

# **בחינות בגרות במתמטיקה: התהילה**

**מווטי בן-ארי**

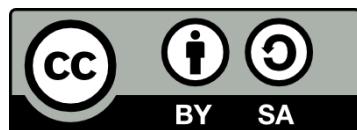
<http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/>

**גרסת 1.5.0**

**21 בדצמבר 2022**

מווטי בן-ארי © 2019-20

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>.





# תובן העניינים

<b>9</b>	<b>הקדמה</b>	
<b>11</b>	<b>1</b> <b>תנוועה והספּק</b>	
11	קייז תשע"ח מועד ב . . . . .	1.1
13	קייז תשע"ח מועד א . . . . .	1.2
15	חוֹרֶף תשע"ח . . . . .	1.3
17	קייז תשע"ז מועד ב . . . . .	1.4
20	קייז תשע"ז מועד א . . . . .	1.5
22	חוֹרֶף תשע"ז . . . . .	1.6
24	קייז תשע"ו, מועד ב . . . . .	1.7
26	קייז תשע"ו מועד א . . . . .	1.8
28	חוֹרֶף תשע"ו . . . . .	1.9
30	קייז תשע"ה מועד ב . . . . .	1.10
32	קייז תשע"ה מועד א . . . . .	1.11
34	חוֹרֶף תשע"ה . . . . .	1.12
36	קייז תשע"ד מועד ב . . . . .	1.13
37	קייז תשע"ד מועד א . . . . .	1.14
38	חוֹרֶף תשע"ד . . . . .	1.15
40	המלצות: תנוועה והספּק . . . . .	
<b>41</b>	<b>2</b> <b>סזרות</b>	
41	קייז תשע"ח מועד ב . . . . .	2.1
43	קייז תשע"ח מועד א . . . . .	2.2
45	חוֹרֶף תשע"ח . . . . .	2.3
47	קייז תשע"ז מועד ב . . . . .	2.4
49	קייז תשע"ז מועד א . . . . .	2.5
51	חוֹרֶף תשע"ז . . . . .	2.6

52	קייז תשע"ו מועד ב	2.7
53	קייז תשע"ו מועד א	2.8
54	חורף תשע"ו	2.9
56	קייז תשע"ה, מועד ב	2.10
57	קייז תשע"ה מועד א	2.11
58	חורף תשע"ה	2.12
60	קייז תשע"ד מועד ב	2.13
61	קייז תשע"ד מועד א	2.14
63	חורף תשע"ד	2.15
64	המלצות: סדרות	

<b>67</b>	<b>3 הסתריות</b>	
67	קייז תשע"ח מועד ב	3.1
69	קייז תשע"ח מועד א	3.2
72	חורף תשע"ח	3.3
73	קייז תשע"ז מועד ב	3.4
75	קייז תשע"ז מועד א	3.5
77	חורף תשע"ז	3.6
79	קייז תשע"ו מועד ב	3.7
80	קייז תשע"ו מועד א	3.8
82	חורף תשע"ו	3.9
84	קייז תשע"ה מועד ב	3.10
86	קייז תשע"ה מועד א	3.11
89	חורף תשע"ה	3.12
90	קייז תשע"ד מועד ב	3.13
92	קייז תשע"ד מועד א	3.14
94	חורף תשע"ד	3.15
96	המלצות: הסתריות	

<b>99</b>	<b>4 גיאומטריה</b>	
99	קייז תשע"ח מועד ב	4.1
102	קייז תשע"ח מועד א	4.2
104	חורף תשע"ח	4.3
107	קייז תשע"ז מועד ב	4.4

110	קייז תשע"ז מועד א	4.5
113	חוֹרֶף תשע"ז	4.6
115	קייז תשע"ו מועד ב	4.7
117	קייז תשע"ו מועד א	4.8
119	חוֹרֶף תשע"ו	4.9
121	קייז תשע"ה מועד ב	4.10
123	קייז תשע"ה מועד א	4.11
125	חוֹרֶף תשע"ה	4.12
127	קייז תשע"ד מועד ב	4.13
129	קייז תשע"ד מועד א	4.14
131	חוֹרֶף תשע"ד	4.15
133	<b>המלצות: גיאומטריה</b>	
<b>135</b>	<b>טרייגונומטריה</b>	<b>5</b>
135	קייז תשע"ח מועד ב	5.1
138	קייז תשע"ח מועד א	5.2
140	חוֹרֶף תשע"ח	5.3
142	קייז תשע"ז מועד ב	5.4
144	קייז תשע"ז מועד א	5.5
146	חוֹרֶף תשע"ז	5.6
149	קייז תשע"ו מועד ב	5.7
152	קייז תשע"ו מועד א	5.8
154	חוֹרֶף תשע"ו	5.9
156	קייז תשע"ה מועד ב	5.10
158	קייז תשע"ה מועד א	5.11
160	חוֹרֶף תשע"ה	5.12
162	קייז תשע"ד מועד ב	5.13
166	קייז תשע"ד מועד א	5.14
168	חוֹרֶף תשע"ד	5.15
170	חוֹרֶף תשע"ד (שאלה 6)	5.16
172	<b>המלצות: טרייגונומטריה</b>	
<b>173</b>	<b>חדו"א שאלה 6</b>	<b>6</b>
173	קייז תשע"ח מועד ב	6.1

175	קייז תשע"ח מועד א	6.2
177	חרוף תשע"ח	6.3
180	קייז תשע"ז מועד ב	6.4
182	קייז תשע"ז מועד א	6.5
185	חרוף תשע"ז	6.6
187	קייז תשע"ו מועד ב	6.7
189	קייז תשע"ו מועד א	6.8
192	חרוף תשע"ו	6.9
195	קייז תשע"ה מועד ב	6.10
197	קייז תשע"ה מועד א	6.11
199	חרוף תשע"ה	6.12
201	קייז תשע"ד מועד ב	6.13
203	קייז תשע"ד מועד א	6.14
205	חרוף תשע"ד	6.15

<b>207</b>	<b>7 חדו"א שאלת 7</b>	
207	קייז תשע"ח מועד ב	7.1
209	קייז תשע"ח מועד א	7.2
211	חרוף תשע"ח	7.3
213	קייז תשע"ז מועד ב	7.4
215	קייז תשע"ז מועד א	7.5
217	חרוף תשע"ז	7.6
219	קייז תשע"ו מועד ב	7.7
221	קייז תשע"ו מועד א	7.8
223	חרוף תשע"ו	7.9
225	קייז תשע"ה מועד ב	7.10
227	קייז תשע"ה מועד א	7.11
229	חרוף תשע"ה	7.12
231	קייז תשע"ד מועד ב	7.13
233	קייז תשע"ד מועד א	7.14
235	חרוף תשע"ד	7.15

<b>237</b>	<b>8 חדו"א שאלת 8</b>	
237	קייז תשע"ח מועד ב	8.1

239	קייז תשע"ח מועד א	8.2
241	חוֹרֶף תשע"ח	8.3
243	קייז תשע"ז מועד ב	8.4
245	קייז תשע"ז מועד א	8.5
247	חוֹרֶף תשע"ז	8.6
249	קייז תשע"ו מועד ב	8.7
251	קייז תשע"ו מועד א	8.8
253	חוֹרֶף תשע"ו	8.9
255	קייז תשע"ה מועד ב	8.10
257	קייז תשע"ה מועד א	8.11
259	חוֹרֶף תשע"ה	8.12
261	קייז תשע"ד מועד ב	8.13
263	קייז תשע"ד מועד א	8.14
265	חוֹרֶף תשע"ד	8.15
267	המלצות: חשבון דיפרנציאלי וaintegraliy	
271	<b>א' אין לสมוך על אירורים</b>	
273	<b>ב' ייצוג גרפי של משפטים בגיאומטריה</b>	
275	<b>ג' מעגל היחידה</b>	



## הקדמה

מתמטיקאים ידועים לשנchez כי הם מפרסמים הוכחות מסודרות וברורות, ומסתירים את העבודה של הנימיות שלהם מלא עד אפס מקום בניסיונות שהובילו למבואות סטומים וטעויות. תלמידים לא נחשפים לתהילcis למציאת הפתרונות, וזה עלול לתשכל אותם. הם צריכים ללמידה לא להתייאש כאשר הם לא מצליחים לפתרן בעיות בניסיון הראשוני. לא חסרים פתרונות של בחינות הבגרות, אבל גם הם "נקויים" ללא ניסיונות שלא צלחו ודיוונים על דרכי החשיבה שהובילו לפתרונות.

בחוברת זו פתרונות לבחינות הבגרות שאלון 806 מהשנים תשע"ד עד תשע"ח. אני משתמש לתאר את חוויתי בחיפוש פתרונות, כגון הבנה מוטעית של ניסוח השאלה, מლכודות שנפלתי בהם ופתרונות חלופיים שמצאת. בסוף כל פרק רשםתי המלצות שגיבשתי לאורך העבודה.

השווהתי את הפתרונות שלי לפתרונות המופיעים בראש, אבל הפתרונות הם שלי ובסגנון שלי. קיצרתי בהצגת חישובים ברורים ואני משתמש תמיד בדרכים מקובלות להצגת פתרונות, כגון טבלאות בעיות תנואה.

## תנוועה והספק

הצעה של אביתל אלבום-כהן כיוונה אותה לפתח את תהליך הפתרון של בעיות הללו באמצעות תרשימים דו-ממדיים. מצאת שהתרשימים מאוד עוזרים בזיהוי הקשרים בין קטיעי התנוועה ובכתיבת הנוסחאות. ניתן להיעזר בתרשימים דו-ממדיים גם בעיות הספק שיש להן מבנה דומה לבעיות תנואה. התרשימים קלים מאוד לציר ומוסילים גם אם קני המידה לא מדויקים, כך שניתנו להשתמש בהם כאשר פתרים בחינות.

הציר האופקי בתרשימים הוא ציר הזמן, והציר האנכי הוא ציר המרחק בעיות תנואה וציר העבודה בעיות הספק. היתרונו של ייצוג זה הוא שמהירות וההשפעים מוצגים כSHIPועים של הקווים. ככל שהמהירות או ההפסק גבוהה יותר, הקו תלול יותר. לכל דמות (מכונית, סירה, צבע, וכדומה) צירתי קו עבור כל קטיע בתנוועה או בעבודה.

המאמר "פתרונות שונים בעיות הספק באמצעות גרפיים" מאת אביתל אלבום-כהן וגיאיסון קופר. עליה גיליון 51, מרץ 2015, עמ' 14-19, מביא פתרונות גיאומטריים עבור בעיות הספק.

## סדרות

לדעתי, שאלות על סדרות הן הכי קלות כי בסופו של דבר יש יחסים ברורים בין איברים עוקבים בסדרה (חשבונית או הנדסית), ובין האיברים לסכומים. עם זאת, מצאת שקל מאד לטעות, למשל, אם מבלבלים בין האינדקסים של איברי הסדרה לבין ערכיהם.

## הסתברות

הчисובים בעיות עם הסתברות פשוטים, אבל קשה לתרגם את העלילה המילולית למשוואות הנכונות. הדבר נכון במיוחד כאשר השאלה שואלת על הסתברות מותנית. מצאת עשר רב של ביטויים המכוונים להסתברות מותנית (ראו בסעיף המלצות), וזה לא מקל על הפתרון.

קושי נוסף נובע מהעובדה שיש שתי דרכים לארגו את המידע הנוכחי ואת החישובים : בטבלה או בעץ. שאלת המנוסחת "גם א וגם ב' מכוונת לחיתוך של הסטבריות ולבלה, לעומת שאלת המנוסחת "א ואחר כך ב'" שמכוונת למכלפה של הסטבריות ולהצגה בעץ.

### **גיאומטריה וטריגונומטריה**

הפתרונות מביאים ציטוטים של המשפטים המתקדמיים מתוך רשימה המשפטים שהתלמידים רשאים לצטט ללא הוכחה. כל אחד זוכר ללא קושי משולשים חופפים לפי צ.צ.צ., אבל קשה יותר לזכורמשפטים כגון שוויין הזוגיות בין משיק למיתר.

יש חשיבות רבה לצירורים גדולים עליהם ניתן לרשום ערכים, נעלמים ובניות עזר בזורה ברורה. אני ממליץ להזכיר צירורים שונים לסעיפים שונים של אותה שאלת.

### **חשבון דיפרנציאלי וrintegrali**

בחדו"א שיטות ברורות לחישוב תחומי הגדרה, נקודות הקיצון והאסימפטוטות, אבל לעיתים החישובים ארוכים. חשוב לדיבוק כי שגיאה בסעיף אחד תגרום לשגיאות בהמשך. הספר "לימוד ולמד אנליזה" מציג את הנושא בזורה מקיפה ביותר, ומהווה משאב חשוב למורה.

[http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Mazkirut\\_Pedagogit/Matematika/ChativaElyona/Analiza.htm](http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Mazkirut_Pedagogit/Matematika/ChativaElyona/Analiza.htm).

### **נספחים**

בנספח א' "הוכחה" ידועה שכל משולש שווה שוקיים. ההוכחה מראה שתרשימים אינם תחליף להוכחה. נספח ב' מכיל צירורים צבעוניים של מספר משפטי מתקדמיים בגיאומטריה. בנושא כל כך מוחשי קל יותר לזכור ציור ולא תיאור מיולי מסורבל. כדי להציג עמודים אלה בדף.

נספח ג' עוסק במעגל היחידה. כאשר אני פותר בעייה בטריגונומטריה, אני מצייר בצד תרשימים של מעגל היחידה כדי לראות את הקשרים של הפונקציות הטריגונומטריות של זוגיות שונות. למשל, לא כדאי לזכור זוגיות כגון  $\sin \theta = \sin(180 - \theta)$  אלא לשחזר אותן מתרשימים של מעגל ייחידה.

### **הבעת תודה**

אני מודה לד"ר רונית בן-בסט לוי ולד"ר אביתל אלבום-כהן שלוו אותו בצלילה למתמטיקה של בתים ספר תיכוניים, חמישים שנה לאחר שסיימתי את לימודיו!

# פרק 1 תנועה והספק

## 1.1 קיז תשע"ח מועד ב

המרחק מביתה של רננה עד בית הספר הוא 500 מטרים.

רננה יצאתה מביתה אל בית הספר והלכה ב מהירות קבועה.

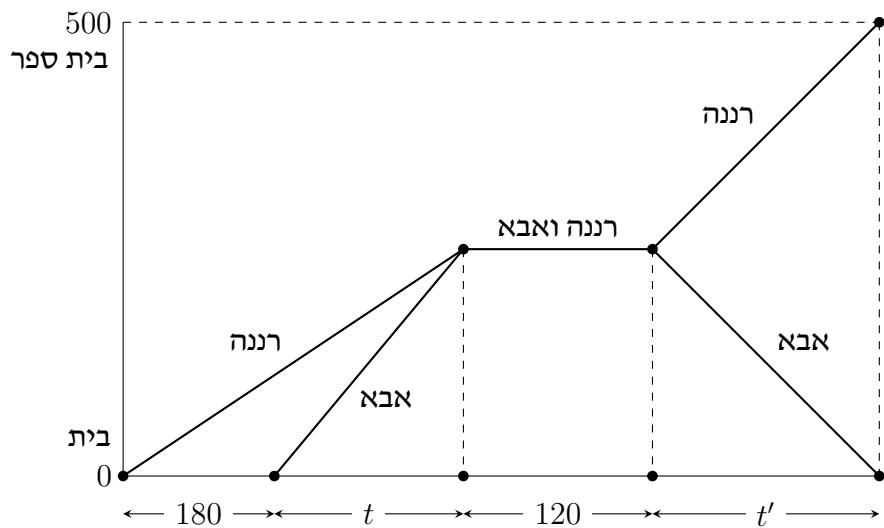
3. דקוט לאחר שיצאה מביתה, יצא משם אביה בעקבותיה כדי להביא לה כריך ששכחה. הוא רץ ב מהירות קבועה של 2.5 מטרים לשנייה.

כאשר הגיע האב לרננה הם עמדו ושותחו במשך 2 דקות והוא נתן לה את הכריך, ולאחר מכן הלך כל אחד מהם לדרךו – רננה לבית הספר והאב בחזרה אל הבית. רננה המשיכה ללכת באותה מהירות שהלכה לפני כן, והאב הלך ב מהירות של 1.5 מטרים לשנייה.

אביה של רננה הגיע אל הבית לבדוק באותו הזמן שהגיעה רננה אל בית הספר.

א. חשב את מהירות ההליכה של רננה.

ב. כמה זמן עבר מן הרגע שרננה יצאתה מביתה ועד שהגיעה אל בית הספר?



נסמן:  $v = \text{מהירות ההליכה של רננה}$ ,  $t = \text{זמן עד למפגש בין רננה לאביה}$ ,  $t' = \text{זמן מהפרידה בין רננה לאביה עד שנייהם מגיעם ליעדם}$ .

מהתרשים אפשר לראות שוויוניות בין מרחקים: (א) המרחק שרננה הלכה עד למפגש שווה למרחק שאביה הלך עד למפגש, (ב) המרחק שאביה הלך עד למפגש שווה למרחק שרננה הלכה בחזרה מהמפגש, (ג) המרחק לבית הספר שווה למרחק שרננה הלכה עד למפגש ועוד המרחק שהיא הלכה מהמפגש עד לבית הספר.

**סעיף א**

תחילה נשווה את המרחקים שאבא עבר מהבית עד למפגש ובחזרה :

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}t &= \frac{3}{2}t' \\ t' &= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}t = \frac{5}{3}t.\end{aligned}$$

המשך בהשוואת המרחק עד למפגש של שניים :

$$v(t + 180) = \frac{5}{2}t.$$

אנו זוקקים לשתי משוואות עם שני הנעלמים כדי למצוא את  $t$ . אי-אפשר למצוא משואה שנייה מהתונינים מהמפגש עד ליעדים שלהם, כי המרחקים לא בהכרח שווים. במקומות זה נמצא דרך אחרת להשוות את המרחק שעוברים רננה ואבא מהבית עד למפגש. עבור אבא משתמששוב ב- $t - \frac{5}{2}$ . עבור רננה נשים לב שנייתן לחשב את המרחק המבוקש עד למפגש כהפרש בין המרחק מהבית לבית הספר (500) לבין המרחק שהוא עוברת מהמפגש ועד לבית הספר'  $vt'$  :

$$\frac{5}{2}t = 500 - vt' = 500 - v\left(\frac{5}{3}t\right).$$

כעת יש לנו שתי משוואות בשני הנעלמים  $t, v$ . מהראשון נחישב :

$$t = \frac{360v}{5 - 2v},$$

ונציב בשני :

$$\frac{5}{2}\left(\frac{360v}{5 - 2v}\right) = 500 - v\left(\frac{5}{3} \cdot \frac{360v}{5 - 2v}\right).$$

נפשט את המשוואה ונקבל משואה ריבועית עבור  $v$  :

$$\begin{aligned}6v^2 + 19v - 25 &= 0 \\ (v - 1)(6v + 25) &= 0.\end{aligned}$$

המהירות חייבת להיות חיובית ולכן הפרטונו היחיד הוא  $v = 1$ .

**סעיף ב**

$t = \frac{360v}{5 - 2v}$  נקבע  $t = 120$ , ונסכם את פרקי הזמן על הציר האופקי בתרשים :

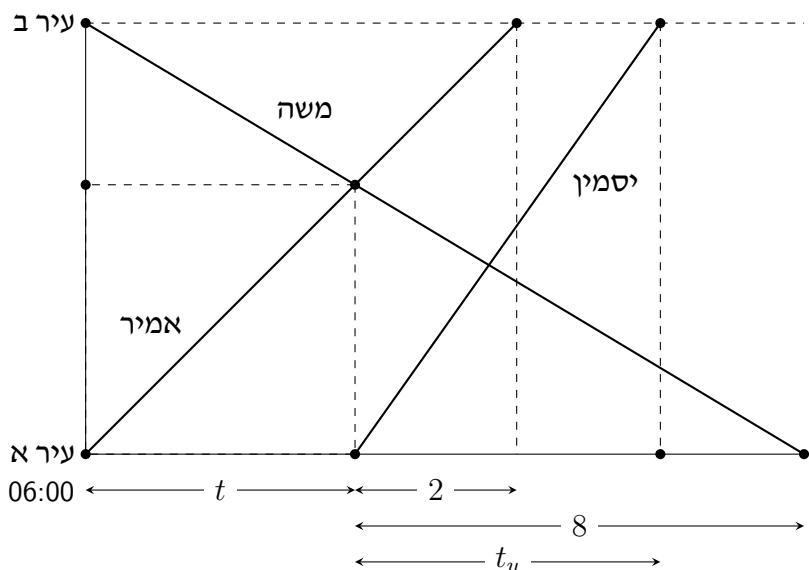
$$180 + 120 + 120 + \frac{5}{3} \cdot 120 = 620. \quad (\text{שניות})$$

**הערה**

שיםו לב למילכודת שקל ליפול לתוכה : הזמנים נתונים בדקות ומהירותיו נתונות במטרים שנייה !

## 1.2 קיז תשע"ח מועד א

- שני רוכבי אופניים, אמיר ומשה, יצאו בשעה 06:00 זה לכיווןו של זה. אמיר רכב במהירות קבועה מעיר א לעיר ב, ומשה רכב במהירות קבועה מעיר ב לעיר א. אמיר ומשה עברו זה על פני זה והמשיכו כל אחד ליעדו. אמיר הגיע לעיר ב שעתים אחרי שעבר על פני משה, ואילו משה הגיע לעיר א 8 שעות אחרי שעבר על פני אמיר.
- א. באיזו שעה עברו אמיר ומשה זה על פני זה?
- נסמן את מהירותם נסיעתו של אמיר באות  $V$ .
- בדיק כאשר עברו אמיר ומשה זה על פני זה יצא יסמין, רוכבה על אופנו, מעיר א לעיר ב, במהירות קבועה. נתון שישמן הגיע לעיר ב אחרי אמיר, אך לפני שהוא הגיע לעיר א.
- ב. (1) הבע באמצעות  $V$  את המרחק בין עיר א לעיר ב.
- (2) הבע באמצעות  $V$  את טווח המהירות האפשרי של יסמין.



נסמן:  $t =$  הזמן עד למפגש בין אמיר למשה,  $t_y =$  זמן הנסיעה של יסמין מעיר א לעיר ב,  $v_a, v_m, v_y =$  מהירותם של אמיר, משה ויסמין.

### סעיף א

מהתרשים ניתן לראות שיש **שלושה** ביטויים עבור המרחק בין הערים: (א) הרחק שנסע אמיר, (ב) המרחק שנסע משה, ו- (ג) סכום המרחקים שנסעו אמיר ומשה עד למפגש:

$$tv_a + tv_m = (t + 2)v_a = (t + 8)v_m.$$

משני הביטויים הראשונים אנו מקבלים:

$$\frac{v_a}{v_m} = \frac{t}{2}.$$

**נציב בשני הביטויים האחרונים :**

$$(t+2) \cdot \frac{tv_m}{2} = (t+8)v_m .$$

$t_m$  מוצטמצם ונקבל משווה ריבועית  $16 - t^2$  עם הפתרון החובי  $t = 4$ .

### **שימו לב**

יש נטייה לעצור כאן כאשר חישבנו את הזמן  $t$ , אבל עיון חוזר בשאלת מראה שהיא מבקשת את **השעה של המפגש** שהיא 10:00.

### **סעיף ב**

המרחק בין הערים הוא  $v_a(t+2) = 6V$  ולכן המרחק הוא  $6v_a = 6V$  (הסימן הנตอน שונה מ- $v_a$  שבחרתי).

### **סעיף ג**

נתון שיסמין מגיע לעיר באחרי אמיר ולפניהם משה. מהתרשים רואים ש:

$$2 < t_y < 8 .$$

זמן הוא מרחק חלק מהירות ואת המרחק חישבנו בסעיף ב:

$$2 < \frac{6V}{v_j} < 8 .$$

מכאן ש:

$$\frac{3}{4}V < v_j < 3V$$

כי כיווני האי-שווינו מתחלפים עם היפוך השבר.

### 1.3 חורף תשע"ח

בכפר נופש יש שתי בריכות: בריכה א' ובריכה ב'.

הנפח של בריכה א' הוא  $V_1$  והנפח של בריכה ב' הוא  $V_2$ .

את הבריכות ממלאים באמצעות 4 צינורות בעלי אותו הספק.

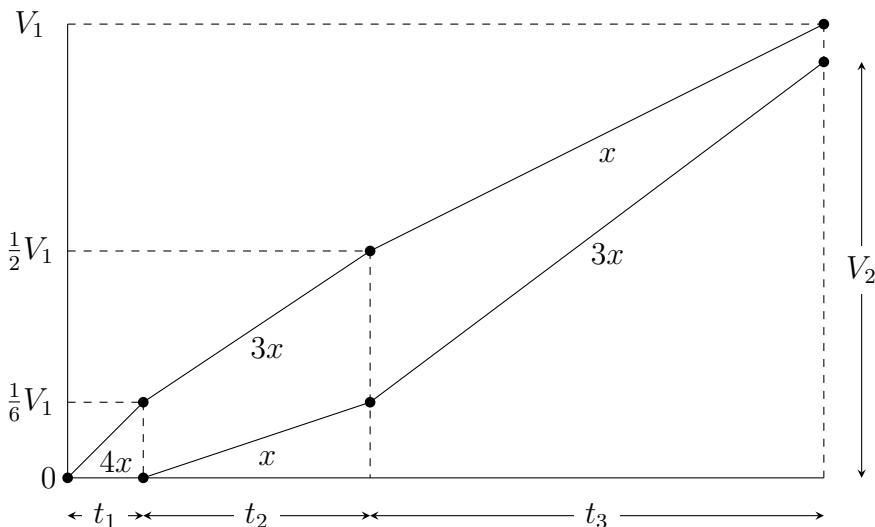
ביום כלשהו שתיהן הבריכות היו ריקות.

התחלו למלא את בריכה א' באמצעות ארבעת הצינורות. כאשר הת מלאה בריכה א' ל $\frac{1}{6}$ | מנפחה, העבירו אחד מן הצינורות לבריכה ב' והתחלו למלא אותה באמצעותם. כאשר הת מלאה בריכה א' עד מחציתה, העבירו עוד שני צינורות למילוי בריכה ב'.

מילוי שתיהן הרכicas הסתיים באותו הזמן.

כל הצינורות הזרימו מים ללא הפסקה עד שהת מלאו שתיהן הרכicas.

$$\text{חישוב היחס} \cdot \frac{V_1}{V_2}$$



נסמן:  $x$  = קצב המילוי של הצינורות ("אותו הספק")  $t_1, t_2, t_3$  = פרקי הזמן בין העברת הצינורות.  
הקו העליון בתרשים מתאר את המילוי של בריכה א', והקו התחתון מתאר את מילוי של בריכה ב'. שימושו לב שיכל שיוטר צינורות מלאים בריכה, השיפוע של הקו תלול יותר.

יש לנו שלוש קבועות של נתונים:  $x$ , שלושת ה- $t_i$  ושני ה- $V_i$ . אם נצליח להיפטר מ- $x$  או מה- $t_i$ , השני יצטמצם כאשר נחלק את ה- $V_i$ .

נתחיל עם משוואות ההספק עבור בריכה א', כאשר בכל פרק זמן ממלאים את ההפרשיות של הנפחים, למשל, בזמן  $t_2$  בריכה א' מת מלאת מושנית מנפחה לחצי מנפחה:

$$\begin{aligned} 4xt_1 &= \frac{1}{6}V_1 \\ 3xt_2 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)V_1 \\ xt_3 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)V_1. \end{aligned}$$

נשתמש במשוואת כדי לחשב את פרקי הזמן כתלות בנפח בבריכה:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{V_1}{24x} \\ t_2 &= \frac{V_1}{9x} \\ t_3 &= \frac{V_1}{2x}. \end{aligned}$$

מהתרשים רואים שאפשר לבטא את הנפח של  $V_2$  כסכום: הנפח שמתמלא בפרק הזמן  $t_2$  ועוד הנפח המתמלא בפרק הזמן  $t_3$ . כאשר נציב את המשוואות שקיבלנו עבור פרקי הזמן, נקבל את הנפח של  $V_2$  כתלות ב-  $V_1$  בלבד, כי המשתנה  $x$  מצטמצם:

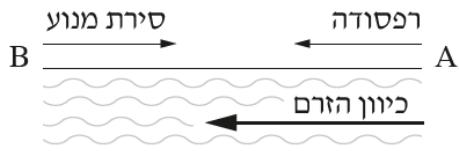
$$\begin{aligned} V_2 &= xt_2 + 3xt_3 = \frac{xV_1}{9x} + \frac{3xV_1}{2x} = \frac{29}{18}V_1 \\ \frac{V_1}{V_2} &= \frac{18}{29}. \end{aligned}$$

#### הערה

קיבלנו שהנפח של בריכה ב גדול מהנפח של בריכה א, עובדה שלא ידעתו כאשר ציירתי את התרשים עם נפח בריכה א גדול מນפח בריכה ב! אין זהה חשיבות. מטרת התרשים היא להציג את התסיטית כדי שנוכל לכתוב את המשוואות הנכונות.

פרט מעניין הוא שפרק הזמן הראשון  $t_1$  לא נחוץ לפתורון, כי המילוי של בריכה ב מתבצע בשני שלבים לאחר העברת הצינור הראשון.

## 1.4 קיז תשע"ז מועד ב



הערים A ו- B נמצאות על גדת נהר הזורם במהירות קבועה. כיוון הזורם הוא מ- A ל- B. מן העיר B יצא סירת למנוע לכיוון העיר A. הסירה שטה נגד כיוון הזורם.

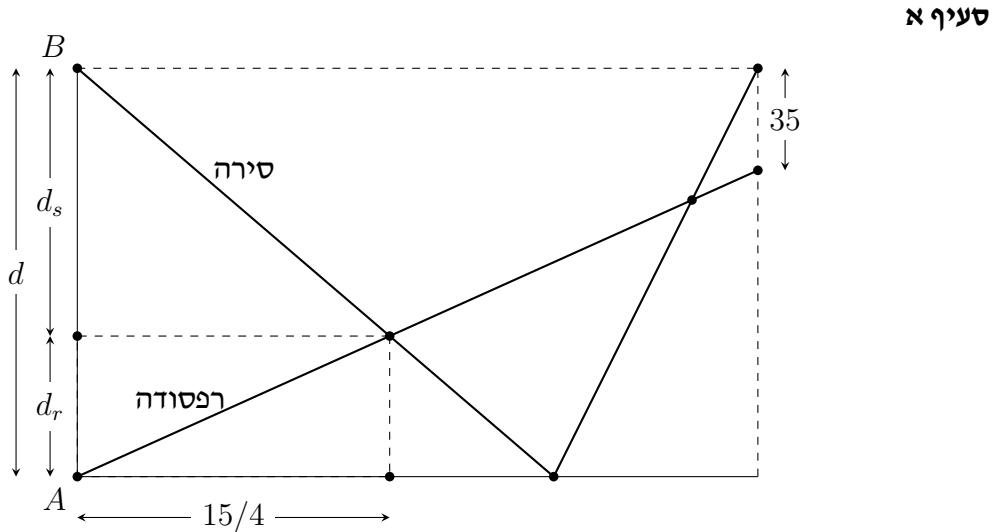
באותו הזמן יצא רפסודה מן העיר A לכיוון העיר B. הרפסודה שטה עם כיוון הזורם.

מהירות סירת המנווע במים עומדים היא קבועה וגדולה פי 4 ממהירות הזורם של הנהר. מהירות הרפסודה במים עומדים היא אפס. במים זורמים הרפסודה שטה עם הזורם.

הסירה והרפсадה נפגשו 3 שעות ו- 45 דקות אחרי יציאתן לדרכם המשיכו בדרך. סירת המנווע הגיעו לעיר A ומיד הסתובבה ושטה בחזרה לעיר B. כאשר סירת המנווע הגיעו לעיר B, הרפסודה הייתה במרחק של 35 ק"מ מן העיר B.

א. חשב את מהירות הזורם ואת מהירות סירת המנווע במים עומדים.

ב. בדרך חזרה לעיר B פגשה סירת המנווע את הרפסודה בפעם השנייה. כמה זמן עבר מרגע יציאתה של הרפסודה מן העיר A עד שהסירה והרפсадה נפגשו בפעם השנייה?



נסמן:  $d$  = המרחק בין שני הנמלים,  $d_s = d_r$ ,  $d_s =$  מרחק ההפלגה של הסירה והרפсадה עד למפגש הראשון,  $v_z =$  מהירות הזורם,  $v_s =$  מהירות הסירה במים עומדים. ציר הזמן הוא בשעות.

הזמן עד למפגש הראשון שווה עבר הסירה והרפסודה ויחס המהירות של הסירה והזרם ידוע, כך שניתן  
לכთוב את משוואות התנועה עד למפגש. נתון :

$$v_z = v_s/4.$$

**במפגש הראשון :**

$$d = d_s + d_r = \frac{15}{4}(v_s - v_z) + \frac{15}{4}v_z.$$

**מהירות הזרם מתאפסת ומתקובל :**

$$d = \frac{15}{4}v_s.$$

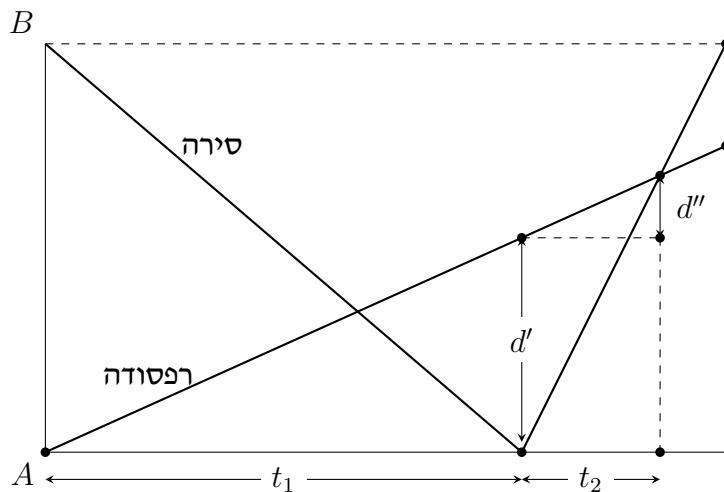
כעת נכתוב משוואות תנועה כדי להשווות את הזמן עד סוף הסיפור. בפרק הזמן שהסירה מפליגה ל-*A* ובחזור ל-*B* (מרחק של  $d + d'$ ) מרחק של  $d$ , הרפסודה מפליגה מ-*A* ומגעה "כמעט" לנמל *B*:

$$\frac{d}{v_s - v_z} + \frac{d}{v_s + v_z} = \frac{d - 35}{v_z}.$$

מןנו על יחס המהירות ומחישוב המרחק, נציב עבר  $v_z$  ו- $d$ , ונקבל משווה עם נעלם אחד בלבד,  $v_s$ .  
הפתרון הוא  $v_s = 20$  ויחס המהירות  $5 = v_z$ . נחשב גם  $d = 75$  שנוצר במשך.

### סעיף ב

נציר תרשים חדש עם סימונים הקשורים למפגש השני.



נסמן :  $t_1$  = הזמן שהסירה מפליגה ל-*A*,  $t_2$  = הזמן שהסירה מפליגה מ-*A* למפגש השני,  
המרחק שהרפסודה מפליגה בזמן  $t_1, t_2$ ,  $d''$  = המרחק שהרפסודה מפליגה בזמן  $t_2$ .  
קל לחשב  $t_1$  ממשוואת התנועה של הסירה :

$$t_1 = \frac{d}{v_s - v_z} = \frac{75}{20 - 5} = 5,$$

ולחשב את המרחק  $d'$  מהמשווה של הרפסודה :

$$d' = v_z t_1 = 5 \cdot 5 = 25.$$

נשאר לחשב את פרק הזמן  $t_2$ . בפרק זמן זה הסירה מפליגה מרחק  $d' + d''$  והרפסודה מפליגה מרחק  $d''$ .  
המהירות ידועות, כך שיש לנו שתי משוואות עבור  $t_2$ :

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{d' + d''}{v_s + v_z} = \frac{25 + d''}{25} \\ t_2 &= \frac{d''}{v_z} = \frac{d''}{5}. \end{aligned}$$

נפתרו את המשווה ונקבל:

$$\begin{aligned} d'' &= \frac{25}{4} \\ t_2 &= \frac{d''}{v_z} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

### שימו לב

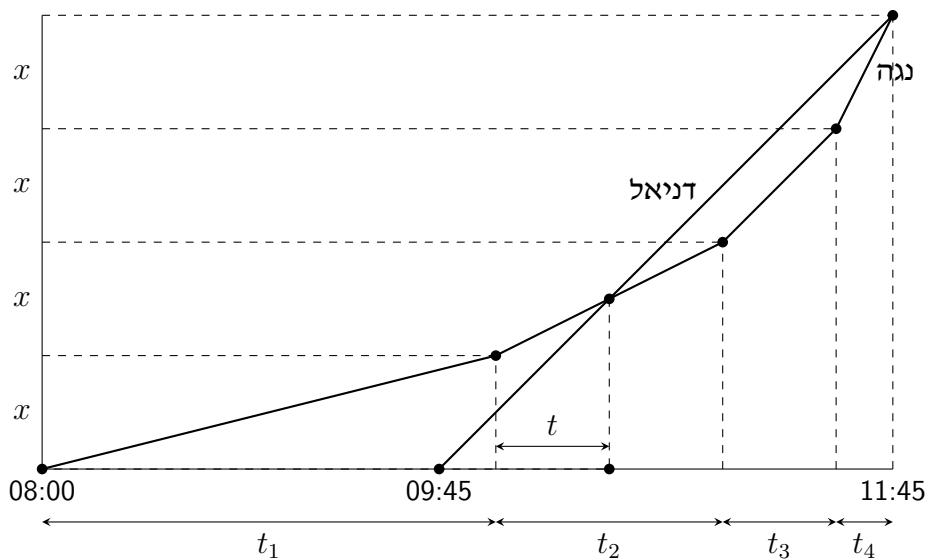
שהשאלה מבקשת את זמן ההפלגה של הרפסודה מנמל  $A$  ועד לפגש השני:

$$t_1 + t_2 = 5 + \frac{5}{4} = \frac{25}{4}.$$

## 1.5 קיז תשע"ז מועד א

נגה רכבה על אופניים במסלול באורך מסויים, בארכו מהירות קבועות. בכל פעם, לאחר שעברה מקטע שאורכו רבע מן המסלול, היא הגירה את מהירותה, ורכבה ב מהירות הגדולה פי 2 מ מהירות הקודמת. בקטע האחרון היא רכבה ב מהירות של 40 קמ"ש. נגה יוצאה לדרך בשעה 08:00 בבוקר וסיימה את המסלול בשעה 11:45 בבוקר.

- א. מהו אורך המסלול?
- ב. דניאל יצא לדרך באותו מסלול בשעה 9:45, ונסע ב מהירות קבועה לאורך כל המסלול. גם הוא הגיע ל סוף המסלול בשעה 11:45. באיזה מארבעת מקטעי המסלולפגש דניאל את נגה בפעם הראשונה, ובאיזה שעה?



נסמן :  $x$  = המרחק של מקטע,  $t_1, t_2, t_3, t_4 =$  זמן רכיבה של נגה בקטעים.  
נתון :  $40 =$  מהירות בקטע האחרון, אך מהירותים של המקטעים האחרים הן  $20, 10, 5$ .

### סעיף א

נתנו לנו הזמן הכולל ומהירותים (אמנם רק מהירות האחרונה נתונה, אבל אפשר לחשב את האחרות), והנעלם היחיד הוא המרחק. נסכם את הזמנים של המקטעים :

$$\left( \frac{x}{5} + \frac{x}{10} + \frac{x}{20} + \frac{x}{40} \right) = \frac{15}{4}.$$

הפתרון הוא  $x = 10$  וכאן אורך המסלול הוא 40 ק"מ.

**סעיף ב**

чисבנו את המרחק וננוו הזמן של דניאל. מהירותו של דניאל היא  $20 = 40/2$  קמ"ש. אפשר אולי למצוא נוסחה עבור המפגש, אבל פשוט יותר לעבור מקטע מקטע ולבזוק אם המפגש מתקיים באותו מקטע.

נעה עוברת  $10$  ק"מ בכל מקטע. מה המרחק שעובר דניאל עד סוף המקטע הראשון? נעה עוברת  $10$  ק"מ בכל מקטע הוא  $t_1 = 10/5 = 2$  דקות רוכב רבע שעה מ- $09:45$  ועד  $10:00$  ולכון המרחק שהוא עבר הוא רק  $5 = \frac{1}{4} \cdot 20$  ק"מ ומהפגש לא התקיים במקטע הראשון.

מתי נעה מגיעה לסוף המקטע השני?  $t_2 = 10/10 = 1$  דקות רוכב רבע שעה מ- $11:00$ . בשעה ורבע בין  $09:45$  ל- $11:00$  דניאל רוכב  $25 = \frac{5}{4} \cdot 20$  ק"מ, מרחק גדול מהמרחק של נעה, ולכן המפגש מתקיים במקטע השני.

נשאר רק לחשב את פרק הזמן בתוך המקטע השני עד למפגש, שנסמן  $t$ . כתוב משווה למרחקים השווים של נעה ודניאל. נעה רכבה  $10$  ק"מ עד סוף הקטע הראשון ודניאל רכב  $5$  ק"מ. מסוף הקטע הראשון, הםרכבו  $t$  שניות, כל אחד במהירות שלו:

$$\begin{aligned} 10 + 10t &= 5 + 20t \\ t &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**שימוש לב**

השאלה מבקשת את שעת המפגש. כבר חישבנו שתחילה המקטע השני בשעה  $10:00$ , ולכן שעת המפגש היא  $10:30$ .

## 1.6 חורף תשע"ז

שני צינורות א' ו-ב' מזרימים מים לבירכה בקצב קבוע.

כאשר צינור א' בלבד פתוח, הבירכה הריקה מותמלהת לגמרי ב-  $m$  שעות.

כאשר צינור ב' בלבד פתוח, הבירכה הריקה מותמלהת לגמרי ב-  $2m$  שעות.

כאשר שני הצינורות פתוחים במקביל, הבירכה הריקה מותמלהת לגמרי ביותר מ-  $4$  שעות.

ביום מסויים הבירכה הייתה ריקה. פתחו את צינור א' בלבד למשך שעתיים.

אחר מכן גם את צינור ב', ושני הצינורות היו פתוחים בו בזמן שעתיים נוספות.

בתום אותן שעתיים נוספות יותר מ-  $\frac{1}{2}$  הבירכה הייתה מלאה.

א. מצא את תחום הערבים האפשריים של  $m$ .

ב. ביום אחר  $\frac{1}{2}$  הבירכה הייתה מלאה. פתחו את שני הצינורות, אלא שבשל התקלה טכנית

צינור ב' רוקן מים מן הבירכה במקום למלא בה מים. שני הצינורות היו פתוחים בו בזמן

במשך שעה אחת, ובמהלכה צינור א' מילא מים לבירכה וצינור ב' רוקן ממנו מים.

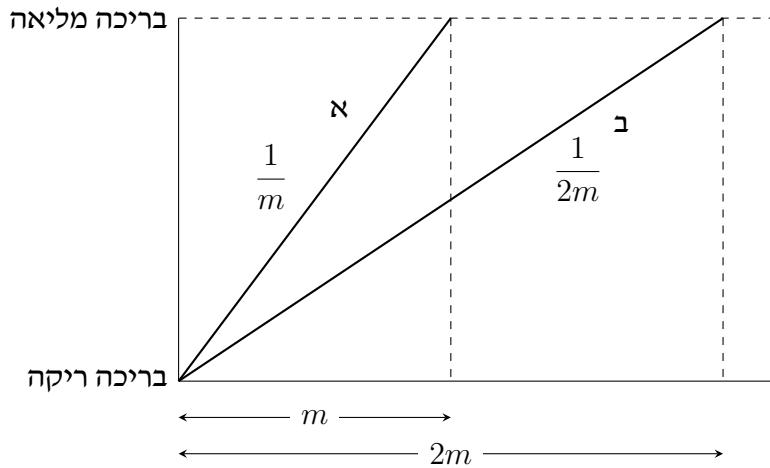
בתום אותה שעה תוכנה התקלה, ושני הצינורות החלו למלא את הבירכה יחד, עד שהיא

התמלהת לגמרי בעבר שעתיים וחצי נוספת.

נתון שהקצב שבו צינור ב' מרוקן מים מהbirכה שווה לקצב שבו הוא ממלא אותה במים.

מצא את  $m$ .

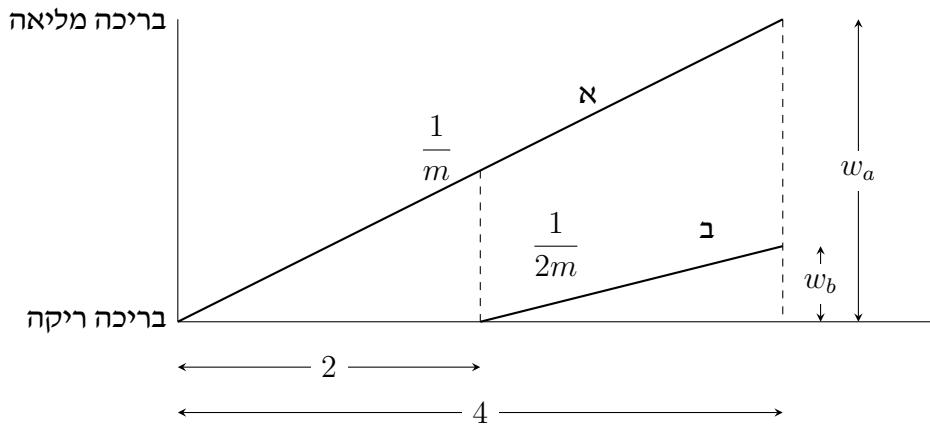
### סעיף א



כאשר שני הצינורות פתוחים, ההספק הכלול הוא סכום ההספקים של הצינורות. לפי הנתונים:

$$1/\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2m}\right) > 4,$$

$$m < 6.$$



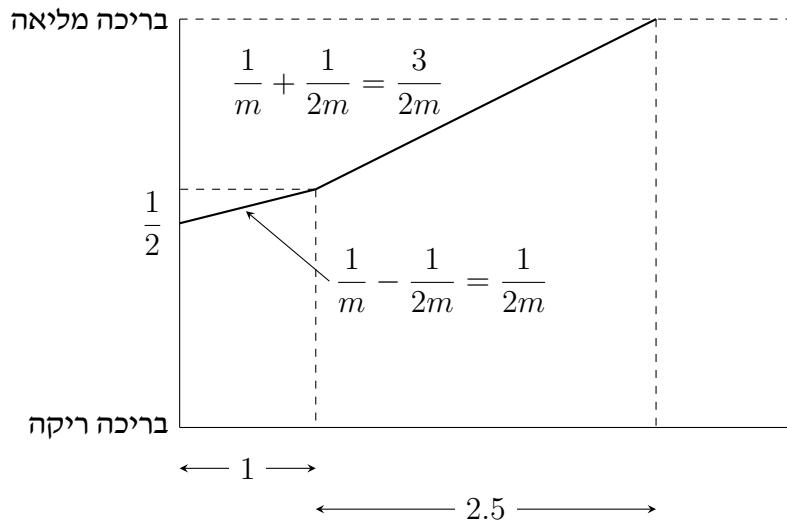
נסמן:  $w_a = \text{כמות המים שמיילא צינור א}, w_b = \text{כמות המים שמיילא צינור ב.}$

כמויות המים לאחר ארבע שעות שווה לסכום הכמותות שכל צינור מילא והוא לפחות ממחצית הבריכה:

$$w_a + w_b = \frac{1}{m} \cdot 4 + \frac{1}{2m} \cdot 2 > \frac{1}{2}.$$

. $m < 10$ ,

**סעיף ב**



כדי למלא את הבריכה, מתחילה ממחצית הכמות, מוסףים (מחסירים כי שליליין) את הכמותות של השעה הראשונה, ומוסיפים את הכמותות מפרק הזמן השני של שעתיים וחצי:

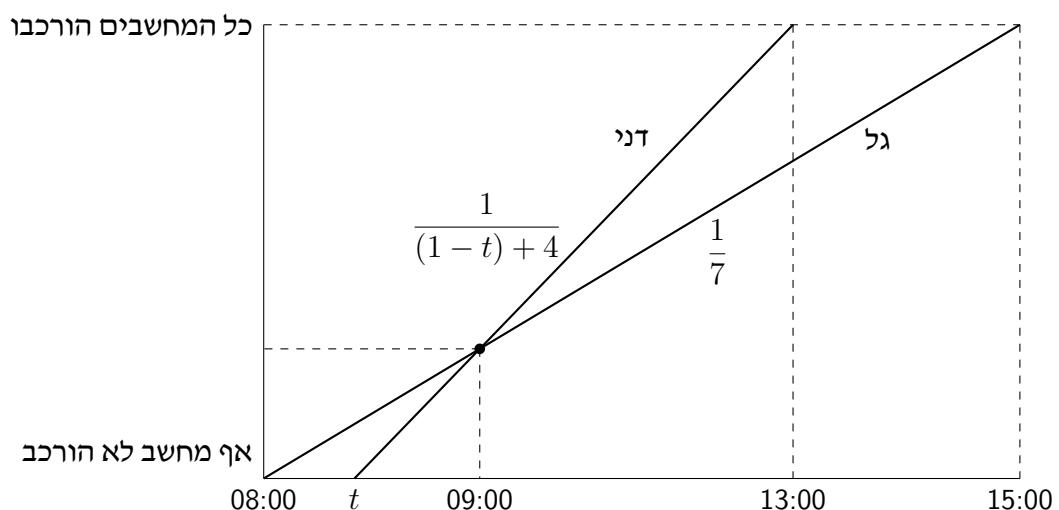
$$\frac{1}{2} + \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{2m} \right) \cdot 1 + \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{2m} \right) \cdot 2.5 = 1.$$

. $m = 8.5$  הפטרון הוא

## 1.7 קיז תשע"ו, מועד ב

1. שני הטענים גל ודני עבדו בהרכבת מחשבים. קצב העבודה של כל אחד מהם קבוע.
- ביום העבודה הראשון הרכיבו שני הטענים אותו מספר של מחשבים.
- gal התחל ל לעבוד בשעה 08:00, וסיים ל לעבוד בשעה 15:00.
- דני התחל ל לעבוד לאחר השעה 08:00 ולפני השעה 09:00, וסיים ל לעבוד בשעה 13:00.
- ידעו ש gal ודני הרכיבו אותו מספר של מחשבים מהרגע שככל אחד מהם התחל ל לעבוד ועד השעה 09:00.
- כמה זמן אחרי השעה 08:00 התחל דני ל לעבוד?
- ביום העבודה השני, התחילו gal ודני לעבוד באותו שעה וסיממו לעבוד באותו שעה.
- ביום זה הם הרכיבו סך הכל יחד את אותו מספר מחשבים שהרכיבו יחד ביום העבודה הראשון.
- כמה זמן עבדו הטענים ביום העבודה השני?

### סעיף א



נסמן:  $t$  = הזמן שDani התחל בהרכבה.  
נשתמש בנתונים כדי למצוא ביטויים עבור ההספקים של Dani וGal. נתייחס לכך המחשבים שהרכיב כל אחד כיחידה אחת. Gal עבד שבע שעות ולכן ההספק שלו הוא  $\frac{1}{7}$ , ודני עבד  $t - 1$  עד לשעה 09:00 ולאחר מכן עוד ארבע שעות. ההספק שלו הוא  $\frac{1}{(1-t)+4}$ .

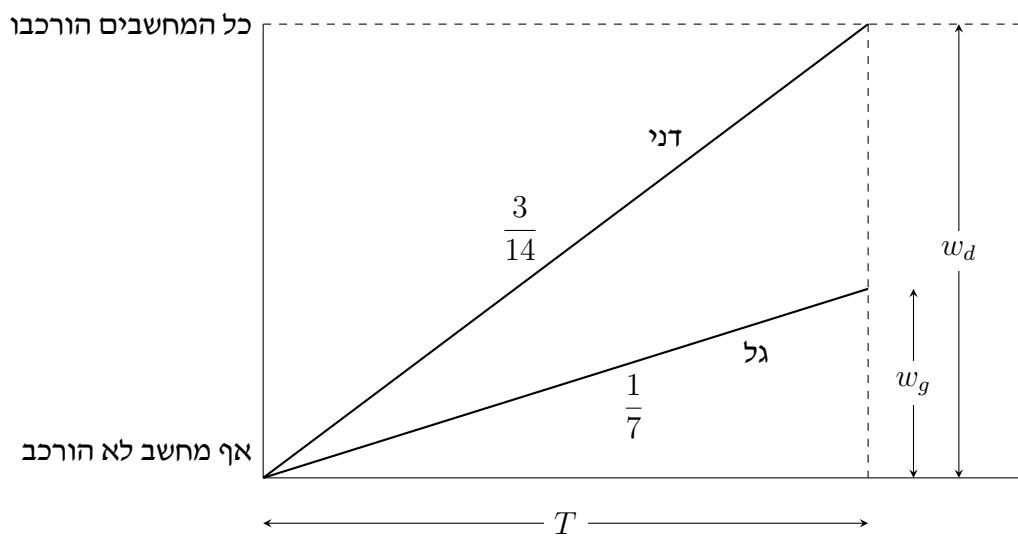
נתון שבעה 09:00 שניהם סיימו להרכיב אותו כמות של מחשבים :

$$\frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{1}{(1-t)+4} \cdot (1-t),$$

ולכן דני התחיל לעבוד  $t = \frac{1}{3}$  שעה לאחר 08:00.

### סעיף ב

נציר תרשימים חדש עם המידע הרלוונטי לסעיף זה.



נסמן :  $T =$  הזמן שניהם עבדו ביום השני. על התרשימים סיימו גם את כמות העבודה שעשה כל אחד מהם :  $w_g =$  העבודה של גל,  $w_d =$  העבודה של דני.

בסעיף א הערכנו שההספק של גל הוא  $\frac{1}{7}$ , וחישבנו שDani עבד :

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) + 4 = \frac{14}{3}$$

שעות. ההספק שלו הוא :

$$\frac{1}{\frac{14}{3}} = \frac{3}{14}.$$

נתון שהם סיימו אותה כמות עבודה כמו היום הראשון :

$$1 + 1 = w_g + w_d = \frac{1}{7}T + \frac{3}{14}T,$$

$$.T = \frac{28}{5}$$

## 1.8 קיז תשע"ו מועד א

שתי מכוניות יצאו באותו זמן מעיר א' לעיר ב'.

המרחק בין שתי הערים הוא 300 ק"מ.

המכונית הראשונה נסעה ב מהירות הגדולה ב- 25 קמ"ש מהמהירות של המכונית השנייה.

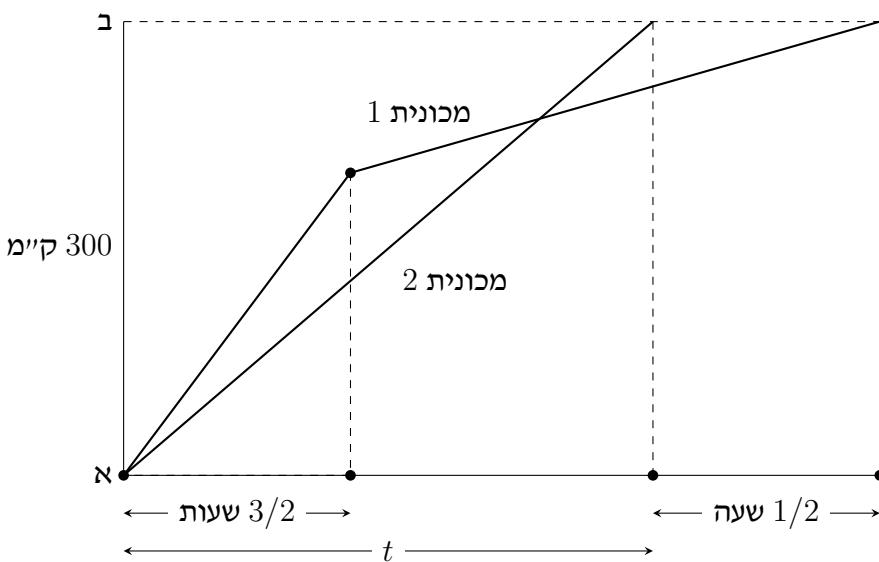
כעבור 1.5 שעות מרגע יציאה מעיר א', הקטינה המכונית הראשונה את מהירותה לחצי מהירותה הקודמת, והגעה לעיר ב'  $\frac{1}{2}$  שעה אחרי המכונית השנייה.

א. מצא את מהירות של המכונית השנייה אם ידוע שמהירותה גדולה מ- 60 קמ"ש.

ב. מצא כעבור כמה שעות מרגע יציאה מעיר א' ולפניהם שהמכונית השנייה השיגה את

המכונית הראשונה, היה המרחק בין שתי המכוניות 12.5 ק"מ

(מצא את שתי האפשרויות).



נסמן:  $v_1$  = מהירות התחלתית של מכונית 1,  $v_2$  = מהירות של מכונית 2,  $t$  = זמן נסעה של מכונית 2 מעיר א' עד לעיר ב'.

נתון:  $v_2 + 25 = v_1$ . השיפוע של הקוו של מכונית 1 גדולה מהשיפוע של הקוו של מכונית 2.

### סעיף א

שתי המכוניות נסעו אותו מרחק מעיר א' לעיר ב'. נכתוב את משוואות התנועה של שתי המכוניות:

$$\begin{aligned} v_1 \cdot \frac{3}{2} + \frac{v_1}{2} \left( \left( t - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} \right) &= 300 \\ v_2 t &= 300. \end{aligned}$$

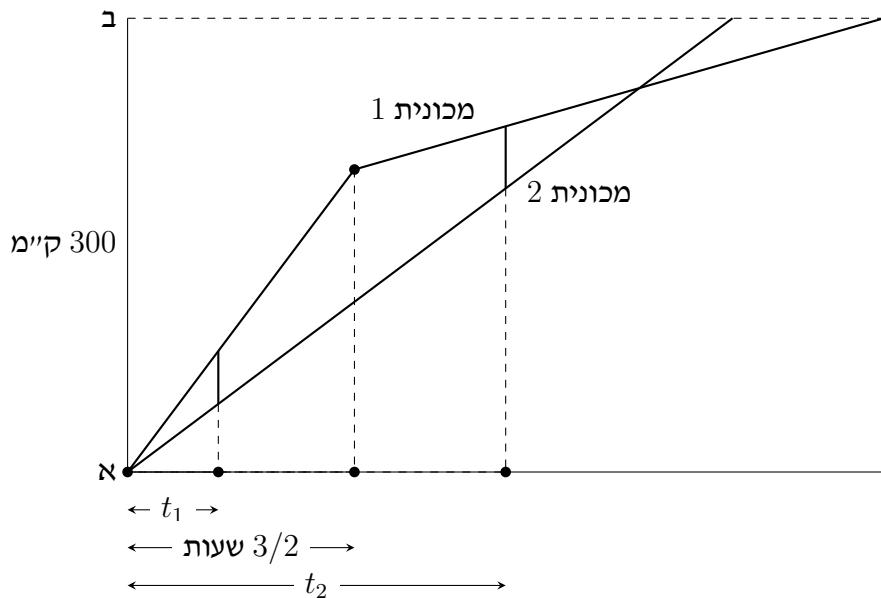
נציב  $v_2 + 25 = t$  במשוואת ראשונה ונקבל משווה ריבועית ב-  $v_2$ :

$$v_2^2 - 125v_2 + 3750 = 0.$$

השורשים הם 50, 75 ונתון  $75 > 50$ , לכן  $v_2 = 75$  קמ"ש.

## סעיף ב

נציר תרשים חדש עם המידע הרלוונטי עבור סעיף זה.



הקוים האנכיים הכלואים בין הקווים של שתי המכוניות מסמנים מרחק של 12.5 ק"מ. קו אחד הוא לפני שינוי מהירות בזמן  $t_1$  מתחילת הנסעה וקו שני לאחר שינוי מהירות.

בסעיף א' חישבנו  $v_2 = 75$  ו $v_1 = 100$  ולכן  $v_1 = v_2 + 25$ .

נכתוב את המשוואות עבור הפרשי המרחקים:

$$\begin{aligned} 100t_1 - 75t_1 &= 12.5 \\ \left(100 \cdot \frac{3}{2} + 50 \left(t_2 - \frac{3}{2}\right)\right) - 75t_2 &= 12.5. \end{aligned}$$

פתרונותם הם  $t = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{5}{2}$  שעות.

## 1.9 חורף תשע"ו

רוכב אופניים ורוכב אופנו עוצמם באותו רגע זה לקרה זה משני יישובים שונים.

הם נפגשו בעבר 3 שעות.

רוכב האופנו עבר  $\frac{2}{3}$  מהדרך שבין שני היישובים ב- 1.25 שעות פחות מזמן רוכב

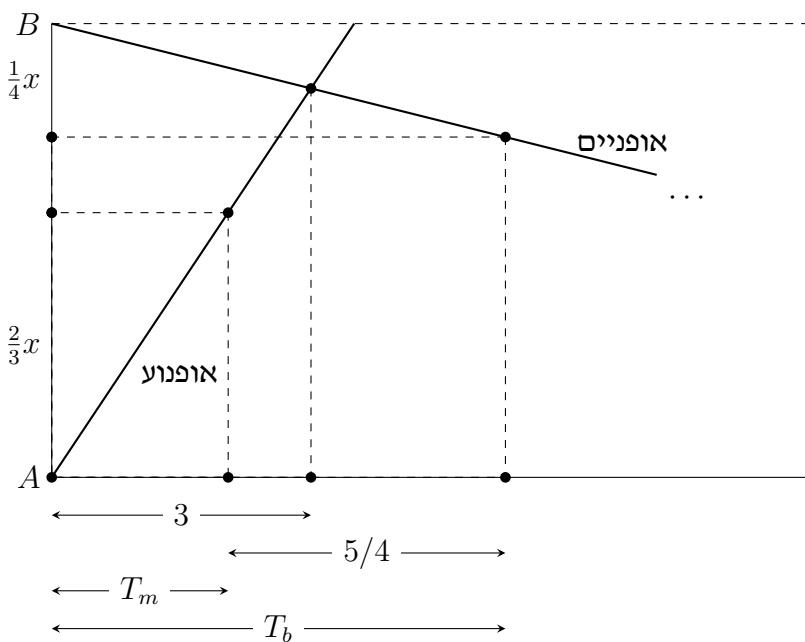
האופניים עבר  $\frac{1}{4}$  מהדרך שבין שני היישובים.

מהירותם הרוכבים אינן משתנות.

א. מצא פי כמה המהירות של רוכב האופנו גדול מה מהירותם של רוכב האופניים.

ב. מצא בכמה שעות עבר רוכב האופנו את כל הדרך שבין שני היישובים.

### סעיף א



נסמן:  $v_b$  = מהירות אופניים,  $v_m$  = מהירות אופנו,  $x$  = מרחק בין הערים,  $T_m$  = פרק הזמן שהאופנו עבר  $\frac{2}{3}$  מהמרחק,  $T_b$  = פרק הזמן שהאופניים עבר  $\frac{1}{4}$  מהמרחק.

כאשר שני כלי הרכב נפגשים סכום המרחקים שהם עברו הוא המרחק בין הנקודות. המרחק לא נתון ולכן אנו משתמשים בunnel  $x$ :

$$x = 3v_b + 3v_m.$$

הנתון השני הוא הקשר בין זמני הנסיעה של חלקו המרחק בין היישובים :

$$\frac{x/4}{v_b} = \frac{2x/3}{v_m} + \frac{5}{4}.$$

נציב עבור  $x$ , נסמן את היחס בין מהירותים  $r = \frac{v_m}{v_b}$  ונקבל משווהה הריבועית:

$$\begin{aligned} \frac{3v_b + 3v_m}{4v_b} &= \frac{2(3v_b + 3v_m)}{3v_m} + \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} + \frac{3}{4}r &= \frac{2}{r} + 2 + \frac{5}{4} \\ 3r^2 - 10r - 8 &= 0. \end{aligned}$$

$$.r = \frac{v_m}{v_b} = 4$$

**סעיף ב**

נתונה משווהת המרחק בין היישובים:

$$x = 3v_b + 3v_m.$$

נשתמש ביחס שהשכנו בסעיף א כדי לחשב את הזמן של נסיעת האופנוע:

$$\frac{x}{v_m} = \frac{3v_b + 3v_m}{v_m} = 3\frac{v_b}{v_m} + 3 = 3\frac{3}{r} + 3 = \frac{3}{4} + 3 = \frac{15}{4} \text{ שעות.}$$

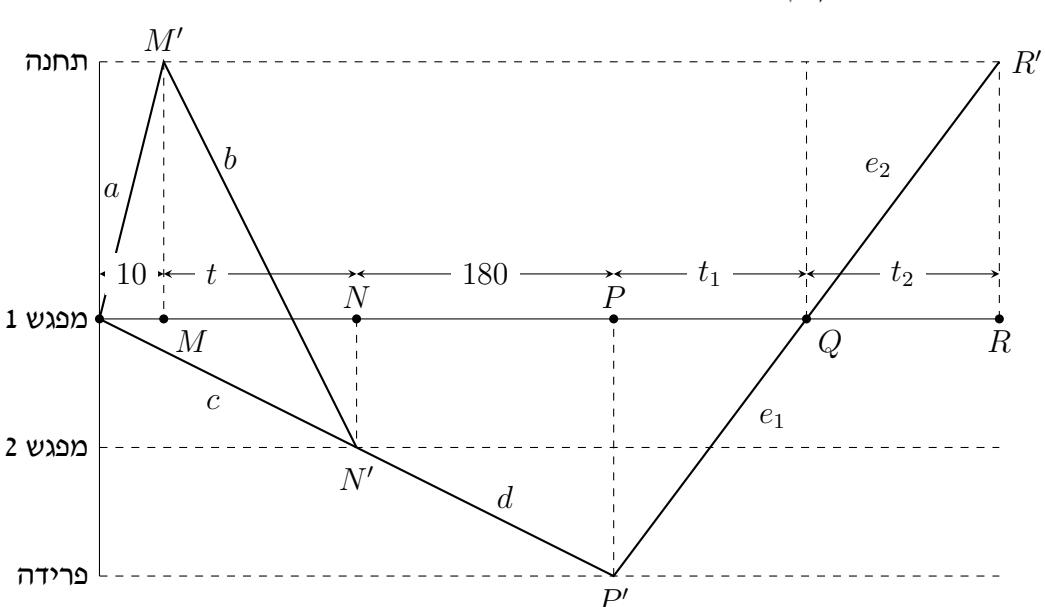
## 1.10 קיז' תשע"ה מועד ב

בזמן הנסיעה באוטובוס הבחן יוסי ברגע מסוים באימה שלו, הולכת ליד האוטובוס בכיוון הפוך לכיוון הנסיעה של האוטובוס. כעבור 10 שניות מהרגע שiosisי הבחן באימו, עצר האוטובוס בתחנה, וIOSI רץ מיד כדי להשיג את אימו. מהירות הריצה של IOSI גדולה פי 2 ממהירות הליכה של אימו, והיא  $\frac{1}{7}$  ממהירות הנסיעה של האוטובוס. כל המהירויות הן קבועות.

א. כמה זמן רץ IOSI כדי להשיג את אימו?

ברגע שiosisי הגיע את אימו, הם הילכו יחד 3 דקות ב מהירות הליכה של אימו (בכיוון הליכה שלה). מיד בתום 3 הדקות רץ IOSI בחזרה לתחנת האוטובוס שירד בה. (מהירות הריצה של IOSI היא כמו בסעיף א').

ב. כמה זמן רץ IOSI בחזרה לתחנת האוטובוס?



בתרשים סימנו את הקטעים:

$a = \text{IOSI נושא באוטובוס}$        $b = \text{IOSI רץ לפגישה עם אמא}$

$c = \text{אמא הולכת עד למפגש עם IOSI}$        $d = \text{IOSI ואמא חולכים ביחד}$

$e_1 + e_2 = \text{IOSI רץ חזרה לתחנה}$

נסמן :  $t$  = הזמן שיוסי רץ מהתחנה כדי להציג את אמא.

נסמן מהירותו :  $v_y = v_a = v_b = \text{אמא}$ ,  $v_y = \text{אוטובוס}$ .

$$\text{נתון} : v_y = v_b/7, v_y = 2v_a$$

### סעיף א

את הזמן  $t$  נוכל לחשב ממשוואות התנועה מהפגישה הראשונית (יוסי רואה את אימוי) ועד לפגישה השני (יוסי משיג את אימוי). המרחק מסומן  $NN'$  בתרשים. נוכל למצוא שתי משוואות עבור מרחק זה, אחד עבור אמא (קטע  $c$ ) :

$$v_a(t + 10),$$

ואחד עבור יוסי (קטעים  $a, b$ ) :

$$-v_b \cdot 10 + v_y t.$$

שיםו לב שבקטע  $a$  יוסי מתרחק מהפגישה ולכון המהירות שלילית.

נשווה את המרחקים ונציב את יחס המהירות הנתון :

$$\begin{aligned} v_a(t + 10) &= v_y t - v_b \cdot 10 \\ \frac{v_y}{2}(t + 10) &= v_y t - 7v_y \cdot 10. \end{aligned}$$

הפתרון הוא  $t = 150$  שניות.

### סעיף ב

מהתרשים קל לראות שני קטעי היקויים  $e_1, e_2$  מתארים את הריצה של יוסי בחזרה לתחנה. רואים גם שהמרחק  $PP'$  של  $e_1$  הוא גם המרחק שאמא הולכת, קטעים  $c, d$ . לפי התוצאה של סעיף א, לוקח לאמא  $10 + 150 + 180 = 340$  ויתר מרחק זה. נתון שיוסי רץ פי שניים מהר יותר מhalbילה של אמא, ולכן  $t_1 = 170$  שניות.

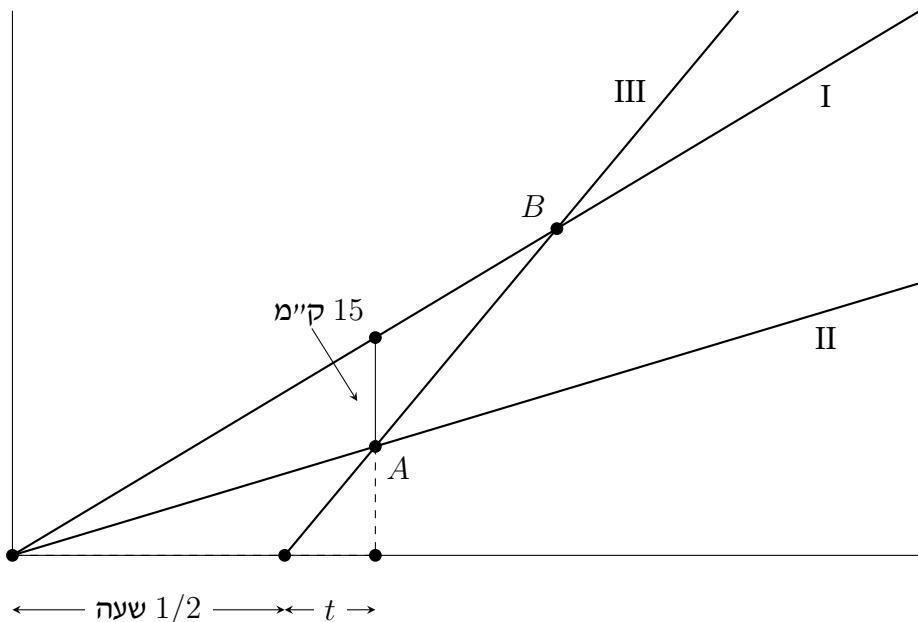
עבור הקטע השני  $e_2$ , המרחק  $RR'$  שווה למרחק  $MM'$ , המרחק שהאוטובוס עבר מהפגישה הראשונית ועד התחנה. נתון שהאוטובוס עבר מרחק זה ב-10 שניות, ונתנו שמהירות הריצה של יוסי פי שבע לפחות מהירות הנסיעה של האוטובוס, כך ש- $t_2 = 70$ .  
נסכם ונקבל שיוסי רץ מנקודות הפרידה לתחנה ב  $t_1 + t_2 = 240$  שניות.

**שיעור לב למילכודת:** זמן הhalbילה ייחד נתון בדקות ושאר הזמן בשניות.

## 1.11 קיז' תשע"ה מועד א

מכוניות I ומכוניות II יצאו באותו זמן מאותו מקום ולאותו כיוון המהירות של מכונית I הייתה 50 קמ"ש, והמהירות של מכונית II הייתה 40 קמ"ש. כעבור חצי שעה מרגע היציאה של שתי המכוניות, יצא גם מכונית III מאותו מקום ולאותו כיוון. ברגע שמכונית IIIפגשה במכונית II, המרחק בין מכונית I למכונית II היה 15 ק"מ. מהירות כל המכוניות היו קבועות.

- מצאת מהירות המכונית III.
- אם יתכן שאחרי הפגישה בין מכונית III למכונית II, יהיה המרחק בין מכונית III למכונית I שווה למרחק בין מכונית II למכונית I ? נמק.



המהירות של מכונית I גדולה מהמהירות של מכונית II, ולכן השיפוע שלו תלול יותר. נסמן  $t$  הזמן בין היציאה של III ועד לפגש שלו עם  $v_3$   $v_3$  = המהירות של III. נתון: מהירות של I  $v_1 = 50$ , מהירות של II  $v_2 = 40$ .

### סעיף א

לאחר  $t + 1/2$  שעות, המכוניות II ו-III עברו אותו מרחק, ומכונית I עבר אותו מרחק ועוד 15 ק"מ. נכתוב את משוואות התנועה לשני המקרים:

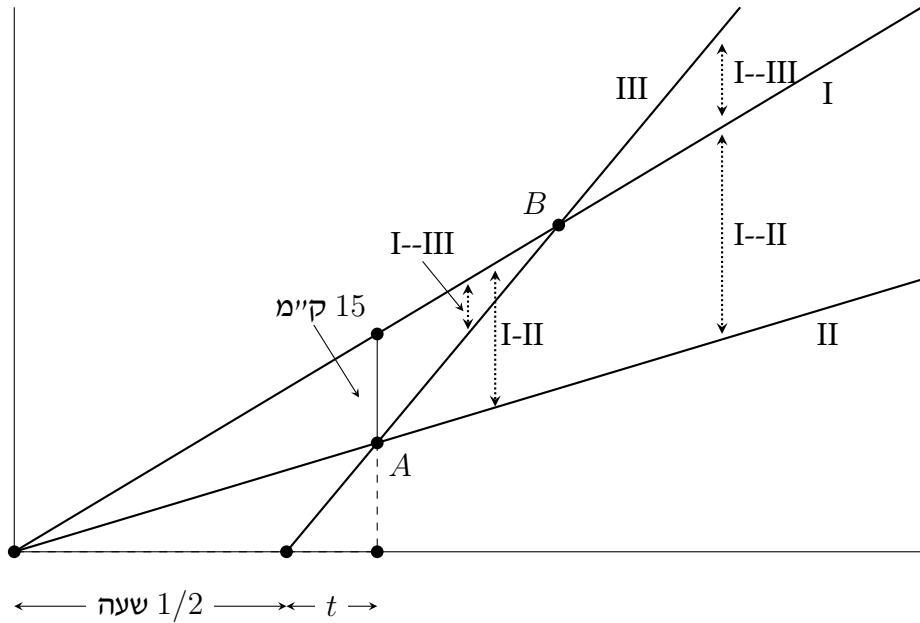
$$40(t + 1/2) = v_3 t$$

$$50(t + 1/2) = v_3 t + 15.$$

מהמשוואות מתקיים  $t = 1$  ו $v_3 = 60$  קמ"ש.

## סעיף ב

נוסיף סימונים לתרשים שיעזרו לנו לפתרו את הבעיה :



נעין בקווים מנוקדים בתרשימים ונראה שהמרחקים לא יכולים להיות שווים. בנקודה  $A$  המרחקים שוים, אבל מנקודה זו ועד לנקודה  $B$ , המרחק  $II - I$  גדול והמרחק  $III - I$  קטן. בנקודה  $B$  המרחק  $II - I$  חיובי והмарחק  $III - I$  שווה לאפס. מכאן ולהלאה, שני המרחקים גדולים באותו קצב כי הפרשי המהירויות שוויים :  $60 - 50 = 50 - 40 = 10 \text{ קמ''ש}$ .

### הוכחה בחישוב

נסמן  $t_A$  = זמן מנקודה  $A$ ,  $t_B$  = זמן מנקודה  $B$ ,  $d_B$  = המרחק בין  $I$  ל- $II$  בנקודה  $B$ .  
משמאלי לנקודה  $B$  המרחקים שוויים אם :

$$15 + (v_1 - v_2)t_A \stackrel{?}{=} 15 + (v_1 - v_3)t_A.$$

נציב  $v_1 = 50, v_2 = 40, v_3 = 60$  ונקבל  $-10 = -10$ , כך הטיעון לא יכול להיות נכון.  
מיימין לנקודה  $B$  המרחקים שוויים אם :

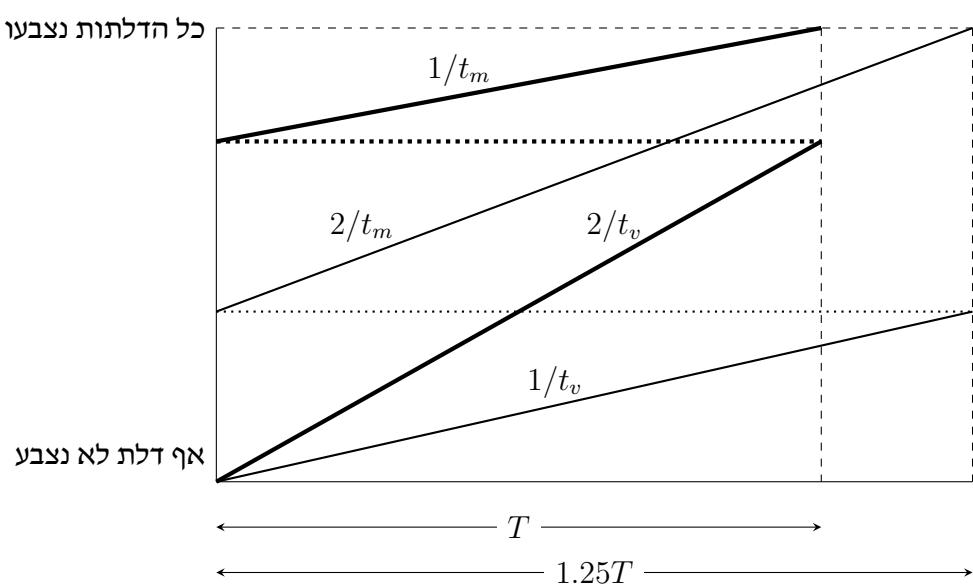
$$(v_3 - v_1)t_B \stackrel{?}{=} d_B + (v_1 - v_2)t_B.$$

לאחר הצבה עבור המהירויות, נקבל שהטיעון נכון אם  $d_B > 15$ , אבל אנחנו יודעים ש- $d_B = 0$ .

## 1.12 חורף תשע"ה

- צבעים ותיקים וצבעים מהתלמידים צריכים לצבעו מספר מסויים של דלתות. צבע אחד ותיק ו- 2 צבעים מהתלמידים יסימנו את הצבעה בזמן הארוך ב- 25% מהזמן שבו יסימנו את הצבעה 2 צבעים ותיקים וצבע אחד מהתלמיד. לכל צבע ותיק אותו קצב עובדה בלתי משתנה, ולכל צבע מהתלמיד אותו קצב עובדה בלתי משתנה. (צבע ותיק עובד מהר יותר מצבע מהתלמיד).
- א. מצא את היחס בין הזמן שצבע מהתלמיד יסימן לבדוק את צביעת הדלתות לבין הזמן שצבע ותיק יסימן לבדוק את צביעת הדלתות.
- ב. מצא כמה צבעים מהתלמידים צריכים לעבוד עם צבע אחד ותיק, כדי שהם יסימנו את צביעת הדלתות באותו הזמן שבו יסימנו את הצבעה 2 צבעים ותיקים וצבע אחד מהתלמיד.

**סעיף א**



נסמן את הזמנים לצביעת כל הדלתות:  $t_v = \text{צבע ותיק}$ ,  $t_m = \text{צבע מהתלמיד}$ . השאלה שואלת על יחס בין זמנים, ולכן אין חשיבות לזמן הכלול לצביעות כל הדלתות. נסמן  $1 = \text{זמן}$  הכלול של שני ותיקים ומהתלמיד אחד, ו-  $1.25 = \text{זמן הכלול של שני מהתלמידים ותיק אחד}$ .

