בחינות בגרות בהסתברות

מוטי בן-ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

גרסה 1.0

21 בדצמבר 2022

תוכן העניינים

מבוא

חוברת זו מבוסס על הספר "בחינות בגרות במתמטיקה" כוללת פתרונות לכל השאלות בבחינות הבגרות שאלון $806/581$ מהשנים תשע"ד עד תשע"ח. החוברת כולל רק פתרונות לשאלות בהסתברות שעברו שיכתוב כדי לשפר הצגת בפרתונות. כמו כן, יתווספו פתרונות לשאלות מהשנים האחרונות. הדגשים בפתרונות הם:

- זיהוי מוקפד של המאורעות.
- סימון תואם את השאלה כדי להקל על הקשר בין השאלה והחישובים, למשל, T, R כדי לסמן משתתפים בחוג תיאטרון וחוג ריקוד במקום A, B.
- הנמקה של בחירת שיטות לחישוב ולהצגת החישוב: עץ, טבלה, ברנולי, הסתברות מותנית. במיוחד חשוב ללמוד לפרש את הניסוחים הרבים המכוונים להסתברות מותנית.

בסוף החוברת נמצא סעיף "המלצות" המסכם לקחים מהפתרונות.

החוברת מופצת עם רישיון המאפשר העתקה חופשית וכן הכנת גרסאות חדשות ובתנאי שנשמר שם המחבר והגרסאות מופצות עם אותו רישיון.

ניתן להוריד את המסמכים ב-PDF וכן את קוד המקור ב-LaTeX מ:

https://github.com/motib/bagrut.

1 קיץ תשע״ח מועד ב

במבחן רב־ברירה (״אמריקני״) יש 5 שאלות.

לכל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.

התלמידים צריכים לסמן תשובה אחת מבין 4 התשובות המוצגות.

תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאלה מקבל 20 נקודות לשאלה זו.

תלמיד שמסמן תשובה לא נכונה על השאלה אינו מקבל נקודות לשאלה.

כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכול.

א. על 2 מן השאלות ידע שחר בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בשאר השאלות הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.

(1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

(2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?

ב. על 2 מן השאלות ידע דניאל בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בוודאות שתשובה אחת, מבין 4 התשובות המוצגות, אינה נכונה,

ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

ג. על 3 מן השאלות ידעה הדס בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימנה אותן.

בכל אחת משתי השאלות האחרות היא ידעה בוודאות ש־ k מבין 4 התשובות המוצגות אינן נכונות, וסימנה

באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיוק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות שהיא תצבור 100 נקודות במבחן.

מצא את k . נמק.

המאורעות הם מספר הנקודות הצברות על ידי התלמידים.

השאלה מתארת הצלחות וכשלונות במתן לתשובות על המבחן ושואלת על מספר ההצלחות והכשלונות. לכן הפתרון ישתמש בנוסחת ברנולי.

סעיף א

1. שחר ידע שהוא ענה נכון על שתי שאלות ולכן כדי לקבל ציון 60 עליו לענות על בדיוק אחת משלושת השאלות האחרות. ההסתברות לענות נכון על שאלה היא $\frac{1}{4}$ ולפי נוסחת ברנולי:

$$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}\,.$$

2. כדי לעבור את המבחן עליו לצבור לפחות שלוש תשובות נכונות. להסתברות מהסעיף הקודם יש להוסיף את ההסתברויות של ארבע וחמש תשובות נכונות:

$$\frac{27}{64}+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1+\binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{37}{64}\,.$$

סעיף ב

דניאל צריך לענות נכון על שאלה אחת בדיוק מתוך שלושת השאלות הנותרות. דניאל ידע שתשובה אחת לא נכונה, לכן ההסתברות שהוא ענה נכון על השאלה היא $\frac{1}{3}$ ולא $\frac{1}{4}$ כמו בסעיף הקודם:

$$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}\,.$$

סעיף ג

תהי p_k ההסתברות שהדס ידעה וודאות ש-k מתוך 4 תשובות לא נכונות. ההסתברות שהיא שהיא צריכה לבחור תשובה באופן אקראי היא המשלים $1 - p_k$. כדי לקבל ציון 60 היא צריכה לענות נכון על אפס מתוך שתי השאלות הנוספות וכדי לקבל ציון 100 היא צריכה לענות נכון על כל השאלות הנכונות. נשווה את שתי ההסתברויות המתקבלות מנוסחת ברנולי:

$$\begin{aligned}
\binom{2}{0}p_k^0(1-p_k)^2 &= \binom{2}{2}p_k^2(1-p_k)^0\\
(1-p_k)^2 &= p_k^2\\
p_k &= \frac{1}{2}\,,
\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו ב-$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ ו-$p^0 = (1-p)^0 = 1$.

ההסתברות שהיא ענתה תשובה נכונה לשאלה אחת היא $p_k = \dfrac{1}{4-k}$ ולכן $k = 2$.

פתרון שני

אם לא היינו מגדירים את הסימון p_k היינו מקבלים מפישוט השוויון של נוסחאות ברנולי:

$$\left(\frac{1}{4-k}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{4-k}\right)^2 = \left(\frac{3-k}{4-k}\right)^2\,.$$

נכפיל את שני הצדדים של המשוואה ב-$(4-k)^2$ ונקבל את המשוואה ריבועית $k^2 - 6k + 8 = 0$ שפתרונותיה הם $k = 2, k = 4$. הפרמטר k מוגדר כמספר התשובות שהדס יודעת שהן אינן נכונות, ונתון שתשובה אחת נכונה, כך שיש לפסול את הפתרון $k = 4$ ולבחור $k = 2$.

האפשרות השנייה היא לקחת שורש של שני הצדדים ונקבל שתי משוואות:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4-k} &= +\frac{3-k}{4-k}\\
\frac{1}{4-k} &= -\frac{3-k}{4-k}\,.
\end{aligned}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $k = 2$. מהמנה של המשוואה השנייה נקבל $k = 4$ ונפסול אותו כי הוא מאפס את המכנה.

כל הפתרונות מגיעים לתשובה הנכונה אבל בחירה נכונה של סימון וסדר החישובים יכולים להשפוע על פשטות הפתרון.

2 קיץ תשע״ח מועד א

בעיר גדולה נערך מבחן לכל תלמידי התיכון.

37% מן התלמידים שניגשו למבחן נעזרו בחבריהם כדי להתכונן למבחן. $\frac{35}{37}$ מהם עברו את המבחן.

מספר התלמידים שלא נעזרו בחבריהם ולא עברו את המבחן קטן פי 5 ממספר התלמידים שנעזרו בחבריהם ועברו את המבחן.

א. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן, והתברר שהוא לא עבר את המבחן. מהי ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?

ב. יעל והדס ניגשו למבחן. ידוע שיעל נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן, והדס לא נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן. האם ההסתברות שיעל עברה את המבחן גבוהה מההסתברות שהדס עברה את המבחן? נמק.

ג. בחרו באקראי 6 תלמידים שניגשו למבחן.

מהי ההסתברות שבדיוק שליש מהם לא נעזרו בחבריהם ועברו את המבחן?

ד. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן. מהי ההסתברות שהוא מקיים לפחות אחת משתי הטענות I-II :

I) התלמיד נעזר בחבריו.

II) התלמיד לא עבר את המבחן.

מצאתי שניסוח השאלה מבלבל. כאשר כתוב ש-37% מן התלמידים ניגשו למבחן, הנטייה היא לפרש את זה כ-37 מתוך 100 תלמידים, כאשר אחוז למעשה מבטא יחס :

$$37\% = \frac{37}{100} = \frac{74}{200} = \frac{18.5}{50} = \cdots .$$

המשפט הבא קובע ש-$\frac{35}{37}$ ״מהם״ עברו את המבחן ואפשר לחשוב שמדובר ב-35 מתוך 37 תלמידים, אולם שוב מדובר ביחס. בשני המקרים יחס הוא הסתברות.

נסמן ב-N (ne-ezru) את התלמידים שנעזרו בחבריהם, וב-A (avru) את התלמידים שעברו את המבחן. המאורעות מורכבים משתי קבוצות הללו, משלימהם וחיתוכים שלהם, לכן נבחר היעזר בטבלה כדי לייצג את הנתונים. לפני שניגש לפתור את השאלות בסעיפים, נמלא את טבלת ההסתברויות לפי המידע הנתון.

בניית הטבלה

נתון ש-$P(N) = \frac{37}{100}$. השימוש במילה ״**מהם**״ מכוון להסתברות מותנית כך ש :

$$P(A/N) = \frac{35}{37}$$

ולכן :

$$\begin{aligned} P(A/N) &= \frac{P(N \cap A)}{P(N)} \\ P(N \cap A) &= P(A/N) \cdot P(N) = \frac{35}{37} \cdot \frac{37}{100} = \frac{35}{100} = 0.35 . \end{aligned}$$

נשתמש במשלימים להסתברויות ונקבל :

	$\overline{A}$	A	
0.37	0.02	0.35	N
0.63			$\overline{N}$
1.0			

בהמשך נתון ש:

$$P(\overline{N}\cap\overline{A})=\frac{P(N\cap A)}{5}=\frac{0.35}{5}=0.07\,,$$

וניתן להשלים את הטבלה:

	$\overline{A}$	A	
0.37	0.02	0.35	N
0.63	0.07	0.56	$\overline{N}$
1.0	0.09	0.91	

סעיף א

הניסוח ״בחרו . . . תלמיד . . . שלא עבר את המבחן. מה ההסתברות **שהוא** נעזר בחבריו?״ מכוון להסתברות מותנית:

$$P(N/\overline{A})=\frac{P(N\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{0.02}{0.09}=\frac{2}{9}\,.$$

סעיף ב

הניסוח **״ידוע ש״** מכוון להסתברות מותנית.

