בחינות בגרות במתמטיקה: התהליך

מוטי בן-ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

גרסה 1.5.0

21 בדצמבר 2022

תוכן העניינים

הקדמה

מתמטיקאים ידועים לשמצה כי הם מפרסמים הוכחות מסודרות וברורות, ומסתירים את העובדה שסל הניירות שלהם מלא עד אפס מקום בניסיונות שהובילו למבואות סתומים וטעויות. תלמידים לא נחשפים **לתהליכים** למציאת הפתרונות, וזה עלול לתסכל אותם. הם צריכים ללמוד לא להתייאש כאשר הם לא מצליחים לפתור בעיות בניסיון הראשון. לא חסרים פתרונות של בחינות הבגרות, אבל גם הם "נקיים" ללא ניסיונות שלא צלחו ודיונים על דרכי החשיבה שהובילו לפתרונות.

בחוברת זו פתרונות לבחינות הבגרות שאלון 806 מהשנים תשע"ד עד תשע"ח. אני משתדל לתאר את חוויותי בחיפוש פתרונות, כגון הבנה מוטעית של ניסוח השאלות, מלכודות שנפלתי בהם ופתרונות חלופיים שמצאתי. בסוף כל פרק רשמתי המלצות שגיבשתי לאורך העבודה.

השוואתי את הפתרונות שלי לפתרונות המופיעים ברשת, אבל הפתרונות הם שלי ובסגנון שלי. קיצרתי בהצגת חישובים ברורים ואינני משתמש תמיד בדרכים מקובלות להצגת פתרונות, כגון טבלאות בבעיות תנועה.

תנועה והספק

הצעה של אביטל אלבוים-כהן כיוונה אותי לפתח את תהליך הפתרון של הבעיות הללו באמצעות תרשימים דו-ממדיים. מצאתי שהתרשימים מאוד עוזרים בזיהוי הקשרים בין קטעי התנועה ובכתיבת הנוסחאות. ניתן להיעזר בתרשימים דו-ממדיים גם בבעיות הספק שיש להן מבנה דומה לבעיות תנועה. התרשימים קלים מאוד לציור ומועילים גם אם קני המידה לא מדוייקים, כך שניתן להשתמש בהם כאשר פותרים בחינות.

הציר האופקי בתרשימים הוא ציר הזמן, והציר האנכי הוא ציר המרחק בבעיות תנועה וציר העבודה בבעיות הספק. היתרון של ייצוג זה הוא שמהירויות וההספקים מוצגים כשיפועים של הקווים. ככל שהמהירות או ההפסק גבוה יותר, הקו תלול יותר. לכל דמות (מכונית, סירה, צבע, וכדומה) ציירתי קו עבור כל קטע בתנועה או בעבודה.

המאמר "פתרונות שונים לבעיות הספק באמצעים גרפיים" מאת אביטל אלבוים-כהן וג'ייסון קופר. על"ה גיליון 51, מרץ 2015, עמ' 14-19, מביא פתרונות גיאומטריים עבור בעיות הספק.

סדרות

לדעתי, שאלות על סדרות הן הכי קלות כי בסופו של דבר יש יחסים ברורים בין איברים עוקבים בסדרה (חשבונית או הנדסית), ובין האיברים לסכומם. עם זאת, מצאתי שקל מאוד לטעות, למשל, אם מבלבלים בין האינדקסים של איברי הסדרה לבין ערכיהם.

הסתברות

החישובים בבעיות עם הסתברות פשוטים, אבל קשה לתרגם את העלילה המילולית למשוואות הנכונות. הדבר נכון במיוחד כאשר השאלה שואלת על הסתברות מותנית. מצאתי עושר רב של ביטויים המכוונים להסתברות מותנית (ראו בסעיף ההמלצות), וזה לא מקל על הפתרון.

קושי נוסף נובע מהעובדה שיש שתי דרכים לארגן את המידע הנתון ואת החישובים: בטבלה או בעץ. שאלה המנוסחת "גם א וגם ב" מכוונת לחיתוך של הסתברויות ולטבלה, לעומת שאלה המנוסחת "א ואחר כך ב" שמכוונת למכלפה של הסתברויות ולהצגה בעץ.

גיאומטריה וטריגונומריה

הפתרונות מביאים ציטוטים של המשפטים המתקדמים מתוך רשימת המשפטים שהתלמידים רשאים לצטט ללא הוכחה. כל אחד זוכר ללא קושי שמשולשים חופפים לפי צ.צ.צ., אבל קשה יותר לזכור משפטים כגון שווין הזווית בין משיק למיתר.

