

motchy の信号処理備忘録

motchy

2019 年 11 月 16 日 ~ 2020 年 11 月 29 日

目次

第 I 部	表記法	2
第 I.1 章	数学記号	3
第 I.2 章	連続座標信号の表現	4
第 I.3 章	離散座標信号の表現	5
第 II 部	畳み込み	6
第 II.1 章	巡回畳み込み	7
II.1.1	巡回畳み込みの可換則	7
第 II.2 章	諸定理	9
II.2.1	線形変換と畳み込みの順序交換	9
II.2.1.1	動機	9
II.2.1.2	理論	9
II.2.2	数値実験	10
第 III 部	Fourier 解析	11
第 III.1 章	Fourier 級数展開	12
III.1.1	基底関数	12
III.1.2	Fourier 係数	12
第 III.2 章	Fourier 変換	13
III.2.1	基底関数	13
III.2.2	Fourier 変換の定義	13
第 III.3 章	離散 Fourier 変換 (DFT)	14
III.3.1	基底	14
III.3.2	DFT の定義	14
III.3.3	Hermite な離散時間信号の DFT は実数である	14
III.3.3.1	系: Hermite な離散時間信号の IDFT は実数である	15
III.3.4	巡回畳み込みの DFT は DFT の積に比例する	15
III.3.5	Gaussian ノイズの DFT	16
第 III.4 章	サンプリング定理	17
第 III.5 章	高速 Fourier 変換 (FFT)	19
III.5.1	長さが 2 のべき乗でない信号の DFT を長さが 2 のべき乗の信号の FFT に帰着する方法	19
第 IV 部	Laplace 変換	21
IV.0.1	複素指数関数入力に対する伝達関数の作用	22
IV.0.1.1	系: 正弦波入力に対する伝達関数の作用	22
第 V 部	Z 変換	24
第 V.1 章	基礎理論	25
V.1.1	最終値定理	25
V.1.2	複素指数関数入力に対する伝達関数の作用	26
第 V.2 章	IIR フィルタの計算手順	27
参考文献		28

第Ⅰ部

表記法

第 I.1 章

数学記号

- \mathbb{F} : 体
- \mathbb{Z} : 整数全体の集合
- \mathbb{R} : 実数全体の集合
- \mathbb{C} : 複素数全体の集合
- \mathbf{a}/\mathbf{b} ($d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{F}^d$, $b_i \neq 0$ for all i): $[a_1/b_1, \dots, a_d/b_d]^\top$
- $a\%b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$): a を b で割った余り。符号に 2 通り考えられるが、本書では結果を 0 以上 $|a|$ 未満とする定義を採用する。
- $\mathbf{a}\%\mathbf{b}$ ($d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^d$, $b_i \neq 0$ for all i): $[a_1\%b_1, \dots, a_d\%b_d]^\top$

第 1.2 章

連続座標信号の表現

連続的な座標値 $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ ($d_1 \in \mathbb{N}$) から \mathbb{R}^{d_2} ($d_2 \in \mathbb{N}$) への写像を d_1 次元連続座標信号という。信号値は全ての座標に対して定義される必要はない。

例えばカセットテープレコーダーに記録された音声信号は $d_1 = d_2 = 1$ のものである。

信号 f の位置 $x = [x_1, x_2, \dots, x_{d_1}]^\top$ での値を $f(x)$ や $f(x_1, \dots, x_{d_1})$ で表す。

第 1.3 章

離散座標信号の表現

離散的な座標値 $x \in \mathbb{Z}^{d_1}$ ($d_1 \in \mathbb{N}$) から \mathbb{R}^{d_2} ($d_2 \in \mathbb{N}$) への写像を d_1 次元離散座標信号という。信号値は全ての座標に対して定義される必要はない。

例えば離散的な時刻での電圧のサンプリングデータは $d_1 = d_2 = 1$ のものである (この場合の「座標」は時間軸上での座標という意味になる)。また、コンピュータのディスプレイに映る 2 次元カラー画像は $d_1 = 2, d_2 = 3$ のものである。

信号 f の位置 $x = [x_1, x_2, \dots, x_{d_1}]^\top$ での値を $f(x)$ や $f(x_1, \dots, x_{d_1})$ で表す。

第Ⅱ部

畳み込み

第 II.1 章

巡回畳み込み

$\Omega := \{0, 1, \dots, N_1 - 1\} \times \{0, 1, \dots, N_2 - 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, N_d - 1\}$ とする。 f, g を周期が (N_1, \dots, N_d) であるような離散座標信号 $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$; $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_d]^\top \mapsto f(\mathbf{n}), g(\mathbf{n})$ とする。 $\mathbf{N} := [N_1, \dots, N_d]^\top$ とする。 f と g の巡回畳み込み $f *_{\text{cyc}} g$ を次式で定義する。

$$\left(f *_{\text{cyc}} g\right)(\mathbf{n}) := \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} f(\mathbf{m})g((\mathbf{n} - \mathbf{m}) \% \mathbf{N})$$

