

motchy の信号処理備忘録

motchy

2019 年 11 月 16 日 ~ 2022 年 3 月 21 日
ver 0.3.0

目次

第 I 部	表記法	3
第 I.1 章	数字記号	4
第 I.2 章	連続座標信号の表現	5
第 I.3 章	離散座標信号の表現	6
第 II 部	畳み込み	7
第 II.1 章	巡回畳み込み	8
II.1.1	巡回畳み込みの可換則	8
第 II.2 章	諸定理	10
II.2.1	線形変換と畳み込みの順序交換	10
II.2.1.1	動機	10
II.2.1.2	理論	10
II.2.2	数値実験	11
第 III 部	Fourier 解析	12
第 III.1 章	Fourier 級数展開	13
III.1.1	基底関数	13
III.1.2	Fourier 係数	13
第 III.2 章	Fourier 変換	14
III.2.1	基底関数	14
III.2.2	Fourier 変換の定義	14
III.2.3	逆 Fourier 変換	14
III.2.4	周波数表示された Fourier 変換との関係	14
III.2.4.1	逆変換により元の関数に戻ること	15
第 III.3 章	離散時間 Fourier 変換 (DTFT)	16
III.3.1	直観的な説明	16
III.3.2	定義	16
III.3.2.1	呼称について	16
III.3.3	連続座標信号との関係	16
III.3.4	逆離散時間 Fourier 変換 (IDTFT)	17
III.3.4.1	IDTFT が DTFT の逆変換であること	17
III.3.5	積と畳み込みとの関係	17
III.3.5.1	時間領域, 周波数領域の畳み込みの定義	17
III.3.5.2	積の DTFT	18
III.3.5.3	畳み込みの DTFT	18
III.3.5.4	積の IDTFT	18
III.3.5.5	畳み込みの IDTFT	19
III.3.6	定数関数 1 の DTFT	19
III.3.7	単一周波数波の DTFT の導出	21
III.3.8	エイリアシングとの関係	21
III.3.9	システムの伝達関数と正弦波入力との関係	22
III.3.10	Gaussian ノイズの DTFT	24
III.3.10.1	パワースペクトルの性質	24
III.3.10.2	Fourier 変換との関係	24
第 III.4 章	離散 Fourier 変換 (DFT)	25
III.4.1	基底	25
III.4.2	DFT の定義	25
III.4.3	Hermite な離散時間信号の DFT は実数である	25
III.4.3.1	系: Hermite な離散時間信号の IDFT は実数である	26
III.4.4	巡回畳み込みの DFT は DFT の積に比例する	26
III.4.5	Gaussian ノイズの DFT	27
第 III.5 章	サンプリング定理	28
第 III.6 章	高速 Fourier 変換 (FFT)	30
III.6.1	長さが 2 のべき乗でない信号の DFT を長さが 2 のべき乗の信号の FFT に帰着する方法	30

第 IV 部	Laplace 変換	32
第 IV.1 章	複素指数関数入力に対する伝達関数の作用	33
IV.1.1	系: 正弦波入力に対する伝達関数の作用	34
第 V 部	Z 変換	36
第 V.1 章	基礎理論	37
V.1.1	最終値定理	37
V.1.2	複素指数関数入力に対する伝達関数の作用	38
第 V.2 章	IIR フィルタの計算手順	39
第 VI 部	応用	40
第 VI.1 章	信号検出	41
VI.1.1	位置特定に於ける cos 類似度による方法と最良近似による方法の等価性	41
VI.1.1.1	手法 1: cos 類似度の絶対値の最大化	41
VI.1.1.2	手法 2: 最良近似	42
VI.1.1.3	手法 1,2 の等価性	42
第 VII 部	その他	43
第 VII.1 章	Heaviside の階段関数	44
VII.1.1	積分表示	44
参考文献		45

第Ⅰ部

表記法

第 I.1 章

数学記号

- \mathbb{F} : 体
- \mathbb{Z} : 整数全体の集合
- \mathbb{R} : 実数全体の集合
- \mathbb{C} : 複素数全体の集合
- $\mathbf{a} \oslash \mathbf{b}$ ($d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{F}^d$, $b_i \neq 0$ for all i): $[a_1/b_1, \dots, a_d/b_d]^\top$
- $a \% b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$): a を b で割った余り。符号に 2 通り考えられるが、本書では結果を 0 以上 $|a|$ 未満とする定義を採用する。
- $\mathbf{a} \% \mathbf{b}$ ($d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^d$, $b_i \neq 0$ for all i): $[a_1 \% b_1, \dots, a_d \% b_d]^\top$
- $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ ($d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$): $\Leftrightarrow x_i \leq y_i$ for all i 。 $\geq, <, >$ についても同様。

第 1.2 章

連続座標信号の表現

連続的な座標値 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{d_1}$ ($d_1 \in \mathbb{N}$) から \mathbb{R}^{d_2} ($d_2 \in \mathbb{N}$) への写像を d_1 次元連続座標信号という。信号値は全ての座標に対して定義される必要はない。

例えばカセットテープレコーダーに記録された音声信号は $d_1 = d_2 = 1$ のものである。

信号 f の位置 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{d_1}]^\top$ での値を $f(\boldsymbol{x})$ や $f(x_1, \dots, x_{d_1})$ で表す。

第 1.3 章

離散座標信号の表現

離散的な座標値 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^{d_1}$ ($d_1 \in \mathbb{N}$) から \mathbb{R}^{d_2} ($d_2 \in \mathbb{N}$) への写像を d_1 次元離散座標信号という。信号値は全ての座標に対して定義される必要はない。

例えば離散的な時刻での電圧のサンプリングデータは $d_1 = d_2 = 1$ のものである (この場合の「座標」は時間軸上での座標という意味になる)。また、コンピュータのディスプレイに映る 2 次元カラー画像は $d_1 = 2, d_2 = 3$ のものである。

信号 f の位置 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{d_1}]^\top$ での値を $f(\boldsymbol{x})$ や $f(x_1, \dots, x_{d_1})$ で表す。

第Ⅱ部

畳み込み

第 II.1 章

巡回畳み込み

$\Omega := \{0, 1, \dots, N_1 - 1\} \times \{0, 1, \dots, N_2 - 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, N_d - 1\}$ とする。 f, g を周期が^s (N_1, \dots, N_d) であるような離散座標信号 $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$; $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_d]^\top \mapsto f(\mathbf{n}), g(\mathbf{n})$ とする。 $\mathbf{N} := [N_1, \dots, N_d]^\top$ とする。 f と g の巡回畳み込み $f *_{\text{cyc}} g$ を次式で定義する。

$$\left(f *_{\text{cyc}} g\right)(\mathbf{n}) := \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} f(\mathbf{m})g((\mathbf{n} - \mathbf{m})\% \mathbf{N})$$

II.1.1 巡回畳み込みの可換則

Ω, f, g の定義を II.1 と同じものとするとき、次が成り立つ。

$$f *_{\text{cyc}} g = g *_{\text{cyc}} f$$

Proof.

$$\begin{aligned} \left(g *_{\text{cyc}} f\right)(\mathbf{n}) &= \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} g(\mathbf{m})f((\mathbf{n} - \mathbf{m})\% \mathbf{N}) \\ &= \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g(m_1, \mathbf{m}_2)f((n_1 - m_1)\% N_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2)\% \mathbf{N}_2) \end{aligned} \quad (1)$$

ここに $\mathbf{n}_i := [n_i, \dots, n_d]^\top$ ($\mathbf{m}_i, \mathbf{N}_i$ も同様), $\Omega_i := \{0, 1, \dots, N_i - 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, N_d - 1\}$ である。

$$\begin{aligned}
(1) &= \sum_{m_1=0}^{n_1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g(m_1, \mathbf{m}_2) f(n_1 - m_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&\quad + \sum_{m_1=n_1+1}^{N_1-1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g(m_1, \mathbf{m}_2) f(n_1 + N_1 - m_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&= \sum_{l_1=n_1}^0 \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g(n_1 - l_1, \mathbf{m}_2) f(l_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&\quad + \sum_{l_1=N_1-1}^{n_1+1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g(n_1 + N_1 - l_1, \mathbf{m}_2) f(l_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&= \sum_{l_1=n_1}^0 \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g((n_1 - l_1) \% N_1, \mathbf{m}_2) f(l_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&\quad + \sum_{l_1=N_1-1}^{n_1+1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g((n_1 - l_1) \% N_1, \mathbf{m}_2) f(l_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&= \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g((n_1 - l_1) \% N_1, \mathbf{m}_2) f(l_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2)
\end{aligned}$$

同様の変形を繰り返すと最終的に次のようになる。

$$\left(g *_{\text{cyc}} f \right) (\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{l} \in \Omega} g((\mathbf{n} - \mathbf{l}) \% \mathbf{N}) f(\mathbf{l}) = \left(f *_{\text{cyc}} g \right) (\mathbf{n})$$

□

第 II.2 章

諸定理

II.2.1 線形変換と畳み込みの順序交換

II.2.1.1 動機

画像処理に於いてカーネルとの畳み込みを実行してから線形変換を施す場合と、事前に画像とカーネルの両方に線形変換を施してから畳み込む場合の結果の違いに関心がある。

II.2.1.2 理論

$d \in \mathbb{N}$ とし、 $f: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mapsto f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ を d 次元信号とする。線形変換を表す正則行列を A とし、 A による変換を T_A と表す。 T_A による変換は次式を以て定義する。

$$T_A(f)(\mathbf{x}) = f(A^{-1}\mathbf{x})$$

$G: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mapsto G(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ を d 次元信号とする。このとき次式が成り立つ。

$$T_A(G) * T_A(f) = |A| T_A(G * f)$$

Proof.