עבור יעל ההסתברות המותנית היא:

$$P(A/N)=\frac{P(A\cap N)}{P(N)}=\frac{0.35}{0.37}=0.9459\,,$$

ועבור הדס ההסתברות המותנית היא:

$$P(A/\overline{N})=\frac{P(A\cap\overline{N})}{P(\overline{N})}=\frac{0.56}{0.63}=0.8889\,.$$

ליעל הסתברות גבוהה יותר לעבור את המבחן.

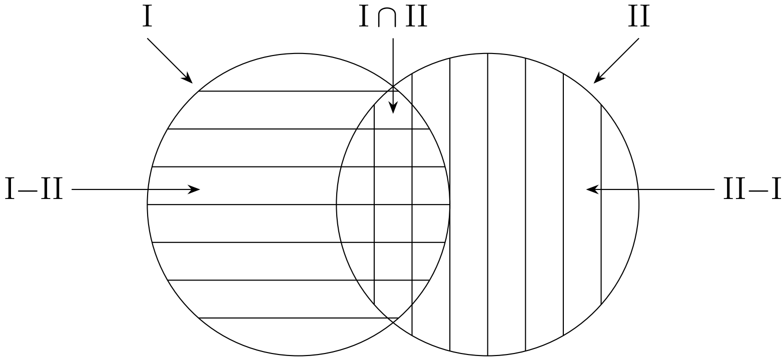
סעיף ג

שליש (לא שלושה!) של שש הוא שניים. המילה "בדיוק" מכוון לנוסחת ברנולי הערך $P(\overline{N} \cap A) = 0.56$ נמצא בטבלה ולפי נוסחה ברנולי ההסתברות היא:

$$\binom{6}{2}(0.56)^2(1-0.56)^4 = 0.1763\,.$$

סעיף ד

הניסוח "**לפחות אחת**" משתי הטענות I, II אומר שמאורע מורכב משני המאורעות I, II או משניהם. בתרשים להלן שני העגולים המייצגים את שני המאורעות I, II כאשר המאורע "לפחות אחת" מיוצג על ידי כל השטח המקווקו:



יש שתי דרכים לחשב את ההסתברות. בדרך הראשונה אנו לוקחים את סכום ההסתברויות של שני המאורעים, ומחסירים את ההסתברות של המאורע המשותף כי ספרנו אותו פעמיים, פעם כחלק מהמאורע I ופעם כחלק מהמאורע II:

$$P(\mathrm{I} \cup \mathrm{II}) = P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) - P(\mathrm{I} \cap \mathrm{II})\,.$$

בדרך השניה אנו סופרים כל חלק מהמאורע השותף בנפרד, כאשר הסימון I-II הוא כל האיברים בקבוצה I שאינם בקבוצה II ולהיפך:

$$P(\mathrm{I} \cup \mathrm{II}) = P(\mathrm{I}\ -\ \mathrm{II}) + P(\mathrm{II}\ -\ \mathrm{I}) + P(\mathrm{I} \cap \mathrm{II})\,.$$

את ההסתברויות לחישוב ניקח מהטבלה. הדרך הראשונה מופיעה מימין והדרך השניה משמאל:

	$\overline{A}$	A	
0.37	0.02	0.35	N
0.63	0.07	0.56	$\overline{N}$
1.0	0.09	0.91	

	$\overline{A}$	A	
0.37	0.02	0.35	N
0.63	0.07	0.56	$\overline{N}$
1.0	0.09	0.91	

בשתי הדרכים מקבלים אותה תוצאה:

$$\begin{aligned} P(N \cup \overline{A}) &= P(N) + P(\overline{A}) - P(N \cap \overline{A}) = 0.37 + 0.09 - 0.02 = 0.44 \\ P(N \cup \overline{A}) &= P(N - \overline{A}) + P(\overline{A} - N) + P(N \cap \overline{A}) = 0.35 + 0.07 + 0.02 = 0.44\,. \end{aligned}$$

3 חורף תשע"ח

למיכל יש קובייה מאוזנת. על שלוש מפאות הקובייה שלה כתוב המספר 2, ועל שלוש הפאות האחרות כתוב המספר 4.

לגלית יש קובייה מאוזנת אחרת. על כל אחת מפאות הקובייה של גלית כתוב אחד מן המספרים: 1 או 3.

מיכל וגלית משחקות משחק בן חמישה סיבובים. המשתתפת שתנצח במספר סיבובים רב יותר מחברתה, תנצח במשחק. בכל סיבוב של המשחק כל אחת מהן מטילה את הקובייה שלה פעם אחת.

המנצחת בסיבוב היא השחקנית שהמספר שהתקבל על הקובייה שלה גבוה יותר.

נתון שבסיבוב יחיד הסיכוי של מיכל לנצח את גלית הוא $\frac{7}{12}$.

א. על כמה פאות בקובייה של גלית כתוב המספר 1? נמק את תשובתך.

ב. מהו הסיכוי שגלית תנצח במשחק?

ג. מהו הסיכוי של גלית לנצח במשחק, אם ידוע שהיא ניצחה בסיבוב הראשון?

סעיף א

נסמן ב-n את המספר הפאות של הקוביה של גלית שכתוב עליהן 1. מאורע אחד הוא שמיכל תנצח כי היא מטילה 4 בהסתברות $\frac{3}{6}$ לא משנה מה גלית מטילה. מאורע שני הוא שמיכל תנצח כי היא מטילה 2 בהסתברות $\frac{3}{6}$ וגלית מטילה 1 בהסתברות $\frac{n}{6}$. המאורעות זרים זה לזה ולכן:

$$\begin{aligned} P(\text{מיכל תנצח}) &= \frac{3}{6}\cdot 1+\frac{3}{6}\cdot\frac{n}{6}=\frac{7}{12} \\ n &= 1\,. \end{aligned}$$

סעיף ב

גלית תנצח אם היא תנצח ב-$3,4,5$ סיבובים. נשתמש בנוסחת ברנולי כדי לקבל את ההסתברות כתלות של ההסתברות של גלית לנצח בסיבוב אחד שהיא המשלים להסתברות שמיכל תנצח $1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$:

$$P(\text{גלית תנצח})=\binom{5}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{7}{12}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\frac{5}{12}\right)^4\left(\frac{7}{12}\right)^1+\binom{5}{5}\left(\frac{5}{12}\right)^5\left(\frac{7}{12}\right)^0=0.3466\,.$$

סעיף ג

הניסוח **אם ידוע** מכוון להסתברות מותנית. נסמן ב-G את המאורע שגלית תנצח במשחק וב-R את המאורע שהיא תנצח בסיבוב הראשון:

$$P(G/R)=\frac{P(G\cap R)}{P(R)}\,.$$

כדי שגלית תנצח במשחק וגם בסיבוב הראשון, היא חייבת לנצח בסיבוב הראשון וגם ב-2 או 3 או 4 מהסיבובים הנותרים:

$$\begin{aligned} P(G\cap R) &= \frac{5}{12}\left[\binom{4}{4}\left(\frac{5}{12}\right)^4\left(\frac{7}{12}\right)^0+\binom{4}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{7}{12}\right)^1+\binom{4}{2}\left(\frac{5}{12}\right)^2\left(\frac{7}{12}\right)^2\right] \\ &= \frac{5}{12}\cdot 0.5534\,. \end{aligned}$$

כבר חישבנו ש-$P(R)=\frac{5}{12}$ ולכן $P(G/R)=0.5534$.

4 קיץ תשע"ז מועד ב

בקופסה I יש 10 כדורים, כמה מהם כחולים והשאר אדומים,

ובקופסה II יש 7 כדורים כחולים ו־ 3 כדורים אדומים.

מוציאים באקראי כדור מקופסה I. אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II.

אם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I.

שוב מוציאים באקראי כדור מקופסה I, ושוב, אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II,

ואם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I.

לאחר מכן מוציאים באקראי כדור אחד מקופסה II.

א. נתון כי ההסתברות שאחרי שתי ההוצאות מקופסה I יועבר כדור אדום אחד בלבד מקופסה I לקופסה II היא $\frac{19}{36}$.

חשב את מספר הכדורים הכחולים שהיו בקופסה I לפני ההוצאה הראשונה.

ענה על הסעיפים ב-ג עבור מספר הכדורים הכחולים שחישבת בסעיף א.

ב. מהי ההסתברות שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום?

ג. ידוע שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום.

מהי ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II נשארו בה שלושה כדורים אדומים בדיוק?

הניסוח "מוציאים באקראי . . . **ולאחר מכן** שוב מוציאים באקראי" מכוונן לשימוש בעץ. נסמן ב-b את מספר הכדורים הכחולים בקופסה I. בתרשים (בעמוד הבא) בכל צומת רשום שני זוגות של מספרים: למעלה רשום מספר הכדורים האדומים ומספר הכדורים הכחולים בקופסה I ומתחתיו מספר הכדורים האדומים ומספר הכדורים הכחולים בקופסה II. על הקשתות רשום צבע הכדור שנשלף ומתחתיו ההסתברות לשלוף את הצבע. למשל, בקשת הראשונה נשלף כדור אדום וההסתברות היא מספר הכדורים האדומים $10-b$ חלקי מספר הכדורים בקופסה $10 = (10-b)+b$.