### הסבר על התרשימים

הצבעים עובדים במקביל אבל החיר בתרשימים מראה **חלוקת העבודה**, כאילוו שצבע (או זוג צבעים) מסיים את חלקו בעבודה ולאחר מכן הצבע (או הזוג השני) מתחילה את חלקו. כאשר יש זוג צבעים הם רשומים כצבע אחד עם הספק כפוף. הקווים הקיימים מראים צבע אחד ותיק ( $1/t_v$ ) ושני צבעים מהתלמידים ( $2/t_m$ ). הקווים העבים מראים שני צבעים ותיקים ( $2/t_v$ ) וצבע אחד מהתלמיד ( $1/t_m$ ).

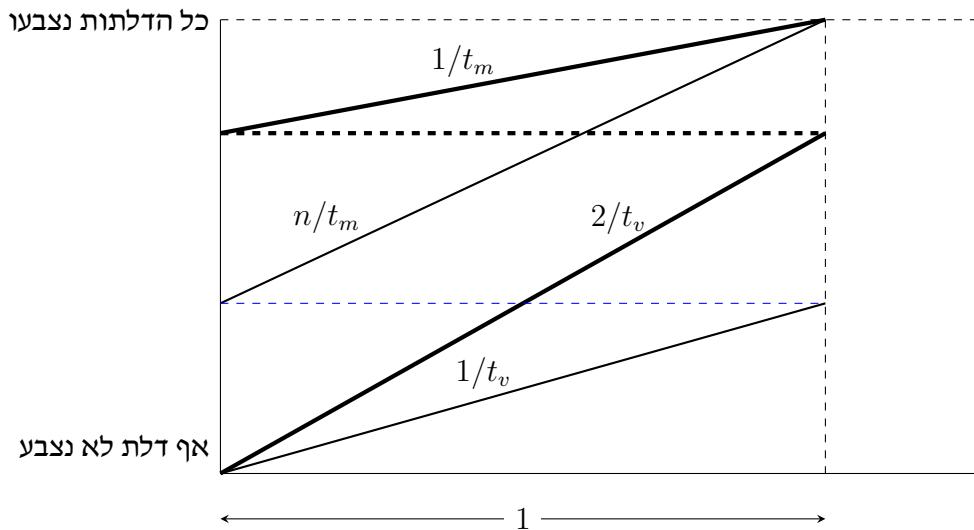
שני הרכיבים סיימו את כל העבודה, ומכאן שמשוואות ההספק נוتنאות אותו ערך :

$$\frac{2}{t_v} \cdot 1 + \frac{1}{t_m} \cdot 1 = \frac{1}{t_v} \cdot 1.25 + \frac{2}{t_m} \cdot 1.25.$$

הפתרון הוא :

$$\frac{t_m}{t_v} = 2.$$

### סעיף ב



נסמן  $n$  = מספר הבכעים המתלמידים. העבודה של שני הרכיבים שווה ולכן :

$$\frac{2}{t_v} + \frac{1}{t_m} = \frac{1}{t_v} + \frac{n}{t_m}.$$

נשתמש ביחס שהיחסינו בסעיף א ונקבל :

$$n = \frac{t_m}{t_v} + 1 = 2 + 1 = 3.$$

## 1.13 קיז' תשע"ד מועד ב

רץ I ורץ II יצאו באותו רגע מאותו מקום. הם רצו ב מהירות קבועה ובאותו כיוון.

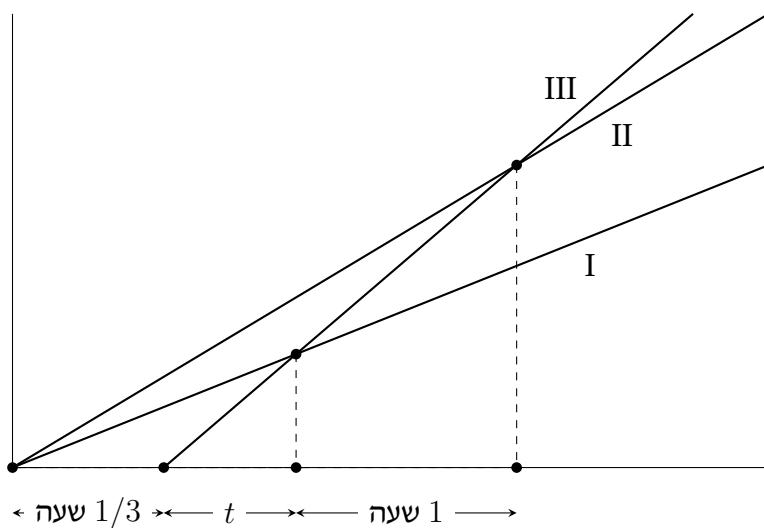
ה מהירות של רץ I הייתה 6 קמ"ש, וה מהירות של רץ II הייתה 7.5 קמ"ש.

כעבור 20 דקות מרגע היציאה של שני הרצים,

יצא רץ III מאותו מקום ובאותו כיוון, והוא רץ ב מהירות קבועה.

רץ IIIפגש בדרך את רץ I, ושעה אחר כך הוא פוגש את רץ II.

מצא כמה שניות עברו מרגע היציאה של רץ III עד לפגישתו עם רץ II.



נסמן:  $t =$  הזמן בין היציאה של III ועד למפגש עם I,  $v =$  המהירות של III.

נתנו:  $6 =$  מהירות של I ו-  $7.5 =$  המהירות של II. שימו לב לשיפועים של הקווים.

בכל מפגש בין שתי דמיות המרחקים שעברו שווים. המפגש בין I ל-III:

$$6(t + 1/3) = vt,$$

והmpegש בין II ו-III:

$$7.5(1/3 + t + 1) = v(t + 1).$$

מה המשוואת הראשונה נקבל ביטוי עבור  $v$  ונציב במשוואת השנייה. נקבל משווהה ריבועית ב- $t$ :

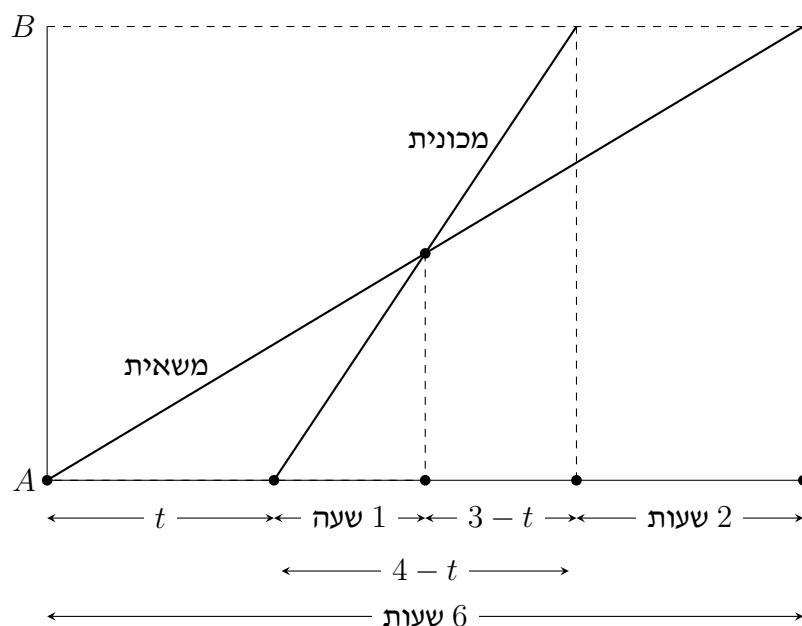
$$1.5t^2 + 2t - 2 = 0,$$

שיש לה פתרון חיובי אחד  $t = 2/3$ .

זמן היציאה של III ועד המפגש עם II הוא  $t + 1 = 5/3$  שעות.

## 1.14 קיז' תשע"ד מועד א

משאית יצאה מעיר A, וכעבור 6 שעות מרגע יציאתה הגיעה לעיר B. זמן מה אחרי יציאת המשאית יצאה מכונית מעיר A, והגעה לעיר B 2 שעות לפני המשאית. המשאית והמכונית נפגשו כעבור שעה מרגע היציאה של המכונית. מהירותי המשאית ושל המכונית היו קבועות. מצא כמה שעות אחרי רגע היציאה של המשאית יצאה המכונית (מצא את שני הפתרונות).



המפתח לפתרון הוא לסמן כל פרק זמן כמי שעשינו בתרשים.  
נסמן:  $t = \text{זמן יציאת המכונית}$ ,  $v_c = \text{מהירות המכונית}$ ,  $v_m = \text{מהירות המשאית}$ .  
נכתב משוואות למרחקים שווים, מ- A עד למפגש ומן A עד ל- B :

$$\begin{aligned} v_m(t+1) &= v_c \cdot 1 \\ v_m \cdot 6 &= v_c(4-t). \end{aligned}$$

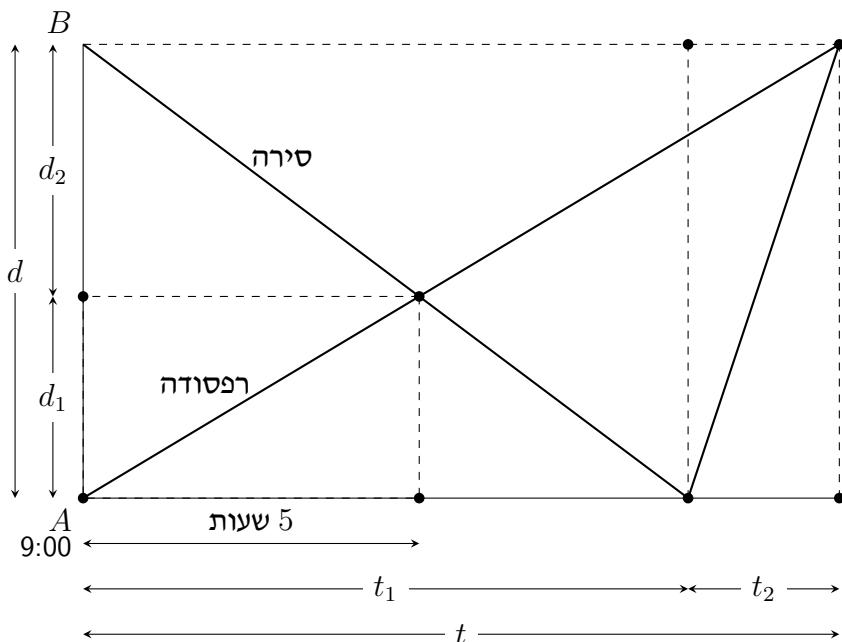
משתי המשוואות מתקבלת משווהה ריבועית ב- :

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

ישsolution לה שני פתרונות  $t = 1$  שעיה ו-  $t = 2$  שעיה.

## 1.15 חורף תשע"ד

נמל A וنمאל B נמצאים על אותה גדה של נהר, שכיוון הזרם שלו הוא מ- A ל- B . רפסודה הפליגה בשעה 9:00 בבווקר מנמל A אל נמל B , והיא נישאה על גבי הזרם של הנהר כך שמהירות הרפסודה היא מהירות הזרם. באottaה שעה הסירה סיירה מנמל B (נגד כיוון הזרם) לכיוון נמל A . מהירות הסירה במים עומדים היא 15 קמ"ש. הסירה הגיעה לנמל A , ומיד חזרה אל נמל B . ידוע כי הרפסודה והסירה הגיעו לנמל B באותו שעה. נתון כי הרפסודה והסירה נפגשו לראשונה כעבור 5 שעות מרגע הפגנותן. האם הסירה והרפסודה הגיעו לנמל B עד לשעה 9:00 בערב באותו היום? נמק. מהירות הזרם ומהירות הסירה במים עומדים הן קבועות. **הערה:** בחישוביך דיק Ud שתיק ספורות אחרי הנקודה העשרונית.



נסמן:  $d$  = מרחק בין שני הנמלים,  $d_1 = d_2$  = מרחק בין A למפגש.  $d$  = מרחק בין B למפגש.  $t_1$  = זמן עד למפגש ב- $A$ ,  $t_2$  = זמן עד למפגש ב- $B$ ,  $v$  = מהירות הזרם.

כאשר הסירה מפליגה מ- $A$  ל- $B$ , היא עוברת מרחק כפול מהמרחק שהרפסודה עוברת באותו פרק זמן. נשווה את משוואות התנועה:

$$\frac{d}{v} = \frac{d}{15-v} + \frac{d}{15+v}.$$

$d$  מצטמצם ונקבל משווה ריבועית ב מהירות הזרם  $v$ :

$$v^2 + 30v - 225 = 0.$$

השורש החיובי של  $v$  הוא  $v = 6.21$ .

עכשו שאנו יודעים את המהירות, והזמן עד למפגש נתון, ננסה לחשב את המרחק  $d$ , שהוא הסכום של המרחקים שעוברים הרפסודה והסירה:

$$d = 5v + 5(15 - v).$$

הפתרון הוא  $d = 75$  ללא תלות ב מהירות הזרם  $v$ .

את הזמן עד המפגש ב נמל  $B$  אפשר לחשב לפי הפלגה של הסירה או לפי הפלגה של הרפסודה. כמובן פשוט יותר לחשב עבור הקטע היחיד של הרפסודה:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{75}{6.21} \approx 12.08.$$

בכל זאת נבדוק לפי הסירה:

$$t = \frac{d}{15-v} + \frac{d}{15+v} = \frac{75}{8.79} + \frac{75}{21.21} = 8.532 + 3.536 \approx 12.07.$$

בגלל עיגול של החישובים יש הבדל קטן בין שתי התוצאות.

הסירה והרפסודה יצאו בשעה 09:00 ב בוקר וההפלגות לקחו יותר מ-12 שעות, כך המפגש השני התקיים לאחר השעה 09:00 בערב.

## **המלצות: תנועה והספק**

- בנגד תרשימים חד-ממדיים האורך של קטע קו הוא מרחק הנסיעה, כאן מרחק הנסיעה הוא ההפרש בציר האנכי בין נקודת התחלה לנקודת הסופית. קטע הקו עצמו יהיה משופע וכן יהיה אורך יותר מרחק הנסעה.
- הקשיי בפתרונו של הבעיה הללו נובע מה הצורך לתרגם את התיאורים המילוליים לשווות. אפשר להתבלבל כאשר מתרגמים ביטויים כגון "לפני", "אחרי", "מהר יותר", "לאט יותר". בתרשים קל ליצג את התיאורים הללו: נקודת שחן "לפני" ו-"אחרי" נקודת ייחוס יוצגו שמאלה אוימינה מנוקדת הייחוס בציר הזמן. קו המסלול "מהר יותר" יוצג עם שיפוע תלול יותר מקו המסלול מסלול "לאט יותר".
- מומלץ להכין תרשימים גדולים וברורים כדי שהסימנים שמופיעים ממידע נתנו או ממידע המתקבל מחיישבים יהיו קריאים. לעיתים, כדאי להכין תרשימים חדשים לכל סעיף כדי שמיידע הנחוץ רק לסעיף אחד לא יקשה על עיון במידע הנחוץ לסעיף אחר.
- מצאתי שאפשר "לקראא" את המשוואות ישירות מהתרשימים. לחילופין אפשר גם לסדר את הנתונים בטבלה כמפורט.
- נקודות מפגש נוחות מאוד לכנתיבת זוג שוואות תנועה עם אותם נעלמים. הזמינים האם אותן זמניות (לפעמים בתוספת קבוע), והמרקחים שוויים (אם הדמיות נוסעות באותו כיוון), או שסכום המרקחים שווה למרחק בין נקודות הקצה (כאשר הדמיות נוסעות אחת כלפי השנייה).
- פתרון המשוואות עצמן הוא בדרך כלל קל: שני משוואות עם שני נעלמים, כאשר המשוואות שיש לפטור הן לינאריות או ריבועיות.

## פרק 2 סדרות

### 2.1 קיז תשע"ח מועד ב

2. הסדרה  $a_n$  מוגדרת לכל  $n \geq 1$  על ידי כלל הנסיגה:  $a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n}$ ,  $c > 0$ . נתון:  $a_1 = -\frac{1}{c}$ .
- א. הוכח כי האיברים בסדרה  $a_n$  הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים סדרה הנדסית, וכי האיברים בסדרה  $a_n$  הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים גם הם סדרה הנדסית.
- ב. (1) רשום את 7 האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$ . הבע את תשובה בפתרונות  $c$  אם יש צורך.  
 (2) הבע באמצעות  $c$  את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$ .  
 (3) הוכח שלכל  $n \geq 1$  טبعי, הסכום של  $1 - a_1 - a_2$  האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$  אינו תלוי ב- $n$ .
- ג. הסדרה  $b_n$  מוגדרת באופן הזה:  $b_n = -\frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$ .
- (1) הראה כי  $b_n$  היא סדרה הנדסית.  
 (2) מהו תחום הערכים של  $c$  שבעבורם  $b_n$  היא סדרה יורדת?  
 (3) נתון שהסדרה האינסופית  $b_n$  היא סדרה יורדת. הבע באמצעות  $c$  את סכומה.

#### סעיף א

כדי להוכיח שסדרה המוגדרת על ידי כלל נסיגה היא הנדסית, לא כדאי לחשב מנתני איברים עוקבים, כי איברים לא יצטמצו. במקום זה, יש להציב בתוך כלל הנסיגה כדי לקבל ערך של איבר כתלות של איבר אחר:

$$a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n} = -\frac{c^{n-2}}{\frac{c^{n-3}}{a_{n-1}}} = ca_{n-1}.$$

המינה  $c = a_{n+1}/a_{n-1}$  קבועה ולא תלוי ב- $n$ . ההוכחה נכונה עבור כל זוג של איברים שיש הפרש של שניים במקומות בסדרה, ולכן ההוכחה נכונה גם עבור מספרים הזוגיים וגם עבור מספרים לא-זוגיים.

#### סעיף ב (1)

הסדרות של הזוגיים והאי-זוגיים הן סדרות הנדסיות נפרדות ויש לחשב את האיברים בנפרד:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{c}, \quad a_3 = ca_1 = -1, \quad a_5 = ca_3 = -c, \quad a_7 = ca_5 = -c^2 \\ a_2 &= -\frac{c^{1-2}}{a_1} = -\frac{c^{-1}}{-\frac{1}{c}} = 1, \quad a_4 = ca_2 = c, \quad a_6 = ca_4 = c^2. \end{aligned}$$

שבעת האיברים הראשונים של הסדרה הם:

$$-\frac{1}{c}, 1, -1, c, -c, c^2, -c^2.$$

**סעיף ב (2)**

כאשר מסכמים את האיברים הם מצטמצמים פרט לאיבר הראשון, ולכן  $S_7 = -\frac{1}{c}$ .

**סעיף ב (3)**

כאשר יש מספר אי-זוגי של איברים המתחללים ממקום אי-זוגי, מספר האיברים האי-זוגיים גדול באחד מאשר מספר האיברים הזוגיים. נבדוק דוגמה:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9.$$

מספר האיברים הוא 9, מהם 5 אי-זוגיים ו-4 זוגיים.

נוצרך לסכם את זוגיים והאי-זוגיים בנפרד, כי הסדרה המקורית אינה הנדסית. עבור שתי התת-סדרות, המנה הינה  $c$ , אבל האיבר הראשון שונה,  $-\frac{1}{c}$ :

$$S_{odd} + S_{even} = -\frac{1}{c} \frac{c^n - 1}{c - 1} + 1 \cdot \frac{c^{n-1} - 1}{c - 1} = -\frac{1}{c},$$

לא תלוי ב- $n$ .

**סעיף ג (1)**

כאן הסדרה נתונה על ידי נוסחה ולא כלל נסיגה, ולכן ניתן לחשב ישירות את המנה:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{2}{a_{n+1}a_{n+2}}}{\frac{1}{a_na_{n+1}}} = \frac{\frac{1}{a_{n+2}}}{\frac{a_n}{a_{n+1}}} = \frac{1}{\frac{a_{n+2}}{a_n}} = \frac{1}{c}.$$

**סעיף ג (2)**

סדרה יורדת אם  $c > 1$ , ולכן  $q = \frac{1}{c} < 1$ . נתון  $0 < q < 1$ , ולכן סדרה יורדת כאשר  $c > 1$ .

**סעיף ג (3)**

עבור סדרה הנדסית יורדת:

$$\begin{aligned} S_b &= \frac{b_1}{1 - (1/c)} \\ &= \frac{-2}{a_1 \cdot a_2} \cdot \frac{c}{c - 1} \\ &= \frac{-2}{-\frac{1}{c} \cdot 1} \cdot \frac{c}{c - 1} = \frac{2c^2}{c - 1}. \end{aligned}$$

## 2.2 קיז תשע"ח מועד א

- a. היא סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת שסכוםה שלילי.  
 a הוא האיבר הראשון בסדרה, ו- q היא מנת הסדרה.  
 א. לפניו ארבע טענות (I-IV). רק אחת מהן בהכרח נכונה. צין את מספירה ונמק.

$$q < 0 \quad (\text{I})$$

$$q < 0 \text{ וגם } a_1 < 0 \quad (\text{II})$$

$$a_1 < 0 \quad (\text{III})$$

$$q < 0 \text{ או } a_1 > 0 \quad (\text{IV})$$

נסמן ב- T את סכום האיברים במקומות האיזוגיים בסדרה  $a_n$ ,  
 ונסמן ב- R את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה  $a_n$ .

c. הוא פרמטר.

$$\text{נתון: } T + p \cdot R = 0.$$

b. הביע את c באמצעות q.

$b_n$  היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא p.

ג. האם  $b_n$  היא סדרה מתכנסת? נמק.

ד. נתון: c שלילי. הראה שלכל n טבעי  $a_{n+1} > a_n$  (כלומר הראה שהסדרה  $a_n$  היא סדרה עולה).

### סעיף א

השאלה יפה כי היא דורשת חשיבה, לא חישובים! נבדוק את הטענות על סדרה מוכרת:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2.$$

אם נהפוך את כל הסימנים למינוס, נקבל סדרה שסכוםה שלילי:

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = -2.$$

ברור שהמנה עדין חיובית:

$$\frac{-2^{-(n+1)}}{-2^{-n}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

עבור לסדרה כללית. סדרה הנדסית מתכנסת רק אם  $|q| < 1$ . מהנוסחה עבור הסכום:

$$S = \frac{a_1}{1-q} < 0,$$

ניתן לראות ש- $a_1$  חייב להיות שלילי כי המכנה חיובי  $2 < 1 - q < 0$ .

אפשר לפסול מיד תשובה IV, II, I ונסאר רק תשובה III.

#### סעיף ב

שני תת-הסדרות הן הנדסית עם מנתה זהה  $q^2$ . האיברים הראשונים הם  $a_1$  עבור האיזוגים ו- $a_2 = a_1 q$  עבור הזוגים. הסכומים הם :

$$T = \frac{a_1}{1 - q^2}, \quad R = \frac{a_1 q}{1 - q^2}.$$

מהמשווה הנתונה  $0 = T + pR$ , נקבל  $p = -\frac{1}{q}$  ו-  $1 + pq = 0$ .

#### סעיף ג

הסדרה לא מתכנסת כי  $|q| > 1$  גורר  $|p| > 1$ .

#### סעיף ד

שימו לב שהשאלה שואלת על **הסדרה המקורית**  $a_n$  ולא על  $b_n$ ! נתון ש- $p$  שלילי ולכן  $-\frac{1}{p} = q$  חיובי. נתון שהסדרה מתכנסת ולכן  $1 < q < 0$ , חיובי. מצאנו בסעיף א' ש- $a_1$  שלילי. מכפלה של מספר שליליים עם מספר חיובי פחות מ-1 מקטינה את הערך המוחלט  $|x|$  שלו. ככל השערך המוחלט של מספר שליליים קטן, הערך שלו עולה. לכן,  $a_{n+1} > a_n$ .

**נבדוק בדוגמה:** אם  $a_1 = -6$ ,  $q = \frac{1}{2}$ :

$$a_{n+1} = a_n q = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3 > -6 = a_n.$$

## 2.3 חורף תשע"ח

- 2.** **a**. היא סדרה חשבונית שההפרש שלה,  $d$ , שונה מ-0.
- נתון:  $a_7 = -a_1$ .
- a.** מצא את  $a_{12}$ .
- b.** (1) האם קיימים בסדרה איבר שערכו שווה לא-0? נמק.  
 (2) מצא מספר טבעי  $n$  שבערו סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה שווה לא-0.
- ג.** האם קיימים  $n$  טבעי שעבורו:  $a_n < 0$ ? אם כן – מצא  $n$  כזה, אם לא – נמק.  
**ד.** האם אפשר לדעת כמה איברים שליליים יש בסדרה? נמק (הבחן בין מקרים שונים).

שאלה זו מתאפיין בהצבה של נוסחאות לאיירם מסוימים לתוך הנוסחאות הכלליות.

### סעיף א

נציב  $n = 17, n = 7$  במשוואת האיבר ה-n:

$$\begin{aligned} a_7 &= a_1 + (7-1)d = -(a_1 + (17-1)d) = -a_{17} \\ a_1 + 11d &= 0 \\ a_{12} &= a_1 + 11d = 0. \end{aligned}$$

### סעיף ב (1)

נשווה את  $-a_1$  – נוסחה לאיבר כללי:

$$-a_1 = a_n = a_1 + (n-1)d.$$

נציב  $d = -11d$  שישבנו בסעיף א:

$$-(-11d) = -11d + (n-1)d.$$

$n = 23$  מצטמצם ונקבל  $d$

### סעיף ב (2)

נציב  $d = -11d$  בנוסחה לסכום של סדרה חשבונית:

$$\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2 \cdot -11d + (n-1)d) = \frac{dn}{2}(n-23) = 0.$$

נתון שההפרש  $d$  שונה מאפס ושה-n מספר טבעי ולכן חיובי, כך שהביטוי מהתפקיד רק עבר  $n = 23$

## סעיף ג

אם איבר חיובי והפרש חיובי, המכפלה של שני איברים עוקבים היא חיובית, וכך גם אם שניהם שליליים. האפשרות היחידה לקבל מכפלה שלילית היא איבר שלילי והפרש חיובי או איבר חיובי והפרש שלילי:

$$a_k < 0, d > 0 : \quad a_{k+1} = a_k + d > 0$$

$$a_k > 0, d < 0 : \quad a_{k+1} = a_k + d < 0.$$

אבל ידוע שאחד האיברים בסדרה  $(a_{12})$  הוא אפס:

$$\dots, a_{10} < 0, a_{11} < 0, a_{12} = 0, a_{13} > 0, a_{14} > 0, \dots$$

$$\dots, a_{10} > 0, a_{11} > 0, a_{12} = 0, a_{13} < 0, a_{14} < 0, \dots,$$

ולכן המכפלה של זוג איברים עוקבים חייבת להיות חיובית או אפס.

## סעיף ד

נרשום את הסדרה לפי מה שידוע לנו ש- $a_{12} = 0$ :

$$a_1, a_2, \dots, a_{11}, 0, -a_{11}, \dots, -a_2, -a_1, \dots.$$

או ש-11 האיברים הראשונים שליליים אם ההפרש חיובי, או כל האיברים לאחר האיבר  $a_{12} = 0$  שליליים אם ההפרש שלילי. הנה דוגמה עם  $d = \pm 2$ :

$$-22, -20, \dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots$$

$$22, 20, \dots, 4, 2, 0, -2, -4, \dots.$$

## 2.4 קיצ' תשע"ז מועד ב

.2 נתונה סדרה כללית  $a_n$ .

נסמן ב-  $S_n$  את סכום כל האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$ .

נתון:  $S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}}$  לכל  $n$  טבעי.  $k$  הוא מספר קבוע.

א. הביע את  $a_1$  ואת האיבר הכללי  $a_n$  עבור  $n > 1$  באמצעות  $n$  ו-  $k$  במידת הצורך.

ב. מצא את  $k$  שעבורו הסדרה  $a_n$  היא סדרה הנדסית. נמק.

נגיד:  $T = a_2^2 + a_5^2 + a_8^2 + \dots$  (סכום ריבועי כל איבר שלישי בסדרה  $a_n$  החל ב-  $a_2$ ).

ג. חשב את  $T$ .

שאלה זו שונה משאלות אחרות כי נתון ביטוי עבור **סכום סכומים** ולא עבור האיברים בסדרה.

### סעיף א

ניתן לחשב את האיברים על ידי שימוש בנוסחה עבור  $S_n$ . האיבר הראשון מתקיים ישרות מהנוסחה:

$$a_1 = S_1 = k - \frac{1}{3^{1+1}} = k - \frac{1}{9},$$

והאיבר הכללי מתקיים על ידי ההפרש בין הנוסחאות לסכומים עוקבים:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \left( k - \frac{1}{3^{n+1}} \right) - \left( k - \frac{1}{3^n} \right) = \frac{2}{3^{n+1}}.$$

### סעיף ב

המנה  $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$  לא תלויות ב-  $n$ . במבט ראשון נראה שהתשובה היא שהסדרה היא הנדסית עבור כל ערך של  $k$ , אולם זו טעות. המנה המתבקשת מ-  $\frac{a_2}{a_1}$  חייבת להיות שווה למנה המתבקשת מהמקרה הכללי  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ . נחשב:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{2}{3^3}}{k - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3(9k - 1)} = \frac{1}{3} = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

הפתרונות היחיד הוא  $k = \frac{1}{3}$

עבור השיעיף הבא נctrיך את האיבר הראשון:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

## סעיף ג

האיבר הראשון בסדרה החדשה הוא :

$$a'_1 = a_2^2 = (a_1 q)^2 = \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{729},$$

הסדרה החדשה היא הנדסית :

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_{3(k+1)-1}}{a_{3k-1}}\right)^2 &= \left(\frac{a_{3k+2}}{a_{3k-1}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{qa_{3k+1}}{a_{3k-1}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{q^2 a_{3k}}{a_{3k-1}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{q^3 a_{3k-1}}{a_{3k-1}}\right)^2 = q^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}. \end{aligned}$$

הסכום מתקיים מהנוסחה לסדרה הנדסית אינסופית עבור

$$S' = \frac{a'_1}{1 - q'} = \frac{\frac{4}{729}}{1 - \frac{1}{729}} = \frac{1}{182}.$$

## 2.5 קיז תשע"ז מועד א

$$\cdot a_n = \frac{(2^n + 1)(2^n - 1)}{2^n}$$

$a_n = b_n - c_n$  ו-  $c_n$  הן סדרות הנדסיות שכל איבריהן חיוביים, המקייםות לכל  $n$  טבעי:

$$\text{נתון: } b_6 = 64, c_3 = \frac{1}{8}$$

א. (1) מצא את  $b_1$  ואת המנה של הסדרה  $b_n$ .

(2) מצא את  $c_1$  ואת המנה של הסדרה  $c_n$ .

את סכום כל האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$  נסמן ב-  $A_n$ ,

את סכום כל האיברים הראשונים בסדרה  $b_n$  נסמן ב-  $B_n$ ,

ואת סכום כל האיברים הראשונים בסדרה  $c_n$  נסמן ב-  $C_n$ .

$$\text{ב. הראה ש- } C_n = B_n - A_n$$

ג. עבור אילו ערכי  $n$  מתקיים האידויון:  $0.9 < B_n - A_n < 1$ ?

הנוסחה ל-  $a_n$  אינה כוללת סגגה כי איברים של הסדרה לא מופיעים בצד הימני של המשוואה. נתון שהסדרות  $b_n, c_n$  הנדסיות אך לא נתון אם הסדרה המקורית  $a_n$  הנדסית או לא.

**סעיף א** (1, 2)

נתון ש-  $a_n = b_n - c_n$ , לכן כדי לקבל ערך של איבר בסדרה  $b_n$ , נדרש לחשב את הערכים  $a_n, c_n$ , ובאופן דומה עבור איברים בסדרה  $c_n$ . נתון שני ערכים  $b_6, c_3$  וקל לחשב איברים ב-  $a_n$  כי הם נתונים כפונקציה של  $n$  בלבד:

$$a_3 = \frac{(2^3 + 1)(2^3 - 1)}{2^3} = \frac{63}{8} \quad a_6 = \frac{(2^6 + 1)(2^6 - 1)}{2^6} = \frac{65 \cdot 63}{64}$$

$$b_3 = a_3 + c_3 = \frac{63}{8} + \frac{1}{8} = 8 \quad c_6 = b_6 - a_6 = 64 - \frac{65 \cdot 63}{64} = \frac{1}{64}.$$

כדי לחשב את המנה של  $b_n$  והמנה של  $c_n$  השתמש בנתון שהן סדרות הנדסיות. את האיבר השלישי של הסדרות נקבל מהאיבר השלישי על ידי הכפלתו במנה לחזקה שלוש:

$$b_6 = b_3 q_b^3, \quad q_b = \sqrt[3]{\frac{b_6}{b_3}} = \sqrt[3]{8} = 2 \quad b_3 = b_1 q_b^2, \quad b_1 = \frac{b_3}{q_b^2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$c_6 = c_3 q_c^3, \quad q_c = \sqrt[3]{\frac{c_6}{c_3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \quad c_3 = c_1 q_c^2, \quad c_1 = \frac{c_3}{q_c^2} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}.$$

## סעיף ב

הטיון נובע מחוקי הקיבוץ והחילוף של מספרים שלמים :

$$\begin{aligned} C_n &= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n) \\ &= (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= B_n - A_n. \end{aligned}$$

## סעיף ג

הוכחנו ש- $C_n = B_n - A_n$ , ונתונה שהסדרה  $c_n$  הנדסית. מסעיף א, ולכן :

$$C_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = 1 - 2^{-n}.$$

בדיקה במחשבון מראה ש :

$$0.9 \not< 1 - 2^{-3} = 0.875 < 1$$

$$0.9 < 1 - 2^{-4} = 0.938 < 1.$$

לא לעזרך כאן! השאלה מבקשת את **כל הערכים** של  $n$  המקיימים את האי-שוויון, ולכן התשובה המלאה היא כל מספר גדול או שווה ל-4, כי כאשר  $n$  גדול מ-4, הערך של  $1 - 2^{-n}$  עולה (ולכן גדול מ-0.9). אבל תמיד פחותת מ-1.

## 2.6 חורף תשע"ז

נתונה סדרה  $a_n$  המקיימת את כלל הנסיגה:  $a_1 = -1$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n}{4 \cdot a_n + 3}$

$$\text{נגיד סדרה חדשה } b_n = \frac{1}{a_n} + 2 : b_n$$

א. הוכח כי  $b_n$  היא סדרה הנדסית.

ב. הבו באמצעות  $n$  את הסכום:

ג. נתון:  $n$  הוא מספר זוגי.

$$\cdot \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \quad \text{הבו באמצעות } n \text{ את הסכום:}$$

### סעיף א

נחשב את המנה על ידי הצבה עבור  $b_n$  לפי ההגדרה, ולאחר כך הצבה עבור  $a_{n+1}$  לפי כלל הנסיגה. נקבל מנה קבועה ולכון הסדרה הנדסית:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + 2}{\frac{1}{a_n} + 2} = \frac{\frac{4a_n + 3}{a_n} + 2}{\frac{1}{a_n} + 2} = \frac{3(2a_n + 1)}{2a_n + 1} = 3.$$

### סעיף ב

לא נתון שהסדרה  $a_n$  הנדסית, אבל בסעיף א הוכחנו שהסדרה  $b_n$  הנדסית, ולכון ניתן לבטא את סכום הסדרה  $\frac{1}{a_i}$  כסכום של הסדרה  $b_n$  על ידי הצבה  $b_i = \frac{1}{a_i} + 2$ .

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = (b_1 - 2) + \dots + (b_n - 2) = b_1 + \dots + b_n - 2n.$$

נתון ש  $b_1 = \frac{1}{a_1} + 2 = 1 + 2 = 3$ , וכך  $a_1 = -1$ , ולכן  $b_1 = 3$ . סכום הסדרה של  $\frac{1}{a_n}$  הוא:

$$b_1 + \dots + b_n - 2n = \frac{1(3^n - 1)}{3 - 1} - 2n = \frac{3^n - 4n - 1}{2}.$$

### סעיף ג

לפי ההגדרה של  $b_n$  נוכל לבטא את הסכום כך:

$$(b_1 - 2) - (b_2 - 2) + \dots + (b_{n-1} - 2) - (b_n - 2).$$

נתון שמספר האיברים הזוגיים ולכון סכום הקבועים מתאפס. המנה של הסדרה היא  $-3$  – והסכום הוא:

$$b_1 - b_2 + \dots + b_{n-1} - b_n = \frac{1((-3)^n - 1)}{-3 - 1} = \frac{(-3)^n - 1}{-4} = \frac{1 - 3^n}{4},$$

כי מספר האיברים הזוגיים ולכון  $3^n = (-3)^n$ .

## 2.7 קיז תשע"ו מועד ב

- .2. נתונה סדרה חשבונית שיש בה  $n$  איברים. הפרש הסדרה הנתונה הוא 3.
- א. בין כל שני איברים עוקבים הכנסו איבר אחד נוסף, וኖצרה סדרה חשבונית חדשה.
- (1) הראה כי היחס בין סכום האיברים בסדרה החדשה לסכום האיברים בסדרה הנתונה הוא  $\frac{2n-1}{n}$ .
- (2) נתון כי היחס שਮופיע בתת-סעיף (1) שווה ל-1.9.
- סכום של כל האיברים שהכנסו לסדרה הנתונה הוא 130.5.
- מצאת האיבר הראשון בסדרה הנתונה.
- ב. יוצרים סדרה חשבונית נוספת על ידי הכנסת  $k$  איברים בין כל שני איברים עוקבים של הסדרה הנתונה. הביע באמצעות  $k$  את הפרש הסדרה המתבקשת.

**סעיף א (1)**

מספר האיברים החדשים הוא  $1 + n$ , כפי שראויים אם רושמים את הסדרה:

$$a_1, a'_1, a_2, a'_2, \dots, a_{n-1}, a'_{n-1}, a_n.$$

נתון שהסדרה החדשה גם היא חשבונית. הפרש הסדרה אינו מספרשלם אלא 1.5! אז מה? נחשב את היחס בין סכומי הסדרות, כאשר האיבר  $a_1$  מצטמצם:

$$\frac{S_{new}}{S_{old}} = \frac{\frac{2n-1}{2}(2a_1 + 1.5((2n-1)-1))}{\frac{n}{2}(2a_1 + 3(n-1))} = \frac{\frac{2n-1}{2}(2a_1 + 3(n-1))}{\frac{n}{2}(2a_1 + 3(n-1))} = \frac{2n-1}{n}.$$

**סעיף א (2)**

מ- $\frac{2n-1}{n} = 1.9$  נקבל  $10 = n$ . אם הסדרה הנתונה חשבונית וגם הסדרה החדשה חשבונית, סדרת האיברים החדשה היא חשבונית עם אותו הפרש כמו בסדרה המקורית, 3. האיבר הראשון של האיברים החדשים הוא  $a'_1 = a_1 + 1.5$ , ונתון סכום האיברים החדשים:

$$\frac{10-1}{2}(2(a_1 + 1.5) + ((10-1)-1) \cdot 3) = 130.5,$$

והפתרון הוא  $a_1 = 1$ .

**סעיף ב**

נתון שהסדרה המתבקשת לאחר הכנסת  $k$  איברים חדשניים בין איברים סמוכים של הסדרה הנתונה:

$$a_i, b_1, b_2, \dots, b_k, a_{i+1}$$

היא חשבונית. ההפרשים בין האיברים החדשניים חייבים להיות שווים וסכום שווה להפרש של הסדרה הנתונה שהוא 3. יש  $k+1$  הפרשים שערכם  $\frac{3}{k+1}$ .

## 2.8 קיצ' תשע"ו מועד א

- . נתונה סדרה חשבונית  $a_n$  המקיימת:  $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$ .
- א. מצא את הסכום של 19 האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$ .
- הסדרה  $S_n$  היא סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה  $a_n$ :  $S_1, S_2, S_3, \dots$
- נתון כי  $n \cdot a_n = S_n$  לכל  $n$  טבעי.
- ב. הראה כי הפרש הסדרה  $a_n$  הוא 0.
- ג. היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את  $a_1$ .
- נתונה סדרה  $b_n$  המקיימת את הכלל:  $b_{n+1} - b_n = a_n + S_n$  לכל  $n$  טבעי.
- ד. היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את הסכום
- $$\cdot (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \dots + (b_{20} - b_{19})$$

### סעיף א

האיברים  $a_4, a_8, a_{12}, a_{16}$  מהווים סדרה שבועית עם הפרש  $d^4$ . נתון הסכום של הסדרה:

$$(a_1 + 3d) + (a_1 + 7d) + (a_1 + 11d) + (a_1 + 15d) = 224 \\ a_1 + 9d = 56.$$

יש לנו משווה אחת עם שני נעלמים. לא נתיאש וננסה בכל זאת לחשב את הסכום  $S_{19}$ :

$$S_{19} = \frac{19}{2}(2a_1 + 18d) = 19(a_1 + 9d) = 19 \cdot 56 = 1064.$$

### סעיף ב

נשווה את המשווה הנתונה  $S_n = n \cdot a_n$  לנוסחה עבור סכום של סדרה חשבונית:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = n \cdot a_n = n(a_1 + (n-1)d).$$

נפשל את המשווה ונקבל  $d = d/2$  שהפתרון היחיד שלו הוא 0.

### סעיף ג

$a_1 + 9d = a_1 + 0 = 56$  :

### סעיף ד

במבחן ראשון נראה שכדי לצמצם את סכום הסדרה  $-b_1 - b_{20}$ , אבל זה מבוי סתום כי אין לנו דרך לחשב את איברי הסדרה  $b_n$ . במקום זה נחשב את  $(b_{i+1} - b_i)$  ונייעזר במשווה הנתונה:

$$b_{i+1} - b_i = a_i + S_i = (a_1 + (i-1) \cdot 0) + \frac{i}{2}(2a_1 + (i-1) \cdot 0) = a_1(1+i).$$

הסכום הוא:

$$a_1(2 + 3 + \dots + 20) = 56 \cdot \frac{19}{2}(2 \cdot 2 + (19-1) \cdot 1) = 11704.$$

## 2.9 חורף תשע"ו

נתונה סדרה הנדסית עולה:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

ההפרש בין האיבר הרביעי בסדרה לאיבר השלישי גדול פי 4

מההפרש בין האיבר השני לאיבר הראשון.

האיבר השישי בסדרה גדול ב- 31 מהאיבר הראשון.

א. מצא את מנת הסדרה, ואת האיבר הראשון בסדרה.

ב. מהסדרה הנתונה בנו שתי סדרות חדשות, I ו- II:

$$\text{I. } a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, a_3 \cdot a_4, \dots, a_n \cdot a_{n+1}, a_{n+1} \cdot a_{n+2}$$

$$\text{II. } \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_3}, \frac{a_4}{a_3} + \frac{a_5}{a_4}, \dots, \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

(1) האם כל אחת מהסדרות החדשות היא סדרה הנדסית עולה? נמק.

הסכום של כל האיברים בסדרה I הוא 2730.

(2) מצא את מספר האיברים בסדרה I.

(3) מצא את הסכום של כל האיברים בסדרה II.

### סעיף א

נתון :

$$(1) a_4 - a_3 = 4(a_2 - a_1), \quad (2) a_6 - a_1 = 31.$$

נציב  $.q = 1, q = 2, q = -2$ , ונקבל שלוש תשובות **ב-(1)**,  $a_n = a_1 q^{n-1}$  עבור  $a_2, a_3, a_4$ , ונקבל **ב-(2)**,  $a_1 = 1$ , ונמצא  $a_6 = a_1 q^5 = 32a_1$  עבור  $a_6 = 32$ . נציב  $q = 2$ .

### סעיף ב (1)

עבור סדרה I:

$$q_I = \frac{a_{n+1} \cdot a_{n+2}}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_n q^2}{a_n} = q^2 = 4,$$

והסדרה היא סדרה הנדסית עולה. עבור סדרה II:

$$q_{II} = \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right) / \left( \frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \frac{q + q}{q + q} = 1.$$

הסדרה הנדסית אבל לא עולה.

### סעיף ב (2)

סכום הסדרה נתן לחשב את מספר האיברים בסדרה :

$$a_1 \cdot a_2 + \dots + a_{n+1} \cdot a_{n+2} = 2730$$

$$(1 \cdot 2) \cdot \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} = 2730$$

$$4^{n+1} = 4096$$

$$n = 5.$$

**שימו לב!** אמנם  $n = 5$  אבל מספר האיברים בסדרה I הוא 6

(1)  $a_1 \cdot a_2$ , (2)  $a_2 \cdot a_3$ , (3)  $a_3 \cdot a_4$ , (4)  $a_4 \cdot a_5$ , (5)  $a_5 \cdot a_6$ , (6)  $a_6 \cdot a_7 (= a_{n+1} \cdot a_{n+2})$ .

**סעיף ב** (2)  
чисבנו 1. נחשב את  $a_1^{II} = 1$ .

$$a_1^{II} = \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} + \frac{4}{2} = 4.$$

**שימו לב!** מספר האיברים בסדרה II הוא 5:

(1)  $\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2}$ , (2)  $\frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_3}$ , (3)  $\frac{a_4}{a_3} + \frac{a_5}{a_4}$ , (4)  $\frac{a_5}{a_4} + \frac{a_6}{a_5}$ , (5)  $\frac{a_6}{a_5} + \frac{a_7}{a_6} \left(= \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right)$ .

ולכן סכום האיברים הוא:

$$(a_1^{II}) + (a_1^{II} \cdot 1^1) + (a_1^{II} \cdot 1^2) + (a_1^{II} \cdot 1^3) + (a_1^{II} \cdot 1^4) = 5a_1^{II} = 20.$$

## 2.10 קיז תשע"ה, מועד ב

- .2. נתונה סדרה  $b_n$  המקיים את הכלל  $b_{n+1} = \frac{1}{2^n} \cdot b_n$
- א. הוכיח כי האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה מהווים סדרה הנדסית, וגם האיברים העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה הנדסית.
- ב. סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה  $b_n$  שווה ל-  $\frac{7}{16}$ .  
מצאו את  $b_1$  (מצאו את שתי האפשרויות).

### סעיף א

החילוק של איברים בפרק שני מקומות אחד מהשני לא תלוי בזוגיות:

$$\frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{1}{2^{n+1}b_{n+1}} \cdot \frac{1}{b_n} = \frac{1}{2^{n+1} \cdot \frac{1}{2^n}b_n} = \frac{1}{2}.$$

### סעיף ב

לא נתון שהסדרה  $b_n$  הנדסית, ולכן יש לחשב בנפרד את הסכום של ארבעת האיברים הזוגיים וארבעת האיברים האי-זוגיים:

$$\begin{aligned} S_{odd} &= b_1 + b_3 + b_5 + b_7 = b_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{15}{8}b_1 \\ S_{even} &= b_2 + b_4 + b_6 + b_8 = b_2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{15}{8}b_2 = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{2^1}b_1. \end{aligned}$$

: מ

$$S_{odd} + S_{even} = \frac{15}{8} \left(b_1 + \frac{1}{2^1}b_1\right) = 3\frac{7}{16} = \frac{55}{16},$$

נקבל משוואה ריבועית  $6b_1^2 - 11b_1 + 3 = 0$   
 $b_1 = \frac{3}{2}, \frac{1}{3}$  שיש לה שני פתרונות

## 2.11 קיצ' תשע"ה מועד א

.  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , ... נתונה סדרה הנדסית אין-סופית יורדת שכל איבריה חיוביים: ... כל איבר בסדרה זו (חו"ז מהראשון) הוא  $\frac{2}{5}$  מסכום שני האיברים הסמוכים לו, אחד לפניו ואחד אחריו.

א. מצא את המנה של הסדרה  $a_n$ .

ב. נתונה הסדרה  $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$ .

(1) הוכח כי הסדרה  $b_n$  היא סדרה הנדסית.

(2) סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה  $b_n$  הוא 20,460.

מצא את סכום כל האיברים בסדרה  $a_n$ .

### סעיף א

נתון:

$$a_n = \frac{2}{5}(a_{n-1} + a_{n+1}) = \frac{2}{5} \left( \frac{a_n}{q} + qa_n \right)$$

עבור  $a_n$  מוצטמצם ונקבל משווה ריבועית  $0 = 2q^2 - 5q + 2$  שיש לה שני פתרונות  $q = \frac{1}{2}, q = 2$ . נתון שהסדרה יורדת ולכן  $q = 2$ .

### סעיף ב (1)

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{a_{n+2}}{(a_{n+1})^2}}{\frac{(a_n)^2}{a_{n+1}}} = \frac{a_{n+2}}{(a_{n+1})^2} \cdot \frac{(a_n)^2}{a_{n+1}} = \frac{a_n q^2}{(a_n q)^2} \cdot \frac{(a_n)^2}{a_n q} = \frac{1}{q} = 2.$$

### סעיף ב (2)

מ:

$$S_{10} = \frac{b_1(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 20460$$

מתתקבל  $20 = b_1$ . השאלה מבקשת את סכום הסדרה המקורית  $a_n$ . כבר חישבנו את המנה שלה  $b_n$  וניתן לחשב את האיבר הראשון מהנוסחה עבורו:

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1^2} = \frac{a_1 q}{(a_1)^2} = \frac{1}{2a_1}$$

$$a_1 = \frac{1}{2b_1} = \frac{1}{40}$$

$$S_a = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{40 \left( 1 - \frac{1}{2} \right)} = \frac{1}{20}.$$

## 2.12 חורף תשע"ה

$$a_1 = 4$$

.2. סדרה מוגדרת לכל  $n \in \mathbb{N}$  על ידי הכלל:

$$a_n + a_{n+1} = 4n + 2$$

א. אם בסדרה יש 100 איברים, מצא את הסכום של שני האיברים העומדים במקומות

האמצעיים בסדרה.

ב. הוכח כי איברי הסדרה העומדים במקומות אי-זוגיים מהווים סדרה חשבונית,

וגם איברי הסדרה העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה חשבונית.

אם בסדרה יש 101 איברים, מצא:

ג. את האיבר העומד באמצע הסדרה.

ד. את הסכום של כל איברי הסדרה.

**שימוש לב** שלא נתון שהסדרה  $a_n$  חשבונית.

### סעיף א

כדי לרשום את איברי הסדרה כדי לוודא מהם האיברים האמצעיים:

$$\overbrace{a_1, a_2, \dots, a_{49}, a_{50}}^{50}, \overbrace{a_{51}, a_{52}, \dots, a_{100}}^{50}.$$

נתון לחשב את הסכום מהגדרת הסדרה:

$$a_{50} + a_{51} = 4 \cdot 50 + 2 = 202.$$

### סעיף ב

במבחן ראשון השאלה נראה ב unintuitively כי נתונה נוסחה לחישוב איברים סמוכים זה לזה  $a_n + a_{n+1}$ , אבל האיברים הזוגיים נמצאים במרקם שני מקומות זה מזה וכן גם האיברים האי-זוגיים  $a_n - a_{n+2}$ . חבל שאין לנו  $a_n - a_{n+1} - a_{n+2}$ . צמד הביטויים האלה יכול לرمוז ל-"טריק" ידוע במתמטיקה: אם נסימן ונחסיר את אותו ערך לביטוי, ערך הביטוי לא משתנה:

$$\begin{aligned} a_{k+2} - a_k &= a_{k+2} + (a_{k+1} - a_{k+1}) - a_k \\ &= (a_{k+2} + a_{k+1}) - (a_{k+1} + a_k) \\ &= (4(k+1) + 2) - (4k + 2) \\ &= 4. \end{aligned}$$

ההפרש קבוע ולא תלוי בזוגיות, ולכן הזוגיים והאי-זוגיים מהווים סדרות חשבוניות.

## סעיף ג

לא ידוע שהסדרה  $a_n$  חשבונית, אבל  $a_{51}$  הוא איבר בסדרת **האי-זוגיים**. נרשום את הסדרה כדי לדמיין במספר האיברים הזוגיים והאי-זוגיים:

$$\overbrace{a_1, a_2, \dots, a_{49}, a_{50}}^{50}, a_{51}, \overbrace{a_{52}, \dots, a_{100}, a_{101}}^{50}.$$

ברור שמספר האיברים האי-זוגיים גדול באחד ממספר האיברים הזוגיים,  $51 - 50 = 1$ . הוא האיבר ה-25 העומד באמצע סדרת האי-זוגיים. האיבר הראשון של סדרת האי-זוגיים נתון,  $a_1 = 4$ , ואת ההפרש  $d = 4$  חישבנו בסעיף הקודם. מכאן:

$$a_{51} = a_1 + 25d = 4 + 25 \cdot 4 = 104.$$

## סעיף ד

נחשב את סכום הסדרה כחיבור של סכום האי-זוגיים וסכום הזוגיים. נתון, ואת  $a_2$  ניתן לחשב לפי הנוסחה הנתונה 2:  $a_{n+1} = (4n + 2) - a_n$ .

$$a_2 = a_{1+1} = (4 \cdot 1 + 2) - a_1 = 2.$$

כבר חישבנו שഫישים של שתי תת-הסדרות הם 4. מספר האי-זוגיים הוא 51 ומספר הזוגיים הוא 50. סכום הוא:

$$S = S_{odd} + S_{even} = \frac{51}{2}(2 \cdot 4 + 50 \cdot 4) + \frac{50}{2}(2 \cdot 2 + 49 \cdot 4) = 5304 + 5000 = 10304.$$

## 2.13 קיצ' תשע"ד מועד ב

.2 נתונה סדרה חשבונית:  $a_1, a_2, a_3, \dots$

שלושה איברים עוקבים בסדרה,  $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ , מקיימים:

$$a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$$

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$$

א. מצא את האיבר  $a_n$ .

ב. לקחו חלק מהאיברים בסדרה הנתונה ובני סדרה חשבונית חדשה:

$$a_5, a_9, a_{13}, \dots, a_{4k+1}$$

סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 450.

האיבר הראשון בסדרה נתונה בפתרונות הוא  $a_1 = -21$

מצא את הערך של  $k$ .

### סעיף א

הסדרה חשבונית ולכן ניתן להציב בתחום המשוואות הנתונות ולקבל שתי משוואות עם שני געלמים:

$$\begin{aligned} (a_n + 2d)^2 - a_n^2 &= 216 \\ 4a_n d + 4d^2 &= 216 \\ a_n + (a_n + d) + (a_n + 2d) &= 54 \\ 3a_n + 3d &= 54. \end{aligned}$$

הפתרון הוא  $d = 3, a_n = 15$

### סעיף ב

הסדרה החדשה חשבונית שאיבריה  $\dots, a'_1, a'_2, \dots$  הם:

$$\underbrace{a_5 = a_1 + 4d}_{a'_1}, \quad a_6 = a_5 + 5d, \quad a_7 = a_5 + 6d, \quad a_8 = a_5 + 7d, \quad \underbrace{a_9 = a_5 + 8d}_{a'_2}.$$

בסדרה החדשה  $a'_1 = a_5 = -21 + 4d = -9$  ו-  $d' = 4d = 12$ .

$$\frac{k}{2}(2a'_1 + (k-1)d') = \frac{k}{2}(-18 + (k-1) \cdot 12) = 450,$$

מתקבלת משוואה ריבועית  $0 = 2k^2 - 5k - 150$ .

## 2.14 קיצ' תשע"ד מועד א

- .2. בסדרה חשבונית יש 3 איברים.  
 סכום 2 האיברים האחרונים גדול פי 2 מסכום 3 האיברים הקודמים להם.  
 א. הוכח שסכום 3 האיברים הראשונים הוא 0.  
 ב. נתון גם שסכום האיברים החמישי והשביעי הוא 0.  
 סכום כל איברי הסדרה הוא 726.  
 מצא את הפרש הסדרה.

**סעיף א**

כדי לדiyק עם המקומות של האיברים כדי לרשום את הסדרה עם סימון של הסדרות החלקיים:

$$\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}_{S_1}, \underbrace{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}}_{S_2}, \underbrace{a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{3n}}_{S_3}.$$

$$\text{נתון } : S_3 = 2S_2$$

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}(2(a_1 + 2nd) + (n - 1)d) &= 2 \cdot \frac{n}{2}(2(a_1 + nd) + (n - 1)d) \\ 2a_1 + (5n - 1)d &= 4a_1 + (6n - 2)d \\ 2a_1 + (n - 1)d &= 0. \end{aligned}$$

הביטוי מצד השמאלי של המשווה האחרון הוא הסכום  $S_1$ .  
 דרך אחרת לפטור את הבעה היא לחסוך את סכום התת-הסדרות מסכום הסדרה כולה:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_{3n} - (S_2 + S_3) = S_{3n} - (S_2 + 2S_2) = S_{3n} - 3S_2 \\ &= \frac{3n}{2}(2a_1 + (3n - 1)d) - 3 \cdot \frac{n}{2}(2(a_1 + nd) + (n - 1)d) \\ &= 0. \end{aligned}$$

בבחינה של חורף תשע"ב אורך הסדרה הוא  $1-2n$ , ונתונים הסכומים של  $n$  האיברים הראשונים ו- $n$  האיברים האחרונים. רק רישום זהיר של הסדרה יבהיר שיש חפיפה בין שתי תת-הסדרות:

$$\overbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}^n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n-1}.$$

$\underbrace{\hspace*{10em}}_n$

בדוגמה קל יותר לשים לב לחפיפה. עם  $n = 4$ :

$$\overbrace{a_1, a_2, a_3, a_4}^4, a_5, a_6, a_7.$$

$\underbrace{\hspace*{4em}}_4$

## סעיף ב

נתון שסכום הסדרה ועלינו למצוא  $d$  למרות שאין לנו  $a_1$ . נבדוק אם הנתון השני יכול לעזור:

$$a_5 + a_7 = (a_1 + 4d) + (a_1 + 6d) = 0.$$

מכאן  $a_1 = -5d$ .  
בסעיף א חישבנו  $S_1 = 0$  ונציב עבור  $a_1$ :

$$\frac{n}{2}(-10d + (n-1)d) = 0.$$

אם  $n=0$ , מנהנתו  $a_5 + a_7 = 0$  אפשר להסיק שככל איברי הסדרה הם אפס. זה סותר את הנתון שהסכום חיובי. לכן אפשר לחלק את המשוואה ב- $-d$  ונקבל  $n=11$ .

נציב עבור  $n=11$  בנוסחה  $S_{3n}$ :

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{3n}{2}(2a_1 + (3n-1)d) \\ &= \frac{33}{2}(-10d + (33-1)d) \\ &= \frac{33}{2} \cdot 22d = 363d = 726, \end{aligned}$$

ונקבל  $d=2$ .

## 2.15 חורף תשע"ד

2. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית יורדת:  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 6.

מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה,

ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה:  $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$

סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא -3.

מהאיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישיית:  $\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$

א. הוכח כי הסדרה השלישייה היא סדרה הנדסית.

ב. נתון כי סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה השלישייה הוא 273.25.

מצא את  $n$ .

### סעיף א

המנה של הסדרה השלישייה קבועה כי נתון שהסדרה הראשונה הנדסית:

$$\frac{1/a_{n+1}}{1/a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

### סעיף ב

נשתמש בשני הסכוםים הנתונים כדי לכתוב שתי משוואות עם שני נעלמים:

$$\frac{a_2}{1-q} = 6$$

$$\frac{-a_2}{1-(-q)} = -3.$$

$$a_2 = 4 \cdot q = \frac{1}{3}$$

בסדרה השלישייה, האיבר הראשון הוא  $\frac{1}{d} = \frac{1}{4}$ . מהסכום השלישי ונקבל:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = 273.25$$

$$3^n = 2187$$

$$n = 7,$$

כאשר בדקנו חזקות של 3 עד שהתקבל 2187.

## המלצות

- **חובה לקרוא את השאלות בזיהירות רבה.** בבחינה של קיז תשע"ה א', סעיף ב שואלת על סדרה חדשה  $b_n$ , אבל בסוף חוזרת ובקשת למצוא את הסכום של הסדרה הנתונה  $a_n$ .

- ברוב השאלות נתונה סדרה ומוגדרת סדרה חדשה המבוססת על הסדרה הנתונה. **אין בהכרח קשר בין תכונה של הסדרה המקורי והסדרה החדשה.** להלן שתי סדרות חשבוניות, אבל כאשר משלבים את שתיהן, מתקבלת סדרה שאינה חשבונית:

$$1, 4, 7, 10, 13, \dots$$

$$2, 5, 8, 11, 14, \dots$$

$$1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, \dots$$

- כאשר מבקשים להוכיח שת-סדרות הזוגיים חשבוניות או הנדסית וגם תת-סדרת האי-זוגיים, הוכחה אחת תספיק כי אם  $\frac{a_{n+2}}{a_n}$  קבוע, לא משנה אם  $n$  זוגי או אי-זוגי.

- כדאי לרשום את איברי הסדרה כדי לבדוק במקומות של האיברים:

$$\overbrace{a_1, a_2, \dots, a_{49}, a_{50}}^{50}, \overbrace{a_{51}, a_{52}, \dots, a_{100}}^{50}$$

$$\underbrace{\overbrace{a_1, a_2, \dots, a_{49}, a_{50}}_{50}, a_{51}, \overbrace{a_{52}, \dots, a_{100}, a_{101}}_{50}}_{50}.$$

- מקרה מעניין הוא תת-סדרות חופפות (בחינה של חורף תשע"ב שלא נמצאת במסמך זה):

$$\overbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}^n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n-1}$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{n}$$

- קיימות שתי דרכי לסכום מספר תת-סדרות. דרך אחת היא לסכום כל תת-סדרה בנפרד עם ערכי  $a_1, a_2, \dots, a_n$  או  $d, q$  שלhn. זה קורה לעיתים קרובות כאשר השאלה מבקשת לחשב סכום של סדרה, אבל ידוע רק שתת-סדרות חשבוניות או הנדסיות, למשל, זוגיים ואי-זוגיים.

- דרך אחרת היא לחבר את הסכומים של תת-סדרות ולהחסיר את התוצאה מסכום הסדרה כולה:

$$S_1 = S_n - (S_2 + S_3).$$

- הבדיקה של חורף תשע"ו מעניינת כי מספר האיברים הוא לא הערך של המספר  $n$  המופיע בשאלת. חשוב לרשום דוגמה מספרית כדי לוודא מהו מספר האיברים:

$$(1) a_1 \cdot a_2, \quad (2) a_2 \cdot a_3, \quad \dots \quad (5) a_5 \cdot a_6 = (a_n \cdot a_{n+1}), \quad (6) a_6 \cdot a_7 (= a_{n+1} \cdot a_{n+2}).$$

- טרייך שימושי הוא לחבר ולהחסיר את אותו ערך בביטוי :

$$a_{k+2} - a_k = a_{k+2} + (a_{k+1} - a_{k+1}) - a_k = (a_{k+2} + a_{k+1}) - (a_{k+1} + a_k) .$$

- הכנסת איברים חדשים בתוך סדרה לא בהכרח שומרת על הסדרה כחישובונית או הנדסית. השורה הראשונה להלן היא סדרה חישובונית. בשורה השנייה הוכנסו איברים של סדרה חישובונית נוספת והסדרה החדשה היא חישובונית. בשורה השלישית הוכנסו איברים של סדרה חישובונית נוספת והסדרה החדשה אינה חישובונית.

$$1, \quad 5, \quad 9, \quad 13, \quad 17$$

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11, \quad 13, \quad 15, \quad 17$$

$$1, \quad 2, \quad 5, \quad 6, \quad 9, \quad 10, \quad 13, \quad 14, \quad 17$$

- בחישוב הפרש או מנתה, כדאי להציב עבור  $a_{n+1}$  או  $a_{n-1}$  בביטוי שיש בו  $a_n$  כדי לקבל משווהה עם **עלם אחד** :
- $$a_n = \frac{2}{5}(a_{n-1} + a_{n+1}) = \frac{2}{5} \left( \frac{a_n}{q} + qa_n \right) .$$
- $a_n$  מצטמצם ונקבל משווהה ריבועית ב- $q$ .



## פרק 3 הסתברות

### 3.1 קיז תשע"ח מועד ב

במבחן רב-ברירה ("אמריקני") יש 5 שאלות.

כל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.

התלמידים צריכים לסמך תשובה אחת מבין 4 התשובות המוצגות.

תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאלה מקבל 20 נקודות לשאלה זו.

תלמיד שמסמן תשובה לא נכונה על השאלה אינו מקבל נקודות לשאלה.

כדי לעبور את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכל.

א. על 2 מן השאלות ידע שחר בודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בשאר השאלות הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.

(1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיק 60 נקודות?

(2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?

ב. על 2 מן השאלות ידע דניאל בודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בודאות שתשובה אחת, מבין 4 התשובות המוצגות, אינה נכונה,

ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיק 60 נקודות?

ג. על 3 מן השאלות ידעה הדס בודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימנה אותן.

בכל שתי השאלות האחרות היא ידעה בודאות ש- k מבין 4 התשובות המוצגות אינן נכונות, וסימנה

באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות שהיא תצBOR בדיק 100 נקודות במבחן.

מצאת k . נמק.

שאלה זו מאוד ארוכה אבל לא קשה במיוחד, כי ניתן לפתור אותה באמצעות נוסחת ברנולי בלבד.

**סעיף א (1)**

שחר ידע שהוא ענה נכון על שתי שאלות ולכן כדי לקבל ציון 60 עליו לענות על **בדיקה אחת** משלושת השאלות האחרות:

$$\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}.$$

**סעיף א (2)**

כדי לעبور את המבחן עליו לצבור **פחות** שלוש תשובות נכונות. להסתברות מהסעיף הקודם הקודם יש להוסיף את הנסיבות של ארבע וחמש תשובות נכונות:

$$\frac{27}{64} + \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{37}{64}.$$

## סעיף ב

דניאל צריך לענות נכון על שאלה אחת **בדיוק** מתוך שלושת השאלות הנותרות. דניאל ידע שתשובה אחת לא נכונה, לכן ההסתברות שהוא ענה נכון על השאלה היא  $\frac{1}{3}$  ולא  $\frac{1}{4}$  כמו בסעיף הקודם:

$$\binom{3}{1} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

## סעיף ג

אם הדס ידע ש- $k$  מתוך 4 תשובות לא נכונות, ההסתברות שהיא ענתה תשובה נכונה היא  $\frac{1}{4-k}$  וההסתברות שהיא ענתה תשובה לא נכונה היא המשלים לו:

$$1 - \frac{1}{4-k} = \frac{4-k-1}{4-k}.$$

כדי לקבל ציון **בדיוק** 100 הדס צריך לבחור תשובות נכונות לשתי השאלות הנותרות. כדי לקבל ציון **בדיוק** 60 עליה לבחור תשובות לא נכונות לשתי השאלות הנותרות.

אין צורך להשתמש בנוסחת ברנולי במלואו, כי כאשר מחשבים את ההסתברות של "הכל" או "אף אחד", אין  $\binom{n}{k} = 1$ , וגם  $(1-p)^0 = 1$  או  $p^0 = 1$ , ולכן מספיק לחשב את ההסתברות של האירוע החזק מסpter:

$$\left(\frac{1}{4-k}\right)^2 = \left(\frac{4-k-1}{4-k}\right)^2.$$

נפשט ונקבל משווה ריבועית  $k^2 - 6k + 8 = 0$  שהפתרונות שלה הם  $k=2$ ,  $k=4$ . הפרמטר  $k$  מוגדר כמספר התשובות שהדס יודעת שהן **אינן** נכונות, ונתנו) בשורה השנייה של השאלה (תשובה אחת נכונה, כך שיש לפסול את הפתרון  $k=4$  ולבחור  $k=2$ .

## 3.2 קיז תשע"ח מועד א

בעיר גודלה נערכן מבחון לכל תלמידי התיכון.

$\frac{35}{37}$  מן התלמידים שניגשו ל מבחון נעזרו בחבריהם כדי להתכוון ל מבחון.  $\frac{35}{37}$  מהם עברו את המבחן. מספר התלמידים שלא נעזרו בחבריהם ולא עברו את המבחן קטן פי 5. מספר התלמידים שנעזרו בחבריהם ו עברו את המבחן.

- א. בחרו באקראי תלמיד שניגש ל מבחון, והתברר שהוא לא עבר את המבחן. מהי ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?
- ב. יעל והדס ניגשו ל מבחון. ידוע שיעל נעזרה בחבריה כדי להתכוון ל מבחון, והדס לא נעזרה בחבריה כדי להתכוון ל מבחון. האם ההסתברות שיעל עברה את המבחן גבוהה מההסתברות שהדס עברה את המבחן? נמק.
- ג. בחרו באקראי 6 תלמידים שניגשו ל מבחון. מהי ההסתברות שבכיוון שליש מהם לא נעזרו בחבריהם ו עברו את המבחן?
- ד. בחרו באקראי תלמיד שניגש ל מבחון. מהי ההסתברות שהוא מקיים לפחות משתי הטענות I-II:
  - (I) התלמיד נעזר בחבריו.
  - (II) התלמיד לא עבר את המבחן.

לפני שניגש לפתרור את השאלות בסעיפים, נמלא את טבלת ההסתברויות לפי המידע הנתון.

נסמן ב- $N$  את התלמידים שנעזרו בחבריהם, וב- $A$ - את התלמידים שעברו את המבחן.

די ברור שאם  $37\%$  נעזרו בחבריהם ו- $35$  מהם עברו אז  $P(N \cap A) = 0.35$ , אבל ככל זאת נחשב בצורה פרומולית. נתון ש- $P(N) = 0.37$ . מהט עברו את הבחינה  $\frac{35}{37}$ , כך שעריך זה הוא ההסתברות המותנית  $P(A|N)$ .

$$P(A|N) = \frac{P(N \cap A)}{P(N)} = \frac{P(N \cap A)}{0.37} = \frac{35}{37}$$

$$P(N \cap A) = 0.35.$$

עד כאן טבלת ההסתברויות היא :

$\bar{A}$	$A$	
$N$		
$\bar{N}$		
0.37	0.02	0.35
0.63		
1.0		

בالمשך נתנו ש :

$$P(\bar{N} \cap \bar{A}) = \frac{P(N \cap A)}{5} = \frac{0.35}{5} = 0.07,$$

וניתן להשלים את הטבלה :

$\bar{A}$	$A$		$N$
0.37	0.02	0.35	
0.63	0.07	0.56	$\bar{N}$
1.0	0.09	0.91	

#### סעיף א

הניסוח "בחרו ... תלמיד ... מה הסתברות שהוא נער בחבrio?" מכוון להסתברות מותנית :

$$P(N/\bar{A}) = \frac{P(N \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0.02}{0.09} = \frac{2}{9}.$$

#### סעיף ב

הניסוח "ידעו ש" מכוון להסתברות מותנית.

עבור על ההסתברות המותנית היא :

$$P(A/N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{0.35}{0.37} = 0.9459,$$

ועבור הדס ההסתברות המותנית היא :

$$P(A/\bar{N}) = \frac{P(A \cap \bar{N})}{P(\bar{N})} = \frac{0.56}{0.63} = 0.8889.$$

ליעיל הסתברות גבוהה יותר עבור את המבחן.

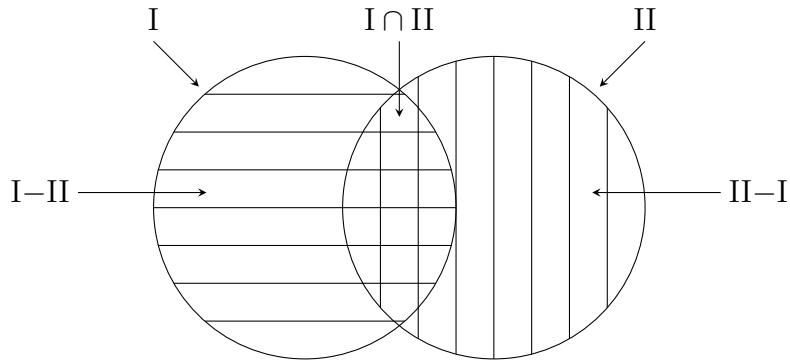
#### סעיף ג

שליש של שש הוא שניים. (שים לב שלא לקרוא "שלשה" במקום "שלישי"!) החישוב הוא לפי נוסחת ברנולי כאשר הערך  $P(\bar{N} \cap A) = 0.56$  נמצא בטבלה :

$$\binom{6}{2} (0.56)^2 (1 - 0.56)^4 = 0.1763.$$

#### סעיף ד

הניסוח "לפחות אחת" משתי הטענות, I, II אומר שהairoע קורה אם קורה אחד מהairoעים, I, II או שניהם. בתרשים להלן שני העגולים המייצגים את שני האירועים, I, II והairoע "פחות אחת" מיוצג על ידי כל השטח המוקווקו :



יש שתי דרכים לחשב את ההסתברות. בדרך ראשונה אנו לוקחים את סכום ההסתברויות של שני האירועים, ומחסירים את ההסתברות של האירוע המשותף כי ספנו אותו פעמיים, פעם כחלק מהאירוע I ופעם כחלק מהאירוע II:

$$P(I \cup II) = P(I) + P(II) - P(I \cap II).$$

בדרך השנייה אנו סופרים כל חלק מהאירוע השותף בנפרד, כאשר הסימון  $A - B$  הוא כל האיברים בקבוצה  $B$  שאינם בקבוצה  $A$ :

$$P(I \cup II) = P(I - II) + P(II - I) + P(I \cap II).$$

את ההסתברויות לחישוב ניקח מהטבלה. הדרך ראשונה מופיעה מימין והדרך השנייה משמאלה:

$\bar{A}$	$A$		$N$
0.37	0.02	0.35	$N$
0.63	0.07	0.56	$\bar{N}$
1.0	0.09	0.91	

$\bar{A}$	$A$		$N$
0.37	0.02	0.35	$N$
0.63	0.07	0.56	$\bar{N}$
1.0	0.09	0.91	

בשתי הדרכים מקבלים אותה תוצאה:

$$P(N \cup \bar{A}) = P(N) + P(\bar{A}) - P(N \cap \bar{A}) = 0.37 + 0.09 - 0.02 = 0.44$$

$$P(N \cup \bar{A}) = P(N - \bar{A}) + P(\bar{A} - N) + P(N \cap \bar{A}) = 0.35 + 0.07 + 0.02 = 0.44.$$

### 3.3 חורף תשע"ח

למייל יש קובייה מואזנת. על שלוש מפאות הקובייה שלה כתוב המספר 2, ועל שלוש הפאות האחרות כתוב המספר 4.

ולגilit יש קובייה מואזנת אחרת. על כל אחת מפאות הקובייה של galit כתוב אחד מן המספרים: 1 או 3. מייל וgalit משחקים משחק בן חמישה סיבובים. המשתתפת שתנצח במספר סיבובים רב יותר מחברתה, תנצח במשחק. בכל סיבוב של המשחק כל אחת מהן מטילה את הקובייה של galit פעם אחת.

המנצחת בסיבוב היא השחקנית שהטckaל על הקובייה של galit גובה יותר.

נתנו שבסיבוב ייחיד הסיכוי של מייל לנצח את galit הוא  $\frac{7}{12}$ .

a. על כמה פאות בקובייה של galit כתוב המספר 1? נמק את תשובתך.

b. מהו הסיכוי שgalit תנצח במשחק?

c. מהו הסיכוי של galit לנצח במשחק, אם ידוע שהיא ניצחה בסיבוב הראשון?

#### סעיף א

נסמן ב-a את המספר הפאות של הקובייה של galit שכותב עליון 1.

מייל תנצח אם היא מטילה 4 (הסתברות  $\frac{3}{6}$ , לא משנה מה galit מטילה) הסתברות 1, או אם היא מטילה 2 (הסתברות  $\frac{3}{6}$ , וgalit מטילה 1) הסתברות  $\frac{n}{6}$ :

$$\frac{3}{6} \cdot 1 + \frac{3}{6} \cdot \frac{n}{6} = \frac{7}{12},$$

והפתרון הוא  $n = 1$ .

#### סעיף ב

galit תנצח אם היא תנצח ב-5, 4, 3 סיבובים. ההסתברות לניצחון בכל סיבוב היא  $: 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

$$\binom{5}{3} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(\frac{7}{12}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{5}{12}\right)^4 \left(\frac{7}{12}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{5}{12}\right)^5 \left(\frac{7}{12}\right)^0 = 0.3466.$$

#### סעיף ג

הניסוח אם ידוע מכוון להסתברות מותנית:

$$P = \frac{\text{(galit ניצחה בסיבוב הראשון} \cap \text{galit תנצח})}{\text{(galit ניצחה בסיבוב הראשון}/\text{galit תנצח}}.$$

ההסתברות במונה: כדי שgalit תנצח במשחק ו גם בסיבוב הראשון, היא חייבת לנצח בסיבוב הראשון וגם ב-2 או 3 או 4 מהסיבובים הנוגדים:

$$\frac{5}{12} \left[ \binom{4}{4} \left(\frac{5}{12}\right)^4 \left(\frac{7}{12}\right)^0 + \binom{4}{3} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(\frac{7}{12}\right)^1 + \binom{4}{2} \left(\frac{5}{12}\right)^2 \left(\frac{7}{12}\right)^2 \right] = \frac{5}{12} \cdot 0.5534.$$

ההסתברות במכנה היא  $\frac{5}{12}$  ולכן התשובה היא 0.5534

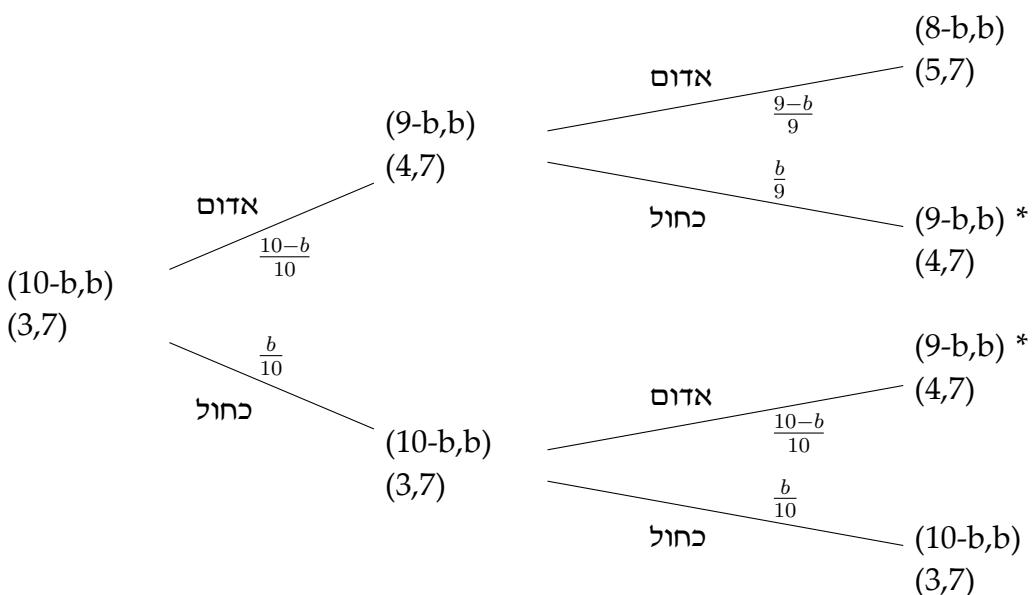
### 3.4 קיז תשע"ז מועד ב

בקופסה I יש 10 כדורים, כמה מהם כחולים והשאר אדומים, ובבקופסה II יש 7 כדורים כחולים ו-3 כדורים אדומים. מוצאים באקראי כדור מקופסה I. אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II. אם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I. שוב מוצאים באקראי כדור מקופסה I, ושוב, אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II. ואם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I. לאחר מכן מוצאים באקראי כדור אחד מקופסה II. נתון כי ההסתברות שאחרי שתי הוצאות מקופסה I יועבר כדור אדום אחד בלבד ב- $\frac{19}{36}$ . מקופסה I לקופסה II היא  $\frac{19}{36}$ .

חשב את מספר ה כדורים הכהולים שהיו בקופסה I לפני הוצאה הראשונה.

ענה על השעיפים ב-ג עבור מספר ה כדורים הכהולים שהיחס בתשע"א.  
ב. מהי ההסתברות שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום?  
ג. ידוע שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום.  
מהי ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II נשארו בה שלושה כדורים אדומים בדיוק?

