

$\Omega$

# **Конспект лекций**

## **Математическое и компьютерное моделирование**

Лектор: **Колобов А. Г.**

Курс: **4**

Семестр: **1**

*Владивосток, 2024-2025*

# Нашли ошибку?

Если вы заметили ошибку или хотите добавить замечание:

Репозиторий этой книги: [https://github.com/motattack/mcs\\_24\\_2](https://github.com/motattack/mcs_24_2)

Телеграм: <https://t.me/motattack>



*В данном конспекте могут быть опечатки*

# Содержание

<b>I</b>	<b>Метод Сплайн-Коллокации</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Метод Коллокации . . . . .</b>	<b>2</b>
1.1	Общие положения . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Сплайн по моментам. . . . .</b>	<b>3</b>
2.1	Сплайн-разностная схема . . . . .	3
2.2	Теорема о сходимости . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Использование В-сплайнов . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Основные свойства схем Сплайн-коллокаций . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Уравнение Пуассона в прямоугольной области . . . . .</b>	<b>7</b>
5.1	Метод матричной прогонки . . . . .	8
5.2	Схема переменных направлений. . . . .	8
<b>II</b>	<b>Методы решения интегральных уравнений</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Линейные интегральные уравнения . . . . .</b>	<b>10</b>
6.1	Типы уравнений и их классификация . . . . .	10
<b>7</b>	<b>Методы . . . . .</b>	<b>11</b>
7.1	Методы решения уравнения Вольтерра 2-го рода . . . . .	12
7.2	Методы решения уравнений Фредгольма 2-го рода . . . . .	14
7.3	Уравнение Вольтерра 1-го рода . . . . .	17
<b>8</b>	<b>Решение ур-в. Фредгольма. . . . .</b>	<b>18</b>
8.1	Методы Регуляризации . . . . .	19
8.2	Задача минимизации сглаживающего функционала . . . . .	21
8.3	Метод регуляризации для решения инт. ур-в. Фредгольма 1 рода . . . . .	22
8.4	Определение параметра регуляризации по невязке . . . . .	23

## Часть I

# Метод Сплайн-Коллокации

Запись от: 30.09.2024

## 1. Метод Коллокации

$$Lu = f,$$

Условия:

$$Lu|_{x=\xi_k} = f(\xi_k), \quad \Phi(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

КРН - только в узлах сетки. В аналитическом виде - сплайны.

### 1.1. Общие положения

ОДУ второго порядка:

$$L[y(x)] = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), \quad x \in [a, b].$$

Смешанные граничные условия:

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1,$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2.$$

Пусть  $\exists!$  реш.

Условие гладкости для каждой задачи оговаривается отдельно.

Пусть  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  - сетка для построения сплайна  $S(x) \in C^2[a, b]$ .

На  $[a, b]$  выбираем точки  $\xi_k \in [a, b]$ ,  $k = \overline{0, N}$  - узлы коллокации.

Требуем:

$$L[S(x)]|_{x=\xi_k} = r(\xi_k).$$

И для граничных условий:

$$\alpha_1 S(a) + \beta_1 S'(a) = \gamma_1,$$

$$\alpha_2 S(b) + \beta_2 S'(b) = \gamma_2.$$

Размерность пространства =  $N + 3$  - уравнения.

$x_k \neq \xi_k$  - только если очень надо. Если  $x_k = \xi_k$  будет 2-й порядок, иначе может быть больше.

$p, q$  - могут быть разрывными. узлы не брать разрывные.

$[x_i, x_{i+1}]$  = нельзя брать больше 3-х точек. Если взять 4 - замкнется, не будет граничных условий.

## 2. Сплайн по моментам

$$S(x) = u_i(1-t) + u_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6}(1-t)[(2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}],$$

где  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $t = \frac{x-x_i}{h_i}$ ,  $\xi_k = x_k$  (узлы совпадают).

$$M_i = S''(x_i) \quad (\text{моменты}), \quad m_i = S'(x_i) \quad (\text{касательные}).$$

$\triangleleft P(x) \equiv 0$ , только 2-я производная

Условия коллокации:

$$M_i + q_i u_i = r_i, \quad i = \overline{0, N}, \quad q_i = q(x_i), \quad r_i = r(x_i).$$

$M_i, u_i$  неизвестны. Как связать моменты и значения?

### 2.1. Сплайн-разностная схема

Система для нахождения моментов:

$$(\star) \quad \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = \frac{6}{h_{i-1} + h_i} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}} \right),$$

$$i = \overline{1, N-1}.$$

(во внутренних точках, но не граничных).  $[x_i, x_{i+1}]$

$$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \quad \lambda_i = 1 - \mu_i.$$

Связь есть, но  $M_i$  и  $u_i$  не знаем. (прогонка будет устойчива)

Из усл. коллокации:  $M_i = r_i - q_i u_i$  подставляем в  $(\star)$ .