μ を Jordan 測度とする。

$$\begin{aligned} T_A(G) * T_A(f)(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^d} T_A(G)(\mathbf{x} - \mathbf{u}) T_A(f)(\mathbf{u}) \mu(d\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}^d} G(A^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{u})) f(A^{-1}\mathbf{u}) \mu(d\mathbf{u}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} G(A^{-1}\mathbf{x} - A^{-1}\mathbf{u}) f(A^{-1}\mathbf{u}) \mu(d\mathbf{u}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} G(A^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{v}) f(\mathbf{v}) \|A\| \mu(d\mathbf{v}) \\ &\quad (\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{u} \text{ と変数変換した。}\|A\| \text{ は } |A| \text{ の絶対値である。}) \\ &= \|A\| \int_{\mathbb{R}^d} G(A^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{v}) f(\mathbf{v}) \mu(d\mathbf{v}) \\ &= \|A\| T_A(G * f)(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

□

II.2.2 数値実験

Mathematica による例が「線形変換と畳み込み.nb」にある。

第 III 部

Fourier 解析

第 III.1 章

Fourier 級数展開

III.1.1 基底関数

Fourier 級数展開の基底関数は Fourier 変換や DFT のものと違って正規化されていないため、美しさに欠ける。

$d \in \mathbb{N}$, $W_l > 0$ ($l = 1, 2, \dots, d$), $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ とする。次式で定義される、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ に関する連続座標信号を、区間 $\prod_{l=1}^d [-W_l, W_l]$ に於ける第 \mathbf{k} 基底関数という。

$$W(\mathbf{k}, \mathbf{x}) := \exp i \sum_{l=1}^d k_l \frac{x_l}{W_l} \pi$$

III.1.2 Fourier 係数

$d \in \mathbb{N}$, $W_l > 0$ ($l = 1, 2, \dots, d$), $\Omega := \prod_{l=1}^d [-W_l, W_l]$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ とする。 $f: \mathbf{x} \in \mathbb{R} \mapsto f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ を、第 l 座標に関して周期が $2W_l$ であるような周期関数とする。次式で定義する、 \mathbf{k} に関する離散座標信号を f の第 \mathbf{k} Fourier 係数という。

$$c(f, \mathbf{k}) := \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} \int_{\Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{x})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

第 III.2 章

Fourier 変換

III.2.1 基底関数

$d \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$ とする。次のものを d 次元 Fourier 変換に於ける基底関数という。

$$W(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x}) := (2\pi)^{-d/2} \exp i\boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{x}$$

III.2.2 Fourier 変換の定義

$d \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$ とする。 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、次式で定義される、 $\boldsymbol{\omega}$ に関する連続座標信号を f の Fourier 変換という。

$$\mathcal{F}(f)(\boldsymbol{\omega}) := \int_{\mathbb{R}^d} \overline{W(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x}) d^d \boldsymbol{x} = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i\boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) d^d \boldsymbol{x}$$

III.2.3 逆 Fourier 変換

$d \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ とする。 $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、次式で定義される、 \boldsymbol{x} に関する連続座標信号を F の逆 Fourier 変換という。

$$\mathcal{F}^{-1}(F)(\boldsymbol{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} W(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x}) F(\boldsymbol{\omega}) d^d \boldsymbol{\omega} = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{x}) F(\boldsymbol{\omega}) d^d \boldsymbol{\omega}$$

III.2.4 周波数表示された Fourier 変換との関係

上述の Fourier 変換の定義はその数学的対称性の美しさから、理学系で主に用いられる。一方、工学系では Fourier 変換結果の定義域を角周波数ではなく周波数にとることがしばしばある。本書では 2 種類の Fourier 変換を区別するために、周波数を定義域とする Fourier 変換を「周波数表示された Fourier 変換」と呼び分けることにする。

$d \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^d$ とする。 $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、次式で定義される、 \boldsymbol{f} に関する連続座標信号を g の周波数表示された Fourier 変換という。

$$\tilde{\mathcal{F}}(g)(\boldsymbol{f}) := \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i2\pi \boldsymbol{f}^\top \boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x}) d^d \boldsymbol{x}$$

また、 $G: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、次式で定義される、 \mathbf{x} に関する連続座標信号を G の周波数表示された逆 Fourier 変換という。

$$\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(G)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i2\pi \mathbf{f}^\top \mathbf{x}) G(\mathbf{f}) d^d \mathbf{f}$$

III.2.4.1 逆変換により元の関数に戻ることに

通常の Fourier 変換が $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ を満たすことを既知として、周波数表示された Fourier 変換が $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(\tilde{\mathcal{F}}(g))(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ を満たすことは $\boldsymbol{\omega} = 2\pi \mathbf{f}$ なる変数変換を用いて確かめられる。

$$\begin{aligned} G(\mathbf{f}) &:= \tilde{\mathcal{F}}(g)(\mathbf{f}) = (2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(g)(\boldsymbol{\omega}) \\ \tilde{\mathcal{F}}^{-1}(G)(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^d} G(\mathbf{f}) \exp(i2\pi \mathbf{f}^\top \mathbf{x}) d^d \mathbf{f} = \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(g)(\boldsymbol{\omega}) \exp(i\boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{x}) \det\left(\frac{1}{2\pi} I_d\right) d^d \boldsymbol{\omega} \\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(g)(\boldsymbol{\omega}) \exp(i\boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{x}) d^d \boldsymbol{\omega} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g))(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

第 III.3 章

離散時間 Fourier 変換 (DTFT)

III.3.1 直観的な説明

離散時間 Fourier 変換 (Discrete Time Fourier Transform; DTFT) とは、直観的には、離散座標信号を、連続的な周波数をもつ無数の離散時間信号の重ね合わせとして表現するものである。

III.3.2 定義

$d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{T}_s \in \mathbb{R}^d$ とする。 $f: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、次式で定義される、 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$ に関する連続座標信号を f の離散時間 Fourier 変換という。

$$\text{DTFT}(f)(\boldsymbol{\omega}) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{n}) \exp(-i(\boldsymbol{\omega} \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n})$$

$\boldsymbol{\omega}$ は各軸方向の角周波数をまとめて表したベクトルであり、 \mathbf{T}_s は各軸方向のサンプリング周期である。DTFT は $\boldsymbol{\omega}$ に関する周期関数であり、その周期は $2\pi \mathbf{1} \odot \mathbf{T}_s$ である。

III.3.2.1 呼称について

本書では関数の引数を時間や周波数に限定せず、より一般に座標と呼ぶ姿勢をとっている。しかし DTFT は電気・電子系の信号処理の分野で発展したため、離散“時間”という呼称が浸透しており、これに敢えて逆らって離散“座標”と呼ぶのは本書と工学応用の相性を悪くするだけで無益である。そこで、DTFT のような、歴史的な理由で呼称が定着しているものについては慣例に従うことにする。

III.3.3 連続座標信号との関係

連続座標信号 $f_c: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ をサンプリング周期 $\mathbf{T}_s := [T_{s,1}, T_{s,2}, \dots, T_{s,d}]^\top \in \mathbb{R}^d$ すなわち周波数 $\mathbf{f}_s := [f_{s,1}, f_{s,2}, \dots, f_{s,d}]^\top := [1/T_{s,1}, 1/T_{s,2}, \dots, 1/T_{s,d}]^\top \in \mathbb{R}^d$ でサンプリングした離散座標信号を $f_d: \mathbb{Z}^d \mapsto f_c(\mathbf{T}^\top \mathbf{n})$ とする。 f_d の DTFT に於ける多次元の角周波数 $\boldsymbol{\omega}$ を周波数 \mathbf{f} を用いて $\boldsymbol{\omega} := 2\pi \mathbf{f}$ と表す。

\mathbf{n} の第 k 要素 n_k が 1 だけ変化すると、元の連続座標信号の対応する座標は T_k だけ変化し、DTFT のカーネル関数 $\exp(i(\boldsymbol{\omega} \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n})$ の偏角は $\omega_k T_{s,k} = 2\pi f_k T_{s,k}$ だけ変化する。つまり DTFT の定義域に於ける周波数 \mathbf{f} の第 k 成分に対応する元の連続座標信号の周波数の第 k 成分は f_k であり、スケールは保たれている。

DTFT の定義で述べたように、DTFT は周期が $2\pi \mathbf{1} \odot \mathbf{T}_s$ であるから、一意に区別できる角周波数は $-\pi \odot \mathbf{T}_s \leq \boldsymbol{\omega} < \pi \odot \mathbf{T}_s$ 、つまり一意に区別できる周波数は $-\mathbf{f}_s/2 \leq \mathbf{f} < \mathbf{f}_s/2$ である。この事実と、先程述べた DTFT と元の連続座標信号との周波数の関係から、DTFT に於いて一意に区別できる周波数に対応する元の連続座標信号の周波数 $\tilde{\mathbf{f}}$ は $-\mathbf{f}_s/2 \leq \tilde{\mathbf{f}} < \mathbf{f}_s/2$ である。

III.3.4 逆離散時間 Fourier 変換 (IDTFT)

$d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{T}_s (\in \mathbb{R}^d) > \mathbf{0}$, $\Omega := \prod_{k=1}^d [-\pi/T_{s,k}, \pi/T_{s,k})$ とする。 $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、次式で定義される、 $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ に関する離散座標信号を F の逆離散時間 Fourier 変換 (Inverse DTFT; IDTFT) という。

$$\text{IDTFT}(F)(\mathbf{n}) := \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} F(\boldsymbol{\omega}) \exp(i(\boldsymbol{\omega} \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega}$$

