Министерство высшего и профессионального образования
Российской Федерации
Дальневосточный государственный университет

МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ
Методические указания

Владивосток
Издательство Дальневосточного университета
1998

УДК 519.63

Рассматривается один из методов численного решения задач математической физи ки - метод сплайн-коллокации. Излагаются пути его применения на основе кубически сплайнов для основных типов дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и частных производных.

Рекомендуется студентам старших курсов математических и физических факультетов

Методические указания подготовленны кафедрой компьютерных технологий. Печата ется по решению учебно-методического Совета ДВГУ.

Составитель А.Г. Колобов

Введение

Наряду с методами конечных разностей для численного решения задач математической физики в последнее время широко применяется метод сплайн-коллокации, в первую очередь благодаря хорошим аппромаксиационным свойствам сплайнов. Метод коллокации заключается в том, что решение краевой задачи для дифференциального уравнения отыскивается в виде заданной функции, содержащей произвольные параметры. Последние определяются из условий выполнения уравнения и граничных условий не всюду, а лишь в некоторых точках, называемых узлами коллокации.

Традиционно метод коллокации строился на основе аппарата приближения многочленами [1,2]. Однако в силу сложности реализации, а также не вполне удовлетворительных аппроксимационных свойств многочленов этот метод представляет чисто теоретический интерес. На практике он оказался полностью вытесненным конечно-разностными методами.

Метод сплайн-коллокации основывается на аппроксимации сплайн-функциями и свободен от недостатков своего предшественника. Он сравним с традиционными методами конечных разностей и конечных элементов по своей алгоритмической простоте и дает приближенное решение сразу во всей рассматриваемой области, где ищется само решение. Это позволяет получить гораздо более полную информацию о точном решении.

1. Понятие о методе сплайн-коллокации

Рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$L[y(x)] \equiv y''(x) + p(x)\cdot y'(x) + q(x)\cdot y(x) = r(x), \qquad x \in [a,b], \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot y(a) + \beta_1 \cdot y'(a) &= \gamma_1, \\ \alpha_2 \cdot y(b) + \beta_2 \cdot y'(b) &= \gamma_2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь

$$\beta_1 \le 0, \quad \beta_2, \alpha_j \ge 0, \quad |\alpha_j| + |\beta_j| \ne 0, \quad j = 1,2, \quad q(x) \le q < 0. \tag{1.3}$$

Введем на $[a,b]$ сетку $\Delta_x: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \ h_i = x_{i+1} - x_i$. Будем искать приближенное решение задачи (1.1), (1.2) в виде кубического сплайна $S(x) \in C^2$ с узлами на сетке Δ_x.

Потребуем, чтобы сплайн $S(x)$ удовлетворял уравнению (1.1) в точках $\xi_k \in [a,b]$, $k = 0,...,N$ (условия коллокации), и краевым условиям (1.2):

$$L[S(\xi_k)] \equiv S''(\xi_k) + p(\xi_k)\cdot S'(\xi_k) + q(\xi_k)\cdot S(\xi_k) = r(\xi_k), \tag{1.4}$$

$$\alpha_1 \cdot S(a) + \beta_1 S'(a) = \gamma_1, \qquad \alpha_2 \cdot S(b) + \beta_2 \cdot S'(b) = \gamma_2. \tag{1.5}$$

Соотношения (1.4),(1.5) представляют собой систему алгебраических уравнений относительно параметров сплайна. Точки ξ_k называются узлами коллокации. Их количество определяется размерностью пространства сплайнов класса C^2, которая, как мы знаем, равна $N+3$. Так как $S(x)$ удовлетворяет двум граничным условиям (1.5), то количество узлов коллокации должно быть равно $N+1$. Их расположение на отрезке $[a,b]$ не может быть произвольным. Так, например, на любом из промежутков $[x_i, x_{i+1}]$ не должно быть больше трех узлов коллокации. В противном случае сплайн $S(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$ определялся бы независимо от других промежутков и, в частности, независимо от граничных условий. Ясно, что такой сплайн не имеет никакого отношения к решению задачи (1.1),(1.2). Кроме того, очевидно, в качестве узлов коллокации не могут быть взяты точки, в которых коэффициенты уравнения (1.1) имеют особенности. В дальнейшем предполагаем, что узлы коллокации упорядоченны: $\xi_0 < \xi_1 < ... < \xi_N$. Конкретный вид системы (1.4),(1.5) зависит от выбранного способа представления сплайна $S(x)$ и от расположения узлов коллокации.

Возможны различные пути применения метода сплайн-коллокации. Один из них - средство построения разностных схем [3]. Такие схемы имеют одинаковый порядок точности на равномерных и неравномерных сетках и дают высокую точность аппроксимации граничных условий любого вида.

Однако этот подход не исчерпывает всех возможностей, заложенных в методе сплайн-коллокации. Наиболее полно они могут быть реализованы только при выборе в качестве базиса пространства сплайнов функций с конечными носителями, так называемых нормализованных B-сплайнов. В этом методе можно использовать разные типы сплайнов - кубические класса C^2, более высокой степени, эрмитовы, дискретные и так далее. Однако именно на основе кубических сплайнов класса C^2 удается построить алгоритмы, наиболее простые по реализации и в то же время пригодные для решения широкого круга задач.

Исследуем метод сплайн-коллокации применительно к четырем задачам математической физики:

1) краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнеия второго порядка (задача I),

2) задача Дирихле для уравнения Пуассона (задача II),

3) одномерное уравнение теплопроводности (задача III),

4) двумерное однородное уравнение колебаний (задача IV).

