-дифференцируемой в  $\bar{Q}$  тогда и только тогда, когда продолжения функций  $u_1$  и  $u_2$  на  $\Sigma_*$  непрерывно-дифференцируемы и совпадают вместе с производными в каждой точке  $(x, t) \in \Sigma_*$ . Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы исходные данные задачи 3, т. е. функции  $\varphi$ ,  $g$  и  $f$  удовлетворяли вместе со своими производными первого порядка условиям согласования в точках участка  $\bar{\Gamma}_1$ , имеющим вид

$$\varphi(0, y) = g(y, 0), \quad \left. \frac{\partial g}{\partial t} + a \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right|_{x=0, t=0} = f(0, y, 0) \quad \forall y \in [0, b]. \quad (2.65)$$

Это составляет содержание следующей леммы, доказательство которой предоставляем читателю.

**ЛЕММА 2.4.** Пусть выполняются условия (i)–(iii) и условия согласования (2.65). Тогда функция  $u$ , определяемая формулой (2.64), принадлежит пространству  $C^1(\bar{Q})$ .

Из леммы 2.4 и свойств функций  $u_1$ ,  $u_2$  вытекает, в свою очередь, что функция  $u$ , определяемая формулой (2.64), удовлетворяет уравнению (2.51) и в точках множества  $\Sigma_*$ , а следовательно, и всюду в  $\bar{Q}$ . Таким образом, функция  $u$  в (2.64) непрерывно-дифференцируема и удовлетворяет уравнению (2.51) всюду в  $\bar{Q}$ , т. е. является регулярным решением задачи 3. Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 2.3.** Пусть выполняются условия леммы 2.4. Тогда регулярное решение  $u$  задачи 3 из пространства  $C^1(\bar{Q})$  существует, единственно и определяется соотношениями (2.62)–(2.64).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.** Первое условие в (2.65) служит для обеспечения непрерывности решения  $u$  в  $\bar{Q}$  и называется условием согласования нулевого по-

рядка. Второе условие в (2.65), означающее выполнение уравнения (2.51) в точках  $\bar{\Gamma}_1$  при  $t = 0$ , связывает первые производные от начальных и граничных функций в указанных точках. Оно называется условием согласования первого порядка. Используя условия согласования нулевого и первого порядков и формулу (2.64), можно получить условия согласования второго порядка, необходимые для принадлежности решения  $u$  задачи 3 пространству  $C^2(\bar{Q})$ , и вообще условия согласования любого порядка.

Отметим далее, что для решения задачи 3 справедливы двумерные аналоги оценок (2.39) и принципа максимума (2.40), полученные в п. 2.2.2 для одномерного уравнения (2.31). Более того, для уравнения (2.51), а также для уравнения переноса с “поглощением”  $\gamma \geq 0$ , имеющего вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \text{grad} u + \gamma u = f, \quad (2.66)$$

справедлив двумерный аналог оценки (2.47). Для его доказательства обозначим через  $H$  предгильбертово пространство, состоящее из непрерывных в  $\bar{\Omega}$  функций со скалярным произведением и нормой, определяемыми формулами:

$$(u, v) = (u, v)_H = \int_{\Omega} u(x, y)v(x, y)dx dy, \quad \|u\|_H^2 = (u, u)_H. \quad (2.67)$$

Аналогично одномерному случаю введем два нормированных пространства  $U = C[0, T; H]$  и  $F = L^1(0, T; H)$ , состоящие из функций, зависящих от  $(x, y, t) \in Q$ , с нормами, определенными в (2.43), где  $\|\cdot\|_H$  определена в (2.67).

Рассмотрим задачу 4, заключающуюся в нахождении решения  $u$  уравнения (2.66), удовлетворяющего условиям (2.52). Предполагая, что решение  $u$  задачи 4 существует и принадлежит  $C^1(\bar{Q})$ , умножим уравнение (2.66) на  $u$  и проинтегрируем по области  $\Omega$ . Учитывая условия (ii), (ii'), получим

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|^2 + \int_{\Gamma_2} a_2 u^2 dy - \int_{\Gamma_1} a_1 g^2 dy + 2 \int_{\Omega} \gamma u^2 dx dy = 2(f, u). \quad (2.68)$$

Рассуждая далее, как в п. 2.2.3, приходим из (2.68) к следующей оценке:

$$\|u\|_U \leq \|\varphi\|_H + \|f\|_F + \left( \int_0^T \int_{\Gamma_1} a_1 g^2 dy dt \right)^{1/2}, \quad (2.69)$$

являющейся двумерным аналогом оценки (2.49). Из нее вытекает, в частности, единственность регулярного решения задачи 4 и непрерывная зависимость его от исходных данных. Сформулируем полученный результат.

**ТЕОРЕМА 2.4.** *При выполнении условия  $\gamma \geq 0$  в  $Q$  регулярное решение  $u \in C^1(\bar{Q})$  задачи 4 единственно, и для него справедлива оценка (2.69),*



означающая непрерывную зависимость решения от исходных данных – тройки  $(\varphi, g, f)$ .

В случае  $\gamma = 0$  задача 4 переходит в задачу 3, существование регулярного решения которой вытекает из теоремы 2.3. С учетом этого имеем

**СЛЕДСТВИЕ 2.2.** При выполнении условий леммы 2.4 регулярное решение  $u \in C^1(\overline{Q})$  задачи 3 существует, единственно, и для него выполняется оценка (2.69), означающая непрерывную зависимость решения  $u$  от данных  $(\varphi, g, f)$ .

**2.2.5. Однородное стационарное уравнение переноса с двумя переменными.** Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Рассмотрим в  $\Omega$  однородное уравнение

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (2.70)$$

являющееся стационарным аналогом уравнения (2.70), причем будем считать, что коэффициенты  $a$  и  $b$  не зависят от времени  $t$ . Будем предполагать ниже, что выполняются условия:

(j)  $a, b \in C^1(\overline{\Omega})$ ; (jj)  $a^2(x, y) + b^2(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}$ .

Под решением  $u$  уравнения (2.70) будем понимать непрерывно дифференцируемую функцию  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющую (2.70) в каждой точке  $(x, y) \in \Omega$ .

Функции  $a$  и  $b$  определяют в области  $\Omega$  поле направлений  $(a, b)$ . Кривые, касательные в каждой точке области  $\Omega$  к полю  $(a, b)$ , называются *интегральными кривыми* данного поля. Хорошо известно [54], что указанные кривые определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)}. \quad (2.71)$$

Будем называть их *характеристическими кривыми* или *характеристиками* уравнения (2.70). В силу условий (j), (jj) через каждую точку  $(x, y) \in \Omega$  проходит одна и только одна характеристика уравнения (2.70). Если ввести параметр  $t$ , изменяющийся вдоль характеристической кривой, то дифференциальные уравнения (2.71) характеристик можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y), \quad (2.72)$$

определяющем характеристики уравнения (2.70) в параметрической форме. Если в дополнение к условиям (jj) выполняется условие  $a > 0$  в  $\overline{\Omega}$ , то, разделив второе уравнение в (2.72) на первое, получаем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}. \quad (2.73)$$

Уравнение (2.73) определяет характеристики уравнения (2.70) в виде графика соответствующего решения  $y$  уравнения (2.73) как функции от  $x$ .

Левую часть уравнения (2.70) можно интерпретировать как скалярное произведение вектора  $\mathbf{a} = (a, b)$  на вектор  $\text{grad} u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ , т. е. как производную от функции  $u$  по направлению вектора  $\mathbf{a}$ . Поскольку указанная производная равна нулю в силу (2.70), то отсюда следует, что любое решение уравнения (2.70) постоянное вдоль любой характеристики.

Как и в п. 2.2.4., будем использовать гидродинамическую интерпретацию уравнения (2.70), т. е. считать, что (2.70) описывает стационарный процесс переноса некоторой величины  $u$  в среде, движущейся со скоростью  $\mathbf{a} = (a, b)$ , которая зависит от  $(x, y) \in \Omega$ , но не зависит от времени  $t$ . Эта интерпретация удобна тем, что позволяет отождествить характеристики уравнения (2.70) (чисто математические объекты) с фазовыми траекториями системы (2.72), которые в стационарном случае совпадают с *линиями тока* поля скоростей  $\mathbf{a}$  в области  $\Omega$ . Последние имеют наглядный физический смысл линий в области  $\Omega$ , по которым движутся частицы жидкости в стационарном поле скоростей  $\mathbf{a}$ . При такой интерпретации параметр  $t$ , входящий в уравнение (2.72), имеет смысл времени.

Напомним, что функция  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , не равная тождественно константе, называется первым *интегралом* системы (2.71), если  $u$  обращается в константу на любом ее решении. Рассуждая, как и в п. 2.2.4, легко убедиться в том, что функция  $u \in C^1(\Omega)$  описывает первый интеграл системы (2.71) тогда и только тогда, когда  $u$  является решением уравнения (2.70). Другими словами, справедлив следующий аналог леммы 2.3, утверждающий эквивалентность задачи нахождения решения уравнения (2.70) и задачи решения системы (2.71) относительно его характеристик.

**ЛЕММА 2.5.** Пусть при выполнении условий (j), (jj),  $u \in C^1(\Omega)$  – заданная в  $\Omega$  функция. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) функция  $u$  является решением уравнения (2.70) в области  $\Omega$ ;
- 2) функция  $u$  принимает постоянное значение на любой характеристике уравнения (2.70), проходящей через  $\Omega$ ;
- 3) функция  $u$  является первым интегралом системы (2.71) в  $\Omega$ .

В силу леммы 2.5 нахождение решений уравнения (2.70) сводится к нахождению первого интеграла системы (2.71). Последний при выполнении условий (j), (jj) существует по крайней мере в окрестности любой точки  $(x_0, y_0) \in \Omega$  и принадлежит  $C^1$ . Отсюда следует существование классического решения уравнения (2.70) в окрестности любой точки  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . Известно также, что с ростом гладкости функций  $a$  и  $b$  растет и гладкость интеграла  $u$  системы (2.71), а следовательно, и гладкость решения  $u$  уравнения (2.70). В частности,  $u \in C^k(\Omega)$ , если  $a$  и  $b \in C^k(\Omega)$ ,  $k = 2, 3, \dots$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.4.** Пусть  $u$  является первым интегралом системы (2.71)

в  $\Omega$ . Из леммы 2.5 следует, что для любой функции  $\varphi \in C^1$  функция

$$\tilde{u}(x, y) = \varphi[u(x, y)], \quad (x, y) \in \Omega \quad (2.74)$$

также является первым интегралом системы (2.71), а следовательно, решением уравнения (2.70). Поскольку  $\varphi$  – произвольная функция, то можно считать, что (2.74) описывает общее решение уравнения (2.70). Таким образом, формула (2.74) является аналогом формулы (2.5) общего решения уравнения (2.3).

Для выделения единственного решения уравнения (2.70) введем в области  $\Omega$  простую гладкую кривую

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \Omega : x = \xi(s), y = \eta(s), s \in [s_1, s_2]\} \quad (2.75)$$

и зададим следующее условие на  $\Gamma_0$ :

$$u|_{\Gamma_0} = U_0(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_0. \quad (2.76)$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.70), заключающуюся в нахождении решения  $u$  (2.70), удовлетворяющего (2.76). Полагая

$$u_0(s) = U_0[\xi(s), \eta(s)], \quad s \in [s_1, s_2], \quad (2.77)$$

введем пространственную кривую

$$\Gamma_0^u = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 : x = \xi(s), y = \eta(s), u = u_0(s), s \in [s_1, s_2]\}. \quad (2.78)$$

Будем предполагать, что выполняются условия:

$$(jjj) \quad \xi, \eta \in C^1[s_1, s_2], U_0 \in C^1(\Gamma_0), [\xi'(s)]^2 + [\eta'(s)]^2 \neq 0 \quad \forall s \in [s_1, s_2];$$

$$(jv) \quad a[\xi(s), \eta(s)]\eta'(s) - b[\xi(s), \eta(s)]\xi'(s) \neq 0 \quad \forall s \in [s_1, s_2].$$

Условие (jv), являющееся аналогом последнего условия в (i) в п. 2.2.1, означает, что кривая  $\Gamma_0$  нигде не касается характеристик уравнения (2.70), т. е. пересекается с каждой из них под ненулевым углом (см. рис. 2.7).

Поскольку функции  $a$  и  $b$  не зависят от  $t$ , то параметр  $t$  в (2.72) можно задать с точностью до произвольного слагаемого. Удобно задать его так, чтобы точка пересечения каждой характеристики уравнения (2.70) с кривой  $\Gamma_0$  отвечала одному и тому же значению  $t = t_0$ .

Предположим, что  $a > 0$  в  $\overline{\Omega}$ . В таком случае все характеристики уравнения (2.70), выходящие из  $\Gamma_0$ , достигнут границы  $\Gamma$  в некоторые конечные моменты времени  $t$ . В частности,

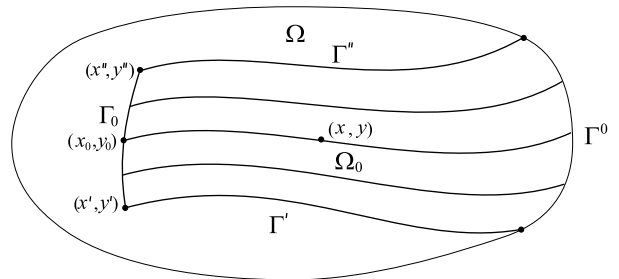


Рис. 2.7

характеристики  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ , выходящие из крайних точек  $(x', y')$  и  $(x'', y'')$  кривой  $\Gamma_0$ , достигнут  $\Gamma$  в некоторые моменты  $t'$  и  $t''$ . Проще всего убедиться в этом с помощью физической интерпретации, согласно которой любая характеристика уравнения (2.70) описывает линию тока частицы жидкости, движущейся со скоростью  $\mathbf{a}$  в области  $\Omega$ . Поскольку координата  $x$  движущейся частицы может лишь расти с ростом времени  $t$  в силу первого уравнения в (2.72) и условия  $a(x, y) > 0$  в  $\bar{\Omega}$ , то с учетом ограниченности области  $\Omega$  каждая частица, занимающая в начальный момент  $t = t_0$  положение на  $\Gamma_0$ , достигнет границ области  $\Omega$  за конечное время.

Обозначим через  $\Omega_0$  подобласть области  $\Omega$ , ограниченную кривой  $\Gamma_0$ , характеристиками  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  и соответствующим участком  $\Gamma^0$  границы  $\Gamma$  (см. рис. 2.7). Будем считать для простоты, что  $\Omega_0$  является односвязной областью. Это заведомо имеет место в случае, когда исходная область  $\Omega$  односвязна. Вспомнив введенное в п. 2.1 понятие характеристической полосы для уравнения (2.3), приходим к выводу, что область  $\Omega_0$  имеет смысл характеристической полосы  $\Pi_{\Gamma_0}$  для уравнения (2.70). Рассуждая, как в п. 2.4, проведем через каждую точку  $(x, y) \in \Omega_0$  характеристику  $\tilde{y} = \tilde{y}(x, y; \tilde{x})$  уравнения (2.70), т. е. интегральную кривую уравнения (2.73), удовлетворяющую условию  $\tilde{y}(x) = y$ . В силу свойства единственности решения уравнения (2.73) и условия  $a(x, y) > 0$  в  $\bar{\Omega}_0$  указанная характеристика входит в область  $\Omega_0$  через некоторую точку  $(x_0, y_0) \in \Gamma_0$  и выходит через некоторую точку  $(x^0, y^0) \in \Gamma^0$ . Тем самым мы определили в области  $\Omega_0$  две функции:  $x_0 = x_0(x, y)$  и  $y_0 = y_0(x, y)$ . Они имеют смысл координат  $x_0$  и  $y_0$  точки на начальной кривой  $\Gamma_0$ , через которую в область  $\Omega_0$  входит характеристика, проходящая через точку  $(x, y)$ . В силу условий (j)  $x_0, y_0 \in C^1(\bar{\Omega}_0)$ . Кроме того, каждая из функций  $x_0$  и  $y_0$  постоянна на любой характеристике уравнения (2.70), расположенной в  $\bar{\Omega}_0$ , и, следовательно, является в силу леммы 2.5 решением уравнения (2.70) в  $\bar{\Omega}_0$ . Последнее означает, что

$$a \frac{\partial x_0}{\partial x} + b \frac{\partial x_0}{\partial y} = 0, \quad a \frac{\partial y_0}{\partial x} + b \frac{\partial y_0}{\partial y} = 0 \quad \text{в } \bar{\Omega}_0. \quad (2.79)$$

Далее рассуждаем следующим образом. Рассмотрим сужение  $\tilde{y}_0$  функции  $y_0$  на  $\Gamma_0$ , определяемое соотношением  $\tilde{y}_0(s) = y_0[\xi(s), \eta(s)]$ ,  $s \in [s_1, s_2]$ . Из свойств функций  $y_0$ ,  $\xi$  и  $\eta$  вытекает, что  $\tilde{y}_0 \in C^1[s_1, s_2]$ . Предположим, кроме того, что

$$\frac{d\tilde{y}_0(s)}{ds} \equiv \left( \frac{\partial y_0}{\partial x} \frac{d\xi}{ds} + \frac{\partial y_0}{\partial y} \frac{d\eta}{ds} \right) \neq 0 \quad \text{на } \Gamma_0. \quad (2.80)$$

Тогда существует обратная к  $\tilde{y}_0$  функция  $S$ , с которой выполняется соотношение

$$S[y_0[\xi(s), \eta(s)]] = s \quad \forall s \in [s_1, s_2]. \quad (2.81)$$

В таком случае функция  $u : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемая формулой

$$u(x, y) \equiv u_0\{S[y_0(x, y)]\}, \quad (2.82)$$

и является искомым решением задачи Коши (2.70), (2.76). Действительно, в силу замечания 2.4 правая часть в (2.82) является, как и  $y_0$ , решением уравнения (2.70). Кроме того, из (2.80) и (2.81) следует, что функция (2.82) удовлетворяет условию Коши (2.76), а из условия постоянства решения на характеристиках вытекает, что  $u$  является единственным решением задачи Коши (2.70), (2.76). Простой анализ показывает, что соотношение (2.80) выполняется при  $a > 0$  в  $\bar{\Omega}$ , если выполняется условие (jv). Сформулируем полученный результат.

**ТЕОРЕМА 2.5** Пусть  $\Omega$  – односвязная плоская область,  $\Gamma_0$  – кривая в  $\Omega$ , заданная соотношением (2.75), и выполняются условия (j), (jjj), (jv), причем  $a > 0$  в  $\bar{\Omega}$ . Обозначим через  $\Omega_0$  подобласть области  $\Omega$ , ограниченную кривой  $\Gamma_0$  и характеристиками  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ , проходящими через крайние точки  $(x', y')$  и  $(x'', y'')$  кривой  $\Gamma_0$  (см. рис. 2.7). Тогда в области  $\bar{\Omega}_0$  регулярное решение  $u \in C^1(\bar{\Omega}_0)$  задачи Коши (2.70), (2.76) существует, единственно и определяется формулой (2.82). Если, более того,  $a, b \in C^k(\bar{\Omega})$ ,  $\Gamma_0 \in C^k$  и  $U_0 \in C^k(\Gamma_0)$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , то решение  $u$  принадлежит пространству  $C^k(\bar{\Omega}_0)$ .

График решения  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  уравнения (2.70) геометрически представляет собой поверхность в пространстве  $(x, y, u)$ . Эту поверхность будем называть *интегральной поверхностью* уравнения (2.70). Выясним структуру любой интегральной поверхности и одновременно укажем простой способ построения интегральной поверхности задачи Коши (2.70), (2.76). С этой целью заметим, что на каждой характеристике уравнения (2.70) любое его решение принимает постоянное значение. Это означает, что интегральная поверхность уравнения (2.70) необходимо состоит из его характеристик, сдвинутых вверх или вниз на значение, определяемое значением решения на этой характеристике. Отсюда вытекает, что для построения интегральной поверхности решения задачи Коши (2.70), (2.76) нужно через каждую точку  $(x_0, y_0) \in \Gamma_0$  начальной кривой  $\Gamma_0$  провести характеристику уравнения (2.70) и сдвинуть ее вверх на значение  $u(x_0, y_0) > 0$  либо вниз, если  $u(x_0, y_0) < 0$ . В итоге мы получим поверхность, составленную из однопараметрического семейства сдвинутых указанным образом характеристик уравнения (2.70), которая по построению и является искомой интегральной поверхностью задачи Коши (2.70), (2.76).

Указанная интегральная поверхность как бы “сшивается” из характеристик уравнения (2.70). При этом гладкость интегральной поверхности в продольном направлении, т. е. вдоль характеристик, определяется лишь гладкостью коэффициентов  $a$  и  $b$  уравнения (2.70), тогда как гладкость в поперечном направлении, т. е. качество “сшивки”, определяется гладкостью

пространственной кривой  $\Gamma_0^u$ . Последняя целиком и полностью определяется гладкостью начальной кривой  $\Gamma_0 \subset \Omega$  в (2.75) и начальной функции  $U_0$  в (2.76). Второе утверждение теоремы 2.5 как раз и является математическим отражением указанного факта.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.5.** Условие  $a(x, y) > 0$  в  $\Omega$  при гидродинамической интерпретации означает, что векторное поле  $\mathbf{a}$  описывает *однонаправленное* по отношению к оси  $x$  движение жидкости. Последнее соответствует тому, что угол  $\varphi$  между любой линией тока и осью  $x$  в каждой точке  $(x, y) \in \Omega$ , определяемый из соотношения

$$\varphi(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{b(x, y)}{a(x, y)},$$

по модулю меньше  $\pi/2$ . Отметим, что основные утверждения теоремы 2.5 не изменятся, если условие  $a(x, y) > 0$  в  $\bar{\Omega}$  заменить условием  $b(x, y) > 0$  в  $\bar{\Omega}$ , означающим однонаправленность поля скоростей  $\mathbf{a}$  по отношению к оси  $y$ . Более того, используя несколько более сложные рассуждения с привлечением свойств динамических систем, можно показать, что основные утверждения теоремы 2.5 остаются справедливыми и в случае, когда вместо условия  $a > 0$  в  $\bar{\Omega}$  выполняется более общее условие (jj).

**2.2.6. Квазилинейное уравнение первого порядка с двумя переменными.** Рассмотрим неоднородное уравнение 1-го порядка

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = f, \quad (2.83)$$

причем будем считать для общности, что коэффициенты  $a, b$  и правая часть  $f$  уравнения (2.83) зависят как от координат  $(x, y)$  точки  $\mathbf{x}$ , изменяющейся в некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , так и от решения  $u$ . Такое уравнение называют *квазилинейным* уравнением 1-го порядка с двумя переменными. Если же  $a$  и  $b$  не зависят от  $u$ , а  $f$  линейно зависит от  $u$ , то (2.83) называется *линейным* уравнением. Оно имеет вид стационарного аналога

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(x, y)u = f(x, y) \quad (2.84)$$

нестационарного уравнения переноса с поглощением (2.66).

Тот факт, что функции  $a, b$  и  $f$  зависят от трех переменных  $x, y$  и  $u$ , означает, что они определены в некоторой трехмерной области  $D \subset \Omega \times \mathbb{R}_u^1$ . Мы будем предполагать ниже, что выполняются условия:

(1)  $a, b, f \in C^1(\bar{D})$  и  $a^2(x, y, u) + b^2(x, y, u) \neq 0 \quad \forall (x, y, u) \in \bar{D}$ .

Функции  $a, b$  и  $f$  определяют в пространстве  $x, y, u$  поле направлений  $(a, b, f)$ . Кривые, касательные в каждой точке области  $D$  к полю  $(a, b, f)$ ,

называются интегральными кривыми либо фазовыми траекториями *данного поля*. Указанные кривые определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{f(x, y, u)}. \quad (2.85)$$

Будем называть их *характеристическими кривыми* или *характеристиками* уравнения (2.83). Проекции характеристических кривых на плоскость  $x, y$  будем называть *проекциями характеристик*. Если ввести параметр  $t$ , изменяющийся вдоль характеристической кривой, то дифференциальные уравнения (2.85) характеристик можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, u), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, u), \quad \frac{du}{dt} = f(x, y, u), \quad (2.86)$$

определяющем характеристики уравнения (2.83) в параметрическом виде.

Хотя параметр  $t$  явно не входит в стационарное уравнение (2.83), мы будем использовать, как и в п. 2.2.5, гидродинамическую интерпретацию уравнения (2.83). Согласно ей уравнение (2.83) описывает стационарный процесс переноса некоторой величины (субстанции)  $u$  в среде, движущейся в области  $\Omega$  со скоростью  $\mathbf{a}$ , зависящей как от  $x, y$ , так и самой величины  $u$ . При такой интерпретации  $t$  имеет смысл времени, тогда как проекции характеристических кривых на плоскость  $x, y$  описывают линии тока векторного поля  $\mathbf{a}$ .

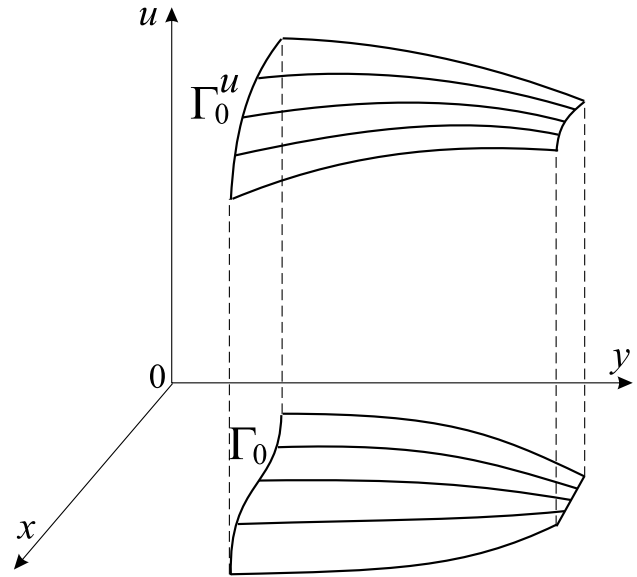


Рис. 2.8

Подчеркнем, что в отличие от линейного однородного уравнения (2.70), характеристиками которого являются плоские кривые, расположенные в плоскости  $x, y$ , характеристиками нелинейного уравнения (2.83) являются существенно пространственные кривые, расположенные в пространстве  $x, y, u$ . Указанные характеристики, как и их проекции на плоскость  $x, y$ , зависят от решения  $u$ , т. е. они являются разными для разных решений. В этом состоит существенное отличие характеристик нелинейного неоднородного уравнения (2.83) от характеристик линейного однородного уравнения (2.70). В частном случае, когда коэффициенты  $a$  и  $b$  не зависят от решения  $u$ , проекции характеристик также не зависят от  $u$  и совпадают

с характеристиками уравнения (2.70). Если к тому же  $f = 0$ , то из третьего уравнения (2.86) следует, что на характеристиках уравнения (2.83) решение  $u$  сохраняет постоянные значения, хотя и разные в общем случае для разных характеристик. Поэтому в этом случае характеристики уравнения (2.83) являются плоскими в том смысле, что они расположены на плоскостях  $u = C$ , где  $C$  – константа, разная для разных характеристик.

Под решением  $u$  уравнения (2.83) будем понимать непрерывно дифференцируемую функцию  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющую (2.83) в каждой точке  $(x, y) \in \Omega$ . График решения  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  уравнения (2.83) геометрически представляет собой поверхность в пространстве  $(x, y, u)$ . Эту поверхность будем называть *интегральной поверхностью* уравнения (2.83). Запишем уравнение интегральной поверхности уравнения (2.83) в виде

$$F(x, y, u) \equiv u(x, y) - u = 0. \quad (2.87)$$

Как известно, вектор нормали к поверхности  $F(x, y, u) = 0$  совпадает по направлению с вектором  $(F_x, F_y, F_u) = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1)$ . Поэтому уравнение (2.83) представляет собой не что иное, как условие перпендикулярности нормали к интегральной поверхности с направлением поля. Это означает, что в каждой точке интегральной поверхности направление, определяемое указанным выше полем направлений, находится в касательной плоскости к поверхности. Поэтому с геометрической точки зрения проинтегрировать уравнение (2.83) – значит найти такие поверхности, касательные плоскости к которым в каждой точке касаются поля направлений. Отсюда следует вывод, что любая гладкая (класса  $C^1$ ) *поверхность, составленная из однопараметрического семейства характеристических кривых, является интегральной поверхностью уравнения (2.83)*.

Справедливо и обратное. *Любая интегральная поверхность уравнения (2.83) порождается некоторым однопараметрическим семейством характеристических кривых*. В самом деле, на любой интегральной поверхности (2.87) уравнения (2.83) можно задать однопараметрическое семейство кривых  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $u = u[x(t), y(t)]$  с помощью дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = a[x, y, u(x, y)], \quad \frac{dy}{dt} = b[x, y, u(x, y)]. \quad (2.88)$$

Вдоль каждой такой кривой уравнение (2.83) эквивалентно условию  $du/dt = f$ . Это означает, что данное однопараметрическое семейство удовлетворяет соотношениям (2.86) и, следовательно, состоит из характеристических кривых. Так как в силу условий (1) решения системы (2.86) однозначно определяются начальными значениями  $x, y$  и  $u$  при  $t = t_0$ , мы получаем следующий результат: *любая характеристическая кривая, имеющая общую точку с интегральной поверхностью, целиком лежит на этой поверхности*.



Для выделения единственного решения уравнения (2.83) рассмотрим задачу Коши. Чтобы ее сформулировать, введем в  $\Omega$  гладкую кривую  $\Gamma_0$  формулами (2.75) и зададим условие Коши (2.76). Введем далее пространственную кривую  $\Gamma_0^u$  с помощью соотношений (2.77), (2.78) (см. рис. 2.8) и предположим, что выполняются условия:

$$(II) \Gamma_0 \in C^1 \text{ (т. е. } \xi, \eta \in C^1[s_1, s_2]), [\xi'(s)]^2 + [\eta'(s)]^2 \neq 0 \forall s \in [s_1, s_2], \\ (\xi(s), \eta(s), u_0(s)) \in D \forall s \in [s_1, s_2], U_0 \in C^1(\Gamma_0).$$

В силу условий (II) задача Коши (2.83), (2.76) эквивалентна задаче нахождения интегральной поверхности уравнения (2.83), проходящей через кривую  $\Gamma_0^u$ .

Для нахождения решения задачи Коши (2.83), (2.76) проведем через каждую точку  $(x_0, y_0, u_0)$  кривой  $\Gamma_0^u$  характеристику, т. е. интегральную кривую системы (2.85). В силу предположений (I) это можно сделать, причем единственным образом в некоторой окрестности каждой точки кривой  $\Gamma_0^u$ . Мы получим семейство характеристических кривых

$$x = X(s, t), \quad y = Y(s, t), \quad u = U(s, t), \quad (2.89)$$

зависящее от параметра  $s$ , при этом все функции в (2.89) имеют непрерывные производные первого порядка по  $s$  и  $t$ .

По построению функции  $X$ ,  $Y$  и  $U$  удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{dX}{dt} = a(X, Y, U), \quad \frac{dY}{dt} = b(X, Y, U),$$

$$X(s, t_0) = \xi(s), \quad Y(s, t_0) = \eta(s), \quad U(s, t_0) = u_0(s), \quad s \in [s_1, s_2].$$

Составим функциональный определитель

$$\Delta(s, t) = X_t(s, t)Y_s(s, t) - Y_t(s, t)X_s(s, t) = aY_s(s, t) - bX_s(s, t).$$

Предположим сначала, что он не обращается в нуль на кривой  $\Gamma_0$ , т. е. что выполняется соотношение

$$\Delta(s, t_0) \equiv a[\xi(s), \eta(s), u_0(s)]Y_s(s, t_0) - b[\xi(s), \eta(s), u_0(s)]X_s(s, t_0) \\ \neq 0 \quad \forall s \in [s_1, s_2]. \quad (2.90)$$

Условие (2.90) означает, что в любой точке кривой  $\Gamma_0^u$  касательное и характеристическое направления имеют различные проекции на плоскость  $x, y$ . При выполнении условия (2.90) первые два уравнения в (2.89) можно локально, т. е. в окрестности некоторой точки  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma_0$ , разрешить относительно  $s$  и  $t$ . В результате получим две непрерывно-дифференцируемые функции  $s$  и  $t$  от переменных  $x$  и  $y$ . Подставляя их в последнее соотношение в (2.89), получим функцию  $u$  переменных  $x$  и  $y$ , действующую по формуле

$$u(x, y) = U[s(x, y), t(x, y)]. \quad (2.91)$$

Нетрудно видеть, что так построенная функция  $u$  является искомым решением рассматриваемой задачи Коши. Действительно, используя правило дифференцирования сложной функции и (2.86), имеем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.92)$$

Но  $du/dt = f$ . Отсюда и (2.92) следует, что функция  $u$  удовлетворяет уравнению (2.83) *локально*, т. е. в некоторой окрестности точки  $\mathbf{x}_0$  кривой  $\Gamma_0$ . Тот факт, что  $u$  удовлетворяет начальному условию (2.76), вытекает из построения решения. Наконец, единственность решения задачи Коши вытекает из того факта, что характеристическая кривая, имеющая одну общую точку с интегральной поверхностью, целиком лежит на этой поверхности. Отсюда следует, что любая интегральная поверхность, проходящая через кривую  $\Gamma_0^u$ , целиком содержит семейство характеристик, проходящих через  $\Gamma_0^u$ , и, следовательно, совпадает с построенной интегральной поверхностью.

Опять отметим, что интегральная поверхность задачи Коши (2.83), (2.86) “сшивается” из характеристик уравнения (2.83). Но если в случае линейного уравнения (2.70) указанные характеристики определяются лишь коэффициентами  $a$  и  $b$  уравнения (2.70) и не зависят от решения, то в случае нелинейного уравнения его характеристики зависят также и от решения, то есть являются разными для разных решений. Поэтому если для линейного уравнения (2.70) данные Коши (2.76) влияют лишь на “поперечную” структуру интегральной поверхности, то в случае нелинейного уравнения (2.83) данные Коши влияют на структуру решения как в “поперечном”, так и “продольном” направлениях.

Рассмотрим теперь случай, когда  $\Delta \equiv 0$  всюду на  $\Gamma_0$ . В силу предыдущих рассуждений для того, чтобы задача Коши (2.83), (2.76) имела решение, кривая  $\Gamma_0^u$  необходимо должна быть характеристической кривой. В этом случае задача Коши имеет бесконечно много решений, поскольку через каждую характеристическую кривую проходит бесконечно много интегральных поверхностей. Таким образом, характеристики являются линиями пересечения интегральных поверхностей – *линиями ветвления*, тогда как через нехарактеристическую кривую не может проходить более одной интегральной поверхности.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 2.6.** Пусть выполняются условия (I), (II) и (2.90). Тогда в некоторой окрестности точки  $\mathbf{x}_0$  кривой  $\Gamma_0$  решение  $u \in C^1$  задачи Коши (2.83), (2.76) существует и единственно. Если же  $\Delta = 0$  на  $\Gamma_0$ , то задача Коши (2.83), (2.76) имеет решение тогда и только тогда, когда соответствующая пространственная кривая  $\Gamma_0^u$  является характеристикой. В этом случае существует бесконечно много решений задачи Коши (2.83), (2.76).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Подчеркнем, что теорема 2.6 в отличие от теоремы 2.5 носит локальный характер, поскольку она утверждает существование решения задачи Коши (2.83), (2.76) лишь в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$  кривой  $\Gamma_0$ . Можно показать при некоторых дополнительных условиях на функции  $a, b, f$  и кривую  $\Gamma_0^u$ , что указанное решение существует в окрестности не только точки  $\mathbf{x}_0$ , но и всей кривой  $\Gamma_0$ . Об этом, а также о других свойствах решений квазилинейных и нелинейных уравнений 1-го порядка как с двумя, так и с  $n$  независимыми переменными можно прочесть в [21, с. 40–53], [48, гл. 1], [54, гл. 8].

## § 2.3. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка

**2.3.1. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.** Рассмотрим в произвольной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x_1, \dots, x_n). \quad (3.1)$$

Покажем в этом пункте, что с помощью линейной замены независимых переменных уравнение (3.1) может быть приведено к более простому (каноническому) виду, не содержащему смешанных производных второго порядка, а в случае гиперболического либо эллиптического типа и производных 1-го порядка.

С этой целью введем вместо  $x_1, \dots, x_n$  новые независимые переменные  $\xi_1, \dots, \xi_n$  при помощи линейного преобразования

$$\xi_k = \sum_{i=1}^n c_{ki} x_i, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Мы предполагаем, что преобразование (3.2) невырождено, т. е. что определитель  $|c_{ki}| = \det((c_{ki}))$  не равен нулю. Производные по старым переменным выразятся через производные по новым переменным следующими формулами:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n c_{ki} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^n c_{ki} c_{lj} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l}. \quad (3.3)$$

Подставив (3.3) в уравнение (3.1), получим

$$\sum_{k,l=1}^n \bar{a}_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \sum_{k=1}^n \bar{b}_k \frac{\partial u}{\partial \xi_k} + cu = f_1(\xi_1, \dots, \xi_n). \quad (3.4)$$

Здесь, в частности,

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} c_{ki} c_{lj}, \quad \bar{b}_k = \sum_{i=1}^n b_i c_{ki}. \quad (3.5)$$

Нетрудно проверить, что формулы преобразования (3.5) коэффициентов при вторых производных от функции  $u$  при замене независимых переменных по формулам (3.2) совпадают с формулами преобразования коэффициентов квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} t_i t_j, \quad (3.6)$$

если в ней произвести линейное преобразование

$$t_i = \sum_{k=1}^n c_{ki} \tau_k, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.7)$$

приводящее ее к виду

$$\sum_{k,l=1}^n \bar{a}_{kl} \tau_k \tau_l. \quad (3.8)$$

Как уже указывалось в § 2.1, коэффициенты  $c_{ki}$  можно подобрать так, чтобы квадратичная форма (3.6) привелась к сумме квадратов вида

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \tau_k^2. \quad (3.9)$$

Здесь коэффициенты  $\lambda_k$  равны  $\pm 1$  или нулю соответственно, причем знаки коэффициентов  $\lambda_k$  и определяют тип уравнения (3.1). Преобразованное уравнение (3.4) принимает вид

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} + \sum_{k=1}^n \bar{b}_k \frac{\partial u}{\partial \xi_k} + cu = f_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad (3.10)$$

который и является его *каноническим видом*.

Предположим, что все  $\lambda_k$  отличны от нуля, т. е. что уравнение (3.1) не является параболическим, и покажем, что в этом случае при помощи преобразования функции  $u$  можно освободиться от производных первого порядка. С этой целью вместо  $u$  введем новую функцию  $v$  по формуле

$$u = v \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\bar{b}_k}{\lambda_k} \xi_k \right). \quad (3.11)$$

Подставив (3.11) в (3.10), получим, как легко проверить, уравнение вида

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_k^2} + c_1 v = f_2(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Для эллиптического уравнения все  $\lambda_k$  равны 1 или  $-1$ . Поэтому умножая, если надо, обе части этого уравнения на  $(-1)$ , мы можем считать, что все  $\lambda_k$  равны 1. Это означает, что всякое линейное уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами может быть приведено к уравнению, имеющему в прежних обозначениях вид

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c_1 u = f(x_1, \dots, x_n). \quad (3.12)$$

В случае уравнения гиперболического типа удобно считать, что уравнение (3.1) рассматривается в области из пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Тогда, заменив в (3.1) и (3.2)  $n$  на  $n+1$  и полагая  $\xi_{n+1} = t$ , приходим к выводу, что всякое линейное уравнение гиперболического типа с постоянными коэффициентами приводится к следующему каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c_2 u = f(x_1, \dots, x_n, t). \quad (3.13)$$

В случае, когда коэффициенты уравнения (3.1) переменны, для каждой точки  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  области  $\Omega$  можно указать такое невырожденное преобразование независимых переменных, которое приводит уравнение (3.1) к каноническому виду в этой точке. Для каждой точки  $x_0$  имеется, вообще говоря, свое преобразование независимых переменных, приводящее уравнение к каноническому виду; в других точках это преобразование может не приводить уравнение к каноническому виду. Примеры показывают, что дифференциальное уравнение с числом независимых переменных больше двух (если исключить случай постоянных коэффициентов), вообще говоря, невозможно привести с помощью преобразования независимых переменных к каноническому виду даже в сколь угодно малой области. В случае же двух переменных такое преобразование независимых переменных существует при достаточно общих предположениях о коэффициентах уравнения, как будет показано в следующем пункте.

**2.3.2. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.** Рассмотрим в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  уравнение, линейное относительно вторых производных, вида:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0. \quad (3.14)$$

Здесь  $A, B, C \in C^2(\Omega)$  – заданные функции,  $F$  – непрерывная функция своих аргументов. Будем предполагать, что коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  не обращаются одновременно в нуль. Если  $F$  – линейная функция, т. е.  $F = A_1(x, y)\partial u/\partial x + B_1(x, y)\partial u/\partial y + C_1(x, y)u + f(x, y)$ , то уравнение (3.14) является *линейным*. Пусть  $(x_0, y_0) \in \Omega$  – произвольная точка. Сопоставив уравнению (3.14) квадратичную форму  $\Phi(\cdot, \cdot; x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , действующую согласно (1.12) по формуле

$$\Phi(t_1, t_2; x_0, y_0) = A(x_0, y_0)t_1^2 + 2B(x_0, y_0)t_1t_2 + C(x_0, y_0)t_2^2, \quad (3.15)$$

выводим на основании определения 1.2, что уравнение (3.14) имеет в  $\Omega$ :

1) *гиперболический тип*, если  $B^2 - AC > 0$  в  $\Omega$ . В этом случае квадратичная форма (3.15) знакопеременная. Это означает, что для каждой точки  $(x_0, y_0) \in \Omega$  существует хотя бы один элемент  $(t'_1, t'_2) \in \mathbb{R}^2$  такой, что  $\Phi(t'_1, t'_2; x_0, y_0) > 0$ , и хотя бы один элемент  $(t''_1, t''_2) \in \mathbb{R}^2$  такой, что  $\Phi(t''_1, t''_2; x_0, y_0) < 0$ ;

2) *параболический тип*, если  $B^2 - AC = 0$  в  $\Omega$  (квадратичная форма (3.15) знакопостоянна), т. е. выполняется условие:

$$\Phi(t_1, t_2; x_0, y_0) \geq 0 \text{ либо } \Phi(t_1, t_2; x_0, y_0) \leq 0 \quad \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (x_0, y_0) \in \Omega;$$

3) *эллиптический тип*, если  $B^2 - AC < 0$  в  $\Omega$ . В этом случае форма (3.15) знакоопределена, т. е. с некоторой константой  $\alpha > 0$  выполняется условие:

$$\Phi(t_1, t_2; x_0, y_0) \geq \alpha(t_1^2 + t_2^2) \quad \text{либо} \quad \Phi(t_1, t_2; x_0, y_0) \leq -\alpha(t_1^2 + t_2^2) \quad \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Первое условие здесь выполняется при  $A > 0$ , второе – при  $A < 0$ .

Случай, когда выражение  $B^2 - AC$  меняет знак в  $\Omega$ , т. е. когда уравнение (3.14) имеет смешанный тип, мы не будем рассматривать.

Поставим перед собой задачу: с помощью замены независимых переменных  $x, y$  привести уравнение (3.14) к каноническому виду в некоторой окрестности фиксированной точки  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . С этой целью введем в  $\Omega$  новые независимые переменные  $\xi$  и  $\eta$  по формулам:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \quad (3.16)$$

От функций  $\varphi$  и  $\psi$  в (3.16) потребуем, чтобы они были дважды непрерывно дифференцируемы и чтобы их якобиан был отличен от нуля в  $\Omega$ :

$$D \equiv \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.17)$$

Как известно, условие (3.17) означает, что в некоторой окрестности каждой точки  $(x_0, y_0) \in \Omega$  кривые  $\varphi(x, y) = C_1 = \text{const}$  и  $\psi(x, y) = C_2 = \text{const}$  образуют два семейства координатных линий, отвечающих новым переменным

$\xi$  и  $\eta$ . Кроме того, условие (3.14) является достаточным для существования преобразования  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ , обратного к (3.16).

Преобразуя производные к новым переменным, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Подставляя значения производных из (3.18) в (3.14), приходим к уравнению

$$\overline{A} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\overline{B} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{C} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \overline{F}(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0, \quad (3.19)$$

где коэффициенты  $\overline{A}$ ,  $\overline{B}$  и  $\overline{C}$ , зависящие от  $\xi$  и  $\eta$ , определяются формулами:

$$\begin{aligned}\overline{A} &= A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2, \quad \overline{C} = A \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2, \\ \overline{B} &= A \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + B \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y}.\end{aligned}\quad (3.20)$$

Явное выражение  $\overline{F}$  нас не интересует.

Попробуем выбрать функции  $\varphi$  и  $\psi$  в (3.16) так, чтобы обратить некоторые из коэффициентов  $\overline{A}$ ,  $\overline{C}$ ,  $\overline{B}$  в нуль хотя бы в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . Ясно, что вопрос об обращении в нуль  $\overline{A}$  и  $\overline{C}$  эквивалентен вопросу о разрешимости следующего нелинейного дифференциального уравнения первого порядка относительно неизвестной функции  $z$ :

$$A \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + C \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (3.21)$$

В соответствии с введенным выше предположением коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  принадлежат классу  $C^2$  в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  и нигде в ней не обращаются одновременно в нуль. Для определенности можно считать, что  $A \neq 0$  в этой окрестности. Действительно, в противном случае должно выполняться одно из условий  $B \neq 0$  или  $C \neq 0$ . Если  $C \neq 0$ , то, меняя местами  $x$  и  $y$ , получим уравнение, у которого  $A \neq 0$ . Если же  $C \equiv 0$ ,

и, следовательно,  $B \neq 0$ , то после замены переменных  $x' = x + y$  и  $y' = x - y$  приходим к уравнению с  $A \neq 0$ . В дальнейшем будем, более того, считать, что  $A > 0$  в рассматриваемой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . В силу условия  $A > 0$  уравнение (3.21) можно после умножения на  $A$  переписать в виде

$$\left[ A \frac{\partial z}{\partial x} + (B + \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial z}{\partial y} \right] \left[ A \frac{\partial z}{\partial x} + (B - \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial z}{\partial y} \right] = 0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения:

$$A \frac{\partial z}{\partial x} + (B + \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad (3.22)$$

$$A \frac{\partial z}{\partial x} + (B - \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (3.23)$$

Следовательно, решения каждого из уравнений (3.22) и (3.23) являются решениями уравнения (3.21). Уравнения (3.22), (3.23) являются линейными уравнениями в частных производных первого порядка. Как показано в § 2.2, они интегрируются методом характеристик, который сводит нахождение их решений к нахождению решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основываясь на методе характеристик, составим соответствующие уравнениям (3.22), (3.23) системы обыкновенных уравнений для нахождения их характеристик. Они имеют вид

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B + \sqrt{B^2 - AC}}, \quad \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B - \sqrt{B^2 - AC}}$$

или

$$A dy - (B + \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0, \quad (3.24)$$

$$A dy - (B - \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0. \quad (3.25)$$

В силу результатов п. 2.5 решения уравнений (3.22), (3.23) связаны с решениями уравнений (3.24), (3.25) следующим образом. Пусть

$$\varphi(x, y) = C_1, \quad \psi(x, y) = C_2 \quad (3.26)$$

– первые интегралы уравнений (3.24) и (3.25). Тогда функции  $\varphi$ ,  $\psi$  (и только они) являются решениями уравнений (3.22) и (3.23) соответственно, а следовательно, и решениями уравнения (3.21). Заметим, что указанное предложение имеет место, если коэффициенты уравнений (3.24) и (3.25) не обращаются в нуль одновременно. Последнее, очевидно, выполняется в силу условия  $A > 0$ .

Характеристики уравнений (3.22) и (3.23), определяемые как интегральные кривые обыкновенных дифференциальных уравнений (3.24) и (3.25)



соответственно, мы будем называть также *характеристиками исходного уравнения* (3.14), а уравнения (3.24), (3.25) – *уравнениями характеристик* уравнения (3.14). Позже в § 2.4 мы введем строгое определение характеристики общего уравнения 2-го порядка в пространстве  $n$  измерений, из которого в качестве частного случая будет вытекать приведенное здесь определение характеристик уравнения (3.14). Отметим, что уравнения (3.24), (3.25) могут быть записаны формально в виде одного легко запоминающегося уравнения характеристик

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0. \quad (3.27)$$

Поведение интегралов уравнений (3.24), (3.25), а следовательно, и искомый простейший вид уравнения (3.14) зависит от знака величины  $\Delta \equiv B^2 - AC$ . Нетрудно проверить, что

$$\overline{B}^2 - \overline{A} \overline{C} = (B^2 - AC) \left[ \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \right]^2. \quad (3.28)$$

Следовательно, знак  $\Delta$  не меняется при преобразованиях независимых переменных, удовлетворяющих условию (3.17).

Вернемся теперь к нашей задаче упрощения уравнения (3.14), причем каждый тип будем изучать в отдельности.

1.  $\Delta = B^2 - AC > 0$  в  $\Omega$ : уравнение (3.14) имеет *гиперболический тип*. Выберем в качестве искоемых функций  $\varphi$  и  $\psi$  в (3.16) решения задач Коши для уравнений (3.22) и (3.23) соответственно при условии, что данные Коши для  $\varphi$  задаются на некоторой линии  $l_1$ , проходящей через точку  $(x_0, y_0)$  и нигде не касающейся характеристик уравнения (3.22), тогда как данные Коши для  $\psi$  задаются на другой, вообще говоря, линии  $l_2$ , нигде не касающейся характеристик уравнения (3.23). Если линии  $l_i$  и заданные на них значения функций  $\varphi$  и  $\psi$  выбрать достаточно гладкими, например из класса  $C^2$ , то с учетом принадлежности коэффициентов  $A, B$  и  $C$  этому же классу  $C^2$  мы получим в силу теоремы 2.5 решения  $\varphi$  и  $\psi$ ,

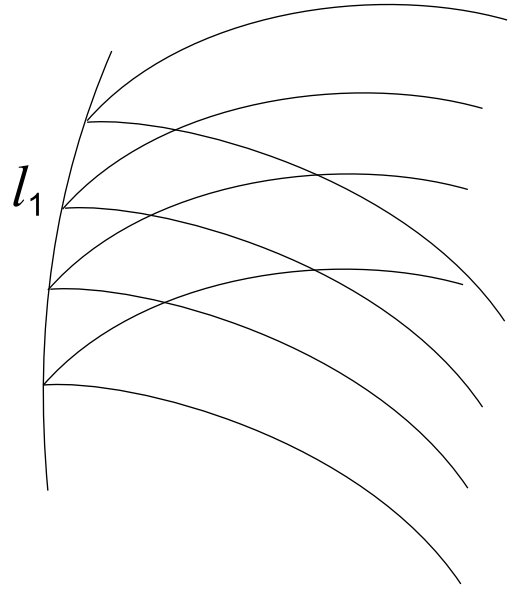


Рис. 3.1

имеющие непрерывные производные по  $x$  и  $y$  до второго порядка включительно. Если предположить, кроме того, что начальные значения функции  $\varphi$  на  $l_1$  и  $\psi$  на  $l_2$  выбраны так, что производные от  $\varphi$  по направлению  $l_1$  и от  $\psi$  по направлению  $l_2$  не обращаются в нуль в точке  $(x_0, y_0)$ , то в этой точке не могут быть равными нулю одновременно обе частные производные

функций  $\varphi$  и  $\psi$  по  $x$  и  $y$  (ибо тогда равнялись бы нулю производные в этой точке от  $\varphi$  и  $\psi$  по любому направлению). Так как  $A \neq 0$ , то из уравнений (3.22) и (3.23) тогда следует, что  $\partial\varphi/\partial y \neq 0$  и  $\partial\psi/\partial y \neq 0$  в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  и что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \neq \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{\partial\psi}{\partial x} : \frac{\partial\psi}{\partial y}. \quad (3.29)$$

Отсюда следует, что  $D \neq 0$  в  $\Omega$ .

Таким образом, выбранные указанным способом семейства характеристик (3.26) образуют два семейства координатных линий, по крайней мере в окрестности рассматриваемой точки  $(x_0, y_0)$ , а переменные  $\xi$  и  $\eta$  в (3.16) можно принять за новые координаты. Кроме того, из (3.20) вытекает, что  $\overline{A} = \overline{C} \equiv 0$ , а из (3.28) следует, что  $\overline{B} \neq 0$ . Разделив (3.19) на  $2\overline{B}$ , получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F_1 \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \quad (3.30)$$

где  $F_1 = -\overline{F}/2\overline{B}$ . Это – канонический вид уравнения гиперболического типа. Существует и другой канонический вид, а именно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \tilde{F}_1 \left( \alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right). \quad (3.31)$$

Он получается из (3.30) заменой  $\alpha = (\xi - \eta)/2$ ,  $\beta = (\xi + \eta)/2$ .

2.  $\Delta = B^2 - AC = 0$  в  $\Omega$ : уравнение (3.14) имеет *параболический тип*. В этом случае оба уравнения (3.22) и (3.23) совпадают и принимают вид

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \quad (3.32)$$

Как и выше, мы можем найти такое решение  $\varphi \in C^2$  уравнения (3.32), для которого  $\text{grad} \varphi \neq 0$  в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . К этой функции  $\varphi$  подберем функцию  $\psi \in C^2$  произвольным образом, лишь бы выполнялось условие (3.17). Например, можно взять  $\psi(x, y) = x$ . Отвечающие такой функции координатные линии совпадают с прямыми  $x = \text{const}$ . С учетом указанного выбора функций  $\varphi$  и  $\psi$  из (3.20) следует, что  $\overline{A} \equiv 0$ . Кроме того, так как  $\Delta \equiv 0$ , то из (3.28) вытекает, что  $\overline{B} \equiv 0$ . Коэффициент  $\overline{C}$  преобразуется к виду

$$\overline{C} = \frac{1}{A} \left( A \frac{\partial \psi}{\partial x} + B \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2. \quad (3.33)$$

Покажем, что  $\overline{C} \neq 0$ . Действительно, если  $\overline{C} = 0$  в точке  $(x_0, y_0) \in \Omega$ , то в этой точке выполняется соотношение

$$A \frac{\partial \psi}{\partial x} + B \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (3.34)$$

Рассматривая (3.32) и (3.34) как систему линейных алгебраических уравнений относительно  $A$  и  $B$ , получим, что  $D(\varphi, \psi)/D(x, y) = 0$  в  $(x_0, y_0)$ . Это противоречит предположению (3.17). Разделив (3.19) на  $\overline{C}$ , приходим к следующему каноническому виду уравнения параболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_2 \left( \xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (3.35)$$

Здесь функция  $F_2$  определяется формулой  $F_2 = -\overline{F}/\overline{C}$ .

3.  $\Delta = B^2 - AC < 0$  в  $\Omega$ : уравнение (3.14) имеет *эллиптический тип*. В этом случае коэффициенты уравнений (3.24), (3.25) и их первые интегралы (3.26) являются комплексными величинами. Если предположить, что коэффициенты  $A, B$  и  $C$  – аналитические функции от  $x, y$  в окрестности точки  $(x_0, y_0) \in \Omega$ , то коэффициенты уравнений (3.22) и (3.23) также являются аналитическими функциями от  $x$  и  $y$ . Тогда можно показать, что в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0) \in \Omega$  существует аналитическое решение  $z$  уравнения (3.22), у которого в этой окрестности производные  $\partial z/\partial x$  и  $\partial z/\partial y$  не обращаются одновременно в нуль. При этом комплексно-сопряженная к  $z$  функция  $z^*$  удовлетворяет уравнению (3.23).

Чтобы доказать существование аналитического решения уравнения (3.22), перепишем уравнение (3.22) после деления на  $A$  в виде

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{A}(B + \sqrt{B^2 - AC})\frac{\partial z}{\partial y}, \quad (3.36)$$

разрешенном относительно  $\partial z/\partial x$ , и зададим начальные значения функции  $z$  на некотором отрезке  $x = x_0$ , проходящем через точку  $(x_0, y_0)$ , в виде аналитической функции  $z_0$  переменной  $y$ . В таком случае указанный факт вытекает из теоремы Ковалевской, примененной к задаче Коши для уравнения 1-го порядка (3.36), нормального относительно переменной  $x$  (см. п. 2.1.4). Если к тому же начальную функцию  $z_0$  выбрать так, что  $dz_0/dy \neq 0$ , то в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  будет выполняться условие  $\partial z/\partial y \neq 0$ . Введем далее вещественные функции  $\varphi$  и  $\psi$  по формулам  $\varphi = (z + z^*)/2$ ,  $\psi = (z - z^*)/2i$ . Ясно, что  $\varphi, \psi \in C^\infty$ , причем якобиан  $D(\varphi, \psi)/D(x, y)$  отличен от нуля, ибо

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(z, z^*)} \frac{D(z, z^*)}{D(x, y)} = \frac{1}{2i} 2 \frac{\sqrt{\Delta}}{A} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z^*}{\partial y} = -\frac{\sqrt{-\Delta}}{A} \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right|^2 \neq 0.$$

С учетом этого функции  $\varphi$  и  $\psi$  можно выбрать в качестве искомым в (3.16).

Осталось выяснить, какой вид примет уравнение (3.14) в этих переменных. С этой целью заметим, что по построению функция  $z = \varphi + i\psi$  является решением уравнения (3.21), так что

$$A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + 2B \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + C \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \equiv 0.$$

Разделяя в этом тождестве вещественную и мнимую части, получим

$$A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = A \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + C \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2,$$

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + B \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Отсюда в силу (3.20) следует, что  $\overline{B} = 0$ ,  $\overline{A} = \overline{C}$ , а из (3.28) и (3.17) следует, что  $\overline{A} \neq 0$ . Разделив уравнение (3.19) на  $\overline{A}$ , получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_3(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}), \quad (3.37)$$

где  $F_3 = -\overline{F} \setminus \overline{A}$ . Это – канонический вид уравнения эллиптического типа. Итак, предположив, что  $A$ ,  $B$  и  $C$  – аналитические функции точек  $(x, y)$ , мы привели исходное уравнение (3.14) к каноническому виду (3.37) в окрестности некоторой точки  $(x_0, y_0)$ , в которой существуют аналитические решения уравнений (3.22), (3.23) с отличными от нуля производными по  $y$ . Используя более сложные рассуждения, можно показать, что такое приведение возможно без предположения об аналитичности коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$ , но при условии, что  $A$ ,  $B$  и  $C \in C^2$  (см. [11, с. 66]).

## § 2.4. Постановка задачи Коши. Характеристики уравнения второго порядка

**2.4.1. Постановка задачи Коши. Характеристическая поверхность.** Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f(x_1, \dots, x_n, u, \nabla u) = 0. \quad (4.1)$$

Здесь коэффициенты  $a_{ij}$  – заданные вещественные функции координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$  точки  $x$ , изменяющейся в некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f$  – заданная вещественная функция своих аргументов, причем предполагается, что  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Пусть в области  $\Omega$  задана гладкая  $(n-1)$ -мерная поверхность  $S$  (рис. 4.1), и в каждой точке  $S$  задано векторное поле направлений  $\mathbf{l}$ , некасательное к  $S$  и гладко изменяющееся при движении вдоль  $S$ . В качестве такого поля можно взять, например, поле нормалей  $\mathbf{n}$  к поверхности  $S$ .

На поверхности  $S$  зададим значения функции  $u$  и ее производной  $\partial u / \partial l$ :

$$u|_S = \varphi_0(x), \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_S = \varphi_1(x). \quad (4.3)$$

Будем ссылаться на (4.2), (4.3) как на *условия Коши*, а на функции  $\varphi_0, \varphi_1$  в (4.2), (4.3) – как на *данные Коши* либо *начальные функции*. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (4.1). Она заключается в *нахождении в некоторой окрестности поверхности  $S$  решения уравнения (4.1), удовлетворяющего условиям Коши (4.2), (4.3)*.

Очевидно, что данные Коши определяют функцию  $u$  и все ее частные производные 1-го порядка на поверхности  $S$ . Предположим теперь, что уравнение (4.1) выполняется в каждой точке  $x \in S$ , причем все коэффициенты и решение  $u$  уравнения (4.1) бесконечно дифференцируемы в окрестности поверхности  $S$ . Ясно, что если  $u$  – искомое решение задачи Коши (4.1)–(4.3) в некоторой окрестности поверхности  $S$ , то в этой окрестности так же, как на самой поверхности  $S$ , можно найти производные от  $u$  любого

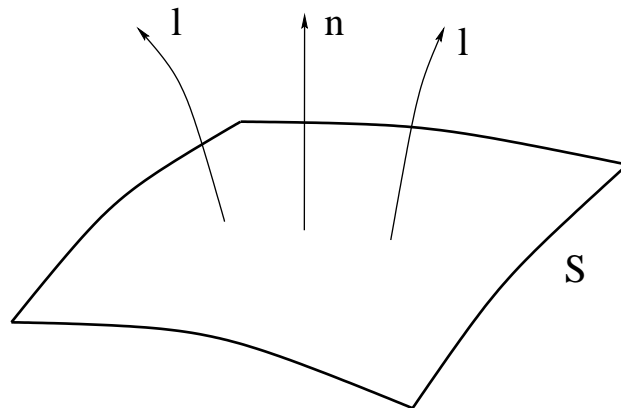


Рис. 4.1

порядка. При этом производные второго порядка  $\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$  необходимо удовлетворяют уравнению (4.1). Другими словами уравнение (4.1) играет роль *необходимого условия совместности* указанных производных второго порядка. Если, далее, уравнение (4.1) продифференцировать один или несколько раз, то полученное уравнение на  $S$  будет играть роль *необходимого условия совместности* для производных более высокого порядка. С учетом приведенного анализа сформулируем теперь следующую вспомогательную задачу: *с помощью уравнения (4.1) и условий Коши (4.2), (4.3) однозначно определить на поверхности  $S$  все производные второго и более высокого порядков от искомого решения  $u$ .*

Рассмотрим сначала случай, когда условия Коши имеют вид

$$u|_{x_1=x_1^0} = \varphi_0(x_2, \dots, x_n), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^0} = \varphi_1(x_2, \dots, x_n), \quad (4.4)$$

т. е. когда данные Коши заданы на гиперплоскости  $x_1 = x_1^0$ , а в качестве поля  $\mathbf{l}$  выбрано поле нормалей  $\mathbf{n}$  к этой гиперплоскости, направленное по оси  $x_1$ . Условия (4.4), очевидно, позволяют определить при  $x_1 = x_1^0$  (с помощью дифференцирования функции  $\varphi_0$  или  $\varphi_1$ ) все производные первого порядка и все производные второго порядка, кроме  $\partial^2 u / \partial x_1^2$ . Чтобы определить

$\partial^2 u / \partial x_1^2$ , необходимо воспользоваться самым уравнением (4.1), положив в нем  $x_1 = x_1^0$ . На этом пути возможны два случая: 1)  $a_{11}(x_1^0, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ , 2)  $a_{11}(x_1^0, x_2, \dots, x_n) = 0$ .

В первом случае мы однозначно определим вторую производную  $\partial^2 u / \partial x_1^2$  на гиперплоскости  $x_1 = x_1^0$ , а также производные более высоких порядков путем дифференцирования уравнения (4.1) и условий (4.4). Во втором случае мы придем к невозможному равенству или получим тождество относительно  $\partial^2 u / \partial x_1^2$ , т. е. придем к несовместности или неопределенности при нахождении производных второго, а также более высокого порядка на гиперплоскости  $x_1 = x_1^0$ . Это означает, что в последнем случае поставленная выше вспомогательная задача нахождения всех производных от решения  $u$  на гиперплоскости  $x_1 = x_1^0$  либо неразрешима, либо имеет много решений.

Рассмотрим теперь общий случай, когда условия Коши (4.2), (4.3), где поле  $\mathbf{l}$  совпадает для конкретности с полем нормалей  $\mathbf{n}$ , заданы на некоторой поверхности  $S$ , описываемой уравнением

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \psi(x) = 0, \quad \nabla \psi(x) \neq 0\}. \quad (4.5)$$

В окрестности поверхности  $S$  введем новые координаты  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , полагая

$$\xi_i = \psi_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.6)$$

где  $\psi_1 = \psi$ , а функции  $\psi_2, \dots, \psi_n$  выберем так, чтобы якобиан преобразования (4.6) был отличен от нуля на  $S$ . Производные от  $u$  по  $x_i$  выразятся через производные по  $\xi_i$  по следующим формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_l} \frac{\partial \psi_l}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{l,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_l \partial \xi_k} \frac{\partial \psi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_l} \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Подставляя эти выражения в (4.1), приходим к следующему уравнению для  $u$  в новых переменных  $\xi_1, \dots, \xi_n$ :

$$a(x, \nabla \psi(x)) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial \xi_1^2} = G \left( x, u(x), \nabla u(x), \frac{\partial^2 u(x)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right), \quad i + j > 2. \quad (4.7)$$

Здесь  $G$  – известная функция своих аргументов, зависящая от  $x$ ,  $u$ ,  $\nabla u$  и всех вторых производных  $\partial^2 u / \partial \xi_i \partial \xi_j$ , кроме производной  $\partial^2 u / \partial \xi_1^2$ , а коэффициент  $a$  в (4.7) определяется формулой

$$a(x, \nabla \psi(x)) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j}. \quad (4.8)$$

Из (4.5) и (4.6) вытекает, что условия (4.2), (4.3) при  $\mathbf{l} = \mathbf{n}$  переходят при преобразовании (4.6) в условия Коши

$$u|_{\xi_1=0} = \tilde{\varphi}_0(\xi_2, \dots, \xi_n), \quad \frac{\partial u}{\partial \xi_1}|_{\xi_1=0} = \tilde{\varphi}_1(\xi_2, \dots, \xi_n)$$

для уравнения (4.7), заданные на гиперплоскости  $\xi_1 = 0$  и имеющие рассмотренный выше специальный вид. Другими словами, замена (4.6) как бы “выпрямляет” поверхность  $S$  (в окрестности точки  $x_0 \in S$ ), переводя ее в участок гиперплоскости  $\xi_1 = 0$ . В таком случае из предыдущего анализа следует, что для того, чтобы условия Коши на поверхности  $S$  приводили к несовместности или неопределенности при нахождении производных второго порядка на  $S$ , необходимо и достаточно, чтобы функция  $\psi$  в (4.5) удовлетворяла условию

$$a(x, \nabla\psi(x)) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{на } S. \quad (4.9)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.** Поверхность  $S$  в  $\mathbb{R}^n$ , описываемая уравнением (4.5), называется *характеристической* для уравнения (4.1), а соответствующее направление нормали  $\nabla\psi(x_0)$  называется *характеристическим*, в точке  $x_0 \in S$ , если

$$a(x_0, \nabla\psi(x_0)) = 0, \quad (4.10)$$

и *нехарактеристической*, если

$$a(x_0, \nabla\psi(x_0)) \neq 0. \quad (4.11)$$

Поверхность  $S$  называется *характеристической поверхностью* (или *характеристикой*) для уравнения (4.1), если

$$a(x, \nabla\psi(x)) = 0 \quad \forall x \in S. \quad (4.12)$$

Если при этом для некоторого  $j \leq n$   $(\partial/\partial x_j) a(x, \nabla\psi(x)) \neq 0 \quad \forall x \in S$ , то характеристика называется *простой*. В противном случае она называется *кратной*. Поверхность  $S$ , не имеющая характеристического направления нормали ни в одной точке  $x \in S$ , называется *нехарактеристической* или *свободной поверхностью* для уравнения (4.1).

Свободная поверхность  $S$  называется *пространственно ориентированной* (или *пространственно подобной*) поверхностью, если

$$a(x, \nabla\psi(x)) > 0 \quad \forall x \in S, \quad (4.13)$$

и *временным образом ориентированной* (или *временно подобной*) поверхностью, если

$$a(x, \nabla\psi(x)) < 0 \quad \forall x \in S. \quad (4.14)$$

В соответствии с определением 4.1 рассмотрим два случая.

1. Поверхность  $S$  является нехарактеристической в точке  $x_0$ . В этом случае в окрестности точки  $x_0$  уравнение (4.7) можно записать в так называемой нормальной форме:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial \xi_1^2} = \Phi \left( x, u(x), \nabla u(x), \frac{\partial^2 u(x)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right), \quad i + j > 2. \quad (4.15)$$

Здесь  $\Phi = G/a$ , а функция  $G$  определена в (4.7). Основываясь на этом, можно доказать существование и единственность аналитического решения задачи Коши в окрестности точки  $x_0$ . Этот результат составляет содержание теоремы Ковалевской. В применении к задаче (4.1)–(4.3) она имеет вид (ср. с ее формулировкой для нормальных систем в §2.1): *если  $S$  – аналитическая поверхность в окрестности своей точки  $x_0$ , коэффициенты  $a_{ij}$ , правая часть  $f$  уравнения (4.1) и данные Коши  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  в (4.2), (4.3) аналитичны в этой окрестности, и выполнено условие (4.11), то в некоторой окрестности точки  $x_0$  существует аналитическое решение и задачи Коши (4.1)–(4.3), которое в классе аналитических функций единственно.*

Отметим, что указанная теорема носит универсальный характер, поскольку, с одной стороны, она применима к любому уравнению в частных производных с аналитическими коэффициентами независимо от их типа (гиперболического, параболического и т. д.), а с другой стороны, она применима к уравнениям не только второго, но и старших порядков. Правда, как уже указывалось в §2.1, эта теорема носит *локальный* характер в том смысле, что она дает существование решения лишь “в малом”, т. е. в достаточно малой окрестности точки  $x_0$ .

2. Поверхность  $S$  является характеристической в точке  $x_0$ . В этом случае уравнение (4.7) в самой точке  $x_0$  сводится к соотношению

$$a(x_0, \nabla \psi(x_0)) \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial \xi_1^2} = 0 = G \left( x_0, u(x_0), \nabla u(x_0), \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right), \quad i + j > 2. \quad (4.16)$$

Указанное соотношение представляет собой ограничение на данные Коши в (4.2), (4.3). При этом возможны два варианта:

а) данные Коши в (4.2), (4.3) таковы, что (при  $\mathbf{l} = \mathbf{n}$ ) выполняется второе равенство в (4.16). Отсюда следует, что исходное уравнение (4.1) выполняется в точке  $x_0$ , причем в качестве второй производной  $\partial^2 u / \partial \xi_1^2$  в этой точке можно взять любое число. Последнее означает, что имеет место неединственность решения. Следовательно, условий Коши (4.2), (4.3) недостаточно для однозначного определения решения в точке  $x_0$ ;

б) данные Коши в (4.2), (4.3) (при  $\mathbf{l} = \mathbf{n}$ ) не удовлетворяют второму равенству в (4.16). В этом случае уравнение (4.1) не может быть удовлетворено в точке  $x_0$ , так что условия Коши (4.2), (4.3) переопределяют рассматриваемую задачу Коши (4.1)–(4.3).



Уравнение (4.9) называется уравнением *характеристик* или *характеристическим уравнением* для уравнения (4.1). Подчеркнем, что хотя (4.9) формально имеет вид уравнения в частных производных первого порядка относительно  $\psi$ , оно по своему определению им не является. Действительно, уравнение (4.9) должно выполняться не тождественно относительно  $x_1, \dots, x_n$ , а только для точек  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющих условию  $\psi(x) = 0$ , т.е. лежащих на искомой характеристической поверхности.

Потребуем теперь дополнительно, чтобы уравнение (4.9) выполнялось не только на поверхности  $S$  (т. е. при  $\psi(x) = 0$ ), но и тождественно относительно  $x_1, \dots, x_n$ . Тогда получим нелинейное уравнение в частных производных 1-го порядка

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0, \quad (4.17)$$

а из его вида вытекает, что всякое решение  $\psi$  уравнения (4.16), отличное от константы, будет давать целое семейство характеристик

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = C, \quad (4.18)$$

где  $C$  – произвольная константа.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.1.** Справедливо и обратное, а именно: для того чтобы соотношение (4.18) определяло семейство характеристик, зависящих от произвольной постоянной  $C$ , необходимо и достаточно, чтобы функция  $\psi$  удовлетворяла уравнению (4.17). Более того, можно показать [21, с. 111], что всякую характеристику уравнения (4.1) можно включить в семейство вида (4.18). Отсюда следует, что все возможные решения уравнения (4.17) определяют все характеристические поверхности.

**2.4.2. Примеры нахождения характеристик.** Займемся нахождением характеристических поверхностей для трех основных типов уравнений математической физики и некоторых их нелинейных аналогов.

**ПРИМЕР 1.** Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y, t) \quad (4.19)$$

на плоскости  $\mathbb{R}^2$  изменения переменных  $x, y$  и вещественной оси  $\mathbb{R}_t^1$  изменения времени  $t$ . Это уравнение можно записать в виде (4.1), если положить

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = t, \quad a_{11} = a_{22} = -a^2, \quad a_{33} = 1, \quad a_{ij} = 0, \quad \text{при } i \neq j. \quad (4.20)$$

Мы уже знаем, что волновое уравнение (4.19) имеет гиперболический тип в каждой точке  $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_t^1$ . Найдем теперь его характеристики.

Подставляя (4.20) в (4.17), приходим к следующему характеристическому уравнению для уравнения (4.19):

$$a \left( \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \equiv \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - a^2 \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{на} \quad S. \quad (4.21)$$

Пусть  $(x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_t^1$  – произвольная точка. Рассмотрим поверхность

$$S = \{ (x, y, t) : \psi(x, y, t) \equiv a^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0 \}, \quad (4.22)$$

являющуюся границей двух конусов с вершинами в точке  $(x_0, y_0, t_0)$ : верхнего

$$K^+(x_0, y_0, t_0) = \left\{ (x, y, t) : a(t - t_0) > \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right\} \quad (4.23)$$

и нижнего

$$K^-(x_0, y_0, t_0) = \left\{ (x, y, t) : -a(t - t_0) > \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right\}, \quad (4.24)$$

называемых соответственно *конусами будущего и прошлого* (см. рис. 4.2,а).

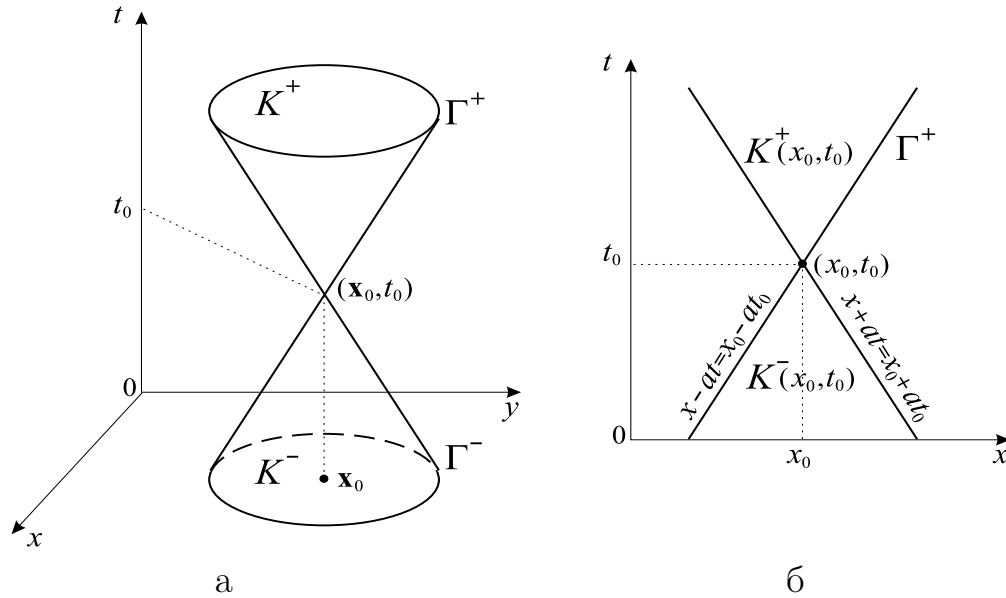


Рис. 4.2

Легко проверить, что функция  $\psi$  в (4.22) удовлетворяет уравнению (4.21) в любой точке  $(x, y, t)$ , принадлежащей поверхности  $S \equiv \Gamma^+(x_0, y_0, t_0) \cup \Gamma^-(x_0, y_0, t_0)$ , где  $\Gamma^\pm(x_0, y_0, t_0) = \partial K^\pm(x_0, y_0, t_0)$ . Действительно, так как

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 2a^2(t - t_0), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -2(x - x_0), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2(y - y_0), \quad (4.25)$$

то

$$a \left( \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = 4a^2 [a^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2]. \quad (4.26)$$

Отсюда и (4.22) следует, что

$$a \left( \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \equiv 0 \quad \text{на} \quad S \equiv \Gamma^+(x_0, y_0, t_0) \cup \Gamma^-(x_0, y_0, t_0). \quad (4.27)$$

Это означает, что поверхность  $S$ , определяемая уравнением (4.22), для любой точки  $(x_0, y_0, t_0)$  является характеристической. Ниже будем ссылаться на нее как на *характеристический конус с вершиной в точке  $(x_0, y_0, t_0)$* , причем верхнюю ее часть  $\Gamma^+(x_0, y_0, t_0)$  будем называть *характеристическим конусом будущего*, а нижнюю часть  $\Gamma^-(x_0, y_0, t_0)$  — *характеристическим конусом прошлого*.

Отметим, что поверхность  $S$ , описываемая уравнением

$$S = \{(x, y, z) : \psi(x, y, t) \equiv a^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = \text{const} \neq 0\},$$

не удовлетворяет (4.21). Следовательно, она не является характеристической.

Аналогичные выводы справедливы и для  $n$ -мерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x, t), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.28)$$

рассматриваемого в  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t^1$ , для которого отвечающее ему характеристическое уравнение имеет вид:

$$a \left( \nabla \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \equiv \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - a^2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 = 0 \quad \text{на} \quad S. \quad (4.29)$$

Рассмотрим поверхность вида

$$S = \{(x, t) : \psi(x, t) \equiv a^2(t - t_0)^2 - |x - x_0|^2 = 0\}, \quad (4.30)$$

где  $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , представляющую собой границу двух конусов (точнее, гиперконусов) с вершинами в точке  $(x_0, t_0)$ : верхнего

$$K^+(x_0, t_0) = \{(x, t) : a(t - t_0) > |x - x_0|\} \quad (4.31)$$

и нижнего

$$K^-(x_0, t_0) = \{(x, t) : -a(t - t_0) > |x - x_0|\}, \quad (4.32)$$

называемых соответственно *конусами будущего* и *прошлого*. Здесь  $|x - x_0| = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}$ .

Рассуждая, как и выше, показываем, что для любой точки  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t^1$  функция  $\psi$  в (4.30) удовлетворяет уравнению (4.29). Это означает, что для любой точки  $(x_0, t_0)$  поверхность  $S$ , определяемая уравнением (4.30), является характеристической поверхностью. Ее называют *характеристическим конусом с вершиной в точке  $(x_0, t_0)$* , причем верхнюю ее часть  $\Gamma^+(x_0, t_0)$  называют *характеристическим конусом будущего*, а нижнюю часть  $\Gamma^-(x_0, t_0)$  – *характеристическим конусом прошлого*. Кроме построенного семейства характеристических поверхностей (конусов) уравнение (4.28) имеет и другое семейство характеристических поверхностей, а именно: семейство касательных плоскостей к характеристическим конусам (4.31) и (4.32). Уравнение второго семейства характеристик имеет вид

$$at + (b, x) \equiv at + \sum_{i=1}^n b_i x_i = C. \quad (4.33)$$

Здесь  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ,  $b_i$  и  $C$  – любые вещественные числа, причем  $|b| = 1$ .

В частном случае  $n = 1$  (4.28) переходит в одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (4.34)$$

на плоскости  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}_t^1$ , а его характеристическое уравнение имеет вид

$$a \left( \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \equiv \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - a^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 = 0. \quad (4.35)$$

Записав указанное уравнение в виде  $(\partial \psi / \partial t + a \partial \psi / \partial x)(\partial \psi / \partial t - a \partial \psi / \partial x) = 0$ , приходим к выводу, что функция  $\psi$  является решением уравнения (4.35) тогда, когда  $\psi$  удовлетворяет одному из уравнений:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + a \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} - a \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (4.36)$$

Из результатов п. 2.2.1 следует, что решение первого (либо второго) уравнения в (4.36) сохраняет постоянное значение на характеристиках

$$\psi_1(x, t) \equiv x - at - C_1 = 0 \quad \text{либо} \quad \psi_2(x, t) \equiv x + at - C_2 = 0, \quad (4.37)$$

описывающих соответствующие прямые на плоскости  $x, t$  (см. рис. 2.4,б). Здесь  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные константы. Отсюда и замечания 4.1 приходим к выводу, что указанные прямые (4.37) и представляют собой два искомого семейства характеристик уравнения (4.34). При этом через любую точку  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}_x^1 \times \mathbb{R}_t^1$  проходят две характеристики, определяемые

уравнениями  $x - at = x_0 - at_0$  и  $x + at = x_0 + at_0$ . Указанные прямые являются границами двумерного конуса  $K(x_0, t_0) = K^+(x_0, t_0) \cup K^-(x_0, t_0)$ , изображенного на рис. 4.2б.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Все, что говорилось выше о характеристиках для  $n$ -мерного волнового уравнения (4.28), остается справедливым и для  $n$ -мерного квазилинейного уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = F\left(x, t, u, \nabla u, \frac{\partial u}{\partial t}\right). \quad (4.38)$$

Здесь  $F$  – заданная функция своих аргументов. Другими словами, уравнение (4.38) так же, как и (4.28), имеет гиперболический тип в каждой точке  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t^n$ , а его характеристиками являются характеристические конусы  $\Gamma^+(x_0, t_0)$  и  $\Gamma^-(x_0, t_0)$  так же, как и гиперплоскости (4.33).

Однако в случае более общего квазилинейного уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x, t, u, \nabla u, \frac{\partial u}{\partial t}), \quad (4.39)$$

гиперболического при выполнении (1.23), его характеристическое уравнение имеет вид нелинейного уравнения с переменными коэффициентами

$$a(x, t, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}, \nabla \psi) \equiv \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0. \quad (4.40)$$

Поэтому нахождение характеристик уравнения (4.39) в явном виде возможно лишь в исключительных случаях, хотя можно строго показать, что через каждую точку  $(x_0, t_0)$  проходят две характеристики уравнения (4.39).

То же самое справедливо и для одномерного аналога

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}) \quad (4.41)$$

уравнения (4.39). Условием его гиперболичности в точке  $(x, t)$  (либо в области  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_t$ ) является условие  $a(x, t) > 0$  (либо  $a(x, t) > 0 \forall (x, t) \in D$ ), а характеристическое уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 - a^2(x, t) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 = 0. \quad (4.42)$$

Записав его в виде  $[\partial \psi / \partial t + a(x, t) \partial \psi / \partial x][\partial \psi / \partial t - a(x, t) \partial \psi / \partial x] = 0$ , приходим с учетом замечания 4.1 к выводу, что уравнение (4.41) имеет два семейства характеристик  $\psi_1(x, t) = C_1$  и  $\psi_2(x, t) = C_2$ . Здесь  $C_1$  и  $C_2$  –

произвольные константы, а функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  являются решениями следующих двух уравнений в частных производных 1-го порядка:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0. \quad (4.43)$$

Из результатов п. 2.2.4 и 2.2.5 вытекает, что нахождение решений каждого из уравнений 1-го порядка в (4.43) сводится к нахождению характеристик данного уравнения. Они определяются как интегральные кривые следующих задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t), \quad x|_{t=0} = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = -a(x, t), \quad x|_{t=t_0} = x_0. \quad (4.44)$$

При этом функция  $\psi_i$  является решением  $i$ -го уравнения в (4.43) тогда и только тогда, когда соотношение  $\psi_i(x, t) = C_i$  определяет первый интеграл соответствующего уравнения в (4.44),  $i = 1, 2$ .

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно [51], что в случае, когда функция  $a$  непрерывна по  $t$  и дифференцируема по  $x$ , через каждую точку  $(x_0, t_0)$  рассматриваемой области проходит единственная интегральная кривая первой задачи Коши в (4.44), определяющая характеристику первого уравнения в (4.43), и единственная интегральная кривая второй задачи Коши в (4.44), определяющая характеристику второго уравнения в (4.43). Указанные характеристики по построению образуют два искоемых семейства характеристик для исходного квазилинейного уравнения (4.41).

ПРИМЕР 2. Рассмотрим  $n$ -мерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f \quad (4.45)$$

в пространстве  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t^1$ . Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 = 0. \quad (4.46)$$

Поскольку решениями уравнения (4.46) в  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t^1$  являются функции  $\psi(x, t) = t - \text{const}$ , то единственными характеристиками уравнения теплопроводности (4.45) являются гиперплоскости  $t = \text{const}$ .

Аналогичные утверждения справедливы и для  $n$ -мерного квазилинейного параболического уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = F \left( x, t, u, \nabla u, \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (4.47)$$

а также более общего квазилинейного уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x, t, u, \nabla u, \frac{\partial u}{\partial t}), \quad (4.48)$$

параболического при выполнении условия (1.23). Действительно, его характеристическое уравнение имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0. \quad (4.49)$$

Ясно, что при выполнении (1.23) единственным решением уравнения (4.49) является функция  $\psi(x, t) = t - \text{const}$ . Отсюда следует, что уравнение (4.48), как и (4.47), при выполнении условия (1.23) имеют своими характеристиками гиперплоскости  $t = \text{const}$ .

ПРИМЕР 3. Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{R}^n$  уравнение Пуассона

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = -f. \quad (4.50)$$

Его характеристическое уравнение по-прежнему имеет вид (4.46), однако, в отличие от уравнения теплопроводности (4.45), его следует рассматривать в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . С учетом этого приходим к выводу, что уравнение (4.50) не имеет вещественных характеристик. Подчеркнем, что речь идет о вещественных характеристиках уравнения (4.50), определяемых через вещественные решения уравнения (4.46). Можно показать, что в поле комплексных чисел уравнение (4.46) имеет два семейства “мнимых” решений, которым отвечают два семейства мнимых характеристик уравнения (4.50).

Аналогичный факт справедлив и для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = -f,$$

рассматриваемого в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , а также для произвольного квазилинейного эллиптического уравнения  $\Delta u = f(x, u, \nabla u)$ , главная часть которого совпадает с оператором Лапласа, и, кроме того, для более общего эллиптического уравнения вида

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x, u, \nabla u)$$

при условии, что коэффициенты  $a_{ij}(x)$  удовлетворяют условию эллиптичности (1.19).

# ГЛАВА 3. Уравнения гиперболического типа и волновые процессы в пространстве

## § 3.1. Одномерное волновое уравнение. Формула Даламбера

**3.1.1. Неограниченная струна. Формула Даламбера.** Обозначим через  $\mathbb{R}_x$  (либо  $\mathbb{R}_t$ ) вещественную ось, на которой изменяется пространственная переменная  $x$  (либо временная переменная  $t$ ). Рассмотрим на плоскости  $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$  переменных  $x$  и  $t$  одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \text{const}, \quad (1.1)$$

моделирующее, например, процесс свободных колебаний бесконечной однородной струны. *Решением* уравнения (1.1) в некоторой области  $Q$  плоскости  $\mathbb{R}^2$  назовем функцию  $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , имеющую в  $Q$  вторые производные  $\partial^2 u / \partial t^2$  и  $\partial^2 u / \partial x^2$ , удовлетворяющие в каждой точке  $(x, t) \in Q$  уравнению (1.1). Если к тому же функция  $u$  непрерывна в  $Q$  вместе со всеми производными до второго порядка включительно (этот факт схематически записывается в виде:  $u \in C^2(Q)$ ), то указанную функцию  $u$  будем называть *классическим решением* уравнения (1.1) в области  $Q$ .

Поставим в этом пункте своей целью вывести явную формулу для классического решения уравнения (1.1). С этой целью, предполагая, что решение  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  уравнения (1.1) существует, введем новые независимые переменные  $\xi$  и  $\eta$  и зависимую переменную  $U$  по формулам

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at, \quad U(\xi, \eta) = u(x, t). \quad (1.2)$$

В новых переменных уравнение (1.1) примет вид  $\partial^2 U / \partial \xi \partial \eta = 0$ . Переписав его в виде  $\partial / \partial \eta (\partial U / \partial \xi) = 0$  и интегрируя по переменной  $\eta$ , получаем, что  $\partial U / \partial \xi = \omega(\xi)$ , где  $\omega$  – произвольная функция от  $\xi$ . Интегрируя это уравнение по  $\xi$ , рассматривая  $\eta$  как параметр, выводим, что  $U(\xi, \eta) = \int \omega(\xi) d\xi + \theta_2(\eta)$ , где  $\theta_2$  – произвольная функция от  $\eta$ . Полагая далее  $\int \omega(\xi) d\xi = \theta_1(\xi)$ , получим  $U(\xi, \eta) = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta)$ . Возвращаясь к старым переменным  $x, t$ , будем иметь

$$u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at). \quad (1.3)$$

Итак, предположив, что классическое решение  $u$  уравнения (1.1) существует, мы доказали, что оно необходимо представляется формулой (1.3). Нетрудно проверить, что справедливо и обратное, а именно: функция  $u$ , определяемая формулой (1.3), есть классическое решение уравнения (1.1),



если  $\theta_1$  и  $\theta_2$  – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Сформулируем полученные результаты в виде леммы.

**ЛЕММА 1.1.** *Функция  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  является решением волнового уравнения (1.1) на плоскости  $\mathbb{R}^2$  тогда и только тогда, когда в каждой точке  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$  справедливо представление (1.3), где  $\theta_1 \in C^2(\mathbb{R})$  и  $\theta_2 \in C^2(\mathbb{R})$  – произвольные функции одной переменной.*

Решение (либо формула) (1.3) называется *решением (либо формулой) Даламбера* в честь известного французского математика, механика и философа J.L. D’Alembert (1717–1783).

Выясним физический смысл решения Даламбера. Рассмотрим сначала частный случай, когда  $\theta_2 = 0$ , т. е. когда решение (1.3), описывающее отклонение струны от положения равновесия, имеет вид

$$u_1(x, t) = \theta_1(x - at). \quad (1.4)$$

Пусть наблюдатель (студент), выйдя в начальный момент времени  $t = 0$  из точки  $x = c$  струны, движется в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $a$ , т. е. его абсцисса меняется по закону  $x = c + at$  (или  $x - at = c$ ). Тогда для него смещение струны, определяемое формулой (1.4), будет оставаться все время постоянным и равным  $\theta_1(c)$ . Другими словами, в процессе своего движения он будет все время видеть тот же профиль, что и в начальный момент. Это означает, что функция  $u_1$  в (1.4) описывает перемещение профиля  $\theta_1$  вправо (в положительном направлении) со скоростью  $a$ . Физики в таком случае говорят, что по струне бежит (или распространяется) вправо волна с *профилем  $\theta_1$  и скоростью  $a$* . Таким образом, функция  $u_1$  описывает *бегущую (или распространяющуюся) вправо волну* с профилем  $\theta_1$  и скоростью  $a$ . Точно так же функция  $u_2$ , определяемая формулой

$$u_2(x, t) = \theta_2(x + at), \quad (1.5)$$

описывает волну, *распространяющуюся влево* с той же скоростью  $a$  и профилем  $\theta_2$ . Для простоты ниже мы будем также ссылаться на функции  $u_1 \equiv \theta_1(x - at)$  и  $u_2 \equiv \theta_2(x + at)$  как на *прямую* и *обратную* волны.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.** Строго говоря,  $\theta_1(x - at)$  является не функцией, а значением функции  $\theta_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x - at$  либо значением функции двух аргументов  $u_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $(x, t)$ . Однако, следуя устоявшейся физической традиции, мы часто будем ссылаться на выражение  $\theta_1(x - at)$  как на соответствующую функцию. Это же правило будет относиться и к  $\theta_2(x + at)$ , а также к другим аналогичным выражениям.

На основании вышесказанного можно сделать вывод о том, что решение (1.3) уравнения (1.1) представляет собой *сумму* или *суперпозицию* прямой и обратной распространяющихся волн. Это приводит к следующему графическому способу построения формы струны в любой момент времени  $t$ .

Строим кривые

$$u_1 = \theta_1(x), \quad u_2 = \theta_2(x), \quad (1.6)$$

описывающие профили прямой и обратной волн в начальный момент времени  $t = 0$ , и затем передвигаем их одновременно без изменения формы на расстояние  $at$  в разные стороны: кривую  $\theta_1(x)$  – вправо, а кривую  $\theta_2(x)$  – влево. Чтобы получить теперь график струны в указанный момент  $t$ , достаточно построить алгебраические суммы ординат сдвинутых кривых.

Формула (1.3) позволяет выявить ряд важных свойств решения волнового уравнения (1.1). Для анализа указанных свойств удобно воспользоваться плоскостью  $\mathbb{R}^2$ , которую называют *плоскостью состояний* или *фазовой плоскостью*. Прежде всего напомним (см. гл. 2), что прямые

$$x - at = \text{const} \quad \text{и} \quad x + at = \text{const} \quad (1.7)$$

являются *характеристиками* уравнения (1.1) соответственно первого либо второго семейства. Из приведенных выше результатов следует, что функция (1.4) сохраняет постоянное значение вдоль характеристики  $x - at = \text{const}$ , тогда как функция (1.5) остается постоянной вдоль характеристики  $x + at = \text{const}$ .

Предположим, что  $\theta_1(x)$  отлична от нуля в каждой точке интервала  $(x_1, x_2)$  оси  $x$  и равна нулю вне этого интервала. Такую функцию  $\theta_1$  называют *финитной* с *носителем*  $\text{supp } \theta_1$ , сосредоточенным в интервале  $(x_1, x_2)$ . Проведем через точки  $(x_1, 0)$  и  $(x_2, 0)$  характеристики первого семейства

$$\Gamma'_1 = \{(x, t) : t > 0, x - at = x_1\} \text{ и } \Gamma''_1 = \{(x, t) : t > 0, x - at = x_2\}. \quad (1.8)$$

Они разбивают замкнутую полуплоскость  $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ , где

$$\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{t,+} \equiv \{(x, t) : -\infty < x < \infty, t > 0\},$$

на пять непересекающихся множеств:  $Q'$ ,  $\Gamma'_1$ ,  $Q$ ,  $\Gamma''_1$  и  $Q''$  (см. рис. 1.1,а), где  $Q' = \{(x, t) : x - at < x_1\}$ ,  $Q = \{(x, t) : x_1 < x - at < x_2\}$ ,  $Q'' = \{(x, t) : x_2 < x - at\}$ . Таким образом, справедливо представление

$$\overline{\mathbb{R}^2_+} \equiv \mathbb{R}_x \times \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\} = Q' \cup \Gamma'_1 \cup Q \cup \Gamma''_1 \cup Q''. \quad (1.9)$$

Указанному представлению соответствует следующее разбиение прямой  $\mathbb{R}$  в каждый момент времени  $t \geq 0$ :

$$\mathbb{R} = D'(t) \cup S'(t) \cup D(t) \cup S''(t) \cup D''(t).$$

Здесь  $D'(t)$ ,  $S'(t)$ ,  $D(t)$ ,  $S''(t)$  и  $D''(t)$  суть сечения в момент времени  $t$  соответственно областей  $Q'$ ,  $\Gamma'_1$ ,  $Q$ ,  $\Gamma''_1$  и  $Q''$  в (1.9).

Из финитности функции  $\theta_1$  и (1.4) следует, что функция  $u_1$  может быть отлична от нуля лишь в области  $Q$ , в точках которой выполняется условие

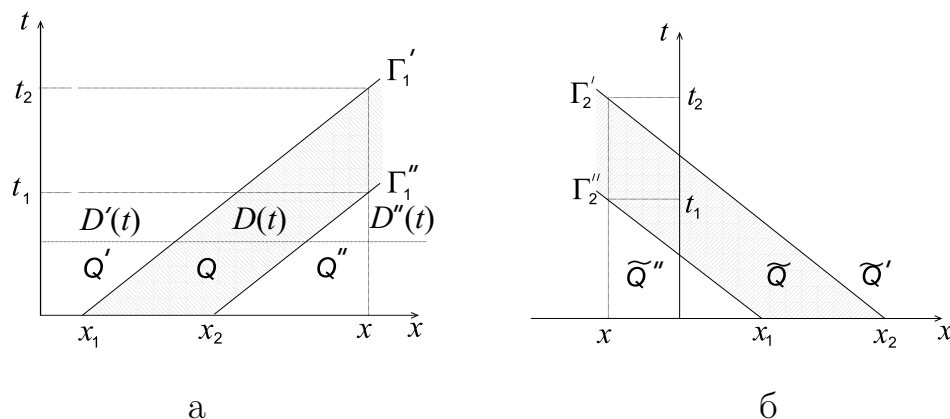


Рис. 1.1

$x_1 < x - at < x_2$  (для наглядности она заштрихована на рис. 1.1,а). С учетом этого область  $Q$  назовем *носителем волны*  $u_1$ , а ее сечение  $D(t)$  в момент  $t$  – носителем волны в момент  $t$ . (Здесь мы допускаем неточность в математическом плане, поскольку под *носителем* непрерывной функции  $u$  математики понимают замыкание множества точек, где  $u \neq 0$ ). В областях  $Q'$  и  $Q''$  (либо  $D'$  и  $D''$  в момент  $t$ ) функция  $u_1$  равна нулю. Физически это означает, что волновой процесс, описываемый функцией (1.4), происходит в момент  $t$  лишь в области  $D$ , причем до области  $D''$  волна *еще* не дошла, так что там еще наблюдается покой, а через область  $D'$  волна *уже* прошла, так что там уже наступил покой. В свою очередь, характеристика  $\Gamma_1''$  в (1.8) имеет смысл *переднего фронта* волны  $u_1$ , отделяющего носитель  $Q$  волны (1.4) от “передней” области покоя  $Q''$ , тогда как характеристика  $\Gamma_1'$  имеет смысл *заднего фронта* волны  $u_1$ , отделяющего носитель  $Q$  волны (1.4) от “задней” области покоя  $Q'$ .

По аналогичной схеме исследуются свойства обратной волны  $u_2 \equiv \theta_2(x + at)$  в предположении, что функция  $\theta_2$  отлична от нуля лишь в интервале  $(x_1, x_2)$ . Геометрическая картина изображена на рис. 1.1,б, где область  $\tilde{Q}$  имеет смысл носителя волны  $u_2$ ,  $\tilde{Q}'$  и  $\tilde{Q}''$  являются областями покоя, а  $\Gamma_2''$  и  $\Gamma_2'$  имеют смысл переднего и заднего фронтов волны  $u_2$ .

Пусть  $x \notin [x_1, x_2]$  – произвольная точка. Из предыдущего анализа вытекает, что для любой такой точки существует интервал времени  $(t_1, t_2)$ , в течение которого в  $x$  распространяется волна. Чтобы определить геометрически указанный интервал, достаточно провести через точку  $x$  луч параллельно оси  $t$ , найти его пересечение с областью  $Q$  для прямой волны либо с  $\tilde{Q}$  для обратной волны и спроектировать это пересечение на ось  $t$ . Схематически указанное построение изображено на рис. 1.1,а для  $x > x_2$  и на рис. 1.1,б для  $x < x_1$ .

### 3.1.2. Задача Коши для одномерного волнового уравнения.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.1). Она заключается в нахождении

классического решения  $u$  уравнения (1.1) в полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2$  из пространства  $C^2(\mathbb{R}_+^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ , удовлетворяющего начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Напомним, что условие  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2)$  означает, что функция  $u$  непрерывна вместе со всеми производными до второго порядка включительно в открытой области – полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2$ . В то же время условие  $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  означает, что  $u$  вместе с производными  $\partial u / \partial t$  и  $\partial u / \partial x$  непрерывна в  $\mathbb{R}_+^2$  и допускает непрерывное продолжение на замкнутую полуплоскость  $\overline{\mathbb{R}_+^2} = \mathbb{R}_x \times \{t \in \mathbb{R}_t : t \geq 0\}$ . Последнее требование  $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  обусловлено необходимостью выполнения решением  $u$  начальных условий (1.10) на границе  $t = 0$  замкнутой полуплоскости  $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ . Физически задача (1.1), (1.10) описывает процесс колебаний бесконечной струны, вызываемых ее *начальным отклонением*  $\varphi$  и *начальным импульсом*  $\psi$ . Ввиду неограниченности струны функции  $\varphi$  и  $\psi$  заданы на всей вещественной оси  $\mathbb{R}_x$ .

Предположим, что решение  $u$  задачи (1.1), (1.10) существует. Тогда в силу леммы 1.1 оно необходимо представляется в виде (1.3). Следовательно, для его нахождения достаточно подобрать функции  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в (1.3) так, чтобы их сумма удовлетворяла обоим условиям в (1.10). Подставляя (1.3) в (1.10), получим

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi(x), \quad -a[\theta_1'(x) - \theta_2'(x)] = \psi(x). \quad (1.11)$$

Интегрируя второе равенство, имеем  $\theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + C$ , где  $C$  – произвольная постоянная. Складывая это равенство с первым равенством в (1.11) либо вычитая, приходим к двум соотношениям, имеющим вид:

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \frac{C}{2}, \quad \theta_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi - \frac{C}{2}. \quad (1.12)$$

Подставляя (1.12) в (1.3), приходим к следующей окончательной форме решения задачи Коши (1.1), (1.10):

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (1.13)$$

Формула (1.13) так же, как и (1.3), называется формулой Даламбера. Легко проверить, что (1.13) дает искомое решение задачи (1.1), (1.10), если

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}). \quad (1.14)$$

(Здесь и ниже  $C^l(\mathbb{R})$  обозначает класс функций:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывных вместе со всеми производными до порядка  $l$  включительно.)

Итак, предположив существование решения  $u$  задачи Коши (1.1), (1.10), мы показали, что оно должно представляться формулой (1.13). Отсюда, в частности, следует, что нулевым начальным данным  $\varphi = 0$ ,  $\psi = 0$  отвечает лишь тривиальное решение  $u = 0$ . Последнее эквивалентно в силу линейности уравнения (1.1) единственности решения задачи Коши (1.1), (1.10). Построив решение задачи Коши в виде (1.13), мы тем самым доказали его существование. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 1.1.** Пусть выполняются условия (1.14). Тогда классическое решение  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  задачи Коши (1.1), (1.10) существует, единственно и определяется формулой (1.13).

Изложенный метод построения решения задачи Коши (1.1), (1.10) называется *методом распространяющихся волн* или *методом характеристик*.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.2.** По аналогии с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений *частным* решением уравнения (1.1) можно назвать то его решение  $u$ , которое удовлетворяет начальным условиям (1.10) при конкретных функциях  $\varphi$  и  $\psi$ . Тогда тот факт, что любое частное решение уравнения (1.1) можно получить из формулы (1.3) при надлежащем выборе функций  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , означает, что формула (1.3) описывает *общее решение* уравнения (1.1).

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.** Простой анализ формулы (1.13) показывает, что при выполнении условий (1.14) обе производные  $\partial^2 u / \partial t^2$  и  $\partial^2 u / \partial x^2$ , входящие в уравнение (1.1), непрерывны в замкнутой области  $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ . Таким образом, построенное нами решение (1.13) обладает даже большей гладкостью, чем это требуется в определении классического решения задачи (1.1), (1.10). Чтобы отличить (по свойству гладкости) построенное решение от классического решения, для обозначения первого решения будем использовать здесь и ниже введенный в п. 2.2.3 термин *регулярное решение*.

Мы будем также рассматривать “решения”, обладающие меньшей гладкостью, чем указано в определении классического решения. На такие решения будем ссылаться в соответствии с материалами п. 2.1.5 как на *обобщенные* решения. Первое упоминание об обобщенных решениях применительно к задаче Коши (1.1), (1.10) будет сделано уже в п. 3.1.3 ниже.

Исследуем некоторые свойства общего решения (1.3) и частного решения (1.13) уравнения (1.1). С этой целью рассмотрим фиксированную точку  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}_+^2$  и проведем из нее характеристики

$$x - at = x_0 - at_0 \quad \text{и} \quad x + at = x_0 + at_0, \quad (1.15)$$

которые пересекают ось  $x$  соответственно в точках

$$x_1 = x_0 - at_0 \quad \text{и} \quad x_2 = x_0 + at_0. \quad (1.16)$$

Из (1.3) следует, что значение общего решения  $u$  в точке  $(x_0, t_0)$  равно  $\theta_1(x_1) + \theta_2(x_2)$ , т. е. оно определяется значениями функций  $\theta_1$  и  $\theta_2$  соответ-

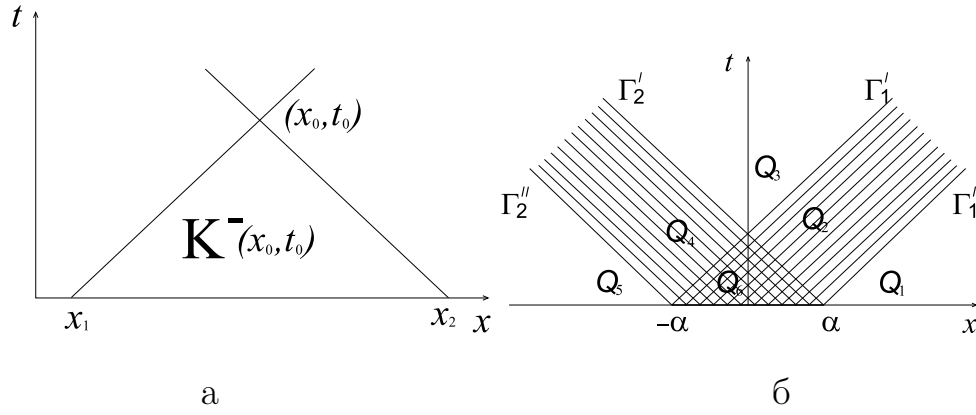


Рис. 1.2

ственно в точках  $x_1$  и  $x_2$ , которые являются вершинами треугольника, образованного двумя характеристиками (1.15) и осью  $x$  (см. рис. 1.2,а). Этот треугольник, обозначаемый через  $K^-(x_0, t_0)$ , называется *характеристическим треугольником точки  $(x_0, t_0)$* , а указанный факт обычно интерпретируют так: *возмущение в струне, вызванное ее начальным отклонением, распространяется вдоль характеристик (1.7) уравнения (1.1) с постоянной скоростью  $a$  (без изменения формы)*. Сформулируем полученный результат в виде леммы.

**ЛЕММА 1.2.** *Значение решения (1.3) уравнения (1.1) в произвольной точке  $(x, t) \in \mathbb{R}_+^2$  равно сумме значений функций  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в (1.3) в нижних вершинах  $(x_1, 0)$  и  $(x_2, 0)$  характеристического треугольника  $K^-(x, t)$  точки  $(x, t)$ .*

Обратимся далее к формуле (1.13) и положим в ней  $x = x_0$ ,  $t = t_0$ . Переписав ее с учетом соотношений (1.16) в виде

$$u(x_0, t_0) = \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_1}^{x_2} \psi(\xi) d\xi, \quad (1.17)$$

приходим к важному выводу, что значение  $u(x_0, t_0)$  решения и задачи Коши (1.1), (1.10), описывающее отклонение струны в точке  $x_0$  в момент  $t_0$ , зависит только от значений начальной функции (начального отклонения)  $\varphi$  в точках  $x_1 = x_0 - at_0$  и  $x_2 = x_0 + at_0$  оси  $x$  – вершинах характеристического треугольника  $K^-(x_0, t_0)$  точки  $(x_0, t_0)$ , и от значений начальной функции (начальной скорости отклонения струны)  $\psi$  на участке  $(x_1, x_2)$  оси  $x$ .

Начальные данные, заданные вне  $[x_1, x_2]$ , не оказывают влияния на значение решения  $u$  в точке  $(x_0, t_0)$ . Если начальные условия заданы не на всей бесконечной прямой, а лишь на отрезке  $[x_1, x_2]$ , то они однозначно определяют решение внутри характеристического треугольника, основанием которого является отрезок  $[x_1, x_2]$ .

В заключение этого пункта рассмотрим более детально два частных случая в задаче Коши (1.1), (1.10).

1. Начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное отклонение имеет место лишь в конечном интервале  $(-\alpha, \alpha)$  струны, т. е.

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{вне} \quad (-\alpha, \alpha), \quad \psi(x) \equiv 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}. \quad (1.18)$$

Решение (1.13) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}. \quad (1.19)$$

Из (1.19) следует, что решение  $u$  представляет собой сумму двух волн, распространяющихся вправо и влево со скоростью  $a$ , причем начальная форма обеих волн определяется функцией  $(1/2)\varphi(x)$ , равной половине начального смещения.

Дадим физическую интерпретацию решения (1.19). Рассмотрим точку  $x > \alpha$ , лежащую правее интервала  $(-\alpha, \alpha)$ . Разобьем интервал времени  $[0, \infty)$  на три:

$$1) 0 \leq t \leq t_1 = \frac{x - \alpha}{a}; \quad 2) t_1 < t < t_2 = \frac{x + \alpha}{a}; \quad 3) t_2 \leq t < \infty. \quad (1.20)$$

Из (1.18) и (1.19), а также рис.1.1,а при  $x_2 = \alpha$  следует, что  $u(x, t) \equiv 0$  при  $0 \leq t \leq t_1$ . В физическом плане это можно интерпретировать так, что волна, возбужденная начальным возмущением – парой  $\{(-\alpha, \alpha), \varphi\}$ , еще не дошла до точки  $x$ . Точно так же из (1.18) и (1.19) следует, что  $u(x, t) \not\equiv 0$  при  $t_1 < t < t_2$ . Физически это означает, что в течение интервала  $(t_1, t_2)$  времени  $t$  точка  $x$  струны совершает колебания около положения своего равновесия, и, следовательно, значение  $t_1$  в физическом плане представляет собой момент, когда волна доходит до точки  $x$ , т. е., как говорят физики, момент прохождения *переднего фронта прямой волны*. Наконец, в силу (1.18), (1.19) имеем, что  $u(x, t) \equiv 0$  при  $t \geq t_2$ . Физически это означает, что волна, возбужденная начальным отклонением  $\varphi$ , прошла в момент  $t_2$  точку  $x$ , оставив после себя невозмущенное состояние. Следовательно, значение  $t_2$  представляет собой момент прохождения *заднего фронта прямой волны* через точку  $x$ .

Аналогичные рассуждения, проведенные для произвольной точки струны  $x < -\alpha$ , лежащей левее интервала  $(-\alpha, \alpha)$ , показывают, что

$$u(x, t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq t_1 = \frac{-\alpha - x}{a},$$

$$u(x, t) \not\equiv 0 \quad \text{при} \quad t_1 < t < t_2 = \frac{\alpha - x}{a} \quad \text{и} \quad u(x, t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t_2 \leq t < \infty.$$

При этом значения  $t_1$  и  $t_2$  представляют собой моменты прохождения соответственно *переднего и заднего фронта обратной волны* через точку  $x$ .