После подстановки получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_i \left( 1 + \frac{h_{i-1}^2}{6} q_{i-1} \right) u_{i-1} - \left( 1 - \frac{h_i h_{i-1}}{3} q_i \right) u_i + \mu_i \left( 1 + \frac{h_i^2}{6} q_{i+1} \right) u_{i+1} = \\ = \frac{h_{i-1} h_i}{6} (\mu_i r_{i-1} + 2r_i + \lambda_i r_{i+1}), \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Будет ли диагональное преобразование? - Прогока.

Условие для диагонального преобладания и для второго порядка:

$$\beta_1 \leq 0, \quad \beta_2, \alpha_j \geq 0, \quad |\alpha_j| + |\beta_j| \neq 0, \quad j = 1, 2.$$

$q(x) \leq q < 0$ , —условие существования решения.

$$h_{i-1}^2 \max \{ |q_{i-1}|, |q_i| \} \leq 6. \quad (\text{если не выполняется - уменьшаем } h).$$

$\rightarrow$  это сплайн-разностная схема.

## 2.2. Теорема о сходимости

Пусть выполняются условия (диагонального преобладания) и  $p(x) \equiv 0$ .

Если точное решение  $y(x) \in C^2 W_{\Delta, \infty}^4[a, b]$  то  $\|S(x) - y(x)\| = o(\bar{h}^2)$

$$\bar{h} = \max_i h_i.$$

Любая сетка.

На всем отрезке  $y(x) \in C^2[a, b]$ , а на маленьких  $y(x) \in W_{\Delta, \infty}^4[x_i, x_{i+1}]$  -

3 непрерывна, 4 может иметь разрыв.

### 3. Использование В-сплайнов

$$S(x) = \sum_{i=1}^{N+1} b_i B_i(x),$$

где  $B_i(x)$  - нормализованный финитный (не всюду, а на отрезке  $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ ) сплайн, по центральному узлу.  $b_i$  - неизвестные.

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ . - не хватает.

$$B_{-1}(x) \quad x_{-1}.$$

Добавляют  $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}$  и  $x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}$  - равномерно. Это расширенная сетка. Узлы коллокации совпадают с узлами сетки:  $x_i = \xi_i$ .

$$L[y(x)] = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) - r(x),$$

$$L[S(x)] = r(x).$$

Решая систему  $\Rightarrow b_{-1}, b_0, \dots, b_N, b_{N+1}$ .

$$S(x_k) = \sum_{i=-1}^{N+1} b_i B_i(x_k)$$

Выберем  $x_k$  --- три сплайна не 0:

$$B_k(x_k), B_{k-1}(x_k), B_{k+1}(x_k).$$

$$BL[y(x)] =$$

$$= b_{i-1}L[B_{i-1}(x_i)] + b_i L[B_i(x_i)] + b_{i+1}L[B_{i+1}(x_i)] = r(x_i), \quad i = \overline{0, N}.$$

$\rightarrow$  условие коллокации.

$$b_{i-1}A_i + b_i C_i + b_{i+1}B_i = D_i \quad (\text{тут } B_i \text{ не В-сплайн}).$$

$$A_i = \frac{1}{x_{i+1} - x_{i-2}} \left( 1 - \frac{1}{2}p_i h_i + \frac{1}{6}q_i h_i^2 \right),$$

$$B_i = \frac{1}{x_{i+2} - x_{i-1}} \left( 1 + \frac{1}{2} p_i h_{i-1} + \frac{1}{6} q_i h_{i-1}^2 \right),$$

$$C_i = -A_i - B_i + \frac{1}{6} q_i (h_i + h_{i-1}),$$

$$D_i = \frac{1}{6} r_i (h_i + h_{i-1}).$$

$(N + 1)$  + граничные условия:

$$b_{-1}A_{-1} + b_0C_{-1} + b_1B_{-1} = D_{-1} \quad | \quad S(x_0),$$

$$b_{N-1}A_{N+1} + b_NC_{N+1} + b_{N+1}B_{N+1} = D_{N+1} \quad | \quad S(x_N).$$

Не выйдет прогонкой из-за краевых. Исключают эти элементы.

Выражаем и подставляем

$$(1) \quad \cancel{b_{-1}A_{-1}} + b_0C_{-1} + b_1B_{-1} = D_{-1},$$

$$\cancel{b_{-1}A_0} + b_0C_0 + b_1B_0 = D_0.$$

$$b_0\tilde{C}_0 + b_1\tilde{B}_0 = \tilde{D}_0$$

$i = N$  и граничное - аналогично.