II.1.1 巡回畳み込みの可換則

Ω, f, g の定義を II.1 と同じものとするとき、次が成り立つ。

$$f *_{\text{cyc}} g = g *_{\text{cyc}} f$$

Proof.

$$\begin{aligned} \left(g *_{\text{cyc}} f\right)(\mathbf{n}) &= \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} g(\mathbf{m})f((\mathbf{n} - \mathbf{m}) \% \mathbf{N}) \\ &= \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g(m_1, \mathbf{m}_2)f((n_1 - m_1) \% N_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \end{aligned} \quad (1)$$

ここに $\mathbf{n}_i := [n_i, \dots, n_d]^\top$ (\mathbf{m}_i, N_i も同様), $\Omega_i := \{0, 1, \dots, N_i - 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, N_d - 1\}$ である。

$$\begin{aligned}
(1) &= \sum_{m_1=0}^{n_1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g(m_1, \mathbf{m}_2) f(n_1 - m_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&\quad + \sum_{m_1=n_1+1}^{N_1-1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g(m_1, \mathbf{m}_2) f(n_1 + N_1 - m_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&= \sum_{l_1=n_1}^0 \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g(n_1 - l_1, \mathbf{m}_2) f(l_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&\quad + \sum_{l_1=N_1-1}^{n_1+1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g(n_1 + N_1 - l_1, \mathbf{m}_2) f(l_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&= \sum_{l_1=n_1}^0 \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g((n_1 - l_1) \% N_1, \mathbf{m}_2) f(l_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&\quad + \sum_{l_1=N_1-1}^{n_1+1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g((n_1 - l_1) \% N_1, \mathbf{m}_2) f(l_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&= \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g((n_1 - l_1) \% N_1, \mathbf{m}_2) f(l_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2)
\end{aligned}$$

同様の変形を繰り返すと最終的に次のようになる。

$$\left(g *_{\text{cyc}} f \right) (\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{l} \in \Omega} g((\mathbf{n} - \mathbf{l}) \% \mathbf{N}) f(\mathbf{l}) = \left(f *_{\text{cyc}} g \right) (\mathbf{n})$$

□

第 II.2 章

諸定理

II.2.1 線形変換と畳み込みの順序交換

II.2.1.1 動機

画像処理に於いてカーネルとの畳み込みを実行してから線形変換を施す場合と、事前に画像とカーネルの両方に線形変換を施してから畳み込む場合の結果の違いに関心がある。

II.2.1.2 理論

$d \in \mathbb{N}$ とし、 $f: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mapsto f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ を d 次元信号とする。線形変換を表す正則行列を A とし、 A による変換を T_A と表す。 T_A による変換は次式を以て定義する。

$$T_A(f)(\mathbf{x}) = f(A^{-1}\mathbf{x})$$

$G: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mapsto G(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ を d 次元信号とする。このとき次式が成り立つ。

$$T_A(G) * T_A(f) = |A|T_A(G * f)$$

Proof.

μ を Jordan 測度とする。

$$\begin{aligned} T_A(G) * T_A(f)(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^d} T_A(G)(\mathbf{x} - \mathbf{u})T_A(f)(\mathbf{u})\mu(\mathrm{d}\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}^d} G(A^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{u}))f(A^{-1}\mathbf{u})\mu(\mathrm{d}\mathbf{u}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} G(A^{-1}\mathbf{x} - A^{-1}\mathbf{u})f(A^{-1}\mathbf{u})\mu(\mathrm{d}\mathbf{u}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} G(A^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{v})f(\mathbf{v})||A||\mu(\mathrm{d}\mathbf{v}) \\ &\quad (\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{u} \text{ と変数変換した。} ||A|| \text{ は } |A| \text{ の絶対値である。}) \\ &= ||A|| \int_{\mathbb{R}^d} G(A^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{v})f(\mathbf{v})\mu(\mathrm{d}\mathbf{v}) \\ &= ||A|| T_A(G * f)(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

□

II.2.2 数値実験

Mathematica による例が「線形変換と畳み込み.nb」にある。

第 III 部

Fourier 解析

第 III.1 章

Fourier 級数展開

III.1.1 基底関数

Fourier 級数展開の基底関数は Fourier 変換や DFT のものと違って正規化されていないため、美しさに欠ける。

$d \in \mathbb{N}$, $W_l > 0$ ($l = 1, 2, \dots, d$), $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ とする。次式で定義される、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ に関する連続座標信号を、区間 $\prod_{l=1}^d [-W_l, W_l]$ に於ける第 \mathbf{k} 基底関数という。

$$W(\mathbf{k}, \mathbf{x}) := \exp i \sum_{l=1}^d k_l \frac{x_l}{W_l} \pi$$

III.1.2 Fourier 係数

$d \in \mathbb{N}$, $W_l > 0$ ($l = 1, 2, \dots, d$), $\Omega := \prod_{l=1}^d [-W_l, W_l]$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ とする。 $f: \mathbf{x} \in \mathbb{R} \mapsto f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ を、第 l 座標に関して周期が $2W_l$ であるような周期関数とする。次式で定義する、 \mathbf{k} に関する離散座標信号を f の第 \mathbf{k} Fourier 係数という。

$$c(f, \mathbf{k}) := \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} \int_{\Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{x})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

