

信号処理備忘録

motchy

2019 年 11 月 16 日 ~ 2023 年 9 月 9 日
ver 0.10.0

目次

第 I 部	表記法	4
第 I.1 章	数学記号	5
第 I.2 章	連続座標信号の表現	6
第 I.3 章	離散座標信号の表現	7
第 II 部	畳み込み	8
第 II.1 章	巡回畳み込み	9
II.1.1	巡回畳み込みの可換則	9
第 II.2 章	諸定理	11
II.2.1	線形変換と畳み込みの順序交換	11
II.2.1.1	動機	11
II.2.1.2	理論	11
II.2.2	数値実験	12
第 III 部	相関	13
第 III.1 章	巡回相関	14
第 IV 部	Fourier 級数と Fourier 変換	15
第 IV.1 章	Fourier 級数展開	16
IV.1.1	基底関数	16
IV.1.2	Fourier 係数	16
第 IV.2 章	Fourier 変換	17
IV.2.1	基底関数	17
IV.2.2	Fourier 変換の定義	17
IV.2.3	逆 Fourier 変換	17
IV.2.4	周波数表示された Fourier 変換との関係	17
IV.2.4.1	逆変換により元の関数に戻る	18
IV.2.5	関数とその Fourier 変換の偶奇性	18
IV.2.6	積と畳み込みとの関係	18
IV.2.6.1	積の Fourier 変換	19
IV.2.6.2	畳み込みの Fourier 変換	19
IV.2.7	Fourier 変換の関係式の早見表	19
第 IV.3 章	サンプリング定理	20
第 IV.4 章	離散時間 Fourier 変換 (DTFT)	22
IV.4.1	直観的な説明	22
IV.4.2	定義	22
IV.4.2.1	呼称について	22
IV.4.3	連続座標信号との関係	22
IV.4.4	逆離散時間 Fourier 変換 (IDTFT)	23
IV.4.4.1	IDTFT が DTFT の逆変換であること	23
IV.4.5	積と畳み込みとの関係	23
IV.4.5.1	時間領域, 周波数領域の畳み込みの定義	23
IV.4.5.2	積の DTFT	24
IV.4.5.3	畳み込みの DTFT	24
IV.4.5.4	積の IDTFT	24
IV.4.5.5	畳み込みの IDTFT	25
IV.4.6	定数関数 1 の DTFT	25
IV.4.7	単一周波数波の DTFT の導出	27
IV.4.8	エイリアシングとの関係	27
IV.4.8.1	補足: 式 (1) のもう一つの導出	28
IV.4.9	システムの伝達関数と正弦波入力との関係	28
IV.4.10	Gaussian ノイズの DTFT	30
IV.4.10.1	パワースペクトルの性質	30
IV.4.10.2	Fourier 変換との関係	30
第 IV.5 章	離散 Fourier 変換 (DFT)	31
IV.5.1	基底	31
IV.5.2	DFT の定義	31
IV.5.3	Hermite な離散時間信号の DFT は実数である	31

IV.5.3.1	系: Hermite な離散時間信号の IDFT は実数である	32
IV.5.4	巡回畳み込みの DFT は DFT の積に比例する	32
IV.5.5	巡回相関の DFT	33
IV.5.6	Gaussian ノイズの DFT	33
第 IV.6 章	高速 Fourier 変換 (FFT)	35
IV.6.1	長さが 2 のべき乗でない信号の DFT を長さが 2 のべき乗の信号の FFT に帰着する方法	35
第 IV.7 章	離散 Cosine 変換 (DCT)	37
IV.7.1	DCT 基底の正規直交性を導出するための補題	37
第 V 部	Hilbert 変換	38
第 V.1 章	Hilbert 変換の Fourier 変換	39
第 VI 部	Laplace 変換	40
第 VI.1 章	複素指数関数入力に対する伝達関数の作用	41
VI.1.1	系: 正弦波入力に対する伝達関数の作用	42
第 VII 部	Z 変換	44
第 VII.1 章	基礎理論	45
VII.1.1	最終値定理	45
VII.1.2	複素指数関数入力に対する伝達関数の作用	46
第 VII.2 章	IIR フィルタの計算手順	47
第 VIII 部	フィルタ	48
第 VIII.1 章	離散時間フィルタ	49
VIII.1.1	連続時間系のフィルタ処理を離散時間系で観測したときの振る舞い	49
第 IX 部	周波数変換	50
第 IX.1 章	ヘテロダイン	51
IX.1.1	連続時間複素数値信号をアップコンバージョンして実数値信号を送信し、受信側で複素数値信号を復元する	51
IX.1.1.1	計算	51
IX.1.1.2	サイドバンドの考察	51
第 X 部	離散時間領域	52
第 X.1 章	アップ・サンプリング	53
X.1.1	アップ・サンプリングされた信号の DTFT	53
X.1.1.1	主張	53
X.1.1.2	導出	53
X.1.1.3	正規化角周波数で比較する	53
X.1.1.4	数値例	54
第 X.2 章	ダウン・サンプリング	55
X.2.1	ダウン・サンプリングされた信号の DTFT	55
X.2.1.1	主張	55
X.2.1.2	導出	56
X.2.1.3	数値例	57
第 XI 部	離散時間領域から連続時間領域への移行	58
第 XI.1 章	0 次ホールド	59
XI.1.1	0 次ホールドされた離散時間信号の周波数特性	59
XI.1.1.1	動機	59
XI.1.1.2	主張	59
XI.1.1.3	導出	60
XI.1.2	inverse-sinc-filter	61
XI.1.2.1	背景	61
XI.1.2.2	係数の導出	62
XI.1.2.3	数値例	63
第 XI.2 章	アップサンプリング	64
XI.2.1	アップサンプリングされた信号の周波数特性	64
XI.2.1.1	動機	64
XI.2.1.2	アップサンプリングされた離散時間信号の DTFT	64
XI.2.1.2.1	主張	64
XI.2.1.2.2	導出	64
XI.2.1.3	アップサンプリングされた信号をそのまま DAC 出力した場合	65
XI.2.1.3.1	主張	65
XI.2.1.3.2	導出	66
XI.2.1.3.3	考察	66

第 XII 部	連続時間領域から離散時間領域への移行	68
第 XII.1 章	積分の離散近似	69
XII.1.1	Euler 法	69
XII.1.1.1	背景	69
XII.1.1.2	導出	69
XII.1.1.3	数値例	70
第 XIII 部	離散時間系を介した連続時間系	72
第 XIII.1 章	背景	73
第 XIII.2 章	入力に 0 次ホールド機構を加えた連続時間システムの z 変換	74
XIII.2.1	背景	74
XIII.2.2	主張	74
XIII.2.3	導出	75
第 XIII.3 章	0 次ホールドされた正弦波の周波数特性	76
XIII.3.1	背景	76
XIII.3.2	導出	76
XIII.3.3	数値例	77
第 XIV 部	応用	79
第 XIV.1 章	NCO	80
XIV.1.1	位相の下位ビット切り捨てとスプリアス	80
XIV.1.1.1	主張	80
XIV.1.1.2	導出	80
XIV.1.1.3	数値例	81
第 XIV.2 章	信号検出	83
XIV.2.1	位置特定に於ける \cos 類似度による方法と最良近似による方法の等価性	83
XIV.2.1.1	手法 1: \cos 類似度の絶対値の最大化	83
XIV.2.1.2	手法 2: 最良近似	84
XIV.2.1.3	手法 1, 2 の等価性	84
第 XV 部	その他	85
第 XV.1 章	信号値の統計	86
XV.1.1	連続時間正弦波信号値の確率密度関数	86
XV.1.2	連続時間正弦波信号値の分散	86
第 XV.2 章	Heaviside の階段関数	88
XV.2.1	積分表示	88
参考文献		89

第Ⅰ部

表記法

第 I.1 章

数学記号

- \mathbb{F} : 体
- \mathbb{Z} : 整数全体の集合
- \mathbb{R} : 実数全体の集合
- \mathbb{C} : 複素数全体の集合
- $\mathbf{a} \oslash \mathbf{b}$ ($d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{F}^d$, $b_i \neq 0$ for all i): $[a_1/b_1, \dots, a_d/b_d]^\top$
- $a \% b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$): a を b で割った余り。符号に 2 通り考えられるが、本書では結果を 0 以上 $|a|$ 未満とする定義を採用する。
- $\mathbf{a} \% \mathbf{b}$ ($d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^d$, $b_i \neq 0$ for all i): $[a_1 \% b_1, \dots, a_d \% b_d]^\top$
- $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ ($d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$): $\Leftrightarrow x_i \leq y_i$ for all i 。 $\geq, <, >$ についても同様。

第 1.2 章

連続座標信号の表現

連続的な座標値 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d_1}$ ($d_1 \in \mathbb{N}$) から \mathbb{R}^{d_2} ($d_2 \in \mathbb{N}$) への写像を d_1 次元連続座標信号という。信号値は全ての座標に対して定義される必要はない。

例えばカセットテープレコーダーに記録された音声信号は $d_1 = d_2 = 1$ のものである。

信号 f の位置 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{d_1}]^\top$ での値を $f(\mathbf{x})$ や $f(x_1, \dots, x_{d_1})$ で表す。

第 1.3 章

離散座標信号の表現

離散的な座標値 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^{d_1}$ ($d_1 \in \mathbb{N}$) から \mathbb{R}^{d_2} ($d_2 \in \mathbb{N}$) への写像を d_1 次元離散座標信号という。信号値は全ての座標に対して定義される必要はない。

例えば離散的な時刻での電圧のサンプリングデータは $d_1 = d_2 = 1$ のものである (この場合の「座標」は時間軸上での座標という意味になる)。また、コンピュータのディスプレイに映る 2 次元カラー画像は $d_1 = 2, d_2 = 3$ のものである。

信号 f の位置 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{d_1}]^\top$ での値を $f(\boldsymbol{x})$ や $f(x_1, \dots, x_{d_1})$ で表す。

第Ⅱ部

畳み込み

第 II.1 章

巡回畳み込み

$\Omega := \{0, 1, \dots, N_1 - 1\} \times \{0, 1, \dots, N_2 - 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, N_d - 1\}$ とする。 f, g を周期が (N_1, \dots, N_d) であるような離散座標信号 $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$; $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_d]^\top \mapsto f(\mathbf{n}), g(\mathbf{n})$ とする。 $\mathbf{N} := [N_1, \dots, N_d]^\top$ とする。 f と g の巡回畳み込み $f \underset{\text{cyc}}{*} g$ を次式で定義する。

$$\left(f \underset{\text{cyc}}{*} g \right) (\mathbf{n}) := \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} f(\mathbf{m}) g((\mathbf{n} - \mathbf{m}) \% \mathbf{N})$$

II.1.1 巡回畳み込みの可換則

Ω, f, g の定義を II.1 と同じものとするとき、次が成り立つ。

$$f \underset{\text{cyc}}{*} g = g \underset{\text{cyc}}{*} f$$

Proof.

$$\begin{aligned} \left(g \underset{\text{cyc}}{*} f \right) (\mathbf{n}) &= \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} g(\mathbf{m}) f((\mathbf{n} - \mathbf{m}) \% \mathbf{N}) \\ &= \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g(m_1, \mathbf{m}_2) f((n_1 - m_1) \% N_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \end{aligned} \quad (\text{II.1.1.1})$$

ここに $\mathbf{n}_i := [n_i, \dots, n_d]^\top$ ($\mathbf{m}_i, \mathbf{N}_i$ も同様), $\Omega_i := \{0, 1, \dots, N_i - 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, N_d - 1\}$ である。

$$\begin{aligned}
(1) &= \sum_{m_1=0}^{n_1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g(m_1, \mathbf{m}_2) f(n_1 - m_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&\quad + \sum_{m_1=n_1+1}^{N_1-1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g(m_1, \mathbf{m}_2) f(n_1 + N_1 - m_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&= \sum_{l_1=n_1}^0 \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g(n_1 - l_1, \mathbf{m}_2) f(l_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&\quad + \sum_{l_1=N_1-1}^{n_1+1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g(n_1 + N_1 - l_1, \mathbf{m}_2) f(l_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&= \sum_{l_1=n_1}^0 \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g((n_1 - l_1) \% N_1, \mathbf{m}_2) f(l_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&\quad + \sum_{l_1=N_1-1}^{n_1+1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g((n_1 - l_1) \% N_1, \mathbf{m}_2) f(l_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2) \\
&= \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{\mathbf{m}_2 \in \Omega_2} g((n_1 - l_1) \% N_1, \mathbf{m}_2) f(l_1, (\mathbf{n}_2 - \mathbf{m}_2) \% \mathbf{N}_2)
\end{aligned}$$

同様の変形を繰り返すと最終的に次のようになる。

$$\left(g \underset{\text{cyc}}{*} f \right) (\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{l} \in \Omega} g((\mathbf{n} - \mathbf{l}) \% \mathbf{N}) f(\mathbf{l}) = \left(f \underset{\text{cyc}}{*} g \right) (\mathbf{n})$$

□

第 II.2 章

諸定理

II.2.1 線形変換と畳み込みの順序交換

II.2.1.1 動機

画像処理に於いてカーネルとの畳み込みを実行してから線形変換を施す場合と、事前に画像とカーネルの両方に線形変換を施してから畳み込む場合の結果の違いに関心がある。

II.2.1.2 理論

$d \in \mathbb{N}$ とし、 $f: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mapsto f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ を d 次元信号とする。線形変換を表す正則行列を A とし、 A による変換を T_A と表す。 T_A による変換は次式を以て定義する。

$$T_A(f)(\mathbf{x}) = f(A^{-1}\mathbf{x})$$

$G: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mapsto G(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ を d 次元信号とする。このとき次式が成り立つ。

$$T_A(G) * T_A(f) = |A|T_A(G * f)$$

Proof.

μ を Jordan 測度とする。

$$\begin{aligned} T_A(G) * T_A(f)(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^d} T_A(G)(\mathbf{x} - \mathbf{u})T_A(f)(\mathbf{u})\mu(d\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}^d} G(A^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{u}))f(A^{-1}\mathbf{u})\mu(d\mathbf{u}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} G(A^{-1}\mathbf{x} - A^{-1}\mathbf{u})f(A^{-1}\mathbf{u})\mu(d\mathbf{u}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} G(A^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{v})f(\mathbf{v})|A|\mu(d\mathbf{v}) \\ &\quad (\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{u} \text{ と変数変換した。}|A| \text{ は } |A| \text{ の絶対値である。}) \\ &= |A| \int_{\mathbb{R}^d} G(A^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{v})f(\mathbf{v})\mu(d\mathbf{v}) \\ &= |A|T_A(G * f)(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

□

II.2.2 数値実験

Mathematica による例が「線形変換と畳み込み.nb」にある。

第Ⅲ部

相関

第 III.1 章

巡回相関

$\Omega := \{0, 1, \dots, N_1 - 1\} \times \{0, 1, \dots, N_2 - 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, N_d - 1\}$ とする。 f, g を周期が (N_1, \dots, N_d) であるような離散座標信号 $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$; $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_d]^\top \mapsto f(\mathbf{n}), g(\mathbf{n})$ とする。 $\mathbf{N} := [N_1, \dots, N_d]^\top$ とする。 f と g の巡回相関 $\text{cycCorrel}(f, g)$ を次式で定義する。

$$\text{cycCorrel}(f, g) := \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} f(\mathbf{m}) \overline{g((\mathbf{m} - \mathbf{n}) \% \mathbf{N})} = \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} \overline{f(\mathbf{m})} g((\mathbf{m} + \mathbf{n}) \% \mathbf{N})$$

第 IV 部

Fourier 級数と Fourier 変換

第 IV.1 章

Fourier 級数展開

IV.1.1 基底関数

Fourier 級数展開の基底関数は Fourier 変換や DFT のものと違って正規化されていないため、美しさに欠ける。

$d \in \mathbb{N}$, $W_l > 0$ ($l = 1, 2, \dots, d$), $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ とする。次式で定義される、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ に関する連続座標信号を、区間 $\prod_{l=1}^d [-W_l, W_l]$ に於ける第 \mathbf{k} 基底関数という。

$$W(\mathbf{k}, \mathbf{x}) := \exp i \sum_{l=1}^d k_l \frac{x_l}{W_l} \pi$$

IV.1.2 Fourier 係数

$d \in \mathbb{N}$, $W_l > 0$ ($l = 1, 2, \dots, d$), $\Omega := \prod_{l=1}^d [-W_l, W_l]$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ とする。 $f: \mathbf{x} \in \mathbb{R} \mapsto f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ を、第 l 座標に関して周期が $2W_l$ であるような周期関数とする。次式で定義する、 \mathbf{k} に関する離散座標信号を f の第 \mathbf{k} Fourier 係数という。

$$c(f, \mathbf{k}) := \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} \int_{\Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{x})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

第 IV.2 章

Fourier 変換

IV.2.1 基底関数

$d \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$ とする。次のものを d 次元 Fourier 変換に於ける基底関数という。

$$W(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x}) := (2\pi)^{-d/2} \exp i\boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{x}$$

IV.2.2 Fourier 変換の定義

$d \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$ とする。 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、次式で定義される、 $\boldsymbol{\omega}$ に関する連続座標信号を f の Fourier 変換という。

$$\mathcal{F}(f)(\boldsymbol{\omega}) := \int_{\mathbb{R}^d} \overline{W(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x}) d^d \boldsymbol{x} = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i\boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) d^d \boldsymbol{x}$$

IV.2.3 逆 Fourier 変換

$d \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ とする。 $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、次式で定義される、 \boldsymbol{x} に関する連続座標信号を F の逆 Fourier 変換という。

$$\mathcal{F}^{-1}(F)(\boldsymbol{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} W(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x}) F(\boldsymbol{\omega}) d^d \boldsymbol{\omega} = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{x}) F(\boldsymbol{\omega}) d^d \boldsymbol{\omega}$$

IV.2.4 周波数表示された Fourier 変換との関係

上述の Fourier 変換の定義はその数学的対称性の美しさから、理学系で主に用いられる。一方、工学系では Fourier 変換結果の定義域を角周波数ではなく周波数にとることがしばしばある。本書では 2 種類の Fourier 変換を区別するために、周波数を定義域とする Fourier 変換を「周波数表示された Fourier 変換」と呼び分けることにする。

$d \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^d$ とする。 $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、次式で定義される、 \boldsymbol{f} に関する連続座標信号を g の周波数表示された Fourier 変換という。

$$\tilde{\mathcal{F}}(g)(\boldsymbol{f}) := \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i2\pi \boldsymbol{f}^\top \boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x}) d^d \boldsymbol{x}$$

また、 $G: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、次式で定義される、 \mathbf{x} に関する連続座標信号を G の周波数表示された逆 Fourier 変換という。

$$\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(G)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i2\pi \mathbf{f}^\top \mathbf{x}) G(\mathbf{f}) d^d \mathbf{f}$$

IV.2.4.1 逆変換により元の関数に戻る事

通常の Fourier 変換が $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ を満たすことを既知として、周波数表示された Fourier 変換が $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(\tilde{\mathcal{F}}(g))(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ を満たすことは $\boldsymbol{\omega} = 2\pi \mathbf{f}$ なる変数変換を用いて確かめられる。

$$\begin{aligned} G(\mathbf{f}) &:= \tilde{\mathcal{F}}(g)(\mathbf{f}) = (2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(g)(\boldsymbol{\omega}) \\ \tilde{\mathcal{F}}^{-1}(G)(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^d} G(\mathbf{f}) \exp(i2\pi \mathbf{f}^\top \mathbf{x}) d^d \mathbf{f} = \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(g)(\boldsymbol{\omega}) \exp(i\boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{x}) \det\left(\frac{1}{2\pi} I_d\right) d^d \boldsymbol{\omega} \\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(g)(\boldsymbol{\omega}) \exp(i\boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{x}) d^d \boldsymbol{\omega} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g))(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

IV.2.5 関数とその Fourier 変換の偶奇性

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ とする。このとき次が成り立つ

1. f が偶関数であることと $\mathcal{F}(f)$ が偶関数であることは同値である。
2. f が奇関数であることと $\mathcal{F}(f)$ が奇関数であることは同値である。

Proof.