$b_0, b_1, \dots, b_N$  - находим. Из них  $b_{-1}, b_{N+1}$ .

Диагональное преобладание  $\Rightarrow$  устойчивость  $\Rightarrow$  монотонная прогонка.

Условия:

$$1 - \frac{1}{2} p_i h_i + \frac{1}{6} q_i h_i^2 \geq 0, \quad 1 + \frac{1}{2} p_i h_{i-1} + \frac{1}{6} q_i h_{i-1}^2 \geq 0. \quad + \text{ усл. существования}$$

$$\|S(x) - y(x)\| = o(\bar{h}^2).$$

Любые уравнения 2-го порядка.

$$\triangleleft \xi_i \neq x_i.$$

Сетка:  $x_0, (x_i, (xx), x_{i+1}), (x_{i+2}, (xx), x_N)$ . - через 1 выбираем узлы.

Пусть равномерная сетка  $h = h_i$ .

$$x_{2i}, \xi_{2i}, \xi_{2i+1}, x_{2i+1}$$



Гауссовские точки:  $\xi_{2i} = x_{2i} + vh$ ,  $\xi_{2i+1} = x_{2i+1} - vh$ ,  $v = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

5 диагональная,  $O(h^3)$

На равномерное сетке нет 1 производной.

$$\frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} = f_i'' + \frac{h^2}{12} f_i^{(IV)} + O(h^4)$$

$$M_i = f_i'' + \frac{h^2}{12} f_i^{(IV)} + O(h^4)$$

Если взять полусумму:

$$\frac{1}{2} \left( M_i + \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} \right) = f_i''(x) + O(h^4)$$

#### 4. Основные свойства схем Сплайн-коллокаций

1. Одинаковая эффективность на любых сетках.
2. Высокая точность аппроксимации 1-й производной
3. Простота построения схем повышенной точности, в том числе для уравнений с переменными коэффициентами.
4. Решение и её производную можно вычислить в любых точках области.

#### 5. Уравнение Пуассона в прямоугольной области

⌞ Уравнение Пуассона в прямоугольной области  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y), \quad u|_{\Gamma} = g(x, y)$$

Базис уже 2-х мерный.

Сетка:

$$\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b, \quad \Delta_y : c = y_0 < y_1 < \dots < y_M = d$$

$$x_i : i = -1, -2, -3, N+1, N+2, N+3 \quad B_i$$

$$y_j : j = -1, -2, -3, M+1, M+2, M+3 \quad \bar{B}_j$$

$B_i(x), \bar{B}_j(y)$  — базисы в 2-х мерном

$\Delta = \Delta_x \otimes \Delta_y$  — тензорное произведение двумерных сплайнов.

В-кубический сплайн:

$$S(x, y) = \sum_i \sum_j b_{ij} B_i(x) \bar{B}_j(y).$$

### 5.1. Метод матричной прогонки

$$S(x, y) = \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} b_{ij} B_i(x) \bar{B}_j(y).$$

Будем искать в виде:

$$S(x, y) = \sum_{i=-1}^{N+1} \bar{\alpha}_i(y) B_i(x), \quad \text{где } \bar{\alpha}_i(y) = \sum_{j=-1}^{M+1} b_{ij} \bar{B}_j(y).$$

Или:

$$S(x, y) = \sum_{j=-1}^{M+1} \alpha_j(x) \bar{B}_j(y), \quad \text{где } \alpha_j(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} b_{ij} B_i(x).$$

Вместо  $\Delta u = -f$ , решаем:  $\frac{\partial V}{\partial t} + \Delta V = -f$ .

$v \xrightarrow{t \rightarrow \infty} u$  - метод установления.

### 5.2. Схема переменных направлений

Имеет вид:

$$u_{ij}^{v+1/2} = u_{ij}^v + \frac{\Delta \tau}{2} \left[ (u_{xx})_{ij}^v + (u_{yy})_{ij}^{v+1/2} + f_{ij}^v \right].$$

$$u_{ij}^{v+1} = u_{ij}^{v+1/2} + \frac{\Delta \tau}{2} \left[ (u_{xx})_{ij}^{v+1} + (u_{yy})_{ij}^{v+1/2} + f_{ij} \right].$$

$u^v \quad t_j$  - фиктивное.

По  $x$ , хотим по  $y$ :

$\bar{\alpha}_i(y) \parallel \alpha_j(x)$  — найдем на слое по  $j$ .

Матрицы 3-х диагональные.

Комбинация коллокации и конечной разности.

Где остановится? - Смотрим соседние значения коэффициентов:

$$\max_{i,j} \|\alpha_{ij}^v - \alpha_{ij}^{v+1}\| < \varepsilon \text{ или } \max_{i,j} \|\bar{\alpha}_{ij}^v - \bar{\alpha}_{ij}^{v+1}\| < \varepsilon$$

Аппроксимация + устойчивость  $\Rightarrow$  сходимость.

