בחינות בגרות בהסתברות

מוטי בן-ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

גרסה 1.0

31 בדצמבר 2022

תוכן העניינים

מבוא 4

בחינות ופתרונות 5

1 קיץ תשפ״ב מועד ב 5

2 קיץ תשפ״ב מועד א 7

3 חורף תשפ״ב 9

4 חורף תשפ״ב מועד נבצרים 11

5 קיץ תשפ״א מועד ב 13

6 קיץ תשפ״א מועד א 15

7 קיץ תשפ״א מועד מיוחד 18

8 חורף תשפ״א 20

9 חורף תשפ״א מועד נבצרים 22

10 חורף תשפ״א מועד מאוחר 24

11 קיץ תש״פ מועד ב 27

12 קיץ תש״פ מועד א 29

13 חורף תש״פ 30

14 קיץ תשע״ט מועד ב 32

15 קיץ תשע״ט מועד א 34

16 חורף תשע״ט 36

17 קיץ תשע״ח מועד ב 38

18 קיץ תשע״ח מועד א 40

19 חורף תשע״ח 43

20 קיץ תשע״ז מועד ב 44

21 קיץ תשע״ז מועד א 46

22 חורף תשע״ז 48

23 קיץ תשע״ו מועד ב 50

24 קיץ תשע״ו מועד א 52

25 חורף תשע״ו 54

26 קיץ תשע״ה מועד ב 56

27 קיץ תשע״ה מועד א 58

28 חורף תשע״ה 61

29 קיץ תשע״ד מועד ב 62

30 קיץ תשע״ד מועד א 64

31 חורף תשע״ד 66

המלצות 68

מבוא

חוברת זו מבוססת על החוברת "בחינות בגרות במתמטיקה" כוללת פתרונות לכל השאלות בבחינות הבגרות שאלון $806/581$ מהשנים תשע"ד עד תשע"ח. חוברת זו כוללת פתרונות לשאלות בהסתברות מאותן שנים וכן מהשנים תשע"ט עד תשפ"ב.

הדגשים בפתרונות הם:

- זיהוי מוקפד של המאורעות.
- סימון המאורעות כדי לפשט את החישובים, למשל, "נסמן ב-R את המשתתפים בחוג לריקוד. במקרה זה הסימון גם משמש למאורעות של כמות: $P(R \geq 5)$ היא ההסתברות שמספר המשתתפים בחוג לריקוד גדול או שווה לחמשה.
- הנמקה של בחירת שיטות לחישוב ולהצגת החישוב: עץ, טבלה, ברנולי, הסתברות מותנית. אני מדגיש במיוחד את הבנת הניסוחים הרבים המכוונים להסתברות מותנית.
- לא הססתי לכלול תיאור של מקרים שהסתבכתי בפתרון!

בסוף החוברת נמצא סעיף "המלצות" המסכם לקחים מהפתרונות.

ניתן להוריד את המסמכים ב-PDF מ:

`https://github.com/motib/bagrut`

שם נמצא גם קוד המקור ב-LaTeX. המסמך בעברית ויש להשתמש ב-XeLaTeX כדי להפיק את ה-PDF.

1 קיץ תשפ״ב מועד ב

3. בעיר גדולה בישראל נערך סקר ובו נבדקה רמת השליטה בשפה האנגלית בקרב תושבי העיר.

בסקר השתתפו אנשים רבים – מבוגרים וצעירים.

בסקר נמצא שמספר המבוגרים ששולטים באנגלית גדול פי 3 ממספר הצעירים ששולטים בה,

ומספר המבוגרים שלא שולטים באנגלית גדול פי $3\frac{1}{3}$ ממספר המבוגרים ששולטים בה.

נסמן ב־ p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר ששולט באנגלית מבֵּין כלל המשתתפים בסקר.

א. מצאו את ההסתברות לבחור באקראי מבוגר ששולט באנגלית מבין כלל המבוגרים שהשתתפו בסקר.

ב. בוחרים באקראי שלושה מבוגרים מבין המבוגרים שהשתתפו בסקר. מצאו את ההסתברות שבדיוק שניים מהם שולטים באנגלית.

ג. **(1)** הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר שלא שולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

(2) הראו כי תחום הערכים האפשרי בעבור p הוא $0 < p < \frac{1}{14}$.

ידוע כי ההסתברות לבחור באקראי מבוגר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית שווה להסתברות לבחור באקראי צעיר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית.

ד. מצאו את הערך של p .

ה. האם המאורעות ״לשלוט באנגלית״ ו״להיות מבוגר״ תלויים זה בזה? נמקו את תשובתכם.

נסמן ב-M (mevugar) את המאורע של מבוגר ונסמן ב-A (anglit) את המאורע של שליטה באנגלית. השאלה שואלת על שני סוגים של מאורעות ולכן נארגן את המידע בטבלה. נתון הסימון $p = P(\overline{M} \cap A)$.[1] נתון גם ש-$P(M \cap A) = 3P(\overline{M} \cap A$ ולכן $P(M \cap A) = p$, ונתון ש-$P(M \cap \overline{A}) = \frac{10}{9}P(M \cap A)$ ולכן $P(M \cap \overline{A}) = 10p$. ביחד עם ההסתברויות המשלימות נוכל למלא את כל התאים בטבלה.

	$\overline{M}$	M	
$4p$	p	$3p$	A
$1-4p$	$1-14p$	$10p$	$\overline{A}$
1	$1-13p$	$13p$	

סעיף א

$$P(M \cap A/M) = \frac{P((M \cap A) \cap M)}{P(M)} = \frac{P(M \cap A)}{P(M)} = \frac{3p}{13p} = \frac{3}{13}\,.$$

אם המשתתף נמצא ב-$M \cap A$ הוא כמובן נמצא גם ב-M.

סעיף ב

״מבין״ מכוון להסתברות מותנית ו-״בדיוק״ מכוון לנוסחת ברנולי. נשתמש בתוצאה של הסעיף הקודם:

$$P(M \cap A = 2/M = 3) = \binom{3}{2}\left(\frac{3}{13}\right)^2\left(\frac{10}{13}\right)^1 = \frac{3 \cdot 9 \cdot 10}{13^3} = \frac{270}{2197} = 0.1229\,.$$

[1] הניסוח ״מבין כלל המשתתפים בסקר״ לא מכוון להסתברות מותנית. ליתר דיוק $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$ אבל $P(B) = 1$ כי ההסתברות שמשתתף בסקר משתתף בסקר היא אחד ולכן ניתן להתעלם ממנה.

סעיף ג 1

מהטבלה $P(\overline{M} \cap A) = 1 - 14p$.

סעיף ג 2

ההסתברות חייבת להיות בין אפס לאחד. מ-$0 < 1 - 14p$ מתקבל $p < 1/14$, ומ-$1 - 14p < 1$ מתקבל $p > 0/14 = 0$.

סעיף ד

באופן מפתיע "ידוע" לא מכוון להסתברות מותנית (ראו הערת שוליים לעיל)!

$$\begin{aligned} P(M \cap \overline{A}) &= P(\overline{M} \cap \overline{A}) \\ 10p &= 1 - 14P \\ p &= 1/24\,. \end{aligned}$$

סעיף ה

נבדוק אם $P(M \cap A) = P(M)P(A)$:

$$\begin{aligned} P(M \cap A) &= 3p = 3/24 = 1/8 \\ P(M)P(A) &= 13p \cdot 4p = 52/576 = 0.72/8\,. \end{aligned}$$

הערכים שונים ולכן ההסתברויות תלויות זו בזו.

2 קיץ תשפ״ב מועד א

3. נטע משחקת במשחק מסוים. במשחק זה יש בדיוק שלוש תוצאות אפשריות: ניצחון, תֵיקו והפסד.

ההסתברות שנטע תנצח במשחק גדולה פי 3 מן ההסתברות שהיא תפסיד במשחק.

נסמן ב־ p את ההסתברות שנטע תפסיד במשחק $(p > 0)$.

בשאלה כולה תוצאות המשחקים אינן תלויות זו בזו.

נתון שאם נטע משחקת 2 משחקים בזה אחר זה, ההסתברות שהיא תנצח במשחק אחד לפחות היא 4.5p .

א. מְצאו את הערך של p .

נטע שיחקה 5 משחקים בזה אחר זה.

ב. מְצאו את ההסתברות שנטע תנצח ב־ 3 מִשחקים לפחות.

ג. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח בשלושת המשחקים הראשונים לפחות.

ד. **(1)** מצאו את ההסתברות שנטע לא תפסיד בשום משחק.

(2) ידוע כי נטע הפסידה במשחק אחד לפחות. מהי ההסתברות שהיא ניצחה בשלושת המשחקים הראשונים וקיבלה תוצאת תיקו במשחק האחרון?

אני שמח לראות שבשאלה זו כותבים במפורש שתוצאות המשחקים בסדרה הן בלתי תלויות!

נסמן ב-N (nitzahon), T (teku), H (hefsade) את המאורעות של ניצחון, תיקו והפסד, בהתאמה. נתון ש-$P(H) = p$ ו-$P(N) = 3p$. לפי הסתברות משלימה $P(T) = 1 - 4p$.

סעיף א

ההסתברות לניצחון אחד לפחות היא המשלימה להסתברות לא לנצח פעמיים שהיא ההסתברות להפסד או תיקו פעמיים. לפי הנתון הסתברות זו היא $4.5p$ ו-$p > 0$:

$$\begin{aligned}
1 - (p + (1 - 4p))^2 &= \tfrac{9}{2}p \\
1 - (1 - 6p + 9p^2) &= \tfrac{9}{2}p \\
9p^2 &= \tfrac{3}{2}p \\
p &= \tfrac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

מכאן ש-$P(N) = \frac{1}{2}, P(T) = \frac{1}{3}$.

סעיף ב

״לפחות״ מכוון לנוסחת ברנולי. שימו לב שכאשר ההסתברות היא $\frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{1}{2}^k\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n\,,$$

ולכן ההסתברות היא סכום המקדמים הבינומיים כפול $\left(\frac{1}{2}\right)^5$:

$$P(N = 3) = \frac{1}{32}\left(\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}\right) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}\,.$$

סעיף ג

ההסתברות המבוקשת היא ההסתברות לנצח בשלושה משיקים ברציפות שהיא $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ כפול ההסתברות לניצחון או תיקו או הפסד בשני משחקים ברציפות שהיא $1 \cdot 1$ כי שלושת התוצאות הללו מכסות את כל האפשריות. לכן התשובה היא $\frac{1}{8}$.

סעיף ד 1

ההסתברות שנטע לא תפסיד היא $\frac{5}{6} = 1-\frac{1}{6}$ ההסתברות המשלימה להסתברות שהיא תפסיד. ההסתברות המבוקשת היא:

$$P(\overline{H} = 5) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} = 0.4019.$$

סעיף ד 2

מאוד מפתה להבין את השאלה בצורה מוטעית: אם נטע מנצחת בשלושת המשחקים הראשונים ומשיגה תיקו בחמישי, אין ברירה אלא שהיא תפסיד את הרביעי וההסתברות היא:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{144}\,.$$

אבל "ידוע" מכוון להסתברות מותנית וההסתברות שחישבנו מתייחס לחלק מכל התוצאות האפשריות ולא רק מאלו שנטע הפסידה משחק אחד לפחות. ההסתברות המבוקשת היא:

$$P(N=1, N=2, N=3, T=5/H \geq 1) = \frac{P(N=1, N=2, N=3, T=5 \cap H \geq 1)}{P(H \geq 1)}\,.$$

לא נשארה לנו הרבה עבודה כי המנה היא ההסתברות $\frac{1}{144}$ שבדיוק חישבנו והמכנה הוא ההסתברות $\frac{3125}{7776}$ שחישבנו בסעיף הקודם! ההסתברות המבוקשת היא:

$$P(N=1, N=2, N=3, T=5/H \geq 1) = \frac{1/144}{3125/7776} = \frac{7776}{144 \cdot 4651} = \frac{54}{4651} = 0.0116\,.$$

3 חורף תשפ״ב

3. בקופסה יש שלוש סוכריות בטעם תות ושתי סוכריות בטעם מנטה. ליאור מוציא באקראי סוכרייה מן הקופסה.
אם הסוכרייה היא בטעם מנטה – הוא מחזיר אותה לקופסה, ואם היא בטעם תות – הוא אוכל אותה מייד.

א. ליאור מוציא מן הקופסה שלוש סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.

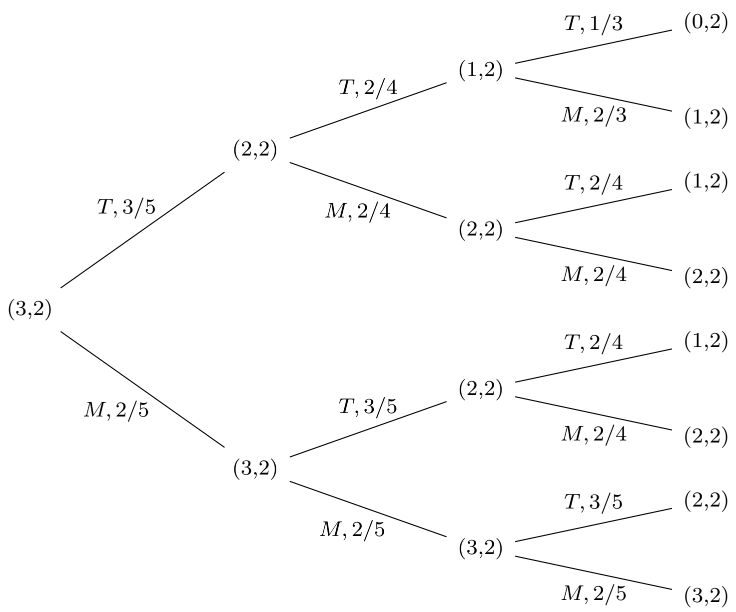
(1) חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק סוכרייה אחת.

(2) חשב את ההסתברות שליאור אכל את הסוכרייה השנייה שהוא הוציא, אם ידוע כי ליאור אכל בדיוק סוכרייה אחת.

ב. ליאור מוציא מן הקופסה n סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.
הבע בעזרת n את ההסתברות שליאור יאכל סוכרייה אחת לפחות.

ג. ליאור קיבל שתי קופסאות סוכריות, כל אחת מהן זהה לקופסה המתוארת בתחילת השאלה.
ליאור מוציא שלוש סוכריות מכל אחת משתי הקופסאות, באופן המתואר בתחילת השאלה.
חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק שלוש סוכריות, שלושתן מאותה קופסה.

השאלה שואלת על סדרה של מאורעות של שליפת סוכריות ולכן נארגן את המידע בעץ. בצמתים מוסמנים במספר הסוכריות במצב זה (T, M), והקשתות מסומנות בסוג הסוכריה שנשלף וההסתברותה.



סעיף א 1

אוכלים רק את סוכריות התות והניסוי מתחיל עם שלוש ולאחר אכילת סוכרייה אחת נישאר עם שתיים.
נחשב את ההסתברות כסכום של ההסתברויות עם המסלולים המובילים למצבים המסומנים $(2,2)$:

$$\begin{aligned} P((2,2)) &= \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{20}+\frac{3}{25}+\frac{12}{125}=\frac{183}{500}=0.366\,. \end{aligned}$$

סעיף א 2

נסמן ב-A (akhal) את המאורע של אכילת סוכרייה. "ידוע" מכוון להסתברות מותנית. אנחנו עדיין במצב של שליפת שלוש סוכריות ולכן אכילת הסוכרייה השנייה אפשרית רק לאורך המסלול MTM. נשתמש בעובדה ש-$A = 1 \subseteq MTM$ והתוצאות של הסעיף הקודם ונקבל:

$$P(MTM/A=1) = \frac{P(MTM \cap A=1)}{P(A=1)} = \frac{P(MTM)}{P(A=1)} = \frac{3/25}{183/500} = \frac{20}{61} = 0.3279\,.$$

סעיף ב

"בזו אחר זו" מכוון לנוסחת ברנולי. הנוסחה היא מסובכת אלא אם נחשב את ההסתברות המשלימה:

$$P(A \geq 1) = 1 - P(A=0) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\,.$$

סעיף ג

ההסתברות היא הסתברות לשלוף שלוש סוכריות תות מהקופסה אחת ושלוש סוכריות מנטה מהקופסה השנייה. נפלתי בפח כאן: איך אני יכול לשלוף שלוש סוכריות מנטה מקופסה שיש לה שתי סוכריות מנטה? צריך כמובן לזכור שהשליפה של סוכריות מנטה היא עם החזרה. ההסתברות המבוקשת מתקבלת מהמסלול העליון בעץ כפול התחתון בעץ כפול שניים כי אפשר לבחור את הקופסאות בשתי דרכים:

$$P(T=3, M=3) = 2\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^3 = 2\cdot\frac{3}{30}\cdot\frac{8}{125} = \frac{8}{625} = 0.0128\,.$$

4 חורף תשפ״ב מועד נבצרים

3. כדי להתקבל ללימודים במכללה מסוימת יש לעבור מבחן קבלה.

כל השאלות במבחן הן מתוך מאגר שיש בו n שאלות שונות. לנבחנים יש גישה למאגר והם יכולים להתכונן למבחן באמצעותו. ביום הבחינה, כל נבחן מוציא באקראי מתוך קופסה מלאה בפתקים שלושה פתקים בזה אחר זה, ללא החזרה. בכל אחד מן הפתקים כתובה שאלה אחת מתוך מאגר השאלות. מספר הפתקים שבקופסה שווה למספר השאלות שבמאגר, ובכל פתק כתובה שאלה אחרת. לאחר שהוציא הנבחן שלושה פתקים מן הקופסה וקרא את שלוש השאלות, הוא מחזיר את שלושת הפתקים לקופסה.

הנבחן יתקבל למכללה אם הוא יענה נכון על שתי שאלות לפחות מתוך שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא.

נתנאל התכונן למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון רק על 20 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר.

על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

ידוע כי ההסתברות של נתנאל לענות נכון על שאלה אחת לפחות מבין שתי השאלות שבשני הפתקים הראשונים שהוא הוציא היא $\frac{34}{69}$.

א. **(1)** מצא את n.

(2) מהי ההסתברות שנתנאל יתקבל למכללה?

ב. אם ידוע כי נתנאל התקבל למכללה, מהי ההסתברות שהוא לא ענה נכון על השאלה שבפתק הראשון שהוא הוציא?

רמי התכונן גם הוא למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון על 40 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר.

על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

ג. האם ההסתברות שרמי יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי גדולה פי 2 מן ההסתברות שנתנאל יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי? נמק את תשובתך.

לדעתי ניסוח השאלה ארוכה מדי!

באופן מפתיע ״ידוע כי ההסתברות״ לא מכוון להסתברות מותנית. בסעיף א 1 אף הסתברות אחרת איננה תלוייה בהסתברות זו, כי פשוט מוסרים את ערך ההסתברות. לדעתי ניתן לפרש את סעיף א 2 כמבקשת את ההסתברות נתנאל יתקבל למכללה אם ידוע כי . . . . בבדיקת פתרונות באינטרנט לא מצאתי אף אחד שחשב כמוני.