Наконец, через каждую точку  $x$  внутри интервала  $(-\alpha, \alpha)$  сначала проходят обе волны (прямая и обратная), затем одна волна (прямая или обратная), а затем ни одной волны. Начиная с этого момента в указанной точке  $x$  струны наблюдается покой, т. е.  $u(x, t) \equiv 0$ . Наглядное представление о характере процесса распространения в данном частном случае можно получить с помощью фазовой плоскости  $(x, t)$ . Проведем характеристики через точки  $(-\alpha, 0)$  и  $(\alpha, 0)$ . Они разбивают полуплоскость  $\mathbb{R}_+^2 = (-\infty < x < \infty, t \geq 0)$  на шесть областей:  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  (см. рис.1.2,б). Анализ формулы (1.19) для отклонения  $u(x, t)$  струны в любой точке  $(x, t)$  показывает, что в областях  $Q_1, Q_3, Q_5$  отклонение равно нулю. Действительно, поскольку нижние вершины характеристического треугольника любой точки  $(x, t)$  из этих областей лежат вне интервала  $(-\alpha, \alpha)$ , на котором начальная функция  $\varphi$  отлична от нуля, то указанный факт следует из леммы 1.2. В области  $Q_2$  решением является прямая волна  $u = (1/2)\varphi(x - at)$ , в области  $Q_4$  – обратная волна  $u = (1/2)\varphi(x + at)$ , а в области  $Q_6$  решение есть сумма прямой и обратной волн. Геометрическая

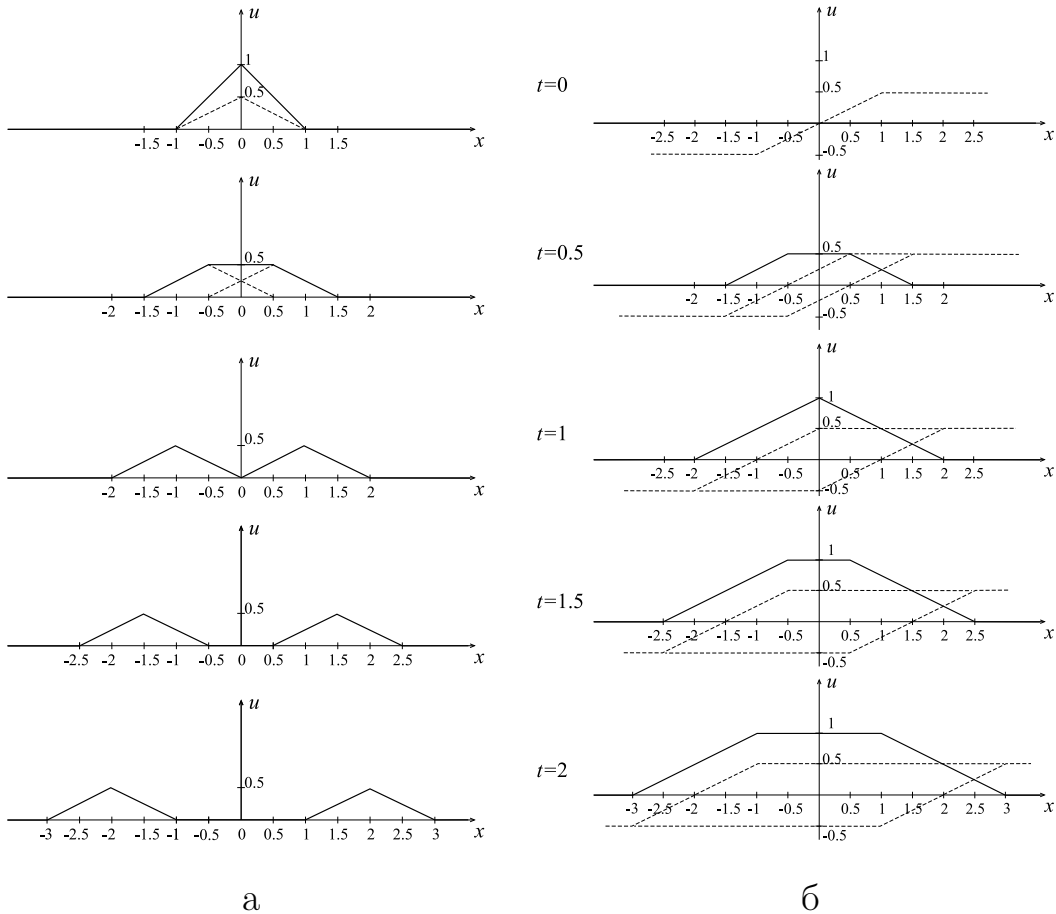


Рис. 1.3



интерпретация решения (1.19) представлена на рис. 1.3,а в случае, когда  $a = 1$ , а начальная функция  $\varphi$  имеет вид “равнобедренного” треугольника, определяемого формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in (-1, 0), \\ 1 - x, & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (-1, 1). \end{cases} \quad (1.21)$$

Такой начальный профиль можно получить, если при  $t = 0$  оттянуть струну в точке  $x = 0$  и зажать в точках  $x = -1$  и  $x = 1$ . На рис. 1.3,а даны профили последовательных положений струны в моменты времени  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 0.5$ ,  $t_2 = 1$ ,  $t_3 = 1.5$ ,  $t_4 = 2$ . Видно, что в каждый фиксированный момент  $t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  профиль струны равен сумме двух профилей: “правого” и “левого”, где правый (либо левый) профиль получается сдвигом половинки начального профиля (равнобедренного треугольника)  $\varphi$  в (1.21) вправо (либо влево) на расстояние, равное по величине  $t_i$  (так как  $a = 1$ ). Отметим, что в рассмотренном примере начальная функция в (1.21), будучи кусочно-аналитичной, не удовлетворяет условию  $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ . Однако этот пример полезен тем, что позволяет получить наглядное представление о физике протекания рассматриваемого волнового процесса.

2. Начальное смещение  $\varphi$  равно нулю, а функция  $\psi$  отлична от нуля лишь в конечном интервале  $(-\alpha, \alpha)$ . В таком случае говорят, что струна имеет лишь *начальный импульс*. Решение (1.13) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \left( \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi - \int_0^{x-at} \psi(\xi) d\xi \right). \quad (1.22)$$

Полагая

$$\frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi = \Psi(x),$$

перепишем (1.21) в виде

$$u(x, t) = \Psi(x + at) - \Psi(x - at). \quad (1.23)$$

Соотношение (1.23) означает, что указанный начальный импульс возбуждает по струне две волны: прямую с профилем  $-\Psi$  и обратную с профилем  $\Psi$ . Из (1.23) также следует, что для нахождения в этом случае профиля струны в момент  $t$  нужно сначала профиль  $\Psi$  сдвинуть влево на расстояние  $at$ , затем вправо на то же расстояние и вычесть полученные профили.

Как и выше, рассмотрим подробнее случай, когда  $x > \alpha$ . Опять разобьем временной интервал  $(0, \infty)$  на три подинтервала, введенные в (1.20):

1)  $0 \leq t \leq t_1$ . При  $t = 0$  интервал интегрирования  $(x - at, x + at)$  в (1.22) вырождается в точку  $x$ , а затем с увеличением  $t$  он расширяется в обе

стороны со скоростью  $a$ . При  $t \leq t_1$  он не имеет общих точек с интервалом  $(-\alpha, \alpha)$ , где  $\psi$  отлична от нуля. Отсюда следует, что

$$\psi = 0 \quad \text{в} \quad (x - at, x + at) \quad \forall t \leq t_1 \implies u(x, t) \equiv 0 \quad \forall t \leq t_1.$$

Эти факты физически означают, что волна, вызванная начальным возмущением – парой  $\{(-\alpha, \alpha), \psi\}$ , еще не дошла до точки  $x$ . Отметим, что последнее условие  $u(x, t) \equiv 0$  выполняется и в момент времени  $t_1$ , даже если  $\psi(\alpha) \neq 0$ .

2)  $t_1 < t < t_2$ . Для этих значений времени  $t$ , т. е. начиная с момента  $t_1$  и до момента  $t_2$ , интервал  $(x - at, x + at)$  будет пересекать интервал  $(-\alpha, \alpha)$ , где  $\psi \neq 0$ . С учетом этого из (1.22) следует, что  $u(x, t) \neq 0$  при  $t_1 < t < t_2$ . Физически это означает, что при  $t > t_1$  в точку  $x$  приходит возмущение, вызванное ненулевым начальным импульсом струны, под влиянием которого точка  $x$  начинает колебаться. Сам же момент  $t_1$  есть момент прохождения через точку  $x$  переднего фронта волны, вызванной начальным импульсом.

3)  $t_2 \leq t < \infty$ . Для этих значений времени  $t$  интервал интегрирования  $(x - at, x + at)$  в (1.22) будет целиком содержать интервал  $(-\alpha, \alpha)$ . Так как  $\psi = 0$  вне  $(-\alpha, \alpha)$ , то для таких  $t$  формула (1.22) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{-\alpha}^{\alpha} \psi(\xi) d\xi = \text{const}, \quad \forall t \geq t_2. \quad (1.24)$$

Таким образом, начиная с момента  $t_2$ , имеющего смысл момента прохождения через точку  $x$  заднего фронта волны, вызванной начальным импульсом струны, точка  $x$  перестает колебаться и занимает положение, определяемое формулой (1.24). Физически это означает, что волна оставляет в струне след после своего прохождения.

Геометрическая интерпретация решения (1.22) представлена на рис. 1.3,б в случае, когда  $a = 1$ , а начальная функция  $\psi$  определяется формулой

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 1), \\ 0, & x \notin (-1, 1). \end{cases} \quad (1.25)$$

Для этого случая введенная выше функция  $\Psi$  имеет вид:

$$\Psi(x) = \begin{cases} -1/2, & x \in (-\infty, -1), \\ (1/2)x, & x \in [-1, 1], \\ 1/2, & x \in (1, +\infty). \end{cases} \quad (1.26)$$

Профиль  $\Psi(x)$  вместе со сдвинутым профилем  $\Psi(x + t)$  изображен на рис. 1.4, тогда как на рис. 1.3,б изображены в виде прерывистых линий профили функций  $\Psi(x + t)$  и  $\Psi(x - t)$  соответственно, а в виде сплошной линии – профили отклонения струны в те же моменты времени  $t_0, t_1, t_2$ ,

$t_3$  и  $t_4$ , что и на рис. 1.3,а. Видно, что начиная с момента  $t > t_2$  профиль отклонения струны имеет форму равнобедренной трапеции единичной высоты, которая равномерно расширяется в обе стороны с ростом времени.

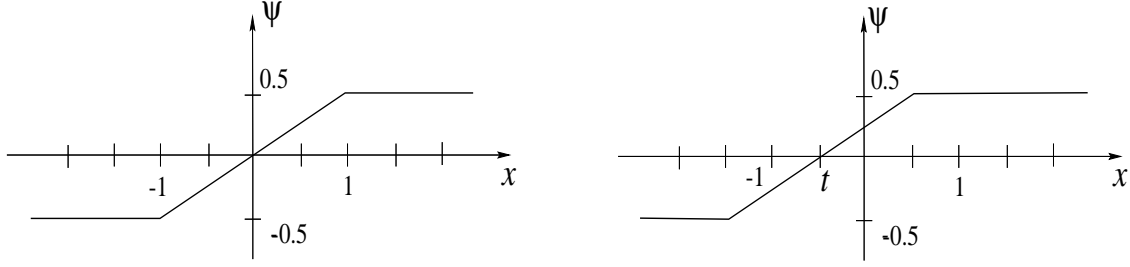


Рис. 1.4

Таким образом, действие ненулевого начального импульса  $\psi$ , определяемого формулой (1.25), приводит к сдвигу каждой точки струны в определенный момент  $t$ , зависящий от  $x$ , на единичное расстояние вверх. Опять отметим, что хотя в данном примере функция  $\psi$  даже не является непрерывной, приведенный выше анализ позволяет получить достаточно хорошее представление о физике протекания процесса в рассматриваемом случае. Из этого примера, в частности, следует, что принцип Гюйгенса (см. более подробно о нем в § 3.3) не выполняется в одномерном случае.

**3.1.3. Устойчивость решения задачи Коши к исходным данным. Обобщенное решение.** Как указывалось в гл. 2, одним из важнейших требований при постановке и исследовании задач математической физики является требование устойчивости решения к малым возмущениям исходных данных. Докажем, что для задачи Коши указанное свойство имеет место. Пусть  $Q_T = \mathbb{R} \times (0, T]$ , где  $0 < T < \infty$ .

**ТЕОРЕМА 1.2.** *(О непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных). Пусть  $u_1$  и  $u_2$  – решения задачи Коши (1.1), (1.10) из класса  $C^2(\mathbb{R}_+^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  с начальными условиями*

$$u_1|_{t=0} = \varphi_1(x), \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_1(x) \text{ и } u_2|_{t=0} = \varphi_2(x), \left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_2(x), x \in \mathbb{R}.$$

*Тогда для любых чисел  $\varepsilon > 0$  и  $T > 0$  существует такое число  $\delta = \delta(\varepsilon, T) > 0$ , что из неравенств  $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta$ ,  $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$   $\forall x \in \mathbb{R}$  следует неравенство*

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}_T \equiv \mathbb{R} \times [0, T].$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Записав решения  $u_1$  и  $u_2$  в виде (1.13) через исходные данные  $(\varphi_1, \psi_1)$  и  $(\varphi_2, \psi_2)$  соответственно и вычитая, имеем

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{1}{2} |\varphi_1(x - at) - \varphi_2(x - at)| +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} |\varphi_1(x + at) - \varphi_2(x + at)| + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)| d\xi < \\
& < \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \delta d\xi = \delta + \delta t \leq \delta(1 + T) \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}_T.
\end{aligned}$$

Полагая  $\delta = \varepsilon/(1 + T)$ , приходим к утверждению теоремы 1.2. Ее содержание кратко можно выразить так: *малым изменениям начальных данных задачи Коши (1.1), (1.10) отвечают малые изменения решения.* ■

В практических задачах начальные значения получаются в результате измерений и, следовательно, не являются точными. Из теоремы 1.2 вытекает важный для практики вывод о том, что малые погрешности в начальных данных приводят к малым изменениям в решении задачи Коши. Эта теорема указывает также на один из возможных путей построения решения задачи Коши в тех случаях, когда начальные функции  $\varphi$  и  $\psi$  не обладают достаточной гладкостью. Рассмотрим для определенности случай, когда начальные функции  $\varphi$  и  $\psi$  имеют конечные носители, причем

$$\varphi \in C^1(\mathbb{R}), \quad \psi \in C^0(\mathbb{R}). \quad (1.27)$$

Построим для указанных функций последовательности  $\{\varphi_n\} \in C^2(\mathbb{R})$  и  $\{\psi_n\} \in C^1(\mathbb{R})$ , равномерно сходящиеся соответственно к  $\varphi$  и  $\psi$ . Обозначим через  $u_n$  решение задачи Коши (1.1), (1.10), отвечающее паре  $(\varphi_n, \psi_n)$ .

Оценим разность  $u_{n+k} - u_n$ . В силу равномерной сходимости последовательностей  $\{\varphi_n\}$  и  $\{\psi_n\}$  для произвольных чисел  $\varepsilon > 0$  и  $T > 0$  найдется такое  $N$ , что для любых  $n > N$  и целых положительных  $k$

$$|\varphi_{n+k}(x) - \varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{1 + T}, \quad |\psi_{n+k}(x) - \psi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{1 + T} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Тогда в силу теоремы 1.2 выполняется неравенство

$$|u_{n+k}(x, t) - u_n(x, t)| < \varepsilon \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}_T, \quad n > N, \quad k = 1, 2, \dots$$

Оно означает, что последовательность  $\{u_n\}$  фундаментальна в пространстве ограниченных и непрерывных на замкнутом множестве  $\overline{Q}_T$  функций. Поскольку указанное пространство полно [32], то  $u_n$  равномерно сходится в  $\overline{Q}_T$  к некоторой непрерывной в  $\overline{Q}_T$  функции  $u$ , так что

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\varphi_n(x - at) + \varphi_n(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_n(\xi) d\xi \right\}.$$

Переходя в правой части этого соотношения к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , приходим к выводу, что введенная функция  $u$  определяется по заданным функциям  $\varphi$  и  $\psi$  с помощью формулы Даламбера (1.13). Из нее, в частности, вытекает, что функция  $u$  удовлетворяет обоим начальным условиям в

(1.10). Однако так построенная функция  $u$  уже не удовлетворяет, вообще говоря, уравнению (1.1). Последнее вытекает хотя бы из того, что в случае, когда функции  $\varphi$  и  $\psi$  удовлетворяют лишь условиям (1.27), производных второго порядка от “решения”  $u$ , определяемого формулой (1.13), в общем случае не существует. Поэтому бессмысленно требовать от “решения”  $u$  чтобы оно удовлетворяло уравнению (1.1) в каждой точке  $(x, t) \in \mathbb{R}_+^2$ . Тем не менее можно показать, что при выполнении лишь условий (1.27) и даже более “слабых” условий на гладкость  $\varphi$  и  $\psi$  функция (1.13) удовлетворяет уравнению (1.1) в некотором интегральном (так сказать, обобщенном) смысле. С учетом этого функцию  $u$ , определяемую формулой Даламбера (1.13) по функциям  $\varphi$  и  $\psi$ , удовлетворяющим условиям (1.27), можно назвать *обобщенным решением* задачи Коши (1.1), (1.10). Не имея возможности останавливаться более подробно на анализе свойств обобщенных решений, порекомендуем читателям книги [28, 32, 34], где детально освещаются свойства обобщенных решений, и книгу [11]. В ней излагается другой подход к введению обобщенных решений для уравнений в частных производных, основанный на фундаментальном понятии обобщенной функции.

**3.1.4. Задача Коши для неоднородного волнового уравнения.** Рассмотрим в этом пункте задачу Коши для неоднородного одномерного волнового уравнения. Она заключается в нахождении функции  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \quad \text{в } \mathbb{R}_+^2 \equiv \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{t,+} \quad (1.28)$$

и начальным условиям (1.10). Прежде всего отметим, что для нахождения решения общей неоднородной задачи (1.28), (1.10) достаточно найти решение уравнения (1.28) при нулевых начальных условиях

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}. \quad (1.29)$$

Действительно, добавляя к этому решению решение задачи (1.1), (1.10) для однородного уравнения (1.1), определяемое формулой (1.13), мы получим в силу линейности уравнения (1.28) искомое решение задачи (1.28), (1.10).

Многие задачи математической физики обладают тем свойством, что решение соответствующей задачи для неоднородного уравнения может быть выражено тем или иным образом через решение аналогичной задачи для соответствующего однородного уравнения. Это имеет место и в рассматриваемом случае. Действительно, рассмотрим функцию  $v(x, t, \tau)$  переменных  $x, t$  и параметра  $\tau$ , удовлетворяющую однородному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{в } \mathbb{R} \times (\tau, \infty) \quad (1.30)$$

и следующим начальным условиям при  $t = \tau$ :

$$v|_{t=\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=\tau} = f(x, \tau) \quad \text{в } \mathbb{R}. \quad (1.31)$$

Вводя вместо  $t$  новую временную переменную  $t_1 = t - \tau$ , замечаем, что функция

$$w(x, t_1, \tau) \equiv v(x, t_1 + \tau, \tau) \quad (1.32)$$

является решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{в } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad w|_{t_1=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t_1} \right|_{t_1=0} = f(x, \tau) \quad \text{в } \mathbb{R}.$$

В таком случае функция  $w$  может быть представлена с помощью формулы (1.13), принимающей в данном случае вид

$$w(x, t_1, \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-at_1}^{x+at_1} f(\xi, \tau) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t_1 < \infty. \quad (1.33)$$

Для справедливости этой формулы достаточно предположить согласно теореме 1.1, что  $f \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ ,  $\partial f / \partial x \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ . Возвращаясь к исходным переменным  $t$  и  $v$ , перепишем (1.33) в виде

$$v(x, t, \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau \leq t < \infty. \quad (1.34)$$

Покажем теперь, что функция  $u : \overline{\mathbb{R}_+^2} \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемая формулой

$$u(x, t) \equiv \int_0^t v(x, t, \tau) d\tau = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (1.35)$$

является искомым решением задачи (1.28), (1.29). В самом деле, дифференцируя (1.35) дважды по  $x$  и  $t$ , имеем с учетом условий (1.31), что

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 v(x, t, \tau)}{\partial x^2} d\tau, \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial v(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau + v(x, t, t) = \int_0^t \frac{\partial v(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau, \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 v(x, t, \tau)}{\partial t^2} d\tau + f(x, t). \quad (1.38)$$

Умножим (1.36) на  $a^2$  и вычтем из (1.38). Учитывая, что  $v$  удовлетворяет однородному уравнению (1.30), приходим к выводу, что указанная

функция  $u$  и является решением неоднородного уравнения (1.28). Из (1.35) и (1.37) следует, что  $u$  удовлетворяет однородным начальным условиям (1.29). Единственность решения  $u$  вытекает из единственности решения задачи (1.1), (1.10). Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 1.3.** Пусть  $f, \partial f / \partial x \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ . Тогда функция  $u$ , определяемая формулой (1.35), принадлежит классу  $C^2(\mathbb{R}_+^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  и является единственным решением задачи Коши (1.28), (1.29).

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.** Отметим, что интеграл в правой части (1.35) представляет собой повторный интеграл от функции  $f$  по характеристическому треугольнику  $K^-(x, t)$  с вершиной в точке  $(x, t)$ . Таким образом, решение задачи Коши (1.28), (1.29) в произвольной точке  $(x, t) \in \mathbb{R}_+^2$  зависит лишь от значений  $f(\xi, \tau)$  правой части  $f$  в точках  $(\xi, \tau)$ , изменяющихся внутри  $K^-(x, t)$ . Другими словами, характеристический треугольник  $K^-(x, t)$  имеет смысл области зависимости для решения  $u$  уравнения (1.28) в точке  $(x, t)$  от правой части  $f$ . Ниже в §§ 3.4 и 3.5 мы еще вернемся к формуле (1.35) при обсуждении вопросов об областях зависимости и влияния для гиперболических уравнений.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.5.** Решение общей неоднородной задачи (1.28), (1.10), очевидно, определяется формулой

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (1.39)$$

**3.1.5. Начально-краевая задача для однородного волнового уравнения на вещественной полуоси.** Рассмотрим в этом пункте начально-краевую задачу для уравнения (1.1) на полуоси  $x > 0$ . Эта задача имеет важное значение при изучении процессов отражения волн от границ и ставится следующим образом: *найти классическое решение  $u$  однородного волнового уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{в } Q = \mathbb{R}_{x,+} \times \mathbb{R}_{t,+} = (0, \infty) \times (0, \infty), \quad (1.40)$$

*удовлетворяющее начальным условиям*

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x < \infty \quad (1.41)$$

*и граничному условию Дирихле на левом конце  $x = 0$ , имеющему вид*

$$u|_{x=0} = g(t), \quad 0 < t < \infty. \quad (1.42)$$

Здесь  $\varphi, \psi$  и  $g$  – заданные функции своих аргументов.

Рассмотрим для простоты случай однородного условия Дирихле

$$u|_{x=0} = 0. \quad (1.43)$$

Задача (1.40), (1.41), (1.43) описывает распространение начального возмущения в полубесконечной струне с закрепленным левым концом  $x = 0$ . Приведем следующие две леммы о свойствах решений задачи (1.1), (1.10).

**ЛЕММА 1.3.** *Если в задаче Коши (1.1), (1.10) начальные функции  $\varphi$  и  $\psi$  являются нечетными функциями относительно некоторой точки  $x_0$ , то соответствующее решение в этой точке  $x_0$  равно нулю.*

**ЛЕММА 1.4.** *Если в задаче Коши (1.1), (1.10) начальные функции  $\varphi$  и  $\psi$  являются четными функциями относительно некоторой точки  $x_0$ , то производная по  $x$  соответствующего решения в этой точке равна нулю.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.3.** Выберем  $x_0$  за начало координат, т. е. положим  $x_0 = 0$ . Тогда условия нечетности начальных данных запишутся в виде

$$\varphi(x) = -\varphi(-x), \quad \psi(x) = -\psi(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.44)$$

С учетом (1.44) для решения  $u$  задачи (1.1), (1.10), определяемого формулой Даламбера (1.13), имеем при  $x = 0$ , что

$$u(0, t) \equiv \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\xi) d\xi = 0. \quad (1.45)$$

Действительно, первое слагаемое в (1.45) равно нулю в силу нечетности  $\varphi$ , тогда как второе равно нулю в силу свойства равенства нулю интеграла от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат.

Аналогично доказывается лемма 1.4. Условия четности начальных данных относительно точки  $x_0 = 0$  имеют вид  $\varphi(x) = \varphi(-x)$ ,  $\psi(x) = \psi(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Известно, что производная четной функции является нечетной функцией, так что  $\varphi'(x) = -\varphi'(-x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ . Дифференцируя (1.13) по  $x$  и рассуждая, как при выводе (1.45), имеем, что

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\varphi'(-at) + \varphi'(at)}{2} + \frac{1}{2a} [\psi(at) - \psi(-at)] = 0 \quad \forall t > 0.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.6.** Приведенное выше доказательство фактически опирается на формулу Даламбера и не связано с двукратной дифференцируемостью функции  $u$ . Это означает, что лемма 1.3 верна для любой непрерывной функции  $u$ , представимой формулой Даламбера (1.13), а лемма 1.4 верна для любой непрерывной функции того же вида, имеющей непрерывную производную  $\partial u / \partial x$ . Таким образом, леммы 1.3 и 1.4 фактически верны для обобщенных решений задачи Коши (1.1), (1.10).



Используя лемму 1.3, теперь несложно найти решение задачи (1.40), (1.41), (1.43). Отметим прежде, что для решения указанной задачи нельзя непосредственно воспользоваться формулой (1.13). Это связано с тем, что входящая в эту формулу разность  $x - at$  может быть и отрицательной (см. область  $Q_2$  на рис. 1.5), а для отрицательных значений аргумента начальные функции  $\varphi$  и  $\psi$  в (1.41) не определены. С учетом этого будем действовать по следующей схеме. Продолжим функции  $\varphi$  и  $\psi$  в (1.41) нечетным образом на отрицательную полуось ( $x < 0$ ) и обозначим через  $\Phi$  и  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  их продолжения:

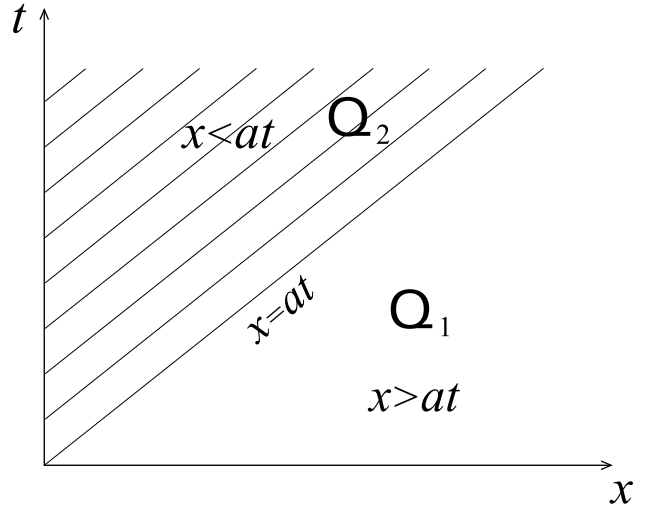


Рис. 1.5

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{для } x > 0, \\ -\varphi(-x) & \text{для } x < 0, \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{для } x > 0, \\ -\psi(-x) & \text{для } x < 0. \end{cases} \quad (1.46)$$

Предположим, что так построенные функции удовлетворяют (1.14), т. е.  $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ . Легко проверить, что эти условия выполняются, если выполняются следующие условия гладкости и согласования:

$$\varphi \in C^2[0, \infty), \varphi(0) = \varphi''(0) = 0; \quad \psi \in C^1[0, \infty), \psi(0) = 0. \quad (1.47)$$

Тогда решение  $U$  задачи Коши (1.1), (1.10), отвечающее паре  $(\Phi, \Psi)$ , можно представить в виде формулы Даламбера

$$U(x, t) = \frac{\Phi(x - at) + \Phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi. \quad (1.48)$$

Рассмотрим сужение  $u$  функции  $U$  в (1.48) на область  $\overline{Q}$ . По построению функция  $u$  удовлетворяет уравнению (1.1) и начальным условиям (1.41). Кроме того, в силу леммы 1.3 для нее выполняется краевое условие (1.43). Это означает, что так построенная функция  $u$  является искомым решением задачи (1.40), (1.41), (1.43), и нам остается лишь записать выражение для  $u$  через исходные начальные функции  $\varphi$  и  $\psi$ . Простой анализ с учетом (1.46)

показывает, что соответствующая формула для  $u$  имеет вид:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & (x, t) \in Q_1 = \{(x, t) \in Q : at < x\}, \\ \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & (x, t) \in Q_2 = \{(x, t) \in Q : at > x\}. \end{cases} \quad (1.49)$$

**ТЕОРЕМА 1.4.** Пусть выполняются условия (1.47). Тогда функция  $u$ , определяемая формулой (1.49), принадлежит пространству  $C^2(\overline{Q})$  и является регулярным решением задачи (1.40), (1.41), (1.43).

Точно так же, если при  $x = 0$  мы имеем однородное условие Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (1.50)$$

отвечающее свободному концу струны, то решение соответствующей задачи (1.40), (1.41), (1.50) строится по аналогичной схеме с тем лишь изменением, что начальные функции  $\varphi$  и  $\psi$  в (1.41) продолжаются на отрицательную полуось четным образом. Простой анализ показывает, что полученное таким путем решение  $u$  имеет вид:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & (x, t) \in Q_1, \\ \frac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \left[ \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \int_0^{at-x} \psi(\xi) d\xi \right], & (x, t) \in Q_2. \end{cases} \quad (1.51)$$

Анализ формулы (1.49) показывает, что в области  $Q_1$ , лежащей ниже характеристики  $x = at$ , решение  $u$  задачи (1.40), (1.41), (1.43) совпадает с решением Даламбера (1.13) задачи Коши (1.1), (1.10). Таким образом, в этой области отсутствует влияние граничного условия (1.43), а волновой процесс происходит так же, как и на всей оси  $\mathbb{R}$  в отсутствие границы  $x = 0$ . Наоборот, в области  $Q_2$ , лежащей выше характеристики  $x = at$ , решение  $u$  отличается от решения Даламбера (1.13). Физически это связано с появлением в  $Q_2$  наряду с “прямой” волной, описываемой решением Даламбера (1.13), отраженной волны, получаемой отражением прямой волны от конца  $x = 0$ . Сумма прямой и отраженной волн и дает искомое решение в области  $Q_2$ , стоящее в нижней части (1.49). Аналогичная ситуация справедлива и в отношении формулы (1.51). Более подробное обсуждение этих вопросов можно найти в [56, с. 68–78], где изложенная процедура продолжения начальных функций  $\varphi$  и  $\psi$  нечетным образом в случае условия Дирихле (1.43) и четным образом в случае условия Неймана (1.50) используется также при нахождении решения уравнения (1.1) на ограниченном

интервале  $(0, l)$ , на концах которого заданы граничные условия Дирихле либо Неймана. В [56] показано, что полученное с помощью процедуры продолжения начальных функций решение имеет вид суммы прямой волны (1.13) и бесконечной суммы отраженных волн, полученных последовательным отражением прямой волны от концов  $x = 0$  и  $x = l$ .

### § 3.2. Волновое уравнение и бегущие волны. Обзор физических понятий

Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{R}^3$  линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \Psi + F(\mathbf{x}, t). \quad (2.1)$$

Здесь  $\Delta$  – скалярный лапласиан,  $a^2 = \text{const} > 0$ ,  $F$  – заданная функция,  $\Psi$  – неизвестная функция, под которой будем понимать скалярный *потенциал* какого-либо физического поля. Решения уравнения (2.1) описывают волновые процессы, поэтому его называют (скалярным) *волновым уравнением*. При  $F = 0$  уравнение

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \Psi \quad (2.2)$$

называют *однородным* волновым уравнением.

Существует большое количество волн различной физической природы. Среди них особую роль играют *звуковые (акустические)* и *электромагнитные* волны, дающие человеку основную часть информации об окружающем мире. Главное свойство всех волновых процессов независимо от их природы состоит в том, что волны осуществляют *перенос энергии без переноса вещества* (последнее может иметь место лишь как побочный эффект). Другим важным свойством волновых процессов является *конечность* скорости распространения волн. Поэтому в случае, когда источники излучения волн *локализованы по пространству*, т. е. занимают ограниченную часть среды, в каждый момент времени существует поверхность, отделяющая точки, до которых волна еще не дошла, от точек, которые волна уже достигла. Указанную поверхность называют *волновой поверхностью* или *передним фронтом волны*. Если источники *локализованы* и по времени, то в отсутствие границ в пространстве  $\mathbb{R}^3$  существует и *задний фронт волны*. Он отделяет множество точек, через которые волна уже прошла, от множества точек, через которые волна еще проходит. Таким образом, в последнем случае имеет место процесс распространения волн с резко выраженными передним и задним фронтами. Указанное свойство распространения волн в пространстве  $\mathbb{R}^3$  впервые было сформулировано в 1678 году Х. Гюйгенсом

и носит название *принципа Гюйгенса*. Несколько другая ситуация наблюдается в  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{R}^2$  (см. об этом более подробно в § 3.1 и § 3.3).

**3.2.1. Бегущие волны.** С математической точки зрения под *волной* следует понимать частное решение волнового уравнения (2.1) либо (2.2), зависящее от пространственных переменных и времени. Поскольку существует бесчисленное множество таких решений, то можно привести достаточное количество примеров различного типа волн. Ниже мы ограничимся рассмотрением лишь трех типов: плоских, сферических и цилиндрических бегущих волн.

Обозначим через  $x, y, z$  декартовы координаты точки  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , через  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$  – произвольный вектор, имеющий размерность, обратную единице длины. Введем также величину  $\omega = a|\mathbf{k}|$ , имеющую размерность, обратную единице времени (напомним, что константа  $a$  в (2.2) имеет в соответствии с ее физическим смыслом размерность скорости). Безразмерные величины  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$ ,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t$  будем называть *фазами*. Легко проверить с помощью непосредственной подстановки, что любая гладкая функция вида

$$\Psi_1(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t), \quad \text{или} \quad \Psi_2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t), \quad (2.3)$$

зависящая от одной из фаз, является решением уравнения (2.2). Каждое такое решение называется *бегущей плоской неискажающейся волной*. Чтобы выяснить смысл этого названия, рассмотрим множество точек, на котором одна из фаз, скажем  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$ , принимает постоянное значение  $d$ :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = d. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) описывает плоскость в четырехмерном пространстве-времени  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$ , состоящем из точек с координатами  $(x, y, z, t)$ . В каждой точке этой плоскости решение  $\Psi_1$  принимает одно и то же значение, равное  $\Psi_1(d)$ . Разделив на  $|\mathbf{k}|$ , запишем теперь уравнение (2.4) в виде  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = at + c$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ ,  $c = d/|\mathbf{k}|$ . При фиксированном  $t$  это есть уравнение плоскости в обычном трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$ , причем вектор  $\mathbf{n}$  служит для этой плоскости вектором единичной нормали. С возрастанием  $t$  указанная плоскость движется в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с постоянной скоростью, равной  $a$ , параллельно самой себе в направлении вектора  $\mathbf{k}$ . Учитывая, что на этой движущейся (или бегущей) плоскости решение  $\Psi_1$  принимает постоянное значение  $\Psi_1(d)$ , описанный процесс можно трактовать как процесс переноса в пространстве  $\mathbb{R}^3$  возмущения  $\Psi_1(d)$ , возникшего в начальный момент времени  $t = t_0$  в каждой точке  $\mathbf{x}$ , лежащей на плоскости  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \omega t_0 + d$ . Поскольку возмущение  $\Psi_1(d)$  переносится плоскостью без изменения его величины и с постоянной скоростью  $a$ , то отсюда и идет название бегущей плоской неискажающейся волны. Вместо термина *неискажающаяся волна* используют также термин *недеформируемая* или *однородная* волна. Направление вектора  $\mathbf{k}$  называется *направлением волны*, а

сам вектор  $\mathbf{k}$  называют *волновым вектором*, постоянная  $a$  называется (*фазовой*) *скоростью* волны, функция  $\Psi_1$  носит название *формы* или *профиля волны*; наконец, сама бегущая плоскость, на которой фаза  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$ , как и решение  $\Psi_1$ , сохраняет постоянное значение, называется *фронтом* волны. Аналогичные рассуждения показывают, что функция  $\Psi_2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t)$  описывает плоскую неискажающуюся волну, бегущую без изменения формы со скоростью  $a$  в сторону, *противоположную* направлению вектора  $\mathbf{k}$ .

Следует отметить, что с помощью поворота системы координат ось  $x$  можно расположить перпендикулярно фронту волны. Тогда уравнения фронтов волны и решений (2.3) принимают вид:

$$kx - \omega t = d, \quad kx + \omega t = d \quad \text{и} \quad \Psi_1(kx - \omega t), \quad \Psi_2(kx + \omega t). \quad (2.5)$$

Здесь постоянная  $k = \omega/a$ , называемая *волновым числом*, является скалярным аналогом волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Функция  $\Psi_1(kx - \omega t)$  (либо  $\Psi_2(kx + \omega t)$ ) описывает плоскую волну, бегущую в положительном (либо отрицательном) направлении оси  $x$ , и называется *прямой* (либо *обратной*) *плоской волной*. Важно отметить при этом, что каждая из функций в (2.5) является решением как трехмерного однородного волнового уравнения (2.2), так и одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad (2.6)$$

описывающего, например, свободные колебания струны. Таким образом, процессы распространения бегущей плоской волны и колебаний струны описываются одним и тем же одномерным волновым уравнением (2.6). Указанный факт не случаен, а является проявлением общей закономерности, заключающейся в том, что многие различные по своей природе волновые процессы описываются одним и тем же волновым уравнением. Наконец, переписав выражения  $\Psi_1(kx - \omega t)$  и  $\Psi_2(kx + \omega t)$  в виде  $\Psi_1(kx - \omega t) = \Psi_1[k(x - at)] \equiv \theta_1(x - at)$ ,  $\Psi_2(kx + \omega t) \equiv \theta_2(x + at)$ , заключаем, что линейная комбинация

$$\Psi_1(kx - \omega t) + \Psi_2(kx + \omega t) \equiv \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at) \quad (2.7)$$

имеет смысл общего решения уравнения (2.6). Последнее вытекает из результатов § 3.1, где показано, что путем подходящего выбора функций  $\theta_1$  и  $\theta_2$  либо, что то же, функций  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  в (2.7) можно получить любое частное решение уравнения (2.6), удовлетворяющее заданным начальным условиям. Этот факт означает, что на прямой  $\mathbb{R}$  любое решение уравнения (2.6) имеет физический смысл одной из двух бегущих плоских волн либо их линейной комбинации.

В пространствах бóльшего числа измерений существуют и другие типы волн, в том числе и бегущих. В качестве важного примера указанных волн

отметим бегущую сферическую волну, которая является частным решением уравнения (2.2), зависящим от радиальной сферической переменной  $r$  и разности  $kr - \omega t$ , либо суммы  $kr + \omega t$ . Для построения указанной волны введем в  $\mathbb{R}^3$  сферические координаты  $r, \theta, \varphi$  и, используя представление оператора Лапласа в сферических координатах (см. § 1.3), запишем уравнение (2.2) в виде

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = a^2 \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right].$$

В предположении, что  $\Psi$  не зависит от  $\theta$  и  $\varphi$ , это уравнение после умножения на  $r$  можно записать аналогично (2.6) в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\Psi) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi). \quad (2.8)$$

(2.8) означает, что функция  $u = r\Psi$  в точности удовлетворяет одномерному волновому уравнению вида (1.1) при  $x = r > 0$ . Из результатов § 3.1 тогда вытекает, что решениями уравнения (2.8) являются функции:

$$\frac{1}{r}\Psi_1(kr - \omega t), \quad \frac{1}{r}\Psi_2(kr + \omega t), \quad k = \frac{\omega}{a}, \quad r > 0, \quad (2.9)$$

где  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  – произвольные гладкие функции своих аргументов. Поскольку фаза  $kr - \omega t$  (либо  $kr + \omega t$ ) сохраняется на любой сфере, бегущей от точки  $r = 0$  (либо к точке  $r = 0$ ) с постоянной скоростью  $a$ , то каждая из функций в (2.9) называется *бегущей сферической волной с центром* в точке  $r = 0$ , а сама бегущая сфера – ее *фронтом*. При этом первая функция в (2.9) носит название *расходящейся (распространяющейся либо уходящей) сферической волны*. Эта волна отличается от соответствующей плоской волны тем, что ее амплитуда убывает как  $1/r$  по мере удаления от центра, хотя и постоянна во всех точках фронта. Вторая функция в (2.9) называется *сходящейся (либо приходящей) сферической волной*. Она отличается от плоской волны тем, что ее амплитуда растет как  $1/r$  при приближении волны к центру.

Сопоставляя бегущие плоские и сферические волны, можно сделать вывод, что указанные волны характеризуются следующими двумя общими свойствами:

1) обе волны зависят от времени и одной пространственной переменной, при этом фаза каждой волны сохраняется на ее фронтах, т. е. на бегущих с постоянной скоростью  $a$  параллельных плоскостях для плоских волн и концентрических сферах для сферических волн;

2) величина

$$\int_S \Psi_i^2 d\sigma, \quad i = 1, 2,$$

имеющая физический смысл энергии волны, переносимой любым ее фронтом  $S$ , остается постоянной с течением времени (бесконечной для плоской волны и конечной для сферической волны).

Аналогичными свойствами обладают другие бегущие волны в  $\mathbb{R}^3$ : цилиндрические, сфероидальные и т. д. В частности, бегущей *цилиндрической расходящейся* от оси  $\rho = 0$  (либо *сходящейся* к оси  $\rho = 0$ ) волной называется функция от радиальной цилиндрической координаты  $\rho$  и разности  $k\rho - \omega t$  (либо суммы  $k\rho + \omega t$ ), определяемая формулой

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}}\Psi_1(k\rho - \omega t) \quad (\text{либо } \frac{1}{\sqrt{\rho}}\Psi_2(k\rho + \omega t)), \quad k = \frac{\omega}{a}. \quad (2.10)$$

Здесь  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  – гладкие функции своих аргументов. Следует однако отметить, что функции  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  в (2.10) не удовлетворяют уравнению (2.2). В этом легко убедиться, если подставить функцию  $\Psi_1$  (либо  $\Psi_2$ ) в уравнение (2.2), записанное с учетом представления оператора Лапласа в цилиндрических координатах  $\rho, \varphi, z$  (см. § 1.3) и независимости  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  от  $\varphi$  и  $z$  в виде

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right). \quad (2.11)$$

Однако если, считая  $\rho$  достаточно большим, прибавить к правой части (2.11) “малое слагаемое”  $-\Psi/4\rho^2$  и умножить полученное уравнение на  $\sqrt{\rho}$ , то получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 (\sqrt{\rho}\Psi)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\sqrt{\rho}\Psi). \quad (2.12)$$

Из результатов § 3.1 теперь легко следует, что обе функции в (2.10) являются решениями уравнения (2.12) при  $\rho > 0$ . Это означает, что уравнение (2.2) описывает цилиндрические волны на больших расстояниях от оси  $\rho = 0$  или, как говорят, *асимптотически* при  $\rho \rightarrow \infty$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.** Наряду со сферическими (либо цилиндрическими) волнами с центром в точке  $r = 0$  (либо осью  $\rho = 0$ ) можно рассматривать сферические (либо цилиндрические) волны с центром в произвольной точке  $\mathbf{y}$  (с осью, проходящей через точку  $\mathbf{y}$  параллельно оси  $z$ ). Указанные волны описываются функциями:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Psi(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \mp \omega t), \quad \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_{(2)}}} \Psi(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_{(2)} \mp \omega t),$$

где  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_{(2)}$  обозначает “двумерное” расстояние между точками  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ , т. е. расстояние между проекциями точек  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  на плоскость  $z = 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.** Аналогично плоским волнам (2.3), которые являются решениями уравнения (2.2) как в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , так и на прямой  $\mathbb{R}$ , цилиндрические волны (2.10) можно считать решениями уравнения (2.2) не

только в  $\mathbb{R}^3$ , что естественно с физической точки зрения, но и на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , где введены полярные координаты  $\rho, \varphi$ . При последней интерпретации фаза  $k\rho \mp \omega t$  решений (2.10) остается постоянной на бегущих со скоростью  $a$  концентрических окружностях с центром в точке  $\rho = 0$ . Поэтому для функций (2.10), рассматриваемых в  $\mathbb{R}^2$ , вместо термина *цилиндрическая волна с осью  $\rho = 0$*  иногда используют термин *сферическая волна на плоскости с центром* в точке  $\rho = 0$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Кроме бегущих волн существуют другие типы волн: *стоячие, нормальные, поверхностные* и т.д. Об этих волнах можно прочитать, например, в [3, 21].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Уравнение (2.1) является простейшей *математической моделью*, описывающей процессы излучения и распространения волн. Указанная модель не учитывает многие эффекты, происходящие при распространении волн в реальных средах: неоднородность и анизотропность среды, затухание волн, вызываемое действием сил вязкости и теплопроводности, фазовые переходы, нелинейные эффекты и т.д. Тем не менее она отражает основные черты, присущие многим волновым процессам. В частности, она описывает излучение и распространение звуковых волн малой амплитуды в однородной изотропной жидкой или газообразной среде без учета эффектов вязкости и теплопроводности (см. § 1.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Если функция  $\Psi$  является векторной, то уравнение (2.1) называется *векторным волновым уравнением*. Уравнение такого типа возникает, например, при описании электромагнитных полей (см. § 1.7).

Приведенные выше примеры решений волнового уравнения наглядно показывают, что одного уравнения (2.1) недостаточно для описания конкретного волнового процесса, поскольку уравнение (2.1) имеет бесчисленное множество решений. Поэтому необходимо вводить дополнительные условия, характеризующие волновой процесс. Такими условиями обычно являются *начальные условия*

$$\Psi|_{t=t_0} = \Psi_0(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \Psi_1(\mathbf{x}), \quad (2.13)$$

относящиеся к моменту времени  $t_0$ , с которого начинается процесс, и *граничные (краевые) условия*, т.е. условия, заданные на границе  $S$  области  $D$ , где изучается волновой процесс, если, конечно,  $D \neq \mathbb{R}^3$ . Указанные условия в общем случае можно записать в виде:

$$a(\mathbf{x}, t)\Psi + b(\mathbf{x}, t)\frac{\partial \Psi}{\partial n} = g(\mathbf{x}, t) \quad \text{на } S. \quad (2.14)$$

Здесь  $\Psi_0$ ,  $\Psi_1$ ,  $a$ ,  $b$  и  $g$  – заданные функции своих аргументов. Задача (2.1), (2.13), (2.14) называется *начально-краевой задачей* для уравнения (2.1). В случае, если  $D = \mathbb{R}^3$ , так что волновой процесс рассматривается во всем



пространстве  $\mathbb{R}^3$ , краевые условия (2.14), естественно, отсутствуют, а задача (2.1), (2.13) называется *задачей Коши* для уравнения (2.1).

**3.2.2. Гармонические волны. Уравнение Гельмгольца.** Важным классом решений уравнения (2.1) являются *гармонические* волны, т.е. волны с гармонической зависимостью от времени. Для таких волн объемную плотность  $F$  и потенциал  $\Psi$  можно представить в виде:

$$F(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad \Psi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad (2.15)$$

где  $\omega$  – *круговая частота* рассматриваемого гармонического процесса,  $f(\mathbf{x})$  и  $\Phi(\mathbf{x})$  – комплексные (в общем случае) *амплитуды* полей  $F$  и  $\Psi$ . Подставляя (2.15) в (2.1), приходим к следующему уравнению для функции  $\Phi$ :

$$L\Phi \equiv \Delta\Phi + k^2\Phi = -f(\mathbf{x}), \quad (2.16)$$

где  $k = \omega/a$ . Левая часть в (2.16) представляет собой оператор Гельмгольца, поэтому уравнение (2.16) называют *уравнением Гельмгольца*.

В одномерном случае уравнение (2.16) принимает вид  $\Phi'' + k^2\Phi = -f(x)$ , или

$$\Phi'' + k^2\Phi = 0 \quad (2.17)$$

при  $f = 0$ . Общее решение уравнения (2.17) можно записать в виде

$$\Phi(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные. Отсюда и (2.15) следует, что все гармонические волны для одномерного волнового уравнения (2.16) описываются формулами:

$$\Psi_1(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}, \quad \Psi_2(x, t) = e^{-i(kx + \omega t)}. \quad (2.18)$$

Каждая из волн в (2.18) характеризуется круговой частотой  $\omega$ , которая является параметром волны, изменяющимся в диапазоне  $0 < \omega < \infty$ , а также волновым числом  $k$ , циклической частотой  $f$ , длиной волны  $\lambda$  и периодом  $T$ . Последние определяются по  $\omega$  соотношениями:

$$k = \frac{\omega}{a}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \lambda = \frac{a}{f} = \frac{2\pi a}{\omega} = \frac{2\pi}{k}, \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{a}. \quad (2.19)$$

Функции (2.18) играют важную роль при исследовании волновых процессов. Это связано с тем, что произвольную функцию  $u$  двух переменных  $x$  и  $t$  можно представить с помощью ее разложения в интеграл или ряд Фурье в виде суперпозиции гармонических волн вида (2.18).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.6.** Следует отметить, что использование представления (2.15) приводит к необходимости оперирования с комплекснозначными, вообще говоря, функциями  $\Phi$ ,  $f$  и т.д. В то же время физические процессы

описываются, как правило, вещественнозначными функциями. Ввиду этого под искомыми физическими величинами следует понимать не сами выражения в (2.15), а их вещественные или мнимые части. Другими словами, решив уравнение (2.16) либо (2.17), за искомое решение, имеющее физический смысл, следует брать не саму функцию  $\Phi$ , а ее вещественную (или мнимую) часть.

**3.2.3. Волны с дисперсией.** Мы уже видели, что уравнение колебаний струны (2.6) допускает решения в виде бегущих волн  $\theta(x \pm at)$  произвольной формы  $\theta$ . К сожалению, этот замечательный факт уже не справедлив для более общих уравнений гиперболического типа, описывающих волновые процессы.

Рассмотрим общее уравнение гиперболического типа второго порядка с постоянными коэффициентами  $a, b_1, b_2$  и  $\bar{c}$ :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial v}{\partial t} + b_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{c}v = 0. \quad (2.20)$$

С помощью подстановки  $v = ue^{\lambda x + \mu t}$ ,  $\mu = -0.5b_1$ ,  $\lambda = -0.5b_2/a^2$  оно сводится к следующему уравнению для функции  $u$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu = 0. \quad (2.21)$$

Здесь  $c = \bar{c} + (b_1/2)^2 - (b_2/2a)^2$ . Легко видеть, что при  $c \neq 0$  уравнение (2.21), в отличие от (2.6), не допускает решений в виде произвольной бегущей волны. В самом деле, подставляя в (2.21), например, выражение  $\theta(x - at)$ , находим:  $a^2\theta'' - a^2\theta'' + c\theta = 0$ . Отсюда следует в силу произвольности  $\theta$ , что  $c = 0$ .

Произвольная функция  $u$  переменных  $x$  и  $t$ , являющаяся, например, решением уравнения (2.21), может быть с помощью разложения в интеграл Фурье представлена в виде суперпозиции гармонических волн вида (2.18). Скорость  $v$ , с которой фаза  $kx - \omega t$  либо  $kx + \omega t$  волн в (2.18) перемещается в пространстве, называется *фазовой скоростью* волны. Очевидно, что  $v = \omega/k$ . Если фазовая скорость гармонической волны зависит от частоты, то говорят, что волновой процесс сопровождается *дисперсией*. При наличии дисперсии различные гармонические составляющие волны распространяются с разными скоростями и, следовательно, смещаются друг относительно друга. Это приводит к искажению с течением времени профиля рассматриваемой волны.

Простой анализ показывает, что в рассматриваемом волновом процессе дисперсия присутствует тогда и только тогда, когда соответствующее волновое уравнение не допускает решений в виде бегущих волн произвольной формы. Отсюда, в частности, следует, что дисперсия имеет место для

уравнения (2.21) при  $c \neq 0$ . Указанный факт можно показать и аналитически. Для этого подставим в (2.21) любую из функций в (2.18). В результате получим следующее уравнение, связывающее  $\omega$  и  $k$ :

$$\omega^2 - a^2 k^2 + c = 0. \quad (2.22)$$

Уравнение (2.22) называется *дисперсионным уравнением*, отвечающим уравнению (2.21). По построению каждая из функций в (2.18) является решением уравнения (2.21) тогда и только тогда, когда параметры  $\omega$  и  $k$  связаны дисперсионным уравнением (2.22). Из (2.22) следует, что фазовая скорость  $v$  определяется формулой  $v \equiv \omega/k = \omega a / \sqrt{\omega^2 + c}$ . Отсюда видно, что при  $c \neq 0$  фазовая скорость  $v$  зависит от частоты. Наоборот, при выполнении условия  $c = 0$ , т.е. в случае, когда (2.21) принимает вид уравнения колебаний струны, фазовая скорость  $v$  равна  $a$ , т.е. не зависит от частоты. Следовательно, при  $c = 0$  дисперсия отсутствует. С учетом этого условие  $c = 0$  имеет смысл условия отсутствия дисперсии (или искажения) волны.

В качестве примера рассмотрим телеграфное уравнение (см. §1.8):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial v}{\partial t} + GRv. \quad (2.23)$$

Здесь  $R, L, C$  и  $G$  - коэффициенты сопротивления, самоиндукции, емкости и утечки, рассчитанные на единицу длины линии. Полагая  $v = ue^{-\mu t}$ , где  $\mu = 0.5(RC + GL)/CL$ , приходим к следующему уравнению для новой функции  $u$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu, \quad (2.24)$$

где  $a = \sqrt{1/LC}$ ,  $c = (RC - GL)^2/4LC$ . Из приведенного анализа вытекает, что при  $c \neq 0$ , т.е. при  $RC \neq GL$ , имеет место дисперсия, так что сигнал по электрической линии распространяется с искажением. С учетом этого условие

$$RC = GL \quad \text{или} \quad \frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad (2.25)$$

естественно назвать условием отсутствия искажения сигналов в телеграфной линии. При выполнении условия (2.25) функция  $u \equiv ve^{+\mu t}$  удовлетворяет уравнению колебаний струны и, следовательно, может быть представлена в виде суммы бегущих плоских волн. Вернувшись к исходному телеграфному уравнению (2.23), приходим к выводу, что при выполнении условия (2.25) телеграфное уравнение допускает решения в виде *затухающих* бегущих плоских волн:

$$v_1(x, t) = e^{-\gamma t} \theta_1(x - at), v_2(x, t) = e^{-\gamma t} \theta_2(x + at), \gamma = \frac{R}{L} = \frac{G}{C}, a = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

где  $\theta_1, \theta_2$  - произвольные функции. Отсутствие искажения волн при их распространении по электрической линии, которое выполняется при соблюдении условия (2.25), имеет особо важное значение для телефонной и телеграфной связи на больших расстояниях.

### § 3.3. Однородное волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$

**3.3.1. Трехмерное волновое уравнение. Решение задачи Коши. Формула Кирхгофа.** Рассмотрим задачу Коши для трехмерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}_+^4 \equiv \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \quad (3.1)$$

закрывающуюся в нахождении классического решения уравнения (3.1), удовлетворяющего начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (3.2)$$

Будем предполагать ниже, что

$$\varphi_0 \in C^3(\mathbb{R}^3), \quad \varphi_1 \in C^2(\mathbb{R}^3). \quad (3.3)$$

Пусть  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  - произвольная точка. Обозначим через  $B_{at}(\mathbf{x})$  (либо  $S_{at}(\mathbf{x})$ ) шар (либо сферу) радиуса  $r = at$  с центром в точке  $\mathbf{x}$ , через  $\mathbf{y} = (\xi, \eta, \zeta)$  обозначим переменную точку сферы  $S_{at}(\mathbf{x})$  (см. рис.3.1). Покажем сначала, что для произвольной функции  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$  поверхност-

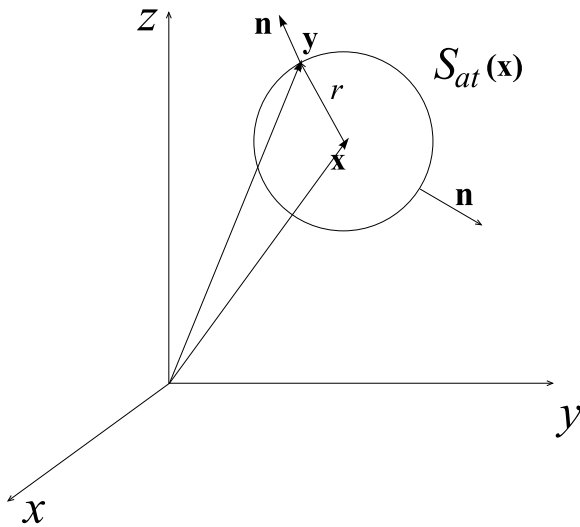


Рис.3.1

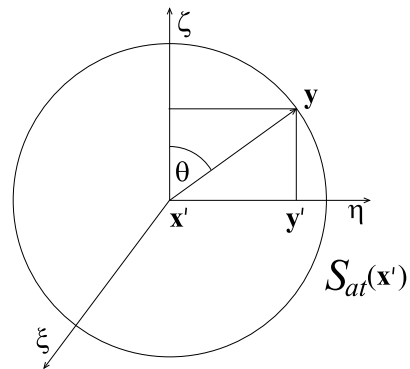


Рис.3.2

ный интеграл, зависящий от параметров  $\mathbf{x}$  и  $t$ , определяемый формулой

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi a} \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \frac{\varphi(\mathbf{y})}{r} d\sigma_r = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \varphi(\xi, \eta, \zeta) d\sigma_r, \quad \mathbf{y} = (\xi, \eta, \zeta), \quad (3.4)$$

где  $r = at$ ,  $d\sigma_r$  – элемент площади сферы  $S_{at}(\mathbf{x})$ , является решением волнового уравнения (3.1).

Представим произвольную точку  $\mathbf{y} \in S_{at}(\mathbf{x})$  в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + at\mathbf{n}(\mathbf{y}) \text{ или } \xi = x + \alpha at, \quad \eta = y + \beta at, \\ \zeta = z + \gamma at, \quad \mathbf{n}(\mathbf{y}) = (\alpha(\mathbf{y}), \beta(\mathbf{y}), \gamma(\mathbf{y})). \quad (3.5)$$

Здесь  $\mathbf{n}(\mathbf{y})$  – единичный вектор внешней нормали к сфере  $S_{at}(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{y}$ , направляющие косинусы  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  которого определяются формулами  $\alpha = \cos\psi\sin\theta$ ,  $\beta = \sin\psi\sin\theta$ ,  $\gamma = \cos\theta$ , где  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\psi \in [0, 2\pi]$  – угловые координаты точки  $\mathbf{y}$  в сферической системе координат с центром в точке  $\mathbf{x}$ . Когда точка (точнее, конец радиус-вектора)  $\mathbf{y}$  пробегает сферу  $S_{at}(\mathbf{x})$ , соответствующий вектор нормали  $\mathbf{n}(\mathbf{y})$  (точнее, точка  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ) пробегает единичную сферу  $S_1 = S_1(0)$  с центром в начале координат, причем между элементами площадей  $d\sigma_r$  сферы  $S_r$  и  $d\sigma_1$  сферы  $S_1$  выполняется соотношение  $d\sigma_r = r^2 d\sigma_1$ , где  $d\sigma_1 = \sin\theta d\theta d\psi$ . С учетом этого делая в интеграле (3.4) замену

$$S_{at} \equiv S_r \ni \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{n}(\mathbf{y}) = (\alpha, \beta, \gamma) \in S_1, \quad d\sigma_r = r^2 d\sigma_1 \equiv (at)^2 d\sigma_1, \quad (3.6)$$

преобразуем его к интегралу по единичной сфере  $S_1$ . Получим:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(\mathbf{y}) d\sigma_1 \equiv \frac{t}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(x + \alpha at, y + \beta at, z + \gamma at) d\sigma_1. \quad (3.7)$$

Из (3.7) вытекает, что  $u \in C^l(\mathbb{R}^4)$ , если  $\varphi \in C^l(\mathbb{R}^3)$ ,  $l = 1, 2, 3, \dots$ .

Дифференцируя дважды (3.7) под знаком интеграла, имеем

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S_1} \left[ \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{y})}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{y})}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{y})}{\partial \zeta^2} \right] d\sigma_1 \equiv \frac{t}{4\pi} \int_{S_1} \Delta \varphi(\mathbf{y}) d\sigma_1, \quad (3.8)$$

где  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + at\mathbf{n}$ . Делая в (3.8) замену, обратную к (3.6), перепишем (3.8) в виде

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \Delta \varphi(\mathbf{y})|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}+at\mathbf{n}} d\sigma_r, \quad \mathbf{y} = (\xi, \eta, \zeta) \in S_{at}(\mathbf{x}). \quad (3.9)$$

Дифференцируя далее (3.7) по  $t$ , получим

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(\mathbf{y}) d\sigma_1 + \frac{at}{4\pi} \int_{S_1} \left[ \alpha \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial \zeta} \right] d\sigma_1, \quad (3.10)$$

где  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + at\mathbf{n}$ . Учитывая (3.7) и делая во втором интеграле обратную к (3.6) замену, перепишем (3.10) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{u(\mathbf{x}, t)}{t} + \frac{1}{4\pi at} \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \left[ \alpha \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial \zeta} \right] d\sigma_r = \\ &= \frac{u(\mathbf{x}, t)}{t} + \frac{1}{4\pi at} \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \text{grad} \varphi(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) d\sigma_r.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Применяя формулу Гаусса–Остроградского вида

$$\begin{aligned}\int_{S_{at}(\mathbf{x})} \text{grad} \varphi(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) d\sigma_r &= \int_{B_{at}(\mathbf{x})} \text{div} [\text{grad} \varphi(\mathbf{y})] d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \int_{B_{at}(\mathbf{x})} \Delta \varphi(\mathbf{y}) d\xi d\eta d\zeta \equiv I(\mathbf{x}, t),\end{aligned}\quad (3.12)$$

где точка  $\mathbf{y}$  во втором и третьем интегралах пробегает весь шар  $B_{at}(\mathbf{x})$ , перепишем (3.11) в виде

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{u(\mathbf{x}, t)}{t} + \frac{I(\mathbf{x}, t)}{4\pi at}.\quad (3.13)$$

Дифференцируя это выражение по  $t$ , получим

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t} \left( \frac{u}{t} + \frac{I}{4\pi at} \right) - \frac{I}{4\pi at^2} + \frac{1}{4\pi at} \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{4\pi at} \frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t}.\quad (3.14)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = a \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \Delta \varphi(\mathbf{y})|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}+at\mathbf{n}} d\sigma_r.\quad (3.15)$$

В самом деле, переходя в интеграле  $I$  по шару  $B_{at}(\mathbf{x})$  к сферическим координатам  $(\rho, \theta, \psi)$  с центром в  $\mathbf{x}$ , полагая  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \rho\mathbf{n}$ , где  $0 \leq \rho < at$ , имеем

$$I(\mathbf{x}, t) = \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta \varphi(\mathbf{y}) \rho^2 \sin \theta d\theta d\psi d\rho, \quad \mathbf{y} = \mathbf{x} + \rho\mathbf{n} \in B_{at}(\mathbf{x}).$$

Дифференцируя по времени  $t$ , входящему в переменный верхний предел внешнего интеграла, и переходя последовательно к интегралам по единичной сфере  $S_1$  и сфере  $S_{at}(\mathbf{x})$ , получаем соотношение

$$\frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta \varphi(\mathbf{y}) a^2 t^2 \sin \theta d\theta d\psi = a^3 t^2 \int_{S_1} \Delta \varphi(\mathbf{y}) d\sigma_1 = a \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \Delta \varphi d\sigma_r,$$

где  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + at\mathbf{n}$ . Тем самым (3.15) доказано. Из (3.14) и (3.15) вытекает, в свою очередь, что

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \frac{a}{4\pi} \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \left. \frac{\Delta \varphi(\mathbf{y})}{r} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}+at\mathbf{n}} d\sigma_r. \quad (3.16)$$

Подставляя (3.9) и (3.16) в (3.1), приходим к выводу, что функция  $u$ , определяемая формулой (3.4), удовлетворяет волновому уравнению (3.1) для любой функции  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ . Из (3.7) и (3.10), кроме того, следует, что функция  $u$  удовлетворяет начальным условиям

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}) \text{ в } \mathbb{R}^3. \quad (3.17)$$

Если, далее,  $u$  есть решение уравнения (3.1) с начальными данными (3.17), то в силу однородности (3.1) функция  $v = \partial u / \partial t$  также является решением уравнения (3.1), но удовлетворяет с учетом (3.8) начальным условиям

$$v|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{t=0} = a^2 \Delta u|_{t=0} = 0 \text{ в } \mathbb{R}^3. \quad (3.18)$$

Взяв теперь за  $\varphi$  в случае начальных условий (3.17) функцию  $\varphi_1$ , а в случае начальных условий (3.18) – функцию  $\varphi_0$  и сложив соответствующие решения, получим искомое решение уравнения (3.1), удовлетворяющее начальным условиям (3.2). Согласно построению оно определяется формулой

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi a} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \frac{\varphi_0(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma_r + \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \frac{\varphi_1(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma_r \right]. \quad (3.19)$$

Формула (3.19) называется *формулой Кирхгофа* в честь известного немецкого физика G.R. Kirchhoff (1824–1887). Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 3.1.** *Пусть выполняются условия (3.3). Тогда классическое решение  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^4) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^4})$  задачи Коши (3.1), (3.2) существует и определяется формулой Кирхгофа (3.19).*

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.** В основе доказательства теоремы 3.1 лежит тот факт, что функция (3.4) является решением однородного волнового уравнения (3.1) для любой гладкой функции  $\varphi$ . Альтернативный метод доказательства теоремы 3.1, называемый *методом сферических средних*, основан на использовании свойств так называемых *сферических средних* от решения  $u$ , определяемых формулой

$$u(r, \mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(\mathbf{x})} u d\sigma_r.$$

Здесь  $S_r(\mathbf{x})$  – сфера с центром в точке  $\mathbf{x}$  радиуса  $r$ . Более подробно об этом методе можно прочитать в [6, с.66], [56, с.429].

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.** Простой анализ формулы (3.19) показывает, что при выполнении условий (3.3) вторые производные от решения  $u$ , входящие в (3.1), существуют и непрерывны в замкнутом полупространстве  $\overline{\mathbb{R}_+^4} = \{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, 0 \leq t < \infty\}$ . Поэтому при выполнении (3.3) формула Кирхгофа описывает (с учетом терминологии замечания 1.3) *регулярное решение* задачи Коши (3.1), (3.2). Наоборот, если вместо (3.3) выполняются более общие условия, а именно:

$$\varphi_0 \in C^2(\mathbb{R}^3), \quad \varphi_1 \in C^1(\mathbb{R}^3), \quad (3.20)$$

то функция  $u$ , определяемая по  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  формулой (3.19), по-прежнему удовлетворяет начальным условиям (3.2), но уже не удовлетворяет уравнению (3.1). (Последнее объясняется тем, что при выполнении (3.20) правая часть в (3.19) не обладает вторыми производными, входящими в (3.1)). Однако можно показать (см. [11, §13]), что при выполнении условий вида (3.20) и даже гораздо более общих условий на  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  функция (3.19) является решением уравнения (3.1) в некотором обобщенном смысле. С учетом этого можно считать, что формула (3.19) описывает регулярное решение при выполнении условий (3.3) и обобщенное решение, если выполняются более общие условия, например (3.20).

**3.3.2. Волновое уравнение в  $\mathbb{R}^2$ . Решение задачи Коши для волнового уравнения методом спуска. Формула Пуассона.** Предположим, что функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  в (3.2) не зависят от  $z$ . Тогда решение задачи (3.1), (3.2), определяемое формулой (3.19), также не будет зависеть от  $z$ . В этом легко убедиться, записав интегралы в (3.19) в сферических координатах. Это означает, что формула Кирхгофа (3.19) при  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' \equiv (x, y, 0)$  будет давать решение двумерной задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \text{ в } \mathbb{R}_+^3 = \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \quad (3.21)$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x, y) \text{ в } \mathbb{R}^2. \quad (3.22)$$

Формулу (3.19) не совсем удобно использовать для решения двумерной задачи (3.21), (3.22), поскольку (3.19) носит пространственный характер за счет наличия сфер  $S_{at}(\mathbf{x})$ . Однако в силу независимости  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  от  $z$  ее можно преобразовать в чисто “плоскую” формулу. Действительно, поскольку правая часть в (3.19) не зависит от  $z$ , то центр  $\mathbf{x}$  сферы  $S_{at}(\mathbf{x})$  можно взять в точке  $\mathbf{x}' = (x, y, 0)$ , лежащей на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . В таком случае обе части этой сферы, лежащие над и под плоскостью  $\mathbb{R}^2$ , можно спроектировать на эту плоскость в виде круга  $\Sigma_{at} = \Sigma_{at}(\mathbf{x}')$  с центром в точке  $\mathbf{x}'$



радиуса  $at$  и заменить интегрирование по сфере  $S_{at}(\mathbf{x}')$  интегрированием по кругу  $\Sigma_{at}(\mathbf{x}')$ .

Пусть  $\mathbf{y} = (\xi, \eta, \zeta)$  – переменная точка сферы  $S_{at}(\mathbf{x}')$ ,  $\mathbf{y}' = (\xi, \eta, 0)$  – проекция точки  $\mathbf{y}$  на плоскость  $\mathbb{R}^2$ . Элемент  $d\sigma_r$  площади поверхности сферы  $S_{at}(\mathbf{x}')$  с центром в  $\mathbf{y}$  и отвечающий ему элемент площади  $d\xi d\eta$  плоскости  $\mathbb{R}^2$  в точке  $\mathbf{y}'$  связаны соотношением

$$d\xi d\eta = \cos\theta d\sigma_r. \quad (3.23)$$

Здесь  $\theta$  – угол между радиус-вектором  $\mathbf{y}$  и осью  $\zeta$  (см. рис. 3.2). Ясно, что

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}'|} = \frac{\sqrt{|\mathbf{y} - \mathbf{x}'|^2 - |\mathbf{y}' - \mathbf{x}'|^2}}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}'|} = \frac{\sqrt{a^2 t^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}}{at}. \quad (3.24)$$

Аналогичные соотношения справедливы и для нижней полусферы.

Подставляя (3.23), (3.24) в (3.19) и учитывая, что на круг  $\Sigma_{at}(\mathbf{x}')$  проектируются две полусферы сферы  $S_{at}(\mathbf{x}')$ , приходим к следующей формуле, решающей плоскую задачу (3.21), (3.22):

$$u(\mathbf{x}', t) = u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_{at}(\mathbf{x}')} \frac{\varphi_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}} + \int_{\Sigma_{at}(\mathbf{x}')} \frac{\varphi_1(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}} \right]. \quad (3.25)$$

Формула (3.25) называется *формулой Пуассона*. Отметим, что формула (3.25) является “плоской” в том смысле, что интегрирование в (3.25) производится по кругу  $\Sigma_{at}(\mathbf{x}')$  радиуса  $at$  с центром в точке  $\mathbf{x}' = (x, y)$ . Сформулируем полученный результат (с учетом замечания 3.2) в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 3.2.** Пусть  $\varphi_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ ,  $\varphi_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Тогда регулярное решение  $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+^3})$  задачи Коши (3.21), (3.22) существует и определяется формулой Пуассона (3.25).

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.3.** Если функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  в (3.2) не зависят не только от  $z$ , но и от  $y$ , то аналогичные предыдущему рассуждения приводят к формуле

$$u(\mathbf{x}, t) = u(x, t) = \frac{\varphi_0(x + at) + \varphi_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\xi) d\xi, \quad (3.26)$$

решающей задачу Коши в  $\mathbb{R}$  (эта формула была получена в §3.1 другим способом).

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.4.** Для задачи Коши в  $\mathbb{R}_+^4$  и  $\mathbb{R}_+^3$  справедливы теоремы единственности и устойчивости по начальным данным. Они могут быть

доказаны методами, аналогичными тем, которые были применены для одномерного волнового уравнения. К вопросу о единственности задачи Коши мы вернемся в §3.5. Что касается устойчивости, то отметим, что для устойчивости решений обеих задач недостаточно условий вида (см. §3.1)

$$|\tilde{\varphi}_0(\mathbf{x}) - \varphi_0(\mathbf{x})| < \delta, \quad |\tilde{\varphi}_1(\mathbf{x}) - \varphi_1(\mathbf{x})| < \delta \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{либо } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2),$$

где  $\tilde{\varphi}_0$  и  $\tilde{\varphi}_1$  – возмущенные начальные функции. Нужно еще потребовать дополнительно, чтобы выполнялось условие  $|\nabla \tilde{\varphi}_0(\mathbf{x}) - \nabla \varphi_0(\mathbf{x})| < \delta$ . Последнее связано с тем, что согласно (3.19), (3.25) решение  $u$  зависит не только от функций  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , но и от производных функции  $\varphi_0$ .

Изложенный выше метод решения плоской (и одномерной) задачи Коши носит название *метода спуска*. Такое название связано с тем, что при решении волновых уравнений на плоскости и прямой мы исходим из решения трехмерной задачи, как бы спускаясь к меньшему числу переменных. Метод спуска применим не только к волновому уравнению, но и к другим типам уравнений и позволяет в ряде случаев из формулы, определяющей решение уравнения для нескольких переменных, получить решение задачи для уравнения с меньшим числом независимых переменных.

**3.3.3. Физическая интерпретация решения задачи Коши в  $\mathbb{R}^3$ .** Как уже указывалось в гл.1, волновое уравнение (3.1) моделирует волновые процессы и, в частности, процесс распространения звуковых волн, т.е. процесс распространения малых гидродинамических возмущений в жидкой или газообразной среде. Для указанного процесса функция  $u$  в (3.1) имеет смысл звукового давления, а область  $D$  пространства  $\mathbb{R}^3$ , где  $u \neq 0$ , характеризуется тем, что частицы среды в  $D$  совершают малые колебания, что и является физическим механизмом переноса гидродинамических возмущений среды от точки к точке.

С помощью формулы Кирхгофа (3.19) (либо Пуассона (3.25)) можно объяснить физическую картину распространения звуковых волн в пространстве (либо на плоскости). Рассмотрим сначала случай трех измерений. Будем считать, что начальные функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  в (3.2) сосредоточены в некоторой ограниченной области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ , точнее, что их носители  $\text{supp}\varphi_0, \text{supp}\varphi_1$  содержатся в  $\Omega$ , так что

$$\text{supp}\varphi_0 \subset \Omega, \quad \text{supp}\varphi_1 \subset \Omega. \quad (3.27)$$

Используя физическую терминологию, на такие начальные функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , точнее, на тройку  $(\Omega, \varphi_0, \varphi_1)$ , будем ссылаться как на *финитное начальное возмущение* среды в  $\mathbb{R}^3$ . Пусть  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  – произвольная точка пространства  $\mathbb{R}^3$ , расположенная вне  $\overline{\Omega}$ . Обозначим через  $d_1 = d_1(\mathbf{x})$  и  $d_2 = d_2(\mathbf{x})$  соответственно наименьшее и наибольшее расстояния от точки  $\mathbf{x}$  до точек  $\Gamma$  (см. рис.3.3).

Согласно формуле (3.19) значение решения  $u$  в точке  $\mathbf{x}$  в момент  $t$  определяется значениями начальных функций  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  в точках, лежащих на сфере  $S_{at}(\mathbf{x})$  радиуса  $at$  с центром в точке  $\mathbf{x}$ . Поэтому  $u(\mathbf{x}, t) \neq 0$  только для тех значений  $t$ , для которых сфера  $S_{at}(\mathbf{x})$  пересекает носители начальных функций  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , лежащие в  $\Omega$ . С учетом этого положим

$$t_1 = \frac{d_1}{a}, \quad t_2 = \frac{d_2}{a} \quad (3.28)$$

и разобьем весь временной интервал  $(0, \infty)$  на три подинтервала  $[0, t_1)$ ,  $[t_1, t_2]$  и  $(t_2, \infty)$ . Указанное разбиение, естественно, зависит от точки  $\mathbf{x}$ . (Оно незначительно отличается от разбиения, используемого в §3.1.) В соответствии с этим разбиением рассмотрим три случая.

1.  $0 \leq t < t_1$ . Для этих значений  $t$  сфера  $S_{at}(\mathbf{x})$  *еще* не имеет общих точек с  $\Omega$ . Следовательно,  $\varphi_0|_{S_{at}} = \varphi_1|_{S_{at}} = 0$ . Поэтому из формулы (3.19) следует, что  $u(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ . (Ниже этот факт физически будет проинтерпретирован так, что финитное возмущение  $(\Omega, \varphi_0, \varphi_1)$ , возникшее в начальный момент времени  $t = 0$ , *еще* не дошло до точки  $\mathbf{x}$ ).

2.  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Для указанных значений времени  $t$ , т.е. начиная с момента  $t_1 = d_1/a$  и до момента  $t_2 = d_2/a$  сфера  $S_{at}(\mathbf{x})$  будет пересекать область  $\overline{\Omega}$  либо касаться ее, например, при  $t = t_1$ . С учетом этого из формулы (3.19) следует, что  $u(\mathbf{x}, t) \neq 0$  для  $t \in (t_1, t_2)$ , т.е. что в точке  $\mathbf{x}$  имеется возмущение.

3.  $t_2 < t < \infty$ . Для этих значений  $t$  радиус  $at$  сферы  $S_{at}(\mathbf{x})$  больше  $d_2$ , и, следовательно, сфера  $S_{at}$  *уже* не будет иметь общих точек с областью  $\Omega$  (вся область  $\Omega$  лежит внутри  $S_{at}(\mathbf{x})$ ). Ввиду этого мы снова получим, как в случае 1, что  $u(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ . Однако этот факт следует интерпретировать так, что начальное возмущение *уже* прошло через точку  $\mathbf{x}$ .

На основании приведенного анализа можно сделать важный физический вывод о том, что акустическое возмущение  $(\Omega, \varphi_0, \varphi_1)$  среды, возникшее в начальный момент времени в некоторой области  $\Omega$  пространства  $\mathbb{R}^3$ , распространяется по всем направлениям пространства с одной и той же скоростью, в точности равной коэффициенту  $a$  уравнения (3.1). Поэтому если взять любую точку  $\mathbf{x} \notin \overline{\Omega}$ , то начальное возмущение, возникшее в  $\Omega$ , придет в точку  $\mathbf{x}$  в момент  $t = t_1$ , где момент  $t_1$  определен в (3.28). (Более точно: в момент  $t_1$  в точку  $\mathbf{x}$  придут возмущения из точек  $\mathbf{y} \in \overline{\Omega}$ , расположенных на ближайшем для точек  $\overline{\Omega}$  расстоянии  $d_1$  от  $\mathbf{x}$ ). В последующие

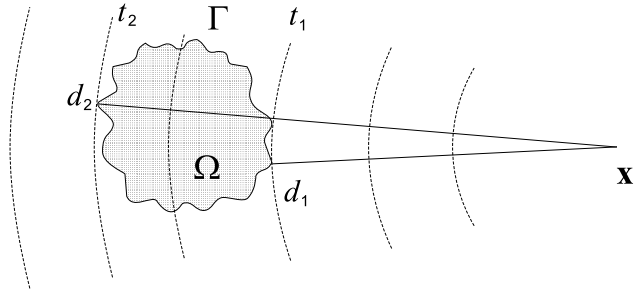


Рис. 3.3

моменты  $t > t_1$  в точку  $\mathbf{x}$  будут приходить возмущения из точек  $\mathbf{y} \in \overline{\Omega}$ , расположенных от точки  $\mathbf{x}$  на расстоянии, равном  $at > d_1$ . Наконец, в момент  $t = t_2$ , где  $t_2$  определен в (3.28), в точку  $\mathbf{x}$  придут возмущения из точек  $\mathbf{y} \in \overline{\Omega}$ , расположенных на максимальном расстоянии  $d_2$  от  $\mathbf{x}$ . С учетом этого решение – звуковое давление  $u$  в точке  $\mathbf{x}$  может быть отлично от нуля, и, следовательно, в точке  $\mathbf{x}$  может наблюдаться возмущенное состояние лишь в моменты времени  $t$  из интервала  $[t_1, t_2]$ . Фактически же решение  $u$  должно быть отлично от нуля в точке  $\mathbf{x}$  лишь в моменты времени  $t \in (t_1, t_2)$ . Это является следствием того обстоятельства, что начальные функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  обращаются в нуль на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  в силу их непрерывности в  $\mathbb{R}^3$ , вытекающей из (3.3) и условий (3.27). Аналогичный вывод справедлив и для точек  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ , за исключением того, что для всех таких точек  $t_1 = 0$ , а  $t_2 = d_2/a$ , где  $d_2$  – максимальное расстояние от  $\mathbf{x}$  до точек  $\mathbf{y} \in \overline{\Omega}$ .

Основываясь на приведенных выводах, введем фундаментальное понятие современной физики и математики, а именно: понятие волны. Это понятие имеет два аспекта: физический и математический.

С физической точки зрения под *волной* (в однородной изотропной среде) следует понимать *особое возмущенное состояние среды*, при котором возмущение, возникшее в произвольной точке  $\mathbf{y}$  среды, передается с постоянной скоростью  $a$  в любую другую точку  $\mathbf{x}$  пространства  $\mathbb{R}^3$  за конечное время, равное отношению  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|/a$ , где  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  – расстояние между этими точками. В случае неоднородной среды, когда скорость распространения возмущений  $a$  зависит от координат точки  $\mathbf{x}$ , это время зависит не только от расстояния  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ , но и от степени неоднородности среды, входящей в переменную скорость  $a = a(\mathbf{x})$ .

В математическом плане под *волной в пространстве* (в однородной изотропной среде без источников) *будем понимать решение задачи Коши (3.1), (3.2) для однородного волнового уравнения (3.1)*.

Используя последнее определение, для каждой волны можно определить ряд важных характеристик, например, *носитель волны, передний и задний фронты волны, области покоя*. Введем эти понятия.

Пусть  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  – произвольная точка. Если  $u(\mathbf{x}, t) \neq 0$ , то будем говорить, что в точке  $\mathbf{x}$  в момент  $t$  *распространяется (или бежит) волна*. Объединение всех таких точек  $\mathbf{x}$  в момент  $t$  обозначим через  $D(t)$  и назовем *открытым носителем* волны  $u$ . Если  $u$  – непрерывная по  $x, y, z$  функция, то  $D(t)$  – открытое множество, определяемое в каждый момент времени  $t$  формулой

$$D(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : u(\mathbf{x}, t) \neq 0\}. \quad (3.29)$$

Кроме множества  $D(t)$ , рассмотрим еще одно открытое множество (ниже “ $\text{int } M$ ” означает внутренность множества  $M$ ):

$$D_0(t) = \text{int}\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : u(\mathbf{x}, t) = 0\}, \quad (3.30)$$

которое, в свою очередь, разобьем на два подмножества:

$$D''(t) = \{\mathbf{x} \in D_0(t) : u(\mathbf{x}, \tau) \equiv 0 \text{ при } 0 \leq \tau \leq t\} \text{ и } D'(t) = D_0(t) \setminus D''(t). \quad (3.31)$$

Множество  $D''(t)$  физически можно интерпретировать как совокупность точек в  $\mathbb{R}^3$ , до которых волна  $u$ , вызванная начальным возмущением  $(\Omega, \varphi_0, \varphi_1)$ , к моменту  $t$  еще не дошла и, следовательно, в которых *еще наблюдается покой*. Аналогично  $D'(t)$  представляет собой множество точек пространства  $\mathbb{R}^3$ , через которые волна  $u$  уже прошла и, следовательно, в которых *уже наблюдается покой*. Наряду с (открытыми) множествами  $D(t)$ ,  $D'(t)$  и  $D''(t)$  рассмотрим следующие три замкнутые множества:

$$\overline{D(t)} = \text{supp } u(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, S'(t) = \overline{D(t)} \cap \overline{D'(t)} \text{ и } S''(t) = \overline{D(t)} \cap \overline{D''(t)}.$$

Множество  $\overline{D(t)}$  имеет смысл замкнутого *носителя* волны  $u$  в момент  $t$ ; множество  $S''(t)$ , имеющее смысл “внешней” границы носителя  $\overline{D(t)}$  волны  $u$ , назовем *передним фронтом волны*, а множество  $S'(t)$ , имеющее смысл “внутренней” границы носителя  $\overline{D(t)}$ , назовем *задним фронтом волны*.

Осталось понять, как построить геометрически множества  $D(t)$ ,  $S'(t)$  и  $S''(t)$  в каждый момент времени  $t$ . С этой целью заметим, что согласно предыдущему анализу каждая точка  $\mathbf{x} \in D(t)$  характеризуется тем, что сфера  $S_{at}(\mathbf{x})$  пересекает область  $\Omega$ . Но таким свойством будут обладать все точки сфер  $S_{at}(\mathbf{y})$ , где  $\mathbf{y}$  – переменная точка области  $\Omega$ . Если граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  достаточно гладкая, то существуют две огибающие указанного семейства сфер: внутренняя и внешняя. Внешняя огибающая отделяет точки множества  $D''(t)$ , до которых волна  $u$  еще не дошла, от точек открытого носителя  $D(t)$  волны  $u$ , и, следовательно, указанная огибающая совпадет с передним фронтом волны. Внутренняя огибающая отделяет точки открытого носителя  $D(t)$  волны  $u$  от точек множества  $D'(t)$ , через которые волна, вызванная начальным возмущением  $(\Omega, \varphi_0, \varphi_1)$ , уже прошла и, следовательно, в которых вновь возникло состояние покоя, поэтому она совпадает с задним фронтом волны.

Резюмируя, заключаем, что в любой момент  $t$  пространство  $\mathbb{R}^3$  можно представить в виде объединения пяти непересекающихся подмножеств:

$$\mathbb{R}^3 = D'(t) \cup S'(t) \cup D(t) \cup S''(t) \cup D''(t). \quad (3.32)$$

Здесь  $D''(t)$  – множество точек, до которых волна  $u$  еще не дошла в момент  $t$ ,  $S''(t)$  – передний фронт волны,  $D(t)$  – открытый носитель волны,  $S'(t)$  – задний фронт волны, наконец,  $D'(t)$  – множество точек, через которые волна уже прошла. Некоторые из множеств в (3.32) могут быть пустыми, например, множество  $D'(t)$  и задний фронт волны  $S'(t)$  при малых  $t$ . С использованием введенных обозначений сам волновой процесс можно трактовать с математической точки зрения как процесс изменения с течением времени всех указанных в (3.32) множеств.

Основываясь на приведенном математическом выводе, можно сформулировать следующий физический вывод о характере распространения (звуковых) волн в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , вызванных начальным возмущением, а именно: наличие финитного начального возмущения  $(\Omega, \varphi_0, \varphi_1)$  в однородной среде пространства  $\mathbb{R}^3$  приводит к возникновению в пространстве  $\mathbb{R}^3$  волны, т.е. *особого возмущенного состояния среды*, при котором начальное возмущение от каждой точки  $\mathbf{y}$  носителя начальных функций передается в любую другую точку  $\mathbf{x}$  пространства  $\mathbb{R}^3$  через конечное время  $t = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/a$ . При этом в каждый момент времени волна имеет четко выраженный передний фронт, а начиная с некоторого времени, зависящего от размеров области  $\Omega$ , и задний фронт.

Указанный вывод представляет собой расширенное содержание принципа Х. Гюйгенса распространения волн в пространстве, названного так в честь известного голландского ученого Н. Huygens (1629-1695), сформулировавшего его в 1678 г.

**ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА:** *Всякое начальное возмущение, финитное (или, как говорят физики, локализованное) в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , вызывает в каждой точке  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  действие, финитное по времени: при этом имеет место распространение волны с четко выраженными передним и задним фронтами.*

**ПРИМЕР 1.** Пусть  $\Omega$  есть шар  $B_R$  с центром в начале координат радиуса  $R$ . Основываясь на предыдущем анализе, нетрудно установить, что в каждый момент  $t > 0$  передний  $S''$  и задний  $S'$  фронты волны, образованной начальным возмущением  $(B_R, \varphi_0, \varphi_1)$ , есть сферы с центрами в начале координат, радиусов  $at + R$  и  $at - R$  соответственно, а носитель волны  $D(t)$  представляет собой шаровой слой, заключенный между этими сферами. При этом задний фронт возникает только при  $t > R/a$ . Геометрическая картина распространения волны в этом случае представлена на рис. 3.4,а, где в моменты  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = R/a$  и  $t_2 = 2R/a$  изображен в виде затемненной области носитель  $D(t)$  волны  $u$ , а в момент  $t = t_2$ , кроме того, изображены ее передний и задний фронты  $S''$  и  $S'$ , а также множества  $D''$  и  $D'$ .

Принцип Гюйгенса впервые был сформулирован им в 1678 г., а далее был развит французским инженером О. Френелем (A. Fresnel, 1788-1827) в 1818г. при исследовании проблем дифракции волн. Строгая математическая формулировка принципа Гюйгенса впервые была дана Г. Гельмгольцем в 1859 г. для стационарного и Г. Кирхгофом в 1882 г. для нестационарного случаев. Позже в работах Ж. Адамара было установлено, что принцип Гюйгенса справедлив в пространстве  $\mathbb{R}^n$  при любом нечетном  $n \geq 3$  и не справедлив при  $n = 1$  и любом четном  $n$  (см. об этом ниже).

**3.3.4. Физическая интерпретация решения задачи Коши в  $\mathbb{R}^2$ .** Рассмотрим теперь задачу (3.21), (3.22). Ее можно интерпретировать двояко: как задачу о распространении волн в пространстве  $\mathbb{R}^3$  при условии,

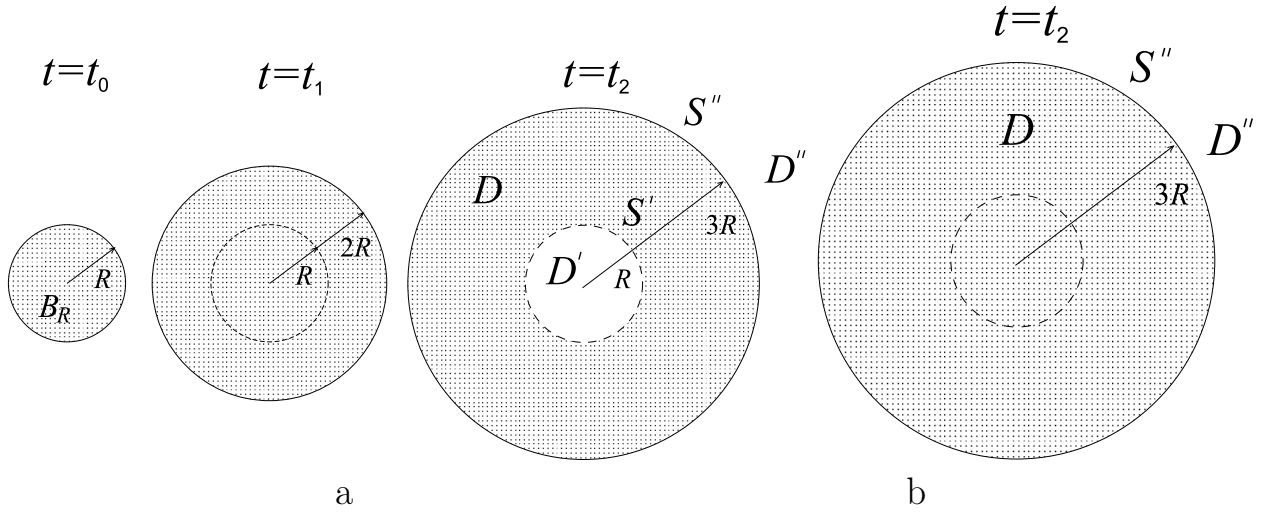


Рис. 3.4

что начальные данные не зависят от  $z$ , либо как задачу о распространении волны на плоскости  $z = 0$ .

Как и выше, считаем, что функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  равны нулю вне некоторой ограниченной области  $\Omega$  плоскости, ограниченной контуром  $\Gamma$ , так что выполняется условие (3.26). Это означает, что начальное возмущение сосредоточено: при первой интерпретации – внутри бесконечного цилиндра с направляющей  $\Gamma$  и образующими, параллельными оси  $z$ ; при второй интерпретации – внутри плоской области  $\Omega$ . Ниже мы будем придерживаться второй интерпретации.

Пусть точка  $\mathbf{x} = (x, y)$  лежит вне области  $\Omega$ . Как и выше, обозначим через  $d_1$  и  $d_2$  соответственно наименьшее и наибольшее расстояния от  $\mathbf{x}$  до точек границы  $\Gamma$ . Введем моменты  $t_1$  и  $t_2$  по формуле (3.28), но, в отличие от предыдущего, рассмотрим только два случая.

1.  $0 \leq t < t_1$ . В этом случае круг  $\Sigma_{at}(\mathbf{x})$  радиуса  $at$  с центром в точке  $\mathbf{x}$  находится вне  $\Omega$ . Следовательно,  $\varphi_0 = \varphi_1 \equiv 0$  в  $\Sigma_{at}(\mathbf{x})$  и из формулы (3.25) следует, что  $u(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ . Физически это означает, что до точки  $\mathbf{x}$  возмущение еще не дошло.

2.  $t_1 \leq t < \infty$ . В момент  $t_1 = d_1/a$  в точку  $\mathbf{x}$  придет передний фронт волны. Начиная с этого момента круг  $\Sigma_{at}(\mathbf{x})$  и область  $\Omega$  будут иметь общую часть, где  $\varphi_0^2 + \varphi_1^2 \neq 0$ , причем при  $t \geq t_2 = d_2/a$  эта общая часть просто совпадает с  $\Omega$ . Поэтому из (3.25) следует, что  $u(\mathbf{x}, t) \neq 0$  при  $t_1 < t < \infty$ . Это означает, что возмущение, попав в момент  $t_1 = d/a$  в точку  $\mathbf{x}$ , никогда не прекратится, как это было в случае трехмерного пространства. Хотя ввиду наличия в (3.25) выражения  $\sqrt{(at)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}$  в знаменателе решение  $u$  будет стремиться к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. будет выполняться условие  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}, t) = 0$ . Таким образом, акустическое возмущение  $(\Omega, \varphi_0, \varphi_1)$ , возникшее в начальный момент времени  $t = 0$  на плоскости,

приводит к распространению на плоскости волны, которая в каждый момент времени  $t$  имеет четко выраженный передний фронт, представляющий собой некоторую замкнутую кривую – огибающую окружностей  $\partial\Sigma_{at}(\mathbf{y})$  радиуса  $at$  с центрами в точках  $\mathbf{y}$  области  $\Omega$ , но, в отличие от случая трех измерений, не имеет заднего фронта. Другими словами, начальное возмущение  $(\Omega, \varphi_0, \varphi_1)$ , локализованное на плоскости, вызывает в каждой точке  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  возмущение, которое уже не является локализованным по времени. Это означает, что на плоскости принцип Гюйгенса не выполняется.

Причину этого легко понять, если вспомнить, что рассматриваемая плоская задача (3.21), (3.22) фактически представляет собой трехмерную задачу (3.1), (3.2) при условии, что функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  не зависят от  $z$ , для которой носители функций  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  расположены в цилиндре с направляющей  $\Gamma$  и образующими, параллельными оси  $z$ . Поскольку сферическая поверхность  $S_{at}(\mathbf{x}')$  будет пересекать этот цилиндр при всех  $t > t_1$ , то оба интеграла в исходной трехмерной формуле Кирхгофа (3.19) будут, вообще говоря, отличны от нуля для всех значений  $t > t_1$ . Отметим также, что при трехмерной интерпретации задачи (3.21), (3.22) передний фронт, т.е. внешняя граница носителя решения, имеет вид цилиндрической поверхности с параллельными оси  $z$  образующими. С учетом этого на функцию (3.25), являющуюся решением задачи (3.21), (3.22), часто ссылаются как на *цилиндрическую волну* (см. об этом подробнее в §3.2).

**ПРИМЕР 2.** Пусть область  $\Omega$  в (3.27) есть круг  $B_R$  с центром в начале координат радиуса  $R$ . Тогда в каждый момент времени  $t > 0$  передний фронт представляет собой окружность радиуса  $R+at$ , носитель волны имеет вид соответствующего круга радиуса  $R+at$ , а задний фронт отсутствует. Геометрия носителя  $D(t)$  такой волны  $u$  в моменты  $t = 0$  и  $t_1 = R/a$  аналогична геометрии носителя трехмерной волны на рис. 3.4,а, а при  $t_2 = 2R/a$  в отличие от трехмерного случая, носитель  $D(t_2)$  имеет вид круга радиуса  $3R$ , указанного в виде затемненной области на рис. 3.4,б.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.** Аналогичные рассуждения можно провести и для формулы Даламбера (3.26) в предположении, что начальные функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  отличны от нуля на конечном интервале  $(x_1, x_2)$  (см. также § 3.1). Нетрудно убедиться, что для слагаемого

$$(1/2)[\varphi_0(x - at) + \varphi_0(x + at)]$$

формулы (3.26) имеет место принцип Гюйгенса, а второе слагаемое

$$\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\xi) d\xi$$

ведет себя аналогично формуле (3.25), с той лишь разницей, что оно не стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .



## § 3.4. Задача Коши для неоднородного волнового уравнения

**3.4.1. Задача Коши в  $\mathbb{R}^3$ .** Рассмотрим задачу Коши для неоднородного волнового уравнения в  $\mathbb{R}^3$ , заключающуюся в нахождении функции  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^4) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^4})$  (классического решения) из условий

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f \quad \text{в} \quad \mathbb{R}_+^4 \equiv \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \quad (4.1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(\mathbf{x}) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3. \quad (4.2)$$

Для нахождения решения задачи (4.1), (4.2) достаточно найти решение уравнения (4.1) при нулевых начальных условиях

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3, \quad (4.3)$$

так как, добавляя к этому решению решение задачи (3.1), (3.2) для однородного волнового уравнения, определяемое формулой Кирхгофа (3.19), мы получим с учетом линейности уравнения (4.1) искомое решение задачи (4.1), (4.2).

Как и в одномерном случае (см. § 3.1), будем отыскивать решение задачи Коши (4.1), (4.3) через решение аналогичной задачи для соответствующего однородного волнового уравнения. С этой целью рассмотрим функцию  $v$  переменных  $\mathbf{x}, t$  и параметра  $\tau$ , удовлетворяющую однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \Delta v \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \times (\tau, \infty) \quad (4.4)$$

и следующим начальным условиям при  $t = \tau$ :

$$v|_{t=\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=\tau} = f(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3. \quad (4.5)$$

Вводя вместо  $t$  новую переменную  $t_1 = t - \tau$ , замечаем, что функция  $w(\mathbf{x}, t_1, \tau) \equiv v(\mathbf{x}, t_1 + \tau, \tau)$  удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = a^2 \Delta w \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \quad (4.6)$$

и начальным условиям при  $t_1 = 0$ , имеющим вид

$$w|_{t_1=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t_1} \right|_{t_1=0} = f(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3. \quad (4.7)$$

В таком случае функция  $w$  может быть представлена с помощью формулы Кирхгофа (3.19), принимающей в данном случае вид

$$w(\mathbf{x}, t_1, \tau) = \frac{1}{4\pi a} \int_{S_{at_1}(\mathbf{x})} \frac{f(\mathbf{y}, \tau)}{at_1} d\sigma. \quad (4.8)$$

Для справедливости этой формулы достаточно предположить в силу теоремы 3.1, что функция  $f$  непрерывна в замкнутой области  $\overline{\mathbb{R}_+^4} = \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  вместе со всеми первыми и вторыми производными по  $x_1 = x, x_2 = y$  и  $x_3 = z$ . Указанный факт кратко запишем в виде

$$f \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+^4}), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+^4}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+^4}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.9)$$

Возвращаясь к переменным  $t$  и  $v$  и вводя сферические координаты переменной точки  $\mathbf{y} \in S_{at_1}(\mathbf{x})$  в (4.8) с помощью формул (см. §3.3)

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + a(t - \tau)\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = (\cos\psi\sin\theta, \sin\psi\sin\theta, \cos\theta), \quad (4.10)$$

$$d\sigma = a^2(t - \tau)^2 \sin\theta d\theta d\psi,$$

перепишем (4.8) в виде

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}, t, \tau) &= \frac{1}{4\pi a} \int_{S_{a(t-\tau)}(\mathbf{x})} \frac{f(\mathbf{y}, \tau)}{a(t - \tau)} d\sigma = \\ &= \frac{t - \tau}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f[\mathbf{x} + a(t - \tau)\mathbf{n}, \tau] \sin\theta d\theta d\psi. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Покажем теперь, что функция  $u : \overline{\mathbb{R}_+^4} \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемая формулой

$$u(\mathbf{x}, t) \equiv \int_0^t v(\mathbf{x}, t, \tau) d\tau, \quad (4.12)$$

является искомым решением задачи (4.1), (4.3). В самом деле, дифференцируя (4.12) по  $x, y, z$  и  $t$ , имеем:

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \Delta v(\mathbf{x}, t, \tau) d\tau, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial v(\mathbf{x}, t, \tau)}{\partial t} d\tau + v(\mathbf{x}, t, t) = \int_0^t \frac{\partial v(\mathbf{x}, t, \tau)}{\partial t} d\tau. \quad (4.14)$$

(Внеинтегральный член в (4.14) равен нулю в силу первого условия в (4.5)). Дифференцируя (4.14) по  $t$ , получим с учетом (4.5), что

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 v(\mathbf{x}, t, \tau)}{\partial t^2} d\tau + f(\mathbf{x}, t). \quad (4.15)$$

Поскольку  $v$  удовлетворяет однородному волновому уравнению (4.4), то из (4.13), (4.15) следует, что  $u$  является решением неоднородного уравнения (4.1), а из (4.12), (4.14) следует, что  $u$  удовлетворяет однородным начальным условиям (4.3). Тем самым доказано, что функция (4.12) является искомым решением задачи Коши (4.1), (4.3).

Подставляя в (4.12) вместо функции  $v$  ее выражение (4.11), получим

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t (t - \tau) d\tau \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f[\mathbf{x} + a(t - \tau)\mathbf{n}, \tau] \sin\theta d\theta d\psi. \quad (4.16)$$

Введем в (4.16) вместо переменной интегрирования  $\tau$  новую переменную

$$r = a(t - \tau). \quad (4.17)$$

Учитывая, что  $t - \tau = r/a$ ,  $\tau = t - (r/a)$ ,  $d\tau = -(dr/a)$ , и что  $r$  меняется от  $at$  до 0 при изменении  $\tau$  от 0 до  $t$ , (4.16) можно переписать в виде

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(\mathbf{x} + r\mathbf{n}, t - r/a)}{r} r^2 \sin\theta d\theta d\psi dr. \quad (4.18)$$

Из (4.10) и (4.17) следует, что величина  $r$  имеет смысл расстояния между фиксированной точкой  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  и переменной точкой  $\mathbf{y}$  пространства  $\mathbb{R}^3$ , так что  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ . При этом при изменении  $r$  от 0 до  $at$ , а пары  $(\theta, \psi)$  по единичной сфере  $S_1$  точка  $\mathbf{y}$  пробегает шар  $B_{at}(\mathbf{x})$  радиуса  $at$  с центром в  $\mathbf{x}$ . С учетом этого формулу (4.18) можно переписать в виде

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{B_{at}(\mathbf{x})} \frac{f(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/a)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \quad (d\mathbf{y} = d\xi d\eta d\zeta). \quad (4.19)$$

Интеграл в правой части формулы (4.19), описывающей потенциал волнового поля, являющегося решением задачи Коши (4.1), (4.3), называется *запаздывающим потенциалом*. Такое название связано с тем, что значение потенциала  $u$  в фиксированной точке  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  в фиксированный момент времени  $t > 0$  определяется значениями правой части  $f$  уравнения (4.1), описывающей плотность объемных источников, в точках  $\mathbf{y} \in B_{at}(\mathbf{x})$ , взятыми в предыдущие моменты времени  $\tau = t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/a$ . Другими словами, для нахождения потенциала  $u$  в точке  $(\mathbf{x}, t)$  мы интегрируем плотность  $f$  источников поля по шару  $B_{at}(\mathbf{x})$ , причем значения функции  $f$  в произвольной точке  $\mathbf{y} \in B_{at}(\mathbf{x})$  берутся не в рассматриваемый момент времени  $t$ , а в момент  $t - r/a$ , предшествующий моменту  $t$ . При этом величина запаздывания  $r/a = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/a$ , зависящая как от  $\mathbf{x}$ , так и  $\mathbf{y}$ , в точности равна времени, необходимому для прихода возмущения из точки  $\mathbf{y}$  в точку  $\mathbf{x}$  (со

скоростью  $a$ ). Указанный факт, очевидно, объясняется конечностью скорости распространения возмущений, которая для уравнения (4.1) равна  $a$ .

Отметим также, что при выполнении условий (4.9) все вторые производные от функции  $u$  в (4.19), входящие в уравнение (4.1), существуют и непрерывны в замкнутом полупространстве  $\overline{\mathbb{R}_+^4}$ . Это означает, что формула (4.19) описывает регулярное решение задачи (4.1), (4.3). Сформулируем полученный результат.

**ТЕОРЕМА 4.1.** *Пусть выполняются условия (4.9). Тогда функция  $u : \overline{\mathbb{R}_+^4} \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемая запаздывающим потенциалом (4.19), является регулярным решением задачи Коши (4.1), (4.3).*

**3.4.2. Задача Коши в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}$ .** Аналогичным образом можно найти решение двумерной задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \quad \text{в } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \quad (4.20)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^2. \quad (4.21)$$

При выполнении условий на  $f$  вида (4.9) это решение имеет вид [11, с.214]:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \left[ \int_{\rho \leq a(t-\tau)} \frac{f(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}} \right] d\tau, \quad (4.22)$$

где  $\rho$  – расстояние между фиксированной точкой  $(x, y)$  и переменной точкой  $(\xi, \eta)$  плоскости  $\mathbb{R}^2$ :  $\rho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$ .

Наконец, решение одномерной задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{в } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad (4.23)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R} \quad (4.24)$$

имеет вид (см. §3.1 и [11, с.214]):

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left[ \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau. \quad (4.25)$$

**3.4.3. Качественный анализ решений неоднородного волнового уравнения в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}$ .** Займемся качественным анализом приведенных выше формул для решения неоднородного волнового уравнения в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}$ . Предварительно напомним (см. гл.2), что поверхность  $\Gamma(\mathbf{x}_0, t_0)$  в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$ , определяемая соотношением  $\Gamma(\mathbf{x}_0, t_0) =$

$\{(\mathbf{x}, t) : a^2(t - t_0)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 = 0\}$ , называется *характеристической конической поверхностью* (или более кратко *характеристическим конусом*) для волнового уравнения (4.1) с вершиной в точке  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ . Указанная поверхность  $\Gamma(\mathbf{x}_0, t_0)$  является границей конусов

$$K^+(\mathbf{x}_0, t_0) = \{(\mathbf{x}, t) : a(t - t_0) > |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|\},$$

$$K^-(\mathbf{x}_0, t_0) = \{(\mathbf{x}, t) : a(t_0 - t) > |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|\},$$

называемых соответственно *конусами будущего* и *прошлого* с вершиной в  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ .

Важную роль с точки зрения анализа поведения решения *и* задачи Коши играет кусок  $K_n^-(\mathbf{x}_0, t_0)$  конуса прошлого, отсекаемый плоскостью  $t = 0$ , т.е. пересечение конуса  $K^-(\mathbf{x}_0, t_0)$  с полупространством  $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_{t,+}$ . В частных случаях, когда  $n = 1$  или  $n = 2$ , соответствующие куски

$$K_1^-(x_0, t_0) = \{(x, t) \in K^-(x_0, t_0) : t > 0, a(t_0 - t) > |x - x_0|\},$$

$$K_2^-(x_0, y_0, t_0) = \{(x, y, t) \in K^-(x_0, y_0, t_0) : \\ t > 0, a(t_0 - t) > \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\}$$

изображены на рис.4.1,а и рис.4.1,б. Для краткости на кусок  $K_n^-(\mathbf{x}_0, t_0)$  будем также ссылаться как на конечный конус (или треугольник при  $n = 1$ ) прошлого, а на его боковую границу  $\Gamma_n^-(\mathbf{x}_0, t_0)$  – как на конечный характеристический конус (характеристический треугольник при  $n = 1$ ) прошлого.

Используя введенные конечные конусы, перейдем теперь к анализу формул (4.19), (4.22), (4.25). Начнем исследование с самой наглядной формулы (4.25). Простой анализ показывает, что интегрирование в формуле (4.25) производится в точности по треугольнику  $K_1^-(x, t)$ . Точнее говоря, правая часть в (4.25) представляет собой повторный интеграл, к которому сводится двойной (по переменным  $x, t$ ) интеграл в формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{K_1^-(x, t)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (4.26)$$

Аналогичный факт справедлив и для формулы (4.22), решающей двумерную задачу Коши (4.20), (4.21). Эту формулу можно переписать в виде

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_{K_2^-(x, y, t)} \frac{f(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{a^2(t - \tau)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}}. \quad (4.27)$$

Другими словами, правая часть в (4.22) представляет собой повторный интеграл, к которому сводится тройной по переменным  $x, y$  и  $t$  интеграл по конечному конусу  $K_2^-(x, y, t)$  в правой части (4.27).

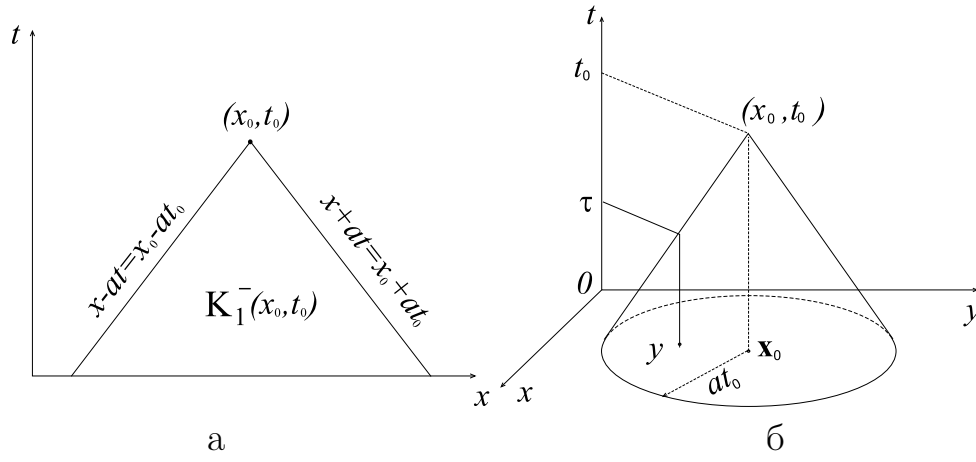


Рис. 4.1

Что касается формулы (4.19), решающей трехмерную задачу Коши (4.1), (4.3), то простой анализ показывает, что она может быть переписана в виде

$$(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_3^-(\mathbf{x}, t)} (t - \tau) f[\mathbf{x} + a(t - \tau)\mathbf{n}, \tau] \sin\theta d\theta d\psi. \quad (4.28)$$

Подчеркнем, что в отличие от формул (4.26) и (4.27), интегрирование в формуле (4.28) производится по конечному характеристическому конусу  $\Gamma_3^-(\mathbf{x}, t)$ , т. е. по боковой границе конечного конуса  $K_3^-(\mathbf{x}, t)$ .

Формула (4.26) (либо (4.27)) означает, что значение решения одномерной задачи Коши (4.23), (4.24) в точке  $(x, t)$  (либо двумерной задачи Коши (4.20), (4.21) в точке  $(x, y, t)$ ) зависит от значений правой части (объемной плотности)  $f$  уравнения (4.23) (либо (4.20)) в точках, расположенных внутри характеристического треугольника  $K_1^-(x, t)$  (либо конуса  $K_2^-(x, y, t)$ ). В противоположность этому значение  $u(\mathbf{x}, t)$  решения  $u$  трехмерной задачи Коши (4.1), (4.3) в точке  $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}_+^4$  зависит лишь от значений  $f(\mathbf{y}, t)$  плотности  $f$  в (четырёхмерных) точках  $(\mathbf{y}, t)$ , расположенных на боковой поверхности  $\Gamma_3^-(\mathbf{x}, t)$  конечного конуса  $K_3^-(\mathbf{x}, t)$ . Таким образом, как и в §3.3, мы опять наблюдаем качественное отличие решений одномерной и двумерной задач Коши (4.23), (4.24) и (4.20), (4.21) соответственно от решения трехмерной задачи Коши (4.1), (4.3) для неоднородного волнового уравнения. Указанное отличие имеет ту же самую природу, что и для однородного волнового уравнения (см. §3.3), т.е. оно связано с нарушением принципа Гюйгенса в  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ , а также в пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  четного числа измерений. Более детально этот вопрос освещается в [11, §14] и [35, гл.24].