Доказательство есть для  $N = M$ ,

$$S - y \quad |S - \bar{S} + \bar{S} - y|$$

$\bar{S}$  - интерполяция.

Устойчивость из методов расщепления.

## Часть II

# Методы решения интегральных уравнений

Запись от: 28.10.2024

## 6. Линейные интегральные уравнения

Линейное интегральное уравнение:

$$g(x) y(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad x \in Q$$

где:

- $\lambda$  — некоторый параметр,
- $K(x, s)$  — ядро оператора (самоопределенный),
- $\Omega$  — область интегрирования:
  - область постоянная - уравнение Фредгольма,
  - область переменная (от  $a$  до  $x$ ) - уравнение Вольтерра.

### 6.1. Типы уравнений и их классификация

1. Уравнение 1 рода:  $g(x) \equiv 0$ .
2. Уравнение 2 рода:  $g(x) \not\equiv 0$ .
3. Уравнение 3 рода: где-то в  $\Omega$   $g(x) \neq 0$ , а где-то  $g(x) \equiv 0$ .

$f(x) = 0$  - однородное.

◁ однородное (поделим на g):

$y(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, s)y(s) ds = 0$  — собственное значение и собственная функция.

### Операторный вид

$Ay = f$  — уравнение 1 рода.

$y = \lambda Ay = f$  — уравнение 2 рода.

$y(x) \in Y, f(x) \in F, g(x) \in G$

$Y, F, G$  функциональные метрические пространства.

$Ay = \int_{\Omega} K(x, s)y(s) ds$  - интегральный оператор (линейный).

$A_1y = f$  — 1 рода

$y = A_2y + f$  — 2 рода.

$A := (I - \lambda A_2)$

$(I - \lambda A_2)y = f$  — уравнение 1 рода - это формально Фридрихса 1-го рода.

Вполне непрерывный - не имеет огранич. обратного ( $y \neq A_1^{-1}f$ ) - не огр.

Но  $y = (I - A_2)^{-1}f$  - имеет, так как огр.  $(I - A_2)$  - непрерывный.

Уравнение 1-го рода - существенно некорректно.

## 7. Методы

/I/ Прямой метод (аппроксимация - функция или оператор ) переход от  $\infty$  мерного к конечно-мерному.

/II/ Проекционные методы:  $\tilde{y} = \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i$ .

Невязка:

$$\varepsilon_m = \sum_{i=1}^m c_i (\varphi_i - A_2 \varphi_i) - f.$$

Ритца (мин), Галеркина (орт. базис), наим. квадратов.

/III/ Итерационные методы:

Основное требование  $\|A_2\| < 1$  - присутствует сжимающее отображение.

Метод последовательных приближений:

$$y_k = A_2 y_k + f, \quad k = 1, 2, \dots$$

Общее решение:

$$y = (I - A_2)^{-1} f = \sum_{k=0}^{\infty} A_2^k f.$$

Приближение:

$$y_n = \sum_{k=0}^n A_2^k f.$$

$\bar{y}$  - точное.

Оценка погрешности:

$$\|\bar{y} - y_k\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A_2^k f\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A_2\|^k \|f\|.$$

### 7.1. Методы решения уравнения Вольтерра 2-го рода

P.s: Все методы сходятся. Считаем что  $\exists!$  решение.

$$y(x) - \int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad x \in (a, b).$$

#### 7.1.1. Метод квадратуры для уравнений Вольтерра 2-го рода

Квадратурное представление:

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^m A_i \varphi(x_i) + R[\varphi],$$

Здесь  $R[\varphi]$  - остаточный член.

//симпсона, гауса, трапеций//

Ограничение:  $A_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^m A_i = b - a$ .

Работаете с трапецией - качество сохраняется, точность хуже.

Нужно выбрать точку  $x_i$  и записать:

$$y(x_i) - \int_a^x K(x_i, s) y(s) ds = f(x_i), \quad i = \overline{1, n}$$

Взять можно в зависимости от  $K, f$  - равномерные или не равномерные.

$k, f$  могут быть таблично заданными - тогда в них.