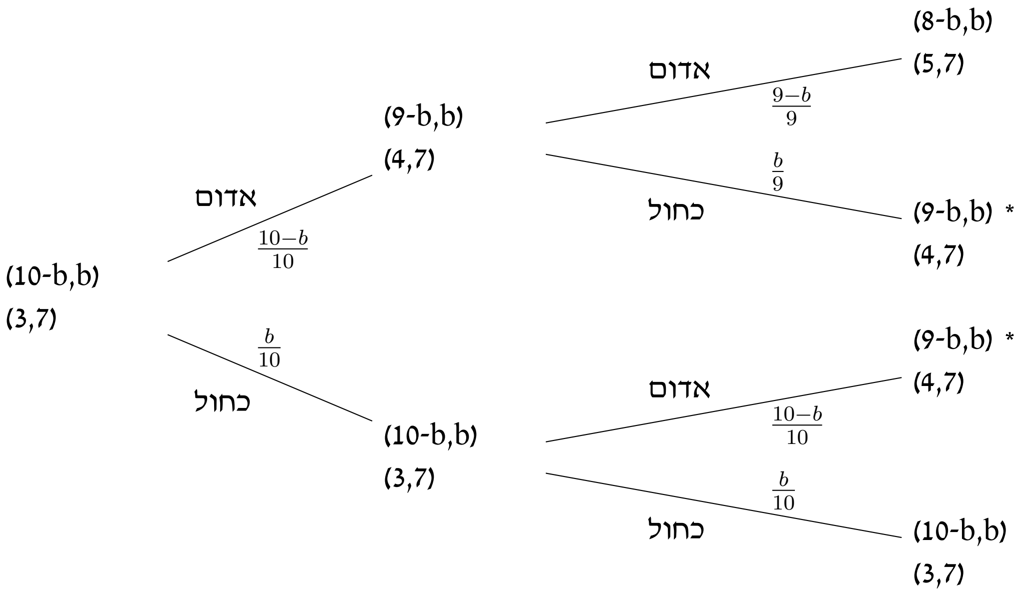
סעיף א

הכוכביות בתרשים מסמנות את שני המסלולים המגיעים למאורע המבוקש $R1$: שנשלף כדור אדום אחד בדיוק מקופסה I. שתי השליפות הן זרות זו לזו ולכן ההסתברות היא סכום ההסתברות לאורך כל אחד מהמסלולים, והסתברות זו נתונה בשאלה:

$$P(R1) = \frac{10-b}{10}\cdot\frac{b}{9} + \frac{b}{10}\cdot\frac{10-b}{10} = \frac{19}{36}\,.$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית $b^2-10b+25=0$ שיש לה פתרון אחד $b=5$.

סעיף ב



מהמידע הרשום בצד הימיני של התרשים אפשר לראות שמספר הכדורים האדומים שנמצאים בקופסה II הם: $5,4,4,7$. נסכם את ההסתברויות של המאורע $P(R2)$, לשלוף כדור אדום מקופסה II, לאורך כל אחד מהמסלולים כאשר קודם נציב $b=5$ שמצאנו לעיל:

$$\begin{aligned} P(R2) &= \left(\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\right)\left(\frac{5}{12}\right)+\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{11}\right)+ \\ &\quad \left(\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\right)\left(\frac{4}{11}\right)+\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)=0.3595\,. \end{aligned}$$

סעיף ג

הניסוח "**ידוע ש-**" מכוון להסתברות מותנית. המאורע החדש הוא $P(R3)$: נשארו שלושה כדורים אדומים בקופסה II:

$$P(R3/R2)=\frac{P(R3\cap R2)}{P(R2)}\,.$$

את $P(R2)$ חישבנו בסעיף הקודם.

נשארו שלושה כדורים אדומים רק אם היו ארבעה כדורים אדומים לפני הבחירה, מאורע $R4$. ההסתברות $P(R4)$ למעשה נתונה $\frac{19}{36}$, והיא ההסתברות להגיע לאחד המצבים המסומנים בכוכבית. מכאן שההסתברות של $P(R3)$ היא ההסתברות להגיע לאחד מהמצבים כפול ההסתברות לשלוף כדור אדום במצב זה:

$$P(R3)=P(R4)\cdot\tfrac{4}{11}\,.$$

ההסתברות המותנית הדרושה היא:

$$P(R3/R2)=\frac{\frac{19}{36}\cdot\frac{4}{11}}{0.3595}=0.53385\,.$$

5 קיץ תשע״ז מועד א

בבית אבות גדול יש לכמה מן הדיירים קלנועית, ולשאר אין.

אם בוחרים באקראי 9 דיירים מבית האבות הזה, ההסתברות שלְ־ 4 מהם בדיוק

יש קלנועית גדולה פי 24 מן ההסתברות שלְ־ 6 מהם בדיוק יש קלנועית.

א. מהי ההסתברות שלדייר שנבחר באקראי יש קלנועית?

ב. בוחרים באקראי 6 דיירים מבית האבות. ידוע שלפחות ל־ 3 מהם יש קלנועית.

מהי ההסתברות שלְ־ 4 מהם בדיוק יש קלנועית?

ג. בוחרים באקראי דיירים מבית האבות, בזה אחר זה, עד שלְ־ 3 מהם בדיוק יש קלנועית.

מהי ההסתברות שייבָּחרו בדרך זו בדיוק 6 דיירים?

סעיף א

נסמן ב-D את המאורע ״לדייר יש קלנועית״ ונסמן $P(D) = p$. לפי ניסוח השאלה הצלחה היא בחירת דייר עם קלנועית ונמסר מידע על ״בדיוק״ מספר ההצלחות, ולכן נשמתש בנוסחת ברנולי לכדי לקבל משוואה במשתנה p:

$$\begin{aligned}\binom{9}{4}p^4(1-p)^5 &= 24\binom{9}{6}p^6(1-p)^3\\ \frac{1}{4}(1-p)^2 &= \frac{24}{6}p^2\\ 15p^2+2p-1 &= 0\\ p &= \frac{1}{5} = 0.2\,,\end{aligned}$$

כאשר השורש $-\frac{1}{3}$ אינו יכול להיות פתרון כי הסתברות חייבת גדול או שווה לאפס.

סעיף ב

נסמן ב-N את המאורע של ״מספר הדיירים שיש להם קלנועית״. הניסוח ״**ידוע ש-**״ מכוון להסתברות מותנית:

$$P(N=4/N\geq 3) = \frac{P(N=4\cap N\geq 3)}{P(N\geq 3)}\,.$$

כאשר קבוצה אחת בחיתוך היא תת-קבוצה של השנייה, אפשר לפשט את החיתוך ולהשתמש רק בקבוצה הקטנה יותר. ברור שאם N גדול או שווה ל-3 **וגם** N שווה ל-4 אז N שווה ל-4:

$$P(N=4/N\geq 3) = \frac{P(N=4)}{P(N\geq 3)}\,.$$

לפי נוסחת ברנולי:

$$P(N=4) = \binom{6}{4}0.2^4(1-0.2)^2 = 0.01536\,.$$

המונה $P(N \geq 3)$ אפשר לחשב בשתי דרכים. בצורה ישירה:

$$\begin{aligned} P(N \geq 3) &= \binom{6}{3} 0.2^3 (1-0.2)^3 + \binom{6}{4} 0.2^4 (1-0.2)^2 + \\ & \binom{6}{5} 0.2^5 (1-0.2)^1 + \binom{6}{6} 0.2^6 (1-0.2)^0 = 0.099\,, \end{aligned}$$

או לפי המשלים:

$$\begin{aligned} P(N \geq 3) = 1 - P(N < 3) &= 1 - 0.2^0 (1-0.2)^6 - \binom{6}{1} 0.2^1 (1-0.2)^5 - \\ & \binom{6}{2} 0.2^2 (1-0.2)^4 = 0.099\,. \end{aligned}$$

התשובה לשאלה היא:

$$P(N = 4 / N \geq 3) = \frac{P(N=4)}{P(N \geq 3)} = \frac{0.01536}{0.099} = 0.15534\,.$$

סעיף ג

הניסוח "**עד ש**" אומר שהבחירה **האחרונה** תהיה "הצלחה" ושיהיו שתי "הצלחות" בחמשת הבחירות הקודמות. נסמן הצלחה ב-$+$ וכישלון ב-$-$ ונסדר את הדרישה בשאלה בשורה:

$$\overbrace{\pm \ \pm \ \pm \ \pm \ \pm}^{2/5} \qquad \overbrace{+}^{1/1}$$

התשובה מתקבלת מנוסחת ברנולי לבחירות הראשונות כפול ההסתברות p לבחירה האחרונה:

$$\left[\binom{5}{2} 0.2^2 (1 - .02)^3 \right] \cdot 0.2 = 0.04096\,.$$

6 חורף תשע"ז

אביגיל משתתפת במשחק של זריקת חִצים למטרה.

הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד הוא P $(P > 0)$, ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים.

כל משתתף זורק 5 זריקות רצופות.

הסיכוי של אביגיל לפגוע במטרה בארבע זריקות מתוך החמש גדול פי 3 מן הסיכוי שלה לפגוע בה בכל חמש הזריקות.

א. מצא את P.

משתתף מנצח במשחק אם מתוך 5 זריקות רצופות, מספר הפגיעות שלו במטרה גדול ממספר ההחטאות שלו (יכול להיות יותר ממנצח אחד במשחק).