第 III.2 章

Fourier 変換

III.2.1 基底関数

$d \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$ とする。次のものを d 次元 Fourier 変換に於ける基底関数という。

$$W(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x}) := (2\pi)^{-d/2} \exp i\boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{x}$$

III.2.2 Fourier 変換の定義

$d \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$ とする。 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、次式で定義される、 $\boldsymbol{\omega}$ に関する連続座標信号を f の Fourier 変換という。

$$\mathcal{F}(f, \boldsymbol{\omega}) := \int_{\mathbb{R}^d} \overline{W(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i\boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$

第 III.3 章

離散 Fourier 変換 (DFT)

III.3.1 基底

$d \in \mathbb{N}$, $N_l \in \mathbb{N}$ ($l = 1, 2, \dots, d$), $\mathbf{k}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ とする。次式で定義される、 \mathbf{n} に関する離散座標信号を d 次元 DFT の第 \mathbf{k} 基底ベクトルという。

$$W(\mathbf{k}, \mathbf{n}) := \left(\prod_{l=1}^d N_l \right)^{-1/2} \exp i \left(\sum_{l=1}^d \frac{k_l n_l}{N_l} 2\pi \right)$$

III.3.2 DFT の定義

$d \in \mathbb{N}$, $N_l \in \mathbb{N}$ ($l = 1, 2, \dots, d$), $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ とする。 $\Omega := \{0, 1, \dots, N_1 - 1\} \times \{0, 1, \dots, N_2 - 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, N_d - 1\}$ とする。 f を周期が (N_1, N_2, \dots, N_d) であるような離散座標信号 $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$; $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_d]^\top \mapsto f(\mathbf{n})$ とするとき、次式で定義される、 \mathbf{k} に関する離散座標信号を f の DFT という。

$$\text{DFT}(f, \mathbf{k}) := \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} f(\mathbf{n})$$

III.3.3 Hermite な離散時間信号の DFT は実数である

$d, N_l, \mathbf{k}, \Omega, f$ の定義は III.3.2 と同じものとする。 f にさらに Hermite 性: $\overline{f(\mathbf{n})} = f(-\mathbf{n})$ を要請するとき、 $\text{DFT}(f, \mathbf{k})$ は実数となる。

Proof.

$$\begin{aligned} 2\text{Im}(\text{DFT}(f, \mathbf{k})) &= \text{DFT}(f, \mathbf{k}) - \overline{\text{DFT}(f, \mathbf{k})} \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} f(\mathbf{n}) - \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} W(\mathbf{k}, \mathbf{n}) \overline{f(\mathbf{n})} \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{n}_M := [N_1, \dots, N_d]^\top$ とすると、

$$\overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} = W(\mathbf{k}, -\mathbf{n}) = W(\mathbf{k}, \mathbf{n}_M - \mathbf{n})$$

また、 f の Hermite 性の仮定より

$$\overline{f(\mathbf{n})} = f(-\mathbf{n}) = f(\mathbf{n}_M - \mathbf{n})$$

以上より

$$\begin{aligned}
2\text{Im}(\text{DFT}(f, \mathbf{k})) &= \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} W(\mathbf{k}, \mathbf{n}_M - \mathbf{n})f(\mathbf{n}) - \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} W(\mathbf{k}, \mathbf{n})f(\mathbf{n}_M - \mathbf{n}) \\
&= \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} W(\mathbf{k}, \mathbf{n}_M - \mathbf{n})f(\mathbf{n}) - \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} W(\mathbf{k}, \mathbf{n}_M - \mathbf{n})f(\mathbf{n}) \\
&\quad (\{(\mathbf{n}, \mathbf{n}_M - \mathbf{n}) | \mathbf{n} \in \Omega\} = \{(\mathbf{n}_M - \mathbf{n}), \mathbf{n} | \mathbf{n} \in \Omega\} \text{ を用いた}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

III.3.3.1 系: Hermite な離散時間信号の IDFT は実数である

III.3.3 と同様にして示せる。

III.3.4 巡回畳み込みの DFT は DFT の積に比例する

$d, N_l, \mathbf{k}, \Omega$ の定義は III.3.2 と同じものとする。 f, g を周期が (N_1, N_2, \dots, N_d) であるような離散座標信号 $f, g: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$; $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_d]^\top \mapsto f(\mathbf{n}), g(\mathbf{n})$ とするとき、次が成り立つ。

$$\text{DFT}\left(f *_{\text{cyc}} g, \mathbf{k}\right) = \left(\prod_{l=1}^d N_l\right)^{1/2} \text{DFT}(f, \mathbf{k}) \text{DFT}(g, \mathbf{k})$$

Proof.