Во всех четырех случаях узлы коллокации будем выбирать совпадающими с узлами сплайна $\xi_i = x_i, \quad i = 0, ..., N$.

2. Решение задачи I

Пусть требуется найти решение задачи (1.1),(1.2). Представим кубический сплайн $S(x)$ в виде разложения по базису из нормализованных кубических В-сплайнов:

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} b_i \cdot B_i(x). \tag{2.1}$$

Здесь

$$B_i(x) = \frac{1}{6}\begin{cases} 0, & x < x_{i-2}, \\ t^3, & x_{i-2} \le x \le x_{i-1}, \\ 1 + 3t + 3t^2(1-t), & x_{i-1} \le x \le x_i, \\ 1 + 3(1-t) + 3t(1-t)^2, & x_i \le x \le x_{i+1}, \\ (1-t)^3, & x_{i+1} \le x \le x_{i+2}, \\ 0, & x > x_{i+2}, \end{cases}$$

$$t = (x - x_i)/h.$$

Чтобы все базисные функции в (2.1) были определены, сетка Δ_x должна быть дополнена узлами $x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0, \quad x_{N+3} > x_{N+2} > x_{N+1} > x_N$. Для дальнейшего удобно выбирать их так, чтобы выполнялись условия

$$h_{-j} = h_{j-1}, \qquad h_{N-1+j} = h_{N-j}, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{2.2}$$

Подставляя (2.1) в (1.4), получаем:

$$b_{i-1}L[B_{i-1}(x_i)] + b_iL[B_i(x_i)] + b_{i+1}L[B_{i+1}(x_i)] = r_i, \qquad i = 0, ..., N.$$

Если учесть выражение для узловых значений В-сплайна и его производных (таблица 1), то эти уравнения можно записать в виде

$$b_{i-1}A_i + b_iC_i + b_{i+1}B_i = D_i, \qquad i = 0, ..., N, \tag{2.3}$$

x	$B_i(x)$	$B_i'(x)$	$B_i''(x)$
x_{i-2}	0	0	0
x_{i-1}	$\frac{h_{i-2}^2}{(x_i-x_{i-2})(x_{i+1}-x_{i-2})}$	$\frac{3h_{i-2}}{(x_i-x_{i-2})(x_{i+1}-x_{i-2})}$	$\frac{6}{(x_i-x_{i-2})(x_{i+1}-x_{i-2})}$
x_i	$1-\frac{1}{x_{i+1}-x_{i-1}}\cdot$	$\frac{3}{x_{i+1}-x_{i-1}}\cdot$	$-\frac{6}{x_{i+1}-x_{i-1}}\cdot$
	$\cdot\left(\frac{h_i^2}{x_{i+1}-x_{i-2}}+\frac{h_{i-1}^2}{x_{i+2}-x_{i-1}}\right)$	$\cdot\left(\frac{h_i}{x_{i+1}-x_{i-2}}-\frac{h_{i-1}}{x_{i+2}-x_{i-1}}\right)$	$\cdot\left(\frac{1}{x_{i+1}-x_{i-2}}+\frac{1}{x_{i+2}-x_{i-1}}\right)$
x_{i+1}	$\frac{h_{i+1}^2}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i-1})}$	$-\frac{3h_{i+1}}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i-1})}$	$\frac{6}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i-1})}$
x_{i+2}	0	0	0

Таблица 1.

где

$$A_i = \frac{1}{x_{i+1} - x_{i-2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p_i h_i + \frac{1}{6}q_i h_i^2\right),$$

$$B_i = \frac{1}{x_{i+2} - x_{i-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}p_i h_{i-1} + \frac{1}{6}q_i h_{i-1}^2\right),$$

$$C_i = -A_i - B_i + \frac{1}{6}q_i(h_i + h_{i-1}), \qquad D_i = \frac{1}{6}r_i(h_i + h_{i-1}).$$

Из уравнений (1.5) с учетом условий (2.2)получаем:

$$\begin{aligned} b_{-1}A_{-1} + b_0 C_{-1} + b_1 B_{-1} &= D_{-1}, \\ b_{N-1}A_{N+1} + b_N C_{N+1} + b_{N+1}B_{N+1} &= D_{N+1}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $A_{-1} = \alpha_1 h_0 - 3\beta_1$, $C_{-1} = 2\alpha_1(h_1 + h_0)$, $B_{-1} = \alpha_1 h_0 + 3\beta_1$, $A_{N+1} = \alpha_2 h_{N-1} - 3\beta_2$, $C_{N+1} = 2\alpha_2(h_{N-2} + h_{N-1})$, $B_{N+1} = \alpha_2 h_{N-1} + 3\beta_2$, $D_{-1} = 2\gamma_1(2h_0 + h_1)$, $D_{N+1} = 2\gamma_2(2h_{N-1} + h_{N-2})$.

Уравнения (2.3),(2.4) образуют систему $N+3$ уравнений относительно $N+3$ неизвестных b_i. Исключив с помощью уравнений (2.4) неизвестные b_{-1} и b_{N+1} из (2.3) (это всегда можно сделать при выполнении условий (1.3)), приходим к системе с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{gathered} b_0\tilde{C}_0 + b_1\tilde{B}_0 = \tilde{D}_0, \\ b_{i-1}A_{i-1} + b_i C_i + b_{i+1}B_i = D_i, \qquad i = 1, ..., N-1, \\ b_{N-1}\tilde{A}_N + b_N\tilde{C}_N = \tilde{D}_N, \end{gathered} \tag{2.5}$$