סעיף א 1

התשובה יחסית פשוטה למצוא אבל החישובים מסובכים ולא האמנתי שיצא מהם משהו. נסמן ב-N (nachon) את המאורע שנתנאל ענה נכון. ״לפחות״ מכוון לנוסחת ברנולי. נחשב את ההסתברות המשלימה כאשר יש להקפיד שהשליפות הן ללא החזרה:

$$\begin{aligned}
P(N \geq 1) &= 1 - \frac{n-20}{n} \cdot \frac{n-20}{n-1} = \frac{34}{69} \\
\frac{40n - 420}{n^2 - n} &= \frac{34}{69} \\
17n^2 - 1397n + 14490 &= 0 \\
n &= \frac{1397 \pm 983}{34} = 70,\ 20.3\,.
\end{aligned}$$

מספר השאלות הוא מספר שלם ולכן התשובה היא 70.

סעיף א 2

כדי להתקבל למכללה נתנאל חייב לענות נכון על שתי השאלות הראשונות (לא משנה מה הוא עונה לשנייה), או לענות נכון על שאלות $1,3$ ולא נכון על שאלה 2 או לענות נכון על שאלות $2,3$ ולא נכון על שאלה 1.
נסמן ב-Y (yitkabel) את המאורע שהוא יתקבל למכללה. ההסתברות המבוקשת היא:

$$\begin{aligned} P(Y) &= \frac{20}{70}\cdot\frac{19}{69}+\frac{20}{70}\cdot\frac{50}{69}\cdot\frac{19}{68}+\frac{50}{70}\cdot\frac{20}{69}\cdot\frac{19}{68} \\ &= \frac{20\cdot 19\cdot(68+50+50)}{70\cdot 69\cdot 68}=\frac{76}{391}=0.1944\,. \end{aligned}$$

סעיף ב

ההסתברות המבוקשת היא:

$$P(\overline{N}/Y)=\frac{P(\overline{N}\cap Y)}{P(Y)}\,.$$

$P(\overline{N}\cap Y)$ היא הגורם השלישי בחישוב של $P(Y)$ בסעיף הקודם ו-$P(Y)$ היא התשובה מהסעיף הקודם, לכן:

$$\begin{aligned} P(\overline{N}\cap Y) &= \frac{\frac{50}{70}\cdot\frac{20}{69}\cdot\frac{19}{68}}{\frac{76}{391}}=\frac{50\cdot 20\cdot 19\cdot 191}{76\cdot 70\cdot 69\cdot 68} \\ &= \frac{25}{84}=0.2976\,. \end{aligned}$$

בצימצום השבר יש להשתמש בפירוקים $76=4\cdot 19$ ו-$391=17\cdot 23$.

סעיף ג

נסמן ב-$T=3$ (neTanel) את המאורע שנתנאל ענה נכון על שלושת השאלות ונסמן ב-$R=3$ (Rami) את המאורע שרמי ענה נכון על שלושת השאלות. נשווה את ההסתברויות:

$$\begin{aligned} P(R=3) &\stackrel{?}{=} 2P(T=3) \\ \frac{40}{70}\cdot\frac{39}{69}\cdot\frac{38}{68} &\stackrel{?}{=} 2\cdot\frac{20}{70}\cdot\frac{19}{69}\cdot\frac{18}{68} \\ 39\cdot 38 &\neq 19\cdot 18\,, \end{aligned}$$

והתשובה היא לא.

5 קיץ תשפ״א מועד ב

3. בתחרות ספורט שנערכת בבית ספר משתתפים תלמידים רבים. כל משתתף צריך להצליח לעבור 3 מכשולים בזה אחר זה לפי הסדר. משתתף שלא מצליח לעבור מכשול מודח מייד מן התחרות. ההסתברות להצליח לעבור מכשול שונה ממכשול למכשול, אך שווה לכל המשתתפים. משתתף שמצליח לעבור את כל שלושת המכשולים עולה לשלב חצי הגמר.

28% מן המשתתפים בתחרות הצליחו לעבור את שני המכשולים הראשונים. ההסתברות שמשתתף שמצליח לעבור את שני המכשולים הראשונים יודח מן התחרות גדולה פי 3 מן ההסתברות שהוא יעלה לשלב חצי הגמר.

א. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות יעלה לשלב חצי הגמר.

ההסתברות שמשתתף יצליח לעבור את המכשול הראשון ולא יעבור את המכשול השני היא 0.42 .

ב. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות <u>לא</u> יצליח לעבור את המכשול הראשון.

ג. בחרו באקראי שלושה משתתפים: עומר, גל וליאור. ידוע ששלושתם הצליחו לעבור את המכשול הראשון.

(1) חשב את ההסתברות שבדיוק שניים מהם יעלו לשלב חצי הגמר.

(2) חשב את ההסתברות שמבין השלושה, רק עומר וגל יעלו לשלב חצי הגמר.

נניח שההסתברויות לעבור כל מכשול בלתי-תלויות. נסמן ב-$M1, M2, M3$ (mikhshol) את המאורעות של לעבור כל מכשול, ונסמן ב-HG (hatzi gmar) את המאורע לעלות לחצי הגמר.

סעיף א

נתון ש-$P(M1 \cap M2) = P(M1)P(M2) = 0.28$. נשים לב שאם משתתף עבר את שני המכשולים הראשונים, ההסתברות שהוא יעלה לחצי הגמר שווה להתסתברות שהוא יעבור את המכשולים שלישי. לכן ניתן לחשב את ההסתברות המבוקשת כך:

$$\begin{aligned}
P(HG) &= P(M1 \cap M2 \cap M3) = P(M1)P(M2)P(M3) \\
P(\overline{HG}) &= P(M1 \cap M2 \cap \overline{M3}) = P(M1)P(M2)P(\overline{M3}) \\
P(M3) &= 3(1 - P(M3)) \\
P(M3) &= 0.25 \\
P(HG) &= P(M1)P(M2)P(M3) = 0.28 \cdot 0.25 = 0.07\,.
\end{aligned}$$

סעיף ב

נתון $P(M1)P(\overline{M2}) = 0.42$ שמצטרף לנתון $P(M1)P(M2) = 0.28$. ביחד:

$$\begin{aligned}
P(M1)P(\overline{M2}) &= 0.42 \\
P(M1)P(M2) &= 0.28 \\
P(M1) &= 0.42 + 0.28 = 0.70 \\
P(\overline{M1}) &= 0.30\,,
\end{aligned}$$

כאשר אנו משתמש ב-$P(M2) + P(\overline{M2}) = 1$.

סעיף ג 1

ההסתברות של משתתף אחד לעלות לחצי הגמר היא:

$$P(HG/M1) = \frac{P(HG \cap M1)}{P(M1)} = \frac{P(HG)}{P(M1)} = \frac{0.07}{0.70} = 0.01\,,$$

כאשר אנו משתמשים ב-$HG \subseteq M1$ כי משתתף עולה לחצי הגמר רק אם רק עובר את המכשול הראשון.

נסמן ב-$HG3/M13$ את ההסתברות המבוקשת. המילה "בדיוק" מכוון לנוסחת ברנולי, לכן:

$$P(HG3/M13) = \binom{3}{2}(0.10)^2\,(0.90)^1 = 0.027\,.$$

סעיף ג 2

נסמן ב-O, G, L את המאורע שעומר, גל וליאור יעלו לחצי הגמר. השאלה שואלת על שני משתתפים מסויימים מתוך שלושה שנבחרו באקראי, ולכן אין צורך לצרף $\binom{3}{2}$ לחישוב ההסתברות:

$$P(O \cap G \cap \overline{L}) = P(O)P(G)P(\overline{L}) = (0.10)\,(0.90)\,(0.10) = 0.009\,.$$

6 קיץ תשפ״א מועד א

.3 בבית ספר תיכון גדול מאוד, מספר התלמידים גדול פי 9 ממספר המורים.

בבית הספר נערך סקר שהשתתפו בו כל המורים והתלמידים בבית הספר, והם בלבד.

המשתתפים בסקר נשאלו אם הם נבדקו לגילוי קורונה.

נמצא כי 80% מן המורים בבית הספר נבדקו לגילוי קורונה.

כמו כן נמצא כי $\frac{13}{15}$ מכלל המשתתפים בסקר (מורים ותלמידים), שנבדקו לגילוי קורונה, היו תלמידים.

א. מהי ההסתברות שמבין כלל המשתתפים בסקר ייבחר באקראי תלמיד ש<u>לא</u> נבדק לגילוי קורונה?

בחרו באקראי בזה אחר זה 5 משתתפים מבין כלל משתתפי הסקר.

ב. מהי ההסתברות שלפחות 4 מהם נבדקו לגילוי קורונה?

ג. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, לפחות משתתף אחד נבדק לגילוי קורונה.

מהי ההסתברות שלפחות 4 מן המשתתפים שנבחרו נבדקו לגילוי קורונה?

ד. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, בדיוק 2 נבדקו לגילוי קורונה.

מהי ההסתברות שהאחרון שנבחר נבדק לגילוי קורונה?

כרגיל הסתבכתי בהבנת הניסוח: ״מן המורים״ וגם ״מכלל המשתתפים״ מכוונים להסתברות מותנית. כמו כן, הפסיק ב-״מכלל המשתתפים (מורים ותלמידים), שנבדקו לגילוי קורונה״ הוא מקור לאי-הבנה, כי ״מכלל המשתתפים״ מתייחס ל-**כולם** בסקר ולא מברור מה הכוונה של הפסקה ״שנבקו . . .״. ללא הפסיק ברור באיזו קבוצה מדובר.

נסמן ב-M (moreh) את המאורע של מורה שנסקר בסקר. אין צורך לסמן תלמיד כי המשפט השני בשאלה מפרט כל משתתף שלא מורה הוא תלמיד. נסמן ב-N (nivdak) את המאורע של נבדק לקורונה.

סעיף א

יש שני סוגים של מאורעות ולכן הארגן את המידע בטבלה.

תחילה נחשב:

$$\begin{aligned} P(\overline{M}) &= 1 - P(M) = 9P(M) \\ P(M) &= 0.10\,. \end{aligned}$$

נתון ש:

$$P(N/M) = \frac{P(N\cap M)}{P(M)} = 0.80\,,$$

ולכן:

$$P(N\cap M) = 0.80P(M) = 0.80\cdot 0.10 = 0.08\,.$$

את התוצאות הללו נכניס לתאים בטבלה תוך הוספת הסתברויות משלימות:

	$\overline{N}$	N	
0.10	0.02	0.08	M
0.90			$\overline{M}$
1.0			

נתון נוסף הוא:

$$P(\overline{M}/N)=\frac{P(\overline{M}\cap N)}{P(N)}=\frac{13}{15}\,.$$

נשתמש בהסתברויות משלימות ונקבל:

$$\begin{aligned}P(N) &= P(M\cap N)+P(\overline{M}\cap N)\\ &= 0.08+\frac{13}{15}P(N)\\ P(N) &= 0.60\,.\end{aligned}$$

נמלא את שאר התאים בטבלה ונמצא את התשובה:

$$P(\overline{M}\cap\overline{N})=0.38\,.$$

	$\overline{N}$	N	
0.10	0.02	0.08	M
0.90	0.38	0.52	$\overline{M}$
1.0	0.40	0.60	

סעיף ב

הניסוח "בזה אחר זה" מכוון לנוסחת ברנולי. נקצר את הסימון $P(N)$ ל-p ולפי סעיף א ערכו 0.60.
לפחות ארבעה משתתפים שקול לארבעה או חמישה משתתפים:

$$\begin{aligned}P(N\geq 4) &= \binom{5}{4}p^4(1-p)^1+\binom{5}{5}p^5(1-p)^0\\ &= 5\cdot 0.60^4\cdot 0.40+0.60^5\\ &= 0.2592+0.0778=0.3370\,.\end{aligned}$$

סעיף ג

המילה ״ידוע״ מכוון להסתברות מותנית. ברור ש-$N \geq 4 \subseteq N \geq 1$:

$$\begin{aligned}
P(N \geq 4/N \geq 1) &= \frac{P(N \geq 4 \cap N \geq 1)}{P(N \geq 1)} = \frac{P(N \geq 4)}{P(N \geq 1)} = \frac{P(N \geq 4)}{1 - P(N=0)} \\
&= \frac{0.3370}{1-(1-p)^5} = \frac{0.3370}{0.9898} = 0.3404\,.
\end{aligned}$$

סעיף ד

נסמן ב-A את המאורע שהמשתתף האחרון נבחר נבדק לקורונה. כעת יש לחשב את ההסתברות שבדיוק אחד מתוך ארבעה נבדקו שנסמן $N41$. נחשב:

$$\begin{aligned}
P(N41A/N=2) &= \frac{P(N41A \cap N=2)}{P(N=2)} = \frac{P(N41A)}{P(N=2)} \\
&= \frac{\binom{4}{1}p^1(1-p)^3 \cdot p}{\binom{5}{2}p^2(1-p)^2} \\
&= \frac{4 \cdot 0.60 \cdot 0.40^3 \cdot 0.60}{10 \cdot 0.60^2 \cdot 0.40^3} = \frac{4}{10}\,.
\end{aligned}$$

7 קיץ תשפ"א מועד מיוחד

3. בחממה גדולה של פרחים יש אך ורק פרחים לבנים וסגולים.

ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים לבנים גדולה פי 2.25 מן ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים סגולים.

א. חשב את אחוז הפרחים הסגולים בחממת הפרחים.

בחממה זו, לכמה מן הפרחים הלבנים, ורק להם, יש עלים גדולים. לשאר הפרחים יש עלים קטנים.

ירדן בחרה באקראי שני פרחים. ההסתברות שירדן בחרה פרח אחד שיש לו עלים קטנים ופרח אחד שיש לו עלים גדולים היא 0.455.

ב. **(1)** חשב את אחוז הפרחים בחממה שיש להם עלים גדולים.

(2) חשב את ההסתברות שירדן בחרה פרח סגול, אם ידוע שרק לאחד מן הפרחים שהיא בחרה יש עלים גדולים.

ג. כינרת הכינה זר מ־ 7 פרחים לבנים בדיוק, שנבחרו באקראי בחממה.

חשב את ההסתברות שיש בזר פרח אחד לפחות שיש לו עלים גדולים ופרח אחד לפחות שיש לו עלים קטנים.

סעיף א

נסמן ב-L (lavan) את המאורע של פרח לבן וב-S (segol) את המאורע של פרח סגול. מהנתון ניתן לחשב את ההסתברות המבוקשת:

$$\begin{aligned} P(L=2) &= \frac{9}{4}P(S=2) \\ (1-P(S))^2 &= \left(\frac{3}{2}P(S)\right)^2 \\ P(S) &= \frac{2}{5} = 40\%\,, \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בהנחה שהבחירות של שני פרחים בלתי תלויות ובעובדה שהסתברויות משלימות.

סעיף ב

נסמן ב-G (gadol) את המאורע של עלים גדולים.

הסתבכתי בשאולה זו כי ניסיתי לחשב $P(G/L)$ בלי לשים לב שאין כאן הסתברות מותנית, כי המידע שפרח הוא לבן לא תורם מידע אם לפרח עלים גדולים. הפתרון פשוט מתקבל על ידי חישוב ההסתברות $P(G)$ וההסתברות המשלימה. עם המידע הנתון על הבחירות של ירדן, ההסתברות המבוקשת היא:

$$\begin{aligned} P(G\overline{G}) &= \binom{2}{1}P(G)^1(1-P(G))^1 = 0.455 \\ 2P(G)^2 - 2P(G) + 0.455 &= 0 \\ P(G) &= \frac{2 \pm \sqrt{0.36}}{4} = \frac{1 \pm \frac{3}{10}}{2} \\ &= \frac{7}{20}, \frac{13}{20} = 0.35\,, 0.65\,. \end{aligned}$$

אבל אחוז הפרחים עם עלים גדולים לא יכול להיות גבוה יותר ממספר הפרחים הלבנים 0.6, ולכן $P(G) = 0.35 = 35\%$.

סעיף ג 1

נסמן ב-$1G$ את המאורע שרק לאחד הפרחים מתוך שניים יש עלים גדולים. נתון ש-$P(1G) = 0.455$. החישוב יהיה קל יותר אם נשים לב ש-$\frac{7}{20} \cdot \frac{13}{10} = 0.35 \cdot 1.3 = 0.455$. המילה "ידוע" מכוון להסתברות מותנית:

$$\begin{aligned} P(S=1/1G) &= \frac{P(S=1 \cap 1G)}{P(1G)} = \frac{\binom{2}{1}P(S)P(G)}{P(1G)} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{4}{10}\frac{7}{20}}{\frac{7}{20}\frac{13}{10}} = \frac{8}{13}\,. \end{aligned}$$

סעיף ג 2

המשפט בראשון אומר שבוחרים רק מתוך הפרחים הלבנים:

$$P(G/L) = \frac{P(G \cap L)}{P(L)} = \frac{P(G)}{P(L)} = \frac{7/20}{6/10} = \frac{7}{12}\,.$$

לפי הסתברות משלימה $P(\overline{G}/L) = \frac{5}{12}$. מילים "בדיוק" ו-"לפחות" מכוונות לנוסחת ברנולי. ההסתברות המבוקשת היא ההסתברות המשלימה לאפס פרחים עם עלים גדולים ואפס פרחים עם עלים קטנים:

$$1 - \left(\frac{7}{12}\right)^7 - \left(\frac{5}{12}\right)^7 = 0.9748\,.$$

8 חורף תשפ״א

.3 ההסתברות שלילד שנולד במשפחת לוי יהיה שיער מתולתל היא x .

ההסתברות שלילד שנולד במשפחת לוי יהיו עיניים חומות היא 2x .

ההסתברות שעיניו של ילד שנולד במשפחת לוי יהיו חומות, אם ידוע ששְׂערו מתולתל, קטנה פי 1.5 מן ההסתברות ששערו לא יהיה מתולתל אם ידוע שעיניו חומות.

יונתן הוא אחד הילדים במשפחת לוי.

א. **(1)** הראה שההסתברות שעיניו של יונתן הן חומות ושערו מתולתל היא $\frac{1}{2}x$.

(2) מצא את ההסתברות ששערו של יונתן הוא מתולתל, אם ידוע שעיניו חומות.

ב. **(1)** הבע באמצעות x את ההסתברות ששערו של יונתן אינו מתולתל וגם עיניו אינן חומות.

(2) נתון: $x = 0.2$.

במשפחת לוי נולדו ארבעה ילדים בדיוק.

מהי ההסתברות שלפחות לשלושה מארבעת הילדים במשפחת לוי יש שיער מתולתל ועיניים חומות?

נמסן ב-H (hume) את המאורע של עיניים חומות ונסמן ב-M (metultal) את המאורע של שיער מטולטל.

סעיף א 1

בשאלה שני סוגים של מאורעות ולכן נארגן את המידע בטבלה. נתון $P(M) = x, P(H) = 2x$ וסימנו $y = P(H \cap M)$.