$\mathbf{N} := [N_1, \dots, N_d]^\top$ とする。

$$\begin{aligned}
\text{DFT}\left(f *_{\text{cyc}} g, \mathbf{k}\right) &= \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} \left(f *_{\text{cyc}} g\right)(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} f(\mathbf{m})g((\mathbf{n} - \mathbf{m})\% \mathbf{N}) \\
&= \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} f(\mathbf{m}) \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} g((\mathbf{n} - \mathbf{m})\% \mathbf{N}) \\
&= \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} f(\mathbf{m}) \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \left(\prod_{l=1}^d N_l\right)^{1/2} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{m})} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n} - \mathbf{m})} g((\mathbf{n} - \mathbf{m})\% \mathbf{N}) \\
&= \left(\prod_{l=1}^d N_l\right)^{1/2} \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{m})} f(\mathbf{m}) \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, (\mathbf{n} - \mathbf{m})\% \mathbf{N})} g((\mathbf{n} - \mathbf{m})\% \mathbf{N}) \\
&= \left(\prod_{l=1}^d N_l\right)^{1/2} \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{m})} f(\mathbf{m}) \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} g(\mathbf{n}) \\
&= \left(\prod_{l=1}^d N_l\right)^{1/2} \text{DFT}(f, \mathbf{k}) \text{DFT}(g, \mathbf{k})
\end{aligned}$$

□

III.3.5 Gaussian ノイズの DFT

$F(n) \in \mathbb{C}$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$) は互いに独立で、複素正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うとする
 $\left(p(f) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \frac{-\operatorname{Re}(f)^2 - \operatorname{Im}(f)^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \frac{-|f|^2}{2\sigma^2}\right)$ 。この DFT を $G(k) = \text{DFT}(F, k)$ とするとき、 $G(k)$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) もまた互いに独立で、複素正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う。

Proof.

$$P \in \mathbb{C}^{N \times N}, P_{k,n} := W(k, n) := \frac{1}{\sqrt{N}} \exp i \frac{kn}{N} 2\pi \quad (k, n \in \{0, 1, \dots, N-1\})$$

$$\mathbf{F} := [F(0), F(1), \dots, F(N-1)]^\top, \mathbf{G} := [G(0), G(1), \dots, G(N-1)]^\top$$

と定義すると

$$\mathbf{G} = P^* \mathbf{F}$$

となる。

$$\begin{aligned} \Pr[\mathbf{G} = \mathbf{g} \in \mathbb{C}^N] &= \Pr[P^* \mathbf{F} = \mathbf{g}] = \Pr[\mathbf{F} = P\mathbf{g}] \\ &= \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \frac{-|(P\mathbf{g})[i]|^2}{2\sigma^2} = \left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right) \exp \sum_{i=0}^{N-1} \frac{-|(P\mathbf{g})[i]|^2}{2\sigma^2} \\ &= \left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right) \exp \frac{-\|P\mathbf{g}\|_2^2}{2\sigma^2} = \left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right) \exp \frac{-\|\mathbf{g}\|_2^2}{2\sigma^2} \\ &= \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \frac{-|g_i|^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

□

第 III.4 章

サンプリング定理

$d \in \mathbb{N}$, $W_l > 0$ ($l = 1, 2, \dots, d$), $\Omega := \prod_{l=1}^d [-W_l, W_l]$ とする。 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}(f, \omega)$ が存在してその台が Ω に含まれるとき、次式が成り立つ。

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}} f\left(\pi \frac{n_1}{W_1}, \dots, \pi \frac{n_d}{W_d}\right) \prod_{l=1}^d \text{sinc } W_l \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l}\right)$$

つまり f の各点での評価値を沢山集めて f を任意の精度で近似できる。

角周波数 W_l のかわりに周波数 $F_l = W_l/(2\pi)$ を使うと上式は次式になる。

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}} f\left(\frac{n_1}{2F_1}, \dots, \frac{n_d}{2F_d}\right) \prod_{l=1}^d \text{sinc } 2\pi F_l \left(x_l + \frac{n_l}{2F_l}\right)$$

Proof.