III.3.4.1 IDTFT が DTFT の逆変換であること

厳密な導出はここでは述べないが、 $\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{n})$ が絶対収束する場合は $\text{IDTFT}(\text{DTFT}(f))(\mathbf{n}) = f(\mathbf{n})$ となることを簡単に証明できる。 \sum と \int の順序交換が簡単に行えるからである。

III.3.5 積と畳み込みとの関係

以下では既出の記号の定義は上書きしない限り引き継ぐ。 $f, g : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対してその DTFT を $F(\boldsymbol{\omega}), G(\boldsymbol{\omega})$ とする。

III.3.5.1 時間領域, 周波数領域の畳み込みの定義

時間領域の畳み込みを次で定義する:

$f, g : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対してその畳み込み $f * g$ を次式で定義する。

$$(f * g)(\mathbf{n}) := \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{m}) g(\mathbf{n} - \mathbf{m})$$

周波数領域の畳み込みを次で定義する:

$F, G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対してその畳み込み $F * G$ を次式で定義する。

$$(F * G)(\boldsymbol{\omega}) := \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} F(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) G(\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}) d\tilde{\boldsymbol{\omega}}$$

III.3.5.2 積の DTFT

f, g の積の DTFT は次式で求まる。

$$\begin{aligned}
\text{DTFT}(fg)(\omega) &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{n})g(\mathbf{n}) \exp(-i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \text{IDTFT}(F)(\mathbf{n})g(\mathbf{n}) \exp(-i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) \\
&= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \left(\frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} F(\tilde{\omega}) e^{i(\tilde{\omega} \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}} d\tilde{\omega} \right) g(\mathbf{n}) \exp(-i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) \\
&= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} F(\tilde{\omega}) \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} g(\mathbf{n}) e^{-i((\omega - \tilde{\omega}) \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}} \right) d\tilde{\omega} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} F(\tilde{\omega}) G(\omega - \tilde{\omega}) d\tilde{\omega} = (F * G)(\omega)
\end{aligned}$$

III.3.5.3 畳み込みの DTFT

f, g の畳み込みの DTFT は次式で求まる。

$$\begin{aligned}
\text{DTFT}(f * g)(\omega) &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{m})g(\mathbf{n} - \mathbf{m}) \exp(-i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) \\
&= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{m}) \exp(-i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{m}) \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} g(\mathbf{n} - \mathbf{m}) \exp(-i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top (\mathbf{n} - \mathbf{m})) \\
&= F(\omega)G(\omega)
\end{aligned}$$

III.3.5.4 積の IDTFT

DTFT の可逆性から直ちに言えるが、敢えて直接計算してみる。

$$\begin{aligned}
\text{IDTFT}(FG)(\mathbf{n}) &= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} F(\omega)G(\omega) \exp(i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\omega \\
&= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} (\text{DTFT}(f)(\omega)) G(\omega) \exp(i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\omega \\
&= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} \left(\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{m}) \exp(-i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{m}) \right) G(\omega) \exp(i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\omega \\
&= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{m}) \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} G(\omega) \exp(i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top (\mathbf{n} - \mathbf{m})) d\omega \\
&= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{m})g(\mathbf{n} - \mathbf{m}) = (f * g)(\mathbf{n})
\end{aligned}$$

III.3.5.5 畳み込みの IDTFT

DTFT の可逆性から直ちに言えるが、敢えて直接計算してみる。

$$\begin{aligned}
& \text{IDTFT}(F * G)(\mathbf{n}) \\
&= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\boldsymbol{\omega} \in \Omega} (F * G)(\boldsymbol{\omega}) \exp(i(\boldsymbol{\omega} \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\boldsymbol{\omega} \in \Omega} \left(\frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\tilde{\boldsymbol{\omega}} \in \Omega} F(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) G(\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}) d\tilde{\boldsymbol{\omega}} \right) \exp(i(\boldsymbol{\omega} \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\tilde{\boldsymbol{\omega}} \in \Omega} \left(\frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\boldsymbol{\omega} \in \Omega} G(\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \exp(i((\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega} \right) \\
&\quad F(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) \exp(i(\tilde{\boldsymbol{\omega}} \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\tilde{\boldsymbol{\omega}} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\tilde{\boldsymbol{\omega}} \in \Omega} g(\mathbf{n}) F(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) \exp(i(\tilde{\boldsymbol{\omega}} \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\tilde{\boldsymbol{\omega}} \\
&= f(\mathbf{n}) g(\mathbf{n})
\end{aligned}$$

III.3.6 定数関数 1 の DTFT

簡単のため 1 次元の場合について考察する。工学系の学生を対象とする講義では、DTFT(1)(ω) = $(2\pi/T_s) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - 2m\pi/T_s)$ (δ は Dirac のデルタ関数) を詳細を割愛して結果として受け入れさせる場合が多いと思う。IDTFT($(2\pi/T_s) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - 2m\pi/T_s)$)(x) = 1 の確認は簡単であり、DTFT の可逆性から DTFT(1)(ω) = $(2\pi/T_s) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - 2m\pi/T_s)$ を受け入れる説明がなされると思う。

ここでは Dirichlet 積分を用いて DTFT(1)(ω) = $(2\pi/T_s) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - 2m\pi/T_s)$ を直接的に導出してみる。DTFT の定義から次式が成り立つ。

$$\text{DTFT}(1)(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N e^{i\omega T_s m} = \frac{\sin((N+1/2)\omega T_s)}{\sin(\omega T_s/2)}$$

最右辺は等比数列の和の公式を用いた後、分母と分子に $e^{-i\omega/2}$ を掛けて整理すると得られる。これが $N \rightarrow \infty$ で $(2\pi/T_s) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - 2m\pi/T_s)$ として振る舞うことを確かめる。 $2\pi/T_s$ 周期性については明らかだから、 $[-\pi/T_s, \pi/T_s]$ の範囲で $(2\pi/T_s)\delta(\omega)$ として振る舞うことを確かめれば十分である。示すべきことは次の通りである。

$d \in \mathbb{N}$ とする。区間 $\Omega \subseteq [-\pi/T_s, \pi/T_s]$ 上で連続な任意の関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$ を考える。 $h > 0$ を $[-h, h] \subseteq \Omega$ となるように任意にとる。このとき次式が成り立つ。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-h}^h \frac{\sin((N+1/2)xT_s)}{\sin(xT_s/2)} f(x) dx = \frac{2\pi}{T_s} f(0)$$

Proof.

極限をとる前の積分を I_N とおく。 $y = xT_s/2$ と変数変換すると次式を得る。

$$I_N = \frac{2}{T_s} \int_{-hT_s/2}^{hT_s/2} \frac{\sin(2N+1)y}{\sin y} f(2y/T_s) dy = \frac{2}{T_s} \int_{-hT_s/2}^{hT_s/2} \frac{\sin(2N+1)y}{y} \frac{y}{\sin y} f(2y) dy$$

後に現れる Dirichlet 積分の性質から $N \rightarrow \infty$ で積分の主要部分が $x = 0$ 近傍に集中することがこの時点で推察できる。そこで、十分に小さい正数 d' を $0 < d' < hT_s/2$ となるようにとり、積分区間を $[-hT_s/2, -d'] \cup [-d', d'] \cup [d', hT_s/2]$ と分割する。

$[-hT_s/2, -d'], [d', hT_s/2]$ に於いて $f(2y/T_s)/\sin y$ は一様連続であるので $N \rightarrow \infty$ でこの2つの区間に於ける $(f(2y/T_s)\sin(2N+1)y)/\sin y$ の積分は0に収束する。証明の方針としては、 $\sin(2N+1)y$ の符号が変化する点で積分区間を細分し、各区間内で $f(2y/T_s)/\sin y$ を定数で近似して全体の積分を近似すると、一様連続性から近似値と真の積分の差が0に収束し、かつ近似値が0に収束する。

つまり任意に小さい $\varepsilon > 0$ に対して、 d' に依存して決まる十分大きい自然数 N_1 が存在して次式が成り立つ。

$$N \geq N_1 \Rightarrow \left| \frac{2}{T_s} \int_{[-hT_s/2, -d'] \cup [d', hT_s/2]} \frac{\sin(2N+1)y}{\sin y} f(2y/T_s) dy \right| < \varepsilon$$

次に $[-d', d']$ に於ける積分を評価する。 $y \rightarrow 0$ で $y/\sin y \rightarrow 1$, $f(2y/T_s) \rightarrow f(0)$ であるから、 d' を十分小さくとりなおすことで $|f(2y/T_s)y/\sin y - f(0)| < \varepsilon$ となり次式が成り立つ。

$$\left| \frac{2}{T_s} \int_{-d'}^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} \frac{y}{\sin y} f(2y/T_s) dy - \frac{2}{T_s} f(0) \int_{-d'}^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} dy \right| < \frac{2\varepsilon}{T_s} \left| \int_{-d'}^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} dy \right|$$

最後に Dirichlet 積分を用いて $(\sin(2N+1)y)/\sin y$ の積分を評価する。

$$\int_{-d'}^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} dy = 2 \int_0^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} dy = 2 \int_0^{(2N+1)d'} \frac{\sin z}{z} dz \rightarrow \pi \text{ as } n \rightarrow \infty$$

すなわち d' に依存して決まる十分大きい自然数 N_2 が存在して次式が成り立つ。

$$N \geq N_1 \Rightarrow \left| \int_{-d'}^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} dy - \pi \right| < \varepsilon$$