ב. מהי ההסתברות שאביגיל תנצח במשחק?

ג. (1) אם אביגיל תחטיא את המטרה בזריקה השנייה, מהי ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

(2) גם תמר משתתפת בַּמשחק, וגם הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד שווה ל- P ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים. תמר החטיאה בזריקה הראשונה.
מה ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

סעיף א

נסמן ב-A את המאורע "אביגיל פוגעת" ונסמן $P(A) = p$. לפי ניסוח השאלה הצלחה היא פגיעה במטרה ונמסר מידע על מספר ההצלחות, ולכן נשמתש בנוסחת ברנולי לכדי לקבל משוואה במשתנה p:

$$\begin{aligned}\binom{5}{4}p^4(1-p)^1 &= 3\binom{5}{5}p^5(1-p)^0\\ 5(1-p) &= 3p\\ p &= \frac{5}{8}.\end{aligned}$$

סעיף ב

נסמן ב-$N5$ את מספר הפגיעות של אביגיל מתוך חמש זריקות. ניצחון שלה היא $N5 \geq 3$ וההסתברות היא:

$$P(N5 \geq 3) = \binom{5}{3}p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4}p^4(1-p)^1 + \binom{5}{5}p^5(1-p)^0.$$

נציב $p = \frac{5}{8}$ ונקבל 0.7248.

סעיף ג (1)

לדעתי ניסוח השאלה לא ברור. אני פירשתי אותה כך: מה ההסתברות של **המאורע** "אביגיל מחטיאה בזריקה השנייה ופוגעת בשלוש או ארבע מהזריקות האחרות"? כותב הבחינה התכוון להסתברות מותנית: "**אם ידוע** שאביגיל החטיאה בזריקה השנייה, מה ההסתברות שהיא פוגעת בשלוש או ארבע מהזריקות האחרות"?

נסמן ב-$T2$ את המאורע שאביגיל מחטיאה בזריקה השנייה, ונסמן ב-$N4$ את מספר הפגיעות שלה מתוך ארבע זריקות. ההסתברות המותנית היא:

$$P(N4 \geq 3/T2) = \frac{P(N4 \geq 3 \cap T2)}{P(T2)} \,.$$

הזריקות לא תלויות אחת בשנייה ולכן:

$$P(N4 \geq 3/T2) = \frac{P(N4 \geq 3) \cdot P(T2)}{P(T2)} = P(N4 \geq 3) \,,$$

ולפי נוסחת ברנולי:

$$P(N4 \geq 3/T2) = P(N4 \geq 3) = \binom{4}{4} \left(\frac{5}{8}\right)^4 \left(\frac{3}{6}\right)^0 + \binom{4}{3} \left(\frac{5}{8}\right)^3 \left(\frac{3}{8}\right)^1 = 0.5188 \,.$$

סעיף ג (2)

ההסתברות של תמר לפגוע זהה להסתברות של אביגיל לפגוע ולכן ניתן להשתמש בתוצאות שכבר חישבנו. גם לא משנה איזו זריקה החטיאה כי הזריקות בלתי תלויות, ולכן לפי סעיף ג (1) ההסתברות של תמר לנצח היא גם 0.5188.

7 קיץ תשע"ו מועד ב

שחמט הוא משחק בין שני שחקנים שיכול להסתיים בניצחון של אחד מהם או בתיקו.

יעל ואנה משחקות זו מול זו בטורניר שחמט בשני סבבים.

ההסתברות של כל אחת מן השחקניות לנצח במשחק בודד היא קבועה בכל הטורניר.

א. בסבב הראשון יש 4 משחקים. ההסתברות שיעל תנצח ב־ 2 משחקים
או ב־ 3 משחקים גדולה פי 10 מן ההסתברות שיעל תנצח ב־ 4 משחקים.
חשב את ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד.

בסבב השני יש 2 משחקים.

ההסתברות שתוצאת הסבב השני תהיה שוויון — היא 0.34 .

ב. מהי ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד?

ג. חשב את ההסתברות שאנה תנצח במשחק השני, אם ידוע שתוצאת סבב זה היא שוויון.

סעיף א

נסמן את המאורע "יעל תנצח במשחק בודד" ב-Y (Yael) ונסמן $y = P(Y)$. הצלחה מוגדרת על ידי ניצחונות של יעל והשאלה מספקת מידע על מספרי ההצלחות ולכן נשתמש בנוסחת ברנולי:

$$\begin{aligned}
\binom{4}{2}y^2(1-y)^2 + \binom{4}{3}y^3(1-y) &= 10 \cdot \binom{4}{4}y^4(1-y)^0 \\
8y^2 + 8y - 6 &= 0 \\
y &= \frac{1}{2}\,,
\end{aligned}$$

ונתעלם מהשורש השני $-\frac{3}{2}$ כי הסתברות לא יכולה להיות שלילי.

סעיף ב

נסמן את המאורע "אנה תנצח במשחק בודד" ב-A (Anna) ונסמן $a = P(A)$.

נסמן ב-S (shivyon) את המאורע שתוצאת הסבב השני תהיה תיקו. האפשרויות לקבל שוויון הן ניצחון אחד לאנה וליעל בהסתברות $ya+ay$, או תיקו בשני המשחקים בהסתברות $(1-(y+a))^2$ כי ההסתברות לתיקו במשחק אחד היא המשלים לסכום ההסתברויות שאחת מהן תנצח. נציב $y = \frac{1}{2}$ והמידע ש-$P(S) = 0.34$ ונקבל:

$$\begin{aligned}
\binom{2}{1}ya + (1-(y+a))^2 &= P(S) = 0.34 \\
a + (\tfrac{1}{2} - a)^2 &= 0.34 \\
a &= 0.3\,,
\end{aligned}$$

כאשר נתעלם מהשורש -0.3 כי הסתברות לא יכולה להיות שלילית.

סעיף ג

נסמן את המאורע ״אנה תנצח במשחק השני״ ב-$A2$.

הניסוח ״**אם ידוע ש-**״ מכוון להסתברות מותנית:

$$\begin{aligned} P(A2/S) &= \frac{P(A2\ \cap\ S)}{P(S)} \\ &= \frac{ya}{P(S)} = \frac{0.5 \cdot 0.3}{0.34} = 0.4412\,. \end{aligned}$$

ההסתברות לשיוון בסבב השני נתונה. אם אנה תנצח במשחק השני, יהיה שוויון רק אם גם יעל תנצח במשחק הראשון:

$$\frac{ya}{.34} = \frac{0.5 \cdot 0.3}{.34} = 0.4412\,.$$

שימו לב שאם יש שיוון ואנה מנצחת במשחק הראשון, יעל חייבת לנצח במשחק הראשון ולכם המנה היא ya.

8 קיץ תשע"ו מועד א

במבחן כניסה למכללה 20% מן הנבחנים היו מקיבוצים.

40% היו ממושבים ו־ 40% היו מערים.

70% מן הנבחנים הצליחו במבחן.

$\frac{1}{8}$ מן הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו במבחן.

ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מעיר וגם הצליח במבחן, גדולה פי 2.5 מן ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מקיבוץ וגם הצליח במבחן.

א. מבין הנבחנים שנכשלו במבחן, מהי ההסתברות לבחור באקראי נבחן שלא היה מעיר?

ב. (1) משה הצליח במבחן.

מהי ההסתברות שהוא לא היה ממושב?

(2) חמישה נבחנים הצליחו במבחן.

מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם היה ממושב?

נסמן את המאורעות השונים בשאלה.

- S (success) הנבחנים שהצליחו.
- K (kibbutz) נבחנים מקיבוצים.
- M (moshav) נבחנים ממושבים.
- E (eer) נבחנים מערים.

ההסתברויות של המאורעות הללו נתונות:

$$P(K) = 0.20,\ P(M) = 0.40,\ P(E) = 0.40,\ P(S) = 0.70\,.$$

בשאלה שני סוגים של קבוצות: הצלחת הנבחנים ומקום המגורים של הנבחנים ולכן נשתמש בטבלה:

	E	M	K	
0.70				S
0.30				$\overline{S}$
1.0	0.40	0.40	0.20	

מידע נוסף שניתן הוא "$\frac{1}{8}$ **מן הנבחנים** שהיו ממושבים נכשלו במבחן", כאשר הניסוח מכוון להסתברות מותנית. נחשב:

$$\begin{aligned} P(\overline{S}/M) &= P(\overline{S}\cap M)/P(M) \\ P(\overline{S}\cap M) &= P(\overline{S}/M)\cdot P(M) = \frac{1}{8}\cdot 0.40 = 0.05\,. \end{aligned}$$

הנתון האחרון מתקבל מהפסקאות "ההסתברות לבחור באקראי **מבין כל** הנבחנים נבחן שהיה ב-··· **וגם** הצליח במבחן". הניסוח מכוון לחיתוך הסתברויות, ולכן הנתון הוא $P(E\cap S) = 2.5\cdot P(K\cap S)$.