### § 3.5. Некоторые общие вопросы теории распространения волн в пространстве $\mathbb{R}^n$

В этом параграфе мы докажем единственность решения задачи Коши для волнового уравнения в пространстве  $\mathbb{R}^n$  любого числа измерений. Основываясь на этой теореме и результатах предыдущих параграфов, мы введем далее ряд важных в математическом и физическом планах понятий, связанных с общими уравнениями гиперболического типа. К указанным понятиям относятся область зависимости для волнового уравнения, область влияния и область определения для волнового процесса.

**3.5.1. Теорема единственности решения задачи Коши для волнового уравнения.** Теоремы единственности решений задач математической физики доказываются, как правило, независимо от метода их решения. Ниже мы приведем такое доказательство для двумерной (для определенности) задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, t) \quad \text{в } \mathbb{R}_+^3 \equiv \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \quad (5.1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x, y) \quad \text{в } \mathbb{R}^2. \quad (5.2)$$

В (5.1) мы считаем для простоты, что  $a = 1$ , чего можно достигнуть, заменяя  $t$  на  $t/a$ . Докажем, что задача Коши (5.1), (5.2) имеет единственное регулярное решение из класса  $C^2(\overline{\mathbb{R}_+^3})$ .

Предположим противное, что существуют два регулярных решения  $u_1$  и  $u_2$  задачи (5.1), (5.2). Тогда их разность  $u = u_1 - u_2$ , очевидно, является регулярным решением однородной задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{в } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \quad (5.3)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^2. \quad (5.4)$$

Покажем, что  $u \equiv 0$  в  $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ . С этой целью возьмем произвольную точку  $(\mathbf{x}_0, t_0) = (x_0, y_0, t_0)$ ,  $t_0 > 0$  и из нее, как из вершины, проведем конус прошлого

$$K^-(\mathbf{x}_0, t_0) = \{(\mathbf{x}, t) : t_0 - t > |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|\} \quad (5.5)$$

до пересечения с плоскостью  $t = 0$ . Обозначим через  $K \equiv K_2^-(\mathbf{x}_0, t_0)$  область (конечный конус), ограниченную частью  $\Gamma$  боковой поверхности конуса  $K^-(\mathbf{x}_0, t_0)$  и частью  $\Sigma = \Sigma(\mathbf{x}_0, t_0)$  плоскости  $t = 0$ , отсекаемой конусом  $K^-(\mathbf{x}_0, t_0)$  (см. рис.4.1б). Легко проверить, что

$$2 \frac{\partial u}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] -$$

$$-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right). \quad (5.6)$$

Проинтегрируем (5.6) по области  $K$ . Поскольку функция  $u$  является решением задачи (5.3), (5.4), так что левая часть (5.6) равна нулю, то получим

$$0 = \int_K \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - 2\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - 2\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} dx dy dt. \quad (5.7)$$

Используя формулу Гаусса–Остроградского, преобразуем объемный интеграл в (5.7) в поверхностный интеграл по границе  $\Gamma \cup \Sigma$  области  $K$ . Так как в силу (5.4)  $\partial u / \partial x = \partial u / \partial y = \partial u / \partial t = 0$  на  $\Sigma$ , то интеграл в (5.7) преобразуется лишь в один поверхностный интеграл по  $\Gamma$ :

$$\int_{\Gamma} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] \cos(\mathbf{n}, t) - \right. \\ \left. 2\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) - 2\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, y) \right\} d\sigma = 0. \quad (5.8)$$

Здесь  $\mathbf{n} = (\cos(\mathbf{n}, x), \cos(\mathbf{n}, y), \cos(\mathbf{n}, t))$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\Gamma$ .

Легко видеть, что в каждой точке  $(\mathbf{x}, t) = (x, y, t)$  боковой поверхности  $\Gamma$  выполняются условия  $\cos^2(\mathbf{n}, t) = \cos^2(\mathbf{n}, x) + \cos^2(\mathbf{n}, y) = 1/2$ . С учетом этого равенство (5.8) можно переписать в виде

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\cos(\mathbf{n}, t)} \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, t) - \frac{\partial u}{\partial t} \cos(\mathbf{n}, x) \right]^2 + \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, t) - \frac{\partial u}{\partial t} \cos(\mathbf{n}, y) \right]^2 \right\} d\sigma \\ = 0. \quad (5.9)$$

Поскольку  $\cos(\mathbf{n}, t) = 1/\sqrt{2}$  на  $\Gamma$ , то из (5.9) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, t) - \frac{\partial u}{\partial t} \cos(\mathbf{n}, x) = 0 \text{ на } \Gamma, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, t) - \frac{\partial u}{\partial t} \cos(\mathbf{n}, y) = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (5.10)$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\partial u / \partial x}{\cos(\mathbf{n}, x)} = \frac{\partial u / \partial y}{\cos(\mathbf{n}, y)} = \frac{\partial u / \partial t}{\cos(\mathbf{n}, t)} \quad \text{на } \Gamma. \quad (5.11)$$



Равенства (5.11) означают, что в каждой точке  $(\mathbf{x}, t) \in \Gamma$  вектор  $\nabla u$  и вектор нормали  $\mathbf{n}$  параллельны, так что с некоторым коэффициентом пропорциональности  $\lambda = \lambda(\mathbf{x}, t)$  справедливо равенство

$$\nabla u(\mathbf{x}, t) = \lambda(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma. \quad (5.12)$$

Обозначим через  $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\mathbf{x}, t)$  единичный вектор образующей конуса в произвольной точке  $(\mathbf{x}, t) \in \Gamma$ . Учитывая (5.12), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial l}(\mathbf{x}, t) \equiv \nabla u(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{l} = \lambda(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{l}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (5.13)$$

Последнее равенство в (5.13) вытекает из условия ортогональности векторов  $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathbf{l}(\mathbf{x}, t)$ . Из (5.13) следует, что на каждой образующей конуса  $u = \text{const}$ . Но во всех точках конуса, где образующие пересекают плоскость  $t = 0$ , согласно (5.4) имеем, что  $u = 0$ . Отсюда следует, что  $u = 0$  вдоль каждой образующей конуса, а следовательно,  $u = 0$  и в точке  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  ■.

Фактически мы доказали, что решение  $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+^3})$  задачи Коши (5.1), (5.2) равно нулю в произвольной точке  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \mathbb{R}_+^3$ , если правая часть  $f$  уравнения (5.1) равна нулю в конусе  $K(\mathbf{x}_0, t_0)$ , а функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  равны нулю в круге  $\Sigma = \Sigma(\mathbf{x}_0, t_0)$ , где  $K(\mathbf{x}_0, t_0) = \{(\mathbf{x}, t) : t > 0, t_0 - t > |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|\}$ ,  $\Sigma(\mathbf{x}_0, t_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < at_0\}$ . Подчеркнем, что указанный факт имеет место независимо от того, какие значения (нулевые или отличные от нуля) принимает правая часть  $f$  вне замкнутого конуса  $\overline{K}$ , а начальные функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  — вне замкнутого круга  $\overline{\Sigma}$ . Другими словами, значения правой части  $f$  вне  $\overline{K}$  и начальных функций  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  вне  $\overline{\Sigma}$  не влияют на значения решения  $u$  в точке  $(\mathbf{x}, t)$ . Обобщая указанный результат на случай  $n$  измерений, приходим к теореме:

**ТЕОРЕМА 5.1.** *Рассмотрим две задачи Коши:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(\mathbf{x}, t) \text{ в } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), u|_{t=0} = \varphi_0(\mathbf{x}), \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(\mathbf{x}) \text{ в } \mathbb{R}^n, \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = g(\mathbf{x}, t) \text{ в } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), v|_{t=0} = \psi_0(\mathbf{x}), \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_1(\mathbf{x}) \text{ в } \mathbb{R}^n. \quad (5.15)$$

*Пусть выполняются условия:*

- (i)  $f = g$  в конусе  $K_n^-(\mathbf{x}_0, t_0) = \{(\mathbf{x}, t) : t > 0, a(t_0 - t) > |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|\}$ ;
- (ii)  $\varphi_0 = \psi_0, \varphi_1 = \psi_1$  в шаре  $\Sigma_{at}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < at_0\}$ .

*Если каждая из задач (5.14), (5.15) имеет регулярное решение, то эти решения тождественно совпадают в  $\overline{K}_n^-(\mathbf{x}_0, t_0)$ .*

**3.5.2. Область зависимости, область влияния и область определения для волнового уравнения.** Основываясь на установленных выше

фактах, введем в рассмотрение еще ряд важных понятий, используемых в теории уравнений в частных производных гиперболического типа, и в частности в теории волновых уравнений.

Пусть  $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \equiv \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  – произвольная точка. *Областью зависимости* для точки  $(\mathbf{x}, t)$  называется то множество точек плоскости  $t = 0$ , данные Коши на котором однозначно определяют значение  $u(\mathbf{x}, t)$  решения волнового уравнения в (5.14) при  $f = 0$ . Из предыдущих результатов вытекает, что в частных случаях  $n = 1, 2, 3$  областью зависимости для точки  $(\mathbf{x}, t)$  является соответственно замкнутый интервал  $I_{at}(\mathbf{x})$ , замкнутый круг  $\Sigma_{at}(\mathbf{x})$  и замкнутый шар  $B_{at}(\mathbf{x})$ , где

$$I_{at}(x) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| \leq at\}, \quad \Sigma_{at}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq at\},$$

$$B_{at}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq at\}. \quad (5.16)$$

Более того, из формулы Кирхгофа (3.19) следует, что при  $n = 3$  областью зависимости для точки  $(\mathbf{x}, t)$  является на самом деле сфера

$$S_{at}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| = at\}. \quad (5.17)$$

Если, далее, носителем данных Коши является некоторая область  $\Omega$  плоскости  $t = 0$ , то данные Коши в области  $\Omega$  *вливают* на решение во всех точках  $(\mathbf{y}, t)$ , такого множества  $K \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ , для которого пересечение  $\Omega \cap \{\mathbf{y} \in K : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq at\}$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$  не пусто. Указанное множество  $K$  называется *множеством влияния* области  $\Omega$ . Оно изображено на рис. 5.1 в случае, когда  $\Omega = (-a, a)$ .

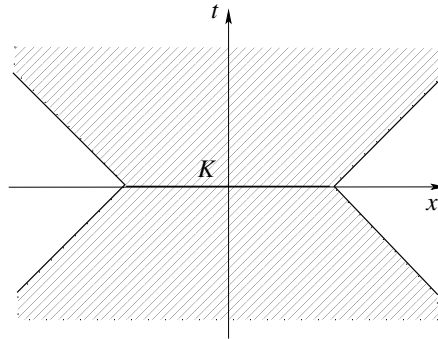


Рис. 5.1

Если  $\Omega$  представляет собой одну точку, т.е.  $\Omega = \{\mathbf{x}\}$ , то множеством влияния  $K$  точки  $\mathbf{x}$  является треугольник будущего

$$K_1^+(x, 0) = \{(y, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) : at > |y - x|\}$$

при  $n = 1$ , трехмерный (пространственно-временной) конус будущего

$$K_2^+(\mathbf{x}, 0) = \{(\mathbf{y}, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) : at > |\mathbf{y} - \mathbf{x}|\}$$

при  $n = 2$  и граница конуса будущего, т.е. характеристический конус будущего:

$$\Gamma_3^+(\mathbf{x}, 0) = \partial K_3^+(\mathbf{x}, 0) = \{(\mathbf{y}, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) : at = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|\}$$

при  $n = 3$ .

Множество точек  $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ , на котором решение  $u$  однозначно определяется по данным Коши в области  $\Omega$ , называется *областью определения*  $u(\mathbf{x}, t)$  с начальными данными в  $\Omega$ . В случае  $n = 1$  (либо  $n = 2$ ) область определения состоит из всех точек  $(\mathbf{x}, t)$ , для которых отрезок  $I_{at}(\mathbf{x})$  (либо круг  $\Sigma_{at}(\mathbf{x})$ ) в (5.16) расположены в  $\Omega$ . При  $n = 3$  область определения состоит из всех точек  $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}_+^4$ , для которых сфера  $S_{at}(\mathbf{x})$  в (5.17) расположена в  $\Omega$ .

Приведенные результаты распространяются на более общую ситуацию, когда носителем данных Коши является поверхность  $S$  *пространственного типа*, а также на случай общих дифференциальных уравнений гиперболического типа. Подробнее об этом можно прочитать в [11, §13], [14], [23].

### Задачи к гл. 3

3.1. Рассмотреть задачу (1.28), (1.29). Указать достаточные условия на правую часть  $f$  уравнения (1.28), при которых функция  $u$ , определяемая формулой (1.35), является регулярным решением данной задачи.

3.2. Рассмотреть задачу (1.40), (1.41), (1.43). Доказать, что при выполнении условий (1.47) функция  $u$ , определяемая формулой (1.49), является регулярным решением (из пространства  $C^2(\overline{Q})$ , где  $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ ).

3.3. Рассмотреть задачу (1.40), (1.41), (1.50). Доказать, что при выполнении условий (1.47) функция  $u$ , определяемая формулой (1.51), является регулярным решением (из пространства  $C^2(\overline{Q})$ , где  $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ ).

3.4. Рассмотреть задачу Коши (3.1), (3.2) в  $\mathbb{R}^3$ . Доказать, что функция  $u$ , определяемая формулой Кирхгофа (3.19), является ее регулярным решением (из пространства  $C^2(\overline{\mathbb{R}_+^3})$ ).

3.5. Рассмотреть задачу Коши (3.21), (3.22) в  $\mathbb{R}^2$ . Доказать, что функция  $u$ , определяемая формулой Пуассона (3.25), является ее регулярным решением (из пространства  $C^2(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ ).

3.6. Рассмотреть задачу Коши (4.1), (4.3) в  $\mathbb{R}^3$ . Доказать, что функция  $u$ , определяемая запаздывающим потенциалом (4.19), является ее регулярным решением (из пространства  $C^2(\overline{\mathbb{R}_+^3})$ ).

3.7. Сформулировать и доказать аналог теоремы 5.1 о единственности решения трехмерного аналога задачи Коши (4.1), (4.3) в  $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$ .

# ГЛАВА 4. Метод разделения переменных (метод Фурье) и волновые процессы в ограниченных областях

## § 4.1. Одномерное волновое уравнение

**4.1.1. Применение метода Фурье для уравнения свободных колебаний струны.** Метод Фурье, или метод разделения переменных, является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Мы изложим этот метод на ряде примеров, начав с простейшей задачи о свободных колебаниях однородной струны длины  $l$ , закрепленной на концах. Указанная задача сводится к решению одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

в области  $Q_T = (0, l) \times (0, T]$ , где  $0 < T < \infty$ , при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad \text{в} \quad (0, T] \quad (1.2)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad \text{в} \quad (0, l). \quad (1.3)$$

Здесь константа  $a > 0$  имеет смысл скорости распространения волн по струне, а  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  – заданные функции, имеющие соответственно смысл начального отклонения и начальной скорости колебания точек струны. Предполагая, что решение  $u$  задачи (1.1)–(1.3) существует и единственно, поставим своей ближайшей целью найти его в явном (аналитическом) виде, более конкретно – в виде функционального ряда.

Будем сначала искать частные решения уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2), не равные тождественно нулю, в виде произведения

$$u(x, t) = T(t)X(x). \quad (1.4)$$

Здесь  $T(t)$  и  $X(x)$  – неизвестные пока функции, каждая из которых зависит только от одной переменной. Подставляя (1.4) в уравнение (1.1), получим:

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x).$$

После деления на  $a^2 X T$  (или, как говорят, *разделения переменных*), приходим к равенству

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (1.5)$$

Левая часть равенства (1.5) зависит только от  $t$ , а правая – только от  $x$ . Поэтому это равенство возможно лишь в том случае, когда и левая и правая части не зависят ни от  $x$ , ни от  $t$ , т.е. представляют собой одну и ту же постоянную. Обозначим эту постоянную через  $-\lambda$ . Тогда из равенства (1.5) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения: уравнение

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \quad (1.6)$$

для  $T$  и уравнение

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (1.7)$$

для  $X$ . Чтобы получить нетривиальные, т.е. не равные тождественно нулю, решения уравнения (1.1) вида (1.4), удовлетворяющие граничным условиям (1.2), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (1.7), удовлетворяющие граничным условиям:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (1.8)$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: *найти такие значения параметра  $\lambda$ , при которых уравнение (1.7) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие граничным условиям (1.8)*. Эти значения параметра  $\lambda$  называются *собственными значениями*, соответствующие решения – *собственными функциями* задачи (1.7), (1.8), а сама задача (1.7), (1.8) называется *спектральной задачей*, или *задачей Штурма–Лиувилля*.

Найдем собственные значения и собственные функции задачи (1.7), (1.8). Для этого рассмотрим отдельно три случая:  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  и  $\lambda > 0$ .

1) При  $\lambda < 0$  общее решение уравнения (1.7) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные. Удовлетворяя граничным условиям (1.8), получим:

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0. \quad (1.9)$$

Как легко заметить, определитель системы (1.9) отличен от нуля; следовательно,  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$  и поэтому  $X(x) \equiv 0$ .

2) При  $\lambda = 0$  общее решение уравнения (1.7) имеет вид

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Граничные условия (1.8) дают  $C_1 + C_2 \cdot 0 = 0$ ,  $C_1 + C_2 l = 0$ . Отсюда  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$  и, следовательно,  $X(x) \equiv 0$ .

3) При  $\lambda > 0$  общее решение уравнения (1.7) имеет вид  $X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$ . Удовлетворяя граничным условиям (1.8), получим  $C_1 = 0$ ,

$C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$ . Мы должны считать  $C_2 \neq 0$ , так как в противном случае  $X(x) \equiv 0$ . Поэтому приходим к равенству  $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$ , т. е.  $\sqrt{\lambda} = (k\pi/l)$ , где  $k$  – любое целое число. Отсюда следует, что нетривиальные решения задачи (1.7), (1.8) возможны лишь при значениях  $\lambda = \lambda_k$ , где

$$\lambda_k = \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.10)$$

Этим собственным значениям отвечают собственные функции – нетривиальные решения уравнения (1.7)

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (1.11)$$

определяемые с точностью до постоянного множителя.

Заметим, что положительные и отрицательные значения  $k$ , равные по модулю, дают собственные значения  $\lambda_{-k} = \lambda_k$ , а соответствующие собственные функции могут отличаться лишь постоянным множителем. Поэтому достаточно для  $k$  брать только целые положительные значения. С учетом этого можно сделать вывод о том, что *множество всех чисел  $\lambda_k$  в (1.10) и функций  $X_k$  в (1.11) образует совокупность всех собственных значений и собственных функций спектральной задачи (1.7), (1.8)*.

Подставим далее в (1.6) вместо  $\lambda$  значения  $\lambda_k$  и запишем общее решение полученного уравнения в виде

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l}, \quad (1.12)$$

где  $a_k$  и  $b_k$  – произвольные постоянные. В соответствии с (1.4) введем функции:

$$u_k(x, t) = T_k(t) X_k(x) = \left( a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

Из построения вытекает, что функции  $u_k$  при любом  $k$  и любых  $a_k$  и  $b_k$  удовлетворяют уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2). То же справедливо и для любой линейной комбинации функций (1.13), а также ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (1.14)$$

при условии, что он равномерно вместе с производной по  $t$  сходится в замкнутой области  $\overline{Q}_T = [0, l] \times [0, T]$ , и его можно дважды почленно дифференцировать по  $x$  и  $t$  внутри  $Q_T$ . Остается определить постоянные  $a_k$  и  $b_k$  в (1.14) так, чтобы ряд (1.14) удовлетворял и начальным условиям (1.3).

Продифференцируем ряд (1.14) по  $t$ . Получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} \left( -a_k \sin \frac{k\pi at}{l} + b_k \cos \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.15)$$

Подставляя (1.14) и (1.15) в начальные условия (1.3), приходим к соотношениям

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.16)$$

Формулы (1.16) представляют собой разложения заданных функций  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  в ряд Фурье по синусам (1.11) в интервале  $(0, l)$ . Из теории рядов Фурье (см., например, [19, с.317]) вытекает, что система (1.11) является полной, например, в пространстве непрерывных функций  $C[0, l]$ , причем коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  разложений (1.16) однозначно определяются по (непрерывным) функциям  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  с помощью формул

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (1.17)$$

Тем самым решение задачи (1.1)–(1.3) построено. Оно имеет вид ряда (1.14), где  $a_k$  и  $b_k$  определяются формулами (1.17), при условии, что ряд (1.14) равномерно сходится в замкнутой области  $\overline{Q}_T$  вместе с производной  $\partial u / \partial t$  (при выполнении этих условий ряд (1.14) удовлетворяет граничным условиям (1.2) и начальным условиям (1.3)), и его можно дважды почленно дифференцировать по  $x$  и  $t$  в  $Q_T$  (при выполнении этих условий ряд (1.14) удовлетворяет уравнению (1.1) в каждой точке  $(x, t) \in Q_T$ ).

Изложенный выше метод нахождения решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) в виде функционального ряда (1.14) носит название *метода разделения переменных* или *метода Фурье* по имени французского математика Ж.Фурье, который с достаточной полнотой развил этот метод в начале 19-го века. (Сама же идея применения метода разделения переменных для решения волнового уравнения была предложена впервые другим французским математиком – Ж.Даламбером в 1749 г.). Как вытекает из предыдущих рассуждений, суть этого метода в применении к задаче (1.1)–(1.3) заключается в том, чтобы: 1) построить достаточно широкий набор частных решений  $u_k$  исходного уравнения (1.1), удовлетворяющих однородным граничным условиям (1.2), в виде произведения (1.13) двух функций:  $T_k$  и  $X_k$ , зависящих от одной переменной, соответственно  $t$  или  $x$  и 2) составив ряд (1.14) из указанных частных решений, подобрать в нем коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  так, чтобы, с одной стороны, ряд (1.14) сходил равномерно в замкнутой области  $\overline{Q}_T$  (вместе с производной  $\partial u / \partial t$ ) и его можно было дважды почленно дифференцировать по  $x$  и  $t$  внутри  $Q_T$ , а с

другой стороны, чтобы ряд (1.14) удовлетворял начальным условиям (1.3). Исследованию равномерной сходимости ряда (1.14), т. е. обоснованию применения метода Фурье для решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.3), посвящен следующий пункт.

**4.1.2. Обоснование метода Фурье.** Возможность применения метода Фурье для решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) основывается на следующей теореме о достаточных условиях равномерной сходимости функционального ряда (1.14) и его почленного дифференцирования.

**ТЕОРЕМА 1.1.** *Если функция  $\varphi_0$  дважды непрерывно-дифференцируема на интервале  $[0, l]$ , имеет кусочно-непрерывную третью производную и удовлетворяет условиям:*

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = 0, \quad \varphi_0''(0) = \varphi_0''(l) = 0, \quad (1.18)$$

*а функция  $\varphi_1$  непрерывно-дифференцируема на  $[0, l]$ , имеет кусочно-непрерывную вторую производную и удовлетворяет условиям:*

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0, \quad (1.19)$$

*то функция  $u$ , определяемая рядом (1.14), имеет непрерывные производные второго порядка в замкнутой области  $\overline{Q}_T$  (т.е.  $u \in C^{2,2}(\overline{Q}_T)$ ) и удовлетворяет уравнению (1.1) в каждой точке  $(x, t) \in \overline{Q}_T$ , граничным условиям (1.2) при  $t \in [0, T]$  и начальным условиям (1.3) при  $x \in [0, l]$ . При этом возможно почленное дифференцирование ряда (1.14) по  $x$  и  $t$  два раза, и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно в  $\overline{Q}_T$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Интегрируя трижды по частям в (1.17) и принимая во внимание (1.18) и (1.19), получим:

$$a_k = - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{b_k^{(3)}}{k^3}, \quad b_k = - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \frac{a_k^{(2)}}{ak^3}, \quad (1.20)$$

где

$$b_k^{(3)} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0'''(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad a_k^{(2)} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1''(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (1.21)$$

Нетрудно видеть, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k^{(2)}|}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k^{(3)}|}{k} \quad (1.22)$$

сходятся. Действительно, применяя неравенство Коши, имеем:

$$\frac{|a_k^{(2)}|}{k} \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k^2} + |a_k^{(2)}|^2 \right], \quad \frac{|b_k^{(3)}|}{k} \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k^2} + |b_k^{(3)}|^2 \right].$$



В таком случае сходимость рядов (1.22) вытекает из очевидной сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$  (см., например, [18, с. 425]) и рядов  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(2)}|^2$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k^{(3)}|^2$ . Последние сходятся как ряды, составленные из квадратов коэффициентов сходящегося ряда Фурье [19, с. 311].

Подставляя (1.20) в ряд (1.14), получим

$$u(x, t) = - \left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left( b_k^{(3)} \cos \frac{k\pi at}{l} + \frac{1}{a} a_k^{(2)} \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.23)$$

Этот ряд мажорируется в замкнутой области  $\overline{Q}_T$  числовым рядом

$$\left( \frac{l}{\pi} \right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left( |b_k^{(3)}| + \frac{1}{a} |a_k^{(2)}| \right),$$

который, очевидно, сходится. (Это доказывается так же, как и сходимость рядов (1.22)). Отсюда следует, согласно признаку равномерной сходимости функционального ряда [19], абсолютная и равномерная сходимость ряда (1.14) в  $\overline{Q}_T$ , откуда, в свою очередь, вытекает, что ряд (1.14) удовлетворяет граничным условиям (1.2) и первому начальному условию в (1.3).

Аналогичным образом показывается, что ряды, полученные (формально) однократным либо двухкратным дифференцированием ряда (1.14), мажорируются в  $\overline{Q}_T$  сходящимися числовыми рядами, а следовательно, равномерно сходятся в  $\overline{Q}_T$ . Поскольку каждый член ряда (1.14) удовлетворяет уравнению (1.1) в каждой точке  $(x, t) \in \overline{Q}_T$ , то отсюда следует, что ряд (1.14) удовлетворяет уравнению (1.1) по крайней мере в каждой точке  $(x, t) \in \overline{Q}_T$ . ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.** Из теоремы 1.1 вытекает, что при выполнении ее условий на начальные функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  существует по крайней мере одно *регулярное* решение  $u \in C^{2,2}(\overline{Q}_T)$  задачи (1.1)–(1.3), и это решение имеет вид ряда (1.14), а из теоремы единственности, которая будет доказана в более общем случае в § 4.2 (см. теорему 2.1), вытекает, что ряд (1.14) является единственным решением задачи (1.1)–(1.3).

**4.1.3. Физический анализ решения.** Вернемся к полученному решению задачи (1.1)–(1.3) в виде ряда (1.14) и обсудим его физический смысл. Полагая  $\alpha_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ ,  $\varphi_k = \arctg(a_k/b_k)$ , представим величины  $a_k$  и  $b_k$  в виде

$$a_k = \alpha_k \sin \varphi_k, \quad b_k = \alpha_k \cos \varphi_k. \quad (1.24)$$

Используя (1.24), запишем (1.14) в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left( \frac{k\pi at}{l} + \varphi_k \right). \quad (1.25)$$

$k$ -й член ряда (1.25)

$$\alpha_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left( \frac{k\pi a t}{l} + \varphi_k \right), \quad (1.26)$$

будучи решением волнового уравнения (1.1), описывает волну, которую называют  $k$ -й гармонической волной или  $k$ -й гармоникой. Такое название обусловлено тем, что в отвечающем волне (1.26) процессе движения струны каждая ее точка совершает гармоническое колебательное движение (вверх–вниз) с одной и той же *начальной фазой*  $\varphi_k$ , *круговой частотой*  $\omega_k$  и *переменной* (зависящей от  $x$ ) *амплитудой*  $A_k(x)$ , определяемыми формулами

$$\omega_k = \frac{k\pi a}{l} = \frac{k\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad A_k(x) = \alpha_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.27)$$

Здесь  $\rho$  – плотность струны,  $T$  – натяжение струны.

В точках

$$x = 0, \frac{l}{k}, \frac{2l}{k}, \dots, \frac{(k-1)l}{k}, l \quad (1.28)$$

амплитуда  $A_k(x)$  обращается в нуль, так что в этих точках, называемых *узлами*  $k$ -й гармоник, колебательного процесса не происходит, т. е. волна (1.26) как бы стоит в них. С учетом этого гармонику (1.26) называют  $k$ -й *стоячей волной*. В точках же

$$\frac{l}{2k}, \frac{3l}{2k}, \dots, \frac{(2k-1)l}{2k} \quad (1.29)$$

амплитуда  $A_k(x)$  достигает наибольшей по модулю величины, так как функция  $\sin(k\pi x/l)$  в этих точках достигает максимального абсолютного значения, равного единице. Указанные точки называют *пучностями* для  $k$ -й гармоник.

Следует отметить, что сам по себе процесс колебания струны не представляет собой особого интереса для человечества. Гораздо большую ценность для людей представляет собой следствие этого процесса, а именно *звук*, который неизменно сопровождает процесс колебания струны (или, как говорят физики, *излучается* при колебании струны). Не имея возможности останавливаться здесь на объяснении физического процесса распространения звуковых колебаний в среде и физиологическом процессе восприятия звука органами слуха человека, отметим, что излучаемый струной звук представляет собой суперпозицию (сумму) простейших гармонических звуковых колебаний, называемых *простыми тонами*. Каждый ( $k$ -й) такой тон отвечает конкретной ( $k$ -й) гармонике струны, т. е. излучается, когда струна совершает чистое гармоническое колебание, описываемое функцией (1.26). Частота первого (самого низкого) тона совпадает с

частотой  $\omega_1$  первой гармоники струны, частота второго тона совпадает с частотой  $\omega_2$ , и т. д. Здесь с учетом (1.27) имеем:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}a = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad \dots \quad (1.30)$$

Амплитуда  $k$ -го тона определяется амплитудой  $\alpha_k$   $k$ -й гармоники, которая в силу (1.24) и (1.17) убывает с ростом  $k$  как коэффициент сходящегося ряда Фурье. С учетом этого влияние всех гармоник на звук, излучаемый струной, сводится к созданию *тембра*, т. е. качества звука. Последнее определяется, с одной стороны, основной частотой  $\omega_1$ , зависящей согласно (1.30) от длины  $l$ , плотности  $\rho$  и натяжения  $T$  струны, а с другой стороны – характером убывания к нулю амплитуд  $\alpha_k$  гармоник. Поскольку тембр звука, издаваемого струной, зависит от параметров  $l, \rho$  и  $T$ , то, меняя эти параметры и выбирая нужным образом функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , можно создать звук, наиболее приятный в музыкальном отношении. Более подробно об этом можно прочесть в литературе по физиологической акустике (см. также [56, с. 93–96]).

**4.1.4. Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах.** Рассмотрим задачу определения вынужденных колебаний однородной струны, закрепленной на концах, под действием внешних источников с объемной плотностью  $f(x, t)$ . Указанная задача сводится к нахождению решения  $u$  неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{в} \quad Q_T = (0, l) \times (0, T], \quad (1.31)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad \text{в} \quad (0, T], \quad (1.32)$$

где  $g_1 \in C^1[0, T]$  и  $g_2 \in C^1[0, T]$  – заданные функции, и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad \text{в} \quad (0, l). \quad (1.33)$$

Будем искать решение  $u$  этой задачи в виде суммы

$$u = v + w. \quad (1.34)$$

Здесь  $v$  – решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{в} \quad Q_T, \quad (1.35)$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 \quad \text{в} \quad (0, T] \quad (1.36)$$

и однородным начальным условиям

$$v|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad (0, l), \quad (1.37)$$

а  $w$  – решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{в} \quad Q_T, \quad (1.38)$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0 \quad \text{в} \quad (0, T] \quad (1.39)$$

и неоднородным начальным условиям

$$w|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad \text{в} \quad (0, l). \quad (1.40)$$

Решение  $v$  задачи (1.35)–(1.37) описывает *вынужденные* колебания струны, т. е. такие колебания, которые совершаются под действием внешней возмущающей силы с плотностью  $f$  в (1.35), причем в отсутствие начальных возмущений. Решение задачи (1.38)–(1.40) описывает *свободные* колебания струны, т. е. колебания, происходящие без действия внешней силы, а лишь под действием начального возмущения струны. Поскольку задача (1.38)–(1.40) о свободных колебаниях струны уже решена в п. 4.1.1, то для решения исходной задачи (1.31)–(1.33) достаточно найти решение  $v$  задачи (1.35)–(1.37). Как и в п. 4.1.1, применим для этого метод Фурье.

Следуя методу Фурье, будем искать решение  $v$  в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.41)$$

В таком случае граничные условия (1.36) удовлетворяются автоматически, если, конечно, ряд (1.41) сходится равномерно в замкнутой области  $\overline{Q}_T$ . Определим теперь функции  $T_k(t)$  в (1.41) так, чтобы ряд (1.41) удовлетворял уравнению (1.35) и обоим начальным условиям в (1.37). Подставляя (1.41) в (1.35) и рассуждая формально, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} [T_k''(t) + \omega_k^2 T_k(t)] \sin \frac{k\pi x}{l} = f(x, t), \quad (1.42)$$

где  $\omega_k = k\pi a/l$ . Предположим, что функцию  $f$  можно разложить в ряд Фурье по синусам (1.11) в интервале  $(0, l)$ :

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.43)$$

Здесь коэффициенты  $f_k(t)$ , зависящие от  $t$  как от параметра, определяются аналогично (1.17) формулой

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (1.44)$$

Соотношения (1.42) и (1.43) фактически представляют собой разложения одной и той же функции  $f$  в ряд Фурье по синусам  $\sin(k\pi x/l)$ . Приравнявая соответствующие коэффициенты обоих разложений, приходим к равенствам

$$T_k''(t) + \omega_k^2 T_k(t) = f_k(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.45)$$

При каждом  $k = 1, 2, \dots$  (1.45) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции  $T_k$ . Чтобы однозначно определить  $T_k$ , зададим с учетом однородности начальных условий в (1.37) нулевые начальные условия

$$T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.46)$$

Решение уравнения (1.45) при начальных условиях (1.46) имеет вид

$$T_k(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t f_k(\tau) \sin \omega_k(t - \tau) d\tau \quad (1.47)$$

или (после подстановки вместо  $f_k(\tau)$  их выражений из (1.44))

$$T_k(t) = \frac{2}{l\omega_k} \int_0^t [\sin \omega_k(t - \tau) \int_0^l f(x, \tau) \sin \frac{k\pi x}{l} dx] d\tau. \quad (1.48)$$

Подставляя найденные выражения для  $T_k$  в ряд (1.41), получим функцию  $v$ , которая с учетом (1.46) и является искомым решением задачи (1.35)–(1.37) при естественном условии равномерной сходимости ряда (1.41) и ряда, полученного почленным дифференцированием (1.41) по  $t$ , в замкнутой области  $\overline{Q}_T$ , а также рядов, полученных двукратным почленным дифференцированием ряда (1.41) по  $x$  и  $t$ , в области  $Q_T$ . Можно показать, рассуждая по той же схеме, что и в теореме 1.1, что равномерная сходимость соответствующих рядов будет обеспечена, если выполняются условия

$$f \in C^2(\overline{Q}_T) \quad \text{и} \quad f(0, t) = 0, \quad f(l, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.49)$$

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что решение исходной задачи (1.31)–(1.34) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (1.50)$$

Здесь функции  $T_k$  определяются из (1.48), а коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  определяются формулами (1.17). Физический анализ решения проводится по той же схеме, что и в п. 4.1.3, и мы на нем не будем останавливаться.

**4.1.5. Вынужденные колебания струны с подвижными концами.** В заключение рассмотрим общую задачу об определении вынужденных колебаний однородной струны под действием внешних источников с плотностью  $f$  и начальных возмущений  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  в предположении, что концы струны не закреплены, а движутся по заданному закону. Указанная задача сводится к нахождению решения неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{в } Q_T, \quad (1.51)$$

удовлетворяющего неоднородным граничным условиям

$$u|_{x=0} = g_1(t), \quad u|_{x=l} = g_2(t) \quad \text{в } (0, T] \quad (1.52)$$

где  $g_1, g_2 \in C^1[0, T]$  – заданные функции, и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad \text{в } (0, l). \quad (1.53)$$

Для нахождения решения задачи (1.51)–(1.53) сведем ее с помощью замены зависимой переменной к задаче с однородными краевыми условиями, а далее воспользуемся изложенным в п. 4.1.4 методом решения последней. С этой целью введем вспомогательную функцию

$$w(x, t) = g_1(t) + [g_2(t) - g_1(t)] \frac{x}{l}. \quad (1.54)$$

Ясно, что

$$w|_{x=0} = g_1(t), \quad w|_{x=l} = g_2(t). \quad (1.55)$$

Решение  $u$  задачи (1.51)–(1.53) будем искать в виде

$$u = v + w, \quad (1.56)$$

где  $v$  – новая искомая функция. Из линейности граничных и начальных условий в (1.52), (1.53) и (1.55) вытекает, что  $v$  должна удовлетворять однородным граничным условиям  $v|_{x=0} = 0$ ,  $v|_{x=l} = 0$  и начальным условиям

$$v|_{t=0} = u|_{t=0} - w|_{t=0} = \varphi_0(x) - g_1(0) - [g_2(0) - g_1(0)] \frac{x}{l} \equiv \bar{\varphi}_0(x),$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} - \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) - g'_1(0) - [g'_2(0) - g'_1(0)] \frac{x}{l} \equiv \bar{\varphi}_1(x).$$

Подставляя далее (1.56) в уравнение (1.51), получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{f}(x, t), \quad \bar{f}(x, t) = f(x, t) - g_1''(t) - [g_2''(t) - g_1''(t)] \frac{x}{l}.$$

В результате исходная задача (1.51)–(1.53) свелась к задаче нахождения функции  $v$  из условий

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{f}(x, t), \quad v|_{x=0} = 0, v|_{x=l} = 0, \quad v|_{t=0} = \bar{\varphi}_0(x), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \bar{\varphi}_1(x). \quad (1.57)$$

Определив решение  $v$  задачи (1.57) изложенным в п. 4.1.4 методом и подставив в (1.56), получим искомое решение исходной задачи (1.51)–(1.53).

**4.1.6. Некоторые замечания о методе Фурье.** Описанный выше метод Фурье применяется по аналогичной схеме и для решения других задач математической физики: как одномерных так и многомерных, стационарных либо нестационарных, в пространственных областях как с прямолинейными границами типа прямоугольника на плоскости  $\mathbb{R}^2$  либо параллелепипеда в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , так и с криволинейными границами типа круга и эллипса в  $\mathbb{R}^2$ , шара, эллипсоида, сфероида (т.е. эллипсоида вращения) и т. д. в  $\mathbb{R}^3$ . Следует однако отметить, что метод Фурье можно применять для решения лишь достаточно узкого класса задач математической физики, а именно тех задач, которые (выражаясь языком современной терминологии) допускают *разделение переменных*.

Возможность такого разделения зависит, с одной стороны, от рассматриваемого уравнения с частными производными, которое либо должно быть уравнением с постоянными коэффициентами (как уравнение (1.1)), либо должно иметь переменные коэффициенты специальной структуры (см., например, § 4.2 и 4.3), а с другой стороны, она зависит от вида рассматриваемой пространственной области. Известно (см., например, [56]), что разделение переменных в трехмерном волновом уравнении (с постоянными коэффициентами), рассматриваемом в некоторой области  $\Omega$  с границей  $S$ , возможно лишь в том случае, когда граница  $S$  совпадает с координатной поверхностью одной из 11 систем координат. К числу таких поверхностей относятся, например, цилиндр, сфера, эллипсоид и сфероид.

Отметим при этом, что для применения метода Фурье в таких случаях волновое уравнение необходимо рассматривать не в декартовых, а в криволинейных координатах, в которых граница  $S$  совпадает с соответствующей координатной поверхностью; т. е. в цилиндрических координатах, если  $S$  – цилиндр, сферических координатах, если  $S$  – сфера и т. д. Последующее применение метода разделения переменных к таким уравнениям приводит к необходимости нахождения решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами специальной

структуры, имеющими особенности в одной или нескольких точках. Указанные решения называются *специальными функциями* математической физики. Два примера использования специальных функций, а именно цилиндрических функций Бесселя, Ханкеля и сферических функций Ханкеля при решении волнового уравнения в круге либо во внешности сферы, будут приведены соответственно в § 4.3 и 4.4. Детальное описание свойств специальных функций и примеры их применения для решения задач математической физики можно найти, например, в [37, 56].

## § 4.2. Одномерное волновое уравнение с переменными коэффициентами

**4.2.1. Постановка задачи. Применение метода Фурье.** Рассмотрим однородное одномерное уравнение с переменными коэффициентами

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x)u \equiv p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p'(x) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x)u \text{ в } Q_T. \quad (2.1)$$

Здесь  $\rho, p$  и  $q$  – заданные на интервале  $[0, l]$  функции,  $Q_T = (0, l) \times (0, T]$ ,  $0 < T < \infty$ . Пусть требуется найти решение  $u$  уравнения (2.1), удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\alpha u(0, t) - \beta \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \gamma u(l, t) + \delta \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \quad t \in (0, T] \quad (2.2)$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad x \in (0, l). \quad (2.3)$$

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  – некоторые константы,  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  – заданные на  $(0, l)$  начальные функции. Будем предполагать, что выполняются условия:

- (i) функции  $\rho, p, p', q$  непрерывны на  $[0, l]$  и  $p(x) \geq p_0 = \text{const} > 0$ ,  $\rho(x) \geq \rho_0 = \text{const} > 0$ ,  $q(x) \geq 0 \forall x \in [0, l]$ ;
- (ii)  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$  и  $\alpha + \beta \neq 0$ ,  $\gamma + \delta \neq 0$ .

Из результатов § 2.1 вытекает, что при выполнении условий (i) уравнение (2.1) представляет собой гиперболическое уравнение, описывающее одномерные волновые процессы в неоднородных средах.

Применим для нахождения решения начально-краевой задачи (2.1)–(2.3) метод Фурье. Следуя ему, будем искать частные решения уравнения (2.1), удовлетворяющие граничным условиям (2.2), в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в уравнение (2.1), получим соотношение

$$\rho(x)X(x)T''(t) = T(t)[p(x)X'(x)]' - q(x)X(x)T(t),$$



которое после разделения переменных принимает вид

$$\frac{[p(x)X'(x)]' - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (2.5)$$

Левая часть равенства (2.5) зависит только от  $x$ , а правая часть – только от  $t$ . Поэтому это равенство возможно лишь тогда, когда каждая из этих частей равна константе. Обозначим ее через  $-\lambda$ . Тогда из (2.5) приходим к следующим двум обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно неизвестных функций  $T$  и  $X$ :

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad (2.6)$$

$$[p(x)X'(x)]' + [\lambda\rho(x) - q(x)]X(x) = 0. \quad (2.7)$$

Чтобы получить нетривиальные решения уравнения (2.1) вида (2.4), удовлетворяющие граничным условиям (2.2), необходимо, чтобы функция  $X$  удовлетворяла граничным условиям

$$\alpha X(0) - \beta X'(0) = 0, \quad \gamma X(l) + \delta X'(l) = 0. \quad (2.8)$$

В результате мы приходим к следующей задаче, называемой *спектральной задачей* либо задачей *Штурма–Лиувилля*: найти такие значения параметра  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения (2.7), удовлетворяющие граничным условиям (2.8). Те значения параметра  $\lambda$ , при которых спектральная задача (2.7), (2.8) имеет нетривиальные решения, называются *собственными значениями*, а сами эти решения – *собственными функциями*, отвечающими данному собственному значению (сравните с аналогичным определением в § 4.1).

**4.2.2. Некоторые свойства решения спектральной задачи.** Можно доказать (см., например, [11, § 22]; [21, гл. 32]; [48, гл. 2]), что при выполнении условий (i), (ii) существует счетное множество собственных значений спектральной задачи (2.7), (2.8). Указанные собственные значения вещественны, простые, и их можно занумеровать так, что выполняется условие

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_k < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty. \quad (2.9)$$

Докажем, например, что собственные значения простые. Предположим противное, что некоторое собственное значение  $\lambda$  является кратным. Последнее означает, что для этого  $\lambda$  существует два линейно независимых решения уравнения (2.7), удовлетворяющие граничным условиям (2.8). Тогда и общее решение уравнения (2.7), представляющее собой их линейную комбинацию, также обязано удовлетворять этим условиям. Но это не верно.

Каждому собственному значению  $\lambda_k$  отвечает собственная функция  $X_k$ , определяемая с точностью до постоянного множителя. Выберем ее так,

чтобы выполнялось условие

$$\int_0^l \rho(x) X_k^2(x) dx = 1. \quad (2.10)$$

Собственные функции, удовлетворяющие условию (2.10), будем называть *нормированными* (с весом  $\rho$ ).

Докажем, что собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны с весом  $\rho$  на интервале  $(0, l)$ , т. е. что

$$\int_0^l \rho(x) X_k(x) X_m(x) dx = 0 \quad (k \neq m). \quad (2.11)$$

Действительно, пусть  $\lambda_k$  и  $\lambda_m$  — два различных собственных значения, а  $X_k$  и  $X_m$  — отвечающие им собственные функции, удовлетворяющие граничным условиям (2.8) и соответственно уравнениям

$$\begin{aligned} [p(x) X_k'(x)]' + [\lambda_k \rho(x) - q(x)] X_k(x) &= 0, \\ [p(x) X_m'(x)]' + [\lambda_m \rho(x) - q(x)] X_m(x) &= 0. \end{aligned}$$

Умножим первое равенство на  $X_m$ , второе — на  $X_k$  и вычтем. Получим равенство

$$X_m(x) [p(x) X_k'(x)]' - X_k(x) [p(x) X_m'(x)]' + (\lambda_k - \lambda_m) \rho(x) X_k(x) X_m(x) = 0,$$

которое, как нетрудно видеть, можно переписать в виде

$$(\lambda_k - \lambda_m) \rho(x) X_k(x) X_m(x) + \frac{d}{dx} \{p(x) [X_m(x) X_k'(x) - X_k(x) X_m'(x)]\} = 0.$$

Интегрируя это равенство по  $x$  в пределах от 0 до  $l$ , получим

$$(\lambda_m - \lambda_k) \int_0^l \rho(x) X_k(x) X_m(x) dx = p(x) [X_m(x) X_k'(x) - X_k(x) X_m'(x)] \Big|_{x=0}^{x=l}. \quad (2.12)$$

Принимая во внимание граничные условия (2.8), легко убеждаемся, что правая часть в (2.12) равна нулю. В таком случае из (2.12) следует, что

$$(\lambda_k - \lambda_m) \int_0^l \rho(x) X_k(x) X_m(x) dx = 0.$$

Отсюда в силу условия  $\lambda_m \neq \lambda_k$  вытекает (2.11).

Из свойства ортогональности собственных функций легко следует, что все собственные значения задачи (2.7), (2.8) вещественны. Покажем, более того, что все они неотрицательны. Действительно, пусть  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  —

все собственные значения задачи (2.7), (2.8), а  $X_1, X_2, \dots$  – отвечающая им ортонормированная (с весом  $\rho$ ) система собственных функций. Согласно определению имеем

$$[p(x)X'_k(x)]' - q(x)X_k(x) = -\lambda_k \rho(x)X_k(x). \quad (2.13)$$

Умножая обе части на  $X_k$ , интегрируя и учитывая (2.10), получим

$$\lambda_k = - \int_0^l \{ [p(x)X'_k(x)]' - q(x)X_k(x) \} X_k(x) dx.$$

Отсюда, после интегрирования первого слагаемого по частям, будем иметь

$$\lambda_k = \int_0^l [p(x)(X'_k(x))^2 + q(x)X_k^2(x)] dx - [p(x)X_k(x)X'_k(x)] \Big|_{x=0}^{x=l}. \quad (2.14)$$

Предположим, что

$$[p(x)X_k(x)X'_k(x)] \Big|_{x=0}^{x=l} \leq 0. \quad (2.15)$$

Так как  $p(x) \geq p_0 > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ , то из формулы (2.14) непосредственно следует, что  $\lambda_k \geq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Таким образом, в дополнение к (2.9) имеем

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \quad (2.16)$$

Легко проверить, что условие (2.15) выполняется при следующих наиболее часто встречающихся в приложениях граничных условиях, являющихся частными случаями условий (2.2):

$$\begin{aligned} 1) X(0) = X(l) = 0; \quad 2) X'(0) = X'(l) = 0; \\ 3) X'(0) - h_1 X(0) = 0, \quad X'(l) + h_2 X(l) = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь  $h_1$  и  $h_2$  – положительные числа.

Отметим еще одно важное свойство собственных функций спектральной задачи (2.7), (2.8) – свойство полноты в пространстве  $C^1[0, l]$ . Оно состоит в том, что любая функция  $v \in C^1[0, l]$  разлагается в ряд Фурье

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x),$$

сходящийся к  $v$  в среднем. Последнее означает, что

$$\int_0^l |v(x) - \sum_{k=1}^N a_k X_k(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Здесь коэффициенты  $a_k$  определяются формулами

$$a_k = \int_0^l \rho(x) v(x) X_k(x) dx. \quad (2.18)$$

Перечислим кратко еще раз основные свойства собственных значений и функций задачи (2.7), (2.8), справедливые при выполнении условий (i), (ii).

1. Существует счетное множество собственных значений и отвечающих им собственных функций задачи (2.7), (2.8), причем выполняется (2.9).

2. Собственные значения  $\lambda_k$  простые.

3. Собственные функции, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны с весом  $\rho(x)$  на  $(0, l)$ , т. е. удовлетворяют условию (2.11).

4. Система собственных функций  $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$  является полной в пространстве  $C^1[0, l]$ .

5. В случае, когда граничные условия таковы, что выполняются условия (2.15), например, имеют вид, указанный в (2.17), все собственные значения неотрицательны, так что выполняется условие (2.16). При этом равенство  $\lambda_1 = 0$  в (2.16) выполняется тогда и только тогда, когда отвечающая  $\lambda_1$  собственная функция  $X_1$  есть константа, отличная от нуля. Последнее выполняется, например, в случае, когда  $q(x) \equiv 0$ , а граничные условия в (2.2) имеют смысл условий Неймана, т. е. имеют вид условий 2) в (2.17).

В заключение приведем явные формулы для собственных значений и собственных функций спектральной задачи (2.7), (2.8) в том частном случае, когда  $\rho = 1$ ,  $p = a^2 = \text{const}$ ,  $q = 0$ , так что (2.1) переходит в волновое уравнение (1.1), а (2.7) принимает вид

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{в} \quad (0, l).$$

Рассмотрим несколько типов краевых условий в (2.8).

1)  $\alpha = \gamma = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\delta = 0$ . Условия (2.8) принимают вид

$$X(0) = X(l) = 0.$$

В § 4.1 было показано, что собственные значения  $\lambda_k$  и функции  $X_k$  соответствующей спектральной задачи определяются соотношениями

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, \dots$$

2)  $\alpha = \gamma = 0$ ,  $\beta = -1$ ,  $\delta = 1$ . Условия (2.8) принимают вид

$$X'(0) = X'(l) = 0.$$

Простой анализ (см., например, [21]) показывает, что собственные значения  $\lambda_k$  и функции  $X_k$  определяются соотношениями

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos \frac{k\pi}{l}x, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим еще раз, что именно в случае краевых условий Неймана первое собственное значение равно нулю, а отвечающая ему собственная функция есть константа:  $\lambda_0 = 0$ ,  $X_0(x) = \text{const}$ .

3)  $\alpha = \delta = 1, \beta = \gamma = 0$ . Условия (2.8) принимают вид

$$X(0) = 0, \quad X'(l) = 0.$$

Аналогичный анализ (см., например, [21, с. 127]) показывает, что

$$\lambda_k = \left[ \frac{(2k+1)\pi}{2l} \right]^2, \quad X_k(x) = \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x, \quad k = 1, 2, \dots$$

3')  $\alpha = \delta = 0, \beta = -1, \gamma = 1$ . Условия (2.8) принимают вид

$$X'(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Собственные значения и функции имеют вид:

$$\lambda_k = \left[ \frac{(2k+1)\pi}{2l} \right]^2, \quad X_k(x) = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x, \quad k = 1, 2, \dots$$

4)  $\alpha = 1, \beta = 0, \delta = 1$ . Условия (2.8) принимают вид

$$X(0) = 0, \quad X'(l) + \gamma X(l) = 0.$$

Собственными значениями в данном случае являются корни  $\lambda$  трансцендентного уравнения:

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\gamma}.$$

Можно показать (см. [7, 21]), что это уравнение имеет счетное множество корней и, следовательно, существует счетное множество собственных значений  $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$ . Собственные функции имеют вид

$$X_k(x) = \sin \sqrt{\lambda_k} x, \quad k = 1, 2, \dots$$

**4.2.3. Представление решения в виде ряда Фурье.** Обратимся теперь к уравнению (2.6). Его общее решение при  $\lambda = \lambda_k$  имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t, \quad (2.19)$$

где  $a_k$  и  $b_k$  – произвольные постоянные. По построению функция

$$u_k(x, t) = X_k(x) T_k(t) = (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x) \quad (2.20)$$

при любом  $k = 1, 2, \dots$  удовлетворяет уравнению (2.1) и граничным условиям (2.2). Чтобы найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям (2.3), составим ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x). \quad (2.21)$$

Если этот ряд сходится равномерно, как и ряды, получающиеся из него двукратным почленным дифференцированием по  $x$  и  $t$ , то его сумма будет по-прежнему удовлетворять уравнению (2.1) и граничным условиям (2.2). Чтобы эта сумма удовлетворяла и начальным условиям (2.3), необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\lambda_k} X_k(x). \quad (2.22)$$

Соотношения в (2.22) представляют собой разложения начальных функций  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  в ряд Фурье по полной системе собственных функций  $\{X_k\}$  спектральной задачи (2.7), (2.8). Предполагая, что соответствующие ряды в (2.22) равномерно сходятся на интервале  $[0, l]$ , стандартным образом можно определить коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$ . Для этого нужно умножить обе части каждого из равенств в (2.22) на  $\rho X_k$  и проинтегрировать по  $x$  в пределах от 0 до  $l$ . Учитывая (2.10) и предполагая, что  $\lambda_k > 0$ , получим:

$$a_k = \int_0^l \rho(x) \varphi_0(x) X_k(x) dx, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^l \rho(x) \varphi_1(x) X_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Подставив найденные таким образом значения коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  в ряд (2.21), получим функцию  $u$ , являющуюся по построению искомым решением задачи (2.1)–(2.3) при условии, конечно, что ряд (2.21) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием, сходятся в соответствующих областях. Последнее обеспечивается соответствующим аналогом теоремы 1.1, который справедлив при выполнении определенных условий на начальные функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  и свойства собственных значений и собственных функций спектральной задачи (2.7), (2.8). Более подробно об этом можно прочитать в [7], [11], [21], [48].

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.** По аналогичной схеме с использованием метода Фурье находится решение краевой задачи для неоднородного аналога

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x)u + f(x, t) \quad (2.23)$$

уравнения (2.1) в предположении, что плотность объемных источников  $f$  в (2.23) можно разложить в ряд Фурье по собственным функциям  $X_k$  задачи (2.7), (2.8). Если, к тому же, уравнение (2.23) рассматривается при неоднородных граничных условиях, например, при условиях

$$u|_{x=0} = g_1(t), \quad u|_{x=l} = g_2(t), \quad t \in (0, T], \quad (2.24)$$

то предварительно задачу (2.23), (2.24), (2.3) следует свести с помощью замены переменных к краевой задаче для уравнения вида (2.23) с однородными граничными условиями, а далее применить метод Фурье.

**4.2.4. Единственность и устойчивость решения задачи Дирихле.** Докажем единственность регулярного решения начально-краевой задачи для уравнения (2.23) из класса  $C^2(\overline{Q}_T)$ . Для конкретности и простоты вместо общих краевых условий (2.2) будем рассматривать условия Дирихле (2.24).

**ТЕОРЕМА 2.1.** *Задача Дирихле (2.23), (2.24), (2.3) не может иметь более одного регулярного решения из пространства  $C^2(\overline{Q}_T)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Воспользуемся энергетическим методом, сущность которого изложена в § 2.2. Пусть  $u_1$  и  $u_2$  – два решения рассматриваемой задачи (2.23), (2.24), (2.3) из пространства  $C^2(\overline{Q}_T)$ . Тогда их разность  $u = u_1 - u_2$  удовлетворяет однородному уравнению

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x)u \quad (2.25)$$

в каждой точке  $(x, t) \in \overline{Q}_T$ , нулевым начальным условиям

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{в } (0, l) \quad (2.26)$$

и однородным граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad \text{в } (0, T]. \quad (2.27)$$

Докажем, что  $u(x, t) \equiv 0$  в  $\overline{Q}_T$ .

Рассмотрим следующую величину, называемую *интегралом энергии*:

$$E(t) = E_u(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \rho(x) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + p(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + q(x)u^2 \right] dx. \quad (2.28)$$

Покажем, что  $E$  не зависит от  $t$ . Действительно, дифференцируя  $E$  по  $t$ , имеем

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l \left[ \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + q(x)u \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx. \quad (2.29)$$

Дифференцирование под знаком интеграла возможно в силу непрерывности вторых производных решения  $u$  в  $\overline{Q}_T$ . Интегрируя по частям средний член в правой части (2.29), будем иметь

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l \left[ \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q(x)u \right] \frac{\partial u}{\partial t} dx + p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=0}^{x=l}.$$

Поскольку функция  $u$  удовлетворяет однородному уравнению (2.25) всюду в  $\overline{Q}_T$  и однородным граничным условиям (2.27), в силу которых  $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=0} = 0$ ,

$\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{x=l} = 0$ , то правая часть последнего соотношения равна нулю. Отсюда следует, что

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0, \quad \text{т.е.} \quad E(t) = \text{const} \quad \text{в} \quad [0, T]. \quad (2.30)$$

Но в силу начальных условий (2.30) имеем

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \rho(x) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + p(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + q(x) u^2 \right] \bigg|_{t=0} dx = 0.$$

Тогда из (2.30) следует, что  $E(t) = 0$ . Последнее возможно лишь в случае, когда  $u(x, t) \equiv 0$  в  $\overline{Q}_T$ , т.е.  $u_1 = u_2$ . ■

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. По аналогичной схеме доказывается единственность решения смешанной задачи для уравнения (2.23) при условиях 3-го рода:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - h_1 u \bigg|_{x=0} = g_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + h_2 u \bigg|_{x=l} = g_2(t) \quad \text{в} \quad (0, T]. \quad (2.31)$$

Здесь  $h_1$  и  $h_2$  – неотрицательные постоянные.

Докажем теперь устойчивость решения  $u$  задачи (2.23), (2.24), (2.3) по начальным данным.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть  $u_1$  и  $u_2$  – два решения уравнения (2.23), удовлетворяющие одним и тем же граничным условиям (2.24), но разным начальным условиям

$$u_i|_{t=0} = \varphi_i(x), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} \bigg|_{t=0} = \psi_i(x) \quad \text{в} \quad (0, l), \quad i = 1, 2. \quad (2.32)$$

Тогда разность  $u = u_1 - u_2$  может быть сделана сколь угодно малой по модулю в  $\overline{Q}_T$ , если выбрать достаточно малыми модули разностей  $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ ,  $\varphi'(x) = \varphi'_1(x) - \varphi'_2(x)$  и  $\psi(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x)$  на  $[0, l]$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу линейности задачи (2.23), (2.24), (2.32) доказательство теоремы эквивалентно доказательству следующего предложения. Пусть функция  $u \in C^2(\overline{Q}_T)$  удовлетворяет однородному уравнению (2.23), однородным граничным условиям (2.27) и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{t=0} = \psi(x) \quad \text{в} \quad (0, l). \quad (2.33)$$

Тогда для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно найти такое число  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , что при

$$\max (\|\varphi\|_{C[0,l]}, \|\varphi'\|_{C[0,l]}, \|\psi\|_{C[0,l]}) < \delta, \quad (\|\varphi\|_{C[0,l]} = \max_{x \in [0,l]} |\varphi(x)|) \quad (2.34)$$

выполняется неравенство

$$\|u\|_{C(\overline{Q}_T)} \equiv \max_{(x,t) \in \overline{Q}_T} |u(x, t)| < \varepsilon. \quad (2.35)$$



Опять рассмотрим интеграл энергии  $E_u$ , определенный соотношением (2.29). Как было выше показано, для функции  $u \in C^2(\overline{Q}_T)$ , удовлетворяющей уравнению (2.25) в  $\overline{Q}_T$  и граничным условиям (2.27), выполняется тождество  $E(t) \equiv E(0)$ . Учитывая (2.29) и (2.26), отсюда выводим, что

$$E(t) \equiv E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l \{ \rho(x) \psi^2(x) + p(x) [\varphi'(x)]^2 + q(x) \varphi^2(x) \} dx. \quad (2.36)$$

Пусть

$$M = \max \{ \max_{x \in [0, l]} \rho(x), \max_{x \in [0, l]} p(x), \max_{x \in [0, l]} q(x) \}.$$

Тогда из (2.36) выводим с учетом (2.35), что

$$E(t) \equiv \frac{1}{2} \int_0^l [\rho(x)(u_t)^2 + p(x)(u_x)^2 + q(x)u^2] dx < \frac{3}{2} M l \delta^2.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\int_0^l p(x)(u_x)^2 dx < 3 M l \delta^2. \quad (2.37)$$

Неравенство (2.37) означает, что в каждый момент  $t \in [0, T]$  некоторая “норма” функции  $u$  на интервале  $[0, l]$  мала при малых  $\delta$ . Используя этот факт, теперь нетрудно показать и малость нормы  $u$  в  $C(\overline{Q}_T)$ . Действительно, используя формулу Ньютона–Лейбница, имеем с учетом условия  $u|_{x=0} = 0$ , что

$$u(x, t) = \int_0^x u_x dx. \quad (2.38)$$

Из (2.38) получаем, что

$$|u(x, t)| \leq \int_0^x |u_x| dx = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \cdot \sqrt{p(x)} |u_x| dx. \quad (2.39)$$

Оценим правую часть (2.39). Для этого применим известное неравенство Коши–Буняковского

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left[ \int_a^b f^2(x) dx \right]^{1/2} \cdot \left[ \int_a^b g^2(x) dx \right]^{1/2}.$$

Используя это неравенство, имеем

$$|u(x, t)| \leq \left[ \int_0^x \frac{dx}{p(x)} \right]^{1/2} \cdot \left[ \int_0^x p(x)(u_x)^2 dx \right]^{1/2}. \quad (2.40)$$

Учитывая, что  $p(x) \geq p_0 > 0$ , и используя (2.37), из (2.40) выводим, что

$$|u(x, t)| < M_1 \delta \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}_T. \quad (2.41)$$

Здесь  $M_1 = l\sqrt{3M/p_0}$ . Полагая  $\delta = \varepsilon/M_1$ , приходим к (2.41). ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.** Теорема устойчивости имеет место и в случае более общих граничных условий (см. [41, § 19]).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.4.** Анализ доказательства теоремы 2.2 показывает, что требование малости начальных функций  $\varphi, \varphi'$  и  $\psi$  в норме пространства  $C[0, l]$  можно заменить требованием малости интегралов

$$\int_0^l \varphi^2(x) dx, \quad \int_0^l [\varphi'(x)]^2 dx \quad \text{и} \quad \int_0^l \psi^2(x) dx.$$

Это позволяет доказывать устойчивость решения и в других функциональных пространствах. Кроме того, условие  $u(0, t) = 0$ , используемое при выводе (2.38), можно заменить условием малости  $|u(0, t)|$ . Наконец, отметим, что утверждение о непрерывной зависимости решения задачи (2.23), (2.24), (2.3) справедливо также и по отношению к возмущениям правой части  $f$  уравнения (2.23) в норме пространства  $C(\overline{Q}_T)$  (см., например, [41, § 19]).

## § 4.3. Многомерное волновое уравнение

**4.3.1. Постановка задачи. Применение метода Фурье. Сведение к многомерной спектральной задаче.** Пусть  $\Omega$  – некоторая ограниченная область изменения точек  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  пространства  $\mathbb{R}^n$  с границей  $\Gamma$ . Полагая  $Q_T = \Omega \times (0, T]$ , рассмотрим в  $Q_T$  линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu. \quad (3.1)$$

Здесь  $L$  – линейный дифференциальный оператор 2-го порядка вида

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a(x)u, \quad (3.2)$$

коэффициенты  $a_{ij}$  и  $a$  которого определены в  $\Omega$  и удовлетворяют условиям:

$$a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad a \in C(\overline{\Omega}),$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \beta \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \beta = \text{const} > 0, \quad a(x) \geq 0. \quad (3.3)$$

Первое неравенство в (3.3), означающее положительность квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j,$$

влечет за собой равномерную эллиптичность оператора  $L$  (см. § 2.1) в  $\Omega$ . Отсюда, в свою очередь, вытекает, что всюду в  $\Omega$  (3.1) является уравнением гиперболического типа и, следовательно, описывает волновые процессы.

Изучим первую начально-краевую задачу для уравнения (3.1): в области  $Q_T$  найти решение уравнения (3.1), удовлетворяющее граничному условию

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad \text{в} \quad (0, T] \quad (3.4)$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad \text{в} \quad \Omega. \quad (3.5)$$

Следуя методу Фурье, будем искать сначала нетривиальные решения уравнения (3.1), удовлетворяющие граничному условию (3.4), в виде

$$u(x, t) = v(x)T(t). \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в уравнение (3.1), будем иметь

$$v(x)T''(t) = [Lv](x)T(t) \equiv \left[ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) - a(x)v \right] T(t).$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{[Lv](x)}{v(x)} = -\lambda.$$

Здесь  $\lambda$  – константа разделения. Отсюда приходим к двум дифференциальным уравнениям: обыкновенному для  $T$ , имеющему вид

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad (3.7)$$

и следующему уравнению в частных производных для  $v$ :

$$Lv + \lambda v = 0. \quad (3.8)$$

Чтобы получить решения уравнения (3.1) вида (3.6), удовлетворяющие граничному условию (3.4), необходимо, чтобы функция  $v$  удовлетворяла граничному условию

$$v|_{\Gamma} = 0. \quad (3.9)$$

В результате приходим к *многомерной спектральной задаче*: найти такие значения  $\lambda$ , при которых уравнение (3.8) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие граничному условию (3.9). Эти значения  $\lambda$  называются *собственными значениями*, а соответствующие решения – *собственными функциями* спектральной задачи (3.8), (3.9).

В предположении, что коэффициенты  $a_{ij}$  и  $a$  в (3.2) – достаточно гладкие функции, удовлетворяющие (3.3) в области  $\Omega$  с достаточно гладкой границей, можно доказать, что задача (3.8), (3.9) имеет счетное множество собственных значений и отвечающих им собственных функций (см. [11, § 21]; [28, гл. 2]; [33]; [34, гл. 4]; [48, гл. 2]; [58, гл. 4]). Указанные собственные значения вещественны, неотрицательны, имеют конечную кратность и могут быть занумерованы так, что выполняется условие

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty. \quad (3.10)$$

С учетом однородности уравнения (3.8) и граничного условия (3.9) собственные функции  $v_k$  определяются с точностью до постоянного множителя. Выберем его из условия

$$\int_{\Omega} v_k^2(x) dx = 1, \quad (3.11)$$

т. е. будем считать их *нормированными*. Более того, собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны, так что выполняется условие

$$\int_{\Omega} v_k(x) v_m(x) dx = 0, \quad \lambda_k \neq \lambda_m,$$

и образуют полную систему функций в подходящем функциональном пространстве. Если собственному значению  $\lambda_k$  отвечает несколько линейно независимых собственных функций, то их можно подвергнуть процессу ортогонализации и считать тем самым эти функции попарно ортогональными. С учетом этого можно считать, что все собственные функции  $\{v_k\}$  спектральной задачи (3.8), (3.9) образуют ортонормированную систему.

Ограничимся здесь доказательством свойства неотрицательности собственных значений  $\lambda_k$ . Согласно их определению имеем  $Lv_k = -\lambda_k v_k$ . Умножим обе части этого равенства на  $v_k$  и проинтегрируем по области  $\Omega$ . Принимая во внимание (3.11), получим

$$\lambda_k = - \int_{\Omega} v_k(x) Lv_k(x) dx = - \int_{\Omega} v_k(x) \left[ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) - a(x) v_k(x) \right] dx.$$

Применяя к первому слагаемому правой части формулу интегрирования по частям в  $\mathbb{R}^n$ , имеющую вид (см. § 6.2 и [34, с. 104])

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} uv \cos(\mathbf{n}, x_i) ds, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к границе  $\Gamma$ , будем иметь:

$$\lambda_k = \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + a(x) v_k^2(x) \right] dx. \quad (3.12)$$

(Интеграл по границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  равен нулю в силу граничного условия  $v_k|_{\Gamma} = 0$ ). Из (3.12) выводим с учетом последнего условия в (3.3), что

$$\lambda_k \geq \int_{\Omega} \left[ \beta \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 + a(x) v_k^2(x) \right] dx. \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует, что все собственные значения спектральной задачи (3.8), (3.9) на самом деле положительны, так что в дополнение к (3.10)  $\lambda_1 > 0$ .

Предполагая, что собственные значения  $\lambda_k$  и функции  $v_k$  спектральной задачи (3.8), (3.9) известны, подставим далее в (3.7) вместо  $\lambda$  значение  $\lambda_k$  и запишем общее решение полученного уравнения в виде

$$T_k(t) = a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t, \quad (3.14)$$

где  $a_k$  и  $b_k$  – произвольные постоянные. Решением уравнения (3.1), удовлетворяющим граничному условию (3.4), является по построению любая функция  $u_k$  вида

$$u_k(x, t) = T_k(t) v_k(x) = (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) v_k(x). \quad (3.15)$$

Действуя далее по стандартной схеме метода Фурье, составим (с учетом кратности собственных значений  $\lambda_k$ ) ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) v_k(x) \quad (3.16)$$

и выберем в нем коэффициенты  $a_k$ ,  $b_k$  так, чтобы сумма ряда (3.16) удовлетворяла начальным условиям (3.5). В результате приходим к следующим соотношениям:

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x), \quad \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\lambda_k} v_k(x). \quad (3.17)$$

Эти равенства представляют собой разложения начальных функций  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  в ряд Фурье по системе функций  $\{v_k\}$ . Если система  $\{v_k\}$  является полной, то коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  определяются стандартным образом и имеют с учетом ортонормированности системы  $\{v_k\}$  и условия  $\lambda_k > 0$  вид

$$a_k = \int_{\Omega} \varphi_0(x) v_k(x) dx, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_{\Omega} \varphi_1(x) v_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

Подставляя найденные значения  $a_k$  и  $b_k$  в ряд (3.16), получим функцию  $u$ , являющуюся по построению искомым решением начально-краевой задачи (3.1), (3.4), (3.5) при условии, конечно, что ряд (3.16) и ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по  $x_i$  и  $t$ , равномерно сходятся в соответствующих областях. Последнее обеспечивается соответствующим многомерным аналогом теоремы 1.1, справедливым при выполнении определенных условий на начальные функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  и определенных свойствах собственных значений и собственных функций.

Что касается утверждений о единственности и устойчивости решения многомерной начально-краевой задачи, то по своим формулировкам они близки к формулировкам теорем 2.1 и 2.2 из § 4.2. В случае краевой задачи

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + f,$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad \text{в } \Omega, \quad \alpha u + \beta \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0 \quad \text{в } (0, T]$$

соответствующие формулировки теорем и их доказательства можно найти в [11, § 33]. Изложенная выше схема будет применена ниже для нахождения решения волнового уравнения с постоянными коэффициентами в частных случаях, когда  $\Omega$  является прямоугольником либо кругом на плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

**4.3.2. Двумерное волновое уравнение в прямоугольной области. Свободные колебания прямоугольной мембраны.** Пусть область  $\Omega$  – прямоугольник ( $0 < x < l, 0 < y < h$ ) в плоскости  $x, y$  со сторонами  $l$  и  $h$ . Рассмотрим задачу нахождения решения двумерного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{в } Q_T = \Omega \times (0, T], \quad (3.19)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=h} = 0 \quad \text{в } (0, T] \quad (3.20)$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x, y) \quad \text{в } \Omega. \quad (3.21)$$

Задача (3.19)–(3.21) описывает, например, свободные колебания прямоугольной мембраны со сторонами  $l$  и  $h$ , закрепленной на краях, под действием ее начального отклонения, описываемого функцией  $\varphi_0$ , и начального импульса, описываемого функцией  $\varphi_1$ .

Следуя методу Фурье, будем искать частные решения уравнения (3.19), удовлетворяющие граничным условиям (3.20), в виде произведения

$$u(x, y, t) = v(x, y)T(t). \quad (3.22)$$

Подставляя (3.22) в (3.19) и разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{v_{xx} + v_{yy}}{v} = -\lambda^2,$$

где  $\lambda^2$  – константа разделения. Отсюда, учитывая условия (3.20), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0 \quad (3.23)$$

для функции  $T$  и двумерной спектральной задаче

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda^2 v = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (3.24)$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \quad v|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=h} = 0 \quad (3.25)$$

(со спектральным параметром  $\lambda^2$ ) для функции  $v$ .

Нашей ближайшей целью является нахождение решения спектральной задачи (3.24), (3.25), т.е. нахождение всех ее собственных значений и собственных функций. Поскольку область  $\Omega$  является прямоугольной, а краевые условия (3.25) – однородными, то для этого опять можно применить метод Фурье. Следуя ему, будем искать решения (т.е. собственные функции) спектральной задачи (3.24), (3.25) в виде

$$v(x, y) = X(x)Y(y). \quad (3.26)$$

Подставляя (3.26) в (3.24) и разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{Y''}{Y} + \lambda^2 = -\frac{X''}{X} = \lambda_1^2,$$

где  $\lambda_1^2$  – соответствующая константа разделения. Отсюда получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X''(x) + \lambda_1^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + \lambda_2^2 Y(y) = 0 \quad (3.27)$$

для функций  $X$  и  $Y$ . В уравнениях (3.27)  $\lambda_1^2$  и  $\lambda_2^2$  – спектральные параметры, связанные со спектральным параметром  $\lambda^2$  задачи (3.24), (3.25) соотношением

$$-\lambda_2^2 + \lambda^2 = \lambda_1^2 \quad \text{или} \quad \lambda^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2. \quad (3.28)$$

Из граничных условий (3.25) получаем следующие граничные условия для  $X$  и  $Y$ :

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(h) = 0. \quad (3.29)$$

В результате приходим к двум одномерным спектральным задачам:

$$X'' + \lambda_1^2 X = 0 \text{ в } (0, l), \quad X(0) = X(l) = 0, \quad (3.30)$$

$$Y'' + \lambda_2^2 Y = 0 \text{ в } (0, h), \quad Y(0) = Y(h) = 0. \quad (3.31)$$

Из результатов § 4.1 следует, что каждая из задач (3.30), (3.31) имеет счетное множество решений – собственных значений и отвечающих им собственных функций. Указанные решения определяются формулами:

$$\lambda_{1,m}^2 = \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2, \quad X_m(x) = \sin \frac{m\pi}{l} x, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.32)$$

$$\lambda_{2,n}^2 = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \quad Y_n(y) = \sin \frac{n\pi}{h} y, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.33)$$

Из (3.28) вытекает, что каждой паре  $(\lambda_{1,m}^2, \lambda_{2,n}^2)$  указанных собственных значений отвечает собственное значение

$$\lambda_{mn}^2 = \lambda_{1,m}^2 + \lambda_{2,n}^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{h^2} \right) \quad (3.34)$$

двумерной спектральной задачи (3.24), (3.25), а из (3.26) вытекает, что отвечающая собственному значению (3.34) собственная функция  $v_{mn}$  двумерной задачи (3.24), (3.25) определяется формулой

$$v_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h}. \quad (3.35)$$

Важно отметить, что совокупность  $(\lambda_{mn}^2, v_{mn})$ ,  $m \in \mathbb{N}_+$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$  исчерпывает множество всех собственных значений и функций двумерной спектральной задачи (3.24), (3.25). Это вытекает из построения системы (3.35) и из свойств решений одномерных задач (3.30) и (3.31).

Используя собственные значения и функции спектральной задачи (3.24), (3.25), далее стандартным образом можно определить решение  $u$  начально-краевой задачи (3.19)–(3.21). Прежде всего подставим в (3.23) вместо  $\lambda^2$  значение  $\lambda_{mn}^2$ . Общее решение полученного уравнения, очевидно, имеет вид

$$T_{mn}(t) = a_{mn} \cos \lambda_{mn} t + b_{mn} \sin \lambda_{mn} t, \quad (3.36)$$



где  $a_{mn}$  и  $b_{mn}$  – произвольные постоянные. В таком случае частные решения уравнения (3.19), удовлетворяющие граничным условиям (3.20), определяются формулой

$$u_{mn}(x, y, t) = (a_{mn} \cos a \lambda_{mn} t + b_{mn} \sin a \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям (3.21), составим ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos a \lambda_{mn} t + b_{mn} \sin a \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h}. \quad (3.37)$$

Если ряд (3.37) равномерно сходится в области  $\overline{Q}_T$ , а ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по  $x, y$  и  $t$ , равномерно сходятся внутри  $Q_T$ , то его сумма по построению будет удовлетворять уравнению (3.19) и граничным условиям (3.20). Для выполнения начальных условий необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

$$\begin{aligned} u|_{t=0} = \varphi_0(x, y) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x, y) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} a \lambda_{mn} b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Равенства (3.38) представляют собой разложения заданных функций  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  в двойные ряды Фурье по синусам (3.35). Хорошо известно (см., например, [19, с. 362]), что система синусов (3.35) является полной, причем

$$\int_0^l \int_0^h v_{mn}^2(x, y) dx dy = \int_0^l \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx \int_0^h \sin^2 \frac{n\pi y}{h} dy = \frac{lh}{4}. \quad (3.39)$$

С учетом этого коэффициенты  $a_{mn}$  и  $b_{mn}$  этих разложений определяются однозначно по  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{4}{lh} \int_0^l \int_0^h \varphi_0(x, y) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h} dx dy, \\ b_{mn} &= \frac{4}{a \lambda_{mn} lh} \int_0^l \int_0^h \varphi_1(x, y) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h} dx dy. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Подставив найденные значения коэффициентов  $a_{mn}$  и  $b_{mn}$  в ряд (3.37), получим функцию  $u$ , являющуюся по построению искомым решением исходной начально-краевой задачи (3.19)–(3.21) (при условии, конечно, равномерной сходимости ряда (3.37) и рядов, полученных из него двукратным почленным дифференцированием в соответствующих областях).

**4.3.3. Физический анализ решения волнового уравнения в прямоугольнике.** Проведем физический анализ полученного выше решения задачи (3.19)–(3.21) в виде ряда (3.37). Введем аналогично одномерному случаю (см. п. 4.1.3) обозначения

$$a_{mn} = \alpha_{mn} \sin \varphi_{mn}, \quad b_{mn} = \alpha_{mn} \cos \varphi_{mn}, \quad (3.41)$$

с помощью которых перепишем (3.37) в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h} \sin(a\lambda_{mn}t + \varphi_{mn}). \quad (3.42)$$

Формула (3.42) означает, что решение задачи (3.19)–(3.21), описывающее процесс колебания прямоугольной мембраны, складывается из бесконечного множества (двойного ряда) собственных гармонических колебаний вида

$$u_{mn}(x, y, t) = \alpha_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h} \sin(a\lambda_{mn}t + \varphi_{mn}). \quad (3.43)$$

По аналогии с одномерным случаем функция  $u_{mn}$  называется  $(m, n)$ -й *стоячей волной*.

Из (3.43) следует, что для стоячей волны каждая точка  $(x, y)$  мембраны  $\Omega$  совершает гармоническое колебание (вверх–вниз) с одной и той же круговой частотой  $\omega_{mn}$  и периодом  $T_{mn}$  (общими для всех точек), определяемыми формулами

$$\omega_{mn} = a\lambda_{mn} = a\pi \sqrt{\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{h^2}}, \quad T_{mn} = \frac{2\pi}{\omega_{mn}} = \frac{2lh}{a\sqrt{m^2h^2 + n^2l^2}},$$

начальной фазой  $\varphi_{mn}$  и переменной амплитудой

$$A_{mn}(x, y) = \alpha_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h}.$$

Напомним, что каждому собственному значению  $\lambda_k^2$  одномерной спектральной задачи (1.7) (либо собственной частоте  $\omega_k = a\lambda_k$ ) отвечает единственная собственная функция  $\varphi_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$  (либо собственная амплитуда  $A_k(x)$ ). Она описывает профиль струны, которая разделяется узлами на несколько равных частей, все точки каждой из которых колеблются в одной фазе. В то же время для мембраны возможна ситуация, когда одному и тому же собственному значению  $\lambda_{mn}^2$  двумерной спектральной задачи (3.24), (3.25) (либо собственной частоте  $\omega_{mn} = a\lambda_{mn}$ ) отвечает несколько собственных функций, описывающих несколько профилей мембраны с различными положениями *узловых линий*, т. е. линий, вдоль которых амплитуда колебаний равна нулю. В этом состоит важное отличие в поведении колеблющейся мембраны по сравнению с колеблющейся струной.

Проще всего это исследовать на примере квадратной мембраны, для которой  $l = h = \pi$ . В этом случае собственные значения  $\lambda_{mn}^2$  и частоты  $\omega_{mn}$  определяются формулами

$$\lambda_{mn}^2 = m^2 + n^2, \quad \omega_{mn} = a\sqrt{m^2 + n^2}. \quad (3.44)$$

Из (3.44) видно, что основной тон мембраны, отвечающий основной (первой) гармонике (3.43) при  $m = n = 1$  или основной частоте  $\omega_{11}$ , определяется формулой

$$u_{11}(x, y, t) = \alpha_{11} \sin x \sin y \sin(\omega_{11}t + \varphi_{11}).$$

При этом узловые линии первой гармоники совпадают со сторонами квадратной мембраны. Этим же свойством обладают и остальные гармоники.

В то же время для следующей по возрастанию второй частоты  $\omega_{12} = \omega_{21} = a\sqrt{5}$  ( $m=1, n=2$  или  $m=2, n=1$ ) существуют уже две собственные функции

$$v_{12}(x, y) = \sin x \sin 2y \quad \text{и} \quad v_{21}(x, y) = \sin 2x \sin y,$$

которым отвечают две вторые гармоники либо два вторых обертона одной и той же частоты  $\omega_{12} = \omega_{21} = a\sqrt{5}$ , описываемые соответственно формулами:

$$u_{12} = \alpha_{12} \sin x \sin 2y \sin(\omega_{12}t + \varphi_{12}), \quad u_{21} = \alpha_{21} \sin 2x \sin y \sin(\omega_{21}t + \varphi_{21}). \quad (3.45)$$

Ясно, что для этой частоты узловые линии гармоник  $u_{12}$  и  $u_{21}$  определяются при  $\varphi_{12} = \varphi_{21}$  соответственно из уравнений  $\sin x \sin 2y = 0$ ,  $\sin 2x \sin y = 0$ . Видно, что наряду со сторонами квадрата узловыми линиями являются отрезки  $y = \pi/2$  для функции  $u_{12}$  и отрезки  $x = \pi/2$  для функции  $u_{21}$ . Более сложный вид имеют узловые линии для произвольной линейной комбинации функций  $u_{12}$  и  $u_{21}$

$$\alpha u_{12} + \beta u_{21} = \alpha \sin x \sin 2y + \beta \sin 2x \sin y, \quad \alpha = \text{const}, \quad \beta = \text{const},$$

которая также описывает вторую гармонику мембраны. Простейшие из узловых линий изображены на рис. 3.1 пунктирными линиями. Более сложные узловые линии, отвечающие в том числе и другим кратным собственным значениям:  $\lambda_{13}^2 = \lambda_{31}^2 = 10$ ,  $\lambda_{23}^2 = \lambda_{32}^2 = 13$ ,  $\lambda_{14}^2 = \lambda_{41}^2 = 17$ , – приведены в [41, с.221].

Приведенный пример относится к двухкратному собственному значению. Другие примеры двухкратных собственных значений можно получить, рассмотрев другие разные пары чисел  $m$  и  $n$ . Существуют собственные значения спектральной задачи (3.24), (3.25), обладающие и большей кратностью. Для построения такого собственного значения достаточно найти несколько (больше двух) разных пар  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ , удовлетворяющих условию  $\sqrt{m^2 + n^2} = \text{const}$ .

Приведем два примера таких собственных значений, построенных весной 2001 г. студентами 3-го курса Института математики и компьютерных наук Дальневосточного государственного университета И.Ф. Храпченковым и Т.С. Чистяковым. С помощью простого алгоритма, реализованного на компьютере, они получили 32-кратное собственное значение  $\lambda^2 = 801125$ , с которым, в частности, выполняются разложения

$$801125 = 895^2 + 10^2 = 890^2 + 95^2 = 886^2 + 127^2 = \dots = 10^2 + 895^2 \text{ (32 разложения).}$$

В процессе усовершенствования алгоритма этот результат удалось существенно усилить, получив собственное значение  $\lambda^2 = 8900000001503676650$  кратности 1536, с которым, в частности, справедливы разложения

$$89000000001503676650 = \dots = 2793642145^2 + 1046691725^2 = \dots = 1458737557^2 + 2602322951^2 = \dots = 1968253^2 + 2983286129^2 \text{ (1536 разложений).}$$

Другие примеры многократных собственных значений автор предлагает найти заинтересованному читателю.

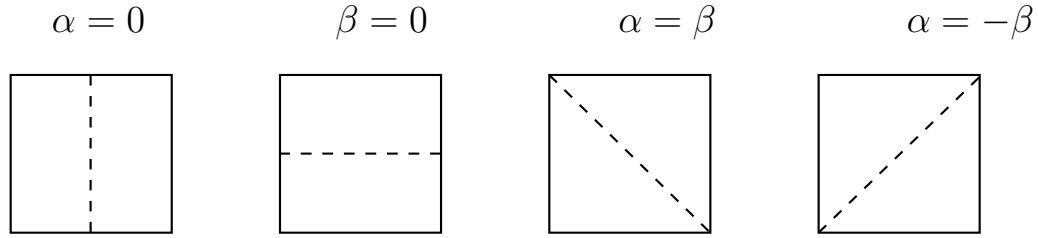


Рис. 3.1. Примеры узловых линий для прямоугольной мембраны

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.** Вынужденные колебания прямоугольной мембраны исследуются по той же схеме, что и вынужденные колебания струны с той лишь разницей, что плотность объёмных источников разлагается не в простой, а в двойной ряд Фурье по системе собственных функций  $v_{mn}$  спектральной задачи (3.24), (3.25). Более подробно см. об этом в [35].

**4.3.4. Двумерное волновое уравнение в круге. Свободные колебания круглой мембраны.** Пусть  $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$  – круг радиуса  $R$  в плоскости  $x, y$ . Рассмотрим в области  $Q_T = \Omega \times (0, T]$  двумерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (3.46)$$

Введем в плоскости  $x, y$  полярные координаты  $r$  и  $\theta$  с помощью формул  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  и, разделив на  $a^2$ , перепишем уравнение (3.46) в полярных координатах:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \quad (3.47)$$

Поставим задачу: найти решение волнового уравнения (3.47), удовлетворяющее граничному условию

$$u|_{r=R} = 0 \quad \text{в} \quad (0, T] \quad (3.48)$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(r, \theta), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(r, \theta), \quad 0 \leq r < R, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (3.49)$$

Задача (3.47)–(3.49) описывает, например, свободные колебания однородной круглой мембраны радиуса  $R$ , закрепленной на границе  $r = R$ , под действием начальных возмущений  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ . При этом  $u(x, y, t)$  имеет смысл смещения в момент  $t$  точки  $(x, y)$  мембраны от положения равновесия.

Для простоты рассмотрим ниже случай, когда круглая мембрана совершает *радиальные* колебания, т. е. такие колебания, при которых смещение  $u$  мембраны зависит лишь от радиальной координаты  $r$  и времени  $t$ . Такие колебания имеют место тогда и только тогда, когда начальные функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  не зависят от угла  $\theta$ , так что начальные условия (3.49) имеют вид

$$u|_{t=0} = \varphi_0(r), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(r), \quad 0 \leq r < R. \quad (3.50)$$

Здесь  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  – заданные в интервале  $[0, R)$  функции. Так как в рассматриваемом случае  $u$  не зависит от угла  $\theta$ , то уравнение (3.47) принимает более простой вид

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (3.51)$$

Следуя методу Фурье, будем искать частные решения уравнения (3.51), удовлетворяющие граничному условию (3.48), в виде

$$u(r, t) = w(r)T(t). \quad (3.52)$$

Подставляя (3.52) в (3.51) и разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{w''(r) + \frac{1}{r} w'(r)}{w(r)} = -\lambda^2.$$

Здесь  $\lambda^2$  – константа разделения. Отсюда приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям для функций  $T$  и  $w$ :

$$T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \quad (3.53)$$

$$w''(r) + \frac{1}{r} w'(r) + \lambda^2 w(r) = 0. \quad (3.54)$$

Из (3.48) вытекает граничное условие для  $w$ . Оно имеет вид

$$w(R) = 0. \quad (3.55)$$

Равенства (3.54), (3.55) представляют собой спектральную задачу со спектральным параметром  $\lambda^2$ , которую нужно решить для нахождения методом Фурье решения  $u$  исходной задачи (3.48), (3.50), (3.51). Подчеркнем, что задача (3.54), (3.55) содержит лишь одно краевое условие при  $r = R$ . Это не случайно, а связано с тем, что (3.54) представляет собой частный случай (при  $\nu = 0$ ) уравнения Бесселя  $\nu$ -го порядка, имеющего вид

$$W''(r) + \frac{1}{r}W'(r) + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)W(r) = 0. \quad (3.56)$$

Не ставя здесь своей целью подробное обсуждение свойств решений уравнения (3.56), либо (3.54) (см. об этом, например, [6, гл. 14], [11, §23], [56, с.632]), отметим, что в приложениях основную роль играют два линейно-независимых решения уравнения (3.56): функция Бесселя  $J_\nu(\lambda r)$  и функция Неймана  $N_\nu(\lambda r)$ , а также их линейные комбинации: функции Ханкеля 1-го и 2-го рода, определяемые формулами

$$H_\nu^{(1)}(\lambda r) = J_\nu(\lambda r) + iN_\nu(\lambda r), \quad H_\nu^{(2)}(\lambda r) = J_\nu(\lambda r) - iN_\nu(\lambda r). \quad (3.57)$$

Первая функция  $J_\nu$  является гладкой и, более того, аналитической функцией аргумента  $\lambda r$ , тогда как вторая функция  $N_\nu$  имеет особенность (обращается в бесконечность) при  $r = 0$ . (То же самое, естественно, справедливо и для функций  $H_\nu^{(1)}$  и  $H_\nu^{(2)}$ ). Последнее является следствием того, что уравнение (3.56) имеет особенность при  $r = 0$ . Поэтому согласно теории таких уравнений (см., например, [6, с.284]) из двух линейно независимых решений указанных уравнений одно (и только одно) обязано иметь особенность в особой точке – в данном случае при  $r = 0$ .

В то же время решение  $u$  исходной начально-краевой задачи (3.48), (3.50), (3.51), описывая согласно своему физическому смыслу отклонение мембраны от положения равновесия, должно быть ограниченным всюду в круге  $\Omega$ , а следовательно, и в точке  $r = 0$ . Это означает, что из двух решений –  $J_0(\lambda r)$  и  $N_0(\lambda r)$  – уравнения (3.54) последнее необходимо отбросить как не имеющее физического смысла. Этой цели может служить условие ограниченности решения при  $r = 0$ :

$$|w(0)| < \infty, \quad (3.58)$$

являющееся аналогом граничного условия при  $r = 0$  для уравнения (3.54). Таким образом, хотя общее решение уравнения (3.54) имеет вид

$$w(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r), \quad (3.59)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные, из условия (3.58) необходимо вытекает, что  $C_2 = 0$ . Полагая в (3.59)  $C_2 = 0$  и подставляя полученное выражение в граничное условие (3.55), приходим после деления на постоянную  $C_1 \neq 0$  к уравнению

$$J_0(\lambda R) = 0. \quad (3.60)$$

Обозначая  $\lambda R = \mu$ , перепишем (3.60) в виде

$$J_0(\mu) = 0. \quad (3.61)$$

Уравнение (3.61), аналогично уравнению  $\sin \mu = 0$ , имеет счетное множество вещественных корней  $\mu_k$  [11, с. 350]. Указанные корни простые, положительные и могут быть занумерованы так, что выполняется условие

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \infty. \quad (3.62)$$

Указанным корням  $\mu_k$  отвечает совокупность собственных значений  $\lambda_k^2$  и собственных функций  $w_k$  спектральной задачи (3.54), (3.55), имеющих вид:

$$\lambda_k^2 = \left(\frac{\mu_k}{R}\right)^2, \quad w_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.63)$$

Отметим, что свойства собственных функций  $J_0(\mu_k r/R)$  спектральной задачи (3.54), (3.55) во многом аналогичны свойствам собственных функций  $\sin \mu_k x$  простейшей спектральной задачи (1.7), (1.8). В частности:

1) собственные функции  $w_k$  спектральной задачи (3.54), (3.55) образуют ортогональную систему в пространстве  $L_r^2(0, R)$ , где  $L_r^2(0, R)$  обозначает гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций со скалярным произведением

$$(w, v) \equiv \int_0^R w(r) v^*(r) r dr \quad \forall w, v \in L_r^2(0, R).$$

(Здесь “\*” обозначает комплексное сопряжение). При этом

$$(w_k, w_l) \equiv \int_0^R J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) J_0\left(\frac{\mu_l r}{R}\right) r dr = \begin{cases} \frac{1}{2} R^2 J_1^2(\mu_k), & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases} \quad (3.64)$$

где  $J_1$  – функция Бесселя первого порядка;

2) система собственных функций  $\{w_k\}_{k=1}^\infty$  спектральной задачи (3.54), (3.55) полна в пространстве  $L_r^2(0, R)$ .

Доказательство этих свойств можно найти, например, в [11, § 23].

Используя указанные свойства собственных значений  $\lambda_k^2$  и функций  $w_k$ , дальше действуем по стандартной схеме метода Фурье. При  $\lambda = \lambda_k = \mu_k/R$  уравнение (3.53) имеет общее решение

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{a \mu_k t}{R} + b_k \sin \frac{a \mu_k t}{R}, \quad (3.65)$$

где  $a_k$  и  $b_k$  – произвольные постоянные. В таком случае по построению функции

$$u_k(r, t) = \left( a_k \cos \frac{a\mu_k t}{R} + b_k \sin \frac{a\mu_k t}{R} \right) J_0 \left( \frac{\mu_k r}{R} \right) \quad (3.66)$$

удовлетворяют при каждом  $k$  уравнению (3.51) и граничному условию (3.48). То же справедливо и для любой конечной линейной комбинации функций (3.66), а также ряда

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{a\mu_k t}{R} + b_k \sin \frac{a\mu_k t}{R} \right) J_0 \left( \frac{\mu_k r}{R} \right) \quad (3.67)$$

при условии равномерной сходимости его и ряда, полученного дифференцированием ряда (3.67) по  $t$  в замкнутой области  $\overline{Q}_T$ , и рядов, полученных двукратным дифференцированием (3.67) по  $r$  и  $t$ , внутри  $Q_T$ .

Осталось определить постоянные  $a_k$  и  $b_k$  в (3.67). Как обычно, воспользуемся начальными условиями (3.50). С этой целью подставим ряд (3.67) и ряд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\mu_k}{R} \left( b_k \cos \frac{a\mu_k t}{R} - a_k \sin \frac{a\mu_k t}{R} \right) J_0 \left( \frac{\mu_k r}{R} \right), \quad (3.68)$$

полученный дифференцированием ряда (3.67) по  $t$ , в (3.50). Получим

$$\varphi_0(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0 \left( \frac{\mu_k r}{R} \right), \quad \varphi_1(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\mu_k}{R} b_k J_0 \left( \frac{\mu_k r}{R} \right). \quad (3.69)$$

Равенства (3.69) представляют собой разложения начальных функций  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  в ряды Фурье по полной ортогональной в пространстве  $L_r^2(0, R)$  системе собственных функций  $w_k$  задачи (3.54), (3.55). С учетом этого коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  этих разложений однозначно определяются по функциям  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ . Чтобы их найти, умножим каждое из равенств в (3.69) на функцию  $r J_0(\mu_k r/R)$ , проинтегрируем почленно на  $(0, R)$  и воспользуемся соотношениями (3.64). В результате получим

$$a_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^R r \varphi_0(r) J_0 \left( \frac{\mu_k r}{R} \right) dr, \quad b_k = \frac{2}{a\mu_k R J_1^2(\mu_k)} \int_0^R r \varphi_1(r) J_0 \left( \frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \quad (3.70)$$

Тем самым решение исходной задачи (3.48), (3.50), (3.51) построено. Оно имеет вид ряда (3.67), коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  которого определяется формулами (3.70), при условии, конечно, равномерной сходимости ряда (3.67) и его производных в соответствующих областях.



Кратко остановимся на физическом смысле решения (3.67). Используя обозначения вида (1.24), перепишем ряд (3.67) в виде

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k J_0 \left( \frac{\mu_k r}{R} \right) \sin \left( \frac{a\mu_k t}{R} + \varphi_k \right). \quad (3.71)$$

Согласно формуле (3.71) решение (3.67) задачи (3.48), (3.50), (3.51), описывающее свободные колебания круглой закрепленной на концах мембраны, складывается из счетного множества собственных гармонических колебаний (стоячих волн) вида

$$u_k(r, t) = \alpha_k J_0 \left( \frac{\mu_k r}{R} \right) \sin \left( \frac{a\mu_k t}{R} + \varphi_k \right). \quad (3.72)$$

Из (3.72) следует, что для стоячей волны каждая точка  $(r, \theta)$  мембраны  $\Omega$  совершает гармоническое колебание (вверх-вниз) с одной и той же частотой  $\omega_k$  и периодом  $T_k$ , определяемыми формулами

$$\omega_k = \frac{a\mu_k}{R} = \frac{\mu_k}{R} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{2\pi R}{a\mu_k}, \quad (3.73)$$

начальной фазой  $\varphi_k$  и переменной амплитудой  $A_k(r) = a_k J_0(\mu_k r/R)$ . В точках окружности  $r = r_0$ , где

$$J_0 \left( \frac{\mu_k r_0}{R} \right) = 0, \quad (3.74)$$

амплитуда  $A_k$  обращается в нуль, так что эти точки не колеблются. Таким образом, (3.74) описывает уравнение узловых линий для  $k$ -й стоячей волны. На рис. 3.2 изображены некоторые простейшие случаи расположения узловых линий.

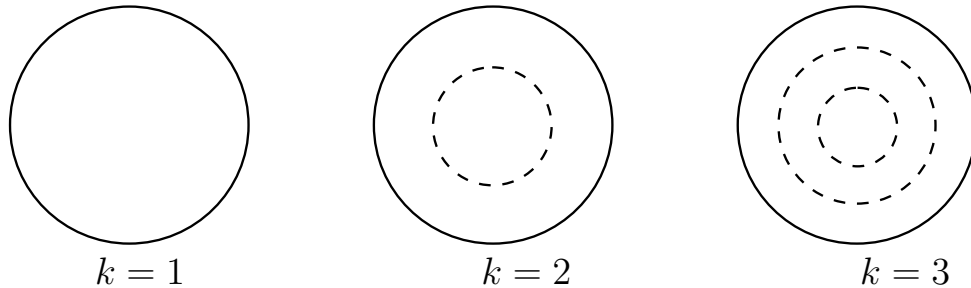


Рис. 3.2. Примеры узловых линий для круглой мембраны

Более подробно о физическом смысле решения (3.67) задачи (3.48), (3.50), (3.51) так же, как и о решениях общей двумерной задачи (3.47)–(3.49), можно прочитать в [21, с. 214] и [56, с. 430].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Утверждение о выборе в качестве нужного частного решения уравнения Бесселя (3.54) функции Бесселя  $J_0$  относится к рассматриваемому случаю, когда  $\Omega$  – круг. Если же исходная физическая задача рассматривается во внешности круга, то в качестве соответствующего частного решения следует выбирать функцию Ханкеля. К этому вопросу мы вернемся в следующем параграфе при исследовании внешней краевой задачи для уравнения Гельмгольца.

## § 4.4. Элементы теории сферических функций. Приложения к решению задачи об излучении звука колеблющейся сферой

Предыдущие параграфы были посвящены применению метода Фурье для решения начально-краевых задач, рассматриваемых в простейших “канонических” областях: отрезке  $(0, l)$  оси  $\mathbb{R}$  и прямоугольнике либо круге на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . В этом параграфе мы применим метод Фурье для решения важной задачи акустики, заключающейся в нахождении звукового поля, излучаемого сферой, колеблющейся с фиксированной частотой  $\omega$ . Отметим два отличия формулировки рассматриваемой ниже задачи от задач, рассматриваемых в §§ 4.1-4.3. Первое состоит в том, что в качестве уравнения, описывающего распространение звука, излучаемой сферой, мы выберем не волновое уравнение, а уравнение Гельмгольца, поскольку именно оно описывает распространение звука фиксированной круговой частоты (см. § 1.6 и [3]). Второе отличие состоит в том, что исходя из постановки задачи уравнение Гельмгольца следует рассматривать в неограниченной области – внешности колеблющейся сферы. Последнее приводит к необходимости задания дополнительных условий, а именно условий на бесконечности, необходимых для выделения единственного решения.

**4.4.1. Постановка задачи об излучении звука колеблющейся сферой.** Как известно (см., например, [3], [11]), задача излучения звука колеблющейся сферой  $S$  сводится к нахождению решения уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{4.1}$$

во внешности  $D$  сферы  $S$ , удовлетворяющего граничному условию

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = g \tag{4.2}$$

на сфере  $S$  и условиям излучения Зоммерфельда:

$$u(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial |\mathbf{x}|} - iku(\mathbf{x}) = o(|\mathbf{x}|^{-1}) \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \tag{4.3}$$

Здесь  $k = \omega/c$  – волновое число, где  $\omega$  – круговая частота,  $c = \text{const}$  – скорость звука,  $\alpha, \beta$  и  $g$  – заданные на сфере  $S$  функции, причем  $g$  имеет

смысл плотности поверхностных источников звука на сфере  $S$ , а функции  $\alpha$  и  $\beta$  описывают ее акустические свойства. В частности, случай  $\alpha = 1, \beta = 0$  отвечает акустически мягкой сфере  $S$ , а случай  $\alpha = 0, \beta = 1$  – акустически твердой сфере  $S$ . (Более подробно о смысле этих терминов см., например, в [3, гл. 1]). Поставим задачу: найти решение задачи (4.1)–(4.3), используя метод Фурье.

Прежде всего введем сферические координаты  $r, \theta, \varphi$ , с использованием которых запишем уравнение (4.1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \Delta_{\theta, \varphi} u + k^2 r^2 u = 0, \quad (4.4)$$

где

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (4.5)$$

Следуя схеме метода Фурье, будем искать частные решения уравнения (4.4) в виде произведения

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)v(\theta, \varphi). \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в (4.4) и разделяя переменные, получаем

$$-\frac{(r^2 R')' + k^2 r^2 R}{R} = \frac{\Delta_{\theta, \varphi} v}{v} = -\lambda,$$

где  $\lambda$  – константа разделения. Отсюда приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(r^2 R')' + (k^2 r^2 - \lambda) R = 0 \quad (4.7)$$

для функции  $R$  и уравнению в частных производных

$$\Delta_{\theta, \varphi} v + \lambda v \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0 \quad (4.8)$$

для функции  $v$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.** Гладкие (класса  $C^\infty(S_1)$ ) на единичной сфере

$$S_1 = \{(r, \theta, \varphi), \quad r = 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

решения уравнения (4.8), удовлетворяющие условию периодичности

$$v(\theta, \varphi + 2\pi) = v(\theta, \varphi), \quad (4.9)$$

называются *сферическими функциями*.

**4.4.2. Простейшие сферические функции. Полиномы Лежандра.** Будем отыскивать сначала такие сферические функции (т. е. гладкие

решения уравнения (4.8)), которые не зависят от угла  $\varphi$ . С этой целью рассмотрим вместо уравнения (4.8) уравнение

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dv}{d\theta} \right) + \lambda v = 0, \quad \theta \in (0, \pi). \quad (4.10)$$

Делая в нем замену

$$x = \cos\theta : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], \quad v(\theta) = P(x), \quad (4.11)$$

с учетом которой имеем

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin\theta \frac{d}{dx},$$

перепишем (4.10) в виде

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \lambda P = 0, \quad x \in (-1, 1). \quad (4.12)$$

Это – уравнение Лежандра [11, с. 377]. Хорошо известно, что его гладкие на  $[-1, 1]$  решения (класса  $C^\infty[-1, 1]$ ) существуют только при значениях

$$\lambda = \lambda_n \equiv n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

Соответствующее уравнение

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + n(n+1)P = 0, \quad x \in (-1, 1) \quad (4.14)$$

имеет единственное (линейно независимое) ограниченное на  $[-1, 1]$  решение  $P_n(x)$ , называемое *полиномом Лежандра*. Детальное описание свойств полиномов Лежандра можно найти, например, в [6, с. 335-344], [7, с. 75-81], [11, § 25]. Приведем здесь те из них, которые ниже будут использоваться при построении сферических функций.

1. Полином Лежандра  $P_n(x)$  определяется по формуле Родрига:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

2.  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ .

3. Полиномы Лежандра  $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$  и только они представляют собой ортогональную в пространстве  $L^2(-1, 1)$  систему (алгебраических) полиномов. Более того, справедлива формула

$$(P_n, P_m) = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1}, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \quad (4.15)$$

Первые шесть полиномов Лежандра имеют вид (см. рис. 4.1,а)

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

4. Полином Лежандра  $P_n$  имеет ровно  $n$  нулей внутри интервала  $(-1, 1)$ , а его производная  $k$ -го порядка ( $k \leq n$ ) имеет  $n - k$  нулей внутри интервала  $(-1, 1)$  и не обращается в нуль на его концах.

5. Полиномы Лежандра  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  и только они образуют совокупность всех собственных функций спектральной задачи

$$[(1 - x^2)P']' + \lambda P = 0, \quad P \in C^2(-1, 1) \cap C[-1, 1], \quad (4.16)$$

отвечающих (простым) собственным значениям  $\lambda_n = n(n + 1)$ ,  $n = 0, 1, \dots$

6. Система полиномов Лежандра  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  является полной в пространстве  $C[-1, 1]$  непрерывных функций на интервале  $[-1, 1]$  и, более того, она полна в пространстве  $L^2(-1, 1)$  интегрируемых с квадратом функций на интервале  $(-1, 1)$ .

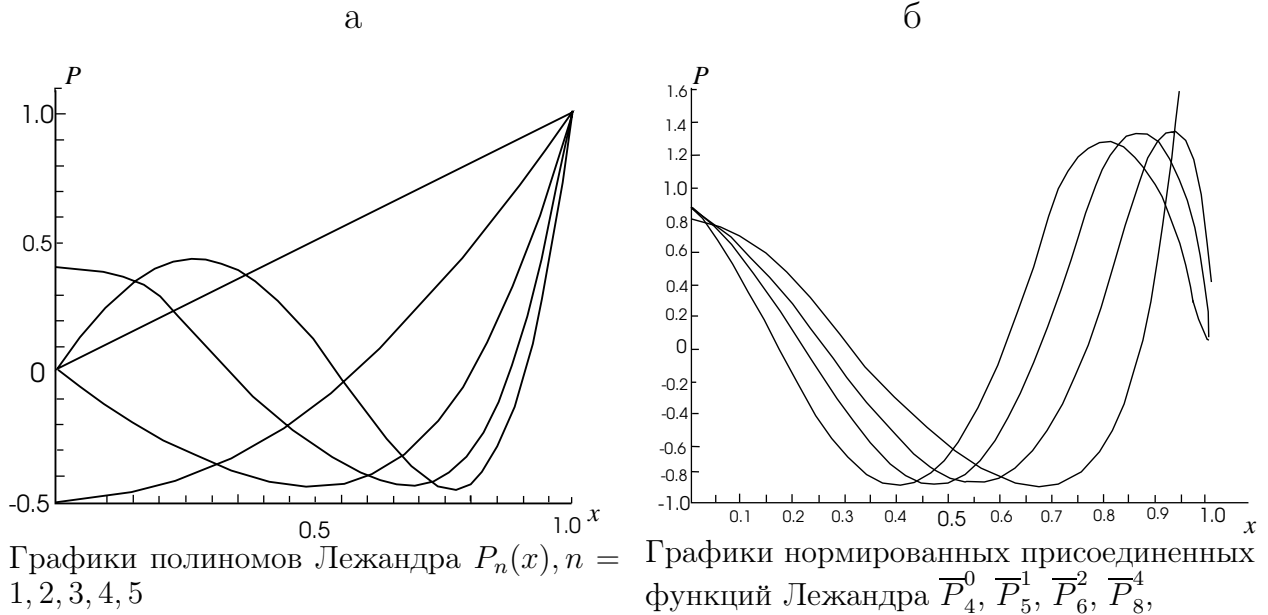


Рис. 4.1

Таким образом, любую функцию  $f \in L^2(-1, 1)$  можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad a_n = \frac{(f, P_n)}{\|P_n\|^2}, \quad (f, P_n) = \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, \quad \|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2 dx, \quad (4.17)$$

сходящийся к  $f$  в среднем квадратичном. Последнее означает, что

$$\|f(x) - \sum_{n=0}^N a_n P_n(x)\|_{L^2(-1,1)} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Важно отметить, что с ростом гладкости функции  $f$  растет и порядок скорости сходимости ее ряда Фурье (4.17) к  $f$  (см. [6, 7, 11]).

**4.4.3. Присоединенные функции Лежандра.** Вернемся к общему уравнению (4.8) и будем искать его частные решения в виде

$$v(\theta, \varphi) = Q(\theta)\Phi(\varphi). \quad (4.18)$$

Подставляя (4.18) в (4.8) и разделяя переменные, будем иметь

$$\sin^2\theta \left[ \frac{1}{Q\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dQ}{d\theta} \right) + \lambda \right] = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu,$$

где  $\mu$  – константа разделения. Отсюда приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям: уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dQ}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta} \right) Q = 0 \quad (4.19)$$

для  $Q$  и уравнению

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0 \quad (4.20)$$

для  $\Phi$ . Из (4.9) следует, что функция  $\Phi$  должна быть  $2\pi$ -периодической, т.е. должна удовлетворять условию  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ . Это возможно тогда и только тогда, когда

$$\mu = m^2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

Общее решение уравнения (4.20) при  $\mu = m^2$  имеет вид

$$\Phi(\varphi) = a \cos m\varphi + b \sin m\varphi, \quad (4.22)$$

где  $a$  и  $b$  – произвольные постоянные.

Подставим (4.21) в (4.19) и сделаем в нем замену (4.11). Полагая

$$Q(\theta) = P(\cos\theta) = P(x),$$

приходим к уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0 \quad \text{в } (-1, 1). \quad (4.23)$$

В результате задача нахождения сферических функций свелась к нахождению гладких на  $[-1, 1]$  решений уравнения (4.23), которое в частном случае  $m = 0$  переходит в уравнение Лежандра (4.12).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Гладкие на  $[-1, 1]$  решения уравнения (4.23) называются *присоединенными функциями Лежандра*.