以上より、 $d' > 0$ を十分に小さくとり、 $N \geq \max(N_1, N_2)$ とすれば次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \left| I_N - \frac{2\pi}{T_s} f(0) \right| &= \left| \underbrace{\left(\frac{2}{T_s} f(0) \int_{-d'}^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} dy - \frac{2\pi}{T_s} f(0) \right)}_{(1)} \right. \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{2}{T_s} \int_{-d'}^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} \frac{y}{\sin y} f(2y) dy - \frac{2}{T_s} f(0) \int_{-d'}^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} dy \right)}_{(2)} \\ &\quad \left. + \underbrace{\frac{2}{T_s} \int_{[-h/2, -d'] \cup [d', h/2]} \frac{\sin(2N+1)y}{\sin y} f(2y) dy}_{(3)} \right| \\ &\leq |(1)| + |(2)| + |(3)| < \frac{2f(0)}{T_s} \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{T_s} (\pi + \varepsilon) + \varepsilon \end{aligned}$$

□

III.3.7 単一周波数波の DTFT の導出

$T_s > 0$ とする。 $\sin(\omega_0 T_s n + \phi)$ ($\omega_0 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$) の DTFT は III.3.6 の結果を用いて次のようにして得られる。

$$\begin{aligned}
 \text{DTFT}(\sin(\omega_0 T_s n + \phi))(\omega) &= \frac{1}{2i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\exp(i(\omega_0 T_s m + \phi)) - \exp(-i(\omega_0 T_s m + \phi))) \exp(-i\omega T_s m) \\
 &= \frac{1}{2i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (e^{i\phi} \exp(i(\omega_0 - \omega)T_s m) - e^{-i\phi} \exp(i(-\omega_0 - \omega)T_s m)) \\
 &= \frac{1}{2i} e^{i\phi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega_0 - \omega - 2\pi m/T_s) - \frac{1}{2i} e^{-i\phi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(-\omega_0 - \omega - 2\pi m/T_s) \\
 &= \frac{1}{2i} e^{i\phi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(-(\omega - \omega_0) - 2\pi m/T_s) - \frac{1}{2i} e^{-i\phi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(-(\omega + \omega_0) - 2\pi m/T_s) \\
 &= \frac{1}{2i} e^{i\phi} \frac{2\pi}{T_s} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m/T_s) - \frac{1}{2i} e^{-i\phi} \frac{2\pi}{T_s} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m/T_s) \\
 &= \frac{\pi}{T_s i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (e^{i\phi} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m/T_s) - e^{-i\phi} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m/T_s))
 \end{aligned}$$

上の結果を利用して、 $\cos(\omega_0 T_s n + \phi)$ の DTFT は次式となる。

$$\begin{aligned}
 \text{DTFT}(\cos(\omega_0 T_s n + \phi))\omega &= \text{DTFT}(\sin(\omega_0 T_s n + \phi + \pi/2))(\omega) \\
 &= \frac{\pi}{T_s i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (e^{i(\phi+\pi/2)} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m/T_s) - e^{-i(\phi+\pi/2)} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m/T_s)) \\
 &= \frac{\pi}{T_s i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (ie^{i\phi} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m/T_s) + ie^{-i\phi} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m/T_s)) \\
 &= \frac{\pi}{T_s} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (e^{i\phi} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m/T_s) + e^{-i\phi} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m/T_s))
 \end{aligned}$$

III.3.8 エイリアシングとの関係

簡単のため 1 次元の場合について考察する。 $d \in \mathbb{N}$ とする。連続時間信号 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^d$ をサンプリング周期 T_s でサンプリングした信号 $\tilde{f}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}^d$ の DTFT を求める。 $F := \mathcal{F}(f)$ とする。

$$\begin{aligned}
 \text{DTFT}(\tilde{f})(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) e^{-i\omega T_s n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}(F)(nT_s) e^{-i\omega T_s n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') e^{i\omega' T_s n} d\omega' \right) e^{-i\omega T_s n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\omega' - \omega) T_s n} d\omega' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega' - \omega - 2\pi n/T_s) d\omega' \quad (\text{III.3.6 を用いた。}) \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') \delta(\omega' - \omega - 2\pi n/T_s) d\omega' = \frac{\sqrt{2\pi}}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + 2\pi n/T_s)
 \end{aligned}$$

このように、 $\text{DTFT}(\tilde{f})$ は F をスケールして $2\pi/T_s$ 周期で重ね合わせたものになる。 f が帯域制限信号である、すなわちある $\omega_0 \geq 0$ が存在して F の台が $[-\omega_0, \omega_0]$ の範囲に収まるとき、 T_s を十分に大きくと

れば、DTFT $\left(\tilde{f}\right)$ の一意に区別可能な角周波数の区間 $[-\pi/T_s, \pi/T_s]$ で DTFT $\left(\tilde{f}\right)$ は $(\sqrt{2\pi}/T_s)F$ と一致する。逆に T_s が小さいとき、 $[-\pi/T_s, \pi/T_s]$ の区間の端部付近で $F(\omega + 2\pi/T_s)$ や $F(\omega - 2\pi/T_s)$ が 0 でない値をとる。つまりサンプリングする前の連続時間信号には存在しなかった高周波成分が現れる。この現象を“Aliasing” (エイリアシング) と呼ぶ。

エイリアシングが生じない条件は、 $-\omega_0 + 2\pi/T_s > \omega_0$ すなわち $T_s < \pi/\omega_0$ である。周波数で表現するなら、帯域制限区間の端部の周波数 $f_0 := \omega_0/(2\pi)$, サンプリング周波数 $f_s := 1/T_s$ を用いて $f_s > 2f_0$ である。

III.3.9 システムの伝達関数と正弦波入力の関係

サンプリング時間を $T_s > 0$ とする。実数値の入力に対して実数値を出力するシステムの伝達関数が $H : \omega \in \mathbb{R} \mapsto H(\omega) \in \mathbb{C}$ であるとき、このシステムに単一周波数の正弦波 $f(n) := \sin(\omega_0 T_s n + \phi)$ ($-\pi/T_s \leq \omega_0 \leq \pi/T_s$) を入力したときの出力 $g(n)$ は次式となる。

$$g(n) = |H(\omega_0)| \sin(\omega_0 T_s n + \phi + \text{Arg}(H(\omega_0)))$$

$\omega_0 < -\pi/T_s, \pi/T_s < \omega_0$ のときは $\tilde{\omega}_0 := (\omega_0 + \pi/T_s) \% (2\pi/T_s) - \pi/T_s$ とすると $\sin(\omega_0 T_s n + \phi) = \sin(\tilde{\omega}_0 T_s n + \phi)$ となるので、 $-\pi/T_s \leq \omega_0 \leq \pi/T_s$ の場合のみを考慮すればよい。

(直接的で長い証明)

Proof.

システムのインパルス応答を $h(n) (\in \mathbb{R}) = \text{IDTFT}(H)(n)$ とすると $g(n) = (h * f)(n)$ と表される。

$$\begin{aligned}
g(n) &= (h * f)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)f(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} H(\omega) \exp(i\omega T_s m) d\omega \right) f(n-m) \\
&= \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} H(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(i\omega T_s m) f(n-m) d\omega \\
&= \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} \frac{1}{2i} H(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(i\omega T_s m) \left(\exp(i(\omega_0 T_s (n-m) + \phi)) \right. \\
&\quad \left. - \exp(-i(\omega_0 T_s (n-m) + \phi)) \right) d\omega \\
&= \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} \frac{1}{2i} H(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) \exp(i(\omega - \omega_0) T_s m) \right. \\
&\quad \left. - \exp(-i(\omega_0 T_s n + \phi)) \exp(i(\omega + \omega_0) T_s m) \right) d\omega \\
&= \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} \frac{1}{2i} H(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) \frac{2\pi}{T_s} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m/T_s) \right. \\
&\quad \left. - \exp(-i(\omega_0 T_s n + \phi)) \frac{2\pi}{T_s} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m/T_s) \right) d\omega \\
&= \frac{1}{2i} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} H(\omega) \left(\exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) \delta(\omega - \omega_0) - \exp(-i(\omega_0 T_s n + \phi)) \delta(\omega + \omega_0) \right) d\omega \\
&= \frac{1}{2i} \left(H(\omega_0) \exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) - H(-\omega_0) \exp(-i(\omega_0 T_s n + \phi)) \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left(H(\omega_0) \exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) - \overline{H(\omega_0) \exp(i(\omega_0 T_s n + \phi))} \right) \\
&\quad (h(n) \in \mathbb{R} \text{ なのて } H(-\omega_0) = \overline{H(\omega_0)}) \\
&= \frac{1}{2i} 2i \text{Im} \left(H(\omega_0) \exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) \right) \\
&= \text{Re} \left(H(\omega_0) \right) \text{Im} \left(\exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) \right) + \text{Im} \left(H(\omega_0) \right) \text{Re} \left(\exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) \right) \\
&= \text{Re} \left(H(\omega_0) \right) \sin(\omega_0 T_s n + \phi) + \text{Im} \left(H(\omega_0) \right) \cos(\omega_0 T_s n + \phi) \\
&= |H(\omega)| \sin(\omega_0 T_s n + \phi + \text{Arg}(H(\omega_0)))
\end{aligned}$$

□

(DTFT を経由した短い証明)

Proof.

f, g の DTFT を F, G とすると

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega) = H(\omega) \frac{\pi}{T_s i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(e^{i\phi} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m/T_s) - e^{-i\phi} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m/T_s) \right)$$

これを逆変換して

$$\begin{aligned}
g(n) &= \text{IDTFT}(G, n) \\
&= \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} H(\omega) \frac{\pi}{T_s i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (e^{i\phi} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m/T_s) - e^{-i\phi} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m/T_s)) \exp(i\omega T_s n) d\omega \\
&= \frac{1}{2i} (H(\omega_0) \exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) - H(-\omega_0) \exp(-i(\omega_0 T_s n + \phi)))
\end{aligned}$$

この先は「直接的で長い証明」と同じである。 □

III.3.10 Gaussian ノイズの DTFT

III.3.10.1 パワースペクトルの性質

複素数の Gaussian 乱数の DTFT は周波数に依らない分布をもつことを示す。Gaussian ノイズが White である (スペクトルが平坦である) と言われる理由はここにある。

$N \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$ とする。連続時間信号 $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は確率変数であるとする。これをサンプリング周期 $T_s > 0$ でサンプリングした N 個の確率変数 $X_n = X(nT_s)$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$) は互いに独立であり、自身の実部と虚部も独立であり、それぞれ $N(0, \sigma)$ に従うとする。数列 $\{X_n\}$ の DTFT を $Y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ とすると、 $|Y(\omega)|^2/(N\sigma^2)$ は χ_2^2 に従う。

Proof.