הניטוח "מוצאים באקראי ... ולאחר מכן שוב מוצאים באקראי" מכונן לשימוש בעץ. נסמן ב- $b$  את מספר ה כדורים הכהולים בקופסה I. בתרשים, בכל צומת רשום שני זוגות של מספרים: מספר ה כדורים האדומים ומספר ה כדורים הכהולים בקופסה I, ומתחתיו מספר ה כדורים האדומים ומספר ה כדורים הכהולים בקופסה II.



## סעיף א

הוכבויות מסמנות את שתי האפשרויות בהן הוצאהנו כדור אדום אחד בדיק מקופסה I. נשווה את הסתברות הנתונה לסכום ההסתברויות של שני המסלולים :

$$\frac{10-b}{10} \cdot \frac{b}{9} + \frac{b}{10} \cdot \frac{10-b}{10} = \frac{19}{36}.$$

נפשט ונקבל משווה ריבועית  $b^2 - 10b + 25 = 0$ .  $b = 5$

## סעיף ב

בתרשימים רשום מספר ה כדורים האדומים מתוך כל ה כדורים ב קופסה II. מלמעלה למטה :

$$\frac{5}{5+7} = \frac{5}{12}, \quad \frac{4}{4+7} = \frac{4}{11}, \quad \frac{4}{4+7} = \frac{4}{11}, \quad \frac{3}{3+7} = \frac{3}{10}.$$

את ההסתברויות להגעה לכל אחד מהמצבים נקבל לאחר הצבת  $b = 5$ . נסכם את ההסתברויות להוצאה כדור אדום מקופסה II:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \right) \left( \frac{5}{12} \right) + \left( \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \right) \left( \frac{4}{11} \right) + \\ & \left( \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \right) \left( \frac{4}{11} \right) + \left( \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \right) \left( \frac{3}{10} \right) = 0.3595. \end{aligned}$$

## סעיף ג

הניסוח "יוזע ש-" מכוון להסתברות מותנית :

$P(\text{הוציאו כדור אדום מקופסה II}/\text{נשארו שלושה אדומים בkopfse II}) =$

$$\frac{P(\text{הוציאו כדור אדום מקופסה II} \cap \text{נשארו שלושה אדומים בkopfse II})}{P(\text{הוציאו כדור אדום מקופסה II})}$$

נשארו שלושה כדורים אדומים רק אם היו ארבעה כדורים אדומים לפני הבחירה. ההסתברות במונה היא  $\frac{19}{36}$ , ההסתברות הנתונה! (שנגיע לאחד הממצבים המסומנים בכוכבית, כפול ההסתברות לבחור אדום מקופסה II מותך 4 כדורים. חישבנו את ההסתברות במכנה בסעיף ב :

$$\frac{\frac{19}{36} \cdot \frac{4}{11}}{0.3595} = 0.53385.$$

### 3.5 קיצ' תשע"ז מועד א

- בבית אבות גדול יש לכמה מן הדירות קלנווית, ולשאר אין.
- אם בוחרים באקראי 9 דירות מבית האבות זהה, ההסתברות של 4 מהם בדיק יש קלנווית גדולה פי 24 מן ההסתברות של 6 מהם בדיק יש קלנווית.
- א. מהי ההסתברות של דיר שnbr באקראי יש קלנווית?
- ב. בוחרים באקראי 6 דירות מבית האבות. ידוע שלפחות ל-3 מהם יש קלנווית.
- ג. בוחרים באקראי 6 דירות מבית האבות, בזה אחר זה, עד של-3 מהם בדיק יש קלנווית. מהי ההסתברות שיבחרו בדרך זו בדיק 6 דירות?

#### סעיף א

נסמן ב- $D$  את האירוע "לديר יש קלנווית" ואת ההסתברות שלו ב- $p$ . לפי נוסחת ברנולי:

$$\binom{9}{4} p^4 (1-p)^5 = 24 \binom{9}{6} p^6 (1-p)^3.$$

נפשט ונקבל משווה ריבועית:

$$15p^2 + 2p - 1 = 0,$$

$$p = \frac{1}{5} = 0.2$$

#### סעיף ב

הניסוח "ידעו ש-" מכון להסתברות מותנית:

$$P(D = 4 | D \geq 3) = \frac{P(D = 4 \cap D \geq 3)}{P(D \geq 3)}.$$

כאשר יש חפיפה בין שני ביטויים בחיתוך אפשר לפשט אותו: ברור שאם ערך גדול או שווה 3 **וגם** שווה 4 אז הוא שווה ל-4:

$$P(D = 4 | D \geq 3) = \frac{P(D = 4)}{P(D \geq 3)}.$$

לפי נוסחת ברנולי:

$$P(D = 4) = \binom{6}{4} 0.2^4 (1-0.2)^2 = 0.01536.$$

את המונה ( $P(D \geq 3)$  אפשר לחשב בשתי דרכים, בצורה ישירה:

$$\binom{6}{3} 0.2^3 (1-0.2)^3 + \binom{6}{4} 0.2^4 (1-0.2)^2 + \binom{6}{5} 0.2^5 (1-0.2)^1 + \binom{6}{6} 0.2^6 (1-0.2)^0 = 0.099,$$

או אחד פחות המשלים :

$$1 - 0.2^0(1 - 0.2)^6 - \binom{6}{1}0.2^1(1 - 0.2)^5 - \binom{6}{2}0.2^2(1 - 0.2)^4 = 0.099,$$

כמובן שכדי לבחור את האפשרות השנייה כי יש פחות גורמים לחשב.

התשובה לשאלת היא :

$$P(D = 4 | D \geq 3) = \frac{P(D = 4)}{P(D \geq 3)} = \frac{0.01536}{0.099} = 0.15534.$$

#### סעיף ג

המשמעות של "עד ש" היא שהבחירה[אחרונה](#) תהיה "הצלחה" ויהיו שתי "הצלחות" בחמשת הבחירהות : הקודמות :

$$\overbrace{\pm \pm \pm \pm \pm}^{2/5} \quad \overbrace{+}^{1/1}.$$

התשובה מתקבלת מנוסחת ברנולי לבחירות הראשונות כפול הסתברות  $p$  לבחירה[אחרונה](#) :

$$\left[ \binom{5}{2} 0.2^2 (1 - .02)^3 \right] \cdot 0.2 = 0.04096.$$

## 3.6 חורף תשע"ז

אבייגיל משתתפת במשחק של זרייקת חצים למטרה. הסיכוי שלו לפגוע במטרה בניסיון בודד הוא  $P(0 > P)$ , ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים. כל משתתף זורק 5 זרייקות רצופות. הסיכוי של ABIIGIL לפגוע במטרה ארבע זרייקות מtower החמש גדול פי 3 מן הסיכוי שלו לפגוע בה בכל חמיש הזריקות.

א. מצא את  $P$ .

משתתף מנצח במשחק אם מtower 5 זרייקות רצופות, מספר הפגיעות שלו במטרה גדול ממספר החטאות שלו (יכול להיות יותר ממנצח אחד במשחק).

ב. מהי ההסתברות שאבייגיל תנצח במשחק?

ג. (1) אם ABIIGIL תחתיא את המטרה בזריקה השנייה, מהי ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

(2) גם TAMER משתתפת במשחק, וגם הסיכוי שלו לפגוע במטרה בניסיון בודד שווה ל- $P$

ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים. TAMER החטיאה בזריקה הראשונה.

מה ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

### סעיף א

נכתב משאווה עם נוסחת ברנולי לפי המידע הנתון:

$$\binom{5}{4} p^4 (1-p)^1 = 3 \binom{5}{5} p^5 (1-p)^0.$$

הגורם  $p^4$  מctratzim והפתרון הוא  $p = \frac{5}{8}$

### סעיף ב

ABIIGIL תנצח אם היא פוגעת ב-3 או 4 או 5 זרייקות. ההסתברות היא:

$$\binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p)^1 + \binom{5}{5} p^5 (1-p)^0.$$

נציב  $p = \frac{5}{8}$  ונקבל 0.7248

### סעיף ג (1)

לדעתו, ניסוח השאלה לא ברור. אני פירשתי אותה כך: מה ההסתברות של **האירוע "אביביל מחתיאה בזריקה השנייה ופוגעת בשלוש או ארבע מהזריקות האחרות"**? כותב הבדיקה התכוון להסתברות מותנית: **"אם ידוע ש-אביביל החטיאה בזריקה השנייה, מה ההסתברות שהיא פוגעת בשלוש או ארבע מהזריקות האחרות?"** הנוסחה היא:

$$P(1, 3, 4, 5) = \frac{(אביביל החטיאה בזריקה השנייה \cdot אביביל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות 5)}{(אביביל החטיאה בזריקה השנייה \cdot אביביל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות 5, 4, 3, 1)}.$$

אפשר לפתרו את הבעיה בשתי דרכים. נתחיל עם הדרך הפешוטה יותר. נתנו שהסיכוי לפוגע במטרה אינו תלוי בניסיונות הקודמים, ולכן ההסתברויות בלתי תלויות וחישוב מצטמצם:

$$P(1, 3, 4, 5) = \frac{(אביביל החטיאה בזריקה השנייה \cdot אביביל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות 5)}{(אביביל החטיאה בזריקה השנייה)}$$

$$(אביביל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות 5).$$

לפי נוסחת ברנולי:

$$\binom{4}{4} \left(\frac{5}{8}\right)^4 \left(\frac{3}{6}\right)^0 + \binom{4}{3} \left(\frac{5}{8}\right)^3 \left(\frac{3}{8}\right)^1 = 0.5188.$$

הדרך השנייה ארוכה יותר אבל מעניינת. האירוע של החיתוך בנוסחה להסתברות מותנית מורכבת משני אירועים: (א) לשנה מה יצא מהזריקה הראשונה, הזריקה השנייה החטיאה, ושלשות הזריקות האחרונות פגעו. (ב) הזריקה הראשונה פגעה, הזריקה השנייה החטיאה, ושתיים מתוך שלשות הזריקות האחרונות פגעו. הסתברות של האירוע המשותף היא:

$$1 \cdot \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3 + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \left[\binom{3}{2} \left(\frac{5}{8}\right)^2 \frac{3}{8}\right] = 0.1945.$$

נחלק ב- $\frac{3}{8}$ , ההסתברות האביביל החטיאה בזריקה השנייה, ונקבל 0.5188.

### סעיף ג (2)

לא משנה איזו זריקה החטיאה, הזריקות בלתי תלויות וחישוב ההסתברות של "תמר פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות 5, 4, 3, 2" נותן אותה תוצאה כמו האירוע "אביביל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות 5, 4, 3, 2".

## 3.7 קיז תשע"ו מועד ב

שחמט הוא משחק בין שני שחקנים שיכל להסתיים בניצחון של אחד מהם או בתיקו.  
יעל ואנה משחקים זו מול זו בטורניר שהחלה בשני סבבים.

ההסתברות של כל אחת מן השחקניות לניצח במשחק בודד היא קבועה בכל הטורניר.

א. בסבב הראשון יש 4 משחקים. ההסתברות שיעיל תנצח ב- 2 משחקים

או ב- 3 משחקים גדולה פי 10 מן ההסתברות שיעיל תנצח ב- 4 משחקים.

חשב את ההסתברות שיעיל תנצח במשחק בודד.

בסבב השני יש 2 משחקים.

ההסתברות שתוצאת הסבב השני תהיה שוויה — היא 0.34.

ב. מהי ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד?

ג. חשב את ההסתברות שאנה תנצח במשחק השני, אם ידוע שתוצאת סבב זה היא שוויה.

נסמן:  $y$  = ההסתברות שיעיל תנצח במשחק בודד,  $a$  = ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד.

### סעיף א

לפי המידע הנתנו ונוסחת ברנולי:

$$\binom{4}{2}y^2(1-y)^2 + \binom{4}{3}y^3(1-y) = 10 \cdot \binom{4}{4}y^4(1-y)^0.$$

נפשט ונקבל משווהה ריבועית  $0 = 4y^2 + 4y - 3 = 4y^2 + 4y - 3$  שהשורש החיובי שלה היא  $0.5$ .

### סעיף ב

האפשרויות לקבל שווין הן: (א) ניצחון אחד לאנה וליעל, או (ב) תיקו בשני המשחקים. ההסתברות

لتיקו היא המשלים לסכום ההסתברויות שאחת מהן תנצח:

$$\binom{2}{1}ya + (1 - (y + a))^2 = 0.34.$$

נציב  $0.5$  ל  $y$  ונקבל  $0.3 = a$ .

### סעיף ג

הניסוח "אם ידוע ש—" מכוון להסתברות מותנית:

$P = (\text{תוצאת הסבב השני היא שוויה}/\text{アナ תנצח במשחק השני})$

$$\frac{(\text{תוצאת הסבב השני היא שוויה} \cap \text{アナ תנצח במשחק השני})}{P}.$$

ההסתברות לשווון בסבב השני נתונה. אם安娜 תנצח במשחק השני, יהיה שווין רק אם גם יעל תנצח במשחק הראשון:

$$\frac{ya}{.34} = \frac{0.5 \cdot 0.3}{.34} = 0.4412.$$

שםו לב שלא צריכים  $\binom{2}{1}$  כי האירוע הוא שאנה תנצח במשחק השני ויעל תנצח במשחק הראשון.

### 3.8 קיז' תשע"ו מועד א

- במבחן כניסה למכללה % 20 מן הנבחנים היו מקיובצים.  
 40% היו ממושבים ו- 40% היו מעירים.  
 70% מן הנבחנים הצלicho במבחן.  
 $\frac{1}{8}$  מן הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו במבחן.  
 ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהוא מקיובץ וגם הצלich במבחן, גדולה פי 2.5 מן ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהוא מקיובץ וגם הצלich במבחן.  
 א. מבין הנבחנים שנכשלו במבחן, מהי ההסתברות לבחור באקראי נבחן שלא היה מעיר?  
 ב. (1) משה הצלich במבחן?  
 מהי ההסתברות שהוא לא היה ממושב?  
 (2) חמישה נבחנים הצלicho במבחן.  
 מהי ההסתברות של לפחות אחד מהם היה ממושב?

נסמן  $S$  = נבחנים שהצלicho,  $K$  = נבחנים מקיובצים,  $M$  = נבחנים ממושבים,  $E$  = נבחנים מעירים.  
 ההסתברויות הנתונות הן :

$$P(K) = 0.20, \quad P(M) = 0.40, \quad P(E) = 0.40, \quad P(S) = 0.70.$$

נתון :

$$P(\bar{S}/M) = P(\bar{S} \cap M)/P(M) = \frac{1}{8},$$

ולכן :

$$P(\bar{S} \cap M) = P(\bar{S}/M) \cdot P(M) = \frac{1}{8} \cdot 0.40 = 0.05.$$

סיכום ביניים :

$E$	$M$	$K$		$S$
0.70		0.35		
0.30		0.05		$\bar{S}$
1.0	0.40	0.40	0.20	

$$\text{הنتון האחרון הוא : } P(E \cap S) = 2.5 \cdot P(K \cap S)$$

נסכם את ההסתברויות להצלחה של נבחנים מהמושב, הקיבוץ והעיר :

$$P(S) = 0.70 = P(K \cap S) + 0.35 + 2.5 \cdot P(K \cap S).$$

$$\text{נקבל } 0.1 \text{ ולפי היחס } P(K \cap S) = 0.1 \text{ נקבע}$$

נסכם את המידע בטבלה :

	$E$	$M$	$K$	
$S$	0.70	0.25	0.35	0.10
$\bar{S}$	0.30	0.15	0.05	0.10
	1.0	0.40	0.40	0.20

שיםו לב שהניסוח " $\frac{1}{8}$  מן הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו" מכוון להסתברות מותנית, לעומת הניסוח "ההסתברות לבחור באקראי **בין כל** הנבחנים נבחן שהיה מהעיר **וגם** הצליח ב מבחן" מכוון לחיתוך הסתברויות, כי ההסתברות לבחור אחד "מכל הנבחנים" היא 1 :

$$P(E \cap S / S) = \frac{(P(E \cap S) \cap \text{כל הנבחנים})}{(P(\text{כל הנבחנים}))} = \frac{P(E \cap S)}{1} = P(E \cap S).$$

#### סעיף א

לפי הנוסחה להסתברות מותנית (והנחה שאף נבחן לא בא גם מקיבוץ וגם ממושב) :

$$P(\bar{E}/\bar{S}) = P((K \cup M)/\bar{S}) = \frac{P(K \cap \bar{S}) + P(M \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{0.10 + 0.05}{0.30} = \frac{1}{2}.$$

#### סעיף ב (1)

לפי הנוסחה להסתברות מותנית (והנחה שאף נבחן לא בא גם מקיבוץ וגם מעיר) :

$$P(\bar{M}/S) = P((K \cup E)/S) = \frac{P(K \cap S) + P(E \cap S)}{P(S)} = \frac{0.10 + 0.25}{0.70} = \frac{1}{2}.$$

#### סעיף ב (2)

"לפחות אחד ממושב" הוא המשלים ל-"COLUMN לא מהמושב" :

$$1 - P(\bar{M}/S)^5 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{31}{32}.$$

## 3.9 חורף תשע"ו

במכוונת מזל אפשר לזכות ב- 50 שקל, ב- 100 שקל או לא לזכות כלל.

דן משחק 5 משחקים במכוונת זו.

ההסתברות שדן יזכה ב- 50 שקל בדיק פערמים שווה להסתברות שהוא יזכה ב- 50 שקל בדיק פעם אחת.

(ההסתברות לזכות ב- 50 שקל שונה מאפס).

ההסתברות שדן לא יזכה באך משחק היא  $\frac{1}{32}$ .

א. מהי ההסתברות שדן יזכה ב- 50 שקל במשחק בודד?

ב. מהי ההסתברות שדן יזכה ב- 100 שקל במשחק בודד?

ג. ידוע כי לאחר שדן שיחק שני משחקים הוא זכה סך הכל ב- 100 שקל בדיק.

מהי ההסתברות שהוא לא זכה ב- 50 שקל באך אחד משני המשחקים?

**נסמן**  $P(n)$  = ההסתברות שדן זוכה ב- $n$  שקליםים.

**סעיף א**

ההסתברות שדן לא יזכה באך אחד מתחמישת המשחקים היא  $P(0) = \frac{1}{32}$ , ולכן

$P(0) = \frac{1}{2}$ . לפי המידע הנתון :

$$\begin{aligned} \binom{5}{2} P(50)^2 (1 - P(50))^3 &= \binom{5}{1} P(50) (1 - P(50))^4 \\ P(50) &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**סעיף ב**

לפי ההסתברות המשילימה :  $P(100) = 1 - P(0) - P(50) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

**סעיף ג**

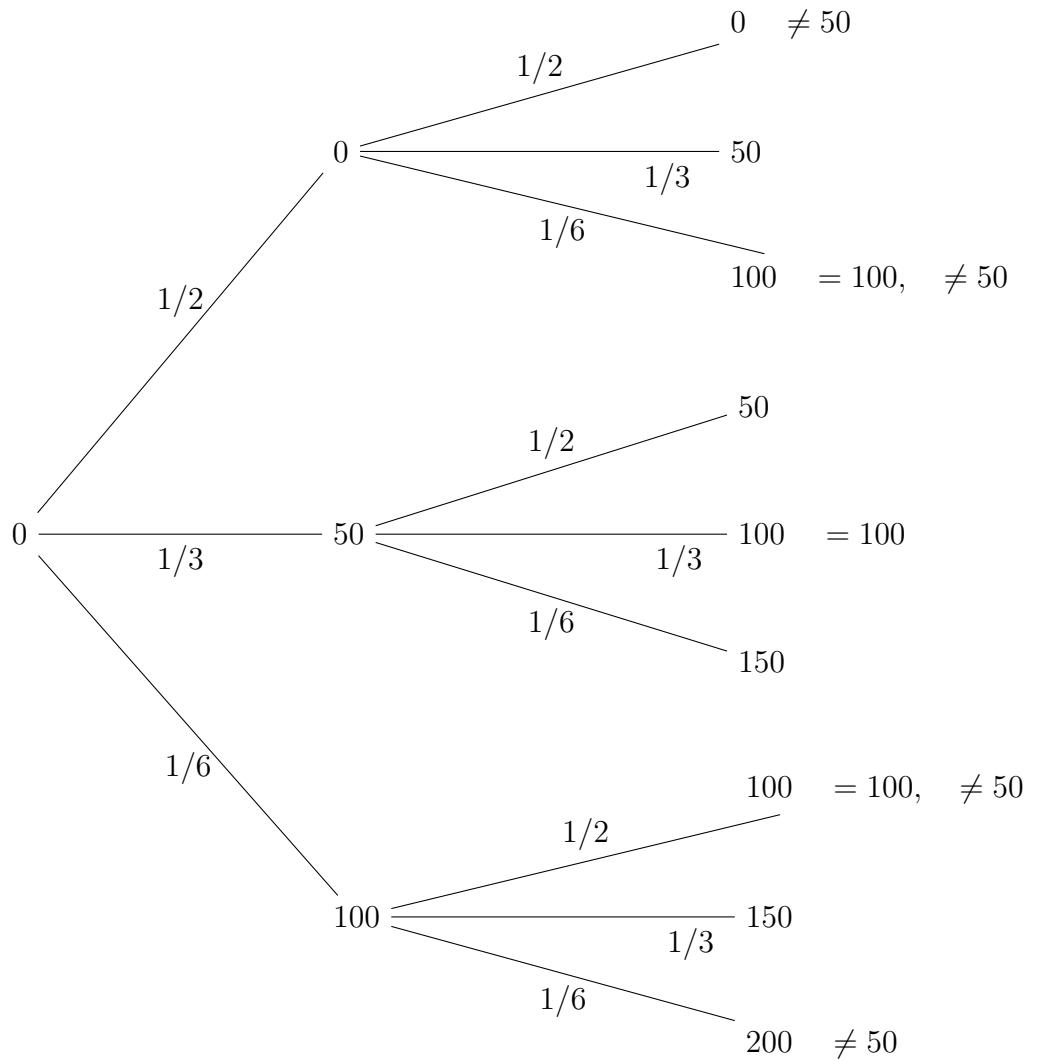
הניסוח "זיהע פיי" מכובן להסתברות מותנית :

$= (\text{זכה ב-}100 \text{ בשני משחקים / לא זוכה ב-}50 \text{ באך משחק}) P$

$$= \frac{(\text{זכה ב-}100 \text{ בשני משחקים} \cap \text{לא זוכה ב-}50 \text{ באך משחק})}{(\text{זכה ב-}100 \text{ בשני משחקים})}.$$

לא כתוב במפורש אבל נניח שהשחקים בלתי תלויים, ונבנה עץ (מורפיע בעמוד הבא) שמציג את תוצאות שני המשחקים. סימנו את המסלולים בהם דן זוכה ב-100 והמסלולים בהם דן לא זוכה ב-50 באך אחד שני המשחקים. חישוב ההסתברות המותנית נתון :

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}.$$



### 3.10 קיז תשע"ה מועד ב

חוקר עורך מחקר על הרגלי האכילה של סטודנטים באוניברסיטה גדולה במשך יום לימודים.

חלק מהסטודנטים מביאים תמיד אוכל מהבית, והשאר אינם מביאים אוכל מהבית.

כל הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית אוכלים אותו במשך היום ולאוכלים בקפטריה.

הסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אוכלים בקפטריה או אינם אוכלים במשך היום.

א. נמצא כי אם בוחרים באקראי 4 סטודנטים, ההסתברות שבדיוק 2 מהם מביאים

אוכל מהבית גדולה פי 6 מההסתברות שבדיוק 1 מהם מביא אוכל מהבית.

(1) מהו אחוז הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית?

(2) החוקר בחר באקראי 8 סטודנטים באוניברסיטה.

מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם מביא אוכל מהבית, אבל לא כולם?

ב. נמצא כי 60% מהסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אינם אוכלים במשך היום.

(1) מהו אחוז הסטודנטים באוניברסיטה שאוכלים בקפטריה?

(2) מהי ההסתברות לבחור סטודנט שמביא אוכל מהבית מ בין הסטודנטים שאוכלים

במשך היום?

**סעיף א (1)**

נסמן  $b =$  ההסתברות להביא אוכל מהבית. לפי המידע הנתון :

$$\binom{4}{2} b^2 (1-b)^2 = 6 \cdot \binom{4}{1} b (1-b)^3.$$

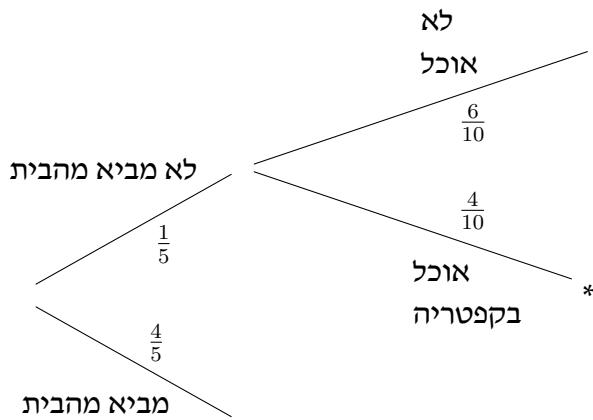
$$.b = \frac{4}{5}$$

**סעיף א (2)**

"פחות אחד אבל לא כולם" היא המשלימים ל-"לא אף ולא כולם" :

$$1 - \left(\frac{1}{5}\right)^8 - \left(\frac{4}{5}\right)^8 = 0.8322.$$

**סעיף ב (1)**



בעז ההסתברויות הכוכביות מראה את מהמסלול עברו "אוכל בקטריה":

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{25}.$$

**סעיף ב (2)**

המילה "מבחן" מכוonta להסתברות מותנית וקבוצת "מביא אוכל" היא תת-קבוצה של "אוכלים":

$$P(\text{אוכלים}/\text{מביא אוכל}) =$$

$$\frac{P(\text{אוכלים} \cap \text{מביא אוכל})}{P(\text{אוכלים})} =$$

$$\frac{P(\text{מביא אוכל})}{P(\text{אוכלים})}.$$

הчисוב הוא:

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5} + \frac{2}{25}} = \frac{10}{11}.$$

### 3.11 קיז תשע"ה מועד א

נתונה קבוצה של ספרות שונות: 3 ספרות הן זוגיות (שונות מ-0), והשאר הן ספרות אי-זוגיות.

יוני יוצר מספר דו-ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שיוני בוחר באקראי היא ספרת העשרות,

והספרה השנייה שהוא בוחר באקראי היא ספרת היחידות.

יוני בוחר כל ספרה בדיק פעם אחת בלי החזרה.

א. נתון כי הסתברות שינוי יוצר מספר אי-זוגי היא  $\frac{4}{7}$ .

מהו מספר הספרות האי-זוגיות בקבוצה הנתונה?

ב. אם ידוע שהמספר שנוצר הוא זוגי, מהי הסתברות שתי הספרות שיוני בחר הן זוגיות?

אמיל יוצרת מספר תלת-ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שאmil בוחרת באקראי היא ספרת המאות,

הספרה השנייה שהיא בוחרת באקראי היא ספרת העשרות,

והספרה השלישית שהיא בוחרת באקראי היא ספרת היחידות.

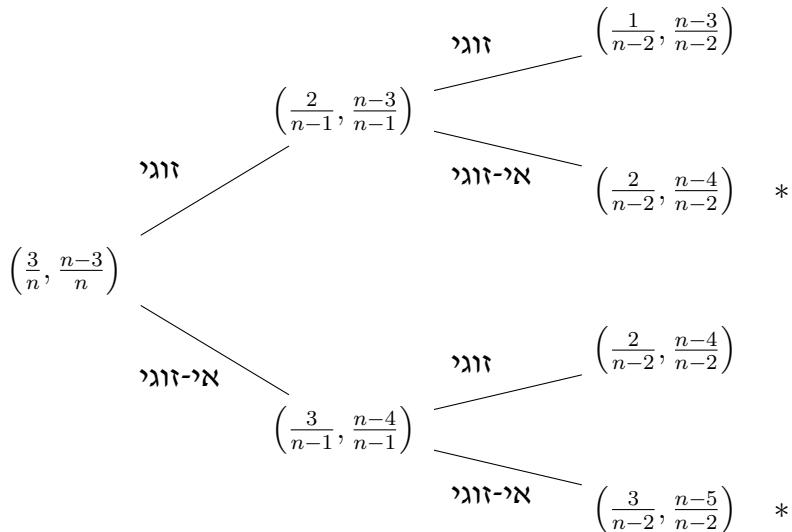
אמיל בוחרת כל ספרה בדיק פעם אחת בלי החזרה.

ג. ידוע כי הספרה הראשונה שאmil בחרה היא זוגית.

מהי הסתברות שבמספר התלת-ספרתי שאmil יירה, סכום הספרות יהיה זוגי?

נסמן  $n =$  מספר הספרות בקבוצה. מספר הזוגיים = 3, ומספר האי-זוגיים =  $3 - n$ .

בחירה של ספרת העשרות ולאחר כן ספרת היחידות מכונת לעצם הסתברויות. כדי לפשט את התרשים רשמתי בכל צומת את הסתברויות (אי-זוגי, זוגי), ולא את מספר הספרות.



## סעיף א

המספר שיוני בחר יהיה אי-זוגי רק אם **הבחירה השנייה** היא ספרה אי-זוגית. המסלולים המתאימים מסומנים בתרשים בכוכבויות. נשווה את סכום ההסתברויות של המסלולים לערך הנתון:

$$\frac{3}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} + \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} = \frac{4}{7}.$$

נפשט ונקבל משווה ריבועית  $0 = 8n^2 - 8n + 7 = n^2$  לשני פתרונות חיוביים  $n = 1, n = 7$ . נתון שיש לפחות שלוש ספרות, לכן מספר הספרות הוא 7.

**שימו לב** שהשאלה מבקשת את מספר הספרות **האי-זוגיות** ולכן התשובה היא  $4 - 3 = 1$ .

## סעיף ב

במספר זוגי הספרה الأخيرة זוגית. הניסוח "אם ידוע ש-" מכוון להסתברות מותנית:

$$P = \frac{(\text{ספרה אחרת זוגית})}{(\text{ספרה אחרת זוגית})}$$

$$= \frac{\frac{P}{(\text{ספרה אחרת זוגית})}}{(\text{ספרה אחרת זוגית})}$$

את החיתוך אפשר לפשט כי אם שתי הספרות האחרונות חייבת להיות זוגית.

נתן לחשב את הסתברות "ספרה אחרת זוגית" במכנה לפי המידע בעץ או פשט לשים לב שהוא המשלימה להסתברות הנתון בסעיף א של "ספרה الأخيرة אי-זוגית"  $\frac{3}{7} = 1 - \frac{4}{7}$ .

чисוב הסתברות במונה לפי המסלול העליון בעץ עבר בחירה של שתי ספרות זוגיות:

$$\frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}}{1 - \frac{4}{7}} = \frac{1}{3}.$$

## סעיף ג

הסכום יהיה זוגי רק אם שתי הספרות האחרונות הן זוגיות או אי-זוגיות:

$$\begin{aligned} 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 &= 2(k_1 + k_2 + k_3) \\ 2k_1 + 2(k_2 + 1) + 2(k_3 + 1) &= 2(k_1 + k_2 + k_3 + 1). \end{aligned}$$

שני האירועים (בחירה הספרות **בלתי תלויים**, ולכן אפשר לבטא את החיתוך כמכפלה:

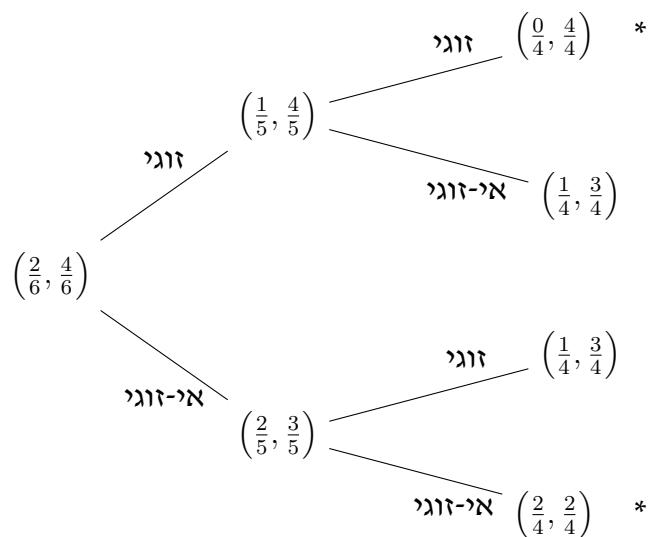
$$P = \frac{(\text{ספרה ראשונה זוגית})}{(\text{סכום זוגי})}$$

$$= \frac{\frac{P}{(\text{ספרה ראשונה זוגית})} \cap \text{סכום זוגי}}{(\text{ספרה ראשונה זוגית})}$$

$$= \frac{\frac{P}{(\text{ספרה ראשונה זוגית})} \cdot (\text{סכום זוגי})}{(\text{ספרה ראשונה זוגית})}$$

$$(\text{סכום זוגי}).$$

שימו לב שלאחר הבחירה הראשונה שלAMILI מספר הספרות הוא ש. הנה עץ ההסתברויות לאחר בחירה הראשונה, כאשר הכוכبيות מסמנות את המסלולים לסכום זוגי (שני מספרים זוגיים או שני מספרים אי-זוגיים):



ההסתברות היא:

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{15}.$$

### 3.12 חורף תשע"ה

במושב גדול  $\frac{1}{3}$  מההתושבים הם נשים, והשאר הם גברים.

מבין התושבים בוחרים באקראי שתי קבוצות:

קבוצת של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון ברדיו

וקבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון בתלוייה.

א. מהי ההסתברות שכל קבוצה יש בדיק 2 גברים?

ב. ידוע כי בקבוצה שנבחרה לריאיון ברדיו היו לכל היותר 2 גברים.

מהי ההסתברות שהיו בקבוצה זו בדיק 2 גברים?

"מושב גדול" אומר לי שניתן לבחור מספר רב של תושבים, לפחות שמונה תושבים כדי שנדרש.

#### סעיף א

כל קבוצה היא בחירה בלתי תלוייה. לפי נוסחת ברנולי ההסתברות לבחור בדיק שני גברים **בקבוצה אחת** היא:

$$\binom{4}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$$

כדי לקבל את ההסתברות שיהיו בדיק שני גברים בשתי הקבוצות, עליה ערך זה בריבוע:

$$\left(\frac{8}{27}\right)^2 = \frac{64}{729}.$$

#### סעיף ב

הניסוח "ידע כיי" מכוון להסתברות מותנית:

$P = (\text{לכל היותר שני גברים} / \text{בדיקות שני גברים})$

$$\frac{(\text{לכל היותר שני גברים} \cap \text{בדיקות שני גברים})}{P}.$$

החותט במונה שקופה ל- "בדיקות שני גברים"  $\frac{8}{27}$  שחישבנו בסעיף א, כי "לכל היותר שני גברים" היא 2, 1, 0 גברים. "לכל היותר שני גברים" הוא הסכום של שלוש נוסחאות ברנולי:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \binom{4}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{4}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{27}$$

וההתשובה לשאלת היא:

$$\frac{\frac{8}{27}}{\frac{11}{27}} = \frac{8}{11}.$$

### 3.13 קיז' תשע"ד מועד ב

בעיר גדרה כל אחד מתלמידי כיתות י"ב בשנה מסויימת בוחר באחד משני המסלולים לטויל שנתי:  
מסלול א' או מסלול ב'.

נמצא: 75% מתלמידים שבחרו במסלול א' הן בנות.

10% מן הבנות בחרו במסלול ב'.

40% מתלמידים הם בנות.

א. בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת).

מהי ההסתברות שהוא בחר במסלול א'?

ב. כאשר בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת), האם המאורע "התלמיד הוא בת"  
והמאורע "התלמיד (בן/בת) בחר במסלול א'" הם מאורעות בלתי תלויים? נמק.

ג. בחרו באקראי כמה בנות מבין התלמידים.

נמצא שהסתברות שלפחות אחת מהן בחרה במסלול א' היא 0.99.

(הבחירה של המסלולים על ידי הבנות שנבחרו הן בלתי תלויות.)

כמה בנות נבחרו?

אני מלאתי את טבלת ההסתברויות לפי חישוב לא פורמלי.

$0.4 - 0.04 = 0.36$  נתון ש-0.4 מהתלמידים הן בנות. 10% מהם בחרו במסלול ב':  $0.1 \times 0.4 = .04$ . מכאן ש- $0.36$  בחרו במסלול א'.

נתון ש-75% מתלמידים שבחרו במסלול א' הן בנות:

$$0.75 = \text{בחרו במסלול א} \times 0.36,$$

ולכן  $0.36 / 0.75 = 0.48$  מתלמידים בחרו מסלול א'. כתע ניתן מלא את טבלת ההסתברויות:

**בנות**

**בנות**

$.36 / .75 =$ .48	$.48 - .36 =$ .12	$.4 - .04 =$ .36
$1 - .48 =$ .52	$.52 - .04 =$ .48	$.1 \times .4 =$ .04
1	$1 - .4 =$ .6	<b>נתון</b> 0.4

**א**

**ב**

נחשב את הערכיהם בטבלה בצורה יותר מפורשת תוך שימוש בהסתברות מותנית :

$$0.1 = P(\text{בנות} \cap \text{מסלול ב}) = \frac{P(\text{בנות} \cap \text{מסלול ב})}{P(\text{בנות})} = \frac{P(\text{בנות}/\text{מסלול ב})}{0.4}.$$

מכאן ש :

$$P(\text{בנות} \cap \text{מסלול ב}) = 0.4 \cdot 0.1 = 0.04.$$

המשך עם הנתון הנוסף :

$$0.75 = P(\text{מסלול א} \cap \text{בנות}) = \frac{P(\text{מסלול א}/\text{בנות})}{P(\text{מסלול א})} = \frac{0.36}{P(\text{מסלול א})}.$$

מכאן ש :

$$P(\text{מסלול א}) = \frac{0.36}{0.75} = 0.48.$$

**סעיף א**

הסעיף מבקש  $P(\text{מסלול א})$  וחישבנו שערכו 0.48.

**סעיף ב**

$$\begin{aligned} P(\text{מסלול א} \cap \text{התלמיד הוא בת}) &= 0.36 \\ P(\text{מסלול א} \cdot P(\text{התלמיד הוא בת})) &= 0.4 \cdot 0.48 = 0.192. \end{aligned}$$

האירועים אינם בלתי תלויים.

**סעיף ג**

כדי ליחס "פחות אחת", נחשב שות ההסתברות המשלימה ל-"אף אחת". ההסתברות שבת לא תבחר מסלול א היא ההסתברות שהיא תבחר מסלול ב :

$$P(\text{מסלול ב}) = \frac{P(\text{בנת} \cap \text{מסלול ב})}{P(\text{בנת}/\text{מסלול ב})} = \frac{0.04}{0.4} = 0.1.$$

נפתחו את המשוואה :

$$(0.1)^n = 1 - 0.99 = 0.01,$$

ונקבל  $n = 2$ .

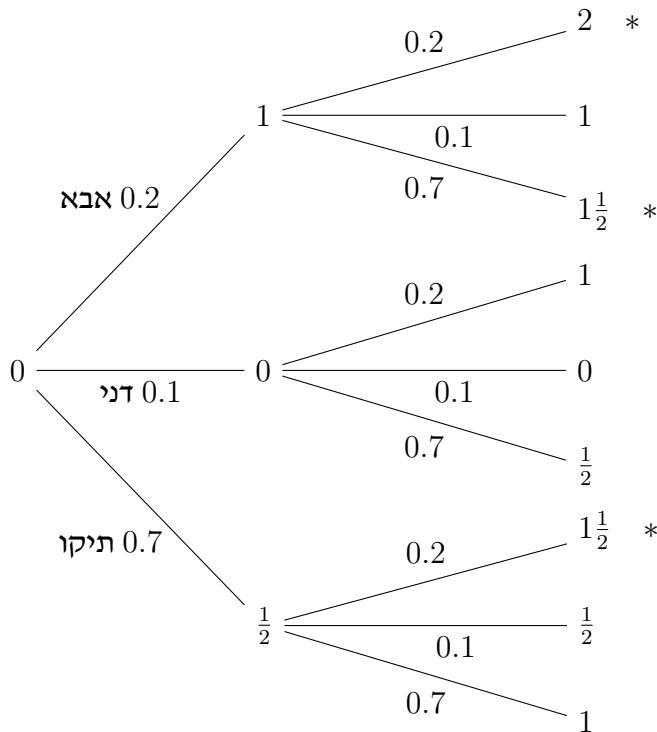
### 3.14 קיז' תשע"ד מועד א

- אבא וدني משחקים בזריקת כדור לסל. בכל משחק שני סיבובים. המנצח בסיבוב מקבל נקודה אחת. אם הסיבוב מסתיים בתיקו, כל אחד מקבל חצי נקודה. נתון: ההסתברות שدني ניצח בסיבוב היא 0.1,  
ההסתברות שאבא ינצח בסיבוב היא 0.2  
ההסתברות שהסיבוב יסתתיים בתיקו היא 0.7.  
הסיבובים אינם תלויים זה בזו.
- מהי ההסתברות שאבא יצBOR בשני הסיבובים יוטר מנוקודה אחת?
  - מהי ההסתברות שدني יצBOR בשני הסיבובים פחות נקודה אחת?
  - ידוע כי דני צBOR בשני הסיבובים פחות נקודה אחת.
- מהי ההסתברות שאחד הסיבובים הסתיים בתיקו והאחר הסתיים בניצחון של דני?
- אבא וدني משחקים 4 פעמים את המשחק שמתואר בפתח. (בכל משחק שני סיבובים).
- מהי ההסתברות שدني יצBOR פחות נקודה אחת 2 פעמים בדיק?

#### סעיף א

עż ההסתברות מראה את צבירת הנקודות של אבא בשני הסיבובים, כאשר המცבים בהם אבא צBOR יותר מנוקודה אחת מסוימים בכוכבות. ההסתברות של האירוע היא:

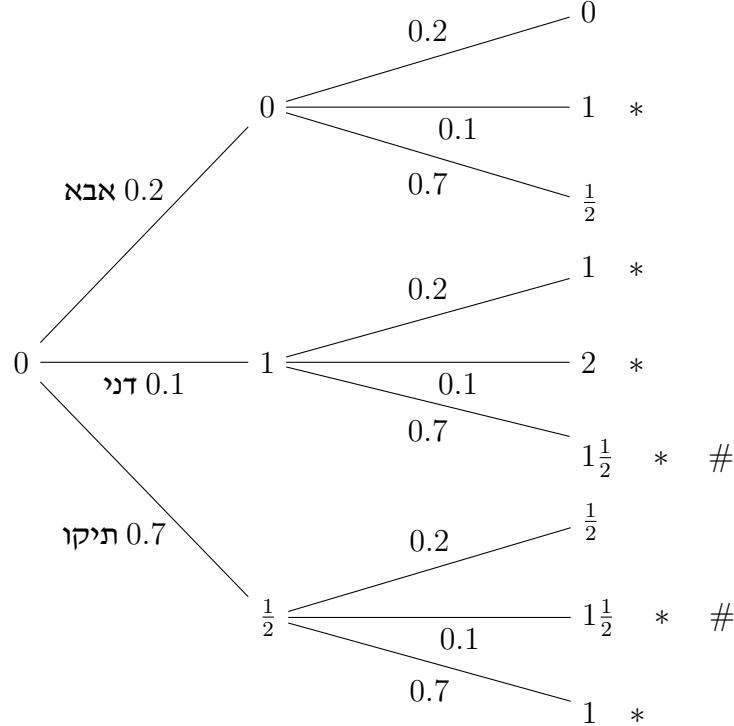
$$0.2 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.2 = 0.32.$$



## סעיף ב

ע"ז הסתברות מראה את צבירת הנקודות של דני בשני הסיבובים, כאשר המצביעים בהם דני צובר לפחות נקודה אחת מסומנים בכוכביות. הסתברות של האירוע היא:

$$0.2 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.1 + 0.7 \cdot 0.7 = 0.68.$$



## סעיף ג

הניסוח "ידעו כי" מכובן להסתברות מותנית וחחיתוך מצטמצם כי אם יש תיקו אחד וניצחון של דני אז דני צבר לפחות נקודה אחת:

$$= (\text{Dani צבר לפחות נקודה אחת} / \text{תיקו אחד, ניצחון אחד לדני}) P$$

$$= \frac{(\text{Dani צבר לפחות נקודה אחת} \cap \text{תיקו אחד, ניצחון אחד לדני})}{(\text{Dani צבר לפחות נקודה אחת})} =$$

$$\frac{P(\text{תיקו אחד, ניצחון אחד לדני})}{P(\text{Dani צבר לפחות נקודה אחת})}.$$

נחשב את המונה על ידי חיבור הסתברויות של שני מסלולים בעץ המסומנים ב-#. הסתברות במכנה חושבה בסעיף ב:

$$\frac{0.1 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.1}{0.68} = .2059.$$

## סעיף ד

סעיף ב חישבנו את הסתברות של האירוע בכל סיבוב, ונשאר רק לחשב:

$$\binom{4}{2} (0.68)^2 (0.32)^2 = 0.2841.$$

### 3.15 חורף תשע"ד

בעיר מסוימת יש תושבים המשתתפים בחוג לרכיבי עם, יש תושבים המשתתפים בחוג לתאטרון ויש תושבים המשתתפים בשני החוגים.

נמצא כי המאורע "תושב העיר משתתף בחוג לרכיבי עם"

והמאורע "תושב העיר משתתף בחוג לתאטרון" הם מאורעות בלתי תלויים.

מספר התושבים המשתתפים בחוג לרכיבי עם גדול פי 2 ממספר התושבים המשתתפים בחוג לתאטרון.

מבין התושבים המשתתפים בחוג לתאטרון, 60% משתתפים בחוג לרכיבי עם.

א. מהו אחוז התושבים בעיר המשתתפים בחוג לרכיבי עם וגם בחוג לתאטרון?

ב. يوم אחד נערך בעיר כנס שהשתתפו בו כל התושבים המשתתפים בחוג לרכיבי עם, ורק הם.  
עיתונאי ראיין 6 משתתפים בכנס שנערך באקרה.

מהי ההסתברות של לפחות 2 מהם משתתפים בחוג לתאטרון?

נסמן  $T = \text{מספר המשתתפים בתאטרון}$ ,  $R = \text{מספר המשתתפים ברכיבי עם}$ .

המילה "מבחן" מכוונת להסתברות מותנית. נתון  $P(R/T) = 0.6$  ושהארועים בלתי תלויים. נחשב:

$$0.6 = P(R/T) = \frac{P(R \cap T)}{P(T)} = \frac{P(R) \cdot P(T)}{P(T)} = P(R).$$

ביחד עם הנתון  $P(T) = 2 \cdot P(R)$  נתחיל למלא את הטבלה:

	$\bar{T}$	$T$	
$R$	0.60		
$\bar{R}$	0.40		
1.0	0.70	0.30	

שוב נסתמך על העובדה שהארועים בלתי תלויים ונקבל:

$$P(R \cap T) = P(R) \cdot P(T) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18,$$

כעת נמלא את הטבלה לפי הסתברויות משלימות :

$\bar{T}$	$T$		$R$
0.60	0.42	0.18	$\bar{R}$
0.40	0.28	0.12	
1.0	0.70	0.30	

#### סעיף א

$$P(R \cap T) = 0.18$$

#### סעיף ב

הניסוח "כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, ורק הם" מכוננות להסתברות מותנית. אם ידוע שהטוב משותף בריקודי עם, ההסתברות שהוא משתף גם בתאטרון היא :

$$P(T/R) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)} = \frac{0.18}{0.60} = 0.3.$$

כדי לחשב "לפחות שניים" עדיף לחשב את המשללים ל-"יאפס או אחד" :

$$1 - \binom{6}{0}(0.3)^0(0.7)^6 - \binom{6}{1}(0.3)^1(0.7)^5 = 0.5798.$$

## המלצות: הסתברות

• קרא בזיהירות את השאלות. לעיתים הן ארוכות (בחינות של קיז תשע"ה א, קיז תשע"ח ב) וחשוב להבין את המשמעות של כל פסקה.

• כמעט כל הבדיקות מכילות שאלות על **הסתברות מותנית**. ניסוחים רבים מכונים להסתברות מותנית וחשוב להכיר אותם!

– הניסוח השכיח ביותר משתמש במילים "**אם ידוע ש-**" או "**ידוע כי**".

– בבדיקה של חורף תשע"ז כתוב "**אם ... מהי ההסתברות ...**". לא גמור ברור שלמילה "**אם**" יש משמעות של "**אם ידוע**", אבל זאת הכוונה.

– לעיתים קרובות (בדיקה של קיז תשע"ה ב) כתוב "**מה ההסתברות לבחור ... מבין ...**".

– יוצא מן הכלל: בבדיקה של קיז תשע"ו או כתוב "**מבין כל הנבחנים**". המילה "**מבין**" בדרך כלל מכונה להסתברות מותנית, אבל כאשר "**מבין**" מתייחס ל-"**כל הנבחנים**", אין ההסתברות מותנית. לחילופין אפשר לחשב ההסתברות מותנית בהסתברות שהיא 1 והחיתוך מצטמצם:

$$P(X) = \frac{P(X \cap \text{כל הנבחנים})}{P(\text{כל הנבחנים})} = \frac{P(X)}{1} = P(X).$$

מצב דומה מופיע בבדיקה של קיז תשע"ד ב) "בוחרים באקראי תלמיד י"ב(בן/בת)", ובבדיקה של קיז תשע"ח ב) "מן התלמידים שנגשו למבחן".

– בבדיקה של קיז תשע"ח א הניסוח הוא: " $\frac{k}{n}$  נעזרו בחבריהם (נקרא לאירוע) A ו- **מהם עברו את הבדיקה**" (נקרא לאירוע) B. ברור ש-  $P(B \cap A) = k$ , אבל נבדוק לפי הנוסחה להסתברות מותנית:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{n} = \frac{k}{n}$$

– בבדיקה של חורף תשע"ד יש ניסוח אחר: **כל התושבים המשתתפים ב- ... וრק הם**.

• כאשר יש חיתוך בחישוב של הסתברות מותנית, לעיתים קרובות ניתן לפשט את החישוב. בבדיקה של קיז תשע"ז יש לחשב  $P(D = 4 \cap D \geq 3)$ , אבל אם ערך גדול או שווה 3 וגם שווה ל-4, אז הוא שווה ל-4, ולכן מספיק לחשב  $P(D = 4)$ .

• אם שני אירועים בלתי תלויים, חישוב ההסתברות המותנית מצטמצם:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B).$$

מצב זם מופיע בבדיקות של חורף תשע"ז, חורף תשע"ח, קיז תשע"ה א, חורף תשע"ד.

- הミלה **בדיק** מכוונת לחישוב אחד של נוסחת ברנולי, כי נתון כמה "הצלחות" צריכות להיות גם כמה "כשלונות". מקרה מעניין נמצא בבדיקה של קיז תשע"ח ב אשר נתון שהסתברות לקבל 60 שווה להסתברות לקבל 100. נתון גם שיש שלוש הצלחות מתוך חמיש (20 נקודות כל אחת), אז הסתברות לקל שני כשלונות (20 נקודות כל אחת) (20 נקודות כל אחת) (20 נקודות כל אחת).

- בבדיקה של קיז תשע"ז כתוב **"בוחרים באקראי . . . עד של- 3 מהם בדיק יש קלונועית"**. המשמעות של "עד ש-" היא שמשמעותו את הבחירה האקראית כאשר הבחירה **אחרונה** היא "הצלחה". במקרה זה נשארו שתי "הצלחות" שיש לחשב את הסתברות שלן לפי נוסחת ברנולי, ואז להכפיל בהסתברות של "הצלחה" בבחירה [אחרונה](#):

$$\overbrace{\pm \pm \pm}^{2/5} \pm + \overbrace{+}^{1/1}.$$

- בבדיקה של קיז תשע"ז בתיווי **"מושאים באקראי . . ."**, ובהמשך בתיווי **"מושאים באקראי שוב . . ."** מכוון לשימוש בעץ כדי לתאר את הבחירה הסדרתית.

- בבדיקה של קיז תשע"ח א, המשמעות של הניסוח **"פחות אחת משתי הטענות, I II היא שהairoע קורה אם קורה אחד מהairoעים, I, II או שניהם, המסומן I ∪ II."** יש שתי דרכים לחשב את הסתברות: על ידי חיבור הסתברות של שני האירועים וחישור האירוע המשותף כדי לקזז את הספירה הכפולת, או לחבר את האירוע המשותף עם האירועים של אחד ולא השני המסומן I – II.

$$P(I \cup II) = P(I) + P(II) - P(I \cap II)$$

$$P(I \cap II) = P(I - II) + P(II - I) + P(I \cap II).$$

- בבדיקה של קיז תשע"ח ב יש לחשב את הסתברות של תשובה נcona לכל  $n = k$  ( $n$ ) השאלות או תשובה נcona **לאף אחת** ( $0 = k$ ) מהשאלות, כאשר הסתברות לשובה נcona אחת היא  $p$ . אין צורך להשתמש בנוסחת ברנולי הכללית:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$\text{אם } n=0, \text{ אז הנוסחה מוצטמת ל-} \binom{n}{0} = 1, k=0$$

$$\text{אם } n=k, \text{ אז הנוסחה מוצטמת ל-} \binom{n}{n} = 1, k=n$$

- בבדיקות של קיז תשע"ו א, ב יש שלוש תוצאות לפוליה במקום שתיים. סכום הסתברויות חייב להיות אחד, ולכן כאשר מחשבים משלים להסתברות אחת, יש להחסיר את שתי הסתברויות האחרות. בבדיקה של מועד ב, הסתברות לתקו היא אחד פחות הסתברות שיעל תנצה פחות הסתברות أنها תנצה:

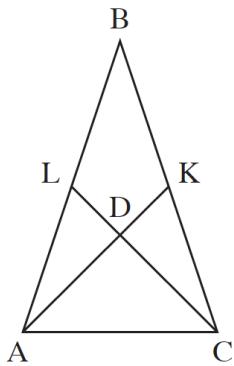
$$P(\text{תיקו}) = 1 - (P(\text{יעל}) + P(\text{אנח})) = 1 - P(\text{יעל}) - P(\text{אנח}).$$

- במספר בבדיקות (חוורף תשע"ה, קיז תשע"ד ב, קיז תשע"ה ב) כתוב **"ישוב גדול"**, **"עיר גודלה"**, **"אוניברסיטה גדולה"**. אני מניח שבמיליה **"גדול"** מבטיחה שאפשר לבחור תושבים או סטודנטים כדי שדרשו בשאלות. אין משמעות לבחור ארבעה סטודנטים אם יש רק שניים.



## פרק 4 גיאומטריה

### 4.1 קיז תשע"ח מועד ב



.  
ABC הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = BC$ ) .

ר' CL הם תיכונים במשולש, החותכים זה את זה בנקודה D .

נתון:  $AK \perp CL$

א. הוכח:  $BD = AC$  .

ב. חשב את היחס  $\frac{S_{BLDK}}{S_{\Delta ABC}}$  .

ג. M הוא מרכז המנגנון החוסם את המרובע ALKC .

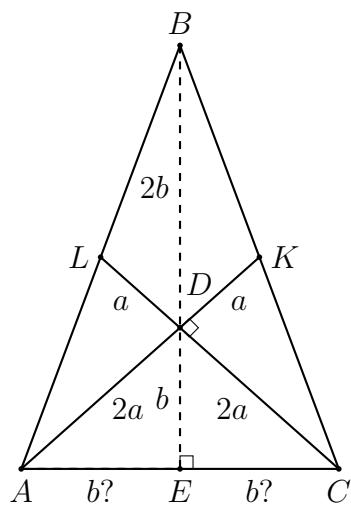
(1) הוכח:  $\angle AML = 90^\circ$  .

(2) מצא את היחס  $\frac{AM}{AD}$  .

תוכל להשאיר שורש בתשובהך.

#### סעיף א

כאשר יש תיכונים נחותכים מיד חושבים על משפט 45 "שלושת התיכונים במשולש נחותכים בנקודה אחת", ובמשפט 46 "נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס 1 : 2". נבנה BE, התיכון מ-B-L,  $AC \perp BE$ , שחותך את מפגש התיכונים האחרים ב-D. לפי משפט 6 "במשולש שווה-שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים". קל להראות שהticaונים AK, CL, DK שווים, כי  $DC = DK = DL = a$  ו-  $\triangle LDA \cong \triangle KDC$  ו-  $\triangle AED \cong \triangle CED$  .  
 $DA = 2a$



אם נכח ש- $.BD = 2b = 2DE = AE + ED = AC$ - $AE = EC = DE$  לפि משפט 6 הוא חוצה זווית של  $\angle ABC$ , וגם של  $\angle ADC$  כי חוצה הזווית והטיון מתלדים. נתון ש- $\angle ADE = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$ . במשולשים ישר-זוויתים  $AK \perp CL$  כ- $\angle CDE = 90^\circ$ , ולכן גם  $\angle DAE = 45^\circ$ , ולכן גם  $\angle DCE = 45^\circ$ , והמשולשים שווה-שוקיים. מכאן ש- $AE = EC = DE = b$ .

אפשרות אחרת, פשיטה נוספת, להוכיח  $AE = EC = DE = b$  בהשראת המשפט 86 "במשולש ישר-זווית הטיון ליתר שווה לממחצית היתר" ב- $\triangle ADC$ .

### סעיף ב

כדי לחשב  $S_{BLDK}$  על ידי חישור שטח המצלע  $ALDKC$  מהשטח של  $\triangle ABC$ , כי המצלע מורכב ממשולשים ישר-זווית ויחסוב השטח שלהם קל מאוד :

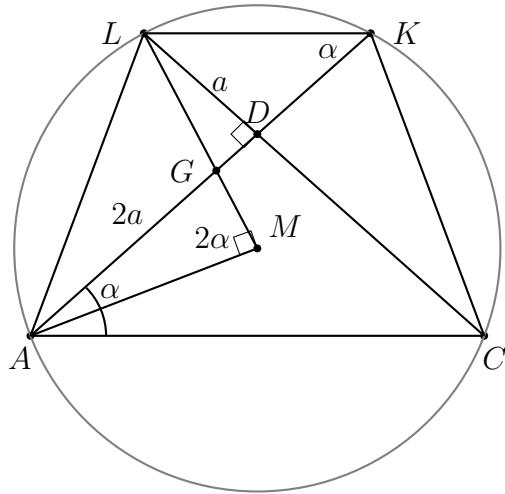
$$\begin{aligned} S_{ALDKC} &= S_{ADL} + S_{KDC} + S_{ADC} = 2S_{ADL} + S_{ADC} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot DL + \frac{1}{2} AC \cdot DE \\ &= 2a \cdot a + \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot b \\ &= 2a^2 + b^2. \end{aligned}$$

אפשר להניח שהיחס המבוקש אינו תלוי באורך של הצלעות, لكن נחפש דרך להביע את שטח המצלע כפונקציה של  $b$  בלבד. משפט פיתגורס על  $\triangle ADE$  :

$$\begin{aligned} b^2 + b^2 &= (2a)^2 = 4a^2 \\ S_{ALDKC} &= 2a^2 + b^2 = 2 \cdot \frac{1}{4}(b^2 + b^2) + b^2 = 2b^2 \\ S_{ABC} &= \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{1}{2} 2b \cdot 3b = 3b^2 \\ S_{BLDK} &= S_{ABC} - S_{ALDKC} = 3b^2 - 2b^2 = b^2 \\ \frac{S_{BLDK}}{S_{ABC}} &= \frac{b^2}{3b^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**סעיף ג (1)**

לא התקדמתי עד שציירתי תרשימים חדש עם המעלג וראיתי שהזווית היקפית  $\angle LKA$  נשענת על המיתר עליו נשענת הזווית המרכזית  $\angle AML$ , כך ש- $\angle AML = 2\angle LKA$ . לפי משפט 69 "במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת". אבל לפי משפט 14 "קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה", ולכן  $\angle KAC = \angle LKA = \alpha$ , וכך  $LK \parallel AC$ , לפיזוויות מתחולפות, והוכחנו בסעיף הקודם ש- $\angle AML = 2\alpha = 90^\circ$ , לכן  $\alpha = 45^\circ$ .



**סעיף ג (2)**

תחליה שמשתiei לב ש- $\angle MGA = \angle DGL$  כי במשולשים ישר-זווית, הזוויות  $\angle MGA \sim \angle DGL$  קודקודיות. גישה זו לא הצליחה כי לא מצאתי דרך לבטא את הקשר בין  $AD$  לבין  $AG, GD$ . לבסוף שמשתiei לב שלמשולשים  $\triangle LDA, \triangle LMA$  יתר משותף, ומהמשולש  $\triangle LMA$  שווה-שוקיים כי שתי הצלעות  $AM, ML$  הן רדיוסים. ממשפט פיתגורס:

$$AM^2 + ML^2 = AL^2$$

$$2AM^2 = AL^2$$

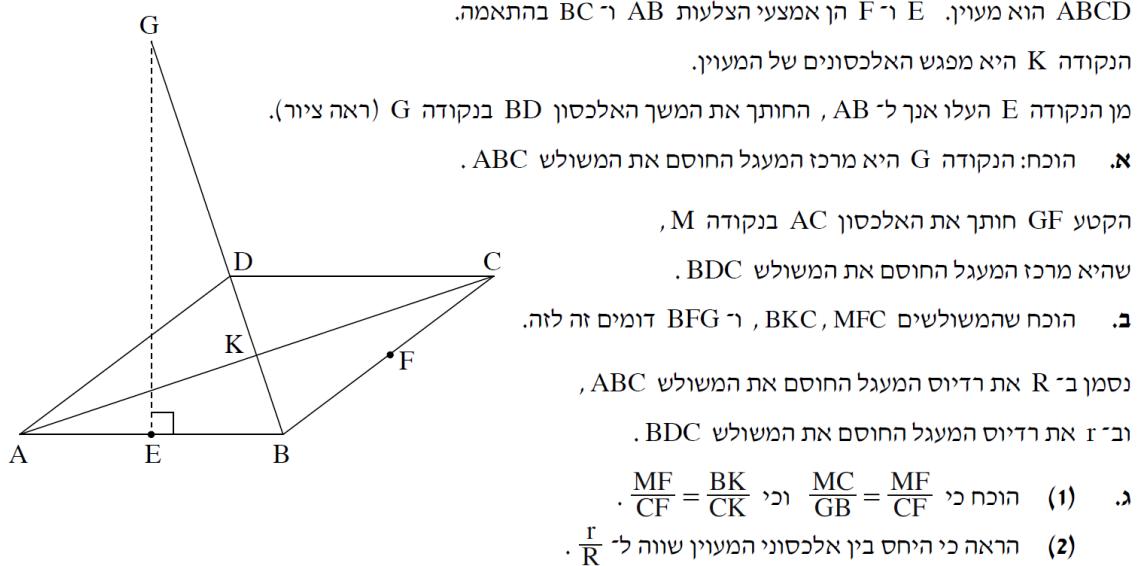
$$LD^2 + AD^2 = AL^2$$

$$a^2 + AD^2 = 2AM^2$$

$$\frac{1}{4}AD^2 + AD^2 = 2AM^2$$

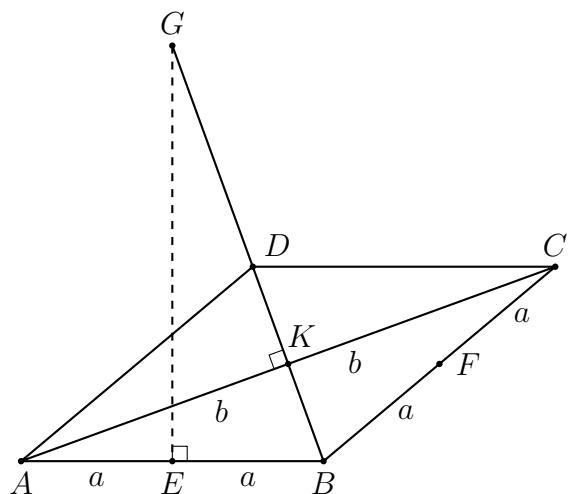
$$\frac{AM}{AD} = \sqrt{\frac{5}{8}}.$$

## 4.2 קיז תשע"ח מועד א



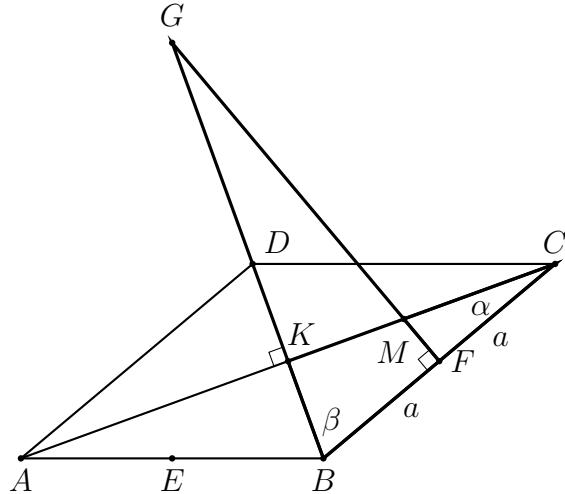
### סעיף א

כדי להוכיח ש- G- הינה מרכזו של מעגל חוסם השתמש במשפט 54 "במשולש, שלושת האנכים האמצעיים מחותכים בנקודה אחת, שהיא מרכזו המעגל החוסם את המשולש". צריך להוכיח ש- GE, GB, GC הם אנכים אמצעיים של  $\triangle ABC$ . מעוין הוא מקבילית עם צלעות שוות, וכמקבילית, ניתן להשתמש במשפט 28 "במקבילית האלכסונים חופצים זה את זה". סימנו בציר את אורך האלכסון AC- ב- b. בivid עם משפט 35 "במעוין האלכסונים מאונכים זה זה", GB הוא אכן אמצעי ל- AC. נתון שנקודות E ו- K נמצאות על GE, AB, ו- BC והן נקודות החיתוך של שני אנכים אמצעיים ומכאן מרכזו המעגל החוסם את  $\triangle ABC$ .



## סעיף ב

ההוכחה שהמשולשים דומים תהיה קל יותר אם נבנה מחדש תוך התרשימים תוך הדגש צלעות המשולשים. לפי משפט 35 האלכסון  $AC$  הוא אכן אמצעי ל- $DB$ . נתון שהנקודה  $M$  היא מרכזו המוגבל החוסם את  $\triangle BDC$ , ולכן הקו  $GF$  שחותכת את  $CK$  ב- $M$  היא אכן אמצעי ל- $BC$ . הזווית  $\alpha$  משותפת לשני משולשים ישר-זווית, כך ש- $\triangle BKC \sim \triangle MFC$  משותפת לשני משולשים ישר-זווית, וכך  $\triangle BFG \sim \triangle BKC \sim \triangle MFC$  ובייחד  $\triangle BFG \sim \triangle BKC$ .



## סעיף ג (1)

לפי דמיון המשולשים  $\triangle BFG \sim \triangle MFC$

$$\frac{MC}{GB} = \frac{MF}{BF} = \frac{MF}{CF},$$

כי בגלל ש- $F$  הוא אמצע הצלע  $BC = CF$ .  
מדמיון המשולשים  $\triangle BKC \sim \triangle MFC$  מתקבל:

$$\frac{MF}{BK} = \frac{CF}{CK},$$

ובחישוב פשוט:

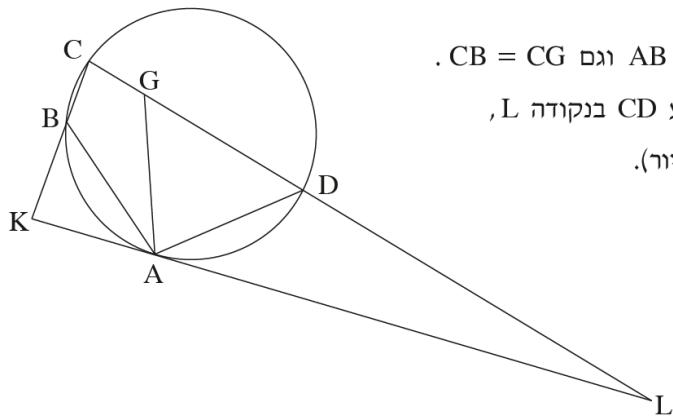
$$\frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK}.$$

## סעיף ג (2)

מן נתון שהנקודה  $M$  היא המרכז של המוגבל החוסם את  $BDC$ , אנו מקבלים שהאלכסון  $MC$  שווה ל- $r$ . בסעיף א הוכחנו שהנקודה  $G$  היא מרכזו המוגבל החוסם את  $ABC$ , ולכן  $GB$  שווה ל- $R$ . נחשב את יחס הרדיוסים תוך שימוש ביחס שיחסינו בסעיף ג (1) ומשפט 28 "מקביליות" (מעוין) האלכסונים חוצים זה את זה:

$$\frac{r}{R} = \frac{MC}{GB} = \frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK} = \frac{DB/2}{AC/2} = \frac{DB}{AC}$$

### 4.3 חורף תשע"ח



המרובע  $ABCD$  חסום במעגל.

.  $CB = CG$  נמצאת על הצלע  $CD$  כך ש-  $AB = AG$  וגם המשיק למעגל בנקודה  $A$  חותך את המשך הצלע  $CD$  בנקודה  $L$ , וחותך את המשך הצלע  $CB$  בנקודה  $K$  (ראה ציור).

א. הוכח כי  $AD = AG$ .

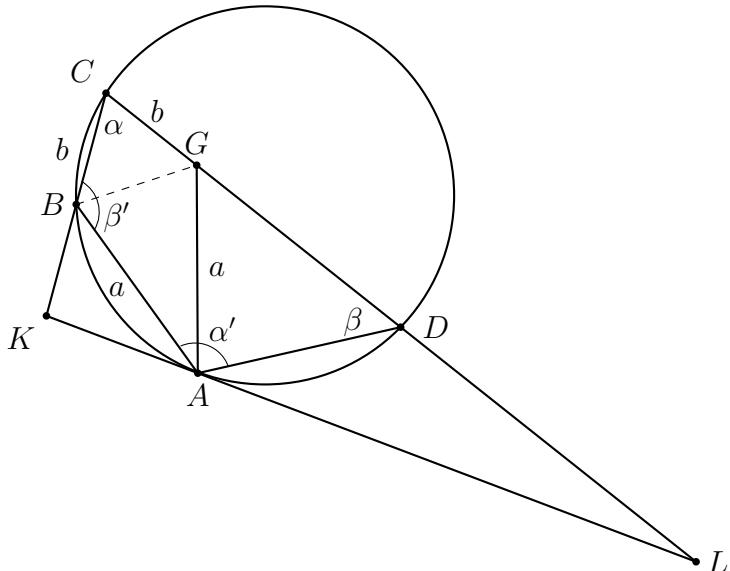
ב. (1) הוכח כי  $\triangle ABK \sim \triangle CDA$

$$(2) \text{ הוכח כי } AD^2 = BK \cdot CD$$

$$\text{ג. הראה כי } \frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{LA}{AK}$$

#### סעיף א

נתון ש-  $CG = AB = AG$ ,  $CB = CG$  דלטון, אבל לא ברור בשלב זה אם זה יעזור בפתרון.  
נתון שהמרובע  $ABCD$  חסום במעגל, ולפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-  $180^\circ$ ". סימנו זוויות  $\alpha$  ו-  $\beta$  ו-  $\alpha' = 180 - \alpha$ ,  $\beta' = 180 - \beta$ .



כדי להוכיח ש-  $AD = AG$  נשתמש במשפט 3 "במשולש, מול זווית שווה מונחות צלעות שוות", ונוכיח  $\angle AGC = \angle ADG = \beta$ -ש-  $ABCG$  דלטון והזווית הצדדיות שלו שוות, כך ש-  $\angle AGD = 180 - \beta' = 180 - (180 - \beta) = \beta$ , לפי זווית משלימה  $\angle ABC = \beta'$ .

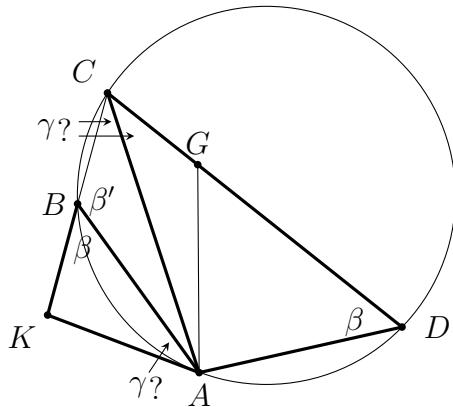
רשימת המשפטים לבגרות לא כוללת משפט על שוויון זווית בדلتון, אז נצטרך להוכיח אותן. דלטון מוגדר כמרובע עם שני זוגות של צלעות סמוכות שוות, כך שהוא מורכב משני משולשים שווה-שוקיים המוצמדים בבסיסיהם (קו מקווקו בתרשים):

$$\angle ABC = \angle ABG + \angle GBC = \angle AGB + \angle BGC = \angle AGC.$$

**סעיף ב (1)**

נדגש בתרשים את המשולשים  $\triangle ABK$ ,  $\triangle CDA$  שיש להוכיח שהם דומים. הוספנו לתרשים את הסימונים  $\angle ABK = \beta$ ,  $\angle ABC = \beta' = 180 - \beta$ ,  $\angle ACD = \gamma?$ ,  $\angle BAK = \gamma?$ . ננסה להוכיח  $\angle BCA = \angle ACD$ .

זווית שותת נקבל שהמשולשים דומים לפי ז.ז. ננסה להוכיח  $\angle BCA = \angle ACD$ .  
 $\angle BAK$  היא הזווית בין המשיק  $KA$  והמיינדר  $AB$ . לפי משפט 79 "זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיינפיה הנשענת על מיתר זה מצדדיו השני",  $\angle BAK = \angle BCA = \gamma$ . לפי משפט 21 "האלכסון הראשי בדلتון חוצה את זוויות הראש ...",  $\angle BCA = \angle ACD = \gamma$ .



דרך אחרת להוכיח ש- $\angle BCA = \angle ACD$  היא לשים לב ש- $\angle BCA = \angle ACD$  ו- $AB = AG = AD$ . נשתמש במשפט 63 "במיעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם שתי הקשתות המותאמות להם שוות זו לזו" ומשפט 71 "במיעגל, לקשתות שוות מותאמות זווית היקפיות שוות", ונקבל  $\angle BCA = \angle ACD$ .

**סעיף ב (2)**

לפי  $: AB = AD$  שהוכחנו בהחלק הראשון של הסעיף ולפי  $\triangle ABK \sim \triangle CDA$

$$\begin{aligned} \frac{AB}{CD} &= \frac{BK}{AD} \\ AB \cdot AD &= BK \cdot CD \\ AD^2 &= BK \cdot CD. \end{aligned}$$

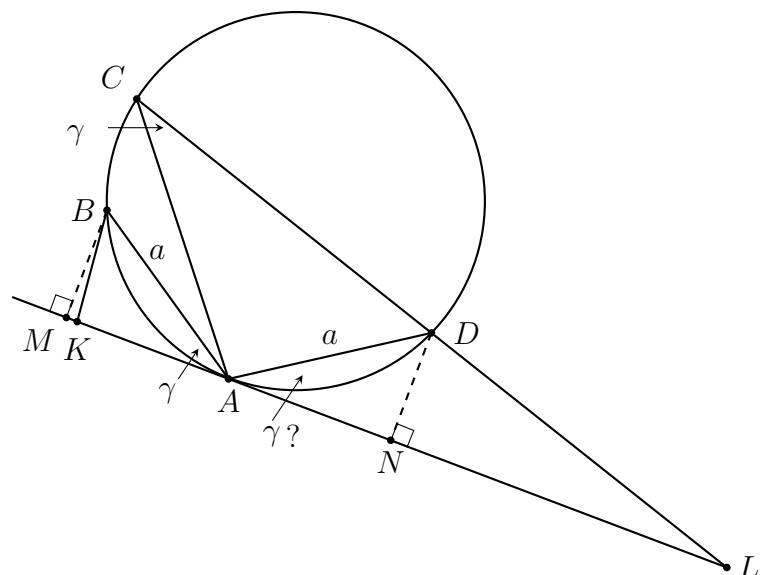
הם הבסיסים של המשולשים  $\triangle LDA$ ,  $\triangle KAB$  כך שנתקבל את היחס המבוקש אם נוכיח שהגבהים שווים. הוכחנו שהיתרים ב- $\triangle ADN$ ,  $\triangle ABM$  שווים  $AB = AD = a$ ,  $\angle DAL = \angle BAK = \gamma$ . הוכחנו שהזווית  $\angle DCA = \gamma$ . הזווית  $\angle BAK = \angle DAL$  נשענת על מיתר זה, וכך  $\angle DCA = \angle DAL$ . הזווית  $\angle DCA$  נשענת על מיתר  $AD$ . מושפט בין המשיק  $LA$  והמיתר  $AD$ . כעת ניתן לחשב את השטחים:

$$\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{(LA \cdot DN)/2}{(AK \cdot BM)/2}$$

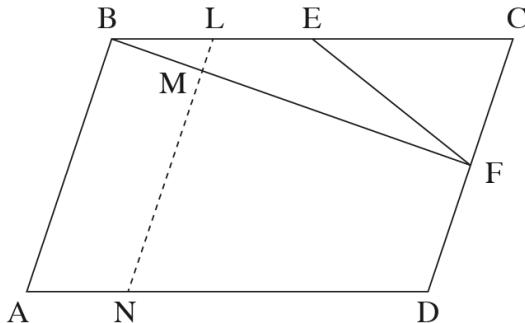
$$DN = AD \sin \angle DAL = a \sin \gamma$$

$$BM = AB \sin \angle BAK = a \sin \gamma = DN$$

$$\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{LA}{AK}.$$



## 4.4 קיז תשע"ז מועד ב



המרובע  $ABCD$  הוא מקבילית.  
הזווית  $A$  היא זוויות חדה.

הנקודה  $E$  היא אמצע הצלע  
והנקודה  $F$  היא אמצע הצלע  
(ראה ציר).

א. שטח המשולש  $ECF$  הוא  $S$ .

הבע את שטח המקבילית  $ABCD$   
באמצעות  $S$ . נמק את תשובתך.

ב. הנקודה  $L$  היא אמצע הקטע  $BE$ .

דרך הנקודה  $L$  העבירו ישר המקביל ל- $AB$  וחוטר את  $BF$  ואת  $AD$   
בנקודות  $M$  ו- $N$  בהתאם.

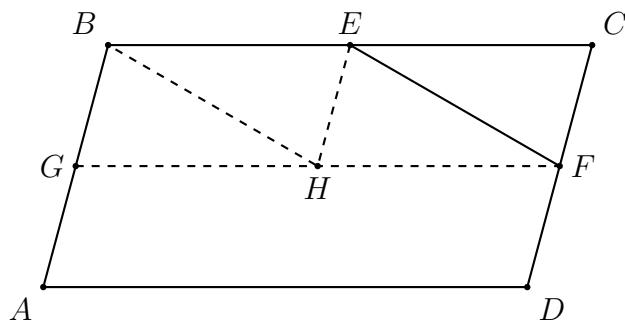
$$\text{חסב את היחס } \frac{LM}{MN}.$$

ג. נתון  $BE = EF$ .

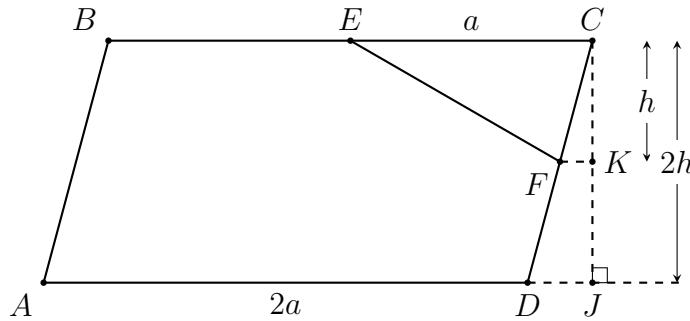
האם אפשר לחסום את המרובע  $ABFD$  במעגל? נמק את קביעתך.

### סעיף א

נפרק את המקבילית למשולשים. יהיו  $GF$  קטע  $BC$  המקביל ל- $EH$  ו- $CD$  מקביל ל- $EF$ . לפי זוויות מתאימות ומשלים, המרובעים  $ECFH$ ,  $BEHG$  הם מקביליות.  $E$  היא נקודת האמצע של  $BC$  ולכן  $\triangle ECF$ ,  $\triangle EHF$ ,  $\triangle HEB$ ,  $\triangle BGH$  היא נקודת האמצע של  $GF$ . מכיוון שכל המשולשים  $\triangle ECF$ ,  $\triangle EHF$ ,  $\triangle HEB$ ,  $\triangle BGH$  חופפים ולכן  $GF = BC$  הוא קוו אמצעים ומחלק את המקבילית לשני חלקים שווים, כך ש- $S_{ABCD} = S_{BCFG} + S_{GFDA} = 8S$ .



