Ω

Конспект лекций

Математическое и компьютерное моделирование

Лектор: **Колобов А. Г.**

Курс: **4**

Семестр: **1**

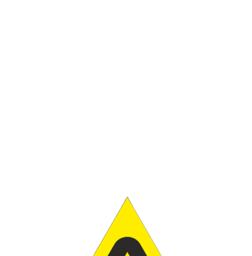
Владивосток, 2024-2025

Нашли ошибку?

Если вы заметили ошибку или хотите добавить замечание:

Репозиторий этой книги: `https://github.com/motattack/mcs_24_2`

Телеграм: `https://t.me/motattack`



В данном конспекте могут быть опечатки

Содержание

Часть I

Метод Сплайн-Коллокации

Запись от: 30.09.2024

1. Метод Коллокации

$Lu = f,$

Условия:

$$Lu|_{x=\xi_k} = f\left(\xi_k\right), \quad \Phi\left(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)$$

КРН - только в узлах сетки. В аналитическом виде - сплайны.

1.1. Общие положения

ОДУ второго порядка:

$$L[y\left(x\right)] = y''\left(x\right) + p\left(x\right)y'\left(x\right) + q\left(x\right)y\left(x\right) = r\left(x\right), \quad x \in [a, b].$$

Смешанные граничные условия:

$$\alpha_1 y\left(a\right) + \beta_1 y'\left(a\right) = \gamma_1,$$
$$\alpha_2 y\left(b\right) + \beta_2 y'\left(b\right) = \gamma_2.$$

Пусть $\exists!$ реш.

Условие гладкости для каждой задачи оговаривается отдельно.

Пусть $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ - сетка для построения сплайна $S(x) \in C^2[a, b]$.

На $[a, b]$ выбираем точки $\xi_k \in [a, b], k = \overline{0, N}$ - узлы коллокации.

Требуем:

$$L[S\left(x\right)]|_{x=\xi_k} = r\left(\xi_k\right).$$

И для граничных условий:

$$\alpha_1 S(a) + \beta_1 S'(a) = \gamma_1,$$
$$\alpha_2 S(b) + \beta_2 S'(b) = \gamma_2.$$

Размерность пространства $= N+3$ - уравнения.

$x_k \neq \xi_k$ - только если очень надо. Если $x_k = \xi_k$ будет 2-й порядок, иначе может быть больше.

p, q - могут быть разрывными. узлы не брать разрывные.

$[x_i, x_{i+1}] =$ нельзя брать больше 3-х точек. Если взять 4 - замкнется, не будет граничных условий.

2. Сплайн по моментам

$$S(x) = u_i(1-t) + u_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6}(1-t)\left[(2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}\right],$$
где $h_i = x_{i+1} - x_i, \quad t = \frac{x-x_i}{h_i}, \quad \xi_k = x_k$ (узлы совпадают).

$$M_i = S''(x_i) \quad \text{(моменты)}, \quad m_i = S'(x_i) \quad \text{(касательные)}.$$

$\sphericalangle\ P(x) \equiv 0$, только 2-я производная

Условия коллокации:

$$M_i + q_i u_i = r_i, \quad i = \overline{0, N}, \quad q_i = q(x_i), \quad r_i = r(x_i).$$

M_i, u_i неизвестны. Как связать моменты и значения?

2.1. Сплайн-разностная схема

Система для нахождения моментов:

$$(\star) \quad \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = \frac{6}{h_{i-1} + h_i}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}}\right),$$

$i = \overline{1, N-1}$.

(во внутренних точках, но не граничных). $[x_i, x_{i+1}]$

$$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \quad \lambda_i = 1 - \mu_i.$$

Связь есть, но M_i и u_i не знаем. (прогонка будет устойчива)

Из усл. коллокации: $M_i = r_i - q_i u_i$ подставляем в $(\star)$.

После подстановки получаем:

$$\lambda_i \left(1 + \frac{h_{i-1}^2}{6} q_{i-1}\right) u_{i-1} - \left(1 - \frac{h_i h_{i-1}}{3} q_i\right) u_i + \mu_i \left(1 + \frac{h_i^2}{6} q_{i+1}\right) u_{i+1} =$$

$$= \frac{h_{i-1} h_i}{6} \left(\mu_i r_{i-1} + 2 r_i + \lambda_i r_{i+1}\right), \quad i = \overline{1, N}.$$

Будет ли диагональное преобразование? - Прогока.

Условие для диагонального преобладания и для второго порядка:

$$\beta_1 \leq 0, \quad \beta_2, \alpha_j \geq 0, \quad |\alpha_j| + |\beta_j| \neq 0, j = 1, 2.$$

$$q(x) \leq q < 0, \quad -\text{условие существования решения.}$$

$h_{i-1}^2 \max \{|q_{i-1}|, |q_i|\} \leq 6.$ (если не выполняется - уменьшаем h).