1 を示す。2 も全く同様に示せる。

(\Rightarrow)

$\omega \in \mathbb{R}$ とする。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(-\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(i\omega x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) \exp(-i\omega(-x)) dx \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(y) \exp(-i\omega y) dy \quad (\text{変数変換 } x = -y \text{ を施した}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(-i\omega y) dy = \mathcal{F}(f)(\omega) \end{aligned}$$

(\Leftarrow)

Fourier 変換の対称性から \Rightarrow と全く同様に示せる。

□

IV.2.6 積と畳み込みとの関係

簡単のため 1 次元の場合について示す。 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ とし、 $F = \mathcal{F}(f)$, $G = \mathcal{F}(g)$ とする。

IV.2.6.1 積の Fourier 変換

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(fg)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}(F)(t)g(t)e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tilde{\omega})e^{i\tilde{\omega}t} d\tilde{\omega} \right) g(t)e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tilde{\omega}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i(\omega-\tilde{\omega})t} dt d\tilde{\omega} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tilde{\omega})G(\omega-\tilde{\omega})d\tilde{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(F * G)(\omega)
\end{aligned}$$

IV.2.6.2 畳み込みの Fourier 変換

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \exp(-i\omega t)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i\omega\tau)g(t-\tau) \exp(-i\omega(t-\tau))d\tau dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i\omega\tau) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) \exp(-i\omega(t-\tau))dt \right) d\tau \\
&= \sqrt{2\pi}F(\omega)G(\omega)
\end{aligned}$$

IV.2.7 Fourier 変換の関係式の早見表

数学寄りの分野では各周波数を用いた形式が、通信分野では周波数を用いた形式が使われ、混乱しやすいので一覧表に整理しておく。簡単のため、1次元の場合について記す。まず記号を次のように定義する。

- $\omega, f \in \mathbb{R}$
- $x, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

以上の定義の下で次の表に示す関係が成り立つ。

表 IV.2.1 Fourier 変換の関係式の早見表

関係式	各周波数表示	周波数表示
変換の定義	$X(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i\omega t) dt$	$X(f) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i2\pi ft) dt$
逆変換	$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(i2\pi ft) df$
積の Fourier 変換	$\mathcal{F}(xy)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(X * Y)(\omega)$	$\mathcal{F}(xy)(f) = (X * Y)(f)$
畳み込みの Fourier 変換	$\mathcal{F}(x * y)(\omega) = \sqrt{2\pi}X(\omega)Y(\omega)$	$\mathcal{F}(x * y)(f) = X(f)Y(f)$

第 IV.3 章

サンプリング定理

$d \in \mathbb{N}$, $W_l > 0$ ($l = 1, 2, \dots, d$), $\Omega := \prod_{l=1}^d [-W_l, W_l]$ とする。 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}(f)(\omega)$ が存在してその台が Ω に含まれるとき、次式が成り立つ。

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f\left(\pi \frac{n_1}{W_1}, \dots, \pi \frac{n_d}{W_d}\right) \prod_{l=1}^d \text{sinc } W_l \left(x_l - \pi \frac{n_l}{W_l}\right)$$

つまり f の各点での評価値を沢山集めて f を任意の精度で近似できる。

角周波数 W_l のかわりに周波数 $F_l = W_l/(2\pi)$ を使うと上式は次式になる。

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f\left(\frac{n_1}{2F_1}, \dots, \frac{n_d}{2F_d}\right) \prod_{l=1}^d \text{sinc } 2\pi F_l \left(x_l - \frac{n_l}{2F_l}\right)$$

Proof.

$\mathcal{F}(f)(\omega)$ の台が超直方体 Ω に含まれるから $\mathcal{F}(f)(\omega)$ は Fourier 級数展開できる。第 \mathbf{n} Fourier 係数を $c(\mathcal{F}(f), \mathbf{n})$ とすると

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} c(\mathcal{F}(f), \mathbf{n}) \exp i \sum_{l=1}^d n_l \frac{\omega_l}{W_l} \pi$$

となる。 $c(\mathcal{F}(f), \mathbf{n})$ は次式で求まる。

$$\begin{aligned} c(\mathcal{F}(f), \mathbf{n}) &= \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} \int_{\Omega} \mathcal{F}(f, \boldsymbol{\xi}) \exp(-i) \sum_{l=1}^d n_l \frac{\xi_l}{W_l} \pi d\boldsymbol{\xi} \\ &= (2\pi)^{d/2} \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f, \boldsymbol{\xi}) \exp i \sum_{l=1}^d \left(\frac{-n_l}{W_l} \pi \right) \xi_l d\boldsymbol{\xi} \\ &= (2\pi)^{d/2} \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f), -\pi \mathbf{n} \odot \mathbf{W}) \\ &= (2\pi)^{d/2} \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} f(-\pi \mathbf{n} \odot \mathbf{W}) \end{aligned}$$

f は $\mathcal{F}(f)$ の Fourier 逆変換で次のようにして求まる。

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f), \mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f)(\boldsymbol{\omega}) \exp i \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{x} d\boldsymbol{\omega} = (2\pi)^{-d/2} \int_{\Omega} \mathcal{F}(f)(\boldsymbol{\omega}) \exp i \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{x} d\boldsymbol{\omega} \\
&= (2\pi)^{-d/2} \int_{\Omega} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} c(\mathcal{F}(f), \mathbf{n}) \left(\exp i \sum_{l=1}^d n_l \frac{\omega_l}{W_l} \pi \right) \exp i \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{x} d\boldsymbol{\omega} \\
&= (2\pi)^{-d/2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_{\Omega} c(\mathcal{F}(f), \mathbf{n}) \exp i \boldsymbol{\omega}^\top (\mathbf{x} + \pi \mathbf{n} \oslash \mathbf{W}) d\boldsymbol{\omega} \\
&= (2\pi)^{-d/2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \int_{\Omega} (2\pi)^{d/2} \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} f(-\pi \mathbf{n} \oslash \mathbf{W}) \exp i \boldsymbol{\omega}^\top (\mathbf{x} + \pi \mathbf{n} \oslash \mathbf{W}) d\boldsymbol{\omega} \\
&= \left(\prod_{l=1}^d 2W_l \right)^{-1} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f(-\pi \mathbf{n} \oslash \mathbf{W}) \int_{\Omega} \exp i \boldsymbol{\omega}^\top (\mathbf{x} + \pi \mathbf{n} \oslash \mathbf{W}) d\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \exp i \boldsymbol{\omega}^\top (\mathbf{x} + \pi \mathbf{n} \oslash \mathbf{W}) d\boldsymbol{\omega} &= \prod_{l=1}^d \int_{-W_l}^{W_l} \exp i \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) \omega_l d\omega_l \\
&= \prod_{l=1}^d \frac{1}{i \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right)} \left[\exp i \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) W_l - \exp(-i) \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) W_l \right] \\
&= \prod_{l=1}^d 2W_l \frac{\sin \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) W_l}{\left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) W_l} = \prod_{l=1}^d 2W_l \prod_{l=1}^d \text{sinc } W_l \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right)
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f(-\pi \mathbf{n} \oslash \mathbf{W}) \prod_{l=1}^d 2W_l \text{sinc} \left(x_l + \pi \frac{n_l}{W_l} \right) W_l = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f(\pi \mathbf{n} \oslash \mathbf{W}) \prod_{l=1}^d \text{sinc } W_l \left(x_l - \pi \frac{n_l}{W_l} \right) \\
&= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f \left(\pi \frac{n_1}{W_1}, \dots, \pi \frac{n_d}{W_d} \right) \prod_{l=1}^d \text{sinc } W_l \left(x_l - \pi \frac{n_l}{W_l} \right)
\end{aligned}$$

□

第 IV.4 章

離散時間 Fourier 変換 (DTFT)

IV.4.1 直観的な説明

離散時間 Fourier 変換 (Discrete Time Fourier Transform; DTFT) とは、直観的には、離散座標信号を、連続的な周波数をもつ無数の離散時間信号の重ね合わせとして表現するものである。

IV.4.2 定義

$d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{T}_s (\in \mathbb{R}^d) > \mathbf{0}$ とする。 $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、次式で定義される、 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$ に関する連続座標信号を f の離散時間 Fourier 変換という。

$$\text{DTFT}(f)(\boldsymbol{\omega}) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{n}) \exp(-i(\boldsymbol{\omega} \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n})$$

$\boldsymbol{\omega}$ は各軸方向の角周波数をまとめて表したベクトルであり、 \mathbf{T}_s は各軸方向のサンプリング周期である。DTFT は $\boldsymbol{\omega}$ に関する周期関数であり、その周期は $2\pi \mathbf{1} \oslash \mathbf{T}_s$ である。

IV.4.2.1 呼称について

本書では関数の引数を時間や周波数に限定せず、より一般に座標と呼ぶ姿勢をとっている。しかし DTFT は電気・電子系の信号処理の分野で発展したため、離散“時間”という呼称が浸透しており、これに敢えて逆らって離散“座標”と呼ぶのは本書と工学応用の相性を悪くするだけで無益である。そこで、DTFT のような、歴史的な理由で呼称が定着しているものについては慣例に従うことにする。

IV.4.3 連続座標信号との関係

連続座標信号 $f_c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ をサンプリング周期 $\mathbf{T}_s := [T_{s,1}, T_{s,2}, \dots, T_{s,d}]^\top \in \mathbb{R}^d$ すなわち周波数 $\mathbf{f}_s := [f_{s,1}, f_{s,2}, \dots, f_{s,d}]^\top := [1/T_{s,1}, 1/T_{s,2}, \dots, 1/T_{s,d}]^\top \in \mathbb{R}^d$ でサンプリングした離散座標信号を $f_d : \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \mapsto f_c(\mathbf{T}^\top \mathbf{n})$ とする。 f_d の DTFT に於ける多次元の角周波数 $\boldsymbol{\omega}$ を周波数 \mathbf{f} を用いて $\boldsymbol{\omega} := 2\pi \mathbf{f}$ と表す。

\mathbf{n} の第 k 要素 n_k が 1 だけ変化すると、元の連続座標信号の対応する座標は T_k だけ変化し、DTFT のカーネル関数 $\exp(i(\boldsymbol{\omega} \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n})$ の偏角は $\omega_k T_{s,k} = 2\pi f_k T_{s,k}$ だけ変化する。つまり DTFT の定義域に於ける周波数 \mathbf{f} の第 k 成分に対応する元の連続座標信号の周波数の第 k 成分は f_k であり、スケールは保たれている。

DTFT の定義で述べたように、DTFT は周期が $2\pi \mathbf{1} \odot \mathbf{T}_s$ であるから、一意に区別できる角周波数は $-\pi \odot \mathbf{T}_s \leq \boldsymbol{\omega} < \pi \odot \mathbf{T}_s$ 、つまり一意に区別できる周波数は $-\mathbf{f}_s/2 \leq \mathbf{f} < \mathbf{f}_s/2$ である。この事実と、先程述べた DTFT と元の連続座標信号との周波数の関係から、DTFT に於いて一意に区別できる周波数に対応する元の連続座標信号の周波数 $\tilde{\mathbf{f}}$ は $-\mathbf{f}_s/2 \leq \tilde{\mathbf{f}} < \mathbf{f}_s/2$ である。

IV.4.4 逆離散時間 Fourier 変換 (IDTFT)

$d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{T}_s (\in \mathbb{R}^d) > \mathbf{0}$, $\Omega := \prod_{k=1}^d [-\pi/T_{s,k}, \pi/T_{s,k})$ とする。 $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、次式で定義される、 $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ に関する離散座標信号を F の逆離散時間 Fourier 変換 (Inverse DTFT; IDTFT) という。

$$\text{IDTFT}(F)(\mathbf{n}) := \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} F(\boldsymbol{\omega}) \exp(i(\boldsymbol{\omega} \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega}$$

IV.4.4.1 IDTFT が DTFT の逆変換であること

厳密な導出はここでは述べないが、 $\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{n})$ が絶対収束する場合は $\text{IDTFT}(\text{DTFT}(f))(\mathbf{n}) = f(\mathbf{n})$ なることを簡単に証明できる。 \sum と \int の順序交換が簡単に行えるからである。

IV.4.5 積と畳み込みとの関係

以下では既出の記号の定義は上書きしない限り引き継ぐ。 $f, g : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対してその DTFT を $F(\boldsymbol{\omega}), G(\boldsymbol{\omega})$ とする。

IV.4.5.1 時間領域, 周波数領域の畳み込みの定義

時間領域の畳み込みを次で定義する:

$f, g : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対してその畳み込み $f * g$ を次式で定義する。

$$(f * g)(\mathbf{n}) := \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{m}) g(\mathbf{n} - \mathbf{m})$$

周波数領域の畳み込みを次で定義する:

$F, G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ に対してその畳み込み $F * G$ を次式で定義する。

$$(F * G)(\boldsymbol{\omega}) := \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} F(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) G(\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}) d\tilde{\boldsymbol{\omega}}$$

IV.4.5.2 積の DTFT

f, g の積の DTFT は次式で求まる。

$$\begin{aligned}
\text{DTFT}(fg)(\omega) &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{n})g(\mathbf{n}) \exp(-i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \text{IDTFT}(F)(\mathbf{n})g(\mathbf{n}) \exp(-i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) \\
&= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \left(\frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} F(\tilde{\omega}) e^{i(\tilde{\omega} \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}} d\tilde{\omega} \right) g(\mathbf{n}) \exp(-i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) \\
&= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} F(\tilde{\omega}) \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} g(\mathbf{n}) e^{-i((\omega - \tilde{\omega}) \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}} \right) d\tilde{\omega} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} F(\tilde{\omega}) G(\omega - \tilde{\omega}) d\tilde{\omega} = (F * G)(\omega)
\end{aligned}$$

IV.4.5.3 畳み込みの DTFT

f, g の畳み込みの DTFT は次式で求まる。

$$\begin{aligned}
\text{DTFT}(f * g)(\omega) &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{m})g(\mathbf{n} - \mathbf{m}) \exp(-i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) \\
&= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{m}) \exp(-i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{m}) \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} g(\mathbf{n} - \mathbf{m}) \exp(-i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top (\mathbf{n} - \mathbf{m})) \\
&= F(\omega)G(\omega)
\end{aligned}$$

IV.4.5.4 積の IDTFT

DTFT の可逆性から直ちに言えるが、敢えて直接計算してみる。

$$\begin{aligned}
\text{IDTFT}(FG)(\mathbf{n}) &= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} F(\omega)G(\omega) \exp(i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\omega \\
&= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} (\text{DTFT}(f)(\omega)) G(\omega) \exp(i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\omega \\
&= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} \left(\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{m}) \exp(-i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{m}) \right) G(\omega) \exp(i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\omega \\
&= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{m}) \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} G(\omega) \exp(i(\omega \odot \mathbf{T}_s)^\top (\mathbf{n} - \mathbf{m})) d\omega \\
&= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{m})g(\mathbf{n} - \mathbf{m}) = (f * g)(\mathbf{n})
\end{aligned}$$

IV.4.5.5 畳み込みの IDTFT

DTFT の可逆性から直ちに言えるが、敢えて直接計算してみる。

$$\begin{aligned}
& \text{IDTFT}(F * G)(\mathbf{n}) \\
&= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\boldsymbol{\omega} \in \Omega} (F * G)(\boldsymbol{\omega}) \exp(i(\boldsymbol{\omega} \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\boldsymbol{\omega} \in \Omega} \left(\frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\tilde{\boldsymbol{\omega}} \in \Omega} F(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) G(\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}) d\tilde{\boldsymbol{\omega}} \right) \exp(i(\boldsymbol{\omega} \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\tilde{\boldsymbol{\omega}} \in \Omega} \left(\frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\boldsymbol{\omega} \in \Omega} G(\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \exp(i((\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega} \right) \\
&\quad F(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) \exp(i(\tilde{\boldsymbol{\omega}} \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\tilde{\boldsymbol{\omega}} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^d T_{s,k}}{(2\pi)^d} \int_{\tilde{\boldsymbol{\omega}} \in \Omega} g(\mathbf{n}) F(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) \exp(i(\tilde{\boldsymbol{\omega}} \odot \mathbf{T}_s)^\top \mathbf{n}) d\tilde{\boldsymbol{\omega}} \\
&= f(\mathbf{n}) g(\mathbf{n})
\end{aligned}$$

IV.4.6 定数関数 1 の DTFT

簡単のため 1 次元の場合について考察する。工学系の学生を対象とする講義では、 $\text{DTFT}(1)(\omega) = (2\pi/T_s) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - 2m\pi/T_s)$ (δ は Dirac のデルタ関数) を詳細を割愛して結果として受け入れさせる場合が多いと思う。IDTFT($(2\pi/T_s) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - 2m\pi/T_s)$)(x) = 1 の確認は簡単であり、DTFT の可逆性から $\text{DTFT}(1)(\omega) = (2\pi/T_s) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - 2m\pi/T_s)$ を受け入れる説明がなされるところ。

ここでは Dirichlet 積分を用いて $\text{DTFT}(1)(\omega) = (2\pi/T_s) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - 2m\pi/T_s)$ を直接的に導出してみる。DTFT の定義から次式が成り立つ。

$$\text{DTFT}(1)(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N e^{i\omega T_s m} = \frac{\sin(N + 1/2)\omega T_s}{\sin(\omega T_s/2)}$$

最右辺は等比数列の和の公式を用いた後、分母と分子に $e^{-i\omega/2}$ を掛けて整理すると得られる。これが $N \rightarrow \infty$ で $(2\pi/T_s) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - 2m\pi/T_s)$ として振る舞うことを確かめる。 $2\pi/T_s$ 周期性については明らかだから、 $[-\pi/T_s, \pi/T_s]$ の範囲で $(2\pi/T_s)\delta(\omega)$ として振る舞うことを確かめれば十分である。示すべきことは次の通りである。

$d \in \mathbb{N}$ とする。区間 $\Omega \subseteq [-\pi/T_s, \pi/T_s]$ 上で連続な任意の関数 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$ を考える。 $h > 0$ を $[-h, h] \subseteq \Omega$ となるように任意にとる。このとき次式が成り立つ。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-h}^h \frac{\sin(N + 1/2)x T_s}{\sin(x T_s/2)} f(x) dx = \frac{2\pi}{T_s} f(0)$$

Proof.