где

$$\tilde{C}_0 = C_0 - \frac{C_{-1}A_0}{A_{-1}}, \qquad \tilde{B}_0 = B_0 - \frac{B_{-1}A_0}{A_{-1}}, \qquad \tilde{D}_0 = D_0 - \frac{D_{-1}A_0}{A_{-1}},$$

$$\tilde{A}_N = A_N - \frac{A_{N+1}B_N}{B_{N+1}}, \qquad \tilde{C}_N = C_N - \frac{C_{N+1}B_N}{B_{N+1}}, \qquad \tilde{D}_N = D_N - \frac{D_{N+1}B_N}{B_{N+1}}$$

При выполнении условий (1.3) и достаточно малых h_i таких, что

$$1 - \frac{1}{2}p_i h_i + \frac{1}{6}q_i h_i^2 \geq 0, \qquad 1 + \frac{1}{2}p_i h_{i-1} + \frac{1}{6}q_i h_{i-1}^2 \geq 0, \tag{2.6}$$

система (2.5) с диагональным преобладанием. Для уравнений это непосредственно следует из формул для коэффициентов A_i, B_i, C_i. Для первого и последнего уравнений в этом нетрудно убедиться, если принять во внимание (2.2).

В итоге реализация метода сплайн-коллокации сводится к вычислению коэффициентов $b_0, ..., b_N$ из системы (2.5) и последующему определению b_{-1}, b_{N+1} из уравнений (2.4).

Теорема. *Если выполнены условия* (1.3),(2.6) *и* $y(x) \in C^2W^4_{\Delta,\infty}[a,b]$,*то*

$$\|S(x) - y(x)\|_c = O(\bar{h}^2). \tag{2.7}$$

Здесь

$$\bar{h} = \max_i h_i,$$

а обозначение $C^2W^4_{\Delta,\infty}[a,b]$ *используется для класса функций* $f(x)$, *удовлетворяющих условиям*

$$f(x) \in C^2[a,b], \qquad f(x) \in W^4_\infty[x_i, x_{i+1}], \qquad i = 0, ..., N-1.$$

Дсказательство данной теоремы приведено в [3].

3. Решение задачи II

Рассмотрим приближенное решение уравнения Пуассона в прямоугольной области $\Omega = [a,b] \times [c,d]$

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{3.1}$$

с граничным условием

$$u|_\Gamma = g(x,y), \tag{3.2}$$

где функция $g(x,y)$ определена на Γ.

В Ω введем сетку $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$, где $\Delta_x : a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$, $\Delta_y : c = y_0 < y_1 < ... < y_M = d$. Обозначим $h_i = x_{i+1} - x_i$, $l_j = y_{j+1} - y_j$. Дополним сетку Δ_x узлами x_i, $i = -1, -2, -3, N+1, N+2, N+3$ (см. п.2) и на расширенной сетке построим множество кубических B-сплайнов $B_i(x), i = -1, ..., N+1$. Аналогичным образом дополняется сетка Δ_y и строится множество B-сплайнов $\bar{B}_j(y)$, $j = -1, ..., M+1$. Всевозможные пары $B_i(x) \cdot \bar{B}_j(y)$ образуют базис множества бикубических сплайнов в области Ω.

Будем искать решение задачи (3.1)-(3.2) в виде

$$S(x,y) = \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} \beta_{ij} B_i(x) \bar{B}_j(y). \tag{3.3}$$

Используем также представления

$$S(x,y) = \sum_{i=-1}^{N+1} \bar{\alpha}_i(y) B_i(x), \qquad \bar{\alpha}_i(y) = \sum_{j=-1}^{M+1} \beta_{ij} \bar{B}_j(y), \tag{3.4}$$

$$S(x,y)=\sum_{j=-1}^{M+1}\alpha_j(x)\bar{B}_j(y), \qquad \alpha_j(x)=\sum_{i=-1}^{N+1}\beta_{ij}B_i(x). \tag{3.5}$$

Функцию u аппроксимируем бикубическим сплайном двух переменных. Значения сплайнов в точках (x_i, y_j) обозначим u_{ij}. Аналогично будем обозначать и их частные производные, а также $\alpha, \bar{\alpha}$.

Решение уравнения (3.1) строится с помощью итерационного метода установления по фиктивному времени с использованием двухшаговой схемы переменных направлений, которая записывается в следующем виде:

$$u_{ij}^{\nu+\frac{1}{2}}=u_{ij}^{\nu}+\frac{\Delta\tau}{2}\cdot\left[(u_{xx})_{ij}^{\nu}+(u_{yy})_{ij}^{\nu+\frac{1}{2}}+f_{ij}\right], \tag{3.6}$$

$$u_{ij}^{\nu+1}=u_{ij}^{\nu+\frac{1}{2}}+\frac{\Delta\tau}{2}\cdot\left[(u_{xx})_{ij}^{\nu+1}+(u_{yy})_{ij}^{\nu+\frac{1}{2}}+f_{ij}\right], \tag{3.7}$$

Здесь $\Delta\tau$ - шаг сетки фиктивного времени $\Delta_\tau : \{\tau_\nu : \tau_\nu = \Delta\tau\cdot\nu,\ \ \nu = 0,1,...\}$, верхний индекс означает соответствующий момент времени.