⤴ это сплайн-разностная схема.

2.2. Теорема о сходимости

Пусть выполняются условия (диагонального преобладания) и $p(x) \equiv 0$. Если точное решение $y(x) \in C^2 W_{\Delta,\infty}^4 [a, b]$ то $\| S(x) - y(x) \| = o\left(\bar{h}^2\right)$

$\bar{h} = \max_i h_i$.

Любая сетка.

На всем отрезке $y(x) \in C^2 [a, b]$, а на маленьких $y(x) \in W_{\Delta,\infty}^4 [x_i, x_{i+1}]$ - 3 непрерывна, 4 может иметь разрыв.

Запись от: 14.10.2024

3. Использование B-сплайнов

$S\left(x\right)=\sum_{i=1}^{N+1}b_iB_i\left(x\right),$

где $B_i\left(x\right)$ - нормализованный финитный (не всюду, а на отрезке $[x_{i-2},x_{i+2}]$) сплайн, по центральному узлу. b_i - неизвестные.

$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b.$ - не хватает.

$B_{-1}\left(x\right)\quad x_{-1}.$

Добавляют x_{-3},x_{-2},x_{-1} и x_{N+1},x_{N+2},x_{N+3} - равномерно. Это расширенная сетка. Узлы коллокации совпадают с узлами сетки: $x_i=\xi_i$.

$$L\left[y\left(x\right)\right]=y''\left(x\right)+p\left(x\right)y'\left(x\right)+q\left(x\right)y\left(x\right)-r\left(x\right),$$

$$L\left[S\left(x\right)\right]=r\left(x\right).$$

Решая систему $\Rightarrow b_{-1},b_0,\ldots,b_N,b_{N+1}$.

$$S\left(x_k\right)=\sum_{i=-1}^{N+1}b_iB_i\left(x_k\right)$$

Выберем x_k --- три сплайна не 0:

$$B_k\left(x_k\right),\ B_{k-1}\left(x_k\right),\ B_{k+1}\left(x_k\right).$$

$$BL\left[y\left(x\right)\right]=$$

$$=b_{i-1}L\left[B_{i-1}\left(x_i\right)\right]+b_iL\left[B_i\left(x_i\right)\right]+b_{i+1}L\left[B_{i+1}\left(x_i\right)\right]=r\left(x_i\right),\quad i=\overline{0,N}.$$

$\rightharpoonup$ условие коллокации.

$b_{i-1}A_i+b_iC_i+b_{i+1}B_i=D_i$ (тут B_i не B-сплайн).

$$A_i=\frac{1}{x_{i+1}-x_{i-2}}\left(1-\frac{1}{2}p_ih_i+\frac{1}{6}q_ih_i^2\right),$$

$$B_i = \frac{1}{x_{i+2} - x_{i-1}} \left(1 + \frac{1}{2} p_i h_{i-1} + \frac{1}{6} q_i h_{i-1}^2\right),$$

$$C_i = -A_i - B_i + \frac{1}{6} q_i \left(h_i + h_{i-1}\right),$$

$$D_i = \frac{1}{6} r_i \left(h_i + h_{i-1}\right).$$

$(N+1)$ + граничные условия:

$$b_{-1} A_{-1} + b_0 C_{-1} + b_1 B_{-1} = D_{-1} \quad | \quad S\left(x_0\right),$$

$$b_{N-1} A_{N+1} + b_N C_{N+1} + b_{N+1} B_{N+1} = D_{N+1} \quad | \quad S\left(x_N\right).$$

Не выйдет прогонкой из-за краевых. Исключают эти элементы.

Выражаем и подставляем

$$(1) \quad \cancel{b_{-1} A_{-1}} + b_0 C_{-1} + b_1 B_{-1} = D_{-1},$$

$$\cancel{b_{-1} A_0} + b_0 C_0 + b_1 B_0 = D_0.$$

$$b_0 \tilde{C}_0 + b_1 \tilde{B}_0 = \tilde{D}_0$$

$i = N$ и граничное - аналогично.

$b_0, b_1, \ldots, b_N$ − находим. Из них b_{-1}, b_{N+1}.

Диагональное преобладание $\Rightarrow$ устойчивость $\Rightarrow$ монотонная прогонка.

Условия:

$$1 - \frac{1}{2} p_i h_i + \frac{1}{6} q_i h_i^2 \geq 0, \quad 1 + \frac{1}{2} p_i h_{i-1} + \frac{1}{6} q_i h_{i-1}^2 \geq 0. \quad + \text{усл. существования}$$

$$\| S\left(x\right) - y\left(x\right) \| = o\left(\bar{h}^2\right).$$

Любые уравнения 2-го порядка.