極限をとる前の積分を I_N とおく。 $y = x T_s/2$ と変数変換すると次式を得る。

$$I_N = \frac{2}{T_s} \int_{-h T_s/2}^{h T_s/2} \frac{\sin(2N + 1)y}{\sin y} f(2y/T_s) dy = \frac{2}{T_s} \int_{-h T_s/2}^{h T_s/2} \frac{\sin(2N + 1)y}{y} \frac{y}{\sin y} f(2y) dy$$

後に現れる Dirichlet 積分の性質から $N \rightarrow \infty$ で積分の主要部分が $x = 0$ 近傍に集中することがこの時点で推察できる。そこで、十分に小さい正数 d' を $0 < d' < hT_s/2$ となるようにとり、積分区間を $[-hT_s/2, -d'] \cup [-d', d'] \cup [d', hT_s/2]$ と分割する。

$[-hT_s/2, -d'], [d', hT_s/2]$ に於いて $f(2y/T_s)/\sin y$ は一様連続であるので $N \rightarrow \infty$ でこの2つの区間に於ける $(f(2y/T_s)\sin(2N+1)y)/\sin y$ の積分は0に収束する。証明の方針としては、 $\sin(2N+1)y$ の符号が変化する点で積分区間を細分し、各区間内で $f(2y/T_s)/\sin y$ を定数で近似して全体の積分を近似すると、一様連続性から近似値と真の積分の差が0に収束し、かつ近似値が0に収束する。

つまり任意に小さい $\varepsilon > 0$ に対して、 d' に依存して決まる十分大きい自然数 N_1 が存在して次式が成り立つ。

$$N \geq N_1 \Rightarrow \left| \frac{2}{T_s} \int_{[-hT_s/2, -d'] \cup [d', hT_s/2]} \frac{\sin(2N+1)y}{\sin y} f(2y/T_s) dy \right| < \varepsilon$$

次に $[-d', d']$ に於ける積分を評価する。 $y \rightarrow 0$ で $y/\sin y \rightarrow 1$, $f(2y/T_s) \rightarrow f(0)$ であるから、 d' を十分小さくとりなおすことで $|f(2y/T_s)y/\sin y - f(0)| < \varepsilon$ となり次式が成り立つ。

$$\left| \frac{2}{T_s} \int_{-d'}^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} \frac{y}{\sin y} f(2y/T_s) dy - \frac{2}{T_s} f(0) \int_{-d'}^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} dy \right| < \frac{2\varepsilon}{T_s} \left| \int_{-d'}^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} dy \right|$$

最後に Dirichlet 積分を用いて $(\sin(2N+1)y)/\sin y$ の積分を評価する。

$$\int_{-d'}^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} dy = 2 \int_0^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} dy = 2 \int_0^{(2N+1)d'} \frac{\sin z}{z} dz \rightarrow \pi \text{ as } n \rightarrow \infty$$

すなわち d' に依存して決まる十分大きい自然数 N_2 が存在して次式が成り立つ。

$$N \geq N_1 \Rightarrow \left| \int_{-d'}^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} dy - \pi \right| < \varepsilon$$

以上より、 $d' > 0$ を十分に小さくとり、 $N \geq \max(N_1, N_2)$ とすれば次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \left| I_N - \frac{2\pi}{T_s} f(0) \right| &= \left| \underbrace{\left(\frac{2}{T_s} f(0) \int_{-d'}^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} dy - \frac{2\pi}{T_s} f(0) \right)}_{(1)} \right. \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{2}{T_s} \int_{-d'}^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} \frac{y}{\sin y} f(2y) dy - \frac{2}{T_s} f(0) \int_{-d'}^{d'} \frac{\sin(2N+1)y}{y} dy \right)}_{(2)} \\ &\quad \left. + \underbrace{\frac{2}{T_s} \int_{[-h/2, -d'] \cup [d', h/2]} \frac{\sin(2N+1)y}{\sin y} f(2y) dy}_{(3)} \right| \\ &\leq |(1)| + |(2)| + |(3)| < \frac{2f(0)}{T_s} \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{T_s} (\pi + \varepsilon) + \varepsilon \end{aligned}$$

□

IV.4.7 単一周波数波の DTFT の導出

$T_s > 0$ とする。 $\sin(\omega_0 T_s n + \phi)$ ($\omega_0 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$) の DTFT は IV.4.6 の結果を用いて次のようにして得られる。

$$\begin{aligned}
 \text{DTFT}(\sin(\omega_0 T_s n + \phi))(\omega) &= \frac{1}{2i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\exp(i(\omega_0 T_s m + \phi)) - \exp(-i(\omega_0 T_s m + \phi))) \exp(-i\omega T_s m) \\
 &= \frac{1}{2i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (e^{i\phi} \exp(i(\omega_0 - \omega) T_s m) - e^{-i\phi} \exp(i(-\omega_0 - \omega) T_s m)) \\
 &= \frac{1}{2i} e^{i\phi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega_0 - \omega - 2\pi m/T_s) - \frac{1}{2i} e^{-i\phi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(-\omega_0 - \omega - 2\pi m/T_s) \\
 &= \frac{1}{2i} e^{i\phi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(-(\omega - \omega_0) - 2\pi m/T_s) - \frac{1}{2i} e^{-i\phi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(-(\omega + \omega_0) - 2\pi m/T_s) \\
 &= \frac{1}{2i} e^{i\phi} \frac{2\pi}{T_s} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m/T_s) - \frac{1}{2i} e^{-i\phi} \frac{2\pi}{T_s} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m/T_s) \\
 &= \frac{\pi}{T_s i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (e^{i\phi} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m/T_s) - e^{-i\phi} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m/T_s))
 \end{aligned}$$

上の結果を利用して、 $\cos(\omega_0 T_s n + \phi)$ の DTFT は次式となる。

$$\begin{aligned}
 \text{DTFT}(\cos(\omega_0 T_s n + \phi))\omega &= \text{DTFT}(\sin(\omega_0 T_s n + \phi + \pi/2))(\omega) \\
 &= \frac{\pi}{T_s i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (e^{i(\phi+\pi/2)} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m/T_s) - e^{-i(\phi+\pi/2)} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m/T_s)) \\
 &= \frac{\pi}{T_s i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (ie^{i\phi} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m/T_s) + ie^{-i\phi} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m/T_s)) \\
 &= \frac{\pi}{T_s} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (e^{i\phi} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m/T_s) + e^{-i\phi} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m/T_s))
 \end{aligned}$$

IV.4.8 エイリアシングとの関係

簡単のため 1 次元の場合について考察する。 $d \in \mathbb{N}$ とする。連続時間信号 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^d$ をサンプリング周期 T_s でサンプリングした信号 $\tilde{f}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}^d$ の DTFT を求める。 $F := \mathcal{F}(f)$ とする。

$$\begin{aligned}
 \text{DTFT}(\tilde{f})(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) e^{-i\omega T_s n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}(F)(nT_s) e^{-i\omega T_s n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') e^{i\omega' T_s n} d\omega' \right) e^{-i\omega T_s n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\omega' - \omega) T_s n} d\omega' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega' - \omega - 2\pi n/T_s) d\omega' \quad (\text{IV.4.6 を用いた。}) \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') \delta(\omega' - \omega - 2\pi n/T_s) d\omega' = \frac{\sqrt{2\pi}}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + 2\pi n/T_s) \quad (1)
 \end{aligned}$$

このように、 $\text{DTFT}(\tilde{f})$ は F をスケールして $2\pi/T_s$ 周期で重ね合わせたものになる。 f が帯域制限信号である、すなわちある $\omega_0 \geq 0$ が存在して F の台が $[-\omega_0, \omega_0]$ の範囲に収まるとき、 T_s を十分に小さくと

れば、DTFT $\left(\tilde{f}\right)$ の一意に区別可能な角周波数の区間 $[-\pi/T_s, \pi/T_s]$ でDTFT $\left(\tilde{f}\right)$ は $(\sqrt{2\pi}/T_s)F$ と一致する。逆に T_s が大きいとき、 $[-\pi/T_s, \pi/T_s]$ の区間の端部付近で $F(\omega + 2\pi/T_s)$ や $F(\omega - 2\pi/T_s)$ が0でない値をとる。つまりサンプリングする前の連続時間信号には存在しなかった高周波成分が現れる。この現象を“Aliasing”(エイリアシング)と呼ぶ。

エイリアシングが生じない条件は、 $-\omega_0 + 2\pi/T_s > \omega_0$ すなわち $T_s < \pi/\omega_0$ である。周波数で表現するなら、帯域制限区間の端部の周波数 $f_0 := \omega_0/(2\pi)$, サンプリング周波数 $f_s := 1/T_s$ を用いて $f_s > 2f_0$ である。

IV.4.8.1 補足: 式 (1) のもう一つの導出

$$\begin{aligned}
\text{DTFT}\left(\tilde{f}\right)(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)e^{-i\omega T_s n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - nT_s)dt \right) \exp(-i\omega T_s n) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \exp(-i\omega T_s n) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \exp(-i\omega t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(itn \frac{2\pi}{T_s}\right) dt \quad (\text{IV.4.6 を用いた。}) \\
&= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) \exp\left(itn \frac{2\pi}{T_s}\right) dt \\
&= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp\left[-i\left(\omega - n \frac{2\pi}{T_s}\right)t\right] dt \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - n \frac{2\pi}{T_s}\right)
\end{aligned}$$

IV.4.9 システムの伝達関数と正弦波入力の関係

サンプリング時間を $T_s > 0$ とする。実数値の入力に対して実数値を出力するシステムの伝達関数が $H : \omega \in \mathbb{R} \mapsto H(\omega) \in \mathbb{C}$ であるとき、このシステムに単一周波数の正弦波 $f(n) := \sin(\omega_0 T_s n + \phi)$ ($-\pi/T_s \leq \omega_0 \leq \pi/T_s$) を入力したときの出力 $g(n)$ は次式となる。

$$g(n) = |H(\omega_0)| \sin(\omega_0 T_s n + \phi + \text{Arg}(H(\omega_0)))$$

$\omega_0 < -\pi/T_s, \pi/T_s < \omega_0$ のときは $\tilde{\omega}_0 := (\omega_0 + \pi/T_s) \% (2\pi/T_s) - \pi/T_s$ とすると $\sin(\omega_0 T_s n + \phi) = \sin(\tilde{\omega}_0 T_s n + \phi)$ となるので、 $-\pi/T_s \leq \omega_0 \leq \pi/T_s$ の場合のみを考慮すればよい。

(直接的で長い証明)

Proof.

システムのインパルス応答を $h(n) (\in \mathbb{R}) = \text{IDTFT}(H)(n)$ とすると $g(n) = (h * f)(n)$ と表される。

$$\begin{aligned}
g(n) &= (h * f)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)f(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} H(\omega) \exp(i\omega T_s m) d\omega \right) f(n-m) \\
&= \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} H(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(i\omega T_s m) f(n-m) d\omega \\
&= \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} \frac{1}{2i} H(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(i\omega T_s m) \left(\exp(i(\omega_0 T_s (n-m) + \phi)) \right. \\
&\quad \left. - \exp(-i(\omega_0 T_s (n-m) + \phi)) \right) d\omega \\
&= \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} \frac{1}{2i} H(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) \exp(i(\omega - \omega_0) T_s m) \right. \\
&\quad \left. - \exp(-i(\omega_0 T_s n + \phi)) \exp(i(\omega + \omega_0) T_s m) \right) d\omega \\
&= \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} \frac{1}{2i} H(\omega) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) \frac{2\pi}{T_s} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m/T_s) \right. \\
&\quad \left. - \exp(-i(\omega_0 T_s n + \phi)) \frac{2\pi}{T_s} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m/T_s) \right) d\omega \\
&= \frac{1}{2i} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} H(\omega) \left(\exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) \delta(\omega - \omega_0) - \exp(-i(\omega_0 T_s n + \phi)) \delta(\omega + \omega_0) \right) d\omega \\
&= \frac{1}{2i} \left(H(\omega_0) \exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) - H(-\omega_0) \exp(-i(\omega_0 T_s n + \phi)) \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left(H(\omega_0) \exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) - \overline{H(\omega_0) \exp(i(\omega_0 T_s n + \phi))} \right) \\
&\quad (h(n) \in \mathbb{R} \text{ のため } H(-\omega_0) = \overline{H(\omega_0)}) \\
&= \frac{1}{2i} 2i \text{Im} \left(H(\omega_0) \exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) \right) \\
&= \text{Re} \left(H(\omega_0) \right) \text{Im} \left(\exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) \right) + \text{Im} \left(H(\omega_0) \right) \text{Re} \left(\exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) \right) \\
&= \text{Re} \left(H(\omega_0) \right) \sin(\omega_0 T_s n + \phi) + \text{Im} \left(H(\omega_0) \right) \cos(\omega_0 T_s n + \phi) \\
&= |H(\omega)| \sin(\omega_0 T_s n + \phi + \text{Arg}(H(\omega_0)))
\end{aligned}$$

□

(DTFT を経由した短い証明)

Proof.

f, g の DTFT を F, G とすると

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega) = H(\omega) \frac{\pi}{T_s i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(e^{i\phi} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m/T_s) - e^{-i\phi} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m/T_s) \right)$$

これを逆変換して

$$\begin{aligned}
g(n) &= \text{IDTFT}(G, n) \\
&= \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} H(\omega) \frac{\pi}{T_s i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (e^{i\phi} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m/T_s) - e^{-i\phi} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m/T_s)) \exp(i\omega T_s n) d\omega \\
&= \frac{1}{2i} (H(\omega_0) \exp(i(\omega_0 T_s n + \phi)) - H(-\omega_0) \exp(-i(\omega_0 T_s n + \phi)))
\end{aligned}$$

この先は「直接的で長い証明」と同じである。 □

IV.4.10 Gaussian ノイズの DTFT

IV.4.10.1 パワースペクトルの性質

複素数の Gaussian 乱数の DTFT は周波数に依らない分布をもつことを示す。Gaussian ノイズが White である (スペクトルが平坦である) と言われる理由はここにある。

$N \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$ とする。連続時間信号 $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は確率変数であるとする。これをサンプリング周期 $T_s > 0$ でサンプリングした N 個の確率変数 $X_n = X(nT_s)$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$) は互いに独立であり、自身の実部と虚部も独立であり、それぞれ $N(0, \sigma)$ に従うとする。数列 $\{X_n\}$ の DTFT を $Y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ とすると、 $|Y(\omega)|^2/(N\sigma^2)$ は χ_2^2 に従う。

Proof.

$[\text{Re}(X_n), \text{Im}(X_n)]^\top \sim N(\mathbf{0}, \sigma I_2)$ である。ここに I_2 は 2 次の単位行列である。 $Y(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{-j\omega T_s n}$ であるが、 $X_n e^{-j\omega T_s n}$ は X_n を $-\omega T_s n$ だけ回転させたものであり、これもまた $N(0, \sigma I_2)$ に従う。正規分布の再生性から $Y(\omega)$ は $N(\mathbf{0}, \sqrt{N}\sigma I_2)$ に従う。 $Y(\omega)/(\sqrt{N}\sigma)$ の実部と虚部は独立でそれぞれ標準正規分布に従うので、 $|Y(\omega)|^2/(N\sigma^2)$ は χ_2^2 に従う。 □

IV.4.10.2 Fourier 変換との関係

通信工学で現れる Gaussian ノイズの電力密度という言葉について説明を試みる。時間の不連続関数とも思えるノイズに対する Fourier 変換を通常の方法で定義できない。ここでは、サンプリング周波数が極めて高い測定器を用いて計算される DTFT 由来のスペクトルを考えることにする。産業応用上はこのような測定結果を用いるので、極限を数学的に厳密に扱わなくても実用上困ることはない。注目する時間区間 (測定器で言えば Gate time) $I := [t_0, t_1]$ に於いて確率変数としての連続時間ノイズ信号 $X(t)$ を周期 T_s でサンプリングした $N = \lfloor (t_1 - t_0)/T_s \rfloor$ 個のデータ $X_n := X(nT_s)$ に対して、区間 I に於ける平均スペクトルを次式で定義する。

$$Y(f) := \frac{1}{t_1 - t_0} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{t_1 - t_0}{N} X_n \exp(-j2\pi f n T_s)$$

上式は $T_s \rightarrow +0$ のとき、 X の台を I に制限した Fourier 変換の $1/(t_1 - t_0)$ 倍に近づく (X が Riemann 可積分かどうか疑わしいので「一致する」とは言い難い)。IV.4.10.1 の証明と同様にして $Y(\omega)$ の実部と虚部はそれぞれ独立に正規分布 $N(0, \sigma)$ に従い、 $|Y(\omega)|^2/\sigma^2$ は χ_2^2 分布に従うことがわかる。

第 IV.5 章

離散 Fourier 変換 (DFT)

IV.5.1 基底

$d \in \mathbb{N}$, $N_l \in \mathbb{N}$ ($l = 1, 2, \dots, d$), $\mathbf{k}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ とする。次式で定義される、 \mathbf{n} に関する離散座標信号を d 次元 DFT の第 \mathbf{k} 基底ベクトルという。

$$W(\mathbf{k}, \mathbf{n}) := \left(\prod_{l=1}^d N_l \right)^{-1/2} \exp i \left(\sum_{l=1}^d \frac{k_l n_l}{N_l} 2\pi \right)$$

IV.5.2 DFT の定義

$d \in \mathbb{N}$, $N_l \in \mathbb{N}$ ($l = 1, 2, \dots, d$), $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ とする。 $\Omega := \{0, 1, \dots, N_1 - 1\} \times \{0, 1, \dots, N_2 - 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, N_d - 1\}$ とする。 f を周期が (N_1, N_2, \dots, N_d) であるような離散座標信号 $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$; $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_d]^\top \mapsto f(\mathbf{n})$ とするとき、次式で定義される、 \mathbf{k} に関する離散座標信号を f の離散 Fourier 変換 (Discrete Fourier Transform; DFT) という。

$$\text{DFT}(f)(\mathbf{k}) := \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} f(\mathbf{n})$$

IV.5.3 Hermite な離散時間信号の DFT は実数である

$d, N_l, \mathbf{k}, \Omega, f$ の定義は IV.5.2 と同じものとする。 f にさらに Hermite 性: $\overline{f(\mathbf{n})} = f(-\mathbf{n})$ を要請するとき、 $\text{DFT}(f)(\mathbf{k})$ は実数となる。

Proof.

$$\begin{aligned} 2\text{Im}(\text{DFT}(f)(\mathbf{k})) &= \text{DFT}(f)(\mathbf{k}) - \overline{\text{DFT}(f)(\mathbf{k})} \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} f(\mathbf{n}) - \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} W(\mathbf{k}, \mathbf{n}) \overline{f(\mathbf{n})} \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{n}_M := [N_1, \dots, N_d]^\top$ とすると、

$$\overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} = W(\mathbf{k}, -\mathbf{n}) = W(\mathbf{k}, \mathbf{n}_M - \mathbf{n})$$

また、 f の Hermite 性の仮定より

$$\overline{f(\mathbf{n})} = f(-\mathbf{n}) = f(\mathbf{n}_M - \mathbf{n})$$

以上より

$$\begin{aligned}
2\text{Im}(\text{DFT}(f)(\mathbf{k})) &= \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} W(\mathbf{k}, \mathbf{n}_M - \mathbf{n})f(\mathbf{n}) - \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} W(\mathbf{k}, \mathbf{n})f(\mathbf{n}_M - \mathbf{n}) \\
&= \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} W(\mathbf{k}, \mathbf{n}_M - \mathbf{n})f(\mathbf{n}) - \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} W(\mathbf{k}, \mathbf{n}_M - \mathbf{n})f(\mathbf{n}) \\
&\quad (\{(\mathbf{n}, \mathbf{n}_M - \mathbf{n}) | \mathbf{n} \in \Omega\} = \{(\mathbf{n}_M - \mathbf{n}), \mathbf{n} | \mathbf{n} \in \Omega\} \text{を用いた}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

IV.5.3.1 系: Hermite な離散時間信号の IDFT は実数である

IV.5.3 と同様にして示せる。

IV.5.4 巡回畳み込みの DFT は DFT の積に比例する

$d, N_l, \mathbf{k}, \Omega$ の定義は IV.5.2 と同じものとする。 f, g を周期が (N_1, N_2, \dots, N_d) であるような離散座標信号 $f, g: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$; $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_d]^\top \mapsto f(\mathbf{n}), g(\mathbf{n})$ とするとき、次が成り立つ。

$$\text{DFT}\left(f \underset{\text{cyc}}{*} g\right)(\mathbf{k}) = \left(\prod_{l=1}^d N_l\right)^{1/2} \text{DFT}(f)(\mathbf{k}) \text{DFT}(g)(\mathbf{k})$$

Proof.