	H	$\overline{H}$	
M	y		x
$\overline{M}$	$3y$		
	$2x$		

המילה ״ידוע״ מכוון להסתברות מותנית ונשתמש ביחס הנתון:

$$\begin{aligned}1.5P(H/M) &= P(\overline{M}/H)\\ \frac{1.5P(H\cap M)}{P(M)} &= \frac{P(\overline{M}\cap H)}{P(H)}\\ \frac{1.5y}{x} &= \frac{P(\overline{M}\cap H)}{2x}\\ P(\overline{M}\cap H) &= 3y\,.\end{aligned}$$

צירפנו ערך זה לטבלה. מהעמודה H מתקבל $y + 3y = 2x$ ולכן $P(M \cap H) = y = x/2$.

סעיף א 2

ההסתברות המבוקשת היא:

$$P(M/H) = \frac{P(M \cap H)}{P(H)} = \frac{x/2}{2x} = \frac{1}{4}\,.$$

סעיף ב 1

נציב $x/2$ עבור y ו-$P(\overline{H} \cap M)$. ההסתברות המבוקשת היא עבור התא האמצעי וניתן לחשבה על ידי הסתברות משלימה:

$$P(\overline{H} \cap \overline{M}) = 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3x}{2}\right) = 1 - \frac{5x}{2}\,.$$

	H	$\overline{H}$	
M	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	x
$\overline{M}$	$\frac{3x}{2}$		
	$2x$		

סעיף ב 2

במילה "לפחות" מכוונת לנוסחת ברנולי. נסמן $p = P(H \cap M)$ ונחשב:

$$\begin{aligned} P(p \geq 3) = P(p = 3 \cup p = 4) &= \binom{4}{3} p^3 (1-p)^1 + \binom{4}{4} p^4 (1-p)^0 \\ &= 4 \cdot 0.0009 + 0.0001 = 0.0037\,. \end{aligned}$$

9 חורף תשפ"א מועד נבצרים

3. בחברת תקשורת גדולה נבדקו הרגלי הצפייה של הלקוחות.

נמצא כי מספר הלקוחות שצופים בערוצי מוזיקה גדול פִּי 1.5 ממספר הלקוחות שאינם צופים בהם.

$\frac{2}{3}$ מן הלקוחות שצופים בערוצי ספורט, צופים בערוצי מוזיקה.

40% מן הלקוחות שאינם צופים בערוצי ספורט, צופים בערוצי מוזיקה.

בוחרים באקראי לקוח מן הלקוחות של החברה.

א. מהי ההסתברות שהלקוח שנבחר צופה גם בערוצי ספורט וגם בערוצי מוזיקה?

ב. נמצא שהלקוח שנבחר צופה בערוצי מוזיקה **או** בערוצי ספורט.

מהי ההסתברות שהוא אינו צופה בערוצי מוזיקה?

ג. מן הלקוחות שאינם צופים בערוצי ספורט, בחרו באקראי 4 לקוחות.

מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם צופים בערוצי מוזיקה?

נסמן ב-M (muzik) את המאורע של צופים במוזיקה ונסמן ב-S (sport) את המאורע של צופים בספורט. השאלה שואלת על שני סוגים של מאורעות ולכן נארגן את המידע בטבלה.

מהנתון הראשון ניתן לחשב את $P(M)$:

$$\begin{aligned} P(M) &= 1.5P(\overline{M}) = 1.5(1-P(M)) \\ P(M) &= 3/5\,. \end{aligned}$$

מהנתונים הבאים ניתן לחשב את $P(S)$:

$$\begin{aligned} P(M/S) &= \frac{P(M\cap S)}{P(S)} = 2/3 \\ P(M/\overline{S}) &= \frac{(M\cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = 2/5 \\ P(M) &= P(M\cap S)+P(M\cap \overline{S}) = 3/5 \\ (2/3)P(S)+(2/5)[1-P(S)] &= 3/5 \\ P(S) &= 3/4\,. \end{aligned}$$

ניתן לחשב את $P(M\cap S)$ ו-$P(M\cap \overline{S})$ מ-$P(S)$. נסכם בטבלה לאחר מילוי הסתברויות משלימות:

	M	$\overline{M}$	
S	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\overline{S}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

סעיף א

התשובה נמצאת בתא $1/2$ = $P(M \cap S)$.

סעיף ב

המילא "או" מכוון לאיחוד של שני מאורעות. בעזרת תרשימי Venn (עמוד 42) מתקבל:

$$\begin{aligned}
P(M \cup S) &= P(M) + P(S) - P(M \cap S) \\
&= \frac{3}{5} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{17}{20} \\
P(\overline{M}/M \cup S) &= \frac{P(\overline{M} \cap (M \cup S))}{P(M \cup S)} = \frac{P(S \cap \overline{M}}{P(M \cup S)} \\
&= \frac{1/4}{17/20} = 5/17\,.
\end{aligned}$$

סעיף ג

מהמידע בטבלה נחשב את ההסתברות שלבחור לקוח אחד כנדרש:

$$P(M/\overline{S}) \;=\; \frac{M \cap \overline{S})}{P(S)} = \frac{1/10}{3/4} = \frac{2}{5}\,.$$

"לפחות שניים" מכוון לנוסחת ברנולי:

$$\begin{aligned}
P(M/\overline{S} \geq 2) &= 1 - P(M/\overline{S} < 2) \\
&= 1 - \binom{4}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^4 - \binom{4}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^3 \\
&= 1 - \frac{81}{625} - \frac{216}{625} = \frac{328}{625} = 0.5248\,.
\end{aligned}$$

10 חורף תשפ״א מועד מאוחר

3. בכד יש כדורים בשלושה צבעים בלבד: **אדום, צהוב, כחול.**

נתון:

ההסתברות להוציא כדור אדום היא $\frac{5}{8}$.

מספר הכדורים הצהובים גדול פי 3 ממספר הכדורים הכחולים.

$\frac{4}{5}$ מן הכדורים האדומים שבכד ו־ $\frac{8}{9}$ מן הכדורים הצהובים שבכד **מחוספסים**, וכל שאר הכדורים שבכד **חלקים.**

הוציאו באקראי כדור מן הכד והחזירו אותו לכד. את הפעולה הזאת (הוצאה באקראי והחזרה) עשו 8 פעמים.

א. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מן הכדורים שהוציאו הם **מחוספסים**?

ענה על סעיף ב בעבור כד שבו 32 כדורים.

ב. הוציאו באקראי בזה אחר זה 2 כדורים מן הכד (ללא החזרה).

(1) מהי ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים <u>שונים</u>?

(2) ידוע ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים. מהי ההסתברות שהכדור הראשון שהוציאו היה בצבע אדום?

ענה על סעיף ג בעבור כד שבו n כדורים.

נתון: $50 < n < 100$.

ג. מצא את n (את <u>שתי</u> האפשרויות).

נסמן ב-A (adom), T (tzahov), K (kahol) את המאורעות של כדורים אדומים, צהובים וכחולים, בהתאמה. נתון $P(A) = 5/8$, $P(K) = 3P(T)$. נסמן $x = P(K)$ ולפי השורה התחתונה נוכל לחשב:

$$\begin{aligned} 5/8 + 3x + x &= 1 \\ x &= 3/32\,. \end{aligned}$$

ונארגן את המידע בטבלה.

	K	T	A	
				M
				$\overline{M}$
1	$x = \frac{3}{32}$	$3x = \frac{9}{32}$	$\frac{5}{8}$	

נסמן ב-M (mehuspas) את האירוע של כדור מחוספס. נתון:

$$\begin{aligned} P(M \cap A) &= \frac{4}{5}P(A) = \frac{1}{2} \\ P(M \cap T) &= \frac{8}{9}P(T) = \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

תחילה נראה לי שחסר נתון כדי להמשיך עד שקראתי בעיון את השאלה. הפסקה "כל שאר הכדורים חלקים" אומר ש-$P(M \cap K =$ וניתן למלא את כל התאים בטבלה עם הסתברויות משלימות:

	K	T	A	
$3/4$	0	$1/4$	$1/2$	M
$1/4$	$3/32$	$1/32$	$1/8$	$\overline{M}$
1	$3/32$	$9/32$	$5/8$	

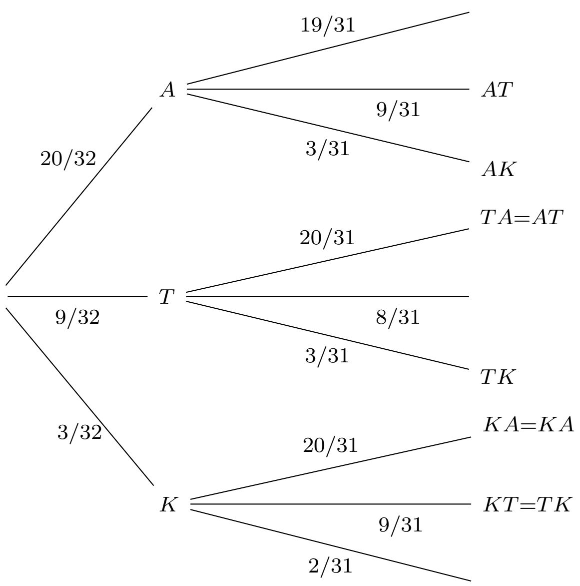
סעיף א

"בדיוק" מכוון לנוסחת ברנולי. ההסתברות היא:

$$\begin{aligned} P(M=3) &= \binom{8}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^5 \\ &= 56 \cdot \frac{27}{4^8} = \frac{7 \cdot 27}{8192} = \frac{189}{8192} = 0.0231\,. \end{aligned}$$

סעיף ב 1

השליפות הן אחת אחרי השנייה ולכן נארגן את המידע בעץ כאשר בכל שלב אפשר לשלוף כדור בצבע מסויים. השליפה היא ללא החזרה ולכן ההסתברויות שונות בשליפה הראשונה והשנייה.



נסמן ב-S (shone) את המאורע שהכדורים בצבעים שונים:

$$\begin{aligned} P(S) = P(AT \cup AK \cup TK) &= \frac{1}{32 \cdot 31}(2 \cdot 20 \cdot 9 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 9)) \\ &= \frac{534}{992} = 0.5383\,. \end{aligned}$$

בדיעבד היה קל יותר לחשב את ההסתברות המשלימה לשליפת שני כדורים מאותו צבע!

סעיף ב 2

״ידוע״ מכוון להסתברות מותנית:

$$
\begin{aligned}
P(A1/S) &= \frac{P(A1 \cap S)}{P(S)} = \frac{P(AT \cup AK)}{P(S)} \\
&= \frac{\frac{1}{32\cdot 31}(20 \cdot 9 + \cdot 20 \cdot 3)}{\frac{1}{32\cdot 31}(534)} = \frac{240}{534} = \frac{40}{89} = 0.4494\,.
\end{aligned}
$$

סעיף ג

גם כאן היה לי קושי להבין מה רוצים כי ״אין״ שאלה בסעיף ג. הכוונה היא לשאול עבר איזה ערכים של n אפשר לענות על הסעיפים הקודמים עם ההסתברויות הנתונות. צריך לשים לב שלמשל: $P(K) = 3/32$ ולכן מספר הכדורים הכחולים הוא $3n/32$. בהנחה הברורה שיש מספר שלם של כדורים כחולים הערכים האפשריים של n הם $32, 64, 96, 128, \ldots$. בטוו הנתון האפשריויות הם $64, 96$.

11 קיץ תש"פ מועד ב

.3 יעדי הטיסות של חברת תעופה מסוימת הם היבשות: אירופה, אמריקה ואסיה בלבד (אין טיסות ללא נוסעים).
נתון כי מבין הנוסעים בחברה, מספר הנוסעים לאמריקה הוא $\frac{3}{5}$ ממספר הנוסעים לאירופה.
בוחרים באקראי נוסע מבין הנוסעים בחברה. נסמן ב־ P את ההסתברות שנוסע זה טס לאירופה.
בוחרים באקראי 2 נוסעים מבין הנוסעים בחברה.
נתון כי ההסתברות ש־ 2 הנוסעים שנבחרו אינם טסים לאותה היבשת היא 0.62 .
נתון: $P > 0.4$.

א. מצא את P .

ב. בוחרים באקראי 5 נוסעים מבין הנוסעים בחברה.
מהי ההסתברות שלפחות 2 מן הנוסעים שנבחרו טסים לאמריקה וגם לפחות 2 מהם אינם טסים לאמריקה?

ג. באוטובוס לנמל התעופה היו 50 נוסעים שטסים בחברה זו.
התפלגות יעדי הטיסה של הנוסעים באוטובוס זהה להתפלגות יעדי הטיסה של כל הנוסעים בחברת התעופה.
בחרו באקראי 2 נוסעים מן האוטובוס זה אחר זה (ללא החזרה), והתברר ששניהם טסים לאותה היבשת.
מהי ההסתברות ש־ 2 הנוסעים שנבחרו טסים לאמריקה?

נסמן את המאורעות: AM עבור טיסה לאמריקה, EU עבור טיסה לאירופה, AS עבור טיסה לאסיה. נתון $P(EU) = p$.[2] לפי המידע הנתון $P(AM) = \frac{3}{5}p$ ולפי הסתברות משלימה $P(AS) = 1-p-\frac{3}{5}p = 1 - \frac{8}{5}p$.

סעיף א

נניח שהבחירות של שני הנוסעים של יעדי הטיסות בלתי-תלויות. נתון שההסתברות שבחרו בטיסות שונות היא 0.62. אפשר לחשב הסתברות זו אבל אפשר גם לחשב את ההסתברות המשלימה 0.38 ששניהם בחרו את אותו יעד:

$$\begin{aligned}
p^2 + \left(\frac{3}{5}p\right)^2 + \left(1 - \frac{8}{5}p\right)^2 &= 0.38\\
p^2 + \frac{9}{25}p^2 + 1 - \frac{16}{5}p + \frac{64}{25}p^2 &= 0.38\\
98p^2 - 80p + 15.5 &= 0\,.
\end{aligned}$$

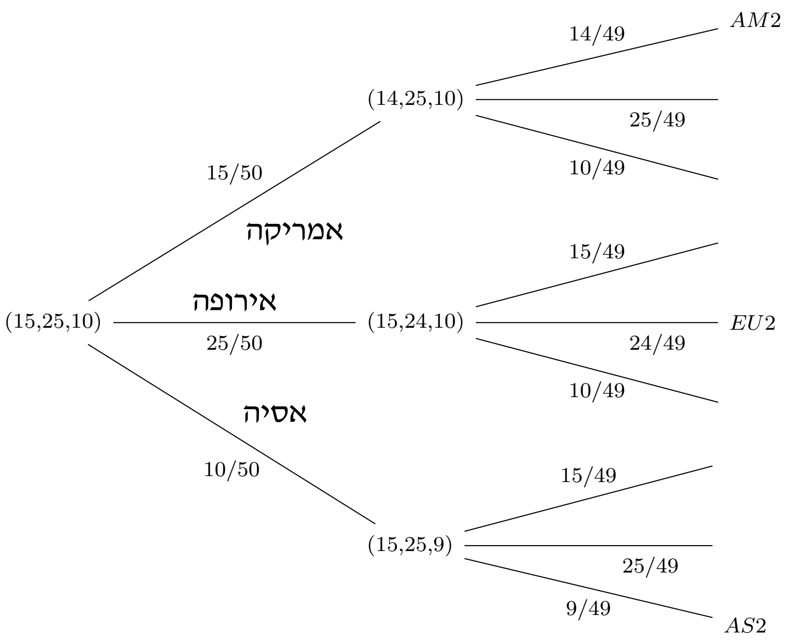
נפתור את המשוואה הריבועית ונקבל $p = \frac{80\pm18}{196} = 0.5, 0.3$. השאלה מבקשת הסתברות גדול מ-0.4 ולכן התשובה היא 0.5.

סעיף ב

נסמן את ההסתברות המבוקשת ב-$AM22$. הדרך היחידה שגם לפחות שניים טסים לאמריקה ושניים לא היא ששלושה טסים לשם ושניים לא, או להיפך. ההסתברות לטיסה לאמריקה היא $\frac{3}{5}p = 0.3$. לפי חוק ברנולי:

$$P(AM22) = \binom{5}{2}(0.3)^2(0.7)^3 + \binom{5}{2}(0.7)^2(0.3)^3 = (10 \cdot 0.09 \cdot 0.49)(0.7 + 0.3) = 0.441\,.$$

[2] אני מעדיף אות קטנה p עבור ההסתברות כי אות גדולה תמיד מסמנת את ההסתברות של מאורע כגון $P(EU)$.



סעיף ג

אני נפלתי בפח כאן ולא הבנתי שהניסוח ״ששניהם״ ו-״שני הנוסעים שנבחרו״ מכוון להסתברות מותנית. ניסוח מקובל יותר היה ״שניים מבין הנוסעים שטסים לאותו יבשת טסים לאמריקה.

בחרו שני נוסעים אחד לאחר השני ללא החזרה, ולכן יש לארגן את המידע בעץ. כאשר $AM2, EU2, AS2$ מסמנים את המאורעות ששני נוסעים טסים לאותו יבשת, ו-$Y2AM2\cup EU2\cup AS2$ מסמן ששני נוסעים טסים ליבשת כלשהי. נשתמש בעובדה ש-$(AM2 \subseteq Y2)$. ונחשב את הסתברות המבוקשת:

$$\begin{aligned} P(AM2/Y2) &= \frac{P(AM2\cap Y2)}{P(Y2)} = \frac{P(AM2)}{P(Y2)} \\ &= \frac{\frac{15}{50}\cdot\frac{14}{49}}{\frac{15}{50}\frac{14}{49}+\frac{25}{50}\frac{24}{49}+\frac{10}{50}\frac{9}{49}} \\ &= \frac{15\cdot 14}{15\cdot 14+25\cdot 24+10\cdot 9} \\ &= \frac{21}{90} = \frac{7}{30}\,. \end{aligned}$$

12 קיץ תש״פ מועד א

3. בכַד יש 11 כדורים, הממוספרים בסדר עולה, מ־ 1 עד 11 .

מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעל הכדור.

אם המספר שעל הכדור הוא אי־זוגי, מחזירים אותו לכד, ואם הוא זוגי, לא מחזירים אותו.

לאחר מכן שוב מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעליו.

א. מהי ההסתברות שנרשמו שני מספרים שמכפלתם זוגית?

ב. ידוע שהמכפלה של שני המספרים שנרשמו היא זוגית.

מצא את ההסתברות שהמספר שעל הכדור הראשון שהוציאו הוא אי־זוגי.

בכד אחר יש מספר זוגי של כדורים הממוספרים בסדר עולה (1 , 2 , 3 ...).

מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעל הכדור, מחזירים אותו לכד, ולאחר מכן שוב מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעליו.

ג. **(1)** מצא את ההסתברות שמכפלת שני המספרים שנרשמו היא זוגית.

(2) מוציאים מן הכד k כדורים. בכל פעם שמוציאים כדור, רושמים את המספר שעליו ומחזירים אותו לכד.

הבע באמצעות k את ההסתברות שמכפלת כל המספרים שנרשמו היא זוגית.