$\sphericalangle\ \xi_i \neq x_i$.

Сетка: $x_0, (x_i, (xx), x_{i+1}), (x_{i+2}, (xx), x_N)$. - через 1 выбираем узлы.

Пусть равномерная сетка $h = h_i$.

$$x_{2i}, \xi_{2i}, \xi_{2i+1}, x_{2i+1}$$

Гауссовские точки: $\xi_{2i} = x_{2i} + vh, \quad \xi_{2i+1} = x_{2i+1} - vh, \quad v = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}.$

5 диагональная, $o\left(h^3\right)$

На равномерное сетке нет 1 производной.

$$\frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} = f_i'' + \frac{h^2}{12} f_i^{(IV)} + O\left(h^4\right)$$

$$M_i = f_i'' + \frac{h^2}{12} f_i^{(IV)} + O\left(h^4\right)$$

Если взять полусумму:

$$\frac{1}{2}\left(M_i + \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}\right) = f_i''\left(x\right) + O\left(h^4\right)$$

4. Основные свойства схем Сплайн-коллокаций

1. Одинаковая эффективность на любых сетках.
2. Высокая точность аппроксимации 1-й производной
3. Простота построения схем повышенной точности, в том числе для уравнений с переменными коэффициентами.
4. Решение и её производную можно вычислить в любых точках области.

5. Уравнение Пуассона в прямоугольной области

$\lessdot$ Уравнение Пуассона в прямоугольной области $\Omega = [a, b] \times [c, d]$

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f\left(x, y\right), \quad u|_\Gamma = g\left(x, y\right)$$

Базис уже 2-х мерный.

Сетка:

$$\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b, \quad \Delta_y : c = y_0 < y_1 < \ldots < y_M = d$$

$$x_i : \ i = -1, -2, -3, N+1, N+2, N+3 \quad B_i$$

$y_j: \; j = -1, -2, -3, M+1, M+2, M+3 \quad \bar{B}_j$

$B_i(x), \; \bar{B}_j(y)$ — базисы в 2-х мерном

$\Delta = \Delta_x \otimes \Delta_y$ — тензорное произведение двумерных сплайнов.

B-кубический сплайн:

$$S(x,y) = \sum_i \sum_j b_{ij} B_i(x) \bar{B}_j(y).$$

5.1. Метод матричной прогонки

$S(x,y) = \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} b_{ij} B_i(x) \bar{B}_j(y).$

Будем искать в виде:

$$S(x,y) = \sum_{i=-1}^{N+1} \bar{\alpha}_i(y) B_i(x), \quad \text{где } \bar{\alpha}_i(y) = \sum_{j=-1}^{M+1} b_{ij} \bar{B}_j(y).$$

Или:

$$S(x,y) = \sum_{j=-1}^{M+1} \alpha_j(x) \bar{B}_j(y), \quad \text{где } \alpha_j(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} b_{ij} B_i(x).$$

Вместо $\Delta u = -f$, решаем: $\frac{\partial V}{\partial t} + \Delta V = -f$.

$v \xrightarrow{t\to\infty} u$ - метод установления.

5.2. Схема переменных направлений

Имеет вид:

$$u_{ij}^{v+1/2} = u_{ij}^{v} + \frac{\Delta\tau}{2}\left[(u_{xx})_{ij}^{v} + (u_{yy})_{ij}^{v+1/2} + f_{ij}^{v}\right].$$

$$u_{ij}^{v+1} = u_{ij}^{v+1/2} + \frac{\Delta\tau}{2}\left[(u_{xx})_{ij}^{v+1} + (u_{yy})_{ij}^{v+1/2} + f_{ij}\right].$$

$u^v \quad t_j$ - фиктивное.

По x, хотим по y:

$\bar{\alpha}_i(y) || \alpha_j(x)$ — найдем на слое по j.

Матрицы 3-х диагональные.

Комбинация коллокации и конечной разности.

Где остановится? - Смотрим соседние значения коэффициентов:

$$\max_{i,j} \|\alpha_{ij}^{v} - \alpha_{ij}^{v+1}\| < \varepsilon \text{ или } \max_{i,j} \|\bar{\alpha}_{ij}^{v} - \bar{\alpha}_{ij}^{v+1}\| < \varepsilon$$

Аппроксимация + устойчивость $\Rightarrow$ сходимость.

Доказательство есть для $N = M$,

$$S - y \quad \left|S - \bar{S} + \bar{S} - y\right|$$

$\bar{S}$ - интерполяция.

Устойчивость из методов расщепления.