Если  $P_\lambda^m$  – произвольная присоединенная функция Лежандра, то функция

$$v(\theta, \varphi) = (a \cos m\varphi + b \sin m\varphi) P_\lambda^m(\cos \theta) \quad (4.24)$$

является искомой сферической функцией. Поэтому для построения всех сферических функций нужно найти все присоединенные функции Лежандра. Чтобы найти указанные функции, введем вместо функции  $P$  новую неизвестную функцию  $Z$  по формуле

$$P(x) = (1 - x^2)^{m/2} Z(x). \quad (4.25)$$

Дифференцируя по  $x$ , имеем

$$\begin{aligned} P'(x) &= \frac{m}{2} (1 - x^2)^{m/2-1} (-2x) Z + (1 - x^2)^{m/2} Z', \\ P''(x) &= \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{m}{2} - 1 \right) (1 - x^2)^{m/2-2} (-2x)^2 - m (1 - x^2)^{m/2-1} \right] Z + \\ &+ 2 \left[ \frac{m}{2} (1 - x^2)^{m/2-1} (-2x) \right] Z' + (1 - x^2)^{m/2} Z''. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Записав уравнение (4.23) в виде

$$(1 - x^2)P'' - 2xP' + \left( \lambda - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) P = 0 \quad (4.27)$$

и подставляя в (4.27) вместо  $P, P'$  и  $P''$  их выражения из (4.25), (4.26), приходим к следующему уравнению для  $Z$ :

$$\begin{aligned} &(1 - x^2)^{m/2+1} Z'' + \left[ -2mx(1 - x^2)^{m/2} - 2x(1 - x^2)^{m/2} \right] Z' + \\ &+ \left\{ (1 - x^2)^{m/2-1} \left[ m(m - 2)x^2 - m(1 - x^2) + 2mx^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \lambda - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) (1 - x^2) \right] \right\} Z = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Сократив на  $(1 - x^2)^{m/2}$ , перепишем (4.28) в виде

$$(1 - x^2)Z'' - 2x(m + 1)Z' + [\lambda - m(m + 1)]Z = 0$$

или

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2)^{m+1} Z' \right] + [\lambda - m(m + 1)](1 - x^2)^m Z = 0. \quad (4.29)$$

Уравнение (4.29) совпадает с уравнением

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^{m+1} \frac{d}{dx} \left( \frac{d^m P_n}{dx^m} \right) \right] + [\lambda - m(m+1)](1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} = 0, \quad (4.30)$$

которому, как легко проверить путем  $m$ -кратного дифференцирования уравнения Лежандра (4.12), удовлетворяет производная  $d^m P_n/dx^m$  полинома Лежандра  $P_n$ . Поскольку уравнение Лежандра имеет нетривиальные гладкие на  $[-1, 1]$  решения только при значениях  $\lambda = \lambda_n \equiv n(n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то отсюда следует, что уравнение (4.30), а следовательно, и (4.29), имеют нетривиальные гладкие на  $[-1, 1]$  решения только при  $\lambda = \lambda_n$ , причем этими решениями являются производные  $d^m P_n/dx^m$  от полиномов Лежандра  $P_n$ . Вернувшись к исходному уравнению (4.23), приходим к выводу о том, что присоединенные функции Лежандра  $P(x) \equiv P_n^m(x)$  существуют только при  $\lambda = \lambda_n = n(n+1)$  и определяются формулами

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}. \quad (4.31)$$

Вычислим нормы в  $L^2(-1, 1)$  присоединенных функций Лежандра и одновременно докажем их ортогональность. С этой целью заменим в уравнении (4.30)  $m$  на  $m-1$ . Получим уравнение

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^m \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \right] + [\lambda - m(m-1)] (1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1} P_n(x)}{dx^{m-1}} = 0. \quad (4.32)$$

Положим

$$L_{n,k}^m = \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} \frac{d^m P_k}{dx^m} dx.$$

Интегрируя один раз по частям, имеем с учетом (4.32), что

$$\begin{aligned} L_{n,k}^m &= \left[ (1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} \frac{d^{m-1} P_k}{dx^{m-1}} \right] \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{m-1} P_k}{dx^{m-1}} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} \right] dx = \\ &= [n(n+1) - m(m-1)] \int_{-1}^1 (1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1} P_k}{dx^{m-1}} \frac{d^{m-1} P_n}{dx^{m-1}} dx = \\ &= [n(n+1) - m(m-1)] L_{n,k}^{m-1} = (n+m)(n-m+1) L_{n,k}^{m-1}. \end{aligned}$$

Последовательно применяя последнюю рекуррентную формулу, имеем

$$\begin{aligned} L_{n,k}^m &= (n+m)(n-m+1)(n+m-1)(n-m+2) L_{n,k}^{m-2} = \dots = \\ &= (n+m)(n+m-1) \dots (n+1)n(n-1) \dots (n-m+1) L_{n,k}^0 = \end{aligned}$$



$$= \frac{(n+m)!(n-m)!}{n!(n-m+1)!} L_{n,k}^0 = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} L_{n,k}^0.$$

Но в силу свойств полиномов Лежандра имеем

$$L_{n,k}^0 \equiv \int_{-1}^1 P_n(x) P_k(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & k = n. \end{cases}$$

В результате приходим к равенству

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \frac{2}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, & k = n. \end{cases} \quad (4.33)$$

Из (4.33), в частности, следует, что норма  $\|P_n^m\|$  присоединенной функции Лежандра  $P_n^m$  определяется формулой

$$\|P_n^m\|^2 \equiv \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Графики нормированных присоединенных функций Лежандра  $\bar{P}_n^m$  с нормой  $\|\bar{P}_n^m\| = 1$  приведены для некоторых конкретных значений  $m$  и  $n$  на рис.4.1,б. Можно также показать (см., например, [11, с. 383], [56, с. 719]), что при каждом целом  $m \geq 0$  система присоединенных функций Лежандра

$$\{P_n^m(x)\}_{n=m}^{\infty} \quad (4.34)$$

является полной в пространстве  $L^2(-1, 1)$ .

**4.4.4. Фундаментальные сферические функции.** Вернувшись к исходному уравнению (4.8) относительно сферических функций, приходим к выводу, что его гладкие на  $S_1$  решения существуют только при  $\lambda = \lambda_n, n = 0, 1, \dots$ , причем эти решения, т. е. сферические функции, определяются формулами:

$$P_n^m(\cos\theta), \quad P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi \quad \text{и} \quad P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi,$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Обозначим введенные функции через  $\mathcal{Y}_n^m$ , причем условимся в соответствии с [56, с. 723] приписывать отрицательный верхний индекс тем функциям, которые содержат  $\cos m\varphi$ , а положительный – тем функциям, которые содержат  $\sin m\varphi$ . Согласно определению имеем

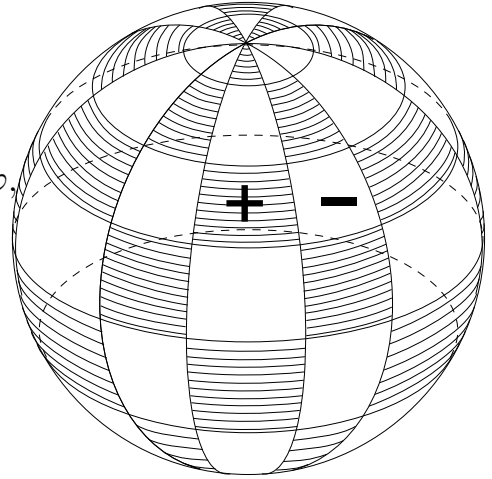


Рис. 4.2

$$\begin{aligned}
m = 0 & \quad \mathcal{Y}_n^0(\theta, \varphi) = P_n(\cos\theta), \\
m = 1 & \quad \mathcal{Y}_n^{-1}(\theta, \varphi) = P_n^1(\cos\theta)\cos\varphi, \mathcal{Y}_n^1(\theta, \varphi) = P_n^1(\cos\theta)\sin\varphi, \\
& \quad \dots \\
m = n & \quad \mathcal{Y}_n^{-n}(\theta, \varphi) = P_n^n(\cos\theta)\cos n\varphi, \mathcal{Y}_n^n(\theta, \varphi) = P_n^n(\cos\theta)\sin n\varphi.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Функции  $\mathcal{Y}_n^m$  при каждом фиксированном  $n$  называются *фундаментальными сферическими функциями порядка  $n$* . Число их равно  $2n + 1$ , т. е. кратности собственного значения  $\lambda_n$ . Они, очевидно, линейно независимы, хотя бы потому, что линейно независимы функции  $\cos m\varphi$  и  $\sin m\varphi$ . При этом функции  $\mathcal{Y}_n^0 \equiv P_n(\cos\theta)$ , не зависящие от угла  $\varphi$ , называются *зональными сферическими функциями*.

Такое название обусловлено тем, что в силу свойства полинома Лежандра  $P_n$  иметь ровно  $n$  нулей внутри интервала  $(-1, 1)$  сферу  $S_1$  можно разбить на  $n + 1$  широтных зон, внутри которых зональная функция  $\mathcal{Y}_n^0$  сохраняет знак. Остальные сферические функции носят название *тессерельных*. Последнее название объясняется тем, что сферу  $S_1$  можно разбить на клетки (tessera) (см. рис. 4.2) с помощью  $n - m$  параллелей и  $m$  равноотстоящих меридианов таким образом, что функция  $\mathcal{Y}_n^m$  сохраняет знак в каждой из них и меняет его при пересечении границы клетки (имеющей, таким образом, смысл узловой линии). Наконец, заметим, что в силу линейности и однородности уравнения (4.8) любая линейная комбинация фундаментальных сферических функций порядка  $n$

$$\mathcal{Y}_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n (a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta), \tag{4.36}$$

где  $a_{mn}$  и  $b_{mn}$  – произвольные постоянные, или, что то же, функция

$$\mathcal{Y}_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=-n}^n c_n^m \mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi), \quad c_n^m = \begin{cases} a_{mn}, & \text{при } m \leq 0, \\ b_{mn}, & \text{при } m > 0 \end{cases}$$

также является решением уравнения (4.8) при  $\lambda = \lambda_n$  и, следовательно, является сферической функцией. Указанную функцию (4.37) также называют сферической функцией или (по историческим причинам) *сферической гармоникой порядка  $n$* .

Подсчитаем  $L^2(S_1)$  – норму  $\|\mathcal{Y}_n^m\| \equiv (\int_{S_1} [\mathcal{Y}_n^m]^2 d\sigma)^{1/2}$  сферической функции  $\mathcal{Y}_n^m$ . Воспользуемся для этого очевидным равенством

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 m\varphi d\varphi = \pi \varepsilon_m, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2, & m = 0, \\ 1, & m \neq 0. \end{cases}$$

Делая замену переменных (4.11), имеем

$$\|\mathcal{Y}_n^m\|^2 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [\mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi)]^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \int_{-1}^1 [P_n^{|m|}(x)]^2 dx \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{c} \cos^2 m\varphi \\ \sin^2 m\varphi \end{array} \right\} d\varphi.$$

Отсюда вытекает с учетом предыдущих равенств, что

$$\|\mathcal{Y}_n^m\|^2 = \frac{2\pi\varepsilon_m}{(2n+1)} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}. \quad (4.37)$$

Из ортогональности и полноты тригонометрической системы

$$\{1, \cos \varphi, \sin \varphi, \dots, \cos m\varphi, \sin m\varphi, \dots\}$$

в пространстве  $L^2(0, 2\pi)$  и ортогональности и полноты в пространстве  $L^2(-1, 1)$  системы присоединенных функций Лежандра  $\{P_n^m(x)\}_{n=m}^\infty$  при каждом фиксированном  $m \geq 0$  (см. выше) следует ортогональность и полнота в  $L^2(S_1)$  системы сферических функций

$$\{\mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi), n = 0, 1, \dots; m = 0, \pm 1, \dots, \pm n\}. \quad (4.38)$$

(Ортогональность системы (4.38) в  $L^2(S_1)$  проверяется непосредственно, а строгое доказательство полноты можно найти в [11, с. 384] и [56, с. 727]). С учетом указанных свойств системы (4.38) любую функцию  $g \in L^2(S_1)$  можно разложить в ряд Фурье по функциям  $\mathcal{Y}_n^m$

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Y}_n(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^m \mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi), \quad (4.39)$$

сходящийся к  $g$  в  $L^2(S_1)$ . Чтобы определить коэффициенты  $c_n^m$  этого разложения, достаточно умножить ряд (4.39) на функцию  $\mathcal{Y}_k^l(\theta, \varphi)$ , проинтегрировать по  $S_1$  и воспользоваться ортогональностью системы  $\{\mathcal{Y}_k^l\}$  и формулой (4.37). В результате получим

$$c_n^m = \frac{(2n+1)}{2\pi\varepsilon_m} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(\theta, \varphi) \mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (4.40)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.1.** В некоторых учебниках по математической физике, как, например в [11, с. 387], под сферической функцией понимается сужение шаровой функции  $u_n$  порядка  $n$  на сферу  $S_1 \subset \mathbb{R}^3$ . При этом под *шаровой функцией* порядка  $n$  понимают однородный гармонический полином степени  $n$ , т. е. однородный полином  $u_n$  степени  $n$ , удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta u_n = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^3.$$

Можно показать (см., например, [11]), что такое определение сферической функции эквивалентно введенному выше и что существует ровно  $2n+1$  линейно независимых шаровых функций  $u_n^m$  порядка  $n$ , где  $m = 0, \pm 1, \dots, \pm n$ . При этом справедлива формула

$$u_n^m(r, \theta, \varphi) = r^n \mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi), \quad n = 0, 1, \dots, \quad |m| \leq n, \quad (4.41)$$

устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между классом всех шаровых и сферических функций.

**4.4.5. Сферические функции Бесселя, Неймана и Ханкеля.** Обратимся теперь к уравнению (4.7) и заменим в нем  $\lambda$  на  $\lambda_n = n(n+1)$ . Получим

$$r^2 R'' + 2r R' + [k^2 r^2 - n(n+1)] R = 0. \quad (4.42)$$

С помощью подстановки

$$z = kr, \quad w(z) = R(r) \sqrt{z} \quad (4.43)$$

перепишем (4.42) в виде

$$z^2 w'' + zw' + (z^2 - \nu^2)w = 0, \quad \nu = n + 1/2. \quad (4.44)$$

Уравнение (4.44) представляет собой уравнение Бесселя порядка  $\nu$ , а его решениями являются цилиндрические функции Бесселя  $J_\nu(z)$ , Неймана  $N_\nu(z)$  и Ханкеля  $H_\nu^{(1)}(z)$  (либо  $H_\nu^{(2)}(z)$ ) первого (либо второго) рода. Делая обратную замену переменных, заключаем, что решениями уравнения (4.42) являются следующие функции:

$$j_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr), \quad y_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} N_{n+1/2}(kr), \quad (4.45)$$

$$h_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+1/2}^{(1)}(kr), \quad h_n^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+1/2}^{(2)}(kr),$$

называемые соответственно *сферическими функциями Бесселя, Неймана и Ханкеля первого и второго рода*. (Несущественный множитель  $\sqrt{\pi/2}$  перед функциями в (4.45) служит для их нормировки).

Из формул (3.57) при  $\nu = n + 1/2$  и (4.45) (см. также [11, с. 358]) вытекает, что функции  $h_n^{(1)}$  и  $h_n^{(2)}$  связаны с функциями  $j_n$  и  $y_n$  соотношениями:

$$h_n^{(1)}(kr) = j_n(kr) + iy_n(kr), \quad h_n^{(2)}(kr) = j_n(kr) - iy_n(kr),$$

аналогичными соответствующим соотношениям для цилиндрических функций Бесселя, Неймана и Ханкеля. Указанная аналогия подсказывает, что функцию  $j_n$  следует использовать при решении задачи излучения звука внутри ограниченной области, содержащей начало координат. Любую пару

функций, входящих в (4.45), можно использовать при решении задачи излучения в ограниченной области типа сферической полости, не содержащей начало координат. Наконец, при решении задачи излучения в неограниченной области типа внешности сферы следует использовать только функцию  $h_n^{(1)}(kr)$ , тогда как при решении задачи о падении приходящей из бесконечности волны на эту сферу можно использовать только функцию  $h_n^{(2)}(kr)$ . Последнее утверждение является следствием того, что, как легко проверить, используя асимптотические представления цилиндрических функций в дальней зоне, приведенные, например в [37, 56], именно функция  $h_n^{(1)}(kr)$  удовлетворяет условиям излучения (4.3), тогда как функция  $h_n^{(2)}(kr)$  удовлетворяет условиям излучения, получающимся из (4.3) заменой знака минус во втором соотношении на плюс.

**4.4.6. Решение уравнения Гельмгольца в сферических координатах. Сферические волны.** Из изложенных выше результатов следует, что любое частное решение уравнения Гельмгольца в сферических координатах, удовлетворяющее условиям излучения (4.3), представимо в виде

$$u_n(r, \theta, \varphi) = h_n^{(1)}(kr) \mathcal{Y}_n(\theta, \varphi) = h_n^{(1)}(kr) \sum_{m=-n}^n a_n^m \mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi), \quad (4.46)$$

где  $a_n^m$  – произвольные постоянные. По своему физическому смыслу функция (4.46) описывает расходящуюся волну со сферическим фронтом, которую принято называть *сферической волной  $n$ -го порядка*. Каждой такой волне отвечает свой источник, называемый *сферическим источником  $n$ -го порядка*. В частном случае, когда  $n = 0$ , указанный источник носит название *пульсирующей сферы*; при  $n = 1$  получаем осциллирующую сферу, т. е. сферу, гармонически колеблющуюся вдоль фиксированного направления; случай  $n = 2$  отвечает так называемому *квадрупольному* сферическому источнику и т. д. Более подробную информацию о различных сферических источниках и их физическом смысле можно найти, например, в книге [21].

В силу линейности и однородности уравнения (4.1) бесконечная сумма частных решений (4.46), т. е. ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(1)}(kr) \mathcal{Y}_n(\theta, \varphi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(1)}(kr) \sum_{m=-n}^n a_n^m \mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi) \quad (4.47)$$

при произвольных постоянных  $a_n^m$  также является решением уравнения (4.1). Этот вывод, конечно, справедлив при условии, что ряд (4.47) можно дважды почленно дифференцировать по  $r, \theta$  и  $\varphi$ , причем ряд (4.47) и ряды, полученные его почленным дифференцированием, равномерно сходятся вне  $S$ .

Выберем далее постоянные  $a_n^m$  так, чтобы функция (4.47) удовлетворяла граничному условию (4.2), где для простоты будем считать, что

$$\alpha = \text{const} \geq 0, \quad \beta = \text{const} \geq 0 \quad \text{и} \quad \alpha + \beta \neq 0. \quad (4.48)$$

С этой целью, предполагая правую часть  $g$  в (4.2) достаточно гладкой, разложим ее в ряд (4.39) по сферическим функциям  $\mathcal{Y}_n^m$ , коэффициенты  $c_n^m$  которого определяются формулой (4.40). Учитывая, что  $\partial u / \partial n = \partial u / \partial r$  при  $r = a$ , где  $a$  – радиус сферы  $S$ , и что

$$\frac{\partial u}{\partial r} = k \sum_{n=0}^{\infty} (h_n^{(1)})'(kr) \sum_{m=-n}^n a_n^m \mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi), \quad (4.49)$$

имеем

$$\left( \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \alpha h_n^{(1)}(ka) + k\beta h_n^{(1)'}(ka) \right] \sum_{m=-n}^n a_n^m \mathcal{Y}_n^m(\theta, \varphi). \quad (4.50)$$

Сравнивая (4.50) и (4.39), приходим к выводу, что граничное условие (4.2) удовлетворяется, если коэффициенты  $a_n^m$  ряда (4.47) связаны с коэффициентами Фурье  $c_n^m$  разложения (4.39) граничной функции  $g$  соотношениями

$$a_n^m = \frac{c_n^m}{\alpha h_n^{(1)}(ka) + k\beta h_n^{(1)'}(ka)}. \quad (4.51)$$

Тем самым решение краевой задачи (4.1)–(4.3) (формально) построено. Оно имеет вид ряда (4.47), коэффициенты  $a_n^m$  которого определяются формулами (4.51). Можно показать, что для достаточно гладкой функции  $g$  (например, для  $g \in C^3(S)$ ) ряд (4.47) с коэффициентами (4.51) равномерно сходится во внешности  $D$  сферы  $S$ , и его можно почленно дважды дифференцировать по всем переменным внутри  $D$ . Следовательно, для  $g \in C^3(S)$  ряд (4.47) с коэффициентами (4.51) действительно является искомым решением задачи (4.1)–(4.3). О физическом смысле решения (4.47) и его составляющих гармоник более подробно можно прочитать в [21, с. 426].

## Задачи к гл. 4

4.1. Доказать, что при выполнении условий (1.49) сумма ряда (1.41) с коэффициентами  $T_k$ , определенными в (1.48), принадлежит пространству  $C^{2,2}(\overline{Q}_T)$  и является решением задачи (1.35)–(1.37).

4.2. Рассмотреть задачу (3.19)–(3.21), описывающую свободные колебания прямоугольной мембраны. Указать достаточные условия на исходные данные задачи – функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , при которых сумма (двойного) ряда (3.37) принадлежит пространству  $C^{2,2}(\overline{Q}_T)$  и является регулярным решением задачи (3.19)–(3.21).

# ГЛАВА 5. Параболические уравнения и тепловые процессы

В гл.1 было показано, что математическое моделирование процессов переноса тепла, диффузии, распространения электромагнитных полей в сильно проводящих средах и ряда других процессов приводит к необходимости решения начально-краевых задач для уравнений параболического типа. Простейшим представителем параболических уравнений является уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \quad (1)$$

где  $a^2 = \text{const} > 0$ ,  $f$  – заданная функция, имеющая смысл объемной плотности источников тепла. Ниже мы сформулируем основные начально-краевые задачи и задачу Коши для уравнения вида (1) в пространстве одного и нескольких измерений, исследуем единственность и устойчивость решений указанных задач, докажем их разрешимость в частных случаях, используя методы Фурье и интегральных преобразований, и изучим свойства их решений, характеризующие именно параболические уравнения. К указанным свойствам относятся *принцип максимума*, *бесконечная дифференцируемость решения* внутри рассматриваемой области даже при негладких граничных и начальных данных и *бесконечная скорость* распространения возмущений. Мы также приведем пример некорректной постановки задачи для уравнения теплопроводности.

## § 5.1. Принцип максимума

**5.1.1. Принцип максимума для однородного уравнения теплопроводности.** Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma$ . Положим  $Q_T = \Omega \times (0, T]$ ,  $\Sigma_T = \Gamma \times (0, T]$ ,  $\Omega_0 = \Omega \times \{t = 0\}$ , где  $0 < T < \infty$ . Ясно, что с геометрической точки зрения область  $Q_T$  представляет собой конечный цилиндр в пространстве  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t^1$ , а  $\Sigma_T$  и  $\Omega_0$  являются соответственно его боковой поверхностью и нижним основанием. Рассмотрим в цилиндре  $Q_T$  следующую *начально-краевую задачу*: найти в  $Q_T$  решение трехмерного однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \equiv a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1.1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u|_{\Gamma} = g(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma \times (0, T] \quad (1.2)$$

и начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}. \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ,  $u$  – искомая функция, под которой ниже будем понимать температуру в области  $\Omega$ , константа  $a^2 > 0$  имеет смысл коэффициента температуропроводности,  $g$  и  $\varphi$  – заданные функции своих аргументов, первая из которых описывает распределение температуры на границе  $\Gamma$ , а вторая описывает начальное распределение температуры в области  $\Omega$ . Задача (1.1)–(1.3) называется *первой начально-краевой задачей* (или просто первой краевой задачей, либо *задачей Дирихле*) для уравнения теплопроводности. В физическом плане она представляет собой задачу определения эволюции теплового состояния тела, занимающего область  $\Omega$ , по заданному его тепловому состоянию в начальный момент и на границе.

Фундаментальным свойством решений уравнения теплопроводности (1.1), качественно отличающим его от волнового уравнения, является *принцип максимума*. Обозначим через  $C^{2,1}(Q_T)$  подпространство пространства  $C(Q_T)$ , состоящее из функций, непрерывных в  $Q_T$  вместе с производными первого и второго порядков по пространственным переменным и производной первого порядка по  $t$ , через  $C(\overline{Q}_T)$  обозначим подпространство пространства  $C(Q_T)$ , состоящее из функций, непрерывных в замыкании  $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0, T]$  множества  $Q_T$ . Сформулируем принцип максимума в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 1.1** (Принцип максимума). *Функция  $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ , удовлетворяющая однородному уравнению теплопроводности (1.1) в цилиндре  $Q_T$ , принимает максимальное и минимальное значения либо на боковой поверхности  $\Sigma_T = \Gamma \times (0, T]$  цилиндра  $Q_T$ , либо на его нижнем основании  $\overline{\Omega} \times \{t = 0\}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно провести доказательство для случая максимума. Действительно, если функция  $u$ , указанная в условии теоремы, достигает минимума в некоторой точке  $(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T$ , то в той же точке  $(\mathbf{x}, t)$  достигает максимума функция  $-u$ , также удовлетворяющая условиям теоремы. Применим для доказательства принципа максимума *метод барьеров*, суть которого излагается ниже.

Положим

$$M = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T} u(\mathbf{x}, t), \quad m = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \Sigma_T \cup \overline{\Omega}_0} u(\mathbf{x}, t).$$

Ясно, что  $M \geq m$ . Теорема будет доказана, если мы покажем, что  $M = m$  для любого решения  $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$  уравнения (1.1). Предположим противное, т. е. что существует такое решение  $u$  уравнения (1.1), для которого  $M > m$ . В силу непрерывности на  $\overline{Q}_T$  функции  $u$  существует по крайней мере одна точка  $(\mathbf{x}_0, t_0) = (x_0, y_0, z_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$  такая, что



$u(\mathbf{x}_0, t_0) = M$ . Введем функцию

$$v(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) + \frac{M - m}{6d^2} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2], \quad (1.4)$$

называемую *барьером* для функции  $u$ , где  $d$  – диаметр области  $\Omega$ . На боковой поверхности  $\bar{\Sigma}_T$  цилиндра  $Q_T$  и на его нижнем основании  $\bar{\Omega}_0$  имеем

$$v(\mathbf{x}, t) \leq m + \frac{M - m}{6} = \frac{M}{6} + \frac{5m}{6} < M.$$

Кроме того,  $v(\mathbf{x}_0, t_0) = u(\mathbf{x}_0, t_0) = M$ . Последнее означает, что функция  $v$  так же, как и  $u$ , не принимает максимума ни на боковой поверхности  $\Sigma_T$  цилиндра  $Q_T$ , ни на его нижнем основании, т. е. при  $t = 0$ .

В таком случае максимум функции  $v$  достигается в некоторой точке  $(\mathbf{x}_1, t_1) = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in Q_T = \Omega \times (0, T]$ , где  $\mathbf{x}_1$  является строго внутренней точкой области  $\Omega$  и  $0 < t_1 \leq T$ . Поскольку точка  $(\mathbf{x}_1, t_1)$  является точкой максимума функции  $v$ , то в этой точке необходимо выполняются неравенства [18]:

$$\text{grad} v = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leq 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \geq 0. \quad (1.5)$$

(Более того, если  $t_1 < T$ , то  $\partial v / \partial t = 0$  согласно необходимому условию экстремума дифференцируемой функции). Из (1.5) вытекает, что в точке  $(\mathbf{x}_1, t_1)$  выполняется неравенство

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \Delta v \geq 0. \quad (1.6)$$

С другой стороны, в любой точке  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T]$  в силу (1.4) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \Delta v = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u - a^2 \frac{M - m}{d^2} = -a^2 \frac{M - m}{d^2} < 0. \quad (1.7)$$

Поскольку (1.7) противоречит (1.6), то теорема доказана. ■

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.** *Классическим решением первой краевой задачи (1.1)–(1.3) назовем функцию  $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ , удовлетворяющую уравнению (1.1) в каждой точке  $(\mathbf{x}, t) \in Q_T$ , граничному условию (1.2) в каждой точке  $(\mathbf{x}, t) \in \Gamma \times (0, T]$  и начальному условию (1.3) в каждой точке  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ .*

Из теоремы 1.1 вытекают три важных следствия для классического решения  $u$  первой краевой задачи (1.1)–(1.3).

**СЛЕДСТВИЕ 1.1.** *Классическое решение  $u$  задачи (1.1)–(1.3), отвечающее нулевым данным  $g = 0$  и  $\varphi = 0$ , тождественно равно нулю в  $\bar{Q}_T$ .*

Действительно, поскольку максимальное и минимальное значения  $u$  на  $\overline{\Sigma}_T$  и  $\overline{\Omega}_0$  равны нулю, то  $u \equiv 0$  в силу принципа максимума. ■

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Классическое решение задачи (1.1)–(1.3) единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, предположим противное, что существуют два классических решения  $u_1$  и  $u_2$  задачи (1.1)–(1.3). Тогда их разность  $u = u_1 - u_2$  удовлетворяет однородному уравнению (1.1) и обращается в нуль как при  $t = 0$ , так и на  $\Gamma \times (0, T]$ . Но тогда из следствия 1.1 вытекает, что  $u \equiv 0$  в  $Q_T$ , т.е. что  $u_1 = u_2$ . ■

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Классическое решение задачи (1.1)–(1.3) непрерывно в норме  $C(\overline{Q}_T)$  зависит от граничной функции  $g$  в (1.2) и начальной функции  $\varphi$  в (1.3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть разность  $g_1 - g_2$  граничных функций  $g_1$  и  $g_2$  в (1.2) и  $\varphi_1 - \varphi_2$  начальных функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в (1.3) не превосходит по модулю числа  $\varepsilon > 0$ :  $|g_1 - g_2| \leq \varepsilon$  на  $\Gamma \times [0, T]$ ,  $|\varphi_1 - \varphi_2| \leq \varepsilon$  в  $\overline{\Omega}$  (при  $t = 0$ ). Обозначим через  $u_1$  (либо  $u_2$ ) решение задачи (1.1)–(1.3), отвечающее паре  $(g_1, \varphi_1)$  (либо  $(g_2, \varphi_2)$ ). Тогда разность  $u = u_1 - u_2$  обоих решений как решение однородного уравнения (1.1) с граничной функцией  $g_1 - g_2$  и начальной функцией  $\varphi_1 - \varphi_2$  удовлетворяет согласно теореме 1.1 условию  $|u| \leq \varepsilon$ . ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Приведенные результаты с небольшими изменениями распространяются на случай, когда  $T = \infty$ , т.е. когда задача (1.1)–(1.3) рассматривается на бесконечном временном интервале (см. п. 5.1.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Принцип максимума в форме теоремы 1.1 справедлив для уравнения теплопроводности (1.1), рассматриваемого в пространстве  $\mathbb{R}^n$  любого числа измерений. Подчеркнем, что в указанной форме он справедлив именно для однородного уравнения теплопроводности. В следующем пункте мы распространим принцип максимума на общее неоднородное уравнение параболического типа с переменными коэффициентами, рассматриваемое в ограниченной области пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Естественно, возникает вопрос о *существовании* классического решения  $u$  задачи (1.1)–(1.3). В этой связи отметим, что разрешимость задачи (1.1)–(1.3) можно доказать лишь при выполнении определенных условий гладкости и согласования исходных данных. Действительно, условие непрерывности  $u \in C(\overline{Q}_T)$  классического решения  $u$  необходимо требует, чтобы выполнялись следующие условия гладкости и согласования исходных данных:

- (i)  $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ ,  $g \in C(\Gamma \times [0, T])$ ,  $\varphi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, 0) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma$ .

Но даже при выполнении условий (i) доказать существование классического решения  $u$  задачи (1.1)–(1.3) непросто. Ниже мы ограничимся доказательством разрешимости задачи (1.1)–(1.3) лишь в частном случае  $n = 1$  с использованием метода Фурье. Что касается общих краевых задач для

уравнений параболического типа в произвольных областях  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , то исследование их разрешимости можно найти в [11, § 34], [28, гл. 3], [34, гл. 6].

**5.1.2. Принцип максимума для неоднородного параболического уравнения с переменными коэффициентами в  $\mathbb{R}^n$ .** Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в пространстве  $\mathbb{R}^n$  с границей  $\Gamma$ . Положим  $Q_\infty = \Omega \times (0, \infty)$ ,  $\overline{Q}_\infty = \overline{\Omega} \times [0, \infty)$ ,  $\Sigma_\infty = \Gamma \times (0, \infty)$ ,  $\overline{\Sigma}_\infty = \Gamma \times [0, \infty)$ ,  $Q_T = \Omega \times (0, T]$  при любом  $T < \infty$ . Рассмотрим в бесконечном цилиндре  $Q_\infty$  неоднородное уравнение параболического типа с переменными коэффициентами вида

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f(\mathbf{x}, t). \quad (1.8)$$

Здесь  $\rho$ ,  $p$ ,  $q$  и  $f$  – заданные функции, удовлетворяющие условиям

(ii)  $\rho \in C(\overline{\Omega})$ ,  $p \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $q \in C(\overline{\Omega})$ ,  $\rho > 0$ ,  $p > 0$ ,  $q \geq 0$  в  $\overline{\Omega}$ ,  $f \in C(Q_\infty)$ .

Из результатов § 1.4 следует, что уравнение (1.8) описывает распространение тепла (при  $q = 0$ ) в неоднородной среде с переменным коэффициентом теплопроводности  $p$  либо распространение вещества (при  $\rho = 1$ ) в неоднородной среде с переменным коэффициентом диффузии  $p$  с учетом эффекта поглощения вещества в среде, описываемого коэффициентом  $q$ .

**ТЕОРЕМА 1.2 (Принцип максимума).** Пусть при выполнении условий (ii) функция  $u \in C^{2,1}(Q_\infty) \cap C(\overline{Q}_\infty)$  удовлетворяет уравнению (1.8) в  $Q_\infty$  и  $T > 0$  – любое число. Тогда:

1) если  $f(\mathbf{x}, t) \leq 0$  в цилиндре  $Q_T$ , то либо  $u \leq 0$  в  $\overline{Q}_T$ , либо функция  $u$  принимает свой (положительный) максимум в цилиндре  $Q_T$  на нижнем основании  $\overline{\Omega}_0$  цилиндра  $Q_T$  или на его боковой поверхности  $\Gamma \times (0, T]$ , т. е. справедливо неравенство, называемое принципом максимума:

$$u(\mathbf{x}, t) \leq M \equiv \max[0, \max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u(\mathbf{x}, 0), \max_{(\mathbf{x}, t) \in \Gamma \times [0, T]} u(\mathbf{x}, t)] \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T; \quad (1.9)$$

2) если  $f(\mathbf{x}, t) \geq 0$  в  $Q_T$ , то справедливо неравенство

$$u(\mathbf{x}, t) \geq m \equiv \min[0, \min_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u(\mathbf{x}, 0), \min_{(\mathbf{x}, t) \in \Gamma \times [0, T]} u(\mathbf{x}, t)], \quad (1.10)$$

называемое принципом минимума для решения уравнения (1.8).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Как и в п. 5.1.1, применим для доказательства принципа максимума метод барьеров. Докажем справедливость неравенства (1.9). Предположим противное, т. е. что функция  $u$  принимает в некоторых точках цилиндра  $\overline{Q}_T$  положительные значения, но не достигает своего (положительного) максимума ни на его нижнем основании  $\Omega_0$ , ни на его боковой границе  $\Sigma_T$ . В таком случае найдется такая точка  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ ,  $0 < t_0 \leq T$ , что

$$u(\mathbf{x}_0, t_0) > M > 0. \quad (1.11)$$

Положив

$$\varepsilon = u(\mathbf{x}_0, t_0) - M > 0, \quad (1.12)$$

введем функцию  $v$  (барьер для решения  $u$ ) по формуле

$$v(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) + \frac{\varepsilon(2T - t)}{2T}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T.$$

Ясно, что  $v(\mathbf{x}, t) \leq u(\mathbf{x}, t) + \varepsilon$  для всех  $(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T$ . С учетом этого и (1.12) при всех  $(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T$  либо при  $t = 0$  имеем

$$v(\mathbf{x}_0, t_0) \geq u(\mathbf{x}_0, t_0) = \varepsilon + M \geq \varepsilon + u(\mathbf{x}, t) \geq \varepsilon + v(\mathbf{x}, t) - \varepsilon = v(\mathbf{x}, t).$$

Отсюда следует, что функция  $v$  также принимает свой положительный в  $\overline{Q}_T$  максимум в некоторой внутренней точке  $(\mathbf{x}_1, t_1) \in \Omega \times (0, T]$ , причем

$$v(\mathbf{x}_1, t_1) \geq v(\mathbf{x}_0, t_0) \geq \varepsilon + M > \varepsilon. \quad (1.13)$$

В силу необходимых условий максимума функции  $v$  в точке  $(\mathbf{x}_1, t_1)$  имеем

$$\text{grad} v = 0, \quad \Delta v \leq 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \geq 0. \quad (1.14)$$

Из (1.14), (1.13) и условия  $f \leq 0$  в  $Q_T$  вытекает, что в точке  $(\mathbf{x}_1, t_1)$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(p \text{grad} u) + qu - f(\mathbf{x}, t) &= \rho \frac{\partial v}{\partial t} - p \Delta v - (\text{grad} p, \text{grad} v) + qv - f + \\ + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\rho}{T} - q \frac{2T - t_1}{T} \right) &\geq qv + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\rho}{T} - q \frac{2T - t_1}{T} \right) \geq q\varepsilon \left( 1 - \frac{2T - t_1}{2T} \right) + \frac{\varepsilon \rho}{2T} > 0. \end{aligned}$$

Последнее противоречит уравнению (1.8). Таким образом, неравенство (1.10) неверно, а поэтому справедливо противоположное неравенство (1.9). По аналогичной схеме доказывается справедливость принципа минимума. ■

Основываясь на принципе максимума, докажем теперь единственность и непрерывную зависимость от исходных данных классического решения первой начально-краевой задачи для уравнения (1.8). Указанная задача заключается в нахождении решения  $u \in C^{2,1}(Q_\infty) \cap C(\overline{Q}_\infty)$  уравнения (1.8) в области  $Q_\infty$ , удовлетворяющего условию Дирихле (1.2) и начальному условию (1.3). Для краткости на указанную задачу будем ссылаться как на задачу 1. Предполагая, что выполняются условия (i) и (ii) гладкости и согласования исходных данных, положим для фиксированного  $T > 0$

$$M_0 = \|\varphi\|_{C(\overline{\Omega})}, \quad M_1 = \|g\|_{C(\Gamma \times [0, T])}, \quad M = \|f\|_{C(\overline{Q}_T)}. \quad (1.15)$$

Пусть функция  $u : Q_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  является классическим решением задачи 1. Введем функцию  $v : Q_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  по формуле

$$v(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) - \frac{M}{\rho_0} t, \quad \rho_0 = \min_{x \in \overline{\Omega}} \rho(x) > 0. \quad (1.16)$$

Легко видеть, что функция  $v$  является классическим решением задачи (1.8), (1.2), (1.3), в которой функции  $f$  и  $g$  следует заменить на функции

$$\tilde{f} = f - \frac{\rho}{\rho_0}M - \frac{q}{\rho_0}Mt \quad \text{и} \quad \tilde{g} = g - \frac{M}{\rho_0}t \quad (1.17)$$

соответственно. Ясно, что

$$\tilde{f}(\mathbf{x}, t) \leq 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T, \quad \tilde{g}(\mathbf{x}, t) \leq M_1 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma \times [0, T]. \quad (1.18)$$

В силу первого условия в (1.18) для функции  $v$  справедлив принцип максимума (1.9), согласно которому выполняется оценка

$$v(x, t) \leq \max(M_0, M_1) \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}_T. \quad (1.19)$$

Из (1.16) и (1.19) приходим к следующей оценке сверху для решения  $u$ :

$$u(\mathbf{x}, t) \leq \max(M_0, M_1) + \frac{M}{\rho_0}T \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T. \quad (1.20)$$

Точно так же, рассматривая функцию  $w(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) + (M/\rho_0)t$  и применяя к ней принцип минимума (1.10), приходим к оценке снизу для  $u$ :

$$u(\mathbf{x}, t) \geq -\max(M_0, M_1) - \frac{M}{\rho_0}T \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \overline{Q}_T. \quad (1.21)$$

Из (1.20) и (1.21) приходим к следующей оценке для  $u$ :

$$\|u\|_{C(\overline{Q}_T)} \leq \max \left\{ \|\varphi\|_{C(\overline{\Omega})}, \|g\|_{C(\Gamma \times [0, T])} \right\} + \frac{T}{\rho_0} \|f\|_{C(\overline{Q}_T)}. \quad (1.22)$$

Из оценки (1.22) вытекает, в частности, что однородная задача 1 (при  $\varphi = 0$ ,  $g = 0$ ,  $f = 0$ ) имеет лишь тривиальное решение. В таком случае сама оценка (1.22) означает устойчивость нулевого решения задачи 1 в норме  $C(\overline{Q})$ . Отсюда с учетом линейности задачи 1 и результатов § 2.2 вытекает устойчивость в норме  $C(\overline{Q}_T)$  по исходным данным  $\varphi$ ,  $g$  и  $f$  любого классического решения задачи 1. Последнее означает, что если  $u$  – решение задачи 1, отвечающее исходным данным  $(\varphi, g, f)$ , а  $\tilde{u}$  – решение задачи 1, отвечающее исходным данным  $(\tilde{\varphi}, \tilde{g}, \tilde{f})$ , то в силу (1.22) для разности  $\tilde{u} - u$  справедлива оценка

$$\|\tilde{u} - u\|_{C(\overline{Q}_T)} \leq \max \left( \|\tilde{\varphi} - \varphi\|_{C(\overline{\Omega})}, \|\tilde{g} - g\|_{C(\Gamma \times [0, T])} \right) + \frac{T}{\rho_0} \|\tilde{f} - f\|_{C(\overline{Q}_T)}.$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 1.3.** Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда для классического решения  $u$  задачи (1.8), (1.2), (1.3) справедлива оценка (1.22),

означающая единственность и непрерывную зависимость решения  $u$  в норме  $C(\overline{Q}_T)$  от исходных данных: начальной функции  $\varphi$  в норме  $C(\overline{\Omega})$ , граничной функции  $g$  в норме  $C(\overline{\Sigma}_T)$  и правой части  $f$  в норме  $C(\overline{Q}_T)$ .

К сожалению, с помощью принципа максимума не удастся доказать единственность и устойчивость решения уравнения (1.8), рассматриваемого при смешанных краевых условиях вида

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = g \quad \text{в } (0, T]. \quad (1.23)$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  – некоторые непрерывные на  $\Gamma$  функции. Это связано с тем, что из условия (1.23) нельзя в общем случае получить оценку на само решение  $u$  в точках границы  $\Gamma$ . Однако в случае общих краевых условий вида (1.23) единственность и непрерывную зависимость решения от исходных данных можно доказать, используя метод энергетических неравенств, причем по той же схеме, что и для гиперболического уравнения (см. §4.2).

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.** Оценка (1.22) похожа по своей структуре на оценку (2.39) из гл. 2, полученную для одномерного уравнения переноса (2.20) из гл. 2. Это наводит на мысль о справедливости оценки (1.22) и для более общего уравнения диффузии-конвекции-реакции, имеющего вид

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} u + qu = f. \quad (1.24)$$

Здесь  $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$  – произвольная вектор-функция, удовлетворяющая условию  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ . Действительно, нетрудно убедиться в том, что теоремы 1.2 и 1.3 остаются справедливыми и для уравнения (1.24). Для этого достаточно дословно повторить рассуждения, используемые при доказательстве этих теорем, что предоставляется читателю.

## § 5.2. Решение первой краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности методом Фурье

Рассмотрим в этом параграфе первую краевую задачу для одномерного уравнения теплопроводности. Она заключается в нахождении функции  $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ , где  $Q_T = (0, l) \times (0, T]$ , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (2.1)$$

в области  $Q_T$ , граничным условиям

$$u|_{x=0} = g_1(t), \quad u|_{x=l} = g_2(t) \quad \text{в } (0, T] \quad (2.2)$$

и начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad \text{в } (0, l). \quad (2.3)$$

Здесь  $f, g_1, g_2$  и  $\varphi$  – заданные непрерывные функции своих аргументов, причем, в частности,  $f$  имеет смысл плотности внешних (объемных) источников тепла. Физический смысл функций  $g_1, g_2$  и  $\varphi$  при “температурной” интерпретации уравнения (2.1) пояснен в § 5.1.

Из теоремы 1.3 при  $n = 1$  вытекает, что классическое решение  $u$  задачи (2.1)–(2.3) единственно и непрерывно в норме  $C(\overline{Q}_T)$  зависит от  $C$ -норм исходных данных: начальной функции  $\varphi$ , граничных функций  $g_1, g_2$  и правой части  $f$ . Поэтому остается доказать лишь существование решения  $u$  задачи (2.1)–(2.3). Применим для этой цели метод Фурье, который одновременно позволит найти явное представление решения  $u$ .

Рассмотрим сначала более простую задачу, заключающуюся в нахождении решения однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

в области  $Q_T$ , удовлетворяющего однородным граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad \text{в } (0, T] \quad (2.5)$$

и начальному условию (2.3). Задача (2.3)–(2.5) моделирует распределение температуры в однородной струне (либо однородном стержне) длины  $l$  при условии, что начальное распределение температуры описывается функцией  $\varphi$ , а температура на концах струны (либо стержня) равна нулю. Ниже на задачи (2.1)–(2.3) и (2.3)–(2.5) будем ссылаться для краткости как на задачи 1 и 2 соответственно.

Отметим, что задача (2.3)–(2.5) отличается от задачи (1.1)–(1.3) гл. 4 для одномерного волнового уравнения, описывающего колебания струны, тем, что (2.3)–(2.5) содержит одно начальное условие (для функции  $u$ ), тогда как задача (1.1)–(1.3) из гл. 4 включает два начальных условия: одно – для функции  $u$ , другое – для производной  $\partial u / \partial t$ . Последнее можно объяснить тем, что уравнение теплопроводности, будучи уравнением 1-го порядка по времени, требует для выделения единственного решения одного начального условия, тогда как волновое уравнение, являясь уравнением 2-го порядка по времени, требует двух начальных условий. Такое, казалось бы, небольшое отличие между уравнением (2.4) и волновым уравнением приводит, как мы увидим ниже, к очень большой разнице в поведении решений этих уравнений. В этом, собственно, можно было убедиться и выше при доказательстве принципа максимума, который справедлив именно для *параболических* уравнений, но не справедлив для *волновых* уравнений.

Так же, как и в гл. 4, применим для нахождения решения задачи 2 метод Фурье. Следуя ему, будем искать частные решения уравнения (2.4) в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.4), (2.5) и разделяя переменные, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для  $T$ , имеющему вид

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (2.7)$$

и спектральной задаче

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{в} \quad (0, l), \quad X(0) = X(l) = 0 \quad (2.8)$$

для нахождения неизвестной функции  $X$ . В гл. 4 было показано, что решение спектральной задачи (2.8), т. е. собственные значения  $\lambda_k$  и собственные функции  $X_k$ , определяется формулами

$$\lambda_k = \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Подставим в (2.7)  $\lambda_k$  вместо  $\lambda$  и запишем общее решение полученного уравнения в виде

$$T_k(t) = a_k e^{-\lambda_k a^2 t} \equiv a_k \exp \left( - \left( \frac{k\pi a}{l} \right)^2 t \right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Здесь  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  – пока произвольные постоянные.

В соответствии с (2.6) введем функции

$$u_k(x, t) = T_k(t)X_k(x) = a_k e^{-\lambda_k a^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Из построения вытекает, что функции  $u_k$  при любом  $k$  и любых постоянных  $a_k$  удовлетворяют уравнению (2.4) и граничным условиям (2.5). То же самое справедливо и для любой линейной комбинации функций (2.11), а также ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k a^2 t} X_k(x) \quad (2.12)$$

при условии, что он равномерно сходится в замкнутой области  $\overline{Q}_T = [0, l] \times [0, T]$  (при выполнении этого условия ряд (2.12) удовлетворяет граничным условиям (2.5)) и его можно дважды почленно дифференцировать по  $x$  и один раз по  $t$  внутри  $Q_T$  (при выполнении этих условий ряд (2.12) удовлетворяет уравнению (2.4) в каждой точке  $(x, t) \in Q_T$ ). Предполагая эти



условия выполненными, выберем постоянные  $a_k$  в (2.12) так, чтобы в дополнение к ним выполнялось начальное условие (2.3). С этой целью подставим (2.12) в (2.3). Получим

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (2.13)$$

Формула (2.13) представляет собой разложение заданной функции  $\varphi$  в ряд Фурье по синусам в интервале  $(0, l)$ . Из теории рядов Фурье (см., например, [19, гл. 10]) вытекает, что система синусов в (2.9) является полной в пространстве  $C[0, l]$ , причем коэффициенты  $a_k$  разложения (2.13) однозначно определяются по (непрерывной) функции  $\varphi$  с помощью формул

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Тем самым решение  $u$  задачи 2 построено. Оно имеет вид ряда (2.12), где  $a_k$  определяются формулами (2.14), при условии, конечно, что ряд (2.12) равномерно сходится в замкнутой области  $Q_T$  и его можно дважды почленно дифференцировать по  $x$  и один раз по  $t$  в  $Q_T$ . Чтобы показать последнее, предположим, что начальная функция  $\varphi$  удовлетворяет условиям:

(i)  $\varphi \in C[0, l]$ ,  $\varphi'$  кусочно-непрерывна в  $[0, l]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ .

Из [19, гл. 10] следует, что при выполнении условий (i) ряд в правой части (2.13) с коэффициентами  $a_k$ , определяемыми формулами (2.14), равномерно и абсолютно сходится к функции  $\varphi$  на  $[0, l]$ . Так как при  $t \geq 0$   $0 < e^{-\lambda_k a^2 t} \leq 1$ , то ряд (2.12) с этими же коэффициентами  $a_k$  также сходится абсолютно и равномерно при  $0 \leq x \leq l$  и  $t \geq 0$ . В таком случае функция  $u$ , определяемая суммой ряда (2.12), непрерывна в  $\overline{Q}_T$  и удовлетворяет начальному и граничным условиям (2.3) и (2.5) соответственно. Остается показать, что функция  $u$  в (2.12) удовлетворяет уравнению (2.4) в каждой точке  $Q_T$ . Для этого достаточно показать, что ряды

$$-a^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 e^{-\lambda_k a^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad \text{и} \quad - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 e^{-\lambda_k a^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (2.15)$$

полученные почленным дифференцированием ряда (2.12) один раз по  $t$  либо дважды по  $x$ , также абсолютно и равномерно сходятся в области  $[0, l] \times [t_0, T]$  при любом  $t_0 > 0$ . Последнее же утверждение вытекает из того факта, что при любом  $t > 0$  выполняются неравенства

$$0 < \frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} e^{-\lambda_k a^2 t} < 1, \quad 0 < \frac{k^2 \pi^2}{l^2} e^{-\lambda_k a^2 t} < 1, \quad (2.16)$$

если  $k$  достаточно велико. Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 2.1. При выполнении условий (i) сумма ряда (2.12) с коэффициентами (2.14) принадлежит пространству  $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$  и является классическим решением задачи (2.3)–(2.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. На самом деле справедлив более сильный результат: ряды, полученные почленным дифференцированием ряда (2.12) сколько угодно раз по  $t$  или по  $x$  или по  $x$  и  $t$ , также абсолютно и равномерно сходятся в области  $[0, l] \times [t_0, T]$  при любом  $t_0 > 0$ . Поэтому при выполнении условия (i) сумма ряда (2.12) принадлежит пространству  $C^\infty([0, l] \times (0, T])$  бесконечно дифференцируемых по  $x$  и по  $t$  функций в области  $[0, l] \times (0, T]$ .

Более того, если начальная функция  $\varphi$  обладает дополнительной гладкостью, указанной в теореме 1.1 гл. 4, а именно:  $\varphi \in C^2[0, l]$ ,  $\varphi'''$  кусочно-непрерывна на  $[0, l]$ , причем  $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ ,  $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ , то  $u \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ , т.е. решение имеет непрерывные производные второго порядка по  $x$  и первого порядка по  $t$  в замкнутой области  $Q_T$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Как уже указывалось, решение  $u$  задачи (2.3)–(2.5) единственно и непрерывно зависит от начальной функции  $\varphi$ . Отсюда и из теоремы 2.1 вытекает, что при выполнении условий (i) задача (2.3)–(2.5) поставлена корректно для  $t \geq 0$  (если начальное условие задано при  $t = 0$ ).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Обратившись к задаче 2, рассмотрим ее для отрицательных значений  $t$ . Другими словами, рассмотрим задачу определения решения  $u$  на интервале  $[-T, 0]$  при условии, что задано распределение температур в “конечный” (или финальный) момент времени  $t = 0$ , а на концах  $x = 0$  и  $x = l$  температура равна нулю. Указанную задачу называют первой краевой задачей для уравнения теплопроводности “с обратным временем”. В физическом плане данная задача заключается в определении эволюции нагревания тела по заданному его тепловому состоянию в финальный момент времени. Допустим, что задача (2.3)–(2.5) имеет решение  $u^-$  при отрицательных  $t$ . Простой анализ показывает, что решение  $u^-$  можно как угодно сильно изменить при сколь угодно малых отрицательных  $t$ , изменяя как угодно мало функцию  $\varphi$  и ее производные до произвольного фиксированного порядка. Для этого достаточно к решению  $u^-$  прибавить частное решение  $u_k^-$  уравнения (2.4) вида

$$u_k^-(x, t) = \alpha_k e^{-\lambda_k a^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

отвечающее начальной функции  $\varphi_k(x) = \alpha_k \sin(k\pi x/l)$ . Здесь  $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$  – произвольная числовая последовательность, стремящаяся к нулю. Ясно, что функциональная последовательность  $\varphi_k(x) \equiv \alpha_k \sin(k\pi x/l)$  равномерно стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . В то же время для любого сколь угодно близкого к нулю значения  $t < 0$  последовательность решений  $u_k^-(x, t)$  неограниченно растет при  $k \rightarrow \infty$ . Это означает, что решение  $u^-$  ведет себя неустойчиво по отношению к малым возмущениям “начальных дан-

ных". Отсюда вытекает, что задача 2 поставлена некорректно для отрицательных  $t$ , если "начальные данные" задаются при  $t = 0$ . Таким образом, начально-краевая задача для уравнения теплопроводности "с обратным временем" дает в дополнение к задаче Коши для уравнения Лапласа, рассмотренной в гл. 2, еще один пример некорректно поставленных задач математической физики.

Рассмотрим теперь задачу 3, заключающуюся в нахождении в области  $Q_T$  решения  $u$  неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (2.17)$$

удовлетворяющего однородным краевым условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad \text{в} \quad (0, T] \quad (2.18)$$

и однородному начальному условию

$$u|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad (0, l). \quad (2.19)$$

Будем предполагать, что выполняются условия:

(ii)  $f \in C^1(\overline{Q}_T)$  и  $f(0, t) = f(l, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$ .

Следуя методу Фурье, будем искать решение  $u$  задачи 3 в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (2.20)$$

по собственным функциям спектральной задачи (2.8) с неизвестными пока коэффициентами  $T_k(t)$ . Правую часть  $f$  в (2.17) также разложим в ряд Фурье по синусам, полагая

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (2.21)$$

где

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (2.22)$$

Подставляя (2.20) и (2.21) в (2.17), легко получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ T'_k(t) + \left( \frac{k\pi a}{l} \right)^2 T_k(t) - f_k(t) \right] \sin \frac{k\pi x}{l} = 0.$$

Отсюда приходим к следующим дифференциальным уравнениям для  $T_k$ :

$$T'_k(t) + \omega_k^2 T_k(t) = f_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.23)$$

где  $\omega_k = k\pi a/l$ . Поскольку в силу начального условия (2.19) для  $u$  имеем

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin \frac{k\pi x}{l} = 0,$$

то отсюда получаем начальные условия для  $T_k$ , имеющие вид

$$T_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Решение  $T_k$  линейной одномерной задачи Коши (2.23), (2.24) при каждом  $k$  существует, единственно и, как легко проверить, имеет вид

$$T_k(t) = \int_0^t e^{-\omega_k^2(t-\tau)} f_k(\tau) d\tau. \quad (2.25)$$

Подставляя выражение (2.25) для  $T_k(t)$  в ряд (2.20), получим искомое решение задачи 3 в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_0^t e^{-\omega_k^2(t-\tau)} f_k(\tau) d\tau \right] \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (2.26)$$

Рассуждая, как и в §4.1, можно показать, что при выполнении условий (ii) ряд (2.26), а также ряды, полученные дифференцированием ряда (2.26) один раз по  $t$  либо два раза по  $x$ , равномерно сходятся в замкнутой области  $\overline{Q}_T$ . Отсюда следует, что ряд (2.26) является искомым решением задачи 3.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.4.** Если однородное начальное условие (2.19) заменить неоднородным начальным условием (2.3), то в силу принципа суперпозиции решение соответствующей задачи (2.17), (2.18), (2.3) будет равно сумме решений (2.12) и (2.26) задач 2 и 3 соответственно.

Вернемся теперь к общей неоднородной краевой задаче 1. Предполагая, что  $g_i \in C^1[0, T]$ ,  $i = 1, 2$ , введем функцию

$$w(x, t) = g_1(t) + [g_2(t) - g_1(t)] \frac{x}{l}. \quad (2.27)$$

Будем искать решение  $u$  исходной задачи 1 в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad (2.28)$$

где  $v$  – новая искомая функция. Подставляя (2.28) в (2.1)–(2.3), получим, что функция  $v$  удовлетворяет в  $Q_T$  неоднородному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{f}(x, t), \quad (2.29)$$

где

$$\bar{f}(x, t) \equiv f(x, t) - \frac{\partial w}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

однородным граничным условиям

$$v|_{x=0} = u(0, t) - w(0, t) = 0, \quad v|_{x=l} = u(l, t) - w(l, t) = 0, \quad t \in (0, T] \quad (2.30)$$

и начальному условию

$$v|_{t=0} = \bar{\varphi}(x) \equiv \varphi(x) - w(x, 0), \quad x \in (0, l). \quad (2.31)$$

Таким образом, для нахождения решения задачи 1 достаточно найти решение  $v$  вспомогательной задачи (2.29)–(2.31), которая нами уже решена (см. замечание 2.4).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.5.** По аналогичной схеме метод Фурье применяется для решения других краевых задач для уравнения теплопроводности. Так, в случае краевых условий Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (2.32)$$

решение  $u$  соответствующей задачи (2.4), (2.3), (2.32) также имеет вид ряда (2.12), но где  $\lambda_k$  и  $X_k$  – собственные значения и функции спектральной задачи

$$X'' + \lambda X = 0 \text{ в } (0, l), \quad X'(0) = X'(l) = 0.$$

Явные выражения для  $\lambda_k$  и  $X_k$  приведены в § 4.2.

## § 5.3. Задача Коши для одномерного уравнения теплопроводности

**5.3.1. Постановка и единственность решения задачи Коши.** Пусть  $Q_T = (-\infty, \infty) \times (0, T]$  при  $T < \infty$  и  $Q_T = (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$  при  $T = \infty$ . Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности на вещественной оси  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ . Она заключается в нахождении решения  $u$  уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

в области  $Q_T$ , где  $0 < T \leq \infty$ , удовлетворяющего начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.2)$$

Здесь  $\varphi$  – заданная непрерывная и ограниченная в  $\mathbb{R}$  функция. Задача (3.1), (3.2) возникает при математическом моделировании ряда физических процессов, в частности, процесса распространения тепла в *неограниченном однородном стержне*, боковая поверхность которого теплоизолирована. Тот факт, что  $T \leq \infty$ , означает, что задача (3.1), (3.2) может рассматриваться

как на конечном ( $T < \infty$ ), так и на бесконечном ( $T = \infty$ ) временном интервале. Положим  $\overline{Q}_T = (-\infty, \infty) \times [0, T]$  при  $T < \infty$  и  $\overline{Q}_T = (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$  при  $T = \infty$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1** *Классическим решением задачи (3.1), (3.2) называется функция  $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ , ограниченная в  $\overline{Q}_T$ , удовлетворяющая уравнению (3.1) в каждой точке  $(x, t) \in Q_T$  и условию (3.2) в каждой точке  $x \in (-\infty, \infty)$ .*

Докажем единственность классического решения задачи (3.1), (3.2).

**ТЕОРЕМА 3.1.** *Классическое решение задачи (3.1), (3.2) единственно.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что существуют два решения  $u_1$  и  $u_2$  задачи (3.1), (3.2) такие, что

$$|u_1| \leq M, \quad |u_2| \leq M \quad \text{в} \quad \overline{Q}_T, \quad M = \text{const} < \infty. \quad (3.3)$$

Тогда их разность  $u = u_1 - u_2$  удовлетворяет уравнению (3.1), однородному начальному условию  $u|_{t=0} = 0$ , причем  $|u| \leq 2M$  в  $\overline{Q}_T$ . Предполагая, что  $T < \infty$ , введем прямоугольник  $Q_{LT} = \{(x, t) : |x| < L, 0 < t \leq T\}$  и рассмотрим в нем функцию

$$v(x, t) = \frac{4M}{L^2} \left( \frac{x^2}{2} + a^2 t \right). \quad (3.4)$$

Обозначим через  $\Sigma_{LT}$  сумму нижней и боковой границ прямоугольника  $Q_{LT}$ . Легко видеть, что  $v$  является классическим решением уравнения (3.1) и удовлетворяет в точках  $\Sigma_{LT}$  условиям

$$v(x, 0) \geq |u(x, 0)| = 0, \quad x \in [-L, L], \quad v(\pm L, t) \geq 2M \geq |u(\pm L, t)|, \quad t \in [0, T],$$

или  $-v(x, t) \leq u(x, t) \leq v(x, t)$  на  $\Sigma_{LT}$ . Применим принцип максимума к разности между функциями  $v$  и  $\pm u$  в области  $Q_{LT}$ . Будем иметь  $v(x, t) - u(x, t) \geq 0$ ,  $v(x, t) + u(x, t) \geq 0$  на  $\overline{Q}_{LT}$ , или  $-v(x, t) \leq u(x, t) \leq v(x, t)$   $\forall (x, t) \in \overline{Q}_{LT}$ . Отсюда выводим, что

$$|u(x, t)| \leq v(x, t) = \frac{4M}{L^2} \left( \frac{x^2}{2} + a^2 t \right) \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}_{LT}. \quad (3.5)$$

Фиксируя значения  $(x, t)$  и устремляя параметр  $L$  в бесконечность, получим  $u(x, t) \equiv 0 \quad \forall (x, t) \in Q_{LT}$ . Если же  $T = \infty$ , то вместо  $Q_{LT}$  следует выбрать прямоугольник  $Q_{LT_0}$  конечной высоты  $T_0 < \infty$  и повторить предыдущие рассуждения. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.** Отметим, что принцип максимума для уравнения теплопроводности (3.1) в неограниченной по  $x$  либо по  $t$  области  $Q_T$  не справедлив хотя бы потому, что решение  $u$  уравнения (3.1) может не достигать в такой области максимального или минимального значений.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. По аналогичной схеме доказывается единственность классического решения задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности. Указанная задача будет рассмотрена в п. 5.3.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Приведенное здесь доказательство существенно использует ограниченность решения  $u$ . Используя другой метод, можно доказать единственность решения задачи Коши (3.1), (3.2) и без этого ограничения (см. об этом в [56]).

**5.3.2. Применение метода Фурье.** Для доказательства существования решения задачи (3.1), (3.2) и одновременно нахождения его в явном виде применим метод Фурье. Следуя этому методу, будем сначала искать частные решения уравнения (3.1) в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.1) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

где  $\lambda^2$  – константа разделения. Отсюда приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям для  $T$  и  $X$ :

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad (3.7)$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \quad (3.8)$$

Общее решение уравнения (3.8) имеет вид

$$X(x) = \alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x, \quad (3.9)$$

где произвольные постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  могут зависеть от  $\lambda$ . Решение уравнения (3.7) равно произведению константы на функцию

$$T(t) = e^{-a^2 \lambda^2 t}. \quad (3.10)$$

Поскольку краевые условия для функции  $X$  отсутствуют, то параметр  $\lambda$  в (3.9) и (3.10) может принимать любые вещественные значения. Этим задача Коши для уравнения (3.1) существенно отличается от соответствующей краевой задачи, для которой спектральный параметр  $\lambda$  может принимать лишь счетное (дискретное) множество значений.

По построению функция  $u_\lambda(x, t) = e^{-a^2 \lambda^2 t} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x]$  является частным решением уравнения (3.1) в области  $Q_T$  при любых  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$ . То же самое справедливо и для интеграла

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_\lambda(x, t) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda \quad (3.11)$$

при условии, что он равномерно сходится в  $Q_T$  и его можно дифференцировать один раз по  $t$  и дважды по  $x$  под знаком интеграла. Выберем теперь  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  так, чтобы выполнялись указанные условия и начальное условие (3.2). Полагая в (3.11)  $t = 0$ , получим с учетом (3.2), что

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda)\cos\lambda x + \beta(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda. \quad (3.12)$$

На (3.12) можно смотреть как на разложение начальной функции  $\varphi$  в интеграл Фурье по функциям  $\cos\lambda x$  и  $\sin\lambda x$ . Известно (см. [19, с. 355]), что коэффициенты  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  однозначно определяются по функции  $\varphi$ , обладающей определенными свойствами регулярности, с помощью формул

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi, \quad \beta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi. \quad (3.13)$$

Если подставить (3.13) в (3.12), то получим формулу

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi, \quad (3.14)$$

называемую разложением функции  $\varphi$  в интеграл Фурье. Известно (см., например, [47, гл. 6]), что формула (3.14) справедлива, если функция  $\varphi$  непрерывна в  $(-\infty, \infty)$ , удовлетворяет условию Дирихле, т.е. имеет конечное число максимумов и минимумов, и абсолютно интегрируема в интервале  $(-\infty, \infty)$ , так что существует несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|dx$ . О других достаточных условиях справедливости формулы (3.14) можно прочесть в [19, гл. 10].

Подставим теперь (3.13) в (3.11). Учитывая четность подынтегральной функции по  $\lambda$  в полученном интеграле, будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\xi. \end{aligned}$$

После изменения порядка интегрирования этот интеграл можно записать в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)d\xi \int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\lambda. \quad (3.15)$$

Внутренний интеграл в (3.15) можно явно вычислить. Для этого при фиксированных  $x$  и  $t$  введем вместо  $\lambda$  и  $\xi$  переменные  $z$  и  $\mu$  по формулам

$$a\lambda\sqrt{t} = z, \quad \lambda(\xi - x) = \mu z \Rightarrow \mu = \frac{\xi - x}{a\sqrt{t}}, \quad d\lambda = \frac{dz}{a\sqrt{t}}, \quad t > 0. \quad (3.16)$$



С учетом замены (3.16) внутренний интеграл в (3.15) принимает вид

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda(\xi - x) d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-z^2} \cos\mu z dz \equiv \frac{1}{a\sqrt{t}} J(\mu). \quad (3.17)$$

Здесь функция  $J$  представляет собой равномерно сходящийся по параметру  $\mu \in (-\infty, \infty)$  несобственный интеграл. Дифференцируя  $J$  по параметру  $\mu$ , выводим, что  $J'(\mu) = -\int_0^\infty e^{-z^2} z \sin\mu z dz$ , причем это дифференцирование законно в силу равномерной сходимости полученного после дифференцирования несобственного интеграла.

Применяя далее формулу интегрирования по частям

$$\int_0^\infty u'v dz = -\int_0^\infty uv' dz + uv|_0^\infty$$

и полагая  $u(z) = (1/2)e^{-z^2}$ ,  $v(z) = \sin\mu z$ ,  $u' = -ze^{-z^2}$ ,  $v' = \mu \cos\mu z$ , выводим, что

$$J'(\mu) = -\frac{\mu}{2} \int_0^\infty e^{-z^2} \cos\mu z dz = -\frac{\mu}{2} J(\mu).$$

Это означает, что функция  $J$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению  $J'(\mu) = -(\mu/2)J(\mu)$ . Общее решение последнего имеет вид  $J(\mu) = C \exp(-(\mu^2/4))$ , где  $C$  – произвольная постоянная. Чтобы определить ее, положим здесь  $\mu = 0$ . Получим с учетом (3.17), что

$$C = J(0) = \int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Здесь мы воспользовались известной формулой (см. [19, с. 109])

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}. \quad (3.18)$$

В результате получаем, что

$$J(\mu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\mu^2}{4}}. \quad (3.19)$$

Подставляя (3.19) в (3.17), имеем

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda(\xi - x) d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}, \quad t > 0. \quad (3.20)$$

Учитывая (3.20), перепишем окончательно (3.15) в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi. \quad (3.21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Легко показать (подстановкой в (3.1)), что функция

$$F(\xi, x, t) \equiv \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}, \quad (3.22)$$

рассматриваемая как функция от  $x$  и  $t$ , является решением уравнения (3.1) в каждой точке  $(x, t)$  при  $t > 0$ . Функция (3.22) называется *фундаментальным решением* оператора теплопроводности в (3.1). Более подробно о нем см. ниже.

**5.3.3. Обоснование метода Фурье.** Предположим, что начальная функция  $\varphi$  в (3.2) удовлетворяет условиям:

(i)  $\varphi \in C(-\infty, \infty)$ ,  $|\varphi(x)| \leq M < \infty \forall x \in (-\infty, \infty)$ .

Докажем, что при выполнении (i) функция (3.21) является искомым (классическим) решением задачи (3.1), (3.2). Покажем сначала, что функция (3.21) удовлетворяет уравнению (3.1) в каждой точке  $(x, t) \in Q_T$ . Для этого достаточно показать с учетом замечания 3.4, что интеграл в (3.21), а также интегралы, полученные его формальным дифференцированием под знаком интеграла дважды по  $x$  и один раз по  $t$ , равномерно сходятся в любом прямоугольнике вида  $\Pi = \Pi(L, t_0, T_0) = \{(x, t) : -L \leq x \leq L, t_0 \leq t \leq T_0\}$ , где  $t_0 > 0$ ,  $T_0 \leq T$ .

Дифференцируя (3.21) произвольное число раз по  $x$  и  $t$ , получим линейную комбинацию интегралов вида

$$I(x, t) = \frac{1}{t^k} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) (\xi - x)^m e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi, \quad (3.23)$$

где  $k$  и  $m$  – некоторые натуральные числа. Покажем, что каждый из этих интегралов равномерно сходится. С этой целью с помощью замены

$$z = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} \quad (t > 0), \quad \xi = x + 2a\sqrt{t}z, \quad d\xi = 2a\sqrt{t}dz \quad (3.24)$$

преобразуем интеграл (3.23) к виду

$$I(x, t) = (2a)^{m+1} t^{\frac{m+1}{2}-k} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2az\sqrt{t}) z^m e^{-z^2} dz. \quad (3.25)$$

Подынтегральная функция в (3.25), очевидно, мажорируется функцией  $M|z|^m e^{-z^2}$ , которая интегрируема в интервале  $(-\infty, \infty)$ . Отсюда следует (см., например, [19, с. 274]) равномерная сходимость интеграла в (3.25) при  $t \geq t_0 > 0$ . (Необходимость последнего условия  $t \geq t_0$  вызывается тем, что формула замены переменных в (3.24) не определена при  $t = 0$ ). С учетом этого приходим на основании [19, с. 276] к выводу о том, что функция  $u$ , определяемая несобственным интегралом (3.21), зависящим от  $x$  и  $t$  как от

параметров, непрерывна и имеет производные любого порядка по  $x$  и  $t$  при  $t > 0$ , причем эти производные могут быть найдены с помощью дифференцирования под знаком интеграла. Так как подынтегральная функция в (3.21) удовлетворяет (в силу замечания 3.3) уравнению (3.1) в каждой точке  $(x, t)$  при  $t > 0$ , то отсюда следует, что и функция  $u$  удовлетворяет этому уравнению при  $t > 0$ .

Осталось доказать, что функция (3.21) удовлетворяет начальному условию (3.2), т. е. что

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \varphi(x) \quad \forall x \in (-\infty, \infty). \quad (3.26)$$

Для доказательства этого факта опять воспользуемся заменой переменных по формуле (3.24). С учетом этой замены интеграл (3.21) примет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2az\sqrt{t}) e^{-z^2} dz. \quad (3.27)$$

Отсюда следует ограниченность решения  $u$  при  $|x| < \infty$  и  $t > 0$ , если  $|\varphi(x)| \leq M \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$ . Действительно, из (3.27) имеем

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x + 2az\sqrt{t})| e^{-z^2} dz \leq \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = M,$$

так как в силу (3.18)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = 1. \quad (3.28)$$

Умножим (3.28) на  $\varphi(x)$  и вычтем из (3.27). Получим

$$u(x, t) - \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x + 2az\sqrt{t}) - \varphi(x)] e^{-z^2} dz.$$

Отсюда имеем

$$|u(x, t) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x + 2az\sqrt{t}) - \varphi(x)| e^{-z^2} dz. \quad (3.29)$$

В силу условий (i), очевидно, имеем

$$|\varphi(x + 2az\sqrt{t}) - \varphi(x)| \leq 2M \quad \forall x, z \in (-\infty, \infty), \quad t \in [0, T]. \quad (3.30)$$

Пусть  $\varepsilon > 0$  – сколь угодно малое число. Из сходимости несобственного интеграла в (3.28) вытекает, что найдется такое число  $N$ , что

$$\frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-z^2} dz \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_N^{\infty} e^{-z^2} dz \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.31)$$

Разбивая интервал интегрирования  $(-\infty, \infty)$  на три части:  $(-\infty, -N)$ ,  $[-N, N]$ ,  $(N, \infty)$ , и учитывая (3.30), (3.31), выводим из (3.29), что

$$|u(x, t) - \varphi(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N |\varphi(x + 2az\sqrt{t}) - \varphi(x)| e^{-z^2} dz. \quad (3.32)$$

Поскольку функция  $\varphi$  непрерывна на  $(-\infty, \infty)$ , то при всех достаточно малых  $t > 0$  и  $|x| \leq L$ ,  $|z| \leq N$  имеем  $|\varphi(x + 2az\sqrt{t}) - \varphi(x)| \leq \varepsilon/3$ . С учетом этого из неравенства (3.32) получаем

$$|u(x, t) - \varphi(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N e^{-z^2} dz \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали, что  $|u(x, t) - \varphi(x)| < \varepsilon \forall x \in (-\infty, \infty)$  при достаточно малых  $t$ . Отсюда в силу произвольности  $\varepsilon$  следует (3.26).

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.5.** Аналогичным образом показывается, что решение задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad \text{в } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \quad u|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \quad \text{в } \mathbb{R}^3 \quad (3.33)$$

для трехмерного однородного уравнения теплопроводности определяется формулой [21, с. 459]

$$u(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta, \zeta) \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}{4a^2 t}} d\xi d\eta d\zeta. \quad (3.34)$$

**5.3.4. Задача Коши для неоднородного уравнения. Понятие о методе интегральных преобразований.** Рассмотрим ниже задачу нахождения классического решения  $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\overline{Q}_T)$  неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (3.35)$$

в области  $Q_T$ , удовлетворяющего однородному начальному условию

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (3.36)$$

и следующим условиям на бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0. \quad (3.37)$$

Эти условия в практических задачах обычно выполняются.

При решении многих задач математической физики очень эффективным является использование так называемого *метода интегральных преобразований*. Познакомимся с идеей этого метода на примере решения задачи (3.35)–(3.37). Сначала введем следующее определение. Пусть  $\varphi$  – заданная на вещественной оси  $\mathbb{R}$  функция, удовлетворяющая тем же самым условиям, при которых справедлива формула Фурье (3.14). Поставим в соответствие  $\varphi$  другую функцию

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi, \quad (3.38)$$

где  $-\infty < \lambda < \infty$ . Функция  $\hat{\varphi}$  называется *интегральным преобразованием Фурье* функции  $\varphi$ . С помощью формулы Фурье (3.14) нетрудно показать, что функция  $\varphi$  может быть выражена через свое преобразование Фурье  $\hat{\varphi}(\lambda)$  по следующей формуле (см. [19, гл. 10]):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (3.39)$$

Правая часть в (3.39) называется *обратным преобразованием Фурье*.

Следуя методу интегральных преобразований, вместо функции  $u$  будем искать ее интегральное преобразование Фурье относительно переменной  $x$ , считая переменную  $t$  параметром, т. е. будем искать функцию

$$\hat{u}(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, t) e^{i\lambda\xi} d\xi. \quad (3.40)$$

Считая, что задача (3.35)–(3.37) разрешима и  $u$  – ее решение, найдем уравнение и дополнительные условия, которым должна удовлетворять функция  $\hat{u}$ . Для этого заменим в тождестве (3.35) для решения  $u$  переменную  $x$  на  $\xi$ , умножим обе его части на  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda\xi}$  и проинтегрируем на  $(-\infty, \infty)$ . В результате получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} e^{i\lambda\xi} d\xi = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi^2} e^{i\lambda\xi} d\xi + \hat{f}(\lambda, t), \quad (3.41)$$

где  $\hat{f}$  – преобразование Фурье функции  $f$  по  $x$ , определяемое формулой

$$\hat{f}(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, t) e^{i\lambda\xi} d\xi. \quad (3.42)$$

Преобразуем интегралы, входящие в (3.41). Учитывая (3.40), имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} e^{i\lambda\xi} d\xi = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, t) e^{i\lambda\xi} d\xi \right\} = \frac{d\hat{u}(\lambda, t)}{dt}. \quad (3.43)$$

С помощью интегрирования по частям получаем, что

$$I \equiv \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi^2} e^{i\lambda \xi} d\xi = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} e^{i\lambda \xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{a^2 i \lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} e^{i\lambda \xi} d\xi. \quad (3.44)$$

В силу условий (3.37) внеинтегральный член в (3.44) исчезает. Проводя повторное интегрирование по частям, будем иметь

$$I = -\frac{a^2 i \lambda}{\sqrt{2\pi}} u(\xi, t) e^{i\lambda \xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{a^2 (i\lambda)^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, t) e^{i\lambda \xi} d\xi = -a^2 \lambda^2 \hat{u}(\lambda, t). \quad (3.45)$$

Внеинтегральный член опять исчез в силу (3.37). Подставляя (3.43) и (3.45) в (3.41), приходим к уравнению

$$\frac{d\hat{u}(\lambda, t)}{dt} + a^2 \lambda^2 \hat{u}(\lambda, t) = \hat{f}(\lambda, t). \quad (3.46)$$

Полагая далее в (3.40)  $t = 0$ , получим с учетом (3.36) начальное условие

$$\hat{u}(\lambda, 0) = 0. \quad (3.47)$$

Решение задачи (3.46), (3.47), аналогичной задаче (2.23), (2.24), имеет вид

$$\hat{u}(\lambda, t) = \int_0^t \hat{f}(\lambda, \tau) e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (3.48)$$

Тем самым преобразование Фурье  $\hat{u}$  решения  $u$  найдено. Осталось лишь восстановить функцию  $u$  по  $\hat{u}$ . В силу (3.39) имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\lambda, t) e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Подставляя сюда вместо  $\hat{u}(\lambda, t)$  выражение (3.48), будем иметь

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} d\lambda \int_0^t \hat{f}(\lambda, \tau) e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} d\tau.$$

Изменим здесь порядок интегрирования и воспользуемся формулой (3.42) для  $\hat{f}$ . В результате получим, что

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} e^{i\lambda(\xi-x)} d\lambda. \quad (3.49)$$

Внутренний интеграл по переменной  $\lambda$  вычисляется в явном виде. Действительно, используя свойства интегралов в симметричных пределах от четной и нечетной функций и соотношение (3.20), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} e^{i\lambda(\xi-x)} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} [\cos \lambda(\xi-x) + i \sin \lambda(\xi-x)] d\lambda =$$

$$= 2 \int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \cos \lambda (\xi - x) d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}. \quad (3.50)$$

Подставляя (3.50) в (3.49), приходим к следующей окончательной формуле решения  $u$ :

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (3.51)$$

Простой анализ показывает, что формула (3.51) действительно определяет решение задачи (3.35)–(3.37) в случае, когда  $f$  удовлетворяет условиям

$$f \in C^1(\overline{Q}_T), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (3.52)$$

Метод интегральных преобразований является одним из основных классических методов математической физики. Кроме рассмотренного выше интегрального преобразования Фурье используются и другие. К ним относятся прежде всего косинус и синус-преобразования Фурье:

$$\hat{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi, \quad \hat{f}_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi, \quad 0 < \lambda < \infty \quad (3.53)$$

и преобразование Лапласа, определяемое формулой

$$\overline{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(\xi) e^{-\lambda \xi} d\xi, \quad \lambda = \sigma + i\tau, \quad 0 < \sigma_0 \leq \sigma.$$

Указанные преобразования обычно используются при решении задач, рассматриваемых на полубесконечном по одной из переменных интервале. Более подробно с методом интегральных преобразований читатель может познакомиться в [21, гл. 33–35].

**5.3.5. Физический анализ решения.** Обратимся к формуле (3.21), решающей задачу Коши (3.1), (3.2), и укажем ее физический смысл в предположении, что  $u$  описывает распределение температуры в бесконечном стержне, расположенном в направлении оси  $x$ .

Начнем наш анализ с утверждения о том, что согласно формуле (3.21) тепло распространяется вдоль стержня мгновенно, а не с какой-либо конечной скоростью. Действительно, пусть начальная температура  $\varphi$  положительна для  $\alpha < x < \beta$  и равна нулю вне этого отрезка. Тогда последующее распределение температур в стержне описывается формулой

$$u(x, t) = \int_\alpha^\beta \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi. \quad (3.54)$$

Из (3.54) видно, что при сколь угодно малых  $t > 0$  и сколь угодно больших  $x$  функция  $u(x, t)$  больше нуля.

Отсюда вытекает парадоксальный вывод о том, что тепло распространяется в стержне с бесконечной скоростью. Физически это, конечно, не соответствует действительности, а данный вывод мы сделали лишь на основании предположения о том, что распространение тепла в стержне описывается уравнением (3.1). На основании приведенного противоречия можно сделать вывод о том, что уравнение теплопроводности является не совсем точной математической моделью процесса распространения тепла (либо процесса диффузии вещества). Тем не менее применение уравнения теплопроводности можно считать оправданным на практике, поскольку за исключением приведенного парадокса и некоторых редких случаев оно относительно точно моделирует реальные физические процессы распространения тепла либо диффузии вещества.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Решение  $u$  задачи Коши (3.1), (3.2) есть функция, непрерывно дифференцируемая при  $t > 0$  сколько угодно раз по  $x$  и  $t$ , независимо от того, будет иметь производные функция  $\varphi$  или нет. Указанное свойство *внутренней гладкости* решений существенно отличает однородное уравнение теплопроводности от уравнения колебания струны.

Выясним теперь *физический* смысл фундаментального решения (3.22) оператора теплопроводности в (3.1). Рассуждая, как в [21, с. 457], выделим малый элемент  $(x_0 - h, x_0 + h)$  стержня в окрестности точки  $x_0$  и будем считать, что функция  $\varphi$ , описывающая начальное распределение температуры, равна нулю вне промежутка  $(x_0 - h, x_0 + h)$  и имеет постоянное значение  $\varphi_0$  внутри него. С физической точки зрения (см. § 1.4) это означает, что в начальный момент времени этому элементу сообщено количество тепла  $Q = 2h\rho c\varphi_0$ , которое вызвало повышение температуры на величину  $\varphi_0$  в этом стержне. Здесь  $\rho$  и  $c$  обозначают соответственно линейную плотность и удельную теплоемкость стержня. В последующие моменты времени распределение температуры в стержне дается формулой (3.21), которая в нашем случае принимает вид

$$u(x, t) = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \varphi_0 \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi = \frac{Q}{2a\rho c\sqrt{\pi t}} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi.$$

Будем теперь уменьшать  $h$  до нуля, т. е. будем считать, что то же количество тепла  $Q$  распределяется на все меньшем участке и в пределе сообщается стержню в точке  $x = x_0$ . В результате придем к понятию *мгновенного точечного источника тепла интенсивности  $Q$ , помещенного в момент времени  $t = 0$  в точке  $x = x_0$* . От действия такого мгновенного источника тепла в стержне возникает распределение температур, определяемое



формулой

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q}{2a\rho c\sqrt{\pi t}} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi. \quad (3.55)$$

Применив теорему о среднем, будем иметь

$$\frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi = e^{-\frac{(\xi_0-x)^2}{4a^2t}}, \quad \xi_0 \in (x_0-h, x_0+h).$$

Так как  $\xi_0 \rightarrow x_0$  при  $h \rightarrow 0$ , то в пределе выражение (3.55) принимает вид

$$\frac{Q}{2a\rho c\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2t}}. \quad (3.56)$$

При  $Q = \rho c$  (3.56) переходит в фундаментальное решение  $F(x_0, x, t)$ , определяемое формулой (3.22). Это позволяет сделать вывод о том, что по своему физическому смыслу *фундаментальное решение (3.22) описывает распределение температуры в бесконечном однородном стержне, которое вызывается мгновенным точечным источником тепла интенсивности  $Q = \rho c$ , помещенным в начальный момент времени  $t = 0$  в точке  $x = \xi$  стержня.*

Графики фундаментального решения  $F(\xi, x, t)$  при фиксированном  $\xi$  как функции от  $x$  в фиксированные моменты времени  $t_1 < t_2 < t_3$  представлены на рис. 3.1. Площадь под каждой из этих кривых равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1.$$

Это означает, что количество тепла  $Q = \rho c$  в стержне остается неизменным с течением времени. Из рис. 3.1 видно, что почти вся площадь, ограниченная кривой (3.22) и осью абсцисс, находится над промежутком  $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  – достаточно малое число, если только значение  $t > 0$  достаточно мало. Величина этой площади, умноженная на  $\rho c$ , равна количеству тепла, подводимому в начальный момент времени  $t = 0$  к стержню. Таким образом, для малых значений  $t > 0$  почти все тепло сосредоточено в малой окрестности точки  $x = \xi$ , тогда как в начальный момент времени  $t = 0$  все количество тепла сосредоточено в точке  $x = \xi$ , где находится мгновенный точечный источник тепла.

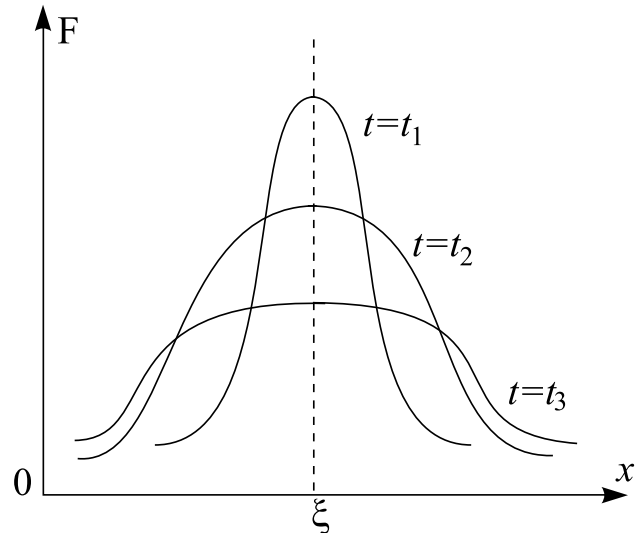


Рис. 3.1

## Задачи и упражнения к гл. 5

5.1. Доказать справедливость теоремы 1.3 для уравнения конвекции–диффузии–реакции (1.24).

5.2. Доказать, что при выполнении условия (i) из § 5.2 сумма ряда (2.12) с коэффициентами (2.14) принадлежит пространству  $C^\infty([0, l] \times (0, T])$ .

5.3. Пусть  $\varphi \in C^2[0, l]$ ,  $\varphi'''$  кусочно-непрерывна на  $[0, l]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ ,  $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ . Доказать, что при выполнении этих условий решение  $u$  задачи (2.3)–(2.5) принадлежит пространству  $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ .

5.4. Доказать, что при выполнении условий (ii) из § 5.2 сумма ряда (2.26) принадлежит пространству  $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$  и является решением задачи (2.17)–(2.19).

5.5. Доказать, что функция  $F(\xi, \cdot, \cdot)$ , определяемая формулой (3.22), удовлетворяет уравнению (3.1) в каждой точке  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ .

5.6. Пусть  $\varphi \in C(\mathbb{R}^3)$  и  $|\varphi(x, y, z)| \leq M$  для всех  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Доказать, что функция  $u$ , определяемая формулой (3.34), является классическим решением трехмерной задачи Коши (3.33).

5.7. Пусть функция  $f$  удовлетворяет условиям (3.52). Доказать, что функция  $u$ , определяемая формулой (3.51), является классическим решением одномерной задачи Коши (3.35), (3.36).

# ГЛАВА 6. Элементы теории эллиптических уравнений и гармонических функций

Математическое моделирование *стационарных* процессов различной физической природы приводит к необходимости решения уравнений эллиптического типа. Наиболее простейшим и в то же время важнейшим представителем уравнений этого типа является уравнение Лапласа  $\Delta u = 0$ . Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа (его определение см. в § 1.3). В этой главе будут изучены основные свойства решений уравнения Лапласа, называемых *гармоническими функциями*.

## § 6.1. Уравнение Лапласа. Сингулярные решения и гармонические потенциалы

**6.1.1. Определение гармонической функции.** В этом и следующих параграфах будем рассматривать (неоднородное) уравнение Лапласа

$$\Delta u = -f, \quad (1.1)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа. Хорошо известно (см. гл. 1), что уравнение (1.1) моделирует стационарное распределение температуры в области  $\Omega$ , заполненной однородной средой, при условии, что  $f$  описывает объемную плотность источников тепла. Потенциал гравитационного поля (либо кулонов потенциал) также удовлетворяет уравнению (1.1), где  $f$  описывает объемную плотность масс (либо электрических зарядов). Особенно важную роль играет однородное уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad (1.2)$$

описывающее соответствующие стационарные физические процессы в отсутствие объемных источников. В дальнейшем, следуя устоявшейся терминологии, под уравнением Лапласа будем понимать именно уравнение (1.2), тогда как на (1.1) будем ссылаться как на *уравнение Пуассона*.

Пусть  $\Omega$  – произвольное ограниченное открытое множество в пространстве  $\mathbb{R}^n$  произвольного числа  $n \geq 2$  измерений. Физический интерес, конечно, представляют случаи  $n = 3$  (трехмерное пространство) и  $n = 2$  (плоскость). Положим  $\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.** Функция  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется *гармонической в области  $\Omega$* , если она дважды непрерывно дифференцируема в  $\Omega$  и удовлетворяет в каждой точке  $\mathbf{x} \in \Omega$  уравнению Лапласа (1.2).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.** Функция  $u : \Omega_e \rightarrow \mathbb{R}$  называется *гармонической во внешности  $\Omega_e$  ограниченного открытого множества  $\Omega$* , если она дважды непрерывно дифференцируема в  $\Omega_e$ , удовлетворяет всюду в  $\Omega_e$  уравнению

Лапласа (1.2) и для достаточно больших по модулю  $\mathbf{x} \in \Omega_e$  удовлетворяет условию

$$|u(\mathbf{x})| \leq \frac{C}{|\mathbf{x}|^{n-2}}. \quad (1.3)$$

Здесь  $C$  – некоторая постоянная, зависящая от функции  $u$ , но не зависящая от  $\mathbf{x}$ .

При  $n = 2$  условие (1.3) означает, что гармоническая в неограниченной области функция  $u$  является ограниченной на бесконечности.

Подчеркнем, что определение гармонической функции относится к случаю открытого множества; если говорят о функции, гармонической в замкнутом множестве  $\overline{\Omega}$ , то под этим понимают, что данная функция гармонична в более широком открытом множестве  $Q \supset \overline{\Omega}$ . Заметим также, что определение гармонической функции не накладывает никаких ограничений на поведение функции на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ .

Наконец, отметим, что на практике часто возникает необходимость нахождения решений эллиптических уравнений, и в частности уравнения Лапласа в неограниченной области с неограниченной границей, или, как говорят, с границей, *простирающейся в бесконечность*. Для таких областей условие (1.3) на бесконечности, входящее в определение гармонической функции, может изменяться. Однако в этой главе мы не будем рассматривать такие области.

**6.1.2. Сингулярные решения оператора Лапласа.** Ниже будем заниматься в основном изучением свойств решений уравнения Лапласа в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$  и на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Известно, что в пространстве  $\mathbb{R}^3$  можно ввести бесконечно много ортогональных систем координат. Наиболее важными из них являются декартова, сферическая и цилиндрическая системы координат (см. подробнее о них в прил. 2). Пусть  $x, y, z$ ;  $r, \theta, \varphi$  и  $\rho, \varphi, z$  обозначают соответственно декартовы, сферические и цилиндрические координаты точки  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ . Напомним, что оператор Лапласа  $\Delta$  определяется формулой

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.4)$$

в декартовой системе координат, формулой

$$\Delta u = \Delta_{r,\theta,\varphi} u \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \quad (1.5)$$

в сферической системе координат и

$$\Delta u = \Delta_{\rho,\varphi,z} u \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.6)$$

в цилиндрической системе координат.

В приложениях важную роль играют решения уравнения Лапласа, обладающие *сферической* или *цилиндрической симметрией*, т. е. зависящие только от одной переменной:  $r$  или  $\rho$ . Найдем сначала решения уравнения Лапласа, зависящие только от  $r$ . Для этого запишем уравнение Лапласа в сферических координатах и воспользуемся тем фактом, что решение  $u$  не зависит от  $\theta$  и  $\varphi$ . Учитывая (1.5), получим уравнение

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0, \quad r = |\mathbf{x}| > 0. \quad (1.7)$$

Умножая на  $r^2$  и интегрируя дважды полученное уравнение, выводим, что  $u(\mathbf{x}) = U(r) \equiv C_1/r + C_2$ , где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные. Полагая здесь  $C_1 = 1/4\pi$ ,  $C_2 = 0$ , получим функцию

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \equiv \frac{1}{4\pi r}. \quad (1.8)$$

Функция (1.8) является бесконечно дифференцируемой и, более того, аналитической всюду в  $\mathbb{R}^3$ , кроме точки  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , где она имеет особенность 1-го порядка. Кроме того, по построению она удовлетворяет уравнению Лапласа (1.2) в каждой точке  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  и убывает на бесконечности с первым порядком по  $|\mathbf{x}|^{-1}$ . Следовательно, она является гармонической в  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Функцию (1.8) называют *сингулярным решением оператора Лапласа* в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . В свою очередь, сумму сингулярного решения и любой гармонической функции называют *фундаментальным решением оператора Лапласа*. Вместо термина “сингулярное” используют также термины “элементарное” либо “главное фундаментальное” решение. Подчеркнем, что название “сингулярное решение” относится именно к функции (1.8), отличающейся от функции  $1/|\mathbf{x}|$  множителем  $1/4\pi$ . Причина появления этого множителя выяснится позже.

Изложенные выше свойства функции (1.8) остаются справедливыми, если в качестве  $r$  в (1.8) взять расстояние от переменной точки  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  до произвольной фиксированной точки  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ . Другими словами, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1.1. Функция  $E_3(\cdot, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемая формулой

$$E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \quad (1.9)$$

является гармонической в любой области  $\Omega$  пространства  $\mathbb{R}^3$ , не содержащей точки  $\mathbf{y}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  лемма уже доказана. При  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  следует ввести сферическую систему координат с центром в точке  $\mathbf{y}$  и повторить предыдущие рассуждения. ■

Функцию (1.9) будем называть *сингулярным решением оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^3$  с центром в точке  $\mathbf{y}$* .

Аналогичные рассуждения показывают, что общее решение уравнения Лапласа в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , зависящее только от координаты  $\rho$ , имеет вид

$$u(\mathbf{x}) = U(\rho) = C_1 \ln \frac{1}{\rho} + C_2. \quad (1.10)$$

Напомним, что  $\rho$  связана с декартовыми координатами  $x$  и  $y$  формулой

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.11)$$

Поскольку в силу (1.11) функция (1.10) не зависит от декартовой координаты  $z$ , то ее достаточно рассматривать при  $z = 0$ , т. е. на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . При  $C_1 = 1/2\pi$ ,  $C_2 = 0$  получим функцию

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}|}, \quad \rho = |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

называемую *сингулярным решением оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^2$* . Соответствующая функция  $E_2(\cdot, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ , определяемая формулой

$$E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \quad (1.12)$$

называется *сингулярным решением оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^2$  с центром в точке  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  или просто сингулярным решением в  $\mathbb{R}^2$ , если  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$* . По построению функция (1.12) удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad (1.13)$$

в каждой точке  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ . Однако в отличие от функции (1.9), убывающей на бесконечности, функция (1.12) является неограниченной при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Поэтому она не является гармонической в неограниченной области. Однако она является гармонической в любой *ограниченной* области плоскости  $\mathbb{R}^2$ , не содержащей  $\mathbf{y}$ . Сформулируем полученный результат в виде леммы.

**ЛЕММА 1.2.** *Функция (1.12) удовлетворяет уравнению Лапласа (1.13) всюду в  $\mathbb{R}^2$ , кроме точки  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , и является гармонической в любом открытом ограниченном множестве  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , не содержащем точки  $\mathbf{y}$ .*

Рассмотрим теперь пространство  $\mathbb{R}^n$  произвольного числа  $n \geq 3$  измерений. Обозначим через  $\omega_n$  площадь единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$ . Известно [9, с. 43], что  $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ , где  $\Gamma$  – гамма-функция Эйлера. Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости следующей леммы.

ЛЕММА 1.3. Функция  $E_n(\cdot, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемая формулой

$$E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \frac{1}{\omega_n |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-2}}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \quad n \geq 3, \quad (1.14)$$

где величина  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$  имеет смысл расстояния от переменной точки  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  до фиксированной точки  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , является гармонической в любом открытом множестве  $\Omega$  пространства  $\mathbb{R}^n$ , не содержащем точки  $\mathbf{y}$ .

Функцию (1.14) будем называть *сингулярным решением оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^n$  с центром в точке  $\mathbf{y}$*  или просто *сингулярным решением в  $\mathbb{R}^n$* , если  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ .

**6.1.3. Физический смысл сингулярного решения. Потенциалы монополей, диполей и мультиполей.** Изучим физический смысл сингулярного решения  $E_n(\cdot, \mathbf{y})$  оператора Лапласа при  $n = 3$  или 2. С этой целью введем в рассмотрение электрический заряд величины  $q$ , сосредоточенный в точке  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ . На соответствующую пару  $(\mathbf{y}, q)$  будем ссылаться как на *точечный заряд* (или *монополь*, либо *мультиполь нулевого порядка*) с *центром в точке  $\mathbf{y}$  интенсивности  $q$* . Из результатов гл. 1 (см. также [38, с. 64]) следует, что потенциал  $u$  электростатического поля, создаваемого монополем  $(\mathbf{y}, q)$  в произвольной точке  $\mathbf{x}$  пространства  $\mathbb{R}^3$ , определяется формулой

$$u(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \equiv qE_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.15)$$

На основании (1.15) выводим, что по своему физическому смыслу  $E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  представляет собой значение в точке  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  потенциала электростатического поля, создаваемого единичным точечным источником, сосредоточенным в точке  $\mathbf{y}$ . Впрочем, непосредственный физический смысл имеет не сам потенциал  $u$  в (1.15), а его градиент, точнее, векторное поле *напряженности электрического поля*  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -kq\nabla_x E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Здесь индекс “ $x$ ” у оператора  $\nabla$  означает, что он применяется к  $E_3$  как функции от  $\mathbf{x}$ ,  $k$  – некоторая константа, величина и размерность которой зависят от выбранной системы единиц. В частности,  $k = 1$  в системе СИ. Именно вектор  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  в каждой точке  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  равен силе, с которой точечный заряд  $(\mathbf{y}, q)$  действует на единичный точечный заряд, помещенный в точку  $\mathbf{x}$  [38, с. 15]. Полагая  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$ , выводим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x_i} &= \frac{x_i - y_i}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{x_i - y_i}{r^3}, \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) &= \frac{x_i - y_i}{r^3}, \quad \nabla_x \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} = -\nabla_y \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -kq \nabla_x \left( \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) = \frac{qk}{4\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}.$$

Если же в точке  $\mathbf{y}$  сосредоточена масса величины  $q$ , то функция (1.15) описывает с точностью до мультипликативной размерной константы гравитационный потенциал, создаваемый в точке  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  точечным источником масс  $(\mathbf{y}, q)$ .

Обратимся теперь к функции  $E_2(\cdot, \mathbf{y})$ , которую, как уже указывалось выше, можно рассматривать как на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , так и в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Аналогичные вышеприведенным рассуждения показывают, что  $E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  при первой (“плоской”) интерпретации представляет собой значение в произвольной точке  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  потенциала точечного (на плоскости) источника, сосредоточенного в точке  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ . При трехмерной интерпретации  $E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  представляет собой значение в произвольной точке  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  потенциала, создаваемого зарядами (или массами), распределенными с постоянной плотностью вдоль прямой  $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ , проходящей параллельно оси  $x_3$  через точку  $\mathbf{y}' = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Для того чтобы выявить физический смысл сингулярного решения, мы ввели специальный точечный объект, называемый монополем, и показали, что его потенциал совпадает (с точностью до мультипликативной константы) с сингулярным решением  $E_3(\cdot, \mathbf{y})$ . Наряду с монополем важную роль в физических приложениях играет еще один точечный объект, называемый диполем или мультиполем первого порядка. Чтобы сконструировать диполь, выберем произвольную точку  $\mathbf{y}$  и проведем через нее в направлении некоторого единичного вектора  $\mathbf{e}_1$  ось  $l_1$ . Пусть точки  $\mathbf{y}'$  и  $\mathbf{y}''$  расположены на оси  $l_1$  симметрично относительно  $\mathbf{y}$  на расстоянии  $h$  друг от друга, и пусть в них сосредоточены заряды  $-q$  и  $q$  (см. рис. 1.1,а), причем  $q > 0$ .

Из курса физики известно, что для электромагнитного поля так же, как и гравитационного поля, справедлив *принцип суперпозиции*. Согласно этому принципу потенциал электростатического поля, создаваемого монополями  $(\mathbf{y}', -q)$  и  $(\mathbf{y}'', q)$  в точке  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}', \mathbf{y}''$ , определяется формулой

$$u(\mathbf{x}; \mathbf{y}', \mathbf{y}'') = \frac{q}{4\pi |\mathbf{y}'' - \mathbf{x}|} - \frac{q}{4\pi |\mathbf{y}' - \mathbf{x}|}. \quad (1.17)$$

Из (1.17) видно, что при  $h = |\mathbf{y}' - \mathbf{y}''| \rightarrow 0$  потенциал  $u(\mathbf{x}; \mathbf{y}', \mathbf{y}'')$  стремится к нулю как разность двух равных в пределе при  $h \rightarrow 0$  функций. Пусть теперь в процессе стремления  $h$  к нулю заряд  $q$  меняется так, что выполняется условие  $qh = q|\mathbf{y}' - \mathbf{y}''| = q_1$ , где  $q_1$  – фиксированное число. Предельное положение зарядов  $(\mathbf{y}', -q)$  и  $(\mathbf{y}'', q)$  при  $h \rightarrow 0$  носит название *диполя* с центром в точке  $\mathbf{y}$ , а число  $q_1$  и ось  $l_1$  называются *моментом* и *осью* диполя соответственно. Сам диполь представляет собой тройку  $(\mathbf{y}, q_1, l_1)$ . По



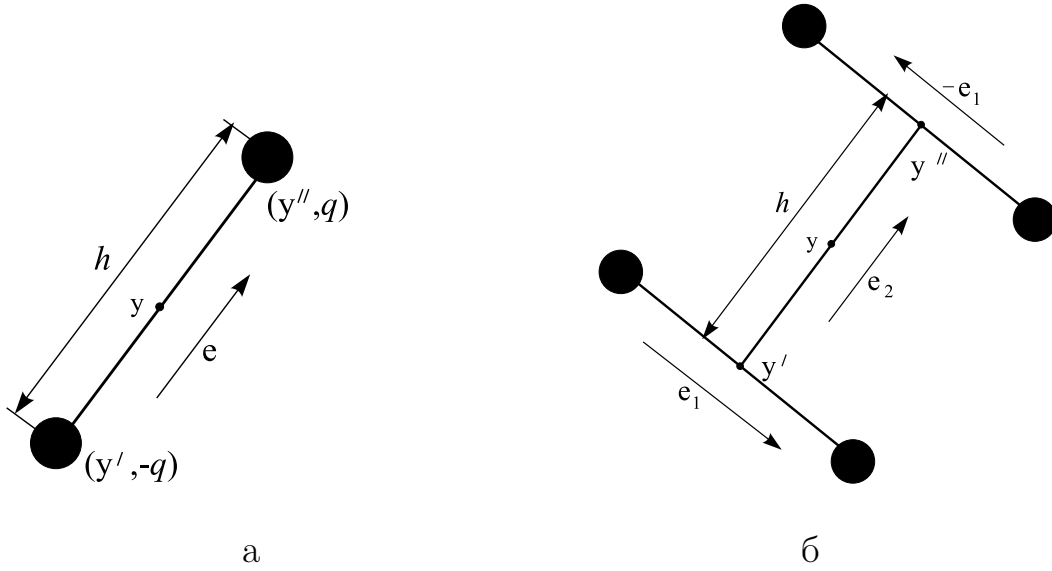


Рис. 1.1

определению производной в данном направлении, очевидно, имеем

$$\begin{aligned}
 u^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\equiv \lim_{|\mathbf{y}'' - \mathbf{y}'| \rightarrow 0} \frac{q}{4\pi} \left( \frac{1}{|\mathbf{y}'' - \mathbf{x}|} - \frac{1}{|\mathbf{y}' - \mathbf{x}|} \right) = \\
 &= \frac{q_1}{4\pi} \lim_{|\mathbf{y}'' - \mathbf{y}'| \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}''|} \left( \frac{1}{|\mathbf{y}'' - \mathbf{x}|} - \frac{1}{|\mathbf{y}' - \mathbf{x}|} \right) = q_1 \frac{\partial}{\partial l_1} E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.18)
 \end{aligned}$$

По построению, (1.18) описывает потенциал электростатического поля, создаваемого в произвольной точке  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  диполем  $(\mathbf{y}, q_1, l_1)$ . Так как

$$\frac{\partial}{\partial l_1} E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{x}} E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_1 = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \cdot \mathbf{e}_1, \quad (1.19)$$

то потенциал  $u^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  диполя  $(\mathbf{y}, q_1, l_1)$  убывает как  $O(|\mathbf{x}|^{-2})$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

Итак, мы ввели два точечных объекта – монополь и диполь – и вычислили потенциалы полей, создаваемых этими объектами. При этом диполь был получен сближением двух монополей разноименных зарядов с одновременным увеличением их зарядов по модулю. Используя, в свою очередь, два диполя, мы можем сконструировать еще один точечный объект, называемый квадруполем, или мультиполем второго порядка. Для этого нужно рассмотреть на прямой  $l_2$  с направлением  $\mathbf{e}_2$ , проходящей через точку  $\mathbf{y}$ , два диполя с одним и тем же моментом  $q_1$ , один из которых ориентирован в направлении  $\mathbf{e}_1$  (см. рис. 1.1,б), а другой – в направлении  $-\mathbf{e}_1$ . Сближая оба диполя в точку  $\mathbf{y}$  с одновременным увеличением величины момента  $q_1$  так, чтобы выполнялось условие  $2!q_1 h \equiv q_2 = \text{const}$ , и рассуждая, как и выше, получим в пределе еще один точечный объект, потенциал которого

определяется формулой

$$u^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{q_2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial l_1 \partial l_2} E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.20)$$

Указанный точечный объект называется *квадруполем* с моментом  $q_2$ , а направления  $l_1$  и  $l_2$  называются его осями. Простой анализ показывает, что потенциал квадруполья убывает как  $O(|\mathbf{x}|^{-3})$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

Сближая в точку  $\mathbf{y}$  по введенной схеме два квадруполья, можно построить еще один точечный источник, называемый *октаполем*, потенциал которого, определяемый формулой

$$u^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{q_3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial l_1 \partial l_2 \partial l_3} E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

убывает как  $O(|\mathbf{x}|^{-4})$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Продолжая этот процесс и далее, можно сконструировать точечный источник, называемый *мультиполем произвольного порядка  $k$* , с потенциалом  $u^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , определяемым формулой

$$u^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{q_k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial l_1 \partial l_2 \dots \partial l_k} E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.21)$$

Направления  $l_i$  называются осями мультиполя, а величина  $q_k$  — его моментом. Подчеркнем, что потенциал мультиполя  $k$ -го порядка совпадает с точностью до мультипликативной константы с частной производной  $k$ -го порядка сингулярного решения  $E_3(\cdot, \mathbf{y})$  вдоль его осей и убывает как  $O(|\mathbf{x}|^{-k-1})$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Более подробно о процедуре построения мультиполей разных порядков и о свойствах их потенциалов можно прочитать в [21, гл. 20].

В заключение приведем сводку основных свойств сингулярного решения  $E_n(\cdot, \mathbf{y})$ , считая во всех приводимых ниже свойствах, кроме последнего, что  $\mathbf{y}$  является фиксированной, хотя и произвольной точкой из  $\mathbb{R}^n$ :

1. Всюду в  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{y}\}$  функция  $E_n(\cdot, \mathbf{y})$  является бесконечно дифференцируемой и, более того, аналитической функцией декартовых координат точки  $\mathbf{x}$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа (1.2);  $E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  имеет при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$  характеристическую для каждого  $n$  особенность.

2. При  $n \geq 3$  функция  $E_n(\cdot, \mathbf{y})$  удовлетворяет условию на бесконечности (1.3) и является гармонической функцией в  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{y}\}$ .

3. При  $n = 3$  или  $2$  функция  $E_n(\cdot, \mathbf{y})$  описывает по своему физическому смыслу (с точностью до мультипликативной постоянной) потенциал поля, создаваемого в произвольной точке  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  единичным точечным источником, сосредоточенным в точке  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

4. Функция  $E_n$  зависит лишь от одной скалярной переменной  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ , причем любое другое решение уравнения (1.2), зависящее от  $r$ , может отличаться от  $E_n$  лишь мультипликативной и аддитивной постоянными.

5. Функция  $E_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является симметричной функцией точек  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ ; поэтому  $E_n(\mathbf{x}, \cdot)$ , рассматриваемая как функция точки  $\mathbf{y}$  (при фиксированном  $\mathbf{x}$ ), обладает всеми перечисленными выше свойствами.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Еще одно свойство сингулярного решения  $E_n(\cdot, \mathbf{y})$  заключается в том, что  $E_n(\cdot, \mathbf{y})$  является решением в смысле обобщенных функций неоднородного уравнения Лапласа

$$\Delta_x E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.22)$$

Здесь индекс “ $x$ ” у оператора  $\Delta$  означает, что он применяется к  $E_n$  как функции от  $\mathbf{x}$ ,  $\delta(\cdot, \mathbf{y})$  –  $n$ -мерная  $\delta$ -функция Дирака с центром в точке  $\mathbf{y} \in \Omega$ . Касаясь  $\delta$ -функции, отметим, что впервые она была введена в 1923 г. английским физиком Р.А.М. Дирак (1902–1984), который в одномерном случае определил  $\delta(x, y)$  как функцию, равную нулю всюду, кроме одной точки  $y$ , где она равна бесконечности и имеет интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx$ , равный единице. Простой анализ показывает, что введенные условия для  $\delta(x, y)$  не совместны с точки зрения определения функции и интеграла. Поэтому  $\delta(x, y)$  не является функцией в классическом смысле этого слова. Более того, исследования российского математика С.Л. Соболева (1908–1989), французского математика Л.Шварца (L. Schwartz, 1915–2002) и других математиков показали, что  $\delta$ -функция является обобщенной функцией, т. е. функционалом, определенным на множестве  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  бесконечно дифференцируемых финитных в  $\mathbb{R}^n$  функций. Указанный функционал действует по формуле  $\langle \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \varphi \rangle = \varphi(\mathbf{y}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Здесь  $\langle \cdot, \varphi \rangle$  – значение соответствующего функционала на элементе  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Тот факт, что  $E_n(\cdot, \mathbf{y})$  является решением уравнения (1.22) в смысле обобщенных функций, означает, что  $E_n(\cdot, \mathbf{y})$  удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int_{\mathbb{R}^n} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\varphi(\mathbf{y}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (1.23)$$

Более подробно написано об этом в гл. 8.