$[\text{Re}(X_n), \text{Im}(X_n)]^\top \sim N(\mathbf{0}, \sigma I_2)$ である。ここに I_2 は 2 次の単位行列である。 $Y(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-j\omega T_s n}$ であるが、 $X_n e^{-j\omega T_s n}$ は X_n を $-\omega T_s n$ だけ回転させたものであり、これもまた $N(0, \sigma I_2)$ に従う。正規分布の再生性から $Y(\omega)$ は $N(\mathbf{0}, \sqrt{N}\sigma I_2)$ に従う。 $Y(\omega)/(\sqrt{N}\sigma)$ の実部と虚部は独立でそれぞれ標準正規分布に従うので、 $|Y(\omega)|^2/(N\sigma^2)$ は χ_2^2 に従う。 □

III.3.10.2 Fourier 変換との関係

通信工学で現れる Gaussian ノイズの電力密度という言葉について説明を試みる。時間の不連続関数とも思えるノイズに対する Fourier 変換を通常の方法で定義できない。ここでは、サンプリング周波数が極めて高い測定器を用いて計算される DTFT 由来のスペクトルを考えることにする。産業応用上はこのような測定結果を用いるので、極限を数学的に厳密に扱わなくても実用上困ることはない。注目する時間区間 (測定器で言えば Gate time) $I := [t_0, t_1]$ に於いて確率変数としての連続時間ノイズ信号 $X(t)$ を周期 T_s でサンプリングした $N = \lfloor (t_1 - t_0)/T_s \rfloor$ 個のデータ $X_n := X(nT_s)$ に対して、区間 I に於ける平均スペクトルを次式で定義する。

$$Y(f) := \frac{1}{t_1 - t_0} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{t_1 - t_0}{N} X_n \exp(-j2\pi f n T_s)$$

上式は $T_s \rightarrow +0$ のとき、 X の台を I に制限した Fourier 変換の $1/(t_1 - t_0)$ 倍に近づく (X が Riemann 可積分かどうか疑わしいので「一致する」とは言い難い)。III.3.10.1 の証明と同様にして $Y(\omega)$ の実部と虚部はそれぞれ独立に正規分布 $N(0, \sigma)$ に従い、 $|Y(\omega)|^2/\sigma^2$ は χ_2^2 分布に従うことがわかる。

第 III.4 章

離散 Fourier 変換 (DFT)

III.4.1 基底

$d \in \mathbb{N}$, $N_l \in \mathbb{N}$ ($l = 1, 2, \dots, d$), $\mathbf{k}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ とする。次式で定義される、 \mathbf{n} に関する離散座標信号を d 次元 DFT の第 \mathbf{k} 基底ベクトルという。

$$W(\mathbf{k}, \mathbf{n}) := \left(\prod_{l=1}^d N_l \right)^{-1/2} \exp i \left(\sum_{l=1}^d \frac{k_l n_l}{N_l} 2\pi \right)$$

III.4.2 DFT の定義

$d \in \mathbb{N}$, $N_l \in \mathbb{N}$ ($l = 1, 2, \dots, d$), $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ とする。 $\Omega := \{0, 1, \dots, N_1 - 1\} \times \{0, 1, \dots, N_2 - 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, N_d - 1\}$ とする。 f を周期が (N_1, N_2, \dots, N_d) であるような離散座標信号 $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$; $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_d]^\top \mapsto f(\mathbf{n})$ とするとき、次式で定義される、 \mathbf{k} に関する離散座標信号を f の離散 Fourier 変換 (Discrete Fourier Transform; DFT) という。

$$\text{DFT}(f)(\mathbf{k}) := \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} f(\mathbf{n})$$

III.4.3 Hermite な離散時間信号の DFT は実数である

$d, N_l, \mathbf{k}, \Omega, f$ の定義は III.4.2 と同じものとする。 f にさらに Hermite 性: $\overline{f(\mathbf{n})} = f(-\mathbf{n})$ を要請するとき、 $\text{DFT}(f)(\mathbf{k})$ は実数となる。

Proof.

$$\begin{aligned} 2\text{Im}(\text{DFT}(f)(\mathbf{k})) &= \text{DFT}(f)(\mathbf{k}) - \overline{\text{DFT}(f)(\mathbf{k})} \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} f(\mathbf{n}) - \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} W(\mathbf{k}, \mathbf{n}) \overline{f(\mathbf{n})} \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{n}_M := [N_1, \dots, N_d]^\top$ とすると、

$$\overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} = W(\mathbf{k}, -\mathbf{n}) = W(\mathbf{k}, \mathbf{n}_M - \mathbf{n})$$

また、 f の Hermite 性の仮定より

$$\overline{f(\mathbf{n})} = f(-\mathbf{n}) = f(\mathbf{n}_M - \mathbf{n})$$

以上より

$$\begin{aligned}
2\text{Im}(\text{DFT}(f)(\mathbf{k})) &= \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} W(\mathbf{k}, \mathbf{n}_M - \mathbf{n})f(\mathbf{n}) - \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} W(\mathbf{k}, \mathbf{n})f(\mathbf{n}_M - \mathbf{n}) \\
&= \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} W(\mathbf{k}, \mathbf{n}_M - \mathbf{n})f(\mathbf{n}) - \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} W(\mathbf{k}, \mathbf{n}_M - \mathbf{n})f(\mathbf{n}) \\
&\quad (\{(\mathbf{n}, \mathbf{n}_M - \mathbf{n}) | \mathbf{n} \in \Omega\} = \{(\mathbf{n}_M - \mathbf{n}, \mathbf{n}) | \mathbf{n} \in \Omega\} \text{ を用いた}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

III.4.3.1 系: Hermite な離散時間信号の IDFT は実数である

III.4.3 と同様にして示せる。

III.4.4 巡回畳み込みの DFT は DFT の積に比例する

$d, N_l, \mathbf{k}, \Omega$ の定義は III.4.2 と同じものとする。 f, g を周期が (N_1, N_2, \dots, N_d) であるような離散座標信号 $f, g: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$; $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_d]^\top \mapsto f(\mathbf{n}), g(\mathbf{n})$ とするとき、次が成り立つ。

$$\text{DFT}\left(f *_{\text{cyc}} g\right)(\mathbf{k}) = \left(\prod_{l=1}^d N_l\right)^{1/2} \text{DFT}(f)(\mathbf{k}) \text{DFT}(g)(\mathbf{k})$$

Proof.

$\mathbf{N} := [N_1, \dots, N_d]^\top$ とする。

$$\begin{aligned}
\text{DFT}\left(f *_{\text{cyc}} g\right)(\mathbf{k}) &= \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} \left(f *_{\text{cyc}} g\right)(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} f(\mathbf{m})g((\mathbf{n} - \mathbf{m})\% \mathbf{N}) \\
&= \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} f(\mathbf{m}) \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} g((\mathbf{n} - \mathbf{m})\% \mathbf{N}) \\
&= \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} f(\mathbf{m}) \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \left(\prod_{l=1}^d N_l\right)^{1/2} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{m})W(\mathbf{k}, \mathbf{n} - \mathbf{m})} g((\mathbf{n} - \mathbf{m})\% \mathbf{N}) \\
&= \left(\prod_{l=1}^d N_l\right)^{1/2} \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{m})} f(\mathbf{m}) \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, (\mathbf{n} - \mathbf{m})\% \mathbf{N})} g((\mathbf{n} - \mathbf{m})\% \mathbf{N}) \\
&= \left(\prod_{l=1}^d N_l\right)^{1/2} \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{m})} f(\mathbf{m}) \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} g(\mathbf{n}) \\
&= \left(\prod_{l=1}^d N_l\right)^{1/2} \text{DFT}(f)(\mathbf{k}) \text{DFT}(g)(\mathbf{k})
\end{aligned}$$

□

III.4.5 Gaussian ノイズの DFT

$F(n) \in \mathbb{C}$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$) は互いに独立で、複素正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うとする
 $\left(p(f) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \frac{-\operatorname{Re}(f)^2 - \operatorname{Im}(f)^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \frac{-|f|^2}{2\sigma^2}\right)$ 。この DFT を $G(k) = \text{DFT}(F)(k)$ とする
 とき、 $G(k)$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) もまた互いに独立で、複素正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う。

Proof.