Часть II

Методы решения интегральных уравнений

Запись от: 28.10.2024

6. Линейные интегральные уравнения

Линейное интегральное уравнение:

$$g(x)\,y(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x,s)\,y(s)\,ds = f(x)\,, \quad x \in Q$$

где:

- λ — некоторый параметр,
- $K(x,s)$ — ядро оператора (самоопределеный),
- Ω — область интегрирования:
  - область постоянная - уравнение Фредгольма,
  - область переменная (от а до х) - уравнение Вольтерра.

6.1. Типы уравнений и их классификация

1. Уравнение 1 рода: $g(x) \equiv 0$.
2. Уравнение 2 рода: $g(x) \not\equiv 0$.
3. Уравнение 3 рода: где-то в Ω $g(x) \neq 0$, а где-то $g(x) \equiv 0$.

$f(x) = 0$ - однородное.

$\sphericalangle$ однородное (поделим на g):

$$y(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x,s) y(s)\, ds = 0 \quad \text{— собственное значение и собственная функция.}$$

Операторный вид

$Ay = f -$ уравнение 1 рода.

$y = \lambda Ay = f -$ уравнение 2 рода.

$y\,(x) \in Y, f\,(x) \in F, g\,(x) \in G$

Y, F, G функциональные метрические пространства.

$$Ay = \int_{\Omega} K(x,s) y(s)\, ds \quad \text{- интегральный оператор (линейный).}$$

$A_1 y = f -$ 1 рода $\qquad\qquad$ $y = A_2 y + f -$ 2 рода.

$A := (I - \lambda A_2)$

$(I - \lambda A_2) y = f -$ уравнение 1 рода - это формально Фридгольма 1-го рода.

Вполне непрерывный - не имеет огранич. обратного $\left(y \cancel{=} A_1^{-1} f\right)$ - не огр.

Но $y = (I - A_2)^{-1} f$ - имеет, так как огр. $(I - A_2)$ - непрерывный.

Уравнение 1-го рода - существенно некорректна.

7. Методы

$/I/$ Прямой метод (аппроксимация - функция или оператор) переход от ∞ мерного к конечно-мерному.

$/II/$ Проекционные методы: $\tilde{y} = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i$.

Невязка:

$$\varepsilon_m = \sum_{i=1}^{m} c_i (\varphi_i - A_2 \varphi_i) - f.$$

Ритца (мин), Галеркина (орт. базис), наим. квадратов.

$/III/$ Итерационные методы:

Основное требование $\|A_2\| < 1$ - присутствует сжимающее отображение.

Метод последовательных приближений:

$$y_k = A_2 y_k + f, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Общее решение:

$$y = (I - A_2)^{-1} f = \sum_{k=0}^{\infty} A_2^k f.$$

Приближение:

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} A_2^k f.$$

$\bar{y}$ - точное.

Оценка погрешности:

$$\|\bar{y} - y_k\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A_2^k f\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A_2\|^k \|f\|.$$

7.1. Методы решения уравнения Вольтерра 2-го рода

P.s: Все методы сходятся. Считаем что $\exists!$ решение.

$$y\left(x\right) - \int_a^x K\left(x, s\right) y\left(s\right)\, ds = f\left(x\right), \quad x \in \left(a, b\right).$$

7.1.1. Метод квадратуры для уравнений Вольтерра 2-го рода

Квадратурное представление:

$$\int_a^b \varphi\left(x\right)\, dx = \sum_{i=1}^{m} A_i \varphi\left(x_i\right) + R\left[\varphi\right],$$

Здесь $R\left[\varphi\right]$ - остаточный член.

$//$симпсона, гауса, трапеций$//$

Ограничение: $A_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} A_i = b - a.$

Работаете с трапецией - качество сохраняется, точность хуже.

Нужно выбрать точку x_i и записать:

$$y(x_i) - \int_a^x K(x_i, s) y(s)\, ds = f(x_i), \quad i = \overline{1, n}$$

Взять можно в зависимости от K, f - равномерные или не равномерные. k, f могут быть таблично заданными - тогда в них.

Система:

$$y\left(x_i\right) - \sum_{j=1}^{n} A_j K\left(x_i, x_j\right) y\left(x_j\right) = f\left(x_i\right) + \cancel{R[\varphi]}$$

Погрешность опустим:

$$y_i - \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Треугольная формула:

$$-\sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} y_j + (1 - A_i K_{ii}) y_i = f_i$$

$$y_i = \frac{f_i + \sum_{j=1}^{i-1} A_j K_{ij} y_j}{1 - A_i K_{ii}}, \quad \text{ограничение: } 1 - A_i K_{ii} \neq 0$$

⇀ Метод квадратур

Запись от: 11.11.2024

$$y_i = \left(1 - \frac{h}{2} K_{ij}\right)^{-1} \left(f_i - \frac{h}{2} K_{i1} y_1 + h \sum_{j=2}^{i-1} K_{ij} y_j\right)$$

7.1.2. Итерационные методы для уравнений Вольтерра 2-го рода

$y_k\left(x\right) = f\left(x\right) + \int_a^x K\left(x, s\right) y_{k-1}\left(s\right)\, ds, \quad k = 0, 1, \ldots$

⇀ простой итерации.