**6.1.4. Объемные потенциалы. Потенциалы простого и двойного слоя.** Выше при изучении физического смысла сингулярного решения была рассмотрена идеальная в определенном смысле ситуация, когда электрическое или гравитационное поле создается точечным источником. В реальности заряды либо массы распределены по объемам, поверхностям или линиям. Представляет интерес вычислить потенциалы полей, создаваемых указанными более сложными распределениями зарядов. Применим для решения этой задачи принцип суперпозиции и стандартную схему метода математического моделирования. Рассмотрим сначала случай, когда в пространстве имеется  $N$  точечных зарядов – монополей  $(\mathbf{y}_1, q_1)$ ,  $(\mathbf{y}_2, q_2)$ , ...,  $(\mathbf{y}_N, q_N)$ , сосредоточенных в точках  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_N$ . Чтобы найти потенциал

создаваемого ими поля, воспользуемся принципом суперпозиции, в соответствии с которым потенциал суммы зарядов равняется сумме потенциалов данных зарядов. С учетом этого имеем

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N q_j E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}_j|}. \quad (1.24)$$

Пусть далее заряды распределены по некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с объемной плотностью  $\rho$ , определенной в  $\Omega$ . На соответствующую пару  $(\Omega, \rho)$  будем ссылаться как на *объемный заряд*. Для нахождения потенциала электростатического поля, создаваемого парой  $(\Omega, \rho)$ , разобьем, следуя схеме метода математического моделирования, область  $\Omega$  на  $N$  элементарных подобластей  $\Omega_j$ , вычислим приближенно потенциалы полей, создаваемых зарядами, распределенными в  $\Omega_j$ , и перейдем к пределу при  $\text{diam } \Omega_j \rightarrow 0$  и  $N \rightarrow \infty$ . Используя формулу (1.24) и рассуждая, как в § 1.3, можно показать, что потенциал поля, создаваемого указанными источниками, т. е. парой  $(\Omega, \rho)$ , определяется формулой

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (1.25)$$

Здесь  $d\mathbf{y}$  – элемент объема в области  $\Omega$ . Правая часть в (1.25) представляет собой объемный интеграл, зависящий от  $\mathbf{x}$  как от параметра: собственный при  $\mathbf{x} \notin \overline{\Omega}$  и несобственный при  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$  (поскольку подынтегральная функция неограниченно возрастает при  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ ). Указанный объемный интеграл принято называть *объемным потенциалом*. В рассматриваемом нами случае, когда  $\rho$  описывает плотность зарядов, распределенных в области  $\Omega$ , так что пара  $(\Omega, \rho)$  имеет смысл *объемного заряда*, интеграл в (1.25) имеет смысл объемного потенциала электростатического поля. Ниже на него будем ссылаться как на *кулонов (объемный) потенциал* пары  $(\Omega, \rho)$ . В случае же, если  $\rho$  описывает плотность масс, распределенных в области  $\Omega$ , так что пара  $(\Omega, \rho)$  имеет смысл *объемной системы масс*, правая часть в (1.25) имеет смысл объемного потенциала гравитационного поля, создаваемого парой  $(\Omega, \rho)$ . Для краткости на него будем ссылаться как на *ньютонов (объемный) потенциал* пары  $(\Omega, \rho)$ .

Рассмотрим далее случай, когда заряды либо массы распределены на некоторой поверхности  $\Gamma$  с поверхностной плотностью  $\rho$ . Аналогичные вышеприведенным соображения показывают, что потенциал поля, создаваемого *поверхностным зарядом*  $(\Gamma, \rho)$ , определяется формулой

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\rho(\mathbf{y}) d\sigma_y}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (1.26)$$

где  $d\sigma_y$  – элемент площади поверхности  $\Gamma$ , относящийся к точке  $\mathbf{y} \in \Gamma$ . Поверхностный интеграл в правой части (1.26) – собственный при  $\mathbf{x} \notin \Gamma$  и несобственный (в указанном выше смысле) при  $\mathbf{x} \in \Gamma$  – называется *потенциалом простого слоя зарядов, распределенных с поверхностной плотностью  $\rho$  по поверхности  $\Gamma$* . Для краткости на него будем ссылаться как на *кулонов потенциал простого слоя пары  $(\Gamma, \rho)$* . В случае, если функция  $\rho$  описывает плотность масс, распределенных по  $\Gamma$ , интеграл в правой части (1.26) принято называть *ньютоновым потенциалом простого слоя масс, распределенных с плотностью  $\rho$  по поверхности  $\Gamma$* . Для краткости на него будем ссылаться как на *ньютонов потенциал простого слоя пары  $(\Gamma, \rho)$* .

Рассмотрим теперь случай, когда на поверхности  $\Gamma$  распределены диполи с непрерывно изменяющимся моментом  $q = \rho(\mathbf{y})$ , причем в каждой точке  $\mathbf{y} \in \Gamma$  направление оси  $l$  диполя совпадает с направлением внешней нормали  $\mathbf{n}_y$  к  $\Gamma$  в точке  $\mathbf{y}$  (см. рис. 1.2). Будем ссылаться в этом случае на тройку  $(\Gamma, \rho, \mathbf{n})$  как на *поверхностную зарядную систему диполей*. Рассуждая, как при выводе формулы (1.25), нетрудно показать, что потенциал  $u$  электростатического поля, создаваемого тройкой  $(\Gamma, \rho, \mathbf{n})$ , определяется формулой

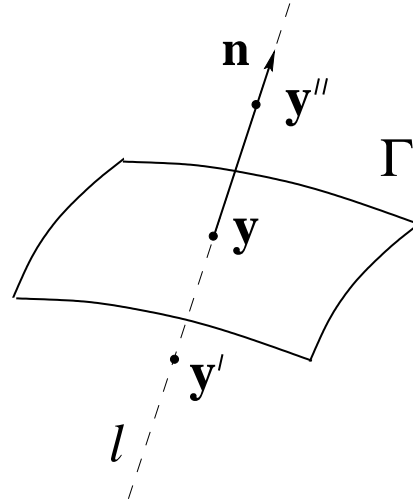


Рис. 1.2

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\sigma_y. \quad (1.27)$$

Интеграл в правой части (1.27) называется *потенциалом двойного слоя зарядов, распределенных с поверхностной плотностью  $\rho$  по поверхности  $\Gamma$* . Такое название связано с тем, что рассматриваемое на  $\Gamma$  распределение диполей может быть приближенно получено в виде двух – “внутренней” и “внешней” к  $\Gamma$  – поверхностных зарядных систем монополей, расположенных на малом расстоянии  $h$  друг от друга, плотности которых отличаются лишь знаком и растут с уменьшением  $h$ .

Наряду с введенными выше объемным потенциалом (1.25) и потенциалами простого и двойного слоя (1.26) и (1.27) мы будем рассматривать также их  $n$ -мерные аналоги, определяемые соотношениями

$$\int_{\Omega} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \int_{\Gamma} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\sigma_y, \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\sigma_y, \quad (1.28)$$

где  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . В гл. 7 мы покажем, что каждый из потенциалов в (1.28) является бесконечно дифференцируемой вне замыкания своей области интегрирования функцией, удовлетворяющей уравнению Лапласа и при  $n \geq 3$

условию (1.3) на бесконечности. Таким образом, потенциалы (1.28) представляют собой важные примеры гармонических функций. С учетом этого будем ссылаться на них как на *гармонические потенциалы*. Отметим также, что при  $n = 2$  потенциалы (1.28), принимающие вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d\sigma_y, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d\sigma_y, \quad (1.29)$$

называются соответственно *логарифмическим потенциалом*, *логарифмическим потенциалом простого слоя* и *логарифмическим потенциалом двойного слоя*.

**6.1.5. Несобственные кратные интегралы, зависящие от параметров.** Приведенные в п. 6.1.4 потенциалы определяются с помощью тройного или поверхностного интегралов, зависящих от параметра, роль которого играет переменная точка  $\mathbf{x}$ . Особенностью этих интегралов является то, что их подынтегральные функции обращаются в бесконечность в случае, когда значения потенциала рассматриваются в точках, принадлежащих области интегрирования. Хорошо известно, что соответствующие интегралы, называемые *несобственными*, нельзя определить как пределы интегральных сумм, а требуется еще дополнительный предельный переход по последовательности областей интегрирования. Чтобы глубже понять свойства потенциалов (1.25)–(1.29), приведем в этом пункте некоторые важные факты из теории несобственных кратных интегралов, зависящих от параметров. Ниже они будут широко использоваться при исследовании свойств интегралов типа потенциалов.

Пусть в ограниченном открытом множестве  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  задана функция  $f$ , неограниченная в окрестности некоторой точки  $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}$ , и пусть для любой области  $\omega_\delta$ , содержащей внутри себя точку  $\mathbf{x}_0$ , функция  $f$  ограничена и интегрируема в обычном смысле в области  $\Omega \setminus \omega_\delta$ . Указанная область  $\omega_\delta$  заштрихована на рис. 1.3,а, где  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ , и на рис. 1.3,б, где  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ . Индексом  $\delta$  обозначен диаметр области  $\omega_\delta$ , которая стягивается в точку  $\mathbf{x}_0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Рассматриваемые ниже области  $\Omega$ ,  $\omega_\delta$  и другие мы всегда предполагаем *кубируемыми*, т. е. имеющими объем, либо *квадрируемыми* в случае двух измерений, т. е. имеющими площадь, но не обязательно связными.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.** *Несобственным интегралом от функции  $f$  по области  $\Omega$  называется предел*

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus \omega_\delta} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.30)$$

*Если этот предел существует, конечен и не зависит от выбора областей  $\omega_\delta$ , стягивающихся в точку  $\mathbf{x}_0$ , то несобственный интеграл  $\int_{\Omega} f d\mathbf{x}$  называется сходящимся. В противном случае он называется расходящимся.*

Если существует хотя бы одна стягивающаяся последовательность областей  $\omega_{\delta_n}$  такая, что существует предел

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus \omega_{\delta_n}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

а для других последовательностей областей этот предел имеет другие значения или вообще не существует, то предел  $I$  называется условно сходящимся несобственным интегралом.

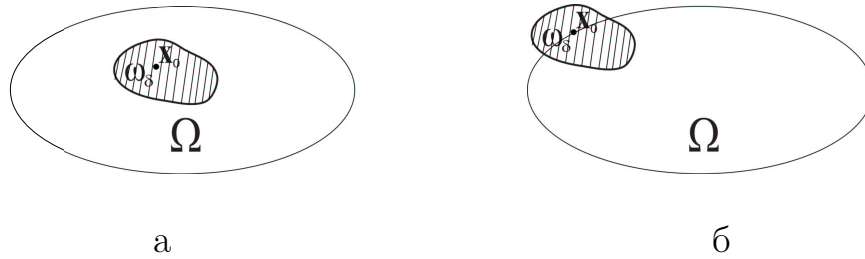


Рис. 1.3

Ясно, что при рассмотрении условно сходящегося несобственного интеграла  $I$  нужно указывать ту последовательность областей  $\omega_{\delta_n}$ , по которой определяется этот интеграл. Примером условно сходящегося интеграла является *сингулярный* интеграл. В применении к тройному несобственному интегралу от функции  $f$ , имеющей особенность в точке  $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}$ , он определяется как предел

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus B_{\delta_n}(\mathbf{x}_0)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.31)$$

Здесь  $B_{\delta_n}(\mathbf{x}_0)$  – стягивающаяся последовательность шаров радиуса  $\delta_n \rightarrow 0$  с центром в точке  $\mathbf{x}_0$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.** Пусть  $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}$ . Если интеграл  $\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  расходится, но предел (1.31) существует для любой стягивающейся последовательности шаров  $B_{\delta_n}$  с центром в точке  $\mathbf{x}_0$  и не зависит от выбора последовательности  $\delta_n \rightarrow 0$ , то этот предел называется *сингулярным интегралом от функции  $f$  по  $\Omega$  либо главным (или прямым) значением расходящегося интеграла*.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.2.** По аналогичной схеме определяются несобственные либо сингулярные кратные интегралы в пространстве любого числа измерений  $n$ , а также несобственные и сингулярные поверхностные интегралы.

Пусть  $\Omega$  и  $Q$  – некоторые области пространства  $\mathbb{R}^3$ , и пусть функция  $F$  определена на произведении  $Q \times \Omega$ . Рассмотрим интеграл

$$J(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in Q. \quad (1.32)$$

Если для любой точки  $\mathbf{x} \in Q$  интеграл (1.32) существует в собственном или несобственном смысле, то он называется собственным или несобственным интегралом, *зависящим от параметра  $\mathbf{x}$* .

Хорошо известен следующий результат (см., например, [10, с. 443]).

**ТЕОРЕМА 1.1.** Пусть  $Q$  и  $\Omega$  – ограниченные области в  $\mathbb{R}^3$ .

1) Если функция  $F$  непрерывна в  $\overline{Q} \times \overline{\Omega}$  как функция двух аргументов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , то  $J$  является непрерывной функцией точки  $\mathbf{x}$  в  $\overline{Q}$ .

2) Если, кроме того, производные  $\partial F / \partial x_i$  непрерывны в  $\overline{Q} \times \overline{\Omega}$ , то функция  $J$  имеет производную по  $x_i$ , непрерывную в  $\overline{Q}$ , причем

$$\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Omega} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \overline{Q}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.33)$$

3) В условиях утверждения 1 функция  $J$  интегрируема по параметру  $\mathbf{x}$ , причем

$$\int_Q J(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_Q d\mathbf{x} \int_{\Omega} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\Omega} d\mathbf{y} \int_Q F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.** Приведенные в теореме 1.1 утверждения легко распространяются на интегралы вида

$$J(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.34)$$

Здесь функция  $F$  удовлетворяет тем же условиям, что и в теореме 1.1, а функция  $\rho$  абсолютно интегрируема в собственном или несобственном смысле. Последнее означает, что  $\int_{\Omega} |\rho(\mathbf{y})| d\mathbf{y} = I = \text{const} < \infty$ , причем интеграл  $\int_{\Omega} |\rho(\mathbf{y})| d\mathbf{y}$  может быть как собственным, так и несобственным. Более того, если функция  $F$  имеет непрерывные в  $\overline{Q} \times \overline{\Omega}$  производные по  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  до порядка  $m \leq \infty$ , то  $J \in C^m(\overline{Q})$ , причем соответствующие производные функции  $J$  получаются путем дифференцирования под знаком интеграла.

Рассмотрим в качестве примера потенциал (1.25) гравитационного поля, создаваемого парой  $(\Omega, \rho)$ . Предположим, что  $\rho$  абсолютно интегрируема в  $\Omega$  и что точка  $\mathbf{x}$  изменяется в некоторой ограниченной области  $Q$ , отстоящей от  $\Omega$  на положительном расстоянии. Тогда функция  $F$  аргументов  $\mathbf{x} \in Q$  и  $\mathbf{y} \in \Omega$ , определяемая формулой

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (1.35)$$

является бесконечно дифференцируемой функцией от  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \overline{Q} \times \overline{\Omega}$ . В таком случае из замечания 1.3 следует, что потенциал  $u$  является бесконечно дифференцируемой функцией декартовых координат  $x_i$  точки  $\mathbf{x} \in \overline{Q}$ ,



причем производные от  $u$  по  $x_i$  получаются путем дифференцирования интеграла в (1.25) по  $x_i$ . Учитывая (1.16), легко выводим, что

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.36)$$

Если же параметр  $\mathbf{x}$  изменяется в  $\overline{\Omega}$ , то функция (1.35) обращается в бесконечность в случае, когда  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ . Это означает, что каждая точка  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$  является особой точкой подынтегральных функций интегралов (1.25) и (1.36), а сами интегралы являются несобственными, даже если функция  $\rho$  является сколь угодно гладкой. Естественно, возникает вопрос о свойствах непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости по  $x_i$  указанных несобственных интегралов, рассматриваемых в точках  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

Ограничимся ниже исследованием несобственных кратных интегралов вида (1.34), зависящих от параметра  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ , при следующих условиях:

- (i)  $\Omega$  – ограниченное (кубируемое) открытое множество в  $\mathbb{R}^3$ ;
- (ii)  $\rho$  – ограниченная интегрируемая в  $\Omega$  функция:  $|\rho(\mathbf{y})| \leq M \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega$ ;
- (iii) функция  $F$  двух аргументов  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$  и  $\mathbf{y} \in \overline{\Omega}$  непрерывна при  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  и неограничена при  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ .

Ясно, что интегралы (1.25) и (1.36) являются частными случаями несобственного интеграла (1.34). Основную роль при исследовании свойств несобственных интегралов (1.34) играет понятие равномерной сходимости интеграла в точке. Пусть  $B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$  – шар радиуса  $\delta_0$  с центром в  $\mathbf{x}_0$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5.** *Интеграл (1.34) называется равномерно сходящимся в точке  $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$ , что:*

- 1) интеграл  $J(\mathbf{x})$  сходится в каждой точке  $\mathbf{x} \in B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0) \cap \overline{\Omega}$ ;
- 2) неравенство

$$\left| \int_{\omega_\delta \cap \Omega} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| < \varepsilon \quad (1.37)$$

выполняется для любой области  $\omega_\delta$  диаметра  $\delta \leq \delta_0$ , содержащей в себе точку  $\mathbf{x}_0$ , и для любой точки  $\mathbf{x}$ , расстояние от которой до  $\mathbf{x}_0$  меньше  $\delta$ .

**ЛЕММА 1.4.** *(Достаточный признак равномерной сходимости). Пусть при выполнении условий (i)–(iii) существует такая окрестность  $U(\mathbf{x}_0)$  точки  $\mathbf{x}_0$  и такие константы  $C > 0$  и  $\lambda < 3$ , что выполняется соотношение*

$$|F(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \frac{C}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U(\mathbf{x}_0) \cap \overline{\Omega}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \quad (1.38)$$

*Тогда интеграл (1.34) сходится равномерно в точке  $\mathbf{x}_0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим шар  $B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$ , лежащий в упомянутой окрестности точки  $\mathbf{x}_0$ . Тогда для любой области  $\omega_\delta$  диаметра  $\delta \leq \delta_0$ , содер-

жащей в себе  $\mathbf{x}_0$ , и любой точки  $\mathbf{x} \in B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$  имеем с учетом (ii), что

$$\left| \int_{\omega_{\delta} \cap \Omega} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \leq \int_{\omega_{\delta} \cap \Omega} |F(\mathbf{x}, \mathbf{y})| |\rho(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \leq CM \int_B \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{\lambda}}. \quad (1.39)$$

Здесь  $B \equiv B_{2\delta_0}(\mathbf{x})$  – шар радиуса  $2\delta_0$  с центром в точке  $\mathbf{x}$ .

Для вычисления интеграла в правой части (1.39) перейдем к сферическим координатам  $r, \theta, \varphi$  с центром в  $\mathbf{x}$ . Учитывая, что  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ , будем иметь

$$\int_B \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{\lambda}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\delta_0} \frac{r^2}{r^{\lambda}} dr = 4\pi \int_0^{2\delta_0} r^{2-\lambda} dr = \frac{4\pi(2\delta_0)^{3-\lambda}}{3-\lambda}. \quad (1.40)$$

Из (1.39) и (1.40) следует, что при  $\delta \leq \delta_0$

$$\left| \int_{\omega_{\delta} \cap \Omega} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \leq \frac{4\pi CM}{3-\lambda} (2\delta_0)^{3-\lambda}. \quad (1.41)$$

Так как  $\lambda < 3$ , то правая часть в (1.41) может быть сделана меньше любого  $\varepsilon$  путем выбора достаточно малого  $\delta_0 > 0$ . ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.** Отметим, что в случае двух измерений условие равномерной сходимости двойного несобственного интеграла вида (1.34) при  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$  имеет также вид (1.38), но при  $\lambda < 2$ . Это же условие является условием равномерной сходимости несобственного поверхностного интеграла в  $\mathbb{R}^3$  вида

$$\int_{\Gamma} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (1.42)$$

если  $\Gamma$  обладает определенной регулярностью, например, является поверхностью Ляпунова (см. подробнее о поверхностях Ляпунова в § 7.2).

Ясно, что для интеграла (1.25) условие (1.38) выполняется при  $\lambda = 1$ . Далее, поскольку в силу (1.16) имеем

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \right| \equiv \frac{|x_i - y_i|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \leq \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.43)$$

то для интегралов в (1.36) условие (1.38) выполняется при  $\lambda = 2$ . Поэтому все интегралы в (1.25) и (1.36) являются равномерно сходящимися в любой точке  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ . Аналогичный факт о равномерной сходимости справедлив с учетом замечания 1.4 и для потенциала простого слоя (1.26), имеющего вид (1.42), где функция  $F$  определяется формулой (1.35), поскольку для него достаточное условие равномерной сходимости (1.38) выполняется при

$\lambda = 1$ . Что касается потенциала двойного слоя (1.27), то с учетом соотношений (1.16) и (1.19) при  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}_y$  имеем

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \cdot \mathbf{n}_y \implies |F(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}. \quad (1.44)$$

Поэтому для него условие (1.38) выполняется лишь при  $\lambda = 2$ , чего недостаточно для равномерной сходимости несобственного поверхностного интеграла. Это не случайно, а связано с тем, что несобственный интеграл, определяющий потенциал двойного слоя (1.27) при  $\mathbf{x} \in \Gamma$ , не является сходящимся в соответствии с определением 1.3, хотя сходится как сингулярный интеграл в смысле определения 1.4 (см. подробнее об этом в § 7.2).

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.5.** Аналогичным образом вводятся понятия несобственного и сингулярного интегралов в пространстве любого числа  $n$  измерений, а также понятие равномерной сходимости в точке  $n$ -мерного несобственного интеграла, зависящего от параметра  $\mathbf{x}$ . При этом достаточное условие равномерной сходимости имеет вид (1.38) при  $\lambda < n$  для  $n$ -мерного аналога объемного интеграла вида (1.34) и вид (1.38) при  $\lambda < n - 1$  для  $n$ -мерного аналога поверхностного интеграла (1.42). Отсюда, в частности, вытекает с учетом свойств сингулярного решения  $E_n$  равномерная сходимость  $n$ -мерных объемного потенциала и потенциала простого слоя в (1.28). Последнее имеет место при указанном выше условии определенной регулярности поверхности  $\Gamma$ . Наконец, отметим, что при  $n = 2$  достаточное условие равномерной сходимости имеет вид (1.38) при  $\lambda < 2$  для двойного интеграла вида (1.34) и вид (1.38) при  $\lambda < 1$  для криволинейного несобственного интеграла вида (1.42). Отсюда, с учетом очевидного неравенства

$$|\ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \leq C |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-\lambda} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y},$$

где  $Q$  – произвольное ограниченное множество в  $\mathbb{R}^2$ , справедливого для любого числа  $\lambda \in (0, 1)$  с некоторой константой  $C = C(Q)$ , вытекает равномерная сходимость логарифмического потенциала и логарифмического потенциала простого слоя, определенных в (1.29).

Использование понятия равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, позволяет установить ряд их свойств. В частности, справедлива

**ТЕОРЕМА 1.2.** Пусть в условиях леммы 1.4 интеграл (1.34) сходится равномерно в точке  $\mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}$ . Тогда интеграл (1.34) является непрерывной функцией в точке  $\mathbf{x}_0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно доказать, что для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , что для каждой точки  $\mathbf{x} \in \Omega$ , удовлетворяющей условию  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ , выполняется неравенство

$$|J(\mathbf{x}) - J(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon. \quad (1.45)$$

Для доказательства этого факта возьмем шар  $B_\delta \equiv B_\delta(\mathbf{x}_0)$  и разобьем каждый из интегралов  $J(\mathbf{x})$  и  $J(\mathbf{x}_0)$  на два слагаемых: по области  $\Omega \cap B_\delta(\mathbf{x}_0)$  и по области  $\Omega \setminus B_\delta(\mathbf{x}_0)$ . С учетом этого будем иметь

$$|J(\mathbf{x}) - J(\mathbf{x}_0)| = \left| \int_{\Omega} [F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})] \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \leq \left| \int_{\Omega \cap B_\delta} F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| + \\ + \left| \int_{\Omega \setminus B_\delta} [F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})] \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| + \left| \int_{\Omega \cap B_\delta} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right|. \quad (1.46)$$

При достаточно малом  $\delta > 0$  первое и третье слагаемые в правой части (1.46) будут меньше  $\varepsilon/3$  в силу равномерной сходимости интеграла в точке  $\mathbf{x}_0$ , если  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ . Выберем далее число  $\delta' < (\delta/2)$  и предположим, что  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta'$ . При выполнении этого условия второй интеграл в (1.46) является собственным. Поскольку  $F$  непрерывна при  $\mathbf{y} \in \overline{\Omega \setminus B_\delta}$ , то по свойству непрерывности собственного интеграла по параметру (см. теорему 1.1) этот интеграл будет меньше  $\varepsilon/3$ , если  $\mathbf{x}$  выбрать достаточно близким к  $\mathbf{x}_0$ . ■

Исследование дифференцируемости по параметру несобственного интеграла вида (1.34) требует проведения несколько более тонких рассуждений, на чем мы не будем здесь останавливаться. Интересующийся читатель может найти детальное исследование дифференцируемости и других свойств кратных несобственных интегралов, зависящих от параметра, в [50, лекция 7, §2], [16, гл.17].

## § 6.2. Формулы Грина

**6.2.1. Формулы Гаусса–Остроградского, Грина и Стокса.** Важную роль при исследовании свойств решений эллиптических уравнений играют интегральные формулы Гаусса–Остроградского, Грина и Стокса. Поскольку доказательство указанных формул приводится в курсе математического анализа, то ограничимся здесь приведением их формулировок, следуя [19]. Напомним некоторые определения, связанные с областями и их границами. Пусть  $\Omega$  – произвольное открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Множество  $\Omega$  называется *областью*, если оно связно, т.е. любые две его точки можно соединить кривой, целиком лежащей в  $\Omega$ . Если к тому же любую лежащую в  $\Omega$  замкнутую кривую можно непрерывным образом “стянуть” в некоторую точку этой области, то такая область  $\Omega$  называется *односвязной*.

Говорят, что поверхность  $\Gamma$  (кривая при  $n = 2$ ) принадлежит классу  $C^l$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ , если в некоторой окрестности  $B_r(\mathbf{x}_0)$  каждой точки  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$  она описывается уравнением  $F_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = 0$ , где  $F_{\mathbf{x}_0} \in C^l(B_r(\mathbf{x}_0))$ , и при  $l \geq 1$   $\text{grad} F'_{\mathbf{x}_0} \neq 0$ . При  $l \geq 1$  поверхность называется *гладкой*. Граница  $\Gamma$  трехмерной области  $\Omega$  называется *кусочно-гладкой*, если она составлена из конечного числа гладких поверхностей, примыкающих друг к другу по

гладким кривым–ребрам поверхности. Если граница  $\Gamma$  состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких поверхностей  $\Gamma_i$ , то  $\Gamma_i$  называют *связными компонентами*  $\Gamma$ . Ниже будем иметь дело с кратными, криволинейными, поверхностными интегралами как собственными, так и несобственными либо сингулярными. Свойства указанных интегралов достаточно освещены в таких книгах, как [16], [18], [19], [47], а также в § 6.1.

Пусть  $\Omega$  – некоторое множество в пространстве  $\mathbb{R}^3$  и  $P, Q, R: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – заданные в  $\Omega$  функции. Предположим, что выполняются условия

(2а)  $\Omega$  – ограниченное открытое множество с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ ; (2б)  $P, Q, R \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

В [19, с. 188] доказана следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 2.1.** *Пусть выполняются условия (2а), (2б), и пусть существуют несобственные интегралы по  $\Omega$  от каждой из частных производных функций  $P, Q$  и  $R$ . Тогда справедлива формула*

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma, \quad (2.1)$$

называемая *формулой Гаусса–Остроградского*.

Здесь  $d\mathbf{x} = dx dy dz$  – элемент объема,  $d\sigma$  – элемент площади поверхности,  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  – углы единичной внешней нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $\Gamma$  с единичными ортами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  декартовой системы координат, соответственно. В векторной записи формула (2.1) имеет вид

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} v_n d\sigma \equiv \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad v_n \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.2)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  (либо  $\operatorname{div} \mathbf{v}$ ) – векторное (либо скалярное) поле, определяемое в декартовой системе координат формулами

$$\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (2.3)$$

Полагая в (2.1)  $P = uv, Q = 0, R = 0$ , будем иметь

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (uv) d\mathbf{x} \equiv \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} uv \cos \alpha d\sigma.$$

Заменив здесь переменную  $x$  на произвольную декартову координату  $x_i$ , приходим к формуле

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} uv \cos(\mathbf{n}, x_i) d\sigma, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$

называемой *формулой интегрирования по частям в  $\mathbb{R}^3$* .

Положим теперь в (2.1)  $P = u\partial v/\partial x$ ,  $Q = u\partial v/\partial y$ ,  $R = u\partial v/\partial z$ . В результате приходим к формуле

$$\int_{\Omega} u\Delta v d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}, \quad (2.5)$$

называемой *первой формулой Грина*. Здесь

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z},$$

а  $\partial v/\partial n$  – производная по внешней нормали, определяемая формулой

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla v \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \quad \text{на } \Gamma.$$

Меняя в (2.5) местами  $u$  и  $v$ , будем иметь

$$\int_{\Omega} v\Delta u d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}. \quad (2.6)$$

Вычитая (2.6) из (2.5), приходим ко *второй формуле Грина*

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (2.7)$$

Из вывода формулы (2.4) и теоремы 2.1 следует, что формула интегрирования по частям (2.4) справедлива при выполнении условия (2а) на  $\Omega$  и выполнении следующих условий на  $u$  и  $v$ :  $u, v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ . Точно так же формула Грина (2.5) (либо (2.6)) справедлива при выполнении условия (2а) на  $\Omega$  и следующих условий на  $u$  и  $v$ :  $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ,  $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ , (либо  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ,  $v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ). Наконец, формула (2.7) справедлива при выполнении условия (2а) и условий  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ . Разумеется, еще одним дополнительным условием справедливости всех формул (2.4)–(2.7) является существование всех несобственных интегралов по области  $\Omega$ , стоящих в этих формулах. Однако если вместо приведенных условий выполняются следующие более жесткие условия:  $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$  для формулы (2.4), либо  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $v \in C^2(\overline{\Omega})$  для формулы (2.5), или  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $v \in C^1(\overline{\Omega})$  для формулы (2.6), либо  $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$  для формулы (2.7), то тогда все несобственные интегралы, стоящие в формулах (2.4)–(2.7), переходят в собственные, так что указанное условие существования несобственных интегралов, естественно, снимается.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.** Отметим, что согласно условию (2а) формулы Грина, а также формула (2.4) справедливы как для односвязных либо многосвязных

областей, так и для несвязных множеств, состоящих из нескольких областей, т. е. связных открытых множеств. Точно так же граница  $\Gamma$  множества  $\Omega$  может быть как связной, так и несвязной, т. е. состоящей из нескольких связных компонент. В последнем случае поверхностные интегралы следует брать по всем поверхностям, ограничивающим  $\Omega$ . Аналогичные формулы Грина имеют место как на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , так и в пространстве  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 3$ .

Пусть  $S$  – поверхность в  $\mathbb{R}^3$ . Назовем ее *окрестностью* любое открытое множество, содержащее  $S$ . Предположим, что выполняются условия

(2в)  $S$  – ограниченная кусочно-гладкая двусторонняя поверхность с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ ;

(2г) функции  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  непрерывны и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности поверхности  $S$ .

Тогда справедлива следующая теорема (см. [19, с. 182]).

**ТЕОРЕМА 2.2** *При выполнении условий (2в), (2г) справедлива формула*

$$\begin{aligned} \int_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \\ = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz, \end{aligned} \quad (2.8)$$

называемая *формулой Стокса*. При этом стоящий в правой части (2.8) интеграл представляет собой сумму интегралов по связным компонентам границы  $\Gamma$ , на которых указано положительное направление обхода (при котором с учетом выбора стороны поверхности поверхность  $S$  остается слева).

В векторной записи формула (2.8) имеет с учетом обозначений (2.3) вид

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds. \quad (2.9)$$

Здесь  $\mathbf{t}$  – единичный вектор касательной в точках границы  $\Gamma$  поверхности  $S$ ,  $ds$  – элемент длины дуги границы  $\Gamma$ , скаляр  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$  называется *касательной* (или *тангенциальной*) компонентой векторного поля  $\mathbf{v}$  относительно граничной кривой  $\Gamma$ , тогда как  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  представляет собой ротор (или вихрь) векторного поля  $\mathbf{v}$ , определяемый в декартовом базисе формулой

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (2.10)$$

В соответствии с физическим смыслом поверхностного интеграла [19, с. 143] левая часть формулы (2.9) представляет собой *поток векторного поля*  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  через поверхность  $S$ . Правая часть в (2.9) носит название *циркуляции векторного поля*  $\mathbf{v}$  по кривой  $\Gamma$ . С учетом этого формула (2.9) по своему физическому смыслу означает, что *поток векторного поля*  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  *через поверхность*  $S$  *равен циркуляции векторного поля*  $\mathbf{v}$  *по кривой*  $\Gamma$ , *являющейся*

границей поверхности  $S$ . Отметим при этом, что для заданной поверхности  $S$  граница  $\Gamma$  определяется однозначно. Однако для заданной границы  $\Gamma$  можно подобрать бесконечное множество поверхностей  $S$ , имеющих своей границей кривую  $\Gamma$ , или, как говорят, натянутых на кривую  $\Gamma$ . Если считать первичной границу  $\Gamma$ , то тогда физический смысл формулы (2.9) заключается в том, что циркуляция векторного поля по замкнутой кривой  $\Gamma$  равна потоку векторного поля  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  через любую кусочно-гладкую поверхность  $S$ , натянутую на границу  $\Gamma$ .

Рассмотрим частный случай, когда  $S$  представляет собой плоское множество  $\Omega$ , лежащее в плоскости  $x, y$ , причем  $R = 0$ , а  $P$  и  $Q$  не зависят от координаты  $z$ . В таком случае формула (2.8) переходит в формулу

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy, \quad (2.11)$$

называемую (плоской) формулой Грина. Более точно справедлива следующая теорема (см. [19, с. 170]).

**ТЕОРЕМА 2.3.** Пусть плоское множество  $\Omega$  удовлетворяет условию (2а), а функции  $P$  и  $Q$  непрерывны в  $\bar{\Omega}$  и непрерывно дифференцируемы в  $\Omega$ . Если существуют несобственные интегралы по  $\Omega$  от каждой из частных производных функций  $P$  и  $Q$ , то справедлива формула (2.11), называемая формулой Грина. При этом стоящий в правой части (2.11) интеграл представляет собой сумму интегралов по связным компонентам границы  $\Gamma$ , на которых указано такое направление обхода, при котором  $\Omega$  остается слева.

Напомним, что под ротором двумерного векторного поля  $\mathbf{v} \equiv P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  понимают либо вектор  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ , определяемый в декартовой системе координат формулой  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\mathbf{k}$  (указанный вектор направлен перпендикулярно плоскости  $x, y$ ), либо просто скаляр  $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$  (который также называют завихренностью). С использованием последней интерпретации формулу (2.11) можно переписать в следующем “векторном” виде:  $\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{v} dx dy = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds$ .

С именем Стокса связана ещё одна важная теорема, которая нами уже использовалась в предыдущих главах.

**ТЕОРЕМА 2.4.** Пусть вектор-функция  $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^1(\Omega)$ , заданная в ограниченной односвязной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , удовлетворяет условию  $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Тогда существует функция  $\varphi \in C^2(\Omega)$  такая, что  $\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.** Отметим две особенности приведенных выше формул Грина (2.5)–(2.7), Гаусса–Остроградского (2.2) и Стокса (2.9). Прежде всего они записаны в инвариантном виде, поскольку в их формулировках участвуют инвариантные, т. е. не зависящие от выбора системы координат в области  $\Omega$  операторы: лапласиан  $\Delta$ , градиент  $\nabla$ , производная по нормали  $\partial/\partial n$ , дивергенция  $\operatorname{div}$  и ротор  $\operatorname{rot}$ . Во-вторых, указанные формулы,



кроме формулы (2.9), справедливы не только в  $\mathbb{R}^3$ , но и на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , а также в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . То же относится к формуле (2.4). Мы напомним лишь, что в  $\mathbb{R}^n$  указанные операторы определяются в декартовой системе координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$  формулами

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \quad \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} n_n.$$

Здесь  $v_1, v_2, \dots, v_n$  либо  $(n_1, n_2, \dots, n_n)$  – компоненты вектора  $\mathbf{v}$  (либо  $\mathbf{n}$ ) в декартовом базисе. Что касается формулы Стокса (2.9), то ее можно считать справедливой лишь в  $\mathbb{R}^3$  либо в  $\mathbb{R}^2$ , поскольку именно в этих случаях определен оператор  $\operatorname{rot}$ . В принципе, можно определить некий аналог оператора  $\operatorname{rot}$  и в  $\mathbb{R}^n$  при  $n \geq 4$  и выписать  $n$ -мерный аналог формулы Стокса (2.9). Однако указанная формула ниже нам не потребуется.

### 6.2.2. Интегральное представление функции из класса $C^2$ .

**ТЕОРЕМА 2.5.** Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ , и пусть функция  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  такова, что для любой точки  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  существует несобственный интеграл

$$\int_{\Omega} \frac{\Delta u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}.$$

Тогда справедлива формула

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] d\sigma -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta u(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} d\mathbf{x}, \quad (2.12)$$

называемая интегральным представлением Грина функции из класса  $C^2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим сначала, что  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ . Вырежем из области  $\Omega$  шар  $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$  достаточно малого радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $\mathbf{x}_0$  и обозначим через  $\Omega_\varepsilon$  оставшуюся часть области, а через  $S_\varepsilon$  – поверхность шара  $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  (см. рис. 2.1,а).

Применяя вторую формулу Грина (2.7) к функциям  $u$  и  $v = 1/r$ , где  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ , в области  $\Omega_\varepsilon$ , будем иметь с учетом гармоничности функции  $v$  в  $\Omega_\varepsilon$ , вытекающей из леммы 1.1, что

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\Delta u}{r} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n_x} - u \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r} \right) d\sigma_x + \int_{S_\varepsilon} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n_x} - u \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r} \right) d\sigma_x. \quad (2.13)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к области  $\Omega_\varepsilon$ ,  $\partial u / \partial n$  – производная по внешней нормали  $\mathbf{n}$ . Индекс “ $x$ ” в дифференциале  $d\sigma_x$  в поверхностном интеграле означает, что в поверхностном интеграле интегрирование проводится по переменной  $\mathbf{x}$ , а не по  $\mathbf{x}_0$ . Перейдем теперь в (2.13) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Интеграл в левой части (2.13) переходит в несобственный интеграл по всей области  $\Omega$ , который существует по условию теоремы. Первое слагаемое в правой части (2.13) от  $\varepsilon$  не зависит. Покажем, что второе слагаемое в правой части (2.13) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремится к  $-4\pi u(\mathbf{x}_0)$ .

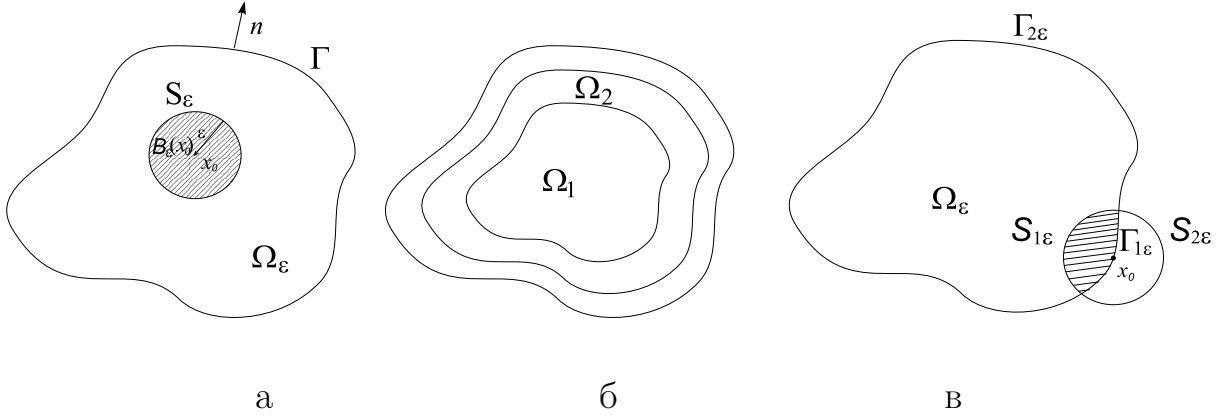


Рис. 2.1

Действительно, на сфере  $S_\varepsilon$  направление внешней нормали  $\mathbf{n}$  в точке  $\mathbf{x}$  противоположно направлению вектора  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ , причем  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \varepsilon$ . Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \implies \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r} \Big|_{S_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad (2.14)$$

так что

$$I_1(\mathbf{x}_0) \equiv \int_{S_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} u d\sigma. \quad (2.15)$$

Напомним, что в силу предположений теоремы 2.4  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ . Применим с учетом этого к правой части (2.15) теорему о среднем значении. Учитывая, что площадь сферы  $S_\varepsilon$  равна  $4\pi\varepsilon^2$ , выводим, что  $I_1(\mathbf{x}_0) = 4\pi u(\mathbf{x}_\varepsilon)$ , где  $\mathbf{x}_\varepsilon$  – некоторая точка на сфере  $S_\varepsilon$ . Переходя здесь к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим в силу непрерывности функции  $u$ , что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1(\mathbf{x}_0) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r} d\sigma = 4\pi u(\mathbf{x}_0). \quad (2.16)$$

Поскольку  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ , то найдется такая постоянная  $C > 0$ , что  $|\partial u / \partial n| \leq C$  на  $\overline{\Omega}$ . Но тогда имеем

$$\left| \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n_x} d\sigma \right| \leq \frac{C}{\varepsilon} \int_{S_\varepsilon} d\sigma = 4\pi C \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.17)$$

В результате, переходя в (2.13) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , приходим с учетом (2.16), (2.17) к формуле (2.12).

Отметим, что формула (2.12) доказана при дополнительном предположении, что  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ . Чтобы избавиться от него, построим, как в [11, с. 367], последовательность *гладких* областей  $\Omega^{(n)} \subset \Omega$ , стремящихся к  $\Omega$  при  $n \rightarrow \infty$  (см. рис. 2.1,б). Применяя формулу (2.12) в области  $\Omega^{(n)}$  и переходя к пределу при  $\Omega^{(n)} \rightarrow \Omega$ , получим требуемый результат. ■

Напомним, что в формуле (2.12) предполагается, что точка  $\mathbf{x}_0$  находится внутри  $\Omega$ . Если  $\mathbf{x}_0$  находится вне  $\overline{\Omega}$ , то тогда  $v \in C^2(\overline{\Omega})$  и  $\Delta v = 0$  в  $\Omega$ . Поэтому применяя (2.7) к функциям  $u$  и  $v = 1/r$ , приходим к формуле

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right) d\sigma_x - \int_{\Omega} \frac{\Delta u(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} d\mathbf{x} = 0. \quad (2.18)$$

Рассмотрим, далее, случай, когда  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ . Предположим, что в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$  поверхность  $\Gamma$  является гладкой, например,  $\Gamma \in C^1$ , т. е.  $\Gamma$  имеет касательную плоскость с непрерывно меняющимися угловыми коэффициентами. Построим сферу  $S_{\varepsilon}(\mathbf{x}_0)$  малого радиуса  $\varepsilon > 0$  с центром в точке  $\mathbf{x}_0$ . Ясно, что поверхность  $\Gamma$  делит ее на две части:  $S_{1\varepsilon}$  и  $S_{2\varepsilon}$ , где  $S_{1\varepsilon}$  лежит внутри  $\Omega$ , а  $S_{2\varepsilon}$  – вне  $\Omega$ . Точно так же сама сфера  $S_{\varepsilon}$  делит поверхность  $\Gamma$  на две части: внешнюю  $\Gamma_{2\varepsilon}$  к  $S_{\varepsilon}$  и внутреннюю  $\Gamma_{1\varepsilon}$  (см. рис. 2.1,в). Обозначим через  $\Omega_{\varepsilon}$  подобласть области  $\Omega$ , ограниченную куском  $\Gamma_{2\varepsilon}$  и частью  $S_{1\varepsilon}$  сферы, лежащей внутри  $\Omega$ . Применяя формулу (2.7) к функциям  $u$  и  $v = 1/r$  в области  $\Omega_{\varepsilon}$ , получим

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}} \frac{\Delta u}{r} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n_x} - u \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r} \right) d\sigma_x + \int_{S_{1\varepsilon}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n_x} - u \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r} \right) d\sigma_x. \quad (2.19)$$

Перейдем в (2.19) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Интеграл по  $\Omega_{\varepsilon}$  в левой части (2.19) стремится при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к соответствующему несобственному интегралу по области  $\Omega$ . Интеграл в правой части по  $\Gamma_{2\varepsilon}$  переходит при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в соответствующий (*сингулярный*) поверхностный интеграл по границе  $\Gamma$ . Второй интеграл в правой части (2.19), как легко проверить с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям, проведенным при доказательстве теоремы 2.5, стремится к  $-2\pi u(\mathbf{x}_0)$ . Поэтому в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  приходим к формуле, получающейся из (2.12) заменой в ней  $4\pi$  на  $2\pi$ .

Объединяя все три случая, приходим к следующей общей формуле:

$$Cu(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] d\sigma_x - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta u(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} d\mathbf{x}. \quad (2.20)$$

Здесь

$$C = C(\mathbf{x}_0) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x}_0 \in \Omega, \\ c(\mathbf{x}_0), & \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega, \\ 0, & \mathbf{x}_0 \notin \overline{\Omega}, \end{cases} \quad (2.21)$$

где  $c(\mathbf{x}_0) \in [0, 1]$  – некоторая постоянная, значение которой в точке  $\mathbf{x}_0$  зависит от свойств границы в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$ . В частности,  $c(\mathbf{x}_0) = 1/2$ , если  $\mathbf{x}_0$  лежит внутри гладкого куска границы  $\Gamma$ . Если же  $\mathbf{x}_0$  является конической точкой, т. е. в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$  поверхность  $\Gamma$  имеет вид конуса с вершиной в точке  $\mathbf{x}_0$ , то тогда  $c(\mathbf{x}_0) = \alpha/4\pi$ , где  $\alpha$  – величина телесного угла, образованного касательными к  $\Gamma$  в точке  $x_0$  [35, с. 287].

Отметим также, что для гармонической в  $\Omega$  функции  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  формула (2.20) принимает вид

$$Cu(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] d\sigma_x. \quad (2.22)$$

В частном случае, когда  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ , формула (2.22) переходит в формулу

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] d\sigma_x. \quad (2.23)$$

Аналогичные формулы справедливы на плоскости  $\mathbb{R}^2$  и в пространстве  $\mathbb{R}^n$  при любом  $n$ . Чтобы вывести соответствующие формулы, достаточно положить во второй формуле Грина (2.7)  $v(\mathbf{x}) = \ln(1/r)$ , где  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \equiv \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  – расстояние от  $\mathbf{x}$  до точки  $\mathbf{x}_0$  на плоскости в случае двух измерений, либо  $v(\mathbf{x}) = 1/(\omega_n r^{n-2})$ , где  $\omega_n$  – площадь единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$  (см. § 6.1), а  $r$  определяется формулой

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2},$$

в случае  $n \geq 3$  измерений, и повторить проведенные выше рассуждения. В результате приходим к интегральной формуле

$$Cu(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[ \ln \frac{1}{r} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \ln \frac{1}{r} \right] d\sigma_x - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}) \ln \frac{1}{r} d\mathbf{x} \quad (2.24)$$

на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , являющейся аналогом (2.20), и к интегральной формуле

$$Cu(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{r^{n-2}} \right] d\sigma_x - \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} \frac{\Delta u(\mathbf{x})}{r^{n-2}} d\mathbf{x}, \quad (2.25)$$

являющейся аналогом (2.20) в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . В обеих формулах константа  $C$  определяется одним и тем же соотношением (2.21), где постоянная  $c(\mathbf{x}_0)$  имеет указанный выше смысл. В частности,  $c(\mathbf{x}_0) = 1/2$ , если

$\mathbf{x}_0$  принадлежит гладкому куску границы  $\Gamma$ . Если  $u$  – гармоническая в  $\Omega$  функция из класса  $C^1(\overline{\Omega})$ , то, например, формула (2.24) принимает вид

$$Cu(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[ \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] d\sigma_x. \quad (2.26)$$

Если, кроме того,  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ , то формула (2.26) принимает вид

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[ \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] d\sigma_x. \quad (2.27)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.** Отметим, что некоторые интегралы, входящие в полученные выше формулы, являются *несобственными* или *сингулярными*. Поэтому все приведенные формулы следует понимать так, что при выполнении условий теоремы 2.5 существуют все несобственные либо сингулярные интегралы, входящие в эти формулы, а с другой стороны, справедливы все эти формулы.

## § 6.3. Простейшие свойства гармонических функций

**6.3.1. Случай функций одной переменной.** В случае одного измерения ( $n = 1$ ) уравнение Лапласа (1.2) принимает вид  $u'' = 0$ . Общим решением этого уравнения является линейная функция  $u(x) = C_1x + C_2$ . Поэтому если назвать гармонической функцией одной переменной  $x$ , изменяющейся в интервале  $(a, b)$ , функцию  $u \in C^2(a, b)$ , являющуюся решением уравнения  $u'' = 0$ , то такое определение “гармонической” функции эквивалентно определению линейной функции. Отсюда проистекают основные свойства “гармонических” функций одной переменной  $x$ . Перечислим их.

1. Если принять за направление внешней нормали  $\mathbf{n}$  к границе отрезка  $[a, b]$  на оси  $x$  в точке  $b$  направление этого отрезка, а в точке  $a$  – противоположное ему, то для любой линейной функции сумма значений ее первых производных по направлению  $\mathbf{n}$  в концах отрезка равна нулю, т. е.

$$\frac{du(a)}{dn} + \frac{du(b)}{dn} = \frac{du(a)}{d(-x)} + \frac{du(b)}{dx} = 0. \quad (3.1)$$

2. Функция  $u$ , линейная (гармоническая) в  $(a, b)$ , бесконечно дифференцируема и аналитична внутри  $(a, b)$ .

3. Для линейной на  $(a, b)$  функции  $u$  ее значение в центре  $(\alpha + \beta)/2$  любого интервала  $[\alpha, \beta]$ , лежащего внутри  $(a, b)$ , равно среднему значению функции  $u$  на  $[\alpha, \beta]$ , а также среднему арифметическому значений функции  $u$  на концах интервала  $[\alpha, \beta]$ , т. е.

$$u\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} u(x) dx = \frac{u(\alpha) + u(\beta)}{2}.$$

Важно отметить, что всякая непрерывная в интервале  $(a, b)$  функция  $u$ , обладающая одним из указанных свойств в 3, линейна на  $(a, b)$ .

4. Линейная на  $(a, b)$  функция не может принимать свое наибольшее или наименьшее значения внутри интервала  $(a, b)$ , за исключением того случая, когда  $u(x) \equiv \text{const}$ .

5. Линейная на  $(a, b)$  функция, непрерывная на  $[a, b]$ , однозначно определяется своими значениями в концах  $x = a$  и  $x = b$  этого интервала.

Эти свойства распространяются и на гармонические функции в  $\mathbb{R}^n$ .

**6.3.2. Основные свойства гармонических функций в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .** Основываясь на интегральных формулах из § 6.2, выведем здесь ряд основных свойств гармонических функций, рассматриваемых в пространстве  $\mathbb{R}^n$   $n$  измерений. Обозначим через  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  произвольное открытое множество с границей  $\Gamma = \partial\Omega$ . Обычно мы будем предполагать, что  $\Omega$  связно, т. е. что  $\Omega$  – область. В случае, когда  $\Omega$  – ограниченная область, наряду с  $\Omega$  будем также рассматривать неограниченное (внешнее по отношению к  $\Omega$ ) множество  $\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ . В зависимости от свойств  $\Omega$  множество  $\Omega_e$  может являться областью, т. е. связным открытым множеством, как на рис. 3.1,а, так и несвязным множеством. Последнее имеет место, напри-

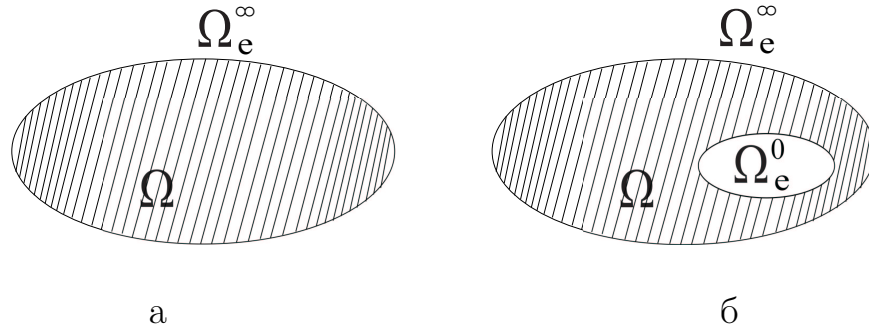


Рис. 3.1

мер, в случае, когда  $\Omega$  имеет вид шарового слоя в  $\mathbb{R}^3$  или кольца в  $\mathbb{R}^2$  (см. рис. 3.1,б). Видно, что в последнем случае  $\Omega_e$  состоит из двух связных компонент: ограниченной области  $\Omega_e^0$  и неограниченной области  $\Omega_e^\infty$ . В общем случае  $\Omega_e$  может состоять из нескольких связных компонент, одна из которых  $\Omega_e^\infty$  необходимо является неограниченной. Для краткости мы будем часто ссылаться на  $\Omega_e$  как на область, понимая в случае необходимости под  $\Omega_e$  именно указанную неограниченную связную компоненту. Будем также использовать обозначение  $\bar{\Omega}_e = \Omega_e \cup \Gamma$  и понимать под  $C^k(\bar{\Omega}_e)$  пространство функций в  $\Omega_e$ , непрерывных вместе со всеми производными до порядка  $k$  включительно в каждой точке  $\Omega_e \cup \Gamma$ . Отметим, что условие  $u \in C^k(\bar{\Omega}_e)$  принадлежности функции  $u$  пространству  $C^k(\bar{\Omega}_e)$  не накладывает каких-либо ограничений на поведение функции  $u(\mathbf{x})$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим для конкретности случай трех измерений.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ . Если  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  – гармоническая в области  $\Omega$  функция, то

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства (3.2) достаточно применить первую формулу Грина (2.6) к указанной функции  $u$  и функции  $v \equiv 1$ .

ТЕОРЕМА 3.2. Функция  $u$ , гармоническая в области  $\Omega$ , имеет производные всех порядков в  $\Omega$ , т.е.  $u \in C^\infty(\Omega)$ . Любая производная от гармонической в  $\Omega$  функции является гармонической функцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку  $\mathbf{x}_0$  внутри  $\Omega$  и окружим ее гладкой поверхностью  $\Gamma' \subset \Omega$ . Так как  $u$  гармонична в  $\Omega$ , то  $u$  и подавно гармонична внутри  $\Gamma'$ . Кроме того,  $u$  дважды непрерывно дифференцируема вплоть до границы  $\Gamma'$ . Применяя формулу (2.23) для области, лежащей внутри  $\Gamma'$ , получим

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma'} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] d\sigma_x. \quad (3.3)$$

Так как  $\mathbf{x}_0 \notin \Gamma'$ , то функция  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$  как функция декартовых координат  $x_0, y_0, z_0$  точки  $\mathbf{x}_0$  непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка. Следовательно, правую часть в (3.3) можно дифференцировать по координатам  $x_0, y_0, z_0$  под знаком интеграла сколько угодно раз. То же самое справедливо и для левой части. Это означает, что функция  $u$  бесконечно дифференцируема. Второе утверждение является следствием первого утверждения и линейности оператора Лапласа. ■

ТЕОРЕМА 3.3 (теорема о среднем значении). Если функция  $u$  гармонична в области  $\Omega$ , то в любой точке  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  справедлива формула

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Gamma_a} u(\mathbf{x}) d\sigma, \quad (3.4)$$

называемая формулой о среднем значении для гармонической функции. Здесь  $\Gamma_a$  – сфера радиуса  $a$  с центром в точке  $\mathbf{x}_0$ , лежащая в  $\Omega$ .

Это свойство утверждает другими словами, что значение гармонической в области  $\Omega$  функции в произвольной точке  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  равно среднему значению этой функции на любой сфере  $\Gamma_a$  радиуса  $a$  с центром в  $\mathbf{x}_0$ , если сфера  $\Gamma_a$  целиком содержится в области гармоничности функции  $u$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим формулу (2.23) к шару  $B_a \equiv B_a(\mathbf{x}_0)$  радиуса  $a$  с центром в точке  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  с границей  $\Gamma_a$ . Будем иметь

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_a} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] d\sigma. \quad (3.5)$$

Учитывая теорему 3.1 и тот факт, что  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = a$  на  $\Gamma_a$ , имеем

$$\int_{\Gamma_a} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{a^2} \quad \text{на } \Gamma_a.$$

С учетом этого из (3.5) приходим к формуле (3.4). ■

Полагая  $a = \rho$ , запишем (3.4) в виде

$$4\pi\rho^2 u(\mathbf{x}_0) = \int_{\Gamma_\rho} u(\mathbf{x}) d\sigma \quad (3.6)$$

и проинтегрируем полученное равенство по  $\rho$  от 0 до  $a$ . Получим

$$\frac{4}{3}\pi a^3 u(\mathbf{x}_0) = \int_0^a \left[ \int_{\Gamma_\rho} u(\mathbf{x}) d\sigma \right] d\rho = \int_{B_a} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.7)$$

или

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{V_a} \int_{B_a} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad V_a = \frac{4\pi}{3} a^3. \quad (3.8)$$

Равенство (3.8) имеет смысл *формулы о среднем значении по шару* для гармонической в шаре функции  $u$ .

**ТЕОРЕМА 3.4** (принцип максимума). *Функция  $u$ , гармоническая внутри ограниченной области  $\Omega$ , не может достигать своего максимального и минимального значений внутри  $\Omega$  кроме случая, когда  $u \equiv \text{const}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что функция  $u$  принимает свое максимальное значение  $u_0$  в некоторой внутренней точке  $\mathbf{x}_0$  области  $\Omega$ , так что

$$u_0 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0) \geq u(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.9)$$

Окружим точку  $\mathbf{x}_0$  сферой  $\Gamma_a$  малого радиуса  $a$ , лежащей в  $\Omega$ , и применим к функции  $u$  формулу среднего значения (3.4). Учитывая (3.9), получим

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Gamma_a} u(\mathbf{x}) d\sigma \leq \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Gamma_a} u_0 d\sigma = u_0. \quad (3.10)$$

Если предположить, что хотя бы в одной точке  $\mathbf{x}$  сферы  $\Gamma_a$  выполняется условие  $u(\mathbf{x}) < u(\mathbf{x}_0)$ , то в силу непрерывности функции  $u$  на  $\Gamma_a$  в формуле (3.10) вместо знака  $\leq$  мы имели бы знак строгого неравенства  $<$ . Последнее противоречит предположению  $u_0 = u(\mathbf{x}_0)$ . Следовательно,

$$u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0) = u_0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_a. \quad (3.11)$$

Из произвольности радиуса  $a$  следует, что в предположении выполнения (3.9) функция  $u$  тождественно равна константе  $u_0$  внутри и на границе всякого шара с центром в точке  $\mathbf{x}_0$ , лежащего внутри области  $\Omega$ .



Покажем, более того, что  $u(\mathbf{x}) = u_0$  всюду в  $\Omega$ . Пусть  $\mathbf{y} \in \Omega$  – произвольная точка. Соединим  $\mathbf{x}_0$  с  $\mathbf{y}$  ломаной линией  $l$ , лежащей внутри  $\Omega$ . Это возможно, поскольку  $\Omega$  – область. Пусть  $d$  – кратчайшее расстояние от ломаной  $l$  до границы  $\Gamma$  области  $\Omega$  (см. рис.3.2). В силу доказанного выше  $u(\mathbf{x})$  равна постоянной  $u_0$  в шаре с центром в  $\mathbf{x}_0$  и радиуса  $d/2$ . Пусть  $\mathbf{x}_1$  – крайняя точка пересечения ломаной  $l$  с границей упомянутого шара. Ясно, что  $u(\mathbf{x}_1) = u_0$  и по доказанному выше  $u(\mathbf{x}) = u_0$  в шаре с центром  $\mathbf{x}_1$  и радиуса  $d/2$ . Пусть  $\mathbf{x}_2$  – крайняя точка пересечения линии  $l$  с границей этого шара. Как и выше, убеждаемся, что  $u(\mathbf{x}) = u_0$  в шаре с центром в точке  $\mathbf{x}_2$  радиуса  $d/2$ , и т. д. После конечного числа шагов вся линия  $l$  будет покрыта указанными шарами. Точка  $\mathbf{y}$  окажется внутри некоторого шара, откуда и будет следовать, что  $u(\mathbf{y}) = u_0$ . Тем самым доказано, что если  $u$  не равна тождественно постоянной, то ее максимальное значение не может достигаться внутри  $\Omega$ . Аналогично доказывается, что внутри  $\Omega$  функция  $u$  не может принимать и минимального значения. ■

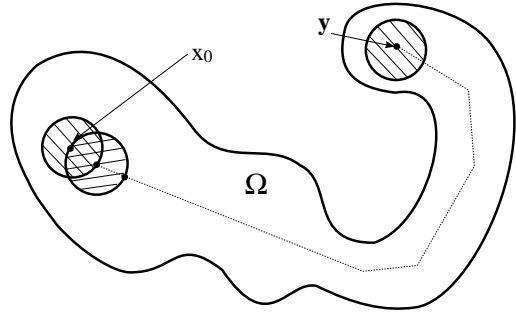


Рис. 3.2

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.** Из доказательства принципа максимума вытекает более сильный факт о том, что гармоническая в  $\Omega$  функция не может принимать внутри  $\Omega$  ни локальных максимумов, ни локальных минимумов.

Полезно обратить внимание на то, что при доказательстве всех приведенных выше свойств гармонических функций мы использовали разные дополнительные условия, касающиеся поведения рассматриваемых функций на границе. Так, при доказательстве теоремы 3.1 мы потребовали, чтобы функция  $u$  была непрерывно дифференцируема вплоть до границы  $\Gamma$ , которая, к тому же, является кусочно-гладкой. Эти условия необходимы для того, чтобы можно было воспользоваться формулой Грина (2.6).

В то же время теоремы 3.2 и 3.3 справедливы и для несвязных неограниченных в общем случае открытых множеств, поскольку они носят локальный характер. Наконец, для справедливости теоремы 3.4 существенны как ограниченность, так и связность множества  $\Omega$ . В частности, она не справедлива для множества  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , где  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  – два непересекающихся шара. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять функцию  $u$ , равную 1 в  $\Omega_1$  и 2 в  $\Omega_2$ . Указанная функция  $u$  гармонична в  $\Omega$ , принимает свое минимальное значение, равное 1, в любой внутренней точке шара  $\Omega_1$ , а максимальное значение, равное 2, в любой внутренней точке шара  $\Omega_2$ , но не равна тождественно константе всюду в  $\Omega$ .

Обозначим через  $H(\Omega)$  множество гармонических в ограниченной об-

ласти  $\Omega$  функций. Из теоремы 3.4 вытекает ряд полезных следствий для функций  $u \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , т. е. функций  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , гармонических в области  $\Omega$  и непрерывных в ее замыкании  $\overline{\Omega}$ .

**СЛЕДСТВИЕ 3.1.** *Функция  $u \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , отличная от константы, достигает своих максимального и минимального значений лишь на  $\Gamma$ , т.е.*

$$m \equiv \min_{\mathbf{x} \in \Gamma} u(\mathbf{x}) < u(\mathbf{x}) < \max_{\mathbf{x} \in \Gamma} u(\mathbf{x}) \equiv M \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.12)$$

Действительно, в силу теоремы Вейерштрасса [18, с. 476] непрерывная в замкнутой ограниченной области  $\overline{\Omega}$  функция  $u$  necessarily достигает своего максимального  $M$  и минимального  $m$  значений. В то же время, поскольку  $u$  гармонична в  $\Omega$ , то в силу принципа максимума функция  $u$  не может достигать значений  $M$  и  $m$  внутри  $\Omega$ . Поэтому ей ничего не остается делать кроме того, как достигать значений  $M$  и  $m$  на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ . ■

**СЛЕДСТВИЕ 3.2.** *Если функция  $u \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  равна нулю на  $\Gamma$ , то  $u(\mathbf{x}) \equiv 0$  в  $\Omega$ .*

Действительно, максимальное и минимальное значения  $u$  на  $\Omega$  равны нулю, и, следовательно,  $u = 0$  на  $\overline{\Omega}$ . ■

**СЛЕДСТВИЕ 3.3** *Если функция  $u \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  неотрицательна на  $\Gamma$ , то  $u$  неотрицательна и внутри  $\Omega$ .*

**СЛЕДСТВИЕ 3.4.** *Если функции  $u, v \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  удовлетворяют условию  $u \leq v$  на  $\Gamma$ , то  $u \leq v$  на  $\overline{\Omega}$ .*

Действительно, функция  $v - u$  гармонична в  $\Omega$ , непрерывна на  $\overline{\Omega}$  и неотрицательна на  $\Gamma$ . Следовательно, в силу следствия 3.3  $v - u \geq 0$  на  $\overline{\Omega}$ . ■

**СЛЕДСТВИЕ 3.5.** *Пусть  $u, v \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , причем  $v \geq 0$ ,*

$$|u| \leq v \text{ на } \Gamma. \quad (3.13)$$

*Тогда  $|u| \leq v$  на  $\overline{\Omega}$ .*

Действительно, неравенство (3.13) эквивалентно условию  $-v \leq u \leq v$  на  $\Gamma$ . Применяя дважды следствие 3.4, получим, что  $-v \leq u \leq v$  на  $\overline{\Omega}$ . Следовательно,  $|u| \leq v$  на  $\overline{\Omega}$ . ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.3.** Гармоническая функция  $v$ , фигурирующая в утверждении следствия 3.5, называется *гармонической мажорантой* гармонической в  $\Omega$  функции  $u$  на границе  $\Gamma$ , а само доказательство следствия 3.5 является простейшим примером применения так называемого *метода гармонических мажорант*. Сущность этого метода изучения свойств гармонических функций состоит в построении вспомогательной гармонической функции, являющейся гармонической мажорантой исследуемой гармонической функции  $u$  на границе рассматриваемой области, и установлении необходимых свойств функции  $u$  исходя из свойств ее гармонической мажоранты и принципа максимума. Ниже мы будем неоднократно использовать этот метод.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Для любой функции  $u \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  справедливо неравенство

$$|u(\mathbf{x})| \leq \max_{\mathbf{x} \in \Gamma} |u(\mathbf{x})| \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}. \quad (3.14)$$

Для доказательства соотношения (3.14) достаточно заметить, что константа  $M = \max_{\mathbf{x} \in \Gamma} |u(\mathbf{x})|$  является гармонической мажорантой функции  $u$  на границе  $\Gamma$ , а следовательно, в силу следствия 3.5, и всюду в  $\overline{\Omega}$ . ■

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Следствия 3.5 и 3.6 справедливы и для множества  $\Omega$ , являющегося конечной суммой непересекающихся ограниченных областей.

Подчеркнем что приведенные в этом пункте свойства гармонических функций, доказанные нами для случая трех измерений, на самом деле справедливы в пространстве  $\mathbb{R}^n$  любого числа  $n \geq 2$  измерений и доказываются совершенно по аналогичной схеме. Отметим, в частности, что формулы о среднем значении (3.4) и (3.8) в случае двух измерений принимают вид

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} u(\mathbf{x}) ds, \quad u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\pi a^2} \int_{K_a} u(\mathbf{x}) dx dy. \quad (3.15)$$

Здесь  $\Gamma_a$  (либо  $K_a$ ) – окружность (либо круг) радиуса  $a$  с центром в точке  $\mathbf{x}_0$ ,  $ds$  – элемент длины дуги границы  $\Gamma$ . Отметим также, что приведенные выше результаты, касающиеся принципа максимума для решений уравнения Лапласа, можно перенести (с небольшими изменениями) на классические решения общего эллиптического уравнения второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f \quad (3.16)$$

при некоторых условиях на коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$  и  $f$  (см., [58, гл. 1]).

**6.3.3. Единственность решений внутренней и внешней задач Дирихле для уравнения Лапласа.** Докажем в качестве следствия приведенных выше свойств гармонических функций единственность решений внутренней и внешней задач Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0. \quad (3.17)$$

Под *внутренней задачей Дирихле* мы понимаем задачу нахождения в ограниченной области  $\Omega$  функции  $u$  из пространства  $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , удовлетворяющей уравнению (3.17) в каждой точке  $\mathbf{x} \in \Omega$  и условию Дирихле

$$u = g \text{ на } \Gamma. \quad (3.18)$$

Здесь  $g \in C(\Gamma)$  – заданная функция. Ясно, что указанная функция  $u$  имеет смысл классического решения задачи (3.17), (3.18). Под *внешней задачей Дирихле* мы понимаем задачу нахождения в неограниченной области  $\Omega_e$

функции (классического решения)  $u$  из пространства  $C^2(\Omega_e) \cap C(\overline{\Omega_e})$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа (3.17) в  $\Omega_e$ , условию Дирихле (3.18) и определенному условию на бесконечности, называемому *условием регулярности*. В том случае, когда  $\Omega_e$  есть внешность ограниченного открытого множества  $\Omega$ , т. е.  $\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ , условие регулярности имеет вид

$$|u(\mathbf{x})| = o(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (3.19)$$

в случае  $n \geq 3$  измерений и вид

$$|u(\mathbf{x})| = O(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (3.20)$$

в случае, когда  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Условие (3.19) означает, что  $u(\mathbf{x})$  равномерно стремится к нулю при  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ , тогда как условие (3.20) эквивалентно условию ограниченности решения  $u$  при больших  $\mathbf{x}$ , а следовательно, в силу непрерывности  $u$  в  $\overline{\Omega_e}$ , и всюду в  $\Omega_e$ . Таким образом, основное отличие в постановке внешних задач Дирихле для  $\mathbb{R}^n$  при  $n \geq 3$  и для  $\mathbb{R}^2$  связано с поведением решения на бесконечности.

Прежде чем приступить к доказательству единственности решений внутренней и внешней задач Дирихле, докажем следующую лемму, обобщающую принцип максимума для гармонических функций в форме (3.14) на случай неограниченной области  $\Omega_e \subset \mathbb{R}^3$ .

**ЛЕММА 3.1.** Пусть функция  $u \in C^2(\Omega_e)$  удовлетворяет уравнению (3.17) в области  $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ , условию (3.19) и непрерывна на  $\overline{\Omega_e}$ . Тогда для функции  $u$  в  $\Omega_e$  справедлив принцип максимума в следующей форме:

$$|u(\mathbf{x})| \leq \max_{\mathbf{x} \in \Gamma} |u(\mathbf{x})| \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega_e}, \quad \Gamma = \partial\Omega. \quad (3.21)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $M = \max_{\mathbf{x} \in \Gamma} |u(\mathbf{x})|$ . Обозначим через  $B_R$  шар радиуса  $R$  с центром в начале координат. В силу ограниченности  $\Omega$  и условия (3.19) радиус  $R$  можно выбрать так, что  $\Omega \subset B_R$  и выполняется условие

$$|u(\mathbf{x})| < M \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus B_R. \quad (3.22)$$

Введем ограниченную подобласть области  $\Omega_e$  по формуле

$$\Omega_R = \Omega_e \cap B_R = B_R \setminus \overline{\Omega}. \quad (3.23)$$

Из свойств функции  $u$  вытекает, что на границе  $\partial\Omega_R = \Gamma \cup \Gamma_R$ , где  $\Gamma_R = \partial B_R$ , выполняется условие

$$|u(\mathbf{x})| \leq M, \quad (3.24)$$

так что константа  $M$  является гармонической мажорантой функции  $u$  в  $\Omega_R$ , причем  $|u(\mathbf{x})| < M$  на  $\Gamma_R$ . Из следствия 3.5 вытекает тогда, что (3.24) выполняется всюду в  $\Omega_R$ . Отсюда и (3.22) вытекает утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Подчеркнем, что для внешней области принцип максимума справедлив именно в форме (3.21), являющейся аналогом на случай неограниченной области соотношения (3.14), справедливого для ограниченной области  $\Omega$ . В то же время “чистый” принцип максимума вида (3.11) для неограниченной области уже не справедлив. В этом можно убедиться на примере функции  $u(\mathbf{x}) = 1/|\mathbf{x}|$ , гармонической вне шара  $B_1$  радиуса 1, непрерывной в  $\mathbb{R}^3 \setminus B_1$ , равной 1 на границе этого шара, но принимающей значения, меньшие 1 при  $|\mathbf{x}| > 1$ . Другой пример дает функция  $-1/|\mathbf{x}|$ .

ЛЕММА 3.2. *Решение  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  внутренней задачи Дирихле либо  $u \in C^2(\Omega_e) \cap C(\overline{\Omega}_e)$  внешней задачи Дирихле в  $\mathbb{R}^3$  единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала внутреннюю задачу Дирихле. Пусть она имеет два решения:  $u_1$  и  $u_2$ . Тогда их разность  $u = u_2 - u_1$  является гармонической функцией, непрерывной на  $\overline{\Omega}$  и равной нулю на  $\Gamma$ . Отсюда в силу следствия 3.2 вытекает, что  $u(\mathbf{x}) \equiv 0$  на  $\overline{\Omega} \Rightarrow u_1 = u_2$  на  $\overline{\Omega}$ .

Рассмотрим теперь внешнюю задачу Дирихле. Как и выше, предположим, что существуют два решения:  $u_1$  и  $u_2$ . Тогда их разность  $u = u_2 - u_1$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$  в  $\Omega_e$  и условию регулярности (3.19) на бесконечности, т. е. является функцией, гармонической в  $\Omega_e$ . Кроме того, она непрерывна на  $\overline{\Omega}_e$  и равна нулю на  $\Gamma$ . Отсюда в силу леммы 3.1 вытекает, что  $u(\mathbf{x}) \equiv 0$  на  $\overline{\Omega}_e \Rightarrow u_1 = u_2$  на  $\Omega_e$ . ■

Отметим, что леммы 3.1 и 3.2 справедливы в пространстве  $\mathbb{R}^n$  любого числа  $n \geq 3$  измерений. Рассмотрим теперь случай двух измерений.

ЛЕММА 3.3. *Решение  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  внутренней задачи Дирихле либо  $u \in C^2(\Omega_e) \cap C(\overline{\Omega}_e)$  внешней задачи Дирихле в  $\mathbb{R}^2$  единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для внутренней задачи Дирихле доказательство единственности проводится по той же схеме, что и в трехмерном случае. Для внешней задачи Дирихле используемые выше рассуждения неприменимы, поскольку они существенно используют условие (3.19) равномерного стремления к нулю решения на бесконечности. В то же время в постановку двумерной внешней задачи входит лишь условие (3.20) ограниченности на бесконечности. С учетом этого нам придется провести более тонкие рассуждения, основанные на построении гармонической мажоранты для разности двух возможных решений.

Предположим, что существуют два решения  $u_1$  и  $u_2$  задачи (3.17), (3.18), (3.20). Тогда их разность  $u = u_2 - u_1$  является гармонической функцией, непрерывной в  $\overline{\Omega}_e = \Omega_e \cup \Gamma$ , равной нулю на  $\Gamma$  и ограниченной всюду в  $\Omega_e$ , так что выполняется условие  $|u(\mathbf{x})| \leq M \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}_e$ . Пусть  $\mathbf{x}^0 \in \Omega_e$  – произвольная точка. Вспомнив, что  $\Omega_e$  является внешностью открытого ограниченного множества  $\Omega$ , выберем в  $\Omega$  произвольным образом точку  $\mathbf{x}_0$  и построим две окружности с центром в точке  $\mathbf{x}_0$ : окружность  $\Gamma_r$  малого радиуса  $r$ , целиком содержащуюся в  $\Omega$ , и окружность  $\Gamma_R$  достаточно большого радиуса, целиком содержащую  $\Omega$  и  $\mathbf{x}^0$  внутри себя (см. рис. 3.3).

Как и выше, обозначим через  $\Omega_R$  область, ограниченную границей  $\Gamma$  и окружностью  $\Gamma_R$ . Следуя [56, с. 324], рассмотрим в области  $\Omega_R$  вспомогательную функцию  $v_R$ , определенную формулой

$$v_R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = M \frac{\ln(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/r)}{\ln(R/r)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_R. \quad (3.25)$$

Из результатов §6.1 вытекает, что функция  $v_R$  гармонична в  $\Omega_R$ . Кроме того, она непрерывна в  $\bar{\Omega}_R$ , равна  $M$  на  $\Gamma_R$  и положительна на  $\Gamma$ . Последнее вытекает из того факта, что в каждой точке  $\mathbf{x} \in \Gamma$  выполняется условие  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| > r$ . Из принципа максимума вытекает тогда, что  $v_R$  положительна в  $\Omega_R$ , а из свойств функции  $u$  вытекает, что на границе  $\partial\Omega_R = \Gamma \cup \Gamma_R$  выполняется условие

$$|u(\mathbf{x})| \leq v_R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0), \quad (3.26)$$

так что  $v_R$  является гармонической мажорантой функции  $u$  на  $\partial\Omega_R$ . Из следствия 3.5 вытекает тогда, что (3.26) выполняется и в каждой точке  $\mathbf{x} \in \Omega_R$ .

Станем увеличивать радиус  $R$ . Из свойств функции  $v_R$  вытекает, что

$$v_R(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0) \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty. \quad (3.27)$$

Учитывая (3.27) и (3.26), приходим к выводу, что  $u(\mathbf{x}^0) = 0$ . Из произвольности точки  $\mathbf{x}^0 \in \Omega_e$  следует, что  $u(\mathbf{x}) = 0$  в  $\Omega_e \Rightarrow u_1 = u_2$  ■.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.6.** При доказательстве лемм 3.1–3.3 неявно предполагалось, что  $\Omega_e$  является (неограниченной) областью. Отметим, что в силу замечания 3.4 утверждения этих лемм остаются справедливыми и в случае, когда  $\Omega_e$  состоит из нескольких связных компонент (как на рис. 3.1,б).

Единственность решения  $u$  внешней задачи Дирихле в  $\mathbb{R}^2$  можно установить и другим способом, используя известное *преобразование Кельвина* относительно окружности  $\Gamma_R$ . Оно переводит функцию, гармоническую вне круга  $K_R$ , в функцию, гармоническую в области  $K_R \setminus \{0\}$ . Основываясь на этом подходе, можно получить следующие более общие результаты (см. [11, с. 373]).

**ЛЕММА 3.4.** Пусть функция  $u$  удовлетворяет уравнению (3.17) в области  $\Omega_e = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ , условию (3.20) и непрерывна на  $\bar{\Omega}_e$ . Тогда для функции  $u$  в области  $\Omega_e$  справедлив принцип максимума в следующей форме:

$$|u(\mathbf{x})| \leq \max_{\mathbf{x} \in \Gamma} |u(\mathbf{x})| \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e. \quad (3.28)$$

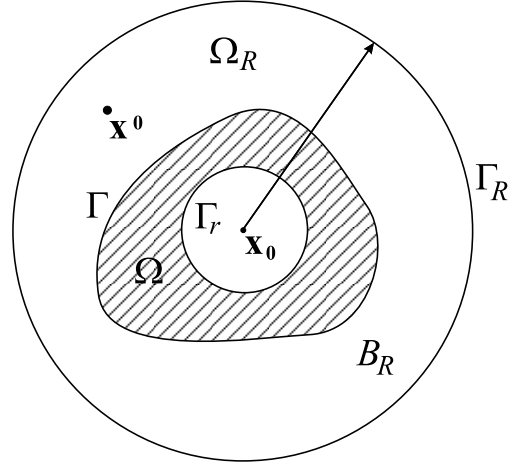


Рис. 3.3

Кроме того, функция  $u$  непрерывна на бесконечности, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = u_\infty, \quad (3.29)$$

а ее производные удовлетворяют следующему условию на бесконечности:

$$\left| \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} \right| = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right), \quad \left| \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial y} \right| = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (3.30)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.7.** Отметим, что если единственность решений внутренней и внешней задач Дирихле в  $\mathbb{R}^3$  доказывается сравнительно просто на основе принципа максимума, то доказательство существования классических решений каждой из этих задач представляется значительно более сложным делом, особенно для внешней задачи, и требует использования специального аппарата. Одним из широко используемых для этого методов является метод граничных интегральных уравнений. Сущность его будет изложена в гл. 7. Важно отметить, что использование этого метода позволяет доказать существование решения внешней задачи в том же классе функций, удовлетворяющих условию (3.19) на бесконечности, в котором доказана единственность решения. В этом смысле условие (3.19) можно считать естественным условием для корректной постановки внешней краевой задачи в  $\mathbb{R}^3$ . Аналогичную роль в двумерном случае играет условие (3.20) ограниченности на бесконечности, поскольку именно в классе функций, удовлетворяющих условию (3.20), удается доказать как единственность (см. лемму 3.3), так и существование классического решения.

## § 6.4. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге и вне круга методом Фурье

**6.4.1. Постановка краевых задач. Применение метода Фурье.** Пусть  $\Omega = \Omega_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < a^2\}$  – круг радиуса  $a$ ,  $\Omega_e = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ . Рассмотрим две задачи: задачу 1 (внутреннюю задачу Дирихле), заключающуюся в нахождении классического решения  $u$  уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (4.1)$$

в  $\Omega$ , удовлетворяющего граничному условию

$$u = g \quad \text{на} \quad \Gamma_a = \partial\Omega, \quad (4.2)$$

и задачу 2 (внешнюю задачу Дирихле). Последняя заключается в нахождении классического решения  $u$  уравнения (4.1) в области  $\Omega_e$ , удовлетворяющего граничному условию (4.2) и условию на бесконечности

$$u(x, y) = O(1) \quad \text{при} \quad (x^2 + y^2) \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

В силу леммы 3.3 решение каждой из этих задач единственно. Поэтому займемся здесь нахождением указанных решений с использованием метода Фурье. Прежде всего введем на плоскости полярные координаты  $\rho, \varphi$  и запишем с учетом (1.6) уравнение (4.1) в переменных  $\rho, \varphi$  в виде

$$\Delta u \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (4.4)$$

Будем искать частные решения уравнения (4.4) в виде произведения

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi). \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.4) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{\rho(\rho R')'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda, \quad (4.6)$$

где  $\lambda$  – константа. Отсюда приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям для функций  $R$  и  $\Phi$ , имеющим вид

$$\rho(\rho R')' - \lambda R = 0 \quad \text{в} \quad (0, a), \quad (4.7)$$

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0 \quad \text{в} \quad (0, 2\pi). \quad (4.8)$$

В силу однозначности решения  $u$  задачи 1 (либо 2) функция  $\Phi$  должна удовлетворять следующему условию  $2\pi$  – периодичности по  $\varphi$ :

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi). \quad (4.9)$$

Равенства (4.8), (4.9) представляют собой *спектральную задачу*. Она заключается в нахождении таких чисел  $\lambda$ , для которых существует нетривиальное решение уравнения (4.8), удовлетворяющее условию (4.9). Простой анализ показывает, что ее решение, т. е. собственные значения  $\lambda_k$  и функции  $\Phi_k$ , имеет вид

$$\lambda_k = k^2, \quad \Phi_k(\varphi) = a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

(отрицательные значения  $k$  не дают новых решений).

Заменим в (4.7)  $\lambda$  на  $k^2$ . Получим так называемое *уравнение Эйлера*

$$\rho^2 R'' + \rho R' - k^2 R = 0. \quad (4.11)$$

Его решение при  $k > 0$  будем искать в виде

$$R(\rho) = \rho^\mu. \quad (4.12)$$

Подставляя (4.12) в (4.11) и сокращая на  $\rho^\mu$ , находим, что

$$\mu^2 = k^2 \implies \mu = \pm k. \quad (4.13)$$



Отсюда при  $k > 0$  получаем два линейно независимых решения:  $\rho^k$  и  $\rho^{-k}$ . При  $k = 0$  независимыми решениями являются функции 1 и  $\ln \rho$ .

Так как искомое решение  $u$  должно быть ограниченным в круге  $\Omega$  для внутренней задачи и во внешности  $\Omega_e$  круга  $\Omega$  для внешней задачи, то в качестве множителя  $R$  в (4.5) следует взять функции

$$R_0(\rho) = 1, \quad R_k(\rho) = \rho^k, \quad k \geq 1 \quad (4.14)$$

для задачи 1 и

$$R_0(\rho) = 1, \quad R_k(\rho) = \rho^{-k}, \quad k \geq 1 \quad (4.15)$$

для задачи 2. С учетом этого искомые частные решения уравнения (4.4), удовлетворяющие условию  $2\pi$ -периодичности по  $\varphi$ , имеют вид

$$u_k(\rho, \varphi) = \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.16)$$

для задачи 1 (внутренней задачи Дирихле) и

$$u_k(\rho, \varphi) = \rho^{-k} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.17)$$

для задачи 2 (внешней задачи Дирихле).

В силу линейности (4.4) бесконечная сумма решений (4.16), т. е. ряд

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad (4.18)$$

для задачи 1 и ряд

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad (4.19)$$

для задачи 2 также являются решениями уравнения (4.4), удовлетворяющими условию  $2\pi$  – периодичности. Этот вывод, конечно, справедлив при условии, что ряд (4.18) (либо (4.19)) можно дважды почленно дифференцировать по  $r$  и  $\varphi$  с сохранением равномерной сходимости в  $\Omega$  (либо в  $\Omega_e$ ).

Осталось определить коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$ . Воспользуемся для этого граничным условием (4.2). Переходя в (4.18) формально к пределу при  $\rho \rightarrow a$  и используя (4.2), получим

$$u(a, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = g(\varphi). \quad (4.20)$$

Предположим, что граничная функция  $g$  удовлетворяет условиям

(i)  $g \in C^0[0, 2\pi]$ ,  $g(0) = g(2\pi)$ .

С учетом условий (i) функцию  $g$  можно разложить в ряд Фурье:

$$g(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi), \quad (4.21)$$

где коэффициенты  $\alpha_0$  и  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  определяются формулами

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) d\psi, \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \cos k\psi d\psi, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \sin k\psi d\psi. \quad (4.22)$$

Сравнивая ряды (4.20) и (4.21), приходим к соотношениям для определения  $a_k$  и  $b_k$ . Они имеют вид  $a_0 = \alpha_0/2$ ,  $a_k = \alpha_k/a^k$ ,  $b_k = \beta_k/a^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тем самым мы получили (формально) решение задачи 1 в виде ряда

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\rho, \varphi) \equiv \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^k (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi). \quad (4.23)$$

Аналогичным образом показывается, что решение  $u$  задачи 2 имеет вид

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^k (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi). \quad (4.24)$$

Докажем, что при выполнении условий (i) ряды (4.23) и (4.24) действительно являются классическими решениями уравнения Лапласа (4.1) соответственно в областях  $\Omega$  и  $\Omega_e$ . Рассмотрим сначала ряд (4.23) и докажем, что в замкнутом круге  $\bar{\Omega}_{\rho_0} = \{(\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq \rho_0, \varphi \in [0, 2\pi)\}$ , где  $\rho_0 < a$  – произвольное число, равномерно сходятся как ряд (4.23), так и ряды

$$\sum_k \frac{\partial u_k}{\partial \rho}, \quad \sum_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial \rho^2}, \quad \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial \varphi}, \quad \sum_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial \varphi^2}, \quad (4.25)$$

полученные его почленным дифференцированием.

При выполнении условия (i) для коэффициентов Фурье  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  функции  $g$  справедливы следующие оценки (см. [19, с. 318]):

$$|\alpha_0| \leq M, \quad |\alpha_k| \leq M \quad \text{и} \quad |\beta_k| < M = \text{const} \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (4.26)$$

Учитывая (4.26) и неравенства  $|\cos k\varphi| \leq 1$ ,  $|\sin k\varphi| \leq 1$ , выводим, что ряды (4.23) и (4.25) мажорируются в круге  $\bar{\Omega}_{\rho_0}$  соответственно числовыми рядами:

$$\frac{M}{2} + 2M \sum_k \left(\frac{\rho_0}{a}\right)^k, \quad \frac{2M}{a} \sum_k k \left(\frac{\rho_0}{a}\right)^{(k-1)}, \quad \frac{2M}{a^2} \sum_k k(k-1) \left(\frac{\rho_0}{a}\right)^{(k-2)},$$

$$2M \sum_k k \left(\frac{\rho_0}{a}\right)^k, \quad 2M \sum_k k^2 \left(\frac{\rho_0}{a}\right)^k.$$

Сходимость их легко следует из признака Даламбера. Отсюда вытекает, что ряд (4.23) имеет непрерывные производные первого и второго порядков по  $\rho$  и  $\varphi$  и удовлетворяет уравнению (4.1) при  $\rho < a$ , т. е. является гармонической в  $\Omega$  функцией. Осталось доказать равномерную сходимость ряда (4.23) в замкнутом круге  $\overline{\Omega}$ . Для этого достаточно доказать сходимость числового ряда

$$|\alpha_0| + \sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha_k| + |\beta_k|), \quad (4.27)$$

который является мажорирующим в замкнутом круге  $\overline{\Omega}$  для ряда (4.23), поскольку  $|u_k(\rho, \varphi)| \leq |\alpha_k| + |\beta_k|$  в  $\overline{\Omega}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Предположим, что в дополнение к условиям (i) выполняется условие:

(ii) функция  $g$  имеет на  $[0, 2\pi]$  кусочно-непрерывную производную  $g'$ .

Легко проверить, интегрируя по частям, что коэффициенты Фурье  $\tilde{\alpha}_k$  и  $\tilde{\beta}_k$  функции  $g'$  связаны с коэффициентами Фурье  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  функции  $g$  формулами

$$\tilde{\alpha}_k \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g'(\varphi) \cos k\varphi d\varphi = k \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin k\varphi d\varphi = k\beta_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\tilde{\beta}_k \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g'(\varphi) \sin k\varphi d\varphi = -k \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos k\varphi d\varphi = -k\alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что  $|\alpha_k| + |\beta_k| = (|\tilde{\alpha}_k| + |\tilde{\beta}_k|)/k$  и для доказательства сходимости ряда (4.27) достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{|\tilde{\alpha}_k|}{k} + \frac{|\tilde{\beta}_k|}{k} \right\}. \quad (4.28)$$

Но сходимость ряда (4.28) следует из элементарных неравенств

$$\frac{|\tilde{\alpha}_k|}{k} \leq \frac{1}{2} \left( \tilde{\alpha}_k^2 + \frac{1}{k^2} \right), \quad \frac{|\tilde{\beta}_k|}{k} \leq \frac{1}{2} \left( \tilde{\beta}_k^2 + \frac{1}{k^2} \right)$$

и из сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\alpha}_k^2 + \tilde{\beta}_k^2), \quad \sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2).$$

Первый из них сходится в силу равенства Парсеваля для кусочно-непрерывной функции  $g'$ , а второй – в силу признака Коши–Маклорена (см. [18]). Сформулируем полученный результат.

**ТЕОРЕМА 4.1.** При выполнении условий (i) ряд (4.23) является гармонической в круге  $\Omega$  функцией. Если, более того, выполняется условие (ii), то ряд (4.23) является непрерывной в замкнутом круге  $\bar{\Omega}$  функцией, удовлетворяющей граничному условию (4.2) и, следовательно, является классическим решением задачи 1.

Аналогичный результат справедлив и для внешней задачи.

**ТЕОРЕМА 4.2.** При выполнении условий (i) ряд (4.24) является гармонической во внешности  $\Omega_e$  круга  $\Omega$  функцией. Если, более того, выполняется условие (ii), то ряд (4.24) является непрерывной в замкнутой области  $\bar{\Omega}_e$  функцией, удовлетворяющей граничному условию (4.2) и условию на бесконечности (4.3) и, следовательно, является классическим решением задачи 2.

**6.4.2. Интеграл Пуассона.** Преобразуем ниже формулы (4.23), (4.24) к эквивалентным интегральным формулам и покажем, что последние формулы дают решения задач 1 и 2 при выполнении лишь условия (i). Как и в п. 6.4.1, рассмотрим более подробно внутреннюю задачу, а для внешней задачи получим результат по аналогии.

Подставим выражения (4.22) для коэффициентов Фурье граничной функции  $g$  в (4.23). Меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{a} \right)^k (\cos k\psi \cos k\varphi + \sin k\psi \sin k\varphi) \right\} d\psi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{a} \right)^k \cos k(\varphi - \psi) \right\} d\psi. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Предполагая, что  $t \equiv \rho/a < 1$ , и используя известную формулу

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k = \frac{\gamma}{1 - \gamma} \text{ при } |\gamma| < 1,$$

преобразуем выражение в фигурных скобках (4.29) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \cos k(\varphi - \psi) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} t^k \left[ e^{ik(\varphi - \psi)} + e^{-ik(\varphi - \psi)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (te^{i(\varphi - \psi)})^k + (te^{-i(\varphi - \psi)})^k \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{te^{i(\varphi - \psi)}}{1 - te^{i(\varphi - \psi)}} + \frac{te^{-i(\varphi - \psi)}}{1 - te^{-i(\varphi - \psi)}} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{1 - te^{-i(\varphi-\psi)} - te^{i(\varphi-\psi)} + t^2 + te^{i(\varphi-\psi)} - t^2 + te^{-i(\varphi-\psi)} - t^2}{(1 - te^{i(\varphi-\psi)})(1 - te^{-i(\varphi-\psi)})} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{1 - t^2}{1 - 2t\cos(\varphi - \psi) + t^2}, \quad |t| < 1.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Учитывая (4.30), перепишем формулу (4.29) в виде

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + \rho^2} g(\psi) d\psi. \tag{4.31}$$

Формула (4.31) (либо интеграл в правой части (4.31)) называется *формулой Пуассона* (либо *интегралом Пуассона*), а выражение

$$k(\rho, \varphi; a, \psi) \equiv \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + \rho^2}$$

называется *ядром Пуассона*. Отметим, что ядро  $k$  определено лишь при  $\rho < a$  либо при  $\rho > a$ , причем  $k(\rho, \varphi; a, \psi) > 0$  при  $\rho < a$ , так как  $2a\rho < a^2 + \rho^2$ , если  $\rho \neq a$ .

Положим  $\mathbf{x} = (\rho, \varphi) \in \Omega$ ,  $\mathbf{y} = (a, \psi) \in \Gamma_a$ ,  $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$  (см. рис.4.1,а). Легко видеть, что расстояние  $r = r_{xy}$  между  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  определяется формулой

$$r_{xy}^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = a^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + \rho^2. \tag{4.32}$$

Учитывая (4.32) и выбирая в качестве переменной интегрирования длину дуги  $s = a\psi$ , ( $ds = ad\psi$ ), перепишем формулу (4.31) в эквивалентном виде:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{(a^2 - \rho^2)}{r^2} g(\mathbf{y}) ds_y = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{(a^2 - |\mathbf{x}|^2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} g(\mathbf{y}) ds_y, \quad \rho = |\mathbf{x}|. \tag{4.33}$$

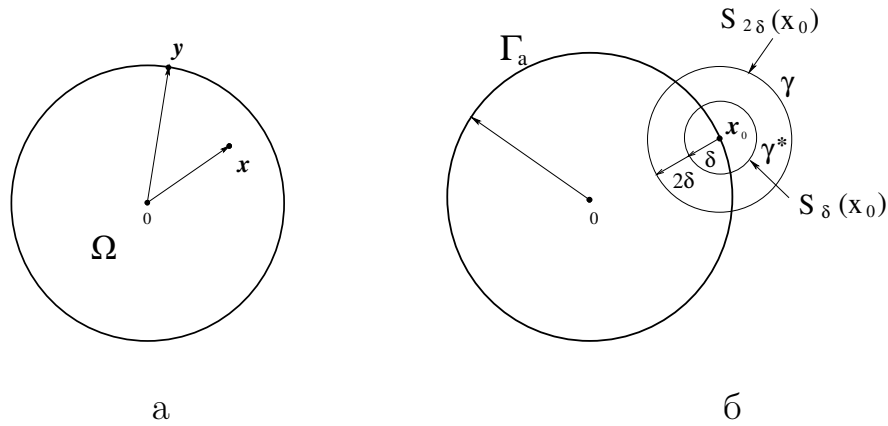


Рис. 4.1

При выполнении лишь условия (i) интеграл Пуассона (4.31) является гармонической в круге  $\Omega$  функцией, так как этим свойством обладает исходный ряд (4.23). То же самое справедливо и для функции (4.33) при условии, что  $g \in C(\Gamma_a)$ . Сформулируем этот важный факт в виде леммы.

**ЛЕММА 4.1.** Пусть  $g \in C(\Gamma_a)$ . Тогда интеграл Пуассона (4.33) является гармонической в круге  $\Omega$  функцией.

Если, более того, функция  $g$  удовлетворяет условиям (i) и (ii), то тогда можно утверждать, что

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \Gamma_a, \quad \lim_{\substack{\rho \rightarrow a \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} u(\rho, \varphi) = g(\varphi_0) \quad \forall \varphi_0 \in [0, 2\pi), \quad (4.34)$$

так как ряд (4.23), из которого получена формула (4.31) (либо (4.33)), является при выполнении условий (i) и (ii) непрерывной функцией в замкнутом круге  $\overline{\Omega}$ , удовлетворяющей граничному условию (4.2).

Основываясь на формуле (4.33), докажем теперь, что функция  $u$  удовлетворяет условиям (4.34), даже если  $g$  является лишь непрерывной функцией на  $\Gamma_a$ . Это будет означать, что интеграл Пуассона, точнее, функция

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{(a^2 - \rho^2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} g(\mathbf{y}) ds_y, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_a \end{cases} \quad (4.35)$$

дает решение задачи 1 из пространства  $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  для любой  $g \in C(\Gamma_a)$ .

Отметим сначала, что для функции  $g \equiv 1$  на  $\Gamma_a$  решением задачи 1 является функция  $u \equiv 1$  в  $\Omega$ . Это вытекает из принципа максимума. С учетом этого, полагая в (4.33)  $g = 1, u = 1$ , приходим к соотношению

$$1 = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{a^2 - \rho^2}{r^2} ds_y, \quad \rho = |\mathbf{x}| < a. \quad (4.36)$$

Умножим обе части (4.36) на  $g(\mathbf{x}_0)$ , где  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma_a$  – фиксированная точка, и вычтем из (4.33). Получим

$$u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} [g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)] \frac{a^2 - \rho^2}{r^2} ds_y, \quad \rho = |\mathbf{x}|. \quad (4.37)$$

Пусть  $\varepsilon > 0$  – произвольное сколь угодно малое число. Окружим точку  $\mathbf{x}_0$  окружностью  $S_{2\delta} = S_{2\delta}(\mathbf{x}_0)$  радиуса  $2\delta$  (см. рис. 4.1б), где с учетом непрерывности функции  $g$  число  $\delta$  выберем столь малым, чтобы во всех точках  $\mathbf{y}$  части  $\Gamma_1$  границы  $\Gamma_a$ , лежащей внутри  $S_{2\delta}$ , выполнялось неравенство

$$|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.38)$$

Положим

$$\Gamma_2 = \Gamma_a \setminus \bar{\Gamma}_1, \quad I_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_k} [g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)] \frac{a^2 - \rho^2}{r^2} ds_y, \quad k = 1, 2. \quad (4.39)$$

Из (4.37) и (4.39), очевидно, имеем

$$|u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| \leq |I_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| + |I_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.40)$$

Оценим в отдельности каждое слагаемое в правой части этого неравенства. Учитывая (4.38), (4.36), имеем

$$|I_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_1} \frac{a^2 - \rho^2}{r^2} ds_y < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{a^2 - \rho^2}{r^2} ds = \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.41)$$

Оценим теперь  $|I_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)|$ . Для этого построим еще одну окружность  $S_\delta = S_\delta(\mathbf{x}_0)$  с центром в точке  $\mathbf{x}_0$ , имеющую радиус  $\delta$ . Поскольку нас интересует поведение решения  $u(\mathbf{x})$  при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ , то можно считать, что точка  $\mathbf{x}$  находится внутри окружности  $S_\delta$ . Тогда для любой точки  $\mathbf{y} \in \Gamma_2$  выполняется неравенство  $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}| > \delta$ . Учитывая, кроме того, что непрерывная на  $[0, 2\pi]$  функция  $g$  ограничена, так что  $|g(\mathbf{y})| \leq M' = \text{const}$  на  $\Gamma_a$ , имеем согласно (4.39), что

$$|I_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| \leq \frac{2M'(a^2 - \rho^2)}{2\pi a \delta^2} \int_{\Gamma_2} ds \leq \frac{2M'(a^2 - \rho^2)}{\delta^2}, \quad \rho = |\mathbf{x}|. \quad (4.42)$$

Так как число  $\delta$  уже зафиксировано, а при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ , очевидно,  $\rho = |\mathbf{x}| \rightarrow a$ , и, следовательно, правая часть в (4.42) стремится к нулю, то найдется такое число  $\delta_1 > 0$ , что выполняется неравенство

$$|I_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta_1. \quad (4.43)$$

Из (4.41) и (4.43) вытекает в силу произвольности  $\varepsilon$ , что

$$|u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \rightarrow 0. \quad (4.44)$$

Из (4.44), в частности, следует, что  $u \in C(\bar{\Omega})$ . Кроме того,  $u \in C^2(\Omega)$ . Это означает, что формула (4.35) определяет классическое решение задачи Дирихле (4.1), (4.2). Сформулируем полученный результат.

**ТЕОРЕМА 4.3.** *При выполнении условия (i) классическое решение задачи Дирихле (4.1), (4.2) для круга  $\Omega = \Omega_a$  существует, единственно и определяется с помощью интеграла Пуассона формулой (4.35).*

Исходя из ряда (4.24), аналогичным образом можно убедиться в том, что для произвольной непрерывной функции  $g$  формула

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{(\rho^2 - a^2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} g(\mathbf{y}) ds_y, & \mathbf{x} \in \Omega_e, \\ g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_a \end{cases} \quad (4.45)$$

определяет классическое решение  $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^0(\overline{\Omega}_e)$  внешней задачи Дирихле (4.1)–(4.3). Сформулируем полученный результат.

**ТЕОРЕМА 4.4.** *При выполнении условий (i) классическое решение внешней задачи Дирихле (4.1)–(4.3) во внешности круга существует, единственно и определяется с помощью интеграла Пуассона формулой (4.45).*

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.1.** С помощью линейной замены переменных нетрудно показать, что решение  $u$  задачи Дирихле внутри окружности  $\Gamma_a$  с центром в произвольной точке  $\mathbf{x}_0$  также определяется формулой (4.35), где следует положить  $\rho = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ . Точно так же формула (4.45) при  $\rho = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$  дает решение внешней задачи Дирихле в области  $\Omega_e$ , лежащей вне  $\Gamma_a$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.2.** Из теоремы 4.3 вытекает, что любую гармоническую в круге  $\Omega$  функцию  $u$ , непрерывную в замыкании  $\overline{\Omega}$ , можно представить в виде

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} u(\mathbf{y}) ds_y, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.46)$$

Действительно, обозначим через  $u_1$  решение задачи Дирихле (4.1), (4.2), отвечающее граничной функции  $g = u|_{\Gamma_a} \in C(\Gamma_a)$ . В силу теоремы 4.3 оно представимо с помощью интеграла Пуассона, стоящего в правой части (4.46). С другой стороны, в силу единственности решения задачи Дирихле необходимо выполняется соотношение  $u_1 = u$  в  $\Omega$ . Отсюда вытекает (4.46). Формулу (4.46) также называют формулой Пуассона. По своему смыслу она дает интегральное представление гармонической внутри круга  $\Omega$  функции  $u$  через ее значения на границе  $\Gamma_a$ . При  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  формула Пуассона (4.46) переходит в формулу (3.15) среднего значения гармонической функции в  $\mathbb{R}^2$ . В силу единственности решения внешней задачи Дирихле аналогичное представление справедливо для функции  $u$ , гармонической вне круга  $\Omega$  и непрерывной в  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ .

В общем случае под формулой (либо интегралом) Пуассона понимается интегральное представление решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в простейших областях в виде интеграла по границе, содержащего граничную функцию. К этим простейшим областям относятся, например: круг, внешность круга и полуплоскость в  $\mathbb{R}^2$ , шар, внешность шара и полупространство в  $\mathbb{R}^3$ . В следующем пункте мы приведем формулу Пуассона для шара и внешности шара. Что касается других областей, то к этому вопросу мы вернемся в гл. 7 при изложении метода функций Грина.

Интеграл Пуассона дает удобный аппарат для исследования свойств гармонических функций. Некоторые из этих свойств будут приведены в §6.6. Основываясь на свойствах интеграла Пуассона (4.46), докажем ниже приведенные в конце §6.4 оценки (3.30), описывающие поведение гармонической функции двух переменных на бесконечности.

**ЛЕММА 4.2** (о поведении гармонической функции на бесконечности в  $\mathbb{R}^2$ ). *Пусть  $u : \Omega_e \rightarrow \mathbb{R}$  – гармоническая во внешности  $\Omega_e$  ограниченного*



открытого множества  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  функция. Тогда существуют такие константы  $R > 0$  и  $C = C_R(u)$ , что выполняются следующие условия на бесконечности:

$$\left| \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} \right| \leq \frac{C_R}{|\mathbf{x}|^2}, \quad \left| \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial y} \right| \leq \frac{C_R}{|\mathbf{x}|^2} \text{ при } |\mathbf{x}| \geq R. \quad (4.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поместим начало координат  $O$  внутрь  $\Omega$  и опишем окружность  $\Gamma_R$  с центром в  $O$  достаточно большого радиуса  $R$ , такого, чтобы  $\Omega$  целиком лежала внутри  $\Gamma_R$  (см. рис. 3.3). Положим  $\Omega_{eR} = \{\mathbf{x} \in \Omega_e : |\mathbf{x}| > R\}$ . Поскольку функция  $u$  гармонична в  $\Omega_{eR}$  и непрерывна в замыкании  $\overline{\Omega_{eR}}$ , то с учетом замечания 4.2 в любой точке  $\mathbf{x} = (x, y)$ , лежащей вне окружности  $\Gamma_R$ , ее можно представить в виде интеграла Пуассона

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma_R} \frac{\rho^2 - R^2}{r^2} u(\mathbf{y}) ds_y = \frac{1}{2\pi R} \int_{|\mathbf{y}|=R} \frac{|\mathbf{x}|^2 - R^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} u(\mathbf{y}) ds_y, \quad (4.48)$$

где  $\mathbf{x} \in \Omega_{eR}$ . Здесь  $\rho = |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\mathbf{y} = (\xi, \eta)$ ,  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ . Дифференцируя (4.48) по  $x$ , получим

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma_R} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho^2 - R^2}{r^2} \right) u(\mathbf{y}) ds_y. \quad (4.49)$$

Оценим производную  $\partial u / \partial x$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho^2 - R^2}{r^2} \right) &= \frac{2xr^2 - 2(\rho^2 - R^2)(x - \xi)}{r^4} = \\ &= \frac{2}{r^4} [xr(r - \rho) + \rho x(r - \rho) + \xi \rho^2 + R^2(x - \xi)]. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Пусть точка  $\mathbf{x}$  настолько удалена от начала координат, что выполняется условие  $\rho \geq 2R$ , так что  $R \leq \rho/2$ . Тогда  $r \geq \rho - R \geq \rho/2 \Rightarrow 1/r \leq 2/\rho$ . Кроме того, имеем  $|x| \leq \rho$ ,  $|x - \xi|/r \leq 1$ ,  $|r - \rho| \leq R$ ,  $|\xi| \leq R$ . Принимая во внимание эти оценки, из (4.49) получаем, что

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho^2 - R^2}{r^2} \right) \right| \leq \frac{2|x||r - \rho|}{r^3} + \frac{2|x||r - \rho|\rho}{r^4} + \frac{2|\xi|\rho^2}{r^4} + \frac{2R^2|x - \xi|}{r^4} \leq \frac{88R}{\rho^2}. \quad (4.51)$$

Учитывая (4.51), из (4.50) выводим, что

$$\left| \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} \right| \leq \frac{88R}{\rho^2} \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma_R} |u(\mathbf{y})| ds_y \leq \frac{M_R}{\rho^2} \text{ при } |\mathbf{x}| \geq 2R.$$

Здесь  $M_R = 88RM'_R$ , где  $M'_R = \sup_{|\mathbf{y}|=2R} |u(\mathbf{y})|$ . Аналогичная оценка справедлива и для  $|\partial u / \partial y|$ . Отсюда вытекает справедливость оценок (4.47) при  $C_R = \sup_{|\mathbf{x}|=2R} |u(\mathbf{x})|$ . ■

Оценки (4.47) конкретизируют смысл величины  $O(1/|\mathbf{x}|^2)$  в (3.30).

**6.4.3. О решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре и вне шара.** Обсудим кратко вопрос о нахождении классического решения внутренней задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \mathbf{x} \in \Omega, u|_{\Gamma_a} = g \quad (4.52)$$

в шаре  $\Omega = \{\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < a\}$  либо внешней задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \mathbf{x} \in \Omega_e, u|_{\Gamma_a} = g, u(\mathbf{x}) = o(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (4.53)$$

во внешности  $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$  шара  $\Omega$ . Здесь  $\Gamma_a = \partial\Omega$ . Отметим сразу, что единственность решений обеих задач вытекает из леммы 3.2. Что касается существования решения, то для его доказательства и одновременно построения решения в явном виде можно применить аналогично плоскому случаю метод Фурье, но с использованием сферических функций, введенных в § 4.4. Второй способ заключается в обосновании справедливости для решений указанных задач трехмерных аналогов формулы Пуассона. Ограничимся здесь приведением краткой схемы вывода соответствующих формул Пуассона для решений задач (4.52) и (4.53).

Введем функцию

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_a, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_a, \quad (4.54)$$

называемую *ядром Пуассона* для шара  $\Omega$ . Рассмотрим отвечающий ядру  $k$  трехмерный *интеграл Пуассона*

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} g(\mathbf{y}) d\sigma_y, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.55)$$

Отметим следующие свойства ядра и интеграла Пуассона.

1. Ядро  $k$  неотрицательно. При  $|\mathbf{x}| = a$  ядро  $k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  всюду равно нулю, кроме точки  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ , в окрестности которой оно неограничено.

2. Справедлива формула

$$\frac{1}{4\pi a} \int_{|\mathbf{y}|=a} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\sigma_y \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } |\mathbf{x}| < a, \\ -\frac{a}{|\mathbf{x}|} & \text{при } |\mathbf{x}| > a. \end{cases}$$

Первое свойство очевидно, второе свойство доказывается как и соответствующее свойство ядра Пуассона для круга. С использованием этих свойств можно доказать следующие теоремы, обобщающие теоремы 4.3 и 4.4 для случая трех измерений. Доказательство их можно найти, например, в [21, с. 273-276].