Система:

$$y(x_i) - \sum_{j=1}^i A_j K(x_i, x_j) y(x_j) = f(x_i) + R[\phi]$$

Погрешность опустим:

$$y_i - \sum_{j=1}^i A_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Треугольная формула:

$$- \sum_{j=1}^{i-1} A_j K_{ij} y_j + (1 - A_i K_{ii}) y_i = f_i$$

$$y_i = \frac{f_i + \sum_{j=1}^{i-1} A_j K_{ij} y_j}{1 - A_i K_{ii}}, \quad \text{ограничение: } 1 - A_i K_{ii} \neq 0$$

→ Метод квадратур

Запись от: 11.11.2024

$$y_i = \left(1 - \frac{h}{2} K_{ij}\right)^{-1} \left(f_i - \frac{h}{2} K_{i1} y_1 + h \sum_{j=2}^{i-1} K_{ij} y_j\right)$$

### 7.1.2. Итерационные методы для уравнений Вольтерра 2-го рода

$$y_k(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s) y_{k-1}(s) ds, \quad k = 0, 1, \dots$$

→ простой итерации.

Есть ли сходимость? Какая скорость сходимости?

Чтобы увидеть как накапливаются:

Пусть  $\varphi_0(x) = f(x)$ , а  $\varphi(x) = \int_a^x K(x, s) \varphi_k(x) ds$ .

Тогда общее решение:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$$

$$\begin{aligned} y &= f + Ay \quad y = (I - A)^{-1} f = \sum_{k=0}^{\infty} A^k f = A + Af + A^2 f + \dots = \\ &= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \end{aligned}$$

Мы берем  $y_n(x) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(x)$ .

Пример (когда есть сходимость): Пусть  $f(x)$  и  $K(x, s)$  - непрерывное по обоим аргументам  $\Rightarrow$  будет сходимость.

Пусть  $N = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ,  $M = \max_{a \leq x, s \leq b} |k(x, s)|$

(некая теорема)

$$|\varphi_k(x)| \leq \frac{NM(b-a)^k}{k!} \quad (\text{факториальная сходимость})$$

## 7.2. Методы решения уравнений Фредгольма 2-го рода

Уравнение Фредгольма II рода:

$$y(x) - \lambda \int_a^b k(x, s) y(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b], \quad f(x) \in C[a, b]. \quad (f1)$$

$$v = \{[a, b] \times [a, b]\}$$

Минимальное требование:  $K$  непрерывно или разрыв 1 рода, т. е.:

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds = B < +\infty$$

Если  $f(x) \equiv 0$  - задача на собственные значения. Найти  $\lambda$ , когда  $y(x) \neq 0$ .

$\lambda$  - характеристические значения, а  $\mu = \frac{1}{\lambda}$  - собственные значения.



### 7.2.1. Метод квадратур для (f1)

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{j=1}^m A_j \varphi(x_j) + R[\varphi] \quad (\text{ошибку учитывать не будем}).$$

Берём для конкретности  $x_i \in [a, b]$ , возьмем их  $n$  штук:

$$y(x_i) - \lambda \int_a^b k(x_i, s) y(s) ds = f(x_i),$$

$$x_i, i = \overline{1, n}.$$

Заменяем суммой:

$$y(x_i) - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x_i, s_j) y(x_j) = f(x_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} y_j = f_i \quad \text{СЛАУ, полная матрица - методом Гаусса}$$

Найдем  $y_1, y_2, \dots, y_n$  (значения в точках).

Интерполяция:  $[a, b]$  или сглаживание.

Пусть  $f(x)$  задана таблично, можно восстановить квадратуры гаусса - большие  $N$  не брать (лучше 6, 7 точек).

Если большой отрезок, разбиваем на:

$$\int_a^b = \int_a^{b_1} + \int_{b_1}^{b_2} + \dots + \int_{b_{m-1}}^{b_m=b} \quad (m \cdot n)$$

Каждый считаем гауссом.

### 7.2.2. Метод взвешенных невязок

$$K(s, x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(s), \quad \alpha_i, \beta_i - \text{лин. независимые функции.}$$

Если разбивается, то вырожденное.

Подставим:

$$y(x) - \lambda \int_a^b \left[ \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(s) \right] y(s) ds = f(x)$$

Сумма не зависит от  $s$ :

$$y(x) - \lambda \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(s) y(s) ds = f(x)$$

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) y(s) ds \quad - \text{ пусть мы их нашли.}$$

Тогда получили решение в аналитическом виде:

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) c_i$$

Подставим в уравнение:

$$\cancel{f(x)} + \lambda \sum_{i=1}^m c_i \alpha_i(x) - \lambda \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(s) \left[ f(s) + \lambda \sum_{j=1}^m c_j \alpha_j(s) \right] ds = \cancel{f(x)}$$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \left[ c_i - \int_a^b \left( \beta_i(s) f(s) + \lambda \sum_{j=1}^m c_j \alpha_j(s) \beta_i(s) \right) ds \right] = 0.$$

$$/ / \sum a_i \alpha_i = 0 \Rightarrow a_i = 0, \quad \alpha_i - \text{лин. независимые} / /$$

$$c_i - \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds - \lambda \sum_{j=1}^m c_j \int_a^b \alpha_j(s) \beta_i(s) ds = 0$$

Более приличный вид:

$$\beta_i(s) - \text{известно,} \quad f(s) - \text{тоже.}$$

$$f_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds \quad - \text{предварительно считаем.}$$

$$a_{ij} = \int_a^b \alpha_i(s) \beta_j(s) ds \quad - \text{легко аналитически/квadrатуры.}$$

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^m c_j a_{ij} = f_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

$c_i$  - найдем.