$\mathbf{N} := [N_1, \dots, N_d]^\top$ とする。

$$\begin{aligned}
\text{DFT}\left(f \underset{\text{cyc}}{*} g\right)(\mathbf{k}) &= \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} \left(f \underset{\text{cyc}}{*} g\right)(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} f(\mathbf{m})g((\mathbf{n} - \mathbf{m})\%N) \\
&= \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} f(\mathbf{m}) \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} g((\mathbf{n} - \mathbf{m})\%N) \\
&= \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} f(\mathbf{m}) \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \left(\prod_{l=1}^d N_l\right)^{1/2} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{m})W(\mathbf{k}, \mathbf{n} - \mathbf{m})} g((\mathbf{n} - \mathbf{m})\%N) \\
&= \left(\prod_{l=1}^d N_l\right)^{1/2} \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{m})} f(\mathbf{m}) \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, (\mathbf{n} - \mathbf{m})\%N)} g((\mathbf{n} - \mathbf{m})\%N) \\
&= \left(\prod_{l=1}^d N_l\right)^{1/2} \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{m})} f(\mathbf{m}) \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} g(\mathbf{n}) \\
&= \left(\prod_{l=1}^d N_l\right)^{1/2} \text{DFT}(f)(\mathbf{k}) \text{DFT}(g)(\mathbf{k})
\end{aligned}$$

□

IV.5.5 巡回相関の DFT

$d, N_l, \mathbf{k}, \Omega$ の定義は IV.5.2 と同じものとする。 f, g を周期が (N_1, N_2, \dots, N_d) であるような離散座標信号 $f, g : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$; $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_d]^\top \mapsto f(\mathbf{n}), g(\mathbf{n})$ とする。 f と g の巡回相関を $R_{f,g}(\mathbf{n}) = \text{cycCorrel}(f, g)(\mathbf{n})$ とする。 このとき、次が成り立つ。

$$\text{DFT}(R_{f,g})(\mathbf{k}) = \left(\prod_{l=1}^d N_l \right)^{1/2} \text{DFT}(f)(\mathbf{k}) \text{DFT}(g)(\mathbf{k})$$

Proof.

$\mathbf{N} := [N_1, \dots, N_d]^\top$ とする。

$$\begin{aligned} \text{DFT}(R_{f,g})(\mathbf{k}) &= \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} f(\mathbf{m}) \overline{g((\mathbf{m} - \mathbf{n}) \% \mathbf{N})} \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} f(\mathbf{m}) \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} \overline{g((\mathbf{m} - \mathbf{n}) \% \mathbf{N})} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで $\overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})}$ を変形して次式を得る。

$$\begin{aligned} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{n})} &= W(\mathbf{k}, -\mathbf{n}) = \left(\prod_{l=1}^d N_l \right)^{1/2} W(\mathbf{k}, \mathbf{m} - \mathbf{n}) W(\mathbf{k}, -\mathbf{m}) \\ &= \left(\prod_{l=1}^d N_l \right)^{1/2} W(\mathbf{k}, (\mathbf{m} - \mathbf{n}) \% \mathbf{N}) \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{m})} \end{aligned}$$

これを式 (1) に適用して次式を得る。

$$\begin{aligned} \text{DFT}(R_{f,g})(\mathbf{k}) &= \left(\prod_{l=1}^d N_l \right)^{1/2} \sum_{\mathbf{m} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, \mathbf{m})} f(\mathbf{m}) \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \overline{W(\mathbf{k}, (\mathbf{m} - \mathbf{n}) \% \mathbf{N})} \overline{g((\mathbf{m} - \mathbf{n}) \% \mathbf{N})} \\ &= \left(\prod_{l=1}^d N_l \right)^{1/2} \text{DFT}(f)(\mathbf{k}) \overline{\text{DFT}(g)(\mathbf{k})} \end{aligned}$$

□

IV.5.6 Gaussian ノイズの DFT

$F(n) \in \mathbb{C}$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$) は互いに独立で、複素正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うとする $\left(p(f) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \frac{-\text{Re}(f)^2 - \text{Im}(f)^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \frac{-|f|^2}{2\sigma^2} \right)$ 。 この DFT を $G(k) = \text{DFT}(F)(k)$ とするとき、 $G(k)$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) もまた互いに独立で、複素正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う。

Proof.

$$P \in \mathbb{C}^{N \times N}, P_{k,n} := W(k, n) := \frac{1}{\sqrt{N}} \exp i \frac{kn}{N} 2\pi \quad (k, n \in \{0, 1, \dots, N-1\})$$

$$\mathbf{F} := [F(0), F(1), \dots, F(N-1)]^\top, \mathbf{G} := [G(0), G(1), \dots, G(N-1)]^\top$$

と定義すると

$$\mathbf{G} = P^* \mathbf{F}$$

となる。

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{G} = \mathbf{g} \in \mathbb{C}^N) &= \Pr(P^* \mathbf{F} = \mathbf{g}) = \Pr(\mathbf{F} = P\mathbf{g}) \\ &= \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \frac{-|(P\mathbf{g})[i]|^2}{2\sigma^2} = \left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right) \exp \sum_{i=0}^{N-1} \frac{-|(P\mathbf{g})[i]|^2}{2\sigma^2} \\ &= \left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right) \exp \frac{-\|P\mathbf{g}\|_2^2}{2\sigma^2} = \left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right) \exp \frac{-\|\mathbf{g}\|_2^2}{2\sigma^2} \\ &= \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \frac{-|g_i|^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

□

第 IV.6 章

高速 Fourier 変換 (FFT)

IV.6.1 長さが 2 のべき乗でない信号の DFT を長さが 2 のべき乗の信号の FFT に帰着する方法

N を 2 のべき乗でない自然数とする。長さ N の信号 x の DFT

$$X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left(2\pi i \frac{-kn}{N}\right) \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

を長さが 2 のべき乗である信号の FFT に帰着する方法を考える。 $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab = \frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{2}$ を用いて上の式を次のように変形する。

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\pi i \frac{-k^2}{N}\right) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp\left(\pi i \frac{-n^2}{N}\right) \exp\left(\pi i \frac{(k-n)^2}{N}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\pi i \frac{-k^2}{N}\right) \sum_{n=0}^{N-1} u(n)v(k-n) \\ \text{where } u(n) &:= x(n) \exp\left(\pi i \frac{-n^2}{N}\right), v(n) := \exp\left(\pi i \frac{n^2}{N}\right) \\ \therefore X(k)\sqrt{N} \exp\left(\pi i \frac{k^2}{N}\right) &= (u * v)(k) \end{aligned}$$

$u * v$ を、長さが 2 のべき乗の信号に対して使える FFT, IFFT を用いて計算する。そのために長さが 2 のべき乗の信号同士の**巡回畳み込み**の中に $u * v$ が部分的に現れるような状況を以下のようにして作り出す。

$N_2 := \min\{a | \exists b \in \mathbb{N}, a = 2^b \geq 2N\}$ とする。長さ N_2 の信号 u_2, v_2 を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} u_2(n) &:= \begin{cases} u(n) & (n \in [0, N-1]) \\ 0 & (n \in [N, N_2-1]) \end{cases} \\ v_2(n) &:= \begin{cases} v(n) & (n \in [0, N-1]) \\ 0 & (n \in [N, N_2-N]) \\ v(N_2-n) & (n \in [N_2-N+1, N_2-1]) \end{cases} \end{aligned}$$

u_2 は u の後ろに 0 を並べて長さ N_2 に拡張した信号である。 v_2 は長さ N_2 の 0 が並んだ信号の前部を v で塗り替え、後部を v の第 1 ~ $N-1$ 要素をコピーして順番を逆にしたもので塗り替えた信号である。下の図は u_2, v_2 を視覚的に表現したものである。

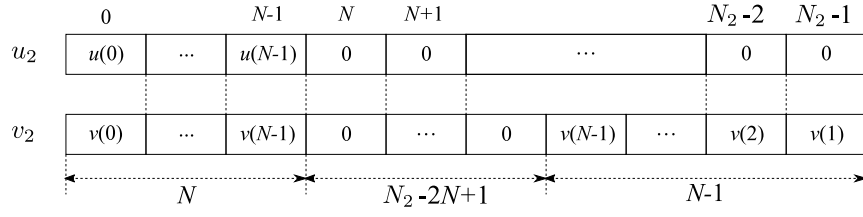


図 IV.6.1.1 u_2, v_2 の構造

このようにすると $u_2 * v_2$ の先頭 N 要素が $u * v$ と一致する。

$$\text{FFT}(u_2 * v_2) = \sqrt{N_2} \text{FFT}(u_2) \text{FFT}(v_2)$$

より

$$\text{IFFT}(\sqrt{N_2} \text{FFT}(u_2) \text{FFT}(v_2))$$

により $u_2 * v_2$ を高速に計算し、結果の先頭 N 要素を切り出せば $u * v$ を得る。得られた $u * v$ の第 k 要素に $\frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\pi i \frac{-k^2}{N}\right)$ を掛ければ x の DFT が得られる。 v_2 の FFT や $\frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\pi i \frac{-k^2}{N}\right)$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) は初回の計算結果を保存しておけば別の信号の DFT の計算で再利用できる。

第 IV.7 章

離散 Cosine 変換 (DCT)

IV.7.1 DCT 基底の正規直交性を導出するための補題

$M \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$ とする。さらに M は $2N$ の倍数ではないとする。このとき次式が成り立つ。

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos \frac{M(n+1/2)}{N} \pi = 0$$

Proof. (証明 1 複素指数関数を用いる証明)

(証明 2 複素数を用いない証明 (所謂「望遠鏡和」を使う))

□

第 V 部

Hilbert 变换

第 V.1 章

Hilbert 変換の Fourier 変換

$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を連続時間信号とし、 $\hat{x} = H(x)$, $X = \mathcal{F}(x)$ とする。次式が成り立つ。

$$\mathcal{F}(\hat{x})(\omega) = -i \operatorname{sgn}(\omega) X(\omega)$$

Proof.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\hat{x})(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t-\tau)}{\tau} d\tau e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\tau} d\tau dt \\ &= \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} dt \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\tau} X(\omega) d\tau \\ &= X(\omega) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i \sin \omega\tau}{\tau} d\tau = -i \operatorname{sgn}(\omega) X(\omega) \end{aligned}$$

□

第 VI 部

Laplace 变换

第 VI.1 章

複素指数関数入力に対する伝達関数の作用

$A > 0, \omega \in \mathbb{R}$ とする。連続時間信号 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を次のように定める。

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{i\omega t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

$H: s \in \mathbb{C} \mapsto H(s) \in \mathbb{C}$ を proper で既約な有理関数とする。また、 H の極の実部は全て負であるとする。伝達関数が $H(s)$ である連続時間システムに信号 f を入力した時の出力を g とすると、十分大きい t に対して $g(t) \sim H(i\omega)f(t)$ となる。

Proof.

N_p を $H(s)$ の分母多項式の相異なる零点の個数とし、それら零点を p_0, \dots, p_{N_p} とする。零点 p_k の次数を $N_{p,k}$ とし、 $H(s)$ の部分分数展開を

$$H(s) = c_0 + \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{l=1}^{N_{p,k}} \frac{c_{k,l}}{(s - p_k)^l}$$

とする。ここに $c_0, c_{k,l}$ ($k = 1, \dots, N_p, l = 1, \dots, N_{p,k}$) は適当な複素数である。 f, g の Laplace 変換をそれぞれ F, G とすると $G(s) = H(s)F(s) = AH(s)/(s - i\omega)$ である。この部分分数展開に現れる、 $1/(s - p_k)^l$ ($k = 1, \dots, N_p, l = 1, \dots, N_{p,k}$) に比例する項は逆 Laplace 変換すると $t^{l-1}e^{p_k t}$ に比例する関数となり、 $t \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。 (1)

残りの項、すなわち $1/(s - i\omega)$ に比例する項は $AH(i\omega)/(s - i\omega) = H(i\omega)F(s)$ となる。以上より、十分大きい t に対して $g(t) \sim \mathcal{L}^{-1}(H(i\omega)F(s))(t) = H(i\omega)f(t)$ となる。 \square

VI.1.1 系: 正弦波入力に対する伝達関数の作用

$A > 0, \omega \in \mathbb{R}$ とする。連続時間信号 $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定める。

$$f_1(t) = \begin{cases} A \cos \omega t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} A \sin \omega t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

H を直前の定理と同じように定める。伝達関数が $H(s)$ である連続時間実システムに信号 f_1, f_2 を入力した時の出力をそれぞれ g_1, g_2 とすると、十分大きい t に対して

$$g_1(t) \sim |H(i\omega)| \cos(\omega t + \text{Arg}(H(i\omega)))$$

$$g_2(t) \sim |H(i\omega)| \sin(\omega t + \text{Arg}(H(i\omega)))$$

となる。

Proof.

f_1 について示す。 f_2 も同様に示せる。 $f_1(t) = \text{Re}(Ae^{i\omega t})$ であり、実数システムだから出力は $Ae^{i\omega t}$ を入力したときの出力の実部と等しい。直前の定理の結果を用いて

$$g_1(t) = \text{Re}(H(i\omega)Ae^{i\omega t}) = \text{Re}\left(|H(i\omega)|e^{i\text{Arg}(H(i\omega))}Ae^{i\omega t}\right) = |H(i\omega)| \cos(\omega t + \text{Arg}(H(i\omega)))$$

□

Proof. (直接的な証明)

f_1 について示す。 f_2 も同様に示せる。直前の定理の証明の (1) までは同じである。 f_1, g_1 の Laplace 変換をそれぞれ F_1, G_1 とすると

$$F_1(s) = \frac{As}{s^2 + \omega^2} = \frac{A}{2} \left(\frac{1}{s + i\omega} + \frac{1}{s - i\omega} \right)$$

であるから、 $G_1(s) = H(s)F_1(s)$ の部分分数展開のうち $1/(s + i\omega)$, $1/(s - i\omega)$ に比例する項を詳しく調べれば良い。 $1/(s + i\omega)$ の係数は

$$G(s)X(s)(s + i\omega)|_{s \rightarrow -i\omega} = AG(-i\omega)/2$$

となり、 $1/(s - i\omega)$ の係数は

$$G(s)X(s)(s - i\omega)|_{s \rightarrow i\omega} = AG(i\omega)/2$$

となる。よってこれらの項の和は

$$\begin{aligned} & \frac{AG(-i\omega)/2}{s + i\omega} + \frac{AG(i\omega)/2}{s - i\omega} = \frac{A}{2} \left(\frac{G(-i\omega)}{s + i\omega} + \frac{G(i\omega)}{s - i\omega} \right) \\ &= \frac{A}{2} \times \frac{1}{s^2 + \omega^2} (G(-i\omega)(s - i\omega) + G(i\omega)(s + i\omega)) \\ &= \frac{As}{s^2 + \omega^2} \times \frac{1}{2} (G(i\omega) + G(-i\omega)) + \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \times \frac{-1}{2i} (G(i\omega) - G(-i\omega)) \end{aligned} \quad (\text{VI.1.1.1})$$

$G(s)$ は有理式なので $G(-i\omega) = \overline{G(i\omega)}$ となることに注意して

$$\frac{1}{2}(G(i\omega) + G(-i\omega)) = |G(i\omega)| \frac{1}{2} \left(e^{i \operatorname{Arg}(G(i\omega))} + e^{-i \operatorname{Arg}(G(i\omega))} \right) = |G(i\omega)| \cos \operatorname{Arg}(G(i\omega))$$

同様に

$$\frac{-1}{2i}(G(i\omega) - G(-i\omega)) = -|G(i\omega)| \sin \operatorname{Arg}(G(i\omega))$$

以上より、

$$\begin{aligned} (1) &= |G(i\omega)| \left(\cos \operatorname{Arg}(G(i\omega)) \frac{As}{s^2 + \omega^2} - \sin \operatorname{Arg}(G(i\omega)) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\ g(t) &\sim \mathcal{L}^{-1}((1))(t) = |G(i\omega)| (\cos \operatorname{Arg}(G(i\omega)) \cos \omega t - \sin \operatorname{Arg}(G(i\omega)) \sin \omega t) \\ &= |G(i\omega)| \cos(\omega t + \operatorname{Arg}(G(i\omega))) \end{aligned}$$

□

第 VII 部

Z 变换

第 VII.1 章

基礎理論

VII.1.1 最終値定理

$X(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) を離散時間信号 $x(n)$ ($n \in \mathbb{Z}, \forall n < 0, x(n) = 0$) の Z 変換とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$ が存在するとき次が成り立つ。

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$$

但し上式に於ける $\lim_{z \rightarrow 1}$ では z が実軸上で右側から 1 に近づくことを意味する。

Proof.

$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$ とする。発想としては、十分大きい $N \in \mathbb{N}$ に対して $\sum_{k=N+1}^{\infty} x(k)z^{-k} \sim \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha z^{-k} = \alpha z^{-N} \frac{1}{z-1}$ となることを利用する。

任意の $\varepsilon \in (0, 1)$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $\forall n \geq N, |x(n) - \alpha| < \varepsilon$ となる。

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) - \alpha &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)z^N F(z) - \alpha \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)z^N \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k)z^{-k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} x(k)z^{-k} \right) - (z-1)z^N \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha z^{-k} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)z^N \sum_{k=N+1}^{\infty} (x(n) - \alpha)z^{-k} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \text{の項は極限で消える} \right) \quad (\text{VII.1.1.1}) \\ |(1)| &\leq \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)z^N \sum_{k=N+1}^{\infty} |x(n) - \alpha|z^{-k} < \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)z^N \sum_{k=N+1}^{\infty} \varepsilon z^{-k} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

VII.1.2 複素指数関数入力に対する伝達関数の作用

$A > 0, \omega \in \mathbb{R}$ とする。離散時間信号 $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を次のように定める。

$$x(n) = \begin{cases} Ae^{i\Omega n} & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$

$H: z \in \mathbb{C} \mapsto H(z) \in \mathbb{C}$ を、 $1/z$ を変数とした有理式として既約であるような有理関数とする。また、 H の極の絶対値は全て 1 未満であるとする。伝達関数が $H(z)$ である離散時間システムに信号 x を入力した時の出力を y とすると、十分大きい n に対して $y(n) \sim H(e^{i\Omega})x(n)$ となる。

Proof.