На первом полушаге (3.6) используем представление (3.5), на втором полушаге (3.7) - представление (3.4). Вследствии финитности B-сплайнов имеем:

$$u_{ij}^{\nu+\frac{1}{2}}=\sum_{q=-1}^{1}\alpha_{i,j+q}^{\nu+\frac{1}{2}}\cdot\bar{B}_{j+q}(y_j),$$

$$(u_{yy})_{ij}^{\nu+\frac{1}{2}}=\sum_{q=-1}^{1}\alpha_{i,j+q}^{\nu+\frac{1}{2}}\cdot\bar{B}''_{j+q}(y_j), \tag{3.8}$$

$$u_{ij}^{\nu+1}=\sum_{r=-1}^{1}\bar{\alpha}_{i+r,j}^{\nu+1}\cdot B_{i+r}(x_i),$$

$$(u_{xx})_{ij}^{\nu+1}=\sum_{r=-1}^{1}\bar{\alpha}_{i+r,j}^{\nu+1}\cdot B''_{i+r}(x_i). \tag{3.9}$$

Введем операторы вычисления значений кубических сплайнов и их производных в узлах сетки:

$$(T_1^{(K)}\bar{\alpha})_{ij}^{\nu}=\sum_{r=-1}^{1}\bar{\alpha}_{i+r,j}^{\nu}\cdot B_{i+r}^{(K)}(x_i), \tag{3.10}$$

$$(T_2^{(K)}\alpha)_{ij}^{\nu}=\sum_{q=-1}^{1}\alpha_{i,j+q}^{\nu}\cdot\bar{B}_{j+q}^{(K)}(y_j). \tag{3.11}$$

Тогда схему (3.6),(3.7) можно переписать в виде

$$(T_2^{(0)}\alpha)_{ij}^{\nu+\frac{1}{2}}-\frac{\Delta\tau}{2}\cdot(T_2^{(2)}\alpha)_{ij}^{\nu+\frac{1}{2}}=(T_1^{(0)}\bar{\alpha})_{ij}^{\nu}+\frac{\Delta\tau}{2}\cdot(T_1^{(2)}\bar{\alpha})_{ij}^{\nu}+\frac{\Delta\tau}{2}\cdot f_{ij}, \tag{3.12}$$

$$(T_1^{(0)}\bar{\alpha})_{ij}^{\nu+1} - \frac{\Delta\tau}{2}\cdot(T_1^{(2)}\bar{\alpha})_{ij}^{\nu+1} = (T_2^{(0)}\alpha)_{ij}^{\nu+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\tau}{2}\cdot(T_2^{(2)}\alpha)_{ij}^{\nu+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\tau}{2}\cdot f_{ij}, \qquad (3.13)$$

Добавим к схеме (3.12),(3.13) граничные условия (3.2), которые, с учетом (3.10),(3.11), примут вид

$$(T_2^{(0)}\alpha)_{ij}^{\nu+\frac{1}{2}} = g_{ij}, \qquad i = 0, ..., N, \quad j = 0, M, \qquad (3.14)$$

$$(T_1^{(0)}\bar{\alpha})_{ij}^{\nu+1} = g_{ij}, \qquad i = 0, N, \quad j = 0, ..., M, \qquad (3.15)$$

Исключая в системе (3.12),(3.14) неизвестные $\alpha_{i,-1}^{\nu+\frac{1}{2}}$, $\alpha_{i,M+1}^{\nu+\frac{1}{2}}$, $i = 0, ..., N$, а в системе (3.13),(3.15) неизвестные $\bar{\alpha}_{-1,j}^{\nu+1}, \bar{\alpha}_{N+1,j}^{\nu+1}$, $j = 0, ..., M$, приходим к системам линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами, которые решаются методом подгонки.

Процесс установления заканчивается, когда

$$\max(\max_{i,j}|\alpha_{ij}^{\nu} - \alpha_{ij}^{\nu+1}|, \max_{i,j}|\bar{\alpha}_{ij}^{\nu} - \bar{\alpha}_{ij}^{\nu+1}|) < \varepsilon.$$

Используя (3.4),(3.5), легко вычислить значения функции и ее производных в любой точке области Ω.

Замечание. В работе [4] представлена схема метода сплайн-коллокации, когда решение ищется в виде (3.3). Для определения коэффициентов β получается схема на девятиточечном шаблоне. Реализовать ее можно с помощью какого-либо прямого метода решения сеточных уравнений, например, метода матричной подгонки.

Исследование вопросов, связанных с разрешимостью схемы, аппроксимацией, устойчвостью, проведем для случая равномерной сетки $h_i = h$, $l_j = l$.

Вычислив элементы матриц систем, мы легко установим наличие диагонального преобладания в них. Следовательно, они не выроždены, и системы разрешимы.

Пусть $\bar{S}^{\nu}(x,y)$ - бикубический сплайн, интерполирующий при каждом τ_{ν} решение задачи (3.1),(3.2) на сетке Δ, то есть

$$\bar{S}^{\nu}(x_i, y_j) = u^{\nu}(x_i, y_j), \qquad i = 0, .., N, \quad j = 0, ..., M.$$

Погрешность приближенного решения $u^{\nu}(x,y)$ сплайном $S^{\nu}(x,y)$, построенным по схеме (3.6),(3.7), оценим с помощью неравенства

$$|S^{\nu}(x,y) - u^{\nu}(x,y)| \leq \left|S^{\nu}(x,y) - \bar{S}^{\nu}(x,y)\right| + \left|\bar{S}^{\nu}(x,y) - u(x,y)\right|. \qquad (3.16)$$

Второе слагаемое в правой части (3.16) можно оценить, используя известные результаты о погрешности интерполяции бикубическими сплайнами [3, стр.138]. Для оценки первого слагаемого введем операторы:

$$\Lambda_1 S^{\nu} = S_{xx}^{\nu}(x,y),$$

$$\Lambda_2 S^\nu = S^\nu_{yy}(x,y),$$

$$\Lambda S^\nu = \Lambda_1 S^\nu + \Lambda_2 S^\nu.$$

Тогда схему (3.6),(3.7) в целых шагах можно записать в виде

$$\frac{S^{\nu+1}_{ij} - S^\nu_{ij}}{\Delta\tau} - \left[\Lambda\left(\frac{S^{\nu+1}+S^\nu}{2}\right)\right]_{ij} + \left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^2 \cdot \left[\Lambda_2\Lambda_1\left(\frac{S^{\nu+1}-S^\nu}{\Delta\tau}\right)\right]_{ij} + F_{ij} = 0.$$