$$P \in \mathbb{C}^{N \times N}, P_{k,n} := W(k, n) := \frac{1}{\sqrt{N}} \exp i \frac{kn}{N} 2\pi \quad (k, n \in \{0, 1, \dots, N-1\})$$

$$\mathbf{F} := [F(0), F(1), \dots, F(N-1)]^\top, \mathbf{G} := [G(0), G(1), \dots, G(N-1)]^\top$$

と定義すると

$$\mathbf{G} = P^* \mathbf{F}$$

となる。

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{G} = \mathbf{g} \in \mathbb{C}^N) &= \Pr(P^* \mathbf{F} = \mathbf{g}) = \Pr(\mathbf{F} = P\mathbf{g}) \\ &= \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \frac{-|(P\mathbf{g})[i]|^2}{2\sigma^2} = \left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right) \exp \sum_{i=0}^{N-1} \frac{-|(P\mathbf{g})[i]|^2}{2\sigma^2} \\ &= \left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right) \exp \frac{-\|P\mathbf{g}\|_2^2}{2\sigma^2} = \left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right) \exp \frac{-\|\mathbf{g}\|_2^2}{2\sigma^2} \\ &= \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \frac{-|g_i|^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

□

第 III.5 章

サンプリング定理

$d \in \mathbb{N}$, $W_l > 0$ ($l = 1, 2, \dots, d$), $\Omega := \prod_{l=1}^d [-W_l, W_l]$ とする。 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}(f, \boldsymbol{\omega})$ が存在してその台が Ω に含まれるとき、次式が成り立つ。

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}} f\left(\pi \frac{n_1}{W_1}, \dots, \pi \frac{n_d}{W_d}\right) \prod_{l=1}^d \text{sinc } W_l \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l}\right)$$

つまり f の各点での評価値を沢山集めて f を任意の精度で近似できる。

角周波数 W_l のかわりに周波数 $F_l = W_l/(2\pi)$ を使うと上式は次式になる。

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n_1}{2F_1}, \dots, \frac{n_d}{2F_d}\right) \prod_{l=1}^d \text{sinc } 2\pi F_l \left(x_l + \frac{n_l}{2F_l}\right)$$

Proof.

$\mathcal{F}(f, \boldsymbol{\omega})$ の台が超直方体 Ω に含まれるから $\mathcal{F}(f, \boldsymbol{\omega})$ は Fourier 級数展開できる。第 \mathbf{n} Fourier 係数を $c(\mathcal{F}(f), \mathbf{n})$ とすると

$$\mathcal{F}(f, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} c(\mathcal{F}(f), \mathbf{n}) \exp i \sum_{l=1}^d n_l \frac{\omega_l}{W_l} \pi$$

となる。 $c(\mathcal{F}(f), \mathbf{n})$ は次式で求まる。

$$\begin{aligned} c(\mathcal{F}(f), \mathbf{n}) &= \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} \int_{\Omega} \mathcal{F}(f, \boldsymbol{\xi}) \exp(-i) \sum_{l=1}^d n_l \frac{\xi_l}{W_l} \pi d\boldsymbol{\xi} \\ &= (2\pi)^{d/2} \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f, \boldsymbol{\xi}) \exp i \sum_{l=1}^d \left(\frac{-n_l}{W_l} \pi \right) \xi_l d\boldsymbol{\xi} \\ &= (2\pi)^{d/2} \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f), -\pi \mathbf{n} \odot \mathbf{W}) \\ &= (2\pi)^{d/2} \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} f(-\pi \mathbf{n} \odot \mathbf{W}) \end{aligned}$$

f は $\mathcal{F}(f)$ の Fourier 逆変換で次のようにして求まる。

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f), \mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f, \boldsymbol{\omega}) \exp i \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{x} d\boldsymbol{\omega} = (2\pi)^{-d/2} \int_{\Omega} \mathcal{F}(f, \boldsymbol{\omega}) \exp i \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{x} d\boldsymbol{\omega} \\
&= (2\pi)^{-d/2} \int_{\Omega} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} c(\mathcal{F}(f), \mathbf{n}) \left(\exp i \sum_{l=1}^d n_l \frac{\omega_l}{W_l} \pi \right) \exp i \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{x} d\boldsymbol{\omega} \\
&= (2\pi)^{-d/2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_{\Omega} c(\mathcal{F}(f), \mathbf{n}) \exp i \boldsymbol{\omega}^\top (\mathbf{x} + \pi \mathbf{n} \oslash \mathbf{W}) d\boldsymbol{\omega} \\
&= (2\pi)^{-d/2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_{\Omega} (2\pi)^{d/2} \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} f(-\pi \mathbf{n} \oslash \mathbf{W}) \exp i \boldsymbol{\omega}^\top (\mathbf{x} + \pi \mathbf{n} \oslash \mathbf{W}) d\boldsymbol{\omega} \\
&= \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f(-\pi \mathbf{n} \oslash \mathbf{W}) \int_{\Omega} \exp i \boldsymbol{\omega}^\top (\mathbf{x} + \pi \mathbf{n} \oslash \mathbf{W}) d\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \exp i \boldsymbol{\omega}^\top (\mathbf{x} + \pi \mathbf{n} \oslash \mathbf{W}) d\boldsymbol{\omega} &= \prod_{l=1}^d \int_{-W_l}^{W_l} \exp i \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) \omega_l d\omega_l \\
&= \prod_{l=1}^d \frac{1}{i \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right)} \left[\exp i \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) W_l - \exp(-i) \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) W_l \right] \\
&= \prod_{l=1}^d 2W_l \frac{\sin \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) W_l}{\left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) W_l} = \prod_{l=1}^d 2W_l \prod_{l=1}^d \text{sinc } W_l \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right)
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f(-\pi \mathbf{n} \oslash \mathbf{W}) \prod_{l=1}^d 2W_l \text{sinc} \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) W_l = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f(\pi \mathbf{n} \oslash \mathbf{W}) \prod_{l=1}^d \text{sinc } W_l \left(x_l - \pi \frac{n_l}{W_l} \right) \\
&= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f \left(\pi \frac{n_1}{W_1}, \dots, \pi \frac{n_d}{W_d} \right) \prod_{l=1}^d \text{sinc } W_l \left(x_l - \pi \frac{n_l}{W_l} \right)
\end{aligned}$$

□

第 III.6 章

高速 Fourier 変換 (FFT)

III.6.1 長さが 2 のべき乗でない信号の DFT を長さが 2 のべき乗の信号の FFT に帰着する方法

N を 2 のべき乗でない自然数とする。長さ N の信号 x の DFT

$$X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left(2\pi i \frac{-kn}{N}\right) \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

を長さが 2 のべき乗である信号の FFT に帰着する方法を考える。 $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab = \frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{2}$ を用いて上の式を次のように変形する。

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\pi i \frac{-k^2}{N}\right) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left(\pi i \frac{-n^2}{N}\right) \exp\left(\pi i \frac{(k-n)^2}{N}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\pi i \frac{-k^2}{N}\right) \sum_{n=0}^{N-1} u(n) v(k-n) \\ \text{where } u(n) &:= x(n) \exp\left(\pi i \frac{-n^2}{N}\right), v(n) := \exp\left(\pi i \frac{n^2}{N}\right) \\ \therefore X(k) \sqrt{N} \exp\left(\pi i \frac{k^2}{N}\right) &= (u * v)(k) \end{aligned}$$

$u * v$ を、長さが 2 のべき乗の信号に対して使える FFT, IFFT を用いて計算する。そのために長さが 2 のべき乗の信号同士の**巡回畳み込み**の中に $u * v$ が部分的に現れるような状況を以下のようにして作り出す。

$N_2 := \min\{a | \exists b \in \mathbb{N}, a = 2^b \geq 2N\}$ とする。長さ N_2 の信号 u_2, v_2 を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} u_2(n) &:= \begin{cases} u(n) & (n \in [0, N-1]) \\ 0 & (n \in [N, N_2-1]) \end{cases} \\ v_2(n) &:= \begin{cases} v(n) & (n \in [0, N-1]) \\ 0 & (n \in [N, N_2-N]) \\ v(N_2-n) & (n \in [N_2-N+1, N_2-1]) \end{cases} \end{aligned}$$

u_2 は u の後ろに 0 を並べて長さ N_2 に拡張した信号である。 v_2 は長さ N_2 の 0 が並んだ信号の前部を v で塗り替え、後部を v の第 1 ~ $N-1$ 要素をコピーして順番を逆にしたもので塗り替えた信号である。下の図は u_2, v_2 を視覚的に表現したものである。

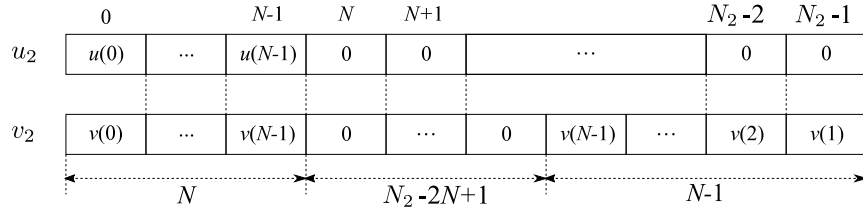


図 III.6.1 u_2, v_2 の構造

このようにすると $u_2 * v_2$ の先頭 N 要素が $u * v$ と一致する。

$$\text{FFT}(u_2 * v_2) = \sqrt{N_2} \text{FFT}(u_2) \text{FFT}(v_2)$$

より

$$\text{IFFT}(\sqrt{N_2} \text{FFT}(u_2) \text{FFT}(v_2))$$

により $u_2 * v_2$ を高速に計算し、結果の先頭 N 要素を切り出せば $u * v$ を得る。得られた $u * v$ の第 k 要素に $\frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\pi i \frac{-k^2}{N}\right)$ を掛ければ x の DFT が得られる。 v_2 の FFT や $\frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\pi i \frac{-k^2}{N}\right)$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) は初回の計算結果を保存しておけば別の信号の DFT の計算で再利用できる。

第 IV 部

Laplace 变换

第 IV.1 章

複素指数関数入力に対する伝達関数の作用

$A > 0, \omega \in \mathbb{R}$ とする。連続時間信号 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を次のように定める。

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{i\omega t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

$H: s \in \mathbb{C} \mapsto H(s) \in \mathbb{C}$ を proper で既約な有理関数とする。また、 H の極の実部は全て負であるとする。伝達関数が $H(s)$ である連続時間システムに信号 f を入力した時の出力を g とすると、十分大きい t に対して $g(t) \sim H(i\omega)f(t)$ となる。

Proof.