$\mathcal{F}(f, \omega)$ の台が超直方体 Ω に含まれるから $\mathcal{F}(f, \omega)$ は Fourier 級数展開できる。第 \mathbf{n} Fourier 係数を $c(\mathcal{F}(f), \mathbf{n})$ とすると

$$\mathcal{F}(f, \omega) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} c(\mathcal{F}(f), \mathbf{n}) \exp i \sum_{l=1}^d n_l \frac{\omega_l}{W_l} \pi$$

となる。 $c(\mathcal{F}(f), \mathbf{n})$ は次式で求まる。

$$\begin{aligned} c(\mathcal{F}(f), \mathbf{n}) &= \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} \int_{\Omega} \mathcal{F}(f, \boldsymbol{\xi}) \exp(-i) \sum_{l=1}^d n_l \frac{\xi_l}{W_l} \pi d\boldsymbol{\xi} \\ &= (2\pi)^{d/2} \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f, \boldsymbol{\xi}) \exp i \sum_{l=1}^d \left(\frac{-n_l}{W_l} \pi \right) \xi_l d\boldsymbol{\xi} \\ &= (2\pi)^{d/2} \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F}(f), \frac{-\pi \mathbf{n}}{\mathbf{W}} \right) \\ &= (2\pi)^{d/2} \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} f \left(\frac{-\pi \mathbf{n}}{\mathbf{W}} \right) \end{aligned}$$

f は $\mathcal{F}(f)$ の Fourier 逆変換で次のようにして求まる。

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f), \boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f, \boldsymbol{\omega}) \exp i \boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{x} d\boldsymbol{\omega} = (2\pi)^{-d/2} \int_{\Omega} \mathcal{F}(f, \boldsymbol{\omega}) \exp i \boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{x} d\boldsymbol{\omega} \\
&= (2\pi)^{-d/2} \int_{\Omega} \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d} c(\mathcal{F}(f), \boldsymbol{n}) \left(\exp i \sum_{l=1}^d n_l \frac{\omega_l}{W_l} \pi \right) \exp i \boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{x} d\boldsymbol{\omega} \\
&= (2\pi)^{-d/2} \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d} \int_{\Omega} c(\mathcal{F}(f), \boldsymbol{n}) \exp i \boldsymbol{\omega}^\top \left(\boldsymbol{x} + \pi \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{W}} \right) d\boldsymbol{\omega} \\
&= (2\pi)^{-d/2} \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d} \int_{\Omega} (2\pi)^{d/2} \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} f\left(\frac{-\pi \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{W}}\right) \exp i \boldsymbol{\omega}^\top \left(\boldsymbol{x} + \pi \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{W}} \right) d\boldsymbol{\omega} \\
&= \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d} f\left(\frac{-\pi \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{W}}\right) \int_{\Omega} \exp i \boldsymbol{\omega}^\top \left(\boldsymbol{x} + \pi \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{W}} \right) d\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \exp i \boldsymbol{\omega}^\top \left(\boldsymbol{x} + \pi \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{W}} \right) d\boldsymbol{\omega} &= \prod_{l=1}^d \int_{-W_l}^{W_l} \exp i \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) \omega_l d\omega_l \\
&= \prod_{l=1}^d \frac{1}{i \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right)} \left[\exp i \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) W_l - \exp(-i) \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) W_l \right] \\
&= \prod_{l=1}^d 2W_l \frac{\sin \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) W_l}{\left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) W_l} = \prod_{l=1}^d 2W_l \prod_{l=1}^d \operatorname{sinc} W_l \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right)
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d} f\left(\frac{-\pi \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{W}}\right) \prod_{l=1}^d 2W_l \operatorname{sinc} \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) W_l = \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d} f\left(\frac{\pi \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{W}}\right) \prod_{l=1}^d \operatorname{sinc} W_l \left(x_l - \pi \frac{n_l}{W_l} \right) \\
&= \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d} f\left(\pi \frac{n_1}{W_1}, \dots, \pi \frac{n_d}{W_d}\right) \prod_{l=1}^d \operatorname{sinc} W_l \left(x_l - \pi \frac{n_l}{W_l} \right)
\end{aligned}$$

□

第 III.5 章

高速 Fourier 変換 (FFT)

III.5.1 長さが 2 のべき乗でない信号の DFT を長さが 2 のべき乗の信号の FFT に帰着する方法

N を 2 のべき乗でない自然数とする。長さ N の信号 x の DFT

$$X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left(2\pi i \frac{-kn}{N}\right) \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

を長さが 2 のべき乗である信号の FFT に帰着する方法を考える。 $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab = \frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{2}$ を用いて上の式を次のように変形する。

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\pi i \frac{-k^2}{N}\right) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left(\pi i \frac{-n^2}{N}\right) \exp\left(\pi i \frac{(k-n)^2}{N}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\pi i \frac{-k^2}{N}\right) \sum_{n=0}^{N-1} u(n)v(k-n) \\ \text{where } u(n) &:= x(n) \exp\left(\pi i \frac{-n^2}{N}\right), v(n) := \exp\left(\pi i \frac{n^2}{N}\right) \\ \therefore X(k)\sqrt{N} \exp\left(\pi i \frac{k^2}{N}\right) &= (u * v)(k) \end{aligned}$$