נחשב את $P(S) = 0.70$ על ידי סיכום ההסתברויות של המצליחים במבחן בכל מקום מגורים:

$$\begin{aligned} P(S) &= P(K\cap S) + P(M\cap S) + P(K\cap E) \\ 0.70 &= P(K\cap S) + 0.35 + 2.5\cdot P(K\cap S) \\ P(K\cap S) &= 0.10 \\ P(E\cap S) &= 0.25\,. \end{aligned}$$

נשלים את הטבלה:

	E	***M***	***K***	
0.70	0.25	0.35	0.10	$\boldsymbol{S}$
0.30	0.15	0.05	0.10	$\boldsymbol{\overline{S}}$
1.0	0.40	0.40	0.20	

סעיף א

לפי הנוסחה להסתברות מותנית:

$$P(\overline{E}/\overline{S}) = P((K\cup M)/\overline{S}) = \frac{P(K\cap\overline{S}) + P(M\cap\overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{0.10+0.05}{0.30} = \frac{1}{2}\,.$$

סעיף ב (1)

לפי הנוסחה להסתברות מותנית:

$$P(\overline{M}/S) = P((K\cup E)/S) = \frac{P(K\cap S) + P(E\cap S)}{P(S)} = \frac{0.10+0.25}{0.70} = \frac{1}{2}\,.$$

סעיף ב (2)

"לפחות אחד ממושב" הוא המשלים ל-"כולם לא מהמושב" ולפי נוסחת ברנולי:

$$1 - P(\overline{M}/S)^5 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{31}{32}\,.$$

9 חורף תשע"ו

במכונת מזל אפשר לזכות ב־ 50 שקל, ב־ 100 שקל או לא לזכות כלל.

דן משחק 5 משחקים במכונה זו.

ההסתברות שדן יזכה ב־ 50 שקל בדיוק פעמיים שווה להסתברות

שהוא יזכה ב־ 50 שקל בדיוק פעם אחת.

(ההסתברות לזכות ב־ 50 שקל שונה מאפס.)

ההסתברות שדן לא יזכה באף משחק היא $\frac{1}{32}$.

א. מהי ההסתברות שדן יזכה ב־ 50 שקל במשחק בודד?

ב. מהי ההסתברות שדן יזכה ב־ 100 שקל במשחק בודד?

ג. ידוע כי לאחר שדן שיחק שני משחקים הוא זכה סך הכול ב־ 100 שקל בדיוק.

מהי ההסתברות שהוא לא זכה ב־ 50 שקל באף אחד משני המשחקים?

המאורעות הם סכומי הכסף שדן זכה $0, 50, 100$. נסמן ב-$P(n)$ את ההסתברות שדן זכה ב-n.

סעיף א

הניסוחים "אף אחד" ו-"בדיוק" מכוונים לנוסחת ברנולי. ההסתברות שדן לא זכה (בסכום חיובי) באף אחד מחמישת המשחקים היא $P(0)^5 = \frac{1}{32}$ ולכן $P(0) = \frac{1}{2}$. לפי המידע הנתון:

$$\begin{aligned}\binom{5}{2}P(50)^2(1-P(50))^3 &= \binom{5}{1}P(50)(1-P(50))^4\\ 10P(50) &= 5(1-P(50))\\ P(50) &= \frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

סעיף ב

לפי ההסתברות המשלימה: $P(100) = 1 - P(0) - P(50) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

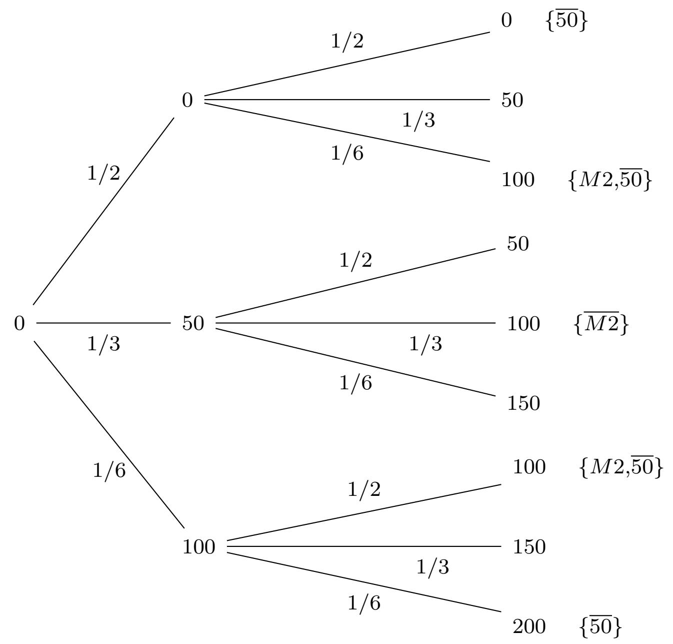
סעיף ג

נסמן ב-$M2$ את המאורע שדן זכה ב-100 בשני משחקים ונסמן ב-$\overline{50}$ את המאורע שדן לא זכה ב-50.
הניסוח "**ידוע כי**" מכוון להסתברות מותנית:

$$P(\overline{50}/M2) = \frac{P(\overline{50} \cap M2)}{P(M2)}$$

המשחקים מתרחשים אחד אחרי השני ולא לתלויים אחד בשני ולכן ניתן להציג את ההסתברויות בעץ (בעמוד הבא). בסוף כל מסלול רשום המאורעות $M2, \overline{50}$ שמתקיימים. ההסתברות המותנית היא:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}\,.$$


0
1/2
1/3
1/6
0
50
100
1/2
1/3
1/6
0 {$\overline{50}$}
50
100 {$M2$,$\overline{50}$}
1/2
1/3
1/6
50
100 {$\overline{M2}$}
150
1/2
1/3
1/6
100 {$M2$,$\overline{50}$}
150
200 {$\overline{50}$}

10 קיץ תשע״ה מועד ב

חוקר עורך מחקר על הרגלי האכילה של סטודנטים באוניברסיטה גדולה במשך יום לימודים.

חלק מהסטודנטים מביאים תמיד אוכל מהבית, והשאר אינם מביאים אוכל מהבית.

כל הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית אוכלים אותו במשך היום ואינם אוכלים בקפטריה.

הסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אוכלים בקפטריה או אינם אוכלים במשך היום.

א. נמצא כי אם בוחרים באקראי 4 סטודנטים, ההסתברות שבדיוק 2 מהם מביאים אוכל מהבית גדולה פי 6 מההסתברות שבדיוק 1 מהם מביא אוכל מהבית.

(1) מהו אחוז הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית?

(2) החוקר בחר באקראי 8 סטודנטים באוניברסיטה.
מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם מביא אוכל מהבית, אבל לא כולם?

ב. נמצא כי 60% מהסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אינם אוכלים במשך היום.

(1) מהו אחוז הסטודנטים באוניברסיטה שאוכלים בקפטריה?

(2) מהי ההסתברות לבחור סטודנט שמביא אוכל מהבית מבין הסטודנטים שאוכלים במשך היום?

סעיף א (1)

נסמן את המאורע ״מביא אוכל מהבית״ ב-M mavi ונסמן $b = P(M)$. המילה ״בדיוק״ מכוון לנוסחת ברנולי:

$$\begin{aligned}\binom{4}{2}b^2(1-b)^2 &= 6\cdot\binom{4}{1}b(1-b)^3\\ 6b &= 24(1-b)\\ b &= \frac{4}{5}\,.\end{aligned}$$

השאלה שואלת על ״אחוז״ ולכן התשובה היא 80%.

סעיף א (2)

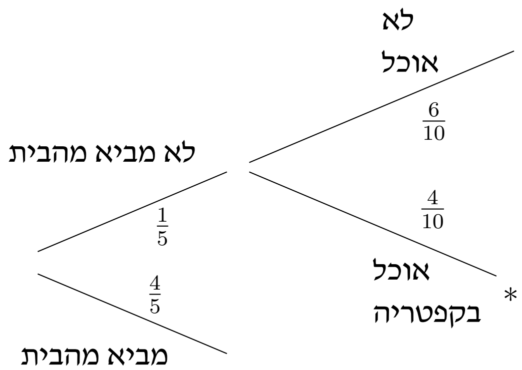
ההסתברות של ״לפחות אחד אבל לא כולם״ היא המשלים ל-״לא אפס ולא כולם״:

$$1-\left(\frac{1}{5}\right)^8-\left(\frac{4}{5}\right)^8 = 0.8322\,.$$

סעיף ב (1)

נסמן את המאורע ״אוכל בקפטריה״ ב-C (cafeteria). בעץ ההסתברויות בעמוד הבא הכוכבית מראה את המסלול עבור המאורע C ולכן:

$$P(C) = \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10} = \frac{2}{25}\,.$$



פתרון זה לא כל כך מוצא חן בעיני כי לא ברור מאיפה צץ העץ שבדרך כלל משמש למאורעות סדרתיות כגון הטלת קוביות מספר פעמים. אני מעדיף פתרון מבוסס הסתברות מותנית ואני חושב שניסוח השאלה היתה צריכה להיות "**מבין** אלה שלא מביאים אוכל 60% אינם אוכלים בקפטריה". לפי נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(C) = P(C/M)P(M) + P(C/\overline{M})P(\overline{M}) = 0\cdot 0.8 + (1-0.6)\cdot(1-0.8) = 0.4\cdot 0.2 = 0.08\,.$$

סעיף ב (2)

נסמן ב-O (okhel) את המאורע "מביא אוכל. המילה "**מבין**" מכוונת להסתברות מותנית, ונחשב אותה תוך שימוש בעובדה ש-$O \subseteq M$ ולכן $M \cap O = M$:

$$\begin{aligned} P(M/O) &= \frac{P(M\ \cap\ O)}{P(O)} \\ &= \frac{P(M)}{P(O)} \\ &= \frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}+\frac{2}{25}} = \frac{10}{11}\,. \end{aligned}$$

11 קיץ תשע״ה מועד א

נתונה קבוצה של ספרות שונות: 3 ספרות הן זוגיות (שונות מ־ 0), והשאר הן ספרות אי־זוגיות.