סעיף א

נסמן ב-$Z1, Z2$ את המאורעות של לשליפת כדור עם מספר זוגי בשליפה הראשונה והשנייה, נסמן ב-$I1, I2$ את המאורע של שליפת כדור אי-זוגי בשליפה הראשונה והשנייה ונסמן ב-MZ את המאורע שהמכפלה של שני המספרים זוגית. מכפלה של שני מספרים שלמים היא זוגית אלא שניהם אי-זוגיים $2k \cdot n = 2kn$ מספר זוגי ללא קשר לערך של n אבל $(2k+1)(2n+1) = 4kn + 2k + 2n + 1$ הוא מספר אי-זוגי. השליפה של כדורים עם מספרים אי-זוגיים היא עם החזרה ולכן:

$$P(MZ) = 1 - P(I1)P(I2) = 1 - \frac{6}{11} \cdot \frac{6}{11} = \frac{85}{121}\,.$$

סעיף ב

המילה "ידוע" מכוון להסתברות מותנית. כדי להמכפלה תהיה זוגית כאשר המספר הראשון הוא אי-זוגי, השני חייב להיות זוגי. שוב נזכור שיש החזרה לאחר שליפת כדור עם מספר אי-זוגי ונקבל:

$$P(I1/MZ) = \frac{P(I1 \cap MZ)}{P(MZ)} = \frac{P(I1)P(Z2)}{P(MZ)} = \frac{\frac{6}{11} \cdot \frac{5}{11}}{\frac{85}{121}} = \frac{6}{17}\,.$$

שימו לב שלא השתמשנו בנתון שאין החזרה של שליפה של כדור עם מספר זוגי.

סעיף ג 1

בכד יש מספר שווה של כדורים עם מספרים זוגיים ועם אי-זוגיים ולכן ההסתברות לשלוף כדור עם מכפלה אי-זוגי היא $1 - P(I1)P(I2) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

סעיף ג 2

מכפלת כל המספרים זוגית אלא אם כל k המספרים הם אי-זוגיים, ולכן:

$$P(MZ) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\,.$$

13 חורף תש״פ

3. בקופסה יש 12 כדורים. רובם כחולים והשאר אדומים.

הוציאו באקראי כדור מן הקופסה, החזירו אותו לקופסה, ושוב הוציאו באקראי כדור והחזירו אותו.

ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים היא $\frac{4}{9}$.

א. מצא כמה כדורים כחולים יש בקופסה.

ב. הוסיפו לקופסה כדורים צהובים.

לאחר ההוספה הוציאו באקראי כדור, החזירו אותו, ושוב הוציאו באקראי כדור והחזירו אותו.

ההסתברות שהוציאו שני כדורים בצבעים שונים נשארה $\frac{4}{9}$.

כמה כדורים צהובים הוסיפו לקופסה?

העבירו את כל הכדורים הצהובים לכלי אחר והשאירו בקופסה רק את הכדורים הכחולים והאדומים.

ג. הוציאו באקראי מן הקופסה כדור אחרי כדור שוב ושוב (ללא החזרה), עד שהוציאו כדור אדום.

מהי ההסתברות שמספר ההוצאות היה גדול מ־ 3 ?

סעיף א

נסמן ב-K (kahol) את המאורע של שליפת כדור כחול, נסמן ב-A (adom) את המאורע של שליפת כדור אדום ונסמן ב-S (shonim) את המאורע של שליפת שני כדורים בצבעים שונים. שתי שליפות בלתי-תוליות של כדורים מכוון לעץ הסתברויות אבל המקרה כאן פשוט ונתקדם ישר לנוסחה. השליפה היא עם החזרה ולכן $P(KA)=P(AK)$ ההסתברות המבוקשת היא:

$$\begin{aligned}
P(S) &= P(KA)+P(AK)=2P(KA)=2\left(\frac{K}{12}\cdot\frac{A}{12}\right)=\frac{4}{9}\\
18KA &= 4\cdot 144\\
KA &= 32\,.
\end{aligned}$$

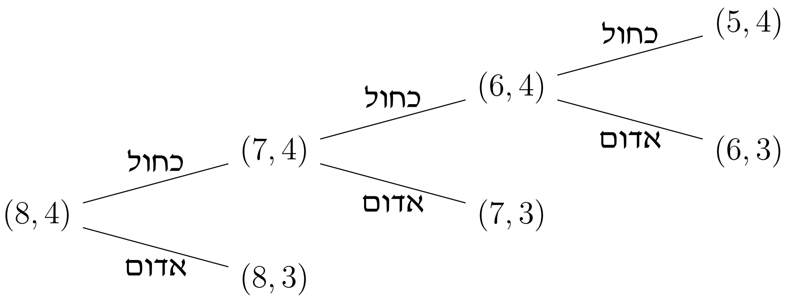
בהתחשב באילוצים $K+A=12, K>A$ הפתרון היחיד הוא $K=8, A=4$.

סעיף ב

נסמן ב-T (tzahov) את המאורע של שליפת כדור צהוב. כמו בסעיף הקודם $P(KA)=P(AK)$, $P(KT)=P(TK)$, $P(AT)=P(TA)$. ההסתברות המבוקשת היא:

$$\begin{aligned}
P(S) &= 2(P(KA)+P(KT)+P(AT))=\frac{4}{9}\\
&= 2\left(\frac{32}{(12+T)^2}+\frac{8T}{(12+T)^2}+\frac{4T}{(12+T)^2}\right)=\frac{4}{9}\\
54T+144 &= T^2+24T+144\\
T &= 30\,.
\end{aligned}$$

$T=0$ הוא פתרון כי ברור שההסתברות לא משתנה אבל נניח שאכן מוסיפים מספר חיובי של כדורים.



סעיף ג

חזרנו למצב הראשון עם שמונה כדורים כחולים וארבעה אדומים. הדרך הקצרה לחשב את ההסתברות המבוקשת היא לחשב את ההסתברות המשלימה לשליפת כדור אדום בשליפה הראשונה, השנייה או השלישית. השליפה היא ללא החזרה ולכן ההסתברויות תלויות. ניתן לארגן את המידע בעץ (למעלה) כאשר בכל צומת רשום (K, A). נסמן ב-$P(AR)$ (adom rishon) את השליפה של הכדור האדום הראשון. ההסתברות המבוקשת היא:

$$\begin{aligned}
P(AR) &= 1 - [P(A) + P(K)P(A) + P(K)P(K)P(A)] \\
&= 1 - \left[\frac{4}{12} + \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10}\right] \\
&= 1 - \frac{984}{1320} = \frac{14}{55}\,.
\end{aligned}$$

14 קיץ תשע"ט מועד ב

3. בקופסה יש 12 כדורים כחולים, 20 כדורים אדומים ו־ 8 כדורים צהובים.

על 28 מן הכדורים רשומה הספרה **1** , ועל השאר רשומה הספרה **0** .

$\frac{1}{4}$ מן הכדורים שרשומה עליהם הספרה **1** הם צהובים.

מספר הכדורים האדומים שרשומה עליהם הספרה **1** גדול פי 4 ממספר הכדורים הכחולים שרשומה עליהם הספרה **0** .

דני מוציא באקראי כדור מן הקופסה.

א. מהי ההסתברות שהכדור שהוציא דני הוא כדור כחול ושרשומה עליו הספרה **1** ?

ב. אם ידוע שדני הוציא באקראי כדור כחול או כדור שרשומה עליו הספרה **1** , מהי ההסתברות שהוא הוציא כדור שרשומה עליו הספרה **0** ?

דני החזיר את הכדור לקופסה, וכעת הוא משחק במשחק: הוא מוציא באקראי כדור מן הקופסה, רושם לעצמו את הספרה שעליו ומחזיר את הכדור לקופסה.

בכל פעם שהוא מוציא כדור שרשומה עליו הספרה **1** הוא צובר נקודה.

הוא יפסיק לשחק כאשר הוא יצבור 5 נקודות.

ג. מהי ההסתברות שדני יצבור 5 נקודות אחרי 6 פעמים בדיוק?

נסמן את המאורעות: K כדורים כפולים, A כדורים אדומים, Z כדורים צהובים, 0 הספרה אפס, 1 הספרה אחד. השאלה שואלת על מאורעות המורכבים משני סוגי מאורעותת פשוטים יותר, צבעים וספרות, ולכן נארגן את המידע בטבלה.[3] בטבלה נרשום מספרים שלמים כאשר הכוונה של המספר n הוא $P(n/40)$.

מספר הכדורים מכל צבע נתון ונתון גם שרבע מהכדורים שרשומה עליהם 1 הם צהובים. ממידע זה ניתן למלא את התאים בטבלה בהם מופיעים מספרים שלמים. נסמן בנעלם X את מספרם של הכדורים הכחולים שרשומה עליהם אפס. לפי היחס הנתון בין X לבין מספר הכדורים האדומים שרשומה עליהם אחד ניתן להשלים את הטבלה. מהתאים עבור הכדורים האדומים נקבל משוואה $4X + 11 - X = 20$ ולכן $X = 3$.

	K	A	T	
28	$21-4X$	$4X$	7	1
12	X	$11-X$	1	0
40	12	20	8	

[3] באתר של יואל גבע הפתרון מתבסס על עץ. לדעתי שיטה זו מתאימה יותר כאשר יש מאורעות עוקבים, כגון שליפת הצבע מקופסה אחת ואחר כך שליפת הספרה מקופסה שנייה. כאן כאשר הניסוי הוא שליפה של כדור אחד עדיף להשתמש בטבלה.

נציב $X=3$ ונקבל מספרים בכל התאים:

	T	A	K	
1	7	12	9	28
0	1	0	3	12
	8	20	12	40

סעיף א

מהטבלה נקבל $P(K\cap 1)=\frac{9}{40}$.

סעיף ב

"אם ידוע" מכוון להתסברות מותנית:

$$P(0/K\,\cup\,1)=\frac{P(0\cap(K\,\cup\,1))}{P(K\,\cup\,1))}\,.$$

אפשר לפתח את הביטוי לפי חוק הפילוג לקבוצות אבל פשוט נשים לב שלא יכול להיות כדור שרשומה עליו גם אפס וגם אחד, ולכן:

$$P(0/K\,\cup\,1)=\frac{P(0\cap K)}{P(K\,\cup\,1))}=\frac{3}{12+28-9}=\frac{3}{31}\,.$$

כאשר מחשבים את איחוד הקבוצות $K,1$ על ידי סכום מספר האיברים בקבוצה K ומספר האיברים בקבוצה 1, אנו סופרים את האיברים ב-$K\cap 1$ פעמיים ולכן יש להחסיר את מספר האיברים בקבוצה זו.

סעיף ג

המילה "בדיוק" מכוון לנוסחת ברנולי אבל יש כאן מלכודת. לו שאלו מה ההסתברות לצבור חמש נקודות בחמשה סיבובים הפתרון מתקבל מנוסחת ברנולי פשוט. אבל כדי לקבל חמש נקודות בששה סיבובים חייבים להפסיד בסיבוב אחד בדיוק מבין חמשת הסיבובים הראשונים ורק אז לזכות בנקודה בסיבוב האחרון. אחרת, המשחק היה נפסק לאחר הסיבוב החמישי. נסמן ב-k/n את המאורע של לזכות ב-k נקודות מתוך n סיבובים:

$$P(\text{זכייה חמישית בסיבוב השישי})=P(4/5)P(1/1)=\binom{5}{1}\left(\frac{12}{40}\right)^1\left(\frac{28}{40}\right)^4\left(\frac{28}{40}\right)^1=0.252015\,.$$

15 קיץ תשע״ט מועד א

3. גלי ונטע משחקות משחק ובו אפשר לקבוע את מספר הסיבובים. בכל סיבוב אחת מהן זוכה והאחרת מפסידה.
המנצחת במשחק כולו תהיה זו שתזכה ביותר סיבובים מחברתה.
אם לשתיהן מספר שווה של זכיות בסיבובים, התוצאה במשחק כולו תהיה תיקו.
נתון: בכל סיבוב הסיכוי של נטע לזכות הוא $\frac{1}{3}$.

א. ביום ראשון שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים בַּמשחק.

(1) מהי ההסתברות שנטע ניצחה במשחק כולו?

(2) מהי ההסתברות לתוצאת תיקו במשחק כולו?

ב. גם ביום שני שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק. הפעם הן החליטו מראש שאם התוצאה במשחק של 4 הסיבובים תהיה תיקו — הן ישחקו עוד 3 סיבובים כדי להכריע את תוצאת המשחק, ומי שתזכה ביותר סיבובים, תנצח במשחק כולו.
מהי ההסתברות שנטע תנצח במשחק כולו?

ג. ידוע שנטע ניצחה במשחק כולו בדיוק באחד משני הימים: ראשון או שני.
מהו הסיכוי שהיא ניצחה במשחק כולו ביום שני?

משחק בסיבובים מכוון לנוסחת ברנולי.

סעיף א 1

נסמן את המאורע שנטע ניצחה בסיבוב ב-N והמאורע שנטע ניצחה במחשק ב-M.

$$P(M) = P(N=3 \,\cup\, N=4) = P(N=3) + P(N=4)\,,$$

כי במאורעות בלתי-תלויים: אי-אפשר לנצח גם בשלושה סיבובים וגם בארבעה. לפי נוסחת ברנולי:

$$P(M) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{8}{81} + \frac{1}{81} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}\,.$$

סעיף א 2

כדי להגיע לתיקו נטע חייבת לנצח בדיוק בשני סיבובים:

$$P(N=2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}\,.$$

סעיף ב

נטע מנצחת במשחק אם היא מנצחת בארבעה סיבובים או שיש תיקו ואחכ כך היא מנצחת בשניים מתוך שלושה סיבובים. נשתמש בתוצאות של סעיף א ונקבל:

$$\begin{aligned}
P(M) &= \frac{1}{9} + \frac{8}{27}\left[\binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0\right] \\
&= \frac{1}{9} + \frac{8}{27}\left[\frac{6}{27} + \frac{1}{27}\right] = \frac{81}{729} + \frac{56}{729} = \frac{137}{729}\,.
\end{aligned}$$

סעיף ג

חייבים לשים לב לניסוח בסעיף ב׳: המשחק עם שבעה סיבובים מתרחש רק ביום שני כאשר ביום ראשון המחשק נשאר עם ארבעה סיבובים. נסכם את מה שיש לנו כאשר $N1, N2$ מסמנים שנטע ניצחה ביום ראשון ויום שני בהתאמה:

$$P(N1) = \frac{1}{9}, \quad P(\overline{N1}) = \frac{8}{9}, \quad P(N2) = \frac{137}{729}, \quad P(\overline{N2}) = \frac{592}{729}\,.$$

נניח ששני המשחקים בלתי-תלויים כך שאפשר להכפיל את ההסתברויות שלהם. נסמן ב-1 את המאורע שנטע מנצחת רק באחד משני המשחקים ונשמתש בעובדה ש-$1 \subseteq (\overline{N1} \cup N2)$, כי ניצחון של נטע רק במשחק בשני הוא אחד המקרים של נטע מנצחת רק במשחק אחד. נחשב את ההסתברות המבוקשת:

$$\begin{aligned}
P(\overline{N1} \cup N2)/1) &= \frac{P((\overline{N1} \cup N2) \cap 1)}{P(1)} \\
&= \frac{P(\overline{N1})P(N2)}{P(\overline{N1})P(N2) + P(N1)P(\overline{N2})} \\
&= \frac{\frac{8}{9} \cdot \frac{137}{729}}{\frac{8}{9} \cdot \frac{137}{729} + \frac{1}{9} \cdot \frac{592}{729}} \\
&= \frac{8 \cdot 137}{8 \cdot 137 + 592} = \frac{1096}{1688} = 0.6493\,.
\end{aligned}$$

16 חורף תשע״ט

3. בבית ספר תיכון ניגשים תלמידי שכבת י״ב לבחינת המתכונת באזרחות ולאחר מכן לבחינת הבגרות באזרחות.

נתון: גם בשנת 2017 וגם בשנת 2018 מספר התלמידים שעברו את בחינת המתכונת ונכשלו בבחינת הבגרות היה שווה למספר התלמידים שנכשלו בבחינת המתכונת ועברו את בחינת הבגרות.

א. בשנת 2017 ניגשו 250 תלמידים לבחינת המתכונת ולאחר מכן לבחינת הבגרות באזרחות. ידוע שאם תלמיד עבר את בחינת המתכונת, ההסתברות שהוא עבר את בחינת הבגרות היא 0.9 .

שיעורם של הנכשלים בבחינת הבגרות מכלל התלמידים שניגשו לבחינות בשנה זו היה 20% .

(1) מהו מספר התלמידים שעברו גם את בחינת המתכונת וגם את בחינת הבגרות?

(2) ידוע שתלמיד מסוים נכשל בבחינת המתכונת. מהי ההסתברות שאותו תלמיד עבר את בחינת הבגרות?

(3) בוחרים באקראי (עם החזרה) שני תלמידים שנכשלו בבחינת הבגרות. מהי ההסתברות ששניהם נכשלו גם בבחינת המתכונת?

ב. נתון כי בשנת 2018 לא הייתה תלות בין המאורע ״עובר את בחינת המתכונת״ לבין המאורע ״עובר את בחינת הבגרות״, וכי ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת הבגרות בשנה זו היא a $(0 < a < 1)$.

הבע באמצעות a את ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת המתכונת ונכשל בבחינת הבגרות בשנה זו.

השאלה שואלת על שני סוגי של מאורעות שמכוון לאירגון המידע בטבלה. נסמן ב-B bagrut את המאורע של הצלחה בבגרות ונסמן ב-M matkonet את המאורע של הצלחה במתכונת.

נתון שמספר הנכשלים בבגרות הוא 0.20 ומהסתברות משלימה מספר העוברים הוא 0.80. נתון גם ש:

$$P(B \cap \overline{M}) = P(\overline{B} \cap M)\,,$$

ונסמן נעלם זה ב-X ונסמן את הנעלם $P(M)$ ב-Y.

המילה ״ידוע״ מכוון להסתברות מותנית:

$$\begin{aligned} P(B/M) &= \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = 0.90 \\ P(B \cap M) &= 0.90P(M) = 0.90Y\,. \end{aligned}$$

כעת ניתן למלא את כל תאי הטבלה:

	B	$\overline{B}$	
M	$0.90Y$	X	Y
$\overline{M}$	X	$1-Y-X$	$1-Y$
	0.80	0.20	1.0

מהעומדות של הבגרות נקבל שתי משוואות:

$$0.90Y + X \;=\; 0.80$$

$$
\begin{aligned}
X + 1 - Y - X &= 0.20 \\
Y &= 0.80 \\
X &= 0.08\,.
\end{aligned}
$$

ניתן למלא אל כל התאים במספרים:

	$\overline{B}$	B	
0.80	0.08	0.72	M
0.20	0.12	0.08	$\overline{M}$
1.0	0.20	0.80	

סעיף א 1

מהטבלה $P(B \cap M) = 0.72$ ומספר הנבחנים $= 250$ ולכן מספר העוברים את שתי הבחינות $= 180$.