Есть ли сходимость? Какая скорость сходимости?

Чтобы увидеть как накапливаются:

Пусть $\varphi_0(x) = f(x)$, а $\varphi(x) = \int_a^x K(x,s)\varphi_k(x)\,ds$.

Тогда общее решение:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$$

$$y = f + Ay \quad y = (I-A)^{-1} f = \sum_{k=0}^{\infty} A^k f = A + Af + A^2 f + \cdots =$$
$$= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots$$

Мы берем $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x)$.

Пример (когда есть сходимость): Пусть $f(x)$ и $K(x,s)$ - непрерывное по обоим аргументам $\Rightarrow$ будет сходимость.

Пусть $N = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad M = \max_{a\le x,s\le b} |k(x,s)|$

(некая теорема)

$$|\varphi_k(x)| \le \frac{NM(b-a)^k}{k!} \quad \text{(факториальная сходимость)}$$

7.2. Методы решения уравнений Фредгольма 2-го рода

Уравнение Фредгольма II рода:

$$y(x) - \lambda \int_a^b k(x,s)\,y(s)\,ds = f(x), \quad x \in [a,b], \quad f(x) \in C[a,b]. \quad (f1)$$

$$v = \{[a,b] \times [a,b]\}$$

Минимальное требование: K непрерывно или разрыв 1 рода, т. е.:

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2\,dx\,ds = B < +\infty$$

Если $f(x) \equiv 0$ - задача на собственные значения. Найти λ, когда $y(x) \not= 0$.

λ - характеристические значения, а $\mu = \frac{1}{\lambda}$ - собственные значения.

7.2.1. Метод квадратур для (f1)

$\int_a^b \varphi(x)\ dx = \sum_{j=1}^m A_j \varphi(x_j) + \cancel{R[\varphi]}$ (ошибку учитывать не будем).

Берём для конкретности $x_i \in [a, b]$, возьмем их n штук:

$$y(x_i) - \lambda \int_a^b k(x_i, s)\, y(s)\ ds = f(x_i),$$

$x_i, i = \overline{1, n}$.

Заменяем суммой:

$$y(x) - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K(x_i, s_j)\, y(x_j) = f(x_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} y_j = f_i \quad \text{СЛАУ, полная матрица - методом Гаусса}$$

Найдем $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (значения в точках).

Интерполяция: $[a, b]$ или сглаживание.

Пусть $f(x)$ задана таблично, можно восстановить квадратуры гаусса - большие N не брать (лучше 6, 7 точек).

Если большой отрезок, разбиваем на:

$$\int_a^b = \int_a^{b_1} + \int_{b_1}^{b2} + \cdots + \int_{b_{m-1}}^{b_m = b} \qquad (m \cdot n)$$

Каждый считаем гауссом.

7.2.2. Метод взвешенных невязок

$K(s, x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x)\, \beta_i(s), \quad \alpha_i, \beta_i$ – лин. независимые функции.

Если разбивается, то вырожденное.

Подставим:

$$y(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{i=1}^m \alpha_i(x)\, \beta_i(s)\right] y(s)\ ds = f(x)$$

Сумма не зависит от s:

$$y(x) - \lambda \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(s)\, y(s)\ ds = f(x)$$

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s)\, y(s)\; ds \quad \text{– пусть мы их нашли.}$$

Тогда получили решение в аналитическом виде:

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)\, c_i$$

Подставим в уравнение:

$$\cancel{f(x)} + \lambda \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_i(x) - \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(s) \left[f(s) + \lambda \sum_{j=1}^{m} c_j \alpha_j(s) \right] ds = \cancel{f(x)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \left[c_i - \int_a^b \left(\beta_i(s) f(s) + \lambda \sum_{j=1}^{m} c_j \alpha_j(s) \beta_i(s) \right) ds \right] = 0.$$

$$//\sum a_i \alpha_i = 0 \quad \Rightarrow \quad a_i = 0, \quad \alpha_i \text{ – лин. независимые}//$$

$$c_i - \int_a^b \beta_i(s) f(s)\, ds - \lambda \sum_{j=1}^{m} c_j \int_a^b \alpha_j(s)\, \beta_i(s)\; ds = 0$$

Более приличный вид:

$\beta_i(s)$ – известно, $\quad f(s)$ – тоже.

$$f_i = \int_a^b \beta_i(s)\, f(s)\; ds \quad \text{– предварительно считаем.}$$

$$a_{ij} = \int_a^b \alpha_i(s)\, \beta_j(s)\; ds \quad \text{– легко аналитически/квадратуры.}$$

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{m} c_j a_{ij} = f_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

c_i - найдем.