הוכחה אחרת משתמשת במשפט 5 א "שטח מקבילית שווה למינימל צלע המקבילית בגובה לצלע זו". הגובה של המקבילית באורך כפול מהגובה של המשולש לפי דמיון המשולשים  $\triangle FCK$ ,  $\triangle DCJ$ :



$$S_{ECF} = \frac{1}{2}ah = S$$

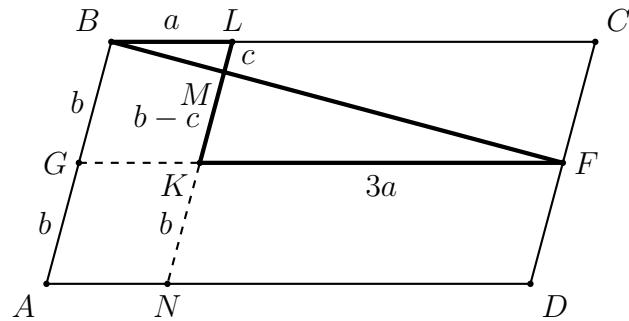
$$S_{ABCD} = 2a \cdot 2h = 4ah = 8S.$$

**סעיף ב**

נקבליחס בין קטעי קו אם נמצא משולשים דומים שקטעי הקו הם צלעות שלהם. בתרשים להלן הדgeshi משולשים שיכולים להתאים. קטע האמצעים במקבילית מקביל לבסיסים  $BC \parallel GF$ , וזוויות מתחלפות  $\angle LMB = \angle KMF$  וזוויות קודקודיות  $\angle LBM = \angle MFK$  נקבל:

$$\triangle LMB \sim \triangle KMF.$$

בתרשים רשםנו את אורך הקטעים תוך שימוש בעמלמים  $a, b, c$ .



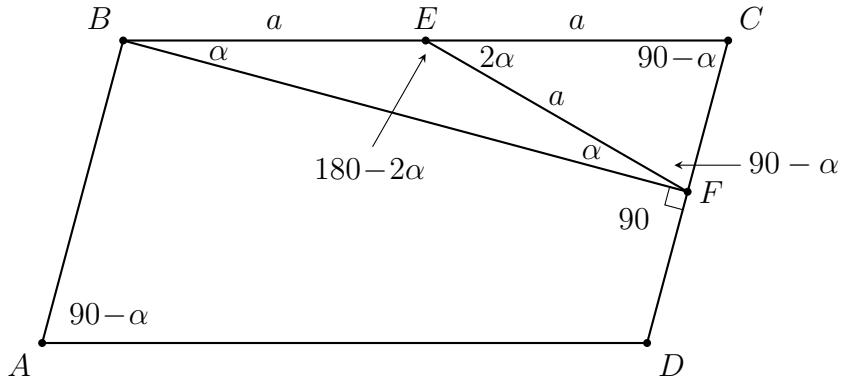
$$\frac{c}{b-c} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

$$b = 4c$$

$$\frac{LM}{MN} = \frac{c}{2b-c} = \frac{a}{2 \cdot 4c - c} = \frac{1}{7}.$$

**סעיף ג** לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180^\circ$ ".  
בתרשים להלן הוספתי את הנתון  $BE = EF$ . אפשר למצוא פתרון שימושי במשפט 87 "משולש בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה הוא משולש ישר זוית".

אפשר לפתור את השאלה ללא שימוש במשפט 86. נתון  $\angle EBF = \angle EFB$ , ולכן  $BE = EF$ -**שננסמן**. כדי שסכום הזווית במשולש יהיה  $180^\circ$ ,  $\angle BEF = 180 - 2\alpha$ , ולפי זוויות משלימות  $\angle CEF = 2\alpha$ . נתון גם  $\angle ECF = \angle EFC$  ולכן  $EC = EF$ -**שננסמן**, והזווית הללו שוות  $\alpha$  –  $90^\circ - \alpha$  כדי שסכום הזווית במשולש יהיה  $180^\circ$ . נחבר זוויות ונקבל  $\angle BFD = 90^\circ$ .



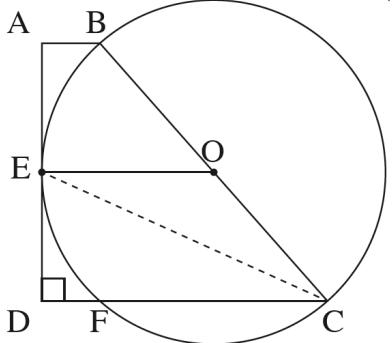
לפי משפט 26 "במקבילית כל שתי זוויות נגדירות שוות זו לזו"  $\angle BAD = \angle BCD = 90 - \alpha$ . לפי משפט 56 **חייב להתקיים**:

$$\angle BFD + \angle BAD = 90 + (90 - \alpha) = 180 - \alpha = 180.$$

נתון  $\angle BAD < 90^\circ$  (**זוויות חדה**) פחות מ- $90^\circ$  (ולכן  $0 < \alpha < 90^\circ$ ), שסותר את  $180 - \alpha = 180$ .  
אי אפשר לחסום את המרובע במעגל.

## 4.5 קיז תשע"ז מועד א

נתון מעגל שמרכזו  $O$ .



$\angle ADC = 90^\circ$ ,  $AB \parallel DC$  הוא טרפז ישר זוויות (.

הצלע  $AD$  משיקה למעגל בנקודה  $E$

והנקודות  $B$  ו-  $C$  נמצאות על המעגל כך ש-  $BC$  הוא קוטר.

הצלע  $DC$  חותכת את המעגל בנקודה  $F$ , כמתואר בציור.

א. הוכח:  $\angle BCD = 2\angle DEF$ .

ב. הוכח:  $\triangle ABE \cong \triangle DFE$ .

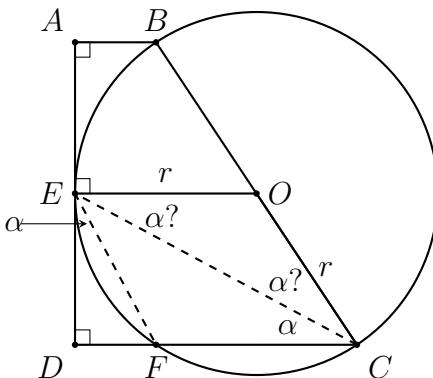
ג. הוכח:  $BC = DF + DC$ .

### סעיף א

השאלה שואלת על זוויות ויש לנו קווים מקבילים, משיק וזוית ישרה. ננסה להסיק מסקנות על זוויות. מחברי השאלה סיפקו רמז: הקו המקביל  $EC$  היא זוית בין המשיק  $ED$  לבין ביני  $EF$ . לפि משפט 79 "זוית בין משיק ומיתר שווה לזוית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני",  $\angle DEF = \angle ECF$ . סימנו את הזויות ב- $\alpha$ .

אם נידע את  $\angle ECO$ , נקבל  $\angle BCD = \angle ECF + \angle ECO$ . נתון  $\angle ADC = 90^\circ$ .  $AB \parallel DC$ ,  $\angle BCD = \angle ECO + \angle ECF$ . המשיק מאונך לרדיו  $EO$ , ולכן  $EO \parallel DC$ ,  $EO \perp AD$ ,  $EO \parallel DC$ ,  $EO \perp AD$  לפि זוויות מתחלפות.  $\angle ECO = \alpha$ :

$$\angle BCD = \angle ECF + \angle ECO = 2\alpha = 2\angle DEF.$$



הוכחה אחרת משתמשת במשפט 103 "אם מנוקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותק ומשיק, אז מכפלת החותק בחלוקת החיצוני שווה לרביע המשיק". לכן:

$$ED^2 = DC \cdot DF$$

$$\frac{ED}{DF} = \frac{DC}{ED}$$

$$\triangle EDF \sim \triangle CDE.$$

נשתמש במשפט 69 "במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת". לפיכך  $\angle BOE = \angle BCD$

$$\angle BCD = \angle BOE = 2 \cdot \angle BCE.$$

מחיבור של זוויות:

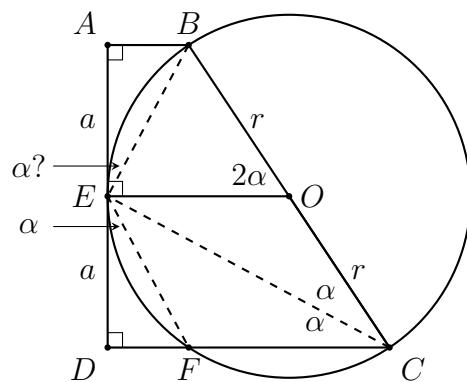
$$\angle ECD = \angle BCD - \angle BCE = \angle BCD - \angle BCD/2 = \angle BCD/2.$$

הוכחנו ש- $\triangle EDF \sim \triangle CDE$ , ולכן:

$$\angle DEF = \angle ECD = \angle BCD/2.$$

### סעיף ב

נתון ש- $BC$  הוא קוטר שמרכזו  $O$  ולכן  $BO = OC = r$ . נפעיל את המשפט 44 "בטרפז, ישר החוצה שוק אחד ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השני" על הטרפז  $ABCD$ , כדי לקבל  $AE = DE$ . נבנה  $\angle ECB$  את המיתר  $BE$ . לפי משפט 79,  $\angle AEB = \angle ECB$ , הזווית היקפית, ומהסעיף הקודם,  $\angle ECO = \angle EDF = \alpha$ .  $\triangle ABE \cong DFE$ ,  $\angle EAB = \angle EDF = 90^\circ$ .  $\angle ECO = \angle DEF = \alpha$ .



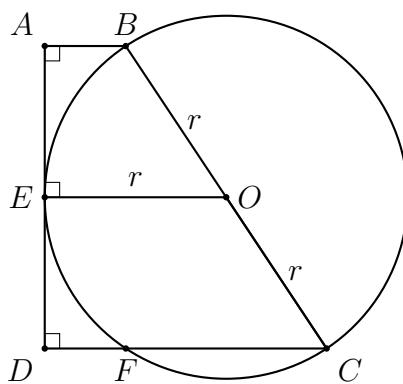
הוכחה אחרת מחשבת זווית של  $\triangle BOE$  שהוא שווה-שוקיים כי  $r = BO = OC$ . בסעיף א הוכחנו ש- $\angle DEF = \alpha$ ,  $\angle AEB = \alpha$ ,  $\angle BEO = \angle OBE = 90^\circ$ ,  $\angle BOE = 2\alpha$ . כדי להשלים ל- $90^\circ$   $\angle BEO = 90^\circ - \alpha$ .  $\angle BCF = \angle BCF$  בgal שהם נשענים על זווית היקפית שווה  $\alpha$ , ולכן  $\triangle BCF \cong \triangle EDF$ .

## סעיף ג

האורך של  $BC$  הוא  $2r$ , כך שعلינו להוכיח ש- $DF + DC = 2r$ . אם נפשט את התרשים נראה ש- $EO = AE = ED$  ו- $BO = OC = r$  לפי הסעיף הקודם. לפיכך  $EO = \frac{1}{2}(AB + DC)$  ו- $DF + DC = r$ .

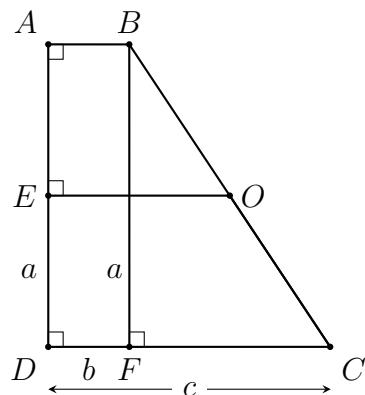
$$\begin{aligned} EO &= \frac{1}{2}(AB + DC) \\ &= \frac{1}{2}(DF + DC) = r, \end{aligned}$$

כיוון ש- $AB = DF = r$  לפי משולשים חופפים שהוכחנו בסעיף הקודם. מכאן ש- $EO = DF + DC$ .

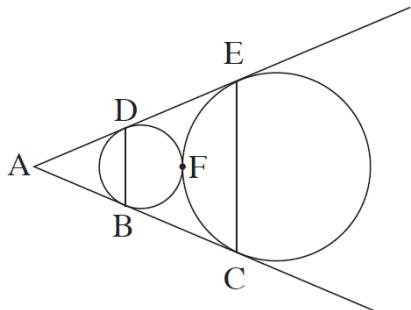


הוכחה אחרת משתמשת במשפט פיתגורס ומפט 103 על משיק וקו חותם. נסמן את אורכי הצלעות בתרשימים ונקבל:

$$\begin{aligned} a^2 &= bc \\ BC^2 &= (2a)^2 + (c - b)^2 = 4a^2 + (c - b)^2 \\ &= 4bc + c^2 - 2bc + b^2 \\ &= c^2 + 2bc + b^2 = (c + b)^2 \\ BC &= c + b = DC + DF. \end{aligned}$$



## 4.6 חורף תשע"ז



נתוניים שני מעגלים בעלי רדיוס שונה, המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה F.

AC משיק לשני המעגלים בנקודות B ו-C,

AE משיק לשני המעגלים בנקודות D ו-E,

כמתואר בציור.

א. הוכח שהמרובע BDEC הוא טרפז שווה-שוקיים.

ב. המשיק המשותף למעגלים העובר בנקודה F חותך את שוקי הטרפז, BC ו-DE, בנקודות G ו-H בהתאמה.

הוכחה: GH הוא קטע אמצעים בטרפז.

ג. נסמן ב-R את רדיוס המעגל הגדול וב-r את רדיוס המעגל הקטן.

$$\text{הוכחה כי } R \cdot BD = r \cdot CE .$$

### סעיף א

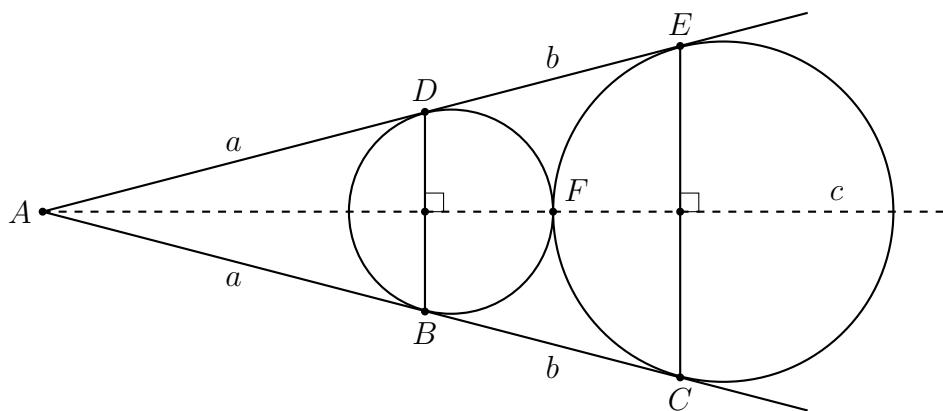
נפעיל את משפט 80 "שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה" על  $:AC, AE$ :

$$AD = AB = a$$

$$AE = AC = a + b$$

$$DE = BC = b.$$

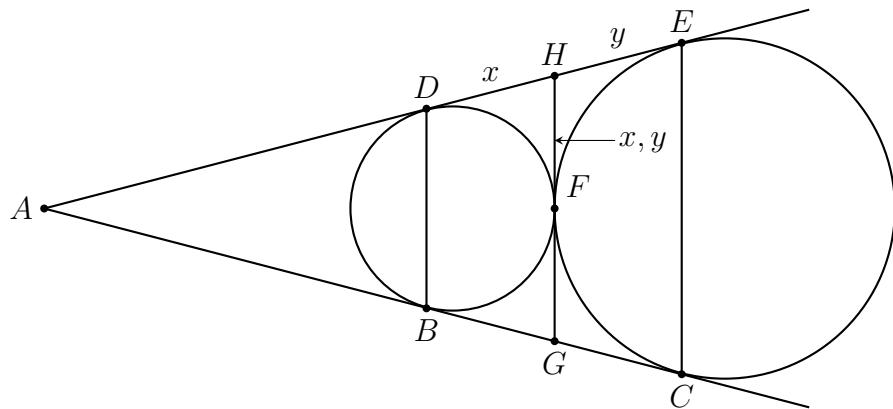
אם נכיח ש- $DB \parallel EC$ , המרובע  $BDEC$  יהיה טרפז לפי ההגדרה והוכחנו שהוא שווה-שוקיים.



$\frac{AD}{AE} = \frac{a}{a+b} = \frac{AB}{AC}$  לפי צ.ז. כי יש להם זווית משותפת ב-A והוכחנו ש- $\triangle AEC$  שווה-שוקיים, ולכן לפי משפט 6 "במשולש שווה-שוקיים, חוצה זווית המושולשים  $\triangle ADB, \triangle AEC$  שווה-שוקיים, ומכאן ש- $\angle A$  הוא גם גובה. מכאן שבבסיסי הרأس, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים". הקוו  $c$ , חוצה הזווית  $A$ , הוא גם גובה. מכאן שבבסיסי המשולשים  $DB, EC$  מאונכים שניהם לקו  $c$  ו- $DB \parallel EC$ .

### סעיף ב

במבחן ראשון חשבתי להשתמש במשפט 43 "קטע האמצאים בטרפו מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכוםם", כאן,  $GH = h \cdot \frac{1}{2}(BD + CE)$ , והנוסחה לשטח של טרפז  $S_{BDEC} = \frac{1}{2}(BD + CE)h$ . אבל זה לא הוביל לפתרון. אחר כך ניסיתי להשתמש במשפט 14 "קטע אמצאים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה", אבל לא מצאתי משולש מתאים. לאחר פישוט התרשימים שמתי לב שאפשר להפעיל את משפט 80 על הנקודות  $DH = HE = HF = y$  ו- $GH = HF = x$ .  $H, G, C$  הוא קטע אמצאים של הטרפו. אותה הוכחה מראה ש- $BG = GC$ .



### סעיף ג

נוכיח ש- $\triangle BO_1D \sim \triangle CO_2E$ , כאשר  $O_1, O_2$  הן מרכזיו המעגלים, וכך:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{r}{R}.$$

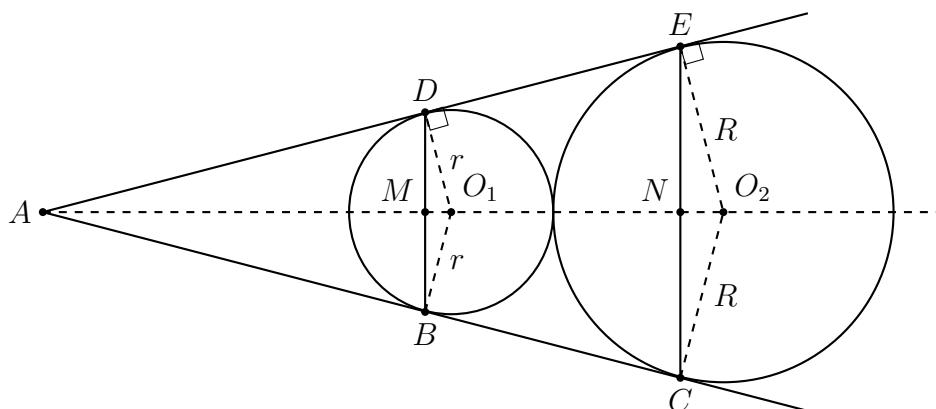
המשולשים מורכבים משני זוגות של משולשים ישר-זווית חופפים:

$$\triangle MO_1D \cong \triangle MO_1B, \quad \triangle NO_2E \cong \triangle NO_2C$$

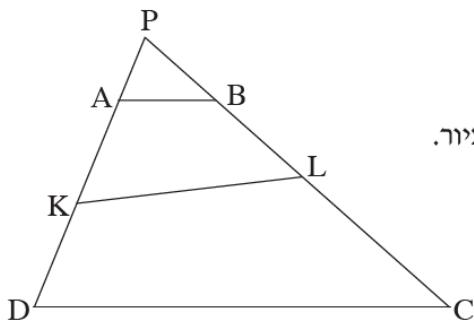
כי  $O_1M, O_2N$  ו- $O_2E = O_2C = R$ ,  $O_1D = O_1B = r$  צלעות משותפות. כבר הוכחנו ש- $DB \parallel EC$  והזווית בין הרדיוסים למשיקים ישרות, וכך:

$$\angle MDO_1 = 90^\circ - \angle MDA = 90^\circ - \angle NEA = \angle NEO_2,$$

ולפי ז.ג.  $\triangle BO_1D \sim \triangle CO_2E$ .



## 4.7 קיז תשע"ו מועד ב



- . נתון משולש  $PDC$  . 4.  
הנקודות  $B$  ו-  $L$  מונחות על הצלע  $PC$  .  
הנקודות  $A$  ו-  $K$  מונחות על הצלע  $PD$  , כמתואר בציור.  
נתון כי המרובע  $ABLK$  הוא בר-חסימה במעגל  
וגם המרובע  $KLCD$  הוא בר-חסימה במעגל.  
א. הוכח:  $AB \parallel DC$  .

נתון:  $3 \text{ ס"מ} = PB = PA = 4 \text{ ס"מ}$

שטח המשולש  $ABP$  הוא  $S \text{ סמ"ר}$ ,

שטח המרובע  $ABCD$  הוא  $24S \text{ סמ"ר}$ .

ב. האם אפשר לחסום במעגל את המרובע  $ABCD$  ? נמק.

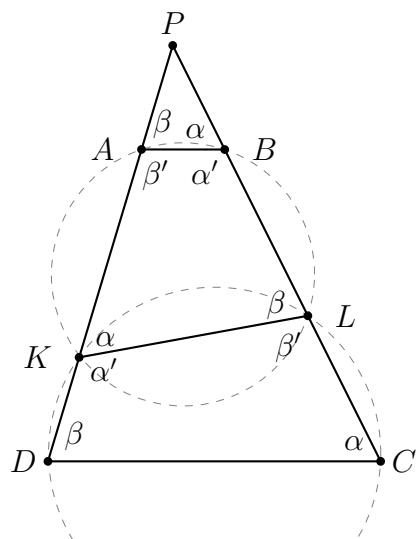
ג. מצא את אורך הצלע  $PD$  .

ד. נתון גם:  $5 \text{ ס"מ} = BL$  .

היעזר בדמיון משולשים והבע באמצעות  $S$  את שטח המרובע  $KLCD$  .

### סעיף א

לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180^\circ$ ". נבנה את שני המעגלים החוסמים את המרובעים, ובחר זוג זוויות נגדיות, למשל,  $\angle LKA$ ,  $\angle ABL$ , במרובע  $ABLK$ . נסמן  $\angle LKA = \alpha$  ונסתמש בקיומו  $\alpha' = 180^\circ - \alpha$  עבור הזווית הנגדית  $\angle ABL$ . לפי זוויות משילימות בנקודה  $B$ ,  $\angle ABP = \alpha'$ , ובנקודה  $K$ ,  $\angle LKD = \alpha'$ . נפעיל שוב את משפט 56 כדי להסיק  $\angle LCD = \alpha - \alpha'$ . מכאן ש- $AB \parallel DC$  לפי זוויות מתאימות.



### סעיף ב

כדי להפעיל שוב את משפט 56 נצטרך להוכיח שהזווית הנגדית במרובע  $ABCD$  מקיימת  $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$ . נסמן  $\angle ADC = \beta$ ,  $\angle BCD = 180^\circ - \angle ADC$ .

הוכחנו ש- $AB \parallel DC$ , ולפי זוויות מתאימות בנקודות  $A, D$  ו- $B, C$ , זווית משלימות בנקודות  $P, A$  ו- $B, C$ . נקבל  $\angle PBA = \angle BCD = \alpha$ ,  $\angle PAB = \angle ADC = \beta$ .

אם המרובע  $ABCD$  בר חסימה,  $\alpha' + \beta = 180^\circ$ , כך  $\alpha' = 180^\circ - \beta$  שסותר את הנתון  $PA \neq PB$ . לא ניתן לחסום את המרובע  $ABCD$ .

### סעיף ג

לפי 2. אולם, זה לא עוזר: אמם נתון היחס בין  $PA, PB, PD$ , אבל יש שני זוגות של גודלים  $AB, DC$  ו- $PD, PC$ . ניתן השטחים של שני המושלים, ולפי משפט 100 ז"ח הצלעות הוא השורש של יחס השטחים", נוכל לחשב את יחס הצלעות:

$$\frac{PA}{PD} = \sqrt{\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle PDC}}} = \sqrt{\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABP} + S_{ABCD}}} = \sqrt{\frac{S}{S + 24S}} = \frac{1}{5},$$

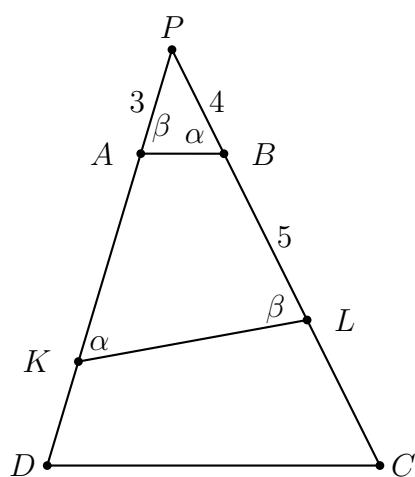
$PD = 5PA = 15$

### סעיף ד

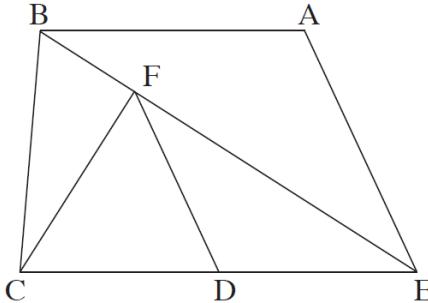
לפי 2. יחס השטחים מתקיים מתקבל מיחס אורכי הצלעות הנתונים ווחישבנו:

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle LKP}} = \left(\frac{PA}{PL}\right)^2 = \left(\frac{3}{4+5}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$S_{KLCD} = S_{\triangle PDC} - S_{\triangle LKP} = 25S - 9S = 16S.$$



## 4.8 קיז תשע"ו מועד א



נתון טרפז  $AB \parallel EC$   $ABCE$

הנקודה  $F$  נמצאת על האלכסון  $BE$

כך ש-  $CF \perp BE$ .

הנקודה  $D$  היא אמצע הבסיס  $CE$  (ראה ציור).

$$\angle CEB = \angle AEB$$

$$ED = 3a, EA = 4a$$

א. הוכח כי  $\triangle EAB \sim \triangle EDF$

ב. נתון כי שטח המשולש  $EAB$  הוא  $S$ .

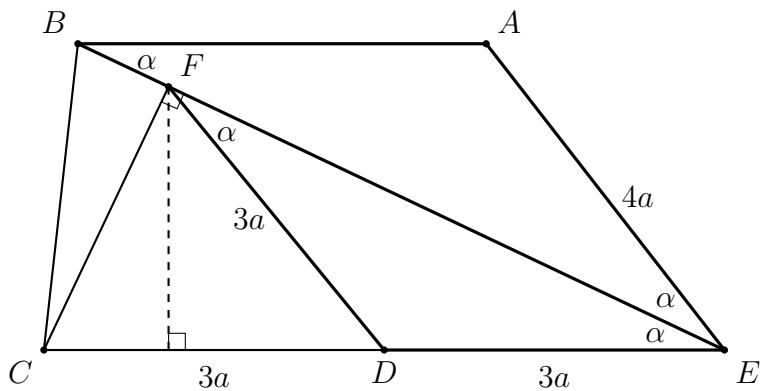
הבע באמצעות  $S$  את שטח המשולש  $CEF$

ג. המשך  $DF$  חותך את  $AB$  בנקודה  $G$ .

הבע באמצעות  $S$  את שטח המשולש  $BFG$

### סעיף א

נסמן את הזווויות  $\angle AEB = \angle CEB = \alpha$  ונסמן את האורכים הנתונים. לפי משפט 86 "במשולש ישר-זווית התיכון ליתר שווה למ这边ית היתר", ולכן  $\triangle EDF \sim \triangle EAB$ .  $DF = CD = DE$  שווה-שוקיים ולכן  $\angle DFE = \alpha$ . כמו כן, נתון  $AB \parallel EC$ , כך  $\angle ABE = \alpha$  ו-  $\angle CEB = \alpha$  מתחלפות עם  $\angle DFE = \alpha$ . לפי ז.ז.  $\triangle EDF \sim \triangle EAB$ .



### סעיף ב

בננה גובה מ- $F$  ל- $CE$ . כדי עין ישימו לב גובה זה משותף לשני המשולשים  $\triangle CFD, \triangle EFD$ . הבסיסים  $CD = DE = 3a$  שוים, ולכן השטחים של שני המשולשים שוים. בסעיף א הוכחנו  $\sim$   $\triangle CEB$ , לפיה משפט 100 ז"י "יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון":

$$\frac{S_{\triangle EFD}}{S_{\triangle EAB}} = \left(\frac{ED}{EA}\right)^2 = \left(\frac{3a}{4a}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$S_{\triangle CEF} = S_{\triangle CFD} + S_{\triangle DFE} = 2S_{\triangle DFE} = \frac{9}{8}S.$$

## סעיף ג

אנו צריכים את אורך של צלע אחת של  $\triangle BFG$  כדי לחשב את יחס השטחים. כבר הראינו ש-  $\triangle BFG \sim \triangle DFE$  ו-  $\angle BFG = \angle DFE = \alpha$  ו-  $\angle ABE = \angle BEC = \alpha$ . לכן לפי ז.ז.,  $\angle AGD = 2\alpha$   $\triangle DFE$  לשולש שווה לסכום שתי הזווויות הפנימיות שאינן צמודות לה". המרובע  $AGDE$  הוא מקבילית לפי משפט 29 "מרובע שבו כל זוג זווויות נגדיות שוות הוא מקבילית".  $GF = GD + FD = EA - DF = 4a - 3a = a$ .

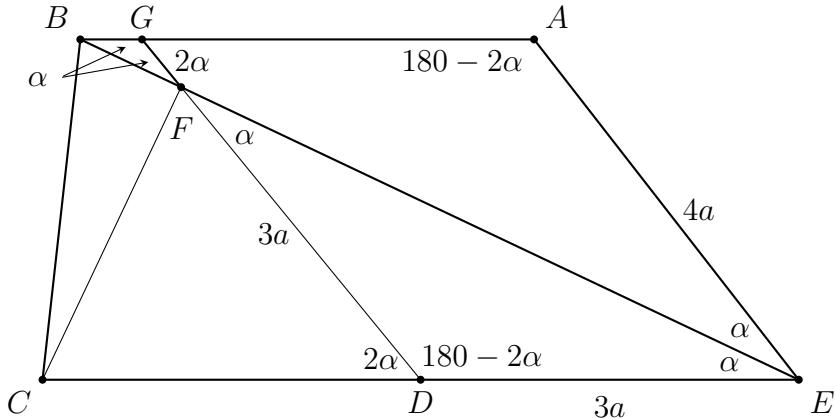
$$GF = GD - DF = EA - DF = 4a - 3a = a.$$

נשתמש שוב במשפט 101 :

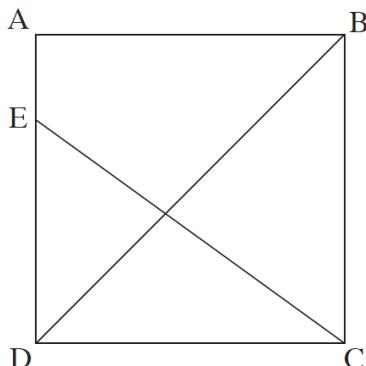
$$\frac{S_{\triangle BFG}}{S_{\triangle DFE}} = \left(\frac{a}{3a}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

לפי סעיף א,  $\triangle DFE = \triangle CEF$ , ולכן:

$$S_{\triangle BFG} = \frac{1}{9} S_{\triangle DFE} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} S_{\triangle CEF} = \frac{1}{(9 \cdot 2)} \frac{9}{8} S = \frac{1}{16} S.$$



## 4.9 חורף תשע"ו



בריבוע  $ABCD$  הנקודה  $E$

נמצאת על הצלע  $AD$  (ראה ציר).

מעגל העובר דרך הנקודות  $E, D, C$  ו-

חותך את האלכסון  $BD$  בנקודה  $M$ ,

ואת הצלע  $BC$  בנקודה  $N$ .

הנקודה  $M$  נמצאת בין הקדקוד  $B$

ובין נקודות החיתוך של  $BD$  עם  $CE$ .

א. הוכח כי  $CD = EN$ .

ב. האם הקטע  $DM$  קצר מהקטע  $CE$

ארוך ממנו או שווה לו? נמק.

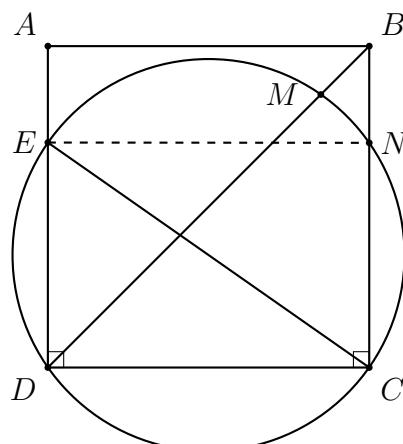
ג. הוכח כי  $BM \cdot BD = AE \cdot AD$ .

### סעיף א

נציר תרשים עם הנקודות  $M, N, C, D, E$ . המעל עובר דרך הנקודות  $M, N$  והקו  $EN$ . מכאן  $ENDC$ -הו מרובע החסום במעגל. השתמש במשפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180^\circ$ ".  $ABCD$  הוא ריבוע כך ש-  $\angle ADC = \angle BCD = \angle NCD = 90^\circ, \angle EDC = 90^\circ$  לפי המשפט:

$$\angle ENC = 180 - \angle EDC = 90, \quad \angle NED = 180 - \angle NCD = 90.$$

מרובע שכל הזוויות שלו ישרות הוא מלבן ו-

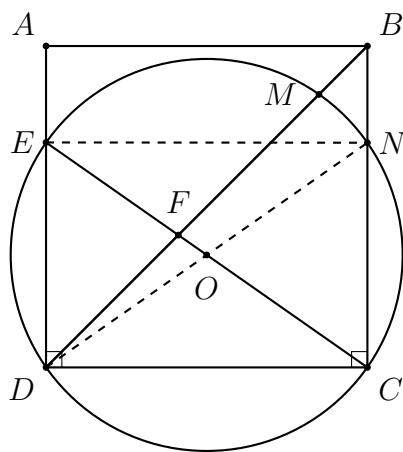


הוכחה אחרת משתמשת במשפט 74 "זווית היקפית בת  $90^\circ$  נשענת על קוטר". הנקודות  $C, D, E, N$  נמצאות על מעגל, כך  $\angle EDC = 90^\circ$ , והוא קוטר. לפי המשפט ההיפוך  $\angle ENC = 90^\circ$ . כדי להשלים את סכום הזוויות במרובע ל- $360^\circ$  חיב להיות  $\angle NED = 90^\circ$  הוא מלבן.

### סעיף ב

בזוזתי הרבה זמן בניסיונות לפטור סעיף זה, כי חשבתי להשווות אורכים לפי משולשים דומים או משפט פיתגורס. לבסוף נזכרתי במשפט 66 "במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר מרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מהמיתר الآخر". בהוכחה השנייה לסעיף א' ראינו ש- $\angle ECN$  הוא קוטר, ולכן הוא ארוך יותר מכל מיתר שאינו קוטר. מה שנשאר הוא להוכיח ש- $\angle DMN$  אינו קוטר, ולכן  $\angle DMN$  קצר יותר מ- $\angle CE$ .

נตอน ש- $\angle ENA$  נמצאת על  $AD$ , ונניח שהכוונה היא ש- $\angle ENA = 90^\circ$  שונה מנקודות הקצה  $A, D$ . הוכחנו ש- $\angle ENA \neq 90^\circ$ . ולבסוף נזכיר את משפט 102: אם מיתר  $EN$  שונה מ- $AB$ , אז  $\angle NED \neq \angle ABD$ . אבל  $\angle NED = \angle ABD$ , ולכן  $\angle NED = \angle ABD$ . מה שנותר הוא  $\angle ENA \neq 90^\circ$ , ולכן  $\angle ENA \neq 90^\circ$ .

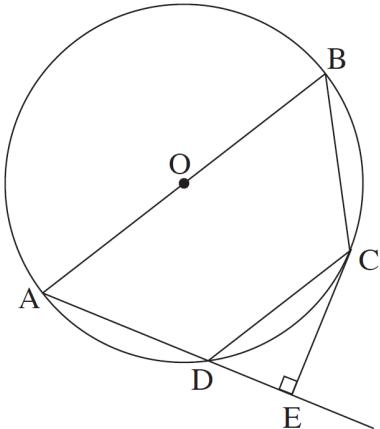


### סעיף ג

הنتיה הראשונה היא להשתמש במשפט תאლס, אבל משפט זה מנוסח כחילוק ולא ככפל על קטיעים של אותו קו. המשפט שמנוסח ככפל הוא משפט 102: "אם מוקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלוקת החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלוקת החיצוני". הם חותכים היוצרים מוקודה  $B$ , וলפי המשפט  $BN \cdot BC = BD \cdot BM$ . כי הן צלעות בריבוע, ו- $ED = NC$  כי הן צלעות של  $ENCD$  שהוכחנו שהוא מלבן. מכאן:

$$BM \cdot BD = BN \cdot BC = (BC - NC) \cdot BD = (AD - ED) \cdot AD = AE \cdot AD.$$

## 4.10 קיז' תשע"ה מועד ב



מרובע  $ABCD$  חסום במעגל שמרכזו  $O$ .

הצלע  $AB$  היא קוטר.

$E$  היא נקודה על המשך  $AD$  כך שה-

א. הוכח:  $\Delta CDE \sim \Delta ABC$

נתון גם:  $\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}$ ,  $OD \perp AC$

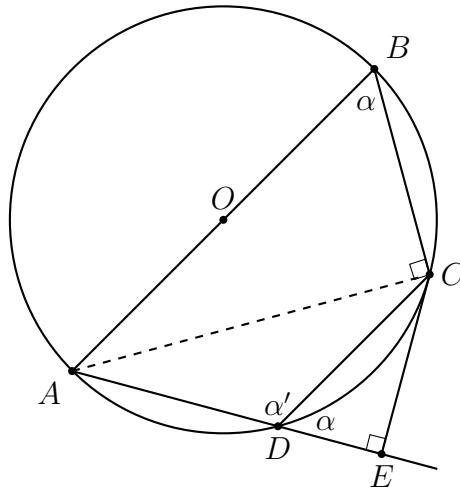
ב. הוכח כי  $OC \parallel AD$

ג. הוכח כי  $CE$  משיק למעגל.

### סעיף א

לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180^\circ$ ". נתנו גם שהצלע  $AB$  היא קוטר ולפי משפט 73 "זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה ( $90^\circ$ )". נבנה את הקו  $AC$  ונסמן  $\angle ACB = 90^\circ$  כי הוא נשען על קוטר.

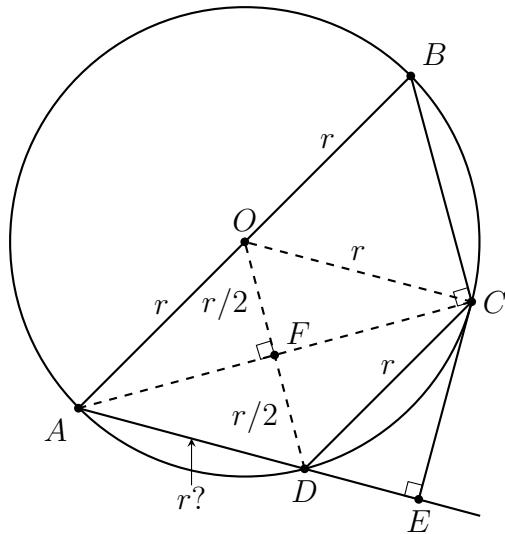
נסמן זוויות לפי משפט 56  $\angle ADC = 180 - \alpha = \alpha'$ ,  $\angle ABC = \alpha$ ,  $\angle ACD = 180 - \alpha' = \alpha$ . לפי זוויות משלימות בנקודה  $D$ ,  $\triangle CDE \sim \triangle ABC$  ו-  $\angle CDE = 180 - \alpha' = \alpha = \angle ABC$ .



### סעיף ב

אם נכח שהמרובע  $AODC$  הוא מקבילית נקבל  $OD \perp AC$ , כך שאם המרובע הוא מקבילית, הוא גם מעוין לפי משפט 36 "מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין". למעשה לא צריך להשתמש בתנזה  $OC \parallel AD$ , ובמשפט 36 כדי להוכיח שאם המרובע הוא מקבילית אז הוא מעוין כי  $r = OA = OC$ .

לפי משפט 100 ז"י "יחס השטחים שווה לריבועיחס הדמיון",יחס הצלעות במשולשים הדומים הוא  $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ . מכאן ש-  $r = \frac{1}{2}AB$ . אם נכח ש-  $AD = r = \frac{1}{2}AB$  יהיה לנו את המקבילית (ומוין) שnochoz.  $OC \parallel AD$ .



נזכיר לנตอน  $OD \perp AC$ . הוכחנו ש- $\triangle OCD$  הוא שווה-שוקיים (למענה הוא שווה-צלעות), כך שה- $CA$  הוא גובה ל- $OD$ , ולפי משפט 6 "במשולש שווה-שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה  $\triangle OAF \cong \triangle OCF$ "<sup>1</sup>. איתה הוכחה מראה ש- $\triangle OAF \cong \triangle OCF$  על בסיס מתלדים, וכן  $OF = FD = \frac{r}{2}$ . מכאן  $\triangle DAF \cong \triangle OAF$  ו- $\triangle DAF \cong \triangle OCF$ . בפתרונות אחרים שראיתי, משתמשים בעובדה ש- $\triangle OCD$  הוא שווה-צלעות שהזווות שלו הן  $60^\circ$ , לא מצאתי שזה נכון כדי להוכיח את הטענה.

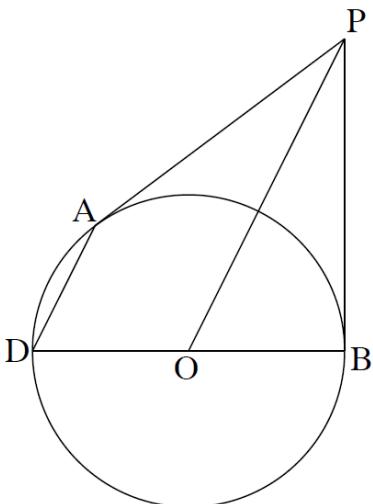
#### סעיף ג

משפט 78 הוא המפט היחיד שהמסקנה שלו היא שקו הוא משיק: "ישר המאונך לרדיוס בקצחו הוא משיק למעגל", כאן  $CE \perp OC$ . נשתמש בעובדה ש- $\triangle OCD$ ,  $\triangle OAD$ ,  $\triangle OAC$  הם שווה-צלעות ולכן  $\angle OCD = \angle OAD$ ,  $\angle OAC = \angle OAD$ . בסעיף א הוכחנו ש- $\angle CAB = \angle ECD$ ,  $\angle ABC \sim \angle CDE$ ,  $\angle CAB = \angle ECD$ ,  $\angle ABC = \angle CDE$ . בסעיף ב הוכחנו ש- $\angle OAD = 60^\circ$ . מכאן  $\angle OAD = 60^\circ$ .

$$\angle ECO = \angle ECD + \angle OCD = \angle CAB + 60^\circ = \frac{1}{2} \angle OAD + 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$

<sup>1</sup> החפיפה נובעת ממשפט 20 "משפט חפיפה שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין השתיים" לאחר שנטען שהזווית הישרה גדולה יותר מהזוויות האחרות. בספר גיאומטריה משתמשים במשפט זה כך: שני משלשים ישר-זווית חופפים עם היתר וצלע אחת שוות.

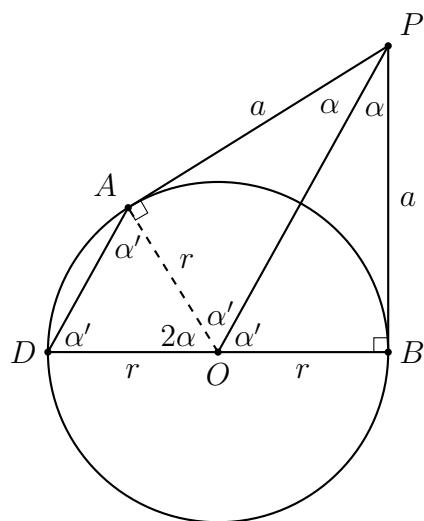
## 4.11 קיז' תשע"ה מועד א



- ר.  $PB$  משיקים למעגל שמרכזו  $O$ .  
המשך  $BO$  חותך את המעלג בנקודה  $D$  (ראה ציור).  
א. הוכח:  $PO \parallel AD$ .
- הנקודה  $C$  נמצאת על הקוטר  $DB$  כך ש-  $AC \perp DB$ .  
ב. הוכח:  $\Delta ADC \sim \Delta POB$ .
- $PD$  חותך את  $AC$  בנקודה  $E$ .  
ג. הוכח:  $\Delta DEC \sim \Delta DPB$ .
- ד. הוכח:  $AC = 2EC$ .

### סעיף א

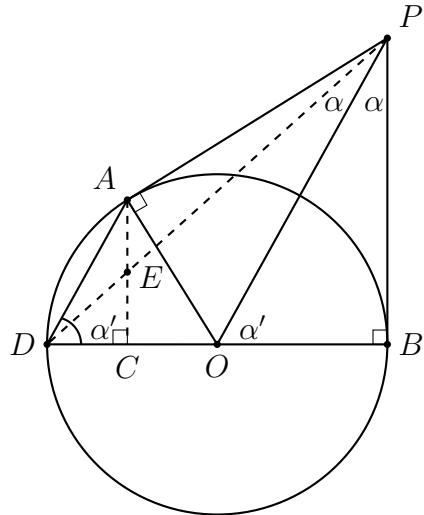
כאשר יש שני משיקים וקו מהנקודות החיצונית של המשיקים למרכז המעלג המשפטים הללו עשויים להיות קלונוניים: משפט 77 "המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודה החשקה", משפט 80 "שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שוים זה לזה", ומשפט 81 "קטע המחבר את מרכז המעלג לנקודה ממנו יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים".



נحلים את שאר הזוויות כאשר השתמשנו בקיצור  $\alpha - \alpha' = 90^\circ$ , תוך שימוש בעובדות שסכום הזווית במשולש הוא  $180^\circ$ , וסכום הזווית המשלימות לזוית שטוחה הוא  $180^\circ$ . משווין הרדיוסים נקבל  $\angle ADO = \angle DAO = \alpha'$ . לפי זווית מתאימות  $PD \parallel AD$  ו-  $\angle POB = \alpha'$ .

## סעיף ב

$\triangle ADC \sim \triangle POB$ , ולכן  $\angle ADC = \angle POB = \alpha'$



## סעיף ג

הזווית  $\angle EDC$  של המשולש ישר-זווית  $\triangle DEC$  היא למעשה אותה זווית  $PDB$  של המשולש ישר-זווית  $\triangle DPB$ , ולכן  $\triangle DEC \sim \triangle DPB$ .

## סעיף ד

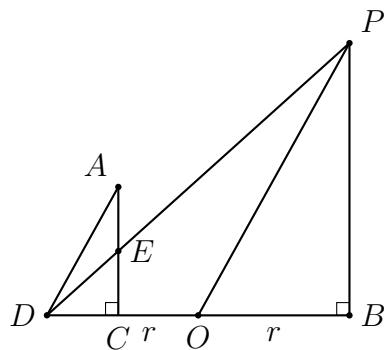
עלינו לחפש ערך אחד שהוא כפול מערך אחר. הקוטר  $DB$  כפול מהרדיסים  $DO, OB$ . בסעיפים הקודמים הוכחנו שני זוגות של משולשים דומים. נפשת את התרשים וונסה להוכיח את המשוואה תוך שימוש במשולשים. עבור  $AC$ , מסעיף ב,  $\triangle ADC \sim \triangle POB$ , ולכן:

$$\frac{AC}{PB} = \frac{DC}{OB} = \frac{DC}{r}.$$

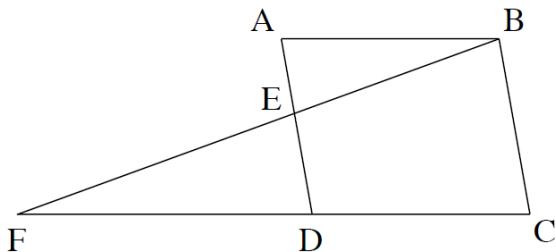
.jsoupן  $\triangle DEC \sim \triangle DPB$ , ולכן:

$$\frac{EC}{PB} = \frac{DC}{DB} = \frac{DC}{2r}.$$

נציב את  $AC = 2EC$  ממשוואת השנייה בראשונה, ונקבל



## 4.12 חורף תשע"ה



במקבילית  $ABCD$  הנקודה  $E$  נמצאת על הצלע  $AD$ .

המשך  $BE$  חותך את המשך  $CD$  בנקודה  $F$  (ראה ציור).

נתון: שטח המשולש  $ABE$  הוא 27 סמ"ר.

שטח המשולש  $DFE$  הוא 48 סמ"ר.

א. מצא את שטח המשולש  $BED$ .

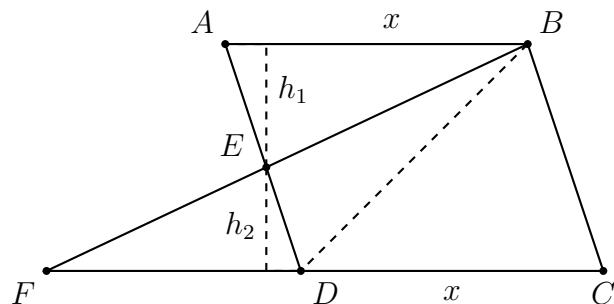
ב. נתון גם כי המרובע  $BCDE$  הוא בר חסימה במעגל.

$$\cdot \frac{AB}{EF}$$

### סעיף א

יש שתי דרכים לחשב את השטח של  $\triangle BED$ . הראשונה היא לחשב את השטח של  $\triangle ABD$  ולהחסיר את השטח של  $\triangle ABE$ . לפי הסימונים בתרשימים:

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}x(h_1 + h_2), \quad S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}xh_1.$$



אם נוכל לבטא את  $h_2$  במנוגדים של  $h_1$ , נוכל להחשב את  $S_{\triangle BED}$  במלואה. בಗל הזרויות המתחלפות ב- $A, D, F, B$ . לפי משפט 100 ז"י יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון:

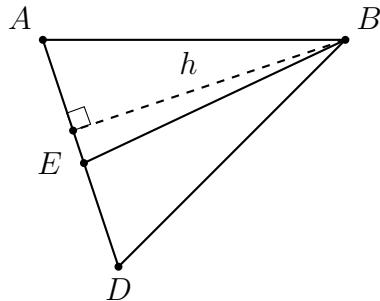
$$\begin{aligned} \frac{h_2}{h_1} &= \sqrt{\frac{S_{DEF}}{S_{ABE}}} = \sqrt{\frac{48}{27}} = \frac{4}{3} \\ S_{\triangle BED} &= S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}x \left( h_1 + \frac{4}{3}h_1 \right) - \frac{1}{2}xh_1 \\ &= \frac{4}{3} \left( \frac{1}{2}xh_1 \right) = \frac{4}{3} (S_{ABE}) = \frac{4}{3} \cdot 27 = 36. \end{aligned}$$

הדרך השנייה לחשב את השטח של  $\triangle BED$  קשה לראות אבל החישוב מאוד פשוט. למשולשים  $\triangle ABE$ ,  $\triangle BED$  גובה זהה  $h$  מהנקודה  $B$  ועד  $AD$ . לכן יחס השטחים שווה לחישוב הבסיסים:

$$\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{\frac{1}{2}hAE}{\frac{1}{2}hED} = \frac{AE}{ED} = \frac{4}{3},$$

לפי יחס הצלעות במשולשים  $\triangle ABE \sim \triangle DFE$  מסעיף א. מכאן:

$$S_{\triangle BED} = \frac{4}{3}S_{\triangle ABE} = \frac{4}{3} \cdot 27 = 36.$$

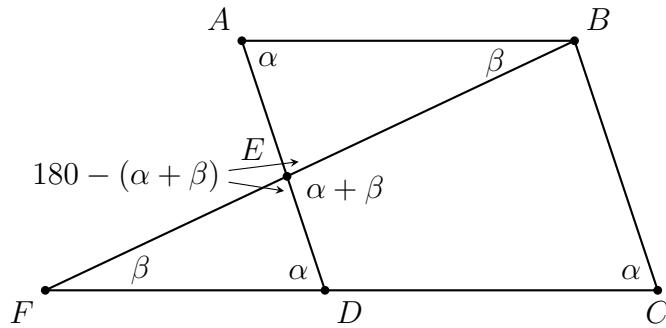


#### סעיף ב

לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180^\circ$ ". נסמן זוויות  $D = C = \alpha$ ,  $A, B, F$  ב- $\alpha - \beta$  את הזווית הנגדית של המקביליות  $A, C$  ו- $B, F$ .

לפי זוויות המתאימות. נסמן ב- $\beta$  את הזווית המתחלפות ב- $E$ . סכום הזוויות במשולש הוא 180 וכאן הזווית הקודקודית ב- $E$  שווה ל- $180 - (\alpha + \beta)$ . לפי זוויות משלימות

$$\angle BED = \alpha + \beta.$$



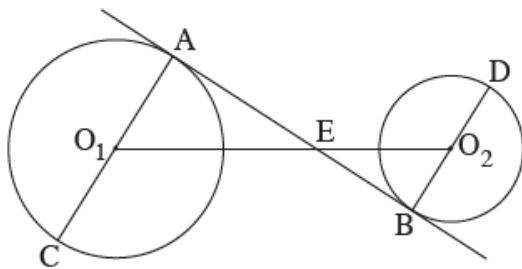
נפעיל את משפט 56 ונקבל:

$$\begin{aligned} \angle BCD + \angle BED &= 180 \\ \alpha + (\alpha + \beta) &= 180 \\ \alpha &= 180 - (\alpha + \beta). \end{aligned}$$

המשולשים  $\triangle ABE$ ,  $\triangle DFE$  שווה-שוקיים! נשתמש בחישובו בסעיף א:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AB}{FD} = \frac{3}{4}.$$

## 4.13 קיז' תשע"ד מועד ב



.  
AC הוא קוטר במעגל שמרכזו  $O_1$   
BD הוא קוטר במעגל שמרכזו  $O_2$   
ישר משיק למעגלים  $O_1$  ו-  $O_2$   
בנקודות A ו- B בהתאם.  
המשיק חותך את קטע המרכזים  
 $O_1O_2$  בנקודה E (ראה ציור).

נתון: רדיוס המעגל  $O_1$  הוא 30 ס"מ  
רדיוס המעגל  $O_2$  הוא 20 ס"מ  
אורך קטע המרכזים  $O_1O_2$  הוא 90 ס"מ

א. (1) מצא את היחס  $\frac{O_1E}{O_1C}$  . נמק.

(2) הוכח כי  $\Delta EO_1C \sim \Delta EO_2D$

ב. הוכח כי הנקודה E נמצאת על הישר CD.

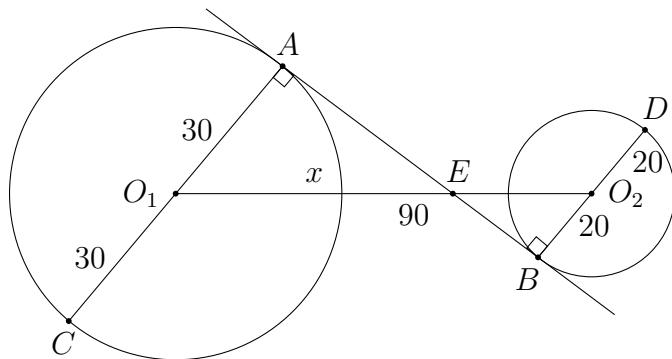
(1) סעיף א

לפי משפט 77 "המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת החשקה", מכיוון ש-  $\angle O_1AE = \angle O_2BE = 90^\circ$ , נסמן ב- $x$  את אורך של  $O_1E$   $\angle BEO_2$  כיהן זוויות קודקודיות. מכיוון ש-  $\triangle O_1AE \sim \triangle O_2BE$  לפי ז.ז. נקבל:

$$\frac{O_1E}{O_2E} = \frac{x}{90-x} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{30}{20}$$

$$20x = 30 \cdot 90 - 30x$$

$$\frac{O_1E}{O_1C} = \frac{x}{O_1A} = \frac{54}{30} = \frac{9}{5}.$$



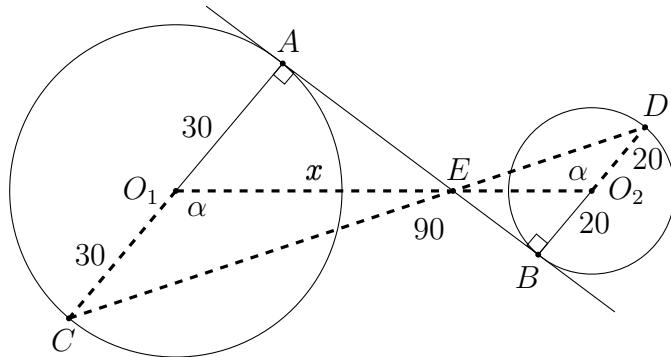
## סעיף א (2)

שכתי שאפשר להשתמש באותה שיטה כדי להוכיח  $\triangle EO_1C \sim \triangle EO_2D$ , אבל, כפי שמרמו סעיף ב, איננו יודעים שהנקודה  $E$  נמצאת על הקו הימני  $CD$ , ולכן איננו יכולים להניח  $\angle O_1EC = \angle O_2ED$  לפי זווית קודקודות. במקום זה, משתמש בעובדה שהקוטרים מקבילים.

$O_1C$  כי שניים ניצבים לקו  $O_1O_2$ ,  $O_1O_2 \parallel AC$  לפי זווית מתחלפות. הוכחנו  $O_1A \sim \triangle EO_2B$ , ולכן:

$$\frac{O_1E}{O_2E} = \frac{O_1C}{O_2D},$$

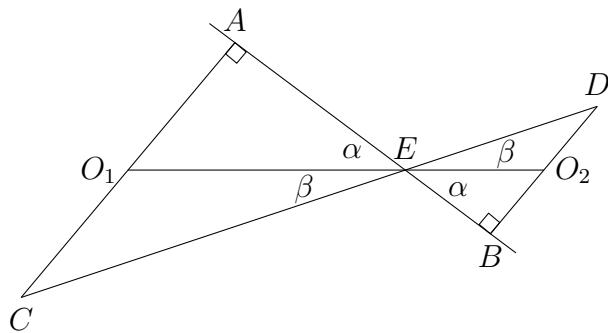
לפי צ.צ.  $\triangle EO_1C \sim \triangle EO_2D$ .



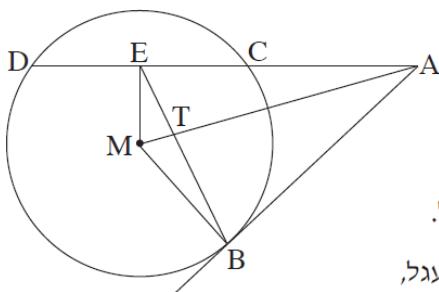
## סעיף ב

הנקודה  $E$  נמצאת על  $CD$  אם  $\angle AED \sim \angle AEC = 180^\circ$ . הוכחנו  $\angle AED + \angle AEC = 180^\circ$  אם  $AB$  קו ישר ו- $\triangle O_1AE \sim \triangle O_2BE$  משלימה  $\angle AEC$  עם  $\angle AED$  משלימה ל- $180^\circ$ . נבדוק אם  $\angle AED = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ .

$$\angle AED + \angle AEC = (180^\circ - (\alpha + \beta)) + \alpha + \beta = 180^\circ.$$



## 4.14 קיז' תשע"ד מועד א



- מנקודה A יוצא ישר המשיק למעגל בנקודה B, ויצא ישר החותך את המעגל בנקודות C ו-D. הנקודה E היא אמצע המיתר DC. הנקודה M היא מרכז המעגל (ראה ציר).  
 א. הוכח כי המרובע AEMB הוא בר חסינה במעגל.  
 ב. אלכסוני המרובע AEMB, שהוא בר חסינה במעגל, נפגשים בנקודה T.

נתון כי הנקודה T היא מפגש התיכונים במשולש BDC.

$$\text{הוכחה כי } TB^2 = 2MT \cdot TA.$$

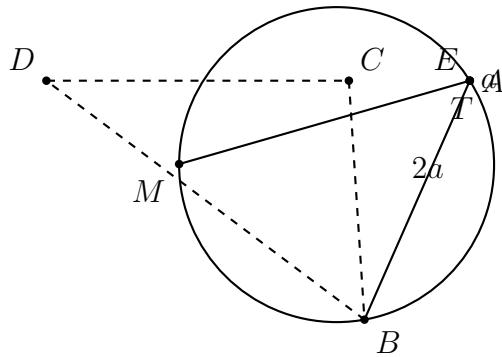
$$\text{ג. נתון: } \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ ס"מ} = TE, 1 \text{ ס"מ} = MT.$$

**סעיף א** מצא את רדיוס המעגל החוסם את המרובע AEMB.

משפטים רלוונטיים: 103 "אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלוקת החיצוני שווה לרכיב המשיק", 77 "המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה", 68 "קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר", 56 "ניתן ליחסם מרובע במעגל רק אם סכום הזווית הנגדות שווה ל- $180^\circ$ ".  
 לפי משפט 106 "סכום הזוויות הפנימיות של מרובע הוא  $360^\circ$ , ולכן:  
 $\angle MEB + \angle EAB = 360^\circ - (\angleMEA + \angleMBA) = 180^\circ$ .

**סעיף ב**

בתרשים למטה מופיעים: המעגל החוסם את המרובע AEMB, האלכסונים שלו AM, EB והמשולש AM, EB, BDC הם מיתרים נחטכים של המעגל החוסם. לפי משפט 101 "אם במעגל שני מיתרים נחטכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני",  $TB \cdot TE = MT \cdot TA$ . אם נוכיח  $TE = TB/2$ , קיבל את המשוואה המבוקשת. נתון ש-T היא מפגש התיכונים, ולפי משפט 46 "נקודות חיתוך התיכונים מחולקת כל תיכון ביחס 1 : 2", כלומר  $TE = TB/2$  או  $TB/TE = 2/1$ .

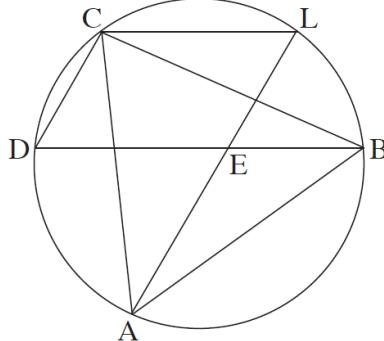


### סעיף ג

רדיוס המעל חוסם הוא קו מהמרכז לאחת הקוקודים  $A, E, M, B$ . אין לנו ידיעות את מרכז המעל, אבל  $MA$  יכול להיות קוטר והוא קיבל את הרדיוס כמחצית הקוטר. מסעיף א  $\angle MBA$  היא זוויות ישרה, ולפי משפט 74 "זוויות היקפית בת  $90^\circ$  נשענת על קוטר,"  $MA$  הוא קוטר. עם הערכים הנתונים נחשב את הרדיוס  $T$  ו $z$  שימוש בנוסחאות מסעיף ב:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{1}{2}MA \\
 &= \frac{1}{2}(MT + TA) \\
 &= \frac{1}{2}\left(MT + \frac{TB^2}{2MT}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left(MT + \frac{(2TE)^2}{2MT}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 1} \cdot 4\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2\right) = 3.
 \end{aligned}$$

## 4.15 חורף תשע"ד

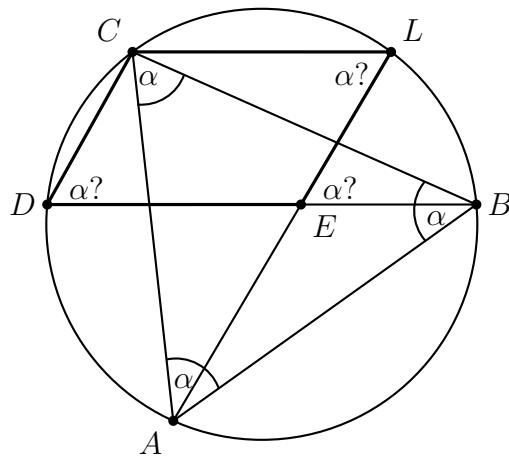


- משולש שווה-צלעות  $ABC$  חסום במעגל.  
 נקודות  $D$  ו-  $L$  נמצאות על המרجل כך ש-  $BD \parallel LC$ .  
 המיתרים  $AL$  ו-  $BD$  נחתכים בנקודה  $E$  (ראה צייר).  
 א. הוכח כי המרובע  $LEDC$  הוא מקבילית.  
 ב. (1) הוכח כי  $\triangle ADE$  הוא משולש שווה-צלעות.  
 (2)  $LC + LB = LA$ .

### סעיף א

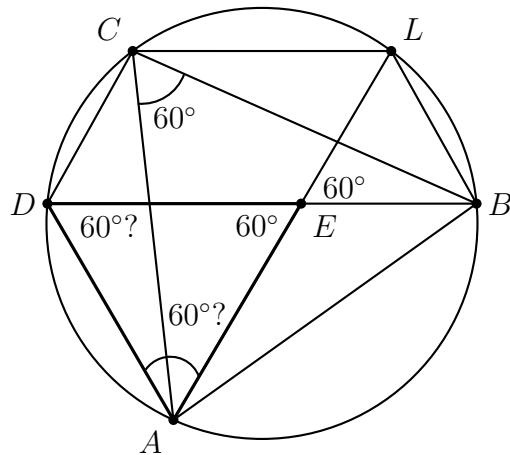
אין לנו מידע על המיתרים המגדירים את המרובע, אך ניתן להוכיח שהוא מקבילית לפי משפט 29 "מרובע שבו כל זוג זוויות גדיות שוות הוא מקבילית". זוויות שוות לפי משפט 72 "במעגל, כל הזוגיות החיקפות הנשענות על מיתר מסוים כב של המיתר שווות זו לזו". נסמן את הזווית של המשולש שווה-צלעות  $\angle ABC = 60^\circ$ .

נניח  $\angle CLA = \angle CBA = \alpha$ .  $\angle CAB = \alpha$ .  $\angle CDB = \angle CAB = \alpha$ .  $\angle CAB$  נישעת על המיתר  $BC$ . נתון  $BD \parallel LC$ , ולכן  $\angle LEB = \angle CLA = \alpha$  לפי זוויות מתחלפות. עכשו נבדוק את הזוג השני  $\angle LED = 180 - \alpha$ .  $\angle LCD = 180 - \alpha$ .  $\angle LED$ ,  $\angle LCD$  משילימות ב- $E$ . נתון  $\angle LCD = 180 - \angle CDB = 180 - \alpha$  ולכן  $BD \parallel LC$ .



### סעיף ב (1)

נסה להוכיח שכל הזווית של המשולש  $\triangle ADE$  שוות. מספיק להוכיח שתי זוויות שוות ל-  $60^\circ$  כי השליישית צריכה להשלים ל-  $180^\circ$ . בסעיף א הוכיחנו ש-  $\angle LEB = 60^\circ$ , ולכן  $\angle LED = 60^\circ$ . על ידי חיפוש קודקודיות. נסה להוכיח ש-  $\angle DAE = \angle DAL = 60^\circ$  או  $\angle ADE = \angle ADB = 60^\circ$  או  $\angle DAE = \angle ADB = 60^\circ$  או  $\angle ADE = \angle ACB$ . אולם  $\angle ADB$ ,  $\angle ACB$  נשענות על המיתר  $AB$ .



### סעיף ב (2)

מהחלק הראשון של הסעיף אנו יודעים ש- $\triangle ADE$  שווה-צלעות,  $AE = DE$  ו- $LC = DE$ . כי חן צלעות נגדיות של המקבילות. לכן  $AE = LC$ .

$$LA - LC = (LE + AE) - LC = (LE + LC) - LC = LE.$$

נשאר להוכיח  $LE = LB$ ,  $\angle LBE = 60^\circ$ ,  $\angle LEB = 60^\circ$ , כך שגם נוכיח שאחת מ- $\angle LEB = \angle LBE = \angle BLA = 60^\circ$  קיבל מושלוש שווה-צלעות. שוב נחפש זוויות הנשענות על אותו מיתר ונקבל  $\angle BCA = 60^\circ$  כי שתין נשענות על המיתר  $AB$ .  
תוך Ci נסינוות לפטור את השאלה, מצאתי הוכחה אחרת מענית.  
אבל **מצדדים נגידים**. זווית היקפית שנשענת על קשת שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת (משפט 69), ולכן אם סכום שתי הקשתות הוא כל המעגל, סכום הזוויות שווה  $180^\circ$ . במקבילית,  $\angle DCL = 120^\circ$ , ולכן:

$$\angle LBE = \angle LBD = 180^\circ - \angle DCL = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

## המלצות: גיאומטריה

- חשוב לציר תרשימים ברורים וגדולים, עדיף עם סרגל ומחוגה. בתחילת הפתרון אנו מסמנים את המידע המctrבר על הזווית והצלעות ויש לדאוג שהיה מספיק מקום.
- כאשר לשאלת יש מספר סעיפים כדאי לציר תרשימים נפרדים לכל סעיף תוך העמת מידע לא רלוונטי לאותו סעיף.
- אין לסמן על התרשימים. לעיתים, מה שנראה ברור בתרשימים הוא בדיקת מה שעליינו להוכיח. במקרה אי הבאת הוכחה שכל משולש הוא שווה-שוקיים (!), כאשר ההוכחה משתמשת על תרשימים שאין נספח נכוון. מטרת התרשימים היא לחפש קשרים בין זוויות, צלעות, משיקים, וכו', כדי להעלות השערות על דרכים אפשריות להוכחת הטענות.
- אני מעדיף לסמן זוויות עם אותיות יוונית כגון  $\alpha$ , ולא על ידי ציון שלושת הנקודות המגדירות אותה  $ABC$ . הסיבה היא שקשה יותר לעקוב אחר הנקודות השונות של הזווית מלעקב אחר סימן בודד.
- יש משפטים שזכירים בקלות כי הם דיאינטואטיביים, למשל, שימושים חופפים לפי צ.צ.צ. וזרמים לפי צ.צ. יש משפטיים אחרים שקשה יותר לזכור אותם ושהוכחת נכונותם לא קללה. למשל, אני מתנסה לזכור איך להפעיל את המשפט על משיק ומיתר. במקרהubi ב' הבאת תרשימים צבעוניים של מבחר משפטיים בתקווה שהתרשימים יקלו לזכור אותם, בזדאי יחסית ליסוחים מיולליים מסובבים.
- כאשר שואלים על שטחים של משולשים יש לחפש גבהים משותפים. אנו רגילים לראות גבהים שיורדים מנקודת לקו אופקי, אבל גבהים יכולים להופיע מכל נקודת לקו ממול ללא קשר למציג של המשולש על הנייר.
- כדי להוכיח חפיפה של משולשים יש-זווית, מספיק להוכיח שוויון של צלע אחת וזוויות חדה אחת מכל משולש. אם הצלע היא בין זוויות חדה לבין הזווית הישרה, החפיפה היא מיידית לפי צ.צ.צ. אם הצלע היא בין שתי הזווית חדות (היתר), זוית שערכה  $\alpha$  ושנייה שערכה  $\beta$ , אז  $\alpha - \beta = 90^\circ$ , ושוב יש צ.צ.צ. אני מנה שבחינה צריך לרשום איך מגיעים מזוויות חדה וצלע זו.צ.צ., אבל כאשר מחפשים הוכחה לחפיפה קיצור דרך זה יכול להועיל.



## פרק 5 טריגונומטריה

### 5.1 קיז תשע"ח מועד ב

ABC הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = AC$ ). BD הוא חוצה זווית במשולש ABC המשר הקטע BD חותך את המרגל החוסם את המשולש ABC בנקודה E. גודל הזווית ABC הוא  $2\beta$ .  
הבע באמצעות  $\beta$  את  $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$ , היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש ADE. אין צורך לפשט את הביטוי שקיבלה.

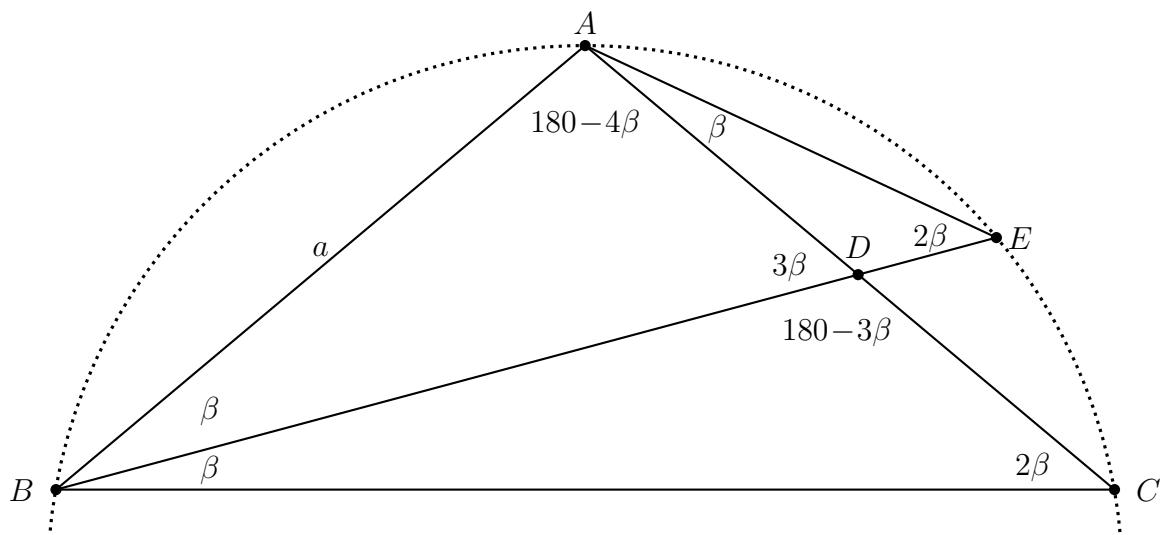
נתון: BE שווה באורכו לרדיוס המרגל החוסם את המשולש ABC.

ב. חשב את היחס  $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$ .

נסמן ב-  $a$  את אורך השוק AB.  
הבע באמצעות  $a$  את רדיוס המרגל החסום על ידי המשולש ABC.

בתשובה תירחש ששתי ספרות אחרי הנקודה העשורה.

להלן תרשימים עם הזוויות הנתונות ב-  $B, C$ , ולאחר חישוב הזוויות האחרות לפי סכום של זוויות במשולש וזרויות משילימות. כי הן נשענות על אותן קשתות  $EC, AB$ .



## סעיף א

$\triangle ABC$  משולש שוקיים ולפי הנוסחה הטריגונומטרית לשטח של משולש :

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin(180 - 4\beta) = \frac{a^2}{2} \sin 4\beta.$$

כדי שהיחס יהיה ביטוי ב- $\beta$  בלבד, علينا למצוא ביטוי ל- $S_{\triangle ADE}$  כך ש- $a^2$  יצטמצם. ב- $\triangle ABE$  ו- $\triangle ABD$  צלע אחת שווה  $a$  וצלע שנייה היא באורך  $AD$  ו- $AE$ . לפי חוק הסינוסים :

$$\begin{aligned} \frac{AE}{\sin \beta} &= \frac{a}{\sin 2\beta} \\ AE &= \frac{a \sin \beta}{\sin 2\beta} \\ \frac{AD}{\sin \beta} &= \frac{a}{\sin 3\beta} \\ AD &= \frac{a \sin \beta}{\sin 3\beta} \\ S_{\triangle ADE} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a \sin \beta}{\sin 2\beta} \cdot \frac{a \sin \beta}{\sin 3\beta} \cdot \sin \beta \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin^3 \beta}{\sin 2\beta \sin 3\beta} \\ \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} &= \frac{\sin 4\beta \sin 2\beta \sin 3\beta}{\sin^3 \beta}. \end{aligned}$$

הוכחה אחרת : לחשב  $AE$  או  $AD$ , ולהשתמש בחוק הסינוסים על  $\triangle ADE$  כדי לחשב את השני.

## סעיף ב

נשתמש בחוק הסינוסים על  $\triangle ABE$  עם צלע  $R = BE$ ,  $BE$  ו- $AB$  הרדיאוס יצטמצם :

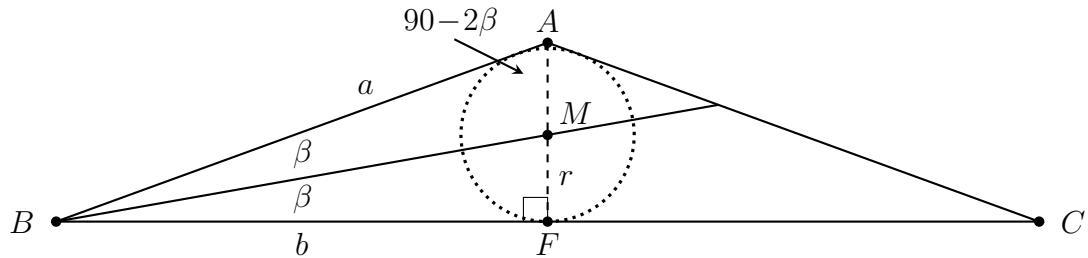
$$\begin{aligned} 2R &= \frac{BE}{\sin(180 - 4\beta + \beta)} = \frac{BE}{\sin 3\beta} = \frac{R}{\sin 3\beta} \\ 2 \sin 3\beta &= 1 \\ 3\beta &= 30^\circ \\ \beta &= 10^\circ. \end{aligned}$$

נכון שוגם  $\sin 3 \cdot 50 = \frac{1}{2}$ , אבל לא ניתן של משולש שתי זוויות של 100 מעלות. עם ערכו של  $\beta$  נוכל לחשב את יחס השטחים :

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{\sin 4\beta \sin 2\beta \sin 3\beta}{\sin^3 \beta} = \frac{\sin 40 \sin 20 \sin 30}{\sin^3 10} = 20.99^\circ.$$

## סעיף ג

לפי משפט 6 "במשולש שווה-שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מותלדים", כך שחותם הזווית  $\angle BAC$  ניצב ל- $BC$  בנקודה  $F$ . לפי משפט 49 "שלושת חוצי הזווית של משולש נחוצים בנקודה אחת, שהיא מרכזו המוגול החסום במשולש", הנקודה המסוימת  $M$  בתרשים היא מרכזו המוגול החסום.

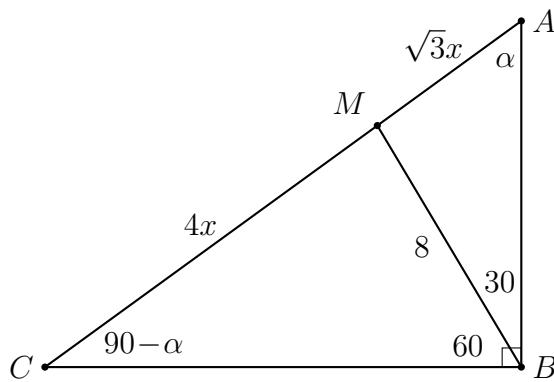


נשאר רק להשתמש בהגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות. ב- $\triangle ABF$ :

$$\begin{aligned}
 \sin(90 - 2\beta) &= \frac{b}{a} \\
 b &= a \cos 2\beta. \\
 \tan \beta &= \frac{r}{b} \\
 r &= a \cos 2\beta \tan \beta \\
 &= a \cos 20 \tan 10 = 0.1657a.
 \end{aligned}$$

## 5.2 קיז' תשע"ח מועד א

- .  $\triangle ABC$  הוא משולש ישר זווית ( $\angle ABC = 90^\circ$ ).  
 $M$  היא נקודה על היתר  $CB$  ש-  
 נתון:  $AM : MC = \sqrt{3} : 4$ ,  $BM = 8$ ,  $\angle ABM = 30^\circ$   
 סמן:  $x$  ו- $MC = 4x$  וחשב את זווית המשולש  $ABC$ . (1).  
 חשב את הרדיוסים של המעגלים החוסמים את המשולשים  $ABM$  ו- $CMB$ . (2)  
**ב.** נסמן את מרכזי המעגלים החוסמים את המשולשים  $ABM$  ו- $CMB$  ב- $O_1$  ו- $O_2$  בהתאם.  
 (1) הסבר מדוע המרובע  $BO_1MO_2$  הוא דלתון.  
 (2) חשב את אורך הקטע  $O_1O_2$ .