Потом решение в аналитическом виде:

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^m c_i \alpha_i(x)$$

Иногда  $K(x, s)$  - невырожденное. Берут  $\tilde{K}(x, s)$  - вырожденное (близкое) ядро. В ряд Тейлора, если  $x$  и  $s$  разделяются или метод наименьших квадратов, метод Бэтмена.

### 7.3. Уравнение Вольтерра 1-го рода

Пусть  $y(s) \in C[a, b]$  - непрерывная,  $f(x) \in C^1[a, b]$ ,  $K(x, s) \in C^1[a, b] \times [a, b]$ ,

$\rightarrow$  устойчивая,  $f$  и  $K$  ограничены:

$$\|f(x)\|_{C^1} \leq K_1, \quad \|K(x, s)\|_{C^1} \leq K_2.$$

Если ослабим  $f(x) \in C[a, b]$ , то уже некорректно.

Сведение к уравнению второго рода:

$$\int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x) \quad - \text{уравнение первого рода.}$$

Дифференцируем по  $x$ :

$$(1): \quad K(x, x) y(x) + \int_a^b K'_x(x, s) y(s) ds = f'(x).$$

Поделим на  $K(x, x)$ :

$$y(x) + \int_a^b \frac{K'_x(x, s)}{K(x, x)} y(s) ds = \frac{f'(x)}{K(x, x)}, \quad - \text{второго рода.}$$

Только если  $K(x, x) \neq 0$ . Если  $= 0$ , то 1-го рода *рекомендация* - ещё раз дифференцируем по  $x$ :

$$K'_x(x, x) y(x) + \int_a^b K''_{xx}(x, s) y(s) ds = f''(x).$$

Делим на  $K'_x(x, x)$ ... Если  $K'_x(x, x) \neq 0$ , то 2-го. Если нет ещё раз дифференцируем ...

$$\text{Интегрирование по частям (2): } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

$$\text{Пусть } Y(x) = \int_a^b y(s) ds, \quad u = K(x, s), \quad dv = y(s) ds.$$

$$K(x, s) Y(x) \Big|_a^x \quad (\text{в } a = 0)$$

$$K(x, x)Y(x) - \int_a^x K'_x(x, s)Y(s) ds = f(x)$$

→ ур-в. Вольтерры 2-го рода ( $K(x, x) \neq 0$  делим)

Решение этого ур-в. найдем  $Y(x)$ , потом

$$y(s) = \frac{dY}{ds}.$$

### 7.3.1. Метод Квадратур - плох

$\int \rightarrow \sum_{j=1}^i$ , но 2-го рода по рекуррентной формуле, а тут  $x = a$  - интеграл схлопнется - нет начала, но можно продифференцировать:  $k(x, x)y(x) + \dots = f'(x)$

$$y(a) = \frac{f'(a)}{K(a, a)}.$$

Если  $f$  таблично задана - 2 курс (полином Лагранжа).

## 8. Решение ур-в. Фредгольма

Корректность по (Адамару): Пусть  $AU = F$  - задача, является корректной на паре метрических пространств  $(Y, F)$ , если:

1. Любому  $f \in F$  соответствует решение  $y \in Y$ .
2. Из  $Ay_1 = Ay_2 \Rightarrow y_1 = y_2$  (единственность решения).
3.  $\forall \varepsilon > 0; \delta(\varepsilon) > 0$  при условии  $\rho_F(f_1, f_2) \leq \delta(\varepsilon)$ , то  $\rho_Y(A^{-1}f_1, A^{-1}f_2) < \varepsilon$   
(условие сходимости) непрерывности оператора  $A$ .

Чаще нарушается третье условие.

Оператор Фредгольма:

$$Ay = \int_a^b K(x, s)y(s) ds \quad - \text{ вполне непрерывный для не } (A^{-1})$$

Четвертая теорема Фредгольма:  $\lambda_{\min} = 0$  — корень зла

$n = 5$  спектр сместился, 0 - не будет.

$n$  - увеличиваем, тем ближе к 0, опр. ближе к 0. Любые (старые) методы ничего не дадут.

## 8.1. Методы Регуляризации

### 8.1.1. Условная корректность

Условная корректность (по Тихонову):

$Ay = f$ , — называется условно корректной, если:.