Обозначим:

$$\varepsilon^\nu_{ij} = \frac{\bar S^{\nu+1}_{ij} - \bar S^\nu_{ij}}{\Delta\tau} - \left[\Lambda\left(\frac{\bar S^{\nu+1}+\bar S^\nu}{2}\right)\right]_{ij} + \left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^2 \cdot \left[\Lambda_2\Lambda_1\left(\frac{\bar S^{\nu+1}-\bar S^\nu}{\Delta\tau}\right)\right]_{ij} + F_{ij}.$$

Будем говорить, что схема аппроксимирует с погрешностью $O(h^m + l^k + (\Delta\tau)^\rho)$, если

$$\|\varepsilon^\nu\| = \max_{i,j}|\varepsilon^\nu_{ij}| = O(h^m + l^k + (\Delta\tau)^\rho).$$

На границе области $|\varepsilon^\nu| = 0$.

Предположим, что при фиксированном τ решение $u^\nu(x,y) \in C^{4,4}[\Omega]$ и имеет ограниченные производные по t до третьего порядка включительно. Тогда, учитывая теорему об оценке погрешности интерполяции [3], находим

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u^{\nu+1}_{ij} - u^\nu_{ij}}{\Delta\tau} - \left[\Lambda\left(\frac{u^{\nu+1}+u^\nu}{2}\right)\right]_{ij} + \left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)^2 \cdot \left[\Lambda_2\Lambda_1\left(\frac{u^{\nu+1}-u^\nu}{\Delta\tau}\right)\right]_{ij} + F_{ij} + O(h^2+l^2).$$

Заменяя величины, вычисленные при $\tau = \tau_{\nu+1}$ по формуле Тейлора в точке $\tau = \tau_\nu$, получим $\varepsilon^\nu_{ij} = O(h^2 + l^2 + (\Delta\tau)^2)$ и, следовательно, схема (3.6),(3.7) имеет второй порядок аппроксимации.

Доказательство устойчивости схемы приведено в [5]. Здесь его опускаем ввиду громоздкости. Заметим только, что устойчивость схемы показана в энергетической норме, порожденной операторами (3.10),(3.11), аналогично доказательству устойчивости схем расщепления для нестационарных задач [6].

4. Решение задачи III

Рассмотрим в прямоугольной области $D = \{a \le x \le b, \ \ 0 \le t \le T\}$ одномерное уравнение теплопроводности с непрерывными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = u^0(x), \tag{4.2}$$

$$l_1 u = \varphi(t), \quad l_2 u = \Psi(t), \tag{4.3}$$

где

$$Lu = K(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - q(x)u,$$

$$l_1 u = \gamma_1 u(a,t) + \beta_1 \cdot \frac{\partial u(a,t)}{\partial x},$$

$$l_2 u = \gamma_2 u(b,t) + \beta_2 \cdot \frac{\partial u(b,t)}{\partial x}.$$

Функции $K(x)$, $r(x)$, $q(x)$, $\varphi(t)$, $\Psi(t)$ - непрерывные, $K(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ при$x \in [a,b]$, $\gamma_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$, $i = 1,2$, $\beta_1 \leq 0$, $\gamma_1, \gamma_2, \beta_2 \geq 0$.

Предполагается, что задача (4.1)-(4.3) имеет единственное решение $u(x,t)$, имеющее как минимум две непрерывные производные по x. Дополнительные требования к гладкости решения будем оговаривать отдельно. Коэффициенты K, r, q не зависят от t, а $\gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2$ - константы. Это ограничение несущественно. Ниже будут отмечены те изменения, которые вносятся в расчетные формулы, если указанные величины зависят от t.

В области D введем сетку $\Delta = \Delta_x \times \Delta_t$, где $\Delta_t : t_n = r \cdot n,\ n = 0, 1, ..., \Delta_x : a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$. Обозначим $h_i = x_{i+1} - x_i$. Дополним сетку Δ_x узлами $x_i, i = -1, -2, -3, N+1, N+2, N+3$ (см. п.2) и на расширенной сетке построим множество кубических B-сплайнов $B_i(x)$, $i = -1, ..., N+1$.

Будем искать приближенное решение задачи (4.1)-(4.3) в виде

$$S(x,t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \alpha_j(t) B_j(x). \tag{4.4}$$

Пусть $S(x,t)$ при $t = 0$ интерполирует $u^0(x)$ на Δ_x, то есть

$$S(x_i, 0) = u^0(x_i), \quad i = 0, ..., N. \tag{4.5}$$

Потребуем, чтобы при всех $t > 0$ $S(x,t)$ удовлетворял граничным условиям (4.3)

$$l_1 S = \varphi(t), \qquad l_2 S = \Psi(t), \tag{4.6}$$

и уравнению (4.1) в узлах сетки Δ_x (условия коллокации)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} - LS - f(x,t) \right) \Big|_{x=x_i} = 0, \qquad i = 0, ..., N. \tag{4.7}$$

Подставляя (4.4) в (4.5)-(4.7), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $\alpha_j(t)$, $j = -1, ..., N+1$. Для численного решения системы заменим в ней производную по t разделенной разностью и рассмотрим схему с весом:

$$\frac{S_i^n - S_i^{n-1}}{\tau} = \sigma(LS)_i^n + (1-\sigma)(LS)_i^{n-1} + \bar{f}_i^n, \qquad i = 0, ..., N, \tag{4.8}$$

$$(l_1 S)^n = \varphi^n, \qquad (l_2 S)^n = \Psi^n, \tag{4.9}$$

$$S_i^0 = u_i^0, \qquad i = 0, ..., N, \tag{4.10}$$

где $\delta \in (0,1]$ - параметр схемы, $\bar{f}_i^n = \sigma f_i^n + (1-\sigma) f_i^{n-1}$ или $\bar{f}_i^n = f(x_i, (n - \frac{1}{2}) \cdot \tau)$. Верхние индексы $n, n-1$ означают, что функции вычисляются соответственно при $t = t_n$, $t = t_{n-1}$. Нижний индекс i означает вычисление в узле x_i.