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть функция  $g$  непрерывна на сфере  $\Gamma_a$ . Тогда классическое решение и внутренней задачи Дирихле (4.52) существует, единственно и определяется с помощью интеграла Пуассона формулой

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} g(\mathbf{y}) d\sigma_y, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_a. \end{cases} \quad (4.56)$$

ТЕОРЕМА 4.6. При выполнении условий теоремы 4.5 классическое решение и внешней задачи Дирихле (4.53) существует, единственно и определяется с помощью интеграла Пуассона формулой

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{|\mathbf{x}|^2 - a^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} g(\mathbf{y}) d\sigma_y, & \mathbf{x} \in \Omega_e, \\ g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_a. \end{cases} \quad (4.57)$$

Опять отметим, что из теоремы 4.5 вытекает справедливость соотношения

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi a} \int_{|\mathbf{y}|=a} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} u(\mathbf{y}) d\sigma_y, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.58)$$

Формула (4.58), называемая формулой Пуассона для шара, имеет смысл интегрального представления гармонической в шаре  $\Omega$  функции  $u \in C(\bar{\Omega})$  через ее граничные значения на границе (сфере)  $\Gamma_a$  шара  $\Omega$ . При  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  формула Пуассона переходит в формулу (3.4) среднего значения гармонической функции в  $\mathbb{R}^3$ . Аналогичное (4.58) представление справедливо и для функции  $u$ , гармонической вне шара  $\Omega$  и непрерывной в  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ .

С помощью формулы Пуассона можно вывести ряд важных свойств гармонических функций трех переменных. В частности, можно доказать следующий факт о поведении при  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$  решения уравнения Лапласа, удовлетворяющего условию регулярности на бесконечности, имеющему вид

$$u(\mathbf{x}) = o(1) \quad \text{при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (4.59)$$

ЛЕММА 4.3. Пусть функция  $u \in C^2(\Omega_e)$  удовлетворяет уравнению Лапласа во внешности  $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  ограниченного открытого множества  $\Omega$  и условию регулярности на бесконечности (4.59). Тогда существуют такие константы  $R > 0$  и  $C = C_R(u)$ , что выполняются условия

$$|u(\mathbf{x})| \leq \frac{C_R}{|\mathbf{x}|}, \quad |\text{grad} u(\mathbf{x})| \leq \frac{C_R}{|\mathbf{x}|^2} \quad \text{при } |\mathbf{x}| \geq R. \quad (4.60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится в точности по схеме леммы 4.2 и предоставляется читателю.

Лемма 4.3 означает, что любое классическое решение уравнения Пуассона в неограниченной области  $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ , удовлетворяющее условию регулярности (4.59), необходимо убывает с порядком  $|\mathbf{x}|^{-1}$ , а его первые производные стремятся к нулю с порядком  $|\mathbf{x}|^{-2}$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Другими словами,

условие регулярности на бесконечности для классического решения  $u$  уравнения Лапласа в  $\Omega_e$  эквивалентно более сильным условиям убывания на бесконечности функции  $u$  и ее первых производных. Вспомнив, что именно первое условие в (4.60) фигурирует в определении 1.2 гармонической во внешней области  $\Omega_e$  функции  $u$ , можно сделать вывод о том, что определение 1.2 при  $n = 3$  эквивалентно следующему определению гармонической функции во внешней области  $\Omega_e$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.** Функция  $u : \Omega_e \rightarrow \mathbb{R}$  называется гармонической в неограниченной области  $\Omega_e \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ , если она дважды непрерывно дифференцируема, является решением уравнения Лапласа в  $\Omega_e$  и удовлетворяет условию регулярности на бесконечности (4.59).

## § 6.5. Теоремы единственности и устойчивости решений краевых задач для уравнения Пуассона

**6.5.1. Постановка основных краевых задач в случае пространства  $\mathbb{R}^3$ .** Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma \in C^1$ ,  $\Omega_e$  – ее внешность (см. рис. 5.1,а),  $f$  – заданная в  $\Omega$  либо в  $\Omega_e$  непрерывная функция,  $g$  – заданная на  $\Gamma$  непрерывная функция,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к границе  $\Gamma$ ,  $\bar{\Omega}_e = \Omega_e \cup \Gamma$ . Будем рассматривать следующие краевые задачи для уравнения Пуассона:

$$\Delta u = -f. \quad (5.1)$$

**1.1. Внутренняя задача Дирихле.** Найти функцию  $u \in C^2(\Omega)$ , непрерывную на  $\bar{\Omega}$ , удовлетворяющую уравнению (5.1) в каждой точке  $\mathbf{x} \in \Omega$  и граничному условию

$$u = g \text{ на } \Gamma. \quad (5.2)$$

**1.2. Внешняя задача Дирихле.** Найти функцию  $u \in C^2(\Omega_e)$ , непрерывную на  $\bar{\Omega}_e$ , удовлетворяющую уравнению (5.1) в каждой точке  $\mathbf{x} \in \Omega_e$ , граничному условию (5.2) и условию регулярности на бесконечности

$$u(\mathbf{x}) = o(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (5.3)$$

**2.1. Внутренняя задача Неймана.** Найти функцию  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , удовлетворяющую уравнению (5.1) в  $\Omega$  и граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ на } \Gamma. \quad (5.4)$$

Здесь и ниже  $\partial u / \partial n$  – производная по внешней нормали к границе  $\Gamma$ .

**2.2. Внешняя задача Неймана.** Найти функцию  $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\bar{\Omega}_e)$ , удовлетворяющую уравнению (5.1) в  $\Omega_e$ , граничному условию (5.4) и условию (5.3).

3.1. *Внутренняя третья краевая задача.* Найти функцию  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ , удовлетворяющую уравнению (5.1) в  $\Omega$  и граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} + au = g \text{ на } \Gamma. \quad (5.5)$$

Здесь  $a : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  – заданная непрерывная на  $\Gamma$  функция.

3.2. *Внешняя третья краевая задача.* Найти функцию  $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$ , удовлетворяющую уравнению (5.1) в  $\Omega_e$ , граничному условию (5.5) и условию (5.3).

Пусть  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$  – два открытых подмножества границы  $\Gamma$  (см. рис. 5.1,б) такие, что

$$\Gamma = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N, \quad \int_{\Gamma} \varphi d\sigma = \int_{\Gamma_D} \varphi d\sigma + \int_{\Gamma_N} \varphi d\sigma \quad \forall \varphi \in C(\Gamma).$$

Предположим, что на  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$  заданы непрерывные функции  $g_1 : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g_2 : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}$ .

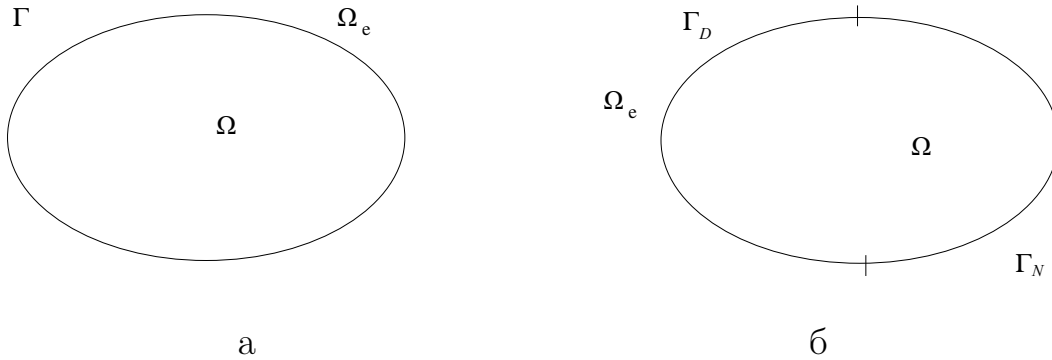


Рис. 5.1

4.1. *Внутренняя смешанная краевая задача.* Найти функцию  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ , удовлетворяющую уравнению (5.1) в  $\Omega$  и граничным условиям

$$u = g_1 \text{ на } \Gamma_D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + au = g_2 \text{ на } \Gamma_N. \quad (5.6)$$

4.2. *Внешняя смешанная краевая задача.* Найти функцию  $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$ , удовлетворяющую уравнению (5.1) в  $\Omega_e$ , граничным условиям (5.6) и условию (5.3).

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.1.** Смешанная краевая задача является наиболее общей в том смысле, что любую другую из сформулированных выше краевых задач можно считать ее частным случаем.

**6.5.2. Теоремы единственности и устойчивости решений краевых задач.** Приведем ряд теорем, описывающих достаточные условия,

при которых решения сформулированных выше задач 1.1, 1.2, ..., 4.2 обладают свойством единственности.

**ТЕОРЕМА 5.1.** *Решение  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  внутренней задачи Дирихле либо решение  $u \in C^2(\Omega_e) \cap C(\overline{\Omega}_e)$  внешней задачи Дирихле единственно.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство проводится по схеме доказательства леммы 3.2 с учетом того, что разность  $u = u_2 - u_1$  двух возможных решений удовлетворяет уравнению Лапласа в  $\Omega$  или в  $\Omega_e$ , непрерывна в  $\overline{\Omega}$  либо в  $\overline{\Omega}_e$ , равна нулю на  $\Gamma$  и удовлетворяет условию регулярности для внешней задачи. ■

**ТЕОРЕМА 5.2.** *Пусть  $u$  и  $\tilde{u}$  – решения внутренней задачи Дирихле из пространства  $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  при граничных условиях*

$$u|_{\Gamma} = g \text{ и } \tilde{u}|_{\Gamma} = \tilde{g}, \quad (5.7)$$

*и пусть*

$$|g(\mathbf{x}) - \tilde{g}(\mathbf{x})| \leq \varepsilon \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (5.8)$$

*Тогда выполняется неравенство*

$$|u(\mathbf{x}) - \tilde{u}(\mathbf{x})| \leq \varepsilon \text{ на } \overline{\Omega}. \quad (5.9)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Разность  $v = u - \tilde{u}$  есть функция, гармоническая в  $\Omega$ , непрерывная на  $\overline{\Omega}$  и удовлетворяющая на  $\Gamma$  условию  $|v| \leq \varepsilon$ . Поэтому неравенство (5.9) очевидным образом вытекает из следствия 3.5. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.2.** Теорема 5.2 означает *непрерывную зависимость* (или *устойчивость*) решения внутренней задачи Дирихле от граничных данных в равномерной метрике.

Аналогичная теорема справедлива и для внешней задачи Дирихле.

**ТЕОРЕМА 5.3.** *Пусть  $u$  и  $\tilde{u}$  – решения внешней задачи Дирихле из пространства  $C^2(\Omega_e) \cap C(\overline{\Omega}_e)$ , отвечающие граничным условиям (5.7) и пусть выполняется (5.8). Тогда выполняется неравенство*

$$|u(\mathbf{x}) - \tilde{u}(\mathbf{x})| \leq \varepsilon \text{ на } \overline{\Omega}_e.$$

Несколько другая ситуация, чем в теореме 5.1, имеет место для внутренней задачи Неймана.

**ТЕОРЕМА 5.4.** *Решение  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  внутренней задачи Неймана (5.1), (5.4) определяется с точностью до произвольной постоянной.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что задача (5.1), (5.4) имеет два решения:  $u_1$  и  $u_2$ . Тогда их разность  $u = u_2 - u_1$  является гармонической в  $\Omega$  функцией класса  $C^1(\overline{\Omega})$ , удовлетворяющей условию  $\partial u / \partial n = 0$  на  $\Gamma$ . Полагая в формуле Грина (2.5)  $v = u$ , получим

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \Delta u u d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u d\sigma. \quad (5.10)$$

Учитывая условия  $\Delta u = 0$  в  $\Omega$ ,  $\partial u / \partial n = 0$  на  $\Gamma$ , из (5.10) выводим, что

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} \equiv \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] d\mathbf{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla u = 0 \text{ в } \Omega \Rightarrow u = \text{const.} \blacksquare$$

В то же время решение внешней задачи Неймана единственно.

**ТЕОРЕМА 5.5.** *Решение  $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$  внешней задачи Неймана (5.1), (5.3), (5.4) единственно, если  $\Omega_e$  – связное множество.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что задача (5.1), (5.3), (5.4) имеет два решения:  $u_1$  и  $u_2$ . Обозначим через  $B_R$  шар достаточно большого радиуса  $R$  с границей  $\Gamma_R$ , содержащий область  $\Omega$  внутри себя (см. рис. 5.2). Введем ограниченную область  $\Omega_R$  по формуле

$$\Omega_R = \Omega_e \cap B_R = B_R \setminus \overline{\Omega} \quad (5.11)$$

и применим в  $\Omega_R$  формулу Грина (2.5), где, как и выше, положим  $u = u_2 - u_1$ ,  $v = u$ . Учитывая, что  $\partial\Omega_R = \Gamma_R \cup \Gamma$ ,  $\Delta u = 0$  в  $\Omega_R$ , будем иметь

$$\int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u d\sigma + \int_{\Gamma_R} \frac{\partial u}{\partial n} u d\sigma. \quad (5.12)$$

Здесь в обоих граничных интегралах  $\partial u / \partial n$  обозначает производную по внешней нормали к границе  $\partial\Omega_R$  области  $\Omega_R$ .

В силу леммы 4.3 о поведении гармонической функции на бесконечности в  $\mathbb{R}^3$  подынтегральная функция  $|\nabla u|^2$  в левой части (5.12) убывает при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  не медленнее, чем  $|\mathbf{x}|^{-4}$ , тогда как объем области  $\Omega_R$  растет с ростом  $R = |\mathbf{x}|$  лишь как  $R^3$ . Отсюда следует, что при  $R \rightarrow \infty$  собственный интеграл в левой части (5.12) стремится к несобственному (сходящемуся) интегралу  $\int_{\Omega_e} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}$  по области  $\Omega_e$ . В то же время интеграл  $\int_{\Gamma_R} (\partial u / \partial n) u d\sigma$  стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Действительно, в силу той же леммы 4.3 величина  $(u \partial u / \partial n)|_{\Gamma_R}$  убывает при  $R \rightarrow \infty$  как  $O(R^{-3})$ , тогда как площадь поверхности  $\Gamma_R$ , равная  $4\pi R^2/3$ , растет как  $R^2$ . Поэтому, переходя в (5.12) к пределу при  $R \rightarrow \infty$  и учитывая, что  $\partial u / \partial n = 0$  на  $\Gamma$ , получим  $\int_{\Omega_e} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} = 0$ . Отсюда вытекает с учетом связности  $\Omega_e$ , что  $u = u_0 = \text{const}$ , а из условия регулярности на бесконечности следует, что  $u_0 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ .  $\blacksquare$

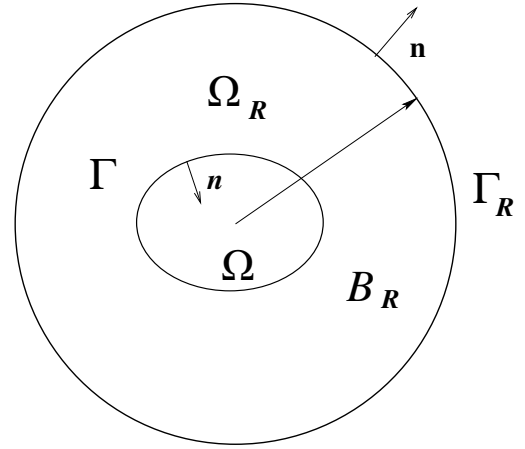


Рис. 5.2

Обратимся теперь к третьей краевой задаче. Предположим, что коэффициент  $a$  в (5.5) удовлетворяет условиям

(i)  $a \in C(\Gamma)$ ,  $a \geq 0$  на  $\Gamma$ ,  $\int_{\Gamma} a d\sigma > 0$ .

ТЕОРЕМА 5.6. При выполнении условий (i) решение  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  внутренней третьей краевой задачи (5.1), (5.5) единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, как всегда, что задача (5.1), (5.5) имеет два решения:  $u_1$  и  $u_2$ . Применяя к функциям  $u = u_2 - u_1$  и  $v = u$  формулу Грина (2.5), приходим к соотношению (5.10). Последнее с учетом условий  $\Delta u = 0$  в  $\Omega$ ,  $\partial u / \partial n|_{\Gamma} = -au$  перепишем в виде

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} au^2 d\sigma = 0. \quad (5.13)$$

Поскольку  $a \geq 0$ , то из (5.13) получаем, что  $|\nabla u| = 0$  в  $\Omega \Rightarrow u = u_0 = \text{const}$ . Подставляя  $u = u_0$  в (5.13), будем иметь

$$u_0^2 \int_{\Gamma} a d\sigma = 0. \quad (5.14)$$

В силу третьего условия в (i) из (5.14) вытекает, что  $u_0 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ . ■

Аналогичная теорема (причем при использовании менее жестких условий на коэффициент  $a$ ) справедлива для внешней третьей краевой задачи.

ТЕОРЕМА 5.7. Пусть  $a \in C(\Gamma)$ ,  $a \geq 0$  на  $\Gamma$ . Тогда решение  $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$  внешней третьей краевой задачи (5.1), (5.3), (5.5) единственно, если  $\Omega_e$  – связное множество.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.9 (см. ниже).

В заключение рассмотрим смешанную краевую задачу. Предположим, что выполняется одна из следующих двух групп условий:

(ii)  $\text{meas } \Gamma_D > 0$ ,  $a \in C(\Gamma_N)$ ,  $a \geq 0$  на  $\Gamma_N$ ,

(iii)  $\text{meas } \Gamma_D \geq 0$ ,  $a \in C(\Gamma_N)$ ,  $a \geq 0$  на  $\Gamma_N$ ,  $\int_{\Gamma_N} a d\sigma > 0$ .

ТЕОРЕМА 5.8. Пусть  $\text{meas } \Gamma_N > 0$  и выполняется одна из групп условий (ii) или (iii). Тогда решение  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  внутренней смешанной задачи (5.1), (5.6) единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что задача (5.1), (5.6) имеет два решения:  $u_1$  и  $u_2$ . Тогда их разность  $u = u_2 - u_1$  удовлетворяет соотношению (5.10), которое с учетом условий

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -au \text{ на } \Gamma_N \quad (5.15)$$

перепишем в виде

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} au^2 d\sigma = 0. \quad (5.16)$$



Поскольку  $a \geq 0$  на  $\Gamma_N$ , то из (5.16) получаем, что  $|\nabla u| = 0$  в  $\Omega \Rightarrow u = u_0 = \text{const}$  на  $\overline{\Omega}$ . С учетом этого соотношение (5.16) принимает вид

$$u_0^2 \int_{\Gamma_N} a d\sigma = 0. \quad (5.17)$$

Если выполняются условия (ii), то тогда в силу условия  $u = 0$  на  $\Gamma_D$  имеем  $u_0 = 0$  и, следовательно,  $u_1 = u_2$ . Если же выполняются условия (iii), то тогда из (5.17) опять получаем, что  $u_0 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ . ■

Аналогичная теорема (причем при использовании даже менее жестких условий на исходные данные) справедлива для внешней смешанной краевой задачи (5.1), (5.3), (5.6).

**ТЕОРЕМА 5.9.** Пусть  $\text{meas } \Gamma_N > 0$ ,  $a \in C(\Gamma_N)$ ,  $a \geq 0$  на  $\Gamma_N$ . Тогда решение  $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$  внешней смешанной краевой задачи (5.1), (5.3), (5.6) единственно, если  $\Omega_e$  – связное множество.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что задача (5.1), (5.3), (5.6) имеет два решения  $u_1$  и  $u_2$ . Введем, как в теореме 5.5, ограниченную область  $\Omega_R = \Omega_e \cap B_R$  и заметим, что разность  $u = u_2 - u_1$  удовлетворяет соотношению (5.12). Перейдем в (5.12) к пределу при  $R \rightarrow \infty$ . Рассуждая, как и при доказательстве теоремы 5.5, приходим к соотношению  $\int_{\Omega_e} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} (\partial u / \partial n) u d\sigma = 0$ . Последнее с учетом условий  $u = 0$  на  $\Gamma_D$ ,  $\partial u / \partial n = -au$  на  $\Gamma_N$  принимает вид

$$\int_{\Omega_e} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} au^2 d\sigma = 0. \quad (5.18)$$

Поскольку  $a \geq 0$  на  $\Gamma_N$ , то из (5.18) получаем, что  $|\nabla u| = 0$  в  $\Omega_e \Rightarrow u = u_0 = \text{const}$  на  $\overline{\Omega}_e$ . Из условия (5.3) следует, что  $u_0 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ . ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.3.** Теорема 5.7 является частным случаем теоремы 5.9, отвечающим ситуации  $\Gamma = \Gamma_N$ . Если условие  $\text{meas } \Gamma_N > 0$  заменить условием  $\text{meas } \Gamma_N \geq 0$ , то тогда утверждение теоремы 5.1 о единственности решения внешней задачи Дирихле также можно рассматривать как частный случай теоремы 5.9 для ситуации, когда  $\text{meas } \Gamma_N = 0$  (т.е.  $\Gamma = \Gamma_D$ ).

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.4.** Некоторые из доказанных выше теорем естественным образом переносятся на краевые задачи для общих эллиптических уравнений вида (3.16) (см., например, [58, с. 11-13]). Более сложным образом исследуется единственность решения задачи сопряжения для эллиптического уравнения [58, с. 138-141].

**6.5.3. Краевые задачи для уравнения Пуассона на плоскости.** Аналогичным образом формулируются краевые задачи для уравнения Пуассона в  $\mathbb{R}^2$ . Единственное отличие состоит в условии регулярности на бесконечности для внешних краевых задач, которое вместо (5.3) имеет вид

$$u(\mathbf{x}) = O(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (5.19)$$

С учетом этого все приведенные выше результаты, касающиеся внутренних задач в  $\mathbb{R}^3$ , непосредственно распространяются на случай двух измерений. В то же время, не все результаты, касающиеся внешних краевых задач в  $\mathbb{R}^3$ , переносятся на двумерный случай. Так, решение внешней задачи Неймана в  $\mathbb{R}^2$  определяется, как и решение внутренней краевой задачи, с точностью до произвольной константы. В этом легко убедиться, проанализировав доказательство теоремы 5.5. Что касается внешней смешанной краевой задачи, то условия единственности ее решения совпадают с условиями единственности решения внутренней смешанной задачи, приведенными в теореме 5.8. Другими словами, справедлива следующая теорема, доказательство которой предоставляется читателю.

**ТЕОРЕМА 5.10.** *Пусть  $\text{meas } \Gamma_N \geq 0$  и выполняется одна из группы условий (ii) или (iii). Тогда решение  $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$  внешней смешанной краевой задачи (5.1), (5.6), (5.19) в  $\mathbb{R}^2$  единственно.*

**6.5.4. Некоторые необходимые условия существования решений краевых задач.** Вопрос о существовании решений сформулированных выше краевых задач в произвольных областях исследуется гораздо сложнее, чем вопрос о единственности. Не имея ниже возможности подробно останавливаться на исследовании их разрешимости, отметим книги [8, 11, 13, 23, 48], в которых интересующийся читатель может найти нужные ему сведения о их разрешимости. Здесь же мы коснемся в основном *необходимых* условий существования решения внутренней задачи Неймана.

Итак, рассмотрим внутреннюю задачу Неймана (5.1), (5.4). Предположим, что  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  – ее решение и существует интеграл

$$\int_{\Omega} \Delta u d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} f d\mathbf{x}. \quad (5.20)$$

Применяя к функциям  $u$  и  $v \equiv 1$  вторую формулу Грина (2.7), получим в силу (5.20)  $\int_{\Omega} f d\mathbf{x} = - \int_{\Gamma} (\partial u / \partial n) d\sigma$ . Поскольку  $\partial u / \partial n = g$  на  $\Gamma$  в силу граничного условия (5.4), то отсюда получаем

$$\int_{\Omega} f d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} g d\sigma = 0. \quad (5.21)$$

(5.21) и является необходимым условием существования решения внутренней задачи Неймана. Сформулируем данный результат в виде леммы.

**ЛЕММА 5.1.** *Пусть функция  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  является решением внутренней задачи Неймана (5.1), (5.4), и существует интеграл (5.20). Тогда необходимо выполняется условие (5.21).*

В частном случае, когда  $f = 0$ , уравнение (5.1) переходит в уравнение Лапласа, а (5.21) принимает вид

$$\int_{\Gamma} g d\sigma = 0. \quad (5.22)$$

Соотношение (5.22) является необходимым условием существования решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа.

Соотношения (5.21) и (5.22) имеют наглядный физический смысл. Действительно, рассмотрим, например, ситуацию, когда (5.1) описывает стационарный процесс распространения тепла в области  $\Omega$ , так что функция  $u$  описывает стационарное поле температур. Тогда в силу закона Фурье (см. гл. 1) интеграл  $\int_{\Gamma} \partial u / \partial n d\sigma$ , равный интегралу  $\int_{\Gamma} g d\sigma$ , пропорционален количеству тепла, вносимому через границу  $\Gamma$  в область  $\Omega$  в единицу времени, тогда как  $\int_{\Omega} f dx$  имеет смысл количества тепла, вырабатываемого в  $\Omega$  в единицу времени объемными источниками тепла. В силу закона сохранения тепла указанное суммарное тепло должно идти на нагревание вещества в области  $\Omega$ . Поскольку в каждой точке  $\mathbf{x} \in \Omega$  температура не изменяется с течением времени в силу стационарности процесса и, следовательно, не происходит нагревания (либо охлаждения) вещества, то это суммарное тепло должно обращаться в нуль, т. е. должно выполняться условие (5.21) либо (5.22), если  $f = 0$ .

Следует, однако, отметить, что результат о необходимости условия (5.21) либо (5.22) для существования решения не распространяется на внешнюю задачу Неймана (см. об этом более подробно в [21, с. 267]).

## § 6.6. Дополнительные свойства гармонических функций

В этом параграфе мы приведем ряд дополнительных свойств гармонических функций. Для простоты и конкретности будем рассматривать случай двух измерений. Доказательство почти всех этих свойств будет основываться на том факте (см. §6.4), что любую гармоническую в круге  $K$  функцию, непрерывную в замыкании  $\overline{K}$ , можно представить в виде интеграла Пуассона. При доказательстве приводимых ниже утверждений мы будем следовать книге И.Г. Петровского [41]. Пусть  $\Omega$  – произвольная область в плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

**ТЕОРЕМА 6.1.** *Всякая гармоническая в области  $\Omega$  функция  $u$  аналитична, т.е. разлагается в сходящийся степенной ряд по степеням  $(x - x_0)(y - y_0)$  в окрестности произвольной точки  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $K$  – круг радиуса  $R$  с центром в  $\mathbf{x}_0$ , целиком лежащий в  $\Omega$ . С помощью переноса начала координат и преобразования подобия, сохраняющего гармоничность, можно считать, что  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ , а  $R = 1$ . Из результатов § 6.4 следует, что гармоническая в круге  $K$  функция  $u$  представима в виде

$$u(\mathbf{x}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad (6.1)$$

где коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  определяются по значениям функции  $u$  на окружности радиуса 1. Из непрерывности  $u$  в  $K$  следует, что коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  по крайней мере ограничены:  $|a_k| \leq M$ ,  $|b_k| \leq M$  для всех  $k = 1, 2, \dots$ . Полагая  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$  и вводя мнимую единицу  $i = \sqrt{-1}$ , имеем  $(x+iy)^k = [\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^k = (\rho \exp^{i\varphi})^k = \rho^k \exp^{ik\varphi} = \rho^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi)$ .

Используя это соотношение, легко показываем, что  $\operatorname{Re} [(a_k - ib_k)(x+iy)^k] = \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$ . Здесь и ниже  $\operatorname{Re} a$  обозначает вещественную часть комплексного числа  $a$ . С учетом этого ряд (6.1) можно переписать в виде

$$u(\mathbf{x}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} [(a_k - ib_k)(x+iy)^k]. \quad (6.2)$$

Рассмотрим теперь ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \operatorname{Re} [(a_{k+l} - ib_{k+l}) C_{k+l}^l i^l x^k y^l]. \quad (6.3)$$

Здесь  $C_{k+l}^l$  — биномиальные коэффициенты, отвечающие случаю  $k^2 + l^2 \neq 0$ . Так как  $C_{k+l}^l < 2^{k+l}$ , а  $a_k$  и  $b_k$  ограничены по модулю константой  $M$ , то ряд (6.3) мажорируется сходящимся при  $|x| < 1/2$ ,  $|y| < 1/2$  рядом

$$2M \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{k+l} |x|^k |y|^l. \quad (6.4)$$

Следовательно, ряд (6.3) сходится абсолютно и равномерно в некоторой окрестности точки  $(0, 0)$ . Легко проверить, что частные суммы ряда (6.2) образуют некоторую последовательность частных сумм абсолютно сходящегося ряда (6.3). Поскольку ряд (6.2) сходится к функции  $u$ , то степенной ряд (6.3) также будет сходиться к функции  $u$  в некоторой окрестности точки  $(0, 0)$ . Тем самым доказано, что функция  $u$  разлагается в степенной ряд по  $x$  и  $y$ , сходящийся к  $u$  в окрестности точки  $(0, 0)$  ■.

Рассмотрим в  $\Omega$  последовательность гармонических функций

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \quad (6.5)$$

**ТЕОРЕМА 6.2.** (Первая теорема Гарнака). *Если последовательность функций (6.5), гармонических внутри ограниченной области  $\Omega$  и непрерывных на  $\overline{\Omega}$ , сходится равномерно на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ , то она равномерно сходится и внутри  $\Omega$ . Предельная функция  $u$  является гармонической внутри области  $\Omega$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как последовательность (6.5) сходится равномерно на границе  $\Gamma$ , то согласно критерию Коши для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется такое целое  $N$ , что при  $m, n > N$  всюду на  $\Gamma$   $|u_n(\mathbf{x}) - u_m(\mathbf{x})| < \varepsilon$ . В силу

следствия 3.6 к принципу максимума имеем  $|u_n(\mathbf{x}) - u_m(\mathbf{x})| < \varepsilon$  всюду в  $\overline{\Omega}$  для этих  $m, n$ . Но тогда на основании достаточности критерия Коши мы заключаем, что последовательность (6.5) сходится равномерно к некоторой функции  $u \in C(\overline{\Omega})$  в замкнутой области  $\overline{\Omega}$ . Остается лишь доказать, что предельная функция  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  гармонична внутри  $\Omega$ .

Возьмем для этого любую точку  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$  и построим круг  $K$  с центром в  $\mathbf{x}_0$  и радиуса  $a$ , лежащий целиком внутри  $\Omega$ . Так как  $u_n$  – гармонические функции в области  $\Omega$ , то каждую из них можно представить внутри  $K$  с помощью интеграла Пуассона:

$$u_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\partial K} \frac{a^2 - \rho^2}{r^2} u_n(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}}. \quad (6.6)$$

В силу доказанной равномерной сходимости последовательности (6.5) в  $\overline{\Omega}$  в (6.6) можно перейти к пределу в обеих частях. В результате получим

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\partial K} \frac{a^2 - \rho^2}{r^2} u(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}}. \quad (6.7)$$

Поскольку  $u|_{\partial K} \in C(\Gamma)$ , то отсюда следует в силу теоремы 4.3, что  $u$  есть функция, гармоническая внутри  $K$  ■.

**ТЕОРЕМА 6.3** (о монотонной последовательности гармонических функций). *Если последовательность гармонических в области  $\Omega$  функций (6.5) сходится в некоторой внутренней точке  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  и при любом  $n$   $u_{n+1}(\mathbf{x}) \geq u_n(\mathbf{x})$  для всех  $\mathbf{x} \in \Omega$ , то последовательность (6.5) всюду в  $\Omega$  сходится к некоторой гармонической функции  $u$ . При этом во всякой замкнутой ограниченной части области  $\Omega$  сходимость равномерна.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Покажем сначала, что последовательность (6.5) сходится равномерно в любом круге  $K_0$  радиуса  $R$  с центром в  $\mathbf{x}_0$ , если его замыкание  $\overline{K}_0$  лежит внутри  $\Omega$ . Оценим разность  $u_{n+p} - u_n = v_{n,p}$ , где  $p$  – произвольное целое положительное число. В силу предположений теоремы  $v_{n,p} \geq 0$ . Возьмем концентрический с  $K_0$  круг  $K^*$  большего, чем у  $K_0$ , радиуса  $R + \varepsilon$ , но все еще лежащий вместе со своей границей внутри  $\Omega$ . Представим каждую из функций  $v_{n,p}$  в круге  $K^*$  с помощью интеграла Пуассона (4.31) в виде

$$v_{n,p}(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{n,p}(R + \varepsilon, \psi) \frac{(R + \varepsilon)^2 - \rho^2}{(R + \varepsilon)^2 + \rho^2 - 2(R + \varepsilon)\rho \cos(\varphi - \psi)} d\psi. \quad (6.8)$$

Так как  $-1 \leq \cos(\varphi - \psi) \leq 1$ , то справедливо соотношение

$$\frac{R + \varepsilon - \rho}{R + \varepsilon + \rho} \leq \frac{(R + \varepsilon)^2 - \rho^2}{(R + \varepsilon)^2 + \rho^2 - 2(R + \varepsilon)\rho \cos(\varphi - \psi)} \leq \frac{R + \varepsilon + \rho}{R + \varepsilon - \rho}. \quad (6.9)$$

Используя условие  $v_{n,p}(R + \varepsilon, \psi) \geq 0$ , выводим из (6.8) и (6.9), что

$$\frac{1}{2\pi} \frac{R + \varepsilon - \rho}{R + \varepsilon + \rho} \int_0^{2\pi} v_{n,p}(R + \varepsilon, \psi) d\psi \leq v_{n,p}(\rho, \varphi) \leq$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{R + \varepsilon + \rho}{R + \varepsilon - \rho} \int_0^{2\pi} v_{n,p}(R + \varepsilon, \psi) d\psi.$$

Но в силу формулы среднего значения гармонической функции в  $\mathbb{R}^2$  в (3.16)  $(1/2\pi) \int_0^{2\pi} v_{n,p}(R + \varepsilon, \psi) d\psi = v_{n,p}(\mathbf{x}_0)$ . С учетом этого выводим, что

$$\frac{R + \varepsilon - \rho}{R + \varepsilon + \rho} v_{n,p}(\mathbf{x}_0) \leq v_{n,p}(\mathbf{x}) \equiv v_{n,p}(\rho, \varphi) \leq \frac{R + \varepsilon + \rho}{R + \varepsilon - \rho} v_{n,p}(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{K}_0. \quad (6.10)$$

Из условий теоремы вытекает, что  $v_{n,p}(\mathbf{x}_0) \rightarrow 0$  при  $n, p \rightarrow \infty$ . Из (6.10) тогда следует, что последовательность  $u_n$  сходится равномерно в  $\overline{K}_0$ . Отсюда вытекает с учетом первой теоремы Гарнака, что предельная функция  $u$  является гармонической внутри  $K_0$ .

Чтобы доказать сходимость последовательности (6.5) в любой точке  $\mathbf{y}$  области  $\Omega$ , соединим эту точку с  $\mathbf{x}_0$  ломаной  $l$ , состоящей из конечного числа звеньев и лежащей целиком внутри  $\Omega$ ; это возможно по определению области. Ломаная  $l$  вместе с точками  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{y}$  есть замкнутое множество. Так как она не имеет общих точек с границей области  $\Omega$ , то она находится на положительном расстоянии  $\delta$  от этой границы, которая также является замкнутым множеством. Возьмем теперь на пересечении окружности  $K_0$  с линией  $l$  точку  $\mathbf{x}_1$ . Вокруг этой точки, как центра, опишем круг  $K_1$  радиуса  $\delta/2$ . Из доказанной выше равномерной сходимости последовательности  $u_n$  в круге  $K_0$  вытекает ее сходимость в точке  $\mathbf{x}_1$ . Дословно повторяя приведенные выше рассуждения, показываем, что последовательность  $u_n$  сходится и в круге  $K_1$ . Точно так же она сходится равномерно в круге  $K_2$  радиуса  $\delta/2$  и на его границе, если центр  $K_2$  лежит на пересечении  $l$  с окружностью  $K_1$ . Конечным числом таких кругов  $K_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) можно покрыть всю линию  $l$ , причем так, чтобы точка  $\mathbf{y}$  лежала внутри  $K_N$ . Отсюда будет вытекать, что на всей линии  $l$  и, в частности, в точке  $\mathbf{y}$  последовательность  $u_n$  сходится. Так как в каждом из кругов  $K_i$ , и в частности в  $K_N$ , эта последовательность сходится равномерно, то по первой теореме Гарнака предельная функция будет гармонической в окрестности  $\mathbf{y}$ .

Осталось доказать, что последовательность  $u_n$  равномерно сходится на всяком замкнутом ограниченном множестве  $\overline{\Omega}_0$ , лежащем внутри  $\Omega$ . По теореме Гейне–Бореля множество  $\overline{\Omega}_0$  можно покрыть конечным числом кругов  $K_1, \dots, K_N$ , лежащих вместе со своими границами внутри  $\Omega$ . Согласно доказанному выше последовательность  $u_n$  сходится в центре каждого из этих

кругов. С учетом этого, повторяя приведенные выше рассуждения, показываем, что эта последовательность равномерно сходится в каждом из кругов  $K_i$ , а следовательно, и на всем множестве  $\overline{\Omega}_0$ . ■

Эту теорему часто называют *второй теоремой Гарнака*.

**ТЕОРЕМА 6.4** (об оценках производных гармонических функций). *Пусть в области  $\Omega$  задано семейство равномерно ограниченных гармонических функций. Тогда в любой области  $\Omega_0$ , содержащейся вместе со своей границей внутри  $\Omega$ , производные всех функций этого семейства равномерно ограничены.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $M$  – верхняя грань модулей функций рассматриваемого семейства, а  $\gamma > 0$  – наименьшее расстояние от границы области  $\Omega_0$  до границы  $\Omega$ . Тогда круг радиуса  $\delta = \gamma/2$  с центром в произвольной точке  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$  области  $\Omega_0$  целиком лежит внутри  $\Omega$ .

Так как производная гармонической функции также гармонична, то, используя формулу о среднем значении в (3.16) и формулу (2.4), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\pi\delta^2} \int_K \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = \frac{4}{\pi\gamma^2} \int_{\partial K} u \cos(\mathbf{n}, x) ds. \quad (6.11)$$

Здесь  $u$  – произвольная функция рассматриваемого семейства,  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к  $\partial K$ . Из (6.11) вытекает неравенство

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}_0) \right| \leq \frac{4}{\pi\gamma^2} M \cdot \pi\gamma = \frac{4M}{\gamma}.$$

Ввиду произвольности  $\mathbf{x}_0$  и функции  $u$  отсюда следует равномерная ограниченность в  $\Omega_0$  производных по  $x$  от всех функций семейства. Аналогично доказывается равномерная ограниченность в  $\Omega_0$  производных по  $y$ . ■

**ТЕОРЕМА 6.5** (о компактности семейства равномерно ограниченных гармонических функций). *Из любого бесконечного семейства гармонических функций, равномерно ограниченных в области  $\Omega$ , можно выделить бесконечную подпоследовательность, равномерно сходящуюся в любой ограниченной области  $\Omega_0$ , содержащейся вместе с границей внутри  $\Omega$ .*

Это утверждение вытекает из теоремы Арцела, так как, вследствие теоремы 6.4, все функции семейства равностепенно непрерывны в  $\Omega_0$ .

**ТЕОРЕМА 6.6.** (Теорема Лиувилля). *Функция  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , удовлетворяющая уравнению Лапласа на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ , не может быть ограниченной сверху или снизу, если она не постоянна.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что  $u$  ограничена снизу, т. е.  $u(\mathbf{x}) \geq m = \text{const}$  для всех  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Добавляя при необходимости к функции  $u$  постоянную, мы всегда можем достигнуть того, чтобы выполнялось условие  $m \geq 0$ . Учитывая это условие, покажем, что значение  $u$  в любой точке  $\mathbf{x} = (x, y)$  в точности равно значению  $u$  в начале координат  $(0, 0)$ . Тем самым будет показано, что  $u = \text{const}$ . Возьмем для этого круг  $K$  с центром

в  $(0, 0)$  такого радиуса  $R$ , чтобы точка  $\mathbf{x}$  лежала внутри него. Представляя в  $K$  функцию  $u$  в виде интеграла Пуассона (4.31), будем иметь

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \psi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \psi)} d\psi, \quad \rho = |\mathbf{x}|.$$

Отсюда, рассуждая, как при выводе (6.10), выводим, что

$$\frac{R - \rho}{R + \rho} u(0, 0) \leq u(\mathbf{x}) \leq \frac{R + \rho}{R - \rho} u(0, 0).$$

При  $R \rightarrow \infty$  получаем, что  $u(0, 0) \leq u(\mathbf{x}) \leq u(0, 0) \Rightarrow u(\mathbf{x}) = u(0, 0)$  ■.

**СЛЕДСТВИЕ 6.1.** *Функция  $u$ , являющаяся гармонической на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ , necessarily является константой.*

**ТЕОРЕМА 6.7** (об устранимой особенности). *Пусть  $u$  – ограниченная функция, гармоническая в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$ , за исключением самой точки  $\mathbf{x}_0$ , где  $u$  не определена. Тогда функцию  $u$  можно определить в точке  $\mathbf{x}_0$  так, чтобы  $u$  была гармонической во всей рассматриваемой окрестности точки  $\mathbf{x}_0$ , в том числе и в самой точке  $\mathbf{x}_0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для простоты обозначений примем точку  $\mathbf{x}_0$  за начало координат. Пусть  $K$  – круг радиуса  $R$  с центром в  $\mathbf{x}_0$ , целиком лежащий внутри рассматриваемой окрестности  $\mathbf{x}_0$ . Пусть  $u_1$  – гармоническая внутри  $K$  функция, которая совпадает с  $u$  на границе  $K$ . Положим  $u - u_1 \equiv v$ . Функция  $v$  ограничена и гармонична во всем круге  $K$ , кроме точки  $\mathbf{x}_0$ , где она не определена. На окружности  $\partial K$  функция  $v$  обращается в нуль. Покажем, что в любой точке  $\mathbf{x}^0 \in K$ , кроме точки  $\mathbf{x}_0$ ,  $v(\mathbf{x}^0) \equiv 0$  и, следовательно,  $u(\mathbf{x}^0) = u_1(\mathbf{x}^0)$ . Для доказательства этого факта построим, следуя методу гармонических мажорант, функцию

$$v_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{M \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/R)}{\ln(\varepsilon/R)}. \quad (6.12)$$

Здесь  $M = \sup_{\mathbf{x} \in K} |v(\mathbf{x})|$ ,  $\varepsilon$  – положительное число такое, что  $\mathbf{x}^0$  принадлежит кольцу  $K_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in K : \varepsilon < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|\}$ . Ясно, что функция  $v_\varepsilon$  гармонична в  $K_\varepsilon$  и непрерывна в замыкании  $\overline{K}_\varepsilon$ . Кроме того, она положительна в  $K_\varepsilon$ , равна нулю при  $\rho = R$  и равна  $M$  при  $\rho = \varepsilon$ . Из свойств функции  $v$  вытекает, что на границе  $\partial K_\varepsilon$  кольца  $K_\varepsilon$  выполняется условие

$$|v(\mathbf{x})| \leq v_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0). \quad (6.13)$$

Это означает, что  $v_\varepsilon$  является гармонической мажорантой функции  $v$  на  $\partial K_\varepsilon$ . Из следствия 3.5 вытекает тогда, что (6.13) выполняется в каждой точке кольца  $K_\varepsilon$ , в том числе и в точке  $\mathbf{x}^0$ , так что

$$|v(\mathbf{x}^0)| \leq v_\varepsilon(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_0) = M \frac{\ln(|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_0|/R)}{\ln(\varepsilon/R)}. \quad (6.14)$$



Устремим  $\varepsilon$  к нулю. Тогда правая часть в (6.14) также будет стремиться к нулю. В таком случае из (6.14) будет вытекать, что  $v(\mathbf{x}^0) = 0$ .

Для доказательства теоремы осталось принять  $v(\mathbf{x}_0) = 0$ , т. е. положить  $u(\mathbf{x}_0) = u_1(\mathbf{x}_0)$ . Доопределенная таким образом в  $\mathbf{x}_0$  функция  $u$  будет совпадать всюду в  $K$  с гармонической функцией  $u_1$ . ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.1.** Теорема 6.7 верна в более общей формулировке, а именно: пусть  $u$  – гармоническая функция в окрестности точки  $\mathbf{x}_0$ , за исключением самой точки  $\mathbf{x}_0$ , где  $u$  не определена, и пусть для любой точки  $\mathbf{x}$  из этой окрестности выполняется условие

$$|u(\mathbf{x})| \leq \mu(\mathbf{x}) \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (6.15)$$

Здесь  $\mu(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ , когда  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ . При этих условиях функцию  $u$  можно определить в точке  $\mathbf{x}_0$  так, чтобы  $u$  являлась гармонической во всей рассматриваемой окрестности точки  $\mathbf{x}_0$ , в том числе и в самой точке  $\mathbf{x}_0$ . Доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы 6.7.

**СЛЕДСТВИЕ 6.2.** Пусть  $u$  – ограниченная и гармоническая в области  $\Omega$  функция, непрерывная во всех точках границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ , за исключением конечного числа точек. При этих условиях функция  $u$  не может внутри  $\Omega$  принимать значения, большие, чем верхняя грань значений  $u$  на границе  $\partial\Omega$ , и меньшие, чем нижняя грань значений  $u$  на границе  $\partial\Omega$ .

Действительно, пусть  $M = \sup_{\mathbf{x} \in \Gamma} u(\mathbf{x})$ . Для простоты предположим, что  $u$  непрерывна во всех точках границы  $\partial\Omega$ , за исключением одной точки  $\mathbf{x}_1$ . Пусть диаметр области  $\Omega$  равен  $R$ , так что точки  $\Omega$  отстоят от  $\mathbf{x}_1$  не больше, чем на  $R$ . Введем функцию  $v_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) = M + \varepsilon \ln(R/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|)$ . Рассмотрим область  $\Omega_\delta$ , состоящую из точек области  $\Omega$ , расстояние от которых до  $\mathbf{x}_1$  больше  $\delta$ . Легко видеть, что на границе этой области  $u(\mathbf{x}) < v_\varepsilon(\mathbf{x})$ , если  $\delta$  достаточно мало. В силу принципа максимума тогда имеем  $u(\mathbf{x}) < v_\varepsilon(\mathbf{x})$  в  $\Omega_\delta$ . Устремляя  $\varepsilon$  к нулю, получаем, что  $u(\mathbf{x}) < M$  в любой точке  $\mathbf{x}$  области  $\Omega_\delta$ . Точно так же выводим, что  $u(\mathbf{x}) > m$ , где  $m = \inf_{\mathbf{x} \in \Gamma} u(\mathbf{x})$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.2.** Все доказанные выше свойства гармонических функций от двух переменных сохраняются для гармонических функций любого числа  $n$  переменных. При этом условие (6.15) заменяется условием  $|u(\mathbf{x})| \leq \mu(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{2-n}$ , где  $\mu(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ , когда  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ .

## Задачи к гл. 6

1. Пусть для любой сферы  $\Gamma$ , лежащей в области  $\Omega$ , функция  $u \in C^1(\Omega)$  удовлетворяет условию  $\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$ . Доказать, что  $u$  гармонична в  $\Omega$ .

2. Доказать, что функция  $u \in C^2(\Omega)$ , удовлетворяющая в  $\Omega$  уравнению Гельмгольца  $\Delta u + \lambda u = 0$ , где  $\lambda = \text{const}$ , аналитична в  $\Omega$ . (Следствием является аналитичность в  $\Omega$  собственной функции любой краевой задачи для оператора Лапласа в  $\Omega$ ).

# ГЛАВА 7. Элементы теории потенциала

## § 7.1. Объемные потенциалы и их свойства

**7.1.1. Определение объемного потенциала.** Непрерывная дифференцируемость объемного потенциала в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Обозначим через  $E_n(\cdot, \mathbf{y})$  сингулярное решение оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^n$ , определяемое формулой

$$E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\omega_n |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-2}} \quad \text{при } n \geq 3 \quad (1.1)$$

и

$$E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{при } n = 2.$$

Здесь  $\omega_n$  – мера единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$  (см. § 6.1). В частности,  $\omega_n = 4\pi$  при  $n = 3$ , так что

$$E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (1.2)$$

Ясно, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\partial}{\partial y_i} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \nabla_x E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\nabla_y E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.3)$$

Введем пару  $(\Omega, \rho)$ , где  $\Omega$  – некоторое множество в  $\mathbb{R}^n$  с границей  $\Gamma$ , а  $\rho$  – заданная в  $\Omega$  функция. Будем предполагать, что выполняются условия:

- (i)  $\Omega$  – ограниченное открытое (кубируемое) множество в  $\mathbb{R}^n$ ;
- (ii)  $\rho$  – ограниченная интегрируемая в  $\Omega$  функция:  $|\rho(\mathbf{y})| \leq M \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.** *Объемным (логарифмическим при  $n = 2$ ) потенциалом пары  $(\Omega, \rho)$  называется функция  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемая в каждой точке  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  формулой*

$$u(\mathbf{x}) = [A\rho](\mathbf{x}) \equiv \int_{\Omega} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.4)$$

Из результатов § 6.1 вытекает, что при выполнении условий (i), (ii) объемный потенциал (1.4) существует как собственный интеграл в любой точке  $\mathbf{x} \in \Omega_e$ , где  $\Omega_e \equiv \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$  – внешность  $\Omega$ , и как несобственный интеграл в любой точке  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ . Более того, так как  $E_n(\cdot, \mathbf{y})$  при всех  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  является всюду в  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{y}\}$  решением уравнения Лапласа, то потенциал  $u$  является бесконечно дифференцируемой и, более того, аналитической в  $\Omega_e$  (в силу теоремы 6.1 гл. 6) функцией, удовлетворяющей в  $\Omega_e$  уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0. \quad (1.5)$$

Из (1.4) и свойств сингулярного решения  $E_n$  вытекает также, что при  $n \geq 3$  потенциал  $u(\mathbf{x})$  стремится к нулю при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  с порядком  $O(|\mathbf{x}|^{2-n})$ , т. е.

$$|u(\mathbf{x})| \leq \frac{C}{|\mathbf{x}|^{n-2}} \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (1.6)$$

где  $C$  – константа, зависящая от  $u$  и  $\Omega$ . В случае же  $n = 2$  формула (1.4) принимает вид

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

или

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{\ln |\mathbf{x}|}{2\pi} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.7)$$

Поскольку

$$\ln \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rightarrow 0 \text{ при } \mathbf{x} \rightarrow \infty \quad (1.8)$$

равномерно по  $\mathbf{y} \in \Omega$ , то второе слагаемое в (1.7) равномерно стремится к нулю при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . В то же время первое слагаемое имеет логарифмическую особенность при  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что логарифмический потенциал пары  $(\Omega, \rho)$  в  $\mathbb{R}^2$  имеет логарифмическую особенность при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , исключая случай, когда его плотность  $\rho$  удовлетворяет условию

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0. \quad (1.9)$$

При выполнении условия (1.9) логарифмический потенциал  $u(\mathbf{x})$  равномерно стремится к нулю при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

Установим еще ряд дополнительных свойств объемного потенциала при выполнении условий (i), (ii). Прежде всего отметим, что потенциал  $u$  является непрерывной функцией всюду в  $\mathbb{R}^n$ . (На это свойство будем ссылаться как на свойство *глобальной непрерывности* потенциала в  $\mathbb{R}^n$ ). Действительно, непрерывность  $u$  в точках  $\Omega_e$  очевидна, а в точках  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$  она вытекает из  $n$ -мерного аналога теоремы 1.2 гл. 6, примененной к функции (1.4).

Покажем, более того, что при выполнении условий (i), (ii) потенциал  $u$  является не только непрерывной, но и непрерывно дифференцируемой функцией в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , причем производные по  $x_i$  в любой точке  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  получаются дифференцированием в (1.4) по параметру  $x_i$  под знаком интеграла, так что справедлива следующая формула:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.10)$$

В случае трех измерений формула (1.10) переходит в формулу

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.11)$$

доказанную в § 6.1 в случае, когда  $\mathbf{x}$  лежит вне  $\overline{\Omega}$ .

В силу аналитичности потенциала  $u$  в  $\Omega_e$  достаточно доказать (1.10) в случае, когда  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ . Рассматривая для конкретности и наглядности случай трех измерений, возьмем произвольную точку  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \overline{\Omega}$  и введем точку  $\mathbf{x}' = (x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3)$ . Предполагая, что  $\mathbf{x}' \in \Omega$ , составим отношение

$$\frac{\Delta_{x_1} u(\mathbf{x})}{\Delta x_1} = \frac{u(\mathbf{x}') - u(\mathbf{x})}{\Delta x_1}$$

и рассмотрим разность

$$\alpha = \frac{\Delta_{x_1} u(\mathbf{x})}{\Delta x_1} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{y_1 - x_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.12)$$

Докажем, что  $\alpha$  стремится к нулю при  $\Delta x_1 \rightarrow 0$ .

Зададим  $\varepsilon > 0$  и обозначим через  $B_{\delta}(\mathbf{x})$  шар достаточно малого радиуса  $\delta = \delta(\varepsilon)$ . Положим

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= u_1(\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{B_{\delta}(\mathbf{x}) \cap \Omega} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega \setminus \overline{B_{\delta}(\mathbf{x})}} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}, \\ u(\mathbf{x}') &= u_1(\mathbf{x}') + u_2(\mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \int_{B_{\delta}(\mathbf{x}) \cap \Omega} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega \setminus \overline{B_{\delta}(\mathbf{x})}} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

С учетом (1.13) разность (1.12) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \alpha &= \left( \frac{u_1(\mathbf{x}') - u_1(\mathbf{x})}{\Delta x_1} \right) - \left( \frac{1}{4\pi} \int_{B_{\delta}(\mathbf{x}) \cap \Omega} \frac{y_1 - x_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) + \\ &+ \left( \frac{u_2(\mathbf{x}') - u_2(\mathbf{x})}{\Delta x_1} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega \setminus \overline{B_{\delta}(\mathbf{x})}} \frac{y_1 - x_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Оценим каждое из трех слагаемых в (1.14). Ясно в силу равномерной сходимости интеграла в правой части (1.11), вытекающей из леммы 1.4 гл. 6, что второе слагаемое в (1.14) может быть сделано меньше  $\varepsilon/3$  за счет выбора достаточно малого числа  $\delta = \delta(\varepsilon)$ . Для оценки первого слагаемого рассмотрим треугольник с вершинами в точках  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{y}$ . Поскольку стороны этого треугольника равны  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ ,  $|\mathbf{x}' - \mathbf{y}|$  и  $|\Delta x_1|$ , то, очевидно, имеем

$|\mathbf{x}' - \mathbf{y}| - |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < |\Delta x_1|$ . Используя эту оценку и известное неравенство  $|ab| \leq (1/2)(a^2 + b^2)$ , приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_1(\mathbf{x}') - u_1(\mathbf{x})}{\Delta x_1} \right| &= \frac{1}{4\pi|\Delta x_1|} \left| \int_{B_\delta(\mathbf{x}) \cap \Omega} \frac{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}| - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}||\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \leq \\ &\leq \frac{M}{8\pi} \int_{B_\delta(\mathbf{x})} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}|^2} + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \right) d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

В силу равномерной сходимости интеграла  $\int_{\Omega} \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}$ , вытекающей из той же леммы 1.4 гл. 6, правая часть неравенства (1.15) может быть сделана меньше  $\varepsilon/3$  за счет выбора достаточно малого числа  $\delta = \delta(\varepsilon)$ .

Обратимся теперь к третьему слагаемому в (1.14). Поскольку  $u_2(\mathbf{x})$  представляет собой собственный интеграл в малой окрестности точки  $\mathbf{x}$ , то его можно дифференцировать под знаком интеграла. Это означает, что при  $|\Delta x_1| < \delta'$ , где  $\delta'$  достаточно мало, выполняется условие

$$\left| \frac{u_2(\mathbf{x}') - u_2(\mathbf{x})}{\Delta x_1} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega \setminus \overline{B}_\delta(\mathbf{x})} \frac{y_1 - x_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.16)$$

С учетом предыдущего приходим к выводу, что при достаточно малых  $|\Delta x_1|$  выполняется условие  $|\alpha| \leq \varepsilon$ . Это означает справедливость (1.11) при  $i = 1$ . Аналогично доказывается справедливость (1.11) при  $i = 2$  и  $3$ .

Поскольку правая часть в (1.11), будучи равномерно сходящимся интегралом в каждой точке  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$  в силу леммы 1.4 гл. 6, является непрерывной на  $\overline{\Omega}$ , то из (1.11) вытекает, что  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ . Обобщая полученные результаты на случай  $n$  измерений, приходим к следующему утверждению.

**ЛЕММА 1.1.** Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда объемный потенциал  $u = Ar$  является непрерывно дифференцируемой функцией в пространстве  $\mathbb{R}^n$  и выполняются соотношения (1.10).

**7.1.2. Существование производных второго порядка от объемного потенциала.** Предположим в дополнение к (i), (ii), что  $\rho$  непрерывна в  $\overline{\Omega}$  и имеет непрерывные ограниченные в  $\Omega$  производные, т. е. что

(iii)  $\rho \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ ,  $|\nabla \rho| \leq M_1 < \infty$  в  $\overline{\Omega}$ .

**ЛЕММА 1.2.** При выполнении условий (i), (iii) объемный потенциал  $u = Ar$  принадлежит пространству  $C^2(\Omega)$ , т. е. является дважды непрерывно дифференцируемой функцией внутри области  $\Omega$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\mathbf{x} \in \Omega$  – произвольная точка. Предположим сначала, что граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  обладает гладкостью, необходимой для применения формулы интегрирования по частям (2.4) из гл. 6, например:

(iv) граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  является кусочно-гладкой.

Обратимся к формуле (1.10) для  $\partial u / \partial x_i$ . Учитывая согласно (1.3), что

$\partial E_n / \partial x_i = -\partial E_n / \partial y_i$ , и применяя указанную формулу интегрирования, перепишем (1.10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y_i} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\ &= \int_{\Omega} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y} - \int_{\Gamma} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \cos(\mathbf{n}_y, y_i) d\sigma_y. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь  $\mathbf{n}_y$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\Gamma$  в точке  $\mathbf{y}$ ,  $d\sigma_y$  – элемент площади поверхности, относящийся к точке  $\mathbf{y}$ .

При  $\mathbf{x} \in \Omega$  второе слагаемое в правой части (1.17) имеет (в силу бесконечной дифференцируемости функции  $E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  при  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \Gamma$ ) непрерывные производные по  $x_i$ , которые могут быть вычислены дифференцированием под знаком интеграла. Ввиду непрерывности и ограниченности  $\partial \rho / \partial y_i$  в области  $\Omega$  первое слагаемое в правой части этой формулы имеет в силу леммы 1.1 непрерывные производные 1-го порядка, причем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Omega} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \frac{\partial E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y}. \quad (1.18)$$

Это означает, что  $u \in C^2(\Omega)$  при выполнении условий (i), (iii), (iv), причем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i^2} &= \int_{\Omega} \frac{\partial E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y} - \int_{\Gamma} \frac{\partial E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} \rho(\mathbf{y}) \cos(\mathbf{n}_y, y_i) d\sigma_y = \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y} + \int_{\Gamma} \frac{\partial E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} \rho(\mathbf{y}) \cos(\mathbf{n}_y, y_i) d\sigma_y, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Если же граница  $\Gamma$  не обладает нужной гладкостью, то выделим в  $\Omega$  произвольную строго внутреннюю подобласть  $\Omega' \subset \Omega$  с гладкой границей  $\Gamma'$ , содержащую точку  $\mathbf{x}$ , и перепишем первое равенство в (1.17) в виде

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} = - \int_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial y_i} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\Omega \setminus \Omega'} \frac{\partial}{\partial y_i} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Применяя к первому интегралу в правой части формулу (2.4) гл. 6, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} &= \int_{\Omega'} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y} - \\ &- \int_{\Gamma'} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \cos(\mathbf{n}'_y, y_i) d\sigma'_y - \int_{\Omega \setminus \Omega'} \frac{\partial}{\partial y_i} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Здесь  $d\sigma'_y$  – элемент площади поверхности  $\Gamma'$ ,  $\mathbf{n}'_y$  – единичный вектор внешней нормали к  $\Gamma'$  в точке  $\mathbf{y} \in \Gamma'$ . Непрерывная дифференцируемость первых двух слагаемых в правой части этой формулы при  $\mathbf{x} \in \Omega'$  доказывается

точно так же, как непрерывная дифференцируемость обоих слагаемых в (1.17). Что касается третьего слагаемого, то оно является бесконечно дифференцируемой по  $\mathbf{x}$  функцией, поскольку  $\mathbf{x} \in \Omega'$ . Отсюда вытекает, что  $u \in C^2(\Omega')$ . Поскольку  $\Omega'$  является произвольной подобластью области  $\Omega$ , то последнее означает, что на самом деле  $u \in C^2(\Omega)$ . ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Отметим, что функции  $\partial^2 u / \partial x_i^2$  в общем случае не определены в точках границы  $\Gamma$  множества  $\Omega$ . Поэтому, вообще говоря,  $u \notin C^2(\bar{\Omega})$ .

Докажем теперь, что объемный потенциал (1.4) удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta u(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}) \quad (1.20)$$

в каждой точке  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Опять для простоты и наглядности изложения будем рассматривать случай трех измерений. Предположим сначала, что граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  удовлетворяет условию (iv), так что выполняется (1.19).

Суммируя соотношения в (1.19) по индексу  $i$  от 1 до 3 и полагая  $E \equiv E_3$ , имеем с учетом определения сходящегося несобственного интеграла, что

$$\begin{aligned} \Delta u(\mathbf{x}) &= - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y} + \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} \rho(\mathbf{y}) \cos(\mathbf{n}_y, y_i) d\sigma_y = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\varepsilon}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y} + \int_{\Gamma} \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} \rho(\mathbf{y}) d\sigma_y. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Здесь  $\Omega_{\varepsilon} \equiv \Omega_{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \Omega : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| > \varepsilon\} = \Omega \setminus \bar{B}_{\varepsilon}(\mathbf{x})$ . Так как в силу свойств сингулярного решения  $E$  имеем  $\Delta_{\mathbf{y}} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_{\varepsilon}(\mathbf{x})$ , то

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho}{\partial y_i} \frac{\partial E}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \rho \frac{\partial E}{\partial y_i} \right) \quad \text{в } \Omega_{\varepsilon}(\mathbf{x}). \quad (1.22)$$

Учитывая (1.22) и применяя формулу Гаусса–Остроградского (2.2) из гл. 6 для области  $\Omega_{\varepsilon}$ , имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\varepsilon}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y} &= \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \rho(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} \right) d\mathbf{y} = \\ &= \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \rho(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Здесь  $\Gamma_{\varepsilon}$  – граница шара  $B_{\varepsilon}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{n}_y$  – внешняя к  $\Omega_{\varepsilon}$  нормаль.

Поскольку  $\mathbf{n}_y = (\mathbf{x} - \mathbf{y})/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  на  $\Gamma_{\varepsilon}(\mathbf{x})$ , то с учетом формулы (1.16) гл. 6 имеем

$$\frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} = \frac{1}{4\pi} \nabla_y \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \cdot \mathbf{n}_y = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_y}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \quad \text{на } \Gamma_{\varepsilon}(\mathbf{x}). \quad (1.24)$$

Из (1.21), (1.23) и (1.24) следует, что

$$\begin{aligned}\Delta u(\mathbf{x}) &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \rho(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|=\varepsilon} \frac{\rho(\mathbf{y}) d\sigma_y}{4\pi|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2} = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|=\varepsilon} \frac{\rho(\mathbf{y}) - \rho(\mathbf{x})}{4\pi\varepsilon^2} d\sigma_y - \rho(\mathbf{x}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|=\varepsilon} \frac{d\sigma_y}{4\pi\varepsilon^2}.\end{aligned}\quad (1.25)$$

Но  $\int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|=\varepsilon} d\sigma_y = 4\pi\varepsilon^2 \quad \forall \varepsilon > 0$ . Кроме того, в силу условия (iii) имеем  $|\rho(\mathbf{y}) - \rho(\mathbf{x})| \leq \sup_{\mathbf{y} \in \bar{\Omega}} |\nabla \rho(\mathbf{y})| |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq M_1 |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ . С учетом этого выводим, что

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\rho(\mathbf{y}) - \rho(\mathbf{x})}{4\pi\varepsilon^2} d\sigma_y \right| \leq \frac{M_1}{4\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\varepsilon^2} d\sigma_y \leq M_1 \varepsilon \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Поэтому, переходя в (1.25) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим (1.20).

Если же  $\Omega$  – произвольное открытое ограниченное множество, как указано в условии (i), то для доказательства (1.20) в окрестности произвольной точки  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ , достаточно представить  $u(\mathbf{x})$  в виде

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_R} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{B_R(\mathbf{x}_0)} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in B_R(\mathbf{x}_0), \quad (1.26)$$

где шар  $B_R(\mathbf{x}_0)$  лежит в области  $\Omega$ ,  $\Omega_R \equiv \Omega_R(\mathbf{x}_0) = \Omega \setminus \overline{B_R(\mathbf{x}_0)}$ . Первое слагаемое в (1.26) является гармонической функцией внутри шара  $B_R(\mathbf{x}_0)$ , поскольку  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \Omega_R$ , а для второго слагаемого можно применить приведенные выше рассуждения. Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 1.1.** Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда объемный потенциал  $u = A\rho$  принадлежит пространству  $C^1(\mathbb{R}^n)$ , удовлетворяет при  $n \geq 3$  условию (1.6) на бесконечности, а его сужение на внешность  $\Omega_\varepsilon$  множества  $\Omega$  является аналитической в  $\Omega_\varepsilon$  функцией, удовлетворяющей уравнению Лапласа. Если, более того, выполняются условия (iii), то тогда сужение потенциала  $u$  на область  $\Omega$  принадлежит классу  $C^2(\Omega)$  и удовлетворяет в каждой точке  $\mathbf{x} \in \Omega$  уравнению Пуассона (1.20).

**7.1.3. Обзор дополнительных свойств объемного потенциала. Эллиптическая регулярность.** Приведем здесь обзор некоторых дополнительных свойств объемного потенциала. Начнем с того, что условие (iii), будучи достаточным условием непрерывности вторых производных потенциала  $u$  внутри  $\Omega$ , может быть ослаблено. Чтобы сформулировать более общее условие, введем в рассмотрение пространство функций, удовлетворяющих условию Гельдера.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Говорят, что функция  $f : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет в  $\bar{\Omega}$  условию Гельдера с показателем  $\alpha > 0$  и константой  $L$ , если для любой пары точек  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ,  $\mathbf{y} \in \bar{\Omega}$  выполняется неравенство

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\alpha.$$

Обозначим через  $C^\alpha(\bar{\Omega})$  множество всех функций, удовлетворяющих условию Гельдера в  $\bar{\Omega}$  с показателем  $\alpha \in (0, 1]$ . Ясно, что каждая функция  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  является непрерывной в  $\Omega$  и, следовательно,  $C^\alpha(\bar{\Omega}) \subset C(\bar{\Omega})$ . Для каждой функции  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  введем норму по формуле

$$\|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C(\bar{\Omega})} + \|f\|_{H^\alpha(\bar{\Omega})}, \quad \|f\|_{H^\alpha(\bar{\Omega})} \equiv \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{\Omega} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\alpha}. \quad (1.27)$$

Известно, что пространство  $C^\alpha(\bar{\Omega})$  с так введенной нормой является полным нормированным, т. е. банаховым пространством [28].

Через  $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$  обозначим подпространство пространства  $C^m(\bar{\Omega})$ , состоящее из функций в  $\bar{\Omega}$ , все  $m$ -е частные производные которых удовлетворяют условию Гельдера в  $\bar{\Omega}$  с показателем  $\alpha$ . Можно показать, что  $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$  - банахово пространство по норме  $\|\cdot\|_{C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})}$ , определенной формулой

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C^m(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=m} \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{H^\alpha(\bar{\Omega})}. \quad (1.28)$$

Наряду с пространством  $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$  будем также рассматривать его надпространство  $C^{m,\alpha}(\Omega)$ . Оно состоит из всех функций пространства  $C^m(\Omega)$ , которые удовлетворяют условию Гельдера с показателем  $\alpha$  локально в  $\Omega$ , т. е. на любом компакте  $K$ , целиком лежащем в  $\Omega$ . В случае неограниченной области  $\Omega_e$  под  $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega}_e)$  будем понимать подпространство пространства  $C^m(\bar{\Omega}_e)$ , введенного в § 6.3, состоящее из функций  $f$ , все  $m$ -е производные которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем  $\alpha$  в области вида  $\bar{\Omega}_e \cap B_R$ , где  $\bar{\Omega}_e = \Omega_e \cup \Gamma$ , а  $B_R$  - шар любого радиуса  $R$ . Точно так же под  $C^{m,\alpha}(\Omega_e)$  будем понимать подпространство пространства  $C^m(\Omega_e)$ , состоящее из функций  $f$ , все  $m$ -е производные которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем  $\alpha$  локально в  $\Omega_e$ , т. е. на любом компакте  $K \subset \Omega_e$ .

Мы уже знаем, что свойства потенциала  $u$  в областях  $\Omega$  и  $\Omega_e$  сильно различаются между собой. С учетом этого введем специальные обозначения для сужений  $u$  на  $\Omega$  и  $\Omega_e$ :  $u^+ = u|_\Omega$ ,  $u^- = u|_{\Omega_e}$ . Функцию  $u^+$  (либо  $u^-$ ) будем называть внутренним (либо внешним) потенциалом пары  $(\Omega, \rho)$ . Будем говорить, что открытое множество  $\Omega'$  является строго внутренним подмножеством множества  $\Omega$ , и писать  $\Omega' \subset\subset \Omega$ , если  $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ . Предположим, что вместо (iii) выполняется условие

(v)  $\rho \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Используя введенные пространства, сформулируем следующий результат.

ЛЕММА 1.3. Пусть выполняются условия (i), (v). Тогда  $u^+ \in C^{2,\alpha}(\Omega)$  и для любого открытого подмножества  $\Omega' \subset \subset \Omega$  справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})} \leq C\|\rho\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}. \quad (1.29)$$

Здесь  $C$  – константа, зависящая от  $\Omega'$ ,  $n$  и  $\alpha$ , но не зависящая от  $\rho$ .

Отметим две особенности оценки (1.29). Во-первых, она носит локальный характер в том смысле, что в левой части  $C^{2,\alpha}$ -норма потенциала  $u$  вычисляется не по всей области  $\Omega$ , а лишь по ее строго внутренней подобласти  $\Omega'$ . Это связано с тем, что в формулировке леммы 1.3 не вводится каких-либо предположений о гладкости границы  $\Gamma$ , которая в общем случае может быть весьма нерегулярной. Последнее определяет поведение решения  $u$  вблизи границы, которое также может быть достаточно нерегулярным. Однако в том случае, когда в дополнение к условию (v) граница  $\Gamma$  обладает определенной регулярностью, потенциал  $u$  также будет регулярным в окрестности границы  $\Gamma$  в том смысле, что вторые производные потенциала, существующие как в  $\Omega$ , так и  $\Omega_e$ , допускают непрерывные продолжения как на  $\overline{\Omega}$ , так и на  $\overline{\Omega}_e$ . При этом оценка (1.29) переходит в соответствующую глобальную оценку (см. ниже оценку (1.30)).

Более конкретно: будем говорить, что поверхность (кривая при  $n = 2$ )  $\Gamma$  принадлежит классу  $C^{l,\lambda}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \lambda < 1$ , если в некоторой окрестности  $B_r(\mathbf{x}_0)$  каждой точки  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$  она описывается уравнением  $F_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = 0$ , где  $F_{\mathbf{x}_0} \in C^{l,\lambda}(B_r(\mathbf{x}_0))$  и  $\text{grad} F_{\mathbf{x}_0} \neq 0$  (сравните это определение с определением в § 6.2). Справедлив следующий результат.

ЛЕММА 1.4. Пусть в дополнение к условиям (i), (v)  $\Gamma \in C^{2,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Тогда  $u^+ \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ ,  $u^- \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_e)$ , а оценка (1.29) справедлива при  $\Omega' = \Omega$ , т. е. принимает вид

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|\rho\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}. \quad (1.30)$$

Из леммы 1.4 вытекает, что в случае гладкой границы  $\Gamma$  потенциал  $u$  обладает в точках  $\mathbf{x} \in \Gamma$  односторонними вторыми производными как изнутри, так и извне, но не вытекает, что эти производные совпадают в точках  $\Gamma$ , образуя тем самым непрерывные в  $\mathbb{R}^n$  функции. Естественно, возникает вопрос о непрерывности вторых производных потенциала  $u$  в точках границы  $\Gamma$ . Для исследования этого вопроса рассмотрим область  $\tilde{\Omega}$ , целиком содержащую внутри себя  $\overline{\Omega}$ , и, продолжив плотность  $\rho$  нулем вне  $\overline{\Omega}$ , запишем потенциал (1.4) в виде

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\tilde{\Omega}} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\rho}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.31)$$

Здесь функция  $\tilde{\rho}$  определяется формулой

$$\tilde{\rho}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \text{ и } \tilde{\rho}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}. \quad (1.32)$$

Предположим, что пара  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\rho})$  удовлетворяют условиям (i), (iii) или (i), (v). Тогда, применяя к потенциалу (1.31) теорему 1.1 либо лемму 1.4, приходим к выводу, что  $u|_{\tilde{\Omega}} \in C^2(\tilde{\Omega})$ . Это условие вместе с условием  $u \in C^\infty(\Omega_e)$  позволяет сделать вывод, что  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ , т. е. что объемный потенциал обладает в этом случае свойством глобальной двукратной непрерывной дифференцируемости.

Чтобы сформулировать соответствующий результат, введем в рассмотрение следующее подпространство пространства  $C^{l,\alpha}(\overline{\Omega})$ :

$$\dot{C}^{l,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{\rho \in C^{l,\alpha}(\overline{\Omega}) : \tilde{\rho} \in C^{l,\alpha}(\mathbb{R}^n)\}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \dot{C}^\alpha(\overline{\Omega}) = \dot{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

По определению пространство  $\dot{C}^{l,\alpha}(\overline{\Omega})$  состоит из тех и только тех функций  $\rho \in C^{l,\alpha}(\overline{\Omega})$ , которые, будучи продолженными нулем вне  $\Omega$ , принадлежат пространству  $C^{l,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ . Из предыдущих рассуждений вытекает следующая

**ЛЕММА 1.5.** Пусть при выполнении условия (i)  $\rho \in \dot{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ . Тогда объемный потенциал  $u$  принадлежит пространству  $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$  и для любого ограниченного открытого множества  $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$  справедлива оценка

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})} \leq C \|\rho\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}. \quad (1.33)$$

Здесь  $C$  – константа, зависящая только от диаметра множества  $\Omega'$ ,  $n$  и  $\alpha$ .

Ясно, что выполнение условия (iii) либо (v) для функции  $\tilde{\rho}$  диктует определенные ограничения на поведение  $\rho(\mathbf{x})$  при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \Gamma$ . В частности, функция  $\rho(\mathbf{x})$  необходимо должна стремиться к нулю при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \Gamma$ . Последнее условие является жестким и в общем случае не выполняется. Отсюда вытекает, что в общем случае вторые производные от объемного потенциала в точках границы  $\Gamma$  не существуют, хотя могут существовать односторонние производные при выполнении условий леммы 1.4.

Еще одна особенность оценки (1.29), как и (1.33), заключается в том, что порядок гладкости потенциала  $u$  на две единицы превосходит порядок гладкости правой части  $\rho$ . Это не случайно, а является следствием проявления фундаментальной закономерности для эллиптических уравнений, получившей название свойства *эллиптической регулярности*. Согласно этому свойству порядок гладкости решения эллиптического уравнения порядка  $2m$  внутри области на  $2m$  единиц превосходит порядок гладкости правой части и коэффициентов рассматриваемого уравнения. Поскольку потенциал  $u$  является решением уравнения Пуассона (1.20), т. е. уравнения второго порядка, то в силу этого свойства гладкость потенциала  $u$  превосходит на две единицы гладкость правой части, а увеличение порядка гладкости правой части  $\rho$  уравнения (1.20) приводит к соответствующему увеличению

гладкости потенциала  $u$  внутри  $\Omega$ . В частности, при  $\rho \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$  потенциал  $u$  принадлежит  $C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$ , если же  $\rho \in \dot{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ , то  $u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ . Теперь мы в состоянии сформулировать следующую фундаментальную теорему.

**ТЕОРЕМА 1.2.** Пусть выполняются условия (i), (v). Тогда:

1) внутренний потенциал  $u^+$  принадлежит пространству  $C^{2,\alpha}(\Omega)$ ; внешний потенциал  $u^-$  является аналитической функцией в  $\Omega_e$ , удовлетворяющей при  $n \geq 3$  условию (1.6) при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Если к тому же  $\Gamma \in C^{2,\alpha}$ , то  $u^+ \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ ,  $u^- \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_e)$  и справедлива оценка (1.30);

2) если  $\rho \in \dot{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ , то  $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$  и справедлива оценка (1.33). Если  $\rho \in \dot{C}^{l,\alpha}(\overline{\Omega})$ , то  $u \in C^{l+2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$  и справедлива оценка  $\|u\|_{C^{l+2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|\rho\|_{C^{l,\alpha}(\overline{\Omega})}$ , где константа  $C$  зависит от диаметра  $\Omega'$ ,  $n$ ,  $l$  и  $\alpha$ ;

3) если  $\rho \in C^{l,\alpha}(\overline{\Omega})$ , то  $u^+ \in C^{l+2,\alpha}(\Omega)$  и справедлива локальная оценка

$$\|u^+\|_{C^{l+2,\alpha}(\overline{\Omega'})} \leq C\|\rho\|_{C^{l,\alpha}(\overline{\Omega})} \quad \forall \Omega' \subset\subset \Omega, \quad C = C(\Omega', n, l, \alpha).$$

Если, кроме того,  $\Gamma \in C^{l+2,\alpha}$ , то  $u^+ \in C^{l+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ ,  $u^- \in C^{l+2,\alpha}(\overline{\Omega}_e)$  и справедлива оценка  $\|u^+\|_{C^{l+2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|\rho\|_{C^{l,\alpha}(\overline{\Omega})}$ , где  $C$  зависит от  $n$ ,  $l$  и  $\alpha$ .

Доказательства приведенных выше утверждений см. в [3, 35, 50, 64, 67, 68]. Отметим, что условие  $\alpha \in (0, 1)$  является существенным в том смысле, что утверждения теоремы в общем случае не верны при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$ .

## § 7.2. Элементы теории потенциалов простого и двойного слоя

**7.2.1. Определение потенциала двойного слоя.** Пусть  $\Omega$  – ограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$  с границей  $\Gamma$ ,  $\Omega_e \equiv \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ ,  $\mathbf{n}_y$  – единичная внешняя нормаль к поверхности  $\Gamma$  в точке  $\mathbf{y}$ ,  $\mu$  – заданная на  $\Gamma$  непрерывная вещественная функция,  $E_n(\cdot, \mathbf{y})$  – сингулярное решение оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^n$ , определяемое формулами (1.1) и (1.2).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** Потенциалом двойного слоя зарядов, распределенных по поверхности  $\Gamma$  с плотностью  $\mu$ , называется функция  $u : \mathbb{R}^n \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  (поверхностный интеграл, зависящий от параметра  $\mathbf{x}$ ), определяемая формулой

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y. \quad (2.1)$$

Здесь  $d\sigma_y$  – элемент площади поверхности (элемент длины дуги при  $n = 2$ ), относящийся к точке  $\mathbf{y}$ .

Так как  $\mathbf{y} \in \Gamma$ , а функция  $E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  при всех  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  является гармонической по  $\mathbf{x}$  функцией, причем производная по нормали, определяемая формулой

$$\frac{\partial E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} \equiv \nabla_y E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_y \equiv \frac{(n-2)(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\omega_n |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \cdot \mathbf{n}_y \quad (2.2)$$

при  $n \geq 3$ , и формулой

$$\frac{\partial E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} \equiv \nabla_y E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_y = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \cdot \mathbf{n}_y = -\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \cdot \mathbf{n}_y \quad (2.3)$$

при  $n = 2$ , стремится к нулю при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  с порядком  $O(|\mathbf{x}|^{1-n})$ , то потенциал двойного слоя всюду в  $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$  при  $n \geq 2$  является гармонической (а следовательно, аналитической) функцией, стремящейся к нулю при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  с порядком  $O(|\mathbf{x}|^{1-n})$ . Напомним также (см. § 6.1), что при  $n = 3$  потенциал двойного слоя описывает по своему физическому смыслу кулонов потенциал, создаваемый в каждой точке  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$  распределением диполей, сосредоточенных с плотностью  $\mu$  и осью  $\mathbf{n}_y$  на  $\Gamma$ .

Выясним характер поведения функции  $u(\mathbf{x})$  при переходе точки  $\mathbf{x}$  из  $\Omega$  в  $\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ . Рассмотрим сначала случай двух независимых переменных, когда формула (2.1) принимает вид

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\sigma_y. \quad (2.4)$$

В силу (2.3) потенциал (2.4) можно переписать в виде

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_y}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\sigma_y. \quad (2.5)$$

Для упрощения выкладок будем предполагать, как в [9, с. 66], что:

- (i)  $\Gamma$  является простой замкнутой кривой в  $\mathbb{R}^2$  без точек самопересечения (кривой Жордана) из класса  $C^2$ ;
- (ii)  $\mu \in C^2(\Gamma)$ .

Покажем прежде всего, что при выполнении условий (i), (ii) потенциал (2.4) имеет смысл и в точках  $\Gamma$ , т. е. что в любой точке  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$  существует прямое значение потенциала  $u$ , определяемое как *сингулярный* интеграл

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}^0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}|} d\sigma_y = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{n}_y}{|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}|^2} d\sigma_y \equiv \\ &\equiv -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma''_{\varepsilon}(\mathbf{x}^0)} \mu(\mathbf{y}) \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{n}_y}{|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}|^2} d\sigma_y. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь  $\Gamma''_{\varepsilon}(\mathbf{x}^0) = \Gamma \setminus \Gamma'_{\varepsilon}(\mathbf{x}^0)$ , где  $\Gamma'_{\varepsilon}(\mathbf{x}^0)$  – часть границы  $\Gamma$ , отсекаемая от  $\Gamma$  окрестностью радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $\mathbf{x}^0$  (см. рис. 2.1,а).

Пусть  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$  – фиксированная, а  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  – переменная точки на  $\Gamma$ . Их дуговые абсциссы (т. е. длины дуг на  $\Gamma$ , отсчитываемые от фиксированной точки  $\mathbf{y}^0$  против часовой стрелки до точек  $\mathbf{x}^0$  и  $\mathbf{y}$ ), обозначим через  $\sigma$  и  $s$  соответственно. Наряду с единичным вектором внешней

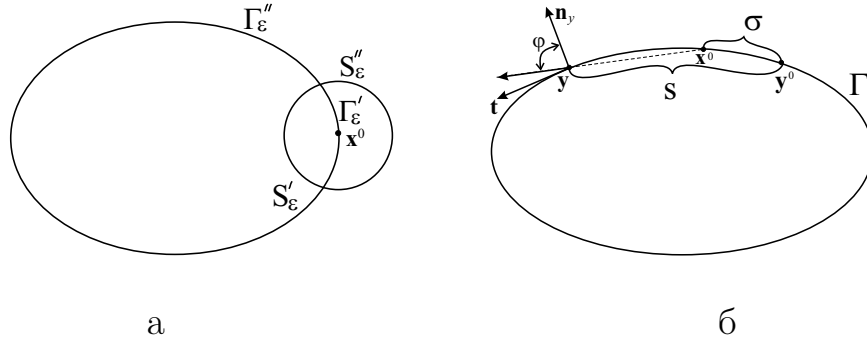


Рис. 2.1

нормали  $\mathbf{n}_y = \mathbf{n}(\mathbf{y}) = (n_1(\mathbf{y}), n_2(\mathbf{y}))$  к границе  $\Gamma$  в точке  $\mathbf{y}$ , где  $n_1$  и  $n_2$  – декартовы компоненты вектора  $\mathbf{n}$ , введем также единичный вектор касательной  $\mathbf{t}_y = \mathbf{t}(\mathbf{y}) = (t_1(\mathbf{y}), t_2(\mathbf{y}))$ , определяемый в произвольной точке  $\mathbf{y} \in \Gamma$  формулой

$$\mathbf{t}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'(s) = (y'_1(s), y'_2(s)), \quad |\mathbf{t}(\mathbf{y})| = |\mathbf{y}'(s)| = 1. \quad (2.7)$$

С учетом выбранного направления возрастания  $s$  справедливы следующие соотношения между компонентами векторов  $\mathbf{n}_y$  и  $\mathbf{t}_y$  [19, с. 418]:

$$n_1(\mathbf{y}) = t_2(\mathbf{y}) \equiv y'_2(s), \quad n_2(\mathbf{y}) = -t_1(\mathbf{y}) \equiv -y'_1(s). \quad (2.8)$$

Обозначим далее через  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}) \equiv \varphi(\sigma, s)$  угол между векторами  $\mathbf{y} - \mathbf{x}^0$  и  $\mathbf{n}_y$  в точке  $\mathbf{y}$  (см. рис. 2.1б). Поскольку  $|\mathbf{n}_y| = 1$ , то имеем

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{n}_y}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0|}. \quad (2.9)$$

Учитывая (2.8) и производя в интеграле (2.6) замену переменной  $\Gamma \ni \mathbf{y} \rightarrow s \in [0, l]$ ,  $d\sigma_y = |\mathbf{y}'(s)|ds = ds$ , где  $l$  – длина  $\Gamma$ , перепишем (2.6) в виде

$$\begin{aligned} u[\mathbf{x}^0(\sigma)] &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{n}_y}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0|^2} \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\cos \varphi(\mathbf{x}^0, \mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0|} d\sigma_y = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \mu[\mathbf{y}(s)] \frac{\cos \varphi(\sigma, s) |\mathbf{y}'(s)|}{|\mathbf{y}(s) - \mathbf{x}^0(\sigma)|} ds. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (2.10) вытекает, что для доказательства сходимости интеграла (2.6) и непрерывности его на  $\Gamma$  достаточно доказать непрерывность функции  $K : \Pi = [0, l] \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  (ядра интегрального оператора в (2.10)), определяемой формулой

$$K(\sigma, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \varphi(\sigma, s)}{|\mathbf{y}(s) - \mathbf{x}^0(\sigma)|}. \quad (2.11)$$

Точнее говоря, так как  $K(\sigma, s)$  не определена на диагонали  $\sigma = s$  прямоугольника  $\Pi$ , то нам следует доказать, что ядро  $K$  так можно доопределить при  $\sigma = s$ , что доопределенная функция  $K : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  становится непрерывной всюду в  $\Pi$ . Введем функцию

$$\psi(\sigma, s) = \operatorname{arctg} \frac{y_2(s) - x_2^0(\sigma)}{y_1(s) - x_1^0(\sigma)} \quad (2.12)$$

и отметим, что поскольку с учетом (2.8)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{y_2(s) - x_2^0(\sigma)}{y_1(s) - x_1^0(\sigma)} \right] = \\ &= \frac{y_2'(s)[y_1(s) - x_1^0(\sigma)] - y_1'(s)[y_2(s) - x_2^0(\sigma)]}{[y_1(s) - x_1^0(\sigma)]^2} = \frac{[\mathbf{y}(s) - \mathbf{x}^0(\sigma)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{[y_1(s) - x_1^0(\sigma)]^2}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\sigma, s)}{\partial s} &= \frac{[y_1(s) - x_1^0(\sigma)]^2}{[y_1(s) - x_1^0(\sigma)]^2 + [y_2(s) - x_2^0(\sigma)]^2} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{y_2(s) - x_2^0(\sigma)}{y_1(s) - x_1^0(\sigma)} \right] = \\ &= \frac{[\mathbf{y}(s) - \mathbf{x}^0(\sigma)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{|\mathbf{y}(s) - \mathbf{x}^0(\sigma)|^2} = \frac{\cos \varphi(s, \sigma)}{|\mathbf{y}(s) - \mathbf{x}^0(\sigma)|} = 2\pi K(\sigma, s). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Используя (2.13), покажем теперь, что *функция  $K$  непрерывна по совокупности переменных  $\sigma, s$  на  $\Gamma$* . Действительно, используя обозначения

$$\alpha(\sigma, s) = \frac{y_2(s) - x_2^0(\sigma)}{s - \sigma}, \quad \beta(\sigma, s) = \frac{y_1(s) - x_1^0(\sigma)}{s - \sigma}, \quad (2.14)$$

перепишем выражение для  $K$  в виде

$$K(\sigma, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\beta(\sigma, s)\alpha'_s(\sigma, s) - \alpha(\sigma, s)\beta'_s(\sigma, s)}{\alpha^2(\sigma, s) + \beta^2(\sigma, s)}. \quad (2.15)$$

Предположим, что кривая  $\Gamma$  задана следующими параметрическими уравнениями  $y_1 = \xi_1(s)$ ,  $y_2 = \xi_2(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ , где  $l$  – длина ее дуги. В таком случае имеем

$$y_1(s) - x_1^0(\sigma) = (s - \sigma) \int_0^1 \xi_1'[s + \tau(\sigma - s)] d\tau, \quad (2.16)$$

$$y_2(s) - x_2^0(\sigma) = (s - \sigma) \int_0^1 \xi_2'[s + \tau(\sigma - s)] d\tau. \quad (2.17)$$

Из (2.15) тогда следует, что

$$\lim_{s \rightarrow \sigma} K(\sigma, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{x_2^{0'}(\sigma)x_1^{0''}(\sigma) - x_1^{0'}(\sigma)x_2^{0''}(\sigma)}{(x_1^{0'})^2 + (x_2^{0'})^2} = \frac{\varkappa(\sigma)}{2\pi}. \quad (2.18)$$

Здесь  $\mathfrak{e}(\sigma)$  – значение кривизны кривой  $\Gamma$  в точке  $\sigma \in \Gamma$ , причем мы воспользовались известной формулой (см. [19])

$$\mathfrak{e}(\sigma) = \frac{x_2^{0'}(\sigma)x_1^{0''}(\sigma) - x_1^{0'}(\sigma)x_2^{0''}(\sigma)}{(x_1^{0'})^2 + (x_2^{0'})^2} \quad (2.19)$$

для кривизны кривой  $\Gamma$ , заданной параметрическими уравнениями вида (2.16), (2.17). Доопределим  $K(\sigma, s)$  при  $s = \sigma$  следующим образом:  $K(\sigma, \sigma) = \mathfrak{e}(\sigma)/2\pi$ . Поскольку в силу условия (i) функции  $\alpha, \beta, \alpha'_s, \beta'_s$  непрерывны по совокупности переменных  $\sigma$  и  $s$ , причем  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$  для всех  $\sigma, s$ , то убеждаемся в справедливости вывода о непрерывности функции  $K$  по совокупности переменных  $s, \sigma$  на  $\Gamma$ . Из непрерывности функции  $K$  на  $\Gamma$  следует, что *прямое значение* (2.6) (либо (2.10)) *потенциала двойного слоя* представляет собой непрерывную функцию от  $\mathbf{x}^0$  (либо от  $\sigma$ ) на  $\Gamma$ . Сформулируем полученный результат в виде леммы.

**ЛЕММА 2.1.** *При выполнении условий (i), (ii) прямое значение (2.6) потенциала двойного слоя (2.4) является непрерывной на  $\Gamma$  функцией.*

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.** При доказательстве леммы 2.1 условие  $\mu \in C^2(\Gamma)$  не использовалось. Фактически для ее справедливости достаточно условия  $\mu \in C(\Gamma)$  или даже условия, что  $\mu$  интегрируема (по Лебегу) на  $\Gamma$ .

**7.2.2. Теорема о скачке для потенциала двойного слоя.** Пусть  $B_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$  – круг достаточно малого радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ ,  $\Gamma'_\varepsilon$  – часть границы  $\Gamma$  области  $\Omega$ , лежащая внутри  $B_\varepsilon$ ,  $B'_\varepsilon = B_\varepsilon(\mathbf{x}^0) \cap \Omega$ ,  $B''_\varepsilon = B_\varepsilon \setminus \overline{B'_\varepsilon}$ . Обозначим через  $v$  функцию класса  $C^2(\overline{B'_\varepsilon})$  такую, что

$$v(\mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y}), \quad \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial n_y} = 0, \quad \mathbf{y} \in \Gamma'_\varepsilon. \quad (2.20)$$

Поскольку  $\mu \in C^2(\Gamma)$ , то существование такой функции доказывается без труда (см. [9, с. 67]). Пусть  $S'_\varepsilon$  – часть окружности  $S_\varepsilon \equiv S_\varepsilon(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = \varepsilon\}$ , лежащая в области  $\Omega$  (см. рис. 2.1,а).

Предположим, что  $\mathbf{x} \notin \overline{B'_\varepsilon}$ , и проинтегрируем тождество

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial y_i} - v(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right) = \\ = \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \Delta_y v(\mathbf{y}) - v(\mathbf{y}) \Delta_y \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \end{aligned} \quad (2.21)$$

по области  $B'_\varepsilon$ . Учитывая, что  $\Delta_y \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 0$  в  $\overline{B'_\varepsilon}$  при  $\mathbf{x} \notin \overline{B'_\varepsilon}$ , и применяя к левой части (2.21) “двумерную” формулу интегрирования по частям (2.4 из гл. 6, будем иметь

$$\int_{\Gamma'_\varepsilon \cup S'_\varepsilon} \left[ \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial n_y} - v(\mathbf{y}) \frac{\partial \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\partial n_y} \right] d\sigma_y =$$



$$= \int_{B'_\varepsilon} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \Delta_y v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in B''_\varepsilon(\mathbf{x}^0). \quad (2.22)$$

Используя далее соотношения (2.20) на  $\Gamma'_\varepsilon$ , перепишем (2.22) в виде

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma'_\varepsilon} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\partial n_y} d\sigma_y + \int_{S'_\varepsilon} \left[ \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial n_y} - v(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right] d\sigma_y = \\ & = \int_{B'_\varepsilon} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \Delta_y v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in B''_\varepsilon(\mathbf{x}^0). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Пусть теперь  $\mathbf{x} \in B'_\varepsilon \cup \Gamma'_\varepsilon$ . В этом случае предварительно выделим из  $B'_\varepsilon \cup \Gamma'_\varepsilon$  эту точку  $\mathbf{x}$  вместе с замкнутым кругом  $B_\delta(\mathbf{x})$  достаточно малого радиуса  $\delta$  с центром в точке  $\mathbf{x}$  и проинтегрируем тождество (2.21) по оставшейся области. Устремляя далее  $\delta$  к нулю и рассуждая так же, как при выводе интегрального представления Грина функции класса  $C^2$  в  $\mathbb{R}^2$  (см. §6.2), приходим к формуле

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma'_\varepsilon} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\partial n_y} d\sigma_y + \int_{S'_\varepsilon} \left[ \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial n_y} - v(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right] d\sigma_y + \\ & + q(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) = \int_{B'_\varepsilon} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \Delta_y v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{B'_\varepsilon(\mathbf{x}^0)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Здесь  $q(\mathbf{x}) = 2\pi$ , если  $\mathbf{x} \in B'_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$  и  $q(\mathbf{x}) = \pi$  при  $\mathbf{x} \in \Gamma'_\varepsilon$ . Обе формулы (2.23) и (2.24) можно записать в виде одной формулы (2.24), считая, что в ней  $\mathbf{x}$  изменяется в круге  $B_\varepsilon$ , выбрав функцию  $q$  в (2.24) в виде

$$q(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2\pi, & \mathbf{x} \in B'_\varepsilon, \\ \pi, & \mathbf{x} \in \Gamma'_\varepsilon, \\ 0, & \mathbf{x} \in B''_\varepsilon. \end{cases} \quad (2.25)$$

Положим  $\Gamma''_\varepsilon = \Gamma \setminus \Gamma'_\varepsilon$ . Рассматривая значения потенциала (2.4) в окрестности точки  $\mathbf{x}^0$ , например, в круге  $B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}^0)$ , запишем (2.4) в виде

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma''_\varepsilon} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| d\sigma_y - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma'_\varepsilon} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| d\sigma_y. \quad (2.26)$$

Замечаем, что во всех точках  $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$ , лежащих в том числе и на участке границы  $\Gamma$ , второе слагаемое в (2.26) совпадает с первым слагаемым левой части (2.24), поделенным на  $2\pi$ . Это позволяет переписать (2.26) в виде

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma''_\varepsilon} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| d\sigma_y -$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{S'_\varepsilon} \left[ v(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial n_y} \right] d\sigma_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{B'_\varepsilon} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \Delta v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \frac{1}{2\pi} q(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}^0). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Анализ формулы (2.27) позволяет сделать несколько важных выводов относительно поведения потенциала двойного слоя (2.4) в окрестности точки  $\mathbf{x}^0$ . Прежде всего отметим, что первые два слагаемых в правой части (2.27) являются бесконечно дифференцируемыми и, более того, гармоническими функциями в малой окрестности точки  $\mathbf{x}^0$ , например, в круге  $B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}^0)$  радиуса  $\varepsilon/2$ . Третье слагаемое, будучи “плоским” потенциалом пары  $(B'_\varepsilon, \Delta v)$ , является в силу свойств функции  $v$  и теоремы 1.1 непрерывно дифференцируемой функцией всюду в  $\mathbb{R}^2$ . Поэтому поведение потенциала двойного слоя при переходе точки  $\mathbf{x}$  через точку  $\mathbf{x}^0$  целиком и полностью определяется поведением последнего слагаемого, а фактически, с учетом условия  $v \in C^2(\overline{B}_\varepsilon)$  – поведением функции  $q$ .

Поскольку функция  $q$  принимает постоянные значения на каждой из трех частей  $B'_\varepsilon$ ,  $\Gamma'_\varepsilon$  и  $B''_\varepsilon$  круга  $B_\varepsilon$ , то функция  $qv$  является дважды непрерывно дифференцируемой функцией на каждой из этих частей. Отсюда, в частности, следует, что сужение потенциала  $u$  на границу  $\Gamma$ , т. е. прямое значение потенциала двойного слоя, является непрерывно дифференцируемой функцией в указанной окрестности точки  $\mathbf{x}^0$ . Поскольку  $\mathbf{x}^0$  – произвольная точка границы  $\Gamma$ , то отсюда приходим к следующему результату.

**ЛЕММА 2.2.** *При выполнении условий (i), (ii) прямое значение потенциала двойного слоя  $u(\mathbf{x}^0) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  является непрерывно дифференцируемой функцией в каждой точке  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ , т.е. принадлежит классу  $C^1(\Gamma)$ .*

В то же время последнее слагаемое  $qv$  не является даже непрерывной функцией при переходе через границу  $\Gamma$ . Поэтому, когда точка  $\mathbf{x}$  переходит из области  $\Omega$  в область  $\Omega_e$  через  $\mathbf{x}^0$ , последнее слагаемое в (2.27) претерпевает согласно (2.25) разрыв 1-го рода, тогда как все интегральные члены в правой части (2.27) остаются непрерывно дифференцируемыми. С учетом этого обстоятельства и формулы (2.25) легко получаем, что величины

$$u(\mathbf{x}^0), \quad u^+(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} u(\mathbf{x}), \quad u^-(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega_e}} u(\mathbf{x}) \quad (2.28)$$

удовлетворяют следующим соотношениям:

$$u^+(\mathbf{x}^0) - u(\mathbf{x}^0) = -\frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0), \quad u^-(\mathbf{x}^0) - u(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0), \quad (2.29)$$

$$u^+(\mathbf{x}^0) - u^-(\mathbf{x}^0) = -\mu(\mathbf{x}^0). \quad (2.30)$$

Более того, поскольку интегральные члены в правой части (2.27) непрерывно дифференцируемы при переходе точки  $\mathbf{x}$  из  $\Omega$  в  $\Omega_e$  через  $\mathbf{x}^0$ , функция  $q$  постоянна в  $\Omega$  и  $\Omega_e$ , а  $v$  удовлетворяет условиям (2.20), то из (2.27) и (2.25) следует с учетом второго условия в (2.20), что существуют пределы

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} = \frac{\partial u^+(\mathbf{x}^0)}{\partial n_{x^0}}, \quad \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega_e}} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n_x} = \frac{\partial u^-(\mathbf{x}^0)}{\partial n_{x^0}}, \quad (2.31)$$

причем

$$\frac{\partial u^-(\mathbf{x}^0)}{\partial n_{x^0}} = \frac{\partial u^+(\mathbf{x}^0)}{\partial n_{x^0}} \quad \forall \mathbf{x}^0 \in \Gamma. \quad (2.32)$$

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы

**ТЕОРЕМА 2.1.** *При выполнении условий (i), (ii) потенциал двойного слоя (2.4) при переходе точки  $\mathbf{x}$  через  $\Gamma$  претерпевает разрыв со скачками, определяемыми формулами (2.29) и (2.30). Более того, в каждой точке  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$  существуют пределы (2.31) и выполняется условие (2.32).*

**7.2.3. Потенциал простого слоя. Теорема о скачке производных от потенциала простого слоя.** Пусть сначала  $\mu \in C(\Gamma)$  – заданная на  $\Gamma$  непрерывная вещественная функция.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.** *Потенциалом простого слоя масс (либо зарядов), распределенных по поверхности  $\Gamma$  с плотностью  $\mu$ , называется функция  $u : \mathbb{R}^n \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемая формулой*

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} E_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma. \quad (2.33)$$

Из (2.33) и свойств сингулярного решения  $E_n$  (см. § 6.1) вытекает, что потенциал простого слоя  $u$  всюду в  $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$  является гармонической функцией, причем при  $n \geq 3$  потенциал  $u$  стремится к нулю при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  с порядком  $O(|\mathbf{x}|^{2-n})$ . В случае же  $n = 2$  формула (2.33) принимает вид

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y \quad (2.34)$$

или

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{\ln|\mathbf{x}|}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y. \quad (2.35)$$

Из (2.35) следует в силу (1.8), что потенциал простого слоя в  $\mathbb{R}^2$  имеет логарифмическую особенность при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , исключая случай, когда его плотность  $\mu$  удовлетворяет условию

$$\int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y = 0. \quad (2.36)$$

При выполнении условия (2.36) потенциал простого слоя в  $\mathbb{R}^2$  равномерно стремится к нулю на бесконечности.

Так же, как и в п. 7.2.1, 7.2.2, ограничимся рассмотрением случая  $n = 2$  при выполнении тех же условий (i), (ii) на  $\Gamma$  и  $\mu$ . Повторяя рассуждения, используемые выше при выводе формулы (2.27) для потенциала двойного слоя, с той лишь разницей, что в данном случае вместо формулы (2.4) берется формула (2.34), а в качестве  $v$  выбирается функция класса  $C^2(\overline{B_\varepsilon})$ , удовлетворяющая условиям

$$v(\mathbf{y}) = 0, \quad \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial n} = \mu(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \Gamma'_\varepsilon, \quad (2.37)$$

приходим вместо (2.24) к формуле

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma'_\varepsilon} \mu(\mathbf{y}) \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| d\sigma_y + \int_{S'_\varepsilon} \left( \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial n_y} - v(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right) d\sigma_y + \\ & + q(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) = \int_{B'_\varepsilon} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \Delta_y v(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}^0). \end{aligned} \quad (2.38)$$

По аналогии с прямым значением потенциала двойного слоя (2.4) *прямым значением потенциала простого слоя* в точке  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$  назовем несобственный интеграл

$$u(\mathbf{x}^0) \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \ln|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}| \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma''_\varepsilon(\mathbf{x}^0)} \ln|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}| \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y. \quad (2.39)$$

Как и в п. 7.2.2, будем рассматривать значения потенциала простого слоя (2.34) в круге  $B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}^0)$ , в том числе и в точках, лежащих на участке границы  $\Gamma$ . Рассуждая, как и в п. 7.2.2, перепишем (2.34) с учетом (2.38) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma''_\varepsilon} \mu(\mathbf{y}) \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| d\sigma_y - \\ & -\frac{1}{2\pi} \int_{S'_\varepsilon} \left( v(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial n_y} \right) d\sigma_y - \\ & -\frac{1}{2\pi} \int_{B'_\varepsilon} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \Delta_y v(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \frac{1}{2\pi} q(\mathbf{x})v(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.40)$$

По своей структуре формула (2.40) аналогична формуле (2.27). В частности, первые два интеграла в (2.40) являются гармоническими функциями точки  $\mathbf{x} \in B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}^0)$ , тогда как третье слагаемое принадлежит в силу

теоремы 1.1 пространству  $C^1(\mathbb{R}^2)$ . В то же время поведение последнего слагаемого в (2.40) отличается от поведения последнего слагаемого в (2.27). Действительно, в силу первого условия в (2.37), согласно которому  $v$  равна нулю на  $\Gamma'_\varepsilon$ , функция  $qv$ , равная  $v$  в  $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ , стремится к нулю при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0$ . Поэтому функция  $qv$  является непрерывной в  $B_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$ . Отсюда следует важный вывод о том, что потенциал простого слоя (в отличие от потенциала двойного слоя) является непрерывным при переходе через границу  $\Gamma$ . Тем не менее нормальная производная от потенциала простого слоя при переходе через границу  $\Gamma$  претерпевает разрыв, который, как легко проверить, определяется соотношениями

$$\frac{\partial u^+(\mathbf{x}^0)}{\partial n} - \frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0), \quad \frac{\partial u^-(\mathbf{x}^0)}{\partial n} - \frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = -\frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0), \quad \mathbf{x}^0 \in \Gamma, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial u^+(\mathbf{x}^0)}{\partial n} - \frac{\partial u^-(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = \mu(\mathbf{x}^0), \quad \mathbf{x}^0 \in \Gamma. \quad (2.42)$$

В формулах (2.41) и (2.42)  $\partial u(\mathbf{x}^0)/\partial n$  представляет собой *прямое значение* производной по нормали от потенциала простого слоя (2.34), определяемое формулой (сингулярным интегралом)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0)}{|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}|^2} \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma''_\varepsilon(\mathbf{x}^0)} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0)}{|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}|^2} \mu(\mathbf{y}) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Сформулируем полученные результаты.

**ЛЕММА 2.3.** *При выполнении условий (i), (ii) прямое значение потенциала простого слоя  $u(\mathbf{x}^0) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  является непрерывно дифференцируемой функцией в каждой точке  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ , т. е. принадлежит классу  $C^1(\Gamma)$ .*

**ТЕОРЕМА 2.2.** *При выполнении условий (i), (ii) потенциал простого слоя (2.34) при переходе точки  $\mathbf{x}$  из области  $\Omega$  в область  $\Omega_\varepsilon$  через точку  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$  остается непрерывным, а его нормальная производная  $\partial u/\partial n$  претерпевает разрыв со скачками, определяемыми формулами (2.41), (2.42).*

**7.2.4. Обзор дополнительных свойств потенциалов простого и двойного слоя.** Установленные выше свойства потенциала двойного слоя (2.4), описываемые леммами 2.1, 2.2 и теоремой 2.1, и потенциала простого слоя (2.34), описываемые леммой 2.3 и теоремой 2.2, справедливы и в случае  $n \geq 3$  измерений, причем при более слабых предположениях относительно гладкости границы  $\Gamma$  области  $\Omega$  и плотности  $\mu$ . Ограничимся здесь приведением формулировок соответствующих утверждений. Доказательства можно найти, например, в [35]. Предварительно введем понятие поверхности Ляпунова.

Говорят, что замкнутая ограниченная поверхность  $S$  является *поверхностью Ляпунова*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) в каждой точке  $\mathbf{x} \in \Gamma$  существует касательная плоскость и, следовательно, нормаль  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ ;

2) существует такое число  $r_0 > 0$ , что для любой точки  $\mathbf{x} \in \Gamma$  множество  $\Gamma \cup B_{r_0}(\mathbf{x})$  связно, так что  $\Gamma \cup B_{r_0}(\mathbf{x})$  является окрестностью точки  $\mathbf{x}$  на поверхности  $\Gamma$ , и оно пересекается прямыми, параллельными нормали  $\mathbf{n}_{\mathbf{x}}$ , не более, чем в одной точке;

3) поле нормалей непрерывно по Гельдеру с некоторым показателем  $\lambda \leq 1$  на  $\Gamma$ , т. е. существуют числа  $\lambda \leq 1$  и  $C > 0$  такие, что

$$|\mathbf{n}(\mathbf{x}) - \mathbf{n}(\mathbf{y})| \leq C|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma. \quad (2.43)$$

Из приведенного определения вытекает, что поверхности Ляпунова принадлежат классу  $C^1$ . С другой стороны, всякая ограниченная замкнутая поверхность класса  $C^2$  является поверхностью Ляпунова при  $\lambda \leq 1$ . Таким образом, если обозначить класс поверхностей Ляпунова через  $\tilde{C}^{1,\lambda}$ , то справедлива следующая цепочка вложений:  $C^2 \subset \tilde{C}^{1,\lambda} \subset C^1$  при  $\lambda \leq 1$ .

Теперь мы в состоянии сформулировать теоремы об основных свойствах потенциалов простого и двойного слоя. Пусть выполняются условия:

(j)  $\Omega$  – ограниченное открытое множество пространства  $\mathbb{R}^n$ , граница  $\Gamma$  которой является поверхностью Ляпунова из класса  $\tilde{C}^{1,\lambda}$ ,  $0 < \lambda < 1$ ;

(jj)  $\mu \in C(\Gamma)$ .

**ТЕОРЕМА 2.3.** Пусть выполняются условия (j), (jj). Тогда:

1) потенциал двойного слоя  $u$ , введенный формулой (2.1), определен для всех  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  и, в частности, для  $\mathbf{x} \in \Gamma$  и удовлетворяет условию на бесконечности, имеющему вид

$$u(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{1-n}) \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty; \quad (2.44)$$

2) всюду в  $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$  потенциал двойного слоя (2.1) имеет производные всех порядков (т. е.  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ ) и удовлетворяет уравнению Лапласа, причем производные по координатам точки  $\mathbf{x}$  можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла;

3) при переходе через границу  $\Gamma$  потенциал двойного слоя (2.1) испытывает разрыв. Предельные значения изнутри  $u^+(\mathbf{x}^0)$  и извне  $u^-(\mathbf{x}^0)$  для каждой точки  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$  существуют и определяются формулами:

$$u^+(\mathbf{x}^0) = -\frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0) + \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}^0, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y, \quad (2.45)$$

$$u^-(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0) + \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}^0, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y, \quad (2.46)$$

так что справедлива формула скачка

$$u^+(\mathbf{x}^0) - u^-(\mathbf{x}^0) = -\mu(\mathbf{x}^0) \quad \forall \mathbf{x}^0 \in \Gamma. \quad (2.47)$$

При этом сингулярный интеграл (прямое значение потенциала двойного слоя)

$$\int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}^0, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y \quad (2.48)$$

в формулах (2.45) и (2.46) как функция точки  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$  принадлежит пространству  $C(\Gamma)$ . Кроме того,  $u^+ \in C(\overline{\Omega})$ ,  $u^- \in C(\overline{\Omega}_e)$ ;

4) если в дополнение к (jj)  $\mu \in C^\alpha(\Gamma)$  и  $\alpha \leq \lambda$ , то  $u^+ \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ ,  $u^- \in C^\alpha(\overline{\Omega}_e)$ , а интеграл (2.48) как функция  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$  принадлежит  $C^\alpha(\Gamma)$ .