N_p を $H(s)$ の相異なる極の個数とし、それら極を p_0, \dots, p_{N_p} とする。極 p_k の次数を $N_{p,k}$ とし、 $H(z)$ の部分分数展開を

$$H(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{l=1}^{N_{p,k}} \frac{c_{k,l}}{(1 - p_k z^{-1})^l}$$

とする。ここに $c_0, c_{k,l}$ ($k = 1, \dots, N_p, l = 1, \dots, N_{p,k}$) は適当な複素数である。 x, y の Z 変換をそれぞれ X, Y とすると $Y(z) = H(z)F(z) = AH(z)/(1 - e^{i\Omega} z^{-1})$ である。この部分分数展開に現れる、 $1/(1 - p_k z^{-1})^l$ ($k = 1, \dots, N_p, l = 1, \dots, N_{p,k}$) に比例する項は逆 Z 変換すると n の多項式と公比 p_k の等比級数の積となり、 $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。(このことは Z 変換の性質: 時間シフト $\mathcal{Z}[x(n+k)] = z^k X(z)$ 、および Z 領域微分 $\mathcal{Z}[nx(n)] = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[x(n)]$ を繰り返し用いることで分かる)

残りの項、すなわち $1/(1 - e^{i\Omega} z^{-1})$ に比例する項は $AH(e^{i\Omega})/(1 - e^{i\Omega} z^{-1}) = H(e^{i\Omega})X(z)$ となる。 \square

第 VII.2 章

IIR フィルタの計算手順

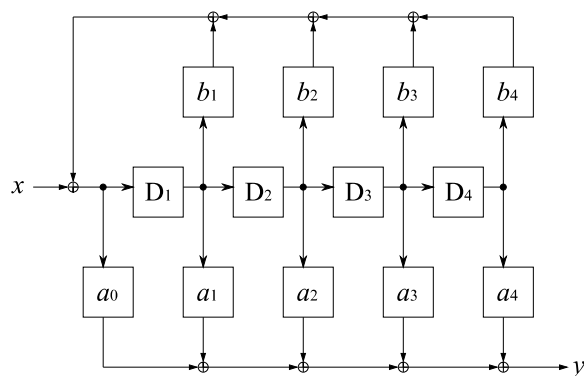


図 VII.2.0.1 IIR フィルタのブロック図の例

上の例で示した IIR フィルタの出力は以下の手続きで計算できる (仕事に関わっていたデジタル無線機の信号処理部でそうやっていた)。

1. $D_1, \dots, D_4 \leftarrow 0$
2. $n \leftarrow 0$
3. $\alpha \leftarrow a_1 D_1 + \dots a_4 D_4$
4. $\beta \leftarrow b_1 D_1 + \dots b_4 D_4$
5. $\gamma \leftarrow x(n) + \beta$
6. $y(n) \leftarrow \alpha + a_0 \gamma$
7. $D_4 \leftarrow D_3, D_3 \leftarrow D_2, D_2 \leftarrow D_1, D_1 \leftarrow \gamma$
8. $n \leftarrow n + 1$
9. n が x の定義域の末尾に達しているなら終了。そうでないなら 3 に戻る。

第 VIII 部

フィルタ

第 VIII.1 章

離散時間フィルタ

VIII.1.1 連続時間系のフィルタ処理を離散時間系で観測したときの振る舞い

ここでは、連続時間系でフィルタ処理を行った結果を離散時間系で観測したときの振る舞いを考える。この問題は実用上興味深い。物理系の状態をセンサでコンピュータに取り込み、有益な計算をする状況がこれに当てはまる。具体的には、無線受信機の直交分離出力である IQ 信号 (連続時間信号) を ADC で一定周期でサンプリングして CPU に取り込んで復調の計算を行う状況が考えられる。

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を連続時間信号とする。 $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を h の Laplace 変換とする。インパルス応答が h である連続時間フィルタを連続時間系の複素正弦波信号 $x(t) = A \exp i(\omega_0 t + \phi)$ ($A > 0, \omega_0, \phi \in \mathbb{R}$) に適用した出力を $y = h * x$ とする。 x, y をサンプリング周期 T_s でサンプリングした離散時間信号を $x : n \in \mathbb{Z} \mapsto x(nT_s), y : n \in \mathbb{Z} \mapsto y(nT_s)$ とする。このとき次式が成り立つ。

$$\text{DTFT}(y)(\omega) = H(i\omega_0)\text{DTFT}(x)(\omega)$$

Proof.

$$\begin{aligned} \text{DTFT}(y)(\omega) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(nT_s) \exp(-inT_s\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (h * x)(nT_s) \exp(-inT_s\omega) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(nT_s - \tau) d\tau \right) \exp(-inT_s\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(nT_s - \tau) \exp(-inT_s\omega) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} A \exp i(\omega_0(nT_s - \tau) + \phi) \exp(-inT_s\omega) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp(-i\omega_0\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} A \exp i(\omega_0 nT_s + \phi) \exp(-inT_s\omega) d\tau \\ &= \text{DTFT}(x)(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp(-i\omega_0\tau) d\tau = \text{DTFT}(x)(\omega) H(i\omega_0) \end{aligned}$$

□

第 IX 部

周波数変換

第 IX.1 章

ヘテロダイン

元の信号が実数値か複素数値か、変換後の出力を複素数値のまま扱えるのか、それとも実数しか扱えないのか、状況設定次第で無数のパターンが考えられるが、ここでは登場頻度が高いケースについて記す。

IX.1.1 連続時間複素数値信号をアップコンバージョンして実数値信号を送信し、受信側で複素数値信号を復元する

無線通信で使われる手法である。

IX.1.1.1 計算

$I_0, Q_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; $t \in \mathbb{R} \mapsto I_0(t) + iQ_0(t)$, $\omega > 0$ とする。 x_0 は所謂ベースバンド信号である。送信側は次式でアップコンバージョンされた信号を x_1 作る。

$$x_1(t) = x(t) \exp(i\omega t) = I_0(t) \cos \omega t - Q_0(t) \sin \omega t + i(Q_0(t) \cos \omega t + I_0(t) \sin \omega t)$$

無線通信に於いては x_1 の実部が送信される。受信側では次式でダウンコンバージョンされた信号 x_2 を得る。

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \operatorname{Re}(x_1(t)) \exp(-i\omega t) \\ &= \frac{1}{2} [I_0(t)(1 + \cos 2\omega t) + Q_0(t) \sin 2\omega t - i(I_0(t) \sin 2\omega t - Q_0(t)(1 - \cos 2\omega t))] \end{aligned}$$

これに LPF を掛けて $2\omega t$ で振動する成分を除去して次の信号を得る。

$$x_3(t) := \frac{1}{2} (I_0(t) + iQ_0(t))$$

IX.1.1.2 サイドバンドの考察

送信された $\operatorname{Re}(x_1)$ は実時間信号だからスペクトルは偶関数である。前述の受信側の操作ではスペクトルの右半分を原点に向かって ω だけ平行移動させ、LPF で高周波を消している。

第 X 部

離散時間領域

第 X.1 章

アップ・サンプリング

X.1.1 アップ・サンプリングされた信号の DTFT

X.1.1.1 主張

記号を次のように定義する。

- $R \in \mathbb{N}$, $R \geq 2$: アップ・サンプリング・レート
- $x_d: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$: 離散時間信号
- $T_s > 0$: x_d のサンプル周期
- y_d : x_d を R 倍にアップ・サンプリングした離散時間信号。つまり $y_d(n) = x_d(n/R)$ for $R \mid n$, 0 for $R \nmid n$ 。
- X_d : x_d の DTFT
- Y_d : y_d の DTFT

このとき $Y_d(\omega) = X_d(\omega)$ となる (アップ・サンプリング前の DTFT と完全に一致する)。

X.1.1.2 導出

$$\begin{aligned} Y_d(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d(n) \exp(-i\omega n T_s / R) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_d(mR) \exp(-i\omega(mR) T_s / R) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_d(m) \exp(-i\omega m T_s) = X_d(\omega) \end{aligned}$$

X.1.1.3 正規化角周波数で比較する

前述の通り X_d と Y_d は完全に一致する。しかしフィルタ設計に於いてはしばしば第 1 Nyquist 領域に関心がある、すなわち横軸が正規化角周波数で表されたスペクトラムに関心がある。この場合は X_d と Y_d のグラフの見た目が異なる。

両者をそれぞれ正規化角周波数で表示すると次式となる。

$$\tilde{X}_d(\Omega) := X_d(\Omega/T_s), \quad \tilde{Y}_d(\Omega) := Y_d(\Omega/(T_s/R)) = Y_d(R\Omega/T_s)$$

正規化角周波数で表示されたグラフでは、アップ・サンプリングされた信号のスペクトラムは元の信号のスペクトラムを横軸方向に $1/R$ に縮小した形になる。

X.1.1.4 数値例

サンプリング前の連続時間信号が $x(t) = e^{-\frac{n^2}{800}} \cos\left(\frac{\pi n}{5}\right)$ の場合の数値例が Mathematica ノートブック `zero_pad_effect_for_DTFT.nb` にある。

第 X.2 章

ダウン・サンプリング

X.2.1 ダウン・サンプリングされた信号の DTFT

X.2.1.1 主張

記号を次のように定義する。

- $R \in \mathbb{N}$, $R \geq 2$: ダウン・サンプリング・レート
- $x_d: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$: 離散時間信号
- $T_s > 0$: x_d のサンプル周期
- y_d : x_d を $1/R$ にダウン・サンプリングした離散時間信号。つまり $y_d(n) = x_d(nR)$ 。
- X_d : x_d の DTFT
- Y_d : y_d の DTFT

このとき Y_d は次式で表される。

$$Y_d(\omega) = \frac{1}{R} \sum_{n=-\lfloor R/2 \rfloor}^{\lfloor R/2 \rfloor} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} X_d(\omega - \tilde{\omega}) \delta\left(\tilde{\omega} - n \frac{2\pi}{RT_s}\right) d\tilde{\omega}$$

Y_d は ω に関する $2\pi/(RT_s)$ 周期関数となり、 Y_d の第 1 Nyquist 領域は $S_{N,Y} := [-\pi/(RT_s), \pi/(RT_s))$ となる。

X_d の台のうち x_d の第 1 Nyquist 領域 $S_{N,X} := [-\pi/T_s, \pi/T_s)$ にある部分を S_X とする。エイリアシングが生じない必要十分条件は $S_X \subset S_{N,X}$ である。ここで言うエイリアシングとは、 S_X を $2\pi/(RT_s)$ の整数倍ずつ平行移動しながら無限に複製したものを考えたとき、複製された S_X 同士に重なりが生じることを指す。

X.2.1.2 導出

$$\begin{aligned}
Y_d(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d(n) \exp(-i\omega n R T_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(nR) \exp(-i\omega n R T_s) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) x_d(m) \exp(-i\omega m T_s) \quad \text{where } u(m) := \begin{cases} 1 & (m \in R\mathbb{Z}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \\
&= \text{DTFT}(u x_d)(\omega) \\
&= \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} X_d(\omega - \tilde{\omega}) U(\tilde{\omega}) d\tilde{\omega} \quad \text{where } U(\omega) := \frac{2\pi}{R T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n \frac{2\pi}{R T_s}\right) \\
&= \frac{1}{R} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} X_d(\omega - \tilde{\omega}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\tilde{\omega} - n \frac{2\pi}{R T_s}\right) d\tilde{\omega}
\end{aligned} \tag{1}$$

被積分関数の X_d とデルタ関数列を次の図に示す。

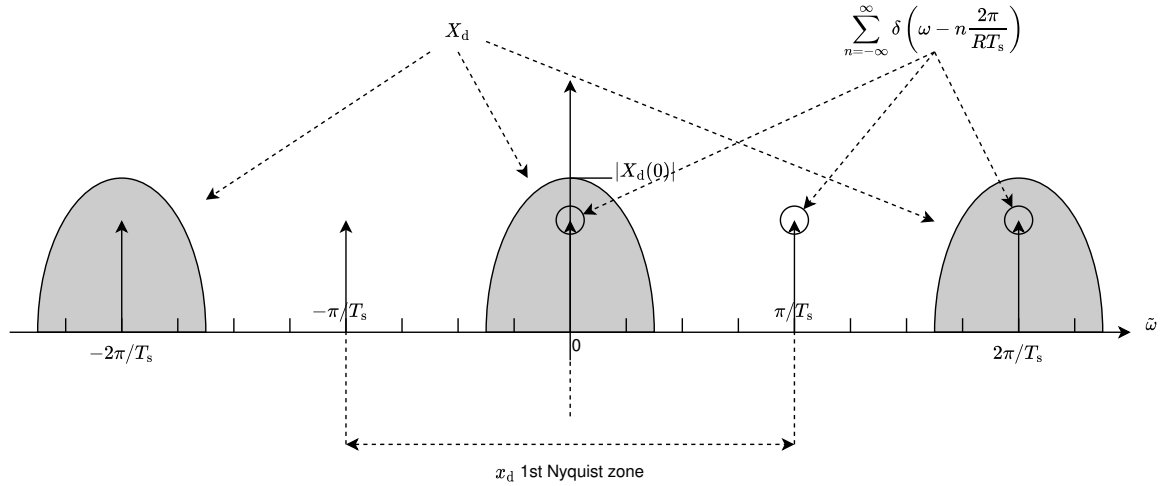


図 X.2.1.1 X_d とデルタ関数列 ($R = 2$)

X_d が $2\pi/T_s$ 周期関数であること、式 (1) の積分範囲が $[-\pi/T_s, \pi/T_s]$ であること、および R が偶数の場合に積分範囲の両端点で生じる、デルタ関数の中心から左右半分と X_d との積の積分を考慮すると、式 (1) は次式と等しいことが解る。

$$\frac{1}{R} \sum_{n=-\lfloor R/2 \rfloor}^{\lfloor R/2 \rfloor} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} X_d(\omega - \tilde{\omega}) \delta\left(\tilde{\omega} - n \frac{2\pi}{R T_s}\right) d\tilde{\omega}$$

また同時に、 Y_d が ω に関する $2\pi/(R T_s)$ 周期関数であることも解る。

エイリアシングが生じないことと $S_X \subset S_{N,X}$ が同値であることが解る。 Y_d を次の図に示す。

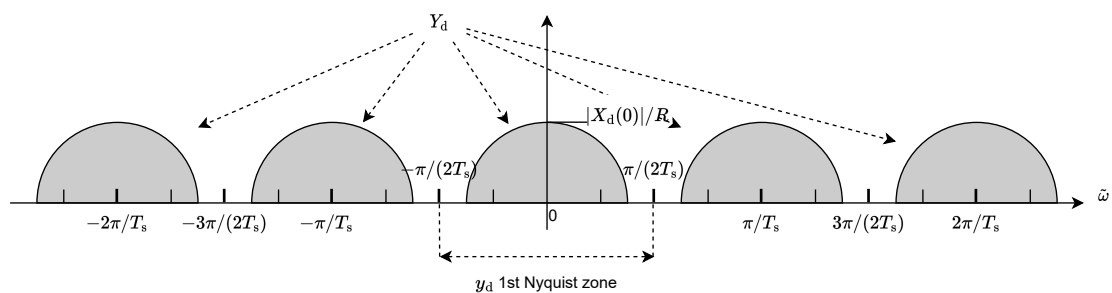


図 X.2.1.2 Y_d

X.2.1.3 数値例

いくつかの数値例が下記の Mathematica ノートブックにある。下記の x はサンプリング前の連続時間信号である。

- DTFT_of_down-sampled_signal.nb: $x(t) = A \exp(-t^2/(2\sigma^2))$
- DTFT_of_down-sampled_signal_example2.nb: $x(t) = e^{-12.5t^2} \cos(10\pi t)$

第 XI 部

離散時間領域から連続時間領域への移行

第 XI.1 章

0 次ホールド

XI.1.1 0 次ホールドされた離散時間信号の周波数特性

XI.1.1.1 動機

離散時間信号を仮に量子化誤差なく DA 変換できた場合の周波数スペクトルを計算したい。

XI.1.1.2 主張

$x_d: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ を離散時間信号とする。 X_d を x_d の DTFT とする。 $T_s > 0$ をサンプル周期として x_d の 0 次ホールドで生成した階段状の連続時間信号を x とする。 $u: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ を幅 T_s のパルスとする。

$$u(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T_s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

x は次式で表される。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)u(t - nT_s)$$

次の図は $T_s = 1, x_d(n) = \sin(2\pi n/12)$ ($0 \leq n \leq 24$), $x_d(n) = 0$ ($n < 0, 24 < n$) の例である。

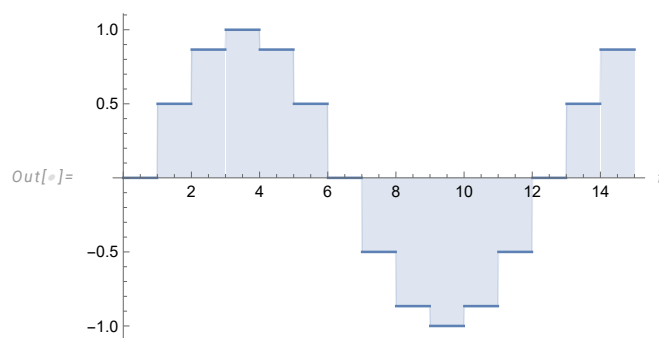


図 XI.1.1.1 x の例

以上の下、 x の Fourier 変換 X は次式である。

$$X(\omega) = \frac{T_s}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-i\frac{T_s}{2}\omega\right) \left(\text{sinc} \frac{T_s}{2}\omega\right) X_d(\omega)$$

$X_d(\omega)$ が $2\pi/T_s$ 周期関数であることに注意すれば、 $X_d(\omega)$ の第 1 Nyquist 領域の形状が位相回転 $\exp(-i\omega n T_s)$ とレベル減衰 $\text{sinc } \omega T_s/2$ を伴いつつ周期的に無限に繰り返されていることがわかる。次の図は XI.1.1.1 に対応する X の例である。

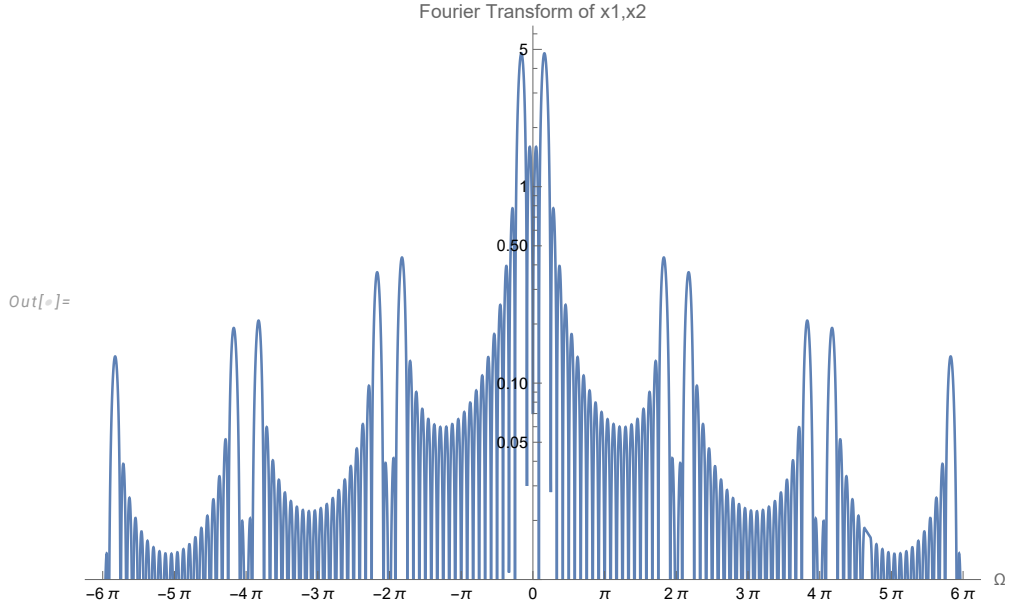


図 XI.1.1.2 X の例。横軸は正規化各周波数

XI.1.1.3 導出

Proof.

$$X(\omega) = \mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)u(t - nT_s)\right)(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)\mathcal{F}(u(t - nT_s))(\omega) \quad (1)$$