Уравнения (4.8)-(4.10) на n-ом слое представляют собой систему $N+3$ уравнений относительно $N+3$ неизвестных $\alpha_{-1}^n, \alpha_0^n, ..., \alpha_{N+1}^n$. Учитывая свойства B-сплайнов [3], можно записать ее в виде

$$d_1 \alpha_{-1}^n + (\gamma_1 - d_1 - d_2)\, \alpha_0^n + d_2 \alpha_1 = \varphi^n, \tag{4.11}$$

$$a_i(\sigma) \alpha_{i-1}^n + c_i(\sigma) \alpha_i^n + b_i(\sigma) \alpha_{i+1}^n = F_i^n, \quad i = 0, ..., N, \tag{4.12}$$

$$d_4 \alpha_{N-1}^n + (\gamma_2 - d_3 - d_4)\, \alpha_N^n + d_3 \alpha_{N+1}^n = \Psi^n, \tag{4.13}$$

где

$$d_1 = \gamma_1 B_{-1}(x_0) + \beta_1 B'_{-1}(x_0), \qquad d_2 = \gamma_1 B_1(x_0) + \beta_1 B'_1(x_0),$$

$$d_3 = \gamma_2 B_{N+1}(x_N) + \beta_2 B'_{N+1}(x_N), \qquad d_4 = \gamma_2 B_{N-1}(x_N) + \beta_2 B'_{N-1}(x_N),$$

$$a_i(\sigma) = B_{i-1}(x_i) \cdot \left[1 + \tau\sigma q_i - \frac{6\tau\sigma}{h_i^2} \left(K_i - \frac{h_i r_i}{2} \right) \right],$$

$$b_i(\sigma) = B_{i+1}(x_i) \cdot \left[1 + \tau\sigma q_i - \frac{6\tau\sigma}{h_{i-1}^2} \left(K_i - \frac{h_{i-1} r_i}{2} \right) \right],$$

$$c_i(\sigma) = 1 + \tau\sigma q_i - a_i(\sigma) - b_i(\sigma),$$

$$F_i^n = a_i(\sigma - 1) \cdot \alpha_{i-1}^{n-1} + c_i(\sigma - 1) \alpha_i^{n-1} + b_i(\sigma - 1) \alpha_{i+1}^{n-1} + \tau \bar{f}_i^n.$$

Исключив в системе (4.11)-(4.13) неизвестные $\alpha_{-1}^n, \alpha_{N+1}^n$, приходим к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{aligned} \bar{c}_0(\sigma) \cdot \alpha_0^n + \bar{b}_0(\sigma) \cdot \alpha_1^n &= \bar{F}_0^n, \\ a_i(\sigma) \alpha_{i-1}^n + c_i(\sigma) \alpha_i^n + b_i(\sigma) \alpha_{i+1}^n &= F_i^n, \qquad i = 1, ..., N-1, \\ \bar{a}_N(\sigma) \alpha_{N-1}^n + \bar{c}_N(\sigma) \alpha_N^n &= \bar{F}_N^n. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Здесь

$$\bar{c}_0(\sigma) = c_0(\sigma) \cdot d_1 - a_0(\sigma) \cdot (\gamma_1 - d_1 - d_2),$$

$$\bar{b}_0(\sigma) = b_0(\sigma) \cdot d_1 - a_0(\sigma) \cdot d_2,$$

$$\bar{a}_N(\sigma) = a_N(\sigma) \cdot d_3 - b_N(\sigma) \cdot d_4,$$

$$\bar{c}_N(\sigma) = c_N(\sigma) \cdot d_3 - b_N(\sigma) \cdot (\gamma_2 - d_3 - d_4),$$

$$\bar{F}_0^n = F_0^n \cdot d_1 - a_0(\sigma) \cdot \varphi^n,$$

$$\bar{F}_N^n = F_N^n \cdot d_3 - b_N(\sigma) \cdot \Psi^n.$$

В целом численный алгоритм решения задачи (4.1)-(4.3) методом сплайн-коллокации состоит в следующем. Вначале находим коэффициенты α_j^0, $j = -1, ..., n+1$. Согласно (4.10) для этого нужно построить кубический сплайн, интерполирующий на сетке Δ_x функцию $u^0(x)$ [3]. Затем, последовательно, от слоя к слою из системы (4.14) вычисляются α_j^n, $j = 0, ..., N$. Величины $\alpha_{-1}^n, \alpha_{N+1}^n$ находятся из уравнений (4.11),(4.13). В итоге, на любом временном слое $t_n = \tau n$ приближенное решение представляется в виде сплайна

$$S^n(x) = S(x, t_n) = \sum_{j=-1}^{N+1} \alpha_j^n \cdot B_j(x).$$

Это позволяет вычислять приближенное решение, а также его производные по x в любых точках $x \in [a, b]$.