יש חשיבות רבה לציורים גדולים שעליהם ניתן לרשום ערכים, נעלמים ובניות עזר בצורה ברורה. אני ממליץ להכין ציורים שונים לסעיפים שונים של אותה שאלה.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

בחדו"א שיטות ברורות לחישוב תחומי ההגדרה, נקודות הקיצון והאסימפטוטות, אבל לעתים החישובים ארוכים. חשוב לדייק כי שגיאה בסעיף אחד תגרום לשגיאות בהמשך.

הספר "ללמוד וללמד אנליזה" מציג את הנושא בצורה מקיפה ביותר, ומהווה משאב חשוב למורה.

http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Mazkirut_Pedagogit/Matematika/ChativaElyona/Analiza.htm.

נספחים

בנספח א' "הוכחה" ידועה שכל משולש שווה שוקיים. ההוכחה מראה שתרשים אינו תחליף להוכחה.

נספח ב' מכיל ציורים צבעוניים של מספר משפטים מתקדמים בגיאומטריה. בנושא כל כך מוחשי קל יותר לזכור ציור ולא תיאור מילולי מסורבל. כדאי להדפיס עמודים אלה בצבע.

נספח ג' עוסק במעגל היחידה. כאשר אני פותר בעייה בטריגונומטריה, אני מצייר בצד תרשים של מעגל היחידה כדי לראות את הקשרים של הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות שונות. למשל, לא כדאי לזכור זהויות כגון $\sin(180-\theta) = \sin\theta$ אלא לשחזר אותן מתרשים של מעגל יחידה.

הבעת תודה

אני מודה לד"ר רונית בן-בסט לוי ולד"ר אביטל אלבוים-כהן שליוו אותי בצלילה למתמטיקה של בתי ספר תיכוניים, חמישים שנה לאחר שסיימתי את לימודי!

פרק 1 תנועה והספק

1.1 קיץ תשע"ח מועד ב

המרחק מביתה של רננה עד בית הספר הוא 500 מטרים.

רננה יצאה מביתה אל בית הספר והלכה במהירות קבועה.

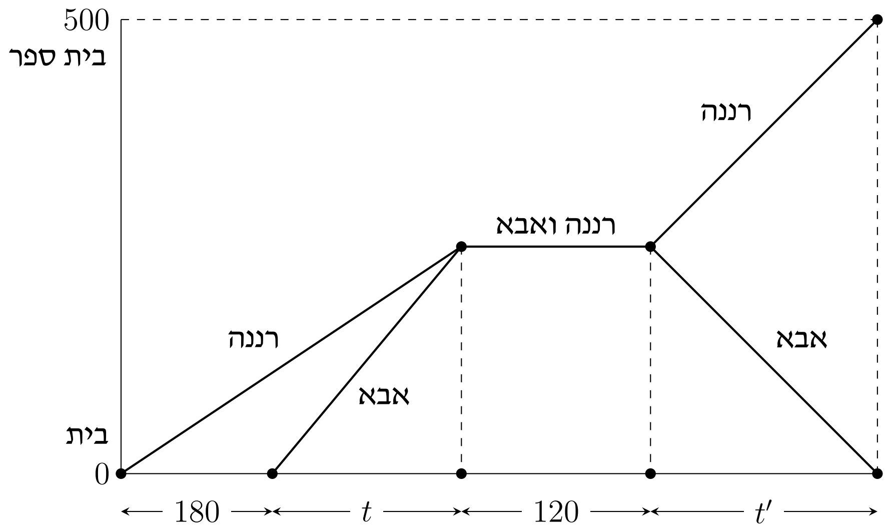
3 דקות לאחר שיצאה מביתה, יצא משם אביה בעקבותיה כדי להביא לה כריך ששכחה. הוא רץ במהירות קבועה של 2.5 מטרים לשנייה.

כאשר הגיע האב לרננה הם עמדו ושוחחו במשך 2 דקות והוא נתן לה את הכריך, ולאחר מכן הלך כל אחד מהם לדרכו — רננה לבית הספר והאב בחזרה אל הבית. רננה המשיכה ללכת באותה המהירות שהלכה לפני כן, והאב הלך במהירות של 1.5 מטרים לשנייה.