סעיף א 2

$$P(B/\overline{M}) = \frac{P(B \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{0.08}{0.2} = 0.4\,.$$

סעיף א 3

$$P(\overline{M}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{M} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0.12}{0.2} = 0.6\,.$$

סעיף ב

בתחילת השאלה כתוב ש-$P(M \cap \overline{B}) = P(\overline{M} \cap B)$ גם עבור שנת 2018. המאורעות M, B בלתי-תלויים ולכן גם המאורעות $M, \overline{B}$ ו-$\overline{M}, B$. נמצא בחישוב את הביטוי המבוקש ל-$P(M \cap \overline{B})$:

$$
\begin{aligned}
P(M)P(\overline{B}) &= P(M \cap \overline{B}) = P(\overline{M} \cap B) = P(\overline{M})P(B) \\
P(M)(1-a) &= (1 - P(M))a \\
P(M) &= a \\
P(M \cap \overline{B}) &= P(M)P(\overline{B}) = a(1-a) = a - a^2\,.
\end{aligned}
$$

17 קיץ תשע"ח מועד ב

במבחן רב־ברירה ("אמריקני") יש 5 שאלות.

לכל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.

התלמידים צריכים לסמן תשובה אחת מבין 4 התשובות המוצגות.

תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאלה מקבל 20 נקודות לשאלה זו.

תלמיד שמסמן תשובה לא נכונה על השאלה אינו מקבל נקודות לשאלה.

כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכול.

א. על 2 מן השאלות ידע שחר בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בשאר השאלות הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.

(1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

(2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?

ב. על 2 מן השאלות ידע דניאל בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בוודאות שתשובה אחת, מבין 4 התשובות המוצגות, אינה נכונה,

ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

ג. על 3 מן השאלות ידעה הדס בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימנה אותן.

בכל אחת משתי השאלות האחרות היא ידעה בוודאות ש־ k מבין 4 התשובות המוצגות אינן נכונות, וסימנה

באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיוק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות שהיא תצבור 100 נקודות במבחן.

מצא את k. נמק.

המאורעות הם מספר הנקודות הצברות על ידי התלמידים.

השאלה מתארת הצלחות וכשלונות במתן לתשובות על המבחן ושואלת על מספר ההצלחות והכשלונות. לכן הפתרון ישתמש בנוסחת ברנולי.

סעיף א

1. שחר ידע שהוא ענה נכון על שתי שאלות ולכן כדי לקבל ציון 60 עליו לענות על בדיוק אחת משלושת השאלות האחרות. ההסתברות לענות נכון על שאלה היא $\frac{1}{4}$ ולפי נוסחת ברנולי:

$$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}\,.$$

2. כדי לעבור את המבחן עליו לצבור לפחות שלוש תשובות נכונות. להסתברות מהסעיף הקודם יש להוסיף את ההסתברויות של ארבע וחמש תשובות נכונות:

$$\frac{27}{64}+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1+\binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{37}{64}\,.$$

סעיף ב

דניאל צריך לענות נכון על שאלה אחת בדיוק מתוך שלושת השאלות הנותרות. דניאל ידע שתשובה אחת לא נכונה, לכן ההסתברות שהוא ענה נכון על השאלה היא $\frac{1}{3}$ ולא $\frac{1}{4}$ כמו בסעיף הקודם:

$$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}\,.$$

סעיף ג

תהי p_k ההסתברות שהדס ידעה וודאות ש-k מתוך 4 תשובות לא נכונות. ההסתברות שהיא שהיא צריכה לבחור תשובה באופן אקראי היא המשלים $1 - p_k$. כדי לקבל ציון 60 היא צריכה לענות נכון על אפס מתוך שתי השאלות הנוספות וכדי לקבל ציון 100 היא צריכה לענות נכון על כל השאלות הנכונות. נשווה את שתי ההסתברויות המתקבלות מנוסחת ברנולי:

$$\begin{aligned}\binom{2}{0}p_k^0(1-p_k)^2 &= \binom{2}{2}p_k^2(1-p_k)^0\\ (1-p_k)^2 &= p_k^2\\ p_k &= \frac{1}{2}\,,\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו ב-$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ ו-$p^0 = (1-p)^0 = 1$.

ההסתברות שהיא ענתה תשובה נכונה לשאלה אחת היא $\frac{1}{4-k} = p_k$ ולכן $k = 2$.

פתרון שני

אם לא היינו מגדירים את הסימון p_k היינו מקבלים מפישוט השוויון של נוסחאות ברנולי:

$$\left(\frac{1}{4-k}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{4-k}\right)^2 = \left(\frac{3-k}{4-k}\right)^2\,.$$

נכפיל את שני הצדדים של המשוואה ב-$(4-k)^2$ ונקבל את המשוואה ריבועית $k^2 - 6k + 8 = 0$ שפתרונותיה הם $k = 2, k = 4$. הפרמטר k מוגדר כמספר התשובות שהדס יודעת שהן אינן נכונות, ונתון שתשובה אחת נכונה, כך שיש לפסול את הפתרון $k = 4$ ולבחור $k = 2$.

האפשרות השנייה היא לקחת שורש של שני הצדדים ונקבל שתי משוואות:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4-k} &= +\frac{3-k}{4-k}\\ \frac{1}{4-k} &= -\frac{3-k}{4-k}\,.\end{aligned}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $k = 2$. מהמנה של המשוואה השנייה נקבל $k = 4$ ונפסול אותו כי הוא מאפס את המכנה.

כל הפתרונות מגיעים לתשובה הנכונה אבל בחירה נכונה של סימון וסדר החישובים יכולים להשפוע על פשטות הפתרון.

18 קיץ תשע"ח מועד א

בעיר גדולה נערך מבחן לכל תלמידי התיכון.

37% מן התלמידים שניגשו למבחן נעזרו בחבריהם כדי להתכונן למבחן. $\frac{35}{37}$ מהם עברו את המבחן.

מספר התלמידים שלא נעזרו בחבריהם ולא עברו את המבחן קטן פי 5 ממספר התלמידים שנעזרו בחבריהם ועברו את המבחן.

א. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן, והתברר שהוא לא עבר את המבחן. מהי ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?

ב. יעל והדס ניגשו למבחן. ידוע שיעל נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן, והדס לא נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן. האם ההסתברות שיעל עברה את המבחן גבוהה מההסתברות שהדס עברה את המבחן? נמק.

ג. בחרו באקראי 6 תלמידים שניגשו למבחן.

מהי ההסתברות שבדיוק שליש מהם לא נעזרו בחבריהם ועברו את המבחן?

ד. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן. מהי ההסתברות שהוא מקיים לפחות אחת משתי הטענות I-II :

I) התלמיד נעזר בחבריו.

II) התלמיד לא עבר את המבחן.

מצאתי שניסוח השאלה מבלבל. כאשר כתוב ש-37% מן התלמידים ניגשו למבחן, הנטייה היא לפרש את זה כ-37 מתוך 100 תלמידים, כאשר אחוז למעשה מבטא יחס :

$$37\% = \frac{37}{100} = \frac{74}{200} = \frac{18.5}{50} = \cdots .$$

המשפט הבא קובע ש-$\frac{35}{37}$ "מהם" עברו את המבחן ואפשר לחשוב שמדובר ב-35 מתוך 37 תלמידים, אולם שוב מדובר ביחס. בשני המקרים יחס הוא הסתברות.

נסמן ב-N (ne-ezru) את התלמידים שנעזרו בחבריהם, וב-A (avru) את התלמידים שעברו את המבחן. המאורעות מורכבים משתי קבוצות הללו, משלימהם וחיתוכים שלהם, לכן נבחר היעזר בטבלה כדי לייצג את הנתונים. לפני שניגש לפתור את השאולות בסעיפים, נמלא את טבלת ההסתברויות לפי המידע הנתון.

בניית הטבלה

נתון ש-$P(N) = \frac{37}{100}$. השימוש במילה "**מהם**" מכוון להסתברות מותנית כך ש :

$$P(A/N) = \frac{35}{37}$$

ולכן :

$$\begin{aligned} P(A/N) &= \frac{P(N \cap A)}{P(N)} \\ P(N \cap A) &= P(A/N) \cdot P(N) = \frac{35}{37} \cdot \frac{37}{100} = \frac{35}{100} = 0.35 . \end{aligned}$$

נשתמש במשלימים להסתברויות ונקבל :

	$\overline{A}$	A	
0.37	0.02	0.35	N
0.63			$\overline{N}$
1.0			

בהמשך נתון ש:

$$P(\overline{N}\cap\overline{A}) = \frac{P(N\cap A)}{5} = \frac{0.35}{5} = 0.07\,,$$

וניתן להשלים את הטבלה:

	$\overline{A}$	A	
0.37	0.02	0.35	N
0.63	0.07	0.56	$\overline{N}$
1.0	0.09	0.91	

סעיף א

הניסוח ״בחרו . . . תלמיד . . . שלא עבר את המבחן. מה ההסתברות **שהוא** נעזר בחבריו?״ מכוון להסתברות מותנית:

$$P(N/\overline{A}) = \frac{P(N\cap\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0.02}{0.09} = \frac{2}{9}\,.$$

סעיף ב

הניסוח **״ידוע ש״** מכוון להסתברות מותנית.

עבור יעל ההסתברות המותנית היא:

$$P(A/N) = \frac{P(A\cap N)}{P(N)} = \frac{0.35}{0.37} = 0.9459\,,$$

ועבור הדס ההסתברות המותנית היא:

$$P(A/\overline{N}) = \frac{P(A\cap\overline{N})}{P(\overline{N})} = \frac{0.56}{0.63} = 0.8889\,.$$

ליעל הסתברות גבוהה יותר לעבור את המבחן.

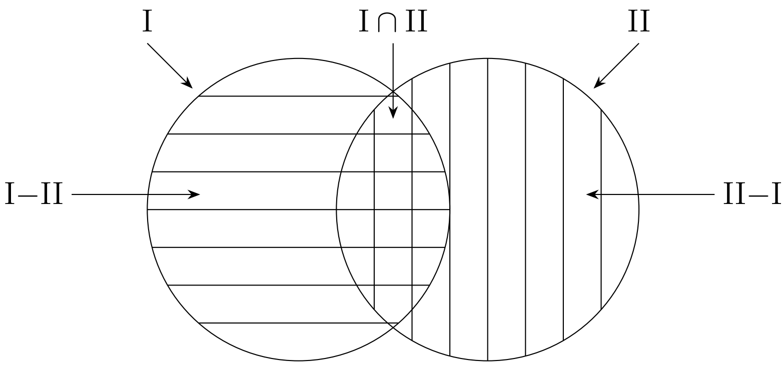
סעיף ג

שליש (לא שלושה!) של שש הוא שניים. המילה "בדיוק" מכוון לנוסחת ברנולי הערך $P(\overline{N} \cap A) = 0.56$ נמצא בטבלה ולפי נוסחה ברנולי ההסתברות היא:

$$\binom{6}{2}(0.56)^2(1-0.56)^4 = 0.1763\,.$$

סעיף ד

הניסוח "**לפחות אחת**" משתי הטענות I, II אומר שמאורע מורכב משני המאורעות I, II או משניהם. בתרשים להלן שני העגולים המייצגים את שני המאורעות I, II כאשר המאורע "לפחות אחת" מיוצג על ידי כל השטח המקווקו:



יש שתי דרכים לחשב את ההסתברות. בדרך הראשונה אנו לוקחים את סכום ההסתברויות של שני המאורעים, ומחסירים את ההסתברות של המאורע המשותף כי ספרנו אותו פעמיים, פעם כחלק מהמאורע I ופעם כחלק מהמאורע II:

$$P(\mathrm{I} \cup \mathrm{II}) = P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) - P(\mathrm{I} \cap \mathrm{II})\,.$$

בדרך השניה אנו סופרים כל חלק מהמאורע השותף בנפרד, כאשר הסימון I-II הוא כל האיברים בקבוצה I שאינם בקבוצה II ולהיפך:

$$P(\mathrm{I} \cup \mathrm{II}) = P(\mathrm{I} - \mathrm{II}) + P(\mathrm{II} - \mathrm{I}) + P(\mathrm{I} \cap \mathrm{II})\,.$$

את ההסתברויות לחישוב ניקח מהטבלה. הדרך הראשונה מופיעה מימין והדרך השניה משמאל:

	$\overline{A}$	A	
0.37	0.02	0.35	N
0.63	0.07	0.56	$\overline{N}$
1.0	0.09	0.91	

	$\overline{A}$	A	
0.37	0.02	0.35	N
0.63	0.07	0.56	$\overline{N}$
1.0	0.09	0.91	

בשתי הדרכים מקבלים אותה תוצאה:

$$\begin{aligned} P(N \cup \overline{A}) &= P(N) + P(\overline{A}) - P(N \cap \overline{A}) = 0.37 + 0.09 - 0.02 = 0.44 \\ P(N \cup \overline{A}) &= P(N - \overline{A}) + P(\overline{A} - N) + P(N \cap \overline{A}) = 0.35 + 0.07 + 0.02 = 0.44\,. \end{aligned}$$

19 חורף תשע"ח

למיכל יש קובייה מאוזנת. על שלוש מפאות הקובייה שלה כתוב המספר 2 , ועל שלוש הפאות האחרות כתוב המספר 4 .

לגלית יש קובייה מאוזנת אחרת. על כל אחת מפאות הקובייה של גלית כתוב אחד מן המספרים: 1 או 3 .

מיכל וגלית משחקות משחק בן חמישה סיבובים. המשתתפת שתנצח במספר סיבובים רב יותר מחברתה, תנצח במשחק. בכל סיבוב של המשחק כל אחת מהן מטילה את הקובייה שלה פעם אחת.

המנצחת בסיבוב היא השחקנית שהמספר שהתקבל על הקובייה שלה גבוה יותר.

נתון שבסיבוב יחיד הסיכוי של מיכל לנצח את גלית הוא $\frac{7}{12}$.

א. על כמה פאות בקובייה של גלית כתוב המספר 1 ? נמק את תשובתך.

ב. מהו הסיכוי שגלית תנצח במשחק?

ג. מהו הסיכוי של גלית לנצח במשחק, אם ידוע שהיא ניצחה בסיבוב הראשון?

סעיף א

נסמן ב-n את המספר הפאות של הקוביה של גלית שכתוב עליהן 1. מאורע אחד הוא שמיכל תנצח כי היא מטילה 4 בהסתברות $\frac{3}{6}$ לא משנה מה גלית מטילה. מאורע שני הוא שמיכל תנצח כי היא מטילה 2 בהסתברות $\frac{3}{6}$ וגלית מטילה 1 בהסתברות $\frac{n}{6}$. המאורעות זרים זה לזה ולכן:

$$\begin{aligned} P(\text{מיכל תנצח}) &= \frac{3}{6}\cdot 1+\frac{3}{6}\cdot\frac{n}{6}=\frac{7}{12}\\ n &= 1\,. \end{aligned}$$

סעיף ב

גלית תנצח אם היא תנצח ב-$3,4,5$ סיבובים. נשמתמש בנוסחת ברנולי כדי לקבל את ההסתברות כתלות של ההסתברות של גלית לנצח בסיבוב אחד שהיא המשלים להסתברות שמיכל תנצח $\frac{5}{12}=1-\frac{7}{12}$:

$$P(\text{גלית תנצח})=\binom{5}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{7}{12}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\frac{5}{12}\right)^4\left(\frac{7}{12}\right)^1+\binom{5}{5}\left(\frac{5}{12}\right)^5\left(\frac{7}{12}\right)^0=0.3466\,.$$

סעיף ג

הניסוח **אם ידוע** מכוון להסתברות מותנית. נסמן ב-G את המאורע שגלית תנצח במשחק וב-R את המאורע שהיא תנצח בסיבוב הראשון:

$$P(G/R)=\frac{P(G\cap R)}{P(R)}\,.$$

כדי שגלית תנצח במשחק וגם בסיבוב הראשון, היא חייבת לנצח בסיבוב הראשון וגם ב-2 או 3 או 4 מהסיבובים הנותרים:

$$\begin{aligned} P(G\cap R) &= \frac{5}{12}\left[\binom{4}{4}\left(\frac{5}{12}\right)^4\left(\frac{7}{12}\right)^0+\binom{4}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{7}{12}\right)^1+\binom{4}{2}\left(\frac{5}{12}\right)^2\left(\frac{7}{12}\right)^2\right]\\ &= \frac{5}{12}\cdot 0.5534\,. \end{aligned}$$

כבר חישבנו ש-$P(R)=\frac{5}{12}$ ולכן $P(G/R)=0.5534$.

20 קיץ תשע"ז מועד ב

בקופסה I יש 10 כדורים, כמה מהם כחולים והשאר אדומים,

ובקופסה II יש 7 כדורים כחולים ו־ 3 כדורים אדומים.

מוציאים באקראי כדור מקופסה I. אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II.

אם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I.

שוב מוציאים באקראי כדור מקופסה I, ושוב, אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II,

ואם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I.

לאחר מכן מוציאים באקראי כדור אחד מקופסה II.

א. נתון כי ההסתברות שאחרי שתי ההוצאות מקופסה I יועבר כדור אדום אחד בלבד מקופסה I לקופסה II היא $\frac{19}{36}$.

חשב את מספר הכדורים הכחולים שהיו בקופסה I לפני ההוצאה הראשונה.

ענה על הסעיפים ב-ג עבור מספר הכדורים הכחולים שחישבת בסעיף א.

ב. מהי ההסתברות שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום?

ג. ידוע שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום.

מהי ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II נשארו בה שלושה כדורים אדומים בדיוק?

הניסוח "מוציאים באקראי . . . **ולאחר מכן** שוב מוציאים באקראי" מכוונן לשימוש בעץ. נסמן ב-b את מספר הכדורים הכחולים בקופסה I. בתרשים (בעמוד הבא) בכל צומת רשום שני זוגות של מספרים: למעלה רשום מספר הכדורים האדומים ומספר הכדורים הכחולים בקופסה I ומתחתיו מספר הכדורים האדומים ומספר הכדורים הכחולים בקופסה II. על הקשתות רשום צבע הכדור שנשלף ומתחתיו ההסתברות לשלוף את הצבע. למשל, בקשת הראשונה נשלף כדור אדום וההסתברות היא מספר הכדורים האדומים $10-b$ חלקי מספר הכדורים בקופסה $10=b+(10-b)$.