Заметим, что α_j^0 можно найти, используя формулы локальной аппроксимации [7]. С учетом условий (2.2) имеем:

$$\alpha_{-1}^0 = u_0^0 - h_0 (u^0)_0' + \frac{h_0^2}{3}(u^0)_0'', \qquad \alpha_0^0 = u_0^0 - \frac{h_0^2}{6}(u^0)_0'',$$

$$\alpha_j^0 = u_j^0 + \frac{1}{3(h_{j-1} + h_j)} \cdot \left[h_j^2 \cdot \frac{u_j^0 - u_{j-1}^0}{h_{j-1}} - h_{j-1}^2 \cdot \frac{u_{j+1}^0 - u_j^0}{h_j} \right],$$

$$\alpha_N^0 = u_N^0 - \frac{h_{N-1}^2}{6}(u^0)_N'', \alpha_{N+1}^0 = u_N^0 + h_{N-1}(u^0)_N' + \frac{h_{N-1}^2}{3}(u^0)_N''.$$

Построенная схема не требует изменений, если коэффициенты в (4.1), (4.3) зависят от t. Достаточно считать, что в левой части уравнений (4.11)-(4.13) эти коэффициенты вычисляются при $t = t_n$, а в правой части при $t = t_{n+1}$. Основным моментом при реализации схемы является решение системы (4.14). Выясним условия ее разрешимости. Обозначим

$$R_i(\sigma) = |c_i(\sigma)| - |a_i(\sigma)| - |b_i(\sigma)|, \qquad i = 1, ..., N-1,$$

$$R_0(\sigma) = |\bar{c}_0(\sigma)| - |\bar{b}_0(\sigma)|, \qquad R_N(\sigma) = |\bar{c}_N(\sigma)| - |\bar{a}_N(\sigma)|.$$

Используя вытекающее из тождества для B-сплайнов равенство $B_{i-1}(x_i) + B_i(x_i) + B_{i+1}(x_i) = 1$, имеем

$$c_i(\sigma) = \tau\sigma\left[\frac{6}{h_i^2}\left(K_i - \frac{h_i r_i}{2}\right)B_{i-1}(x_i) + \frac{6}{h^2{}_{i-1}}\left(K_i - \frac{h_{i-1} r_i}{2}\right)B_{i+1}(x_i)\right] +$$

$$+B_i(x_i)\cdot(1+\tau\sigma q_i), \qquad i = 0, ..., N.$$

Поэтому $c_i(\sigma) > 0$, если

$$K_i - \frac{h_i r_i}{2} \geq 0, \qquad K_i + \frac{h_{i-1} r_i}{2} \geq 0. \tag{4.15}$$

Предположим, что $a_i(\sigma) \geq 0, \;\; b_i(\sigma) \geq 0$ и выполнены неравенства (4.15). Тогда

$$R_i(\sigma) = (1+\tau\sigma q_i)\cdot[1 - 2B_{i-1}(x_i) - 2B_{i+1}(x_i)] +$$

$$+12\tau\sigma\left[\frac{B_{i-1}(x_i)}{h_i^2}\cdot\left(K_i - \frac{h_i r_i}{2}\right) + \frac{B_{i+1}(x_i)}{h_{i-1}^2}\cdot\left(K_i + \frac{H_{i-1} r_i}{2}\right)\right].$$

В [3] показано, что $1 - 2B_{i-1}(x_i) - 2B_{i+1}(x_i) > 0, \;\; i = 0, ..., N$, если

$$\rho = \max_{|i-j|=1}\frac{h_i}{h_j} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}. \tag{4.16}$$

Следовательно, при выполнении (4.15),(4.16) и $a_i(\sigma) \geq 0, \;\; b_i(\sigma) \geq 0$ имеем $R_i(\sigma) > 0, \;\; i = 1, ..., N-1$. Нетрудно проверить, что это утверждение верно и в случаях, когда $a_i(\sigma), b_i(\sigma)$ отрицательны или имеют разные знаки. Аналогично доказывается, что $R_0(\sigma) > 0$ и $R_N(\sigma) > 0$. Значит, при выполнении условий (4.15),(4.16) матрица системы (4.14) имеет диагональное преобладание, следовательно, она невырождена.

Аппроксимация схемы доказывается так же, как в п.3. Для достаточно гладких функций получается:

$$\|\varepsilon^n\| = O(H^2 + \tau^l),$$

где $l = 2$, если $\sigma = -1/2$ и $l = 1$, если

$$\sigma \neq 1/2, \;\; H = \max_i h_i.$$

Когда коэффициенты уранения (4.1) постоянны и сетка Δ_x равномерная, анализ ее устойчивости можно выполнить с помощью спектрального признака. В результате получается, что схема абсолютно устойчива по исходным данным при $\sigma \geq 1/2$.

5. Решение задачи IV

Рассмотрим двумерную однородную задачу для уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{5.1}$$

$$u\Big|_{t=0} = p(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = q(x,y) \tag{5.2}$$

$$u\Big|_{\Gamma} = g(x,y), \qquad a^2 = const,$$

$$(x,y) \in \Omega, \qquad \Omega = [a,b] \times [c,d],$$

Γ- граница области Ω.

В области Ω введем сетку $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y \times \Delta_t$ (см. п.3,4), расширим ее и на расширенной сетке построим базис множества бикубических сплайнов $B_i(x) \cdot \bar{B}_j(y)$.