אביה של רננה הגיע אל הבית בדיוק באותו הזמן שהגיעה רננה אל בית הספר.

א. חשב את מהירות ההליכה של רננה.

ב. כמה זמן עבר מן הרגע שרננה יצאה מביתה ועד שהגיעה אל בית הספר?



נסמן: $v =$ מהירות ההליכה של רננה, $t =$ הזמן עד למפגש בין רננה לאביה, $t' =$ הזמן מהפרידה בין רננה לאביה עד ששניהם מגיעים ליעדם.

מהתרשים אפשר לראות שוויונות בין מרחקים: (א) המרחק שרננה הלכה עד למפגש שווה למרחק שאבא הלך עד למפגש, (ב) המרחק שאבא הלך עד למפגש שווה למרחק שאבא הלך בחזרה מהמפגש, (ג) המרחק לבית הספר שווה למרחק שרננה הלכה עד למפגש ועוד המרחק שהיא הלכה מהמפגש עד לבית הספר.

סעיף א

תחילה נשווה את המרחקים שאבא עובר מהבית עד למפגש ובחזרה:

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}t &= \frac{3}{2}t' \\ t' &= \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}t = \frac{5}{3}t\,.\end{aligned}$$

נמשיך בהשוואת המרחק עד למפגש של שניהם:

$$v(t+180) = \frac{5}{2}t\,.$$

אנו זקוקים לשתי משוואות עם שני הנעלמים כדי למצוא את v. אי-אפשר למצוא משוואה שניה מהנתונים מהמפגש עד ליעדים שלהם, כי המרחקים לא בהכרח שווים. במקום זה נמצא דרך אחרת להשוות את המרחק שעוברים רננה ואבא מהבית עד למפגש. עבור אבא נשתמש שוב ב-$\frac{5}{2}t$. עבור רננה נשים לב שניתן לחשב את המרחק המבית עד למפגש כהפרש בין המרחק מהבית לבית הספר (500) לבין המרחק שהיא עוברת מהמפגש ועד לבית הספר vt':

$$\frac{5}{2}t = 500 - vt' = 500 - v\left(\frac{5}{3}t\right)\,.$$

כעת יש לנו שתי משוואת בשני הנעלמים v, t. מהראשון נחשב:

$$t = \frac{360v}{5-2v}\,,$$

ונציב בשני:

$$\frac{5}{2}\left(\frac{360v}{5-2v}\right) = 500 - v\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{360v}{5-2v}\right)\,.$$

נפשט את המשוואה ונקבל משוואה ריבועית עבור v:

$$\begin{aligned}6v^2+19v-25 &= 0\\ (v-1)(6v+25) &= 0\,.\end{aligned}$$

המהירות חייבת להיות חיובית ולכן הפרתון היחיד הוא $v=1$.

סעיף ב

מ-$t = \dfrac{360v}{5-2v}$ נקבל $t=120$, ונסכם את פרקי הזמן על הציר האופקי בתרשים:

$$180+120+120+\frac{5}{3}\cdot 120 = 620 \ \text{(שניות)}.$$

הערה

שימו לב למלכודת שקל ליפול לתוכה: הזמנים נתונים בדקות והמהירויות נתונות במטרים שנייה!

1.2 קיץ תשע"ח מועד א

שני רוכבי אופניים, אמיר ומֹשה, יצאו בשעה 6:00 זה לכיוונו של זה.

אמיר רכב במהירות קבועה מעיר א לעיר ב, ומשה רכב במהירות קבועה מעיר ב לעיר א.

אמיר ומשה עברו זה על פני זה והמשיכו כל אחד ליעדו. אמיר הגיע לעיר ב שעתיים אחרי שעבר על פני משה,

ואילו משה הגיע לעיר א 8 שעות אחרי שעבר על פני אמיר.

א. באיזו שעה עברו אמיר ומשה זה על פני זה?