ここで次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u(t - nT_s))(\omega) &= \exp(-i\omega n T_s)\mathcal{F}(u)(\omega) = \exp(-i\omega n T_s) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{T_s} \exp(-i\omega t) dt \\ &= \frac{i}{\omega\sqrt{2\pi}} (\exp(-i\omega T_s) - 1) \exp(-i\omega n T_s) \\ &= \frac{i}{\omega\sqrt{2\pi}} \exp(-i\omega n T_s) \exp(-i\omega T_s/2) (\exp(-i\omega T_s/2) - \exp(i\omega T_s/2)) \\ &= \frac{i}{\omega\sqrt{2\pi}} \exp(-i\omega n T_s) \exp(-i\omega T_s/2) (-2i) \sin \frac{\omega T_s}{2} \\ &= \frac{2}{\omega\sqrt{2\pi}} \exp(-i\omega n T_s) \exp(-i\omega T_s/2) \sin \frac{\omega T_s}{2} \\ &= \frac{T_s}{\sqrt{2\pi}} \exp(-i\omega n T_s) \exp(-i\omega T_s/2) \text{sinc } \frac{\omega T_s}{2} \end{aligned}$$

これを式 (1) に適用して次式を得る。

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n) \frac{T_s}{\sqrt{2\pi}} \exp(-i\omega n T_s) \exp(-i\omega T_s/2) \operatorname{sinc} \frac{\omega T_s}{2} \\
 &= \frac{T_s}{\sqrt{2\pi}} \exp(-i\omega T_s/2) \operatorname{sinc} \frac{\omega T_s}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n) \exp(-i\omega n T_s) \\
 &= \frac{T_s}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-i\frac{T_s}{2}\omega\right) \left(\operatorname{sinc} \frac{T_s}{2}\omega\right) X_d(\omega)
 \end{aligned}$$

□

XI.1.2 inverse-sinc-filter

XI.1.2.1 背景

離散時間信号を DA 変換した結果の Fourier 変換には次式で表される変化が積の形で含まれることを [XI.1.1](#) で述べた。

$$\operatorname{sinc} \frac{T_s}{2} \omega = \operatorname{sinc} \frac{\Omega}{2}$$

ここに T_s はサンプリング周期, Ω は正規化各周波数である。変化の中には上式の他に $\exp(-i\frac{T_s}{2}\omega)$ という項も含まれるが、これは一定の群遅延が加わる（線形位相特性）だけであり、実用上無害なので無視する。次の図は $|\operatorname{sinc} \frac{\Omega}{2}|$ をプロットしたものである。

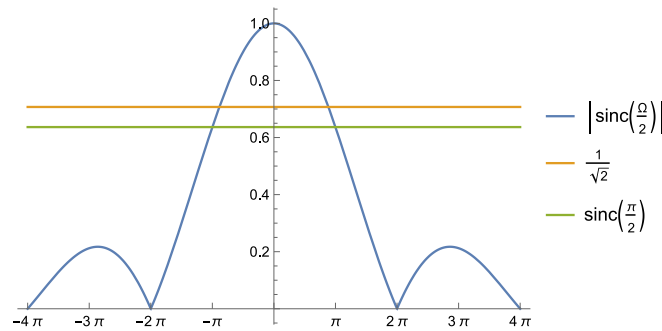


図 XI.1.2.1 量子化誤差のない DA 変換結果の sinc 状ゲイン歪み

上の図から、第 1 Nyquist 領域の端 $-\pi, \pi$ で約 -3dB のゲイン低下が生じていることが解る。実は 0 次ホールドで出力する直前に、上手く設計された 10 タップ程度の FIR フィルタを掛けてこの影響を緩和し、下図のようなゲイン特性に変更できる。このフィルタは「inverse-sinc フィルタ」と呼ばれる。

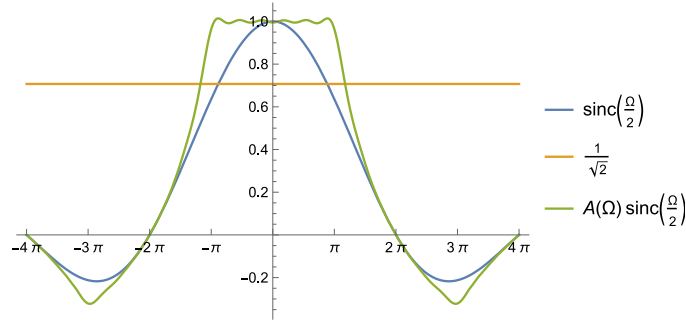


図 XI.1.2.2 inverse-sinc フィルタによって緩和されたゲイン歪み (凡例の 3 つ目の曲線)

inverse-sinc フィルタは $[-\pi, \pi]$ で sinc 状歪みの逆特性を近似するフィルタである。DA 変換の対象とする信号は通常、サンプリング定理を念頭に置いてスペクトラムが $[-\pi, \pi]$ の領域に収まる信号であるから、上述の補正が十分に機能する。以下ではこのフィルタの設計方法の 1 つを述べる。

XI.1.2.2 係数の導出

大雑把に言えば、フィルタ係数に対応する DTFT が $[-\pi, \pi]$ で $1/\text{sinc}(\Omega/2)$ を近似するように最小二乗法で係数を決定する。

フィルタ係数 $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ は偶対称な実数値関数とし、非零の係数の個数を奇数とする。数式で述べれば $N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{Z} a(-n) = a(n)$, $\forall n > N a(n) = 0$ である。この制約条件が唯一の方法ではないだろうが、後に見るようにこれで十分な性能を得られる。

a の DTFT を A とする。すなわち

$$A(\Omega) = \sum_{n=-N}^N a(n) \exp(-i\Omega n) = a(0) + 2 \sum_{n=1}^N a(n) \cos(\Omega n) = \mathbf{v}(\Omega)^\top \mathbf{a}$$

ここに $\mathbf{v}(\Omega) := [1, 2 \cos \Omega, \dots, 2 \cos N\Omega]^\top \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\mathbf{a} = [a(0), \dots, a(N)]^\top \in \mathbb{R}^{N+1}$ である。 $[-\pi, \pi]$ で A が $1/\text{sinc}(\Omega/2)$ を近似するように次式を最小化する \mathbf{a} を求める。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \|A(\Omega) - 1/\text{sinc}(\Omega/2)\|_2^2 d\Omega \quad (1)$$

被積分関数の中身を展開すると次式を得る。

$$\|A(\Omega) - 1/\text{sinc}(\Omega/2)\|_2^2 = \mathbf{a}^\top \mathbf{v}(\Omega) \mathbf{v}(\Omega)^\top \mathbf{a} - \frac{2}{\text{sinc}(\Omega/2)} \mathbf{v}(\Omega)^\top \mathbf{a} + 1/\text{sinc}(\Omega/2)^2$$

これを式 (1) に適用すると次式を得る。

$$(1) = \mathbf{a}^\top M \mathbf{a} - 2 \mathbf{m}^\top \mathbf{a} + \int_{-\pi}^{\pi} 1/\text{sinc}(\Omega/2)^2 d\Omega \quad (2)$$

ここに M, \mathbf{m} は次式で定義される数である。

$$M := \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{v}(\Omega) \mathbf{v}(\Omega)^\top d\Omega = 2\pi \text{diag}(1, 2, 2, \dots, 2), \quad \mathbf{m} = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{v}(\Omega)^\top / \text{sinc}(\Omega/2) d\Omega$$

\mathbf{m} は数値計算で求める。式 (2) の中で \mathbf{a} に依存しない項を無視すると、最小化すべき関数は次式である。

$$f_{\text{cost}}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{M} \mathbf{a} - 2\mathbf{m}^\top \mathbf{a}$$

これは狭義凸関数であり $(\nabla f_{\text{cost}})(\mathbf{a}) = 2(\mathbf{M} \mathbf{a} - \mathbf{m})$ なので f を最小化する \mathbf{a} を \mathbf{a}_{opt} とするとこれは $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{m} = \text{diag}(m_0, m_1/2, \dots, m_N/2)/(2\pi)$ である。ここに m_i ($i = 0, 1, \dots, N$) は \mathbf{m} の第 i 要素である。

XI.1.2.3 数値例

$N = 5$ のとき $\mathbf{a}_{\text{opt}} \approx [1.166240, -0.106996, 0.034475, -0.016454, 0.009530, -0.006189]^\top$ を得る。次の図はこの係数をプロットしたものである。

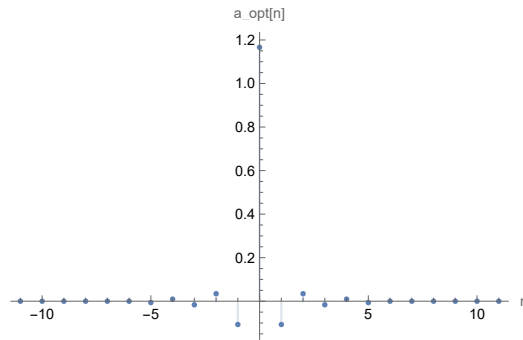


図 XI.1.2.3 inverse-sinc フィルタの係数 ($N=5$)

次の図は、この係数に対応するフィルタのインパルス応答の DTFT と $1/\text{sinc}(\Omega/2)$ を比較したものである。

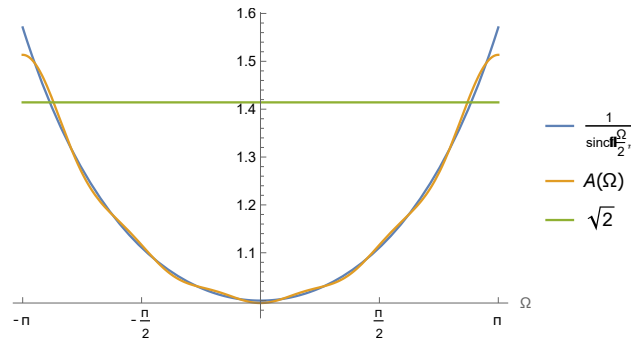


図 XI.1.2.4 inverse-sinc フィルタのインパルス応答の DTFT

このフィルタを使ってゲイン歪みを緩和したのが先に挙げた図 XI.1.2.2 である。

第 XI.2 章

アップサンプリング

XI.2.1 アップサンプリングされた信号の周波数特性

XI.2.1.1 動機

離散時間信号をアップサンプリングして DAC で出力したときの周波数スペクトルを計算したい。DAC の量子化誤差は無視する。

XI.2.1.2 アップサンプリングされた離散時間信号の DTFT

DAC の出力を考える前に、まずは離散時間の領域での様子を調べる。結果は驚くほど単純なものになる。記号を次のように定義する。

- $R \in \mathbb{N}$, $R \geq 2$: アップサンプリング・レート
- $x_{d,1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$: 離散時間信号
- $T_s > 0$: $x_{d,1}$ のサンプル周期
- $X_{d,1}$: $x_{d,1}$ の DTFT
- $x_{d,2}$: $x_{d,1}$ を R 倍にアップサンプリング (元の信号のサンプル同士の間 $R - 1$ 個の 0 を追加) した離散時間信号
- $X_{d,2}$: $x_{d,2}$ の DTFT

XI.2.1.2.1 主張

$X_{d,2}(\omega) = X_{d,1}(\omega)$ が成り立つ。

XI.2.1.2.2 導出

Proof.

$x_{d,1}$ のサンプリング周期が T_s/R であることに注意する。

$$\begin{aligned} X_{d,2}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{d,2}(n) \exp(-i\omega n T_s/R) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{d,2}(mR) \exp(-i\omega m R T_s/R) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{d,1}(m) \exp(-i\omega m T_s) = X_{d,1}(\omega) \end{aligned}$$

□

一般に、サンプリング周期が T_s/R である離散時間信号の DTFT は $2\pi R/T_s$ 周期関数であり、当然 $x_{d,2}$ についてもそれは成り立っている。その上でさらに、 $x_{d,2}$ については DTFT が $x_{d,1}$ のそれと完全に一致して $2\pi/T_s$ 周期関数にもなっている。

XI.2.1.3 アップサンプリングされた信号をそのまま DAC 出力した場合

XI.2.1.3.1 主張

記号を次のように定義する。

- $R \in \mathbb{N}$, $R \geq 2$: アップサンプリング・レート
- $x_{d,1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$: 離散時間信号
- $T_s > 0$: $x_{d,1}$ のサンプル周期
- $X_{d,1}$: $x_{d,1}$ の DTFT
- $x_{d,2}$: $x_{d,1}$ を R 倍にアップサンプリング (元の信号のサンプル同士の間にも $R-1$ 個の 0 を追加) した離散時間信号
- x_1 : T_s をサンプル周期として $x_{d,1}$ の 0 次ホールドで生成した階段状の連続時間信号
- x_2 : T_s/R をサンプル周期として $x_{d,2}$ の 0 次ホールドで生成した階段状の連続時間信号

$u_1 : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ を幅 T_s のパルスとする。

$$u_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T_s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$u_2 : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ を幅 T_s/R のパルスとする。

$$u_2(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T_s/R \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

x_1 は次式で表される。

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{d,1}(n) u_1(t - nT_s)$$

x_2 は次式で表される。

$$x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{d,2}(n) u_2(t - nT_s/R) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{d,2}(Rm) u_2(t - mT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{d,1}(n) u_2(t - nT_s)$$

次の図は $T_s = 1$, $R = 4$, $x_{d,1}(n) = \sin(2\pi * n/12)$ ($0 \leq n \leq 24$), $x_{d,1}(n) = 0$ ($n < 0, 24 < n$) の例である。

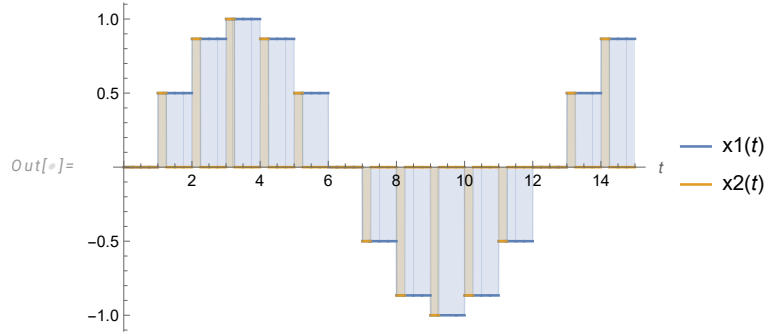


図 XI.2.1.1 x_1, x_2 の例

以上の下、 x_2 の Fourier 変換 X_2 は次式である。

$$X_2(\omega) = \frac{T_s}{R\sqrt{2\pi}} \exp\left(-i\frac{T_s}{2R}\omega\right) \left(\text{sinc} \frac{T_s}{2R}\omega\right) X_{d,1}(\omega)$$

XI.2.1.3.2 導出

Proof.

$$X_2(\omega) = \mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{d,1}(n)u_2(t - nT_s)\right)(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{d,1}(n)\mathcal{F}(u_2(t - nT_s))(\omega)$$

ここで [XI.1.1](#) と同様にして次式が成り立つ。

$$\mathcal{F}(u_2(t - nT_s))(\omega) = \frac{T_s}{R\sqrt{2\pi}} \exp(-i\omega nT_s) \exp\left(-i\frac{\omega T_s}{2R}\right) \text{sinc} \frac{\omega T_s}{2R}$$

よって次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} X_2(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{d,1}(n) \frac{T_s}{R\sqrt{2\pi}} \exp(-i\omega nT_s) \exp\left(-i\frac{\omega T_s}{2R}\right) \text{sinc} \frac{\omega T_s}{2R} \\ &= \frac{T_s}{R\sqrt{2\pi}} \exp\left(-i\frac{\omega T_s}{2R}\right) \left(\text{sinc} \frac{\omega T_s}{2R}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{d,1}(n) \exp(-i\omega nT_s) \\ &= \frac{T_s}{R\sqrt{2\pi}} \exp\left(-i\frac{\omega T_s}{2R}\right) \left(\text{sinc} \frac{\omega T_s}{2R}\right) X_{d,1}(\omega) \end{aligned} \quad (a)$$

□

XI.2.1.3.3 考察

アップサンプリング前の信号 x_1 については [XI.1.1](#) より、その Fourier 変換は次式である。

$$X_1(\omega) = \frac{T_s}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-i\frac{T_s}{2}\omega\right) \left(\text{sinc} \frac{T_s}{2}\omega\right) X_{d,1}(\omega) \quad (b)$$

式 (a),(b) を見比べると $X_{d,1}$ を共通して含んでおり、それ以外の箇所でアップサンプリングにより T_s が T_s/R に置き換わっていることがわかる。このことから、アップサンプリングにより高調波の位置は変わらず、

広域の減衰や位相回転が緩やかになることがわかる。次の図は [XI.2.1.1](#) に対応する DTFT と Fourier 変換の絶対値の例である。

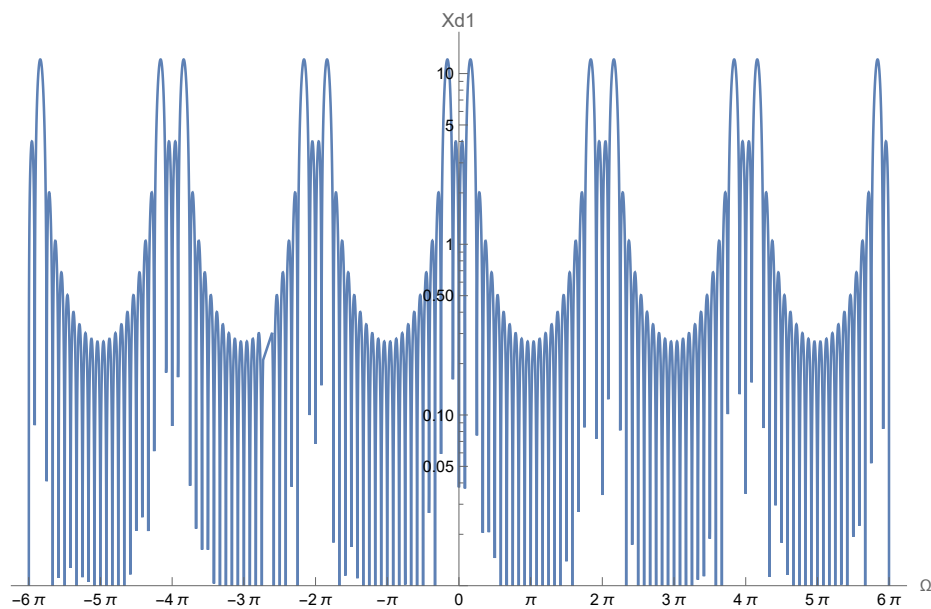


図 XI.2.1.2 $X_{d,1}$ の例。横軸は正規化各周波数。

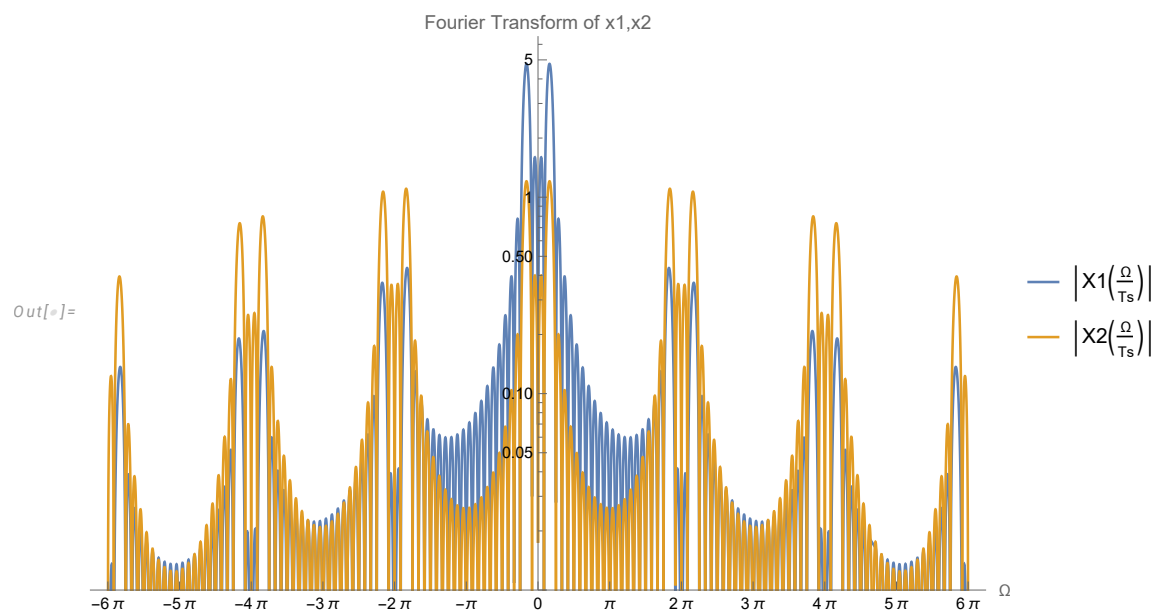


図 XI.2.1.3 X_1, X_2 の例。横軸は正規化各周波数。

第 XII 部

連続時間領域から離散時間領域への移行

第 XII.1 章

積分の離散近似

この部は文献 [1] に動機付けられて書いたものであり、その内容を再確認、深掘りしたもの、また派生して考えたことを記している。

XII.1.1 Euler 法

XII.1.1.1 背景

物理系をデジタル計算機で制御するにあたり、積分を Euler 法で近似することがある。本節では正弦波を Euler 法で近似的に積分した際の出力の窓関数付き Fourier 変換を導出し、高周波領域での位相変化、エイリアシングについて考察する。