N_p を $H(s)$ の分母多項式の相異なる零点の個数とし、それら零点を p_0, \dots, p_{N_p} とする。零点 p_k の次数を $N_{p,k}$ とし、 $H(s)$ の部分分数展開を

$$H(s) = c_0 + \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{l=1}^{N_{p,k}} \frac{c_{k,l}}{(s - p_k)^l}$$

とする。ここに $c_0, c_{k,l}$ ($k = 1, \dots, N_p, l = 1, \dots, N_{p,k}$) は適当な複素数である。 f, g の Laplace 変換をそれぞれ F, G とすると $G(s) = H(s)F(s) = AH(s)/(s - i\omega)$ である。この部分分数展開に現れる、 $1/(s - p_k)^l$ ($k = 1, \dots, N_p, l = 1, \dots, N_{p,k}$) に比例する項は逆 Laplace 変換すると $t^{l-1}e^{p_k t}$ に比例する関数となり、 $t \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。 (1)

残りの項、すなわち $1/(s - i\omega)$ に比例する項は $AH(i\omega)/(s - i\omega) = H(i\omega)F(s)$ となる。以上より、十分大きい t に対して $g(t) \sim \mathcal{L}^{-1}[H(i\omega)F(s)](t) = H(i\omega)f(t)$ となる。 \square

IV.1.1 系: 正弦波入力に対する伝達関数の作用

$A > 0, \omega \in \mathbb{R}$ とする。連続時間信号 $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定める。

$$f_1(t) = \begin{cases} A \cos \omega t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} A \sin \omega t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

H を直前の定理と同じように定める。伝達関数が $H(s)$ である連続時間実システムに信号 f_1, f_2 を入力した時の出力をそれぞれ g_1, g_2 とすると、十分大きい t に対して

$$g_1(t) \sim |H(i\omega)| \cos(\omega t + \text{Arg}(H(i\omega)))$$

$$g_2(t) \sim |H(i\omega)| \sin(\omega t + \text{Arg}(H(i\omega)))$$

となる。

Proof.

f_1 について示す。 f_2 も同様に示せる。 $f_1(t) = \text{Re}(Ae^{i\omega t})$ であり、実数システムだから出力は $Ae^{i\omega t}$ を入力したときの出力の実部と等しい。直前の定理の結果を用いて

$$g_1(t) = \text{Re}(H(i\omega)Ae^{i\omega t}) = \text{Re}\left(|H(i\omega)|e^{i\text{Arg}(H(i\omega))}Ae^{i\omega t}\right) = |H(i\omega)| \cos(\omega t + \text{Arg}(H(i\omega)))$$

□

Proof. (直接的な証明)

f_1 について示す。 f_2 も同様に示せる。直前の定理の証明の (1) までは同じである。 f_1, g_1 の Laplace 変換をそれぞれ F_1, G_1 とすると

$$F_1(s) = \frac{As}{s^2 + \omega^2} = \frac{A}{2} \left(\frac{1}{s + i\omega} + \frac{1}{s - i\omega} \right)$$

であるから、 $G_1(s) = H(s)F_1(s)$ の部分分数展開のうち $1/(s + i\omega)$, $1/(s - i\omega)$ に比例する項を詳しく調べれば良い。 $1/(s + i\omega)$ の係数は

$$G(s)X(s)(s + i\omega)|_{s \rightarrow -i\omega} = AG(-i\omega)/2$$

となり、 $1/(s - i\omega)$ の係数は

$$G(s)X(s)(s - i\omega)|_{s \rightarrow i\omega} = AG(i\omega)/2$$

となる。よってこれらの項の和は

$$\begin{aligned} & \frac{AG(-i\omega)/2}{s + i\omega} + \frac{AG(i\omega)/2}{s - i\omega} = \frac{A}{2} \left(\frac{G(-i\omega)}{s + i\omega} + \frac{G(i\omega)}{s - i\omega} \right) \\ &= \frac{A}{2} \times \frac{1}{s^2 + \omega^2} (G(-i\omega)(s - i\omega) + G(i\omega)(s + i\omega)) \\ &= \frac{As}{s^2 + \omega^2} \times \frac{1}{2} (G(i\omega) + G(-i\omega)) + \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \times \frac{-1}{2i} (G(i\omega) - G(-i\omega)) \end{aligned} \quad (1)$$

$G(s)$ は有理式なので $G(-i\omega) = \overline{G(i\omega)}$ となることに注意して

$$\frac{1}{2}(G(i\omega) + G(-i\omega)) = |G(i\omega)| \frac{1}{2} \left(e^{i \operatorname{Arg}(G(i\omega))} + e^{-i \operatorname{Arg}(G(i\omega))} \right) = |G(i\omega)| \cos \operatorname{Arg}(G(i\omega))$$

同様に

$$\frac{-1}{2i}(G(i\omega) - G(-i\omega)) = -|G(i\omega)| \sin \operatorname{Arg}(G(i\omega))$$

以上より、

$$\begin{aligned} (1) &= |G(i\omega)| \left(\cos \operatorname{Arg}(G(i\omega)) \frac{As}{s^2 + \omega^2} - \sin \operatorname{Arg}(G(i\omega)) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\ g(t) &\sim \mathcal{L}^{-1}[(1)](t) = |G(i\omega)| (\cos \operatorname{Arg}(G(i\omega)) \cos \omega t - \sin \operatorname{Arg}(G(i\omega)) \sin \omega t) \\ &= |G(i\omega)| \cos(\omega t + \operatorname{Arg}(G(i\omega))) \end{aligned}$$

□

第 V 部

Z 变换

第 V.1 章

基礎理論

V.1.1 最終値定理

$X(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) を離散時間信号 $x(n)$ ($n \in \mathbb{Z}, \forall n < 0, x(n) = 0$) の Z 変換とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$ が存在するとき次が成り立つ。

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$$

但し上式に於ける $\lim_{z \rightarrow 1}$ では z が実軸上で右側から 1 に近づくことを意味する。

Proof.

$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$ とする。発想としては、十分大きい $N \in \mathbb{N}$ に対して $\sum_{k=N}^{\infty} x(k)z^{-k} \sim \sum_{k=N}^{\infty} \alpha z^{-k} = \alpha z^{-N} \frac{z}{z-1}$ となることを利用する。

任意の $\varepsilon \in (0, 1)$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $\forall n \geq N, |x(n) - \alpha| < \varepsilon$ となる。

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) - \alpha &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)z^N F(z) - \alpha \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)z^N \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k)z^{-k} + \sum_{k=N}^{\infty} x(k)z^{-k} \right) - (z-1)z^N \sum_{k=N}^{\infty} \alpha z^{-k} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)z^N \sum_{k=N}^{\infty} (x(n) - \alpha)z^{-k} \quad \left(\sum_{k=0}^{N-1} \text{の項は極限で消える} \right) \\ |(1)| &\leq \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)z^N \sum_{k=N}^{\infty} |x(n) - \alpha|z^{-k} < \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)z^N \sum_{k=N}^{\infty} \varepsilon z^{-k} = \varepsilon \end{aligned} \tag{1}$$

□

V.1.2 複素指数関数入力に対する伝達関数の作用

$A > 0, \omega \in \mathbb{R}$ とする。離散時間信号 $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を次のように定める。

$$x(n) = \begin{cases} Ae^{i\Omega n} & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$

$H: z \in \mathbb{C} \mapsto H(z) \in \mathbb{C}$ を、 $1/z$ を変数とした有理式として既約であるような有理関数とする。また、 H の極の絶対値は全て 1 未満であるとする。伝達関数が $H(z)$ である離散時間システムに信号 x を入力した時の出力を y とすると、十分大きい n に対して $y(n) \sim H(e^{i\Omega})x(n)$ となる。

Proof.