יוני יוצר מספר דו־ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שיוני בוחר באקראי היא ספרת העשרות,

והספרה השנייה שהוא בוחר באקראי היא ספרת היחידות.

יוני בוחר כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.

א. נתון כי ההסתברות שיוני ייצור מספר אי־זוגי היא $\frac{4}{7}$.

מהו מספר הספרות האי־זוגיות בקבוצה הנתונה?

ב. אם ידוע שהמספר שנוצר הוא זוגי, מהי ההסתברות ששתי הספרות שיוני בחר הן זוגיות?

אמילי יוצרת מספר תלת־ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שאמילי בוחרת באקראי היא ספרת המאות,

הספרה השנייה שהיא בוחרת באקראי היא ספרת העשרות,

והספרה השלישית שהיא בוחרת באקראי היא ספרת היחידות.

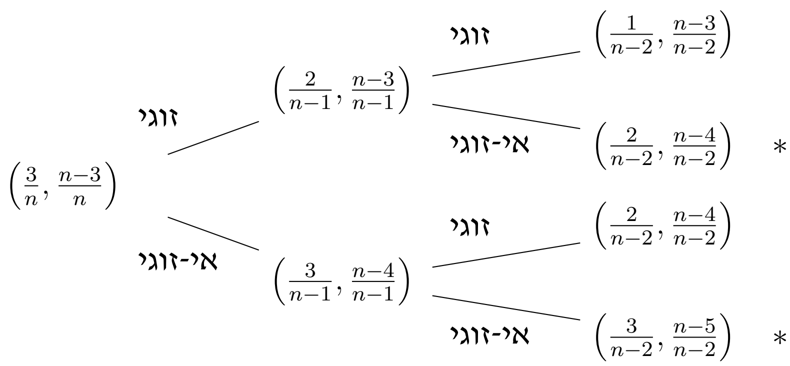
אמילי בוחרת כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.

ג. ידוע כי הספרה הראשונה שאמילי בחרה היא זוגית.

מהי ההסתברות שבמספר התלת־ספרתי שאמילי יצרה, סכום הספרות היה זוגי?

סעיף א

נסמן את קבוצת הספרות ב-S (sifarot), קבוצת הספרות הזוגיות ב-Z (zugi), קבוצת הספרות האי-זוגיות ב-I (i-zugi). בחירה של ספרת העשרות ואחר כך ספרת היחידות מכוונת לעץ הסתברויות. במקום לרשום את מספרי הספרות בצמתים וההסתברויות על הקשתות, נפשט את התרשים ונרשום בכל צומת את ההסתברויות שליפת ספרה זוגית או אי-זוגית $(P(Z=k_1), P(I=k_2))$.



המאורע YI שיוני ייצור מספר אי-זוגי יתרחש רק אם הבחירתו השנייה היא ספרה אי-זוגית. המסלולים המתאימים מסומנים בתרשים בכוכביות. נחשב את ההסתברות ונשווה להסתברות הנתונה:

$$P(YI) \;=\; \frac{3}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1} + \frac{n-3}{n}\cdot\frac{n-4}{n-1} = \frac{4}{7}$$

$$\begin{aligned}
4n(n-1) &= 7(n-3)(n-1) \\
n &= 7 \\
|I| &= n-3 = 4\,.
\end{aligned}$$

נתון ש-$n \geq 3$ ולכן $n \neq 1$ וניתן לצמצם את $n-1$.

סעיף ב

במספר זוגי הספרה האחרונה זוגית. נסמן ב-$Z2$ את המאורע ששתי הספרות זוגיות ונסמן ב-ZA aharona את המאורע ספרה אחרונה זוגית. הניסוח "**אם ידוע**" מכוון להסתברות מותנית:

$$\begin{aligned}
P(Z2/ZA) &= \frac{P(Z2\,\cap\,ZA)}{P(ZA)} \\
&= \frac{P(Z2)}{P(ZA)} \\
&= \frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}}{1-\frac{4}{7}} = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

השתמשנו ב-$Z2 \subseteq ZA$ כי אם שתי הספרות זוגיות אזי הספרה האחרונה זוגית, ובעובדה ש-$P(ZA) = 1 - P(YI)$ שחישבנו בסעיף הקודם. החישוב של $P(Z2)$ היא ההסתברות שמתקבלת מהמסלול העליון בעץ עבור בחירה של שתי ספרות זוגיות.

סעיף ג

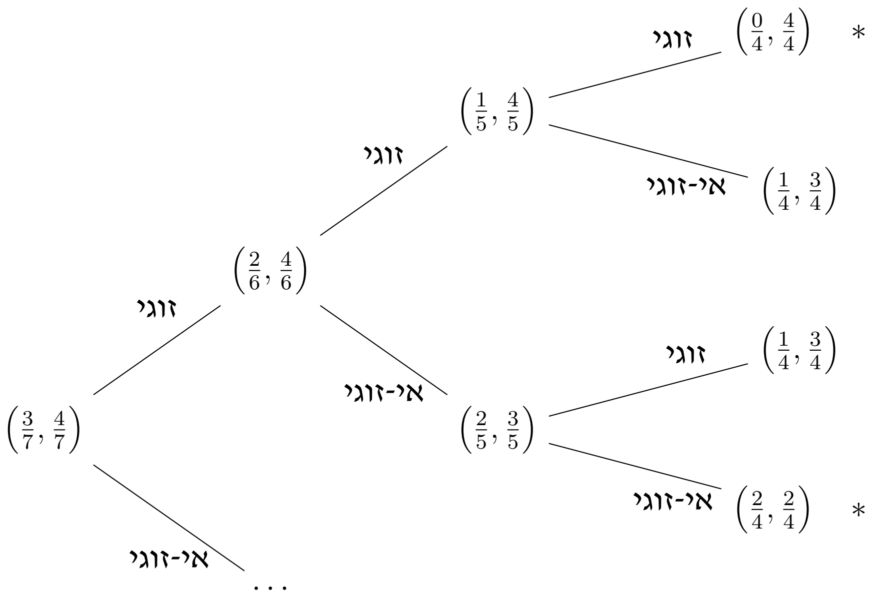
הסכום יהיה זוגי רק אם שתי הספרות האחרונת הן זוגיות או אי-זוגיות:

$$\begin{aligned}
2k_1+2k_2+2k_3 &= 2(k_1+k_2+k_3) \\
2k_1+2(k_2+1)+2(k_3+1) &= 2(k_1+k_2+k_3+1)\,.
\end{aligned}$$

נסמן ב-$Z1$ את המאורע שהספרה הראשונה זוגית ונסמן ב-S (sekhum) את המאורע שסכום הספרות זוגי. המילה "ידוע" מכוון להסתברות מותנית ולכן:

$$\begin{aligned}
P(S/Z1) &= \frac{P(S\,\cap\,Z1)}{P(Z1)} \\
&= \frac{P(S\,\cap\,Z1)}{P(Z1)} \\
&= \frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{15}\,.
\end{aligned}$$

המנה חושב משני המסלולים המסומנים בכוכביות בעץ ההסתברויות בעמוד הבא, כי הם מתחילים עם בחירה של ספרה זוגית ואז שני ואז או שתי ספרות זוגיות או שתי ספרות אי-זוגיות כדי לקבל סכום זוגי.


$\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$
זוגי
אי-זוגי
$\left(\frac{2}{6}, \frac{4}{6}\right)$
זוגי
אי-זוגי
$\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$
$\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$
זוגי
אי-זוגי
זוגי
אי-זוגי
$\left(\frac{0}{4}, \frac{4}{4}\right)$ *
$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$
$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$
$\left(\frac{2}{4}, \frac{2}{4}\right)$ *
. . .

12 חורף תשע"ה

ביישוב גדול $\frac{1}{3}$ מהתושבים הם נשים, והשאר הם גברים.

מבין התושבים בוחרים באקראי שתי קבוצות:

קבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון ברדיו

וקבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון בטלוויזיה.

א. מהי ההסתברות שבכל קבוצה יש בדיוק 2 גברים?

ב. ידוע כי בקבוצה שנבחרה לריאיון ברדיו היו לכל היותר 2 גברים.

מהי ההסתברות שהיו בקבוצה זו בדיוק 2 גברים?

המשמעות של "יישוב גדול" היא (כנראה) שאפשר לבחור את שתי הקבוצות בלי לשנות את ההסתברות של $\frac{1}{3}$ במהלך הבחירה, למרות שהבחירה היא ללא החזרה.

סעיף א

נסמן ב-$G2$ את המאורע של בחירת שני בגברים בקבוצה אחת ונסמן ב-$G22$ את המאורע של בחירת שני גברים בשתי הקבוצות. בחירת גבר נקראת הצלחה ולכן נשתמש בנוסחת ברנולי כדי לקבל את ההסתברות **לבדיוק** שתי הצלחות בקבוצה אחת:

$$P(G2) = \binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}\,.$$

לפי ההנחה שאין שינוי בהסתברות של הבחירה בין שתי הקבוצות, נקבל:

$$P(G22) = P(G2)\cdot P(G2) = \frac{64}{729}\,.$$

סעיף ב

נסמן את המאורע "לכל היותר שני גברים" ב-$G012$. הניסוח "**ידוע כי**" מכוון להסתברות מותנית:

$$P(G2/G012) \quad = \quad \frac{P(G2\ \cap\ G012)}{P(G012)}$$

$G2 \subseteq G012$ ולכן המנה היא $G2 = \frac{8}{27}$. "לכל היותר שני גברים" הוא הסכום של שלוש נוסחאות ברנולי:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{27}$$

והתשובה לשאלה היא:

$$P(G2/G012) = \frac{\frac{8}{27}}{\frac{11}{27}} = \frac{8}{11}\,.$$

13 קיץ תשע"ד מועד ב

בעיר גדולה כל אחד מתלמידי כיתות י"ב בשנה מסוימת בוחר באחד משני המסלולים לטיול שנתי:

מסלול א' או מסלול ב'.