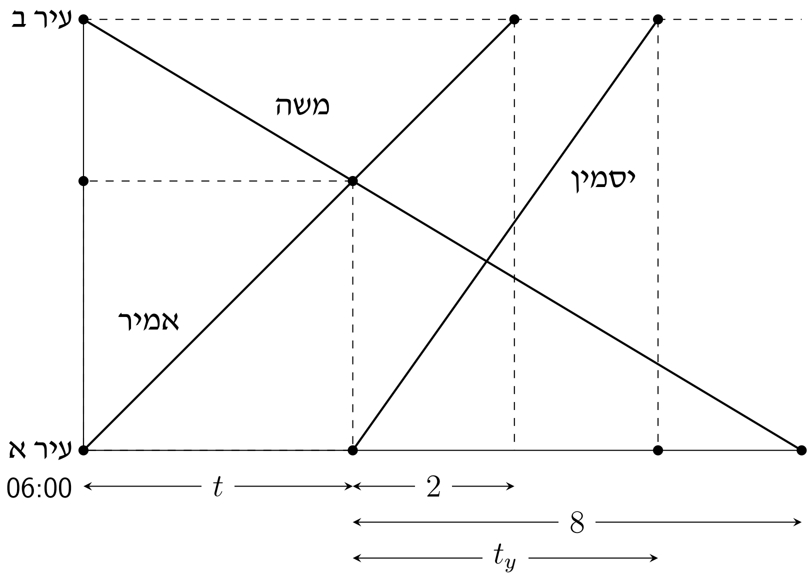
נסמן את מהירות נסיעתו של אמיר באות V.

בדיוק כאשר עברו אמיר ומשה זה על פני זה יצאה יסמין, רכובה על אופנוע, מעיר א לעיר ב, במהירות קבועה.

נתון שיסמין הגיעה לעיר ב אחרי אמיר, אך לפני שמֹשה הגיע לעיר א.

ב. **(1)** הבע באמצעות V את המרחק בין עיר א לעיר ב.

(2) הבע באמצעות V את טווח המהירויות האפשרי של יסמין.



נסמן: t = הזמן עד למפגש בין אמיר למשה, t_y = זמן הנסיעה של יסמין מעיר א לעיר ב, v_a, v_m, v_y = המהירויות של אמיר, משה ויסמין.

סעיף א

מהתרשים ניתן לראות שיש **שלושה** ביטויים עבור המרחק בין הערים: (א) הרחק שנסע אמיר, (ב) המרחק שנסע משה, ו-(ג) סכום המרחקים שנסעו אמיר ומשה עד למפגש:

$$tv_a + tv_m = (t+2)v_a = (t+8)v_m\,.$$

משני הביטויים הראשונים אנו מקבלים:

$$\frac{v_a}{v_m} = \frac{t}{2}\,.$$

נציב בשני הביטויים האחרונים:

$$(t+2)\cdot\frac{tv_m}{2}=(t+8)v_m\,.$$

v_m מצטמצם ונקבל משוואה ריבועית t^2-16 עם הפתרון החיובי $t=4$.

שימו לב

יש נטייה לעצור כאן כאשר חישבנו את הזמן t, אבל עיון חוזר בשאלה מראה שהיא מבקשת את **השעה** של המפגש שהיא 10:00.

סעיף ב

המרחק בין הערים הוא $(t+2)v_a$. חישבנו ש-$t=4$ ולכן המרחק הוא $6v_a=6V$ (הסימון הנתון V שונה מ-v_a שבחרתי).

סעיף ג

נתון שיסמין מגיע לעיר ב אחרי אמיר ולפני משה. מהתרשים רואים ש:

$$2<t_y<8\,.$$

זמן הוא מרחק חלקי מהירות ואת המרחק חישבנו בסעיף ב:

$$2<\frac{6V}{v_j}<8\,.$$

מכאן ש:

$$\frac{3}{4}V<v_j<3V$$

כי כיווני האי-שוויון מתחלפים עם היפוך השבר.

1.3 חורף תשע״ח

בכפר נופש יש שתי בריכות: בריכה א׳ ובריכה ב׳.

הנפח של בריכה א׳ הוא V_1 והנפח של בריכה ב׳ הוא V_2 .

את הבריכות ממלאים באמצעות 4 צינורות בעלי אותו הֶספק.