$u * v$ を、長さが 2 のべき乗の信号に対して使える FFT, IFFT を用いて計算する。そのために長さが 2 のべき乗の信号同士の**巡回畳み込み**の中に $u * v$ が部分的に現れるような状況を以下のようにして作り出す。

$N_2 := \min\{a | \exists b \in \mathbb{N}, a = 2^b \geq 2N\}$ とする。長さ N_2 の信号 u_2, v_2 を以下のように定義する。

$$u_2(n) := \begin{cases} u(n) & (n \in [0, N-1]) \\ 0 & (n \in [N, N_2-1]) \end{cases}$$
$$v_2(n) := \begin{cases} v(n) & (n \in [0, N-1]) \\ 0 & (n \in [N, N_2-N]) \\ v(N_2-n) & (n \in [N_2-N+1, N_2-1]) \end{cases}$$

u_2 は u の後ろに 0 を並べて長さ N_2 に拡張した信号である。 v_2 は長さ N_2 の 0 が並んだ信号の前部を v で塗り替え、後部を v の第 1 ~ $N-1$ 要素をコピーして順番を逆にしたもの塗り替えた信号である。下の図は u_2, v_2 を視覚的に表現したものである。

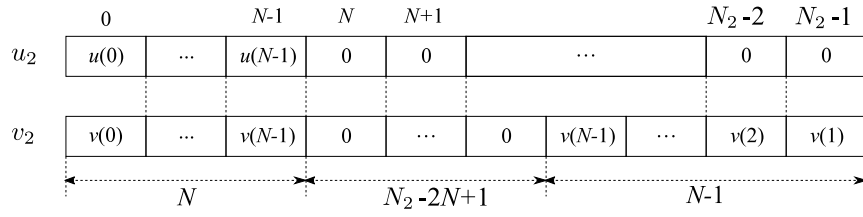


図 III.5.1 u_2, v_2 の構造

このようにすると $u_2 * v_2$ の先頭 N 要素が $u * v$ と一致する。

$$\text{FFT}(u_2 * v_2) = \sqrt{N_2} \text{FFT}(u_2) \text{FFT}(v_2)$$

より

$$\text{IFFT}(\sqrt{N_2} \text{FFT}(u_2) \text{FFT}(v_2))$$

により $u_2 * v_2$ を高速に計算し、結果の先頭 N 要素を切り出せば $u * v$ を得る。得られた $u * v$ の第 k 要素に $\frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\pi i \frac{-k^2}{N}\right)$ を掛ければ x の DFT が得られる。 v_2 の FFT や $\frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\pi i \frac{-k^2}{N}\right)$ ($k = 0, 1, \dots, N - 1$) は初回の計算結果を保存しておけば別の信号の DFT の計算で再利用できる。

第 IV 部

Laplace 变换

IV.0.1 複素指数関数入力に対する伝達関数の作用

$A > 0, \omega \in \mathbb{R}$ とする。連続時間信号 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を次のように定める。

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{i\omega t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

$H: s \in \mathbb{C} \mapsto H(s) \in \mathbb{C}$ を proper で既約な有理関数とする。また、 H の極の実部は全て負であるとする。伝達関数が $H(s)$ である連続時間システムに信号 f を入力した時の出力を g とすると、十分大きい t に対して $g(t) \sim H(i\omega)f(t)$ となる。

Proof.

N_p を $H(s)$ の分母多項式の相異なる零点の個数とし、それら零点を p_0, \dots, p_{N_p} とする。零点 p_k の次数を $N_{p,k}$ とし、 $H(s)$ の部分分数展開を

$$H(s) = c_0 + \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{l=1}^{N_{p,k}} \frac{c_{k,l}}{(s - p_k)^l}$$

とする。ここに $c_0, c_{k,l}$ ($k = 1, \dots, N_p, l = 1, \dots, N_{p,k}$) は適当な複素数である。 f, g の Laplace 変換をそれぞれ F, G とすると $G(s) = H(s)F(s) = AH(s)/(s - i\omega)$ である。この部分分数展開に現れる、 $1/(s - p_k)^l$ ($k = 1, \dots, N_p, l = 1, \dots, N_{p,k}$) に比例する項は逆 Laplace 変換すると $t^{l-1}e^{p_k t}$ に比例する関数となり、 $t \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。 (1)

残りの項、すなわち $1/(s - i\omega)$ に比例する項は $AH(i\omega)/(s - i\omega) = H(i\omega)F(s)$ となる。以上より、十分大きい t に対して $g(t) \sim \mathcal{L}^{-1}[H(i\omega)F(s)](t) = H(i\omega)f(t)$ となる。 \square