1. Априори известно, что решение  $\exists$  и принадлежит некоторому замкнутому множеству  $M$ .
2. Решение ! в классе функций.
3. Бесконечно малым вариациям параметра  $f$ , на выходящим  $y$  за пределы  $M$  соответствуют бесконечно малые вариации решения.

Самое распространенное  $M$  - компакт/компактное множество (вообще говоря не одно и то же, но будем считать одно и то же :D). Если из всякой бесконечной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. (замкнутое и ограниченное).

Иногда  $M$  - не компакт;  $f$  - пошевелим, вышли из компакта  $AU$  - существенно некорректные.

РО - Регуляризирующий Оператор.

$$Ay = f$$

Вся входная информация с погрешностью.

$$\tilde{A}y = \tilde{f} \text{ - можем решать}$$

$$\tilde{A}y = \tilde{f}$$

Три варианта определения:  $A$  точно  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{A}$  и  $f$  или  $\tilde{A}$  и  $\tilde{f}$ .

Мы рассмотрим  $A$  точное, а  $\tilde{f}$  с погрешностью.

Запись от: 09.12.2024

### 8.1.2. Регуляризирующий оператор

$$Au = f$$

$$\tilde{A}u = \tilde{f}$$

Будем считать  $A$  точно,  $f$  с погрешностью  $\bar{f}$  - точная правая часть,  $\tilde{f}_\delta$  - приближенная правая часть ( $\delta$  знаем).

Будем считать расстояние  $\rho_F(\bar{f}, \tilde{f}_\delta) \leq \delta$ .

Оператор  $R(f, \tilde{f})$  называется регуляризирующим для уравнения в окрестности  $\bar{f}$  если:

1. Оператор  $R$  определён  $\forall \tilde{f}_\delta \in F$ , где  $\delta$  лежит:

$$0 \leq \delta \leq \delta_0, \quad \delta_0 \text{ предельное значение,} \quad a \leq \alpha \leq \alpha_0 \quad \text{некий параметр } \alpha.$$

2.  $\exists$  такая зависимость  $\alpha = \alpha(x)$ , что  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(x)$

как расстояние  $\rho_F(\tilde{f}_\delta, \bar{f}) \leq \delta(\varepsilon)$ ,  $\rho_Y(\tilde{y}_\alpha, \bar{y}) < \varepsilon$ .

$\tilde{y}_\alpha = R(f_\delta, \alpha(\delta))$ . Некоторая устойчивость. Когда  $\delta \rightarrow 0$ , то и  $\alpha \rightarrow 0$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

$\alpha$  - параметр регуляризации. С чего  $\alpha = \alpha(\delta)$ ? - Ищите сами. Это общее определение. Иногда  $R$  нельзя построить.

### 8.1.3. Основные определения: псевдорешение, нормальное решение, сглаживающий функционал

1. Классическое (точное) решение  $Au = f$  называется такое  $\tilde{y}$ , что  $\|A\tilde{y} - f\|_F = 0$  (невязка равна 0).

2. Псевдо решение наз-ся  $y_1$ , когда оно  $\|Ay_1 - f\|_F$  минимизирует невязку.  
(их может быть много).
3. Нормальное решение наз-ся  $y_0$ , которое минимизирует ещё и  $\|y\|_Y$ .

◁ случай метода регуляризации Тихонова.

◁  $Ay = f, y \in F, f \in F, Y, F$  - гильбертовы.

$A$  - оператор вполне непрерывный.

Вместо точного решения  $A$  и точного  $f$ , известно  $\tilde{A}, \tilde{f}$  - приближенные.

Но мы знаем норму:  $\|\tilde{f} - f\| \leq \delta$

$$\|\tilde{A} - A\| \leq \varepsilon$$

◁  $\tilde{A}u = \tilde{f}$  - появилась некорректность.

◁ Сглаживающий функционал Тихонова:

$$\Phi_\alpha[y, \tilde{f}] = \|\tilde{A}y - \tilde{f}\|_F^2 + \alpha\Omega(y),$$

$\Omega$  - неотрицательный стабилизирующий функционал.

Чаще всего берут  $\Omega[y] = \|y\|_Y^2$

## 8.2. Задача минимизации сглаживающего функционала

Задача: минимизировать функционала Тихонова.

$$\Phi_\alpha[y, \tilde{f}] = \|\tilde{A}y - \tilde{f}\|_F^2 + \alpha\|y\|_Y^2.$$

Найти такой  $y_\alpha$ , что:

$$\Phi_\alpha[y_\alpha, \tilde{f}] = \inf_{y \in Y} \Phi_\alpha[y, \tilde{f}].$$

Эта задача имеет ! решение этого функционала.