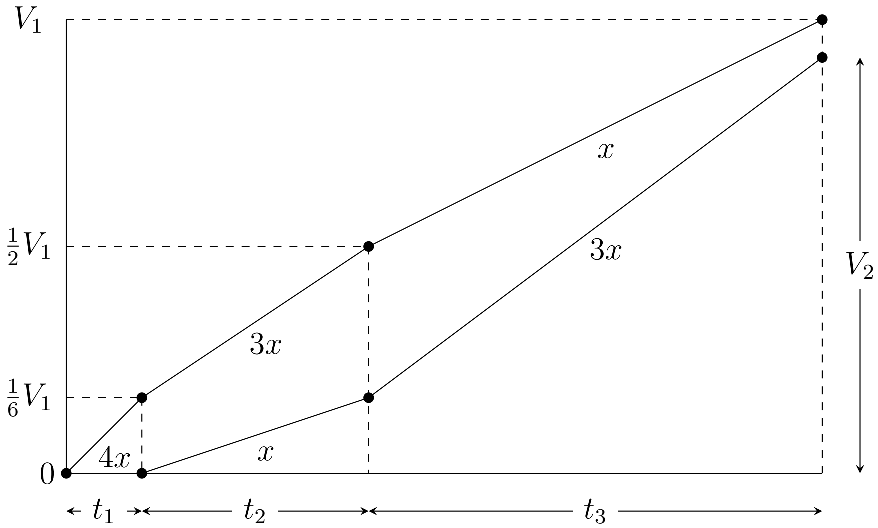
ביום כלשהו שתי הבריכות היו ריקות.

התחילו למלא את בריכה א׳ באמצעות ארבעת הצינורות. כאשר התמלאה בריכה א׳ לכדי $\frac{1}{6}$ מנפחה, העבירו אחד מן הצינורות לבריכה ב׳ והתחילו למלא אותה באמצעותו. כאשר התמלאה בריכה א׳ עד מחציתה, העבירו עוד שני צינורות למילוי בריכה ב׳.

מילוי שתי הבריכות הסתיים באותו הזמן.

כל הצינורות הזרימו מים ללא הפסקה עד שהתמלאו שתי הבריכות.

חשב את היחס $\frac{V_1}{V_2}$.



נסמן : $x =$ קצב המילוי של הצינורות (״אותו הספק״), $t_1, t_2, t_3 =$ פרקי הזמן בין העברת הצינורות.

הקו העליון בתרשים מתאר את המילוי של בריכה א, והקו התחתון מתאר את מילוי של בריכה ב. שימו לב שככל שיותר צינורות ממלאים בריכה, השיפוע של הקו תלול יותר.

יש לנו שלוש קבוצות של נעלמים : x, שלושת ה-t_i ושני ה-V_i. אם נצליח להיפטר מ-x או מה-t_i, השני יצטמצם כאשר נחלק את ה-V_i.

נתחיל עם משוואות ההספק עבור בריכה א, כאשר בכל פרק זמן ממלאים את ההפרשים של הנפחים, למשל, בזמן t_2 בריכה א מתמלאת משישית מנפחה לחצי מנפחה :

$$
\begin{aligned}
4xt_1 &= \frac{1}{6}V_1 \\
3xt_2 &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)V_1 \\
xt_3 &= \left(1-\frac{1}{2}\right)V_1 \,.
\end{aligned}
$$

נשתמש במשוואות כדי לחשב את פרקי הזמן כתלות בנפח בבריכה:

$$
\begin{aligned}
t_1 &= \frac{V_1}{24x} \\
t_2 &= \frac{V_1}{9x} \\
t_3 &= \frac{V_1}{2x} \,.
\end{aligned}
$$

מהתרשים רואים שאפשר לבטא את הנפח של V_2 כסכום: הנפח שמתמלא בפרק הזמן t_2 ועוד הנפח המתמלא בפרק הזמן t_3. כאשר נציב את המשוואות שקבלנו עבור בפרקי הזמן, נקבל את הנפח של V_2 כתלות ב-V_1 בלבד, כי המשתנה x מצטמצם:

$$
\begin{aligned}
V_2 &= xt_2 + 3xt_3 = \frac{xV_1}{9x} + \frac{3xV_1}{2x} = \frac{29}{18}V_1 \\
\frac{V_1}{V2} &= \frac{18}{29} \,.
\end{aligned}
$$

הערה

קיבלנו שהנפח של בריכה ב גדול מהנפח של בריכה א, עובדה שלא ידעתי כאשר ציירתי את התרשים עם נפח בריכה א גדול מנפח בריכה ב! אין לזה חשיבות. מטרת התרשים היא להציג את התסריט כדי שנוכל לכתוב את המשוואות הנכונות.

פרט מעניין הוא שפרק הזמן הראשון t_1 לא נחוץ לפתרון, כי המילוי של בריכה ב מתבצע בשני השלבים לאחר העברת הצינור הראשון.