IV.0.1.1 系: 正弦波入力に対する伝達関数の作用

$A > 0, \omega \in \mathbb{R}$ とする。連続時間信号 $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定める。

$$f_1(t) = \begin{cases} A \cos \omega t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} A \sin \omega t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

H を直前の定理と同じように定める。伝達関数が $H(s)$ である連続時間実システムに信号 f_1, f_2 を入力した時の出力をそれぞれ g_1, g_2 とすると、十分大きい t に対して

$$g_1(t) \sim |H(i\omega)| \cos(\omega t + \text{Arg}(H(i\omega)))$$

$$g_2(t) \sim |H(i\omega)| \sin(\omega t + \text{Arg}(H(i\omega)))$$

となる。

Proof.

f_1 について示す。 f_2 も同様に示せる。 $f_1(t) = \text{Re}(Ae^{i\omega t})$ であり、実数システムだから出力は $Ae^{i\omega t}$ を入力したときの出力の実部と等しい。直前の定理の結果を用いて

$$g_1(t) = \text{Re}(H(i\omega)Ae^{i\omega t}) = \text{Re}\left(|H(i\omega)|e^{i\text{Arg}(H(i\omega))}Ae^{i\omega t}\right) = |H(i\omega)|\cos(\omega t + \text{Arg}(H(i\omega)))$$

□

Proof. (直接的な証明)

f_1 について示す。 f_2 も同様に示せる。直前の定理の証明の (1) までは同じである。 f_1, g_1 の Laplace 変換をそれぞれ F_1, G_1 とすると

$$F_1(s) = \frac{As}{s^2 + \omega^2} = \frac{A}{2} \left(\frac{1}{s + i\omega} + \frac{1}{s - i\omega} \right)$$

であるから、 $G_1(s) = H(s)F(s)$ の部分分数展開のうち $1/(s + i\omega)$, $1/(s - i\omega)$ に比例する項を詳しく調べれば良い。 $1/(s + i\omega)$ の係数は

$$G(s)X(s)(s + i\omega)|_{s \rightarrow -i\omega} = AG(-i\omega)/2$$

となり、 $1/(s - i\omega)$ の係数は

$$G(s)X(s)(s - i\omega)|_{s \rightarrow i\omega} = AG(i\omega)/2$$

となる。よってこれらの項の和は

$$\begin{aligned} & \frac{AG(-i\omega)/2}{s + i\omega} + \frac{AG(i\omega)/2}{s - i\omega} = \frac{A}{2} \left(\frac{G(-i\omega)}{s + i\omega} + \frac{G(i\omega)}{s - i\omega} \right) \\ &= \frac{A}{2} \times \frac{1}{s^2 + \omega^2} (G(-i\omega)(s - i\omega) + G(i\omega)(s + i\omega)) \\ &= \frac{As}{s^2 + \omega^2} \times \frac{1}{2} (G(i\omega) + G(-i\omega)) + \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \times \frac{-1}{2i} (G(i\omega) - G(-i\omega)) \end{aligned} \quad (1)$$

$G(s)$ は有理式なので $G(-i\omega) = \overline{G(i\omega)}$ となることに注意して

$$\frac{1}{2} (G(i\omega) + G(-i\omega)) = |G(i\omega)| \frac{1}{2} \left(e^{i\text{Arg}(G(i\omega))} + e^{-i\text{Arg}(G(i\omega))} \right) = |G(i\omega)| \cos \text{Arg}(G(i\omega))$$

同様に

$$\frac{-1}{2i} (G(i\omega) - G(-i\omega)) = -|G(i\omega)| \sin \text{Arg}(G(i\omega))$$

以上より、

$$\begin{aligned} (1) &= |G(i\omega)| \left(\cos \text{Arg}(G(i\omega)) \frac{As}{s^2 + \omega^2} - \sin \text{Arg}(G(i\omega)) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\ g(t) &\sim \mathcal{L}^{-1}[(1)](t) = |G(i\omega)| (\cos \text{Arg}(G(i\omega)) \cos \omega t - \sin \text{Arg}(G(i\omega)) \sin \omega t) \\ &= |G(i\omega)| \cos(\omega t + \text{Arg}(G(i\omega))) \end{aligned}$$

□

第 V 部

Z 变换

第 V.1 章

基礎理論

V.1.1 最終値定理

$X(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) を離散時間信号 $x(n)$ ($n \in \mathbb{Z}, \forall n < 0, x(n) = 0$) の Z 変換とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$ が存在するとき次が成り立つ。

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$$

但し上式に於ける $\lim_{z \rightarrow 1}$ では z が実軸上で右側から 1 に近づくことを意味する。

Proof.