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть выполняются условия (j), (jj). Тогда:

1) потенциал простого слоя  $u$ , введенный формулой (2.35), определен и непрерывен для всех  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  и, в частности, для  $\mathbf{x} \in \Gamma$ , а при  $n \geq 3$  он удовлетворяет условию на бесконечности, имеющему вид:

$$u(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{2-n}) \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty; \quad (2.49)$$

2) всюду в  $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$  потенциал простого слоя  $u$  имеет производные всех порядков (т. е.  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ ) и удовлетворяет уравнению Лапласа, причем производные по координатам точки  $\mathbf{x}$  можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла. Кроме того,  $u \in C^\alpha(\mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha \in [0, \lambda)$ ;

3) при переходе через границу  $\Gamma$  производная от потенциала простого слоя  $u$  по внешней нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $\Gamma$  в произвольной точке  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$  терпит разрыв. Предельные значения  $\partial u^+(\mathbf{x}^0)/\partial n$  и  $\partial u^-(\mathbf{x}^0)/\partial n$  производной по нормали изнутри и извне существуют, непрерывны всюду на  $\Gamma$  и определяются соответственно формулами:

$$\frac{\partial u^+(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial n} + \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0), \quad \mathbf{x}^0 \in \Gamma, \quad \frac{\partial u^-(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = \frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial n} - \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0), \quad \mathbf{x}^0 \in \Gamma. \quad (2.50)$$

Здесь  $\partial u(\mathbf{x}^0)/\partial n$  – прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя в точке  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ , определяемое сингулярным интегралом

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}^0, \mathbf{y})}{\partial n_x} d\sigma_y. \quad (2.51)$$

При этом справедлива формула скачка

$$\frac{\partial u^+(\mathbf{x}^0)}{\partial n} - \frac{\partial u^-(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = \mu(\mathbf{x}^0) \quad \forall \mathbf{x}^0 \in \Gamma, \quad (2.52)$$

причем  $\partial u(\mathbf{x}^0)/\partial n \in C(\Gamma)$ ;

4) если в дополнение к (jj)  $\mu \in C^\alpha(\Gamma)$  при  $\alpha \leq \lambda$ , то  $\text{gradu}^+$  и  $\text{gradu}^-$  непрерывно продолжаются в  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{\Omega}_e$  соответственно в виде функций  $\text{gradu}^+ \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ ,  $\text{gradu}^- \in C^\alpha(\bar{\Omega}_e)$  и, кроме того,  $\partial u(\mathbf{x}^0)/\partial n \in C^\alpha(\Gamma)$ ;

5) если в дополнение к (j), (jj)  $\Gamma \in C^{k+1,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\mu \in C^{l,\alpha}(\Gamma)$ , где  $l$  и  $k$  такие целые числа, что  $0 \leq l \leq k$ , то  $u^+ \in C^{l+1,\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $u^- \in C^{l+1,\alpha}(\bar{\Omega}_e)$ .

### § 7.3. Метод граничных интегральных уравнений

В этом параграфе мы изложим сущность одного из основных классических методов исследования краевых задач для эллиптических уравнений – так называемого *метода граничных интегральных уравнений* (МГИУ). Идея этого метода применительно к уравнению Лапласа заключается в том, чтобы решение соответствующей краевой задачи для уравнения Лапласа искать в виде потенциала простого или двойного слоя или некоторой их комбинации. Это позволяет автоматически удовлетворить уравнению Лапласа и, вообще говоря, условию на бесконечности, а подстановка соответствующего представления решения в граничное условие приводит к граничному интегральному уравнению для нахождения неизвестной плотности. Решив это уравнение точно или приближенно, получим искомую плотность соответствующего потенциала простого или двойного слоя, который и является искомым решением рассматриваемой краевой задачи. Подчеркнем еще раз, что сущность МГИУ заключается в сведении рассматриваемой краевой задачи к граничному интегральному уравнению, т. е. к интегральному уравнению по границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ , и последующему решению полученного интегрального уравнения. Это, с одной стороны, позволяет использовать разработанный уже аппарат теории интегральных уравнений, а с другой – дает мощный стимул к дальнейшему развитию аппарата теории интегральных уравнений.

Ниже мы разберем идею метода граничных интегральных уравнений на примере четырех краевых задач для уравнения Лапласа. Более конкретно будем рассматривать следующие краевые задачи для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (3.1)$$

в ограниченной области  $\bar{\Omega}$  с границей  $\Gamma$ , или во внешности  $\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  области  $\Omega$ . Будем предполагать, что  $\Omega$  удовлетворяет условию (j) из § 2.

**ЗАДАЧА 1.1 (внутренняя задача Дирихле).** Найти функцию  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , удовлетворяющую уравнению (3.1) в  $\Omega$  и граничному условию

$$u = g(\mathbf{x}) \quad \text{на } \Gamma. \quad (3.2)$$

**ЗАДАЧА 1.2 (внешняя задача Дирихле).** Найти функцию  $u \in C^2(\Omega_e) \cap C(\bar{\Omega}_e)$ , удовлетворяющую уравнению (3.1) в  $\Omega_e$ , граничному условию (3.2)



и условию

$$u(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{2-n}) \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

**ЗАДАЧА 2.1** (*внутренняя задача Неймана*). Найти функцию  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ , удовлетворяющую уравнению (3.1) в  $\Omega$  и граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(\mathbf{x}) \quad \text{на} \quad \Gamma. \quad (3.4)$$

**ЗАДАЧА 2.2** (*внешняя задача Неймана*). Найти функцию  $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega_e})$ , удовлетворяющую уравнению (3.1) в области  $\Omega_e$ , граничному условию (3.4) и условию (3.3) на бесконечности.

Начнем с задачи 1.1. Следуя МГИУ, будем искать ее решение  $u$  в виде потенциала двойного слоя

$$u(\mathbf{x}) = [W\psi](\mathbf{x}) \equiv \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y \quad (3.5)$$

с непрерывной (неизвестной пока) плотностью  $\psi \in C(\Gamma)$ . Из теоремы 2.3 вытекает, что при выполнении условия (j) потенциал  $u$ , определяемый формулой (3.5), для любой плотности  $\psi \in C(\Gamma)$  удовлетворяет уравнению Лапласа всюду в  $\Omega$ , причем  $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ . С учетом этого остается выбрать  $\psi$  так, чтобы функция (3.5) удовлетворяла граничному условию Дирихле (3.2). Пусть  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$  – произвольная точка. Переходя в (3.5) к пределу (изнутри) при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0$ , имеем в силу теоремы 2.3, что

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0, \\ \mathbf{x} \in \Omega}} u(\mathbf{x}) \equiv u^+(\mathbf{x}^0) = -\frac{1}{2}\psi(\mathbf{x}^0) + \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}^0, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y. \quad (3.6)$$

С другой стороны, в силу граничного условия (3.2) имеем

$$u^+(\mathbf{x}^0) = g(\mathbf{x}^0), \quad \mathbf{x}^0 \in \Gamma. \quad (3.7)$$

Сравнивая (3.6) и (3.7), приходим к соотношению

$$\psi(\mathbf{x}) - 2 \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y = -2g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.8)$$

Равенство (3.8) представляет собой граничное интегральное уравнение 2-го рода относительно неизвестной плотности  $\psi \in C(\Gamma)$ . Из теории линейных интегральных уравнений (см. [36], [42]), вытекает, что для любой функции  $g \in C(\Gamma)$  интегральное уравнение (3.8) имеет единственное решение  $\psi \in C(\Gamma)$ . Решив уравнение (3.8) и подставив найденную плотность  $\psi$  в (3.5), получим искомое решение внутренней задачи Дирихле в виде потенциала (3.5). Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3.1. При выполнении условия (j) функция (3.5) (потенциал двойного слоя с непрерывной плотностью  $\psi$ ) является решением внутренней задачи Дирихле тогда и только тогда, когда плотность  $\psi \in C(\Gamma)$  в (3.5) является решением интегрального уравнения (3.8).

Обратимся к внешней задаче Дирихле, которую рассмотрим в случае  $n \geq 3$  измерений. Предполагая, что  $0 \notin \bar{\Omega}_e$ , будем искать ее решение в виде

$$u(\mathbf{x}) = [W\psi](\mathbf{x}) + A|\mathbf{x}|^{2-n}, \quad (3.9)$$

где  $A$  – некоторая постоянная. Поскольку функция  $|\mathbf{x}|^{2-n}$  удовлетворяет уравнению Лапласа всюду в  $\mathbb{R}^n$ , кроме точки  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , то в силу теоремы 2.3 функция (3.9) при выполнении условия (j) удовлетворяет уравнению Лапласа (3.1) всюду в  $\Omega_e$  для любой функции  $\psi \in C(\Gamma)$  и любой константы  $A$ . Кроме того, функция (3.9) удовлетворяет условию регулярности (3.3) на бесконечности. С учетом этого остается выбрать  $\psi$  (при фиксированной пока константе  $A$ ) так, чтобы функция (3.9) удовлетворяла граничному условию (3.2). Рассуждая, как и выше, легко показываем, что для этого функция  $\psi$  должна удовлетворять граничному интегральному уравнению

$$\psi(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y = 2g(\mathbf{x}) - \frac{2A}{|\mathbf{x}|^{n-2}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.10)$$

Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 3.2. При выполнении условия (j) функция (3.9), где  $A$  – произвольная константа, является решением внешней задачи Дирихле в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , тогда и только тогда, когда плотность  $\psi \in C(\Gamma)$  в (3.9) является решением интегрального уравнения (3.10).

Некоторую неудовлетворенность вызывает здесь тот факт, что в представлении (3.9) решения задачи 1.2 входит произвольная пока постоянная  $A$ , тогда как решение внешней задачи Дирихле единственно (см. § 6.5). Однако более детальный анализ уравнения (3.10) показывает, что соответствующее однородное уравнение

$$\psi(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3.11)$$

так же, как сопряженное к нему однородное уравнение, имеющее вид

$$\psi(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n_y} d\sigma_y = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3.12)$$

имеет нетривиальное решение  $\psi_0 = 1$ . Хорошо известно, что для рассматриваемых здесь линейных интегральных уравнений справедливы четыре теоремы Фредгольма (они приведены в § 7.5 и доказаны в [36, 42]). Согласно третьей теореме Фредгольма соответствующее неоднородное уравнение

(3.10) имеет решение  $\psi \in C(\Gamma)$  тогда и только тогда, когда правая часть в (3.10) ортогональна функции  $\psi_0$ , т. е. когда

$$\int_{\Gamma} \left[ g(\mathbf{x}) - \frac{A}{|\mathbf{x}|^{n-2}} \right] d\sigma = 0.$$

Это условие выделяет единственную константу  $A$ , для которой существует решение  $\psi$  уравнения (3.10), которому, в свою очередь, отвечает решение внешней задачи Дирихле в виде (3.9). Не имея возможности в этом параграфе останавливаться на анализе существования и единственности решения интегрального уравнения (3.10), отсылаем читателя к книгам [41, 42], где детально изложены соответствующие вопросы.

Отметим также, что некоторая сложность решения внешней задачи Дирихле объясняется тем, что регулярная на бесконечности гармоническая функция  $u$  убывает при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  с порядком  $O(|\mathbf{x}|^{2-n})$ , тогда как потенциал двойного слоя  $[W\psi](\mathbf{x})$  ведет себя как  $O(|\mathbf{x}|^{1-n})$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Вот почему произвольную гармоническую в неограниченной области  $\Omega_e$  функцию  $u$  нельзя, вообще говоря, представить в виде потенциала  $W\psi$ . Добавление к потенциалу  $W\psi$  слагаемого  $A/|\mathbf{x}|^{n-2}$  и позволяет преодолеть указанную трудность в решении внешней задачи. Аналогичная трудность возникает и в случае двух измерений. Действительно, в этом случае потенциал двойного слоя убывает с порядком  $O(|\mathbf{x}|^{-1})$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , тогда как условие регулярности (3.3) при  $n = 2$  эквивалентно лишь ограниченности гармонической функции  $u$  на бесконечности. О методах преодоления этой трудности можно прочесть в [41, § 35].

Обратимся к задаче 2.1. Следуя МГИУ, будем искать ее решение  $u$  в виде суммы потенциала простого слоя с непрерывной плотностью  $\varphi$ :

$$u(\mathbf{x}) = [V\varphi](\mathbf{x}) + A = \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\sigma_y + A \quad (3.13)$$

и произвольной константы  $A$ . Из теоремы 2.4 вытекает, что при выполнении условия (j) потенциал  $V\varphi$  для любой плотности  $\varphi \in C(\Gamma)$  удовлетворяет уравнению Лапласа в  $\Omega$ . То же справедливо и для функции (3.13). С учетом этого остается выбрать  $\varphi \in C(\Gamma)$  так, чтобы функция (3.13) удовлетворяла граничному условию (3.4).

Пусть  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$  – произвольная точка. В силу теоремы 2.4 предельное значение производной по нормали от функции (3.13) в произвольной точке  $\mathbf{x}^0$  существует и определяется формулой

$$\frac{\partial u^+(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = \frac{1}{2}\varphi(\mathbf{x}^0) + \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}^0, \mathbf{y})}{\partial n_x} d\sigma_y. \quad (3.14)$$

С другой стороны, в силу граничного условия (3.4) имеем

$$\frac{\partial u^+(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = g(\mathbf{x}^0). \quad (3.15)$$

Приравнивая (3.14) и (3.15), приходим к соотношению

$$\varphi(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x} d\sigma_y = 2g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.16)$$

Равенство (3.16) представляет собой искомое граничное интегральное уравнение 2-го рода относительно неизвестной плотности  $\varphi \in C(\Gamma)$ .

Сформулируем полученный результат в виде теоремы

**ТЕОРЕМА 3.3.** *При выполнении условия (j) функция (3.13) является решением внутренней задачи Неймана тогда и только тогда, когда плотность  $\varphi \in C(\Gamma)$  является решением интегрального уравнения (3.16).*

Можно показать, что соответствующее уравнению (3.16) однородное сопряженное уравнение

$$\mu(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n_x} d\sigma_y = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3.17)$$

имеет единственное нетривиальное решение  $\mu_0 = 1$ . Поэтому в силу третьей теоремы Фредгольма неоднородное уравнение (3.16) разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется условие ортогональности

$$\int_{\Gamma} \mu_0(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\sigma \equiv \int_{\Gamma} g(\mathbf{x}) d\sigma = 0. \quad (3.18)$$

При этом общее решение неоднородного уравнения (3.16) представимо в виде  $\varphi(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}(\mathbf{x}) + C\varphi_0(\mathbf{x})$ . Здесь  $\hat{\varphi}$  – частное решение уравнения (3.16), а  $\varphi_0$  – решение соответствующего однородного уравнения

$$\varphi(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x} d\sigma_y = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

которое в силу второй теоремы Фредгольма существует и определяется с точностью до мультипликативной постоянной. Подчеркнем, что (3.18) совпадает с необходимым условием разрешимости задачи (3.1), (3.4) (см. § 6.5).

В заключение рассмотрим задачу 2.2. Следуя МГИУ, будем искать ее решение в виде потенциала простого слоя

$$u(\mathbf{x}) = [V\varphi](\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\sigma_y \quad (3.19)$$

с непрерывной (неизвестной пока) плотностью  $\varphi \in C(\Gamma)$ . Рассуждая, как и в случае внутренней задачи Неймана, но учитывая, что предельное значение  $\partial u^-(\mathbf{x}^0)/\partial n$  производной по нормали от функции (3.13) в точке  $\mathbf{x}^0$  определяется формулой

$$\frac{\partial u^-(\mathbf{x}^0)}{\partial n} = -\frac{1}{2}\varphi(\mathbf{x}^0) + \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}^0, \mathbf{y})}{\partial n_x} d\sigma_y, \quad (3.20)$$

приходим к граничному интегральному уравнению 2-го рода относительно неизвестной функции  $\varphi$ , имеющему вид

$$-\varphi(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x} d\sigma_y = 2g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.21)$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 3.4.** *При выполнении условия (j) функция (3.19) является решением внешней задачи Неймана тогда и только тогда, когда плотность  $\varphi \in C(\Gamma)$  является решением интегрального уравнения (3.21).*

Можно показать, что при  $n \geq 3$  решение уравнения (3.21) для любой функции  $g \in C(\Gamma)$  существует и единственно. При  $n = 2$  соответствующее однородное сопряженное уравнение

$$-\mu(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n_x} d\sigma_y = 0 \quad (3.22)$$

имеет единственное нетривиальное решение  $\mu_0(\mathbf{x}) = 1$ . Поэтому неоднородное уравнение (3.21) имеет решение  $\varphi \in C(\Gamma)$  тогда и только тогда, когда правая часть уравнения (3.21) ортогональна функции  $\mu_0$ , т. е. когда  $\int_{\Gamma} g(\mathbf{x}) d\sigma = 0$ . При выполнении этого условия существует единственное решение  $\hat{\varphi}$  уравнения (3.21), удовлетворяющее условию  $\int_{\Gamma} \hat{\varphi}(\mathbf{x}) d\sigma = 0$ , а общее решение уравнения (3.21) имеет вид  $\varphi(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}(\mathbf{x}) + C\varphi_0(\mathbf{x})$ . Здесь  $C$  – произвольная постоянная, а  $\varphi_0$  – решение однородного уравнения

$$-\varphi(\mathbf{x}) + 2 \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x} d\sigma_y = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Существование решения  $\varphi_0$  вытекает из второй теоремы Фредгольма.

Подчеркнем, что применение МГИУ для всех рассмотренных выше краевых задач привело к необходимости решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Это не случайно, а связано с тем обстоятельством, что задача нахождения решения интегрального уравнения 2-го рода является корректно поставленной задачей. В противоположность этому задача решения интегрального уравнения 1-го рода является примером некорректных задач [53]. Напомним, что МГИУ создавался в начале прошлого века, когда математики избегали исследования некорректных задач. Вот почему они применяли такую схему МГИУ, которая сводила рассматриваемую краевую задачу к решению именно интегральных уравнений 2-го рода.

Как уже указывалось в гл. 2, в настоящее время теория некорректных задач завоевала право на свое существование и является важным разделом современной математики. Поэтому теперь допускаются и такие схемы МГИУ, которые приводят к интегральным уравнениям 1-го рода. Чтобы пояснить одну из этих схем, обратимся к задаче Дирихле (3.1), (3.2). Будем искать ее решение  $u$  в виде потенциала простого слоя  $V\varphi$  в (3.13) при

$\varphi \in C(\Gamma)$ . Поскольку потенциал  $V\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа всюду в  $\Omega$ , то остается выбрать  $\varphi$  так, чтобы функция  $u = V\varphi$  удовлетворяла условию Дирихле (3.2). Рассуждая, как и при выводе интегрального уравнения (3.8), приходим в силу свойства непрерывности потенциала простого слоя всюду в  $\mathbb{R}^n$  к следующему интегральному уравнению 1-го рода для нахождения неизвестной функции  $\varphi$ :

$$\int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\sigma_y = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.23)$$

Решив его, получим решение задачи Дирихле (3.1), (3.2) в виде потенциала  $V\varphi$ . К настоящему времени построена достаточно полная теория исследования интегральных уравнений 1-го рода вида (3.23). Это делает изложенную схему отыскания решения задачи Дирихле в виде  $V\varphi$  вполне конкурентоспособной как в теоретическом, так и в вычислительном плане по отношению к изложенной выше схеме отыскания ее решения в виде (3.5).

Указанная схема применима и для внешней задачи Дирихле (3.1)–(3.3), а также для внутренней и внешней задач Неймана. В частности, решение внутренней задачи Неймана (3.1), (3.4) можно искать не в виде (3.13), а в виде суммы потенциала двойного слоя (3.5) и произвольной константы  $A$ . Подставляя это представление в (3.4), приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.24)$$

Опять получили уравнение 1-го рода относительно неизвестной функции  $\psi$ . Однако, в отличие от простого интегрального уравнения (3.23) с несобственным поверхностным интегралом в левой части, левая часть (3.24) определяет так называемый *гиперсингулярный* интегральный оператор. Это связано с тем, что ядро интегрального оператора в (3.24) ведет себя при  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$  как  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-3}$  (в случае трех измерений). Несмотря на это теория исследования интегральных уравнений вида (3.24) достаточно хорошо разработана в определенных функциональных пространствах. Это делает изложенную схему нахождения решения задачи Неймана в виде потенциала двойного слоя вполне работоспособной.

## § 7.4. Метод функций Грина решения смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона

Рассмотрим смешанную краевую задачу для уравнения Пуассона в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Она заключается в нахождении решения  $u$  уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f \quad \text{в } \Omega, \quad (4.1)$$

удовлетворяющего на границе  $\Gamma = \partial\Omega$  смешанному краевому условию

$$[Bu](\mathbf{x}) \equiv \alpha(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (4.2)$$

Здесь  $f$  – заданная в  $\Omega$  функция, имеющая смысл плотности объемных источников поля  $u$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $g$  – заданные на  $\Gamma$  функции, причем, в частности, функция  $g$  имеет смысл плотности поверхностных источников поля  $u$ .

Как уже указывалось в §7.2, объемный потенциал  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемый формулой

$$u(\mathbf{x}) = [Af](\mathbf{x}) \equiv \int_{\Omega} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (4.3)$$

где  $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1/(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ , удовлетворяет при выполнении условий (i)–(iii) из §7.2 уравнению (4.1) в каждой точке  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Но, конечно, потенциал (4.3) не обязан удовлетворять условию (4.2) хотя бы потому, что формула (4.3) не содержит информации о функциях  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $g$ .

В этом параграфе поставим своей целью так изменить формулу (4.3) путем прибавления к правой части некоторой гармонической функции, чтобы новая функция удовлетворяла не только уравнению (4.1), но и граничному условию (4.2). На этом пути приходим к фундаментальному понятию функции Грина.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.** *Функцией Грина краевой задачи (4.1), (4.2) для области  $\Omega$  называется функция  $G(\cdot, \cdot)$ , определенная при  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ,  $\mathbf{y} \in \Omega$  и удовлетворяющая при каждом фиксированном  $\mathbf{y} \in \Omega$  условиям:*

1)  $G(\cdot, \mathbf{y})$  как функция точки  $\mathbf{x} \in \Omega$  является фундаментальным решением оператора Лапласа в области  $\Omega$  и, следовательно, имеет вид

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + v(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (4.4)$$

где функция  $v(\cdot, \cdot)$  как функция  $\mathbf{x} \in \Omega$  является гармонической функцией в  $\Omega$ , принадлежащей классу  $C^1(\bar{\Omega})$ ;

2)  $G(\cdot, \cdot)$  удовлетворяет граничному условию

$$\alpha(\mathbf{x})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x})\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{x}}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (4.5)$$

Следует отметить, что функция Грина существует не для всякой краевой задачи вида (4.1), (4.2). Действительно, согласно определению 4.1 это имеет место тогда и только тогда, когда для любой точки  $\mathbf{y} \in \Omega$  существует гармоническая в  $\Omega$  функция  $v$  указанного в определении 4.1 класса, удовлетворяющая на границе  $\Gamma$  условию вида

$$\alpha(\mathbf{x})v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x})\frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{x}}} = -\alpha(\mathbf{x})E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \beta(\mathbf{x})\frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{x}}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad \mathbf{y} \in \Omega. \quad (4.6)$$

Здесь правая часть зависит от  $\mathbf{y} \in \Omega$  как от параметра. Существование такого решения, в свою очередь, имеет место лишь при определенных условиях на вид и гладкость границы  $\Gamma$  области  $\Omega$ , а также функций  $\alpha$  и  $\beta$ , описывающих *физические* свойства границы  $\Gamma$ . Единственность же функции Грина  $G$  имеет место тогда и только тогда, когда однородная краевая задача (4.1), (4.2) имеет своим решением лишь тождественный нуль.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Согласно определению сингулярного решения оператора Лапласа и определению 4.1, функции  $G$  и  $v$  при каждом  $\mathbf{y} \in \Omega$  удовлетворяют соответственно уравнениям  $\Delta_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  и  $\Delta_x v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ . Здесь  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  – трехмерная  $\delta$ -функция Дирака с центром в  $\mathbf{y} \in \Omega$ . При этом первое уравнение выполняется в смысле обобщенных функций, т.е.

$$\langle \Delta_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \varphi \rangle = -\langle \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \varphi \rangle = -\varphi(\mathbf{y}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

при каждом фиксированном  $\mathbf{y} \in \Omega$ , а второе – в классическом смысле в каждой точке  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Здесь индекс “ $x$ ” у оператора  $\Delta$  означает, что он применяется к  $G$  или  $v$  как функции от  $\mathbf{x}$ ,  $\mathcal{D}(\Omega)$  – пространство бесконечно дифференцируемых финитных в  $\Omega$  функций (см. гл. 8 и [11, § 5]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Из (4.4) и (4.5) вытекает, что по своему физическому смыслу функция Грина  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  задачи (4.1), (4.2) представляет собой значение в точке  $\mathbf{x} \in \Omega$  потенциала поля, создаваемого единичным точечным источником, сосредоточенным в точке  $\mathbf{y}$  области  $\Omega$ , ограниченной поверхностью  $\Gamma$ . Физические свойства этой поверхности определяются типом рассматриваемого граничного условия в (4.2). В частном случае задачи Дирихле ( $\alpha \equiv 1$ ,  $\beta \equiv 0$ ) потенциал  $G$  обращается в нуль на  $\Gamma$ . Это означает, что поверхность  $\Gamma$  является эквипотенциальной (в электротехнике такая поверхность называется заземленной). При этом если первое слагаемое  $1/(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$  в (4.4) представляет собой потенциал самого точечного источника, расположенного в точке  $\mathbf{y} \in \Omega$ , то второе слагаемое в (4.4) имеет смысл потенциала поля, образуемого при “отражении” поля исходного источника от поверхности  $\Gamma$ .

Будем предполагать, что область  $\Omega$  удовлетворяет условию

(i)  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$ , граница которой состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких поверхностей.

Известно, что для такой области  $\Omega$  справедливы вторая формула Грина

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) d\mathbf{y} = \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma \quad (4.7)$$

и интегральное представление Грина

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} +$$



$$+\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} - u(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right] d\sigma_y. \quad (4.8)$$

Мы предполагаем, что  $u$  и  $v$  обладают нужной гладкостью (см. § 6.2).

ЛЕММА 4.1. Пусть область  $\Omega$  удовлетворяет условию (i) и выполняется одно из двух условий:

$$(ii) \quad \alpha(\mathbf{x}) = 1, \quad \beta(\mathbf{x}) \equiv 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma; \quad (iii) \quad \beta(\mathbf{x}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Тогда функция Грина  $G$  является симметричной функцией своих аргументов в области  $\Omega \times \Omega$ , т. е. в дополнение к условиям 1) и 2) в определении 4.1 выполняется соотношение

$$3) \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, например, выполняется условие (iii), т. е. (4.1), (4.2) представляет собой третью краевую задачу. Обозначим через  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$  произвольные, но фиксированные точки области  $\Omega$  и докажем, что

$$G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = G(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1). \quad (4.9)$$

Построим две сферы  $S_1$  и  $S_2$  малого радиуса  $\varepsilon$  с центрами в точках  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$  и введем в  $\Omega_\varepsilon$  функции

$$u_1(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} + v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1),$$

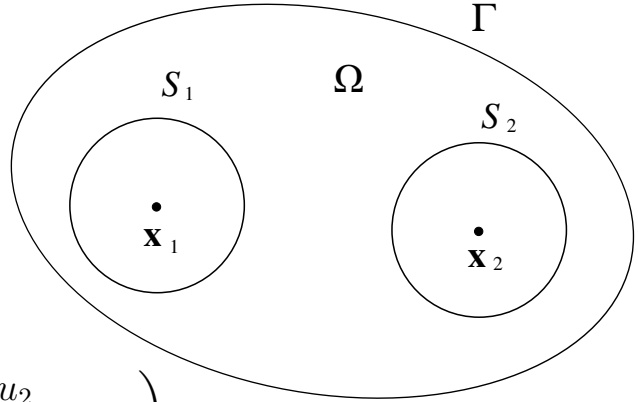
$$u_2(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|} + v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2),$$

где  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (\overline{B_\varepsilon(\mathbf{x}_1)} \cup \overline{B_\varepsilon(\mathbf{x}_2)})$ . Применим вторую формулу Грина (4.7) к функциям  $u_1$  и  $u_2$  в области  $\Omega_\varepsilon$ . Это правомерно, так как в области  $\Omega_\varepsilon$  функции  $u_1$  и  $u_2$  согласно определению 4.1 принадлежат классу  $C^2(\Omega_\varepsilon) \cap C^1(\overline{\Omega_\varepsilon})$ .

Учитывая, что  $\Delta u_1 = \Delta u_2 = 0$  в  $\Omega$ , а интеграл по поверхности

$$\int_{\Gamma} \left( u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) d\sigma \equiv \int_{\Gamma} \left[ u_1 \left( \frac{\partial u_2}{\partial n} + \eta u_2 \right) - \right. \\ \left. - u_2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial n} + \eta u_1 \right) \right] d\sigma,$$

Рис. 4.1



где  $\eta = \alpha/\beta$ , обращается в нуль в силу условия (4.5), приходим к равенству

$$\int_{S_1} \left( u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) d\sigma = - \int_{S_2} \left( u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (4.10)$$

Рассмотрим левую часть равенства (4.10). Применяя теорему о среднем и учитывая, что  $\int_{S_1} d\sigma = 4\pi\varepsilon^2$ , ее можно записать в виде:

$$\left[ u_2(\mathbf{x}_\varepsilon) \frac{\partial u_1(\mathbf{x}_\varepsilon)}{\partial n} - u_1(\mathbf{x}_\varepsilon) \frac{\partial u_2(\mathbf{x}_\varepsilon)}{\partial n} \right] 4\pi\varepsilon^2, \quad \mathbf{x}_\varepsilon \in S_1, \quad (4.11)$$

где  $\mathbf{x}_\varepsilon$  – некоторая точка. В силу определения 4.1 функции  $u_2 \partial v(\cdot, \mathbf{x}_1) / \partial n$  и  $v(\cdot, \mathbf{x}_1) \partial u_2 / \partial n$  являются непрерывными и ограниченными внутри сферы  $S_1$ . Поэтому, переходя в (4.11) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , имеем

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}_\varepsilon) \frac{\partial u_2(\mathbf{x}_\varepsilon)}{\partial n} 4\pi\varepsilon^2 &= \left[ \frac{1}{4\pi\varepsilon|\mathbf{x}_\varepsilon - \mathbf{x}_1|} + v(\mathbf{x}_\varepsilon, \mathbf{x}_1) \right] \frac{\partial u_2(\mathbf{x}_\varepsilon)}{\partial n} 4\pi\varepsilon^2 \rightarrow 0, \\ u_2(\mathbf{x}_\varepsilon) \frac{\partial u_1(\mathbf{x}_\varepsilon)}{\partial n} 4\pi\varepsilon^2 &= \left[ -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{4\pi r} \Big|_{r=\varepsilon} + \frac{\partial v(\mathbf{x}_\varepsilon, \mathbf{x}_1)}{\partial n} \right] 4\pi\varepsilon^2 u_2(\mathbf{x}_\varepsilon) = \\ &= \left[ \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} + \frac{\partial v(\mathbf{x}_\varepsilon, \mathbf{x}_1)}{\partial n} \right] u_2(\mathbf{x}_\varepsilon) 4\pi\varepsilon^2 \rightarrow u_2(\mathbf{x}_1) = G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тем самым показано, что левая часть (4.10) стремится при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к  $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Точно так же показывается, что правая часть (4.10) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремится к  $G(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$ . В силу равенства обоих пределов получаем (4.9). Поскольку точки  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$  произвольные, то из (4.9) вытекает симметричность функции  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  при выполнении условия (iii), т. е. в случае третьей краевой задачи. Симметричность функции Грина при выполнении условия (ii), т. е. для первой краевой задачи, доказывается аналогичным образом (см., например, [56, с. 341]).

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.3.** Свойство симметричности функции Грина при указанной в замечании 4.2 ее физической интерпретации можно трактовать как математическое выражение известного *принципа взаимности* в физике: источник, помещенный в точку  $\mathbf{y}$ , производит в точке  $\mathbf{x}$  такое же действие, какое производит в точке  $\mathbf{y}$  источник, помещенный в точку  $\mathbf{x}$ .

Из свойства симметричности функции Грина и представления (4.4) вытекают симметричность функции  $v$ , а также некоторые дополнительные свойства функции  $G$  и  $v$ , из которых отметим следующие:

4) при каждом фиксированном  $\mathbf{x} \in \Omega$  функции  $G$  и  $v$  как функции аргумента  $\mathbf{y} \in \Omega$  удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (4.12)$$

$$\Delta_{\mathbf{y}} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad (4.13)$$

при этом  $v$  как функция точки  $\mathbf{y}$  является гармонической в области  $\Omega$ , принадлежащей классу  $C^1(\overline{\Omega})$ ;

5) при каждом фиксированном  $\mathbf{x} \in \Omega$  функции  $G$  и  $v$  удовлетворяют соответственно граничным условиям:

$$\alpha(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{y})\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{y} \in \Gamma, \quad (4.14)$$

$$\alpha(\mathbf{y})v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{y})\frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} = -\alpha(\mathbf{y})\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \beta(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad \mathbf{y} \in \Gamma. \quad (4.15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Нетрудно показать, что справедливо и обратное: если существует функция  $v(\cdot, \cdot)$ , принадлежащая как функция точки  $\mathbf{y}$  классу  $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  при каждом  $\mathbf{x} \in \Omega$  и удовлетворяющая однородному уравнению (4.13) и краевому условию (4.15), то функция  $G(\cdot, \cdot)$ , определенная формулой (4.1), симметрична по  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  и является функцией Грина задачи (4.1), (4.2). Для доказательства этого утверждения достаточно провести предыдущие рассуждения в обратном порядке. Отсюда, в частности, следует, что для доказательства существования функции Грина задачи (4.1), (4.2) достаточно доказать существование функции  $v(\cdot, \cdot)$ , обладающей указанными выше свойствами.

Чтобы выяснить математический смысл введения функции Грина, предположим, что существует как решение  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  задачи (4.1), (4.2), так и функция  $v(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , являющаяся при каждом фиксированном  $\mathbf{x} \in \Omega$  гармонической функцией точки  $\mathbf{y}$  в области  $\Omega$  из того же класса. Применим к функциям  $u$  и  $v(\mathbf{x}, \cdot)$  формулу Грина (4.7). Учитывая, что

$$\Delta u = -f, \quad \Delta_y v = 0 \quad \text{в } \Omega \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.16)$$

будем иметь

$$0 = \int_{\Omega} v(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \int_{\Gamma} \left[ v(\mathbf{x}, \mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} - u(\mathbf{y})\frac{\partial v(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} \right] d\sigma_y.$$

Складывая эту формулу с формулой (4.8) для функции  $u$  при  $\mathbf{x} \in \Omega$ , где следует положить  $\Delta u = -f$ , приходим с учетом (4.4) к формуле

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \int_{\Gamma} \left[ G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} - u(\mathbf{y})\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} \right] d\sigma_y. \quad (4.17)$$

Рассмотрим отдельно три случая, отвечающие соответственно первой, второй и третьей краевым задачам для уравнения (4.1).

1.  $\alpha(\mathbf{x}) \equiv 1, \beta(\mathbf{x}) \equiv 0$ . Пусть функция  $v$  такова, что

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{при } \mathbf{y} \in \Gamma \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Тогда в силу замечания 4.4 функция  $G$  будет иметь смысл функции Грина первой краевой задачи для уравнения (4.1), а (4.17) принимает вид

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} g(\mathbf{y}) d\sigma_y. \quad (4.18)$$

2.  $\alpha(\mathbf{x}) \equiv 0$ ,  $\beta(\mathbf{x}) \equiv 1$ . Пусть функция  $v$  выбрана так, что

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{y} \in \Gamma \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Тогда функция  $G$  будет являться функцией Грина второй краевой задачи для уравнения (4.1), а формула (4.17) принимает вид

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\sigma_y. \quad (4.19)$$

3.  $\beta(\mathbf{x}) = 1$ ,  $\alpha(\mathbf{x})$  – гладкая функция. Пусть  $v$  выбрана так, что

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} + \alpha(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{y} \in \Gamma \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Тогда функция  $G$  будет иметь смысл функции Грина третьей краевой задачи для уравнения (4.1), а (4.17) опять принимает вид (4.19)

Таким образом, знание функции Грина в рассмотренных трех случаях позволяет выписать явное представление решения соответствующей краевой задачи для уравнения (4.1) через ее исходные данные по одной из формул (4.18), (4.19). В этом и заключается математический смысл введения функции Грина.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.5.** Вместо термина “функция Грина” в литературе иногда используют термины “функция источника” (см., например, [56, с. 338]) или “функция влияния”.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.6.** Как уже указывалось, знание функции Грина позволяет найти решение краевой задачи (4.1), (4.2) по одной из формул (4.18), (4.19). В свою очередь, для определения функции  $G$  необходимо определить функцию  $v$ , являющуюся регулярным решением оператора Лапласа в области  $\Omega$ , удовлетворяющим граничному условию (4.15) на поверхности  $\Gamma = \partial\Omega$ . Может создаться впечатление, что имеет место порочный круг: для решения краевой задачи (4.1), (4.2) необходимо решить аналогичную краевую задачу для функции  $v$ . На самом деле порочного круга нет, так как знание функции Грина позволяет решить краевую задачу (4.1), (4.2) для неоднородного уравнения (4.1) с произвольной правой частью  $f$  при произвольной граничной функции  $g$ . В то же время для нахождения самой функции Грина  $G$  достаточно решить краевую задачу для уравнения Лапласа лишь со специальным граничным условием вида (4.15) на  $\Gamma$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Требование принадлежности функции  $v(\cdot, \mathbf{y})$  классу  $C^1(\overline{\Omega})$  в определении 4.1 является слишком жестким. В некоторых случаях, например для задачи Дирихле, оно может быть заменено более слабым требованием:  $v \in C(\overline{\Omega})$ . Однако при таком условии на функцию  $v$  возникает необходимость в обосновании применимости формулы Грина для функций  $u$  и  $v$ , что значительно усложняет вывод формулы (4.17). Более подробно этот вопрос для уравнения Пуассона изложен в [11, § 23].

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. При выводе формул (4.18), (4.19) мы делали предположение о существовании достаточно гладкого решения соответствующей краевой задачи (4.1), (4.2). Искомое же решение задачи (4.1), (4.2), даже если оно существует, может обладать меньшей гладкостью. Это будет, например, в случае, когда функции  $\alpha, \beta, g$  и  $f$  являются лишь непрерывными и тем более кусочно-непрерывными или интегрируемыми функциями. Таким образом, не давая доказательства существования решений рассматриваемых краевых задач, формулы (4.18), (4.19) дают лишь интегральное представление достаточно гладких решений (класса  $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ) указанных краевых задач при условии существования функции Грина  $G$ . Поэтому при решении конкретных краевых задач необходимо возникает задача обоснования этих формул, т. е. проверки того, что каждая из них при определенных условиях на гладкость исходных данных действительно дает решение соответствующей краевой задачи. Для изучения этого вопроса необходимо исследовать свойства интегралов

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} g(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad (4.20)$$

входящих в (4.17). В свою очередь, для изучения интегралов (4.20) необходимо предварительно исследовать свойства гармонических потенциалов (1.28) из гл. 6. Они изучены в § 6.1 и 6.2.

## § 7.5. Элементы теории интегральных уравнений

*Интегральным уравнением* принято называть такое уравнение, которое содержит искомую функцию под знаком интеграла. Следующее уравнение

$$\alpha(x)\varphi(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy + f(x), \quad x \in [a, b], \quad (5.1)$$

является простейшим примером одномерного интегрального уравнения, где  $\alpha, f$  и  $K(\cdot, \cdot)$  – заданные функции, а  $\varphi$  – искомая функция. Функция

$$K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ (либо } \mathbb{C}) \quad (5.2)$$

называется ядром интегрального уравнения (5.1), а функция  $f$  называется его *правой частью*. Подчеркнем, что уравнение (5.1) является линейным.

При  $\alpha(x) \equiv 1$  уравнение (5.1) принимает вид

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy + f(x). \quad (5.3)$$

Уравнения вида (5.3) называются *линейными интегральными уравнениями Фредгольма 2-го рода* в честь шведского математика Е.И. Fredholm (1866–1927). Если  $f = 0$ , то уравнение (5.1) называется *однородным*. В случае, когда  $\alpha = 0$ , (5.1) обращается в уравнение

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = -f(x), \quad (5.4)$$

называемое линейным интегральным уравнением *1-го рода*.

С каждым интегральным уравнением можно связать интегральный оператор  $A$ , действующий по формуле

$$[A\varphi](x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy. \quad (5.5)$$

В таком случае (5.3) можно записать в виде  $\varphi(x) - [A\varphi](x) = f(x)$ . Будем также рассматривать следующее уравнение с параметром  $\lambda$ :

$$\varphi(x) - \lambda[A\varphi](x) = f(x). \quad (5.6)$$

Смысл  $\lambda$  таков: если для некоторого  $\lambda$  найдется такая функция  $\varphi$ , что  $\varphi(x) - \lambda[A\varphi](x) = 0$ , то число  $\lambda$  называется *собственным значением* ядра  $K(x, y)$ , а отвечающее ему ненулевое решение называется *собственной функцией* ядра  $K(x, y)$ .

Будем считать, что оператор  $A$  действует в некотором пространстве  $X$ . Для уравнения (5.3) обычно рассматривают два случая:

1.  $X = C[a, b]$ . Предполагается, что  $K \in C([a, b] \times [a, b])$ ,  $f \in C[a, b]$ .
2.  $X = L^2[a, b]$ . Предполагается, что  $K \in L^2((a, b) \times (a, b))$ ,  $f \in L^2(a, b)$ .

В обоих случаях в  $X$  вводится скалярное произведение по формуле

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx.$$

Оператор  $A^* : X \rightarrow X$  называется *сопряженным* оператором к оператору  $A : X \rightarrow X$ , если

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\psi) \quad \forall \varphi, \psi \in X. \quad (5.7)$$

Нетрудно показать, что оператор  $A^*$ , сопряженный к оператору  $A$  в (5.5), является интегральным оператором с ядром  $K^*(x, y) = K(y, x)$ , называемым *союзным ядром*, т.е. определяется формулой

$$[A^*\psi](x) = \int_a^b K(y, x)\psi(y)dy. \quad (5.8)$$

В 1903 г. Е. Фредгольм сформулировал для широкого класса интегральных уравнений четыре теоремы, которые мы приведем здесь без доказательства применительно к одномерному интегральному уравнению (5.3). С этой целью рассмотрим два неоднородных уравнения

$$\varphi - \lambda A\varphi = f, \quad (5.9)$$

$$\psi - \lambda A^*\psi = f^*, \quad (5.10)$$

где оператор  $A$  определяется формулой (5.5), а (5.10) называется *союзным* (или *сопряженным* к (5.9)) уравнением, и два однородных уравнения

$$\varphi - \lambda A\varphi = 0, \quad (5.11)$$

$$\psi - \lambda A^*\psi = 0. \quad (5.12)$$

**ТЕОРЕМА 5.1.** (Первая теорема Фредгольма). *Если  $\lambda$  не является собственным значением ядра  $K(x, y)$  (т.е. однородное уравнение (5.11) имеет лишь тривиальное решение), то неоднородное уравнение (5.9) так же, как и союзное уравнение (5.10), имеет и причем единственное решение для любой правой части  $f \in X$  (либо  $f^* \in X$ )*

**ТЕОРЕМА 5.2.** (Вторая теорема Фредгольма). *Если  $\lambda$  является собственным значением ядра  $K(x, y)$ , то  $\lambda$  является собственным значением и ядра  $K^*(x, y)$ , причем как однородное уравнение (5.11), так и союзное уравнение (5.12) имеют одинаковое конечное число  $m > 0$  линейно независимых решений  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  либо  $\psi_1, \dots, \psi_m$ .*

**ТЕОРЕМА 5.3.** (Третья теорема Фредгольма). *Если  $\lambda$  является собственным значением ядра  $K(x, y)$ , то неоднородное уравнение (5.9) так же, как и (5.10), либо не имеет решения, либо его решение существует и неединственно. Неоднородное уравнение (5.9) (либо (5.10)) разрешимо, т. е. имеет решение, тогда и только тогда, когда его правая часть  $f$  (либо  $f^*$ ) ортогональна полной системе линейно независимых решений однородного союзного уравнения (5.12) (либо (5.11)), т. е. выполняются соотношения  $(f, \psi_i) = 0$  либо  $(f^*, \varphi_i) = 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ . В этом случае общее решение уравнения (5.9) имеет вид  $\varphi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i$ , где  $\varphi_0$  – частное решение уравнения (5.9), а  $c_i$  – произвольные константы.*

**ТЕОРЕМА 5.4.** (Четвертая теорема Фредгольма) *Множество собственных значений ядра  $K(x, y)$  (так же, как и союзного ядра  $K^*(x, y)$ ) не более, чем счетно, с единственной возможной предельной точкой в нуле.*

Следствием приведенных теорем является следующий факт, на который обычно ссылаются как на *альтернативу Фредгольма*.

**ТЕОРЕМА 5.5.** *Либо неоднородное уравнение (5.9) разрешимо для любой правой части  $f$ , либо соответствующее союзное однородное уравнение (5.12) так же, как и (5.11), имеет нетривиальное решение.*

# ГЛАВА 8. Элементы теории акустических полей в однородных средах

## § 8.1. Элементы теории обобщенных функций

В этом параграфе мы приведем некоторые часто используемые в следующих параграфах факты и понятия из теории обобщенных функций и функциональных пространств. Подробное изложение соответствующих вопросов см. в [11, 62] и в других учебниках и монографиях.

**8.1.1. Предварительные сведения.** Пусть  $\Omega$  – произвольное открытое множество в пространстве  $\mathbb{R}^d$   $d$  измерений,  $d = 1, 2, \dots$ . Обозначим через  $L^1(\Omega)$  пространство, состоящее из комплекснозначных интегрируемых по Лебегу функций на  $\Omega$ , т.е. из функций  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (а точнее классов функций, совпадающих почти всюду на  $\Omega$ ), для которых  $\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \infty$ . Здесь  $d\mathbf{x}$  – мера Лебега. Через  $L^p(\Omega)$ ,  $p \geq 1$  обозначим линейное нормированное пространство измеримых суммируемых с  $p$ -й степенью функций  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  с нормой  $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ , определяемой формулой

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} \text{ при } 1 \leq p < \infty. \quad (1.1)$$

Через  $L^\infty(\Omega)$  обозначим нормированное пространство *существенно ограниченных* (т.е. ограниченных почти всюду на  $\Omega$ ) функций  $f$  с нормой

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} f \equiv \inf \{M : |f(\mathbf{x})| \leq M \text{ п.в. в } \Omega\}. \quad (1.2)$$

При любом  $p \in [1, \infty]$  пространство  $L^p(\Omega)$  является банаховым.

Функцию  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  назовем *локально интегрируемой* в  $\Omega$ , если интеграл  $\int_K |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$  ограничен на каждом компакте  $K \subset \Omega$ . Множество всех локально интегрируемых в  $\Omega$  функций обозначим через  $L^1_{loc}(\Omega)$ . Аналогично определяется пространство  $L^p_{loc}(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ .

Ниже будем широко использовать два известных неравенства

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ и } |(u, v)| \leq \|u\| \|v\|. \quad (1.3)$$

Первое справедливо для норм любого нормированного пространства, а второе, называемое *неравенством Коши–Буняковского* или неравенством Шварца, справедливо для скалярного произведения и норм любого гильбертова (либо евклидова) пространства.

Носителем непрерывной функции  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  называется замкнутое множество  $\operatorname{supp} \varphi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\}$ . Функция  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  называется *финитной*, если ее носитель есть компакт. Обозначим через  $C_0^\infty(\Omega)$



множество всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых финитных функций  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ , таких, что  $\text{supp} \varphi \subset \Omega$ . Введем в  $C_0^\infty(\Omega)$  сходимость следующим образом:  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  при  $k \rightarrow \infty$ , если:

- (i)  $\text{supp} \varphi, \text{supp} \varphi_k \subset K \subset \Omega \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , где  $K$  – компакт;
- (ii)  $D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi$  равномерно в  $\Omega$  при  $k \rightarrow \infty \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ .

Пространство  $C_0^\infty(\Omega)$ , наделенное указанной сходимостью, называется пространством *основных* или *тестовых* функций и обозначается через  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Подчеркнем, что введенная сходимость обеспечивает полноту пространства  $\mathcal{D}(\Omega)$  [11, 61, 62]. Это означает, что любая фундаментальная последовательность  $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$  из  $\mathcal{D}(\Omega)$  сходится в  $\mathcal{D}(\Omega)$  к некоторой функции  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . При  $\Omega = \mathbb{R}^d$  соответствующее пространство обозначим через  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  или просто через  $\mathcal{D}$ . Ясно, что  $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  для каждого открытого подмножества  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ .

Важную роль играет пространство  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , *двойственное* к  $\mathcal{D}(\Omega)$ , т.е. пространство всех линейных непрерывных функционалов над  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Элементы из  $\mathcal{D}'(\Omega)$  называются *обобщенными функциями* или *распределениями* на  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Будем обозначать их малыми латинскими буквами, а основные функции — малыми греческими буквами. Значение элемента  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  на функции  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  будем обозначать через  $\langle f, \varphi \rangle \equiv \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}$ . Определим сходимость в  $\mathcal{D}'(\Omega)$  как *слабую сходимость* последовательности функционалов (см. [11, с. 90]). Согласно этому определению последовательность обобщенных функций  $f_1, f_2, \dots$  из  $\mathcal{D}'(\Omega)$  сходится к обобщенной функции  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , если  $\langle f_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$  в  $\mathbb{C}$  при  $k \rightarrow \infty$  для любой  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Множество  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , наделенное естественными операциями сложения элементов, умножения на комплексное число и введенной слабой сходимостью, образует полное пространство [11, с. 90], называемое *пространством обобщенных функций*. По определению пространства  $\mathcal{D}'(\Omega)$  для каждой обобщенной функции  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  выполняются условия:

- (j)  $\langle f, \varphi \rangle \in \mathbb{C} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ;
- (jj)  $\langle f, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha\langle f, \varphi \rangle + \beta\langle f, \psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ;
- (jjj)  $\langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$  в  $\mathbb{C}$  при  $k \rightarrow \infty$ , если  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  в  $\mathcal{D}(\Omega)$ ;
- (jv)  $\langle \alpha f + \beta g, \varphi \rangle = \alpha\langle f, \varphi \rangle + \beta\langle g, \varphi \rangle \quad \forall g \in \mathcal{D}'(\Omega), \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

Наконец, если  $f, f_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то условие  $f_k \rightarrow f$  в  $\mathcal{D}'(\Omega)$  при  $k \rightarrow \infty$  означает по определению слабой сходимости, что  $\langle f_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$  в  $\mathbb{C}$  при  $k \rightarrow \infty$  для всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

Простейшим примером обобщенной функции является функционал  $\tilde{f}$ , порождаемый локально интегрируемой функцией  $f$  с помощью формулы

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.4)$$

Формула (1.4) определяет линейное отображение пространства  $L_{loc}^1(\Omega)$  в  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Можно показать, что оно инъективно [11, с. 95]. В силу этого при-

нято локально интегрируемые (в частности, просто интегрируемые либо непрерывные) функции  $f$  и отвечающие им согласно (1.4) распределения  $\tilde{f}$  отождествлять, называя последние *регулярными*, и обозначать их теми же символами, что и сами функции. Все остальные распределения называются *сингулярными*. По аналогии с регулярными распределениями сингулярные распределения  $g$  часто записывают в виде  $g(\mathbf{x})$ , понимая под  $\mathbf{x}$  аргумент основных функций, на которые действует функционал  $g$ .

Важным примером сингулярного распределения является так называемая  $\delta$ -функция Дирака  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ , определяемая при  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  формулой

$$\langle \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0), \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \varphi(\mathbf{x}_0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.5)$$

При  $\mathbf{x}_0 = 0$  полагаем, по определению,  $\delta(\mathbf{x}, 0) \equiv \delta(\mathbf{x})$ . По своему физическому смыслу  $\delta$ -функция  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  описывает плотность единичного источника (масс, зарядов и т.д.), сосредоточенного в точке  $\mathbf{x}_0$ .

Пусть  $f \in C^1(\overline{\Omega})$ . Тогда  $\partial f / \partial x_i \in C^0(\overline{\Omega})$ . Если при этом граница  $\Gamma$  является гладкой, например из класса  $C^1$ , либо кусочно-гладкой, то справедлива следующая формула интегрирования по частям (см. § 6.2):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} f \varphi \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i) d\sigma \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}). \quad (1.6)$$

Здесь и ниже  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$  – единичный вектор внешней нормали к границе  $\Gamma$ ,  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^d$  – единичные орты декартова базиса,  $d\sigma$  – элемент площади поверхности  $\Gamma$ . Если, более того,  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , то последнее слагаемое в (1.6) равно нулю. Поскольку функции  $f$  и  $\partial f / \partial x_i$  представляют собой (точнее, порождают) распределения, то (1.6) можно переписать в виде

$$\langle \partial f / \partial x_i, \varphi \rangle = - \langle f, \partial \varphi / \partial x_i \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.7)$$

Формула (1.7) лежит в основе определения операции дифференцирования в пространстве  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.** *Обобщенной производной по  $x_i$  от  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  называется обобщенная функция  $\partial f / \partial x_i$ , определенная формулой (1.7).*

Подчеркнем, что введенное определение производной от обобщенной функции не требует выполнения какого-либо условия на гладкость границы  $\Gamma$  вследствие финитности тестовых функций в (1.7).

Аналогичным образом определяются обобщенные производные второго и более высоких порядков. Таким образом, любая обобщенная функция  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  является бесконечно дифференцируемой, а ее производная  $\partial^\alpha f$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$  определяется формулой  $\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle$  для всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , являющейся естественным обобщением формулы (1.7). Легко проверить при этом, что оператор дифференцирования  $\partial^\alpha$  является линейным и непрерывным оператором, действующим из  $\mathcal{D}'(\Omega)$  в  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Из определения операции дифференцирования в  $\mathcal{D}'(\Omega)$  следует, что обычная (классическая) производная от функции  $f \in C^1(\Omega)$  является обобщенной производной. Справедливо в определенном смысле и обратное: если все обобщенные производные  $\partial f / \partial x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ , распределения  $f$  принадлежат пространству  $C^0(\Omega)$ , то  $f \in C^1(\Omega)$ , а  $\partial f / \partial x_i$  является классической производной от функции  $f$  по переменной  $x_i$ .

Пусть далее  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  и  $a \in C^\infty(\Omega)$  – произвольные функции. Нетрудно показать, что элемент  $af$ , определяемый формулой  $\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle$  для всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , является линейным непрерывным функционалом на  $\mathcal{D}(\Omega)$ , т.е.  $af \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Этот элемент  $af$  называется *произведением*  $C^\infty$ -функции  $a$  и распределения  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  – произвольная область. На основе приведенных определений дифференцирования и умножения на  $C^\infty$ -функцию в пространстве  $\mathcal{D}'(\Omega)$  можно вводить более сложные дифференциальные операторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Оператором Лапласа* в пространстве  $\mathcal{D}'(\Omega)$  называется оператор  $\Delta : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ , определяемый формулой  $\langle \Delta u, \varphi \rangle = \langle u, \Delta \varphi \rangle$  для всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Точно так же *оператором Гельмгольца* в  $\mathcal{D}'(\Omega)$  называется оператор  $L \equiv \Delta + k^2 : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ , где  $k = \text{const}$  либо  $k \in C^\infty(\Omega)$ , действующий по формуле

$$\langle Lu, \varphi \rangle = \langle u, L\varphi \rangle \equiv \langle u, \Delta \varphi + k^2 \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.8)$$

Рассмотрим уравнение Пуассона

$$\Delta u = -f, \quad f \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad (1.9)$$

где  $f$  – произвольная обобщенная функция. Говорят, что обобщенная функция  $u$  является *слабым решением в смысле обобщенных функций* (или в смысле *распределений*) уравнения (1.9), и записывают этот факт в виде  $\Delta u = -f$  в  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , если выполняется условие

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle \equiv \langle u, \Delta \varphi \rangle = -\langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.10)$$

Если, в частности,  $u$  является локально интегрируемой функцией, т.е.  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ , то (1.10) можно переписать в виде  $\int_\Omega u \Delta \varphi d\mathbf{x} = -\langle f, \varphi \rangle$  для всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Если, кроме того,  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ , то (1.10) принимает вид

$$\int_\Omega u \Delta \varphi d\mathbf{x} = - \int_\Omega f \varphi d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.11)$$

Рассмотрим, в частности, в области  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  уравнение

$$\Delta u = -\delta(\cdot, \mathbf{y}), \quad (1.12)$$

где  $\mathbf{y} \in \Omega$  – фиксированная точка. Простой анализ (см., например, [11]) показывает, что при  $d \geq 2$  его слабым решением, зависящим от расстояния  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ , является (с точностью до множителя) функция

$$E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad E_d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\omega_d} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d-2}}, \quad d \geq 3, \quad (1.13)$$

где  $\omega_d$  – площадь поверхности единичной сферы в  $\mathbb{R}^d$ . Функция  $E_d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , определяемая формулами в (1.13) при  $d \geq 2$ , называется *сингулярным* решением оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^d$  с центром в точке  $\mathbf{y}$ . Свойства этого решения были изучены в § 6.1. Аналогичным образом вводится понятие сингулярного решения оператора Гельмгольца (этим мы займемся в § 8.2).

Хотя не имеет смысла говорить о значении распределения  $f$  в точке  $\mathbf{x} \in \Omega$ , тем не менее можно корректно определить смысл того факта, что распределение обращается в нуль в открытом подмножестве  $\Omega$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.** Для любого распределения  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  и любого открытого подмножества  $\Omega'$  из  $\Omega$  говорят, что  $f = 0$  в  $\Omega'$ , если  $\langle f, \varphi \rangle = 0$  для каждой функции  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ .

В соответствии с этим определением будем говорить, что  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  является нулем, если  $f = 0$  в  $\Omega$ , и что  $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$  равны, если  $f_1 - f_2 = 0$  в  $\Omega$ . Можно показать (см. [62]), что для любого распределения  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  существует наибольшее открытое подмножество  $\Omega' \subseteq \Omega$ , на котором  $f$  обращается в нуль. Следовательно, естественно определить носитель распределения  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  следующим образом.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.** *Носителем* распределения  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  называется дополнение в  $\Omega$  наибольшего открытого подмножества  $\Omega$ , где  $f = 0$ .

Носителем, например  $\delta$ -функции  $\delta(\cdot, \mathbf{y})$ , является  $\{\mathbf{y}\}$ , так как

$$\langle \delta(\cdot, \mathbf{y}), \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega - \{\mathbf{y}\}).$$

Аналогично, носителем  $\delta$ -функции  $\delta$  является одноточечное множество  $\{0\}$ . То же справедливо и для каждой производной  $\partial^\alpha \delta$  от  $\delta$  и для любой конечной финитной линейной комбинации вида (где  $m \in \mathbb{N}_0$  – целое число)

$$f = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha \partial^\alpha \delta \quad (1.14)$$

Здесь  $C_\alpha$  – произвольные константы. Обратное следует из теоремы [61].

**ТЕОРЕМА 1.1.** *Если носитель распределения  $f$  есть  $\{0\}$ , то  $f$  единственным образом представимо в виде (1.14).*

Нетрудно показать [11], что если  $f = 0$  в  $\Omega' \subset \Omega$ , то  $\partial^\alpha f = 0$  в  $\Omega'$  для любой  $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ . Это означает, что  $\text{supp } \partial^\alpha f \subset \text{supp } f \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5.** Для любого распределения  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  и открытого подмножества  $\Omega'$  из  $\Omega$  будем говорить, что сужение  $f|_{\Omega'}$  принадлежит

пространству  $L_{loc}^1(\Omega')$ , или просто, что  $f \in L_{loc}^1(\Omega')$ , если  $f|_{\Omega'}$  совпадает в  $\Omega'$  с функцией  $f_1 \in L_{loc}^1(\Omega')$  в том смысле, что  $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega'} f_1(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  для любой  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ . Пространство  $L_{loc}^1(\Omega')$  здесь может быть заменено на  $L_{loc}^p(\Omega')$ ,  $C^m(\Omega')$ , где  $m \in \mathbb{N}_0$ , и т.д.

Для любой функции  $f$  на  $\mathbb{R}^d$  назовем ее *отражением* в 0 функцию  $\check{f}$ , определенную на  $\mathbb{R}^d$  формулой  $\check{f}(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ . Определим также *перенос*  $\tau_{\mathbf{y}}$  функции  $f$  посредством вектора  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  следующим образом:  $\tau_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  для любого  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ . По двойственности, мы распространим эти определения на  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  следующим образом:

$$\langle \check{f}, \varphi \rangle = \langle f, \check{\varphi} \rangle, \quad \langle \tau_{\mathbf{y}} f, \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-\mathbf{y}} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega').$$

В частности, в случае  $\delta$ -функции Дирака имеем

$$\check{\delta} = \delta, \quad \langle \tau_{\mathbf{y}} \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \tau_{-\mathbf{y}} \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi(\cdot + \mathbf{y}) \rangle = \varphi(\mathbf{y}) = \langle \delta_{\mathbf{y}}, \varphi \rangle = \langle \delta(\cdot, \mathbf{y}), \varphi \rangle. \quad (1.15)$$

По аналогии с обычной функцией, вторая часть формулы (1.15) может быть переписана *формально* в виде

$$\tau_{\mathbf{y}} \delta = \delta_{\mathbf{y}} = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Обычно используется одна из таких (эквивалентных) форм записи функции Дирака с центром в точке  $\mathbf{y}$ .

Рассмотрим еще два обобщения  $\delta$ -функции в виде  $\delta$ -слоев на поверхности  $\Gamma$ . Пусть  $g \in L^1(\Gamma)$  - произвольная функция.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.** Распределение  $g\delta_{\Gamma}$ , определенное соотношением

$$\langle g\delta_{\Gamma}, \varphi \rangle = \int_{\Gamma} g(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) dS \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad (1.16)$$

называется *простым слоем* на *поверхности*  $\Gamma$  с плотностью  $g$ . Распределение  $-\frac{\partial}{\partial n}(g\delta_{\Gamma})$ , определенное соотношением

$$\left\langle -\frac{\partial}{\partial n}(g\delta_{\Gamma}), \varphi \right\rangle = \int_{\Gamma} g(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial n} dS \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad (1.17)$$

называется *двойным слоем* на *поверхности*  $\Gamma$ .

Ясно, что  $\langle g\delta_{\Gamma}, \varphi \rangle = 0$  для любой  $\varphi \in \mathcal{D}$  с  $\varphi = 0$  на  $\Gamma$ . В силу определения 1.4 это означает, что  $\text{supp}(g\delta_{\Gamma}) \subset \Gamma$ . Точно так же  $\text{supp}[-\frac{\partial}{\partial n}(g\delta_{\Gamma})] \subset \Gamma$ . Физически распределение  $g\delta_{\Gamma}$  описывает, например, плотность распределения простых точечных источников (*монополей*) на поверхности  $\Gamma$  с поверхностной плотностью  $g$ . Аналогично, распределение  $-\frac{\partial}{\partial n}(g\delta_{\Gamma})$  описывает плотность распределения *диполей* на поверхности  $\Gamma$ , ориентированных вдоль направления нормали  $\mathbf{n}$  с поверхностной *плотностью моментов*  $g$ .

**8.1.2. Прямые произведения и свертки.** Пусть  $\Omega_i$  – открытое множество в  $\mathbb{R}^{d_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда произведение  $\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in \Omega_1, \mathbf{y} \in \Omega_2\}$  является открытым множеством в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{d_1+d_2} = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ . Если  $f$  – функция на  $\Omega_1$  и  $g$  – функция на  $\Omega_2$ , то определим *прямое*, или *тензорное*, произведение  $f \otimes g$  на  $\Omega_1 \times \Omega_2$  формулой

$$(f \otimes g)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}).$$

Ясно, что  $(f \otimes g)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (g \otimes f)(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  для каждой пары  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ .

Будем обозначать через  $C_0^\infty(\Omega_1) \times C_0^\infty(\Omega_2)$  линейное пространство функций  $\varphi(\cdot, \cdot) : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ , которые можно представить в виде конечной суммы произведений вида  $\varphi_1(\cdot)\varphi_2(\cdot)$  с  $\varphi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Это – подпространство линейного пространства  $C_0^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ , и, более того, оно является его плотным подпространством [63]. Пусть  $f_i$  – распределение в  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ . Для фиксированной точки  $\mathbf{y} \in \Omega_2$  функция  $\varphi(\cdot, \mathbf{y})$  принадлежит  $C_0^\infty(\Omega_1)$  и  $f_1$  отображает  $\varphi(\cdot, \mathbf{y})$  в число  $\langle f_1, \varphi(\cdot, \mathbf{y}) \rangle$ , которое может быть записано следующим образом:  $\langle f_1, \varphi \rangle(\mathbf{y})$ . Следовательно,  $\langle f_1, \varphi \rangle$  – функция на  $\Omega_2$ . Аналогично,  $\langle f_2, \varphi \rangle$  – функция на  $\Omega_1$ . Важно отметить, что  $\langle f_1, \varphi \rangle$  и  $\langle f_2, \varphi \rangle$  сохраняют все свойства гладкости на пространстве тестовых функций  $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ . Это следует из следующей теоремы [62].

**ТЕОРЕМА 1.2.** Если  $\varphi(\cdot, \cdot) \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$  и  $f_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ , то  $\langle f_1, \varphi \rangle \in \mathcal{D}(\Omega_2)$  и  $D_{\mathbf{y}}^\beta \langle f_1, \varphi \rangle = \langle f_1, D_{\mathbf{y}}^\beta \varphi \rangle$  для любого мультииндекса  $\beta \in \mathbb{N}_0^{d_2}$ .

Если  $f \in L_{loc}^1(\Omega_1)$  и  $g \in L_{loc}^1(\Omega_2)$ , то  $f \otimes g$ , очевидно, принадлежит  $L_{loc}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ . Если  $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$ , то  $\varphi_1 \otimes \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ , причем

$$\langle f \otimes g, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})\varphi_1(\mathbf{x})\varphi_2(\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \langle f, \varphi_1 \rangle \langle g, \varphi_2 \rangle.$$

Следующая теорема (см. [62]) обобщает этот результат.

**ТЕОРЕМА 1.3.** Если  $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$ , то существует единственное распределение  $f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ , определяемое формулой

$$\langle f_1 \otimes f_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle f_1, \varphi_1 \rangle \langle f_2, \varphi_2 \rangle$$

для всех тензорных произведений  $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ , где  $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$ , и такое, что

$$\langle f_1 \otimes f_2, \varphi \rangle = \langle f_1, \langle f_2, \varphi \rangle \rangle = \langle f_2, \langle f_1, \varphi \rangle \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7.** Если  $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$ , то распределение  $f_1 \otimes f_2 = f_2 \otimes f_1$  называется *прямым* (тензорным) произведением распределений  $f_1$  и  $f_2$ .

Строго говоря, распределения  $f_1 \otimes f_2$  и  $f_2 \otimes f_1$  действуют на двух разных пространствах и их равенство нужно понимать как равенство их образов. Если  $\text{supp} f_i = K_i$  и  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$  с  $\text{supp} \varphi \subset (\Omega_1 - K_1) \times \Omega_2$  или  $\Omega_1 \times (\Omega_2 -$

$K_2$ ), то, очевидно,  $\langle f_1 \otimes f_2, \varphi \rangle = 0$ . Следовательно,  $\langle f_1 \otimes f_2, \varphi \rangle = 0$ , если  $\text{supp } \varphi$  принадлежит  $(\Omega_1 \times \Omega_2) - (K_1 \times K_2)$ . Поэтому  $\text{supp } (f_1 \otimes f_2) \subset K_1 \times K_2$ . С другой стороны, равенство  $\langle f_1 \otimes f_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle f_1, \varphi_1 \rangle \langle f_2, \varphi_2 \rangle$  для любой пары функций  $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$  означает, что  $K_1 \times K_2 \subset \text{supp } (f_1 \otimes f_2)$ . Поэтому мы имеем

$$\text{supp}(f_1 \otimes f_2) = (\text{supp } f_1) \times (\text{supp } f_2). \quad (1.18)$$

В качестве примера рассмотрим две  $\delta$ -функции  $\delta_\xi$  and  $\delta_\eta$ , где  $\xi \in \Omega_1$ ,  $\eta \in \Omega_2$ . Тогда  $\text{supp } \delta_\xi = \{\xi\}$ ,  $\text{supp } \delta_\eta = \{\eta\}$ , а из (1.18) имеем, что  $\text{supp } (\delta_\xi \otimes \delta_\eta) = \{(\xi, \eta)\} \in \Omega_1 \times \Omega_2$ . Из теоремы 1.3 следует, что прямое произведение  $\delta$ -функций  $\delta_\xi$  и  $\delta_\eta$  определяется формулой  $\delta_\xi \otimes \delta_\eta = \delta_{(\xi, \eta)}$ . Здесь  $\delta_{(\xi, \eta)}$  – “двумерная”  $\delta$ -функция, действующая по формуле

$$\langle \delta_{(\xi, \eta)}, \varphi \rangle \equiv \langle \delta(\cdot, (\xi, \eta)), \varphi \rangle = \varphi(\xi, \eta) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2). \quad (1.19)$$

Введем теперь важное понятие свертки двух распределений. Начнем со свертки двух функций. Обозначим через  $C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$  множество всех основных функций  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ , носители которых содержатся в компакте  $K$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8.** Для любых функций  $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$  и  $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ , где  $K$  компактное подмножество  $\mathbb{R}^d$ , определим свертку  $f$  и  $\varphi$  как функцию  $f * \varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ , действующую по формуле

$$(f * \varphi)(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int f(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.20)$$

Заметим, что свертка  $f * \varphi$  также определена, если  $\varphi$  – непрерывная функция с компактным носителем в  $\mathbb{R}^d$ , причем  $f * \varphi$  является локально интегрируемой функцией в  $\mathbb{R}^d$ . Но свертка может не быть определена в случае, когда  $\text{supp } \varphi$  не является компактом.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9.** Для любых распределений  $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'$  определим их *свертку*  $f_1 * f_2$  следующим образом:

$$\langle f_1 * f_2, \varphi \rangle = \langle f_1 \otimes f_2, \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle = \langle f_1, \langle f_2, \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (1.21)$$

Ясно, что для любой  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  функция  $\psi$  на  $\mathbb{R}^{2d}$ , определяемая формулой  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ , является  $C^\infty$ -функцией в  $\mathbb{R}^{2d}$ . Но так как ограниченность  $\text{supp } \varphi$  не гарантирует ограниченность множества  $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2d} : \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \text{supp } \varphi\}$ , то носитель функции  $\psi$  как функции от  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  не обязательно компактен в  $\mathbb{R}^{2d}$ . Следовательно, правая часть (1.21) может быть не определена в общем случае. Однако если  $f_1$  либо  $f_2$  имеет компактный носитель, то в силу этого правая часть в (1.21) становится корректно определенной как распределение из  $\mathcal{D}'$ , причем с учетом равенства  $f_1 \otimes f_2 = f_2 \otimes f_1$  имеем

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1. \quad (1.22)$$

Обозначим через  $\mathcal{D}'_c \equiv \mathcal{D}'_{comp}$  линейное подмножество в  $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ , состоящее из распределений с компактными носителями. Хотя свертка двух распределений всегда определена в  $\mathcal{D}'$ , когда одно из них принадлежит  $\mathcal{D}'_{comp}$ , это условие не является необходимым. Ограниченная (измеримая) функция  $g$ , например, может быть свернута с функцией  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  так как интеграл  $\int f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{y}$  ограничен величиной  $M\|f\|_{L^1}$ , где  $M = \|g\|_{L^\infty}$ . Следовательно, если  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  и  $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ , то  $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  и  $\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^\infty}$ . Этот факт является частным случаем теоремы.

ТЕОРЕМА 1.4. ([62]). Пусть  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  и  $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Тогда  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$  и  $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$ .

В качестве примера рассмотрим свертку функции  $f \in \mathcal{D}'$  с  $\delta$ -функцией  $\delta$ . По определению

$$\langle f * \delta, \varphi \rangle = \langle f \otimes \delta, \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle = \langle f_{\mathbf{y}}, \langle \delta, \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle \rangle = \langle f_{\mathbf{y}}, \varphi(\mathbf{y}) \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Это означает, что  $\delta$  является *единичным элементом* операции свертки  $*$ . Более того,

$$\langle \partial^\alpha \delta * f, \varphi \rangle = \langle f_{\mathbf{y}}, \langle (\partial^\alpha \delta)_{\mathbf{x}}, \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f_{\mathbf{y}}, D^\alpha \varphi(\mathbf{y}) \rangle = \langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle.$$

Следовательно

$$f = f * \delta = \delta * f \text{ и } \partial^\alpha f = (\partial^\alpha \delta) * f = \delta * \partial^\alpha f \quad \forall f \in \mathcal{D}' \text{ в } \alpha \in \mathbb{N}_0^d. \quad (1.23)$$

Отметим несколько основных свойств операции свертки  $f_1 * f_2$ :

- (1)  $\text{supp}(f_1 * f_2) \subset \text{supp} f_1 + \text{supp} f_2$  если  $f_1$  (либо  $f_2$ ) принадлежит  $\mathcal{D}'_{comp}$ .
- (2)  $(\alpha f_1 + \beta f_2) * g = \alpha(f_1 * g) + \beta(f_2 * g)$ , если  $f_1 * g$  и  $f_2 * g$  существуют.
- (3)  $f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * f_2 * f_3$ , если две из функций  $f_1, f_2$  и  $f_3$  принадлежат  $\mathcal{D}'_{comp}$ .

- (4)  $\tau_{\mathbf{y}} f = \delta_{\mathbf{y}} * f \quad \forall f \in \mathcal{D}'$ ,  $\tau_{\mathbf{y}}(f_1 * f_2) = (\tau_{\mathbf{y}} f_1) * f_2 = f_1 * (\tau_{\mathbf{y}} f_2) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ , если одна из функций  $f_1$  или  $f_2$  принадлежит  $\mathcal{D}'_{comp}$ .

Используя свойства (1)–(4) и (1.23), легко получаем еще одно важное свойство свертки:

$$\partial^\alpha (f_1 * f_2) = \partial^\alpha \delta * f_1 * f_2 = (\partial^\alpha f_1) * f_2 = f_1 * (\partial^\alpha f_2) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d. \quad (1.24)$$

(1.24) справедливо в случае, если свертка  $(f_1 * f_2)$  существует [11].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Первая формула в (1.23) означает, что любое распределение  $f \in \mathcal{D}'$  может быть *разложено* по  $\delta$ -функциям  $\delta(\cdot, \mathbf{y})$ . Данную формулу можно переписать *формально* в виде

$$f(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{y})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{y} \quad \forall f \in \mathcal{D}'. \quad (1.25)$$

Эту формулу часто трактуют так, что любое материальное тело состоит из точечных масс, любой источник состоит из точечных источников и т.д. (см. подробнее об этом в [11]).



### 8.1.3. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. Говорят, что функция  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  *быстро убывает на бесконечности*, если

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}^\alpha D^\beta \varphi(\mathbf{x})| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d.$$

Это условие эквивалентно одному из следующих условий:

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}^\alpha D^\beta \varphi(\mathbf{x})| = 0 \quad \text{или} \quad \sup_{|\beta| \leq m} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} (1 + |\mathbf{x}|^2)^m |D^\beta \varphi(\mathbf{x})| < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Мы будем использовать символ  $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  для обозначения множества всех быстро убывающих функций, которые, очевидно, составляют линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на комплекснозначный скаляр. Ясно, что  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$  и из сходимости в  $\mathcal{D}$  следует сходимость в  $\mathcal{S}$ . Однако  $\mathcal{S}$  не совпадает с  $\mathcal{D}$ ; например, функция  $e^{-|\mathbf{x}|^2}$  принадлежит  $\mathcal{S}$ , но не принадлежит  $\mathcal{D}$ . Отметим также, что  $\mathbf{x}^\alpha D^\beta \varphi$  принадлежит  $\mathcal{S}$  для любой пары  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ , если  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Сходимость в  $\mathcal{S}$  вводится следующим образом:  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  в  $\mathcal{S}$  при  $k \rightarrow \infty$  если  $\mathbf{x}^\alpha D^\beta \varphi_k(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}^\alpha D^\beta \varphi(\mathbf{x})$  равномерно в  $\mathbb{R}^d$  для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ . Заметим, что операция дифференцирования  $D^\alpha$  является непрерывной из  $\mathcal{S}$  в  $\mathcal{S}$ . С другой стороны, произведение  $a\varphi$  функций  $a \in C^\infty$  и  $\varphi \in \mathcal{S}$ , вообще говоря, не принадлежит  $\mathcal{S}$ . Например,  $\exp(|\mathbf{x}|^2) \cdot \exp(-|\mathbf{x}|^2) = 1 \notin \mathcal{S}$ . Однако если функция  $a \in C^\infty$  имеет *полиномиальный рост* на  $\infty$ , так что  $|D^\alpha a(\mathbf{x})| \leq C_\alpha (1 + |\mathbf{x}|)^{m_\alpha}$  для любого  $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$  с некоторой константой  $C_\alpha$  и целым  $m_\alpha$ , зависящими от  $\alpha$ , то  $a\varphi \in \mathcal{S}$  для каждой  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Если обозначить множество упомянутых функций  $a$  через  $\theta_M$ , то операция умножения на функцию  $a \in \theta_M$  становится непрерывной в  $\mathcal{S}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. Обобщенной функцией (или распределением) *медленного роста* называется линейный непрерывный функционал на  $\mathcal{S}$ .

Обозначим через  $\mathcal{S}' \equiv \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  линейное многообразие всех обобщенных функций медленного роста. Определим сходимость в  $\mathcal{S}'$  как слабую сходимость последовательности функционалов (как в случае пространства  $\mathcal{D}'$ ). Можно показать, что пространство  $\mathcal{S}'$  с так введенной сходимостью является полным топологическим пространством. Оно называется *пространством обобщенных функций (или распределений) медленного роста*. Следующая теорема из [62] устанавливает связь между  $\mathcal{S}'$  и  $\mathcal{D}'$ .

ТЕОРЕМА 1.5. *Топологические векторные пространства  $\mathcal{D}, \mathcal{S}$  и  $\mathcal{D}', \mathcal{S}'$  связаны следующим образом:  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$  и  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ , причем вложения непрерывны. Более того,  $\mathcal{D}$  – плотное подпространство в  $\mathcal{S}$ .*

Определения операций дифференцирования, переноса и отражения, определенные в  $\mathcal{D}'$ , применимы и к элементам из  $\mathcal{S}'$ . Что касается операции

умножения, то она является непрерывной из  $\mathcal{S}'$  в  $\mathcal{S}'$  при умножении на функцию  $a \in \theta_M$ . Следовательно, если  $f \in \mathcal{S}'$ , то  $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}'$  для каждого  $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ,  $\tau_{\mathbf{y}} f \in \mathcal{S}'$  для любого  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ ,  $\check{f} \in \mathcal{S}'$  и  $af \in \mathcal{S}'$  для любого  $a \in \theta_M$ . Приведем теперь несколько примеров распределений медленного роста.

(а) Любая полиномиальная функция  $f$  в  $\mathbb{R}^d$  определяет распределение медленного роста по формуле  $\langle f, \varphi \rangle = \int f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$ .

(б) Любая локально интегрируемая функция  $f$  такая, что  $|\mathbf{x}|^{-m}|f(\mathbf{x})|$  ограничена (почти всюду) при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}_0$ , определяет распределение медленного роста по той же формуле, что и в (а). В частности,  $L^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'$  для  $1 \leq p \leq \infty$ .

(с) Если  $f \in \mathcal{D}'_{comp}$ , то  $f$  может быть продолжена единственным образом на  $\mathcal{S}'$  формулой  $\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \eta\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$ , где  $\eta \in \mathcal{D}$  и  $\eta = 1$  в окрестности  $\text{supp} f$ .

Отметим следующие важные свойства распределений медленного роста.

**ТЕОРЕМА 1.6.** ([61]). *Линейный функционал  $f$  на  $\mathcal{S}$  принадлежит  $\mathcal{S}'$ , т.е.  $f$  непрерывен на  $\mathcal{S}$ , тогда и только тогда, когда существует константа  $C \geq 0$  и целое число  $m \in \mathbb{N}_0$  такие, что*

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_m, \quad \|\varphi\|_m = \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} (1 + |\mathbf{x}|)^m |D^\alpha \varphi(\mathbf{x})| \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (1.26)$$

**ТЕОРЕМА 1.7.** ([11]). *Пусть  $f \in \mathcal{S}'$  и  $g \in \mathcal{D}'_{comp}$ . Тогда  $f * g \in \mathcal{S}'$  и*

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f \otimes g, \eta\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Здесь  $\eta \in \mathcal{D}$  – произвольная функция, равная 1 в окрестности  $\text{supp} g$ .

Из теоремы 1.7 следует, что любое распределение медленного роста  $f$  является непрерывным функционалом относительно нормы  $\|\cdot\|_m$ , введенной в (1.26), т.е. имеет *конечный порядок*. (Это утверждение не справедливо для функций  $f \in \mathcal{D}'$ ).

Для функции  $\varphi \in \mathcal{S}$  определим преобразование Фурье  $\hat{\varphi}$  формулой

$$\hat{\varphi}(\xi) = [\mathcal{F}\varphi](\xi) \equiv \int \varphi(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{x} \cdot \xi) d\mathbf{x}, \quad (1.27)$$

где  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ ,  $\mathbf{x} \cdot \xi = x_1\xi_1 + \dots + x_d\xi_d$ . Так как  $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ , то преобразование Фурье  $\hat{\varphi}$  существует для любой функции  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Кроме того, можно показать, используя свойства пространства  $\mathcal{S}$ , что

$$\mathcal{F}(D^\alpha \varphi) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}\varphi, \quad D^\alpha(\mathcal{F}\varphi) = \mathcal{F}[(-i\mathbf{x})^\alpha \varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}', \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d. \quad (1.28)$$

Из (1.28) следует, что формула (1.27) корректно определяет оператор  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  который называют оператором *преобразования Фурье*. Свойства  $\mathcal{F}$  приведены в следующей теореме [62].

ТЕОРЕМА 1.8. Преобразование Фурье  $\mathcal{F}$  является биективным непрерывным линейным отображением из  $\mathcal{S}$  в  $\mathcal{S}$ , причем обратный оператор  $\mathcal{F}^{-1}$  определяется следующим образом:

$$[\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}](\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d} \int \hat{\varphi}(\xi) \exp(i\mathbf{x} \cdot \xi) d\xi. \quad (1.29)$$

Более того,  $\hat{\varphi}(\mathbf{x}) = (2\pi)^d \varphi(-\mathbf{x}) \equiv (2\pi)^d \check{\varphi}(\mathbf{x})$  и

$$\int \varphi \bar{\psi} = (2\pi)^{-d} \int \hat{\varphi} \bar{\hat{\psi}}, \quad \mathcal{F}(\varphi * \psi) = \hat{\varphi} \hat{\psi}, \quad \mathcal{F}(\varphi \psi) = (2\pi)^{-d} \hat{\varphi} * \hat{\psi} \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}. \quad (1.30)$$

Первая часть теоремы 1.8 просто означает, что преобразование Фурье  $\mathcal{F}$  определяет топологический изоморфизм из  $\mathcal{S}$  в  $\mathcal{S}$ , в то время как вторая часть описывает фундаментальные свойства оператора  $\mathcal{F}$ . В частности, первое соотношение в (1.30) известно как *равенство Планшереля*. Заметим еще, что формула (1.29) может быть переписана в следующем виде:

$$\varphi(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d} \hat{\varphi}(-\mathbf{x}). \quad (1.31)$$

Используя двойственность, определим теперь преобразование Фурье на пространстве обобщенных функций  $\mathcal{S}'$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.12. Для любой обобщенной функции  $f \in \mathcal{S}'$  преобразование Фурье  $\hat{f} = \mathcal{F}f$  определяется следующим образом:

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle \equiv \langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Аналогично определяется обратное преобразование Фурье для  $f \in \mathcal{S}'$ :

$$\langle \mathcal{F}^{-1}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (1.32)$$

При помощи отношения двойственности легко доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.9. Преобразование Фурье  $\mathcal{F}$  из  $\mathcal{S}'$  в  $\mathcal{S}'$  вместе с формулой (1.32) для  $\mathcal{F}^{-1}$  является топологическим изоморфизмом.

Определение преобразования Фурье от распределения медленного роста при помощи отношения двойственности позволяет сохранить введенные выше свойства преобразования Фурье в  $\mathcal{S}$  и в пространстве  $\mathcal{S}'$ . В частности,

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}f, \quad \partial^\alpha(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}[(-i\mathbf{x})^\alpha f] \quad \text{и} \quad \hat{\hat{f}} = (2\pi)^d \check{f}. \quad (1.33)$$

В качестве примера заметим, что для  $\delta$ -функции имеем

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \langle 1, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (1.34)$$

Следовательно,  $\hat{\delta} = 1$ . Тогда из (1.33) вытекает, что  $\hat{\hat{\delta}} = (2\pi)^d \hat{\delta} = (2\pi)^d \delta$ . Поэтому мы заключаем, что  $\hat{1} = (2\pi)^d \delta$ . Используя (1.33), этот результат можно обобщить, так что справедливы следующие соотношения:

$$\mathcal{F}(\delta) = 1, \mathcal{F}(\partial^\alpha \delta) = (i\xi)^\alpha \text{ и } \mathcal{F}(1) = (2\pi)^d \delta, \quad \mathcal{F}(\mathbf{x}^\alpha) = (i)^{|\alpha|} (2\pi)^d \partial^\alpha \delta \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d. \quad (1.35)$$

Заметим, что преобразование Фурье может быть определено и для функции  $f$ , для которой интеграл в (1.27) не имеет смысла. Для приложений в акустике и в квантовой механике важно определить преобразование Фурье  $\hat{f}$  для  $f \in L^2 = L^2(\mathbb{R}^d)$ . Этой цели служит следующая теорема из [62].

**ТЕОРЕМА 1.10.** (Теорема Планшереля). *Если  $f \in L^1 \cap L^2$ , то  $\hat{f}$  принадлежит  $L^2$  и справедливо равенство Парсеваля*

$$\|\hat{f}\|_{L^2}^2 = (2\pi)^d \|f\|_{L^2}^2. \quad (1.36)$$

Отображение  $f \rightarrow \hat{f}$  имеет единственное расширение до непрерывного линейного отображения из  $L^2(\mathbb{R}^d)$  в  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , которое является изоморфизмом, так что равенство Парсеваля (1.36) с формулой обращения (1.32) справедливо для любой функции  $f \in L^2$ . Если функции  $f$  и  $g$  принадлежат  $L^2$ , то справедлива формула Планшереля в (1.30).

Альтернативный метод в [64] использует лишь результат о плотности пространства  $\mathcal{D}$  в  $L^2$ . Мы закончим этот раздел следующей теоремой, которая часто используется в приложениях (см. [11]).

**ТЕОРЕМА 1.11.** Пусть  $f \in \mathcal{D}'_{comp}$ . Тогда  $\mathcal{F}f \in \theta_M$ , причем

$$[\mathcal{F}f](\xi) = \langle f, \eta \exp(-i\mathbf{x} \cdot \xi) \rangle.$$

Здесь  $\eta$  - произвольная функция из  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , равная 1 в окрестности  $\text{supp } f$ .

В следующем параграфе мы будем часто использовать первую и вторую формулы Грина (см. подробнее об условиях применимости в § 6.2)

$$\int_{\Omega} \Delta u v d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v dS, \quad (1.37)$$

$$\int_{\Omega} (\Delta u v - u \Delta v) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial n} v - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS. \quad (1.38)$$

Так как для оператора Гельмгольца  $L \equiv \Delta + k^2$  имеем  $Luv - uLv = \Delta uv - u\Delta v$ , то из (1.38) получаем вторую формулу Грина для оператора Гельмгольца

$$\int_{\Omega} (Luv - uLv) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial n} v - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS. \quad (1.39)$$

## § 8.2. Классическое, слабое и фундаментальное решения уравнения Гельмгольца

В этом и следующем параграфах мы детально изучим задачу излучения звука источниками с компактными носителями (т.е. источниками, сосредоточенными в ограниченной области пространства  $\mathbb{R}^d$ ). Математически эта задача заключается в нахождении в неограниченной области  $\Omega_e \subseteq \mathbb{R}^d$  решения уравнения Гельмгольца

$$L\Phi = \Delta\Phi + k^2\Phi = -f, \quad (2.1)$$

удовлетворяющего условиям излучения на бесконечности и граничным условиям на границе  $\Gamma = \partial\Omega_e$ . Здесь обобщенная (в общем случае) функция  $f$  имеет смысл объемной плотности источников звука, а  $k$  – постоянное волновое число, удовлетворяющее условиям:

(i)  $k = k' + ik''$ ,  $k' > 0$ ,  $k'' \geq 0$ .

Сначала мы рассмотрим уравнение Гельмгольца (2.1) в свободном пространстве  $\mathbb{R}^d$ . Для этого случая будут установлены достаточные условия на данные – пару  $(k^2, f)$ , при которых решение уравнения (2.1) существует и единственно в одном из пространств обобщенных функций  $\mathcal{S}'$  или  $\mathcal{D}'$ . Далее вводится важное понятие уходящего потенциала оператора Гельмгольца  $L$ . Он определяется сверткой  $E_d * f$  плотности  $f$  с уходящим фундаментальным решением  $E_d$  оператора  $L$ . Затем изучаются важнейшие классы уходящих потенциалов: точечный, поверхностный и объемный потенциалы.

В §8.3 будет рассмотрена задача излучения в неограниченной области  $\Omega_e$  и детально изучена роль условий излучения для выделения в пространстве обобщенных функций  $\mathcal{D}'(\Omega_e)$  единственного решения  $\Phi \in \mathcal{D}'(\Omega_e)$  уравнения (2.1), отыскиваемого в пространстве  $\mathcal{D}'(\Omega_e)$ . С этой целью будет построена теория так называемых “излученных” решений оператора Гельмгольца (или изученных полей) в подпространстве пространства  $\mathcal{D}'(\Omega_e)$ , состоящем из обобщенных функций  $\Phi$  с компактным носителем обобщенной функции  $L\Phi$ . Эта теория естественным образом обобщает теорию излученных решений (radiating solutions) для однородного уравнения Гельмгольца, изложенную в книгах [65, 66]. Основываясь на этой теории, мы приведем в § 8.4 некоторые результаты о единственности *классических либо обобщенных решений* основных внутренних и внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца.

**8.2.1. Основные определения.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  – произвольное открытое множество с границей  $\Gamma = \partial\Omega$ . Рассмотрим в  $\Omega$  уравнение Гельмгольца (2.1), где  $k = k' + ik'' = \text{const}$ ,  $k' > 0$ ,  $k'' \geq 0$ . *Классическим* решением уравнения (2.1) в  $\Omega$  обычно называют функцию  $\Phi \in C^2(\Omega)$ , удовлетворяющую (2.1) в каждой точке  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Наряду с этим определением классического решения мы будем использовать определение слабого решения уравнения (2.1) в смысле *распределений*. Введем его. Пусть  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Слабым решением (в смысле распределений) уравнения Гельмгольца (2.1) в области  $\Omega$  называют любую обобщенную функцию  $\Phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , удовлетворяющую уравнению  $L\Phi = -f$  в  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Другими словами, под слабым решением уравнения (2.1) понимают такую обобщенную функцию  $\Phi$ , что

$$\langle L\Phi, \varphi \rangle \equiv \langle \Delta\Phi + k^2\Phi, \varphi \rangle = \langle \Phi, \Delta\varphi + k^2\varphi \rangle = -\langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.2)$$

Если, в частности,  $\Phi \in L^1_{loc}(\Omega)$ , то (2.2) может быть переписано в силу (1.4) в виде  $\int_{\Omega} \Phi L\varphi d\mathbf{x} = -\langle f, \varphi \rangle$  для всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Если, более того,  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ , то это тождество принимает вид

$$\int_{\Omega} \Phi L\varphi d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} f\varphi d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.3)$$

Наконец, в случае однородного уравнения Гельмгольца

$$L\Phi = \Delta\Phi + k^2\Phi = 0 \quad (2.4)$$

(2.3) переходит в тождество  $\int_{\Omega} \Phi L\varphi d\mathbf{x} = 0$  для всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

Следует отметить, что любое слабое решение однородного уравнения Гельмгольца (2.4) является на самом деле аналитической функцией. Это следует из свойства локальной эллиптической регулярности (см. §7.1).

Рассмотрим далее уравнение Гельмгольца

$$L_x E = -\delta(\cdot, \mathbf{y}) \quad (2.5)$$

с  $\delta$ -функцией Дирака в правой части, где  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  – фиксированная точка. Индекс  $x$  у оператора  $L$  означает, что  $L$  применяется к  $E$  как функции от переменной  $\mathbf{x}$ . Легко проверить, что существует только два решения  $E(\cdot, \mathbf{y})$  и  $\tilde{E}(\cdot, \mathbf{y})$  уравнения (2.5), которые зависят от расстояния  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  между точками  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ . Эти решения определяются формулами

$$E_d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv E_d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = E_d(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \tilde{E}_d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \tilde{E}_d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \tilde{E}_d(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.6)$$

Здесь функции  $E_d(\cdot)$  и  $\tilde{E}_d(\cdot)$ , называемые *фундаментальными* или *сингулярными* решениями оператора Гельмгольца в  $\mathbb{R}^d$ , определяются формулами

$$E_1(x) = \frac{i}{2k} \exp(ik|x|), \quad E_d(\mathbf{x}) = \frac{i}{4} \left( \frac{k}{2\pi|\mathbf{x}|} \right)^{\frac{d-2}{2}} H_{\frac{d-2}{2}}^{(1)}(k|\mathbf{x}|), \quad d \geq 2, \quad (2.7)$$

$$\tilde{E}_1(x) = -\frac{i}{2k} \exp(-ik|x|), \quad \tilde{E}_d(\mathbf{x}) = -\frac{i}{4} \left( \frac{k}{2\pi|\mathbf{x}|} \right)^{\frac{d-2}{2}} H_{\frac{d-2}{2}}^{(2)}(k|\mathbf{x}|), \quad d \geq 2, \quad (2.8)$$

где  $H_\mu^{(1)}$  (либо  $H_\mu^{(2)}$ ) – функция Ханкеля первого (либо второго) рода и порядка  $\mu$ . В случае, когда  $d = 2$  или 3, формулы (2.7) и (2.8) могут быть переписаны с учетом свойств функций  $H_{1/2}^{(1)}$  и  $H_{1/2}^{(2)}$  (см. [56]), в виде [11]

$$E_2(\mathbf{x}) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|\mathbf{x}|), \quad E_3(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ik|\mathbf{x}|)}{4\pi|\mathbf{x}|},$$

$$\tilde{E}_2(\mathbf{x}) = -\frac{i}{4}H_0^{(2)}(k|\mathbf{x}|), \quad \tilde{E}_3(\mathbf{x}) = -\frac{\exp(-ik|\mathbf{x}|)}{4\pi|\mathbf{x}|}. \quad (2.9)$$

Каждое из фундаментальных решений  $E_d$  и  $\tilde{E}_d$  играет для оператора Гельмгольца ту же роль, что и введенное в §6.1 сингулярное решение для оператора Лапласа. В частности, с использованием решения  $E \equiv E_d$  и второй формулы Грина (1.39) может быть выведена следующая формула интегрального представления гладкой функции  $\Phi \in C^2$  в произвольной ограниченной области  $\Omega$  (см., например, [46, с. 397]):

$$\Phi(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) L\Phi d\mathbf{y} + \int_{\Gamma} [E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{y})}{\partial n_y} - \Phi(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS_y. \quad (2.10)$$

Эта формула выводится по той же схеме, что и формула (2.12) из § 6.2, и справедлива при тех же предположениях на область  $\Omega$  и функцию  $\Phi$ .

Используя (2.10), нетрудно показать, что функция  $E_3(\cdot, \mathbf{y})$ , определяемая формулой

$$E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \equiv \frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (2.11)$$

является слабым решением уравнения (2.5), т.е. удовлетворяет тождеству

$$\langle L_x E_3(\cdot, \mathbf{y}), \varphi \rangle \equiv \langle E_3(\cdot, \mathbf{y}), L\varphi \rangle = -\langle \delta(\cdot, \mathbf{y}), \varphi \rangle = -\varphi(\mathbf{y}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.12)$$

Действительно, поскольку  $E_3(\cdot, \mathbf{y})$  имеет слабую (интегрируемую) сингулярность при  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  (см. ниже), то  $E_3(\cdot, \mathbf{y}) \in L_{loc}^1(\Omega)$  для любой точки  $\mathbf{y} \in \Omega$ . Поэтому, используя (1.4), имеем

$$\langle E_3(\cdot, \mathbf{y}), L\varphi \rangle = \int_{\Omega} E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) L\varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \equiv \int_{\Omega} \frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} L\varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Отсюда и из (2.10) при  $E = E_3$  и  $\phi = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  вытекает (2.12).

Изучим некоторые свойства функции  $E_d$ . Отметим прежде, что

$$\frac{\exp(ik|\mathbf{x}|)}{4\pi|\mathbf{x}|} - \frac{1}{4\pi\mathbf{x}} = \frac{\exp(ik|\mathbf{x}|) - 1}{4\pi|\mathbf{x}|} = \frac{ik}{4\pi} - \frac{k^2}{8\pi}|\mathbf{x}| - \frac{ik^3}{24\pi}|\mathbf{x}|^2 + \dots \quad (2.13)$$

Используя свойства  $H_0^{(1)}$ , легко показать (см. [66]), что

$$\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|\mathbf{x}|) - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}|} = \frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{k}{2} - \frac{C}{2\pi} + O(|\mathbf{x}|^2 \ln \frac{1}{|\mathbf{x}|}) \text{ при } \mathbf{x} \rightarrow 0. \quad (2.14)$$

Здесь  $C = 2.781\dots$  - константа Эйлера. Из (2.13), (2.14) следует, что фундаментальное решение оператора Гельмгольца имеет такое же поведение при  $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ , что и фундаментальное решение оператора Лапласа. Заметим также, что с учетом свойства эллиптической регулярности функции  $E_d$  и  $\tilde{E}_d$  бесконечно дифференцируемы и, более того, аналитичны в  $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{y}\}$ .

Обозначим через  $\mathcal{A}(Q)$  пространство функций:  $Q \rightarrow \mathbb{C}$ , которые являются аналитическими в открытом множестве  $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ . Тогда справедлива следующая лемма.

**ЛЕММА 2.1.** Пусть при выполнении условия (i)  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  - произвольная точка. Функции  $E_d(\cdot, \mathbf{y})$  и  $\tilde{E}_d(\cdot, \mathbf{y})$ , введенные в (2.6)–(2.8), удовлетворяют (2.5) в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  и принадлежат пространству  $L_{loc}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{A}(\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{y}\})$ .

Изучим различие между  $E_d$  и  $\tilde{E}_d$ . Прежде всего оно проявляется в их поведении при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Так, при  $d = 3$  функция  $E_3(\cdot, \mathbf{y})$  удовлетворяет для любой фиксированной  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  следующим условиям на бесконечности:

$$\Phi(\mathbf{x}) = e^{-k''|\mathbf{x}|}O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial |\mathbf{x}|} - ik\Phi(\mathbf{x}) = e^{-k''|\mathbf{x}|}o(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (2.15)$$

в то время, как  $\tilde{E}_3(\cdot, \mathbf{y})$  удовлетворяет условиям:

$$\Phi(\mathbf{x}) = e^{k''|\mathbf{x}|}O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial |\mathbf{x}|} + ik\Phi(\mathbf{x}) = e^{k''|\mathbf{x}|}o(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

Действительно, используя очевидные преобразования

$$\begin{aligned} r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}| &= \sqrt{|\mathbf{x}|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2} = |\mathbf{x}| \sqrt{1 - (2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2)/|\mathbf{x}|^2} = \\ &= |\mathbf{x}| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} + O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}/|\mathbf{x}|, \end{aligned} \quad (2.17)$$

имеем

$$\begin{aligned} \exp(ikr) &\equiv \exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \exp(ik'|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \\ \exp(-k''|\mathbf{x}|) \exp[-k''(-\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} + O(|\mathbf{x}|^{-1}))] &= \exp(-k''|\mathbf{x}|)O(1). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} &= e^{ikr} \frac{ikr - 1}{r^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial |\mathbf{x}|} = \frac{1}{r} (|\mathbf{x}| - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}/|\mathbf{x}|) = 1 + O(|\mathbf{x}|^{-1}), \\ \frac{\partial}{\partial |\mathbf{x}|} E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= e^{ikr} \frac{ikr - 1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial |\mathbf{x}|} = \exp(-k''|\mathbf{x}|)O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$



С учетом этого выводим, что

$$\left( \frac{\partial}{\partial |\mathbf{x}|} - ik \right) E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e^{ikr} \frac{ikr - 1}{r^2} (1 + O(|\mathbf{x}|^{-1})) - e^{ikr} \frac{ik}{r} =$$

$$\frac{e^{ikr}}{r^2} (1 + O(|\mathbf{x}|^{-1})) + e^{ikr} \frac{ik}{r} O(|\mathbf{x}|^{-1}) = \exp(-k''|\mathbf{x}|) O(|\mathbf{x}|^{-2}).$$

Это вместе с (2.18) показывает, что  $E_3(\cdot, \mathbf{y})$  удовлетворяет в действительности более сильным условиям на бесконечности, чем в (2.15), а именно:

$$E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e^{-k''|\mathbf{x}|} O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \frac{\partial E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial |\mathbf{x}|} - ik E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e^{-k''|\mathbf{x}|} O(|\mathbf{x}|^{-2}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (2.19)$$

Сформулируем полученные результаты в виде леммы.

**ЛЕММА 2.2.** При выполнении условия (i) функция  $E_3(\cdot, \mathbf{y})$  для любой фиксированной точки  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  удовлетворяет условиям излучения (2.19).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.** Соотношения (2.19) были выведены при условии, что точка  $\mathbf{y}$  фиксированная. Ниже мы будем рассматривать ситуацию, когда  $\mathbf{y}$  будет меняться в некотором множестве  $Q \subset \mathbb{R}^3$ . Подчеркнем, что (2.19) справедливо и в этом случае, если  $Q$  ограничено. Мы также отметим, что в силу свойства симметрии функция  $E_3(\mathbf{x}, \cdot)$  как функция от  $\mathbf{y}$  удовлетворяет для любой фиксированной точки  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  следующим условиям излучения:

$$E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e^{-k''|\mathbf{y}|} O(|\mathbf{y}|^{-1}), \quad \frac{\partial E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial |\mathbf{y}|} - ik E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e^{-k''|\mathbf{y}|} O(|\mathbf{y}|^{-2}), \quad |\mathbf{y}| \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.** В случае  $k'' = 0$  условия (2.15) преобразуются в условия излучения Зоммерфельда, имеющие вид

$$\Phi(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial |\mathbf{x}|} - ik \Phi(\mathbf{x}) = o(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

Аналогично показывается, что второе фундаментальное решение  $\tilde{E}_3(\cdot, \mathbf{y})$  удовлетворяет условиям на бесконечности, которые получаются из (2.19) заменой знака минус в левой части второго выражения на плюс.

Наконец, отметим, что при любом  $d \geq 2$  функция  $E_d(\cdot, \mathbf{y})$  удовлетворяет для любой фиксированной точки  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  следующим условиям:

$$\Phi(\mathbf{x}) = e^{-k''|\mathbf{x}|} O\left(|\mathbf{x}|^{\frac{1-d}{2}}\right), \quad \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial |\mathbf{x}|} - ik \Phi(\mathbf{x}) = e^{-k''|\mathbf{x}|} o\left(|\mathbf{x}|^{\frac{1-d}{2}}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (2.22)$$

в то время как  $\tilde{E}_d(\cdot, \mathbf{y})$  удовлетворяет условиям:

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{x}) = e^{k''|\mathbf{x}|} O\left(|\mathbf{x}|^{\frac{1-d}{2}}\right), \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}(\mathbf{x})}{\partial |\mathbf{x}|} + ik \tilde{\Phi}(\mathbf{x}) = e^{k''|\mathbf{x}|} o\left(|\mathbf{x}|^{\frac{1-d}{2}}\right), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (2.23)$$

Эти факты являются следствием асимптотического поведения функций Ханкеля в (2.7), (2.8) при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

Из (2.22) и (2.23) следует, что при  $k'' > 0$   $E_d$  стремится к нулю (экспоненциально) на бесконечности, в то время как  $\tilde{E}_d$  возрастает экспоненциально при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Таким образом, математическое различие между  $E_d$  и  $\tilde{E}_d$  состоит в том, что при  $k'' > 0$   $E_d$  определяет регулярную обобщенную функцию из  $\mathcal{D}'$  (см. §8.1.1), и, более того,  $E_d \in \mathcal{S}'$ . В то же время  $\tilde{E}_d \notin \mathcal{S}'$ , хотя  $\tilde{E}_d \in \mathcal{D}'$ . Если  $k'' = 0$ , то обе функции  $E_d$  и  $\tilde{E}_d$  стремятся к нулю на бесконечности при  $d \geq 2$  и ограничены при  $d = 1$ . Следовательно, они принадлежат  $\mathcal{S}'$ , будучи локально интегрируемыми функциями в  $\mathbb{R}^d$ .

Физическое различие между  $E_d$  и  $\tilde{E}_d$  состоит в том, что если  $E_d(\cdot, \mathbf{y})$  описывает *бегущую* или *исходящую из точки  $\mathbf{y}$  звуковую волну*, излученную единичным точечным источником с плотностью  $\delta(\cdot, \mathbf{y})$ , то  $\tilde{E}_d$  описывает *приходящую* в точку  $\mathbf{y}$  волну. Чтобы понять смысл этого утверждения, рассмотрим вещественные функции  $\text{Re} [E_d(\cdot, \mathbf{y})e^{-i\omega t}]$  и  $\text{Re} [\tilde{E}_d(\cdot, \mathbf{y})e^{-i\omega t}]$ , которые удовлетворяют однородному волновому уравнению

$$\partial^2 E / \partial t^2 = c^2 \Delta E, \quad c = \omega / k' \quad (2.24)$$

всюду в  $\mathbb{R}^d$ , кроме  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  (см. §1.6). В частности, при  $d = 3$  имеем

$$\text{Re} [E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})e^{-i\omega t}] = \frac{\exp(-k''r)\cos(k'r - \omega t)}{4\pi r}, \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \quad (2.25)$$

Ясно, что *фаза*  $k'r - \omega t$  *волны* (см. об этом понятии в §3.2) в (2.25) сохраняется постоянной на сферах, бегущих из центра  $\mathbf{y}$  с постоянной скоростью  $c = \omega / k'$ , тогда как *амплитуда*  $\exp(-k''r)/4\pi r$  убывает экспоненциально, если  $k'' > 0$  либо ведет себя как  $O(|\mathbf{x}|^{-1})$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , если  $k'' = 0$ .

Это означает в соответствии с физическим смыслом решений волнового уравнения (2.24), что функция (2.25) описывает волну со сферическим волновым фронтом, исходящим из центра  $\mathbf{y}$ . Наоборот, для функции

$$\text{Re} [\tilde{E}_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})e^{-i\omega t}] = \frac{\exp(k''r)\cos(k'r + \omega t)}{4\pi r}, \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (2.26)$$

фаза  $k'r + \omega t$  постоянна на сферах, приходящих в центр  $\mathbf{y}$  с той же скоростью  $c = \omega / k'$ , тогда как амплитуда  $\exp(k''r)/4\pi r$  возрастает экспоненциально, если  $k'' > 0$ , и убывает как  $O(|\mathbf{x}|^{-1})$ , если  $k'' = 0$ , при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

Комплексную амплитуду  $E_3(\cdot, \mathbf{y})$  волны (2.25) называют *уходящей* (либо *исходящей*) *сферической волной с центром  $\mathbf{y}$* , тогда как  $\tilde{E}_3(\cdot, \mathbf{y})$  называют *приходящей* (в центр  $\mathbf{y}$ ) *сферической волной*. В соответствии с вышесказанным часто ссылаются на (2.22) (либо (2.23)) как на *уходящие* (либо *приходящие*) условия излучения для  $\mathbb{R}^d$ .

Конечно, эта терминология согласуется с формой  $e^{-i\omega t}$  временного фактора, введенного нами в §1.6 при выводе уравнения Гельмгольца, описывающего распространение гармонических по времени звуковых волн. Если же выбрать в качестве этого множителя  $e^{+i\omega t}$ , то введенные названия  $E_3$  и  $\tilde{E}_3$  следует поменять.

Подобным образом функцию  $E_2(\cdot, \mathbf{y})$  (либо  $\tilde{E}_2(\cdot, \mathbf{y})$ ) называют *уходящей* (либо *приходящей*) *цилиндрической волной* с *центром*  $\mathbf{y}$ . Наконец, функцию  $E_1(\cdot, \mathbf{y})$  (либо  $\tilde{E}_1(\cdot, \mathbf{y})$ ) называют *уходящей* (либо *приходящей*) *плоской волной* с *центром*  $\mathbf{y}$  (см. подробнее о смысле этих понятий в §3.2).

**8.2.2. Уходящие и приходящие акустические потенциалы.** Вернемся к уравнению Гельмгольца (2.1) с произвольной обобщенной функцией  $f$  в правой части. Отметим, что знание фундаментального решения  $E_d$  (либо  $\tilde{E}_d$ ) оператора Гельмгольца в  $\mathbb{R}^d$  позволяет построить решение уравнения Гельмгольца (2.1) для широкого класса правых частей  $f$ , которые могут быть свернуты с  $E_d$  (либо с  $\tilde{E}_d$ ). В самом деле, пусть, например, свертка  $E_d * f$  существует в  $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ . Тогда из (1.24) следует, что

$$L(E_d * f) = (LE_d) * f = -\delta * f = -f.$$

Более того, это решение  $E_d * f$  уравнения (2.1) является единственным в классе распределений  $\Phi$ , для которых свертки с  $E_d$  существуют в  $\mathcal{D}'$ . Чтобы доказать этот факт, достаточно показать, что соответствующее однородное уравнение Гельмгольца (2.4) имеет только нулевое решение в упомянутом классе. Но последнее является очевидным, так как если  $\Phi$  является решением уравнения (2.4), то из (1.23) и (1.24) вытекает, что

$$\Phi = \Phi * \delta = -\Phi * LE_d = -L\Phi * E_d = 0.$$

Аналогичный результат справедлив для второго решения  $\tilde{\Phi}$  уравнения (2.1), имеющего вид  $\tilde{\Phi} = \tilde{E}_d * f$ . Сформулируем полученные результаты.

**ТЕОРЕМА 2.1.** Пусть при выполнении условия (i) функция  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  такова, что свертка  $E_d * f$  (либо  $\tilde{E}_d * f$ ) существует в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ . Тогда решение уравнения (2.1) существует в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  и определяется формулой

$$\Phi = E_d * f \quad (\text{либо } \tilde{\Phi} = \tilde{E}_d * f). \quad (2.27)$$

Это решение единственно в классе таких распределений  $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ , для которых существует свертка  $\Phi * E_d$  (либо  $\Phi * \tilde{E}_d$ ).

В §1.6 было показано, что уравнению Гельмгольца удовлетворяет амплитуда как звукового давления, так и потенциала звукового поля. Используя вторую интерпретацию, введем следующее важное определение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.** Для любого распределения  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  свертку  $\Phi = E_d * f$  (либо  $\tilde{\Phi} = \tilde{E}_d * f$ ) будем называть *уходящим* (либо *приходящим*) *потенциалом*.