1.4 קיץ תשע"ז מועד ב

העיירות A ו־ B נמצאות על גדת נהר הזורם

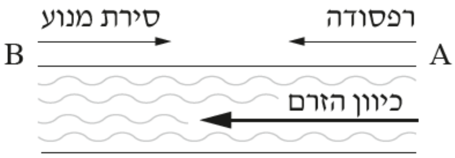
במהירות קבועה. כיוון הזרם הוא מ־ A ל־ B .

מן העיירה B יצאה סירת מנוע לכיוון העיירה A .

הסירה שטה נגד כיוון הזרם.

באותו הזמן יצאה רפסודה מן העיירה A

לכיוון העיירה B . הרפסודה שטה עם כיוון הזרם.



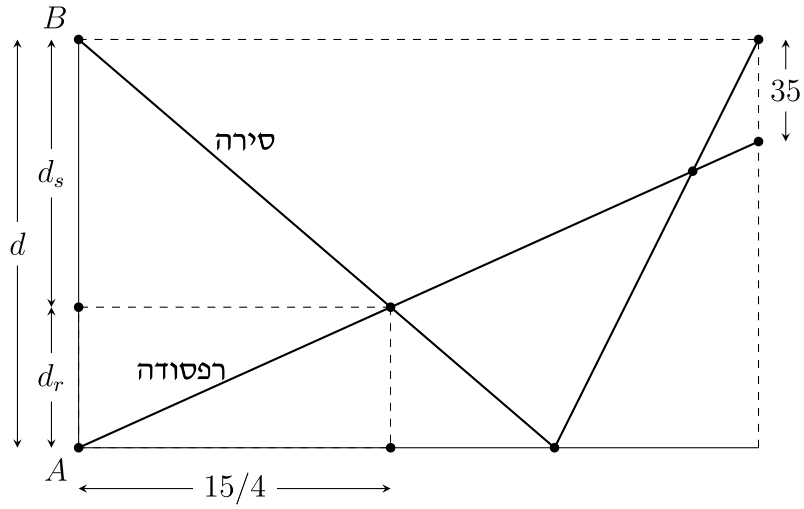
מהירות סירת המנוע במים עומדים היא קבועה וגדולה פי 4 ממהירות הזרם של הנהר.
מהירות הרפסודה במים עומדים היא אפס. במים זורמים הרפסודה שטה עם הזרם.

הסירה והרפסודה נפגשו 3 שעות ו־ 45 דקות אחרי יציאתן לדרך והמשיכו בדרכן. סירת המנוע הגיעה לעיירה A ומיד הסתובבה ושטה בחזרה לעיירה B .
כאשר סירת המנוע הגיעה לעיירה B , הרפסודה הייתה במרחק של 35 ק"מ מן העיירה B .

א. חשב את מהירות הזרם ואת מהירות סירת המנוע במים עומדים.

ב. בדרך חזרה לעיירה B פגשה סירת המנוע את הרפסודה בפעם השנייה.
כמה זמן עבר מרגע יציאתה של הרפסודה מן העיירה A עד שהסירה והרפסודה נפגשו בפעם השנייה?

סעיף א



נסמן: $d =$ המרחק בין שני הנמלים, $d_r, d_s =$ מרחקי ההפלגה של הסירה והרפסודה עד למפגש הראשון, $v_z =$ מהירות הזרם, $v_s =$ מהירות הסירה במים עומדים. ציר הזמן הוא בשעות.

הזמן עד למפגש הראשון שווה עבור הסירה והרפסודה ויחס המהירויות של הסירה והזרם ידוע, כך שניתן לכתוב את משוואות התנועה עד למפגש. נתון:

$$v_z = v_s/4\,.$$

במפגש הראשון:

$$d = d_s + d_r = \frac{15}{4}(v_s - v_z) + \frac{15}{4}v_z\,.$$

מהירות הזרם מתאפסת ומתקבל:

$$d = \frac{15}{4}v_s\,.$$

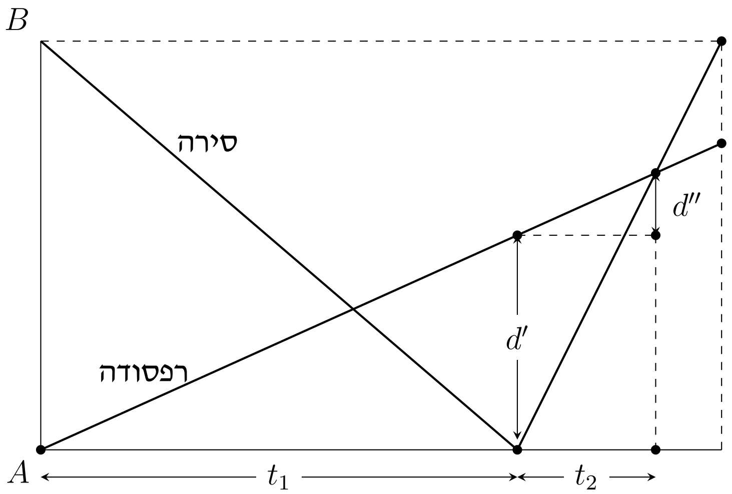
כעת נכתוב משוואות תנועה כדי להשוות את הזמנים עד סוף הסיפור. בפרק הזמן שהסירה מפליגה ל-A ובחזרה ל-B (מרחק של $d + d$), הרפסודה מפליגה מ-A ומגיעה "כמעט" לנמל B:

$$\frac{d}{v_s - v_z} + \frac{d}{v_s + v_z} = \frac{d - 35}{v_z}\,.$$

מהנתון על יחס המהירויות ומחישוב המרחק, נציב עבור v_z ו-d, ונקבל משוואה עם נעלם אחד בלבד, v_s. הפתרון הוא $v_s = 20$ ומיחס המהירויות $v_z = 5$. נחשב גם $d = 75$ שנצטרך בהמשך.

סעיף ב

נצייר תרשים חדש עם סימונים הקשורים למפגש השני.



נסמן: $t_1 =$ הזמן שהסירה מפליגה מ-A ל-B, $t_2 =$ הזמן שהסירה מפליגה מ-A למפגש השני, $d' =$ המרחק שהרפסודה מפליגה בזמן t_1, $d'' =$ המרחק שהרפסודה מפליגה בזמן t_2.

קל לחשב t_1 ממשוואת התנועה של הסירה:

$$t_1 = \frac{d}{v_s - v_z} = \frac{75}{20 - 5} = 5\,,$$

ולחשב את המרחק d' מהמשוואה של הרפסודה:

$$d' = v_z t_1 = 5 \cdot 5 = 25\,.$$

נשאר לחשב את פרק הזמן t_2. בפרק זמן זה הסירה מפליגה מרחק $d' + d''$ והרפסודה מפליגה מרחק d''. המהירויות ידועות, כך שיש לנו שתי משוואות עבור t_2:

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{d' + d''}{v_s + v_z} = \frac{25 + d''}{25} \\ t_2 &= \frac{d''}{v_z} = \frac{d''}{5} \,. \end{aligned}$$

נפתור את המשוואה ונקבל:

$$\begin{aligned} d'' &= \frac{25}{4} \\ t_2 &= \frac{d''}{v_z} = \frac{5}{4} \,. \end{aligned}$$

שימו לב

שהשאלה מבקשת את זמן ההפלגה של הרפסודה מנמל A ועד למפגש השני:

$$t_1 + t_2 = 5 + \frac{5}{4} = \frac{25}{4} \,.$$

1.5 קיץ תשע״ז מועד א

נֹגה רכבה על אופניים במסלול באורך מסוים, בארבע מהירויות קבועות שונות.

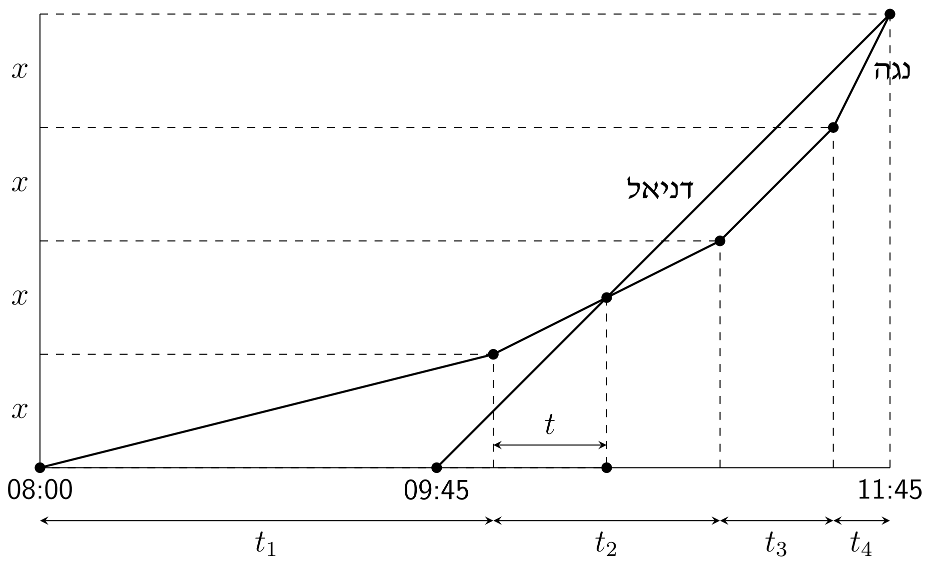
בכל פעם, לאחר שעברה מִקְטע שאורכו רבע מן המסלול, היא הגבירה את מהירותה, ורכבה במהירות הגדולה פי 2 מן המהירות הקודמת.