Будем искать решение задачи (5.1)-(5.2) в виде

$$S(x,y,t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} \beta_{ij}(t) B_i(x) \bar{B}_j(y). \tag{5.3}$$

Используем также представления

$$S(x,y,t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \bar{\alpha}_i(y,t) \cdot B_i(x), \qquad \bar{\alpha}_i(y,t) = \sum_{j=-1}^{M+1} \beta_{ij}(t) \cdot \bar{B}_j(y), \tag{5.4}$$

$$S(x,y,t) = \sum_{j=-1}^{M+1} \alpha_j(x,t) \cdot \bar{B}_j(y), \qquad \alpha_j(x,t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \beta_{ij}(t) \cdot B_i(x). \tag{5.5}$$

Функцию u аппроксимируем бикубическим сплайном двух пространственных переменных с коэффициентами, зависящими от времени. Значения сплайнов в точках (x_i, y_j, t_n) обозначим u_{ij}^n. Аналогично обозначаются и $\alpha, \bar{\alpha}$.

Приближенное решение задачи (5.1),(5.2) строится с помощью схемы факторизации

$$\left[\left(E + \frac{1}{2}\tau^2\Lambda_1\right) \cdot \left(E + \frac{1}{2}\tau^2\Lambda_2\right) \frac{u^{n+1} + u^{n-1}}{2}\right]_{ij} = u_{ij}^n, \tag{5.6}$$

Здесь $\Lambda_1 u = -a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\Lambda_2 u = -a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Реализация этой схемы выглядит следующим образом:

$$\left(E + \frac{1}{2}\tau^2\Lambda_1\right) u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = u_{ij}^n, \tag{5.7}$$

$$\left(E + \frac{1}{2}\tau^2\Lambda_2\right) \frac{u_{ij}^{n+1} + u_{ij}^{n-1}}{2} = u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, \tag{5.8}$$

С помощью операторов вычисления сплайнов (3.10),(3.11) схему (5.7),(5.8) можно записать в виде

$$\left(T_1^{(0)}\bar{\alpha}\right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\tau^2\left(T_1^{(2)}\bar{\alpha}\right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \left(T_2^{(0)}\alpha\right)_{ij}^{n}, \tag{5.9}$$

$$\left(T_2^{(0)}\alpha\right)_{ij}^{n+1} + \frac{1}{2}\tau^2\left(T_2^{(2)}\alpha\right)_{ij}^{n+1} = 2\left(T_1^{(0)}\bar{\alpha}\right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \left[\left(T_2^{(0)}\alpha\right)_{ij}^{n-1} + \frac{1}{2}\tau^2\left(T_2^{(2)}\alpha\right)_{ij}^{n-1}\right]. \tag{5.10}$$

Добавим к схеме (5.9),(5.10) граничные условия и, аналогично п.3, придем к системам линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\alpha, \bar{\alpha}$ с трехдиагональными матрицами, которые решаются методом прогонки.

В целом численный алгоритм решения задачи (5.1),(5.2) состоит в следующем. Вначале находятся коэффициенты α_{ij}^0 аналогично п.4 (либо решением задачи интерполяции, либо с помощью формул локальной аппроксимации). Потом находим α_{ij}^1 решением задачи интерполяции для $u_{ij}^1 = p(x_i, y_j) + \tau q(x_i, y_j)$ (либо опять же по формулам локальной аппроксимации). Затем, последовательно, от слоя к слою из систем (5.9),(5.10) вычисляются α_{ij}^n. В итоге, на любом временном слое $t_n = \tau n$ мы имеем приближенное решение в виде сплайна (5.3),(5.5).

Аппроксимация схемы доказывается так же, как в п.3. Для достаточно гладких функций получается:

$$\|\varepsilon^n\| = O(H^2 + L^2 + \tau^2).$$

Относительно вопроса об устойчивости схемы (5.9),(5.10) можно сделать следующее замечание. Данная схема отличается от обычной устойчивой схемы приближенной фанторизации (5.6) наличием операторов T_1 и T_2, положительно определенных и симметрических на равномерной сетке $h_i = h$ и $l_j = l$. В случае $h = l$ операторы становятся тождественно равными. Переход от систем вида (5.6) к системам вида (5.9),(5.10) осуществляется заменой переменных с помощью операторов вида $T_i^{1/2}$, $i = 1, 2$ [6, стр.32]. Это позволяет распространять алгоритмы расщепления на задачи вида (5.9),(5.10) с сохранением свойства устойчивости.

Литература

1. Канторович А.В. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных // Доклады АН СССР.-1934.-т.2, N9, с. 532-536.

2. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 459 с.

3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.

4. Завьялов Ю.С. Метод сплайн-коллокации решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Препринт АН СССР. Сибирское отд. Инст. математики, N73. Новосибирск, 1984. 26 с.

5. Колобов А.Г. Метод сплайн-коллокации для решения двумерного уравнения вихря // Вычислительные системы. Новосибирск, 1990. Вып. 137: Приближение сплайнами. с. 148-174.

6. Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 246 с.

7. Жанлав Т. О представлении интерполяционного кубического сплайна через B-сплайны // Вычислительные системы. Новосибирск, 1981. Вып. 87: Методы сплайн-функций. с. 3-10.

Оглавление

Учебное издание
Колобов Александр Георгиевич

МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ
Методические указания

Редактор В.Г. Макаров
Компьютерный набор и верстка Л.Г. Свищёва

ЛР020277 от 18.02.97. Подписано в печать 20.03.98.
Формат 60×84 1/16 Бум.тип. $N2$. Усл.печ.л. 1,2, уч.-изд. л. 1,3
Тираж 20 экз.

Издательство Дальневосточного университета
690600, Владивосток, ул. Октябрьская, 27

Отпечатано в лаборатории кафедры компьютерных технологий
690600, Владивосток, ул. Октябрьская, 27, к.342.