**Как решать?**

Любые способы: множители Лагранжа, численно минимизировать функционал (градиентные методы).

### 8.2.1. Уравнение Эйлера

◀ Построение уравнения Эйлера

Когда мы ◀ метод Ритца вместо  $Ay = f$  находили минимум

$J(y) = (Ay, y) - 2(f, y)$  – это уравнение Эйлера.

### 8.3. Метод регуляризации для решения инт. ур-в. Фредгольма 1 рода

По аналогии с тем для функционала Тихонова:

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha[y, \tilde{f}] &= (\tilde{A}y - \tilde{f}, \tilde{A}y - \tilde{f}) + \alpha(y, y) = \\&= (\tilde{A}y, \tilde{A}y) - (\tilde{A}y, \tilde{f}) - (\tilde{f}, \tilde{A}y) + (\tilde{f}, \tilde{f}) + \alpha(y, y) = \\&= (\tilde{A}^* \tilde{A}y, y) - 2(\tilde{A}y, \tilde{f}) + (\tilde{f}, \tilde{f}) + \alpha(y, y) = \\&= (\tilde{A}^* \tilde{A}y, y) - 2(\tilde{A}^* \tilde{f}, y) + (\tilde{f}, \tilde{f}) + \alpha(y, y) = \\&= (\tilde{A}^* \tilde{A}y + \alpha y, y) - 2(\tilde{A}^* \tilde{f}, y) + (\tilde{f}, \tilde{f}) \quad (*)\end{aligned}$$

$Ay = f$ .

Было:  $J(y) = (Ay, y) - 2(f, y)$ .

Попробуем для \*

$(\tilde{f}, \tilde{f})$  – (const.) пропадёт.

Сравним:

$\tilde{A}^* \tilde{A}y + \alpha y = \tilde{A}^* \tilde{f}$  – уравнение Эйлера.

Вместо min, ур-в Эйлера. В литературе

$\alpha y + \tilde{A}^* \tilde{A}y = \tilde{A}^* \tilde{f}$ . ( $A$  - оператор Фредгольма.)

Это уже уравнение 2-го рода Фредгольма. Сведение 1-го к уравнению рода 2-го - их умеем. Можно показать, что решение  $y_\alpha$  ещё и будет нормальным.



$\|\tilde{A}y - \tilde{f}\|_F^2 + \alpha\|y\|_Y^2$  — условно  $\min$  невязку при  $\min$  нормального решения.

$$\alpha y_\alpha + \tilde{A}^* \tilde{A} y_\alpha = \tilde{A}^* \tilde{f}.$$

Компакты берут монотонные  $\nearrow, \searrow$  функции.

Как искать  $\alpha$ ?

Есть связь  $\alpha = \alpha(\delta)$ .

#### 8.4. Определение параметра регуляризации по невязке

◄ Определение по невязке.  $Au = \tilde{f}_\delta$

Мы знаем ограничение  $\delta$  - это данные о погрешности пробора.

**Задача:** Найти  $\alpha = \alpha(\delta_0)$ , которую так, чтобы  $R[f, a(\delta)]$  - был регуляризирующий.

Считаем вместо  $f$  есть  $\tilde{f}_\delta$

$$\|\tilde{f}_\delta - f\|_F \leq \delta.$$

Опр. параметр  $\alpha$  по невязке. Главное уравнение для поры:

$$\|Ay_\alpha - \tilde{f}_\delta\| = \delta \quad - \text{это нелинейное уравнение.}$$

Можно решать метод Ньютона, скорость сходимости - секунды.

Строится некоторая монотонная последовательность чисел:  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$

Например:  $\alpha_k = \alpha_0 q^k, \quad q > 0$ .

Для каждого  $\alpha_k$  ищется решение  $y_{\alpha_k}$  задачи  $\min$  функционала  $\Phi_{\alpha_k} [y, \tilde{f}_\delta]$

Наименьший  $\alpha_k$  - ставим в  $\|Ay_\alpha - \tilde{f}_\delta\| = \delta$ .

Считаем саму невязку:

$$\|Ay_{\alpha_k} - \tilde{f}_\delta\| \quad \text{для каждого.}$$

В качестве искомого  $y_{\alpha_{k_0}}$  при котором  $\|Ay_{\alpha_{k_0}}\| \approx \delta$  ближе всего к  $\delta$ .

Не так для интегральных уравнений, но и для плохо обусловленных матриц.  $A$  - плохая.

$Ay = f$ . Домножаем на  $A^*$

$A^*Ay = A^*f$  — симметрич.  $> 0$ .

(\*)  $[\alpha y + A^*Ay = A^*f]$

Так же  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

(\*) - любым методом, а останавливаемся на лучшем min.