### סעיף א

(1) נסמן  $\alpha$  זווית ידועה אחת, וזוית שנייה עם הנעלם  $x$ , זווית ידועה אחת, וזוית שנייה עם הנעלם  $\alpha$ . מחוק הסינוסים קיבל שתי משוואות עם שני הנעלמים שאפשר לפתור כדי לקבל משווהה אחת עם הנעלם  $\alpha$  בלבד:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}x}{\sin 30} &= \frac{8}{\sin \alpha} \\ x &= \frac{8 \sin 30}{\sqrt{3} \sin \alpha} = \frac{4}{\sqrt{3} \sin \alpha} \\ \frac{4x}{\sin 60} &= \frac{8}{\sin(90-\alpha)} \\ x &= \frac{8 \sin 60}{4 \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\cos \alpha} \\ \tan \alpha &= \frac{4}{\sqrt{3} \sqrt{3}} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

чисוב עם מחשבון נותן  $\angle BCA = 90 - \alpha \approx 36.87$ , ולא נשכח לרשום גם  $\angle BAC = \alpha \approx 53.13$

(2) נחשב  $\sin 53.13 \approx 0.8$ ,  $\cos 53.13 \approx 0.6$ . אפשר לקבל ערכים רצינליים על ידי שימוש בנוסחאות (שאין נמצאות בנוסחאות:)

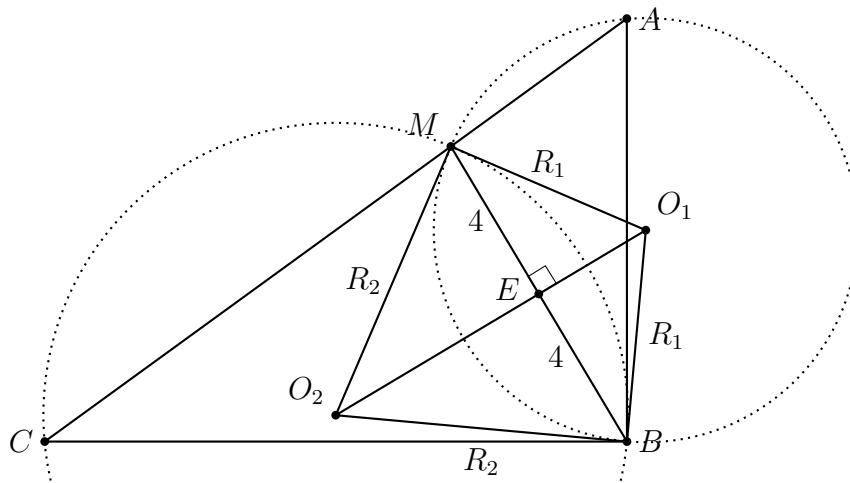
$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{4/3}{\sqrt{1 + (4/3)^2}} = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (4/3)^2}} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

נשתמש בחוק הסינוסים עבור  $\triangle CMB, \triangle ABM$

$$\begin{aligned}2R_1 &= \frac{8}{\sin \alpha}, & R_1 &= 4 \cdot \frac{5}{4} = 5 \\ 2R_2 &= \frac{8}{\sin(90-\alpha)}, & R_2 &= 4 \cdot \frac{5}{3} = 20/3.\end{aligned}$$

### סעיף ב

(1)  $O_1M = O_2B$  כי הם רדיוסים של המעגל החוסם את  $\triangle ABM$ ,  $O_2M = O_1B$  כי הם רדיוסים של המעגל החוסם את  $\triangle CBM$ . לפי ההגדרה מרובע עם שני זוגות של צלעות שכנות שווות הוא דלתון.

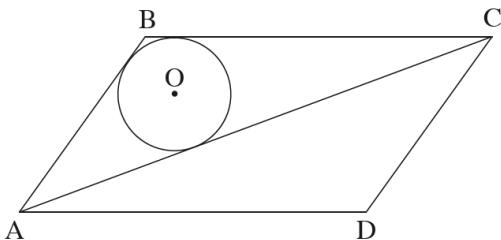


(2) לפי משפט 21 "האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון השני ומאונך לו". מכאן  $\angle MEO_1 = \angle MEO_2 = 90^\circ$ . נתון  $ME = EB = 4$  ולכן  $MB = 8$ . לפי משפט פיתגורס:

$$\begin{aligned}O_1O_2 &= O_1E + O_2E = \sqrt{R_1^2 - 16} + \sqrt{R_2^2 - 16} \\ &= \sqrt{5^2 - 16} + \sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2 - 16} = 3 + \frac{16}{3} = \frac{25}{3}.\end{aligned}$$

### 5.3 חורף תשע"ח

נתונה מקבילית  $ABCD$ .  $AC$  הוא האלכסון הארוך, כמפורט בציור.



במשולש  $ABC$  חסום מעגל שמרכזו  $O$ .

נתון: הנקודה  $O$  נמצאת במרוחקים 6 ו- 3

מן היסרים  $AD$  ו-  $AC$  בהתאם;

$$OA = 10$$

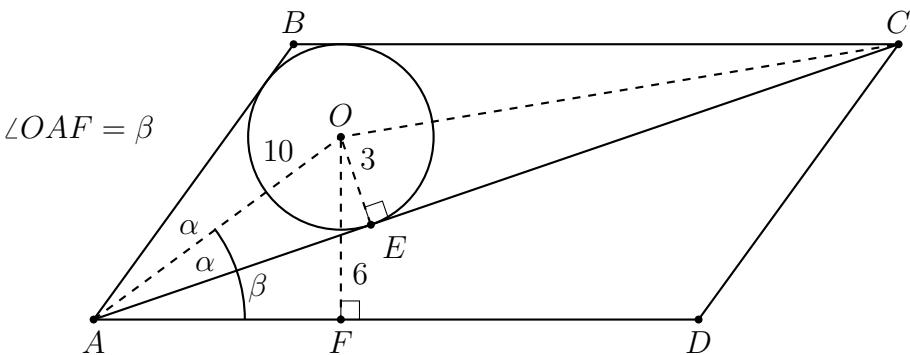
a. חשב את גודלי זוויות המקבילית.

b. חשב את אורך האלכסון  $AC$ .

c. חשב את שטח המקבילית.

הן נקודות המפגש של האנכים מ- $O$  עם  $AC, AD$  עם  $E, F$ . לפי משפט 49 "שלושת חוצי הזווית של משולש מתחכמים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש",  $AO, CO$ ,  $AO, CO$  הם חוצי הזווית  $\angle BAC = \angle BCD$ . ניסיתי לפרט את השאלה הנוכח שאלכסון של מקבילית חוצה את הזווית  $\angle BAC = \angle BCD$ . כמובן שהן רק עבר מעין.

במשולשים ישר-זווית  $\alpha = \angle OAE, \beta = \angle OAF$  נסמן את הזווית  $\triangle AOE, \triangle AOF$



#### סעיף א

לפי התרשימים  $\alpha, \beta$  מהפונקציות הטריגונומטריות במשולשים ישר-זווית:

$$\sin \alpha = 3/10, \quad \alpha = 17.46$$

$$\sin \beta = 6/10, \quad \beta = 36.87$$

$$\angle BCD = \angle BAD = \alpha + \beta = 54.33$$

$$\angle ABC = \angle ADC = \frac{360 - 2(\alpha + \beta)}{2} = 125.67.$$

## סעיף ב

האלכסון  $AC$  הוא צלע של  $\triangle ABC$  והזווית שלו ידועים, אבל אי-אפשר להשתמש בחוק הסינוסים כי אורכי הצלעות לא ידועים. מהתרשים רואים שהאלכסון מורכב משני קטעי קו  $AE, EC$  שהם צלעות של משולשים ישר-זווית  $\triangle AOE, \triangle COE$ . מתקבל ממשפט פיתגורס :

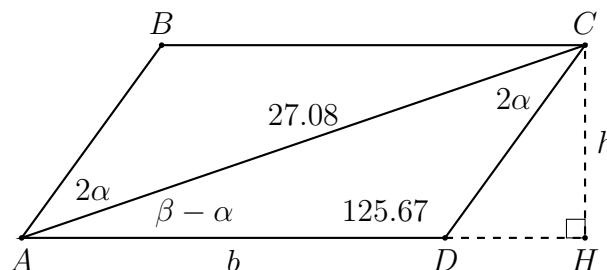
$$AE = \sqrt{10^2 - 3^2} = 9.54.$$

נשתמש בחוק הסינוסים ב- $\triangle COE$  (ונימנע מהפיתוגו לקבע ש- $\angle OCE = \alpha$ ). לפי זוויות מתחלפות  $\angle OCE = \alpha$  ו- $\angle COE = 180 - 90 - \angle OCE = 90 - \alpha$ . נזכיר זווית ונקבל :

$$\begin{aligned}\angle OCE &= \frac{\angle BCA}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{36.87 - 17.46}{2} = 9.71 \\ \angle COE &= 180 - 90 - \angle OCE = 80.29 \\ \frac{EC}{\sin 80.29} &= \frac{3}{\sin 9.71} \\ EC &= 17.54 \\ AC = AE + EC &= 9.54 + 17.54 = 27.08.\end{aligned}$$

## סעיף ג

שטח של מקבילית הוא הבסיס כפול הגובה :



$$\begin{aligned}\frac{b}{\sin 2\alpha} &= \frac{b}{\sin 34.92} = \frac{27.08}{\sin 125.67} \\ b &= 19.08 \\ \sin(\beta - \alpha) &= \sin 19.41 = \frac{h}{27.08} \\ h &= 9 \\ S_{ABCD} = bh &= 171.71.\end{aligned}$$

אפשרות אחרת היא לחשב את  $AB$  לפי חוק הסינוסים, ולהכפיל  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AB \sin \angle BAC$ , בשניים.

## 5.4 קייז תשע"ז מועד ב

.(AB || DC) הוא טרפז חסום במעגל ABCD

.(a < b) CD = b , AB = a

$$\angle C = 60^\circ$$

.א. הביע את שוקרי הטרפז, BC ו- AD , באמצעות a ו- b .

.נתון: a = 4 , אורך האלכסון BD הוא  $4\sqrt{7}$  .

.ב. חשב את b .

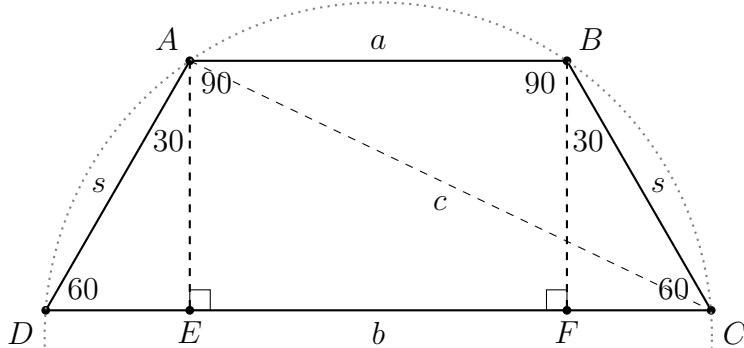
.ג. (1) R הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצא את R .

.(2) הסבר מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD

.(3) r הוא רדיוס המעגל החוסם בטרפז. מצא את r .

### סעיף א

לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-180," ולכן  $\angle DAB = 120$  . נוריד גבהים מ- CD ו- AB החותכים אותם ב- E,F .  $\triangle AED \cong \triangle BFC$  .  
בתרשים השלמנו את הזווית במשולשים ל-180. לפי משפט 40 "טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זווית הוא טרפז שווה-שוקיים", ולכן ABCD שווה-שוקיים .



. $\triangle AED \cong \triangle BFC$  . מכאן :  $AE = BF$

$$\cos 60 = \frac{(b-a)/2}{s} = \frac{1}{2}$$

.פתרון אחר משתמש בחוק הקוסינוסים  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta$  . נסמן ב- c את אורך האלכסון AC .

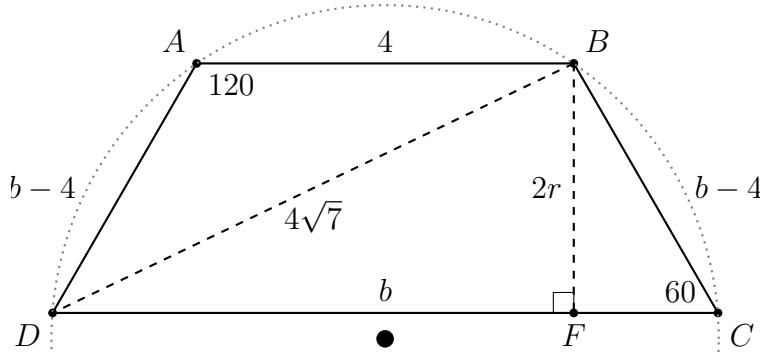
$$\begin{aligned} c^2 &= s^2 + b^2 - 2sb \cos 60 \\ &= s^2 - sb + b^2 \\ c^2 &= s^2 + a^2 - 2sa \cos 120 \\ &= s^2 + sa + a^2 \end{aligned}$$

. $s = b - a$  , והפתרון הוא

## סעיף ב

שקלתי להשתמש בחוק הסינוסים במשולש  $\triangle ADB$  : פעם אחת לחשב את  $\angle ADB$  ופעם שנייה לחשב את  $s = b - a = b - 4$ -ים ש- $\triangle ADB$  כ- $\triangle ADB$  כי אנו יודעים :

$$\begin{aligned} (4\sqrt{7})^2 &= 4^2 + (b-4)^2 - 2 \cdot 4 \cdot (b-4) \cdot \cos 120 \\ b^2 - 4b - 96 &= (b-12)(b+8) = 0 \\ b &= 12. \end{aligned}$$



## סעיף ג

(1) שימו לב שהאלכסון  $BD$  הוא לא הקוטר של המעגל החוסם שמסומן בנקודת השחורה הגדולה. לפיה חוק הסינוסים ב- $\triangle ADB$  :

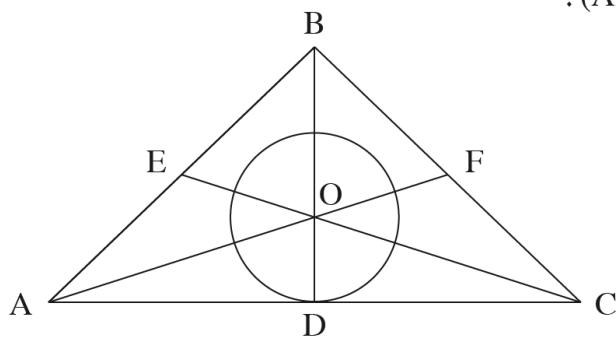
$$R = \frac{4\sqrt{7}}{2 \sin 120} = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = 6.11.$$

(2) לפי משפט 57, "מרובע קמור חוסם מעגל אם ורק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות" :

$$\begin{aligned} a + b &\stackrel{?}{=} s + s \\ a + b &\stackrel{?}{=} (b-a) + (b-a) \\ 3a &\stackrel{?}{=} b \\ 3 \cdot 4 &= 12. \\ : BF = 2r & \text{ הם משיקים מקבילים למעגל החסום, ולכן } AB, CD \text{ (3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 60 &= \frac{2r}{s} = \frac{2r}{b-a} = \frac{2r}{8} \\ r &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 = 2\sqrt{3} = 3.464. \end{aligned}$$

## 5.5 קייז תשע"ז מועד א



. (AB = BC) הוא משולש שווה שוקיים ABC

ור' BD CE, AF הנחיתכים בנקודה O (ראה ציור).

.  $S_{\triangle BOE} = S_{\triangle COD}$  א. הוכח:

מעגל שמרכזו O משיק לצלע AC בנקודה D.

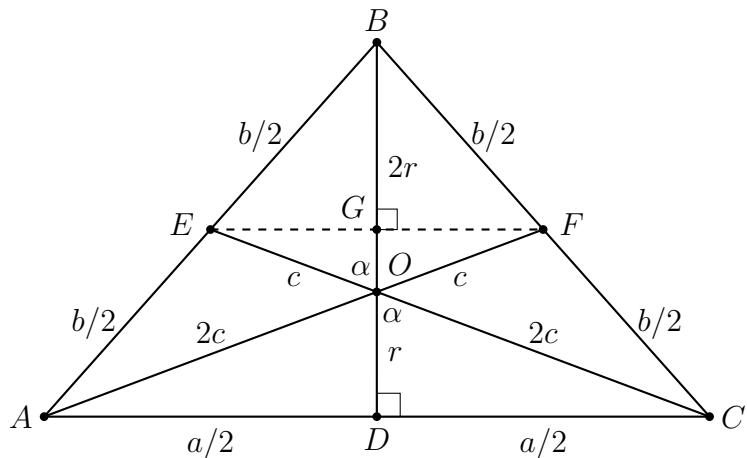
. נתון כי שטח העיגול שווה לשטח המשולש AOC.

ב. חשב את גודל הזווית ACE.

ג. הביע את אורך הקטע OE באמצעות רדיוס המעגל.

### סעיף א

נסמן אורכי צלעות בתרשים לפי  $\triangle ABC$  תיכונים, ומשפט 46 "נקודות חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס 1:2". כמו כן, כי  $\triangle ACF \cong \triangle ACE$  כי  $AF = CE$ ,  $\angle CAE = \angle ACF$  משותף, זווית  $\angle CAE = \angle ACF$  משותף,  $AC = a$



$BG$  גם הוא שווה-שוקיים, ולכן,  $\triangle EBF \sim \triangle ABC$  לפי צ.ג.צ., ולכן  $EG = \frac{EF}{2} = \frac{a}{4}$  והוא תיכון של  $\triangle EBF$ .

$$S_{\triangle BOE} = \frac{1}{2} \cdot EG \cdot BO = \frac{ar}{4}$$

$$S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} \cdot OD \cdot DC = \frac{ar}{4}.$$

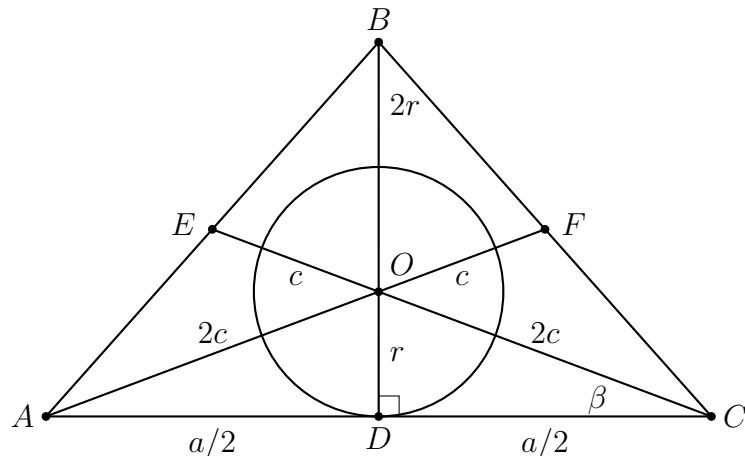
פתרון אחר מתקבל מהנוסחה הטריגונומטרית לשטח עם הזווית הקודקודיות  $\alpha$ :

$$S_{\triangle BOE} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot c \cdot \sin \alpha$$

$$S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2c \cdot \sin \alpha.$$

**סעיף ב**

נסמן  $\angle ACE = \beta$



נתון:

$$S_O = \pi r^2 = \frac{1}{2}ar = S_{\triangle AOC}$$

$$a = 2\pi r.$$

נציב עבור  $a$  בחישוב הטנגס של  $\beta$ :

$$\tan \beta = \frac{r}{a/2} = \frac{2r}{2\pi r} = \frac{1}{\pi}$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{1}{\pi} = 17.66^\circ.$$

**סעיף ג**

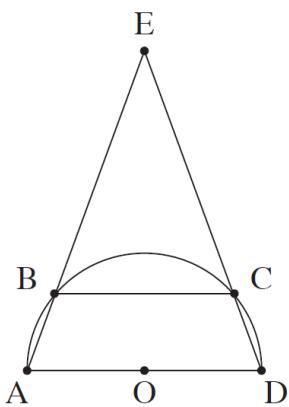
נחשב סינוס של  $\beta$ :

$$\sin \beta = \frac{r}{2c}$$

$$c = \frac{r}{2 \sin \beta}$$

$$= 1.648r.$$

## 5.6 חורף תשע"ז

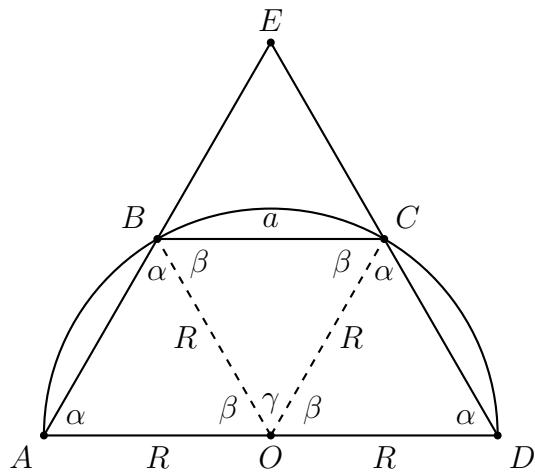


נתון טרפז  $(BC \parallel AD)$   $ABCD$   
החסום בחצי מעגל שמרכזו  $O$  ורדיוסו  $R$   
כך ש-  $AD$  הוא קוטר של חצי המעגל.  
המשכי השוקיים  $AB$  ו-  $DC$  נפגשים  
מחוץ למעגל בנקודה  $E$  (ראה ציור).  
נתון:  $\angle EAD = \alpha$ .

- הבע באמצעות  $R$  ו-  $\alpha$  את אורך הקטע  $.BC$ .
  - מהו התיכון של כל הערכים האפשריים עבור הזווית  $\alpha$ ? נמק.
  - נתון כי שטח משולש  $AED$  גדול פי 9 משטח משולש  $COD$ .
- מהו היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $AED$  לבין  $R$ ?

### סעיף א

$OA = OB = OC = OD = R$  נסמן זוויות לפי:  
 $\angle BAO = \angle ABO = \alpha$   $\triangle ABO$  שווה-שוקיים, ו-  
 $\angle AOB = 180 - 2\alpha$ ,  $\angle COD = 180 - 2\alpha$ , שנסמן  $\beta$ .  
 כדי להשלים זוויות במשולש, ל-  $180 - 2\alpha$ , נקבע  $\angle BOC = 180 - 2\beta$  לפי זוויות מתחלפות.  
 $\angle BCO = \beta$   $\triangle BOC$  שווה-שוקיים.  
 נשלים זוויות של משולש ל-  $180 - 2\beta$  ונקבל  $\angle COD = \beta$  לפי זוויות מתחלפות.  
 $\angle COD = \angle OCD = (180 - \beta)/2 = \alpha$   $\triangle COD$  שווה-שוקיים, ולכן



נחשב  $a = BC$  לפי חוק הסינוסים ולפי חוק הקוסינוסים ב- $\triangle BOC$ , ותחליטו איזו שיטה עדיפה!

לפי חוק הסינוסים :

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin \gamma} &= \frac{R}{\sin \beta} \\ a &= \frac{R \sin(180 - 2\beta)}{\sin \beta} = \frac{R \sin 2\beta}{\sin \beta} \\ &= \frac{R(2 \sin \beta \cos \beta)}{\sin \beta} = 2R \cos \beta = 2R \cos(180 - 2\alpha) \\ &= -2R \cos 2\alpha \end{aligned}$$

לפי חוק הקוסינוסים:

$$\begin{aligned} a^2 &= R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cos \gamma \\ &= 2R^2(1 - \cos(180 - 2\beta)) = 2R^2(1 + \cos 2\beta) \\ &= 2R^2(1 + \cos^2 \beta - \sin^2 \beta) = 2R^2(2 \cos^2 \beta) \\ a &= 2R \cos \beta = 2R \cos(180 - 2\alpha) \\ &= -2R \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

**סעיף ב**

האורך של צלע חייב להיות חיובי  $a = -2R \cos 2\alpha > 0$ , ולכן  $2\alpha < 90^\circ$ .

$$90^\circ < 2\alpha \leq 180^\circ$$

$\alpha \neq 90^\circ$  כי הזווית הבסיס של משולש שווה-שוקיים חייבים להיות פחות מ- $90^\circ$ .

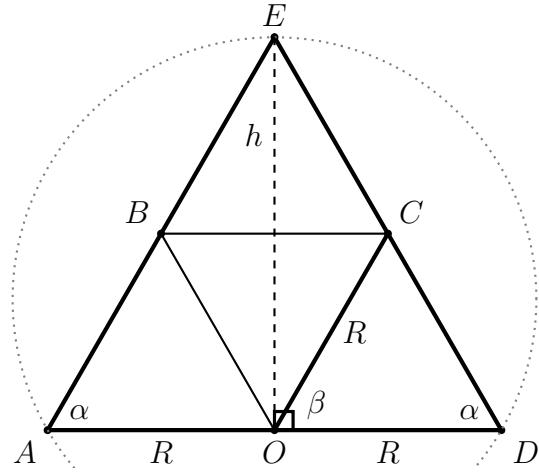
**סעיף ג**

נחשב  $S_{\triangle AED}$  לפי הנוסחה הגיאומטרית. הגובה של  $\triangle AED$  הוא  $h = R \tan \alpha$ :

$$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot h = R^2 \tan \alpha.$$

נחשב  $S_{\triangle COD}$  לפי הנוסחה הטריגונומטרית:

$$\begin{aligned} S_{\triangle COD} &= \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin \beta \\ &= \frac{1}{2} R^2 \sin(180 - 2\alpha) = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha. \end{aligned}$$



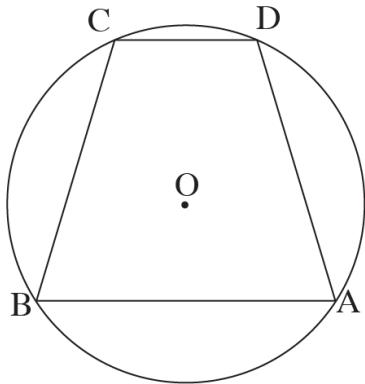
לפי היחס נתון בין השטחים :

$$\begin{aligned}
 R^2 \tan \alpha &= 9 \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha \\
 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha \\
 \cos \alpha &= \frac{1}{3} \\
 \sin \alpha &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.
 \end{aligned}$$

נשתמש בחוק הסינוסים כדי לחשב  $r$ , הרדיוס של המगעל שחותם  $\triangle AED$

$$\begin{aligned}
 2r &= \frac{DE}{\sin \alpha} \\
 \cos \alpha &= \frac{R}{DE} \\
 \frac{r}{R} &= \frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \\
 &= \frac{1}{2(2\sqrt{2}/3)(1/3)} = \frac{9}{4\sqrt{2}} = 1.591.
 \end{aligned}$$

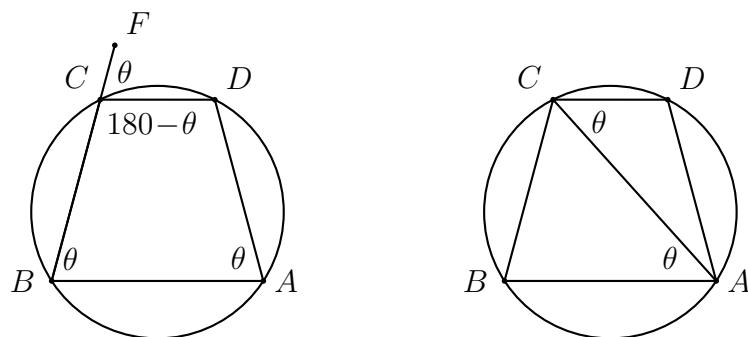
## 5.7 קיז תשע"ו מועד ב



- . במעגל חסום טרפז  $ABCD$  ( $AB \parallel DC$ ) מרכז המעגל  $O$  בתור הטרפז (ראה ציור).
- . רדיוס המעגל הוא  $R$  וגובה הטרפז הוא  $h$ .
- . נתון:  $\angle BOA = 3\alpha$ ,  $\angle COD = \alpha$ .
- . א. הביע באמצעות  $\alpha$  את  $\angle DAB$ .
- . ב. הביע את האורך של שוק הטרפז באמצעות  $\alpha$  ו-  $R$ .
- . ג. הביע את האורך של שוק הטרפז באמצעות  $\alpha$  ו-  $h$ .
- . ד. נתון כי שטח המשולש  $COD$  הוא  $\frac{h^2}{12 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ . מצא את  $\alpha$ .

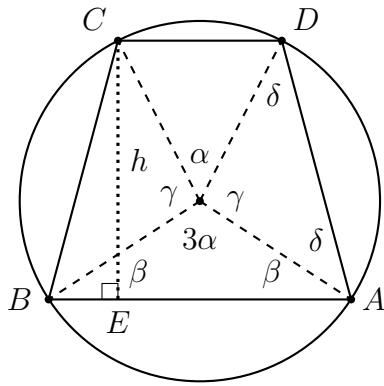
מהתרשים נראה שהטרפז שווה-שוקיים, אבל אין לסמוק על תרשימים. לקח לי זמן רב עד שעלה בדעתי שטרפז חסום במעגל **חייב** להיות שווה-שוקיים, משפט לא מופיע ברשימה המשפטים לבגרות. בספרי לימוד המשפט לא מובלט ומופיע רק כדוגמה או תרגיל. אני אביא שתי הוכחות: אחת שלי ואחת המופיע בספרים.

- (1) :  $\angle CAB = \angle ACD = \angle ACB$  לפי זווית מתחלפת ולכן גם המיתרים הכלואים שווים  $CB = AD$
- (2) : לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180^\circ$ ". נסמן  $\angle DCB = \theta$ ,  $\angle DAB = \theta$ ,  $\angle ABC = \theta$  ו-  $\angle DCF = \angle ACF = 180 - \theta$ . לפי משפט 40 "טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה-שוקיים".



### סעיף א

באربעת המשולשים עם קודקוד  $O$ , הצלעות המקווקות הם רדיוסים, כך שהמשולשים שווה-שוקיים.  $\triangle COB \cong \triangle DOA$  לפי צ.צ.צ. כי הטרפז שווה-שוקיים. מכיוון ש-  $\angle COB = \angle DOA$ , ונitin לסמנו את הזוויות לפי החישובים מימין לתרשים. החישוב של  $\gamma$  מוכיח כי סכום הזוויות סביב נקודה הוא 360. השורה الأخيرة מציגה את התשובה לשאלת כי  $\angle DAB = \beta + \delta$ .



$$\begin{aligned}\beta &= \frac{180-3\alpha}{2} \\ \gamma &= \frac{360-(\alpha+3\alpha)}{2} = 180-2\alpha \\ \delta &= \frac{180-\gamma}{2} = \frac{180-(180-2\alpha)}{2} = \alpha \\ \beta+\delta &= \frac{180-\alpha}{2}.\end{aligned}$$

**סעיף ב**

כדי חשב אורך של שוק נחפש משולש משולש שאחת מצלעתיו היא  $DA$ . לפי חוק בסינוסים ב- $\triangle DOA$ :

$$\begin{aligned}\frac{DA}{\sin \gamma} &= \frac{R}{\sin \delta} \\ \frac{DA}{\sin(180-2\alpha)} &= \frac{R}{\sin \alpha} \\ DA &= \frac{R \sin 2\alpha}{\sin \alpha} \\ &= \frac{R \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2R \cos \alpha.\end{aligned}$$

**סעיף ג**

בתרשים בנוינו את הגובה מהנקודה  $C$  כדי לא להסתיר את הסימונים ב- $\triangle DOA$ :  $CB = DA$ .  $\triangle DOA$  הוא גם שוק. נשתמש בהגדרה של סינוס במשולש  $\triangle CBE$ :

$$\frac{h}{CB} = \sin \angle CBE = \sin \left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$CB = \frac{h}{\cos(\alpha/2)}. \text{ התשובה היא } \angle CBE = \angle DAB = \beta + \delta$$

**סעיף ד**

בנוסחה הטריגונומטרית עבור  $S_{\triangle COD}$  יופיעו אורךי הצלעות  $R$  והזווית  $\alpha$ . אנו רוצחים נוסחה עם  $h$  ו- $\alpha$  כדי להשווות לביטוי הנטון. נשווה את הביטויים עבור שוקי הטרפו מהתוצאות הקודמיה:

$$\begin{aligned}2R \cos \alpha &= \frac{h}{\cos(\alpha/2)} \\ R &= \frac{h}{2 \cos \alpha \cos(\alpha/2)}.\end{aligned}$$

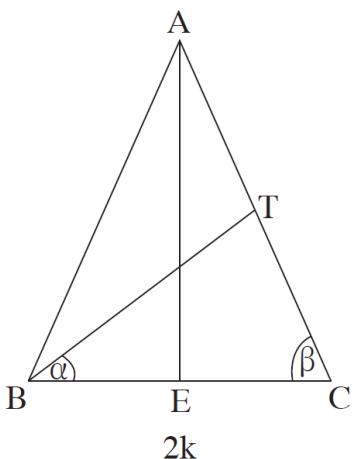
נzieיב בנוסחה לשטח, נשווה לנוסחה הנתונה לשטח ונמצא :

$$\begin{aligned}
 \frac{h^2}{12 \cos^2(\alpha/2)} &= \frac{1}{2} \cdot OC \cdot OD \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{4} \cdot \frac{1}{(\cos \alpha \cos(\alpha/2))^2} \cdot \sin \alpha \\
 \frac{1}{12} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - \sin^2 \alpha} \cdot \sin \alpha \\
 2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha - 2 &= (2 \sin \alpha - 1)(\sin \alpha + 2) = 0.
 \end{aligned}$$

נבחר את השורש  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$  כי הערך של סינוס לא יכול להיות  $-2$ .

הערך היחיד ש- $\alpha$  יכול לקבל הוא  $30^\circ$  כי זוויות הבסיס של טרפז חייבים להיות פחות מ- $90^\circ$ .

## 5.8 קיז' תשע"ו מועד א



נתון משולש שווה-שוקיים ABC . ( $AB = AC$ )

$AE$  הוא גובה לבסיס  $BC$

ור-  $BT$  הוא תיכון לשוק  $AC$  (ראה ציור).

נתון:  $BC = 2k$  ,  $\angle TBC = \alpha$  ,  $\angle ACB = \beta$

(1) הבע את האורך של  $TC$  באמצעות  $k$  ו-  $\beta$  בלבד.

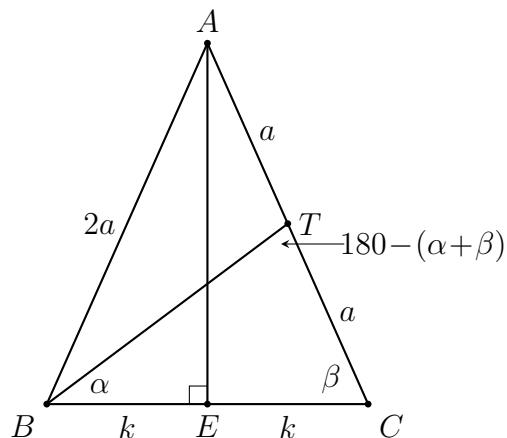
(2) היעזר בתת-סעיף (1), והראה כי

$$\sin(\alpha + \beta) = 4 \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

נתון גם:  $5 \text{ ס"מ} = 4 \text{ ס"מ}$  ,  $TE = ?$

(1) מצא את  $\beta$  .

(2) מצא את  $\alpha$  .



:  $\triangle AEC$  ב-הגדלת הקוסינוס (1)

$$\cos \beta = \frac{k}{2a}$$

$$TC = a = \frac{k}{2 \cos \beta}.$$

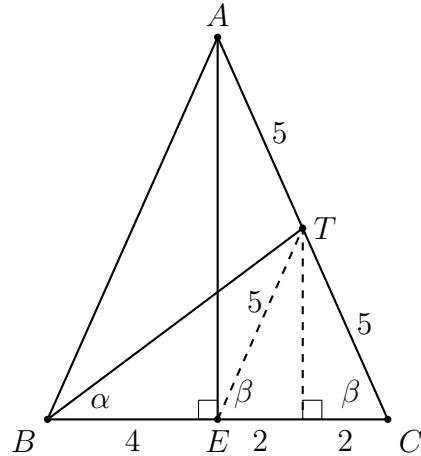
: נחפש משולש עבورو חוק הסינוסים ייתן משווה בה יצטמצם  $k$  או  $a$ . מתחאים  $\triangle TBC$  :

$$\frac{2k}{\sin(180 - (\alpha + \beta))} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$\frac{2k}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{k / (2 \cos \beta)}{\sin \alpha}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = 4 \sin \alpha \cos \beta .$$

(1) נסיף את אורך הצלעות הנתונות לתרשים ונשתמש במשפט 86 "במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר" כדי להסביר ש-

$$TE = \frac{1}{2}AC = 5$$


נוריד גובה מ- $T$  שהוא אכן אמצעי במשולש שווה-שוקיים  $\triangle ETC$  ונקבל:

$$\cos \beta = \frac{2}{5}$$

$$\beta = 66.4^\circ. \quad \text{(2) לפי סעיף (1) וסעיף (2) הקודם :}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = 4 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = 4 \sin \alpha \cos \beta$$

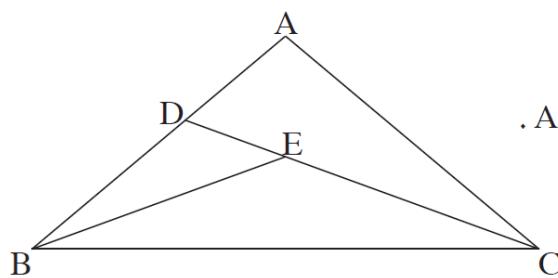
$$(\sin \alpha) \cdot \frac{2}{5} + \cos \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = 4 \cdot (\sin \alpha) \cdot \frac{2}{5}$$

$$\sqrt{21} \cos \alpha = 6 \sin \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{21}}{6}$$

$$\alpha = 37.37^\circ.$$

## 5.9 חורף תשע"ו



במשולש שווה-שוקיים  $(AB = AC)$   $\triangle ABC$  זווית הבסיס היא  $2\alpha$ .

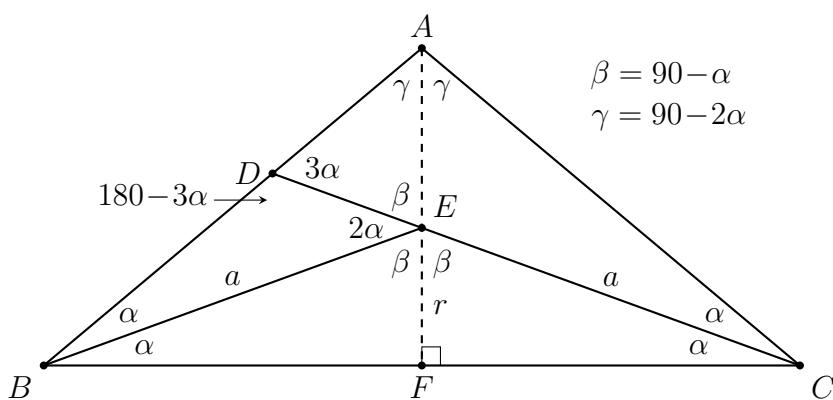
הנקודה  $E$  היא מפגש חוץ-הזווית במשולש  $\triangle ABC$  המשך  $CE$  חותך את הצלע  $AB$  בנקודה  $D$  (ראה ציור).

נתון:  $\angle BAC > 90^\circ$ ,  $\frac{EC}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \alpha}$ .  
א. מצא את  $\alpha$ .

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $\triangle ABC$  ובין רדיוס המעגל חטסום במשולש  $\triangle ABC$ .

ג. נתון כי ההפרש בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $\triangle ABC$  ובין רדיוס המעגל חטסום במשולש  $\triangle ABC$  הוא 2 ס"מ.  
מצא את אורך הקטע  $AE$ .

לפי משפט 6 "במשולש שווה-שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים", ולכן חוצה הזווית  $\angle BAC$  וובר דרכו  $E$  וחוצה את  $BC$  בזווית ישרה. נסמן זוויות:  
 $\angle BEF = \angle CEF = 90 - \alpha$  ולכן  $\angle FEC = 90 - 2\alpha$ .  
 $\angle BAF = \angle CAF = 90 - \alpha$  ולכן  $\angle AFB = \angle AFC = 90 - 2\alpha$ .  
 $\angle ADE = 180 - \beta - \gamma = 3\alpha - \beta$  ולפי זווית קודקודיות,  $\angle AED = \beta$   
 $\angle BDE = 180 - 3\alpha$  לפי זווית משלימות.



### סעיף א

נתון היחס  $\frac{EC}{DE} = \frac{r}{2r}$  כתלות ב- $\alpha$ , ולכן נחפש משלוש שעבורו חוק הסינוסים ייתן יחס אחר כתלות ב- $\alpha$ :  $\triangle BDE \sim \triangle EFC$  לפי צ.ז.צ.  $EB = EC$

$$\begin{aligned}
 \frac{EB}{\sin(180-3\alpha)} &= \frac{DE}{\sin \alpha} \\
 \frac{EB}{DE} &= \frac{\sin(180-3\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \alpha} \\
 \sin 3\alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

הפתרונות הם  $\angle BAC = 20^\circ, \alpha = 40^\circ$ , אבל נבחר  $\alpha = 20^\circ, \alpha = 20^\circ, \alpha = 40^\circ$ , כי אם  $\angle BAC > 90^\circ$ .

#### סעיף ב

לפי משפט 49 "שלושת חוצי הזווית של משולש נתdados אחת, שהוא מרכז המעגל החסום במשולש",  $E$  היא מרכז המעגל החסום שמשיק לצלע המשולש ב- $F$ , ו- $r = EF = r$  הוא הרדיוס. לצורך זה נשתמש בחוק הסינוסים על המשולש  $\triangle ABC$ . נבחר את הזווית  $\angle BAC = 180 - 4\alpha$ :

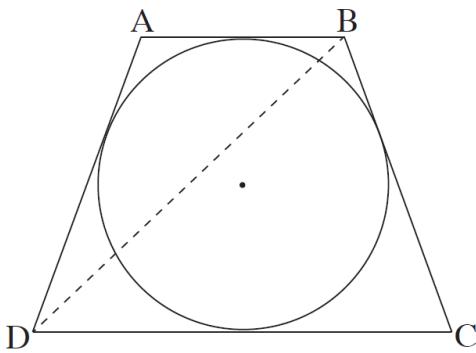
$$\begin{aligned}
 \tan \alpha &= \frac{r}{BF} = \frac{r}{BC/2} \\
 2R &= \frac{BC}{\sin(180-4\alpha)} = \frac{2r}{\sin 4\alpha \tan \alpha} \\
 \frac{R}{r} &= \frac{1}{\sin 4\alpha \cdot \tan \alpha} = \frac{1}{\sin 80 \cdot \tan 20} = 2.79.
 \end{aligned}$$

#### סעיף ג

נתון  $r = 2/(2.79 - 1) = 1.117$ . נציב  $R = 2.79r$ , ונקבל  $R - r = 2$ . נחישבנו בסעיף ב, ולכן  $AF = AE + EF = AE + r$ ,  $\triangle AED$  מופיע על המשולש  $ABC$ , ולכן מופיע על המשולש  $AED$ , ולכן  $\angle AED = 180 - 4\alpha$ .

$$\begin{aligned}
 \tan 2\alpha &= \frac{AF}{BF} = \frac{AE + r}{r / \tan \alpha} \\
 AE &= \frac{r(\tan 2\alpha - \tan \alpha)}{\tan \alpha} \\
 &= \frac{1.117(\tan 40 - \tan 20)}{\tan 20} = 1.458.
 \end{aligned}$$

## 5.10 קיז' תשע"ה מועד ב



מעגל שרדיוסו  $r$  חסום בטרפז שווה-שוקיים  $ABCD$  ( $AB \parallel DC$ ), כמתואר בציור.

נתון:  $\angle BCD = 70^\circ$ .

א. הבע באמצעות  $r$ :

(1) את הבסיס הגדול של הטרפז.

(2) את שוק הטרפז.

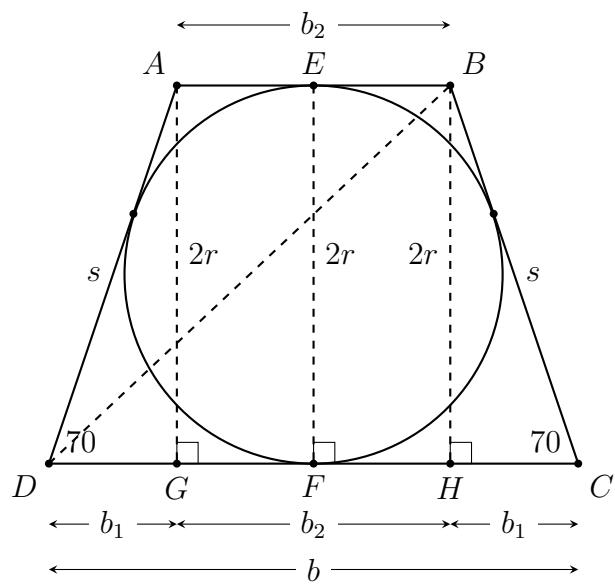
(3) את אלכסון הטרפז.

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעלג החסום בטרפז לבין רדיוס המעלג החוסם את הטרפז.

ובין רדיוס המעלג החוסם את הטרפז.

נוריד אnek מ- $A$ -מ- $G$  שחותך את  $DC$ , ונקן מ- $B$ -ב- $H$  שחותך את  $DC$ . בטרפז  $ABHG$  ו- $AB \parallel DC$  ולכן אnek מ- $A$ -מ- $G$  שחותך את  $DC$ . לפי משפט 77 "המשיק למעגל מאונך לרדיויס בנקודת ההשקה", האnek מנוקודת ההשקה של  $AG$  עם  $AB$  עובר דרך מרכז המעגל והוא ניצב לנוקודת ההשקה עם  $DC$ . מכאן  $AG = EF = DC$ . מכאן  $BF = 2r$ .

נסמן  $AB = GH = b_2$ . הטרפז שווה-שוקיים ולפי משפט 39 "בטרפז שווה-שוקיים הזוויתות שילדי אותו בסיס שוות זו לזו",  $\angle DAG = \angle CBH = 20^\circ$  ו- $\angle ADC = \angle BCA = 70^\circ$ . כדי להשלים ל- $180^\circ$  במשולש  $\triangle ADG$  נקבע  $DG = HC = b_1$ . נסמן  $DG = HC = b_1$ .  $\triangle ADG \cong \triangle BCH$ , ונמצא  $DC = 2b_1 + b_2$ .



## סעיף א

(1) נחפש משפט הקשור צלעות של מרובע עם הרדיוס של המרגל החסום. משפט 57 "מרובע קמור חוסם מעגל אם ורק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות":

$$2s = b + b_2 = (b_1 + b_2 + b_1) + b_2 = 2(b_1 + b_2).$$

משמעותה זו נחשב משועאות נוספות שיעזרו לנו בהמשך:

$$s = b_1 + b_2, \quad b = 2b_1 + b_2 = s + b_1.$$

לפי ההגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות ב- $\triangle ADC$ , נוכל לקשר את  $r$  לצלעות:

$$\begin{aligned} \tan 70 &= \frac{2r}{b_1} \\ \sin 70 &= \frac{2r}{s} \\ b &= s + b_1 \\ &= 2r \left( \frac{1}{\sin 70} + \frac{1}{\tan 70} \right) = 2.856r. \\ .s &= \frac{2r}{\sin 70} = 2.128r \quad (2) \end{aligned}$$

(3) האלכסון הוא היתר של  $\triangle BDH$  שצלעותיו ידועות:

$$\begin{aligned} DB^2 &= (b_1 + b_2)^2 + (2r)^2 = s^2 + (2r)^2 \\ &= \left( \frac{2r}{\sin 70} \right)^2 + 4r^2 \\ DB &= 2r \sqrt{\left( \frac{1}{\sin 70} \right)^2 + 1} = 2.921r. \end{aligned}$$

## סעיף ב

במבט ראשון נראה שכדי להשתמש במשפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180^\circ$ ", אבל אין בו צורך. שימו לב שהמרכז של המרגל החוסם לא חופף את המרכז של המרגל החסום, כך שאי-אפשר לחשב  $R$ , הרדיוס של המרגל החסום, כמורחיק ממרכז המרגל החוסם לאחד מקודקודיו הטרפז. במקום זה נשתמש בחוק הסינוסים ב- $\triangle BCD$ :

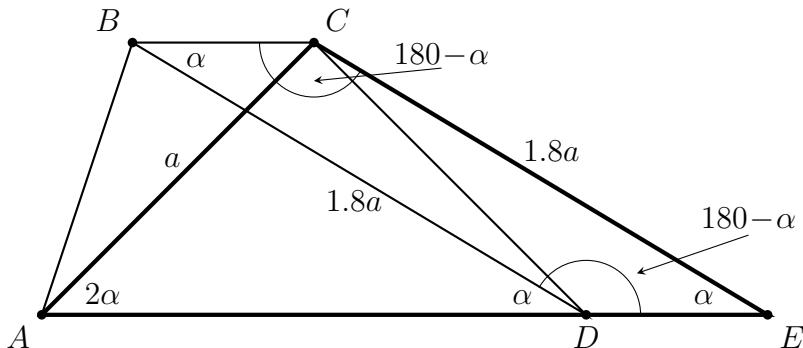
$$\begin{aligned} 2R &= \frac{DB}{\sin BCD} = \frac{2.921r}{\sin 70} \\ \frac{r}{R} &= \frac{2 \cdot \sin 70}{2.921} = 6.434. \end{aligned}$$

## 5.11 קיז' תשע"ה מועד א

- נתון טרפז  $(BC \parallel AD)$   $ABCD$  הנקודה  $E$  נמצאת על המשך  $AD$  כך ש-  $CE \parallel BD$  (ראה ציור).
- נתון:  $\angle CAD = 2\angle DBC$
- $$DB = 1.8AC$$
- א. מצא את גודל הזווית  $\angle CEA$ .
- ב. נתון גם כי שטח המשולש  $ACE$  הוא  $87.873 \text{ סמ}^2$ . מצא את גובה הטרפז.

### סעיף א

נסמן זוויות לפי זוויות מתחלפות, מתאימות ופנימיות:  
 $\angle BCE = \angle CBD = \angle BDA = \angle CEA = \alpha$ :  
 $\angle BDE = 180 - \alpha$ .

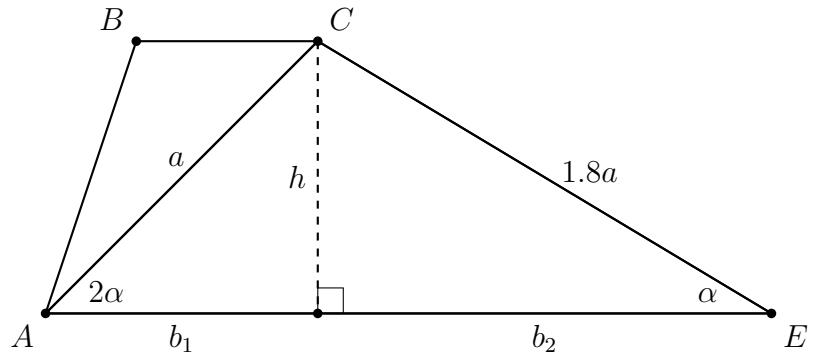


לפי חוק הסינוסים:

$$\begin{aligned} \frac{AC}{\sin \alpha} &= \frac{CE}{\sin 2\alpha} \\ \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{1.8a}{\sin 2\alpha} = \frac{1.8a}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \\ \cos \alpha &= 0.9 \\ \alpha &= 25.84. \end{aligned}$$

### סעיף ב

מהתרשים אפשר לראות ש-  $S_{\triangle ACE}$  מורכב מסכום השטחים של שני משולשים עם אותו גובה:



$$S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

$$b_1 = \frac{h}{\tan 2\alpha}$$

$$b_2 = \frac{h}{\tan \alpha}$$

$$S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2}h^2 \left( \frac{1}{\tan 2\alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} \right)$$

$$87.873 = \frac{1}{2}h^2(6.79 + 2.06) = 1.428h^2$$

$$h = 7.846 .$$

פתרונות אחר משתמש בנוסחה הטריגונומטרית לשטח :

$$S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CE \cdot \sin \angle ACE$$

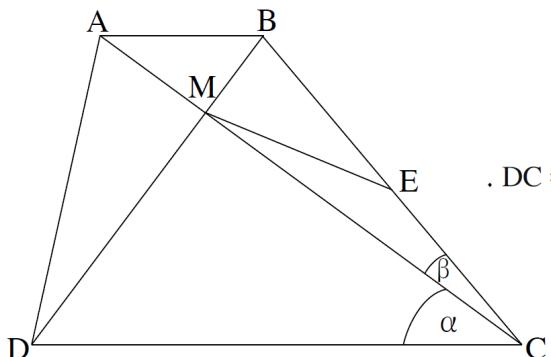
$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1.8a \cdot \sin(180 - 3\alpha) = 0.9a^2 \sin 3\alpha$$

$$87.873 = 0.87873a^2$$

$$a = 10$$

$$h = a \sin 2\alpha = 7.846 .$$

## 5.12 חורף תשע"ה



אלכסוני הטרפז  $ABCD$  מאונכים זה זהה  
ונפגשים בנקודה  $M$ .

היא אמצע השוק  $BC$  (ראה ציור).

נתון:  $DC = a$ ,  $\angle ACB = \beta$ ,  $\angle ACD = \alpha$

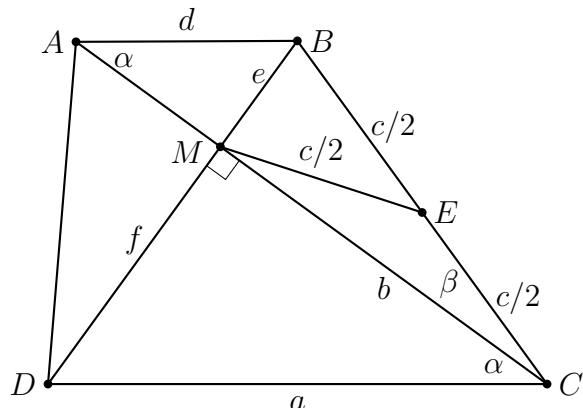
א. הבע באמצעות  $a$ ,  $\beta$  ו-  $\alpha$  את האורך של  $ME$ .

נתון:  $a = 6.6$ ,  $\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{1}{3}$

ב. מצא את האורך של  $AB$ .

נתון גם:  $BM = 1.3$  ס"מ

ג. מצא את הזווית  $DCB$ .



### סעיף א

$\triangle BMC$  ישר זוית ונתון  $ME$ -ו הוא תיכון ליתר. לפי משפט 86 "במשולש ישר זוית התיכון ליתר שווה למחצית היתר".  $ME = c/2$ . לפי ההגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות:

$$\cos \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} ME &= \frac{c}{2} = \frac{b}{2 \cos \beta} \\ &= \frac{a \cos \alpha}{2 \cos \beta}. \end{aligned}$$

## סעיף ב

למשולשים  $\triangle AMB, \triangle CMB$  צלע משותפת  $MB = e$ . לפי ההגדרות של הfonקציות הטריגונומטריות:

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \frac{e}{b} \\ \sin \alpha &= \frac{e}{d} \\ AB = d &= \frac{e}{\sin \alpha} = \frac{b \tan \beta}{\sin \alpha} \\ &= \frac{a \cos \alpha \tan \beta}{\sin \alpha} = \frac{a \tan \beta}{\tan \alpha} = 6.6 \cdot \frac{1}{3} = 2.2.\end{aligned}$$

הוכחת אחרת משתמשת במשולשים דומים.

הזווית  $\angle BAM \sim \angle DMC$  מתחולפות ולכן  $\angle BAM = \angle MCD = \alpha$  לפי ז.ז..

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \frac{e}{b} \\ \tan \alpha &= \frac{f}{b} \\ \frac{e}{f} &= \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{1}{3} \\ \frac{d}{a} &= \frac{e}{f} = \frac{1}{3} \\ AB = d &= \frac{6.6}{3} = 2.2.\end{aligned}$$

## סעיף ג

ממשפט פיתגורס  $\sqrt{a^2 - f^2} = 5.32$

$$\tan \beta = \frac{e}{b} = \frac{1.3}{5.32} = 0.2444$$

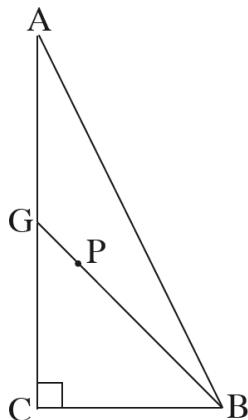
$$\beta = 13.73$$

$$\tan \alpha = 3 \tan \beta = 0.7331$$

$$\alpha = 36.24$$

$$\angle DCB = \alpha + \beta = 49.97.$$

## 5.13 קיז' תשע"ד מועד ב



במשולש ישר-זווית  $\angle ACB = 90^\circ$   $ACB$

נקודה  $G$  היא אמצע הניתב  $AC$ .

נקודה  $P$  נמצאת על  $GB$  כך ש-  $BG = 4 \cdot PG$  (ראה ציור).

רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $CGB$  הוא  $R$ .

נתון:  $GC = BC$

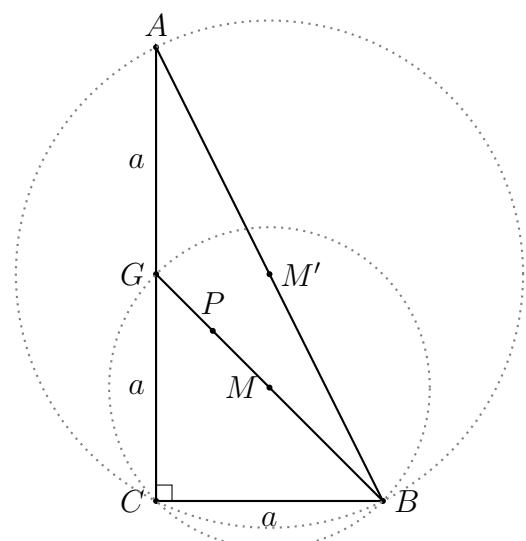
א. הבע באמצעות  $R$  את רדיוס המעגל

הchosם את המשולש  $ACB$ .

ב. הבע באמצעות  $R$  את מרחק הנקודה  $P$

ממרכז המעגל החוסם את המשולש  $ACB$ .

נסמן  $= R, M, M'$  מרכז המעגל החוסם את  $\triangle CGB$  ורדיוסו שלו, ו-  $M', M'$  מרכז המעגל החוסם את  $\triangle ACB$  ורדיוסו שלו. שימו לב שבתרשים הנקודות  $M, M', G, B, A$  נמצאות על הצלעות  $AB, GB, AC$ , אבל אלו חיברים להוכיח את הטענות הללו אם רוצים להשתמש בהן.



### סעיף א

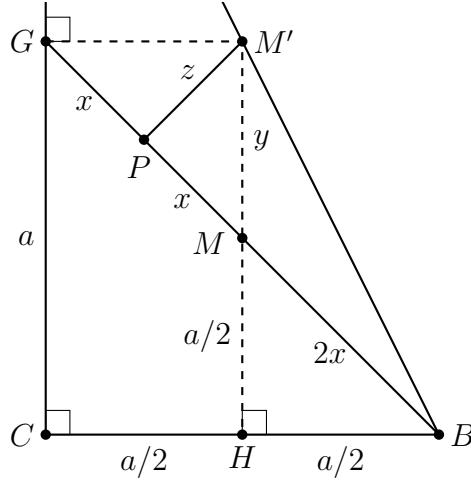
:  $\triangle CGB$  בשוק הסינוסים ובמשפט פיתגורס, תחיליה עבור

$$R = \frac{BG}{2 \sin 90^\circ} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

ואחר כך עבור  $\triangle ACB$

$$R' = \frac{AB}{2 \sin 90^\circ} = \frac{\sqrt{a^2 + (2a)^2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)a = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{2}R = \sqrt{\frac{5}{2}}R.$$

$M'$ , מרכז המעלג החוסם את  $\triangle ACB$ , הוא נקודת החיתוך של האנכים  $GM'$  ו-  $M'H$ .



אם נמצא משולש שuberו נוכל לחשב שתי צלעות והזווית הכלואה ביןיהן, נוכל להשתמש בחוק הקוסינוסים. ננסה את  $MPM'$  חותך את  $CG \parallel MH$ .  $\triangle MPM'$  מושולש חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהם בקטיעים פרופורציוניים:

$$\frac{GC}{MH} = \frac{CB}{HB} = \frac{a}{a/2} = 2,$$

אבל  $GCHM'$  הוא מלבן, ולכן  $MH = \frac{a}{2}$ .

$$y = MM' = M'H - MH = GC - MH = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}R = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

שוב לפי משפט תאלס המורחב:

$$\frac{GB}{MB} = \frac{GC}{MH} = 2$$

$$GB = GM + MB$$

$$GM = GB - MB = 2MB - MB = MB.$$

שנਸמן  $GM = MB = 2x$

נתון  $PM = 4x - (2x) - x = x$ ,  $PG = \frac{1}{4}(2x + 2x) = x$ . לבסוף,  $GB = 4 \cdot PG$ ,  $\angle CGB = 45^\circ$ . ניתן לחשב לפי משפט פיתגורס ב-  $\triangle CGB$ :

$$(4x)^2 = a^2 + a^2$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{8}}a = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{2}R = \frac{R}{2}.$$

$\triangle MHB$  הוא משולש ישר-זווית שווה-שוקיים,  $\angle BMH = 45^\circ$ ,  $\angle PMM' = 45^\circ$ . נסמן  $z = PG$ . כעת יש לנו מספיק נתונים להשתמש בחוק הקוסינוסים.

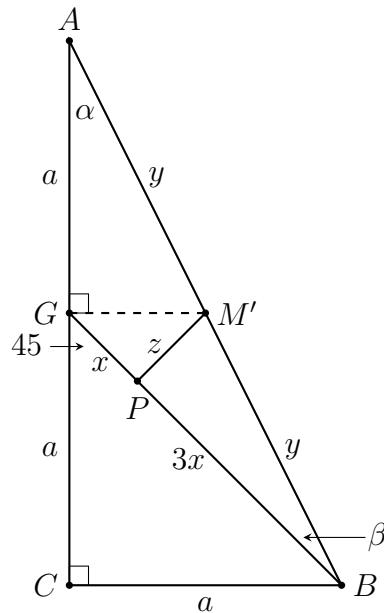
$$\begin{aligned}
z^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos \angle PMM' \\
&= \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{2}\right)\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) \cos 45^\circ \\
&= R^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{R^2}{4} \\
z &= \frac{R}{2}.
\end{aligned}$$

\* \* \*

פתרון אחר משתמש בחוק הקוסינוסים על  $ACM'$ , האנך האמצעי ל- $AB$  חותך את  $BM'$  ב- $P$ .  $\triangle PM'B$  כמרכז המעגל החסום את  $GM'\parallel CB$ . ( $\triangle ACB$  ולבו לפי משפט תאלס (הרגיל):  
בלי להסתמך על  $M'$  כמרכז המעגל החסום את  $GM'\parallel CB$ .)

$$\frac{AG}{GC} = \frac{AM'}{M'B},$$

$$y = AM' = M'B \quad \text{ונסמן}$$



:  $\triangle GCB$ -ב-פיתגורס ולפי

$$\begin{aligned}
(4x)^2 &= a^2 + a^2 \\
x &= \frac{1}{\sqrt{8}}a = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{2}R = \frac{R}{2}.
\end{aligned}$$

לפי פיתגורס ב- $\triangle ACB$ :

$$\begin{aligned} (2y)^2 &= (2a)^2 + a^2 \\ y &= \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{2}R = \sqrt{\frac{5}{2}}R. \end{aligned}$$

נחשב את הזווויות  $\alpha, \beta$ :

$$\sin \alpha = \frac{a}{2y} = \frac{\sqrt{2}R}{2\sqrt{(5/2)}R} = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\alpha = 26.57$$

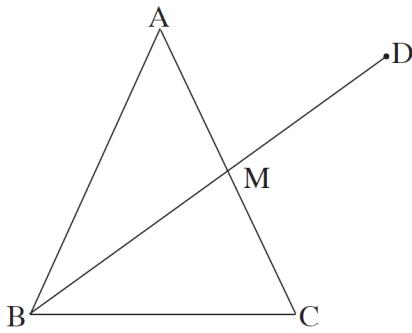
$$\beta = 180 - \angle AGB - \alpha = 180 - 135 - 26.57 = 18.43.$$

נשתמש בחוק הקוסינוסים ב- $\triangle PM'B$ :

$$\begin{aligned} z^2 &= (3x)^2 + y^2 - 2 \cdot 3x \cdot y \cdot \cos \beta \\ &= \left(3 \cdot \frac{R}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{2}}R\right)^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}R \cdot 0.9487 \\ &= 0.25R^2 \\ z &= \frac{R}{2}. \end{aligned}$$

אני מעדיף את הפתרון הראשון. התרשימים מעט יותר מסובך אבל החישובים יותר פשוטים.

## 5.14 קיז' תשע"ד מועד א



במשולש שווה-שוקיים  $\triangle ABC$  ( $AB = AC$ ) הוא תיכון  $BM$  לשוק (ראה ציור).

נתון:  $\angle BAC = 50^\circ$ .

א. חשב את גודל הזווית הקיה  $\angle AMB$ .

ממשיכים את  $BM$  עד הנקודה  $D$ .

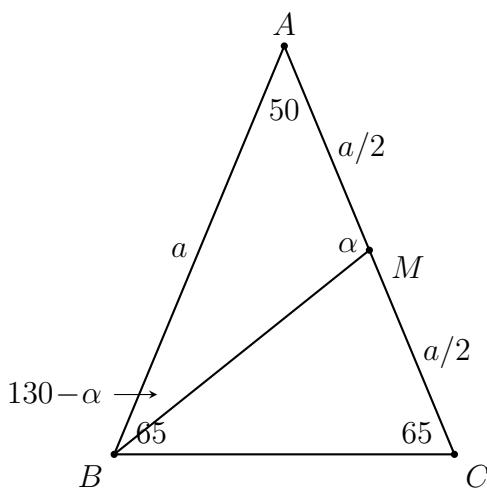
נתון גם:

רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $\triangle ABC$  הוא 10 ס"מ.

רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $\triangle ABD$  הוא 14 ס"מ.

ב. חשב את זוויות המשולש  $\triangle AMD$ .

$\angle ABC = \angle ACB = (180 - 50)^\circ$ . נתון  $\angle BAC = 50^\circ$  ובמשולש שווה-שוקיים  $\angle AMB = \angle ABD$ . נסמן  $\angle ABM = 130 - \alpha$ . נחשב  $\alpha = (180 - 50 - 65)/2 = 65$



### סעיף א

נחפש משולש שעליו אפשר להפעיל את חוק הסינוסים. נתון  $BM$  הוא תיכון ל- $AC$ . נסמן את  $\triangle ABM$  עם הנעלם  $\alpha$ , ונפעיל את משפט הסינוסים על

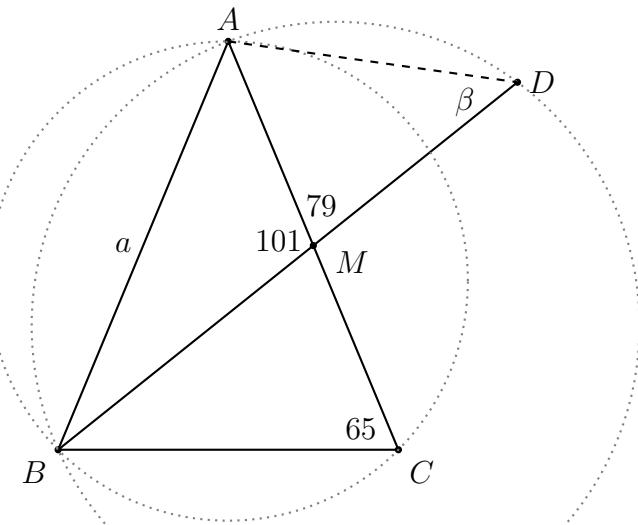
$$\begin{aligned}
 \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{a/2}{\sin(130 - \alpha)} \\
 \sin \alpha &= 2 \sin(130 - \alpha) \\
 &= 2 \sin 130 \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cos 130 \\
 &= 1.53 \cos \alpha + 1.29 \sin \alpha
 \end{aligned}$$

$$\tan \alpha = -\frac{1.53}{0.29}$$

$$\alpha = -79.27^\circ = 100.73^\circ \approx 101^\circ.$$

בהמשך נעבד עם קירובים למעלה שלמה.

## סעיף ב



ולכן  $\angle AMD = \angle AMB - 101$  לפי זוויות משלימות. נצורך לחשב אחת מ- $\angle MAD$ ,  $\angle ADM$ , והזוויות  $\beta = \angle ADM$  מול הזווית  $AB$  מהתרשים רואים שהצלע  $AB$  הוא גם צלע מול הזווית  $\angle ADB$ ,  $\angle ACB$  ב- $\triangle AMB$ . לפי חוק הסינוסים ב- $\triangle AMB$  :

$$2R_{ABC} = \frac{a}{\sin 65} = 2 \cdot 10$$

$$a = 18.126$$

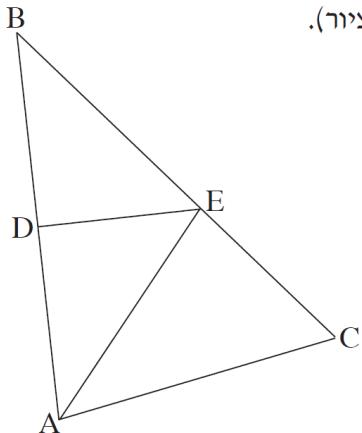
$$2R_{ABD} = \frac{a}{\sin \beta} = \frac{18.126}{\sin \beta} = 2 \cdot 14$$

$$\beta = 40.34.$$

הزوויות של  $\triangle AMD$  הן  $79^\circ, 40^\circ, 61^\circ$ .

## 5.15 חורף תשע"ד

במשולש ABC האנך האמצעי לצלע BA חותם את הצלעות BC ו- DA בנקודות E ו- D בהתאם (ראה ציור).



$$\text{נתון: } \angle ABC = \beta, \angle BAC = \alpha$$

א. (1) הבע באמצעות  $\alpha$  ו-  $\beta$  את  $\angle EAC$ .

$$\cdot \frac{CE}{EB} \text{ הבע באמצעות } \alpha \text{ ו- } \beta \text{ את היחס}$$

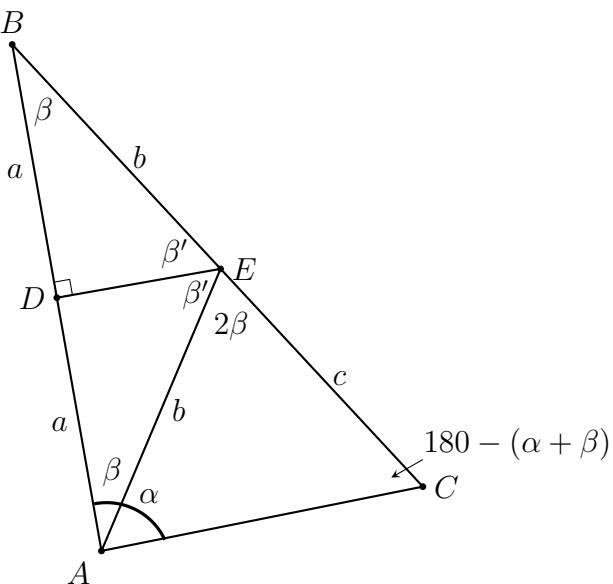
נתון גם:  $\angle BAC$  חוצה-זווית

$$\beta = 40^\circ, AC = 10 \text{ ס"מ}$$

ב. חשב את הרדיוס של המרגל החסום במשולש ABC.

### סעיף א

(1) הוא האנך האמצעי ל-AB, ולכן  $\triangle AED \cong \triangle BED$  לפי צ.ז.צ. נסמן את שאר הזווויות לפי זוויות משלימות וסכום זוויות במשולש, כאשר קיצרנו  $\angle EAC = \alpha - \beta$ . התשובה היא  $\beta' = 90 - \beta - \alpha + \beta = 90 - \alpha$ .



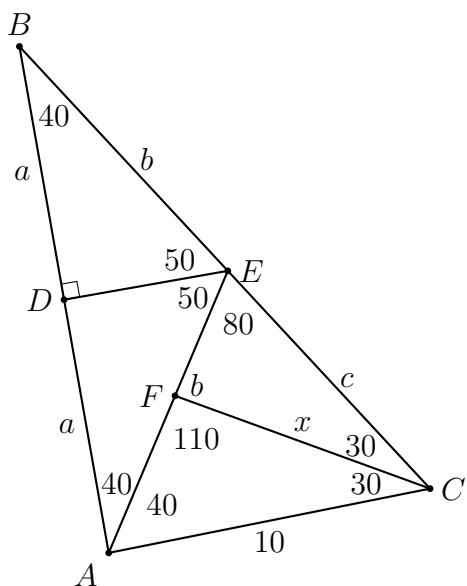
(2) נסמן  $EC = c, BE = b$ . מהתרשים נראה ש-  $\frac{c}{b} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(180 - (\alpha + \beta))}$ . השאלת מבקשת את היחס  $\frac{c}{b}$ . ונוכל להשתמש במשפט תאלס, אבל אי אפשר להסתמך על התרשומות מהתרשים. הרנו  $\triangle AED \cong \triangle AEC$ , ונוכל להשתמש בחוק הסינוסים ב-  $\triangle AEC$ ,  $AE = BE = b$ -ו-  $\angle AEC = \angle BED$

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sin(\alpha - \beta)} &= \frac{b}{\sin(180 - (\alpha + \beta))} \\ \frac{c}{b} &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

**סעיף ב**

המשפט הרלונטי הוא 49 "שלושת חוצי הזווית של משולש נחטכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המ Engel החסום במשולש". נתון חוצה זווית  $AE$  ב- $A$ . נבנה חוצה זווית שני. נססה ב- $C$  כי ידוע  $AC = 10$  וnochel להשתמש בחוק הסינוסים ב- $\triangle ACF$ , כאשר  $F$  היא נקודת החיתוך עם חוצה הזווית  $AE$ , ולכן היא המרכז של המ Engel החסום.

נתון ש- $\beta = 40^\circ$  וזה מאפשר לנו להשלים זוויות בתרשימים:

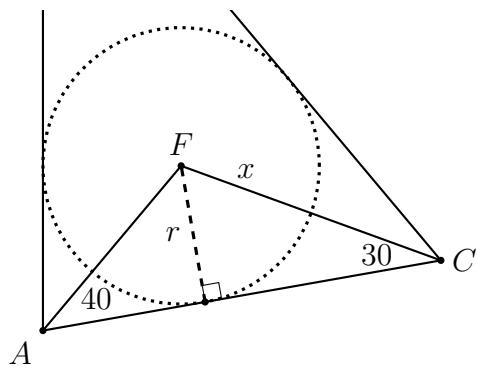


לפי חוק הסינוסים:

$$\frac{x}{\sin 40^\circ} = \frac{10}{\sin 110^\circ}$$

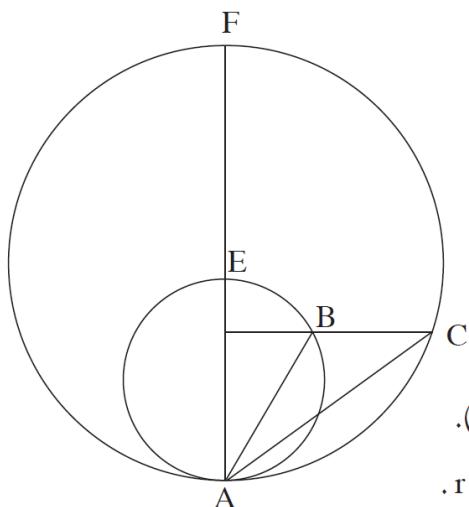
$$x = 6.84.$$

לא לעזר כאן! השאלה מבקשת את הרדיוס של המ Engel החסום ולא המרחק אל מרכז המ Engel.  
נוריד אnek מ- $AC$  ל- $F$  וונחשב:  $r = x \sin 30^\circ = 3.42$



## 5.16 חורף תשע"ד) שאלה 6

בבחינה זו היו שלוש שאלות בפרק השני.



שני מעגלים, גדול וקטן, משיקים מבחנים בנקודה A.

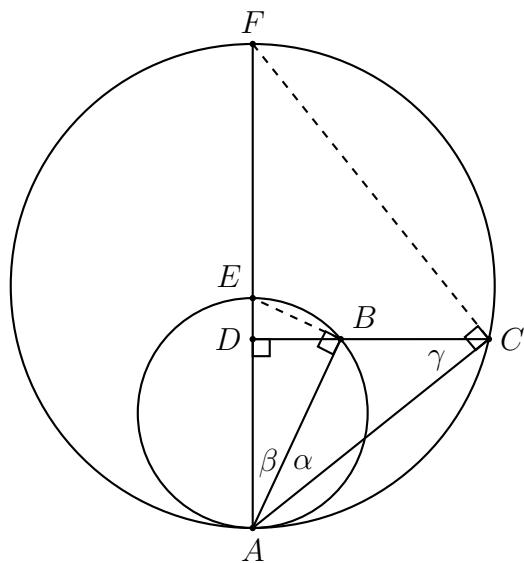
נקודה F נמצאת על המעגל הגדל כך שقطع המרכזים של שני המעגלים נמצא על AF.

דרך נקודה B של המעגל הקטן העבירו ישר המקביל למשיק המשותף לשני המעגלים. המקביל חותך את המעגל הגדל בנקודה C (ראה ציור). רדיוס המעגל הגדל הוא R, ורדיוס המעגל הקטן הוא r. נתון:  $\angle FAB = \beta$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .

א. (1) הבע באמצעות  $\alpha$  ו-  $\beta$  את  $\angle BCA$ . נמק.

(2) הבע רק באמצעות  $\alpha$  ו-  $\beta$  את היחס  $\frac{AC}{AB}$ .

ב. הבע באמצעות  $\alpha$  ו-  $\beta$  את היחס  $\frac{R}{r}$ .