Потом решение в аналитическом виде:

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_i(x)$$

Иногда $K(x, s)$ - невырожденное. Берут $\tilde{K}(x, s)$ - вырожденное (близкое) ядро. В ряд Тейлора, если x и s разделяются или метод наименьших квадратов, метод Бэтмена.

Запись от: 25.11.2024

7.3. Уравнение Вольтерра 1-го рода

Пусть $y(s) \in C[a,b]$ - непрерывная, $f(x) \in C^1\left[a,b\right]$, $K(x,s) \in C^1\left[a,b\right] \times \left[a,b\right]$,

$\rightharpoonup$ устойчивая, f и K ограничены:

$$\left\| f\left(x\right) \right\|_{C^1} \leq K_1, \quad \left\| K\left(x,s\right) \right\|_{C^1} \leq K_2.$$

Если ослабим $f\left(x\right) \in C\left[a,b\right]$, то уже некорректно.

Сведение к уравнению второго рода:

$$\int_a^x K\left(x,s\right) y\left(s\right)\, ds = f\left(x\right) \quad - \text{уравнение первого рода.}$$

Дифференцируем по x:

$$(1): \quad K\left(x,x\right) y\left(x\right) + \int_a^b K_x'\left(x,s\right) y\left(s\right)\, ds = f'\left(x\right).$$

Поделим на $K\left(x,x\right)$:

$$y(x) + \int_a^b \frac{K_x'(x,s)}{K(x,x)} y(s)\, ds = \frac{f'(x)}{K(x,x)}, \quad - \text{второго рода.}$$

Только если $K(x,x) \neq 0$. Если $= 0$, то 1-го рода *рекомендация* - ещё раз дифференцируем по x:

$$K_x'(x,x)y(x) + \int_a^b K_{xx}''(x,s)y(s)\, ds = f''(x).$$

Делим на $K_x'\left(x,x\right)$... Если $K_x'\left(x,x\right) \neq 0$, то 2-го. Если нет ещё раз дифференцируем . . .

$$\text{Интегрирование по частям } (2): \int_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du,$$

Пусть $Y\left(x\right) = \int_a^b y(s)\, ds, \quad u = K(x,s), \quad dv = y(s)\, ds.$

$$K(x,s)Y(x)\Big|_a^x \quad (\text{в } a = 0)$$

$$K(x,x)Y(x) - \int_a^x K'_x(x,s)Y(s)\,ds = f(x)$$

$\rightharpoonup$ ур-в. Вольтерры 2-го рода $(K\,(x,x) \neq 0 \quad$ делим$)$

Решение этого ур-в. найдем $Y\,(x)$, потом

$$y(s) = \frac{dY}{ds}.$$

7.3.1. Метод Квадратур - плох

$\int \to \sum_{j=1}^{i}$, но 2-го рода по рекуррентной формуле, а тут $x = a$ - интеграл схлопнется - нет начала, но можно продифференцировать: $k\,(x,x)\,y\,(x) + ... = f'\,(x)$

$$y(a) = \frac{f'(a)}{K(a,a)}.$$

Если f таблично задана - 2 курс (полином Лагранжа).

8. Решение ур-в. Фредгольма

Корректность по (Адамару): Пусть $AY = F$ - задача, является корректной на паре метрических пространств (Y, F), если:

1. Любому $f \in F$ соответствует решение $y \in Y$.

2. Из $Ay_1 = Ay_2 \Rightarrow y_1 = y_2$ (единственность решения).

3. $\forall\varepsilon > 0; \delta(\varepsilon) > 0$ при условии $\rho_F(f_1, f_2) \leq \delta(\varepsilon)$, то
   $\rho_Y(A^{-1}f_1, A^{-1}f_2) < \varepsilon$
   (условие сходимости) непрерывности оператора A.

Чаще нарушается третье условие.

Оператор Фредгольма:

$$Ay = \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds \quad - \text{вполне непрерывный для не } \left(A^{-1}\right)$$

Четвертая теорема Фредгольма: $\lambda_{\min} = 0 \quad -$ корень зла

$n = 5$ спектр сместился, 0 - не будет.

n - увеличиваем, тем ближе к 0, опр. ближе к 0. Любые (старые) методы ничего не дадут.