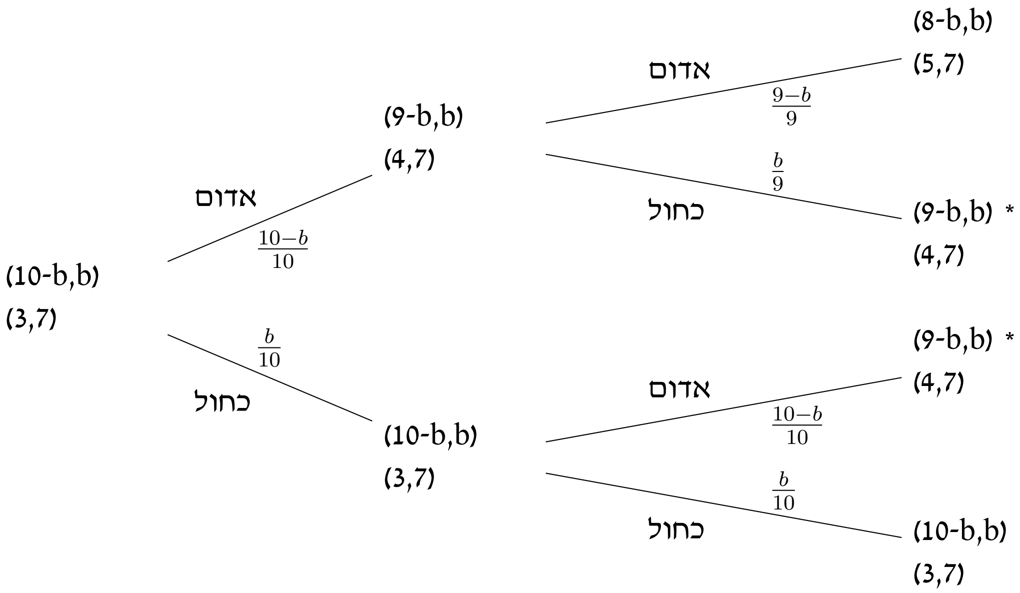
סעיף א

הכוכביות בתרשים מסמנות את שני המסלולים המגיעים למאורע המבוקש $R1$: שנשלף כדור אדום אחד בדיוק מקופסה I. שתי השליפות הן זרות זו לזו ולכן ההסתברות היא סכום ההסתברות לאורך כל אחד מהמסלולים, והסתברות זו נתונה בשאלה:

$$P(R1)=\frac{10-b}{10}\cdot\frac{b}{9}+\frac{b}{10}\cdot\frac{10-b}{10}=\frac{19}{36}\,.$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית $b^2-10b+25=0$ שיש לה פתרון אחד $b=5$.

סעיף ב



מהמידע הרשום בצד הימיני של התרשים אפשר לראות שמספר הכדורים האדומים שנמצאים בקופסה II הם : $5, 4, 4, 7$. נסכם את ההסתברויות של המאורע $P(R2$, לשלוף כדור אדום מקופסה II, לאורך כל אחד מהמסלולים כאשר קודם נציב $b = 5$ שמצאנו לעיל :

$$\begin{aligned} P(R2) &= \left(\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\right)\left(\frac{5}{12}\right)+\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{11}\right)+ \\ &\quad \left(\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\right)\left(\frac{4}{11}\right)+\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)=0.3595\,. \end{aligned}$$

סעיף ג

הניסוח "**ידוע ש-**" מכוון להסתברות מותנית. המאורע החדש הוא $P(R3)$: נשארו שלושה כדורים אדומים בקופסה II :

$$P(R3/R2) = \frac{P(R3 \cap R2)}{P(R2)}\,.$$

את $P(R2)$ חישבנו בסעיף הקודם.

נשארו שלושה כדורים אדומים רק אם היו אברעה כדורים אדומים לפני הבחירה, מאורע $R4$. ההסתברות $P(R4)$ למעשה נתונה $\frac{19}{36}$, והיא ההסתברות להגיע לאחד המצבים המסומנים בכוכבית. מכאן שההסתברות של $P(R3)$ היא ההסתברות להגיע לאחד מהמצבים כפול ההסתברות לשלוף כדור אדום במצב זה :

$$P(R3) = P(R4)\cdot\tfrac{4}{11}\,.$$

ההסתברות המותנית הדרושה היא :

$$P(R3/R2) = \frac{\frac{19}{36}\cdot\frac{4}{11}}{0.3595} = 0.53385\,.$$

21 קיץ תשע"ז מועד א

בבית אבות גדול יש לכמה מן הדיירים קלנועית, ולשאר אין.

אם בוחרים באקראי 9 דיירים מבית האבות הזה, ההסתברות שלְ־ 4 מהם בדיוק יש קלנועית גדולה פי 24 מן ההסתברות שלְ־ 6 מהם בדיוק יש קלנועית.

א. מהי ההסתברות שלדייר שנבחר באקראי יש קלנועית?

ב. בוחרים באקראי 6 דיירים מבית האבות. ידוע שלפחות ל־ 3 מהם יש קלנועית.
מהי ההסתברות שלְ־ 4 מהם בדיוק יש קלנועית?

ג. בוחרים באקראי דיירים מבית האבות, בזה אחר זה, עד שלְ־ 3 מהם בדיוק יש קלנועית.
מהי ההסתברות שייבָּחרו בדרך זו בדיוק 6 דיירים?

סעיף א

נסמן ב-D את המאורע "לדייר יש קלנועית" ונסמן $P(D) = p$. לפי ניסוח השאלה הצלחה היא בחירת דייר עם קלנועית ונמסר מידע על "בדיוק" מספר ההצלחות, ולכן נשמתש בנוסחת ברנולי לכדי לקבל משוואה במשתנה p:

$$\begin{aligned}
\binom{9}{4}p^4(1-p)^5 &= 24\binom{9}{6}p^6(1-p)^3\\
\frac{1}{4}(1-p)^2 &= \frac{24}{6}p^2\\
15p^2+2p-1 &= 0\\
p &= \frac{1}{5} = 0.2\,,
\end{aligned}$$

כאשר השורש $-\frac{1}{3}$ אינו יכול להיות פתרון כי הסתברות חייבת גדול או שווה לאפס.

סעיף ב

נסמן ב-N את המאורע של "מספר הדיירים שיש להם קלנועית". הניסוח "**ידוע ש-**" מכוון להסתברות מותנית:

$$P(N=4/N\geq 3) = \frac{P(N=4\cap N\geq 3)}{P(N\geq 3)}\,.$$

כאשר קבוצה אחת בחיתוך היא תת-קבוצה של השנייה, אפשר לפשט את החיתוך ולהשתמש רק בקבוצה הקטנה יותר. ברור שאם N גדול או שווה ל-3 **וגם** N שווה ל-4 אז N שווה ל-4:

$$P(N=4/N\geq 3) = \frac{P(N=4)}{P(N\geq 3)}\,.$$

לפי נוסחת ברנולי:

$$P(N=4) = \binom{6}{4}0.2^4(1-0.2)^2 = 0.01536\,.$$

המונה $P(N \geq 3)$ אפשר לחשב בשתי דרכים. בצורה ישירה:

$$\begin{aligned} P(N \geq 3) &= \binom{6}{3}0.2^3(1-0.2)^3 + \binom{6}{4}0.2^4(1-0.2)^2 + \\ &\quad \binom{6}{5}0.2^5(1-0.2)^1 + \binom{6}{6}0.2^6(1-0.2)^0 = 0.099\,, \end{aligned}$$

או לפי המשלים:

$$\begin{aligned} P(N \geq 3) = 1 - P(N < 3) &= 1 - 0.2^0(1-0.2)^6 - \binom{6}{1}0.2^1(1-0.2)^5 - \\ &\quad \binom{6}{2}0.2^2(1-0.2)^4 = 0.099\,. \end{aligned}$$

התשובה לשאלה היא:

$$P(N = 4/N \geq 3) = \frac{P(N=4)}{P(N \geq 3)} = \frac{0.01536}{0.099} = 0.15534\,.$$

סעיף ג

הניסוח "**עד ש**" אומר שהבחירה **האחרונה** תהיה "הצלחה" ושיהיו שתי "הצלחות" בחמשת הבחירות הקודמות. נסמן הצלחה ב-$+$ וכישלון ב-$-$ ונסדר את הדרישה בשאלה בשורה:

$$\overbrace{\pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \pm}^{2/5} \qquad \overbrace{+}^{1/1}$$

התשובה מתקבלת מנוסחת ברנולי לבחירות הראשונות כפול ההסתברות p לבחירה האחרונה:

$$\left[\binom{5}{2}0.2^2(1-.02)^3\right] \cdot 0.2 = 0.04096\,.$$

22 חורף תשע"ז

אביגיל משתתפת במשחק של זריקת חִצים למטרה.

הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד הוא P $(P > 0)$, ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים.

כל משתתף זורק 5 זריקות רצופות.

הסיכוי של אביגיל לפגוע במטרה בארבע זריקות מתוך החמש גדול פי 3 מן הסיכוי שלה לפגוע בה בכל חמש הזריקות.

א. מצא את P.

משתתף מנצח במשחק אם מתוך 5 זריקות רצופות, מספר הפגיעות שלו במטרה גדול ממספר ההחטאות שלו (יכול להיות יותר ממנצח אחד במשחק).

ב. מהי ההסתברות שאביגיל תנצח במשחק?

ג. (1) אם אביגיל תחטיא את המטרה בזריקה השנייה, מהי ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

(2) גם תמר משתתפת בַּמשחק, וגם הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד שווה ל- P ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים. תמר החטיאה בזריקה הראשונה.
מה ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

סעיף א

נסמן ב-A את המאורע "אביגיל פוגעת" ונסמן $P(A) = p$. לפי ניסוח השאלה הצלחה היא פגיעה במטרה ונמסר מידע על מספר ההצלחות, ולכן נשמתש בנוסחת ברנולי לכדי לקבל משוואה במשתנה p:

$$\begin{aligned}\binom{5}{4}p^4(1-p)^1 &= 3\binom{5}{5}p^5(1-p)^0\\ 5(1-p) &= 3p\\ p &= \frac{5}{8}.\end{aligned}$$

סעיף ב

נסמן ב-$N5$ את מספר הפגיעות של אביגיל מתוך חמש זריקות. ניצחון שלה היא $N5 \geq 3$ וההסתברות היא:

$$P(N5 \geq 3) = \binom{5}{3}p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4}p^4(1-p)^1 + \binom{5}{5}p^5(1-p)^0.$$

נציב $p = \frac{5}{8}$ ונקבל 0.7248.

סעיף ג (1)

לדעתי ניסוח השאלה לא ברור. אני פירשתי אותה כך: מה ההסתברות של **המאורע** "אביגיל מחטיאה בזריקה השנייה ופוגעת בשלוש או ארבע מהזריקות האחרות"? כותב הבחינה התכוון להסתברות מותנית: "**אם ידוע** שאביגיל החטיאה בזריקה השנייה, מה ההסתברות שהיא פוגעת בשלוש או ארבע מהזריקות האחרות"?

נסמן ב-$T2$ את המאורע שאביגיל מחטיאה בזריקה השנייה, ונסמן ב-$N4$ את מספר הפגיעות שלה מתוך ארבע זריקות. ההסתברות המותנית היא:

$$P(N4 \geq 3/T2) = \frac{P(N4 \geq 3 \cap T2)}{P(T2)} \, .$$

הזריקות לא תלויות אחת בשנייה ולכן:

$$P(N4 \geq 3/T2) = \frac{P(N4 \geq 3) \cdot P(T2)}{P(T2)} = P(N4 \geq 3) \, ,$$

ולפי נוסחת ברנולי:

$$P(N4 \geq 3/T2) = P(N4 \geq 3) = \binom{4}{4} \left(\frac{5}{8}\right)^4 \left(\frac{3}{6}\right)^0 + \binom{4}{3} \left(\frac{5}{8}\right)^3 \left(\frac{3}{8}\right)^1 = 0.5188 \, .$$

סעיף ג (2)

ההסתברות של תמר לפגוע זהה להסתברות של אביגיל לפגוע ולכן ניתן להשתמש בתוצאות שכבר חישבנו. גם לא משנה איזו זריקה החטיאה כי הזריקות בלתי תלויות, ולכן לפי סעיף ג (1) ההסתברות של תמר לנצח היא גם 0.5188.

23 קיץ תשע״ו מועד ב

שחמט הוא משחק בין שני שחקנים שיכול להסתיים בניצחון של אחד מהם או בתיקו.

יעל ואנה משחקות זו מול זו בטורניר שחמט בשני סבבים.

ההסתברות של כל אחת מן השחקניות לנצח במשחק בודד היא קבועה בכל הטורניר.

א. בסבב הראשון יש 4 משחקים. ההסתברות שיעל תנצח ב־ 2 משחקים

או ב־ 3 משחקים גדולה פי 10 מן ההסתברות שיעל תנצח ב־ 4 משחקים.

חשב את ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד.

בסבב השני יש 2 משחקים.

ההסתברות שתוצאת הסבב השני תהיה שוויון — היא 0.34 .

ב. מהי ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד?

ג. חשב את ההסתברות שאנה תנצח במשחק השני, אם ידוע שתוצאת סבב זה היא שוויון.

סעיף א

נסמן את המאורע ״יעל תנצח במשחק בודד״ ב-Y (Yael) ונסמן $y = P(Y)$. הצלחה מוגדרת על ידי ניצחונות של יעל והשאלה מספקת מידע על מספרי ההצלחות ולכן נשתמש בנוסחת ברנולי:

$$\begin{aligned}
\binom{4}{2}y^2(1-y)^2 + \binom{4}{3}y^3(1-y) &= 10\cdot\binom{4}{4}y^4(1-y)^0\\
8y^2+8y-6 &= 0\\
y &= \frac{1}{2}\,,
\end{aligned}$$

ונתעלם מהשורש השני $-\frac{3}{2}$ כי הסתברות לא יכולה להיות שלילי.

סעיף ב

נסמן את המאורע ״אנה תנצח במשחק בודד״ ב-A (Anna) ונסמן $a = P(A)$.

נסמן ב-S (shivyon) את המאורע שתוצאת הסבב השני תהיה תיקו. האפשרויות לקבל שוויון הן ניצחון אחד לאנה וליעל בהסתברות $ya+ay$, או תיקו בשני המשחקים בהסתברות $(1-(y+a))^2$ כי ההסתברות לתיקו במשחק אחד היא המשלים לסכום ההסתברויות שאחת מהן תנצח. נציב $y = \frac{1}{2}$ והמידע ש-$P(S) = 0.34$ ונקבל:

$$\begin{aligned}
\binom{2}{1}ya + (1-(y+a))^2 &= P(S) = 0.34\\
a + (\tfrac{1}{2}-a)^2 &= 0.34\\
a &= 0.3\,,
\end{aligned}$$

כאשר נתעלם מהשורש -0.3 כי הסתברות לא יכולה להיות שלילית.

סעיף ג

נסמן את המאורע ״אנה תנצח במשחק השני״ ב-$A2$.

הניסוח ״**אם ידוע ש-**״ מכוון להסתברות מותנית :

$$\begin{aligned} P(A2/S) &= \frac{P(A2 \cap S)}{P(S)} \\ &= \frac{ya}{P(S)} = \frac{0.5 \cdot 0.3}{0.34} = 0.4412\,. \end{aligned}$$

ההסתברות לשיוון בסבב השני נתונה. אם אנה תנצח במשחק השני, יהיה שוויון רק אם גם יעל תנצח במשחק הראשון :

$$\frac{ya}{.34} = \frac{0.5 \cdot 0.3}{.34} = 0.4412\,.$$

שימו לב שאם יש שיוון ואנה מנצחת במשחק הראשון, יעל חייבת לנצח במשחק הראשון ולכם המנה היא ya.

24 קיץ תשע"ו מועד א

במבחן כניסה למכללה 20% מן הנבחנים היו מקיבוצים.

40% היו ממושבים ו־ 40% היו מערים.

70% מן הנבחנים הצליחו במבחן.

$\frac{1}{8}$ מן הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו במבחן.

ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מעיר וגם הצליח במבחן, גדולה פי 2.5 מן ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מקיבוץ וגם הצליח במבחן.

א. מבין הנבחנים שנכשלו במבחן, מהי ההסתברות לבחור באקראי נבחן שלא היה מעיר?

ב. (1) משה הצליח במבחן.

מהי ההסתברות שהוא לא היה ממושב?

(2) חמישה נבחנים הצליחו במבחן.

מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם היה ממושב?

נסמן את המאורעות השונים בשאלה.

- S (success) הנבחנים שהצליחו.
- K (kibbutz) נבחנים מקיבוצים.
- M (moshav) נבחנים ממושבים.
- E (eer) נבחנים מערים.

ההסתברויות של המאורעות הללו נתונות:

$$P(K) = 0.20,\ P(M) = 0.40,\ P(E) = 0.40,\ P(S) = 0.70\,.$$

בשאלה שני סוגים של קבוצות: הצלחת הנבחנים ומקום המגורים של הנבחנים ולכן נשתמש בטבלה:

	K	M	E	
S				0.70
$\overline{S}$				0.30
	0.20	0.40	0.40	1.0

מידע נוסף שניתן הוא "$\frac{1}{8}$ **מן הנבחנים** שהיו ממושבים נכשלו במבחן", כאשר הניסוח מכוון להסתברות מותנית. נחשב:

$$\begin{aligned} P(\overline{S}/M) &= P(\overline{S}\cap M)/P(M) \\ P(\overline{S}\cap M) &= P(\overline{S}/M)\cdot P(M) = \frac{1}{8}\cdot 0.40 = 0.05\,. \end{aligned}$$

הנתון האחרון מתקבל מהפסקאות "ההסתברות לבחור באקראי **מבין כל** הנבחנים נבחן שהיה ב-··· **וגם** הצליח במבחן". הניסוח מכוון לחיתוך הסתברויות, ולכן הנתון הוא $P(E\cap S) = 2.5\cdot P(K\cap S)$.

נחשב את $P(S) = 0.70$ על ידי סיכום ההסתברויות של המצליחים במבחן בכל מקום מגורים:

$$\begin{aligned} P(S) &= P(K\cap S) + P(M\cap S) + P(K\cap E) \\ 0.70 &= P(K\cap S) + 0.35 + 2.5\cdot P(K\cap S) \\ P(K\cap S) &= 0.10 \\ P(E\cap S) &= 0.25\,. \end{aligned}$$

נשלים את הטבלה:

	E	M	K	
0.70	0.25	0.35	0.10	S
0.30	0.15	0.05	0.10	$\overline{S}$
1.0	0.40	0.40	0.20	

סעיף א

לפי הנוסחה להסתברות מותנית:

$$P(\overline{E}/\overline{S}) = P((K\cup M)/\overline{S}) = \frac{P(K\cap\overline{S}) + P(M\cap\overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{0.10+0.05}{0.30} = \frac{1}{2}\,.$$

סעיף ב (1)

לפי הנוסחה להסתברות מותנית:

$$P(\overline{M}/S) = P((K\cup E)/S) = \frac{P(K\cap S) + P(E\cap S)}{P(S)} = \frac{0.10+0.25}{0.70} = \frac{1}{2}\,.$$

סעיף ב (2)

"לפחות אחד ממושב" הוא המשלים ל-"כולם לא מהמושב" ולפי נוסחת ברנולי:

$$1 - P(\overline{M}/S)^5 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{31}{32}\,.$$

25 חורף תשע"ו

במכונת מזל אפשר לזכות ב־ 50 שקל, ב־ 100 שקל או לא לזכות כלל.

דן משחק 5 משחקים במכונה זו.

ההסתברות שדן יזכה ב־ 50 שקל בדיוק פעמיים שווה להסתברות

שהוא יזכה ב־ 50 שקל בדיוק פעם אחת.

(ההסתברות לזכות ב־ 50 שקל שונה מאפס.)