N_p を $H(s)$ の相異なる極の個数とし、それら極を p_0, \dots, p_{N_p} とする。極 p_k の次数を $N_{p,k}$ とし、 $H(z)$ の部分分数展開を

$$H(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{l=1}^{N_{p,k}} \frac{c_{k,l}}{(1 - p_k z^{-1})^l}$$

とする。ここに $c_0, c_{k,l}$ ($k = 1, \dots, N_p, l = 1, \dots, N_{p,k}$) は適当な複素数である。 x, y の Z 変換をそれぞれ X, Y とすると $Y(z) = H(z)F(z) = AH(z)/(1 - e^{i\Omega}z^{-1})$ である。この部分分数展開に現れる、 $1/(1 - p_k z^{-1})^l$ ($k = 1, \dots, N_p, l = 1, \dots, N_{p,k}$) に比例する項は逆 Z 変換すると n の多項式と公比 p_k の等比級数の積となり、 $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。(このことは Z 変換の性質: 時間シフト $\mathcal{Z}[x(n+k)] = z^k X(z)$ 、および Z 領域微分 $\mathcal{Z}[nx(n)] = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[x(n)]$ を繰り返し用いることで分かる)

残りの項、すなわち $1/(1 - e^{i\Omega}z^{-1})$ に比例する項は $AH(e^{i\Omega})/(1 - e^{i\Omega}z^{-1}) = H(e^{i\Omega})X(z)$ となる。 \square

第 V.2 章

IIR フィルタの計算手順

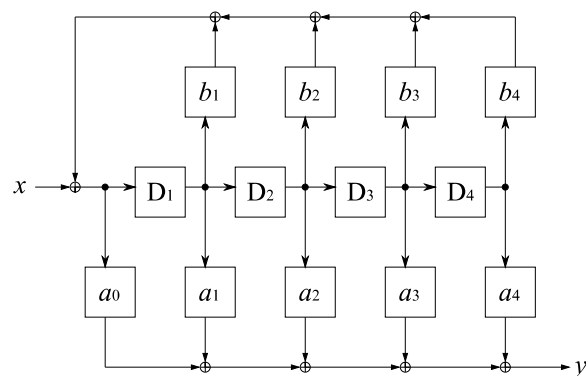


図 V.2.1 IIR フィルタのブロック図の例

上の例で示した IIR フィルタの出力は以下の手続きで計算できる (仕事で関わっていたデジタル無線機の信号処理部でそうやっていた)。

1. $D_1, \dots, D_4 \leftarrow 0$
2. $n \leftarrow 0$
3. $\alpha \leftarrow a_1 D_1 + \dots + a_4 D_4$
4. $\beta \leftarrow b_1 D_1 + \dots + b_4 D_4$
5. $\gamma \leftarrow x(n) + \beta$
6. $y(n) \leftarrow \alpha + a_0 \gamma$
7. $D_4 \leftarrow D_3, D_3 \leftarrow D_2, D_2 \leftarrow D_1, D_1 \leftarrow \gamma$
8. $n \leftarrow n + 1$
9. n が x の定義域の末尾に達しているなら終了。そうでないなら 3 に戻る。

第 VI 部

応用

第 VI.1 章

信号検出

VI.1.1 位置特定に於ける cos 類似度による方法と最良近似による方法の等価性

複素数列で表される受信信号 $\{s_i\}$ の中から特定のパターン (「参照信号」と呼ぶ) を見つけ出したい時がある。例えば無線通信に於いては送信機から「同期ワード (Sync Word, SW)」と呼ばれる数十 bit 分の変調信号が一定周期で送出されており、これが「フレーム」と呼ばれる単位の区切り位置の決定に使われる。受信機は常に SW を探索し、フレームの区切り位置を絶えずトラッキングする必要がある。なぜならば、送信機、受信機に搭載されているクロック発生器には僅かだが誤差があり、受信機から見た送信機の送出する信号の時間軸は少しずつズレていくからである。

今、受信信号列の全体的な位相には関心が無いものとする。つまり、信号全体に大きさ 1 の複素定数を乗算する操作は受信側の信号処理にとって影響がないものとする。現実の無線機で言えば、例えば $\pi/4$ シフト QPSK がそうである。

受信信号から参照信号を検出する方法として、直観的に次の 2 つの方法を思いつくだろう。

VI.1.1.1 手法 1: cos 類似度の絶対値の最大化

参照信号の長さを $L \in \mathbb{N}$, 参照信号を $\mathbf{d} \in \mathbb{C}^L$, 受信信号中のテスト領域を $\mathbf{s}^{(i)} := [s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+L-1}]^\top \in \mathbb{C}^L$ とするとき、 \mathbf{d} と $\mathbf{s}^{(i)}$ の cos 類似度の複素数版

$$\frac{\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}}{\|\mathbf{d}\|_2 \|\mathbf{s}^{(i)}\|_2}$$

の位相を無視し、絶対値の 2 乗 (2 乗を使うのは、平方根の計算を無くして計算量を抑える為) で評価する。 $\|\mathbf{d}\|_2$ は $\mathbf{s}^{(i)}$ に依存しないので評価値同士の大小比較に必要ないから取り除く。すると評価関数 c として次式を得る。

$$c(i) = \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}|^2}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2}$$

これが最大となる i を参照信号の存在位置と見做す。

VI.1.1.2 手法 2: 最良近似

VI.1.1.1 で定義した記号をここでも用いる。受信信号中の参照信号は「参照信号 + ゲイン変化 + 位相回転 + ノイズ」の形で存在している。そこで、参照信号に定数 α を掛けて $\mathbf{s}^{(i)}$ との差を取った絶対値の 2 乗を参照信号の L-2 ノルムの 2 乗で正規化した値が最小となるように α を選び、そのときの差の絶対値の 2 乗が最小になるような位置をもって参照信号の存在位置と見做す。評価関数 \tilde{c} は次式である。

$$\tilde{c}(i) = \frac{1}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2} \min_{\alpha \in \mathbb{C}} \|\alpha \mathbf{d} - \mathbf{s}^{(i)}\|_2^2$$

正規化する理由は、テスト領域の強度の影響を減らすためである。テスト領域の形が参照信号と大きく異なっても、テスト領域の強度が小さければ $\min_{\alpha \in \mathbb{C}} \|\alpha \mathbf{d} - \mathbf{s}^{(i)}\|_2^2$ は小さくなり、誤った推定結果を導き得る。上の最小化問題の解は解析的に求められる。 $f(\alpha) := \|\alpha \mathbf{d} - \mathbf{s}^{(i)}\|_2^2$ について微小な $\Delta\alpha$ を考え、 $f(\alpha + \Delta\alpha) - f(\alpha)$ の変化量の $\Delta\alpha$ の 1 次の項が 0 になるような $\hat{\alpha}$ が解である。これは次式である。

$$\hat{\alpha} = \frac{\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}}{\|\mathbf{d}\|_2^2}$$

よって $\tilde{c}(i)$ は次式である。

$$\tilde{c}(i) = \frac{1}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2} \left\| \mathbf{s}^{(i)} - \frac{\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \mathbf{d} \right\|_2^2$$

VI.1.1.3 手法 1,2 の等価性

実は手法 1 と 2 は等価である。すなわち次の命題は真である。

$$\frac{1}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2} \left\| \mathbf{s}^{(i)} - \frac{\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \mathbf{d} \right\|_2^2 < \frac{1}{\|\mathbf{s}^{(j)}\|_2^2} \left\| \mathbf{s}^{(j)} - \frac{\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(j)}}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \mathbf{d} \right\|_2^2 \iff \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}|^2}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2} > \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(j)}|^2}{\|\mathbf{s}^{(j)}\|_2^2}$$

これを示す。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2} \left\| \mathbf{s}^{(i)} - \frac{\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \mathbf{d} \right\|_2^2 &= \frac{1}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2} \left[\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2 + \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}|^2}{\|\mathbf{d}\|_2^4} \|\mathbf{d}\|_2^2 - \frac{\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \mathbf{s}^{(i)*} \mathbf{d} - \frac{\overline{\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}}}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)} \right] \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2} \left[\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2 + \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}|^2}{\|\mathbf{d}\|_2^2} - 2 \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}|^2}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \right] \\ &= 1 - \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}|^2}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \end{aligned}$$

であり、

$$1 - \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}|^2}{\|\mathbf{d}\|_2^2} < 1 - \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(j)}|^2}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \iff \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}|^2}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2} > \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(j)}|^2}{\|\mathbf{s}^{(j)}\|_2^2}$$

であることから命題が真であることがわかる。

第 VII 部

その他

第 VII.1 章

Heaviside の階段関数

VII.1.1 積分表示

H を Heaviside の階段関数とする。次式が成り立つ。

$$H(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t - i\varepsilon} e^{ixt} dt$$

Proof.

複素積分を用いて示す。 $R > \varepsilon$, $f(z) := e^{ixz}/(z - i\varepsilon)$ とする。 f の極は $i\varepsilon$ であり、位数 1, 留数 1 である。 $x > 0$ のとき、積分路を $C_A : C_1 + C_2$, $C_1 := [-R, R]$, $C_2 := Re^{i\theta}$, $\theta : 0 \rightarrow \pi$ として f を C_A 上で積分する。留数定理から次式が成り立つ。

$$\int_{C_A} f(z) dz = 2\pi i \quad \therefore \int_{-R}^R f(z) dz = 2\pi i - \int_{C_2} f(z) dz$$

[1]VI.1.2.9 と同様にして $\int_{C_2} f(z) dz \rightarrow 0$ as $R \rightarrow \infty$ であるので $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(z) dz = 2\pi i$ である。

$x < 0$ のとき、積分路を $C_B : -C_1 + C_3$, $C_3 := Re^{i\theta}$, $\theta : -\pi \rightarrow 0$ として f を C_B 上で積分する。 C_B が囲む領域に f の極が無いので、留数定理から次式が成り立つ。

$$\int_{C_B} f(z) dz = 0 \quad \therefore \int_{-R}^R f(z) dz = \int_{C_3} f(z) dz$$

C_2 上の積分の評価と同様にして $\int_{C_3} f(z) dz \rightarrow 0$ as $R \rightarrow \infty$ であるので $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(z) dz = 0$ である。以上より定理の主張が従う。□

参考文献

- [1] motchy (2022) 『数学備忘録 v0.10.1』 <https://github.com/motchy869/Mathematics-Memorandum/releases/tag/v0.10.1>