Отметим, что обе свертки  $E_d * f$  и  $\tilde{E}_d * f$  существуют в  $\mathcal{D}'$ , если  $f \in \mathcal{D}'_{comp}$ , т.е.  $f$  является распределением с компактным носителем (см. §8.1.2). Более того, поскольку  $E_d \in \mathcal{S}'$ , то из теоремы 1.7 следует, что уходящий потенциал  $\Phi = E * f$  существует для любой функции  $f \in \mathcal{D}'_{comp}$  и принадлежит пространству  $\mathcal{S}'$ . Что касается приходящего потенциала, то ситуация сильно зависит от значения  $k''$ , т.е. от того, выполняется ли условие  $k'' = 0$  либо  $k'' > 0$ . В первом случае  $\tilde{E}_d \in \mathcal{S}'$ , а поэтому  $\tilde{E}_d * f \in \mathcal{S}'$  в силу теоремы 1.7. Во втором случае  $\tilde{E}_d \notin \mathcal{S}'$ , а поэтому  $\tilde{E}_d * f \notin \mathcal{S}'$ , хотя, конечно,  $\tilde{E}_d * f \in \mathcal{D}'$ . Сформулируем этот результат в виде теоремы

**ТЕОРЕМА 2.2.** Пусть при выполнении условия (i)  $f \in \mathcal{D}'_{comp}(\mathbb{R}^d)$ . Тогда:

- 1) для  $k'' \geq 0$  уходящий потенциал  $\Phi = E_d * f$  существует в  $\mathcal{S}'$  и удовлетворяет уравнению (2.1) в  $\mathcal{S}'$ ;
- 2) для  $k'' = 0$  приходящий потенциал  $\tilde{E}_d * f$  существует в  $\mathcal{S}'$  и удовлетворяет уравнению (2.1) in  $\mathcal{S}'$ ;
- 3) для  $k'' > 0$  приходящий потенциал  $\tilde{E}_d * f$  существует в  $\mathcal{D}'$  и удовлетворяет уравнению (2.1) в  $\mathcal{D}'$ .

Обсудим теперь вопрос о единственности решения уравнения (2.1), рассматриваемого в пространстве  $\mathcal{S}'$ . В силу линейности оператора Гельмгольца этот вопрос эквивалентен вопросу о несуществовании нетривиального решения однородного уравнения (2.4). Для исследования этого вопроса применим преобразование Фурье к обеим частям в (2.4). Используя (1.33), получим

$$\mathcal{F}[\Delta\Phi + k^2\Phi] = [k^2 - |\xi|^2]\hat{\Phi} = 0. \quad (2.28)$$

Здесь  $\hat{\Phi} = \mathcal{F}\Phi$ . Рассмотрим два случая:

а)  $k'' \neq 0$ . Ясно, что  $k^2 - |\xi|^2 \neq 0$  в  $\mathbb{R}_\xi^d$ . Поэтому из (2.28) вытекает, что  $\hat{\Phi} = 0$ , а следовательно,  $\Phi = 0$ . Таким образом, в этом случае уравнение (2.4) имеет только тривиальное решение  $\Phi = 0$  в пространстве  $\mathcal{S}'$ ;

б)  $k'' = 0$ . Из (2.28) следует, что в этом случае  $\hat{\Phi}(\xi) = 0$  при  $|\xi|^2 \neq k^2 \equiv k'^2$ , т.е.  $\hat{\Phi}$  является распределением с компактным носителем. Тогда в силу теоремы 1.11 решение  $\Phi = \mathcal{F}^{-1}\hat{\Phi}$  принадлежит классу  $C_p^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Здесь  $C_p^\infty$  – подпространство в  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , состоящее из функций, растущих на бесконечности вместе с производными не быстрее полиномов. Поэтому любое решение  $\Phi \in \mathcal{S}'$  уравнения (2.4) необходимо является бесконечно дифференцируемой функцией. Следовательно, справедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 2.3.** При выполнении условия (i) решение  $\Phi \in \mathcal{S}'$  уравнения (2.1) единственно, если  $k'' > 0$ , и определяется с точностью до аддитивной функции  $\Phi_0 \in C_p^\infty(\mathbb{R}^d)$ , удовлетворяющей (2.4), если  $k'' = 0$ .

Заметим, что вторая часть теоремы 2.3, касающаяся случая  $k'' = 0$ , остается справедливой, если заменить пространство  $\mathcal{S}'$  в его утверждении более широким пространством  $\mathcal{D}'$ . Что касается первой части, то ее справедли-

вость нарушается для пространства  $\mathcal{D}'$ , поскольку при  $k'' > 0$  существуют функции  $\Phi \in \mathcal{A} \subset \mathcal{D}'$ , удовлетворяющие уравнению (2.4) всюду в  $\mathbb{R}^d$ . При-  
мерами таких функций для  $d = 3$  или 2 являются соответственно:

$$\Phi_3(\mathbf{x}) = \frac{\sin k|\mathbf{x}|}{4\pi|\mathbf{x}|} = \frac{\exp(ik|\mathbf{x}|) - \exp(-ik|\mathbf{x}|)}{8\pi i|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \Phi_3(0) = \frac{k}{4\pi}, \quad (2.29)$$

$$\Phi_2(\mathbf{x}) = \frac{i}{4}J_0(k|\mathbf{x}|) = \frac{i}{8} \left[ H_0^{(1)}(k|\mathbf{x}|) + H_0^{(2)}(k|\mathbf{x}|) \right], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad \Phi_2(0) = \frac{i}{4}.$$

Функция  $\Phi_3$ , например, принадлежит пространству  $\mathcal{A}$  и удовлетворяет (2.4) всюду в  $\mathbb{R}^3$ . Но если при  $k'' = 0$   $\Phi_3(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1})$  при  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$  и поэтому  $\Phi_3 \in \mathcal{S}'$ , то при  $k'' > 0$   $\Phi_3$  так же, как и фундаментальное решение  $\tilde{E}_3$ , экспоненциально растет на бесконечности и поэтому  $\Phi_3 \notin \mathcal{S}'$ . Это также справедливо и для  $\Phi_2$ . Приведенные факты находятся в согласии с теоремой 2.3, согласно которой единственным решением уравнения (2.4) в пространстве  $\mathcal{S}'$  для  $k'' > 0$  является тривиальное решение  $\Phi = 0$ .

Эти примеры показывают, что для выделения единственного решения уравнения (2.4) при  $k'' > 0$ , рассматриваемого в пространстве  $\mathcal{D}' \supset \mathcal{S}'$ , следует накладывать дополнительные условия на решение, которые исключают специфические решения типа (2.29) уравнения (2.4) из  $\mathcal{D}'$ . В качестве такого условия можно использовать условие

$$\Phi(\mathbf{x}) = O(1), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (2.30)$$

или даже более общее условие

$$\Phi(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^m), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (2.31)$$

Здесь  $m \in \mathbb{N}_0$  – произвольное, но фиксированное число. Более точно обозначим через  $B_R$  шар радиуса  $R$  с центром в начале  $O \in \mathbb{R}^d$  и пусть  $B_e = \mathbb{R}^d \setminus \overline{B_R}$ . Будем говорить в соответствии с определением 1.5, что распределение  $\Phi \in \mathcal{D}'$  удовлетворяет условию (2.31), если его сужение  $\Phi|_{B_e}$  на внешность  $B_e$  шара  $B_R$  принадлежит  $C(B_e)$  и удовлетворяет (2.31). Поскольку любая функция  $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , удовлетворяющая (2.31), очевидно принадлежит  $\mathcal{S}'$  (см. п. 8.1.3), то справедливо следующее следствие.

**СЛЕДСТВИЕ 2.1.** *При выполнении условия (i) решение  $\Phi \in \mathcal{D}'$  уравнения (2.1) при  $k'' > 0$  является единственным в пространстве распределений, удовлетворяющих условию (2.31) для любого  $m \in \mathbb{N}_0$ . При  $k'' = 0$  решение  $\Phi \in \mathcal{D}'$  определяется с точностью до аддитивной функции  $\Phi_0 \in C^\infty(\Omega)$ , удовлетворяющей уравнению (2.4).*

**8.2.3. Типы и свойства уходящих потенциалов.** Множество всех уходящих потенциалов  $E_d * f$  может быть разбито на несколько классов, в зависимости от поведения носителя  $\text{supp} f$ . Первый класс состоит из “точечных потенциалов”, т.е. потенциалов, создаваемых обобщенными функциями  $f$  с точечными носителями. Физически эти потенциалы отвечают

полям, которые порождаются точечными источниками. Элементарный точечный источник, сосредоточенный в точке  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ , есть *монополю*. Математически монополю интенсивности  $q \in \mathbb{C}$  с центром в  $\mathbf{y}$  определяется как система  $(\mathbf{y}, q\delta(\cdot, \mathbf{y}))$  и будет обозначаться ниже через  $(\mathbf{y}, q)$ . Акустическое поле, создаваемое монополюм  $(\mathbf{y}, q)$ , описывается формулой  $E_d * [q\delta(\cdot, \mathbf{y})]$  которую с учетом (1.23) можно переписать в виде

$$E_d * [q\delta(\cdot, \mathbf{y})] = qE_d * \delta(\cdot, \mathbf{y}) = qE_d(\cdot, \mathbf{y}).$$

Наряду с монополюм  $(\mathbf{y}, q)$  существует бесконечное число различных типов точечных источников, сосредоточенных в точке  $\mathbf{y}$ . С учетом общего вида (1.14) обобщенных функций с точечным носителем они определяются с помощью соответствующих производных  $\delta$ -функции и называются *мультиполями*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Система (пара)

$$(\mathbf{y}, q\partial^\alpha \delta(\cdot, \mathbf{y})), \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d, \quad q \in \mathbb{C}$$

называется  $\alpha$ -мультиполюм порядка  $|\alpha|$  интенсивности  $q$  с центром в точке  $\mathbf{y}$  и обозначается через  $(\mathbf{y}, q, \alpha)$ .

Мультиполю  $(\mathbf{y}, q, \alpha)$  порядка  $|\alpha| = 0$ , очевидно, совпадает с монополюм  $(\mathbf{y}, q)$ . Общие мультиполю порядков 1 и 2 описываются формулами (эти формулы полезно сравнить с соответствующими формулами из §6.1):

$$(\mathbf{y}, q\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\cdot, \mathbf{y})) \text{ и } (\mathbf{y}, q\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\delta(\cdot, \mathbf{y})), \quad i, j = 1, 2, \dots, d. \quad (2.32)$$

Первый мультиполю в (2.32) называется *диполюм* интенсивности  $q$  с центром в  $\mathbf{y}$ , ориентированным в направлении оси  $x_i$ . Второй мультиполю в (2.32) называется *квадрупольм* интенсивности  $q$  с центром в  $\mathbf{y}$ , ориентированным относительно  $x_i$  и  $x_j$ . Акустические поля, порождаемые диполюм или квадрупольм в (2.32), определяются в силу (1.23) формулами

$$E_d * [q\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\cdot, \mathbf{y})] = qE_d * [\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\cdot, \mathbf{y})] = q\frac{\partial}{\partial x_i}E_d(\cdot, \mathbf{y}), \quad (2.33)$$

$$E_d * [q\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\delta(\cdot, \mathbf{y})] = qE_d * [\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\delta(\cdot, \mathbf{y})] = q\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}E_d(\cdot, \mathbf{y}).$$

Обозначим через  $f_{x_j}$  обобщенную функцию с носителем, сосредоточенным в точке  $\mathbf{x}_j$ . Она определяется в силу (1.15) с помощью переноса на вектор  $\mathbf{x}_j$  линейной комбинации  $\delta$ -функции  $\delta$  и ее производных. Тогда объемная плотность  $f$  соответствующей системы точечных источников, сосредоточенных в  $\mathbf{x}_j$ , и порожденное ими поле, определяются соотношениями

$$f = \sum_{j=1}^N q_j f_{x_j}, \quad \Phi = \sum_{j=1}^N q_j E_d * f_{x_j}. \quad (2.34)$$

Здесь  $N \in \mathbb{N}$  – натуральное число, а  $q_j \in \mathbb{C}$  имеет смысл интенсивности  $j$ -го точечного источника. Физически формула (2.34) описывает объемную плотность и поле акустической *дискретной антенны* или *решетки*

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_N \\ q_1 & q_2 & \dots & q_N \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Обратим внимание читателя на практическую важность плотностей и полей вида (2.34). Это связано с тем фактом, что на практике в качестве источников звука, как правило, используются точечные источники или решетки вида (2.35) (см. подробнее об этом в [2,3]).

Ко второму классу уходящих потенциалов относятся поверхностные потенциалы, т.е. потенциалы простого и двойного слоя:

$$\Phi^{(s)}(\mathbf{x}) = \mathcal{S}\varphi(\mathbf{x}) \equiv \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{y}) E_d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma, \quad (2.36)$$

$$\Phi^{(d)}(\mathbf{x}) = \mathcal{K}\psi(\mathbf{x}) \equiv \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{y}) \frac{\partial E_d(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{y}}} dS_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma. \quad (2.37)$$

Здесь  $\varphi$  и  $\psi \in L^1(\Gamma)$  заданные функции. Используя (2.36), (2.37) и свойство аналитичности фундаментального решения  $E_d(\cdot, \mathbf{y})$  при  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , можно показать, что  $\Phi^{(s)}, \Phi^{(d)} \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$  и, кроме того,

$$L\Phi^{(s)} = 0, \quad L\Phi^{(d)} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^d \setminus \Gamma.$$

Более того, легко видеть, что каждый из потенциалов  $\Phi^{(s)}$  и  $\Phi^{(d)}$  удовлетворяет условиям излучения (2.22). Действительно, рассмотрим, например, потенциал простого слоя для случая трех измерений ( $d = 3$ ). Используя замечание 2.1, имеем в силу (2.19) и условия  $\varphi \in L^1(\Gamma)$ , что

$$|\Phi^{(s)}(\mathbf{x})| = \exp(-k''|\mathbf{x}|) O(|\mathbf{x}|^{-1}) \int_{\Gamma} |\varphi_1(\mathbf{y})| dS_{\mathbf{y}} = \exp(-k''|\mathbf{x}|) O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \mathbf{x} \rightarrow \infty.$$

Точно так же с учетом второго соотношения в (2.19) выводим

$$\left| \frac{\partial \Phi^{(s)}(\mathbf{x})}{\partial |\mathbf{x}|} - ik\Phi^{(s)}(\mathbf{x}) \right| = \left| \int_{\Gamma} \varphi_1(\mathbf{y}) \left[ \frac{\partial E_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial |\mathbf{x}|} - ikE_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] dS_{\mathbf{y}} \right| =$$

$$\exp(-k''|\mathbf{x}|) O(|\mathbf{x}|^{-2}) = \exp(-k''|\mathbf{x}|) o(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \mathbf{x} \rightarrow \infty.$$

Аналогичные результаты справедливы для потенциала двойного слоя и в случае, когда  $d \neq 3$ .

Отметим к тому же, что с помощью свертки потенциалы  $\Phi^{(s)}$  и  $\Phi^{(d)}$  могут быть записаны в виде

$$\Phi^{(s)} = E_d * (\varphi \delta_{\Gamma}), \quad \Phi^{(d)} = -E_d * \frac{\partial}{\partial n}(\psi \delta_{\Gamma}). \quad (2.38)$$

Здесь  $\varphi\delta_\Gamma$  и  $-\frac{\partial}{\partial n}(\psi\delta_\Gamma)$  соответственно простой и двойной слои на поверхности  $\Gamma$ , определенные в §8.1.1. Формулы (2.38) означают, что потенциалы  $\Phi^{(s)}$  и  $\Phi^{(d)}$  являются свертками фундаментального решения обобщенными функциями, имеющими носители, сосредоточенные на некоторой поверхности в  $\mathbb{R}^d$  (или на линии в  $\mathbb{R}^2$ ). В случае, когда  $\varphi, \psi \in L^1(\Gamma)$ , формулы (2.38) эквивалентны формулам (2.36) и (2.37) и могут быть приняты за определение потенциалов простого и двойного слоя. Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 2.4.** Пусть при выполнении условия (i)  $\Gamma \in C^1$ ,  $\varphi, \psi \in L^1(\Gamma)$ . Тогда потенциалы  $\Phi^{(s)}$  и  $\Phi^{(d)}$ , введенные в (2.38), являются локально интегрируемыми функциями из пространства  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma)$ , определяемыми с помощью формул (2.36), (2.37). Кроме того,  $\Phi^{(s)}$  и  $\Phi^{(d)}$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца (2.4) в  $\mathbb{R}^d \setminus \Gamma$  и условиям излучения (2.22).

Естественно, возникает вопрос о поведении потенциалов  $\Phi^{(s)}$  и  $\Phi^{(d)}$  на самой поверхности  $\Gamma$  и при переходе через  $\Gamma$ . Это вопрос изучен достаточно хорошо для гладких и негладких данных в случае, когда  $\Gamma$  является замкнутой поверхностью. В случае, когда  $\varphi, \psi \in C(\Gamma)$ , а  $\Gamma \in C^2$  либо  $\Gamma$  является поверхностью Ляпунова, основные результаты о поведении  $\Phi^{(s)}$  и  $\Phi^{(d)}$  на  $\Gamma$  и при переходе через  $\Gamma$  аналогичны результатам, приведенным в теоремах 2.3 и 2.4 гл. 7 для обычных (ньютоновских) потенциалов простого и двойного слоя и могут быть найдены в [65].

Третий класс уходящих потенциалов состоит из *объемных* потенциалов. Согласно определению объемный потенциал  $\Phi^{(v)}$  определяется формулой  $\Phi^{(v)} = E_d * f$ , где  $f$  – произвольная обобщенная функция, носитель которой  $\text{supp } f$  имеет положительную  $n$ -мерную меру Лебега. Мы рассмотрим частный подкласс этого класса, состоящий из потенциалов вида  $E_d * f$ , где  $f \in L^1_{\text{comp}}(\mathbb{R}^d)$  – произвольная функция. Рассуждая, как и выше, можно показать, что для любой функции  $f \in L^1_{\text{comp}}(\mathbb{R}^d)$  объемный потенциал  $\Phi^{(v)}$  является измеримой функцией, определяемой формулой

$$\Phi^{(v)}(\mathbf{x}) \equiv [E_d * f](\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} E_d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.39)$$

В частности, при  $d = 3$  формула (2.39) принимает вид

$$\Phi^{(v)}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} E_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.40)$$

Из (2.13) и (2.14) следует, что  $E_d$  отличается лишь аддитивным гладким слагаемым от фундаментального решения оператора Лапласа  $\Delta$ . Поэтому свойства акустического объемного потенциала (2.39) аналогичны свойствам гравитационного потенциала, определяемого при  $d = 3$  формулой

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$



Основываясь на этом, сформулируем следующую теорему об общих свойствах объемного потенциала (2.39) и дадим скетч ее доказательства.

**ТЕОРЕМА 2.5.** Пусть при выполнении условия (i)  $f \in L^1_{comp}(\mathbb{R}^d)$  и пусть уходящий потенциал  $\Phi^{(v)}$  определяется формулой (2.39). Тогда:

1)  $\Phi^{(v)}$  принадлежит пространству  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$  и удовлетворяет уравнению (2.1) в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$  и уходящим условиям излучения (2.22). Кроме того,  $\Phi^{(v)}$  имеет обобщенную производную  $\partial\Phi^{(v)}/\partial x_i$ , которая является функцией; она определяется для почти всех  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  формулой

$$\frac{\partial\Phi^{(v)}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \int \frac{\partial}{\partial x_i} E_d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad i = 1, 2, \dots, d. \quad (2.41)$$

При  $d = 1$   $\Phi^{(v)} \in C^1(\mathbb{R}^1)$ . При  $d = 2$   $\Phi^{(v)} \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^d)$  для каждого  $q < \infty$ . При  $d \geq 3$   $\Phi^{(v)} \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^d)$  для каждого  $q < d/(d-2)$ ;

2) пусть, более того,  $f \in L^p_{comp}(\mathbb{R}^d)$  для некоторого  $p \in (1, \infty)$ . Тогда:

(a)  $\Phi^{(v)}$  принадлежит пространству  $W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ , удовлетворяет уравнению (2.1) п.в. в  $\mathbb{R}^d$  и для любого открытого ограниченного множества  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^d$  существует константа  $C_\Omega$ , зависящая от  $\Omega$ ,  $d, k$  и  $p$  такая, что  $\|\Phi^{(v)}\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^p}$ ;

(b) для  $d \geq 2$  и  $d/2 < p \leq d$ ,  $\Phi^{(v)}$  непрерывна по Гельдеру с показателем  $\alpha < 2 - d/p$ , причем  $|\Phi^{(v)}(\mathbf{x}') - \Phi^{(v)}(\mathbf{x}'')| \leq C_1 \|f\|_{L^p} |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|^\alpha \quad \forall \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathbb{R}^d$ ;

(c) для  $p > d$   $\Phi^{(v)}$  имеет производную  $\partial\Phi^{(v)}/\partial x_i$ , определенную формулой (2.41), она непрерывна по Гельдеру с показателем  $\alpha < 1 - d/p$ , т.е.

$$\left| \frac{\partial\Phi^{(v)}(\mathbf{x}')}{\partial x_i} - \frac{\partial\Phi^{(v)}(\mathbf{x}'')}{\partial x_i} \right| \leq C_2 \|f\|_{L^p} |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|^\alpha \quad \forall \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathbb{R}^d.$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  – константы, зависящие только от  $d, k, p, \alpha$  и  $\text{supp} f$ ;

3) если, более того,  $f \in W^{s,p}_{comp}(\mathbb{R}^d)$ , где  $s \geq 0$ ,  $1 < p < \infty$ , то  $\Phi^{(v)} \in W^{s+2,p}_{loc}(\mathbb{R}^d)$  и  $\|\Phi^{(v)}\|_{W^{s+2,p}(\Omega)} \leq C_3 \|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d)}$ ;

4) если, наконец,  $f \in C^{l,\lambda}_{comp}(\mathbb{R}^d)$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $0 < \lambda < 1$ , то  $\Phi^{(v)} \in C^{l+2,\lambda}(\mathbb{R}^d)$  и  $\|\Phi^{(v)}\|_{C^{l+2,\lambda}(\overline{\Omega})} \leq C_4 \|f\|_{C^{l,\lambda}(\mathbb{R}^d)}$ .

Здесь константа  $C_3$  зависит только от  $\Omega$ ,  $d, k, s$  и  $p$ , тогда как  $C_4$  зависит только от  $\Omega$ ,  $d, k, l$  и  $\lambda$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $f \in L^1_{comp}(\mathbb{R}^d)$ . Докажем, что  $L\Phi^{(v)} = -f$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ , т.е., что

$$\int \Phi^{(v)} L\varphi d\mathbf{x} = - \int f\varphi d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d). \quad (2.42)$$

С этой целью подставим (2.39) в (2.42) и воспользуемся теоремой Фубини для вычисления кратного интеграла. Используя (2.10), получим

$$\int \Phi^{(v)} L\varphi d\mathbf{x} = \int \left[ \int E_d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] L\varphi d\mathbf{x} =$$

$$= \int \left[ \int E_d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) L\varphi d\mathbf{x} \right] f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = - \int f(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Это доказывает (2.42). Тот факт, что объемный потенциал  $\Phi^{(v)}$  удовлетворяет условиям излучения (2.22), доказывается по той же схеме, что и для потенциала простого слоя. Доказательство других утверждений аналогично доказательству соответствующих утверждений для гравитационного потенциала (см., например, [64, 67, 68]) либо следует из них.

### § 8.3. Условия излучения для уравнения Гельмгольца

В этом параграфе мы установим достаточные условия для потенциала  $\Phi$ , отличные от условий, указанных в теоремах 2.1 и 2.3, при выполнении которых решение  $\Phi \in \mathcal{D}'$  уравнения (2.1) является единственным или, что то же самое, однородное уравнение Гельмгольца (2.4) имеет только тривиальное решение  $\Phi = 0$ . Рассматривая для определенности случай  $d = 3$ , выберем в качестве этого условия второе условие в (2.15), имеющее вид

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial |\mathbf{x}|} - ik\Phi(\mathbf{x}) = \exp(-k''|\mathbf{x}|)o(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

Наряду с (3.1) будем рассматривать более слабое интегральное условие

$$\int_{\Gamma_R} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} - ik\Phi \right|^2 dS \rightarrow 0, \quad r = |\mathbf{x}|, \quad R \rightarrow \infty, \quad (3.2)$$

которое, очевидно, следует из (3.1). Здесь и ниже  $\Gamma_R = \partial B_R$  — граница (сфера) шара  $B_R$  радиуса  $R$  с центром в начале координат.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.** Будем говорить, что распределение  $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  удовлетворяет условию излучения (3.1) (либо (3.2)), если его сужение  $\Phi|_{B_e}$  на множество  $B_e = \mathbb{R}^3 \setminus B_R$  для некоторого  $R > 0$  принадлежит классу  $C^1(B_e)$  (в смысле определения 1.5) и удовлетворяет (3.1) (либо (3.2)) в классическом смысле.

**ЛЕММА 3.1.** Пусть при выполнении условия (i) функция  $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^3)$  удовлетворяет уравнению (2.4) в  $\mathbb{R}^3$  и условию (3.2). Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Gamma_R} \left( \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|^2 + |k|^2 |\Phi|^2 \right) dS + 2\operatorname{Im} k \int_{B_R} (|k|^2 |\Phi|^2 + |\nabla \Phi|^2) d\mathbf{x} \right\} = 0. \quad (3.3)$$

В частности, если  $\operatorname{Im} k \equiv k'' = 0$ , то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \left( \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|^2 + |k|^2 |\Phi|^2 \right) dS = 0. \quad (3.4)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $a$  и  $b$  — два комплексных числа. Тогда

$$|a - ib|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Im}(a\bar{b}). \quad (3.5)$$

Из (3.2) и (3.5) вытекает, что

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} - ik\Phi \right|^2 dS = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \left\{ \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|^2 + |k|^2 |\Phi|^2 + 2\operatorname{Im}(k\Phi \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}) \right\} dS. \quad (3.6)$$

Применяя первую формулу Грина (1.37) к функциям  $\Phi$  и  $\bar{\Phi}$  в  $B_R$  и учитывая, что  $\Delta \Phi = -k^2 \Phi$  в  $B_R$  в силу (2.4) и  $\partial \Phi / \partial n = \partial \Phi / \partial r$  на  $\Gamma_R$ , имеем

$$\int_{B_R} \Phi \Delta \bar{\Phi} d\mathbf{x} \equiv -\bar{k}^2 \int_{B_R} |\Phi|^2 d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_R} \Phi \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} dS - \int_{B_R} |\nabla \Phi|^2 d\mathbf{x}. \quad (3.7)$$

Умножим (3.7) на  $k$  и возьмем мнимую часть. Получим

$$\operatorname{Im}(k \int_{\Gamma_R} \Phi \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} dS) = \operatorname{Im}(k \int_{B_R} (|k|^2 |\Phi|^2 + |\nabla \Phi|^2) d\mathbf{x}). \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в (3.6), приходим к (3.3).

Заметим, что все слагаемые в левой части (3.3) неотрицательны. Поэтому каждое из слагаемых будет стремиться к нулю, поскольку их сумма стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Отсюда вытекает следующее следствие.

**СЛЕДСТВИЕ 3.1.** *При выполнении условий леммы 3.1*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} |\Phi(\mathbf{y})|^2 dS = 0 \text{ при } R \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

**ТЕОРЕМА 3.1.** *При выполнении условий леммы 3.1  $\Phi(\mathbf{x}) \equiv 0$  в  $\mathbb{R}^3$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  – произвольная точка. Выберем число  $R > |\mathbf{x}|$  и применим формулу интегрального представления (2.10) для функции  $\Phi$  в шаре  $B_R$ . Поскольку  $L\Phi = 0$  и  $\partial/\partial n_y = \partial/\partial |\mathbf{y}|$ , то получим

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_R} \left[ E(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{y})}{\partial n_y} - \Phi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_y} \right] dS_y \equiv \\ &= \int_{\Gamma_R} E(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[ \frac{\partial \Phi(\mathbf{y})}{\partial |\mathbf{y}|} - ik\Phi(\mathbf{y}) \right] dS_y - \int_{\Gamma_R} \Phi(\mathbf{y}) \left[ \frac{\partial E(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial |\mathbf{y}|} - ikE(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] dS_y. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Перейдем здесь к пределу  $R \rightarrow \infty$ . Из (2.20) следует, что при любом  $k'' \geq 0$  фундаментальное решение  $E$  удовлетворяет следующим условиям:

$$E(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = O(R^{-1}), \quad \frac{\partial E(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial |\mathbf{y}|} - ikE(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = O(R^{-2}), \quad R \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Учитывая (3.11), а также соотношения (3.2) и (3.9) для  $\Phi$ , легко выводим, используя неравенство Коши–Буняковского в (1.3) для оценки интегралов

по  $\Gamma_R$ , что оба интеграла по  $\Gamma_R$  стремятся к нулю, когда  $R \rightarrow \infty$ . Это означает, что  $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ . ■

Другими словами, теорема 3.1 означает, что не существует нетривиального решения  $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^3)$  однородного уравнения Гельмгольца (2.4), удовлетворяющего интегральному условию излучения (3.2). Поскольку  $C^2(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ , то с учетом свойства эллиптической регулярности заключаем, что решение  $\Phi$  уравнения Гельмгольца (2.1) является единственным в пространстве  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  распределений, удовлетворяющих условию излучения (3.1) или (3.2) (в смысле определения 3.1).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.** Задачу нахождения распределения  $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ , удовлетворяющего уравнению Гельмгольца (2.1) в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  и условию излучения (3.2), будем называть задачей излучения в  $\mathbb{R}^3$ .

Из теоремы 3.1 вытекает следующий результат.

**СЛЕДСТВИЕ 3.2.** *При выполнении условия (i) задача излучения (2.1), (3.2) может иметь не более одного решения  $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ .*

Для доказательства существования решения задачи излучения достаточно, в силу теоремы 2.2, показать, что уходящий потенциал  $\Phi \equiv E_3 * f$  удовлетворяет (3.2) или (3.1). В частном случае, когда  $f \in L^1_{\text{comp}}(\mathbb{R}^3)$ , этот факт следует, очевидно, из теоремы 2.5. В самом деле, согласно этой теореме объемный потенциал  $\Phi^{(v)}$ , определенный при  $d = 3$  в (2.40), удовлетворяет уравнению (2.1) в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  и обоим условиям излучения в (2.15), а, следовательно,  $\Phi^{(v)}$  удовлетворяет (3.2). Таким образом, справедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 3.2.** *Пусть при выполнении условия (i)  $f \in L^1_{\text{comp}}(\mathbb{R}^3)$ . Тогда решение  $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  задачи излучения (2.1), (3.2) существует, единственно и определяется формулой (2.40).*

Обсудим теперь различные формы условий излучения. Мы начнем с напоминания хорошо известного факта, доказанного впервые в [69], что любое решение однородного уравнения (2.4), удовлетворяющее условию (3.1), удовлетворяет первому условию Зоммерфельда, имеющему при  $k'' = 0$  вид

$$\Phi(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (3.12)$$

(равномерно во всех направлениях). Сейчас мы в состоянии доказать этот факт строго для любого распределения  $\Phi \in \mathcal{D}'(\Omega_e)$  с  $L\Phi \in \mathcal{D}'_{\text{comp}}(\Omega_e)$ , где  $\Omega_e$  – неограниченная область. Более точно, предположим, что

(ii)  $\Omega_e$  – связная неограниченная компонента внешности ограниченного открытого множества  $\Omega$  с границей  $\Gamma = \partial\Omega$ .

Условие (ii) допускает возможность того, что граница  $\Gamma$  множества  $\Omega$  состоит из нескольких компонент. В самом деле, в этом случае внешность  $\Omega^c$  области  $\Omega$  состоит из конечного числа компонент, одна из которых неограничена. Именно эта компонента из  $\Omega^c$  обозначается через  $\Omega_e$ . В случае, когда граница  $\Gamma$  множества  $\Omega$  связна,  $\Omega_e$  совпадает с  $\Omega^c$ , причем  $\partial\Omega = \partial\Omega_e$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Распределение  $\Phi \in \mathcal{D}'(\Omega_e)$  назовем “излученным” решением оператора Гельмгольца  $L$  в  $\Omega_e$  (или излученным полем), если:

- 1)  $L\Phi$  имеет компактный носитель  $\text{supp } L\Phi$ ;
- 2)  $\Phi \not\equiv 0$  вне носителя  $\text{supp } L\Phi$ ;
- 3)  $\Phi$  удовлетворяет интегральному условию излучения (3.2).

“Излученное” решение  $\Phi$  оператора Гельмгольца является аналитической функцией вне  $\text{supp } L\Phi$ . Это следует из свойства эллиптической регулярности. Отсюда вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть при выполнении условий (i), (ii) “излученное” решение  $\Phi$  оператора Гельмгольца обращается в нуль в открытом подмножестве  $Q$ , расположенном вне  $\text{supp } L\Phi$ . Тогда  $\Phi \equiv 0$  вне  $\text{supp } L\Phi$ .

ЛЕММА 3.2. Пусть при выполнении условий (i), (ii)  $\Phi$  является “излученным” решением оператора Гельмгольца в  $\Omega_e$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Gamma_R} (|\frac{\partial \Phi}{\partial r}|^2 + |k|^2 |\Phi|^2) dS + 2\text{Im} k \int_{B_{R_0 R}} (|k|^2 |\Phi|^2 + |\nabla \Phi|^2) d\mathbf{x} \right\} = \\ = -2\text{Im}(k \int_{\Gamma_0} \Phi \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} dS). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь  $r = |\mathbf{x}|$ ,  $\Gamma_0 = \Gamma_{R_0}$  – сфера радиуса  $R_0$ , содержащая внутри себя множество  $\Omega$  и носитель  $\text{supp } L\Phi$ ,  $B_{R_0 R}$  – ограниченная область (сферический слой), расположенная между сферами  $\Gamma_{R_0}$  и  $\Gamma_R$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно заметить, что множество  $\Omega$  и  $\text{supp } L\Phi$  находятся внутри сферы  $\Gamma_0 = \Gamma_{R_0}$  достаточно большого радиуса  $R_0$ . Это означает, что  $\Delta \Phi = -k^2 \Phi$  вне  $\Gamma_0$ . Поэтому, применяя первую формулу Грина (1.37) к функциям  $\Phi$  и  $\bar{\Phi}$  в области  $B_{R_0 R}$  и учитывая, что  $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$  на  $\Gamma_0$ , получим

$$\int_{B_{R_0 R}} \Phi \Delta \bar{\Phi} d\mathbf{x} \equiv -\bar{k}^2 \int_{B_{R_0 R}} |\Phi|^2 d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_R} \Phi \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} dS - \int_{\Gamma_0} \Phi \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} dS - \int_{B_{R_0 R}} |\nabla \Phi|^2 d\mathbf{x}. \quad (3.14)$$

Рассуждая далее, как при доказательстве леммы 3.1, отсюда выводим (3.13). ■

Отметим, что правая часть в (3.13) не обязательно равна нулю. Поэтому, в отличие от (3.9), из (3.13) вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. В условиях леммы 3.2 справедливо равенство

$$\int_{\Gamma_R} |\Phi(\mathbf{y})|^2 dS = O(1), \quad R \rightarrow \infty. \quad (3.15)$$

ТЕОРЕММА 3.3. Пусть выполняются условия леммы 3.2 для “излученного” решения  $\Phi$ . Тогда в любой точке  $\mathbf{x}$  такой, что  $|\mathbf{x}| > R_0$ , справедливо

следующее представление поля  $\Phi$ :

$$\Phi(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma_0} \left[ E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{y})}{\partial r} - \Phi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial r} \right] dS_{\mathbf{y}}. \quad (3.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}_{R_0}$  – фиксированная точка. Применяя формулу (2.10) для функции  $\Phi$  в ограниченной области  $B_{R_0 R}$ , имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) = & - \int_{\Gamma_0} \left[ E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{y})}{\partial r} - \Phi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial r} \right] dS_{\mathbf{y}} + \\ & \int_{\Gamma_R} \left[ E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{y})}{\partial r} - \Phi(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial r} \right] dS_{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Перейдем к пределу при  $R \rightarrow \infty$  в (3.17). Рассуждая, как при доказательстве теоремы 3.1, заключаем в силу (3.2), (3.11) и (3.15), что интеграл по  $\Gamma_R$  стремится к нулю, когда  $R \rightarrow \infty$ . В результате получаем (3.16). ■

(3.16) означает, что любое “излученное” решение оператора Гельмгольца представимо вне  $\Gamma_0$  в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi^{(s)}(\mathbf{x}) + \Phi^{(d)}(\mathbf{x}). \quad (3.18)$$

Здесь

$$\Phi^{(s)}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_0} g_1(\mathbf{y}) E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}, \quad g_1(\mathbf{y}) = -\frac{\partial \Phi(\mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{y}}}, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_0, \quad (3.19)$$

$$\Phi^{(d)}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_0} g_2(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{y}}} dS_{\mathbf{y}}, \quad g_2(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \Gamma_0. \quad (3.20)$$

где  $\partial/\partial n_{\mathbf{y}}|_{\Gamma_0} = \partial/\partial r|_{\Gamma_0}$ . В силу теоремы 2.4 каждый из потенциалов  $\Phi^{(s)}$  или  $\Phi^{(d)}$  является аналитической вне  $\Gamma_0$  функцией, удовлетворяющей условиям излучения (2.15). Отсюда вытекает следующий результат.

**ЛЕММА 3.3.** *При выполнении условий (i), (ii) любое “излученное” решение  $\Phi$  оператора Гельмгольца  $L$  в  $\Omega_e$  удовлетворяет условиям излучения (2.15).*

Заметим, что доказательство леммы 3.3 основано на интегральном представлении (3.16) для “излученного” решения  $\Phi$  оператора  $L$ . Чтобы доказать (3.16), мы применили соответствующую формулу (2.10) к  $\Phi$  в ограниченной области  $B_{R_0 R}$ . Затем, используя интегральное условие излучения (3.2), следствие 3.4 и условия излучения (3.11) для  $E$ , мы доказали, что интеграл по  $\Gamma_R$  в (3.17) стремится к нулю для “излученного” решения, когда  $R \rightarrow \infty$ . Подчеркнем, что последнее имеет место как в случае, когда  $k'' = 0$ , так и при  $k'' > 0$ . Это связано с тем фактом, что фундаментальное

решение  $E$  удовлетворяет (3.11) при любом  $k'' \geq 0$ . Тем не менее эти два случая сильно различаются и мы сейчас рассмотрим их отдельно.

Начнем со случая  $k'' > 0$ . Отметим, что в этом случае фундаментальное решение  $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  экспоненциально исчезает при  $|\mathbf{y}| \rightarrow \infty$  в силу (2.20). Используя это, легко заключаем, что интеграл по  $\Gamma_R$  в (3.17) стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ , если функция  $\Phi$ , как и  $\partial\Phi/\partial|\mathbf{x}|$ , удовлетворяет, например, условию ограниченности (2.30) или даже более общим условиям

$$\Phi(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^m), \quad \partial\Phi(\mathbf{x})/\partial|\mathbf{x}| = O(|\mathbf{x}|^m), \quad \mathbf{x} \rightarrow \infty, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad (3.21)$$

где  $m$  – произвольное число. Сформулируем этот результат в виде леммы.

**ЛЕММА 3.4.** *Пусть при выполнении условий (i), (ii)  $k'' > 0$  и пусть распределение  $\Phi \in \mathcal{D}'(\Omega_e)$  с компактным носителем  $L\Phi$  удовлетворяет условиям (3.21). Тогда справедливо соотношение (3.15).*

Пусть теперь  $k'' = 0$ . Тогда лемма 3.4, очевидно, не верна. Но в этом случае в силу леммы 3.3 справедлив другой важный результат. Он состоит в том, что любое излученное решение оператора Гельмгольца удовлетворяет обоим условиям излучения (2.15) при  $k'' = 0$ , т.е. условиям излучения Зоммерфельда (2.21). Таким образом, мы получили более сильный результат, чем хотели выше, а именно: любое распределение  $\Phi \in \mathcal{D}'(\Omega_e)$  с компактным носителем у  $L\Phi$ , удовлетворяющее интегральному условию излучения (3.2), необходимо удовлетворяет обоим условиям излучения Зоммерфельда (2.21) (при  $k'' = 0$  и выполнении условий (i), (ii)). Так как, в свою очередь, интегральное условие излучения (3.2) для любого распределения  $\Phi \in \mathcal{D}'(\Omega_e)$  является следствием второго условия излучения Зоммерфельда в (2.21), то приходим к следующему утверждению.

**ЛЕММА 3.5.** *Пусть при выполнении условий (i), (ii)  $k'' = 0$ . Распределение  $\Phi \in \mathcal{D}'(\Omega_e)$  с компактным носителем у  $L\Phi$  удовлетворяет интегральному условию излучения (3.2) тогда и только тогда, когда  $\Phi$  удовлетворяет обоим условиям излучения Зоммерфельда (2.21).*

Лемма 3.5 означает, другими словами, что при выполнении ее условий оба условия излучения в (2.21) эквивалентны интегральному условию излучения (3.2), которое, в свою очередь, эквивалентно второму условию в (2.21). Следствием лемм 3.3–3.5 является следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 3.4.** *Пусть выполняются условия (i), (ii). Распределение  $\Phi \in \mathcal{D}'(\Omega_e)$ , удовлетворяющее условиям 1), 2) определения 3.3, является “излученным” решением оператора Гельмгольца в  $\Omega_e$ , если и только если:*

- a) при  $k'' = 0$   $\Phi$  удовлетворяет обоим условиям излучения в (2.21);*
- b) при  $k'' > 0$   $\Phi$  удовлетворяет условиям (3.21), которые эквивалентны условиям (2.15) экспоненциального затухания  $\Phi$  при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .*

Мы отметим, что теорема 3.3 имеет ряд других важных следствий. В случае, когда  $L\Phi = 0$  в  $\Omega_e$ , их можно найти, например, в [65, 66]. Простой анализ показывает, что эти следствия остаются справедливыми и в

рассматриваемом нами случае, когда  $L\Phi \neq 0$  в  $\Omega_e$ , но при условии, что носитель  $\text{supp} L\Phi$  компактен. Сформулируем их здесь с незначительными изменениями и некоторыми комментариями в виде теорем или лемм без доказательства.

Пусть  $\Sigma = \{(\theta, \varphi) : \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\}$  – единичная сфера в  $\mathbb{R}^2$ . Обозначим через  $r = |\mathbf{x}|, \theta, \varphi$ , где  $(\theta, \varphi) \in \Sigma$ , сферические координаты точек  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ . Для краткости будем ссылаться на “излученное” решение  $\Phi$  оператора Гельмгольца  $L$  как на (излученное) поле  $\Phi$ . Следующая теорема является обобщением для “излученного” в смысле определения 3.3 решения теоремы разложения, доказанной в [71] (см. также [65, 72]).

**ТЕОРЕМА 3.5.** Пусть при выполнении условий (i), (ii) число  $R_0 > 0$  таково, что сфера  $\Gamma_{R_0}$  содержит внутри себя  $\overline{\Omega}$  и  $\text{supp} L\Phi$ . Тогда для излученного поля  $\Phi$  справедливо разложение

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ik|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\theta, \varphi)}{r^n} = \frac{\exp(ik|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} [F_0(\theta, \varphi) + \frac{1}{r}F_1(\theta, \varphi) + \dots], \quad (3.22)$$

которое абсолютно и равномерно сходится при  $|\mathbf{x}| \geq R_0$ . Это разложение можно дифференцировать по  $r, \theta, \varphi$  сколько угодно раз и ряды, полученные дифференцированием, сходятся абсолютно и равномерно при  $|\mathbf{x}| \geq R_0$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4.** Функция  $F_0 : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  в разложении (3.22) поля  $\Phi$  называется амплитудой рассеяния  $\Phi$ .

Из теоремы 3.5 вытекает два следствия.

**ЛЕММА 3.6.** При выполнении условий (i), (ii) справедливо следующее асимптотическое представление излученного поля  $\Phi$ :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ikr)}{r} F_0(\theta, \varphi) + \exp(-k''r) O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (3.23)$$

**ЛЕММА 3.7.** При выполнении условий (i), (ii) коэффициенты  $F_n$  разложения (3.22) излученного поля  $\Phi$  рекуррентно определяются амплитудой рассеяния  $F_0$  с помощью формулы

$$2iknF_n = n(n-1)F_{n-1} + B_e F_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.24)$$

где  $B_e \equiv \Delta_{\theta, \varphi}$  – оператор Бельтрами для сферы  $\Sigma$  (см. его вид в прил. 2).

В случае, когда  $F_0 = 0$ , из (3.24) выводим, что  $F_n = 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Из (3.22) тогда следует, что  $\Phi(\mathbf{x}) = 0$  вне некоторой сферы  $\Gamma_{R_0}$ . Используя следствие 3.3, заключаем, что  $\Phi = 0$  вне  $\text{supp} L\Phi$ . Поскольку для поля  $\Phi$ , исчезающего вне  $\text{supp} L\Phi$ , очевидно,  $F_0 = 0$ , то справедлив следующий результат.

**ЛЕММА 3.8.** При выполнении условий (i), (ii) излученное поле  $\Phi$  равно нулю вне  $\text{supp} L\Phi$  тогда и только тогда, когда амплитуда рассеяния равна нулю на  $\Sigma$ .



Мы подчеркнем, что лемма 3.8 устанавливает взаимнооднозначное соответствие между сужениями  $\Phi_\infty$  излученных решений оператора Гельмгольца в окрестности бесконечности и их амплитудами рассеяния.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Лемма 3.8 констатирует, что при  $F_0 = 0$  решение  $\Phi$  уравнения (2.1) равно нулю не в целой области  $\Omega_e$ , а в подобласти, расположенной вне  $\text{supp} L\Phi$ , если только  $L\Phi$  не является аналитической функцией. Другими словами, лемма допускает существование *неизлучающих источников*, создающих поле, которое тождественно исчезает вне ограниченного множества, занимаемого источниками, и поэтому имеет нулевую амплитуду рассеяния. Это действительно справедливо, и именно этот факт является причиной неединственности решений обратных задач излучения звука (см. подробнее об этом в [2,3]). Но, если  $L\Phi = 0$  в  $\Omega_e$  и поэтому  $\Phi$  аналитична в  $\Omega_e$ , то в силу леммы 3.8  $\Phi \equiv 0$  в  $\Omega_e$  тогда и только тогда, когда  $F_0 \equiv 0$  на  $\Sigma$ . Именно этот случай, когда  $L\Phi = 0$  в  $\Omega_e$ , детально рассмотрен в [65,66].

Из (3.22) мы заключаем, в свою очередь, что для любого излученного поля  $\Phi$  справедливо следующее равенство:

$$\int_{\Gamma_R} |\Phi|^2 dS = \exp(-2k''R) \left[ \int_{\Sigma} |F_0(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi + O(1/R) \right], \quad R \rightarrow \infty. \quad (3.25)$$

В частности, когда  $k'' = 0$ , отсюда выводим, что

$$\int_{\Gamma_R} |\Phi|^2 dS = \int_{\Sigma} |F_0(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi + O(1/R), \quad R \rightarrow \infty. \quad (3.26)$$

Предположим, что  $\Phi$  удовлетворяет условию

$$\int_{\Gamma_R} |\Phi|^2 dS = o(1), \quad \text{при } R \rightarrow \infty. \quad (3.27)$$

Тогда из (3.26) следует, что  $F_0 = 0$  и поэтому  $\Phi = 0$  вне  $\text{supp} L\Phi$  в силу леммы 3.8. Таким образом, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 3.9. Пусть при выполнении условий (i), (ii)  $k'' = 0$  и пусть излученное поле  $\Phi$  удовлетворяет (3.27). Тогда  $\Phi \equiv 0$  вне  $\text{supp} L\Phi$ .

В формулировке леммы 3.9 предполагается, что распределение  $\Phi$ , будучи излученным полем, удовлетворяет интегральному условию излучения (3.2) вместе с (3.27). Важно отметить, что утверждение леммы 3.9 остается справедливым и без предложения о том, что  $\Phi$  удовлетворяет (3.2). Это составляет содержание следующей леммы, впервые доказанной в [70].

ЛЕММА 3.10. Пусть при выполнении условий (i), (ii) функция  $\Phi \in C^2(\Omega_e)$  удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца (2.4) в  $\Omega_e$  и условию (3.27), причем  $k'' = 0$ . Тогда  $\Phi = 0$  в  $\Omega_e$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Изложенная выше теория “излученных” решений оператора Гельмгольца относится к случаю  $d = 3$  измерений. Следует отметить, что все результаты этой теории остаются справедливыми и в случае

двух измерений после соответствующего изменения фундаментального решения  $E \rightarrow E_2$ , где  $E_2$  введено в (2.9). Другая модификация связана с (уходящим) условием излучения, которое принимает в  $\mathbb{R}^2$  вид

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial |\mathbf{x}|} - ik\Phi(\mathbf{x}) = \exp(-k''|\mathbf{x}|)o(|\mathbf{x}|^{-1/2}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (3.28)$$

Здесь  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Однако интегральная форма условия излучения формально не изменяется по сравнению со случаем  $d = 3$  и имеет форму (3.2), где  $\Gamma_R$  – окружность радиуса  $R$  с центром в начале  $O \in \mathbb{R}^2$ .

## § 8.4. Единственность решений краевых задач для уравнения Гельмгольца

Сформулируем в этом параграфе ряд краевых задач для уравнения Гельмгольца (2.1) в неограниченной области  $\Omega_e$  и докажем для них единственность решений (при выполнении некоторых условий на исходные данные). Обозначим для краткости через  $\mathcal{R}(\Omega_e)$  множество распределений из  $\mathcal{D}'(\Omega_e)$ , удовлетворяющих одному из эквивалентных условий излучения на бесконечности. Будем считать, в дополнение к условиям (i), (ii), что выполняется следующее условие:

(iii)  $\Omega$  – ограниченное открытое множество в  $\mathbb{R}^d$  с границей  $\Gamma \in C^1$ .

Общая внешняя краевая задача для уравнения Гельмгольца (2.1) состоит в нахождении решения  $\Phi$  уравнения (2.1) в неограниченной области  $\Omega_e$ , удовлетворяющего условиям

$$\mathcal{B}\Phi \equiv a\Phi + b\partial\Phi/\partial n = g \text{ on } \Gamma, \quad \Phi \in \mathcal{R}(\Omega_e). \quad (4.1)$$

Здесь  $a$  и  $b$  – функции, заданные на  $\Gamma$ ,  $\mathbf{n}$  – единичная нормаль на  $\Gamma$ , ориентированная в  $\Omega_e$  и определенная всюду на  $\Gamma$  при условии (iii). Функции  $f : \Omega_e \rightarrow \mathbb{C}$  и  $g, a, b : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  в этой формулировке рассматриваются как части исходных данных задачи, а  $\Phi$  ищется в некотором подмножестве пространства  $C^2(\Omega_e)$ . Напомним, что в силу эллиптической регулярности порядок локальной гладкости решения  $\Phi$  уравнения (2.1) в точке  $\mathbf{x}$  определяется порядком гладкости правой части  $f$  в точке  $\mathbf{x}$ , тогда как порядок глобальной гладкости  $\Phi$  (вплоть до границы  $\Gamma$ ), вообще говоря, определяется порядком гладкости функций  $f, g, a, b$  и границы  $\Gamma$ .

Если  $a = 1, b = 0$  в (4.1), то соответствующее условие  $\Phi|_{\Gamma} = g$  называется условием Дирихле (или краевым условием первого рода), а задача

$$L\Phi = -f \text{ в } \Omega_e, \quad \Phi = g \text{ на } \Gamma, \quad \Phi \in \mathcal{R}(\Omega_e) \quad (4.2)$$

называется внешней задачей Дирихле (или задачей первого рода) для уравнения Гельмгольца (2.1). Выбор  $a = 0, b = 1$ , с другой стороны, дает внешнюю задачу Неймана (или краевую задачу второго рода):

$$L\Phi = -f \text{ в } \Omega_e, \quad \partial\Phi/\partial n = g \text{ на } \Gamma, \quad \Phi \in \mathcal{R}(\Omega_e). \quad (4.3)$$

Выбор  $b = 1$ ,  $a \neq 0$  приводит к внешней краевой задаче 3-го рода:

$$L\Phi = -f \text{ в } \Omega_e, \quad \partial\Phi/\partial n + a\Phi = g \text{ на } \Gamma, \quad \Phi \in \mathcal{R}(\Omega_e). \quad (4.4)$$

Наконец, выбор  $a = 1, b = 0$  на части  $\Gamma_D$  границы  $\Gamma$  и  $b = 1, a$  – произвольная функция на другой части  $\Gamma_N = \Gamma \setminus \Gamma_D$  границы  $\Gamma$  приводит к внешней смешанной краевой задаче для уравнения (2.1):

$$L\Phi = -f \text{ в } \Omega_e, \quad \Phi = g_1 \text{ на } \Gamma_D, \quad \partial\Phi/\partial n + a\Phi = g_2 \text{ на } \Gamma_N, \quad \Phi \in \mathcal{R}(\Omega_e). \quad (4.5)$$

Здесь  $g_1 : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{C}$  и  $a, g_2 : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{C}$  – заданные функции. Введенные четыре типа краевых задач для уравнения Гельмгольца (2.1) охватывают широкий класс физических задач, описывающих процессы излучения, распространения и рассеяния звука в неограниченной области  $\Omega_e$ .

Отметим также, что в приложениях наряду с внешними задачами важную роль играют и внутренние краевые задачи для уравнения Гельмгольца. Эти задачи состоят в нахождении решения уравнения Гельмгольца (2.1) в ограниченной области  $\Omega$ , удовлетворяющего соответствующему граничному условию (4.1) на границе  $\partial\Omega$  (см. §6.5 для точных формулировок четырех типов краевых задач для уравнения Лапласа). Еще один важный класс краевых задач для оператора Гельмгольца составляют задачи сопряжения (о физическом смысле указанных задач см. подробнее в §1.6). Чтобы сформулировать задачу сопряжения, предположим для простоты, что область  $\Omega \equiv \Omega_i$  имеет связную границу  $\Gamma$ , так что  $\partial\Omega = \partial\Omega_e$ , причем область  $\Omega$  заполнена однородной средой с постоянными акустическими параметрами  $\tilde{k}$  и  $\tilde{\rho}$ , тогда как область  $\Omega_e$  заполнена однородной средой с параметрами  $k$  и  $\rho$ . В таком случае задача сопряжения для области  $\Omega_i \cup \Omega_e$  состоит в нахождении пары функций  $\Phi_i$  и  $\Phi_e$ , удовлетворяющих соотношениям

$$\Delta\Phi_i + \tilde{k}^2\Phi_i = -\tilde{f} \text{ в } \Omega_i, \quad \Delta\Phi_e + k^2\Phi_e = -f \text{ в } \Omega_e, \quad \Phi_e \in \mathcal{R}(\Omega_e) \quad (4.6)$$

и (неоднородным в общем случае) условиям сопряжения

$$\Phi_i = \Phi_e + g_1, \quad \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial\Phi_i}{\partial n} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi_e}{\partial n} + g_2 \text{ на } \Gamma. \quad (4.7)$$

Здесь  $\tilde{f} : \Omega_i \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f : \Omega_e \rightarrow \mathbb{C}$  и  $g_1, g_2 : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  – заданные функции.

Обозначим, как обычно, через  $\Omega_{eR}$  ограниченную подобласть в  $\Omega_e$ , расположенную между границей  $\Gamma = \partial\Omega_e$  и сферой  $\Gamma_R$  достаточно большого радиуса  $R > R_0$ . Выведем соотношение, которое дополняет соотношение (3.13) для случая, когда “излученное” решение  $\Phi$  оператора Гельмгольца принадлежит пространству  $C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega_e})$ . Основываясь на этом соотношении, мы установим ряд результатов о единственности решения каждой из задач (4.2)–(4.5) так же, как и решения задачи (4.6), (4.7). Пусть при

выполнении условий (i)–(iii) функция  $\Phi \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega_e})$  является “излученным” решением оператора  $L$  в  $\Omega_e$ . Выберем  $R > 0$  таким образом, чтобы  $\Omega$  и  $\text{supp} L\Phi$  содержались внутри  $\Gamma_R$ . Применяя формулу Грина (1.37) к функциям  $\overline{\Phi}$  и  $\Phi$  в ограниченной области  $\Omega_{eR}$ , имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{eR}} \Phi \Delta \overline{\Phi} d\mathbf{x} &\equiv \int_{\Omega_{eR}} (\Phi \overline{L\Phi} - \overline{k^2} |\Phi|^2) d\mathbf{x} = \\ &- \int_{\Omega_{eR}} |\nabla \Phi|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial n} \Phi dS + \int_{\Gamma_R} \Phi \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial r} dS. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь мы учли, что нормаль  $\mathbf{n}$  направлена внутрь  $\Omega_{eR}$ . Умножая (4.8) на  $k$  и беря мнимую часть, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \text{Im}(k \int_{\Gamma_R} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial r} \Phi dS) &= \text{Im}(k \int_{\Omega_{eR}} (|k|^2 |\Phi|^2 + |\nabla \Phi|^2 + \Phi \overline{L\Phi}) d\mathbf{x}) \\ &+ \text{Im}(k \int_{\Gamma} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial n} \Phi dS). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Рассмотрим для определенности случай трех измерений. Тогда в силу условия излучения ( $\Phi \in \mathcal{R}(\Omega_e)$ ) выполняется (3.6). Подставляя (4.9) в (3.6), приходим к следующему утверждению.

**ЛЕММА 4.1.** Пусть при выполнении условий (i)–(iii) излученное поле  $\Phi$  принадлежит классу  $C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega_e})$ . Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Gamma_R} (|\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial r}|^2 + |k|^2 |\Phi|^2) dS + 2\text{Im}k \int_{\Omega_{eR}} (|k|^2 |\Phi|^2 + |\nabla \Phi|^2 + \Phi \overline{L\Phi}) d\mathbf{x} \right\} = \\ -2\text{Im}(k \int_{\Gamma} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial n} \Phi dS). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Из леммы 4.1 вытекает следующий результат.

**ЛЕММА 4.2.** Пусть при выполнении условий (i)–(iii) излученное поле  $\Phi$  принадлежит  $C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega_e})$  и  $L\Phi = 0$  в  $\Omega_e$ . Если, кроме того,

$$\text{Im}(k \int_{\Gamma} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial n} \Phi dS) \geq 0, \quad (4.11)$$

то  $\Phi = 0$  в  $\Omega_e$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $\text{Im}k > 0$ , то из (4.10) следует в силу (4.11), что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{eR}} |\Phi|^2 d\mathbf{x} \equiv \int_{\Omega_e} |\Phi|^2 d\mathbf{x} = 0.$$

Это означает, что  $\Phi = 0$  почти всюду в  $\Omega_e$ . Если  $\text{Im} k = 0$ , то из (4.10) следует, что  $\Phi$  удовлетворяет (3.27). Поэтому  $\Phi = 0$  в силу леммы 3.9. ■

Лемма 4.2 лежит в основе доказательства следующего результата.

ЛЕММА 4.3. Пусть при выполнении условий (i)–(iii) излученное поле  $\Phi$  принадлежит пространству  $C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$ ,  $L\Phi = 0$  в  $\Omega_e$  и, кроме того, выполняется одно из следующих условий:

- 1)  $\Phi = 0$  на  $\Gamma$ ;
- 2)  $\partial\overline{\Phi}/\partial n = 0$  на  $\Gamma$ ;
- 3)  $\partial\overline{\Phi}/\partial n = -\overline{a\Phi}$  на  $\Gamma$ ,  $a \in L^\infty(\Gamma)$ ,  $\text{Im} k \overline{a} \leq 0$  п.в. на  $\Gamma$ ;
- 4)  $\text{Im} k = 0$  и  $\text{Im} \Phi = 0$  (или  $\text{Re} \Phi = 0$ ) в  $\Omega_e$ .

Тогда  $\Phi = 0$  в  $\Omega_e$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.2 достаточно доказать, что при выполнении любого из условий 1) – 4) выполняется (4.11). Если выполняется одно из условий 1), 2) или 4), то правая часть (4.10) равна нулю, а, следовательно, выполняется (4.11). Если выполняется условие 3), то имеем

$$\text{Im}(k \int_{\Gamma} \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial n} \Phi dS) = -\text{Im}(k \int_{\Gamma} \overline{a} |\Phi|^2 dS) = - \int_{\Gamma} (\text{Im} k \overline{a}) |\Phi|^2 dS \geq 0.$$

Это влечет (4.11). ■

Аналогом леммы 4.3 для задачи (4.6), (4.7) является следующая лемма.

ЛЕММА 4.4. Пусть при выполнении условий (i), (iii)  $\text{Re} \tilde{k} > 0$ ,  $\text{Im} \tilde{k} \geq 0$ ,  $\partial\Omega = \partial\Omega_e = \Gamma$ , и пусть  $(\Phi_i, \Phi_e) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \times C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$ ,  $L\Phi_i = 0$  в  $\Omega$ ,  $L\Phi_e = 0$  в  $\Omega_e$ ,  $\Phi_e \in \mathcal{R}(\Omega_e)$  и, кроме того,

$$\Phi_i = \Phi_e, \quad \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial\Phi_i}{\partial n} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi_e}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma. \quad (4.12)$$

Тогда  $\Phi_i = 0$  в  $\Omega$  и  $\Phi_e = 0$  в  $\Omega_e$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было показано выше, применение первой формулы Грина (1.37) к функциям  $\overline{\Phi}_e$  и  $\Phi_e$  в  $\Omega_{eR}$  приводит к равенству (4.9) при  $\Phi = \Phi_e$ . Точно так же применение первой формулы Грина (1.37) к функциям  $\overline{\Phi}_i$  и  $\Phi_i$  в  $\Omega$  приводит к равенству

$$\text{Im}(\tilde{k} \int_{\Gamma} \frac{\partial\overline{\Phi}_i}{\partial n} \Phi_i dS) = \text{Im}(\tilde{k} \int_{\Omega} (|\tilde{k}|^2 |\Phi_i|^2 + |\nabla \Phi_i|^2) d\mathbf{x}). \quad (4.13)$$

Умножая (4.9) на  $1/\rho$ , (4.13) – на  $1/\tilde{\rho}$ , складывая и учитывая (4.12), получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} (|\frac{\partial\Phi_e}{\partial r}|^2 + |k|^2 |\Phi_e|^2) dS + 2\text{Im} k \int_{\Omega_{eR}} (|k|^2 |\Phi_e|^2 + |\nabla \Phi_e|^2) d\mathbf{x} = \\ -\frac{2\rho}{\tilde{\rho}} \text{Im} \tilde{k} \int_{\Omega} (|\tilde{k}|^2 |\Phi_i|^2 + |\nabla \Phi_i|^2) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из (4.14) следует, что  $\Phi_i = 0$  в  $\Omega$  и  $\Phi_e = 0$  в  $\Omega_e$ . ■

Из леммы 4.3 вытекает следующая теорема единственности.

**ТЕОРЕМА 4.1.** *При выполнении условий (i)–(iii) решение  $\Phi \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$  задачи Дирихле (4.2) или задачи Неймана (4.3) единственно. То же справедливо и для третьей краевой задачи (4.4), если  $a \in L^\infty(\Gamma_N)$  и  $\text{Im}(k\bar{a}) \leq 0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно доказать, что единственным решением  $\Phi_0$  каждой из однородных задач (4.2), (4.3) и (4.4), соответствующих нулевым данным  $f = 0$  и  $g = 0$ , является тривиальное решение  $\Phi_0 = 0$ . Но последнее следует из леммы 4.3, поскольку условие (4.11), очевидно, выполняется для упомянутой функции  $\Phi_0$  во всех трех случаях.

По аналогичной схеме из леммы 4.4 вытекает следующий результат.

**ТЕОРЕМА 4.2.** *Пусть при выполнении условий (i), (iii)  $\text{Re } \tilde{k} > 0$ ,  $\text{Im } \tilde{k} \geq 0$  и  $\partial\Omega = \partial\Omega_e$ . Тогда решение  $(\Phi_i, \Phi_e) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \times C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$  задачи сопряжения (4.6), (4.7) единственно.*

Выше мы установили достаточные условия на исходные данные и решение, обеспечивающие единственность решения каждой из трех типов внешних краевых задач. При этом под решением мы понимали функцию  $\Phi \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$ . Такое требование на гладкость нужно для того, чтобы при доказательстве единственности можно было воспользоваться формулой Грина. Хорошо известно, что формулы Грина справедливы и для функций из более широких, чем  $C^2(\Omega)$ , пространств Соболева. Это дает основания надеяться на то, что приведенные выше результаты о единственности решений внешних краевых задач будут справедливы и для решений, принадлежащих соответствующим пространствам Соболева. Это действительно так, и мы приведем сейчас ряд теорем единственности.

Введем следующие два пространства:

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, \dots, d\},$$

$$H^1(\Omega, \Delta) = \{v \in H^1(\Omega) : \Delta v \in L^2(\Omega)\}. \quad (4.15)$$

Все производные, входящие в определение пространств  $H^1(\Omega)$  и  $H^1(\Omega, \Delta)$  в (4.15), понимаются в смысле обобщенных функций.

Предположим, что, вместо (iii), выполняется более общее условие

(iv)  $\Omega$  – ограниченное открытое множество с липшицевой границей  $\Gamma$ .

Хорошо известно, см., например, [4, гл. 1], [5, гл. 1], что при выполнении условия (iv) для каждой функции  $u \in H^1(\Omega)$  существует ее граничный след  $\gamma_0 u = u|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$ , совпадающий с обычным граничным значением в случае гладкой функции. Если, к тому же,  $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ , то тогда у функции  $u$  существует и первый след  $\gamma_1 u = \partial u / \partial n \in H^{-1/2}(\Gamma)$ , с которым

справедлива формула Грина

$$\int_{\Omega} \Delta u v d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} + \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, v \right\rangle_{\Gamma} \quad \forall u \in H^1(\Omega, \Delta), \quad v \in H^1(\Omega). \quad (4.16)$$

Здесь  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначает отношение двойственности между пространством  $H^{1/2}(\Gamma)$  и двойственным к нему пространством  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . Для внешности  $\Omega_e$  будем использовать аналоги введенных выше пространств  $H^1(\Omega)$  и  $H^1(\Omega, \Delta)$ , обозначаемые через  $H_{loc}^1(\Omega_e)$  и  $H_{loc}^1(\Omega_e, \Delta)$ . Они состоят из функций, сужения которых на ограниченное множество  $\Omega_e \cap B_R$ , где  $B_R$  – шар любого радиуса  $R$ , принадлежат соответственно  $H^1(\Omega_e \cap B_R)$  и  $H^1(\Omega_e \cap B_R, \Delta)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.** Слабым решением внешней задачи Дирихле (4.2) назовем функцию  $\Phi \in H_{loc}^1(\Omega_e, \Delta) \cap \mathcal{R}(\Omega_e)$ , удовлетворяющую уравнению (2.1) п.в. в  $\Omega_e$  и граничному условию  $\Phi = g$  в  $H^{1/2}(\Gamma)$ . Аналогично, слабым решением внешней задачи Неймана (4.3) (либо третьей краевой задачи (4.4)) назовем функцию  $\Phi \in H_{loc}^1(\Omega_e, \Delta) \cap \mathcal{R}(\Omega_e)$ , удовлетворяющую (2.1) п.в. в  $\Omega_e$  и граничному условию  $\partial\Phi/\partial n = g$  (либо  $\partial\Phi/\partial n + a\Phi = g$ ) в  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . Слабым решением смешанной краевой задачи (4.5) назовем функцию  $\Phi \in H_{loc}^1(\overline{\Omega}_e, \Delta) \cap \mathcal{R}(\Omega_e)$ , удовлетворяющую (2.1) п.в. в  $\Omega_e$  и граничным условиям  $\Phi = g_1$  в  $H^{1/2}(\Gamma_D)$  и  $\partial\Phi/\partial n + a\Phi = g_2$  в  $H^{-1/2}(\Gamma_N)$ . Наконец, назовем слабым решением задачи сопряжения (4.6), (4.7) пару  $(\Phi_i, \Phi_e) \in H^1(\Omega, \Delta) \times H_{loc}^1(\Omega_e, \Delta)$ , удовлетворяющую соответствующим уравнениям в (4.6) п.в. в  $\Omega_i$  или в  $\Omega_e$  и следующим краевым условиями:  $\Phi_i = \Phi_e + g_1$  в  $H^{1/2}(\Gamma)$ ,  $(1/\tilde{\rho})\partial\Phi_i/\partial n = (1/\rho)\partial\Phi_e/\partial n + g_2$  в  $H^{-1/2}(\Gamma)$ .

Предположим, что при выполнении условий (i), (ii), (iv) функция  $\Phi$  является “излученным” решением оператора Гельмгольца из пространства  $H_{loc}^1(\Omega_e, \Delta)$ . Как и выше, выберем  $R > 0$  так, чтобы  $\Omega$  и  $\text{supp} L\Phi$  содержались внутри  $\Gamma_R$ , и применим к функциям  $\Phi$  и  $\overline{\Phi}$  формулу Грина (4.16) в ограниченной области  $\Omega_{eR} = \Omega_e \cap B_R$ . Получим, вместо (4.8), равенство

$$\int_{\Omega_{eR}} (\Phi \overline{L\Phi} - \overline{k^2} |\Phi|^2) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega_{eR}} |\nabla \Phi|^2 d\mathbf{x} - \left\langle \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial n}, \Phi \right\rangle_{\Gamma} + \int_{\Gamma_R} \Phi \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial r} dS. \quad (4.17)$$

Умножая далее (4.17) на  $k$  и рассуждая, как при доказательстве леммы 4.1, приходим к следующему утверждению.

**ЛЕММА 4.5.** Пусть при выполнении условий (i), (ii), (iv) излученное поле  $\Phi$  принадлежит пространству  $H_{loc}^1(\Omega_e, \Delta)$ . Тогда справедливо равенство

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Gamma_R} \left( \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|^2 + |k|^2 |\Phi|^2 \right) dS + 2\text{Im} k \int_{\Omega_{eR}} (|k|^2 |\Phi|^2 + |\nabla \Phi|^2 + \Phi \overline{L\Phi}) d\mathbf{x} \right\} = -2\text{Im} \left( k \left\langle \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial n}, \Phi \right\rangle_{\Gamma} \right). \quad (4.18)$$

Из леммы 4.5 вытекает следующий результат.

ЛЕММА 4.6. Пусть при выполнении условий (i), (ii), (iv) излученное поле  $\Phi$  принадлежит  $H_{loc}^1(\Omega_e, \Delta)$  и  $L\Phi = 0$  в  $\Omega_e$ . Если, кроме того,

$$\operatorname{Im}(k\langle \partial\bar{\Phi}/\partial n, \Phi \rangle_\Gamma) \geq 0, \quad (4.19)$$

то  $\Phi = 0$  в  $\Omega_e$ .

Легко проверить, что для слабых решений, введенных в определении 4.1, также справедливы (с соответствующими изменениями) леммы 4.3 и 4.4. Следствиями их являются следующие теоремы единственности.

ТЕОРЕМА 4.3. При выполнении условий (i), (ii), (iv) решение  $\Phi \in H_{loc}^1(\Omega_e, \Delta)$  задачи Дирихле (4.2) или задачи Неймана (4.3) единственно. То же самое справедливо для третьей краевой задачи (4.4), если  $a \in L^\infty(\Gamma)$  и  $\operatorname{Im}(k\bar{a}) \leq 0$ .

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть при выполнении условий (i), (iv)  $\operatorname{Re}\tilde{k} > 0$ ,  $\operatorname{Im}\tilde{k} \geq 0$  и  $\partial\Omega = \partial\Omega_e = \Gamma$ . Тогда решение  $(\Phi_i, \Phi_e) \in H^1(\Omega, \Delta) \times H_{loc}^1(\Omega, \Delta)$  задачи сопряжения (4.6), (4.7) единственно.

По еще более простой схеме доказывается единственность решений внутренних краевых задач для уравнения Гельмгольца, но только в случае, когда  $\operatorname{Im}k > 0$ . Действительно, пусть  $\Phi \in H^1(\Omega, \Delta)$  – решение однородного уравнения Гельмгольца (2.4). Применим формулу Грина (4.16) к функциям  $u = \bar{\Phi}$  и  $v = \Phi$ . Учитывая, чтобы  $\Delta\bar{\Phi} = -\bar{k}^2\bar{\Phi}$ , будем иметь

$$\int_\Omega |\nabla\Phi|^2 d\mathbf{x} - k^2 \int_\Omega |\Phi|^2 d\mathbf{x} = \langle \partial\bar{\Phi}/\partial n, \Phi \rangle_\Gamma. \quad (4.20)$$

Если  $\Phi$  является решением однородной задачи Дирихле, так что  $\Phi|_\Gamma = 0$ , либо однородной задачи Неймана, так что  $\partial\Phi/\partial n|_\Gamma = 0$ , то правая часть (4.20) обращается в нуль. В силу условия  $\operatorname{Im}k > 0$  это возможно тогда и только тогда, когда  $\int_\Omega |\Phi|^2 d\mathbf{x} = 0$ . Следовательно,  $\Phi = 0$ . Отсюда вытекает следующая теорема единственности.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть выполняется условие (iv), причем  $\operatorname{Im}k > 0$ . Тогда внутренняя задача Дирихле или Неймана имеет не более одного решения из пространства  $H^1(\Omega, \Delta)$ .

Аналогичный результат можно получить и для третьей краевой задачи. Отметим, что условие  $\operatorname{Im}k > 0$ , входящее в теорему 4.5, является существенным. Действительно, решение внутренней задачи может быть не единственным. Это будет всегда, когда число  $k^2$  является собственным значением задачи Дирихле или Неймана для оператора Лапласа. Более подробно об этом можно прочитать в [3, 46, 65, 66].



# Литература

- [1] *Адамар Ж.* Задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
- [2] *Алексеев Г.В.* Обратные задачи излучения волн и теории сигналов. Ч. 1, 2. Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 1991. 276 с.
- [3] *Алексеев Г.В.* Метод нормальных волн в подводной акустике. Владивосток: Дальнаука, 2006. 360 с.
- [4] *Алексеев Г.В., Терешко Д.А.* Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 365 с.
- [5] *Алексеев Г.В.* Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Науч. мир, 2010. 412 с.
- [6] *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 432 с.
- [7] *Бабиш В.М., Григорьева Н.С.* Ортогональные разложения и метод Фурье. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. 240 с.
- [8] *Берс Л., Джонс Ф., Шефтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 352 с.
- [9] *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 296 с.
- [10] *Будак Б.М., Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965. 608 с.
- [11] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
- [12] *Галантин М.П., Попов Ю.П.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах (математическое моделирование). М.: Наука, Физматлит, 1995. 300 с.
- [13] *Гильбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.
- [14] *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 416 с.
- [15] *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 640 с.
- [16] *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. 2. М.: МЦНМО, 1998. 788 с.
- [17] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1974. 296 с.
- [18] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч.1. М.: Наука, 1971. 600 с.

- [19] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч.2. М.: Наука, 1980. 448 с.
- [20] *Коробейников В.П.* Принципы математического моделирования. Владивосток: Дальнаука, 1997. 240 с.
- [21] *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов И.М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматиздат, 1962. 712 с.
- [22] *Крикунов Ю.М.* Лекции по уравнениям математической физики и интегральным уравнениям. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. 210 с.
- [23] *Курант Р.* Уравнения с частными производными: пер. с англ. М.: Мир, 1964. 832 с.
- [24] *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: пер. с нем. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1967. 704 с.
- [25] *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: пер. с нем. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1970. 672 с.
- [26] *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики: пер. с нем. Т. 1, 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1951.
- [27] *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СОАН СССР, 1962. 92 с.
- [28] *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
- [29] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1988. 215 с. (Теоретическая физика; Т. 1).
- [30] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с. (Теоретическая физика; Т. 4).
- [31] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1989. 768 с. (Теоретическая физика; Т. 3).
- [32] *Мизохата.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. 504 с.
- [33] *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957.
- [34] *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
- [35] *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 432 с.
- [36] *Михлин С.Н.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.
- [37] *Никифоров А.Ф., Уваров В.В.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978.
- [38] *Никольский В.В.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1978. 544 с.

- [39] *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1973. 392 с.
- [40] *Овсянников Л.В.* Введение в механику сплошных сред. Т. 2. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1977. 140 с.
- [41] *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматиздат, 1961. 400 с.
- [42] *Петровский И.Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Наука, 1965. 128 с.
- [43] *Постников М.М.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1979. 336 с.
- [44] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
- [45] *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование. М.: Наука, 2005. 320 с.
- [46] *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. 416 с.
- [47] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1974. 656 с.
- [48] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 1. М.: Наука, 1981. 552 с.
- [49] *Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1974. 208 с.
- [50] *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
- [51] *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.
- [52] *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, N 5. С. 195–198.
- [53] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
- [54] *Тихонов А.Н., Васильева А.В., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 232 с.
- [55] *Тихонов А.Н., Костомаров Д.П.* Вводные лекции по прикладной математике. М.: Наука, 1984. 190 с.
- [56] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. 800 с.
- [57] *Филлипс О.М.* Динамика верхнего слоя океана. М.: Гидрометеиздат, 1980. 320 с.
- [58] *Шушмарев И.А.* Введение в теорию эллиптических уравнений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. 184 с.
- [59] *Dautray R., Lions J.-L.* Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol.1. Physical Origins and Classical Methods. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1988. 720 p.

- [60] *Dautray R., Lions J.-L.* Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol.3. Spectral Theory and Applications. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1988. 542 p.
- [61] *Schwartz L.* Théorie des distributions. Vol. 1. Paris, 1950. Vol. 2. 1951.
- [62] *Al-Gwaiz M.A.* Theory of distributions. N. Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Decker Inc., 1992. 258 p.
- [63] *Yosida K.* Functional analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1965.
- [64] *Lieb E.H., Loss M.* Analysis. American Mathematical Society. 1997. 278 p. (Graduate studies in mathematics. Vol. 14).
- [65] *Colton D., Kress R.* Integral equation methods in scattering thory. N.-Y.: JohnWiley & Sons, 1983. Русский перевод: Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 292 с.
- [66] *Colton D., Kress R.* Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. Applied Mathematical Sciences. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [67] *Calderon A.P., Zygmund A.* On the existence of certain singular integrals // Acta Math. 1952. V. 7. P. 85–139.
- [68] *Neri U.* Singular integrals. Lecture Notes Math. Vol. 200. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1971.
- [69] *Беква И.И.* О метагармонических функциях // Труды Тбилисского матем. ин-та. 1943. Т. 12. С. 105–174.
- [70] *Rellich F.* Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von  $\Delta u + \lambda u = 0$  in unendlichen Gebieten // Jber. Deutsch. Math. Verein. 1943. Vol. 53. P. 57–65.
- [71] *Atkinson F.V.* On Sommerfeld's "Radiation condition" // Phylos. Mag. 1949. Vol. 40. P. 645–651.
- [72] *Wilcox C.H.* A generalization of theorems of Rellich and Atkinson // Proc. Amer. Math. Soc. 1956. Vol. 7. P. 271–276.

# Приложение 1. Исторический очерк развития метода математического моделирования

Важную роль при изучении физических процессов играет метод математического моделирования (МММ). Данный метод позволяет исследовать физические процессы и явления с помощью математических методов: аналитических или численных, ориентированных на использование ЭВМ и вычислительного эксперимента. Метод математического моделирования стал интенсивно развиваться сразу после окончания Второй мировой войны. В нашей стране это было связано с необходимостью решения поставленной в августе 1945 г. важнейшей государственной задачи – создания атомного, а затем термоядерного оружия.

Как известно из истории, многие из поставленных перед советскими учеными и инженерами задач были решены в кратчайшие сроки. Ровно через четыре года в стране создается атомная бомба, испытание которой успешно осуществляется 29 августа 1949 года на полигоне под Семипалатинском. Через четыре года создается первая в мире советская водородная бомба, испытание которой успешно осуществляется на том же полигоне 12 августа 1953 года. Справедливости ради следует отметить, что первый термоядерный заряд был взорван американскими учеными 1-го ноября 1952 г. на атолле Эниветок. Но это устройство не являлось бомбой, а представляло собой трехэтажное сооружение, наполненное жидким дейтерием.

Проходит чуть больше четырех лет, и 4 октября 1957 года страна посылает в космос первый искусственный спутник Земли с помощью ракеты Р-7, созданной С.П. Королевым. Проходит еще 3,5 года, и 12 апреля 1961 года на такой же ракете Р-7 устремляется в космос первый космонавт Земли Ю.А. Гагарин. Наконец, 30 октября 1961 года на полигоне архипелага Новая Земля осуществляется успешное испытание самой мощной в мире водородной бомбы мощностью в 50 Мт.

Таким образом, основные этапы Атомного и Космического проектов были выполнены в нашей стране за 16 лет. Следствием явилось создание атомного и водородного оружия и их носителей. Огромная заслуга в этом принадлежит нашим выдающимся ученым-физикам. Не имея возможности назвать их поименно, отметим имена шести выдающихся ученых, трижды отмеченных высшей наградой страны – званием Героя социалистического труда. Это – И.В. Курчатов (1949, 1951, 1954), Ю.Б. Харитон (1949, 1951, 1954), К.И. Щелкин (1949, 1951, 1954), Я.Б. Зельдович (1949, 1953, 1957), А.Д. Сахаров (1953, 1955, 1962) и А.П. Александров (1954, 1960, 1973).

Наряду с физиками, химиками, инженерами в Атомном и Космическом проектах участвовало много замечательных математиков. Среди них Н.Н. Боголюбов, М.В. Келдыш, А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, С.Л. Соболев, М.А. Лаврентьев, Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко, К.А. Семендяев,

А.В. Забродин, Л.Д. Ландау, И.М. Халатников, И.М. Гельфанд, Л.В. Овсянников, Г.И. Марчук, С.К. Годунов, В.Я. Гольдин и многие другие. В этом списке приведены фамилии и двух физиков: Л.Д. Ландау и его ученика И.М. Халатникова, поскольку они участвовали в Атомном проекте как математики, точнее, как расчетчики, причем расчетчики, обладающие незаурядной физической интуицией. Последнее играло важнейшую роль при принятии основополагающих в плане технической реализации решений. В частности, группе Л. Ландау удалось точно вычислить коэффициент полезного действия атомной бомбы.

Естественно возникает вопрос, а как связаны между собой метод математического моделирования и успешное решение задачи создания атомного и водородного оружия и их носителей? Как оказалось, самым непосредственным образом. Задача создания таких высокотехнологичных изделий, как атомная либо термоядерная бомба, а также их носителей необходимо требовала разработки эффективных методов решения огромного количества математических задач, неизбежно возникающих в процессе разработки, конструирования и создания атомного, а затем термоядерного оружия. В связи с этим в первые послевоенные 10 – 15 лет в нашей стране, как и за рубежом, было разработано огромное количество методов, алгоритмов, схем, подходов, приемов и методик решения конкретных прикладных задач. Эти разработки существенно дополнили имеющийся в то время аппарат вычислительной математики. Дополненный таким образом аппарат вычислительной математики с успехом был применен для приближенного нахождения решений различного рода дифференциальных и интегральных уравнений, систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений, спектральных задач, задач оптимизации и управления, а также большого количества других математических задач, которые ставили перед математиками разработчики атомного и термоядерного оружия.

Все это способствовало, с одной стороны, становлению *прикладной математики* как области математики, применяющей математические методы для решения прикладных задач, т.е. задач из других сфер деятельности. С другой стороны, это способствовало становлению новой методологии научного познания природных явлений, процессов и техногенных объектов. Эта методология получила современное название *метода математического моделирования* (МММ). Суть ее состоит в том, что вместо исходного процесса, явления или объекта исследуется его математическая модель, представляющая собой систему математических уравнений. Другими словами, МММ – это метод перевода изучаемого явления, процесса или объекта на язык математических уравнений. А сама модель – это воплощение процесса, явления или объекта в виде математических уравнений.

Нужно отметить, что мощный импульс в развитие МММ внесло появление на рубеже 40–х и 50–х годов прошлого столетия первых электронно–

вычислительных машин. Именно это способствовало быстрейшему становлению метода математического моделирования как самостоятельной методологии научного познания природных, технологических, а затем и общественно-экономических явлений, процессов и объектов.

Использование метода математического моделирования при изучении физических процессов, безусловно, имеет ряд преимуществ по сравнению, например, с методом натурального эксперимента. К числу основных преимуществ метода относятся его безопасность, экологичность, относительная быстрота, универсальность, экономичность. Более того, исследование ряда актуальных проблем возможно только на основе метода математического моделирования ввиду губительных последствий проведения натурального эксперимента. Достаточно вспомнить задачу огромной важности, поставленную перед учеными СССР и США в семидесятих годах. Она заключалась в изучении последствий локальной ядерной войны между воюющими державами, состоящей из ограниченного обмена ударами по крупным городам с использованием малой части ядерного заряда порядка 100 мегатонн. До исследования этой задачи методом математического моделирования считалось, что основными поражающими факторами ядерного оружия являются проникающая радиация, световая вспышка и ударные волны, сопровождающие ядерные взрывы. Однако проведенные в обеих странах вычислительные эксперименты над соответствующими математическими моделями показали, что главным эффектом, сопровождающим локальный ядерный конфликт, будут не радиация и ударные волны, а быстрое и достаточно сильное охлаждение воздуха над континентами. В случае “100-мегатонного конфликта” падение температуры через месяц может составлять в некоторых районах свыше десяти градусов [45, с. 292]. Хорошо известно, что изменение средней температуры на Земле даже на 1–2 градуса может привести к катастрофическим последствиям для человечества. Тем самым проведенные вычислительные эксперименты наглядно продемонстрировали, что ядерная война будет сопровождаться глобальными катастрофическими изменениями климата, а следовательно, она неприемлема для человечества.

После заслуженного успеха в применении математического моделирования при решении задачи изучения последствий ядерной войны стало ясно, что в решении ни одной из актуальных задач, стоящих перед человечеством, нельзя добиться серьезного успеха без использования в той или иной степени идей математического моделирования. Освоение космоса и океана, овладение новыми источниками энергии, укрощение термоядерной реакции, экология и рациональное использование природных ресурсов, разработка новых лекарственных средств и продление активной жизни человека, очистка от загрязнений воздушного и водных бассейнов – вот далеко не полный список проблем, которые стоят и будут еще долго стоять перед человечеством. Решение этих задач невозможно себе представить без ме-

*тогда математического моделирования*, являющегося без преувеличения величайшим изобретением человеческого разума.

Следует отметить, что сама идея, лежащая в основе МММ, использовалась человеком в течение длительного времени, можно сказать, с незапамятных времен. Первый успех в применении МММ пришелся, по-видимому, на механику. В частности, всем известный из школы второй закон Ньютона представляет собой классическую модель движения материальной точки, имеющую вид обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. Недаром великий автор трех законов механики И. Ньютон одновременно прославился как один из отцов-основателей дифференциального и интегрального исчисления. В свою очередь, важнейшие для человечества законы Кеплера, описывающие законы движения Земли вокруг Солнца, можно получить как следствие указанной модели в предположении, что Солнце и Земля моделируются материальными точками, между которыми действует сила притяжения, известным образом зависящая от их массы и расстояния между ними.

Уникальный пример математической модели представляют собой уравнения Максвелла, абсолютно точно описывающие электромагнитные явления. Хорошо известно, что великий Максвелл вывел эти уравнения путем обобщения известных к тому времени законов электромагнетизма. В частности, он внес в эти уравнения дополнительные слагаемые. Далее, путем перекрестного дифференцирования полученных им уравнений, он доказывает, что электромагнитное поле подчиняется волновому уравнению. Именно это позволяет ему сделать, что называется, на кончике пера, важнейшее открытие о том, что электромагнитное поле распространяется в среде в виде волн, которые он назвал электромагнитными. Он также вычислил скорость этих волн, которая совпала со скоростью света. Позже эти факты были подтверждены экспериментально в работах Р. Герца и других ученых.

Теоретическая физика по существу представляет собой важнейший пример применения МММ для исследования физических процессов. Достаточно пролистать многотомник Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, сплошь пронизанный аппаратом математического моделирования. В середине прошлого века понятия “прикладная математика” и “теоретическая физика” являлись почти синонимами. Недаром некоторые факультеты в вузах Великобритании (например, в Кембриджском университете) до сих пор называют факультетами прикладной математики и теоретической физики.

На рубеже 19-го – 20-го веков человека перестают удовлетворять имеющиеся на то время скорости передвижения. Человеку становится скучно на Земле. Его взоры устремляются в небо. На помощь ему приходит МММ. Вооруженные этим методом, математики, механики и инженеры создают теорию воздухоплавания как прообраз современной гидроаэродинамики,



развивают механику твердого деформируемого тела и закладывают в итоге основы авиации, авиастроения и ракетостроения.

Последние годы 20-го века и начало 21-го века ознаменовались новыми достижениями человеческой мысли: достаточно отметить освоение Интернета, создание спутниковой и сотовой связи, прорыв в расшифровке генома. Эти достижения были бы невозможны без использования прикладной математики и МММ. Приведенные примеры наглядно свидетельствуют о том, что настоящий успех в любой области получается только тогда, когда к этой области в нужный момент подключается математика.

Естественно возникает вопрос, а какие задачи стоят перед прикладной математикой и МММ в этом столетии и, более общо, в этом тысячелетии?

Ясно, что МММ по-прежнему активно используется в механике жидкости и газа, механике твердого деформируемого тела, акустике, электромагнетизме и других “классических” разделах физики и естественных наук. Вместе с тем нужно отметить, что МММ все активнее проникает в такие ранее мало доступные для него сферы деятельности, как биология и медицина, финансовая, политическая и военная деятельность различного рода структур, в том числе и правительственных.

В заключение перечислим ряд перспективных направлений для возможного применения МММ в 21-м веке и, более того, в 3-м тысячелетии. Это – моделирование в биологии и в медицине, в частности, моделирование кровеносной системы человека, циркуляции крови в здоровых и поврежденных сосудах, скелетной системы, эволюции опухолей, деятельности мозга; моделирование генома, моделирование живущего человеческого тела; моделирование стохастических процессов и системных (в том числе финансовых) рисков; моделирование нанотехнологий и наноструктур, моделирование катастрофических явлений и хаоса; моделирование важнейших процессов и явлений, происходящих на Земле и во Вселенной.

Обратим внимание на колоссальную сложность некоторых из перечисленных выше проблем, и в частности, проблемы многомасштабного мультидисциплинарного моделирования живущего тела. Трудно даже представить, на сколько порядков внутренняя начинка самого простого живущего тела сложнее внутренней начинки самой сложной атомной или водородной бомбы, современного авианесущего крейсера или самой мощной подводной лодки. Тем не менее есть основания полагать, что умелое применение МММ в указанных выше областях позволит добиться успеха в решении поставленных задач, точно так же, как когда-то в 19- и 20-м веках применение МММ позволило добиться ошеломляющих успехов в теоретической и прикладной физике, ядерной энергетике, машиностроении и создании современных средств спутниковой и сотовой связи.

## Приложение 2. Выражения дифференциальных операторов в ортогональных координатах

Из результатов гл. 1 следует, что основные математические модели, описывающие разнообразные физические процессы, представляют собой дифференциальные уравнения либо их системы первого или второго порядка. Наряду с обычными операторами дифференцирования первого или второго порядков указанные модели могут содержать также дифференциальные выражения вида

$$\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \mathbf{v}, \operatorname{div} \mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}, \Delta u \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} u, \Delta \mathbf{v}, \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}, \dots \quad (2.1)$$

Важно отметить, что все выражения, входящие в (2.1), являются *инвариантами* относительно используемой системы координат, т.е. не зависят от ее выбора. Однако для того чтобы превратить рассматриваемую математическую модель в дифференциальное уравнение (или систему дифференциальных уравнений), необходимо в рассматриваемой области ввести систему координат и записать входящие в модель дифференциальные операторы с помощью производных первого или второго порядка от искомых функций по введенным координатам. В связи с этим необходимо знать выражения величин (2.1) в наиболее часто используемых системах координат.

Рассмотрим произвольную область  $\Omega$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$  и будем считать, что в  $\Omega$  введена декартова система координат (или декартов базис), и пусть  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – единичные орты этого базиса. Тогда для любой точки  $\mathbf{x} \in \Omega$  справедливо представление  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , где числа  $x, y$  и  $z$  называются *декартовыми координатами* точки  $\mathbf{x}$ .

Наряду с декартовыми координатами точки  $\mathbf{x}$  будем рассматривать ее *криволинейные координаты*  $x_1, x_2, x_3$ , связанные с декартовыми формулами

$$x = x(x_1, x_2, x_3), \quad y = y(x_1, x_2, x_3), \quad z = z(x_1, x_2, x_3). \quad (2.2)$$

Мы предполагаем, что правые части в (2.2) – непрерывно дифференцируемые функции переменных  $(x_1, x_2, x_3)$ , изменяющихся в некоторой области  $\tilde{\Omega}$ , с отличным от нуля всюду в  $\tilde{\Omega}$  якобианом  $J(\mathbf{x}) = D(x, y, z)/D(x_1, x_2, x_3)$ . Зафиксируем две координаты в (2.2), например,  $x_2$  и  $x_3$ . Тогда при изменении  $x_1$  соотношения (2.2) определяют некоторую линию, которую называют *координатной линией*  $x_1$ . Аналогично определяются координатные линии  $x_2$  и  $x_3$ . Геометрическое место точек  $\mathbf{x} \in \Omega$ , для которых выполняется условие  $x_i = \text{const}$ , называется  *$i$ -й координатной поверхностью*.

Введем векторы

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial x}{\partial x_i} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial x_i} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial x_i} \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Векторы  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{e}_i$  зависят от  $\mathbf{x}$ , причем в каждой точке  $\mathbf{x}$  они направлены по касательным к линиям  $x_1, x_2$  и  $x_3$ , а векторы  $\mathbf{e}_i$  имеют к тому же единичную длину. Поскольку  $J(\mathbf{x}) \neq 0$  в  $\Omega$  по определению криволинейной системы координат, то эти векторы некопланарны и, следовательно, образуют базис, зависящий от точки  $\mathbf{x}$ . Более того, мы будем предполагать, что в каждой точке  $\mathbf{x} \in \Omega$  векторы  $\mathbf{r}_i(\mathbf{x})$  ортогональны, а следовательно, векторы  $\{\mathbf{e}_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^3$  образуют ортонормированный базис.

Оказывается, что именно векторы  $\mathbf{r}_i$ , а точнее, их длины  $h_i = |\mathbf{r}_i|$  играют основную роль при записи основных дифференциальных операторов в произвольной криволинейной системе координат. Указанные длины

$$h_i = |\mathbf{r}_i| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$

называемые метрическими коэффициентами или коэффициентами Ламе по имени французского математика С. Lamé (1795–1870), полностью характеризуют соответствующую ортогональную систему координат.

В частности, выражения для дифференциальных операторов grad, div, rot и  $\Delta$  в произвольной ортогональной системе координат имеют вид [19]:

$$\text{grad } u = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \mathbf{e}_j, \quad (2.5)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 v_3) \right\}, \quad (2.6)$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 v_1 & h_2 v_2 & h_3 v_3 \end{vmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \right\}. \quad (2.8)$$

Здесь  $u$  – произвольная скалярная функция,  $\mathbf{v}$  – произвольное векторное поле,  $v_i$  – компоненты разложения вектора  $\mathbf{v}$  по базису  $\{\mathbf{e}_i\}$ .

Основываясь на формулах (2.5)–(2.8), выпишем теперь основные дифференциальные операторы в трех основных системах координат: прямоугольной декартовой, цилиндрической и сферической.

1. *Прямоугольная декартова система координат* (декартов базис). Прямоугольные координаты  $x_1, x_2, x_3$  совпадают с декартовыми  $x, y, z$ , так что

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}.$$

С учетом этого формулы (2.5)–(2.8) принимают вид:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}, \quad \text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} =$$

$$\left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k},$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Здесь  $v_x, v_y, v_z$  – компоненты вектора  $\mathbf{v}$  в базисе  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ .

2. *Цилиндрическая система координат.* Цилиндрические координаты  $x_1 = r, x_2 = \varphi, x_3 = z$  связаны с декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Координатными поверхностями являются:  $r = \text{const}$  – концентрические цилиндры,  $\varphi = \text{const}$  – полуплоскости,  $z = \text{const}$  – плоскости. Коэффициенты Ламе  $h_1, h_2, h_3$  имеют вид  $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$ . С учетом этого формулы (2.5)–(2.8) принимают вид:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_3, \quad \text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_3}{\partial z},$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial r} \right) \mathbf{e}_2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_2) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_3,$$

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Здесь  $v_1, v_2, v_3$  – компоненты вектора  $\mathbf{v}$  в единичном базисе  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ .

3. *Сферическая система координат.* Сферические координаты  $x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = \varphi$  связаны с декартовыми координатами  $x, y, z$  формулами

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Координатными поверхностями являются:  $r = \text{const}$  – концентрические сферы,  $\theta = \text{const}$  – конусы,  $\varphi = \text{const}$  – полуплоскости. Коэффициенты Ламе  $h_1, h_2, h_3$  имеют вид  $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta$ . В силу этого формулы (2.5)–(2.8) принимают вид:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_3,$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{v} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_1) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_3}{\partial \varphi}, \\
\operatorname{rot} \mathbf{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_3) - \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_1 + \\
&+ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_3) \right] \mathbf{e}_2 + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r v_2) - \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_3, \\
\Delta u &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \\
&\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} u, \quad \Delta_{\theta, \varphi} u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.
\end{aligned}$$

Здесь  $\Delta_{\theta, \varphi}$  – угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат. Оператор  $\Delta_{\theta, \varphi}$  называют *оператором Бельтрами*.

В любой ортогональной системе координат справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} (u v) &= u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u, \quad \operatorname{div} (u \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} u + u \operatorname{div} \mathbf{v}, \\
\operatorname{rot} (u \mathbf{v}) &= \operatorname{grad} u \times \mathbf{v} + u \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}, \\
\operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \\
(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} + (1/2) \operatorname{grad} (\mathbf{u}^2), \\
\operatorname{grad} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Здесь  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  – вектор, компоненты которого в декартовом базисе определяются формулами

$$[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}]_i = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $u_i$  (либо  $v_i$ ) – компоненты вектора  $\mathbf{u}$  (либо  $\mathbf{v}$ ) в декартовом базисе.

Кроме того, для дифференциальных операторов второго порядка справедливы тождества

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}, \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0. \tag{2.10}$$

Для доказательства соотношений (2.9), (2.10) достаточно ввести декартову систему координат, в которой все формулы (2.9), (2.10) проверяются непосредственно, а далее воспользоваться инвариантностью используемых в этих формулах выражений.

# Оглавление

Предисловие ко второму изданию . . . . .	3
Предисловие научного редактора . . . . .	4
Введение . . . . .	5
ГЛАВА 1. Вывод классических математических моделей физиче- ских процессов . . . . .	9
§ 1.1. Сущность метода математического моделирования физиче- ских процессов . . . . .	9
§ 1.2. Математические модели механики материальной точки. Вто- рой закон Ньютона. Законы Кеплера . . . . .	10
1.2.1. Простейшая модель движения тела . . . . .	10
1.2.2. Усложненная модель движения тела . . . . .	13
1.2.3. Дифференциальные уравнения небесной механики. За- коны Кеплера как следствие закона тяготения Ньютона . . . . .	15
§ 1.3. Математические модели гравитационного и электростатиче- ского поля. Уравнение Лапласа . . . . .	21
1.3.1. Модели гравитационного поля . . . . .	21
1.3.2. Модели электростатического поля . . . . .	26
1.3.3. Постановка граничных условий . . . . .	27
§ 1.4. Модели процессов переноса тепла и диффузии . . . . .	29
1.4.1. Модели переноса тепла . . . . .	29
1.4.2. Модели конвекции-диффузии вещества . . . . .	35
§ 1.5. Математические модели движения жидкости и газов . . . . .	38
1.5.1. Феноменологический подход к построению математи- ческих моделей движения жидкости . . . . .	38
1.5.2. Общий закон сохранения . . . . .	38
1.5.3. Модели движения идеальной жидкости . . . . .	40
1.5.4. Модели движения вязкой жидкости. Шестая проблема тысячелетия . . . . .	44
1.5.5. Модель стационарного безвихревого движения несжи- маемой жидкости . . . . .	49
1.5.6. Сила Кориолиса и элементы динамики океана . . . . .	50
§ 1.6. Математическая модель распространения звука в жидкости . . . . .	52
1.6.1. Модель распространения звука в однородной среде . . . . .	52

1.6.2. Волновое уравнение для звукового давления. Постановка начальных и граничных условий . . . . .	54
1.6.3. Потенциал звукового поля . . . . .	56
1.6.4. Гармонические звуковые волны. Уравнение Гельмгольца	59
§ 1.7. Математические модели электромагнитного поля . . . . .	62
1.7.1. Основные величины и уравнения, описывающие электромагнитные процессы . . . . .	62
1.7.2. Векторное волновое уравнение в непроводящей среде. Уравнение диффузии в сильно проводящей среде . .	64
1.7.3. Граничные условия и условия сопряжения для электромагнитного поля . . . . .	67
1.7.4. Гармонические электромагнитные поля . . . . .	69
1.7.5. Статические электромагнитные поля. Модель электростатики. Электрическая краевая задача . . . . .	70
1.7.6. Модель магнитостатики. Магнитная краевая задача .	74
§ 1.8. Обзор других математических моделей . . . . .	76
1.8.1. Модели колебательных процессов в сосредоточенных системах . . . . .	77
1.8.2. Модели процессов колебания струны, стержня и мембраны . . . . .	78
1.8.3. Модели электрических колебаний в проводах . . . . .	80
1.8.4. Телеграфное уравнение . . . . .	81
1.8.5. Уравнение Шрёдингера . . . . .	82
1.8.6. Уравнение переноса излучения . . . . .	83
ГЛАВА 2. Общие вопросы теории уравнений в частных производных	85
§ 2.1. Основные понятия теории уравнений в частных производных	85
2.1.1. Уравнения в частных производных и их решения . . .	85
2.1.2. Типы уравнений второго порядка . . . . .	88
2.1.3. Корректно и некорректно поставленные задачи . . . .	92
2.1.4. Теорема Ковалевской . . . . .	97
2.1.5. Классическое и обобщенное решения . . . . .	100
§ 2.2. Уравнения в частных производных 1-го порядка . . . . .	101
2.2.1. Одномерное уравнение с постоянным коэффициентом. Условия Коши . . . . .	102
2.2.2. Начально-краевая задача для одномерного неоднородного уравнения . . . . .	111
2.2.3. Метод энергетических неравенств . . . . .	117
2.2.4. Начально-краевая задача для двумерного уравнения переноса в прямоугольнике . . . . .	121
2.2.5. Однородное стационарное уравнение переноса с двумя переменными . . . . .	129

2.2.6. Квазилинейное уравнение первого порядка с двумя переменными . . . . .	134
§ 2.3. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка	139
2.3.1. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	139
2.3.2. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными . . . . .	141
§ 2.4. Постановка задачи Коши. Характеристики уравнения второго порядка . . . . .	148
2.4.1. Постановка задачи Коши. Характеристическая поверхность . . . . .	148
2.4.2. Примеры нахождения характеристик . . . . .	153
ГЛАВА 3. Уравнения гиперболического типа и волновые процессы в пространстве . . . . .	160
§ 3.1. Одномерное волновое уравнение. Формула Даламбера . . . . .	160
3.1.1. Неограниченная струна. Формула Даламбера . . . . .	160
3.1.2. Задача Коши для одномерного волнового уравнения . . . . .	163
3.1.3. Устойчивость решения задачи Коши к исходным данным. Обобщенное решение . . . . .	171
3.1.4. Задача Коши для неоднородного волнового уравнения . . . . .	173
3.1.5. Начально-краевая задача для однородного волнового уравнения на вещественной полуоси . . . . .	175
§ 3.2. Волновое уравнение и бегущие волны. Обзор физических понятий . . . . .	179
3.2.1. Бегущие волны . . . . .	180
3.2.2. Гармонические волны. Уравнение Гельмгольца . . . . .	185
3.2.3. Волны с дисперсией . . . . .	186
§ 3.3. Однородное волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$ . . . . .	188
3.3.1. Трехмерное волновое уравнение. Решение задачи Коши. Формула Кирхгофа . . . . .	188
3.3.2. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^2$ . Решение задачи Коши для волнового уравнения методом спуска. Формула Пуассона . . . . .	192
3.3.3. Физическая интерпретация решения задачи Коши в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	194
3.3.4. Физическая интерпретация решения задачи Коши в $\mathbb{R}^2$ . . . . .	198
§ 3.4. Задача Коши для неоднородного волнового уравнения . . . . .	201
3.4.1. Задача Коши в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	201
3.4.2. Задача Коши в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}$ . . . . .	204
3.4.3. Качественный анализ решений неоднородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$ , $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}$ . . . . .	204
§ 3.5. Некоторые общие вопросы теории распространения волн в пространстве $\mathbb{R}^n$ . . . . .	207



3.5.1. Теорема единственности решения задачи Коши для волнового уравнения . . . . .	207
3.5.2. Область зависимости, область влияния и область определения для волнового уравнения . . . . .	209
ГЛАВА 4. Метод разделения переменных (метод Фурье) и волновые процессы в ограниченных областях . . . . .	212
§ 4.1. Одномерное волновое уравнение . . . . .	212
4.1.1. Применение метода Фурье для уравнения свободных колебаний струны . . . . .	212
4.1.2. Обоснование метода Фурье . . . . .	216
4.1.3. Физический анализ решения . . . . .	217
4.1.4. Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах . . . . .	219
4.1.5. Вынужденные колебания струны с подвижными концами . . . . .	222
4.1.6. Некоторые замечания о методе Фурье . . . . .	223
§ 4.2. Одномерное волновое уравнение с переменными коэффициентами . . . . .	224
4.2.1. Постановка задачи. Применение метода Фурье . . . . .	224
4.2.2. Некоторые свойства решения спектральной задачи . . . . .	225
4.2.3. Представление решения в виде ряда Фурье . . . . .	229
4.2.4. Единственность и устойчивость решения задачи Дирихле . . . . .	231
§ 4.3. Многомерное волновое уравнение . . . . .	234
4.3.1. Постановка задачи. Применение метода Фурье. Сведение к многомерной спектральной задаче . . . . .	234
4.3.2. Двумерное волновое уравнение в прямоугольной области. Свободные колебания прямоугольной мембраны . . . . .	238
4.3.3. Физический анализ решения волнового уравнения в прямоугольнике . . . . .	242
4.3.4. Двумерное волновое уравнение в круге. Свободные колебания круглой мембраны . . . . .	244
§ 4.4. Элементы теории сферических функций. Приложения к решению задачи об излучении звука колеблющейся сферой . . . . .	250
4.4.1. Постановка задачи об излучении звука колеблющейся сферой . . . . .	250
4.4.2. Простейшие сферические функции. Полиномы Лежандра . . . . .	251
4.4.3. Присоединенные функции Лежандра . . . . .	254
4.4.4. Фундаментальные сферические функции . . . . .	257
4.4.5. Сферические функции Бесселя, Неймана и Ханкеля . . . . .	260
4.4.6. Решение уравнения Гельмгольца в сферических координатах. Сферические волны . . . . .	261
ГЛАВА 5. Параболические уравнения и тепловые процессы . . . . .	263
§ 5.1. Принцип максимума . . . . .	263

5.1.1. Принцип максимума для однородного уравнения теплопроводности . . . . .	263
5.1.2. Принцип максимума для неоднородного параболического уравнения с переменными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	267
§ 5.2. Решение первой краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности методом Фурье . . . . .	270
§ 5.3. Задача Коши для одномерного уравнения теплопроводности	277
5.3.1. Постановка и единственность решения задачи Коши .	277
5.3.2. Применение метода Фурье . . . . .	279
5.3.3. Обоснование метода Фурье . . . . .	282
5.3.4. Задача Коши для неоднородного уравнения. Понятие о методе интегральных преобразований . . . . .	284
5.3.5. Физический анализ решения . . . . .	287
ГЛАВА 6. Элементы теории эллиптических уравнений и гармонических функций . . . . .	291
§ 6.1. Уравнение Лапласа. Сингулярные решения и гармонические потенциалы . . . . .	291
6.1.1. Определение гармонической функции . . . . .	291
6.1.2. Сингулярные решения оператора Лапласа . . . . .	292
6.1.3. Физический смысл сингулярного решения. Потенциалы монополей, диполей и мультиполей . . . . .	295
6.1.4. Объемные потенциалы. Потенциалы простого и двойного слоя . . . . .	299
6.1.5. Несобственные кратные интегралы, зависящие от параметров . . . . .	302
§ 6.2. Формулы Грина . . . . .	308
6.2.1. Формулы Гаусса–Остроградского, Грина и Стокса . . .	308
6.2.2. Интегральное представление функции из класса $C^2$ . .	313
§ 6.3. Простейшие свойства гармонических функций . . . . .	317
6.3.1. Случай функций одной переменной . . . . .	317
6.3.2. Основные свойства гармонических функций в пространстве $\mathbb{R}^n$ . . . . .	318
6.3.3. Единственность решений внутренней и внешней задач Дирихле для уравнения Лапласа . . . . .	323
§ 6.4. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге и вне круга методом Фурье . . . . .	327
6.4.1. Постановка краевых задач. Применение метода Фурье	327
6.4.2. Интеграл Пуассона . . . . .	332
6.4.3. О решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре и вне шара. . . . .	338

§ 6.5. Теоремы единственности и устойчивости решений краевых задач для уравнения Пуассона . . . . .	340
6.5.1. Постановка основных краевых задач в случае пространства $\mathbb{R}^3$ . . . . .	340
6.5.2. Теоремы единственности и устойчивости решений краевых задач . . . . .	341
6.5.3. Краевые задачи для уравнения Пуассона на плоскости . . . . .	345
6.5.4. Некоторые необходимые условия существования решений краевых задач . . . . .	346
§ 6.6. Дополнительные свойства гармонических функций . . . . .	347
ГЛАВА 7. Элементы теории потенциала . . . . .	354
§ 7.1. Объемные потенциалы и их свойства . . . . .	354
7.1.1. Определение объемного потенциала. Непрерывная дифференцируемость объемного потенциала в пространстве $\mathbb{R}^n$ . . . . .	354
7.1.2. Существование производных второго порядка от объемного потенциала . . . . .	357
7.1.3. Обзор дополнительных свойств объемного потенциала. Эллиптическая регулярность . . . . .	360
§ 7.2. Элементы теории потенциалов простого и двойного слоя . . . . .	364
7.2.1. Определение потенциала двойного слоя . . . . .	364
7.2.2. Теорема о скачке для потенциала двойного слоя. . . . .	368
7.2.3. Потенциал простого слоя. Теорема о скачке производных от потенциала простого слоя. . . . .	371
7.2.4. Обзор дополнительных свойств потенциалов простого и двойного слоя . . . . .	373
§ 7.3. Метод граничных интегральных уравнений . . . . .	376
§ 7.4. Метод функций Грина решения смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона . . . . .	382
§ 7.5. Элементы теории интегральных уравнений . . . . .	389
ГЛАВА 8. Элементы теории акустических полей в однородных средах . . . . .	392
§ 8.1. Элементы теории обобщенных функций . . . . .	392
8.1.1. Предварительные сведения . . . . .	392
8.1.2. Прямые произведения и свертки . . . . .	398
8.1.3. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье . . . . .	401
§ 8.2. Классическое, слабое и фундаментальное решения уравнения Гельмгольца . . . . .	405
8.2.1. Основные определения . . . . .	405
8.2.2. Уходящие и приходящие акустические потенциалы . . . . .	411
8.2.3. Типы и свойства уходящих потенциалов . . . . .	413

§ 8.3. Условия излучения для уравнения Гельмгольца . . . . .	418
§ 8.4. Единственность решений краевых задач для уравнения Гельмгольца . . . . .	426
Литература . . . . .	433
Приложение 1. Исторический очерк развития метода математического моделирования . . . . .	437
Приложение 2. Выражения дифференциальных операторов в ортогональных координатах . . . . .	442

Научное издание

Геннадий Валентинович Алексеев

## КЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Редактор В.С. Жердев

Отпечатано с оригинал-макета,  
представленного автором

Подписано к печати 11.11.2011 г. Формат 60х90/16.

Печать офсетная. Усл.п.л. 28,25. Уч.-изд.л. 24,19.

Тираж 300 экз. Заказ 144

---

Отпечатано в типографии ФГУП Издательство “Дальнаука” ДВО РАН  
690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7