XII.1.1.2 導出

$f_0 > 0$ とし、連続時間の複素正弦波信号 $u : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(i2\pi f_0 t)$ を考える。これを時刻 0 から $t \geq 0$ ままで積分した信号は $v(t) = (\exp(i2\pi f_0 t) - 1)/(i2\pi f_0)$ である。XIII.3 と同様に、矩形窓を通した、周波数表示された v の Fourier 変換を考える (窓の幅をサンプリング周期の整数倍に限っても影響が少ないことの説明は XIII.3 で述べられている)。 $N \in \mathbb{N}$ とし、窓の幅を $T = NT_s$ とする。 v の窓付き Fourier 変換を窓の幅で規格化したものは次式である。但し計算は容易なので過程は省略した。

$$\begin{aligned} V(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t) \exp(-i2\pi f t) dt \\ &= \frac{1}{i2\pi f_0 T} \left\{ \frac{1}{i2\pi(f - f_0)} [1 - \exp(-i2\pi(f - f_0)T)] + \frac{1}{i2\pi f} (\exp(-i2\pi f T) - 1) \right\} \end{aligned}$$

次に、 u の積分をサンプリング周期 $T_s > 0$ の Euler 法で近似したものを考える。Euler 法で積分した結果の離散時間信号を $x_{\text{dd}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ とすると、これは漸化式 $x_{\text{dd}}(n) = x_{\text{dd}}(n-1) + T_s u((n-1)T_s)$ に従う。但し初期条件として $x_{\text{dd}}(0) = 0$ とする。この漸化式を解き、次式を得る。

$$x_{\text{dd}}(n) = T_s \frac{1 - \exp(i2\pi f_0 n T_s)}{1 - \exp(i2\pi f_0 T_s)}$$

これを 0 次ホールドして得られる連続時間信号を $x_d(t) := x_{dd}(\lfloor t/T_s \rfloor T_s)$ とする。先ほど v に対して行ったのと同様に窓付き Fourier 変換 X_d を計算すると、次式を得る。但し計算は容易なので過程の多くを省略した。

$$\begin{aligned} X_d(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T x_d(t) \exp(-i2\pi ft) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{T} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} x_d(t) \exp(-i2\pi ft) dt \\ &= \frac{1}{i2\pi fN} \times \frac{1 - \exp(-i2\pi fT_s)}{1 - \exp(i2\pi f_0T_s)} \left\{ \frac{1 - \exp(-i2\pi fT_sN)}{1 - \exp(-i2\pi fT_s)} - \frac{1 - \exp(-i2\pi(f - f_0)T_sN)}{1 - \exp(-i2\pi(f - f_0)T_s)} \right\} \end{aligned}$$

v 中の、周波数が f_0 である成分の振幅と位相を調べる。 $f \rightarrow f_0$ の極限に関して次式が成り立つ。

$$\lim_{f \rightarrow f_0} V(f) = \frac{1}{i2\pi f_0} \left[1 + \frac{\exp(-i2\pi f_0T) - 1}{i2\pi f_0T} \right]$$

次に x_d 中の、周波数が f_0 である成分の振幅と位相を調べる。但し、 $f_0T_s < 1$ と仮定する。次式が成り立つ。

$$\lim_{f \rightarrow f_0} X_d(f) = \frac{1}{i2\pi f_0N} \times \frac{1 - \exp(-i2\pi f_0T_s)}{1 - \exp(i2\pi f_0T_s)} \left\{ \frac{1 - \exp(-i2\pi f_0T_sN)}{1 - \exp(-i2\pi f_0T_s)} - N \right\}$$

サンプリング周波数が十分高い、すなわち $f_0T_s \ll 1$ であるとき、次の近似式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \lim_{f \rightarrow f_0} X_d(f) &\approx \frac{1}{i2\pi f_0N} \times (-1) \left[\frac{1 - \exp(-i2\pi f_0T_sN)}{i2\pi f_0T_s} - N \right] \\ &= \frac{1}{i2\pi f_0} \left[1 + \frac{\exp(-i2\pi f_0T_sN) - 1}{i2\pi f_0T_sN} \right] = \frac{1}{i2\pi f_0} \left[1 + \frac{\exp(-i2\pi f_0T) - 1}{i2\pi f_0T} \right] \\ &= \lim_{f \rightarrow f_0} V(f) \end{aligned}$$

XII.1.1.3 数値例

今、 $f_0 = 10$, $T_s = 10^{-2}$, $N = 200$ とする。 $f = f_0$ に於ける v の振幅と位相の組は $(1/(20\pi), -\pi/2) \approx (1.59 \times 10^{-2}, -1.57)$ である。一方、 x_d の振幅と位相の組はおおよそ $(1.59 \times 10^{-2}, -2.20)$ である。

次の図は f_0 近傍でのパワースペクトル V, X_d を示したものである。

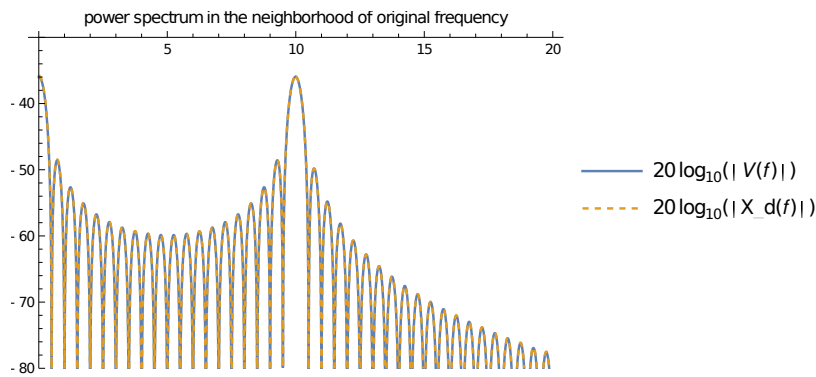


図 XII.1.1.1 元の周波数の近傍でのパワースペクトル

低周波領域では絶対値が良く一致していることがわかる。

次に高調波を見る。次の図はサンプリング周波数の 3 倍の範囲まで V, X_d を示したものである。

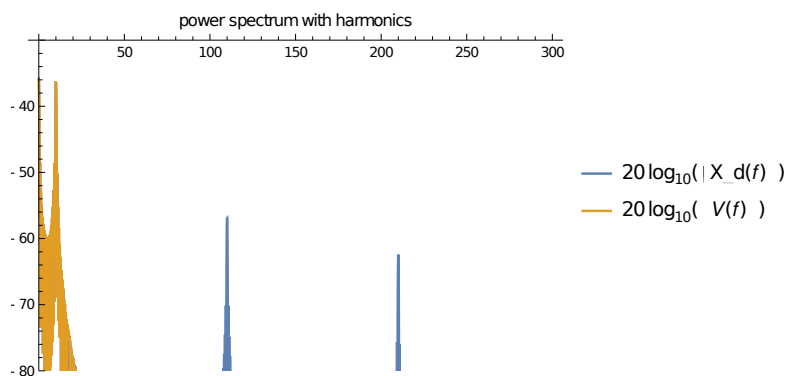


図 XII.1.1.2 高調波を含むパワースペクトル

低周波の領域では V, X_d が重なって判別できない。また、サンプリング周波数の整数倍の位置に高調波が生じていることが判る。

この数値例を計算した Mathematica ノートブックおよび MATLAB スクリプトは下記のファイル名で保存されている。Git リポジトリ内でファイル名検索すれば発見できるであろう。

- [spectrum_of_integralsine-wave_by_Euler-method.nb](#)
- [spectrum_of_integral_sine_wave_by_Euler_method.m](#)

第 XIII 部

離散時間系を介した連続時間系

第 XIII.1 章

背景

この部は文献 [1] に動機付けられて書いたものであり、その内容を再確認、深掘りしたもの、また派生して考えたことを記している。

第 XIII.2 章

入力に 0 次ホールド機構を加えた連続時間システムの z 変換

XIII.2.1 背景

実用上、物理系をディジタル計算機で制御するために、連続系である制御対象と入力の間「AD 変換器」(0 次ホールド回路 + 量子化器), 「演算回路」, 「DA 変換器」(0 次ホールド回路) が追加される。本節では、連続時間システムの入力に 0 次ホールド機構を追加したときのシステムの出力のうち、サンプリング時間の整数倍の時点に於いて出力が厳密に一致する離散時間システムの z 変換を導出する。

XIII.2.2 主張

連続時間システムのインパルス応答を $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ とし、そのラプラス変換を $H: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ とする。但しシステムは因果的である、すなわち $h(t) = 0$ ($t < 0$) とする。入力信号をサンプリング周期 $T_s > 0$ で 0 次ホールドして与えるときの出力を $y_d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ とする。このとき、システムの z 領域の伝達関数は $(1 - z^{-1})H_{dd}(z)$ となる。ここに $H_{dd}(z)$ は $H(s)/s$ の逆ラプラス変換を周期 T_s でサンプリングして得られる離散時間信号の z 変換である。つまり、この z 領域の伝達関数の出力は T_s の整数倍の時刻で連続時間システムの出力 y_d と厳密に一致する。

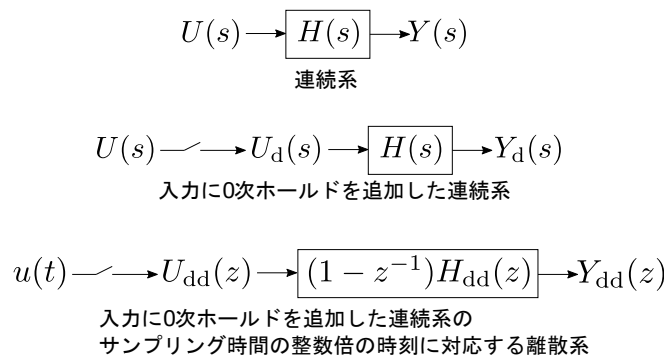


図 XIII.2.2.1 連続時間系と、入力に 0 次ホールドを付加した系

XIII.2.3 導出

連続時間システムへの入力を $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ とする。但し $u(t) = 0$ ($t < 0$) とする。周期 T_s で 0 次ホールドされた入力信号を $u_d : t \in \mathbb{R} \rightarrow u(\lfloor t/T_s \rfloor T_s)$ とする。Heaviside の単位ステップ関数を u_H とすると u_d は次式で表せる。

$$u_d(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_s) (u_H(t - kT_s) - u_H(t - (k+1)T_s))$$

このラプラス変換を U_d とすると次式で表される。

$$U_d(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_s) e^{-kT_s s} \frac{1 - e^{-T_s s}}{s}$$

これに対する出力 y_d のラプラス変換を Y_d とすると、次式である。

$$Y_d(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_s) e^{-kT_s s} \frac{1 - e^{-T_s s}}{s} H(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_s) e^{-kT_s s} (1 - e^{-T_s s}) H_d(s)$$

where $H_d(s) := H(s)/s$

$H_d(s)$ の逆ラプラス変換を h_d とすると、 y_d は次式である。

$$y_d(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_s) (h_d(t - kT_s) - h_d(t - (k+1)T_s))$$

離散時間信号 h_{dd}, y_{dd} を $h_{dd} : n \in \mathbb{Z} \mapsto h_d(nT_s), y_{dd} : n \in \mathbb{Z} \mapsto y_d(nT_s)$ とすると y_{dd} は次式である。

$$\begin{aligned} y_{dd}(n) &= y_d(nT_s) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_s) (h_d((n-k)T_s) - h_d((n-k-1)T_s)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_s) (h_{dd}(n-k) - h_{dd}(n-k-1)) \end{aligned}$$

離散時間信号 u_{dd} を $u_{dd} : n \in \mathbb{Z} \mapsto u_d(nT_s)$ で定義する。 u_{dd}, h_{dd}, y_{dd} の z 変換をそれぞれ U_{dd}, H_{dd}, Y_{dd} とすると次式を得る。

$$\begin{aligned} Y_{dd}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_{dd}(n) z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} u_d(kT_s) \sum_{n=0}^{\infty} ((h_{dd}(n-k) - h_{dd}(n-k-1))) z^{-n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_d(kT_s) \left[z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} h_{dd}(n-k) z^{-(n-k)} - z^{-k-1} \sum_{n=0}^{\infty} h_{dd}(n-k-1) z^{-(n-k-1)} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_d(kT_s) \left[z^{-k} \sum_{n=k}^{\infty} h_{dd}(n-k) z^{-(n-k)} - z^{-k-1} \sum_{n=k+1}^{\infty} h_{dd}(n-k-1) z^{-(n-k-1)} \right] \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_d(kT_s) z^{-k} \right) (1 - z^{-1}) H_{dd}(z) = U_{dd}(z) (1 - z^{-1}) H_{dd}(z) \end{aligned}$$

第 XIII.3 章

0 次ホールドされた正弦波の周波数特性

XIII.3.1 背景

既に述べたように、信号処理や制御工学では実用上、入力と制御対象の間に 0 次ホールド回路と演算回路が挟まった形になる。技術書の中にはこれをステップ入力に対するラプラス変換の積分と時間遅れとして表してゲインや位相を考えているものもあるが、これは厳密には正しくない。なぜなら、0 次ホールド回路に正弦波を入れた際、通過した信号は細かいステップの集まりであり、元の正弦波に近いものの、完全な正弦波ではないからである。「ゲイン」や「位相変化」を厳密に定義できない。厳密には、Fourier 変換してスペクトラムについて考える必要がある。とはいえ、無限に続く減衰しない信号の Fourier 変換は通常関数の意味では存在しないし(超関数になる)、現実の測定器は窓関数で時間制限した信号の Fourier 変換を近似的に計算している。そこで本記事では窓関数付きの Fourier 変換の結果について考察する。

XIII.3.2 導出

$f_0 > 0$ とし、連続時間の複素正弦波信号 $x : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(i2\pi f_0 t)$ を考える。サンプリング周期を $T_s > 0$ とする。この周期で x を 0 次ホールドした信号を $x_d : t \in \mathbb{R} \mapsto x(\lfloor t/T_s \rfloor T_s)$ とする。次の図は x と x_d の実部を示したものである。

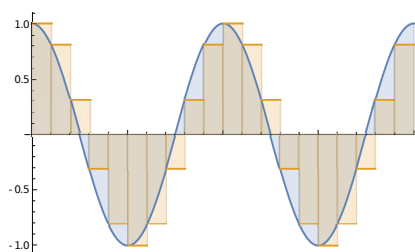


図 XIII.3.2.1 元の信号とその 0 次ホールド

上の図より、 x_d の基本周波数成分 (周波数成分に於ける f_0 に対応する成分) が x のそれより遅れることが予想される。このことを矩形窓を通した、周波数表示された Fourier 変換で考察する。 $N \in \mathbb{N}$ とし、窓の幅を $T = NT_s$ とする。窓の幅を T_s の整数倍に選んでいるが、非整数倍の場合でも幅を十分に大きくとれば小数部分に対応する区間の積分の $1/T$ 倍は無視できるほど小さくなり、最も近い整数倍の幅を用いた結果と殆ど一

致する。 x の窓付き Fourier 変換を窓の幅で規格化したものは次式である。

$$X(f) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp(-i2\pi ft) dt = \frac{1}{i2\pi(f-f_0)T} (1 - \exp(-i2\pi(f-f_0)T))$$

x_d の窓付き Fourier 変換は次式である。

$$\begin{aligned} X_d(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T x_d(t) \exp(-i2\pi ft) dt = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} x_d(t) \exp(-i2\pi ft) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \exp(i2\pi f_0 k T_s) \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \exp(-i2\pi ft) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \exp(i2\pi f_0 k T_s) \frac{1}{i2\pi f} \exp(-i2\pi f k T_s) (1 - \exp(-i2\pi f T_s)) \\ &= \frac{1 - \exp(-i2\pi f T_s)}{i2\pi f} \underbrace{\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \exp(i2\pi(f_0 - f)k T_s)}_{(A)} \\ &= \frac{1 - \exp(-i2\pi f T_s)}{i2\pi f} \frac{1}{NT_s} \exp(i\pi(f_0 - f)(N-1)T_s) \frac{\sin \pi(f - f_0)NT_s}{\sin \pi(f - f_0)T_s} \end{aligned}$$

最後の式を導くために、(A) に等比数列の和の公式を適用し、分母・分子それぞれ \sin が生じるように複素指数関数を括り出して整理した。

x_d 中の、周波数が f_0 である成分の振幅と位相を調べる。 $f \rightarrow f_0$ の極限に関して次式が成り立つ。

$$\lim_{f \rightarrow f_0} X_d(f) = \frac{1 - \exp(-i2\pi f_0 T_s)}{i2\pi f_0 T_s}$$

これより、上式に相当する振幅と位相の変化が生じる。サンプリングが十分に高速、すなわち $f_0 T_s \ll 1$ であるとき上式は 1 に近づくので、振幅と位相の変化は無くなってゆく。

次に、高調波領域を調べる。 $|X_d(f)|$ は $1/T_s$ 周期関数と $1/|f|$ の積であるので、 $|f| < T_s/2$ の部分の縮小コピーが高調波領域に於いて $1/T_s$ 毎に現れる。これが高調波成分である。

XIII.3.3 数値例

今、 $f_0 = 10$, $T_s = 10^{-2}$, $N = 200$ とする。 $f = f_0$ に於ける振幅と位相は $|X_d(f_0)| \approx 0.9836$, $\angle X_d(f_0) \approx -18.00^\circ$ となる。次の図は f_0 近傍でのパワースペクトル X, X_d を示したものである。