ההסתברות שדן <u>לא</u> יזכה באף משחק היא $\frac{1}{32}$.

א. מהי ההסתברות שדן יזכה ב־ 50 שקל במשחק בודד?

ב. מהי ההסתברות שדן יזכה ב־ 100 שקל במשחק בודד?

ג. ידוע כי לאחר שדן שיחק שני משחקים הוא זכה סך הכול ב־ 100 שקל בדיוק.

מהי ההסתברות שהוא <u>לא</u> זכה ב־ 50 שקל באף אחד משני המשחקים?

המאורעות הם סכומי הכסף שדן זכה $0, 50, 100$. נסמן ב-$P(n)$ את ההסתברות שדן זכה ב-n.

סעיף א

הניסוחים "אף אחד" ו-"בדיוק" מכוונים לנוסחת ברנולי. ההסתברות שדן לא זכה (בסכום חיובי) באף אחד מחמישת המשחקים היא $P(0)^5 = \frac{1}{32}$ ולכן $P(0) = \frac{1}{2}$. לפי המידע הנתון:

$$\begin{aligned}
\binom{5}{2} P(50)^2(1-P(50))^3 &= \binom{5}{1} P(50)(1-P(50))^4 \\
10P(50) &= 5(1-P(50)) \\
P(50) &= \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

סעיף ב

לפי ההסתברות המשלימה: $P(100) = 1 - P(0) - P(50) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

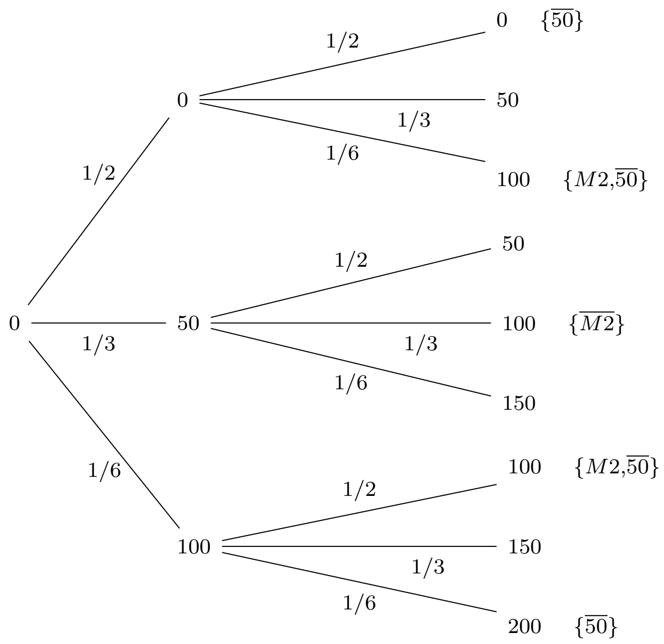
סעיף ג

נסמן ב-$M2$ את המאורע שדן זכה ב-100 בשני משחקים ונסמן ב-$\overline{50}$ את המאורע שדן לא זכה ב-50.
הניסוח "**ידוע כי**" מכוון להסתברות מותנית:

$$P(\overline{50}/M2) = \frac{P(\overline{50} \cap M2)}{P(M2)}$$

המשחקים מתרחשים אחד אחרי השני ולא לתלויים אחד בשני ולכן ניתן להציג את ההסתברויות בעץ (בעמוד הבא). בסוף כל מסלול רשום המאורעות $M2, \overline{50}$ שמתקיימים. ההסתברות המותנית היא:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}\,.$$


0
1/2
1/3
1/6
0
50
100
1/2
1/3
1/6
0 {$\overline{50}$}
50
100 {$M2$,$\overline{50}$}
1/2
1/3
1/6
50
100 {$\overline{M2}$}
150
1/2
1/3
1/6
100 {$M2$,$\overline{50}$}
150
200 {$\overline{50}$}

26 קיץ תשע"ה מועד ב

חוקר עורך מחקר על הרגלי האכילה של סטודנטים באוניברסיטה גדולה במשך יום לימודים.

חלק מהסטודנטים מביאים תמיד אוכל מהבית, והשאר אינם מביאים אוכל מהבית.

כל הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית אוכלים אותו במשך היום ואינם אוכלים בקפטריה.

הסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אוכלים בקפטריה או אינם אוכלים במשך היום.

א. נמצא כי אם בוחרים באקראי 4 סטודנטים, ההסתברות שבדיוק 2 מהם מביאים אוכל מהבית גדולה פי 6 מההסתברות שבדיוק 1 מהם מביא אוכל מהבית.

(1) מהו אחוז הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית?

(2) החוקר בחר באקראי 8 סטודנטים באוניברסיטה.
מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם מביא אוכל מהבית, אבל לא כולם?

ב. נמצא כי 60% מהסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אינם אוכלים במשך היום.

(1) מהו אחוז הסטודנטים באוניברסיטה שאוכלים בקפטריה?

(2) מהי ההסתברות לבחור סטודנט שמביא אוכל מהבית מבין הסטודנטים שאוכלים במשך היום?

סעיף א (1)

נסמן את המאורע "מביא אוכל מהבית" ב-M mavi ונסמן $b = P(M)$. המילה "בדיוק" מכוון לנוסחת ברנולי:

$$\begin{aligned}\binom{4}{2}b^2(1-b)^2 &= 6\cdot\binom{4}{1}b(1-b)^3\\ 6b &= 24(1-b)\\ b &= \frac{4}{5}\,.\end{aligned}$$

השאלה שואלת על "אחוז" ולכן התשובה היא 80%.

סעיף א (2)

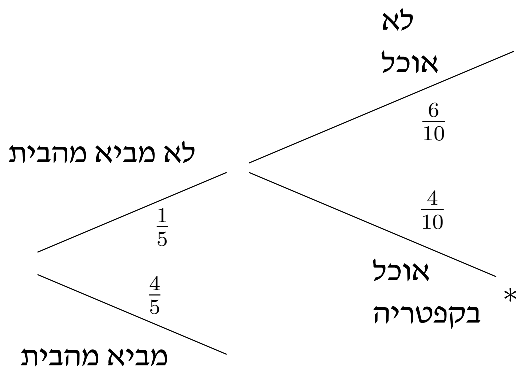
ההסתברות של "לפחות אחד אבל לא כולם" היא המשלים ל-"לא אפס ולא כולם":

$$1-\left(\frac{1}{5}\right)^8-\left(\frac{4}{5}\right)^8 = 0.8322\,.$$

סעיף ב (1)

נסמן את המאורע "אוכל בקפטריה" ב-C (cafeteria). בעץ ההסתברויות בעמוד הבא הכוכבית מראה את המסלול עבור המאורע C ולכן:

$$P(C) = \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10} = \frac{2}{25}\,.$$



פתרון זה לא כל כך מוצא חן בעיני כי לא ברור מאיפה צץ העץ שבדרך כלל משמש למאורעות סדרתיות כגון הטלת קוביות מספר פעמים. אני מעדיף פתרון מבוסס הסתברות מותנית ואני חושב שניסוח השאלה היתה צריכה להיות "**מבין** אלה שלא מביאים אוכל 60% אינם אוכלים בקפטריה". לפי נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(C)=P(C/M)P(M)+P(C/\overline{M})P(\overline{M})=0\cdot 0.8+(1-0.6)\cdot(1-0.8)=0.4\cdot 0.2=0.08\,.$$

סעיף ב (2)

נסמן ב-O (okhel) את המאורע "מביא אוכל. המילה "**מבין**" מכוונת להסתברות מותנית, ונחשב אותה תוך שימוש בעובדה ש-$O \subseteq M$ ולכן $M \cap O = M$:

$$\begin{aligned}
P(M/O) &= \frac{P(M\;\cap\;O)}{P(O)}\\
&= \frac{P(M)}{P(O)}\\
&= \frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}+\frac{2}{25}}=\frac{10}{11}\,.
\end{aligned}$$

נתונה קבוצה של ספרות שונות: 3 ספרות הן זוגיות (שונות מ־ 0), והשאר הן ספרות אי־זוגיות.

יוני יוצר מספר דו־ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שיוני בוחר באקראי היא ספרת העשרות,

והספרה השנייה שהוא בוחר באקראי היא ספרת היחידות.

יוני בוחר כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.

א. נתון כי ההסתברות שיוני ייצור מספר אי־זוגי היא $\frac{4}{7}$.
מהו מספר הספרות האי־זוגיות בקבוצה הנתונה?

ב. אם ידוע שהמספר שנוצר הוא זוגי, מהי ההסתברות ששתי הספרות שיוני בחר הן זוגיות?

אמילי יוצרת מספר תלת־ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שאמילי בוחרת באקראי היא ספרת המאות,

הספרה השנייה שהיא בוחרת באקראי היא ספרת העשרות,

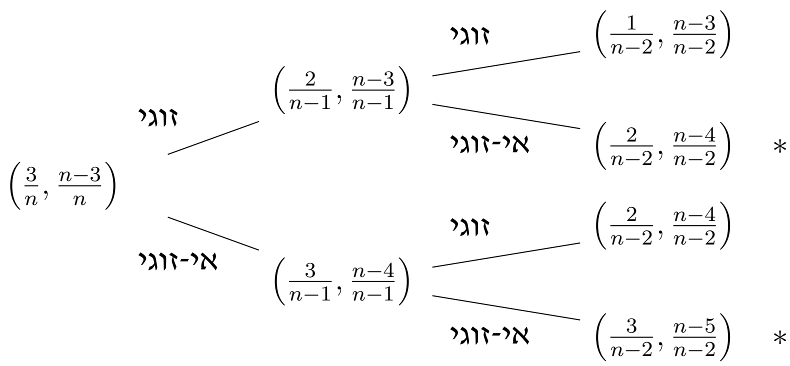
והספרה השלישית שהיא בוחרת באקראי היא ספרת היחידות.

אמילי בוחרת כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.

ג. ידוע כי הספרה הראשונה שאמילי בחרה היא זוגית.
מהי ההסתברות שבמספר התלת־ספרתי שאמילי יצרה, סכום הספרות היה זוגי?

סעיף א

נסמן את קבוצת הספרות ב-S (sifarot), קבוצת הספרות הזוגיות ב-Z (zugi), קבוצת הספרות האי-זוגיות ב-I (i-zugi). בחירה של ספרת העשרות ואחר כך ספרת היחידות מכוונת לעץ הסתברויות. במקום לרשום את מספרי הספרות בצמתים וההסתברויות על הקשתות, נפשט את התרשים ונרשום בכל צומת את ההסתברויות שליפת ספרה זוגית או אי-זוגית $(P(Z=k_1), P(I=k_2))$.



המאורע YI שיוני ייצור מספר אי-זוגי יתרחש רק אם הבחירתו השנייה היא ספרה אי-זוגית. המסלולים המתאימים מסומנים בתרשים בכוכביות. נחשב את ההסתברות ונשווה להסתברות הנתונה:

$$P(YI) \quad = \quad \frac{3}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} + \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} = \frac{4}{7}$$

$$\begin{aligned} 4n(n-1) &= 7(n-3)(n-1) \\ n &= 7 \\ |I| &= n-3=4\,. \end{aligned}$$

נתון ש-$n \geq 3$ ולכן $n \neq 1$ וניתן לצמצם את $n-1$.

סעיף ב

במספר זוגי הספרה האחרונה זוגית. נסמן ב-$Z2$ את המאורע ששתי הספרות זוגיות ונסמן ב-ZA aharona את המאורע ספרה אחרונה זוגית. הניסוח "**אם ידוע**" מכוון להסתברות מותנית:

$$\begin{aligned} P(Z2/ZA) &= \frac{P(Z2\ \cap\ ZA)}{P(ZA)} \\ &= \frac{P(Z2)}{P(ZA)} \\ &= \frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}}{1-\frac{4}{7}} = \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

השתמשנו ב-$Z2 \subseteq ZA$ כי אם שתי הספרות זוגיות אזי הספרה האחרונה זוגית, ובעובדה ש-$P(ZA) =$ $1-P(YI)$ שחישבנו בסעיף הקודם. החישוב של $P(Z2)$ היא ההסתברות שמתקבלת מהמסלול העליון בעץ עבור בחירה של שתי ספרות זוגיות.

סעיף ג

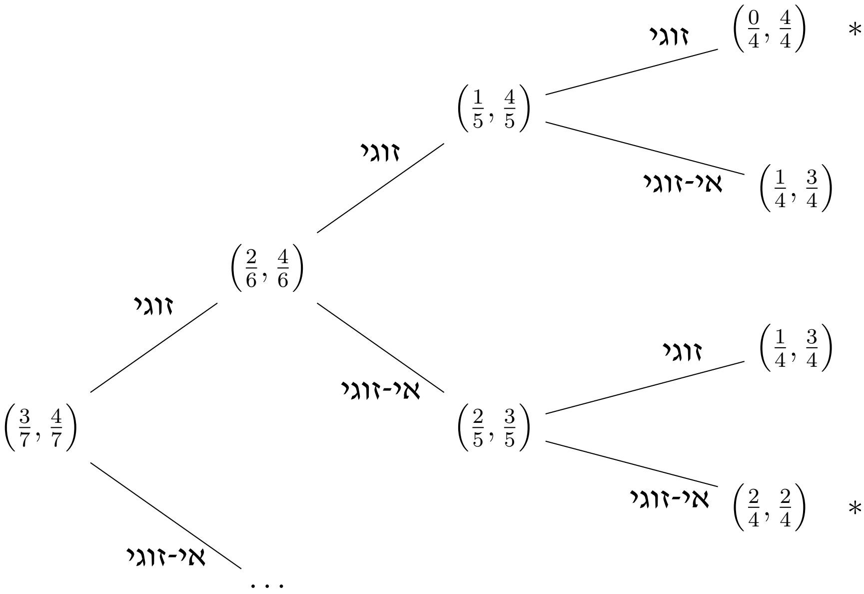
הסכום יהיה זוגי רק אם שתי הספרות האחרונת הן זוגיות או אי-זוגיות:

$$\begin{aligned} 2k_1+2k_2+2k_3 &= 2(k_1+k_2+k_3) \\ 2k_1+2(k_2+1)+2(k_3+1) &= 2(k_1+k_2+k_3+1)\,. \end{aligned}$$

נסמן ב-$Z1$ את המאורע שהספרה הראשונה זוגית ונסמן ב-S (sekhum) את המאורע שסכום הספרות זוגי. המילה "ידוע" מכוון להסתברות מותנית ולכן:

$$\begin{aligned} P(S/Z1) &= \frac{P(S\ \cap\ Z1)}{P(Z1)} \\ &= \frac{P(S\ \cap\ Z1)}{P(Z1)} \\ &= \frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{15}\,. \end{aligned}$$

המנה חושב משני המסלולים המסומנים בכוכביות בעץ ההסתברויות בעמוד הבא, כי הם מתחילים עם בחירה של ספרה זוגית ואז שני ואז או שתי ספרות זוגיות או שתי ספרות אי-זוגיות כדי לקבל סכום זוגי.


$\left(\frac{0}{4}, \frac{4}{4}\right)$ *
זוגי
$\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$
זוגי
אי-זוגי
$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$
$\left(\frac{2}{6}, \frac{4}{6}\right)$
זוגי
זוגי
$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$
אי-זוגי
$\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$
$\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$
אי-זוגי
$\left(\frac{2}{4}, \frac{2}{4}\right)$ *
אי-זוגי
$\cdots$

28 חורף תשע"ה

ביישוב גדול $\frac{1}{3}$ מהתושבים הם נשים, והשאר הם גברים.

מבין התושבים בוחרים באקראי שתי קבוצות:

קבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון ברדיו

וקבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון בטלוויזיה.

א. מהי ההסתברות שבכל קבוצה יש בדיוק 2 גברים?

ב. ידוע כי בקבוצה שנבחרה לריאיון ברדיו היו לכל היותר 2 גברים.

מהי ההסתברות שהיו בקבוצה זו בדיוק 2 גברים?

המשמעות של "יישוב גדול" היא (כנראה) שאפשר לבחור את שתי הקבוצות בלי לשנות את ההסתברות של $\frac{1}{3}$ במהלך הבחירה, למרות שהבחירה היא ללא החזרה.

סעיף א

נסמן ב-$G2$ את המאורע של בחירת שני בגברים בקבוצה אחת ונסמן ב-$G22$ את המאורע של בחירת שני גברים בשתי הקבוצות. בחירת גבר נקראת הצלחה ולכן נשתמש בנוסחת ברנולי כדי לקבל את ההסתברות **לבדיוק** שתי הצלחות בקבוצה אחת:

$$P(G2) = \binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}\,.$$

לפי ההנחה שאין שינוי בהסתברות של הבחירה בין שתי הקבוצות, נקבל:

$$P(G22) = P(G2)\cdot P(G2) = \frac{64}{729}\,.$$

סעיף ב

נסמן את המאורע "לכל היותר שני גברים" ב-$G012$. הניסוח "**ידוע כי**" מכוון להסתברות מותנית:

$$P(G2/G012) \quad = \quad \frac{P(G2\,\cap\, G012)}{P(G012)}$$

$G012 \subseteq G2$ ולכן המנה היא $G2 = \frac{8}{27}$. "לכל היותר שני גברים" הוא הסכום של שלוש נוסחאות ברנולי:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{27}$$

והתשובה לשאלה היא:

$$P(G2/G012) = \frac{\frac{8}{27}}{\frac{11}{27}} = \frac{8}{11}\,.$$

29 קיץ תשע"ד מועד ב

בעיר גדולה כל אחד מתלמידי כיתות י"ב בשנה מסוימת בוחר באחד משני המסלולים לטיול שנתי:

מסלול א' או מסלול ב'.

נמצא: 75% מן התלמידים שבחרו במסלול א' הן בנות.

10% מן הבנות בחרו במסלול ב'.

40% מן התלמידים הם בנות.

א. בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת).

מהי ההסתברות שהוא בחר במסלול א'?

ב. כאשר בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת), האם המאורע "התלמיד הוא בת"

והמאורע "התלמיד (בן/בת) בחר במסלול א'" הם מאורעות בלתי תלויים? נמק.

ג. בחרו באקראי כמה בנות מבין התלמידים.

נמצא שההסתברות שלפחות אחת מהן בחרה במסלול א' היא 0.99.

(הבחירות של המסלולים על ידי הבנות שנבחרו הן בלתי תלויות.)

כמה בנות נבחרו?

נמסן את הקבוצות בשאלה: G (girl), B (boy), MA (maslul aleph), MB (maslul bet). בגלל שיש שני זוגות של קבוצות נציג את ההסתברויות בטבלה. את הטבלה נמלא בשתי דרכים שונות, תחילה ישירות מהנתונים ואחר כך תוך שימוש בהסתברות מותנית.

	G	B	
MA	.36	.12	.48
MB	.04	.48	.52
	0.40	.60	1

דרך א'

נתון ש-$P(G) = 0.40$ ונתון ש-10% מהם בחרו במסלול ב', ולכן $P(G \cap MB) = .04$, ומהסתברות משלימה $P(G \cap MA) = .36$. הנתון האחרון הוא ש-$0.75P(MA) = 0.36$ ולכן $P(MA) = 0.36/0.75 = 0.48$. את שאר התאים ניתן למלא מהסתברויות משלימות.