נמצא: 75% מן התלמידים שבחרו במסלול א' הן בנות.

10% מן הבנות בחרו במסלול ב'.

40% מן התלמידים הם בנות.

א. בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת).

מהי ההסתברות שהוא בחר במסלול א'?

ב. כאשר בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת), האם המאורע "התלמיד הוא בת"

והמאורע "התלמיד (בן/בת) בחר במסלול א'" הם מאורעות בלתי תלויים? נמק.

ג. בחרו באקראי כמה בנות מבין התלמידים.

נמצא שההסתברות שלפחות אחת מהן בחרה במסלול א' היא 0.99.

(הבחירות של המסלולים על ידי הבנות שנבחרו הן בלתי תלויות.)

כמה בנות נבחרו?

נמסן את הקבוצות בשאלה: G (girl), B (boy), MA (maslul aleph), MB (maslul bet). בגלל שיש שני זוגות של קבוצות נציג את ההסתברויות בטבלה. את הטבלה נמלא בשתי דרכים שונות, תחילה ישירות מהנתונים ואחר כך תוך שימוש בהסתברות מותנית.

	G	B	
MA	.36	.12	.48
MB	.04	.48	.52
	0.40	.60	1

דרך א'

נתון ש-$P(G) = 0.40$ ונתון ש-10% מהם בחרו במסלול ב', ולכן $P(G \cap MB) = .04$, ומהסתברות משלימה $P(G \cap MA) = .36$. הנתון האחרון הוא ש-$0.75P(MA) = 0.36$ ולכן $P(MA) = 0.36/0.75 = 0.48$. את שאר התאים ניתן למלא מהסתברויות משלימות.

דרך ב'

שוב נמלא את התא הימני למטה ב-$P(G) = 0.40$. נמשיך:

$$\begin{aligned} P(MB/G) &= \frac{P(MB \cap G)}{P(G)} = 0.10 \\ P(MB \cap G) &= P(G)P(MB/G) = 0.40 \cdot 0.10 = 0.04\,. \end{aligned}$$

עוד הסתברות מותנית:

$$\begin{aligned} P(G/MA) &= \frac{P(G \cap MA)}{P(MA)} = 0.75 \\ P(MA) &= \frac{P(G \cap MA)}{P(G/MA)} = \frac{0.36}{0.75} = 0.48\,, \end{aligned}$$

ונמלא את שאר התאים באמצעות הסתברויות משלימות.

סעיף א

$P(MA) = 0.48$.

סעיף ב

$$\begin{aligned} P(G \cap MA) &= 0.36 \\ P(G)P(MA) &= 0.40 \cdot 0.48 = 0.19\,. \end{aligned}$$

$0.36 \neq 0.19$ ולכן המאורעות אינם בלתי תלויים.

סעיף ג

ניתן לחשב "לפחות אחת" על ידי חישוב הסתברות של "אף אחת". ההסתברות שבת לא תבחר מסלול א' היא ההסתברות שהיא תבחר מסלול ב':

$$\begin{aligned} P(MB/G) &= \frac{P(MB \cap G}{P(G)} = \frac{0.04}{0.40} = 0.10 \\ (0.10)^n &= 1 - 0.99 = 0.01 \\ n &= 2\,. \end{aligned}$$

14 קיץ תשע״ד מועד א

אבא ודני משחקים בזריקת כדור לסל. בכל משחק שני סיבובים.

המנצח בסיבוב מקבל נקודה אחת. אם הסיבוב מסתיים בתיקו, כל אחד מקבל חצי נקודה.

נתון: ההסתברות שדני ינצח בסיבוב היא 0.1 ,

ההסתברות שאבא ינצח בסיבוב היא 0.2 ,

ההסתברות שהסיבוב יסתיים בתיקו היא 0.7 .

הסיבובים אינם תלויים זה בזה.

א. מהי ההסתברות שאבא יצבור בשני הסיבובים <u>יותר</u> מנקודה אחת?

ב. מהי ההסתברות שדני יצבור בשני הסיבובים <u>לפחות</u> נקודה אחת?

ג. ידוע כי דני צבר בשני הסיבובים <u>לפחות</u> נקודה אחת.

מהי ההסתברות שאחד הסיבובים הסתיים בתיקו והאחר הסתיים בניצחון של דני?

ד. אבא ודני משחקים 4 פעמים את המשחק שמתואר בפתיח. (בכל משחק שני סיבובים.)

מהי ההסתברות שדני יצבור <u>לפחות</u> נקודה אחת 2 פעמים בדיוק?

נסמן ב-$D1, D2$ (dani) את המאורע שדני מנצח בסיבוב אחד או שניים, נסמן ב-$A1, A2$ (abba) את המאורע שאבא מנצח בסיבוב אחד או שניים, ונסמן ב-$T1, T2$ (teku) את המאורע שיהיה תיקו בסיבוב אחד או שניים. השאלה שואלת על סדרה של שני סבבים וזה מכוון לעץ הסתברויות (בעמוד הבא). בסוף כל מסלול רשום מספר הנקודות שאבא צבר ומספר הנקודות שדני צבר.

סעיף א

במסלול בהם אבא צובר יותר מנקודה אחת הם (a), (c), (g), וההסתברות היא:

$$P(A2 > 1) = 0.2 \cdot 0.2 \,+\, 0.2 \cdot 0.7 \,+\, 0.7 \cdot 0.2 \,=\, 0.32\,.$$

סעיף ב

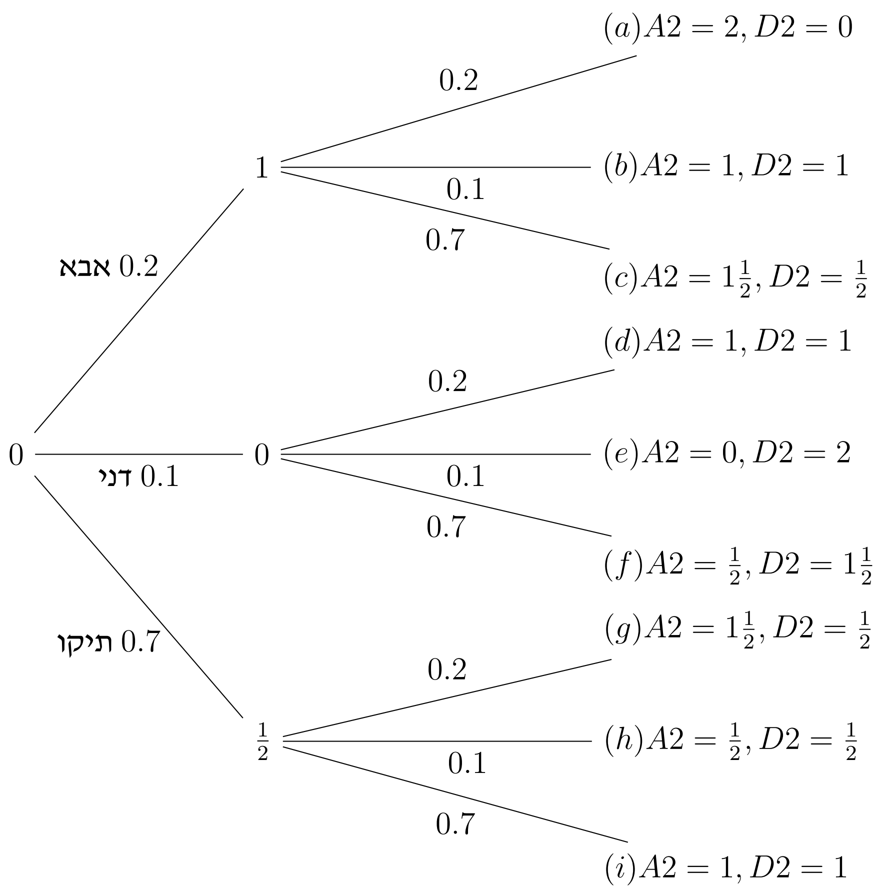
המסלולים בהם דני צבר לפחות נקודה אחת הם (b), (d), (e), (f), (h), (i) וההסתברות היא:

$$P(D2 \geq 1) = 0.2 \cdot 0.1 \,+\, 0.1 \cdot 0.2 \,+\, 0.1 \cdot 0.1 \,+\, 0.1 \cdot 0.7 \,+\, 0.7 \cdot 0.1 \,+\, 0.7 \cdot 0.7 \,=\, 0.68\,.$$

סעיף ג

הניסוח ״ידוע״ מכוון להסתברות מותנית, אבל $D1 \cup T1 \subseteq D2 \geq 1$ ולכן:

$$\begin{aligned} P((D1 \cup T1)/D2 \geq 1) &= \frac{P((D1 \cup T1) \,\cap\, D2 \geq 1)}{D2 \geq 1} \\ &= \frac{P(D1 \cup T1)}{D2 \geq 1} \\ \frac{0.1 \cdot 0.7 \,+\, 0.7 \cdot 0.1}{0.68} &= \frac{7}{34} = 0.2059\,, \end{aligned}$$



כי המסלולים המתאימים הם (h) ,(f).

