Краевые задачи для обыкновенного линейного дифференциального уравнения.

Постановка задачи.

На отрезке $[a, b]$ требуется найти решение уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \;\; x \in (a, b),$$

$$A_0 y(a) + A_1 y'(b) = A,$$

$$B_0 y(a) + B_1 y'(b) = B.$$

Здесь $p(x), q(x), \; f(x), A_0, A_1, A, B_0, B_1, B, -$ заданы, причем

$$p(x) > 0, \qquad q(x) \geq 0, \qquad A_0^2 + A_1^2 \neq 0, \;\; B_0^2 + B_1^2 \neq 0\,.$$

Задание на лабораторную работу 2.

I. Составить тестовый пример. Для этого

задать функции: $y(x), \; p(x), \; q(x)$,

постоянные: A_0, A_1, A, B_0, B_1, B,

Подставить $y(x), \; p(x), \; q(x)$ в уравнение и определить функцию $f(x)$.

По полученным данным $p(x), \; q(x), \; f(x), A_0, A_1, A, B_0, B_1, B$ записать постановку краевой задачи. Значения постоянных выбрать так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$A \neq 0, \qquad B \neq 0, \quad A_0 \cdot B_1 - B_0 \cdot A_1 \neq 0,$$

$$\text{либо } A_0 \cdot B_0 \neq 0, \;\; \text{либо } \; A_1 \cdot B_1 \neq 0.$$

Составить разностную схему для реализации численного метода.

II. Найти численное решение задачи, выбрав шаг $h_1 = 0.05, \quad h_2 = 0.01$.

Найти относительную погрешность полученных решений по формулам

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{\sum\left(y_t(x_i) - y_1(x_i)\right)^2}}{\sqrt{\sum\left(y_t(x_i)\right)^2}}, \qquad \sigma_2 = \frac{\sqrt{\sum\left(y_t(x_i) - y_2(x_i)\right)^2}}{\sqrt{\sum\left(y_t(x_i)\right)^2}},$$

где $y_t -$ точное решение, $y_1, y_2 -$ приближенные решения, найденные на сетках с шагами h_1, h_2.

Найти погрешность приближенных решений по формуле

$$\sigma \;= \sqrt{\sum\left(y_1(x_i) - y_2(x_i)\right)^2}.$$

III. Построить графики точного и приближенного решения найденного на сетке с шагом $h_2 = 0.01$. На основании полученных результатов сделать вывод о точности приближенного решения.