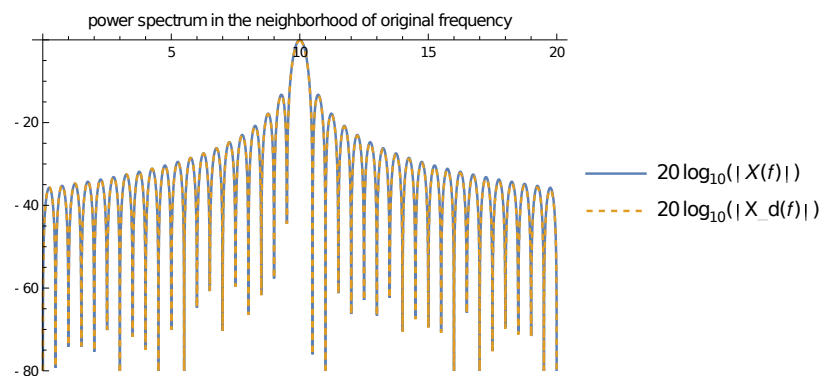


図 XIII.3.3.1 元の周波数の近傍でのパワースペクトル

低周波領域では両者が良く一致していることがわかる。

次に高調波を見る。次の図はサンプリング周波数の3倍の範囲まで X, X_d を示したものである。

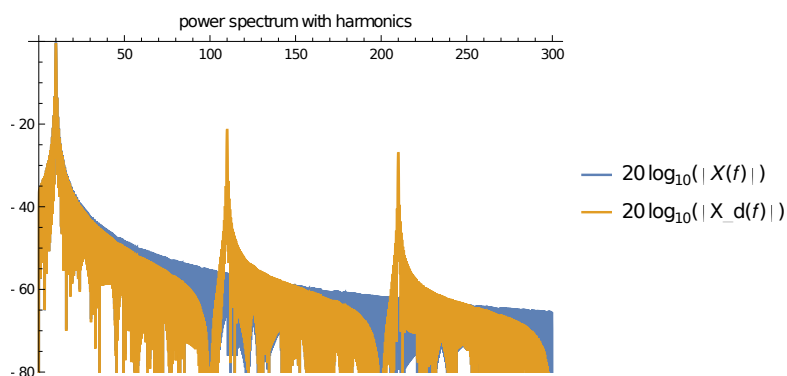


図 XIII.3.3.2 高調波を含むパワースペクトル

サンプリング周波数の整数倍の位置に高調波が生じていることが判る。

この数値例を計算した Mathematica ノートブックおよび MATLAB スクリプトは下記のファイル名で保存されている。Git リポジトリ内でファイル名検索すれば発見できるであろう。

- [spectrum_of_zeroorderheldsinewave.nb](#)
- [spectrum_of_zero_order_held_sine_wave.m](#)

第 XIV 部

応用

第 XIV.1 章

NCO

XIV.1.1 位相の下位ビット切り捨てとスプリアス

数値制御発振器 (Numerical Controlled Oscillator; NCO) の Look-up table (LUT) のサイズを減らすために位相の下位ビットを切り捨てて出力した場合、(離散時間信号として) スプリアスを生じる。ここでは簡単のため、周波数が最小 (1 クロックでの位相の増加が 1) の正弦波について考える。

XIV.1.1.1 主張

$N, W \in \mathbb{N}$, $N > W$ とする。位相加算器の語長が N であり、1 クロックあたりの位相の増加は 1 であるとする。位相の下位 W ビットを切り捨てた場合、DFT に於いて周波数が $1 + 2^{N-W}m$ ($m \in \mathbb{Z}$, $0 < m \leq 2^{W-1}$) のスプリアスが生じる。

XIV.1.1.2 導出

Proof.

NCO の出力は次式である。

$$x_W(n) = \exp\left(i \frac{2^W \lfloor n/2^W \rfloor}{2^N} 2\pi\right)$$

これらの DFT は次式である。

$$\begin{aligned}
X_W(k) &= \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{n=0}^{2^N-1} x_W(n) \exp\left(-ik \frac{n}{2^N} 2\pi\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{m=0}^{2^{N-W}-1} \exp\left(i \frac{2^W m}{2^N} 2\pi\right) \sum_{l=0}^{2^W-1} \exp\left(-ik \frac{2^W m + l}{2^N} 2\pi\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{l=0}^{2^W-1} \exp\left(-ik \frac{l}{2^N} 2\pi\right) \sum_{m=0}^{2^{N-W}-1} \exp\left(-i(k-1) \frac{m}{2^{N-W}} 2\pi\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^N}} \frac{1 - \exp\left(-ik \frac{2^W}{2^N} 2\pi\right)}{1 - \exp\left(-ik \frac{2\pi}{2^N}\right)} \frac{1 - \exp\left(-i(k-1) 2\pi\right)}{1 - \exp\left(-i(k-1) \frac{2\pi}{2^{N-W}}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^N}} \frac{\exp\left(-ik \frac{2^W}{2^N} \pi\right) \exp\left(ik \frac{2^W}{2^N} \pi\right) - \exp\left(-ik \frac{2^W}{2^N} \pi\right)}{\exp\left(-ik \frac{\pi}{2^N}\right) \exp\left(ik \frac{\pi}{2^N}\right) - \exp\left(-ik \frac{\pi}{2^N}\right)} \frac{\exp\left(-i(k-1)\pi\right)}{\exp\left(-i(k-1) \frac{\pi}{2^{N-W}}\right)} \\
&\quad \times \frac{\exp\left(i(k-1)\pi\right) - \exp\left(-i(k-1)\pi\right)}{\exp\left(i(k-1) \frac{\pi}{2^{N-W}}\right) - \exp\left(-i(k-1) \frac{\pi}{2^{N-W}}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^N}} \exp\left(ik \frac{1-2^W}{2^N} \pi\right) \frac{\sin\left(\frac{k}{2^{N-W}} \pi\right)}{\sin\left(\frac{k}{2^N} \pi\right)} \exp\left(i(k-1) \left(\frac{1}{2^{N-W}} - 1\right) \pi\right) \frac{\sin\left((k-1)\pi\right)}{\sin\left(\frac{k-1}{2^{N-W}} \pi\right)}
\end{aligned}$$

但し、上式に於いて \sin / \sin の部分で $0/0$ の不定形が生じるような k の値 k' に対しては、値域を一時的に実数に広げて $k \rightarrow k'$ の極限を取る。このようにしても等式が成り立つことは、 k' に対して Σ を直接計算することで容易に確かめられる。

$\sin((k-1)\pi) / \sin(\frac{k-1}{2^{N-W}} \pi)$ は k に関する 2^{N-W} 周期関数であり、 $k = 1 + 2^{N-W}m$ ($m \in \mathbb{Z}$, $0 < m \leq 2^{W-1}$) のときに 2^{N-W} となり、それ以外では 0 である。□

XIV.1.1.3 数値例

次の図は $N = 8$, $W = 0, 2$ の例である。

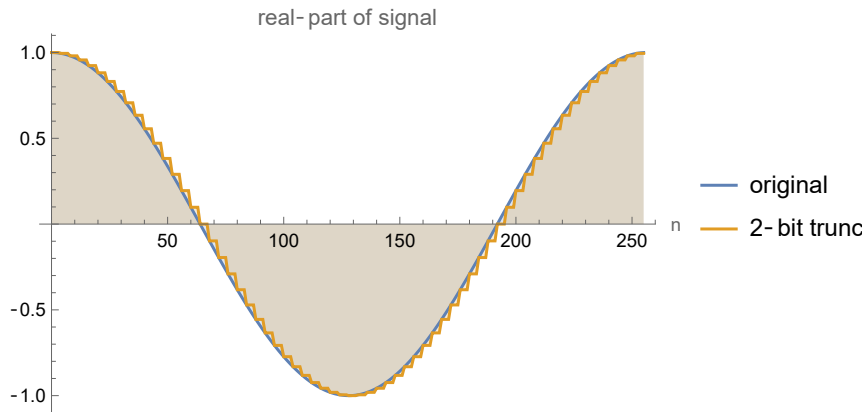


図 XIV.1.1.1 NCO の出力の実部

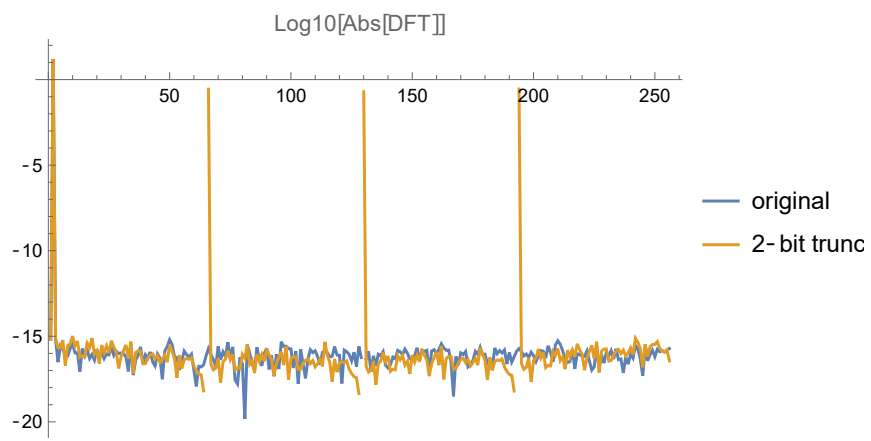


图 XIV.1.1.2 $\log_{10} X_W$

第 XIV.2 章

信号検出

XIV.2.1 位置特定に於ける cos 類似度による方法と最良近似による方法の等価性

複素数列で表される受信信号 $\{s_i\}$ の中から特定のパターン (「参照信号」と呼ぶ) を見つけ出したい時がある。例えば無線通信に於いては送信機から「同期ワード (Sync Word, SW)」と呼ばれる数十 bit 分の変調信号が一定周期で送出されており、これが「フレーム」と呼ばれる単位の区切り位置の決定に使われる。受信機は常に SW を探索し、フレームの区切り位置を絶えずトラッキングする必要がある。なぜならば、送信機、受信機に搭載されているクロック発生器には僅かだが誤差があり、受信機から見た送信機の送出する信号の時間軸は少しずつズレていくからである。

今、受信信号列の全体的な位相には関心が無いものとする。つまり、信号全体に大きさ 1 の複素定数を乗算する操作は受信側の信号処理にとって影響がないものとする。現実の無線機で言えば、例えば $\pi/4$ シフト QPSK がそうである。

受信信号から参照信号を検出する方法として、直観的に次の 2 つの方法を思いつくだろう。

XIV.2.1.1 手法 1: cos 類似度の絶対値の最大化

参照信号の長さを $L \in \mathbb{N}$, 参照信号を $\mathbf{d} \in \mathbb{C}^L$, 受信信号中のテスト領域を $\mathbf{s}^{(i)} := [s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+L-1}]^\top \in \mathbb{C}^L$ とするとき、 \mathbf{d} と $\mathbf{s}^{(i)}$ の cos 類似度の複素数版

$$\frac{\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}}{\|\mathbf{d}\|_2 \|\mathbf{s}^{(i)}\|_2}$$

の位相を無視し、絶対値の 2 乗 (2 乗を使うのは、平方根の計算を無くして計算量を抑える為) で評価する。 $\|\mathbf{d}\|_2$ は $\mathbf{s}^{(i)}$ に依存しないので評価値同士の大小比較に必要ないから取り除く。すると評価関数 c として次式を得る。

$$c(i) = \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}|^2}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2}$$

これが最大となる i を参照信号の存在位置と見做す。

XIV.2.1.2 手法 2: 最良近似

XIV.2.1.1 で定義した記号をここでも用いる。受信信号中の参照信号は「参照信号 + ゲイン変化 + 位相回転 + ノイズ」の形で存在している。そこで、参照信号に定数 α を掛けて $\mathbf{s}^{(i)}$ との差を取った絶対値の 2 乗を参照信号の L-2 ノルムの 2 乗で正規化した値が最小となるように α を選び、そのときの差の絶対値の 2 乗が最小になるような位置をもって参照信号の存在位置と見做す。評価関数 \tilde{c} は次式である。

$$\tilde{c}(i) = \frac{1}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2} \min_{\alpha \in \mathbb{C}} \|\alpha \mathbf{d} - \mathbf{s}^{(i)}\|_2^2$$

正規化する理由は、テスト領域の強度の影響を減らすためである。テスト領域の形が参照信号と大きく異なっても、テスト領域の強度が小さければ $\min_{\alpha \in \mathbb{C}} \|\alpha \mathbf{d} - \mathbf{s}^{(i)}\|_2^2$ は小さくなり、誤った推定結果を導き得る。上の最小化問題の解は解析的に求められる。 $f(\alpha) := \|\alpha \mathbf{d} - \mathbf{s}^{(i)}\|_2^2$ について微小な $\Delta\alpha$ を考え、 $f(\alpha + \Delta\alpha) - f(\alpha)$ の変化量の $\Delta\alpha$ の 1 次項が 0 になるような $\hat{\alpha}$ が解である。これは次式である。

$$\hat{\alpha} = \frac{\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}}{\|\mathbf{d}\|_2^2}$$

よって $\tilde{c}(i)$ は次式である。

$$\tilde{c}(i) = \frac{1}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2} \left\| \mathbf{s}^{(i)} - \frac{\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \mathbf{d} \right\|_2^2$$

XIV.2.1.3 手法 1,2 の等価性

実は手法 1 と 2 は等価である。すなわち次の命題は真である。

$$\frac{1}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2} \left\| \mathbf{s}^{(i)} - \frac{\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \mathbf{d} \right\|_2^2 < \frac{1}{\|\mathbf{s}^{(j)}\|_2^2} \left\| \mathbf{s}^{(j)} - \frac{\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(j)}}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \mathbf{d} \right\|_2^2 \iff \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}|^2}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2} > \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(j)}|^2}{\|\mathbf{s}^{(j)}\|_2^2}$$

これを示す。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2} \left\| \mathbf{s}^{(i)} - \frac{\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \mathbf{d} \right\|_2^2 &= \frac{1}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2} \left[\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2 + \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}|^2}{\|\mathbf{d}\|_2^4} \|\mathbf{d}\|_2^2 - \frac{\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \mathbf{s}^{(i)*} \mathbf{d} - \frac{\overline{\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}}}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)} \right] \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2} \left[\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2 + \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}|^2}{\|\mathbf{d}\|_2^2} - 2 \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}|^2}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \right] \\ &= 1 - \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}|^2}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \end{aligned}$$

であり、

$$1 - \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}|^2}{\|\mathbf{d}\|_2^2} < 1 - \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(j)}|^2}{\|\mathbf{d}\|_2^2} \iff \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(i)}|^2}{\|\mathbf{s}^{(i)}\|_2^2} > \frac{|\mathbf{d}^* \mathbf{s}^{(j)}|^2}{\|\mathbf{s}^{(j)}\|_2^2}$$

であることから命題が真であることがわかる。

第 XV 部

その他

第 XV.1 章

信号値の統計

信号に対し、その値の統計を定義できる場合がある。ここでは、連続時間の正弦波信号に対してその値の統計を考える。

XV.1.1 連続時間正弦波信号値の確率密度関数

周期 $T > 0$, 振幅 $A > 0$ の正弦波信号 $x : t \in \mathbb{R} \mapsto A \sin(2\pi t/T)$ を考える。 x の確率密度関数 p は次式である。

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{A\pi\sqrt{1-(x/A)^2}} & (|x| \leq A) \\ 0 & (|x| > A) \end{cases}$$

Proof.

1 周期の範囲で統計を求めればよい。累積分布関数 $P(x) = |\{t | -T/2 \leq t \leq T/2, x(t) \leq x\}|/T$ を考える。まず $P(x) = 0$ ($x < -A$), $P(x) = 1$ ($x > A$) は明らか。

$-A \leq x \leq 0$ の場合を考える。 $x(t) \leq u$ ($-A \leq u \leq 0$) を満たす $t \in [-T/2, T/2]$ は $-T/2 - \frac{T}{2\pi} \arcsin(u/A) \leq t \leq \frac{T}{2\pi} \arcsin(u/A)$ を満たす全ての t であるから、 $P(x) = 1/2 + \frac{1}{\pi} \arcsin(x/A)$ ($-A \leq x \leq 0$) である。次に $0 \leq x \leq A$ の場合を考えると、 x のグラフの対称性から $P(x) = 1 - P(-x) = 1/2 + \frac{1}{\pi} \arcsin(x/A)$ ($0 \leq x \leq A$) であることが解る。結局 $P(x) = 1/2 + \frac{1}{\pi} \arcsin(x/A)$ ($|x| \leq A$) である。これを x について微分して p を得る。□

XV.1.2 連続時間正弦波信号値の分散

周期 $T > 0$, 振幅 $A > 0$ の正弦波信号 $x : t \in \mathbb{R} \mapsto A \sin(2\pi t/T)$ を考える。 x の分散は $A^2/2$ である。

Proof.

求めたい分散は次式である。

$$\int_{-A}^A x^2 p(x) dx = 2 \int_0^A x^2 p(x) dx = \int_0^A \frac{2x^2}{\pi A \sqrt{1-(x/A)^2}} dx \quad (1)$$

ここで

$$\frac{d}{dx} \sqrt{1-(x/A)^2} = -\frac{x}{A^2 \sqrt{1-(x/A)^2}}$$

を用いて (1) を変形して次式を得る。

$$(1) = \int_0^A \left(\frac{d}{dx} \sqrt{1 - (x/A)^2} \right) (-2xA/\pi) dx = \left[\sqrt{1 - (x/A)^2} (-2xA/\pi) \right]_0^A + \int_0^A \sqrt{1 - (x/A)^2} \frac{2A}{\pi} dx$$

$x = A \sin \theta$ なる変数変換を用いて $(1) = A^2/2$ を得る。 □

第 XV.2 章

Heaviside の階段関数

XV.2.1 積分表示

H を Heaviside の階段関数とする。次式が成り立つ。

$$H(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t - i\varepsilon} e^{ixt} dt$$

Proof.

複素積分を用いて示す。 $R > \varepsilon$, $f(z) := e^{ixz}/(z - i\varepsilon)$ とする。 f の極は $i\varepsilon$ であり、位数 1, 留数 1 である。 $x > 0$ のとき、積分路を $C_A : C_1 + C_2$, $C_1 := [-R, R]$, $C_2 := Re^{i\theta}$, $\theta : 0 \rightarrow \pi$ として f を C_A 上で積分する。留数定理から次式が成り立つ。

$$\int_{C_A} f(z) dz = 2\pi i \quad \therefore \int_{-R}^R f(z) dz = 2\pi i - \int_{C_2} f(z) dz$$

[2]VI.1.2.9 と同様にして $\int_{C_2} f(z) dz \rightarrow 0$ as $R \rightarrow \infty$ であるので $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(z) dz = 2\pi i$ である。

$x < 0$ のとき、積分路を $C_B : -C_1 + C_3$, $C_3 := Re^{i\theta}$, $\theta : -\pi \rightarrow 0$ として f を C_B 上で積分する。 C_B が囲む領域に f の極が無いので、留数定理から次式が成り立つ。

$$\int_{C_B} f(z) dz = 0 \quad \therefore \int_{-R}^R f(z) dz = \int_{C_3} f(z) dz$$

C_2 上の積分の評価と同様にして $\int_{C_3} f(z) dz \rightarrow 0$ as $R \rightarrow \infty$ であるので $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(z) dz = 0$ である。以上より定理の主張が従う。□

参考文献

- [1] 本田 昭, 城谷 聡美 (2008) 『図解と演習で学ぶ デジタルサーボの理論と実践』 日刊工業新聞社
- [2] motchy (2022) 『数学備忘録 v0.12.0』 <https://github.com/motchy869/Mathematics-Memorandum/releases/tag/v0.12.0>