**סעיף א**

$\angle BCA = \gamma = 90 - (\alpha + \beta)$ .  $\triangle DCA$  (1)

הוא צלע של  $\triangle DBA$  וגם של  $\triangle DCA$ . נפעיל את חוק הסינוסים פעמיים :

$$\begin{aligned}\frac{AB}{\sin 90} &= \frac{AD}{\sin(90 - \beta)} \\ AD &= AB \cos \beta \\ \frac{AC}{\sin 90} &= \frac{AD}{\sin \gamma} \\ AC &= \frac{AB \cos \beta}{\sin(90 - (\alpha + \beta))} \\ \frac{AC}{AB} &= \frac{\cos \beta}{\cos(\alpha + \beta)}.\end{aligned}$$

פתרון אחר מתקבב מהפעלת חוק הסינוסים פעם אחת על  $\triangle ABC$

$$\begin{aligned}\frac{AC}{\sin(180 - \alpha - \gamma)} &= \frac{AB}{\sin \gamma} \\ \frac{AC}{AB} &= \frac{\sin(180 - (\alpha + \gamma))}{\sin(90 - (\alpha + \beta))} = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin(\alpha + 90 - (\alpha + \beta))}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \beta}{\cos(\alpha + \beta)}\end{aligned}$$

### סעיף ב

לאחר שהיחסינו יחס  $\frac{AC}{AB}$  נחפש קשר בין  $AB, AC$  לבין הרדיוסים. לחבר  $B$  ל- $E$  ו- $C$  ו- $F$ . קיבל שני משולשים חסומים במעגלים וניתן להשתמש בנוסחה של חוק הסינוסים עם רדיוס :

$$\begin{aligned}2R &= \frac{AC}{\sin(90 - (\alpha + \beta))} \\ 2r &= \frac{AB}{\sin(90 - \beta)} \\ \frac{R}{r} &= \frac{AC}{2 \cos(\alpha + \beta)} \cdot \frac{2 \cos \beta}{AB} = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2(\alpha + \beta)}\end{aligned}$$

פתרון אחר : נתון ש- $FA$  הוא קוטר ("קטע המרכזים") של המगעל הגדל, ולכן  $EA$  הוא קוטר של המגעל הקטן. זווית הנשענת על קוטר  $\triangle ACF, \triangle ABE$  הן ישר-זווית, ולכן :

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{AB}{2r} \\ \cos(\alpha + \beta) &= \frac{AC}{2R} \\ \frac{R}{r} &= \frac{AC}{2 \cos(\alpha + \beta)} \cdot \frac{2 \cos \beta}{AB} = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2(\alpha + \beta)}.\end{aligned}$$

## המלצות: טריגונומטריה

- ראו נספח ג' המסביר את החשיבות של מעגל היחידה בחישובים טריגונומטריים.
- הנספח מציג איך לשחזר בקלות את הנוסחאות  $\sin(90^\circ - \theta), \sin(180^\circ - \theta), \sin(2\theta)$ , ונוסאות דומות עבור קיסינוס.
- חווב לציר תרשימים ברורים וגדרים, עדיף עם סרגל ומחוגה. בתהליך הפתרון אנו מסמנים את המידע המתבר על הزواיות והצלעות ויש לדאוג שהיה מספיק מקום.
- כאשר לשאלת יש מספר סעיפים כדי לציר תרשימים נפרדים לכל סעיף תוך העלמת מידע לא רלוונטי לאותו סעיף.
- אני מעדיף לסמן זוויות עםאותיות יווניות כגון  $\alpha, \beta, \gamma$ , ולא על ידי ציון שלושת הנקודות המגדירות אותה  $\angle ABC$ , כי קשה יותר לעקוב אחר הנקודות המגדירות את הزواית.
- השלימו זוויות ככל האפשר תוך שימוש בסכום הزواיות במשולש, ובزواיות משילמות. כדי להקל על החישובים אני משתמש בעלמיים נוספים כדי לקצר ביטויים, למשל,  $(\alpha + \beta) - \gamma = 180^\circ$ .
- שימוש לב שאין עיקיות בסימון  $A, B, C, D$  של הקודקודים של משולש או מרובע.
- בשאלות על טריגונומטריה בדרך כלל עדיף להשתמש בנוסחה לשטח משולש:

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha ,$$

ולא בחישוב של מחצית מכפלת הבסיס והגובה.

- עבור מעגל חסום במשולש, המשפט הרלוונטי הוא 54 "במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום את המשולש". ניתן בקלות למצוא את רדיוס המעגל מהחוק הסיניים:

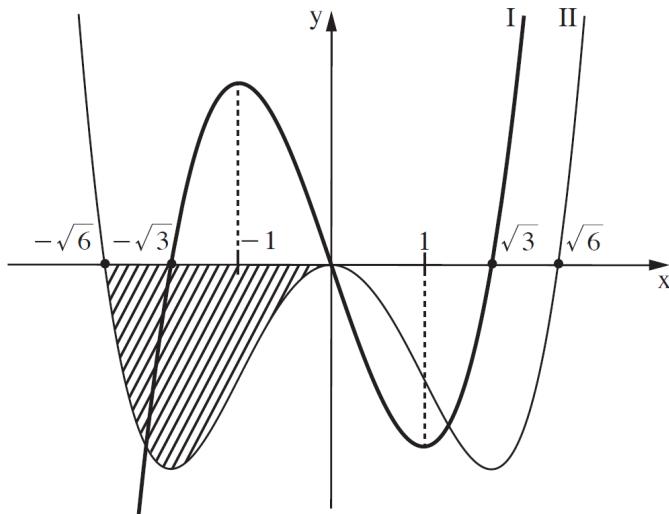
$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} .$$

- עבור מעגל חסום במשולש, המשפט הרלוונטי הוא 49 "שלושת חוצי הزواיות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש". אין נסחה עבור רדיוס המעגל אבל אפשר למצוא אותו כאורך הגובה מהמרכז לאחת הצלעות.
- טרפזים מאד אהובים על ידי כותבי הבחינות. שננו משפטיים 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-180°" ו-57 "מרובע קמור חסום מעגל אם ורק אם סכום שתי הצלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות".
- שימוש לב שהמרכז המעגל החסום לא חופף את מרכזו המעגל החסום, אלא במקרים מיוחדים כגון משולש שווה-צלעות וריבוע.
- לעתים קרובות התשובה לשאלת ה问题是 ערך ממשי לזוית או אורך. אני מעדיף להישאר עם העלמיים כל עוד הדבר אפשרי ורק בסוף להשתמש במחשבון כדי לחשב ערכיים.

# פרק 6 חדו"א שאלה 6

## 6.1 קיז תשע"ח מועד ב

לפניך הגרפים של הפונקציות  $(x)f'$  ו-  $(x)f''$  (פונקציית הנגזרת הראשונה ופונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה  $(x)f$ ) בתחום  $x \leq 2.5$ . שני הגרפים עוברים בראשית הצירים.



- א. התאמות בין הגרפים I ו- II ובין הפונקציות  $(x)f'$  ו-  $(x)f''$ . נמק.  
 ב. (1) כמה נקודות פנימיות יש לפונקציה  $(x)f$  בתחום המתוואר בגרף? נמק את תשובתך.  
 (2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה  $(x)f$  בתחום המתוואר בגרף? נמק את תשובתך.  
 ג. עבור איזה ערך של  $x$  בתחום  $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{6}$  – שיפוע המשיק לגרף פונקציית הנגזרת,  $(x)f'$ , הוא מינימלי?  
 נתון:  $(x)f$  היא פונקציה אי-זוגית.

- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $(x)f$ .

- נתון: ערך הפונקציה  $(x)f$  בנקודת המקסימום שלה הוא  $t$ .  
 ה. הביע באמצעות  $t$  את השטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי החלק השילי של ציר ה-  $x$  (השטח המוקווקו בציור).  
 ו. נתון: קבועים  $a$ ,  $b$  ו-  $c$  ממשיים כך ש-  $c > 0$ .  

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + c$$
  
 מצא את  $c$  ואת היחס  $\frac{a}{b}$ .

### סעיף א

נקודות הקיצון של  $f'(x)$  הן הנקודות בהן  $f''(x) = 0$ . לgraf II נקודות קיצון ב-  $0, \pm\sqrt{3}$  ובנקודות הללו הgraf I חותך את ציר ה-  $x$ . לכן, II הגרף של  $f'(x)$  ו- I הגרף של  $f''(x)$ .

### סעיף ב

- (1) הgraf II מתאפס ב-  $0, \pm\sqrt{6}$ , אבל ב-  $0$  היא לא מחליפה סימן ולכן  $0$  הוא לא נקודת קיצון.  
 (2) הנגזרת השנייה מתאפשרת בשלוש נקודות  $0, \pm\sqrt{3}$ . בכל שלושת הנקודות הנגזרת הראשונה לא מחליפה סימן, ולכןן כולן נקודות פיתול ולא נקודות קיצון.

### סעיף ג

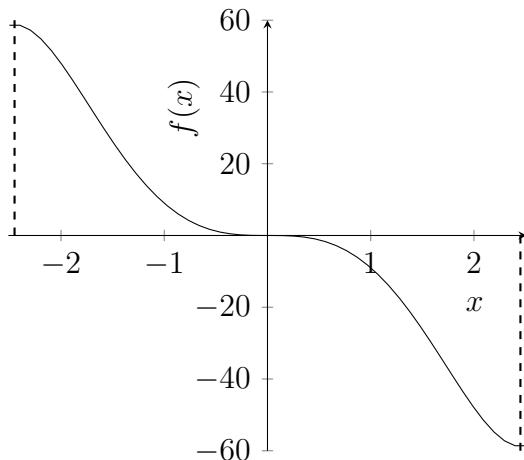
הנגזרת השנייה היא שיפוע המשיק לנגזרת הראשונה. בתחום הניתן הערך המינימלי מתקבל ב-1.

### סעיף ד

נתון שהפונקציה אי-זוגית אז  $f(0) = 0$ . הוכחה: אם  $a = -a$  ור' אם  $a = 0$ . אם  $f(x)$  אי-זוגית,

$$f(0) = f(-0) = -f(0) = 0$$

בין  $0$  ל- $\sqrt{3}$  הנגזרת הראשונה, השיפוע, שלילית (גרף II) ולכן  $f(x)$  יורדת מאפס לערכים שליליים. בסעיף ב' חישבנו שיש שתי נקודות פיתול ב- $\approx 1.73 \pm \sqrt{3}$  ב- $0$ . נתון שהפונקציה אי-זוגית כך שאפשר לקבל את הערכים עבור  $x < 0$  על ידי סימטריה סביב ציר ה- $y$ . הגרף נראה כך:



### סעיף ה

מהגרף רואים שהגבולות הם  $0, -\sqrt{6}, \sqrt{6}$ , אבל כדאי לנמק. מצאנו בסעיף ב'  $f'(0) = 0$ , ובסעיף ד' ראיינו  $f'(-\sqrt{6}) = 0$ , כך שציר ה- $x$  תוחם את השטח. חישוב השטח:

$$\int_{-\sqrt{6}}^0 0 - f'(x) dx = -f(x) \Big|_{-\sqrt{6}}^0 = 0 - (-f(-\sqrt{6})) = f(-\sqrt{6}) = t,$$

כי נקודת המקסימום של  $f(x)$  היא ב- $-\sqrt{6}$

### סעיף ו'

לפי  $f(0) = 0, f'(0) = 0$

הנגזרת הראשונה מתאפסת ב- $\pm\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5ax^4 + 3bx^2 \\ &= 5a(\pm\sqrt{6})^4 + 3b(\pm\sqrt{6})^2 \\ &= 5a(\pm\sqrt{6})^2 + 3b = 0 \\ \frac{a}{b} &= -\frac{1}{10}. \end{aligned}$$

## 6.2 קיז תשע"ח מועד א

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax - 1}{\sqrt{ax^2 - 2x + 1}}$ .  $a$  הוא פרמטר.

נתון: הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$ .

א. הוכח:  $a > 1$ .

עננה על סעיף ב. אם יש צורך, הביע באמצעות  $a$ .

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גраф הפונקציה  $(x)f$  עם הצירים.

(2) כתוב את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $(x)f$  המקבילות לציר ה- $x$ .

(3) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה  $(x)f$  (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גраф הפונקציה  $(x)f$ .

נתון:  $a = 3$ .

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גраф הפונקציה  $(x)f$ , על ידי ציר ה- $x$ , ועל ידי הישרים  $x = \frac{2}{3}$  ו-  $x = 2$ .

ד. (x)  $g$  היא פונקציה רציפה המוגדרת לכל  $x$ .

נסמן ב-  $S$  את השטח המוגבל על ידי גраф הפונקציה  $(x)f$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים  $x = \frac{1}{3}$  ו-  $x = b$  ( $b > \frac{1}{3}$ ).

נתון: השטח המוגבל על ידי גраф הפונקציה  $(x)f$ , על ידי גраф הפונקציה  $(x)g$  ועל ידי הישרים  $x = b$  ו-  $x = \frac{1}{3}$  שווה ל-  $S$  בעברו כל  $b$ .

הבע את  $(x)g$  באמצעות  $(x)f$  בתחום  $x > \frac{1}{3}$  (כתב את שתי האפשרויות). אין צורך להוכיח את תשובה.

### סעיף א

נתון שהפונקציה מוגדרת לכל  $x$ , ולכן לפולינום במכנה לא יהיה שורשים:

$$(-2)^2 - 4 \cdot a \cdot 1 = 4 - 4a < 0,$$

ולכן  $1 > a$ . אסור שלפולינום יהיה ערכים שליליים. לפולינום יש ערך חיובי, למשל,  $\frac{1}{2} = x$ . אם הפולינום לא יכול לקבל ערך אפס, אין נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$  ולא יהיה ערכים שליליים.

### סעיף ב

(1)  $f(0) = \frac{-1}{\sqrt{1}}$  ונקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  היא  $(0, -1)$ . המכנה חיובי כך שנקודות החיתוך עם ציר ה- $x$  מתקבלות מ- $0 = ax - 1 = 0$ , והנקודה היא  $(\frac{1}{a}, 0)$ .

:  $x \rightarrow +\infty$  (2) עבור

$$\frac{\left(a - \frac{1}{x}\right)}{+\sqrt{a - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}} \xrightarrow{+\infty} = \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}.$$

:  $x \rightarrow -\infty$

$$\frac{\left(a - \frac{1}{x}\right)}{-\sqrt{a - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}} \xrightarrow{-\infty} = -\frac{a}{\sqrt{a}} = -\sqrt{a}.$$

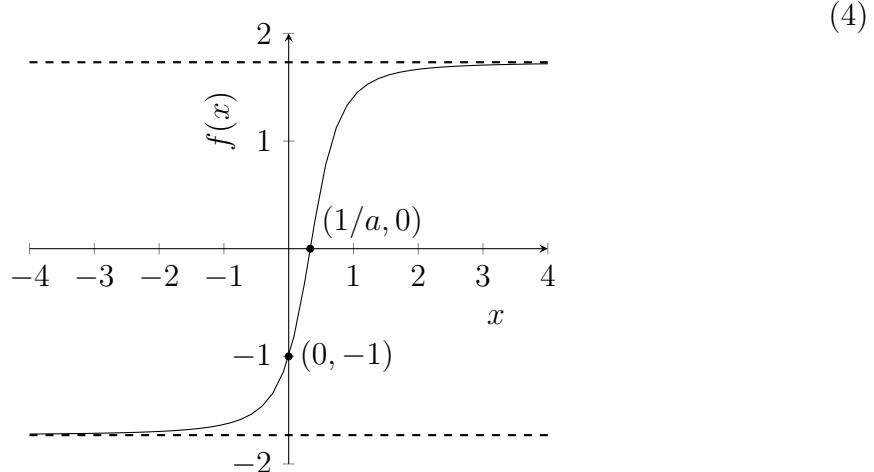
(3) נחשב את הנגזרת הראשונה :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a\sqrt{ax^2 - 2x + 1} - (ax - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{ax^2 - 2x + 1})^{-\frac{1}{2}} (2ax - 2)}{(\sqrt{ax^2 - 2x + 1})^2} \\ &= \frac{a(ax^2 - 2x + 1) - (ax - 1)(ax - 1)}{(\sqrt{ax^2 - 2x + 1})^2 \sqrt{ax^2 - 2x + 1}}. \end{aligned}$$

המכנה חיובי ולכן סימן הנגזרת שווה בסימן המונה :

$$a^2x^2 - 2ax + a - a^2x^2 + 2ax - 1 = a - 1.$$

הוכחנו  $a - 1 > 0$  ולכן הפונקציה תמיד עולה.



**סעיף ג**

ולכן גבולות האינטגרל הם בחלוקת החיווי של הפונקציה.

$$\begin{aligned} \int_{2/3}^2 \frac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} &= \int_{2/3}^2 \frac{2}{2} \left( \sqrt{3x^2 - 2x + 1} \right)' \\ &= \left. \sqrt{3x^2 - 2x + 1} \right|_{2/3}^2 \\ &= \sqrt{12 - 4 + 1} - \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{4}{3} + 1} = 2. \end{aligned}$$

**סעיף ד**

נתנו  $b > \frac{1}{3}$  כך שבגבולות האינטגרלים בתחום החיווי של הפונקציות. שתי האפשרויות הן  $f(x) \geq g(x)$  ועל  $f(x) \leq g(x)$ .

$$\int (g - f) = \int g - \int f = \int g - S = 2S,$$

ולכן  $\int g - \int f = 3S$

$$\int (f - g) = \int f - \int g = S - \int g = 2S,$$

ולכן  $\int f - \int g = -S$

### 6.3 חורף תשע"ח

$$\text{נתונות הפונקציות } g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$$

עננה על סעיף א עבור התחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

ב. מצא את משועאות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$ , המאונכות לציר ה- $x$ .

ג. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

עננה גם על סעיף ב עבור התחום  $\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}$ .

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ .

$$\text{הוכחה: } g(x) = -f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

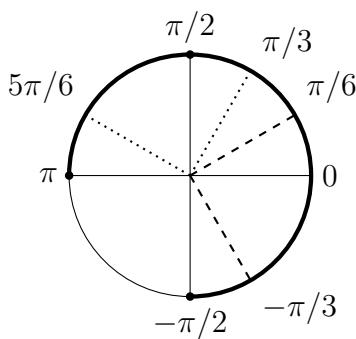
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ג. מצא את ערך הביטוי  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ . נמק את תשובתך.

הקשת העבה מראה את התחים והקוויים מראים את הערך של  $x$  עבור  $x - \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$



**סעיף א**

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  מוגדרת אם  $\cos x > 0$ , כלומר  $x$  מימין לציר ה- $y$ . תחום ההגדרה הוא  $f(x)$  (1)

(2)

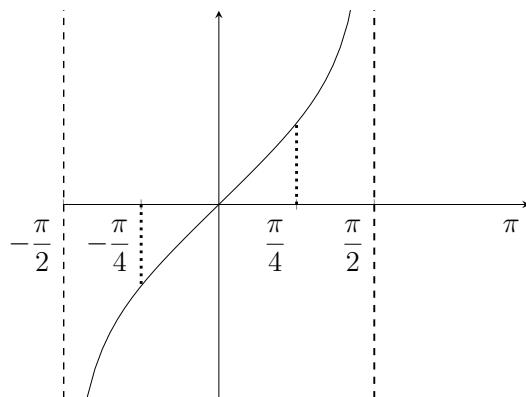
$$\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \xrightarrow{+\frac{\pi}{2}} \frac{+1}{0} = +\infty, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \xrightarrow{-\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{0} = -\infty.$$

(3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x \sqrt{\cos x} - \sin x \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{\cos x})^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sin x)}{\cos x} \\ &= \frac{2\cos^2 x + \sin^2 x}{2\cos x \sqrt{\cos x}} = \frac{\cos^2 x + 1}{2\cos x \sqrt{\cos x}}. \end{aligned}$$

בתחום ההגדרה  $\cos x > 0$  ולכן הנגזרת הראשונה תמיד חיובית והפונקציה עולה בכל התחום. מכאן שהנגזרת הראשונה לא מתאפשרת בתחום כך שאין נקודות קיצון פנימיות.

(4) הגרף מתקיים מ-0,  $f(0) = \frac{\sin 0}{\cos 0} = 0 = \frac{0}{1}$



## סעיף ב

(1) הפונקציה מוגדרת אם  $\sin x > 0$ . אם  $y$  מעלה לציר ה- $x$ . תחום ההגדרה הוא  $0 < x < \pi$ .

(2) חיבור או חיסור של  $\frac{\pi}{2}$  משנה סינוס לקוסינוס ולהיפך. צריך רק לקבוע את הסימנים (ראו תרשימים לפני סעיף א.).

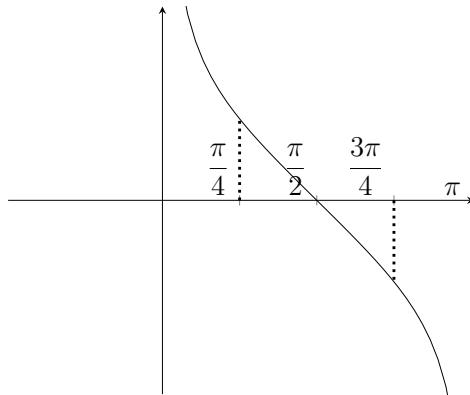
$$-f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}}\right) = -\left(\frac{-\cos x}{\sqrt{\sin x}}\right) = g(x).$$

אפשר גם לחשב לפי הנוסחה לחיסור של סינוס וкосינוס:

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \cos \frac{\pi}{2} - \cos x \sin \frac{\pi}{2} = -\cos x \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \cos \frac{\pi}{2} + \sin x \sin \frac{\pi}{2} = \sin x. \end{aligned}$$

(3) הגרף של  $g(x)$  מתקיים מהזזה ימינה של  $\frac{\pi}{2}$  והפיכת הסימן. למשל:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = -f\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$



#### סעיף ג

התרומה של החלק שלילי של הפונקציה לאינטגרל שווה לתרומה של החלק חיובי שלו, ולכן האינטגרל מותאפס.

מי שלא משתמש מהטייען יכול לחשב:

$$(\sqrt{\cos x})' = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{\cos x})^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sin x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}},$$

ולכן:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} = -2\sqrt{\cos x} \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -2\left(\sqrt{\sqrt{2}/2}\right) - (-2)\left(\sqrt{\sqrt{2}/2}\right) = 0.$$

## 6.4 קיז' תשע"ז מועד ב

נתונה הפונקציה  $f(x) = a - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ .  $a$  הוא פרמטר.

עננה על סעיף א. הביע את תשובותיך באמצעות  $a$  במידה הצורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $(x)f$ .

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $(x)f$  (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה  $(x)f$ .

נתון כי גרף הפונקציה  $(x)f$  משיק לציר ה- $x$ .

ב. מצא את  $a$ .

הצב את הערך של  $a$  שמצאת ועננה על הסעיפים ג-ד.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $(x)f$ .

ד. נתונה הפונקציה  $g(x) = |f(x) + k|$ .

ידוע שגרף הפונקציה  $(x)g$  משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה  $(x)f$ .

מצא את  $k$  (מצא את שתי האפשרויות). נמק את תשובתך.

### סעיף א

(1) תחום ההגדרה הוא  $x \neq 2$  כי  $x = 2$  מאפס את המכנה של שני גורמים.

(2) כאשר  $\infty \rightarrow x$  שני גורמים שוואים לאפס, ולכן האסימפטוטה האופקית היא  $y = a$ .

כאשר  $2 \rightarrow x$  שני גורמים שוואים לאינסוף, ולכן האסימפטוטה האנכית היא  $x = 2$ .

נבדוק את סימון הפונקציה השואפת לאינסוף. כאשר  $2 \rightarrow x$ ,  $\frac{1}{(x-2)^2} \gg \frac{2}{x-2}$ ,  $\infty \rightarrow y$  גם מימין וגם משמאל.

$$(3) f'(x) = -\frac{2 \cdot -1}{(x-2)^2} + \frac{-2}{(x-2)^3} = 0.$$

הפוקציה לא מוגדרת ב- $x = 2$ , כך שאפשר להכפיל את המשווה ב- $(x-2)^3$ . נקבל  $2 \cdot 3 \cdot (x-2) = 2 \cdot (x-2)^3$ . נקודת הקיצון היא  $(3, a-1)$ .

על ידי הכפלה בחזוקות של  $(x-2)$ , ניתן לכתוב את הנגזרת הראשונית כך:

$$f'(x) = \frac{2(x-2)^2 - 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2x^2 - 10x + 12}{(x-2)^4}.$$

המכנה חיובי שכן הסימן של הנזורה השנייה שווה לסימן נגזרת המונה  $10 - 4x$ . ב- $x = 3$ , הסימן חיובי והנקודות הקיצון היא מינימום.

דרך אחרת לבדוק אם מדובר במינימום או מקסימום היא באמצעות טבלת עליות וירידות:

$x$	0	2	2.5	3	4
$f'(x)$	0.75	$\times$	-8	0	0.25
$f(x)$	$\nearrow$	$\times$	$\searrow$	$a - 1$	$\nearrow$

הנקודה  $(3, a - 1)$  היא מינימום.

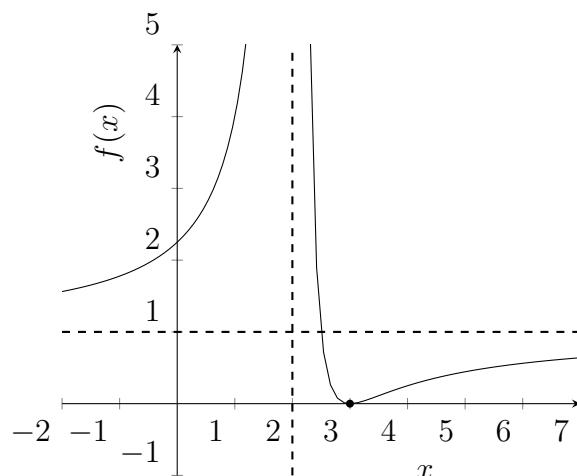
(4) הפתרון מופיע בטבלה בתת-סעיף הקודם.

### סעיף ב

נתון שערכה של  $f(x)$  בנקודות המינימום הוא אפס.  $0 = a - 1$  ו- $f(3) = a - 1 = 0$ .

### סעיף ג

לפי טבלת העליות והירידות, הפונקציה עולה עד לאסימפטוטה האנכית, Ach"כ יורדת לנקודות המינימום ואח"כ עולה ושוואפת לאסימפטוטה האופקית:



(4) האסימפטוטה האופקית היא  $y = a = 1$  ונקודות המינימום היא  $(3, 0)$ .

$$\begin{aligned} g(3) &= |f(3) + k| = a = 1 \\ |0 + k| &= 1 \\ k &= \pm 1. \end{aligned}$$

## 6.5 קיז' תשע"ז מועד א

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{x^2 - 10x + 24}}$$

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- (2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).
- (3) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.
- (4) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).
- (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתונה הפונקציה  $f(x) = g(x+5)$  המקיים:  $g(x)$

ב. (1) הוכח ש- $g(x)$  היא פונקציה אי-זוגית.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

$$\cdot \int_a^b g(x) dx = \int_{a+5}^{b+5} f(x) dx \quad \text{מתקיים השוויון: } 1 < a < b$$

### סעיף א

(1) הפונקציה מוגדרת אם המכנה שונה מאפס ואם הביטוי בשורש גדול או שווה לאפס:

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 24 &> 0 \\ (x-4)(x-6) &> 0. \end{aligned}$$

המכפלה חיובית רק אם שני הגורמים גדולים מאפס או שניהם קטנים מאפס. אבל אם  $x > 6$  או גם  $x < 4$  ואם  $4 < x < 6$ , ולכן הפונקציה מוגדרת כאשר:

$$x < 4 \quad \text{או} \quad x > 6.$$

(2) אם המכנה חיובי והמונה  $0 = x - 5$ . אבל 5 לא בתחום ההגדרה כך שאין נקודת חיתוך עם ציר  $x$ . נחשב את נקודות החיתוך  $y = f(0)$  עם ציר  $y$ :

$$y = f(0) = \frac{0-5}{\sqrt{0^2 - 10 \cdot 0 + 24}} = \frac{-5}{\sqrt{24}}.$$

(3) כאשר  $x \rightarrow 6^+$  המונה שואף ל- $+1$ , ובמכנה שורש חיובי שහולך וקטן, ולכן  $f(x) \rightarrow +\infty$ . אבל  $x = 4^-$  היא אסימפטוטה אנכית אחת. באופן דומה, כאשר  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -1$ , כלומר  $x = 4^-$  היא אסימפטוטה אנכית שנייה.

כאשר  $x \rightarrow +\infty$  המנה שואף ל- $+\infty$ , ובמכנה  $x^2 \gg -10x + 24$ , וערך שואף ל- $+\infty$ . לכן  $y = f(x)$  היא אסימפטוטה אופקית אחת. באופן דומה, כאשר  $x \rightarrow -\infty$ ,  $y \rightarrow -1$ , כלומר  $y = f(x)$  היא אסימפטוטה אופקית שנייה.

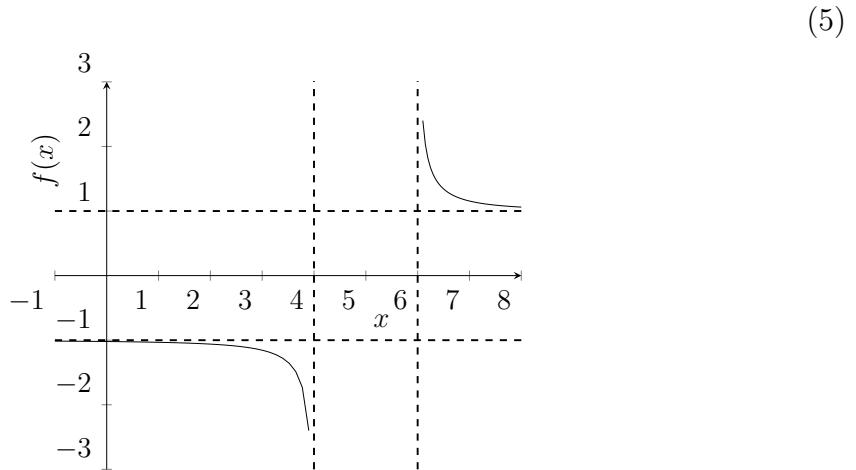
(4) אי-אפשר מיד להכין טבלה של עליות וירידות, כי אין לנו יודעים אם יש נקודות קיצון בתחום ההגדרה של הפונקציה.צעד ראשון נבדוק את ערכו של  $f'(x)$ . לשם קיצור נסמן  $u = x^2 - 10x + 24$ . הנגזרת היא:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{u} - (x-5) \cdot \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x-10)}{u} = \frac{u - (x-5)(x-5)}{u\sqrt{u}}.$$

נ<sup>ח</sup>יובי בתחום ההגדרה וגם  $\sqrt{u}$  חיובי, ולכן הסימן או נקודת האיפוס של הנגזרת תלוי רק במונה:

$$u - (x-5)(x-5) = x^2 - 10x + 24 - x^2 + 10x - 25 = -1.$$

בתחום ההגדרה, הנגזרת שלילית ולא מתאפסת, ולכן הפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה.



### סעיף ב

:  $g(-x) = -g(x)$ -ש להראות ולחשב את  $g(x), g(-x)$

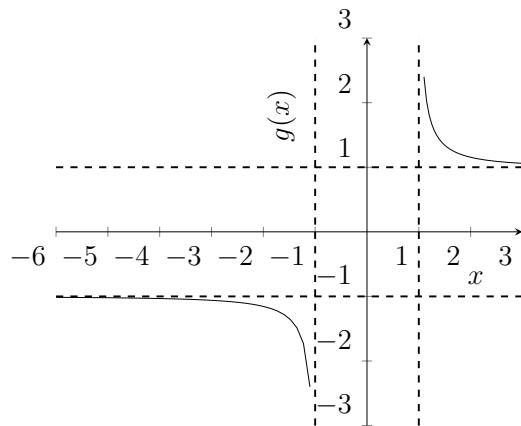
$$\begin{aligned} g(-x) &= f(-x+5) = f(5-x) \\ &= \frac{5-x-5}{\sqrt{(5-x)^2 - 10(5-x) + 24}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{25-10x+x^2-50+10x+24}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+5) \\ &= \frac{x+5-5}{\sqrt{(x+5)^2 - 10(x+5) + 24}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+10x+25-10x-50+24}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = -\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = -g(-x). \end{aligned}$$

פתרון מעט יותר מסובך הוא להראות  $g(-x) = -g(x)$  בצורה ישירה:

$$\begin{aligned}
 g(-x) &= f(-x+5) = f(5-x) \\
 &= \frac{5-x-5}{\sqrt{(5-x)^2 - 10(5-x) + 24}} \\
 &= \frac{-x}{\sqrt{(x^2 + 10x + 25) - (10x + 50) + 24}} \\
 &= \frac{-(x+5)-5}{\sqrt{(x+5)^2 - 10(x+5) + 24}} = -g(x).
 \end{aligned}$$

הגרף הוא אותו גраф מוזז שמאלה חמיש יחידות: (2)



### סעיף ג

נתו  $1 < b < a$ , וכי שנייתן לראות מהגרף,  $a, b$  הם בתחום ההגדרה של  $g$ . נחשב:

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x+5)dx = \int_{a+5}^{b+5} f(x)dx.$$

## 6.6 חורף תשע"ז

$$f(x) = \frac{ax^2 + 4x}{x^2 + 3x + b} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

א ו b הם פרמטרים.

נתון:  $x = 1$ ,  $y = 1$  הן אסימפטוטות של הפונקציה.

א. מצא את a ואת b.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) האם יש לפונקציה אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים

( בלבד  $1 = x \wedge 1 = y$  ) ? הסבר.

(4) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. עבור אילו ערכי x מתקיים:  $|f(x)| = -f(x)$  ? נמק.

ה. גדייר  $(x \cdot f'(x))^2 = f^2(x)$ .

הראה כי השטח המוגבל על ידי ציר ה- $x$ , על ידי גרף הפונקציה  $(x, g(x))$

ועל ידי הישר  $x = 0.5$  הוא  $\frac{1}{3}$ . נמק את תשובתך.

### סעיף א

נקבל את האסימפטוטה אנכית  $1 = x$  כאשר המכנה מתאפס:

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + b &= 0 \\ 1^2 + 3 \cdot 1 + b &= 0 \\ b &= -4. \end{aligned}$$

נחשב את האסימפטוטה האופקית  $1 = y$ . כאשר  $x \rightarrow \infty$ .

$$\frac{a + \frac{4}{x}}{1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} \rightarrow 1,$$

### סעיף ב

(1) המכנה מתאפס כאשר:

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1) = 0,$$

ולכן הפונקציה מוגדרת עבור כל  $x$  פרט ל- $-4$  ו- $1$ .

(2) נציב  $0 = x$ . המכנה מתאפס והמכנה לא מתאפס ולכן נקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  היא  $(0, 0)$ . נציב  $0 = y$  ונקבל  $0 = x(x + 4) = x^2 + 4x = x(x + 4)$ . ( $0, 0$ ) היא נקודת חיתוך עם שני הצירים. ב- $-4$  הפונקציה לא מוגדרת, ולכן אין עוד נקודת חיתוך עם ציר ה- $x$ .

(3) אין עוד אסימפטוטה אופקיות לפי החישוב בסעיף א.  
יש אסימפטוטה אנכית כאשר  $x = -4$ . אבל  $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1) = 0$  גם מאפס את המונה. נצמצם את הפונקציה:

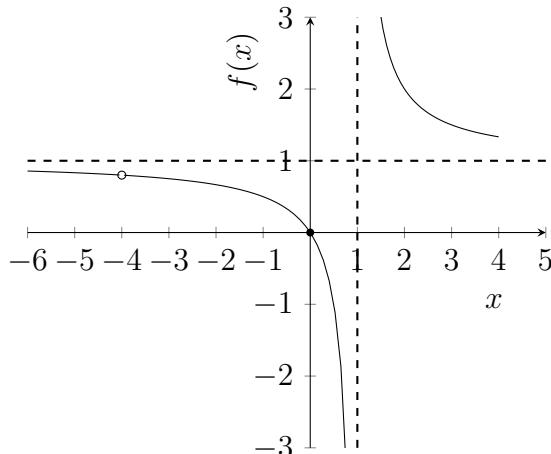
$$\frac{x^2 + 4x}{x^2 + 3x - 4} = \frac{x(x+4)}{(x+4)(x-1)} = \frac{x}{x-1}.$$

כאשר  $-4 \rightarrow x$  (בשני הכוונים), ערך הפונקציה שואפת ל- $\frac{4}{5}$ , ולכן אין כאן אסימפטוטה אלא חור.  
(4) הנגזרת הראשונה (לא החישובים הארכוכים):

$$\frac{(x^2 + 4x)'(x^2 + 3x - 4) - (x^2 + 4x)(x^2 + 3x - 4)'}{(x^2 + 3x - 4)^2} = \frac{-(x+4)^2}{(x^2 + 3x - 4)^2}.$$

הנגזרת לא מתאפסת ותמיד שלילית, ולכן הפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה שלו.  
אפשר לומר אם נצמצם את הפונקציה לפי שנחשב את הנגזרת,  $\left(\frac{x}{x-1}\right)' = -1$ , ש תמיד שלילי.

#### סעיף ג



#### סעיף ד

אם נתיחס לגרף,  $|f(x)|$  מעביר ערכים מתחת לציר ה- $x$  לערכים מעל לציר, ו- $-f(x)$  מעביר את כל הערכים לצד השני של ציר ה- $x$ . רק עבור ערכים מתחת לציר ה- $x$  כי רק עבור ערכים אלה מתרבעת אותה פעולה. עבור פונקציה זו הערכים הם  $1 < x \leq 0$ .

#### סעיף ה

מצאנו ש- $f(0) = 0$  וחישוב פשוט מראה ש- $f'(0.5) = -\frac{9}{4} = -2.25$   
mseuf b (f'(x))' תמיד שלילי ולכן (g(x) = f(x)^2 · f'(x))' תמיד שלילי או אפס. השטח שיש לחשב נמצא מתחת לציר ה- $x$ . נשים לב ש- $(f^3(x))' = 3f^2(x) \cdot f'(x)$ , ונוכל לחשב את השטח:

$$\int_0^{0.5} 0 - f^2(x) \cdot f'(x) = -\frac{1}{3}f^3(x) \Big|_0^{0.5} = -\frac{1}{3}f^3(0.5) - (-0) = -\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 = \frac{1}{3}.$$

## 6.7 קיז תשע"ו מועד ב

$$f(x) = \frac{2\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x} . \quad \text{נתונה הפונקציה:}$$

א. בתחום  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לציר  $x$  (אם יש כאלה).

(3) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה  $f(x)$  עם ציר  $x$  (אם יש כאלה).

(4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה),

וקבע את סוגן.

ב. בתחום  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(1) הראה שפונקציה  $f(x)$  היא זוגית.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ג. מצא את השטח בריבוע הראשון המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

על ידי ציר  $x$  ועל ידי ציר  $y$ .

### סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס.  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos^2 x = 0$ , ולכן תחום ההגדרה הוא  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ .

(2) כאשר  $\frac{\pi}{2} \rightarrow x$ , המכנה שווה לאפס והמונה שווה ל-1, ולכן  $x = \frac{\pi}{2}$  היא אסימפטוטה אנכית.

(3) בתחום ההגדרה המכנה לא מאפס, ולכן נקודות החיתוך הן נקודות עבורן המונה מתאפס:

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x &= 1 \\ \cos x &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

בתחומי ההגדרה יש רק פתרון אחד ונקודת הקיצון הוא  $(\frac{\pi}{4}, 0)$ .

(4) בתחום ההגדרה  $0 < x < \frac{1}{2}\pi$  ולכן  $\cos x > 0$ . חישוב הנגזרת:

$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)' = -(-2\cos x \cdot -\sin x) = -2\cos x \sin x = 0.$$

$f'(x)$  מתאפס בתחום ההגדרה כאשר  $x = 0$  ונקודת הקיצון היא  $(0, \frac{1}{2})$ . סינוס וקוסינוס חיוביים בתחום, ולכן הנגזרת שלילית והפונקציה יורדת בכל התחום. נקודת הקיצון היא מקסימום.

אפשרות אחרת היא לחשב את הנגזרת השנייה:

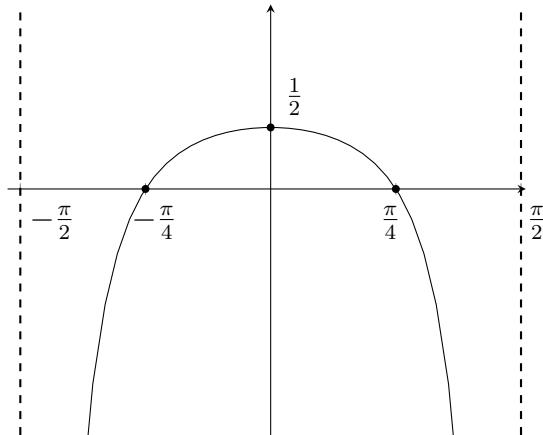
$$f''(x) = (-2\cos x \sin x)' = -2(-\sin^2 x + \cos^2 x).$$

בנקודות הקיצון  $f''(0) = -2 \cdot (-0 + 1) = -2$ ,  $x = 0$  מקסימום.

### סעיף ב

ולכן  $\cos^2(-x) = \cos^2 x$  והפונקציה זוגית.

(2) המקסימום הוא ב- $(0, \frac{1}{2})$ , הפונקציה יורדת בתחום ההגדרה  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ , יש אסימפטוטה אנכית ב- $\frac{\pi}{2}$ , והפונקציה זוגית. התרשים שמתאים הוא:



### סעיף ג

הנוסחה  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$  אמנים מופיעה בנוסחאות אבל לא מרבים להשתמש בה, כך שהשאלה עלולה להיות קשה.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos^2 x - 1}{2 \cos^2 x} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2 \cos^2 x} \\ &= x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

## 6.8 קיצ' תשע"ו מועד א

נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 - \sin(2x)$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ .  
עננה על הסעיפים שלפניך עברו התחום הנתון.

- א. מצא את השיפוע הגדול ביותר ואת השיפוע הקטן ביותר של גורף הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. סרטט סקיצה של גורף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .
- ג. (1) מצא את תחומי הקוירות כלפי מעלה ו כלפימטה של גורף הפונקציה  $f(x)$ .
- (2) סרטט סקיצה של גורף הפונקציה  $f(x)$ .

### סעיף א

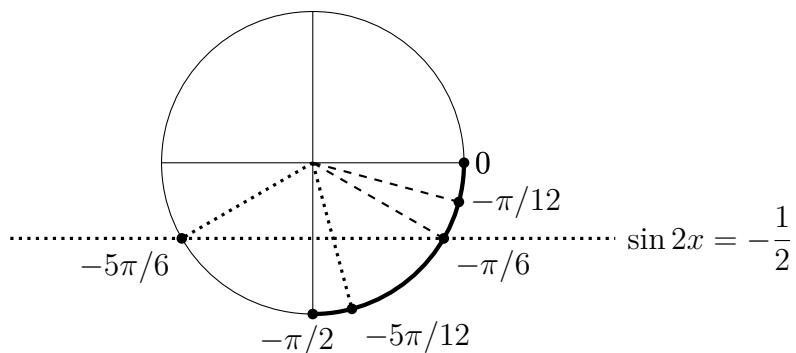
נתחיל עם חישוב הנגזרות:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - \sin 2x \\ f'(x) &= 2x - 2 \cos 2x \\ f''(x) &= 2 + 4 \sin 2x. \end{aligned}$$

השאלה מבקשת את נקודות הקיצון של הנגזרת הראשונה ונקבל אותן על ידי חישוב הנקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת:

$$\begin{aligned} 2 + 4 \sin 2x &= 0 \\ 2x &= \sin^{-1} \left( -\frac{1}{2} \right) = -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6} \\ x &= -\frac{\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12}. \end{aligned}$$

כאן יש להיזהר. למרות ש- $x = -\frac{5\pi}{12}$  לא נמצא בתחום, והוא נקודת קיצון של הנגזרת הראשונית.



כדי לבדוק אם נקודות הקיצון הן מינימום או מקסימום, נחשב את **הנגזרת השנייה** של הנגזרת הראשונה שהיא הנגזרת השלישייה של הפונקציה.

$$f'''(x) = 8 \cos 2x$$

$$f''' \left( -\frac{\pi}{12} \right) = 8 \cos \left( -2 \cdot \frac{\pi}{12} \right) = 6.93 > 0$$

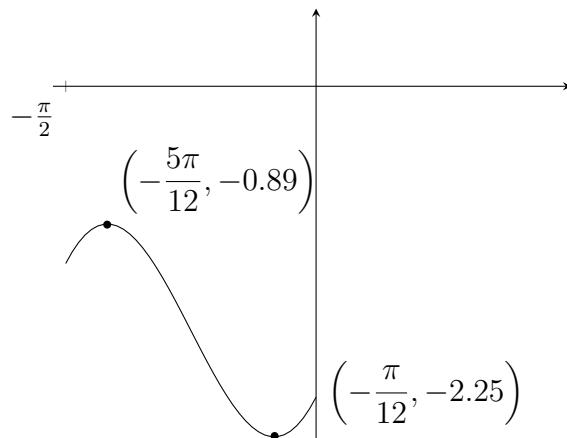
$$f''' \left( -\frac{5\pi}{12} \right) = 8 \cos \left( -2 \cdot \frac{5\pi}{12} \right) = -6.93 < 0.$$

מכאן שהSHIPוע הגדל ביותר נמצא ב-  $x = -\frac{5\pi}{12}$ , והSHIPוע הקטן ביותר נמצא ב-  $x = -\frac{\pi}{12}$ .  
משמעותו לב שהשאלה מבקשת את **ערך הקיצון של השיפועים** ולא רק איפה הם נמצאים:

$$f' \left( -\frac{5\pi}{12} \right) = 2 \cdot -\frac{5\pi}{12} - 2 \cos \left( -\frac{5\pi}{6} \right) = -2.62 + 1.73 = -0.89$$

$$f' \left( -\frac{\pi}{12} \right) = 2 \cdot -\frac{\pi}{12} - 2 \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) = -0.52 - 1.73 = -2.25.$$

### סעיף ב



### סעיף ג

(1) נקודות הפיתול הן הנקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת  $f''(-\frac{5\pi}{12}) = 0.965 > 0$   
עבור הערך  $-\frac{5.5\pi}{12}$  שהוא מעט קרוב יותר ל-  $-\frac{\pi}{2}$  – הנגזרת השנייה היא:

$$f'' \left( -\frac{5.5\pi}{12} \right) = 2 + 4 \sin \left( 2 \cdot -\frac{5.5\pi}{12} \right) = 0.965 > 0,$$

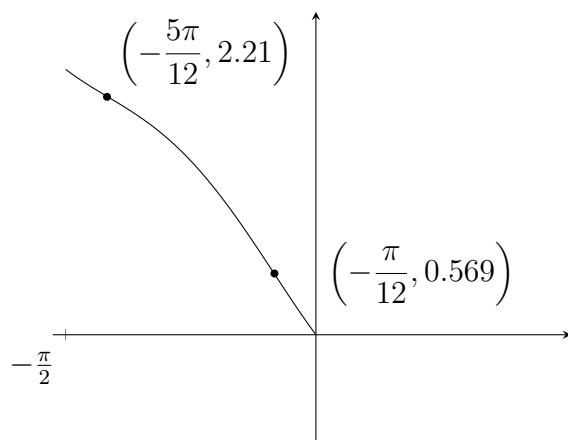
והפונקציה קעורה כלפי מעלה ב-  $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{5\pi}{12}$ .  
עבור הערך  $-\frac{\pi}{4}$  שהוא בין שתי נקודות הפיתול, הנגזרת השנייה היא:

$$f'' \left( -\frac{\pi}{4} \right) = 2 + 4 \sin \left( 2 \cdot -\frac{\pi}{4} \right) = -2 < 0,$$

והפונקציה קעורה כלפי מטה ב-  $x < -\frac{\pi}{12}$ .  
 עברו הערך  $-\frac{\pi}{24}$  שהוא מעט קרוב יותר ל-0 הנגזרת השנייה היא:

$$f''\left(-\frac{\pi}{24}\right) = 2 + 4 \sin\left(2 \cdot -\frac{\pi}{24}\right) = 0.965 > 0,$$

והפונקציה קעורה כלפי מעלה ב-  $0 < x < -\frac{\pi}{12}$ .  
 נקודות הפיתול מסומנות.



## 6.9 חורף תשע"ו

נתונה הפונקציה  $f(x) = a \cdot \sin^2 x + b \cdot \cos(4x)$  בתחום  $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ .  
 ורט  $a$  ו-  $b$  הם פרמטרים.

לפונקציה  $f(x)$  יש קיצון בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{3}$ .  
 נתון כי  $b < 0$ .

א. הבע באמצעות  $b$  (במידת הצורך) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון.

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $(x)f'$  בתחום הנתון.

ד. (1) מצא את הערך של האינטגרל  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} f''(x) dx$ .

(2) בתחום  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ , הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה  $(x)f''$  חותך את ציר ה-  $x$  בנקודה אחת שבה  $x = k$ .

בתחום  $k \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , השטח המוגבל על ידי הגרף של  $(x)f''$ , על ידי ציר ה-  $x$  ועל ידי הישר  $x = \frac{\pi}{2}$ , שווה ל-  $S$ .

הבע באמצעות  $S$  את השטח המוגבל על ידי הגרף של  $(x)f''$ , על ידי ציר ה-  $x$

ועל ידי הישר  $x = \frac{2\pi}{3}$  בתחום  $k \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ . נמק.

הערה: אין צורך למצוא את  $(x)f''$ .

### סעיף א

נחשב את הנגזרת הראשונה, נציב  $x = \frac{\pi}{3}$ , ונבדוק אם היא מתאפסת?

$$f'(x) = 2a \sin x \cos x - 4b \sin 4x$$

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2a \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - 4 \sin \frac{4\pi}{3} \\ &= 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - 4b \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$a = -4b.$$

השאלה מבקשת את נקודות הקיצון באמצעות  $b$  ולכן נציב עבור  $a$ :

$$f'(x) = -8b \sin x \cos x - 4b \sin 4x = 0.$$

המשוואת נראית די מסובכת אבל ניתן לפשט אותו על ידי שימוש בנוסחה עבור  $\sin(\theta + \theta)$ :

$$\begin{aligned} -8b \sin x \cos x - 4b \sin 4x &= -4b(2 \sin x \cos x + \sin(2x + 2x)) \\ &= -4b(\sin 2x + 2 \sin 2x \cos 2x) \\ &= -4b \sin 2x(1 + \cos 2x) = 0. \end{aligned}$$

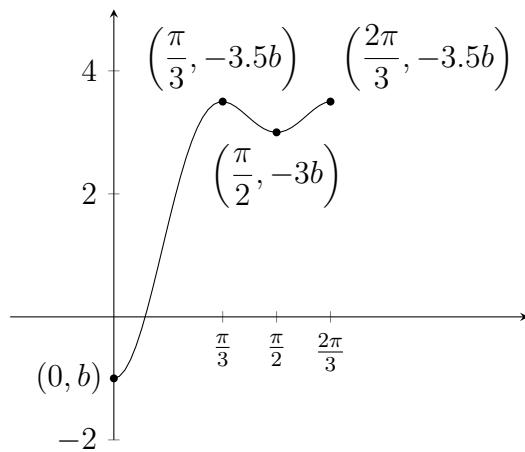
נבדוק כל אחד משני הגורמים כדי לחפש איפה הם מתאימים בתחום.  $\sin 2x = 0$  כאשר  $2x = k\pi$ , כלומר  $x = \frac{k\pi}{2}$ . מ- $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi, \dots$  יש לנו  $\cos 2x = 1$ . בתחום, האפשרויות הן  $1 + \cos 2x = 0$ ,  $1 + \cos 2x = 2$ . נחשב את נקודות הקיצון:

$$\begin{aligned} f(0) &= -4b \sin^2 0 + b \cos 0 = b \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -4b \sin^2 \frac{\pi}{3} + b \cos \frac{4\pi}{3} = -4b \cdot \frac{3}{4} + b \cdot -\frac{1}{2} = -3.5b \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -4b \sin^2 \frac{\pi}{2} + b \cos \frac{4\pi}{2} = -4b + b = -3b \\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= -4b \sin^2 \frac{2\pi}{3} + b \cos \frac{8\pi}{3} = -4b \cdot \frac{3}{4} + b \cdot -\frac{1}{2} = -3.5b. \end{aligned}$$

אליה כל נקודות הקיצון כולל בקצות התחום והפונקציה מוגדרת בכל התחום. נתון  $b < 0$ , ולכן:

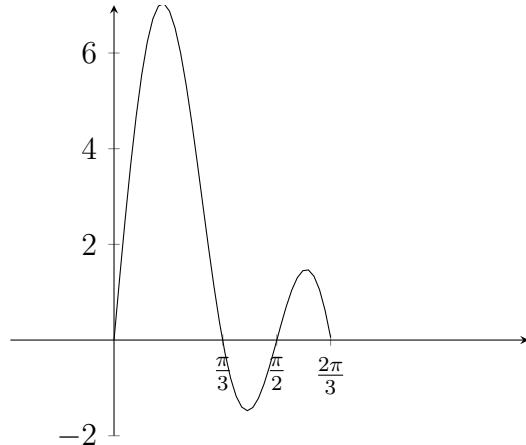
**מקסימום**  $(0, b)$ ,  $\left(\frac{\pi}{3}, -3.5b\right)$ , **מינימום**  $\left(\frac{\pi}{2}, -3b\right)$ ,  $\left(\frac{2\pi}{3}, -3.5b\right)$

### סעיף ב



## סעיף ג

בארבעת נקודות הקיצון הנגורת הראשונה היא אפס. מעיון הגרף של  $f(x)$ , השיפוע מתחילה באפס, עולה וاز יורדת שוב לאפס, אח"כ יורדת עוד ועולה, ולבסוף עולה עוד ויורדת.



## סעיף ד

(1)

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} f''(x) dx &= f'(x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \\
 &= -4b \sin \frac{4\pi}{3} \left( 1 + 2 \cos \frac{4\pi}{3} \right) + 4b \sin \frac{2\pi}{2} \left( 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{2} \right) \\
 &= -4b \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} \left( 1 + 2 \cdot -\frac{1}{2} \right) + 4b \sin 0 (1 + 2 \cdot -1) \\
 &= 0 + 0 = 1.
 \end{aligned}$$

(2) ב-(1) חישבנו שהאינטגרל על כל התוחום מ- $\frac{\pi}{2}$  ל- $\frac{2\pi}{3}$  הוא 0. השטח הראשון, האינטגרל מ- $\frac{\pi}{2}$  ל- $k$ , הוא  $-S$ . לכן השטח השני, האינטגרל מ- $k$  ל- $\frac{2\pi}{3}$ , הוא  $S$ .

## 6.10 קייז תשעיה מועד ב

נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$ , נתון התחום

בתחום הנתון ענה על הסעיפים א ו ב.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $(x)$ .

(2) האם הפונקציה  $(x)$  היא פונקציה זוגית או אי-זוגית? נמק.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $(x)$ , וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $(x)$ .

ב. נתונה הפונקציה  $a - g(x) = f(x)$ .

(1) מצא את הערכים האפשריים של  $a$  שעבורם יש

למשוואה  $a - f(x) = 0$  פתרון אחד בלבד.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $(x)$  עבור כל אחד מהערכים של  $a$  שמצוות

בתת-סעיף ב (1).

### סעיף א

(1) הערכים שמאפסים את המכנה הם:

$$\sin 0 = 0, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos -\frac{\pi}{2} = 0.$$

תחום ההגדרה הוא:

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

(2) הפונקציה סינוס היא אי-זוגית והפונקציה קוסינוס היא זוגית. המכפלת שלן היא אי-זוגיתות.

(3)

$$((\sin x \cos x)^{-1})' = -1 \cdot (\sin x \cos x)^{-2}(\sin x \cos x)'.$$

בתחום ההגדרה המכנה חיובי, כך שנאריך רק לבדוק אם המונה יכול להתaffle.

$$-(\sin x \cos x)' = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = (\sin^2 x - \cos^2 x) = 0.$$

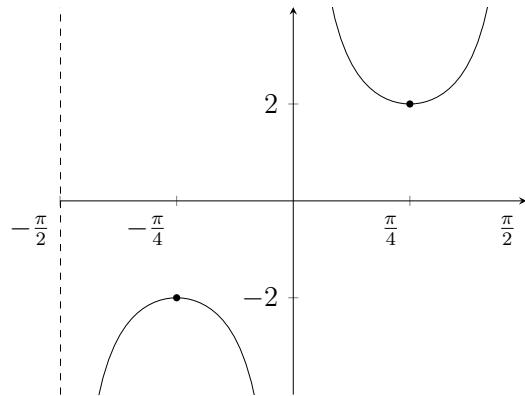
נקודות הקיצון הן בערכים שיש להם ערך מוחלט של סינוס שווה לערך מוחלט של קוסינוס, שהם  $\frac{\pi}{4} \pm k \cdot \frac{\pi}{2}$ . בתחום ההגדרה:

$$x = \frac{\pi}{4}, \quad y = \frac{1}{(\sqrt{2}/2) \cdot (\sqrt{2}/2)} = 2, \quad x = -\frac{\pi}{4}, \quad y = \frac{1}{(-\sqrt{2}/2) \cdot (\sqrt{2}/2)} = -2.$$

המכנה של הנגזרת הראשונה הוא  $(\sin x \cos x)^2$ , ערך חיובי בתחום ההגדרה, ולכן, סימן הנגזרת השנייה הוא כסימן הנגזרת של המונה.

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)' = 2 \sin x \cos x - 2 \cos x(-\sin x) = 4 \sin x \cos x .$$

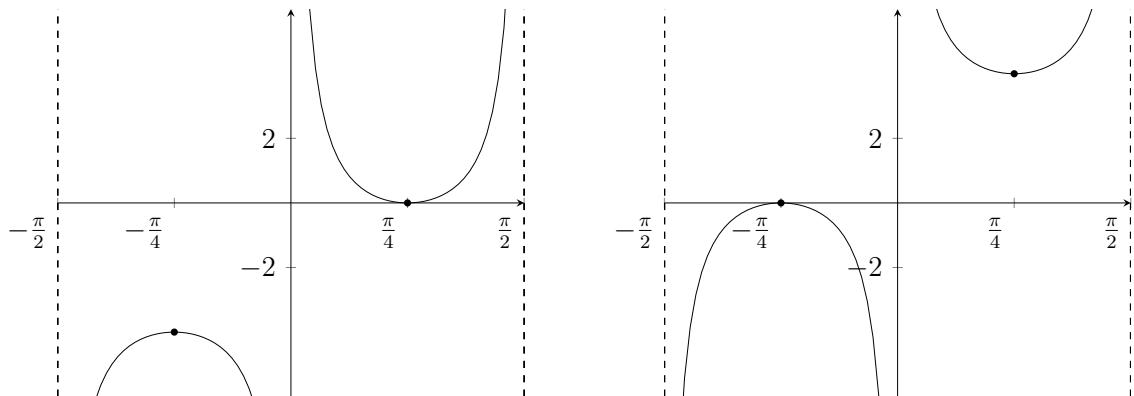
עבור  $x = \frac{\pi}{4}$  והנקודה היא מינימום.  
עבור  $x = -\frac{\pi}{4}$  והנקודה היא מקסימום.  
(4)



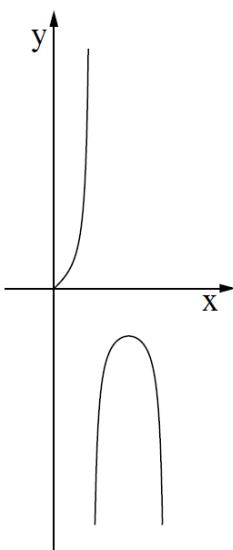
### סעיף ב

(1) למשוואה פתרון אחד אם הגרף משיק לציר ה- $x$  או חותך את הציר במקומות אחד בלבד (לא קורה כאו).  
הגרף משיק כאשר  $a = \pm 2$ , שמעלה או מוריד את הגרף בשתי ייחidot.

(2)



## 6.11 קיצ' תשע"ה מועד א



נתונה הפונקציה  $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$   $f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$  ונתון התחום  
(ראה ציור).

ענה על הטעיפים א, ב ו-ג עבור התחום הנתון.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה  $f(x)$ .

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ ,

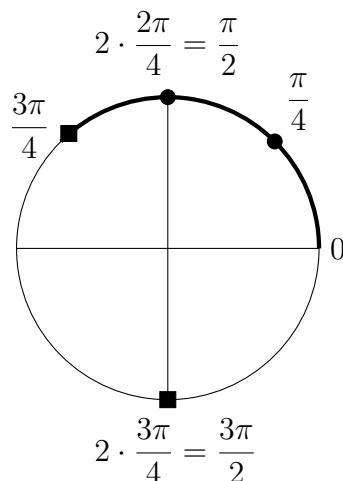
וקבע את סוגן על פי הציור.

ב. סרטט סקיצה של גורף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

ג. נתונה הפונקציה  $g(x) = 2f(x) + f'(x)$  המקיים:

מצא את השטח המוגבל על ידי גורף הפונקציה  $g(x)$ ,

על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישר  $x = \frac{\pi}{6}$ .



### סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדרת כאשר  $\cos 2x = 0$ . בתחום הנתון, רואים בתרשים שזיה קורה עברו תחום ההגדרה הוא :

$x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$ ,  $0 \leq x < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ .

(2) האסימפטוטות הן בערכי ציר ה- $x$  בהם הפונקציה לא מוגדרת :  $x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$ .

(3) יש נקודות קיצון בקצה התחום  $(0, 0)$ . נחשב את הנגזרת כדי לחשוף את נקודות קיצון הפנימית המופיעות בתרשים :

$$\left( \frac{\sin x}{\cos 2x} \right)' = \frac{\cos x \cos 2x - \sin x(-2 \sin 2x)}{\cos^2 2x}.$$

בתוךם ההגדרה המכנה חיובי כך הנגזרת מתאפס אם המונה יתאפס:

$$\begin{aligned} \cos x \cos 2x + 2 \sin x \sin 2x &= \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \sin x \cdot 2 \sin x \cos x \\ &= \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x + 4 \sin^2 x) \\ &= \cos x((\cos^2 x + \sin^2 x) + 2 \sin^2 x) \\ &= \cos x(1 + 2 \sin^2 x). \end{aligned}$$

בתוךם ההגדרה  $\cos x$  מתאפס כאשר  $1 + 2 \sin^2 x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$  אף פעם לא מתאפס. נקודת הקיצון היא  $(\frac{\pi}{2}, -1)$ . לפי היצור מדבר במקסימום מקומי.

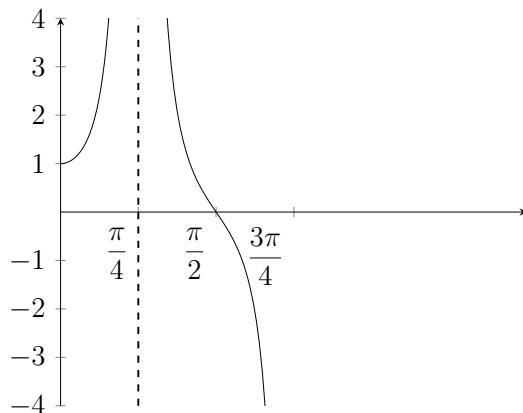
### סעיף ב

$$f'(x) = \frac{\cos x(1 + 2 \sin^2 x)}{\cos^2 2x}.$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = 1 \text{ ובסעיף הקודם חישבנו } f'(0) = 0.$$

המכנה של  $f'$  שווה לאפס, והמונה שונה מאפס, לכן ב- $\frac{\pi}{4}$  יש אסימפטוטה אנכית.

בתרשים הנתון ל-( $f(x)$  רואים שהשיפוע) הנגזרת הראשונה של הפונקציה עולה בין  $0$  ל- $\frac{\pi}{4}$ , ושיהיא יורדת בין  $\frac{\pi}{4}$  ל- $\frac{3\pi}{4}$ . התרשים ל- $f'(x)$  נראה כך:

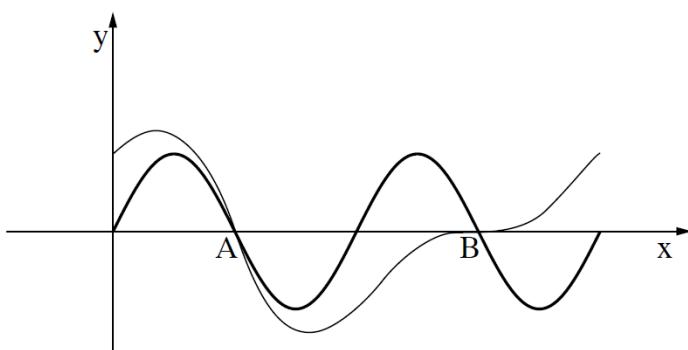


### סעיף ג

$$(f^2(x))' = 2f(x) \cdot f'(x) \text{ ולכן:}$$

$$\int_0^{\pi/6} g(x) dx = \int_0^{\pi/6} 2f(x) \cdot f'(x) dx = f^2(x) \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(2\pi/6)} - \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{1/2}{1/2} - \frac{0}{1} = 1.$$

## 6.12 חורף תשע"ה



נתונות שתי פונקציות:

$$f(x) = 0.5 \sin(2x) + \cos x$$

$$g(x) = \sin(2x)$$

בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

בתחום הנתון

הגרפים של הפונקציות

נפגשים בשתי נקודות, A ו B.

הנמצאות על ציר ה- x, כמתואר בציור.

א. דרך נקודה על ציר ה- x, הנמצאת בין הנקודות A ו B, מעבירים אנך לציר ה- x.

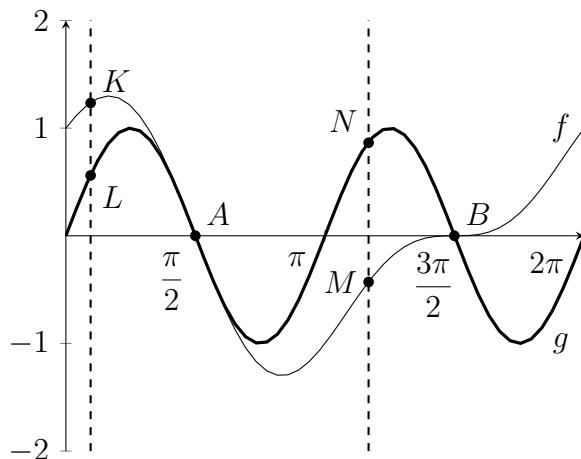
האנך חותך את הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו  $g(x)$  בנקודות M ו N.

ממצא את האורך המקסימלי של הקטע MN.

ב. דרך נקודה על ציר ה- x, הנמצאת בתחום  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , מעבירים אנך לציר ה- x.

האנך חותך את הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו  $g(x)$  בנקודות K ו L.

ממצא את האורך המקסימלי של הקטע KL.



### סעיף א

הgraf המודגש הוא  $g$  בגלל המחזוריות, אבל נבדוק על ידי חישוב נקודות החיתוך עם ציר ה- x. בתחום כאשר  $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ .

נחשב את הנזורה של ההפרש בין הפונקציות:

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= \sin 2x - 0.5 \sin 2x - \cos x = 0.5 \sin 2x - \cos x \\ (g(x) - f(x))' &= \cos 2x + \sin x = (1 - 2 \sin^2 x) + \sin x. \end{aligned}$$

נקודות החיתוך של  $f, g$  עם ציר ה- $x$  הן נקודות השניה והרביעית של  $g$  שווים  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ . נבדוק:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.5 \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 0 + 0 = 0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.5 \sin 2 \cdot \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2} = 0 + 0 = 0.$$

נחשב متى הנגזרת הראשונה של הפרש הפונקציות מתאפסת בתחום  $A = \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} = B$

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$(2 \sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = 1, -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}.$$

הנקודות  $\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$  בודאי אינן בתחום ולא יכול להיות נקודת הקיצון המבוקשת. המשקנה היא שנקודת הקיצון של  $g - f$  בין  $A$  ל- $B$  היא ב- $x = \frac{7\pi}{6}$ . נבדוק שנקודת זו היא באמת מסקימים על ידי חישוב הנגזרת השניה:

$$(1 - 2 \sin^2 x + \sin x)' \Big|_{\frac{7\pi}{6}} = (-4 \sin x + 1) \cos x \Big|_{\frac{7\pi}{6}} = -\left(4 \cdot -\frac{1}{2} + 1\right) \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0,$$

ולכן:

$$g\left(\frac{7\pi}{6}\right) - f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{7\pi}{3} - \cos \frac{7\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

הוא האורך המקסימלי של  $MN$ .

## סעיף ב

נקודות חיתוך של שליליה של פונקציה על ציר ה- $x$  זהים לנקודות החיתוך של הפונקציה (ראו בנספח). לכן נקודות האיפוס של  $(f(x) - g(x))'$  הן נקודות האיפוס של  $(g(x) - f(x))'$ , שווים הערכיהם עבורם נקודות האיפוס  $x = 0, \frac{\pi}{2}$ . נחשב:  $\sin 2x = 1, -\frac{1}{2}$ .

$$f(0) - g(0) = -(0.5 \sin(2 \cdot 0) - \cos 0) = -(0 - 1) = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(0.5 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \cos \frac{\pi}{2}\right) = -(0 - 0) = 0,$$

והאורך המקסימלי של  $KL$  הוא 1 כאשר  $x = 0$ .

## 6.13 קיצ' תשע"ד מועד ב

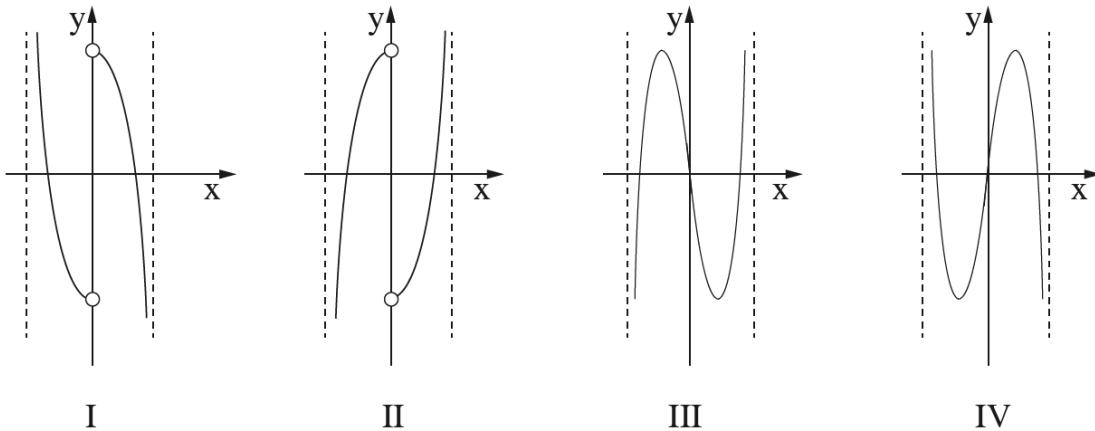
$$f(x) = x\sqrt{8-x^2} \quad \text{נתונות שתי פונקציות:}$$

$$g(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$$

א. (1) לשתי הפונקציות יש אותו תחום ההגדרה.  
מצא את תחום ההגדרה.

- ב. (2) מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות ( $x$ )  $f$  ו- ( $x$ )  $g$  עם הצירים.  
מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של כל אחת מהפונקציות, וקבע את סוגן.  
ג. על פי הסעיפים א ו- ב, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה ( $x$ )  $f$ ,  
ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה ( $x$ )  $g$ .  
ד. לפני ארבעה גرافים, I-IV.

איזה מהגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת ( $x$ )  $g'$ ? נמק.



### סעיף א

- (1) הפונקיות מוגדרת כאשר ביטוי בשורש לא שלילי. עבור  $f$  אם  $0 \leq x^2 - 8$  ותחום ההגדרה הוא  $-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$ .  
עבור  $g$  אם  $0 \leq x^4 - 8^2$  ותחום ההגדרה מורכב מ-  $x = 0$  ו-  $-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$ . אבל  $x = 0$  נמצא בתחום הראשוני כך שהוא לא מסויף ערכיים, ותחומי ההגדרה של  $f, g$  זהים.  
(2) עבור  $f$ : אם  $x = 0, y = 0$  או  $\sqrt{8 - x^2} = 0$ , נקודות החיתוך עם ציר ה- $x$  הן  $(\pm\sqrt{8}, 0), (0, 0)$ .  
אם  $x = 0, y = 0$  ונקודות החיתוך עם ציר ה- $y$  היא  $(0, 0)$ .  
עבור  $g$ : אם  $0 \leq x^2 - 8^2$  עבור אותם ערכים  $0 \leq x^2 \leq 8^2$  ו-  $\sqrt{8x^2 - x^4} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{8 - x^2} = 0$ . ונקודות החיתוך הן אותן נקודות שקיבלנו עבור  $f$ .

## סעיף ב

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 \cdot \sqrt{8-x^2} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{8-x^2}} \cdot (-2x) \\
 &= \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}} \\
 g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{8x^2-x^4}} \cdot (16x-4x^3) \\
 &= \frac{8x-2x^3}{\sqrt{8x^2-x^4}} = \frac{x(8-2x^2)}{\sqrt{8x^2-x^4}}.
 \end{aligned}$$

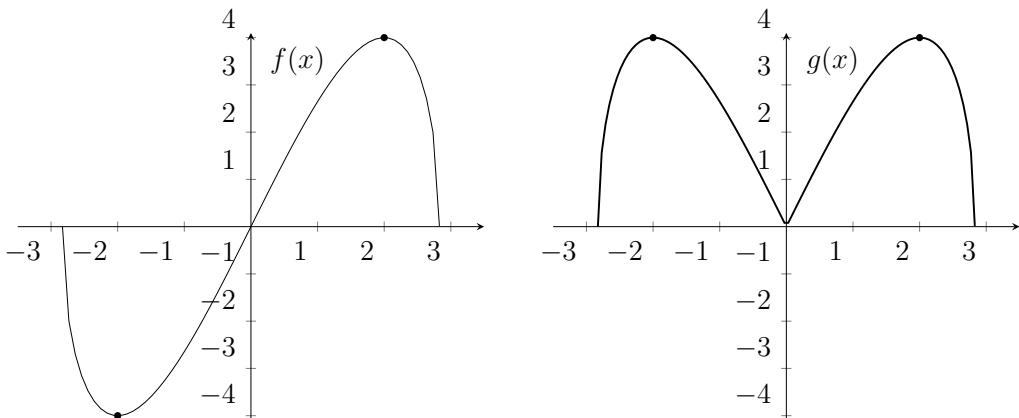
פרט ל- $\pm\sqrt{8}$ , בוחן הפונקציות לא מוגדרות, המכנה חיובי והנזרות יתאפשרו כאשר המונה יתאפשר.

עבור  $f$  הנקודות הן  $(-\infty, -4)$ ,  $(-2, -4)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(\pm\sqrt{8}, 0)$ , ולכן  $(-\infty, -4)$  היא מינימום אבסולוטי ו- $(2, 4)$  היא מקסימום אבסולוטי.

עבור  $g$  הנקודות הן  $(-\infty, -4)$ ,  $(-2, 4)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(\pm\sqrt{8}, 0)$ . בנקודות הקצה ערכי הפונקציה הם  $(-\infty, -4)$ ,  $(-2, 4)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(\pm\sqrt{8}, 0)$  הן מקסימום אבסולוטי.

## סעיף ג

נתבונס על תחומי ההגדרה ונקודות הקצה של הפונקציות כדי לציר את התרשימים:



## סעיף ד

$$g'(x) = \frac{x(8-2x^2)}{\sqrt{8x^2-x^4}}$$

לא מוגדר באפס, ולכן אפשר לפסול III, VI.

מהתרשים עבור  $(x, g)$  או לפי חישוב ערכים לפני ואחרי נקודות הקיצון, רואים ש:  $(x, g)$  עולה ו/or יורדת כאשר מתקרבים לציר ה- $y$  משמאלי, ולכן  $(x, g')$  חיובית ו/or שלילית כאשר מתקרבים לציר.  $(x, g)$  עולה ו/or יורדת כאשר מתרחחים מציר ה- $y$  לימינו, ולכן  $(x, g')$  חיובית ו/or שלילית כאשר מתרחחים מהציג. הגרף I מתאר את הפונקציה.

## 6.14 קיז' תשע"ד מועד א

.  $0 \leq x \leq \pi$  ,  $g(x) = \sin(2x)$  ,  $f(x) = 2 \sin^2 x$  : נתונות שתי פונקציות:

א. בתחום הנתון מצא:

(1) את שיעורי  $x$  של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.

(2) את נקודות החיתוך של כל אחת משתי הפונקציות עם ציר  $x$ .

ב. (1) נתונה הפונקציה  $h(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$

$$\text{הראה כי } h'(x) = f(x).$$

(2) בתחום  $\pi \leq x \leq 0$  מצא את השטח הכלוא בין הגרפים

$$\text{של שתי הפונקציות } g(x) \text{ ו- } f(x).$$

### סעיף א

(1) בזרור שערך הפונקציות שוויים ב- $\pi$ ,  $0 = \sin \pi = 0$  כי  $0 = x$

נחפש פתרונות אחרים כאשר נניח ש- $\sin x \neq 0$  כדי לחלק ב- $\sin x$ :

$$2 \sin^2 x = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin x = \cos x$$

$$x = \frac{\pi}{4}.$$

(2) ראיינו ששתי הפונקציות מקובלות ערך אפס ב- $\pi$ ,  $0$ . נחפש ערכים אחרים בתחום.

עבור  $f$  :  $2 \sin^2 x = 0$  רק כאשר  $\pi = 0$ ,  $x = 0$ , ולכן אין נקודות חיתוך נוספת עם ציר  $x$ .

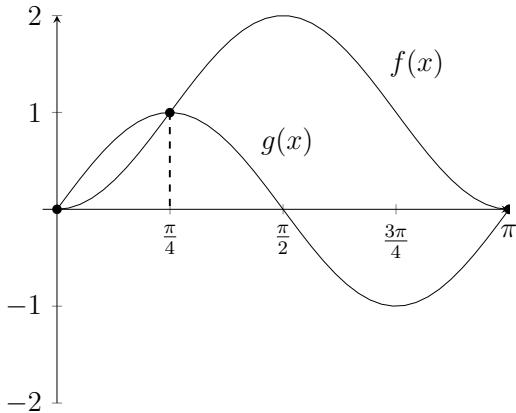
עבור  $g$  :  $\sin 2x = 0 + k\pi$ ,  $2x = 0, \pi, 2\pi, \dots$ , ולכן יש נקודות חיתוך גם ב-

### סעיף ב

(1)

$$\begin{aligned} h(x)' &= \left( x - \frac{\sin 2x}{2} \right)' = 1 - \frac{2 \cos 2x}{2} = 1 - \cos 2x \\ &= 1 - (\cos^2 x - \sin^2 x) = (1 - \cos^2 x) + \sin^2 x \\ &= 2 \sin^2 x = f(x). \end{aligned}$$

(2) מהתרשים להלן אנו רואים שהשטח מורכב משני קטעים, מ-0 עד  $\frac{\pi}{4}$  ו- $\frac{\pi}{4}$  עד  $\pi$ .



בסעיף זה יש מתנה: כדי לחשב את האינטגרל של  $f(x)$  נוכל להשתמש בפונקציה  $h(x)$  הנתונה:

$$h(x) = x - \frac{\sin 2x}{2} = \int h'(x) = \int f(x).$$

השטח הראשון הוא:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - f(x)) dx &= \left. \frac{-\cos 2x}{2} - \left( x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \right|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left( 0 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) - \left( -\frac{1}{2} - 0 + 0 \right) = -\frac{\pi}{4} + 1. \end{aligned}$$

השטח השני הוא:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (f(x) - \sin 2x) dx &= \left. \left( x - \frac{\sin 2x}{2} \right) - \frac{-\cos 2x}{2} \right|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\ &= \left( \pi - 0 + \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{3\pi}{4} + 1. \end{aligned}$$

השטח הכללי הוא:

$$S = -\frac{\pi}{4} + 1 + \frac{3\pi}{4} + 1 = \frac{\pi}{2} + 2.$$

## 6.15 חורף תשע"ד

$$f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x^2 - x + a} . \quad a \text{ הוא פרמטר גדול מ-1.}$$

הfonקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$ .

א. (1) מצא את האסימפטוטות של  $f(x)$  המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

(הבע באמצעות  $a$  במידת הצורך.)

(3) ידוע כי גרף הפונקציה  $f(x)$  חותך את ציר ה- $x$  בשתי נקודות בדיק.

סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ב. בתחום  $x \leq 0$ , השטח המוגבל על ידי הגרף של  $f(x)$ , על ידי הישר  $x = -1$

$$\text{ועל ידי ציר ה-} x, \text{ שווה ל- } \frac{1}{2} .$$

חשב את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  (מצא ערכים מסוימים).

**בבחינה זו היו שלוש שאלות בפרק השני לכטן מספר השאלה הוא 7 ולא 6.**

נתון שהfonקציה מוגדרת לכל  $x$  אבל מתחשק לי לוודא שזה נכון. אם נשווה את המכנה לאפס נקבל משווה ריבועית שפתרונותיה היא :

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2} .$$

נתון ש- $-1 < a$  אז אין פתרונות ממשיים לשווה.

**סעיף א**

(1) הפונקציה מוגדרת לכל  $x$  או אין אסימפטוטות אנכיות.

נحلк את הפונקציה בחזקה הגדולה ביותר ונקבל :

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{a}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{a}{x^2}}$$

ששואף ל 1 כאשר  $\rightarrow \pm \infty$ . האסימפטוטה האופקית היא  $y = 1$ .