8.1. Методы Регуляризации

8.1.1. Условная корректность

Условная корректность (по Тихонову):

$Ay = f, \quad -$называется условно корректной, если:.

1. Априори известно, что решение $\exists$ и принадлежит некоторому замкнутому множеству M.
2. Решение ! в классе функций.
3. Бесконечно малым вариациям параметра f, на выходящим y за пределы M соответствуют бесконечно малые вариации решения.

Самое распространенное M - компакт/компактное множество (вообще говоря не одно и тоже, но будем считать одно и тоже :D). Если из всякой бесконечной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. (замкнутое и ограниченное).

Иногда M - не компакт; f - пошевелим, вышли из компакта AY - существенно некорректные.

РО - Регуляризирующий Оператор.

$Ay = f$

Вся входная информация с погрешностью.

$\tilde{A}y = \tilde{f}$ - можем решать

$\tilde{A}y = \tilde{f}$

Три варианта определения: A точно $\tilde{f}$, $\tilde{A}$ и f или $\tilde{A}$ и $\tilde{f}$.

Мы рассмотрим A точное, а $\tilde{f}$ с погрешностью.

Запись от: 09.12.2024

8.1.2. Регуляризирующий оператор

$Au = f$

$\tilde{A}u = \tilde{f}$

Будем считать A точно, f с погрешностью $\bar{f}$ - точная правая часть, $\tilde{f}_\delta$ - приближенная правая часть (δ знаем).

Будем считать расстояние $\rho_F(\bar{f}, \tilde{f}_\delta) \leq \delta$.

Оператор $R(f, \tilde{f})$ называется регуляризирующим для уравнения в окрестности $\bar{f}$ если:

1. Оператор R определён $\forall \tilde{f}_\delta \in F$, где δ лежит:

   $0 \leq \delta \leq \delta_0, \quad \delta_0$ предельное значение, $\quad a \leq \alpha \leq \alpha_0 \quad$ некий параметр α.

2. $\exists$ такая зависимость $\alpha = \alpha\,(x)$, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta\,(x)$
   как расстояние $\rho_F\left(\tilde{f}_\delta, \bar{f}\right) \leq \delta\,(\varepsilon)\,, \rho_Y\,(\tilde{y}_\alpha, \bar{y}) < \varepsilon$.

$\tilde{y}_\alpha = R \quad (f_\delta, \alpha\,(\delta))$. Некоторая устойчивость. Когда $\delta \to 0$, то и $\alpha \to 0$ и $\varepsilon \to 0$.

α - параметр регуляризации. С чего $\alpha = \alpha\,(\delta)$? - Ищите сами. Это общее определение. Иногда R нельзя построить.

8.1.3. Основные определения: псевдорешение, нормальное решение, сглаживающий функционал

1. Классическое (точное) решение $Au = f$ называется такое $\tilde{y}$, что $\|A\tilde{y} - f\|_F = 0$ (невязка равна 0).

2. Псевдо решение наз-ся y_1, когда оно $\|Ay_1 - f\|_F$ минимизирует невязку. (их может быть много).

3. Нормальное решение наз-ся y_0, которое минимизирует ещё и $\|y\|_Y$.

$\sphericalangle$ случай метода регуляризации Тихонова.

$\sphericalangle$ $Ay = f, y \in F, f \in F, Y, F$ - гильбертовы.

A - оператор вполне непрерывный.

Вместо точного решения A и точного f, известно $\tilde{A}, \tilde{f}$ - приближенные.

Но мы знаем норму: $\|\tilde{f} - f\| \leq \delta$

$\|\tilde{A} - A\| \leq \varepsilon$

$\sphericalangle$ $\tilde{A}u = \tilde{f}$ - появилась некорректность.

$\sphericalangle$ Сглаживающий функионал Тихонова:

$$\Phi_\alpha[y, \tilde{f}] = \|\tilde{A}y - \tilde{f}\|_F^2 + \alpha\Omega(y),$$

Ω - неотрицательный стабилизирующий функционал.

Чаще всего берут $\Omega\left[y\right] = \|y\|_Y^2$

8.2. Задача минимизации сглаживающего функционала

Задача: минимизировать функционала Тихонова.

$$\Phi_\alpha\left[y, \tilde{f}\right] = \|\tilde{A}y - \tilde{f}\|_F^2 + \alpha\|y\|_Y^2.$$

Найти такой y_α, что:

$$\Phi_\alpha\left[y_\alpha, f\right] = \inf_{y \in Y} \Phi_\alpha\left[y, \tilde{f}\right].$$

Эта задача имеет ! решение этого функционала.

Как решать?