סעיף ד

נשתמש בנוסחת ברנולי כי למצוא את ההסתברות לבדיוק פעמיים :

$$\binom{4}{2} P(D2)^2 \; (1 - P(D2)^2 = \binom{4}{2} (0.32)^2 (0.68)^2 = 0.2841 \; .$$

15 חורף תשע"ד

בעיר מסוימת יש תושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, יש תושבים המשתתפים בחוג לתאטרון ויש תושבים המשתתפים בשני החוגים.

נמצא כי המאורע "תושב העיר משתתף בחוג לריקודי עם"

והמאורע "תושב העיר משתתף בחוג לתאטרון" הם מאורעות בלתי תלויים.

מספר התושבים שמשתתפים בחוג לריקודי עם גדול פי 2 ממספר התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון.

מבין התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון, 60% משתתפים בחוג לריקודי עם.

א. מהו אחוז התושבים בעיר שמשתתפים בחוג לריקודי עם וגם בחוג לתאטרון?

ב. יום אחד נערך בעיר כנס שהשתתפו בו כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, ורק הם. עיתונאי ראיין 6 משתתפים בכנס שנבחרו באקראי. מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם משתתפים בחוג לתאטרון?

נסמן ב-T (theatron) את המשתתפים בתאטרון ונסמן ב-R (rikudei) את המשתתפים בריקודי עם. המילה "מבין" מכוונת להתסברות מותנית. ההסתברויות הן של זוגות של מאורעות ולכן נשתמש בטבלה.

נתון $P(R/T) = 0.6$ ושהאירועים בלתי תלויים. נחשב:

$$P(R/T) = \frac{P(R \cap T)}{P(T)} = \frac{P(R) \cdot P(T)}{P(T)} = P(R) = 0.06\,.$$

ביחד עם הנתון $P(R) = 2P(T)$ נתחיל למלא את הטבלה:

	$\boldsymbol{T}$	$\overline{\boldsymbol{T}}$	
$\boldsymbol{R}$			0.60
$\overline{\boldsymbol{R}}$			0.40
	0.30	0.70	1.0

שוב נסתמך על העובדה שהאירועים בלתי תלויים ונקבל:

$$P(R \cap T) = P(R) \cdot P(T) = 0.60 \cdot 0.30 = 0.18\,,$$

וניתן למלא את הטבלה לפי הסתברויות משלימות:

	$\overline{T}$	T	
0.60	0.42	0.18	R
0.40	0.28	0.12	$\overline{R}$
1.0	0.70	0.30	

סעיף א

$P(R \cap T) = 0.18$.

סעיף ב

הניסוח ״כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, ורק הם״ מכוונות להסתברות מותנית:

$$P(T/R) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)} = \frac{P(T)P(R)}{P(R)} = P(T) = 0.30\,.$$

כדי לחשב ״לפחות שניים״ נשתמש בנוסחת ברנולי ונחשב את המשלים ל-״אפס או אחד״:

$$P(T \geq 2/R) = 1 - \binom{6}{0}(0.3)^0(0.7)^6 - \binom{6}{1}(0.3)^1(0.7)^5 = 0.5798\,.$$

המלצות

- קרא בזהירות את השאלות. לעתים הן ארוכות וחשוב להבין את המשמעות של כל פסקה.

- כמעט כל הבחינות מכילות שאלות על הסתברות מותנית. ניסוחים רבים מכוונים להסתברות מותנית וחשוב להכיר אותם!

  – הניסוח השכיח ביותר משתמש במילים ״**אם ידוע ש-**״ או ״**ידוע כי**״.

  – בבחינה של חורף תשע״ז כתוב ״**אם** . . . , **מהי ההסתברות** . . .״. לא לגמרי ברור שלמילה ״אם״ יש משמעות של ״אם ידוע״, אבל זאת הכוונה.

  – לעתים קרובות)בחינה של קיץ תשע״ה ב׳(כתוב ״**מה ההסתברות לבחור** . . . **מבין** . . .״.

  – יוצא מן הכלל: בבחינה של קיץ תשע״ו א׳ כתוב ״**מבין** כל הנבחנים״. המילה ״מבין״ בדרך כלל מכוונת להסתברות מותנית, אבל כאשר ״מבין״ מתייחס ל-״**כל** הנבחנים״, אין הסתברות מותנית. לחילופין אפשר לחשב הסתברות מותנית כאשר החיתוך מצטמצם:

$$P(X/\text{כל הנבחנים}) = \frac{P(X\cap \text{כל הנבחנים})}{P(\text{כל הנבחנים})} = \frac{P(X)}{1} = P(X)\,.$$

  – בבחינה של קיץ תשע״ח א׳ הניסוח הוא: ״$n\%$ נעזרו בחבריהם N ו-$\frac{k}{n}$ **מהם** עברו את הבחינה A״. ברור ש-$P(A\cap N)=k$, אבל נבדוק לפי הנוסחה להסתברות מונתית:

$$\begin{aligned} P(A/N) &= \frac{P(A\cap N)}{P(N)} = \frac{k}{n} \\ P(A\cap N) &= k\,. \end{aligned}$$

  – בבחינה של חורף תשע״ד יש ניסוח אחר: ״כל התושבים המשתתפים ב- . . ., **ורק הם**״.

- כאשר יש חיתוך בחישוב של הסתברות מותנית, לעתים קרובות ניתן לפשט את החישוב. בבחינה של קיץ תשע״ז א׳ יש לחשב $P(D=4\cap D\geq 3)$, אבל אם ערך גדול או שווה 3 **וגם** שווה ל-4, אז הוא שווה ל-4, ולכן מספיק לחשב $P(D=4)$.

- אם שני אירועים בלתי תלויים, חישוב ההסתברות המותנית מצטמצם:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)\cdot P(A)}{P(A)} = P(B)\,.$$

  מצב זמ מופיע בבחינות של חורף תשע״ז, חורף משע״ח, קיץ תשע״ה א׳, חורף תשע״ד.

- המילה **בדיוק** מכוונת לחישוב אחד של נוסחת ברנולי, כי נתון כמה ״הצלחות״ צריכות להיות וגם כמה ״כשלונות״.

- בבחינה של קיץ תשע״ז א׳ כתוב ״**בוחרים באקראי** . . ., **עד של-** 3 מהם **בדיוק** יש קלנועית״. המשמעות של ״עד ש-״ היא שמפסיקים את הבחירה האקראית כאשר הבחירה **האחרונה** היא ״הצלחה״. במקרה זה נשארו שתי ״הצלחות״ שיש לחשב את ההסתברות שלהן לפי נוסחת ברנולי, ואז להכפיל בהסתברות של ״הצלחה״ בבחירה האחרונה:

$$\overbrace{\pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \pm}^{2/5} \qquad \overbrace{+}^{1/1}\,.$$

- בבחינה של קיץ תשע״ז ב׳ הביטוי ״מוציאים באקראי . . .״, ובהמשך הביטוי ״מוציאים באקראי **שוב** . . .״ מכוון לשימוש בעץ כדי לתאר את הבחירה הסדרתית.

- בבחינה של קיץ תשע״ח א׳ המשמעות של הניסוח ״**לפחות אחת** משתי הטענות I, II היא שהאירוע קורה אם קורה אחד מהאירועים I, II, **או שניהם**, המסומן $\mathrm{I} \cup \mathrm{II}$.״ יש שתי דרכים לחשב את ההסתברות:

$$\begin{aligned} P(\mathrm{I} \cup \mathrm{II}) &= P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) - P(\mathrm{I} \cap \mathrm{II}) \\ P(\mathrm{I} \cup \mathrm{II}) &= P(\mathrm{I} - \mathrm{II}) + P(\mathrm{II} - \mathrm{I}) + P(\mathrm{I} \cap \mathrm{II})\,. \end{aligned}$$

- בבחינה של קיץ תשע״ח ב׳ יש לחשב את ההסבתרות לפי נוסחת ברנולי $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
  - אם $k=0$ אזי $\binom{n}{0} = 1$ והנוסחה מצטמצמת ל-$p^0(1-p)^{n-0} = (1-p)^n$.
  - אם $k=n$ אזי $\binom{n}{n} = 1$ והנוסחה מצטמצמת ל-$p^n(1-p)^{n-n} = p^n$.

- בבחינות של קיץ תשע״ו א׳ ו-ב׳ יש שלוש תוצאות לפעולה במקום שתיים. סכום ההסתברויות חייב להיות אחד, ולכן כאשר מחשבים משלים להסתברות אחת, יש להחסיר את שתי ההסתברויות האחרות. בבחינה של מועד ב׳ ההסתברות לתיקו היא אחד פחות ההסתברות שיעל תנצח פחות ההסתברות אנה תנצח:

$$P(\text{תיקו}) = 1 - (P(\text{יעל}) + P(\text{אנה})) = 1 - P(\text{יעל}) - P(\text{אנה})\,.$$

- במספר בחינות (חורף תשע״ה, קיץ תשע״ד ב׳, קיץ תשע״ה ב׳) מתואר מצב הנקרא ״שליפה ללא החזרה״. אם יש מספר נמוך של תושבים, השליפות לא בלתי-תלויות. כאשר כתוב ״ישוב גדול״, ״עיר גדולה״, ״אוניברסיטה גדולה״, אני מניח שכוונה שיש מספר כל כך גדול של תושבים שאין שינוי משמעותי בהסתברות משליפה אחת לבאה אחריה.