(2) נחשב את הנגזרת הראשונה :

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2 - x + a) - (x^2 + x - a)(2x-1)}{(x^2 - x + a)^2} = \frac{-2x^2 + 4xa}{(x^2 - x + a)^2} .$$

המכנה חיובי ולכן הנגזרת מתאפס כאשר  $2x^2 = 4ax$ . נקודות הקיצון הן:

$$(0, -1), \quad \left(2a, \frac{4a+1}{4a-1}\right).$$

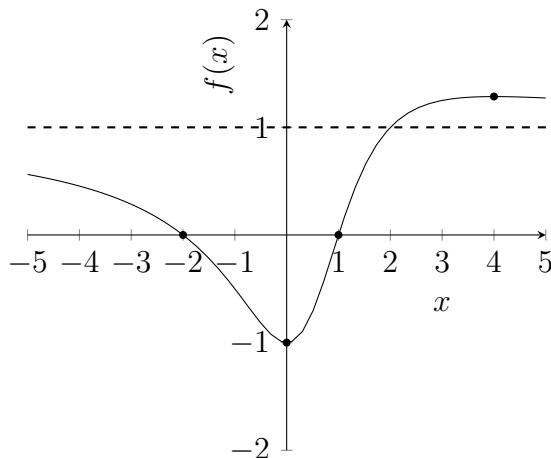
המכנה של הנגזרת הראשונה חיובית ולכן מספיק לבדוק את הסימן של הנגזרת של המונה:

$$(-2x^2 + 4ax)' = -4x + 4a$$

ב-  $0 < x < a$  – חיובי כי נתון  $x < a$ , ולכן נקודת הקיצון היא מינימום.

ב-  $-8a + 4a = -4a < x < 0$  – שלילי כי נתון  $x < 0$ , ולכן נקודת הקיצון היא מקסימום.

(3) קיימים מינימום ב-  $(0, -1)$  ואסימפטוטה אופקית ב-  $y = u$ . לפי הנתון שיש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ , הגרף עולה מנקודת המינימום וושאך לאינסוף ב-  $y = u$ . נשאר רק להחליט אם נקודת המקסימום היא מעל לאסימפטוטה או מתחתיה. אבל אם  $\frac{4a+1}{4a-1} > 1$ , אז נקודת המקסימום נמצאת מעל לאסימפטוטה.



## סעיף ב

נחשב את האינטגרל של הנגזרת הראשונה הוא הפונקציה עצמה:

$$\left| \int_{-1}^0 -f'(x) dx \right| = \left| f(x) \Big|_{-1}^0 \right| = |f(0) - f(-1)| = \left| -1 - \frac{-a}{a+2} \right| = \left| \frac{-2}{a+2} \right|.$$

נתון שהשיטה שווה ל-  $\frac{1}{2}$  ולכן  $a = 2$ . ערכי ה- $x$  של נקודות החיתוך הן הפתרונות של:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

שהם  $x = 1, x = -2$ . נקודות החיתוך הן:

# פרק 7 חדו"א שאלה 7

## 7.1 קיז תשע"ח מועד ב

נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ .

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ ?

ענה על השעיפים ב-ה עברו התחום  $x \geq \frac{2}{7}$ .

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גраф הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ .

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

ד. לפונקציה  $f(x)$  יש אסימפטוטה אופקית. מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה  $f(x)$ .

ה. סרטט סקיצה של גраф הפונקציה  $f(x)$ .

ענה על סעיף ו עברו התחום  $x > 0$ .

נסתכל על נקודות החיתוך של גраф הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ .

לפניך 3 טענות (i-iii). אחת מהן נכונה. איזו מהן היא הנכונה? נמק.

(i) ככל שמתקרבים ל- $0 = x$ , המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וקטן.

(ii) המרחק בין כל שתי נקודות חיתוך סמוכות נשאר קבוע.

(iii) ככל שמתקרבים ל- $0 = x$ , המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וגדל.

### סעיף א

הפונקציה מוגדרת כאשר במכנה  $0 \neq x$ .

### סעיף ב

$$\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0, \quad \frac{\pi}{x} = k\pi, \quad x = \frac{1}{k}.$$

נבדוק עבור כמה ערכים של  $[k, x]$ :

$$[1, 1], \left[2, \frac{1}{2}\right], \left[3, \frac{1}{3}\right], \left[4, \frac{1}{4}\right].$$

אבל  $\frac{2}{7} \leq x < 4$ , הנקודות מחוץ לתחום. נקודות החיתוך הן:

$$\left(\frac{1}{3}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right), (1, 0).$$

### סעיף ג

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) = 0.$$

הגורם  $-\frac{\pi}{x^2}$  לא יכול לקבל ערך אפס, ולכן נקודות הקיצון הן הנקודות:

$$\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{2} + k, \quad x = \frac{2}{1+2k}.$$

נבדוק עבור כמה ערכים של  $x$  :

$$[0, 2], \left[1, \frac{2}{3}\right], \left[2, \frac{2}{5}\right], \left[3, \frac{2}{7}\right].$$

ברור שעבור  $k \geq 4$  הנקודות מוחז לתוכם.

לפי הערכים של  $f(x)$  אפשר לקבוע את סוג נקודות הקיצון :

$$\begin{array}{lll} \left(\frac{2}{7}, -1\right) & \left(\frac{2}{5}, 1\right) & \text{מקסימום} \\ \text{מינימום} & \left(\frac{2}{3}, -1\right) & \text{מקסימום} \\ (2, 1) & & \text{מינימום} \end{array}$$

אפשר לבדוק לפי נגזרת שנייה. המכנה של הנגזרת הראשונה  $x^2$  חיובית, ולכן מספיק לבדוק את הסימן של הנגזרת של המונה :

$$-\left(\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)' = -\left(-\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) = -\frac{\pi}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

מכאן שסימן הנגזרת השנייה תלוי בסימן של  $-\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ .

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1, \quad -\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -1, \quad -\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 1.$$

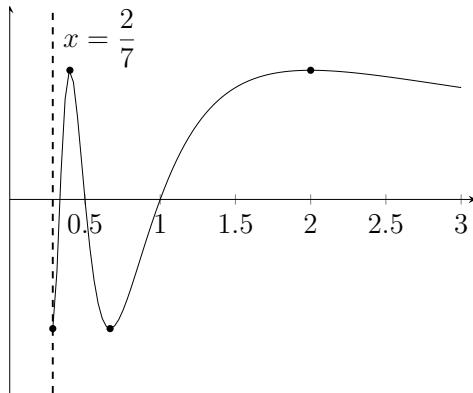
הסימנים תואמים את קבועות סוג נקודות הקיצון שרשמננו.

#### סעיף 4

$y = f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ . יש אסימפטוטה אופקית ב-0.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{x} = 0$

#### סעיף 5

נקודות הקיצון מסוימות :



#### סעיף 6

ככל ש- $x$  מתקרב לאפס  $k$  עולה. המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות  $\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}$  הוא :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)},$$

ברור שערך זה קטן ככל ש- $x$  מתקרב לאפס ו- $k$  עולה. המשקנה היא ש-(i) נכון.

## 7.2 קיז תשע"ח מועד א

היא פונקציה גזירה, המוגדרת לכל  $x$ , כך ש-  $f(x) \neq 0$  לכל  $x$ .

**א.** הוכח שאם הפונקציה  $f(x)$  עולה בקטע מסוים, אז הפונקציה  $\frac{1}{f(x)}$  יורדת באותו הקטע;

אם הפונקציה  $f(x)$  יורדת בקטע מסוים, אז הפונקציה  $\frac{1}{f(x)}$  עולה באותו הקטע.

נתונה הפונקציה  $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$ , המוגדרת לכל  $x$ .

**ב.** האם קיים  $x$  שבבגרו  $g(x) = 0$ ? נמק.

**ג.** (1) האם הפונקציה  $g(x)$  היא פונקציה זוגית? נמק.

(2) הראה שלכל  $x$  מתקיים:  $g(x) = g(x + 2\pi)$ .

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ , וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$  בתחום  $-\pi \leq x \leq 3\pi$ .

נתונה הפונקציה  $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$

ענה על סעיף ד. תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

**ד.** (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $h(x)$ ? נמק.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $h(x)$  בתחום  $\pi \leq x \leq -\pi$  – בהתאם למערכות צירים שבה סרטת את

גרף הפונקציה  $g(x)$ .

### סעיף א

לכואורה הטיעון ברור מילוי אבל כנראה צריך להוכיח באמצעות הנזרות:

$$\left( \frac{1}{f(x)} \right)' = -1 \cdot f(x)^{-2} \cdot f'(x).$$

נתון ש-  $f(x)$  מוגדרת בכל התחומים, ו-  $f(x)^{-2}$  חיובי בכל התחומים. הסימן של  $\left( \frac{1}{f(x)} \right)'$  הפוך מהסימן של  $f'(x)$ , ולכן, ולכן אם  $f(x)$  עולה  $\frac{1}{f(x)}$  יורדת, ולהיפך.

### סעיף ב

$g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2 \geq 1$ . לכן  $\cos x \geq -1$  ו-  $\sin^2 x \geq 0$

### סעיף ג

(1) הפונקציה זוגית, כי  $\cos$  זוגית ו-  $\sin$  אי-זוגית, אבל  $\sin^2$  זוגית. בחישוב:

$$\sin^2(-x) + \cos(-x) + 2 = (-\sin x)^2 + \cos x + 2 = \sin^2 x + \cos x + 2.$$

$$g(x) = g(x + 2\pi) \text{ וכאן } \sin(x + 2\pi) = \sin x, \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad (2)$$

אפשר גם ליחס :

$$\begin{aligned} \sin^2(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) + 2 &= \\ (\sin x \cos 2\pi + \sin 2\pi \cos x)^2 + (\cos x \cos 2\pi - \sin x \sin 2\pi) + 2 &= \\ \sin^2 x + \cos x + 2. \end{aligned}$$

נחשב את הנגזרת הראשונה :

$$g'(x) = 2 \sin x \cos x - \sin x = \sin x(2 \cos x - 1) = 0.$$

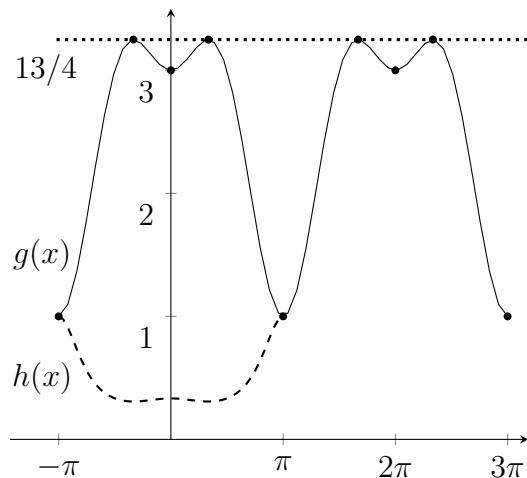
בתחום  $\pi \leq x \leq 2\cos x - 1 \text{ ו } x = 0, x = \pi, 0 \leq x \leq \pi$  מתקבל נקודות הקיצון ח'  $\frac{\pi}{3}$ . נחשב את הנגזרת השנייה :

$$(0, 3), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{13}{4}\right), (\pi, 1)$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \cos x(2 \cos x - 1) + \sin x(-2 \sin x) \\ &= 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - \cos x \\ &= 2 \cos^2 x - 2(1 - \cos^2 x) - \cos x \\ &= 4 \cos^2 x - 2 - \cos x. \end{aligned}$$

בקודות הקיצון :  $g''(0) = 1$  והנקודה היא מינימום.  $g''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}$  והנקודה היא מינימום.  $g''(\pi) = 3$  והנקודה היא מינימום.

(4) לפי נקודות הקיצון נצייר את הגרף עבור  $\pi \leq x \leq 0$ . לפי (1) הפונקציה זוגית אז הגרף עברו  $\pi \leq x \leq 3\pi$  זהה. לפי (2) הפונקציה מחזורית וניתן להעתק את הגרף בתחום  $-\pi \leq x \leq 0$ .



#### סעיף ד

(1) עבור כל  $x > 0$ ,  $f(x) > 0$ , ולכן עבור כל  $x < 0$ ,  $h(x) = \frac{1}{f(x)} > 0$  והפונקציה מוגדרת.

(2) נקודות הקיצון יהיו  $\left(0, \frac{1}{3}\right), \left(\pm\frac{\pi}{3}, \frac{4}{13}\right)$   $-\pi \leq x \leq \pi$

תחום העלייה של  $g(x)$  הוא תחום הירידה של  $h(x)$  ולהיפך.

### 7.3 חורף תשע"ח

נתונה משפחת הפונקציות:  $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-a}$ .  $a \neq 4$ ,  $a \neq 0$ .  $a$  הוא פרמטר. הבחן בין  $0 < a$  ובין  $a > 0$  במידת הצורך.

- א.**
  - (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $(x)$ .
  - (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גраф הפונקציה  $(x)$  עם הצירים.
  - (3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה  $(x)$  המקבילה לציר ה-  $x$ .
  - (4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $(x)$  המאונכות לציר ה-  $x$  (אם יש כאלה).

ענה על סעיף ב. הבע באמצעות  $a$  במידת הצורך. הבחן בין  $4 < a$  ובין  $a < 4$  במידת הצורך.

- ב.** מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $(x)$ , וקבע את סוגן.

**סעיף ג של השאלה מופיע בהמשך.**

#### סעיף א

- (1) כאשר  $0 < a$ , הפונקציה לא מוגדרת עבור  $\sqrt{a} = x$ , ערכים שמאפסים את המכנה. כאשר  $a < 0$ , המכנה תמיד חיובי והפונקציה מוגדרת לכל  $x$ .
  - (2) חישוב נקודת החיתוך עם ציר ה-  $y$ :  $f(0) = \frac{(-2)^2}{-a} = -\frac{4}{a}$ .
- чисוב נקודת החיתוך עם ציר ה-  $x$ : כאשר  $0 < a$ , המכנה חיובי והפונקציה מוגדרת כאשר  $x = 2$ . נתון  $-4 < a < 0$ , ולכן גם כאשר  $a < 0$ , המכנה לא מתאפשרת ומוניה מתאפשרת:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-a} = \frac{(x-2)(x-2)}{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}, \quad f(2) = 0.$$

היא אסימפטוטה אופקית:  $y = 1$  (3)

$$f(x) = \frac{1 - \frac{4x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{a}{x^2}} \xrightarrow{\pm\infty} 1.$$

- (4) כאשר  $0 < a$  הפונקציה מוגדרת לכל  $x$  ואין אסימפטוטה.
- כאשר  $a > 0$ : נתון  $\sqrt{a} \neq 2$  (כ-  $a = 4$ ), לכן המונה של הפונקציה לא מתאפשרת כאשר  $x = \pm\sqrt{a}$ . יש אסימפטוטות אנכיות.

#### סעיף ב

$$\begin{aligned} f'(x) = \left( \frac{(x-2)^2}{x^2-a} \right)' &= \frac{2(x-2)(x^2-a) - (x-2)^2 \cdot 2x}{(x^2-a)^2} \\ &= \frac{2(x-2)(2x-a)}{(x^2-a)^2}. \end{aligned}$$

נקודות הקיצון הם  $\left(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a}\right)$ ,  $(2, 0)$ .

נחשב את הסימן של הנגזרת של המונה של הנגזרת הראשונה:

$$(2(x-2)(2x-a))' = 8x - 2a - 8.$$

לפי ההנחה בשאלת נבדוק בנפרד עבור ערכים חיוביים ושליליים של  $a$ .

עבור  $a > 4$

$8 \cdot 2 - 2a - 8 = 2(4 - a) < 0$  היא מקסימום.

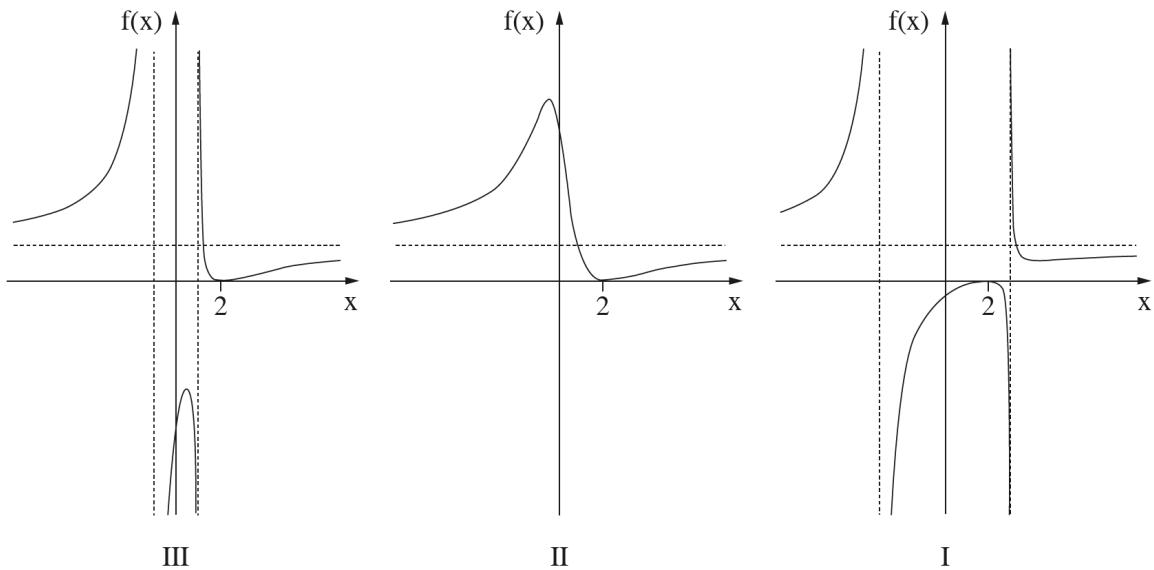
$8 \cdot \frac{a}{2} - 2a - 8 = 2(a - 4) > 0$  היא מינימום.

עבור  $a < 4$  הסימנים מתחלפים ו-  $(2, 0)$  היא מינימום ו-  $\left(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a}\right)$  היא מקסימום.

**סעיף ג**

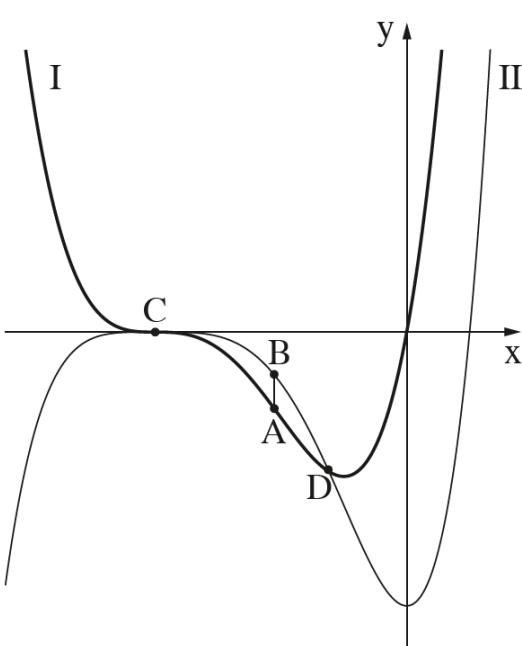
ג. לפניה שלושה גרפים אפשריים של הפונקציה  $f(x)$ , כל אחד עבור ערך אחר של  $a$ .

כתב מהו תחום הערכים של  $a$  המתאים לכל אחד מן הגрафים I-III. נמק את תשובה.



כאשר  $a > 4$  נקודות הקיצון ב-  $(2, 0)$  היא מקסימום כפי שמוופיע בgraf I. כאשר  $0 < a < 4$  הפונקציה מוגדרת כל  $-x$  כפי שמוופיע בgraf II. כאשר  $a < 0$  נקודת הקיצון ב-  $(2, 0)$  היא מינימום, ויש אסימפטוטות ב-  $x = \pm\sqrt{a}$  כפי שמוופיע בgraf III.

## 7.4 קיצ' תשע"ז מועד ב



לפניך הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $f'(x)$ .

א. התאם בין הגרפים I ו- II

לבין הפונקציות  $f(x)$  ו-  $f'(x)$ . נמק.

נתון:  $b > 1$ .  $f'(x) = x(x + b)^3$  הוא פרמטר.

לגרף הפונקציה  $f(x)$  יש נקודת פיתול ב-  $x = -1$ .

ב. מצא את  $b$ .

C ו- D הן נקודות החיתוך

של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $f'(x)$ .

בתחום  $x < 0$ , כמתואר בציור.

הנקודות A ו- B נמצאות על הגרפים I ו- II

בהתאמה, כך שהישר AB מאונך לציר ה- x.

$$\text{נתון: } x_C < x_A < x_D$$

$$, x_C = -4$$

$$, x_D = 1 - \sqrt{5}$$

ג. מצא את שיעור ה- x של הנקודות A ו- B שעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי

(אפשר לפתור את הסעיף בלי למצוא את הפונקציה  $f(x)$ ).

### סעיף א

הgraf I מתאפס בנקודת  $C$  שם לגרף II יש נקודת מקסימום. graf I מתאפס ב-  $(0, 0)$  שם לגרף II יש נקודת מינימום. לכן, II הוא graf של  $f'(x)$  ו- I הוא graf של  $f(x)$ .

### סעיף ב

בנקודת פיתול הנגזרת השנייה מתאפסת:

$$f''(x) = 1 \cdot (x + b)^3 + x \cdot 3(x + b)^2 = (x + b)^2(4x + b)$$

$$f''(-1) = (b - 1)^2(b - 4) = 0$$

$$b = 4,$$

כי נתון ש-  $b > 1$ .

## סעיף ג

הערך המקסימלי יתקבל כאשר הנגזרת של ההפרש מאפסת. הנגזרת הראשונה, הנגזרת של  $f(x)$  נתונה, והנגזרת השנייה, הנגזרת של הנגזרת הראשונה חושבה בסעיף ב, שם קיבלנו ש-4 :

$$\begin{aligned}(f(x) - f'(x))' &= x(x+4)^3 - (x(x+4))^3)' \\&= x(x+4)^3 - (x+4)^2(4x+4) \\&= (x+4)^2(x^2 - 4) = 0.\end{aligned}$$

. $x = -4, x = \pm 2$

. $x = -2, x_D = 1 - \sqrt{5} = -1.24, x_C = -4$ , וכך הפתרון היחיד בתחום הוא

## 7.5 קיז תשע"ז מועד א

$$f(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

- נתונה הפונקציה .  
 א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$  .  
 (2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.  
 (3) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה  $f(x)$  .  
 (4) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).  
 ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$  .  
 ג. נתון:  $0 < a < \frac{\pi}{2}$  .  
 השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , הישר  $x = a$  וציר ה- $x$  שווה ל- 1 .  
 מצא את  $a$  .

### סעיף א

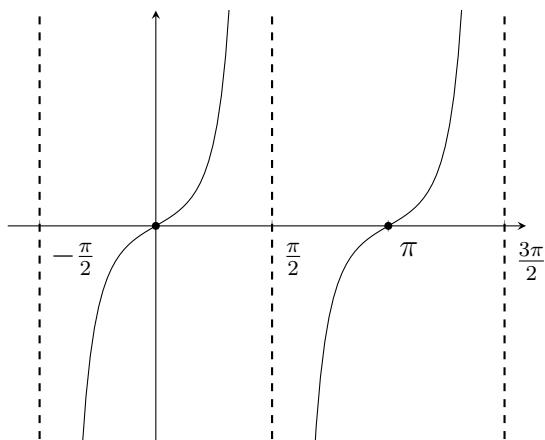
- (1) הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה לא מתאפשר :  $x \neq \frac{\pi}{2} \pm n\pi$  .  
 (2) נקודות החיתוך עם ציר ה- $x$  הן כל הנקודות עבורן  $\cos x = 0$  ו-  $\sin x = \pm n\pi$  , שهن  $x = \pm n\pi$  .  
 (3) יש אסימפטוטות אנכיות ב-  $x = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$  כי הפונקציה שאופת לאינסוף שם .  
 אין אסימפטוטה אופקית : כאשר  $x \rightarrow \pm \infty$  , הפונקציה לא חסומה ושואית לאינסוף שוב ושוב .  
 (4)

$$f'(x) = \frac{(2 \cos x \cdot \cos^3 x) - (2 \sin x \cdot 3 \cos^2 x \cdot -\sin x)}{\cos^6 x} = \frac{2 \cos^4 x + 6 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} .$$

כל הגורמים בביטוי חיוביים כי הם חזקות זוגיות של פונקציות טריגונומטריות, ולכן הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה .

**סעיף ב**

הסרטוט מבוסס על נקודות החיתוך עם ציר ה- $x$ , האסימפטוטות האנכיות, והעובדת שהפונקציה תמיד עולה.

**סעיף ג**

$$\int_0^a \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} dx = \cos^{-2} x \Big|_0^a = \frac{1}{\cos^2 a} - \frac{1}{1^2} = 1 .$$

$a = \frac{\pi}{4}$  והוא  $0 < a < \frac{\pi}{2}$ , והפתרון היחיד בתחום  $\cos a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  מכאן ש-

## 7.6 חורף תשע"ז

$$\text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad a \text{ הוא פרמטר.}$$

עננה על הסעיפים א-ו עבור  $0 < a$ . הבע את תשובותיך באמצעות  $a$  במידת הצורך.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
- ג. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ה. (1) רשם את האסימפטוטות המאונכות לצירים של גרף הנגזרת  $(x')^f$ .
- (2) סרטט סקיצה של גרף הנגזרת  $(x')^f$ .

$$.\int_{-3a}^{3a} f(x) dx + \int_{-2a}^{-2a} f(x) dx \quad \text{נ. מצא את ערך הביטוי:}$$

עננה על סעיף ז' עבור  $a = 0$ .

- ז. (1) מצא את תחום ההגדרה של  $f(x)$ .
- (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

### סעיף א'

הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס  $x = \pm a$  או כאשר הביטוי בשורש שלילי  $a \leq |x|$ . תחום ההגדרה הוא  $|x| > a$ .

### סעיף ב'

המכנה חיובי אבל ה- $x$  במוניה גורם לסימן של האסימפטוטות האכניות להיות תלויות בכיוון ההתקרבות לנקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת:

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} = \frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \xrightarrow{\pm a} \pm 1.$$

האסימפטוטה האופקית היא  $y = \pm 1$ , כאשר הסימן הוא לפי כיוון השאיפה לאינסוף:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \approx \frac{x}{\sqrt{x^2}} \xrightarrow{\pm \infty} \pm 1.$$

### סעיף ג'

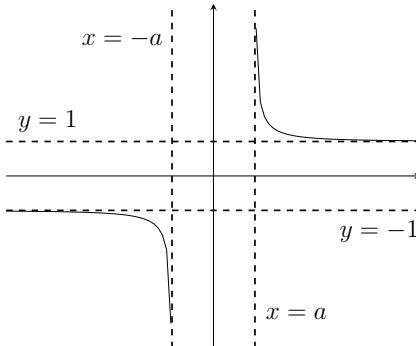
נבדוק את הסימן של הנגזרת הראשונה:

$$f'(x) = 1 \cdot (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 - a^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{-a^2}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

המכנה חיובי והמונה שלילי, ולכן הנגזרת שלילית והפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה שלה.

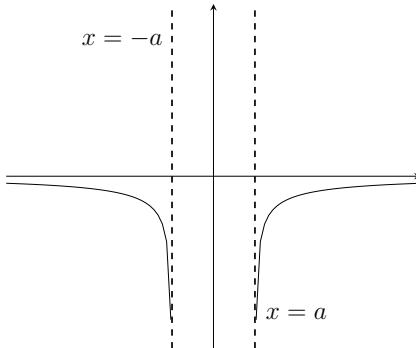
## סעיף ד

יש לנו את האסימפטוטות מסעיף ב, ומסעיף ג אנו יודעים שהפונקציה תמיד יורדת:



## סעיף ה

- (1) המכנה של  $f'(x)$  מתאפסת כאשר  $x = \pm a$  ולכן יש אסימפטוטות אנכיות ב- $x = \pm a$ . כאשר  $\infty \rightarrow x$ , המונה חיובי והמכנה שווה לאפס, ולכן יש אסימפטוטה אופקית ב- $y = 0$ .
- (2) לפי סעיף ג הנגזרת תמיד שלילית ויש אסימפטוטות ב- $\pm a$ :



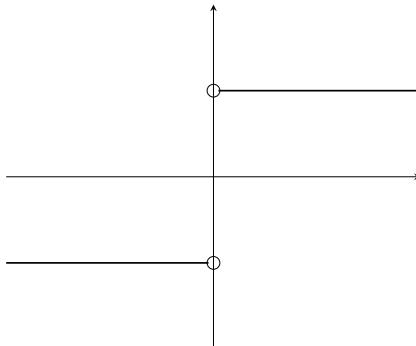
## סעיף ו

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - a^2} = -\frac{x}{x^2 - a^2} = -f(x).$$

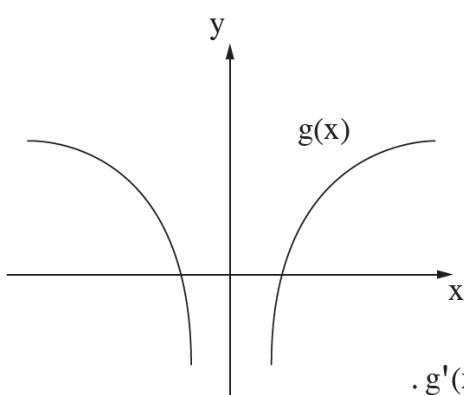
הפונקציה אי-זוגית ולכן אינטגרציה של קטעים סימטריים מצדדי ציר ה- $y$  מctratzimim והסכום = 0.

## סעיף ז

$$\text{(.1)} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} = \pm 1 \quad (\text{.2})$$



## 7.7 קיז' תשע"ו מועד ב



ב סרטוט של פניך מתואר גוף הפונקציה  $(x)$ .

הfonקציות  $(x)$ ,  $(x)$ ,  $(x)$

מוגדרות לכל  $x$  השונה מ-0,

ואין להן נקודות קיצון או נקודות פיתול.

הישר  $0 = x$  הוא האסימפטוטה האנכית

לכל אחד מן הגרפים של הפונקציות האלה.

א. (1) סרטט סקיצה של גוף פונקציית הנגזרת  $(x)$ .

نمוק את שיקולין.

(2) סרטט סקיצה של גוף פונקציית הנגזרת השנייה  $(x)$ . נמוק את שיקולין.

נתון כי השטח המוגבל על ידי הגוף של פונקציית הנגזרת השנייה  $(x)$ ,

על ידי ציר  $x$  ועל ידי הישרים  $1 = x$  ו-  $2 = x$  שווה ל- .

ב. הישר  $1 = x$  חותך את הגוף של פונקציית הנגזרת  $(x)$  בנקודה A ,

והישר  $2 = x$  חותך אותו בנקודה B .

מצא את ההפרש בין שיעור ה- y של הנקודה A ובין שיעור ה- y של הנקודה B . נמוק.

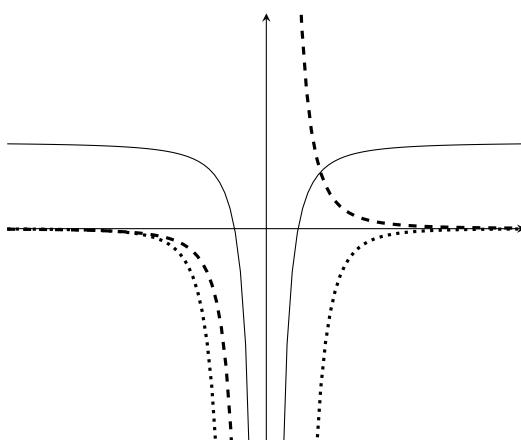
ג. הביטוי  $y = \frac{a}{x^3}$  מתאר אחת מן הפונקציות  $(x)$ ,  $(x)$ ,  $(x)$

a הוא פרמטר גדול מ-0 .

(1) קבע איזו מן הפונקציות הביטוי מתאר. נמוק את קבועות.

(2) מצא את הערך של a .

נוח לי להציג את כל שלושת הגרפים במערכת צירים אחת, למרות שאיפיון הגרפים יתברר רק בהמשך פתרונו השאלה.  $(x)$ : קו רגיל.  $(x)$ : קו מקווקו.  $(x)$ : קו מנוקד.

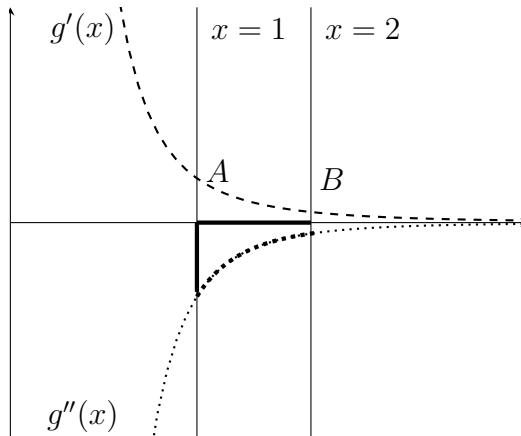


### סעיף א

- (1) משמאל לימין עבור ערכים שליליים של  $x$ , השיפוע של פונקציה שלילי וירדת תמיד ולכון הנגזרת תמיד שלילית. ערכה של הנגזרת מתחילה קרוב לאפס, יורדת לאט ואז יורדת מהר ושואפת  $-\infty$ .
- משמאל לימין עבור ערכים חיוביים של  $x$ , השיפוע של פונקציה חיובי וירדת תמיד ולכון הנגזרת חיובית. ערכה של הנגזרת מתחילה קרוב  $+\infty$ , יורדת מהר ואז יורדת לאט ושואפת 0.
- (2) משמאל לימין עבור ערכים שליליים של  $x$ , הנגזרת הראשונה מתנהגות בבדיקה כמו הפונקציה, ולכון הגרף של הנגזרת השנייה דומה לgraf של הנגזרת הראשונה.
- משמאל לימין עבור ערכים חיוביים של  $x$ , השיפוע של הנגזרת הראשונה שלילי ועולה תמיד ולכון הנגזרת השנייה שלילית. ערכה של הנגזרת השנייה מתחילה קרוב  $-\infty$ , עולה מהר ואז עולה לאט ושואפת 0.

### סעיף ב

התרשים להלן מראה את  $g'(x)$ ,  $g''(x)$  עבור ערכים חיוביים. השטח המתוואר מודגש.



чисוב השטח:

$$S = \int_1^2 -g''(x)dx = -g'(x)\Big|_1^2 = g'(1) - g'(2) = 5.25.$$

אבל זה בדיקת ההפרש בין ערך ה- $y$  של נקודה  $A$  לבין ערך ה- $y$  של נקודה  $B$ .

### סעיף ג

- (1) הביטוי לא מתאפשר ולכון לא יכול להיות  $(x)g$ . הביטוי חיובי עבור  $0 < x$  ולכון לא יכול להיות  $(x)g''$ .  
 $\therefore g'(x) = \frac{a}{x^3}$   
 (2) מסעיף ב:

$$\begin{aligned} g'(1) - g'(2) &= 5.25 \\ \frac{a}{1^3} - \frac{a}{2^3} &= \frac{21}{4} \\ a &= \frac{8}{7} \cdot \frac{21}{4} = 6. \end{aligned}$$

## 7.8 קיצ' תשע"ו מועד א

נתונה הפונקציה  

$$f(x) = \frac{ax^3 + 2ax}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 4}}$$
  
 ו  $a$  הוא פרמטר גדול מ-0.

- . f(x) =  $\frac{ax^3 + 2ax}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 4}}$
  - . מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
  - . האם הפונקציה  $f(x)$  היא זוגית או אי-זוגית? נמק.
  - . השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים  $1 = x$  ו  $-1 = x$ , שווה ל-4.
  - . מצא את הערך של  $a$ .
  - . נתון כי הפונקציה  $f(x)$  מקיימת  $f'(x) = g(x)$ .
  - . אחת מנקודות החיתוך בין הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  היא נקודת שבה  $x = 0$ .
- (1) הראה כי הפונקציה  $f(x)$  מקיימת:  $f'(x) = 2x^2$
- (2) מצא את התחום שבו מתקיים  $f(x) > g(x)$ .

### סעיף א

השאלה פשוטה יותר אם נשים לב ש:

$$f(x) = \frac{ax^3 + 2ax}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 4}} = \frac{ax(x^2 + 2)}{\sqrt{(x^2 + 2)^2}} = \frac{ax(x^2 + 2)}{x^2 + 2} = ax.$$

אנחנו משתמשים על העובדה  $\sqrt{x^2 + 2} > x^2 + 2$  כך שנitin לחשב את השורש במכנה ולצמצם את השבר, בלי לשנות את התכונות של הפונקציה.

ברור ש- $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$ .

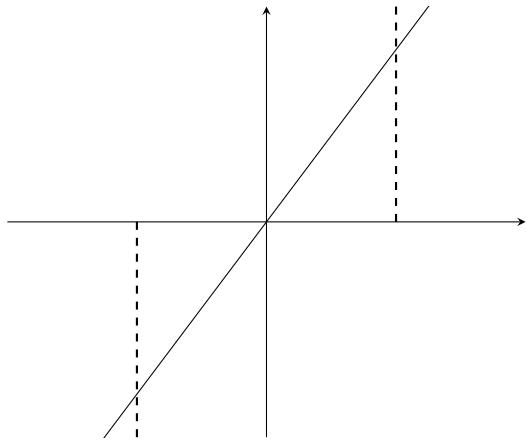
### סעיף ב

$x^2 + 2$  זוגית כך שהזוגיות תלויות רק בזוגיות של  $ax$ .  $ax = -(ax)$  והפונקציה אי-זוגית.

### סעיף ג

כאן צריך להיזהר. **הaintgral** של פונקציה אי-זוגית בתחום הסימטרי בין  $-k$  ל- $k$  הוא אפס כי התרומה של הערכים החיוביים והשליליים מctrmim. אבל השטח בתחום על ידי תחום סימטרי כולל את השטח מתחת לציר ה- $x$  והשטח מעל לציר ה- $x$ . עבר פונקציה אי-זוגית, השטחים שווים.

$$S = 2 \int_0^1 ax dx = ax^2 \Big|_0^1 = a = 4.$$



#### סעיף ד

$$(1) \quad g(x) = \int g'(x) dx = \int f(x) dx = \int ax dx = \frac{1}{2}ax^2 + c.$$

לפי הנתון על נקודת החיתוך :

$$f(0) = a \cdot 0 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 0^2 + c = g(0),$$

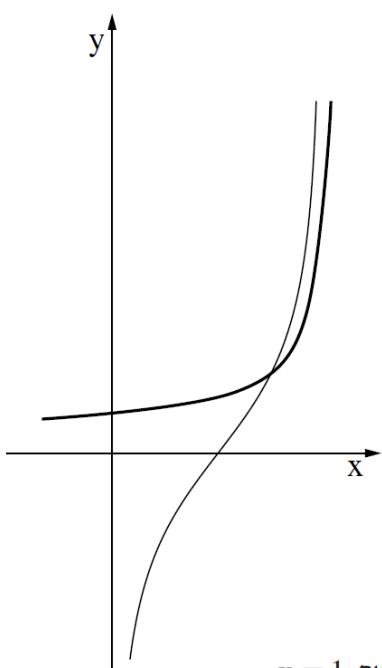
$$\therefore g(x) = \frac{1}{2} \cdot 4x^2 + 0 = 2x^2 \text{. וכן } c = 0$$

(2)

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \stackrel{?}{>} & g(x) \\ 4x & \stackrel{?}{>} & 2x^2 \\ 2 & > & x. \end{array}$$

אפשר לצמצם  $x$  כי  $f(x) > g(x)$ ,  $f(0) = g(0) = 0$ ,  $x = 0$  ו**לכן**  $x$  איינו ערך עבורו  $f(x) > g(x)$ . **לכן** התוחם בו  $x < 0$  הוא  $x < 2$ .

## 7.9 חורף תשע"ו



נתונות הפונקציות:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$$

$$g(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}$$

(ראה ציור).

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ ,  
ואת תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ .

- (2) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים  
של הפונקציה  $f(x)$ ,  
ואת האסימפטוטות המאונכות לצירים  
של הפונקציה  $g(x)$ .

- ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים  
של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$ , על ידי ציר  $x$  ועל ידי הישר  $x = 1$ .

ג. נתונות הפונקציות:  $t(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}} + 2$ ,  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}} + 2$

- $S_1$  הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$  ועל ידי הישר  $x = 2.5$ .  
 $S_2$  הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות  $h(x)$  ו-  $t(x)$  ועל ידי הישר  $x = 2.5$ .  
האם השטח  $S_1$  גדול מהשטח  $S_2$ , קטן ממנו או שווה לו? נמק.

### סעיף א

$f(x)$  : השורש לא שלילי לכן  $3 \leq x$ . המכנה לא אפס לכן  $3 \neq x$ . ביחיד  $x < 3$ .

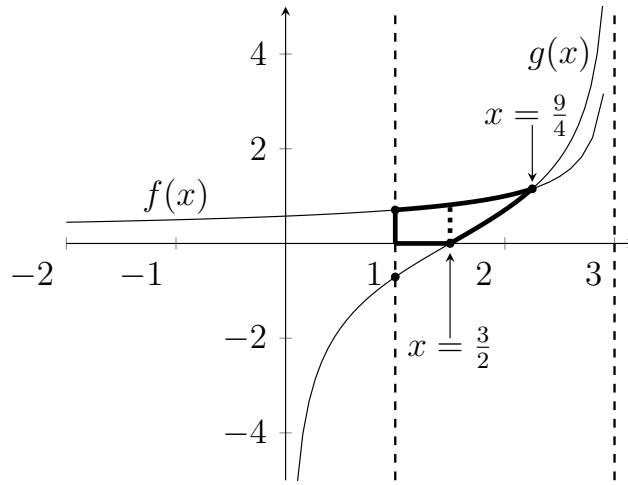
$g(x)$  : כמו עבור  $f(x)$ , אבל  $x$  בשורש לא יכול להיות אפס. כמו כן, עבור  $0 < x$ , בכלל ש-  $0 < x - 3 < 3$ , ולכן  $x(3-x) < 0$ , והשורש לא מוגדר. תחום ההגדרה הוא  $0 < x < 3$ .

(2) אסימפטוטות אנכיות:  $x = 3$  מאנפס את המכנה של שתי הפונקציות, ו-  $x = 0$  מאנפס גם את  $g(x)$ . בכל אחד מהערבים האלה המונה לא מתאנפס ולכן הם מגדירים אסימפטוטות.

אסימפטוטות אופקיות: שתי הפונקציות לא מוגדרות עבור  $x > 3$  ולכן אין אסימפטוטות כאשר  $x \rightarrow \infty$ . כאשר  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow 0$ , ולכן יש ל-  $f(x)$  אסימפטוטה אופקית  $y = 0$ . הפונקציה  $g(x)$  אינה מוגדרת עבור  $x < 0$  ולכן אין אסימפטוטה כאשר  $x \rightarrow -\infty$ .

### סעיף ב

השטח התחום גם על ידי ציר  $x$  בתרשים גבולות השטח מסומנים בקו עבה, וב証ור שצורך לה חשב בשני חלקים. אחד מ-  $x = 1$  ועד נקודת החיתוך של  $g(x)$  עם ציר  $x$ , והשני, ה主持 עד נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.



נקודות החיתוך של  $g(x)$  עם ציר ה- $x$ : המכנה חיובי בתחום ההגדרה והמונה מתאפס כאשר  $x = \frac{3}{2}$ . נחשב את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות:

$$\frac{1}{\sqrt{3-x}} = \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}.$$

בתחום ההגדרה,  $x$  ו- $x - 3 = \sqrt{3-x}$  חיוביים. נצמצם  $\sqrt{3-x} = 2x-3$  כדי להיפטר משורש, ונקבל משווהה ריבועית:

$$4x^2 - 13x + 9 = (4x-9)(x-1) = 0$$

שיש לה שני פתרונות,  $f(1) = 1, g(1) = -1$ ,  $x = 1, x = \frac{9}{4}$ . בדיקה מראה ש- $x = \frac{9}{4}$  אינו חיתוך בנקודה זו. נקודת החיתוך היא  $(\frac{9}{4}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ . נחשב את שני חלקיו השטח בנפרד:

$$S_1 = \int_1^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{3-x}} - 0 \right) dx = -2\sqrt{3-x} \Big|_1^{\frac{3}{2}} = -2 \left( \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{2} \right) = 0.379$$

$$S_2 = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{4}} \left( \frac{1}{\sqrt{3-x}} - \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}} \right) dx = -2 \left( \sqrt{3-x} - \sqrt{x(3-x)} \right) \Big|_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{4}} =$$

$$(-1.732 + 2.598) + (2.449 - 3) = 0.315$$

$$S = 0.379 + 0.315 = 0.694.$$

#### סעיף ג

בניגוד לשאלת בסעיף ב, כאן הצירם לא תוחמים את השטח. השטח מחושב על ידי ההפרש בערכי הפונקציות, ולכן הוספות קבועות לפונקציות מצטמצם וערך השטח לא משתנה.

## 7.10 קיז' תשע"ה מועד ב

$$\cdot f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

הישר  $y = \frac{1}{3}x + 3$  חותך את הגרף של הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x = 0$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת  $(x)f'$  ושל הפונקציה  $(x)f$ ?

(2) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של פונקציית הנגזרת  $(x)f'$ .

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת  $(x)f'$  עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את תחומי העליה והירידה של גרף פונקציית הנגזרת  $(x)f'$  (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $(x)f'$ .

(6) הוסף לסקיצה שרטtot בתת-סעיף ב (5) סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

$$\text{II. } \sqrt{x^2 + 9} = k \quad , \quad \text{I. } \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = k \quad : \quad \text{נתונות שתי משוואות, I ו- II ;}$$

נתון כי  $k > 0$ .

מצא את תחום הערכים של  $k$  שעבורם  
אין פתרון למשואה I וגם אין פתרון למשואה II.

### סעיף א

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{1}{2}(x^2 + 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x dx = (x^2 + 9)^{\frac{1}{2}} + c .$$

לפי הנתון,  $3 = \sqrt{x^2 + 9}$ , ולכן  $c = 0$  ולכן  $0 = \sqrt{0^2 + 9} + c$ .

### סעיף ב

(1)  $x^2 + 9$  חיובי עבור כל  $x$  שכן  $f'(x) = -f(x)$  מוגדרת עבור כל  $x$ .

(2)  $f'(x)$  מוגדרת עבור כל  $x$  אז אין אסימפטוטות אנכיות.

$$\frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} \xrightarrow{\pm\infty} \pm 1 ,$$

לכן  $y = 1$  היא אסימפטוטה אופקית כאשר  $x \rightarrow +\infty$  ו-  $x \rightarrow -\infty$ .

(3) על ידי הצגה של  $0 = x$  יש נקודת חיתוך ב-  $(0, 0)$ .

המכנה חיובי שכן  $0 = x$  רק אם  $0 = x$  ובבר קיבלנו נקודת חיתוך זו.

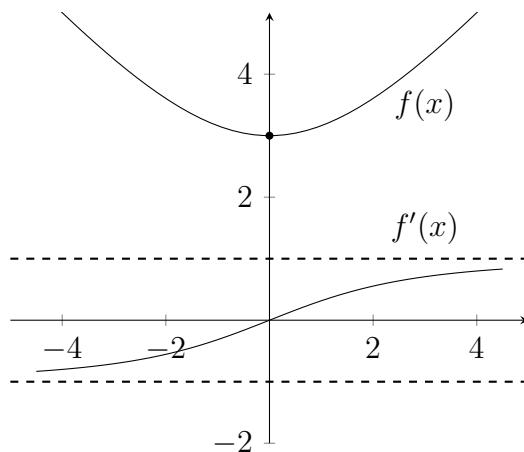
(4)

$$f''(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + 9} - x \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} \cdot 2x}{x^2 + 9} = \frac{9}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}.$$

הנגזרת השנייה תמיד חיובית ולכן הנגזרת הראשונה עולה בכל התחומים.

(5, 6)  $f(x)$  נקודת מינימום ב- $(0, 0)$ . מסעיף (4) הנגזרת הראשונה עולה בכל התחומים. הסימן של  $f'(x)$  שלילית עבור ערכים שליליים של  $x$  וחובייה עבור ערכים חיוביים.

לפי (3)  $f'(x)$  יש נקודת חיתוך ב- $(0, 0)$ . לפי (2) יש אסימפטוטות ב- $\pm 1$  כאשר השאיפה היא ל-1 עבור  $x \rightarrow -\infty$ , ול-1 עבור  $x \rightarrow +\infty$ .



### סעיף ג

הערך הקטן ביותר של  $\sqrt{x^2 + 9}$  הוא 3, ולכן אין פתרון למשוואה II כאשר  $3 < k < 0$ . זה ברור גם מהגרף כי  $(0, 3)$  היא נקודת מינימום של  $f(x)$ .

מהגרף של  $f'(x)$  ברור שאין פתרון למשוואה I כאשר  $k \geq 1$ . אפשר גם בחישוב:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2 + 9} &= k^2 \\ x &= \frac{3k}{\sqrt{1 - k^2}}. \end{aligned}$$

כדי שניתן להוציה שורש חייב להתקיים  $1 < k < 3$ , ולכן אין פתרון כאשר  $1 \leq k \leq 3$ . שימוש לב ששהала בבקשת את התחומים בו אין פתרון ל-I וגם ל-II. צירוף שתי התוצאות נותן שאין פתרון לשתי המשוואות כאשר  $1 \leq k < 3$ .

## 7.11 קיז' תשעיה מועד א

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}$$

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גורף הפונקציה עם הצירים.

(4) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

(5) סרטט סקיצה של גורף הפונקציה.

ב. לפונקציה  $f(x)$  יש שתי נקודות פיתול בלבד.

על סמך הגורף של הפונקציה  $f(x)$ , ציין באיזה תחום נמצאת כל אחת מן נקודות אלה.

ג. האם השטח, המוגבל על ידי גורף הפונקציה  $f(x)$  ועל ידי הצירים,

גדלומי-4, קטן מ-4 או שווה לו ? נמק.

### סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס ב- $x = -1$ . תחום ההגדרה הוא  $x \neq -1$ .

(2) כאשר  $x = 1$  המכנה מתאפס אבל המונה לא מתאפס, לכן  $x = 1$  היא אסימפטוטה אנכית.

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{x^2}{x^3} + \frac{4x}{x^3} + \frac{4}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{3x}{x^3} - \frac{1}{x^3}} \xrightarrow{\pm\infty} 0. \end{aligned}$$

הכנה שווה ל-1 והמונה שווה ל-0, ולכן יש אסימפטוטה אופקית ב- $y = 0$ .

$$(3) \text{ כאשר } y = \frac{4}{-1} = -4, x = 0$$

כדי ש- $y = 0$  והמכנה לא מתאפס עבור  $x = -2, (x+2)^2 = 0, y = 0$ .

נקודות החיתוך הן  $(0, -4), (-2, 0)$ .

(4)

$$f'(x) = \frac{2(x+2)(x-1)^3 - (x+2)^2 \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = -\frac{(x+2)(x+8)}{(x-1)^6}.$$

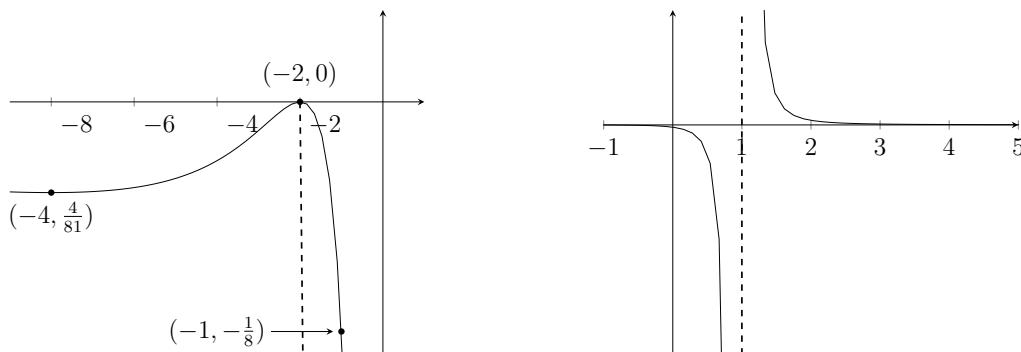
המכנה לא מתאפס בתחום ההגדרה, לכן נקודות הקיצון הן  $(-2, 0), \left(-8, -\frac{4}{81}\right)$

המכנה חיובי ולכן סימן הנגזרת השנייה לשימור הנגזרת של המונה  $-2(x+5) < 0$ .

ולכן  $(-2, 0)$  היא מקסימום.

$$\left(-8, -\frac{4}{81}\right) \text{ הוא מינימום.}$$

(5) לא ניתן לראות את כל המידע החשוב בגרף בקנה מידה אמיתי. הבאתך שני גרפים, אחד מימין לציר וה- $y$  מהראה את האסימפטוטות, ואחד משמאלי לציר ה- $x$  המראה את נקודות הקיצון.



### סעיף ב

בין  $-\infty$  ל- $-2$ , השיפוע יורד ו אז עולה ויש נקודת פיתול. בין  $-2$  ל- $0$  השיפוע עולה ו אז יורד ויש נקודת פיתול.

### סעיף ג

הקו בין  $(-2, 0)$  לביין  $(0, -4)$  תוחם משולש ישר זווית (שטחו  $4 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4$ ). הגרף נמצא מעל לקו  $x = -4$ . לכן השטח שהוא תוחם פחות מ-4.

בגלל קנה המידה בתרשים קשה לראות שהגרף תמיד מעלה לקו המכווקו, אז נבדוק בחישוב. ב- $x = -1$ ,  $f(-1) = -\frac{1}{8} = -0.125$ . לפי מושולשים דומים,  $x = -1$  חוצה את הבסיס ולכן הנקודה על היתר של המשולש היא  $(-1, -2)$ . הגרף מעלה לקו כי  $-2 > -0.125$ .

## 7.12 חורף תשע"ה

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x^2}} \quad \text{נתונות הפונקציות:}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 2}}$$

א. מצא עבור כל אחת מהפונקציות:

(1) את תחום ההגדרה.

(2) את האסימפטוטות המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) את השיעורים של נקודות הקיצון (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ , אם ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה אחת בלבד.

ג. נתונה הפונקציה  $k > 0$ ,  $h(x) = g(x) - k$ . נמק.

עבור אילו ערכים של  $k$  אין לפונקציה  $h$  נקודות חיתוך עם הפונקציה  $f(x)$ ? נמק.

### סעיף א

- (1) המכנה של שתי הפונקציות חיובי, ולכן  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$  מוגדרת עבור כל  $x < 0$ . לא מוגדרת עבור  $x \geq 0$  בפרט במונה, כך שתחום ההגדרה הוא  $x < 0$ .
- (2) אין אסימפטוטות אנכיות לפונקציות מוגדרת כל אחת בתחום שלה.

$$\sqrt{\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + 1}} \xrightarrow{+∞} 0,$$

ולכן  $y = 0$  היא אסימפטוטה אופקית.

כאשר  $\xrightarrow{±∞} x$ , המכנה של  $g(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$  חיובי שואף ל- $+\infty$ , ולכן  $y = 0$  היא אסימפטוטה אופקית.  $: f(x) \text{ עבר}$  (3)

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{1+x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot (2x)}{x} \right) = \frac{1}{2} \frac{1-x^2}{\left( \frac{x}{1+x^2} \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

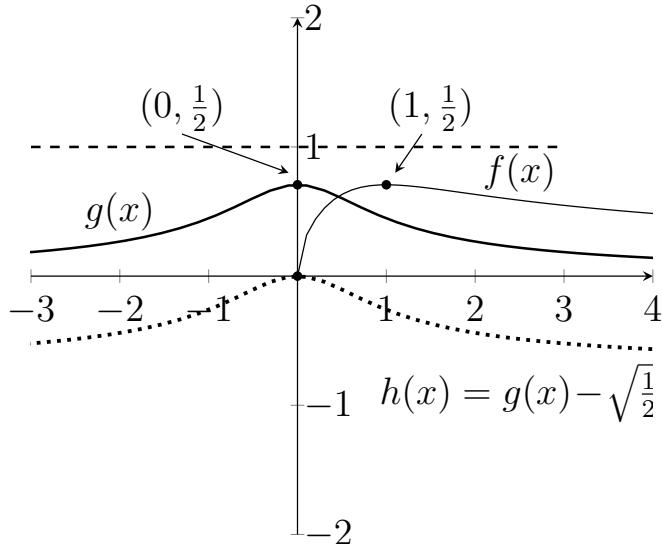
המכנה חיובי והנזרת מתאפסת כאשר המונה מתאפס  $x = \pm 1$ . ( $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$  לא מוגדרת כאשר  $x = \pm 1$  ונקודות הקיצון היחידה היא  $\left(1, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ . הסימן של הנזרת השנייה שווה לסימן של הנזרת של המונה:  $-2x$ .) שהיא שלילית עבור כל  $x$  בתחום, ולכן נקודת הקיצון היא מקסימום.

עבור  $g(x)$ :

$$g'(x) = -\frac{1}{2} (3x^2 + 2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 6x$$

המכנה חיובי שכן הנגזרת מתאפסת כאשר  $x = 0$ . נקודת הקיצון היא  $(0, \sqrt{\frac{1}{2}})$ . הנגזרת של המונה היא  $0 < -3$ , ונקודות הקיצון היא מקסימום.

### סעיף ב



ההערה "אם ידוע כי הפונקציות תחטכו בנקודה אחת בלבד" הייתה לי די מוזרה, אבל לאחר מחשבה הבנתי שההערה באה למנוע אפשר של חיתוך כאשר  $x > 1$  ושווא לאינסוף.

רציתי להשתכנע שאכן ההערה נכונה. כאשר משווים  $f(x) = g(x)$  ומפשטים, מקבלים משווהה ממעלה שלישי:

$$3x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0.$$

לא ניתן את הנוסחה (המסובכת) למציאת פתרונות המשוואות ממעלה שלישי, אבל לבסוף שמתי לב שגם  $x > 1$  או  $x > 0$  ו-  $3x^3 - x^2 + 2x - 1 > 0$ , ולכן לא יכול להיות פתרונות נוספים.

### סעיף ג

הערך המינימלי של  $f(x)$  הוא 0, והערך המקסימלי של  $g(x)$  הוא  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ . אם  $k > \sqrt{\frac{1}{2}}$  לא יהיו נקודות חיתוך בין שתי הפונקציות.

## 7.13 קייז תשע"ד מועד ב

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 - 1}.$$

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המקבילות לצירים.  
 (3) מצא את נקודות החיתוך של גраф הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.  
 (4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגם.
- ב. רק על פי סעיף א, סרטט סקיצה של גраф הפונקציה  $f(x)$ .
- ג. רק על פי הסקיצה של גраф הפונקציה  $f(x)$  שסרטת, מצא את התחום שבו מתקיים:  
 פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  שלילית ופונקציית הנגזרת השנייה  $f''(x)$  חיובית.  
 נמק.

### סעיף א

- (1) הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס  $x = \pm 1$ .  
 (2) האסימפטוטות האנכיות הן במקומות שהפונקציה לא מוגדרת  $x = \pm 1$ .  
 חישוב האסימפטוטה האופקית  $y = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\text{כאשר } 0, x = 0, x = -4, x = 2.$$

כאשר  $x = 2$  המונה מתאפס והמכנה לא מתאפס.

- נקודות החיתוך הן  $(2, 0), (0, -4)$ .  
 חישוב הנגזרת הראשונית:

$$f'(x) = \frac{2(x-2)(x^2-1) - (x-2)^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2(2x^2-5x+2)}{(x^2-1)^2} = (2x-1)(x-2).$$

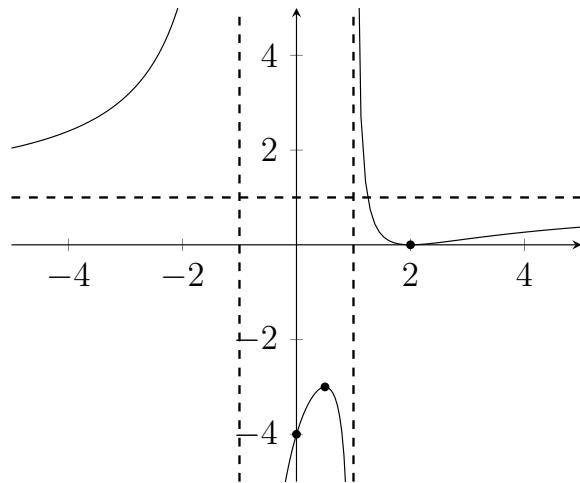
המכנה חיובי בתחום ההגדרה ולכן נקודות הקיצון נמצאות ב- $x = 2, x = \frac{1}{2}$ .

המכנה חיובי لكن סימן הנגזרת השנייה שווה לסימן הנגזרת של המונה:  $-5 - 2(4x) = -2(4x+5)$ . ביטוי זה חיובי עבור  $x < -\frac{5}{4}$ , ושלילי עבור  $x > -\frac{5}{4}$ . נקודות הקיצון הן  $x = 2, x = -\frac{1}{2}$ .

$$(2, 0) \text{ מינימום}, \left(\frac{1}{2}, -3\right) \text{ מקסימום}.$$

## סעיף ב

חישבנו את האסימפטוטות, נקודות החיתוך עם הצירים וונקודות הקיצון. מידע זה מספיק לצירר תרשימים  $f(-2) = -1 < x$ . עבור  $x < -1$  נבדוק אם הגרף מעלה לאסימפטוטה האופקית או מתחתיה.  $\frac{16}{3} > 1$  ולכן הגרף מעלה לאסימפטוטה.



## סעיף ג

כדי שהנגזרת הראשונה תהיה שלילית, הפונקציה חייבת לרדת:

$$\frac{1}{2} < x < 1, \quad 1 < x < 2.$$

כדי שהנגזרת השנייה תהיה חיובית, הנגזרת הראשונה חייבת לעלות:

$$x < -1, \quad 1 < x < x_1,$$

כאשר  $x_1$  היא נקודת הפיתול אי-שם מימין ל- $-2 = x$ .

היחס בין שני התחומים הוא  $1 < x < 2$ .

## 7.14 קיצ' פונקציית מועד א

נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{ax^2 + 9}$ .  $a$  הוא פרמטר גדול מ-0.

- א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $(x)$ ?  
 (2) הראה כי לפונקציה  $(x)$  אין נקודות פיתול.
- ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת  $(x)'f$ ?  
 (2) הביע באמצעות  $a$  את האסימפטוטות האופקיות של פונקציית הנגזרת  $(x)'f$ .  
 (3) מצא תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת  $(x)'f$  (אם יש כאלה).  
 (4) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $(x)'f$ .
- ג. השטח, המוגבל על ידי הגраф של פונקציית הנגזרת  $(x)'f$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישר  $x = -4$ , שווה ל-2.

בלי לחשב את הערך של  $a$ , חשב את הערך המספרי של  $f(-4)$  ואת הערך המספרי של  $f(4)$ .

### סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדר כאשר  $0 < ax^2 + 9$ . נתון  $-0 < ax^2 + 9$  או הביטוי תמיד גדול מאפס, והפונקציה מוגדרת עבור כל  $x$ .

(2) נחשב את הנגזרת הראשונה והנגזרת השנייה:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(ax^2 + 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2ax = \frac{ax}{\sqrt{ax^2 + 9}} \\ f''(x) &= \frac{a\sqrt{ax^2 + 9} - ax \cdot \frac{ax}{\sqrt{ax^2 + 9}}}{ax^2 + 9} \\ &= \frac{9a}{(ax^2 + 9)\sqrt{ax^2 + 9}}. \end{aligned}$$

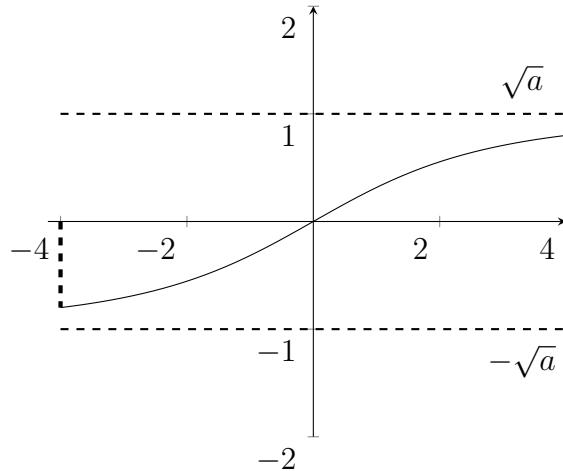
(א) הנגזרת השנייה מוגדרת לכל  $x$ , ו-(ב) גם המונה וגם המכנה חיוביים, ולכן הנגזרת השנייה לא מותאמת. המכנה היא שאין נקודות פיתול.

### סעיף ב

(1)  $f'(x) = \frac{ax}{\sqrt{ax^2 + 9}}$  מוגדרת כאשר  $0 > ax^2 + 9$ , ולכן היא מוגדרת לכל  $x$  בבדיקה כמו  $f(x)$ .  
 (2) יש אסימפטוטות אופקיות ב- $\pm\sqrt{a}$ :

$$f'(x) = \frac{ax}{\sqrt{a + \frac{9}{x^2}}} \xrightarrow{\pm\infty} \pm\sqrt{a}.$$

- (3) ראיינו בסעיף א' שהנגזרת השנייה תמיד חיובית ולכן הנגזרת הראשונה תמיד עולה.  
 (4) נשתמש במידע:  $f'(0) = 0$ , יש אסימפטוטות אופקיות ב- $\pm\sqrt{a}$ , הנגזרת תמיד עולה.



### סעיף ג'

האינטגרל של הנגזרת של פונקציה הוא הפונקציה עצמה.

$$\int_{-4}^0 0 - f'(x) dx = - \int_{-4}^0 f'(x) dx = -f(x) \Big|_{-4}^0 = -f(0) + f(-4).$$

קל לחשב ש- $f(-4) = \sqrt{16a+9}$  ו- $f(0) = \sqrt{9} = 3$ . אבל השאלה דורשת את הערך של  $f(-4)$  בלי לחשב את הערך של  $a$ . החישוב אפילו קל יותר:

$$\begin{aligned} -f(0) + f(-4) &= 2 \\ f(-4) &= 2 + f(0) = 2 + 3 = 5. \end{aligned}$$

הפונקציה זוגית, לכן  $f(4) = f(-4) = 5$ .

מי שמעוניין יכול לחשב את ערכו של  $a$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{16a+9} &= 2 + 3 \\ a &= 1. \end{aligned}$$

## 7.15 חורף תשע"ד

במשולש שווה-שוקיים  $\triangle ABC$  אורך השוק הוא  $b$ .

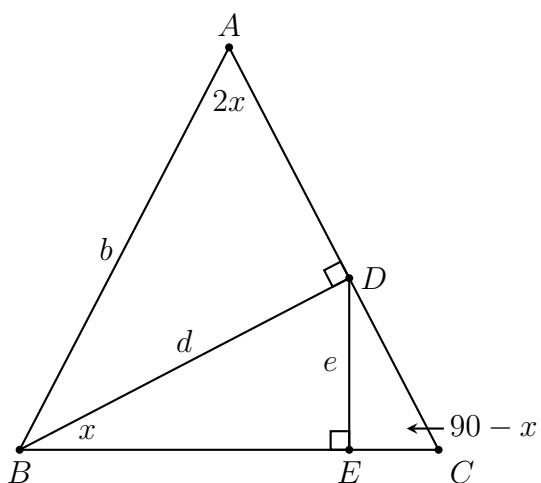
$BD$  הוא גובה לשוק  $AC$ .  $DE$  הוא אנך לבסיס  $BC$ .

סכום  $x + \angle BAC = 2x$ , ומוצא מה צריך להיות הגודל של  $\angle BAC$ ,

כדי שאורך האנך  $DE$  יהיה מקסימלי.

בתשובתך דיק Ud שתיק ספורות אחרי הנקודה העשרונית.

**בבחינה זו היו שלוש שאלות בפרק השני لكن מספר השאלה הוא 8 ולא 7.**



נבדק את סימונו הזווית בתרשים. משולש שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות והסכום כל הזווית במשולש שווה:  $180^\circ$ :

$$\angle ACB = \angle ABC = \frac{180 - 2x}{2} = 90 - x.$$

במשולש ישר-זווית  $\triangle BDC$   $\angle DBC = 90 - (90 - x) = x$ .

במבט ראשון נראה שאפשר למצוא את הערך המקסימלי של  $DE = e$  על ידי מציאת הנגזרת  $e' = d(\sin x)' = d \cos x$ . אבל זה לא נכון כי  $d$  קבוע ולכן אי אפשר להוציא אותו מנגזרת. נתון ש- $b$  קבוע, כך שעליינו למצוא ביטוי מהצורה  $(x) = f(x) \cdot g(x)$ .

את החישוב נבצע בשני שלבים, תחילה נבטא את  $e$  כפונקציה של  $x$ , ולאחר מכן נבטא את  $d$  כפונקציה של  $x$ . אפשר להשתמש בחוק הסינוסים, אבל פשוט יותר להשתמש בהגדרת הפונקציות הטריגונומטריות  $\sin x$  ו- $\cos x$ . במשולשים ישר-זווית  $\triangle BED$ ,  $\triangle BDA$

$$\begin{aligned} e &= d \sin x \\ d &= b \sin 2x \\ e &= (b \sin 2x) \sin x \\ &= b(2 \sin x \cos x) \sin x = 2b \sin^2 x \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e' &= 2b(2 \sin x \cos x \cos x + \sin^2 x \cdot (-\sin x)) \\ &= 2b \sin x(2 \cos^2 x - \sin^2 x) = 0. \end{aligned}$$

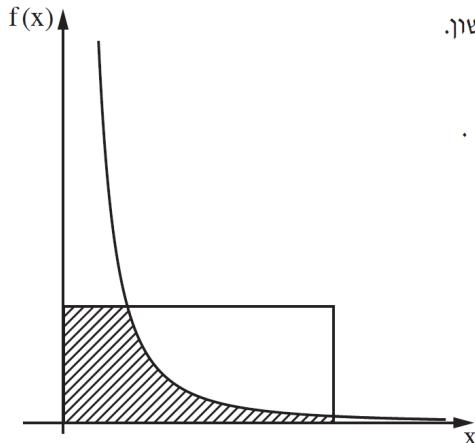
הנגזרת מתאפסת אם  $\sin x = 0$ ,  $x = 180^\circ$  שלא יתכן, כי אין מינימום להיות זוויות במשולש.  
הנגזרת גם מתאפסת אם :

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 x - \sin^2 x &= 0 \\ \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 &= 2 \\ \tan x &= \pm\sqrt{2} \\ x &= 54.74^\circ, 125.26^\circ. \end{aligned}$$

אבל  $x = 54.74^\circ$  הוא הפתרון האפשרי היחיד.  
השאלה מבקשת את ערכו של זוויות  $\angle BAC = 2x = 109.47^\circ$ .

## פרק 8 חדו"א שאלה 8

### 8.1 קיז תשע"ח מועד ב

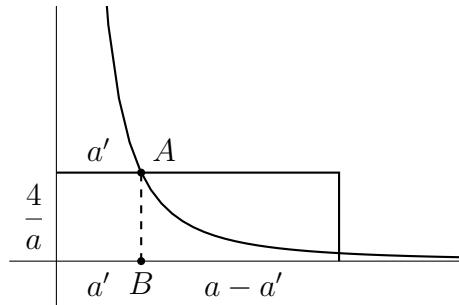


בצир שלפניך מתואר גף הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  בתחום  $x > 0$  ומלבן ששתים מצלעותיו נמצאות על הצירים והוא נמצא ברביע הראשון. נתון: שטח המלבן הוא 4.

נסמן ב-  $a$  את אורך צלע המלבן שנמצאת על ציר ה-  $x$ . נתון:  $a \geq \frac{1}{4}$ .

**א.** הבע באמצעות  $a$  את השטח המוגבל על ידי הצירים, על ידי צלעות המלבן ועל ידי גף הפונקציה  $f(x)$  (השטח המוקוּן בצир).

**ב.** עבור أيזה ערך של  $a$  השטח שמצוֹת בסעיף א הוא מקסימלי?



#### סעיף א

נתון שמרחיק הצלע התחתונה של המלבן מציר ה-  $y$  הוא  $a$ , ונתון שטח המלבן 4, ולכן אורך הצלע האנכית של המלבן הוא  $\frac{4}{a}$ . נסמן ב-  $A$  את נקודת החיתוך של גף הפונקציה עם הצלע העליונה של המלבן. נסמן ב-  $a'$  את אורך הקטע בין  $A$  לציר ה-  $y$ , ונסמן ב-  $B$  נקודת על ציר ה-  $x$ , הנמצאת במרחק  $a'$  מציר ה-  $y$ . לפי הגדרת הפונקציה

$$\begin{aligned} f(a') &= \frac{1}{(a')^2} = \frac{4}{a} \\ a' &= \frac{\sqrt{a}}{2}. \end{aligned}$$

נחשב את השטח המבוקש כסכום השטח של מלבן מציר ה-  $y$  ועד לצלע  $AB$ , והשטח מתחת לפונקציה מ-  $B$  ועד ל-  $x = a$ :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{4}{a} \cdot \frac{\sqrt{a}}{2} + \int_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^a \frac{1}{x^2} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{a}} + (-1) \cdot x^{-1} \Big|_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^a \\
&= \frac{2}{\sqrt{a}} - \frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{\sqrt{a}}{2}} = \frac{4\sqrt{a} - 1}{a}.
\end{aligned}$$

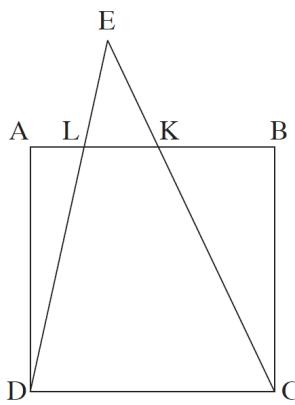
### סעיף ב

ברור ש-  $S = \frac{4\sqrt{a} - 1}{a}$  יורדת בעיקיות ככל ש- $a$  עולה, לכן הערך המקסימלי צריך להיות בערך הקטן ביותר של התחום הנוכחי . $a = \frac{1}{4}$  אפשר גם לחשב את הנגזרת הראשונה :

$$\left( \frac{4\sqrt{a} - 1}{a} \right)' = \frac{\left( 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot a \right) - ((4\sqrt{a} - 1) \cdot 1)}{a^2} = \frac{-2\sqrt{a} + 1}{a^2},$$

$$\text{שمتאפסת ב-} .a = \frac{1}{4}$$

## 8.2 קיז תשע"ח מועד א



הוא ריבוע שאורך צלעו 6 ס"מ.

ו- L הן נקודות על הצלע AB .

נתון כי הישרים CK ו- DL חותכים זה את זה בנקודה E ,

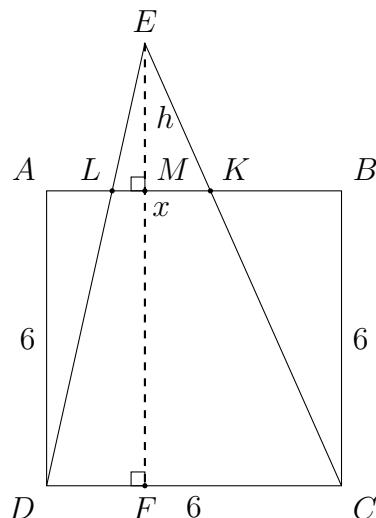
הנמצאת מחוץ לריבוע ABCD (ראה ציור).

נסמן:  $LK = x$  .

א. הביע באמצעות x את גובה המשולש KLE .

ב. עבור أيיה ערך של x סכום שטחי המשולשים ADL , BCK , ו- EKL הוא מינימלי? נמק.

תוכל להסביר שורש בתשובהך.



### סעיף א

נשים לב שהגובה של  $\triangle CDE$  הוא  $6 + h$ , ולכן  $\triangle CDE \sim \triangle KLE$  ו-  $DC \parallel LK$

$$\frac{h}{x} = \frac{h+6}{6}$$

$$h = \frac{6x}{6-x}.$$

### סעיף ב

נחשב את שלושת השטחים :

$$S_{\triangle KLE} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{6x}{6-x}$$

$$S_{\triangle ADL} = \frac{1}{2} \cdot AL \cdot 6$$

$$S_{\triangle BCK} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot 6.$$

המצב נראה אבוד כי  $AL, BK$  לא ידועים ואין נתונים עליהם. אבל, נשים לב ש- $\Delta$ -צלע של הריבוע,  $AL + BK = AB - LK = 6 - x$  וכאן  $x$  סכום השטחי המשולשים הוא :

$$\begin{aligned} S = S_{\triangle KLE} + S_{\triangle ADL} + S_{\triangle BCK} &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{6x}{6-x} + \frac{1}{2} \cdot (6-x) \cdot 6 \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{2(x^2 - 6x + 18)}{6-x} \right) \\ &= 6 \cdot \frac{x^2 - 6x + 18}{6-x}. \end{aligned}$$

נחשב את נגזרת הראשונה (ללא הקבוע 6) :

$$\begin{aligned} S' &= \frac{(2x-6)(6-x) - (x^2 - 6x + 18)(-1)}{(6-x)^2} \\ &= \frac{-x^2 + 12x - 18}{(6-x)^2}. \end{aligned}$$

המכנה חיובי ולכן המוננה מתאפס עבור :

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 18}}{-2} = 6 \mp 3\sqrt{2}.$$

הערך  $6 - 3\sqrt{2} > 6 + 3\sqrt{2}$  אינו פתרון כי  $LK$  הוא קטע של צלע שאורכה 6. נקודת הקיצון היא  $6 - 3\sqrt{2}$ . המוננה של  $S'$  חיובי ולכן הסימן של הנגזרת השנייה לשiman של הנגזרת של המוננה :  $-2x + 12$ . עבור נקודת הקיצון :

$$-2(6 - 3\sqrt{2}) + 12 = 6\sqrt{2} > 0,$$

והנקודת הקיצון היא מינימום.

### 8.3 חורף תשע"ח

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{1}{x^3}.$$

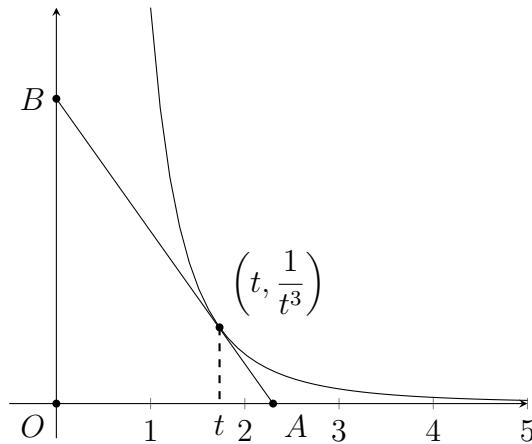
העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x = t$ .  
נתון:  $1 \leq t \leq 5$ .

- המשיק חותך ציר ה- $x$  בנקודה  $A$  ואת ציר ה- $y$  בנקודה  $B$ . הנקודה  $O$  היא ראשית הצירים.
- ממצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש  $AOB$  הוא מינימלי.
  - ממצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש  $AOB$  הוא מקסימלי.

הסתובכתי כאן בגלל שלא תירגלתי מזמן את המשוואה לקו ישר. נראה לי שגם הפעם היחידה שהמשוואה נדרשת בכל הבדיקות הללו.

#### סעיף א

ערך ההפונקציה חיובית עבור ערכי  $x$  חיוביים, ולכן המשיק נמצא ברביע הראשון.  
(הערכים בציר ה- $y$  בתרשימים הוכפלו פי שמונה כדי לאפשר הצגת תרשימים ברור).



הנגזרת של הפונקציה היא  $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$ , לכן הקו המשיק לגרף הפונקציה הוא:

$$y - \frac{1}{t^3} = -\frac{3}{t^4}(x - t).$$

נחשב את הנקודות על הצירים. עבור ציר ה- $x$ :

$$\begin{aligned} 0 - \frac{1}{t^3} &= -\frac{3}{t^4}(x_A - t) \\ 3x_A &= t^4 \left( \frac{3t}{t^4} + \frac{1}{t^3} \right) = 3t + t \\ x_A &= \frac{4t}{3}. \end{aligned}$$

עבור ציר ה- $y$ :

$$\begin{aligned} y_B - \frac{1}{t^3} &= \frac{-3}{t^4}(0-t) \\ y_B &= \frac{3t}{t^4} + \frac{1}{t^3} = \frac{4}{t^3}. \end{aligned}$$

השאלה מבקשת את נקודת הקיצון של:

$$g(t) = x_A + x_B = \frac{4t}{3} + \frac{4}{t^3}.$$

הנגזרת הראשונה והנגזרת השנייה הן:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{4}{3} + \frac{-12}{t^4} \\ g''(x) &= \frac{48}{t^5}. \end{aligned}$$

הנחשב את  $t$  כאשר הנגזרת הראשונה מתאפסת:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{4}{3} + \frac{-12}{t^4} = 0 \\ t^4 &= \frac{3}{4} \cdot 12 = 9 \\ t &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

נתו  $t > 0$  ולכן נקודת הקיצון היא  $t = \sqrt{3}$ . הנגזרת השנייה חיובית עבור כל  $t > 0$  ולכן נקודת הקיצון היא מינימום.