Любые способы: множители Лагранжа, численно минимизировать функционал (градиентные методы).

8.2.1. Уравнение Эйлера

$\sphericalangle$ Построение уравнения Эйлера

Когда мы $\sphericalangle$ метод Ритца вместо $Ay = f$ находили минимум

$J(y) = (Ay, y) - 2(f, y)$ – это уравнение Эйлера.

8.3. Метод регуляризации для решения инт. ур-в. Фредгольма 1 рода

По аналогии с тем для функционала Тихонова:

$$\Phi_\alpha\left[y, \tilde{f}\right] = \left(\tilde{A}y - \tilde{f}, \tilde{A}y - \tilde{f}\right) + \alpha(y, y) =$$

$$= \left(\tilde{A}y, \tilde{A}y\right) - \left(\tilde{A}y, \tilde{f}\right) - \left(\tilde{f}, \tilde{A}y\right) + \left(\tilde{f}, \tilde{f}\right) + \alpha(y, y) =$$

$$= \left(\tilde{A}^*\tilde{A}y, y\right) - 2\left(\tilde{A}y, \tilde{y}\right) + \left(\tilde{f}, \tilde{f}\right) + \alpha(y, y) =$$

$$= \left(\tilde{A}^*\tilde{A}y, y\right) - 2\left(\tilde{A}^*\tilde{f}, y\right) + \left(\tilde{f}, \tilde{f}\right) + \alpha(y, y) =$$

$$= \left(\tilde{A}^*\tilde{A}y + \alpha y, y\right) - 2\left(\tilde{A}^*\tilde{f}, y\right) + \left(\tilde{f}, \tilde{f}\right) \quad (\star)$$

$Ay = f.$

Было: $J(y) = (Ay, y) - 2(f, y)$.

Попробуем для $\star$

$\left(\tilde{f}, \tilde{f}\right)$ – (const.) пропадёт.

Сравним:

$\tilde{A}^*\tilde{A}y + \alpha y = \tilde{A}^*\tilde{f}$ – уравнение Эйлера.

Вместо min, ур-в Эйлера. В литературе

$\alpha y + \tilde{A}^*\tilde{A}y = \tilde{A}^*\tilde{f}.$ (A - оператор Фредгольма.)

Это уже уравнение 2-го рода Фредгольма. Сведение 1-го к уравнению рода 2-го - их умеем. Можно показать, что решение y_α ещё и будет нормальным.

$\|\tilde{A}y-\tilde{f}\|_F^2+\alpha\|y\|_Y^2 \quad -$условно min невязку при min нормального решения.

$$\alpha y_\alpha + \tilde{A}^*\tilde{A}y_\alpha = \tilde{A}^*\tilde{f}.$$

Компакты берут монотонные $\nearrow, \searrow$ функции.

Как искать α?

Есть связь $\alpha = \alpha\left(\delta\right)$.

8.4. Определение параметра регуляризации по невязке

$\sphericalangle$ Определение по невязке. $Au = \tilde{f}_\delta$

Мы знаем ограничение δ - это данные о погрешности пробора.

Задача: Найти $\alpha = \alpha\left(\delta_0\right)$, которую так, чтобы $R\left[f, a\left(\delta\right)\right]$ - был регуляризирующий.

Считаем вместо f есть $\tilde{f}_\delta$

$$\|\tilde{f}_\delta - f\|_F \leq \delta.$$

Опр. параметр α по невязке. Главное уравнение для поры:

$$\|Ay_\alpha - \tilde{f}_\delta\| = \delta \quad - \text{это нелинейное уравнение.}$$

Можно решать метод Ньютона, скорость сходимости - секунды.

Строится некоторая монотонная последовательность чисел: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$

Например: $\alpha_k = \alpha_0 q^k, \quad q > 0.$

Для каждого α_k ищется решение y_{α_k} задачи min функционала $\Phi_{\alpha_k}\left[y, \tilde{f}_\delta\right]$

Наименьший α_k - ставим в $\|Ay_\alpha - \tilde{f}_\delta\| = \delta$.

Считаем саму невязку:

$$\|Ay_{\alpha_k} - \tilde{f}_\delta\| \quad \text{для каждого.}$$

В качестве искомого $y_{\alpha_{k0}}$ при котором $\|Ay_{\alpha_{k0}}\| \approx \delta$ ближе всего к δ.

Не так для интегральных уравнений, но и для плохо обусловленных матриц. A - плохая.

$Ay = f$. Домножаем на A^*

$A^*Ay = A^*y \quad$ – симметрич. > 0.

$(*)\, [\alpha y + A^*Ay = A^*f]$

Так же $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

$(*)$ - любым методом, а останавливаемся на лучшем min.