$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$ とする。発想としては、十分大きい $N \in \mathbb{N}$ に対して $\sum_{k=N}^{\infty} x(k)z^{-k} \sim \sum_{k=N}^{\infty} \alpha z^{-k} = \alpha z^{-N} \frac{z}{z-1}$ となることを利用する。

任意の $\varepsilon \in (0, 1)$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $\forall n \geq N, |x(n) - \alpha| < \varepsilon$ となる。

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F(z) - \alpha &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)z^N F(z) - \alpha \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)z^N \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k)z^{-k} + \sum_{k=N}^{\infty} x(k)z^{-k} \right) - (z - 1)z^N \sum_{k=N}^{\infty} \alpha z^{-k} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)z^N \sum_{k=N}^{\infty} (x(n) - \alpha)z^{-k} \quad \left(\sum_{k=0}^{N-1} \text{の項は極限で消える} \right) \\ |(1)| &\leq \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)z^N \sum_{k=N}^{\infty} |x(n) - \alpha|z^{-k} < \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)z^N \sum_{k=N}^{\infty} \varepsilon z^{-k} = \varepsilon \end{aligned} \tag{1}$$

□

V.1.2 複素指数関数入力に対する伝達関数の作用

$A > 0, \omega \in \mathbb{R}$ とする。離散時間信号 $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を次のように定める。

$$x(n) = \begin{cases} Ae^{i\Omega n} & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$

$H: z \in \mathbb{C} \mapsto H(z) \in \mathbb{C}$ を、 $1/z$ を変数とした有理式として既約であるような有理関数とする。また、 H の極の絶対値は全て 1 未満であるとする。伝達関数が $H(z)$ である離散時間システムに信号 x を入力した時の出力を y とすると、十分大きい n に対して $y(n) \sim H(e^{i\Omega})x(n)$ となる。

Proof.

N_p を $H(s)$ の相異なる極の個数とし、それら極を p_0, \dots, p_{N_p} とする。極 p_k の次数を $N_{p,k}$ とし、 $H(z)$ の部分分数展開を

$$H(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{l=1}^{N_{p,k}} \frac{c_{k,l}}{(1 - p_k z^{-1})^l}$$

とする。ここに $c_0, c_{k,l}$ ($k = 1, \dots, N_p, l = 1, \dots, N_{p,k}$) は適当な複素数である。 x, y の Z 変換をそれぞれ X, Y とすると $Y(z) = H(z)F(z) = AH(z)/(1 - e^{i\Omega}z^{-1})$ である。この部分分数展開に現れる、 $1/(1 - p_k z^{-1})^l$ ($k = 1, \dots, N_p, l = 1, \dots, N_{p,k}$) に比例する項は逆 Z 変換すると n の多項式と公比 p_k の等比級数の積となり、 $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。(このことは Z 変換の性質: 時間シフト $\mathcal{Z}[x(n+k)] = z^k X(z)$ 、および Z 領域微分 $\mathcal{Z}[nx(n)] = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[x(n)]$ を繰り返し用いることで分かる)

残りの項、すなわち $1/(1 - e^{i\Omega}z^{-1})$ に比例する項は $AH(e^{i\Omega})/(1 - e^{i\Omega}z^{-1}) = H(e^{i\Omega})X(z)$ となる。 \square

第 V.2 章

IIR フィルタの計算手順

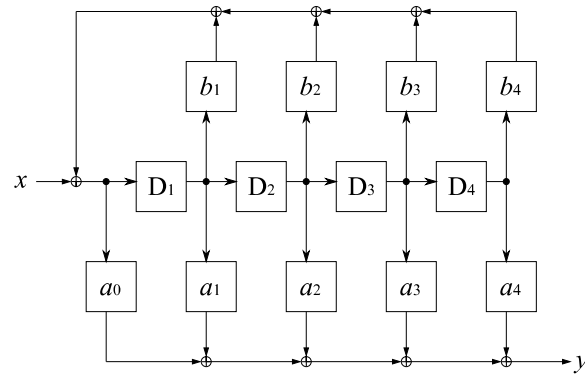


図 V.2.1 IIR フィルタのブロック図の例

上の例で示した IIR フィルタの出力は以下の手続きで計算できる (仕事に関わっていたデジタル無線機の信号処理部でそうやっていた)。

1. $D_1, \dots, D_4 \leftarrow 0$
2. $n \leftarrow 0$
3. $\alpha \leftarrow a_1 D_1 + \dots + a_4 D_4$
4. $\beta \leftarrow b_1 D_1 + \dots + b_4 D_4$
5. $\gamma \leftarrow x(n) + \beta$
6. $y(n) \leftarrow \alpha + a_0 \gamma$
7. $D_4 \leftarrow D_3, D_3 \leftarrow D_2, D_2 \leftarrow D_1, D_1 \leftarrow \gamma$
8. $n \leftarrow n + 1$
9. n が x の定義域の末尾に達しているなら終了。そうでないなら 3 に戻る。

参考文献