דרך ב'

שוב נמלא את התא הימני למטה ב-$P(G) = 0.40$. נמשיך:

$$\begin{aligned} P(MB/G) &= \frac{P(MB \cap G)}{P(G)} = 0.10 \\ P(MB \cap G) &= P(G)P(MB/G) = 0.40 \cdot 0.10 = 0.04\,. \end{aligned}$$

עוד הסתברות מותנית:

$$\begin{aligned} P(G/MA) &= \frac{P(G \cap MA)}{P(MA)} = 0.75 \\ P(MA) &= \frac{P(G \cap MA)}{P(G/MA)} = \frac{0.36}{0.75} = 0.48\,, \end{aligned}$$

ונמלא את שאר התאים באמצעות הסתברויות משלימות.

סעיף א

$P(MA) = 0.48$.

סעיף ב

$$\begin{aligned} P(G \cap MA) &= 0.36 \\ P(G)P(MA) &= 0.40 \cdot 0.48 = 0.19\,. \end{aligned}$$

$0.19 \neq 0.36$ ולכן המאורעות אינם בלתי תלויים.

סעיף ג

ניתן לחשב "לפחות אחת" על ידי חישוב הסתברות של "אף אחת". ההסתברות שבת לא תבחר מסלול א' היא ההסתברות שהיא תבחר מסלול ב':

$$\begin{aligned} P(MB/G) &= \frac{P(MB \cap G}{P(G)} = \frac{0.04}{0.40} = 0.10 \\ (0.10)^n &= 1 - 0.99 = 0.01 \\ n &= 2\,. \end{aligned}$$

30 קיץ תשע"ד מועד א

אבא ודני משחקים בזריקת כדור לסל. בכל משחק שני סיבובים.

המנצח בסיבוב מקבל נקודה אחת. אם הסיבוב מסתיים בתיקו, כל אחד מקבל חצי נקודה.

נתון: ההסתברות שדני ינצח בסיבוב היא 0.1 ,

ההסתברות שאבא ינצח בסיבוב היא 0.2 ,

ההסתברות שהסיבוב יסתיים בתיקו היא 0.7 .

הסיבובים אינם תלויים זה בזה.

א. מהי ההסתברות שאבא יצבור בשני הסיבובים יותר מנקודה אחת?

ב. מהי ההסתברות שדני יצבור בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת?

ג. ידוע כי דני צבר בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת.

מהי ההסתברות שאחד הסיבובים הסתיים בתיקו והאחר הסתיים בניצחון של דני?

ד. אבא ודני משחקים 4 פעמים את המשחק שמתואר בפתיח. (בכל משחק שני סיבובים.)

מהי ההסתברות שדני יצבור לפחות נקודה אחת 2 פעמים בדיוק?

נסמן ב-$D1, D2$ (dani) את המאורע שדני מנצח בסיבוב אחד או שניים, נסמן ב-$A1, A2$ (abba) את המאורע שאבא מנצח בסיבוב אחד או שניים, ונסמן ב-$T1, T2$ (teku) את המאורע שיהיה תיקו בסיבוב אחד או שניים. השאלה שואלת על סדרה של שני סבבים וזה מכוון לעץ הסתברויות (בעמוד הבא). בסוף כל מסלול רשום מספר הנקודות שאבא צבר ומספר הנקודות שדני צבר.

סעיף א

במסלול בהם אבא צובר יותר מנקודה אחת הם (a), (c), (g), וההסתברות היא:

$$P(A2 > 1) = 0.2 \cdot 0.2 \,+\, 0.2 \cdot 0.7 \,+\, 0.7 \cdot 0.2 \,=\, 0.32\,.$$

סעיף ב

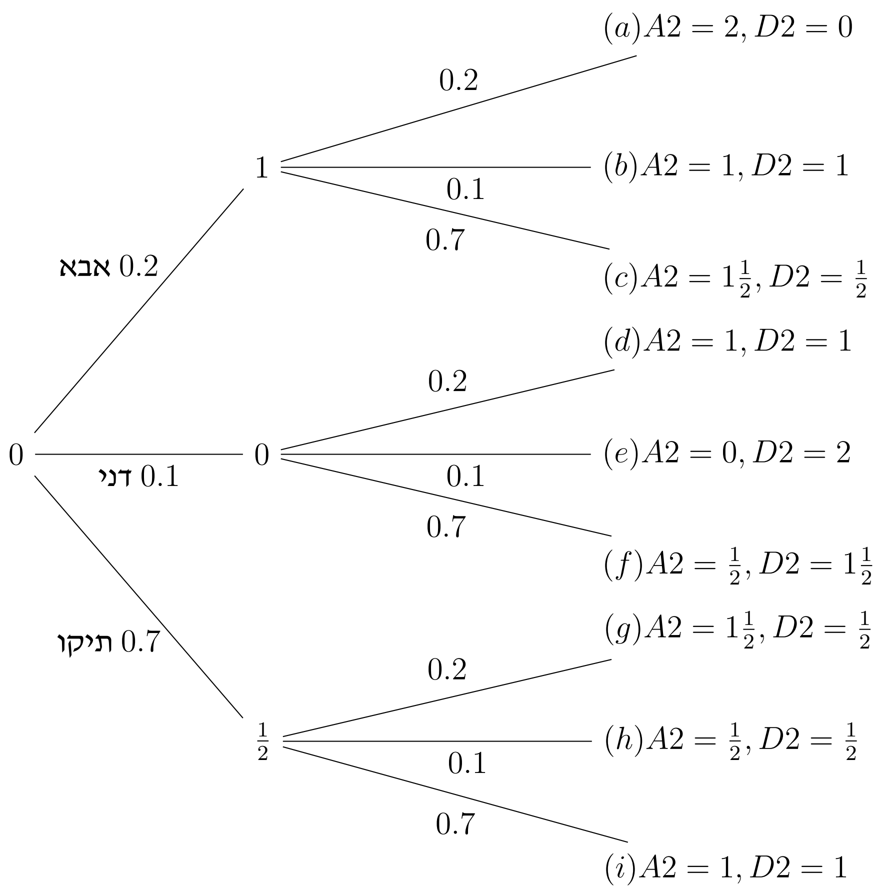
המסלולים בהם דני צבר לפחות נקודה אחת הם (b), (d), (e), (f), (h), (i) וההסתברות היא:

$$P(D2 \geq 1) = 0.2 \cdot 0.1 \,+\, 0.1 \cdot 0.2 \,+\, 0.1 \cdot 0.1 \,+\, 0.1 \cdot 0.7 \,+\, 0.7 \cdot 0.1 \,+\, 0.7 \cdot 0.7 \,=\, 0.68\,.$$

סעיף ג

הניסוח "ידוע" מכוון להסתברות מותנית, אבל $D1 \cup T1 \subseteq D2 \geq 1$ ולכן:

$$\begin{aligned} P((D1 \cup T1)/D2 \geq 1) &= \frac{P((D1 \cup T1) \;\cap\; D2 \geq 1)}{D2 \geq 1} \\ &= \frac{P(D1 \cup T1)}{D2 \geq 1} \\ \frac{0.1 \cdot 0.7 \,+\, 0.7 \cdot 0.1}{0.68} &= \frac{7}{34} = 0.2059\,, \end{aligned}$$



כי המסלולים המתאימים הם (f), (h).

סעיף ד

נשמתמש בנוסחת ברנולי כי למצוא את ההסתברות לבדיוק פעמיים :

$$\binom{4}{2}P(D2)^2\ (1-P(D2)^2 = \binom{4}{2}(0.32)^2(0.68)^2 = 0.2841\ .$$

31 חורף תשע"ד

בעיר מסוימת יש תושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, יש תושבים המשתתפים

בחוג לתאטרון ויש תושבים המשתתפים בשני החוגים.

נמצא כי המאורע "תושב העיר משתתף בחוג לריקודי עם"

והמאורע "תושב העיר משתתף בחוג לתאטרון" הם מאורעות בלתי תלויים.

מספר התושבים שמשתתפים בחוג לריקודי עם גדול פי 2 ממספר התושבים שמשתתפים

בחוג לתאטרון.

מבין התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון, 60% משתתפים בחוג לריקודי עם.

א. מהו אחוז התושבים בעיר שמשתתפים בחוג לריקודי עם וגם בחוג לתאטרון?

ב. יום אחד נערך בעיר כנס שהשתתפו בו כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, ורק הם.

עיתונאי ראיין 6 משתתפים בכנס שנבחרו באקראי.

מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם משתתפים בחוג לתאטרון?

נסמן ב-T ‏(theatron) את המשתתפים בתאטרון ונסמן ב-R ‏(rikudei) את המשתתפים בריקודי עם.
המילה "מבין" מכוונת להתסברות מותנית. ההסתברויות הן של זוגות של מאורעות ולכן נשתמש בטבלה.
נתון $P(R/T)=0.6$ ושהאירועים בלתי תלויים. נחשב:

$$P(R/T)=\frac{P(R\cap T)}{P(T)}=\frac{P(R)\cdot P(T)}{P(T)}=P(R)=0.06\,.$$

ביחד עם הנתון $P(R)=2P(T)$ נתחיל למלא את הטבלה:

	T	$\overline{T}$	
R			0.60
$\overline{R}$			0.40
	0.30	0.70	1.0

שוב נסתמך על העובדה שהאירועים בלתי תלויים ונקבל:

$$P(R\cap T)=P(R)\cdot P(T)=0.60\cdot 0.30=0.18\,,$$

וניתן למלא את הטבלה לפי הסתברויות משלימות:

	$\overline{T}$	T	
0.60	0.42	0.18	R
0.40	0.28	0.12	$\overline{R}$
1.0	0.70	0.30	

סעיף א

$P(R \cap T) = 0.18$.

סעיף ב

הניסוח "כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, ורק הם" מכוונות להסתברות מותנית:

$$P(T/R) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)} = \frac{P(T)P(R)}{P(R)} = P(T) = 0.30\,.$$

כדי לחשב "לפחות שניים" נשתמש בנוסחת ברנולי ונחשב את המשלים ל-"אפס או אחד":

$$P(T \geq 2/R) = 1 - \binom{6}{0}(0.3)^0(0.7)^6 - \binom{6}{1}(0.3)^1(0.7)^5 = 0.5798\,.$$

המלצות

- קרא בזהירות את השאלות. לעתים הן ארוכות (בחינות של קיץ תשע״ה א, קיץ תשע״ח ב) וחשוב להבין את המשמעות של כל פסקה.

- כמעט כל הבחינות מכילות שאלות על **הסתברות מותנית**. ניסוחים רבים מכוונים להסתברות מותנית וחשוב להכיר אותם!

  – הניסוח השכיח ביותר משתמש במילים ״**אם ידוע ש-**״ או ״**ידוע כי**״.

  – בבחינה של חורף תשע״ז כתוב ״**אם** . . . , **מהי ההסתברות** . . .״. לא לגמרי ברור שלמילה ״אם״ יש משמעות של ״אם ידוע״, אבל זאת הכוונה.

  – לעתים קרובות (בחינה של קיץ תשע״ה ב) כתוב ״**מה ההסתברות לבחור** . . . **מבין** . . .״.

  – יוצא מן הכלל: בבחינה של קיץ תשע״ו א כתוב ״**מבין** כל הנבחנים״. המילה ״מבין״ בדרך כלל מכוונת להסתברות מותנית, אבל כאשר ״מבין״ מתייחס ל-״**כל** הנבחנים״, אין הסתברות מותנית. לחילופין אפשר לחשב הסתברות מותנית בהסתברות שהיא 1 והחיתוך מצטמצם:

$$P(X/\text{כל הנבחנים}) = \frac{P(X \cap \text{כל הנבחנים})}{P(\text{כל הנבחנים})} = \frac{P(X)}{1} = P(X)\,.$$

  מצב דומה מופיע בבחינה של קיץ תשע״ד ב (״בוחרים באקראי תלמיד י״ב (בן/בת)״), ובבחינה של קיץ תשע״ח ב (״מן התלמידים שנגשו למבחן״).

  – בבחינה של קיץ תשע״ח א הניסוח הוא: ״$n\%$ נעזרו בחבריהם (נקרא לאירוע A) ו-$\frac{k}{n}$ **מהם** עברו את הבחינה״ (נקרא לאירוע B). ברור ש-$P(B \cap A) = k$, אבל נבדוק לפי הנוסחה להסתברות מונתית:

$$\begin{aligned} P(B/A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{n} = \frac{k}{n} \\ P(B \cap A) &= k\,. \end{aligned}$$

  – בבחינה של חורף תשע״ד יש ניסוח אחר: **כל התושבים המשתתפים ב-** . . ., **ורק הם**.

- כאשר יש חיתוך בחישוב של הסתברות מותנית, לעתים קרובות ניתן לפשט את החישוב. בבחינה של קיץ תשע״ז א יש לחשב $P(D = 4 \cap D \geq 3)$, אבל אם ערך גדול או שווה 3 **וגם** שווה ל-4, אז הוא שווה ל-4, ולכן מספיק לחשב $P(D = 4)$.

- אם שני אירועים בלתי תלויים, חישוב ההסתברות המותנית מצטמצם:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B)\,.$$

  מצב זמ מופיע בבחינות של חורף תשע״ז, חורף משע״ח, קיץ תשע״ה א, חורף תשע״ד.

- המילה **בדיוק** מכוונת לחישוב אחד של נוסחת ברנולי, כי נתון כמה "הצלחות" צריכות להיות וגם כמה "כשלונות". מקרה מעניין נמצא בבחינה של קיץ תשע"ח ב כאשר נתון שההסתברות לקבל 60 שווה להסתברות לקבל 100. נתון גם שיש שלוש הצלחות מתוך חמש (20 נקודות כל אחת), אז ההסתברות לקבל שני כשלונות (20 נקודות כל אחת) צריכה להיות שווה להסתברות לקבל שתי הצלחות (20 נקודות כל אחת).

- בבחינה של קיץ תשע"ז א כתוב "**בוחרים באקראי** ..., **עד של-** 3 מהם **בדיוק** יש קלנועית". המשמעות של "עד ש-" היא שמפסיקים את הבחירה האקראית כאשר הבחירה **האחרונה** היא "הצלחה". במקרה זה נשארו שתי "הצלחות" שיש לחשב את ההסתברות שלהן לפי נוסחת ברנולי, ואז להכפיל בהסתברות של "הצלחה" בבחירה האחרונה:

$$\overbrace{\pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \pm}^{2/5}\qquad \overbrace{+}^{1/1}\ .$$

- בבחינה של קיץ תשע"ז ב הביטוי "מוציאים באקראי ...", ובהמשך הביטוי "מוציאים באקראי **שוב** ..." מכוון לשימוש בעץ כדי לתאר את הבחירה הסדרתית.

- בבחינה של קיץ תשע"ח א, המשמעות של הניסוח "**לפחות אחת** משתי הטענות I, II היא שהאירוע קורה אם קורה אחד מהאירועים I, II **או שניהם**, המסומן $\mathrm{I} \cup \mathrm{II}$. יש שתי דרכים לחשב את ההסתברות: על ידי חיבור ההסתברות של שני האירועים וחיסור האירוע המשותף כדי לקזז את הספירה הכפולה, או לחבר את האירוע המשותף עם האירועים של אחד ולא השני המסומן $\mathrm{I}-\mathrm{II}$, $\mathrm{II}-\mathrm{I}$:

$$\begin{aligned} P(\mathrm{I}\cup\mathrm{II}) &= P(\mathrm{I})+P(\mathrm{II})-P(\mathrm{I}\cap\mathrm{II}) \\ P(\mathrm{I}\cup\mathrm{II}) &= P(\mathrm{I}-\mathrm{II})+P(\mathrm{II}-\mathrm{I})+P(\mathrm{I}\cap\mathrm{II})\,. \end{aligned}$$

- בבחינה של קיץ תשע"ח ב יש לחשב את ההסבתרות של תשובה נכונה **לכל** ($k=n$) השאלות או תשובה נכונה **לאף אחת** ($k=0$) מהשאלות, כאשר ההסתברות לתשובה נכונה אחת היא p. אין צורך להשתמש בנוסחת ברנולי הכללית:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\,.$$

אם $k=0$, $\binom{n}{0}=1$, ואז הנוסחה מצטמצמת ל-$p^0(1-p)^{n-0}=(1-p)^n$.

אם $k=n$, $\binom{n}{n}=1$, ואז הנוסחה מצטמצמת ל-$p^n(1-p)^{n-n}=p^n$.

- בבחינות של קיץ תשע"ו א, ב יש שלוש תוצאות לפעולה במקום שתיים. סכום ההסתברויות חייב להיות אחד, ולכן כאשר מחשבים משלים להסתברות אחת, יש להחסיר את שתי ההסתברויות האחרות. בבחינה של מועד ב, ההסתברות לתיקו היא אחד פחות ההסתברות שיעל תנצח פחות ההסתברות אנה תנצח:

$$P(\text{תיקו}) = 1-(P(\text{יעל})+P(\text{אנה})) = 1-P(\text{יעל})-P(\text{אנה})\,.$$

- במספר בחינות)חורף תשע״ה, קיץ תשע״ד ב, קיץ תשע״ה ב(כתוב ״ישוב גדול״, ״עיר גדולה״, ״אוניברסיטה גדולה״. אני מניח שבמילה ״גדול״ מבטיחה שאפשר לבחור תושבים או סטודנטים כפי שדרוש בשאלות. אין משמעות לבחור ארבעה סטודנטים אם יש רק שניים.

- לא תמיד רשום באופן מפורש שמאורעות בלתי-תלויות הם בלתי תלויות. **דוגמה!!** מומלץ לרשום בפתרון ״נניח שהמאורעות בלתי-תלויות״.

- בשאלות עם הסתברות מותנית:

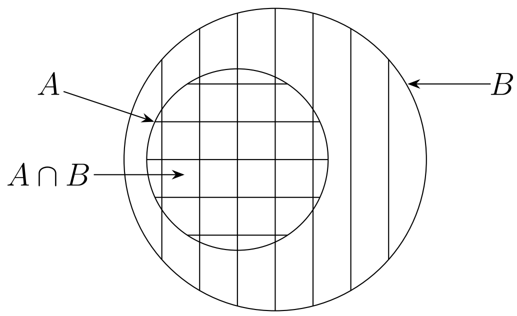
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

השאלה עולה איך לחשב $P(A \cap B)$. בחלק גדול מהמקרים ניתן לראות ש-$A \subseteq B$ ולכן החישוב הוא פשוט:

$$P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)}\,.$$

דוגמה!!

שימו לב שאם $A \subseteq B$ אזי $A \cap B = A$ ולא להיפך. ניתן להשתכנע באמצעות תרשים Venn.



- אם נתון יחס בין ההסתברות של מאורע וההסתברות של המשלים למאורע אפשר לחשב את ההסתברויות:

$$\begin{aligned} P(X) &= 4P(\overline{X}) \\ P(X) &= 4(1 - P(X)) \\ P(X) &= 1/5\,. \end{aligned}$$