#### סעיף ב

אם יש רק נקודת קיצון פנימית אחת שהיא מינימום, אז המקסימום חייב להיות בתחום:

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{4 \cdot 1}{3} + \frac{4}{1^3} = \frac{16}{3} \\ g(5) &= \frac{4 \cdot 5}{3} + \frac{4}{5^3} = \frac{20}{3} + \frac{4}{125}. \end{aligned}$$

ברור ש- $g(5) < g(1)$  ולכן המקסימום הוא ב- $t = 5$ .

## 8.4 קיז תשע"ז מועד ב

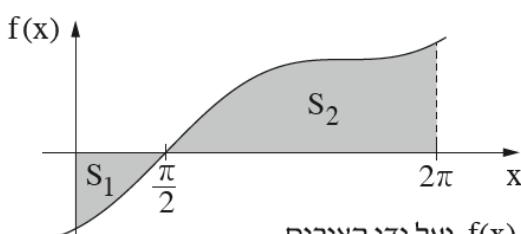
(x) היא פונקציה המוגדרת לכל x.

גרף הפונקציה (x) חותך את ציר ה- y בחלקו השילי.

נקודות החיתוך היחידה של גרף הפונקציה (x) עם ציר ה- x היא  $(0, 0)$  ו  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  (ראה ציור).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה (x), על ידי הצירים ועל ידי הישר  $x = 2\pi$

$$(\text{השטח האפור בציור}) שווה ל-  $16 + 10\pi^2$ .$$



$$\text{נתון גם: } \int_0^{2\pi} f(x) dx = 8\pi^2$$

א. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה (x) ועל ידי הצירים

$$(\text{השטח } S_1 \text{ המסומן בציור}).$$

הפונקציה (x) F היא פונקציה קדומה לפונקציה (x) f. נתון:  $F(0) = 0$ .

$$\text{ב. מצא את } F(\frac{\pi}{2}).$$

$$\text{נתון: } f'(x) = 8 \sin x + 8$$

$$\text{ג. מצא את } f(x).$$

בשאלה זו צריך לשים לב להבדל בין חישוב אינטגרל של פונקציה ובין השימוש באינטגרל לחישוב שטח. בתרשים בשאלה, אם מחשבים אינטגרל מ-0 ל- $2\pi$ , הערכים השיליליים עד  $\frac{\pi}{2}$  "מורידים" מערכם האינטגרל. כאשר מחשבים את השטח  $S_1 + S_2$  חוביית ויש לחשב את האינטגרל של השיליה של הפונקציה.

**סעיף א**

הערך של  $f(x)$  שלילי בין  $0$  ל- $\frac{\pi}{2}$  ולכן:

$$S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} f(x) dx = 10\pi^2 + 16.$$

נתון ש:

$$-S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx = 8\pi^2.$$

נחסיר את המשוואה השנייה מהראשונה ונקבל:

$$S_1 = \pi^2 + 8.$$

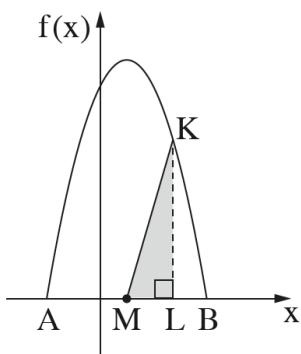
**סעיף ג**

$$-S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = F\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(\pi^2 + 8).$$

**סעיף ג**  
 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (8 \sin x + 8) dx \\ &= -8 \cos x + 8x + c \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -8 \cos \frac{\pi}{2} + 8 \cdot \frac{\pi}{2} + c = 0 \\ c &= -4\pi \\ f(x) &= -8 \cos x + 8x - 4\pi. \end{aligned}$$

## 8.5 קיז' תשע"ז מועד א



בציר שלפניך מתואר גורף הפונקציה  $f(x) = -x^2 + 2x + c$  בתחומי האידישליות שלה. ו-  $B$  הן נקודות החיתוך של הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ . נתון:  $t > 0$      $x_B = 2t$ ,  $x_A = -t$     א. מצא את  $t$  ואת  $c$ .

$M$  היא נקודת החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה עם ציר ה- $x$ .  $K$  היא נקודה כלשהי על גורף הפונקציה  $f(x)$  מעל לציר ה- $x$ . מהנקודה  $K$  הורידו אנך לציר ה- $x$ , החותך את הקטע  $AB$  בנקודה  $L$ . ב. מצא עבור אילו שיעורי  $x$  של הנקודה  $K$  שטח המשולש  $KLM$  הוא מקסימלי. מצא את שני הפתרונות האפשריים. תוכל להשאיר שורש בתשובהך.

### סעיף א

נציב את הביטויים הנתונים עבור  $A, B$  ונקבל שתי משוואת בשני נעלמים  $t, c$  שנוכל לפתור:

$$\begin{aligned} -(2t)^2 + 2(2t) + c &= 0 \\ -(-t)^2 + 2(-t) + c &= 0 \\ t(6t - 3) &= 0 \\ t &= 2. \end{aligned}$$

פסלנו את הפתרון  $t = 0$  כי נתון ש- $t > 0$ . נחשב את  $c$ :

$$\begin{aligned} -(-2)^2 + 2(-2) + c &= 0 \\ c &= 8. \end{aligned}$$

הfonקציה היא  $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

### סעיף ב

נקודות החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה עם  $f(x)$  היא נקודות המקסימום של  $f(x)$ . מהגזרת הראשונה  $0 = f'(x) = -2x + 2$  מתקבל  $x = 1$ . הקודקודים של  $\triangle KLM$  הם ( $x, -x^2 + 2x + 8$ ) כאשר  $x$  היא הקואורדינטה של  $L$ , על ציר ה- $x$ :

$$\begin{aligned} M &= (1, 0) \\ L &= (x, 0) \\ K &= (x, -x^2 + 2x + 8). \end{aligned}$$

השטח של  $\triangle KLM$  הוא :

$$S(x) = \frac{1}{2}(x-1)(-x^2 + 2x + 8),$$

והגזרת הראשונה היא :

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{1}{2}(1 \cdot (-x^2 + 2x + 8) + (x-1)(-2x+2)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-3x^2 + 6x + 6) \\ &= -\frac{3}{2} \cdot (x^2 - 2x - 2). \end{aligned}$$

הנגזרת מותאמת ב:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 2}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

הנגזרת השנייה היא  $S''(x) = -3(x-1)$ .

$S''(1 + \sqrt{3}) = -3\sqrt{3} < 0$  הפטרנו  $1 + \sqrt{3}$  הוא מקסימום כי  $0 < 1 + \sqrt{3}$ .

הפטרנו  $1 - \sqrt{3}$  מתחאים למשולש הסימטרי כאשר  $K, L$  משMAL ל- $M$ . אורך הבסיס יהיה  $x - 1 - \sqrt{3}$ . הסימנים יתպכו ונקבל שטח חיובי ומקסימלי.

פתרו אחר משתמשים במונח "קודקוד הפרבולה". לא נתקלתי בו בספריו לימוד או בבחינות

אחרות. עבור פרבולה  $c$  ערך  $x$ -ה של הקודקוד הוא  $\frac{-b}{2a}$ . אין צורך לזכור את

הנוסחה כי ניתן לשחזר אותה על ידי חישוב הנגזרת :

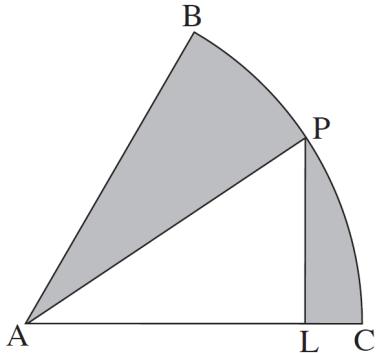
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot -1} = 1.$$

## 8.6 חורף תשע"ז

נתונה גזרת עיגול  $BAC$  שהיא  $\frac{1}{6}$  מעיגול שרדיויסו  $R$  ומרכזו  $A$ .



מנקודה כלשהי  $P$ , הנמצאת על הקשת  $BC$ ,

הוריידו אnek ל- $AC$  החותך את הרדיוס  $AC$  בנקודה  $L$

(ראה ציור).

השטח האפור שבציוור הוא השטח הכלוא בין הקשת  $BC$

ובין הרדיוסים  $AB$  ו- $AP$ , והקטעים  $LP$  ו- $LC$ .

נתנו שהשטח האפור המינימלי הוא  $36 - 24\pi$ .

א. (1) מצא את הזווית  $PAC$  שעוברת

השטח האפור שמתකבל הוא מינימלי.

(2) מצא את  $R$ .

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש  $APL$ ? נמק.

### סעיף א

(1) במקום לחשב את השטח האפור (משימה שנראית די קשה), נחשב את שטחו כהפרש בין השטח של גזרת המעגל  $BAC$  לבין השטח של המשולש  $\triangle APL$ .

שטח הגזרה הוא ששית משטח המעגל כולו  $\frac{1}{6} \cdot \pi R^2$ .

שטח המשולש הוא מחצית המכפלת הבסיס  $PL$  והגובה  $AL$ , אבל ניתן להביע אותם באמצעות הרדיוס  $R$  וזוויות  $AP = R$  ו- $\alpha = \angle PAC$ :

$$\cos \alpha = \frac{AL}{R}$$

$$\sin \alpha = \frac{PL}{R}$$

$$S_{\triangle APL} = \frac{1}{2} \cdot R \cos \alpha \cdot R \sin \alpha.$$

השטח האפור הוא:

$$\text{אפור} = \frac{R^2}{2} \left( \frac{\pi}{3} - \cos \alpha \sin \alpha \right)$$

בלי הקבוע  $\frac{R^2}{2}$  הגזרת הראשונה היא:

$$-((- \sin \alpha) \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha.$$

הגזרת מתאפסת כאשר  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , הפתרון היחיד הוא  $\cos \alpha = \pm \sin \alpha$ . בזרה  $2\pi - \frac{1}{6}$ .

(2) הנזרת השנייה היא  $4 \sin \alpha \cos \alpha$  נקודות הקיצון היא מינימום.

נשווה את החישוב שקיבלנו עם השטח הנוכחי :

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{2} \left( \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \right) &= 24\pi - 36 = 12(2\pi - 3) \\ \frac{R^2}{2} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) &= 12(2\pi - 3) \\ \frac{R^2}{2} \cdot \frac{1}{6} (2\pi - 3) &= 12(2\pi - 3) \\ R &= 12 . \end{aligned}$$

#### סעיף ב

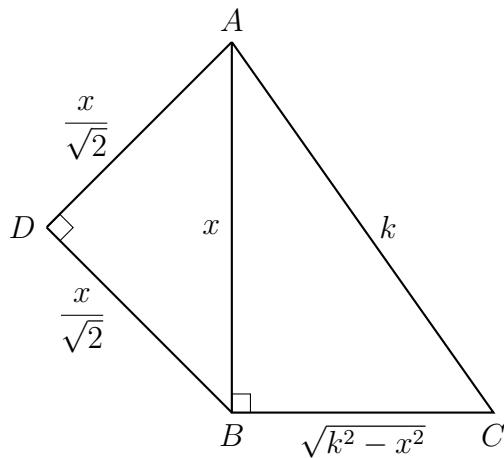
השטח המקסימלי של  $\triangle APL$  הוא שטח הגזרה פחות השטח המינימלי של השטח האפור :

$$\begin{aligned} S_{\triangle APL} &= \frac{\pi R^2}{6} - (24\pi - 36) \\ &= 24\pi - (24\pi - 36) = 36 . \end{aligned}$$

## 8.7 קיצ' תשע"ו מועד ב

- במשולש ישר זווית  $\angle ABC = 90^\circ$  אורך היתר הוא  $k$  ס"מ ( $k$  הוא פרמטר).  
 הניצב  $AB$  הוא גם יתר במשולש  $ADB$ , שהוא שווה-שוקיים וישר זווית ( $\angle ADB = 90^\circ$ ).
- סמן  $x = AB$  והבע את  $BC$  באמצעות  $x$  ו-  $k$ .
  - נתון כי הערך המקסימלי של המכפלה  $BC \cdot AD^2$  הוא  $3\sqrt{3}$ .
- מצא את שטח המשולש  $ADB$  (ערך מסווני), כאשר המכפלה  $BC \cdot AD^2$  היא מקסימלית.

ביזבוזי הרבה זמן על השאלה כי בהעדר תרשימים שמתי את הנקודה  $D$  על היתר  $AC$ !



### סעיף א

הביטויים עבור  $BC, AD, BD$  נובעים ממשפט פתגורס ומהנתון  $\triangle ADB$ -שווה-שוקיים.

### סעיף ב

$$\begin{aligned}
 (BC \cdot AD^2)' &= \left( \sqrt{k^2 - x^2} \cdot \frac{x^2}{2} \right)' \\
 &= \frac{-2x}{2\sqrt{k^2 - x^2}} \cdot \frac{x^2}{2} + \sqrt{k^2 - x^2} \cdot x \\
 &= \frac{-x^3}{2\sqrt{k^2 - x^2}} + \frac{2(k^2 - x^2)x}{2\sqrt{k^2 - x^2}} \\
 &= \frac{2k^2x - 3x^3}{2\sqrt{k^2 - x^2}}.
 \end{aligned}$$

נניח כמוון שהמשולש לא מנוון כך ש- $k \neq x$ . הנגזרת מתאפסת כאשר :

$$k = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}}k.$$

סימן הנגזרת השנייה שווה לסימן הנגזרת של המונה :

$$(2k^2 - 3x^2)' = -6x < 0,$$

נקודות הקיצון היא מקסימלית.

נחשב  $: x = \sqrt{\frac{2}{3}}k \cdot \text{כך לקבל ערך מסווני עבור } k$ . נציב  $BC \cdot AD^2 = 3\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \sqrt{k^2 - x^2} \cdot \frac{x^2}{2} &= \sqrt{k^2 - \frac{2}{3}k^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}k^2 \\ &= k^3 \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$k^3 = 27$$

$$k = 3.$$

מכאן ש :

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}k = \sqrt{6}.$$

השטח המקסימלי של  $\triangle ADB$  הוא :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x^2}{4} = \frac{(\sqrt{6})^2}{4} = \frac{3}{2}.$$

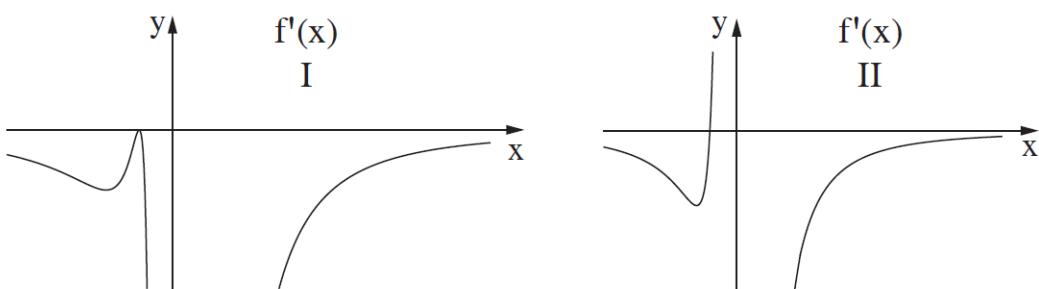
## 8.8 קיצ' תשע"ו מועד א

נתונה הפונקציה  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$   $x \neq 0$ .  $n$  הוא מספר טבעי גדול מ-1.

א. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $(x)f$  המאונכות לצירים.

ב. הראה כי עבור  $x$  אי-זוגי  $f'(x) \leq 0$  לכל  $x \neq 0$ .

לפניך שני גרפים, I ו- II. (בגרפים מוצגות כל נקודות הקיצון).



אחד הגראפים מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת  $(x)f'$  עבור  $x$  זוגי,

והגרף الآخر מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת  $(x)f'$  עבור  $x$  אי-זוגי.

היעזר בגרפים I ו- II, וענה על השעיפים ג, ד, ו- ה.

ג. עבור  $x$  אי-זוגי:

(1) מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה  $(x)f$ . נמק.

(2) מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה  $(x)f$ . נמק.

ד. עבור  $x$  זוגי:

(1) מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה  $(x)f$ . נמק.

(2) מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה  $(x)f$ . נמק.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $(x)f$ .

ה. נתונות הפונקציות:  $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$ ,  $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$ .

מהו הסימן של המכפלה  $g''(x) \cdot h''(x)$  עבור  $x > 0$ ? נמק.

### סעיף א

$f(x) \rightarrow 1$  ויש אסימפטוטה אופקית ב- $-1 = y$ . עבור  $\infty \rightarrow -x$ , עדין יש אסימפטוטה אופקית ב- $y = 0$ , רק  $f(x) = 0$  מעל לציר ה- $x$  עבור  $x$  זוגית, ומתחת לציר עבור  $x$  אי-זוגי.

הפונקציה לא מוגדרת עבור  $x = 0$  ולכן  $x = 0$  היא אסימפטוטה אנכית.

#### סעיף ב

$$f'(x) = \left( (1 + x^{-1})^n \right)' = n (1 + x^{-1})^{n-1} \cdot -x^{-2}.$$

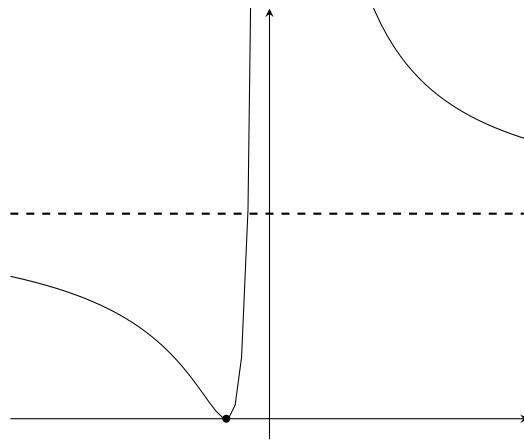
נתון ש- $n$  חיובית. אם  $n$  אי-זוגית,  $1 - x^{-1}$  זוגית, ו- $n (1 + x^{-1})^{n-1} \cdot -x^{-2}$  חיובית (לא אפס כי  $0 \neq x$ ). לכן סימן המינוס לפני  $x$  גורם לכל הביטוי להיות שלילי או אפס. מכאן שגרף I מתאים ל- $n$  אי-זוגית וגרף II ל- $n$  זוגית.

#### סעיף ג

- (1) בנקודות קיצון של  $f(x)$  הנגזרת הראשונה  $f'(x)$  חוצה את ציר ה- $x$ , שכן אין נקודות קיצון.
- (2) בנקודות פיתול הנגזרת השנייה מתאפסת. זה קורה פעמיים אחת בנקודות המינימום של  $f'(x)$  ופעמיים אחת כאשר  $f'(x)$  יש נקודות מקסימום. לכן יש שתי נקודות פיתול.

#### סעיף ד

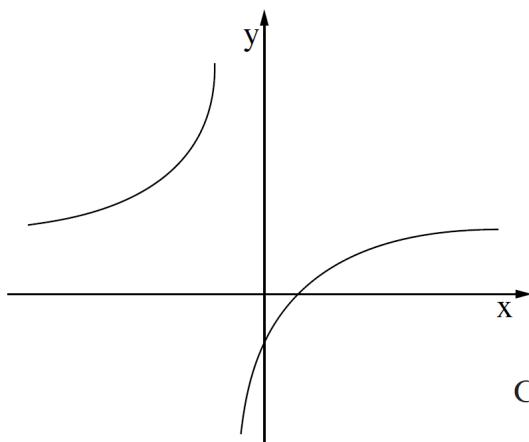
- (1) בנקודות קיצון של  $f(x)$  הנגזרת הראשונה  $f'(x)$  חוצה את ציר ה- $x$ , שכן יש נקודות קיצון אחת.
- (2) נקודות פיתול הנגזרת השנייה מתאפסת, כלומר, יש נקודה קיצון לנגזרת הראשונה, שכן יש נקודות פיתול אחת.
- (3) לפי גраф II, עבור  $0 < x$ , השיפוע קרוב לאפס באסימפטוטה האופקית. השיפוע יורדת משמאלי עד לנקודות פיתול שם השיפוע עולה עד לנקודות מינימום של  $f(x)$  ואז ממשיך לעלות. עבור  $x > 0$  השיפוע תמיד עולה מערך שלילי נמוך מאוד ועד קרוב לאפס בכיוון האסימפטוטה האופקית.



#### סעיף ה

רואים בשני הגרפים שעבור  $x > 0$ , השיפוע, הנגזרת הראשונה, עולה, כך שהנגזרת השנייה חיובית. מכפלה של שני ערכיים חיוביים היא חיובית.

## 8.9 חורף תשע"ו



$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{נתונה הפונקציה (ראה ציור).}$$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה,

ואת האסימפטוטות של הפונקציה  
המקבילות לצירים.

ב. העבירו ישר המקביל לציר ה- $x$ .

הישר חותך את גרף הפונקציה ( $x$ )  
בנקודה  $C$  ונקודה  $D$ .

נסמן את שיעור ה- $x$  של נקודה  $C$  ב- $t$ .

מצא מה צריך להיות הערך של  $t$ , כדי שהאורך של הקטע  $CD$  יהיה מינימלי:

$$(1) \quad t > -1.$$

$$(2) \quad t < -1.$$

ג. מצא את האורך המינימלי של הקטע  $CD$  עבור כל  $t \neq -1$ .

### סעיף א

הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס:  $x = -1$ .

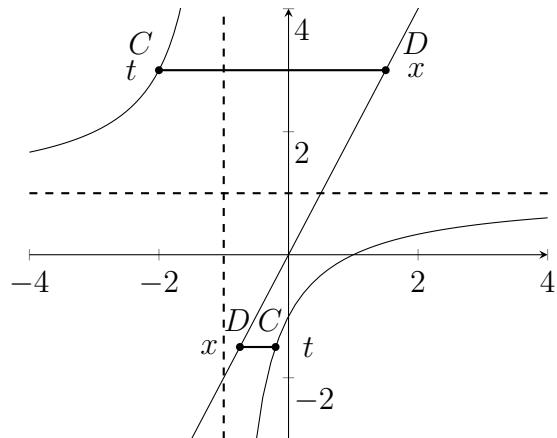
$x = -1$  יש אסימפטוטה אנכית כי המכנה מתאפס והמונה לא מתאפס.

$y = 1$  היא אסימפטוטה אופקית כי:

$$\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \pm \infty} 1.$$

### סעיף ב

בתרשים סימנו את ערכי ה- $x$  ליד שמות הנקודות:



יש כאן מלכודת שנייתן להימנע ממנה על ידי הינתן תרשימים מדויק. אמנם  $t$  מוגדר כערך ה- $x$  של  $f(x)$  אבל האורך בין הפונקציה והקו  $y = 2x = -t$  תלוי במקומם היחסי בין הקו וגרף הפונקציה. ניתן גם לראות בחלוקת לשני תת-סעיפים רמז שיש לטפל בשני המקרים בנפרד.

(1) כאשר  $t > -1$  אורך הקטע  $DC$  (נסמן  $a$ ) הוא  $a = -x - (-t) = t - x$ . מדובר במקרה ש- $t, x < -1$ , אבל הנוסחה מתאימה גם אם קטע הקו במקומות אחרים. ערכי- $y$  של שתי הנקודות שוים, ולכן ניתן להציב בנוסחה עבור  $a$ :

$$\begin{aligned} a &= t - x = t - \frac{t-1}{2(t+1)} \\ &= \frac{2t^2+t+1}{2(t+1)} \\ a' &= \frac{(4t+1) \cdot 2(t+1) - (2t^2+t+1)(2)}{4(t+1)^2} \\ &= \frac{4t^2+8t}{4(t+1)^2} = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2} = 0. \end{aligned}$$

ערכי  $t$  של נקודות הקיצון נמצאות במקומות שהנגזרת הראשונה מתאפסת:  $t = 0, t = -2$ . המכנה של הנגזרת הראשונה תמיד חיובי ולכן סוג נקודות הקיצון נקבע מהחסימן של הנגזרת של המונה:  $2t+2$ . כאשר  $t = 0$ , הנגזרת חיובית והנקודה היא מינימום. כאשר  $t = -2$  הנגזרת שלילית והנקודה היא מקסימום. לכן האורך המינימלי הוא:

$$t - x = 0 - \frac{0-1}{2(0+1)} = \frac{1}{2}.$$

(2) כאשר  $-1 < t < 0$  אורך הקטע  $a$  הוא  $a = x + (-t) = x - t$ .

$$\begin{aligned} a &= x - t = \frac{t-1}{2(t+1)} - t \\ &= \frac{-(2t^2+t+1)}{2(t+1)} \\ a' &= \frac{-(4t+1) \cdot 2(t+1) + (2t^2+t+1)(2)}{4(t+1)^2} \\ &= \frac{-4t^2-8t}{4(t+1)^2} = \frac{-t(t+2)}{(t+1)^2} = 0. \end{aligned}$$

ערכי  $t$  של נקודות הקיצון נמצאות במקומות שהנגזרת הראשונה מתאפסת, שוב ב- $-2$ . המכנה של הנגזרת הראשונה תמיד חיובי ולכן סוג נקודות הקיצון מתקבל מהחסימן של הנגזרת של המונה:  $-2t+2$ . כאשר  $t = 0$ , הנגזרת שלילית והנקודה היא מקסימום. כאשר  $t = -2$  הנגזרת חיובית והנקודה היא מינימום. לכן, האורך המינימלי הוא:

$$x - t = -\frac{-2-1}{2(-2+1)} - (-2) = \frac{7}{2}.$$

## סעיף ג'

$t = 0$  הוא  $\frac{1}{2}$  שכן האורך המינימלי עבור  $-1 < t < \frac{7}{2}$

## 8.10 קיצ' תשעיה מועד ב

נתונה הפונקציה  $f(x)$ , ונanton כי כל אחת מהפונקציות  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  ו-  $f'''(x)$  מוגדרת בתחום  $x > 0$ .

נתונ גם: הגרף של  $f'(x)$  חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 1$ ,

$f'(x) < 0$  לעלה בתחום  $x < 1$ ,  $f'(x) > 0$  ו יורדת בתחום  $x > 1$

האסימפטוטות של  $f(x)$  הן  $x = 0$  ו-  $y = 0$ .

א. סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

נתונ גם כי לפונקציה  $f(x)$  יש אסימפטוטה אחת שמשוואתה  $x = 0$ .

ב. מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ג. מצא את תחומי הקעירות לפני מעלה  $U$  וככלפי מטה  $\cap$  של הפונקציה  $f(x)$ . נמק.

ד. הפונקציה  $f(x)$  מקבלת את כל הערכים בטוחות  $y \geq 4$  ו רק אותם.

סרטט סקיצה של גורף הפונקציה  $f(x)$ .

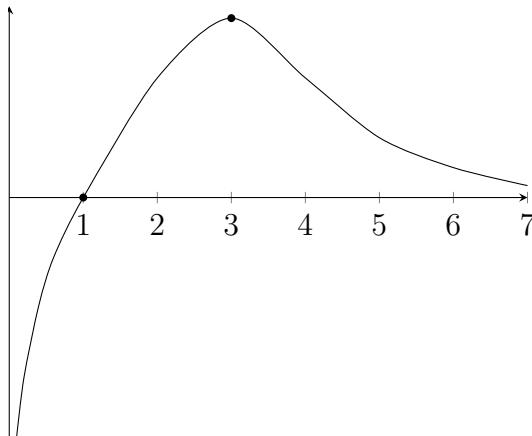
צין על ציר ה- $x$  ועל ציר ה- $y$  את הערכים שמצוות.

ה. נתונה הפונקציה  $g(x) = -[f(x)]^3$ .

מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה  $g(x)$ .

### סעיף א

(בשאלה אין נוסחה לפונקציה, גם לא לאחר פתרון השאלה, ולכן התרשימים הם ממש "סקיצות").



## סעיף ב

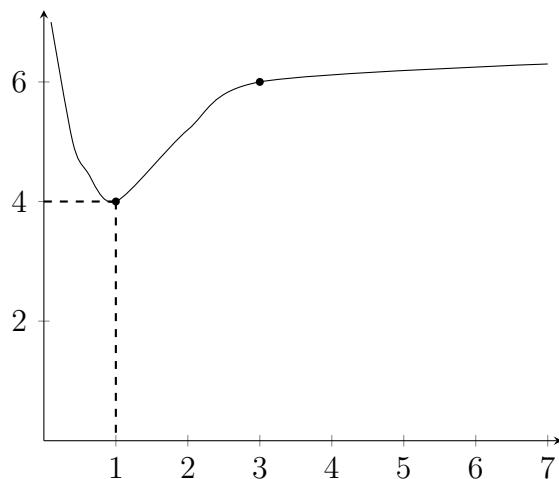
קיים נקודת קיצון ב- $x = 1$  כי הנגזרת הראשונה מתאפסת ומחליפה סימן. הנקודה היא מינימום כי הנגזרת עולה (הנגזרת השנייה חיובית).

## סעיף ג

הנגזרת השנייה היא השיפוע של הנגזרת הראשונה, שהוא חיובי עבור  $0 < x < 3$  ושלילי עבור  $x < 3$ . לכן הפונקציה קעורה כלפי מעלה ב- $-3 < x < 0$  וקעורה כלפי מטה ב- $x < -3$ . ב- $x = -3$  הנגזרת השנייה מתאפסת ללא שינוי בסימן הנגזרת הראשונה, ולכן היא נקודת פיתול.

## סעיף ד

אם הפונקציה מקבלת את כל ערכים  $y \geq 4$ , בקודת המינימום  $x = 1, y = 4$ . נשתמש בכך שلفונקציה יש אסימפטוטה ב- $x = 0$ , וכיוני הקוironות מסעיף ג כדי להשלים את צורתה הכללית:



## סעיף ה

( $f(x)$  חיובית בכל תחומי ההגדרה, לכן גם  $f^3(x)$  חיובית. סימן המינוס הופך את הסימן של ערך הפונקציה.  $f(x)$  יורד ב- $x < 1$  ולכן ( $g(x)$  עולה בתחום זה. ( $f(x)$  עולה ב- $x < 1$  ולכן ( $g(x)$  יורד בתחום זה. אפשר להשתמש בנגזרת של  $g(x)$ :

$$g'(x) = -3f^2(x)f'(x).$$

$f^2(x)$  תמיד חיובי, ולכן לאור המינוס בתחילת הביטוי, תחומי העליה והירדה הם התחומיים שערכי  $f'(x)$  חיוביים או חיוביים בהתאם. ( $f'(x)$  חותך את ציר ה- $x$  משליליים לחוביים ב- $x = -1$ , ולכן  $g(x)$  עולה ב- $x < -1$  ו יורד ב- $x > -1$ .

## 8.11 קיצ' תשעיה מועד א

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x + a^2$ ,  $a$  הוא פרמטר גדול מ-0.

- א. הראה כי המקסימום של הפונקציה מתקיים בנקודת  $y > 0$ .
- ב. מצא עבור איזה ערך/איזה תחום ערכים של  $a$  נקודת המינימום של הפונקציה:
  - (1) נמצאת על ציר ה- $x$ .
  - (2) נמצאת מעל ציר ה- $x$ .
  - (3) נמצאת מתחת לציר ה- $x$ .
- ג. סרטט סקיצה של גורף הפונקציה עבור כל אחד משלושת המקרים שבסעיף ב.
- ד. כמה פתרונות יש למשוואה  $\frac{1}{3}x^3 - x + 1 = 0$ ? נמק.

### סעיף א

נזרת ראשונה:

$$f'(x) = x^2 - a^2 = 0$$

$$x = \pm a$$

$$f''(x) = 2x$$

$$f''(+a) = 2a > 0$$

$$f''(-a) = -2a < 0.$$

$a > 0$  בשתי השורות האחרונות השתמשנו בנתון

המינימום הוא  $-a$  והמקסימום הוא  $+a$ .

### סעיף ב

המינימום הוא  $-a$ .

$$f(a) = -\frac{2}{3}a^3 + a^2 = a^2 \left( -\frac{2}{3}a + 1 \right).$$

$a^2$  חיובי ולא משנה על סימן של נקודות המינימום. הפתרון מתקיים על ידי השוואת  $-\frac{2}{3}a + 1 = 0$  לאפס:

$$a = \frac{3}{2} \quad \text{על ציר ה-}x$$

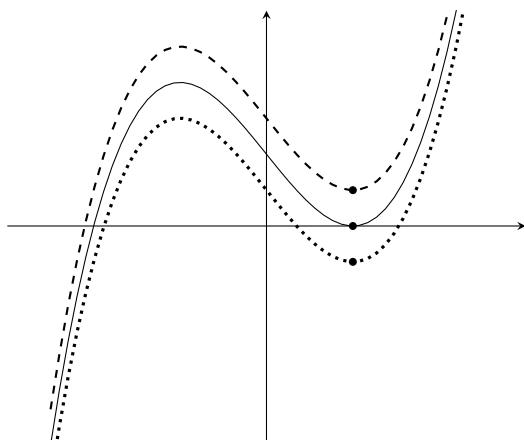
$$a < \frac{3}{2} \quad \text{מעל ציר ה-}x$$

$$a > \frac{3}{2} \quad \text{ מתחת לציר ה-}x$$

## סעיף ג

נקודות המינימום ב- $a = x$  מסומנות.

קו רציף: על הציר. קו מקווקו: מעל לציר. קו מנוקד: מתחת לציר.



## סעיף ד

משווואה זו היא המשווהה הנтונה בשאלת השאלה כאשר  $1 = \frac{3}{2} < a$ . אבל לפי סעיף ב המינימום נמצא מעל לציר ה- $x$ . יש רק פתרון אחד כאשר הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  משמאלי למקסימום.

## 8.12 חורף תשע"ה

$$\int_0^3 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = 3 \quad \text{נתון כי הפונקציה } f(x) \text{ ופונקציית הנגזרת שלה } f'(x) \text{ מקיימות}$$

נתון גם:  $f(0) = 1$ ,  $f'(x) = kx + 2$ .  $k$  הוא פרמטר.

א. מצא את הערך המספרי של  $f(3)$ , ומצא את הפונקציה  $f(x)$  (בלי פרמטרים).

$$g(x) = \sqrt{f(x)} \quad \text{ב. הפונקציה } g(x) \text{ מקיימת}$$

$$g(x) = |x+1| \quad (1)$$

$$g(x) = \sqrt{f(x)} \quad (2)$$

ושקיצה של גраф הפונקציה  $f(x)$ .

### סעיף א

לפי הנוסחה לנגזרת של חזקה של פונקציה,  $(f(x)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}f(x)^{-\frac{1}{2}}f'(x)$  שהיא הפונקציה המופיעה באינטגרל. נחשב את האינטגרל כדי לקבל  $f(3)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx &= \sqrt{f(x)} \Big|_0^3 \\ &= \sqrt{f(3)} - \sqrt{f(0)} = \sqrt{f(3)} - 1 = 3 \\ f(3) &= 16 . \\ \text{מציאת הפונקציה } f(x) &: \end{aligned}$$

$$f(x) = \int (kx+2) dx = \frac{1}{2}kx^2 + 2x + c$$

$$f(0) = c = 1$$

$$f(3) = \frac{9}{2}k + 7 = 16$$

$$k = 2$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 .$$

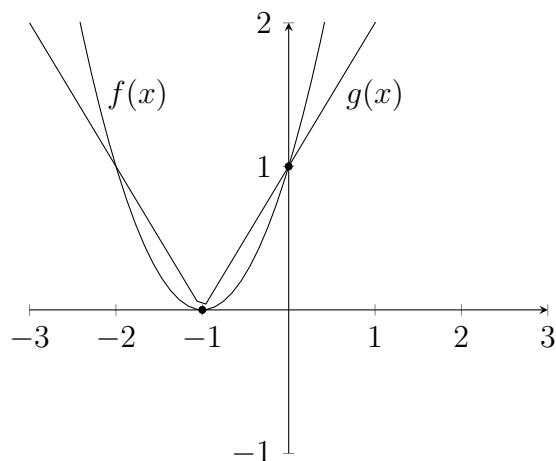
## סעיף ב

$$g(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|.$$

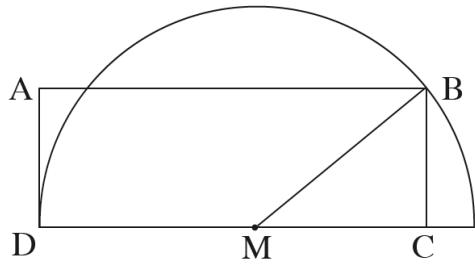
אם  $g(x) = |x+1|$  ביחד  $g(x) = -(x+1)$ ,  $x+1 < 0$ , ו-אם  $g(x) = x+1$ ,  $x+1 \geq 0$ .

## סעיף ג

הגרף של  $f(x)$  הוא פרבולה קעורה כלפי מעלה עם נקודת מינימום ב- $(-1, 0)$  ונקודת חיתוך עם ציר ה- $y$  ב- $(0, 1)$ . הגרף של  $g(x)$  מורכב משני קוויים ישרים עם ערכי חיבובים אבל עם שיפועים סימנדים הפוכים. נקודת המינימום היא גם  $(-1, 0)$ .



## 8.13 קיז' תשע"ד מועד ב

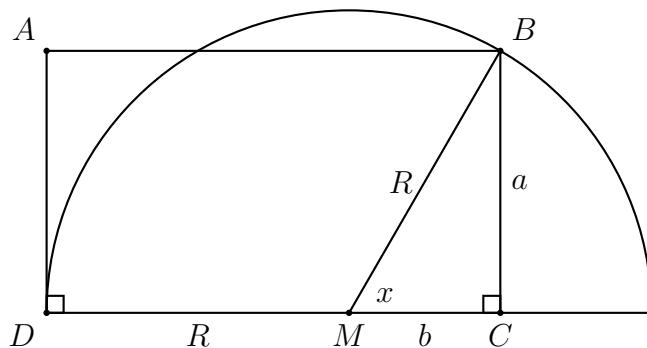


נתון מלבן  $ABCD$  מונחת על הקוטר של חצי מעגל  $DC$  מונחת על הקוטר של חצי מעגל שהרדיוס שלו  $R$  ומרכזו  $M$  כך ש-  $DC \geq R$ . הצלע  $AD$  משיקה לחצי המעגל בנקודה  $D$ , והקדקוד  $B$  נמצא על המעגל (ראה ציור).

$$\angle BMC = x \quad \text{נסמן:}$$

$$\text{שטח המלבן } ABCD = S(x)$$

- א. מצא מה צריך להיות  $x$ , כדי ששטח המלבן  $S(x)$  יהיה מקסימלי.  
ב. הביע באמצעות  $R$  את השטח המוגבל על ידי גוף הפונקציה  $S(x)$  ועל ידי ציר ה-  $x$  בתחום  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .



### סעיף א

עם הסימונים בתרשימים:

$$S(x) = a(R + b) = R \sin x(R + R \cos x) = R^2 \sin x(1 + \cos x).$$

נחשב את הנגזרת:

$$\begin{aligned} S'(x) &= R^2(\cos x(1 + \cos x) + \sin x \cdot -\sin x) \\ &= R^2(\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= R^2(\cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) \\ &= R^2(2 \cos^2 x + \cos x - 1) \\ &= R^2(2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 0. \end{aligned}$$

$x = 180$ ,  $\cos x = -1$  איינו מנון,  $0 < x < 180$ . ניתן לפסול את הפתרון  
 $x = 60$ ,  $\cos x = \frac{1}{2}$   
הנגזרת השנייה היא :

$$\begin{aligned}(2\cos^2 x + \cos x - 1)' &= -\sin x(4\cos x + 1) \\&= -\sin 60(4\cos 60 + 1) \\&= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (4 \cdot \frac{1}{2} + 1) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0.\end{aligned}$$

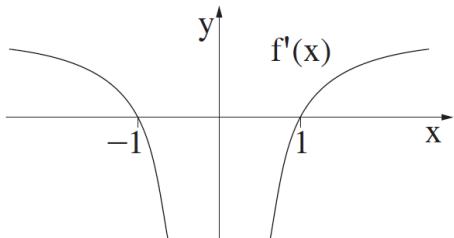
נקודת הקיצון היא מקסימום.

### סעיף ב

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin x (1 + \cos x) dx &= R^2 \cdot -\frac{1}{2} (1 + \cos x)^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\&= \frac{R^2}{2} (1^2 - 2^2) = \frac{3R^2}{2}.\end{aligned}$$

## 8.14 קיצ' תשע"ד מועד א

בציור של פונקציה מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת  $(x)f'$ .



האסימפטוטה היחידה של הפונקציה  $(x)f$  היא  $x = 0$ .

נתון כי יש פתרון אחד בלבד למשוואה  $f(x) = 2$ .

פתרון אחד בלבד למשוואה  $f(x) = -2$ .

א. רק על פי נתוני השאלה,

סרטט סקיצה של הפונקציה  $(x)f$ . נמק.

ב. נתון גם כי פונקציית הנגזרת  $(x)f'$  היא:  $f'(x) = \frac{ax^2 - b}{ax^2}$

$a$  ו- $b$  הם פרמטרים שונים מד-0.

מצא את הפונקציה  $(x)f$  (בלי פרמטרים).

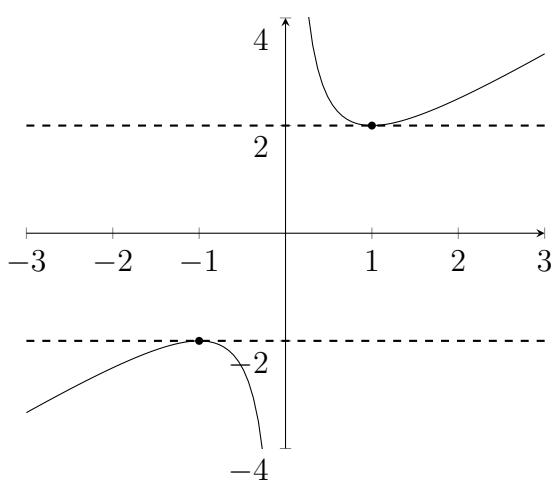
### סעיף א

כאשר  $x$  עולה מ-0 ל- $\infty$ , הנגזרת עולה בצורה תלולה בערכים השליליים ובצורה מתונה בערכים החיוביים, ולכן הפונקציה יורדת בצורה תלולה ואח"כ עולה בצורה מתונה.

כאשר  $x$  עולה מ- $-\infty$  — לאפס, הנגזרת יורדת בצורה מתונה בערכים החיוביים ובצורה תלולה בערכים שליליים, ולכן הפונקציה עולה בצורה מתונה ואח"כ יורדת בצורה תלולה.

לפי התרשימים הנתון  $-f'(x) = -1$ , נקודת קיצון שהיא מקסימום כי השיפוע יורדת (הנגזרת השנייה שלילית). נקודת  $x = 1$  יש נקודת קיצון שהיא מינימום כי השיפוע עולה (הנגזרת השנייה חיובית).

לפי הנתון שיש לפונקציה פתרונות ייחדים  $f(x) = \pm 2$ , הגרף של פונקציה חייב לגעת בקווים  $y = \pm 2$  אבל לא לחותך אותם. לפי ההסברים הקודמים,  $(1, 2)$  היא מינימום ו- $(-1, -2)$  היא מינימום, ולכן אנו יודעים שהגרף מעלה  $y = 2$  ו מתחת  $y = -2$ .



**סעיף ב**

. $a = b - 1$ ,  $\frac{a - b}{a} = 0$  ונתון  $a \neq 0$ , ולכן  $f'(1) = f'(-1) = 0$   
שוב בגלל ש- $a \neq 0$  אפשר למצמצם את הפרמטרים :

$$f'(x) = \frac{a(x^2 - 1)}{ax^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

נחשב את האיטרגל של הנגזרת כדי למצוא את הפונקציה :

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = x + \frac{1}{x} + c.$$

נתון ערכי הפונקציה  $f(\pm 1) = \pm 2$ , ולכן :

$$1 + \frac{1}{1} + c = 2$$

$$.c = 0-1$$

$$.f(x) = x + \frac{1}{x}$$

## 8.15 חורף תשע"ד

בtabla שלפניך מוצגים ערכים מסוימים של הפונקציה  $f(x)$  בקטע  $1 < x < 2$ .

x	1.1	1.2	1.3	1.4
$f(x)$	1.19	1.28	1.36	1.43

הfonקציה  $f(x)$  חיובית בקטע הנתון, ואין לה נקודות קיצון פנימיות בקטע זה.

נתון כיfonקציית הנגזרת השנייה  $f''(x)$  שלילית בקטע הנתון.

א. קבוע מהו הסימן של  $f''(1.2)$ ? נמק.

ב. קבוע אם הטענה  $f''(1.2) < f''(1.1) < f''(1.3)$  נכונה. נמק.

נתונהfonקציה  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  בקטע  $1 < x < 2$ .

ג. בקטע הנתון מצא תחומי עלייה וירידה שלfonקציה  $g(x)$  (אם יש כאלה). נמק.

ד. הראה כי בתחום  $1.1 \leq x \leq 1.3$  אין פתרון למשוואה  $g'(x) = f'(x)$ .

בבוחינה זו היו שלוש שאלות בפרק השני لكن מספר השאלה הוא 9 ולא 8.

### סעיף א

לפי הtablafonקציה עולה מ- $x = 1.1$  ל- $x = 1.2$ . נתון שאין נקודות קיצון פנימיות ולכן הנגזרת הראשונית חיובית.

### סעיף ב

הנגזרת השנייה שלילית כך שהנגזרת הראשונית יורדת בתחום ולכן הטענה נכונה.

### סעיף ג

$$g'(x) = \frac{1}{2} f(x)^{-\frac{1}{2}} f'(x).$$

מהtabla  $f(x)$  חיובית בתחום וסעיף א  $f'(x)$  חיובית בתחום, ולכן  $g'(x) = f'(x)$  עולה בתחום.

### סעיף ד

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \\ \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x) &= f'(x) \\ f(x) &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

מצאו שהנגזרת הראשונית חיובית כך שאפשר למצמצם אותה. לפי הtabla,  $f(x)$  אינהfonקציה קבועה בכל התחומים, אך לא ניתן ש- $f'(x) = g'(x)$ .



## המלצות: חישבו דיפרנציאלי ואינטגרלי

- אי-אפשר להכין טבלה של עליות וירידות עד שלא מחשבים את תחומי ההגדלה וגם כל נקודות הקיצון של הפונקציה, כי רק ביניהם אפשר לסמן על זה שאין שינוי בכיוון הפונקציה.
- אני אוהב להשתמש בתנעות ידים כדי "לראות שיפועים" ולקבוע אם פונקציה עולה או יורדת, וכן אם נקודות קיצון היא מקסימום או מינימום. אני מזיז כף יד שטוחה לאורך הפונקציה מערכיים שליליים לחובבים על ציר- $x$ . אם כיוון היד למטה הפונקציה יורדת, ואם הכיוון לעליה הפונקציה עולה. אם היד עוברת מכיוון למטה לכיוון לעליה, השיפוע (הנגזרת) עולה, כך שהנגזרת השנייה היא חיובית ונקודת הקיצון היא מינימום. שינוי הפוך בכיוון היד מראה שקיים מקסימום.
- אני מציע להתרחק מהמחשבון עד כמה שאפשר ולחשב עם סימנים אלגבריים. הסיבה היא שקשה למצוא שגיאות הנגרמות מטעויות בклדה על המחשבון, אבל אפשר לעבור שוב ושוב על חישוב אלגברי כדי לוודא את נכונותו.
- אל תקצרו בחישובים. לעיתים קרובות שגיתי כי השמטה סימן מינוס. לוקח מעט זמן לרשותו שורה נוספת לעומת הזמן החדש לחפש שגיאה בחישוב מקוצר.
- אני מעדיף לסוג נקודות קיצון על ידי בדיקת הסימן של הנגזרת השנייה ולא על ידי חישוב טבלת עליות וירידות.
- כולן יודעים שאם הסימן של המכנה של הנגזרת הראשונה חיובי, הסימן של הנגזרת השנייה זהה לשימן של הנגזרת של המונה של הנגזרת הראשונה. חשוב לא לטען שהנגזרת השנייה שווה לנגזרת של המונה של הנגזרת הראשונה!<sup>1</sup> עם זאת, יש נוסחה לנגזרת התקפה רק עבור נקודות בהן הנגזרת הראשונה מתאפשרת והן **חוודות נקודות הקיצון**.<sup>2</sup> עבור:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$f''(a) = \frac{g'(a)}{h(a)}.$$

הוכיחה פשוטה: חישבו את הנגזרת. נביא דוגמה:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} \\ f'(x) &= \frac{-2x^2 + 4x}{(x^2 - x + 1)^2}. \end{aligned}$$

נקודות הקיצון הן:

$$a_1 = (0, -1), \quad a_2 = \left(2, \frac{5}{3}\right).$$

---

<sup>1</sup>ראו יונתן אחיטוב. 'גזרה שנייה מקוצרת' כדרך לאפיון נקודות קיצון. *עליה* 20, עמ' 27 – 26.

<sup>2</sup>ראו במאמר של אחיטוב וגם "לימוד ולמד אנליה", עמ' 323 – 322.

בגלל שהמכנה חיובי, הסימן של הנגזרת השנייה הוא הסימן של :

$$(-2x^2 + 4x)' = -4x + 4,$$

למרות שזו לא הנגזרת השנייה. עבור נקודות הקיצון,  $a_1 \cdot 0 + 4 = 4 > 0$  ו-  $a_2 \cdot 2 + 4 = -4 < 0$  היא מינימום.

עבור הנקודות  $a = a_1, a = a_2$  אפשר לחשב את הנגזרת השנייה ולבזוק ש :

$$f''(a) = \frac{-4a + 4}{a^2 - a + 1}.$$

- שימושו לב להגדירה של נקודת פיתול: נקודה בה משתנה הקעירות של הפונקציה. בנקודת פיתול, הנגזרת השנייה מתאפסת או לא מוגדרת, אבל יש פונקציות שמקיימות אחד מהתנאים הללו בנקודת מסויימת אבל אין שם נקודת פיתול. למשל, הנגזרת שנייה של  $f(x) = x^4$  מתאפסת ב-  $x = 0$  אבל יש שם מינימום ולא נקודת פיתול.<sup>3</sup>

:  $f(x) = \sin x$  עבור  $x$  לא חייב להתאפס. למשל,  $\cos 0 = 1$

$$f'(0) = \cos 0 = 1$$

- כאשר מופיע שורש בפונקציה הכוונה היא לשורש החזובי. אבל, כאשר לוקחים שורש של  $x^2$  הכוונה היא לערך המוחלט של  $x$ . למשל,  $\sqrt{3^2} = 3 = x$ ,  $x = -3$ , אבל אם  $x = 3$  אז  $x = -3$ . זה חשוב כאשר אסימפטוטות של פונקציות עם שורשים :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} = \frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm 1.$$

- אם השאלה מבקשת נקודות חיתוך עם הציריים או נקודות קיצון, יש נטייה להסתפק בחישוב ערך  $x$ , אבל התשובה חייבת להיות קוואורדינטות  $(x, y)$ .

- כאשר מבקשים לחשב אינטגרל "מפחיד" של פונקציה, תמיד הפונקציה תהיה נגזרת של פונקציה שאפשר לנחש במדויק. למשל :

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} dx$$

נראה "מפחיד" אבל אם נתבונן בו קצת נבין :

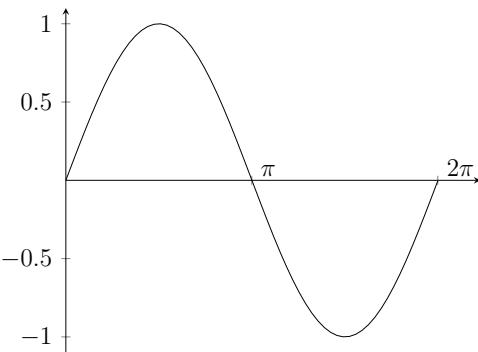
$$(\cos^{-2} x) = -2 \cdot (-\sin x) \cos^{-3} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}.$$

לפעמים מבקשים  $\int f'(x) dx$  כאשר  $f(x)$  נתון, אז אין מה לחשב!

---

<sup>3</sup>"ללמד וללמוד אנליזה", עמ' 227

- שימושו לב להבדל בין שטח לאינטגרל.



אם מבקשים את האינטגרל של סינוס מאפס עד  $2\pi$ , התשובה היא אפס :

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(1 - 1) = 0.$$

אבל אם מבקשים את השטח התחום על ידי הפונקציה וציר ה- $x$  התשובה היא :

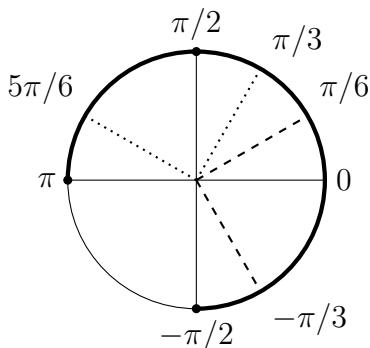
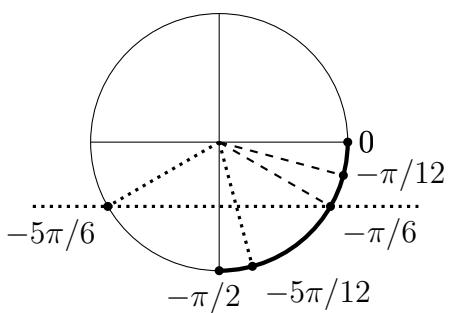
- $$\int_0^\pi \sin x \, dx + \int_\pi^{2\pi} -\sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi + \cos x \Big|_\pi^{2\pi} = -(-1 - (1)) + (1 - (-1)) = 4.$$
- אינטגרל של פונקציה אי-זוגית בתחום סימטרי סביב ציר ה- $y$  הוא אפס, ואינטגרל של פונקציה זוגית בתחום סימטרי הוא פי שניים האינטגרל של התחום החזובי בלבד.

- ראו נספח ג' המסביר את החשיבות של מעגל היחידה בחישובים טריגונומטריים.
- בעיות עם פונקציות טריגונומטריות, בנו תרשימים של מעגל היחידה וסמן עליו את תחום ההגדרה. התרשימים יעוזר בקביעת סימני הפונקציות ובערכי הפונקציות כאשר מושגים או מחסרים כפולות רצינליות של  $\pi$ .

$$\sin 2x = -(1/2) \quad (5\pi/6) - (\pi/2) = (\pi/3)$$

$$2x = -(5\pi/6), \quad x = -(5\pi/12) \quad (\pi/6) - (\pi/2) = -(\pi/3)$$

$$2x = -(\pi/6), \quad x = -(\pi/12)$$



- נניח שהתחום הנתון הוא  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , ונניח שמקבלים את התוצאה  $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . ברור,  $\sin 2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . לא לשכוח את התשובה השנייה :  $x = \frac{\pi}{6}$  ו-  $2x = \frac{\pi}{3}$ . לא לשכוח את התשובה השנייה :  $x = \frac{\pi}{3}$  ו-  $2x = \frac{2\pi}{3}$ . איןו בתחום.

• בנוסחאות נטוו:

$$(x^t)' = tx^{t-1}, \quad (\text{ז ממשי})$$

אולם משתמשים בנוסחה רק עבור  $t$  שלם וחובי. אני מעדיף להשתמש בנוסחה זו עבור כל  $t$ , כי קל לזכור את הנוסחה והчисובים פשוטים. למשל, מיותר לזכור את הנוסחה הנטונה:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

כיצד:

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

הчисכון בולט כאשר צריכים לחשב נגזרת רצינלית. כאשר  $f(x) = 1, g(x) = x^t$ , במקום להשתמש בנוסחה המוסבכת עבור הנגזרת של  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , פשוט יותר לחשב:

$$\left(\frac{1}{x^t}\right)' = (x^{-t})' = -t(x^{-t-1}) = \frac{-t}{x^{t+1}}.$$

כאשר במוניה יש קבוע ובמכנה יש פונקציה מורכבת עדין החישוב לא מסובך. למשל:

$$\begin{aligned} \left(\frac{14}{x^2 - 3x + 4}\right)' &= 14 \left((x^2 - 3x + 4)^{-1}\right)' \\ &= -14(x^2 - 3x + 4)^{-2}(2x - 3) \\ &= \frac{-14(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 4)^2}. \end{aligned}$$

• אם  $0 = f(x) = -f(x) = 0$ . אמם הטעאה פשוטה אבל היא שימושית כאשר חושבו נקודות איפוס של נגזרת, וצריך למצוא נקודות איפוס של השילילה של הנגזרת, למשל:

$$(g(x) - f(x))' = (-1 \cdot (f(x) - g(x))' = -1(f(x) - g(x))',$$

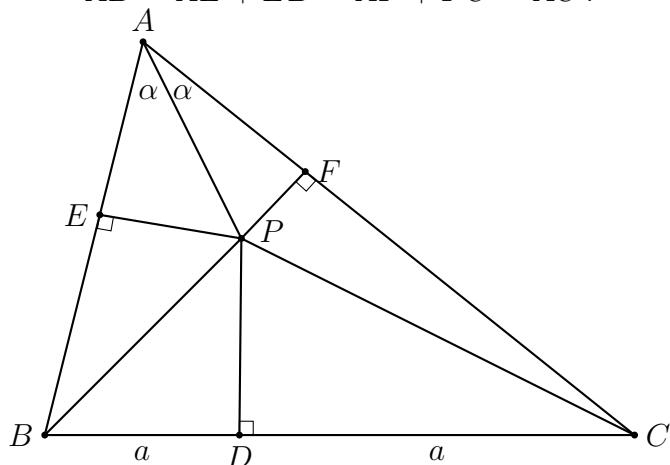
ולכן אם  $0 = (g(x_1) - f(x_1))' = -1 \cdot 0 = 0$ , מתקבל מייד  $(f(x_1) - g(x_1))' = 0$

## נספח א' אין לסמוד על איוורים

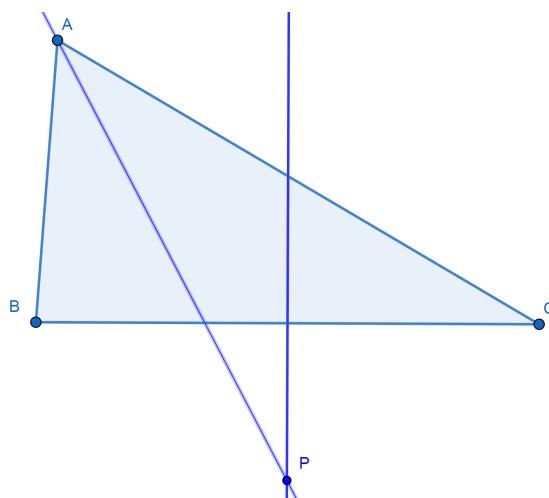
הנה הוכחה "נכונה" שכל משולש שווה שווקים!

נתון משולש שירוטי  $ABC$ , תהי  $P$  נקודת החיתוך בין חוצה הזווית של  $\angle BAC$  לבין האנך האמצעי של  $BC$ . סימנו ב- $D, E, F$  את נקודות החיתוך של האנכים מ- $P$  לצלעות  $BC, AB, AC$  分別。  
 כי הם משולשים ישר זווית עם זוויות שווות  $\alpha$  וצלע  $AP$  משותף.  
 $\triangle APE \cong \triangle APF$   
 $\triangle DPB \cong \triangle DPC$  כי הם משולשים ישר זווית עם צלע משותף  $PD = DC = a$  ו- $BD = DC = a$  כי הוא האנך האמצעי ל- $BC$ .  
 $\triangle EPB \cong \triangle FPC$ , כי הם משולשים ישר זווית עם  $EP = PF$  לפי החפיפה הראשונה ו- $PC = PB$  לפי החפיפה השנייה.  
 לחבר את השוויונות ונקבל ש-  $\triangle ABC$  שווה שווקים :

$$AB = AE + EB = AF + FC = AC.$$

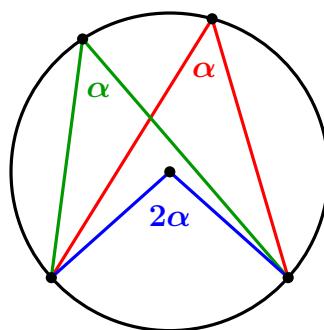
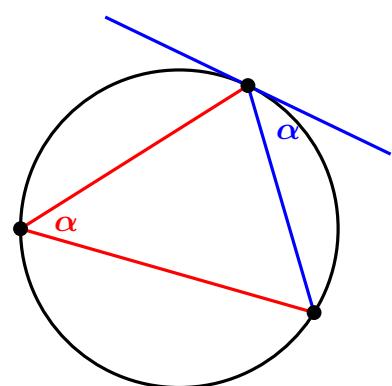
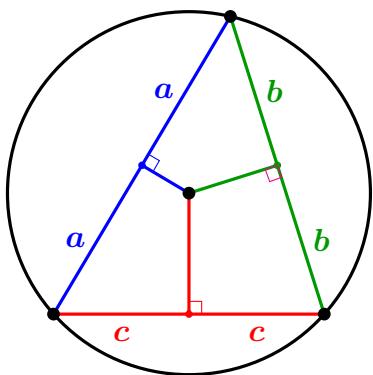
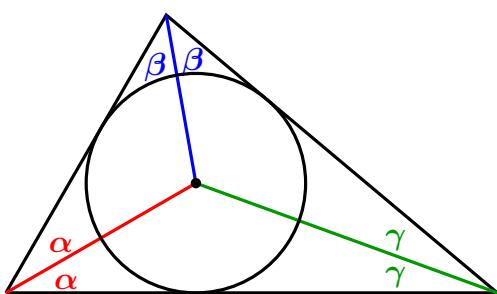
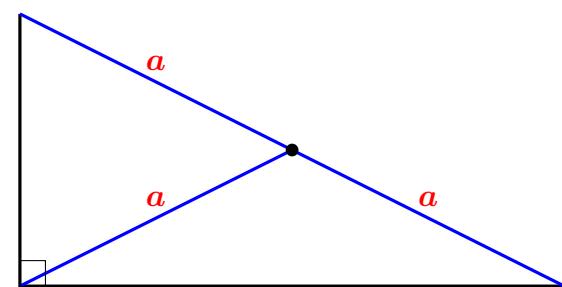
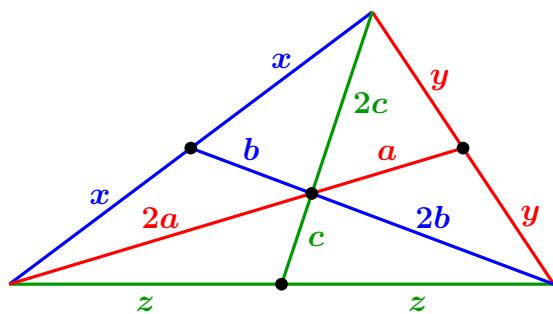
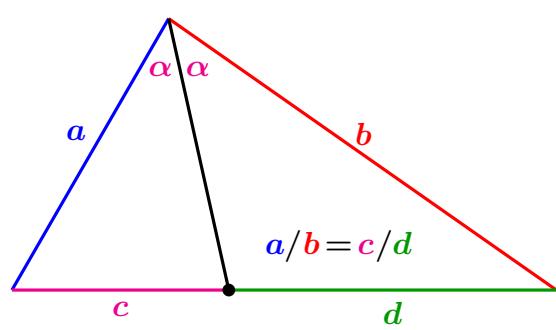
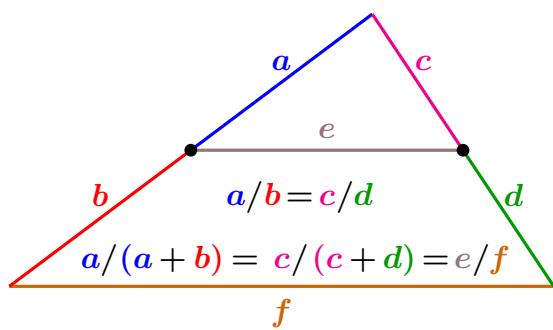


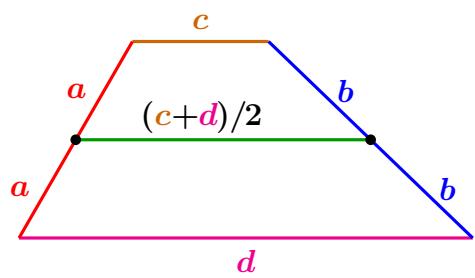
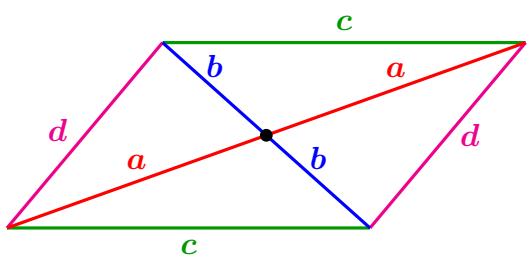
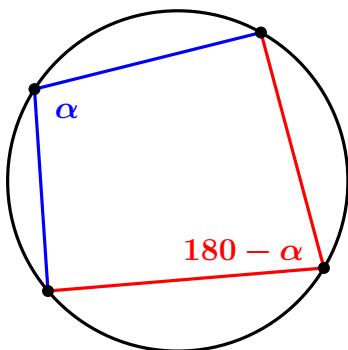
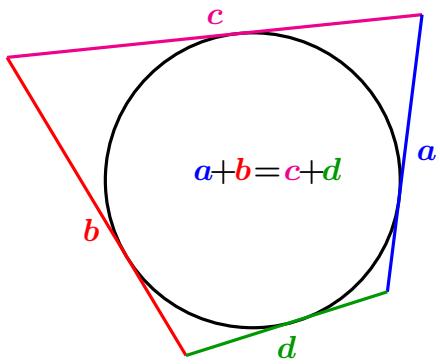
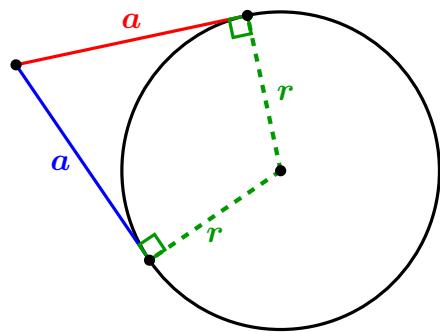
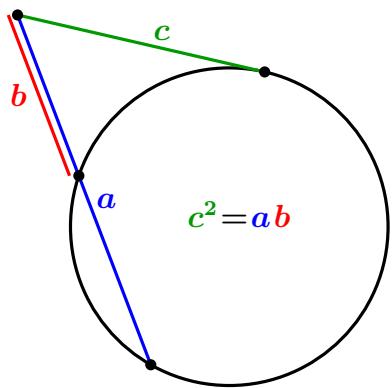
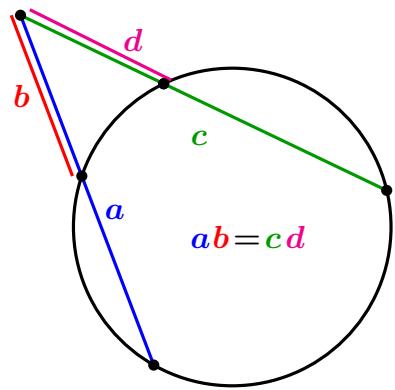
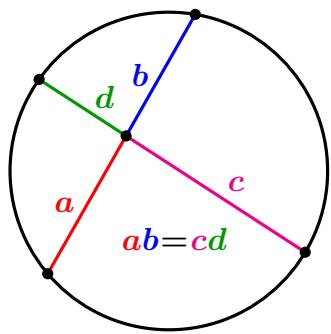
הבעיה בהוכחה היא שהאיור אינו נכון כי הנקודה  $P$  נמצאות מחוץ למשולש :





## נספח ב' ייצוג גרפי של משפטים בגיאומטריה

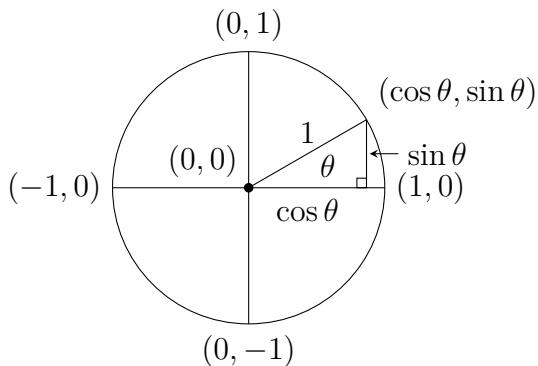




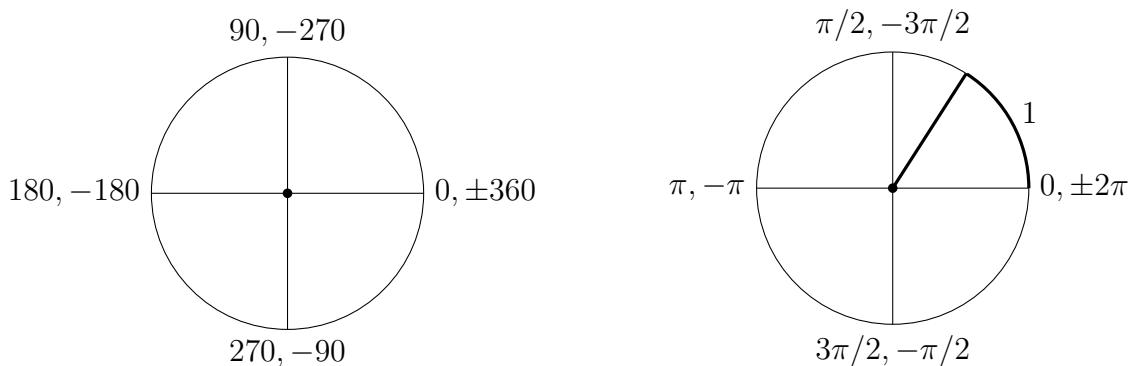
## נספח ג' מעגל היחידה

### ריבועים של מעגל היחידה

מעגל שהרדיוס שלו 1 נקרא **מעגל היחידה**.



הציריים של מעגל היחידה מחלקים אותו באופן טבעי לארבעה ריבועים. זוויות נמדדות במעלהות בין  $0^\circ$  ל- $360^\circ \pm 360^\circ$ , כאשר הערכיהם חיוביים אם מודדים נגד כיוון השעון, ושליליים עם כיוון השעון. יחידה אחרת לזווית היא הרדיאן. רדיאן אחד הוא הזווית הכולאת קשת שאורכה שווה לרדיוס. במעגל היחידה הרדיוס הוא 1 ולכן אורך ההיקף הוא  $2\pi$ . רדיאן אחד שווה בערך 57.3 מעלות.

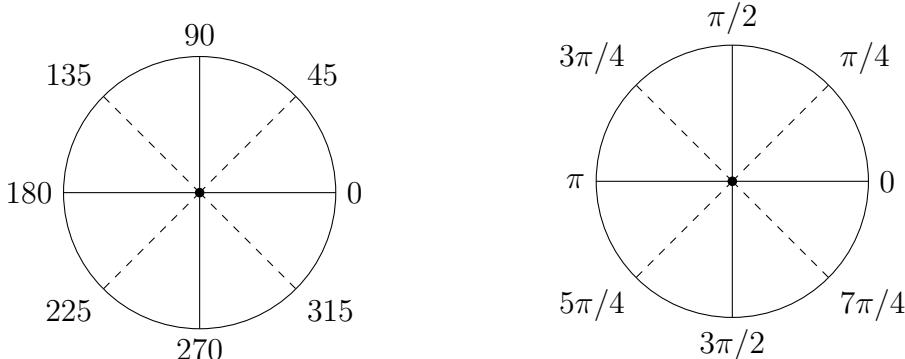


מהחיתוכים של הציריים עם מעגל היחידה קיבל את ערכי הסינוס והקוסינוס של הזוויות:

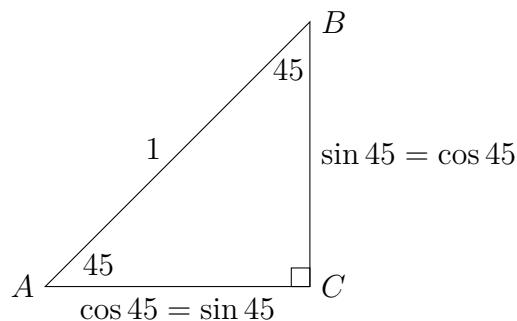
זווית (מעלות)	זווית (רדיאנים)	sin	cos
0	0	0	1
$90, -270$	$\pi/2, -3\pi/2$	1	0
$180, -180$	$\pi, -\pi$	0	-1
$270, -90$	$3\pi/2, -\pi/2$	-1	0

## חלוקת מעגל היחידה ל-8 קטעים

נחלק כל רביע בחצי ונקבל 8 קטעים. הזווית של כל קטע הוא  $45^\circ$  או  $\frac{\pi}{4}$  רדיאנים:



במשולש אם הזווית  $\angle BAC$  היא  $45^\circ$ , הזווית הנגדייה  $\angle ABC$  גם היא  $45^\circ$  כדי שסכום הזוויות במשולש יהיה  $180^\circ$ . המשולש שווי-שוקיים כך שערך הסינוס והקוסינוס שוויים.



: משפט פיתגורס :

$$\sin^2 45 + \cos^2 45 = 1$$

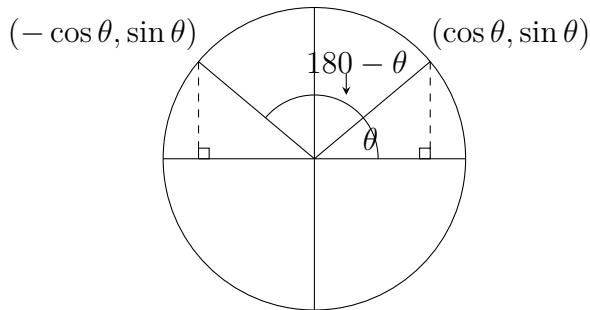
$$2 \sin^2 45 = 1$$

$$\sin 45 = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

## סינוס וкосינוס של זוויות הגודלות מ- $90^\circ$

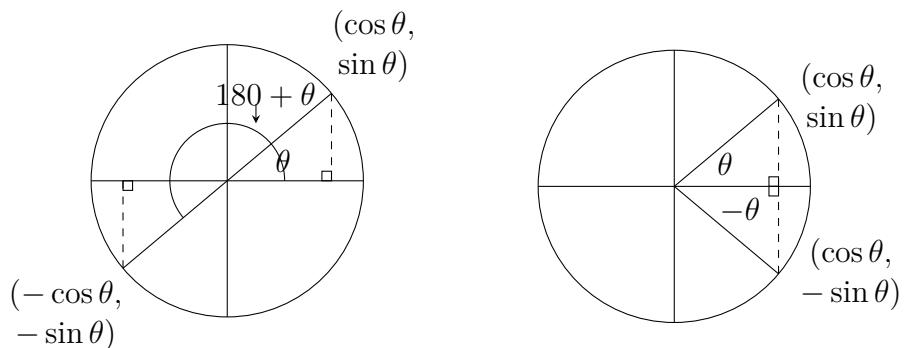
עכשו שאנו ידעים את ערכי הסינוס והקוסינוס של  $45^\circ$ , נוכל לשאול על הזוויות הסימטריות  $= 135^\circ$ ,  $-45^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $315^\circ = -45^\circ + 180^\circ$ ,  $180^\circ - 45^\circ$ ,  $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$ ,  $135^\circ = 45^\circ + 90^\circ$ . בתרשימים שלහלן סימנו את הזוויות הסימטריות עבור זווית שרירותית  $\theta$  בربיע הראשון. ערכי  $x, y$  שוים פרט לסימנים.

בריבוע השני:



$$\cos 135 = -\cos 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 135 = \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

בריבוע השלישי והרביעי:



$$\cos 225 = -\cos 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 225 = -\sin 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315 = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 315 = -\sin 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

נסכם את הערכים בטבלה:

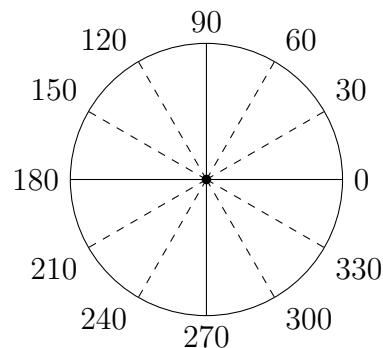
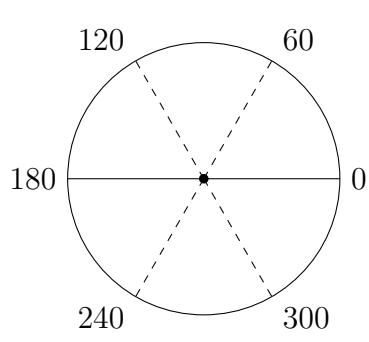
זווית (מעלות)	זווית (רדיאנים)	$\sin$	$\cos$
$\theta$	$\theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$
$180 - \theta$	$\pi - \theta$	$\sin \theta$	$-\cos \theta$
$180 + \theta$	$\pi + \theta$	$-\sin \theta$	$-\cos \theta$
$-\theta$	$\theta$	$-\sin \theta$	$\cos \theta$

ועבור  $45^\circ$

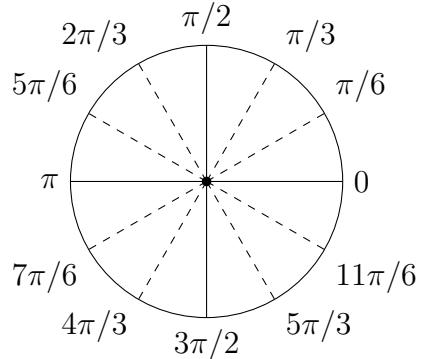
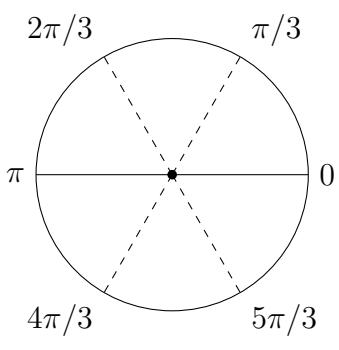
זווית (מעלות)	זווית (רדייאנים)	$\sin$	$\cos$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
135	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
225	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
315	$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$

### הסינוס והקוסינוס של $60^\circ$ ו- $30^\circ$

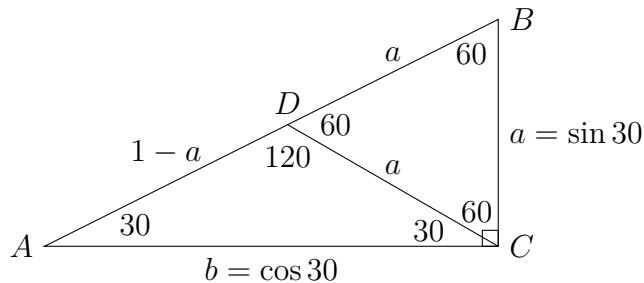
את מעגל היחידה ניתן לחלק ל-6 קטעים של  $60^\circ$  או ל-12 קטעים של  $30^\circ$ :



ברדייאנים:



נחשב את הסינוס של  $\angle BAC = 30^\circ$ . במשולש ישר-זווית  $\triangle ACB$  עם יתר באורך 1 :



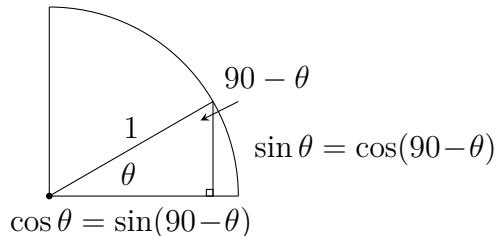
ציר קו  $CD$  אל היתר כך  $\angle ADC = 30^\circ$  ו  $\angle DCA = 120^\circ$ . כדי להשלים ל- $180^\circ$  במשולש, נניח  $\angle BCD = 30^\circ$ .  $\triangle BCD$  שווי-צלעות ולכן  $\triangle BCD \cong \triangle ACD$ .  $DC = a = \sin 30^\circ$ . ערך הקוסינוס הוא :  
 $\cos 30^\circ = a / \sqrt{1 + a^2}$

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

### סינוס וкосינוס של $(90 - \theta)$

הצלע הנגדי לזויה מתחלף עם הצלע השכן של זויה ומכאן :

$$\cos(90 - \theta) = \sin \theta, \quad \sin(90 - \theta) = \cos \theta.$$



### סינוס וкосינוס של $2\theta$

את הנוסחאות ל- $\sin 2\theta, \cos 2\theta$  ניתן לשחזר מהנוסחאות לחיבור של זויות הניתנות בנוסחאות :

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= \sin(\theta + \theta) \\ &= \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta &= \cos(\theta + \theta) \\ &= \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