במקטע האחרון היא רכבה במהירות של 40 קמ״ש.

נֹגה יצאה לדרך בשעה $8:00$ בבוקר וסיימה את המסלול בשעה $11:45$ בבוקר.

א. מהו אורך המסלול?

ב. דניאל יצא לדרך באותו מסלול בשעה $9:45$, ונסע במהירות קבועה לאורך כל המסלול.
גם הוא הגיע לסוף המסלול בשעה $11:45$.
באיזה מארבעת מִקְטָעֵי המסלול פגש דניאל את נֹגה בפעם הראשונה, ובאיזו שעה?



נסמן: x = המרחק של מקטע, t_1, t_2, t_3, t_4 = זמני רכיבה של נגה במקטעים.

נתון: 40 = המהירות במקטע האחרון, לכן המהירויות של המקטעים האחרים הן $5, 10, 20$.

סעיף א

נתון לנו הזמן הכולל והמהירויות (אמנם רק המהירות האחרונה נתונה, אבל אפשר לחשב את האחרות), והנעלם היחיד הוא המרחק. נסכם את הזמנים של המקטעים:

$$\left(\frac{x}{5}+\frac{x}{10}+\frac{x}{20}+\frac{x}{40}\right)=\frac{15}{4}\,.$$

הפתרון הוא $x=10$ ולכן אורך המסלול הוא 40 ק״מ.

סעיף ב

חישבנו את המרחק ונתון הזמן של דניאל. המהירות של דניאל היא $40/2 = 20$ קמ״ש.

אפשר אולי למצוא נוסחה עבור המפגש, אבל פשוט יותר לעבור מקטע מקטע ולבדוק אם המפגש מתקיים באותו מקטע.

נגה עוברת 10 ק״מ בכל מקטע. מה המרחק שעובר דניאל עד סוף המקטע הראשון?

$t_1 = 10/5 = 2$ כך שסוף המקטע הוא ב- 10:00. דניאל רוכב רבע שעה מ- 09:45 ועד 10:00 ולכן המרחק שהוא עובר הוא רק $20 \cdot \frac{1}{4} = 5$ ק״מ והמפגש לא התקיים במקטע הראשון.

מתי נגה מגיעה לסוף המקטע השני? $t_2 = 10/10 = 1$ כך שסוף המקטע הוא ב-11:00. בשעה ורבע בין 09:45 ל 11:00 דניאל רוכב $20 \cdot \frac{5}{4} = 25$ ק״מ, מרחק גדול מהמרחק של נגה, לכן המפגש מתקיים במקטע השני.

נשאר רק לחשב את פרק הזמן בתוך המקטע השני עד למפגש, שנסמן t. נכתוב משוואה למרחקים השווים של נגה ודניאל. נגה רכבה 10 ק״מ עד סוף הקטע הראשון ודניאל רכב 5 ק״מ. מסוף הקטע הראשון, הם רכבו t שעות, כל אחד במהירות שלו:

$$
\begin{aligned}
10 + 10t &= 5 + 20t \\
t &= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

שימו לב

השאלה מבקשת את שעת המפגש. כבר חישבנו שתחילת המקטע השני בשעה 10:00, ולכן שעת המפגש היא 10:30.

1.6 חורף תשע״ז

שני צינורות א׳ ו־ ב׳ מזרימים מים לברֵכה בקצב קבוע.

כאשר צינור א׳ בלבד פתוח, הברֵכה הריקה מתמלאת לגמרי ב־ m שעות.

כאשר צינור ב׳ בלבד פתוח, הברֵכה הריקה מתמלאת לגמרי ב־ 2m שעות.

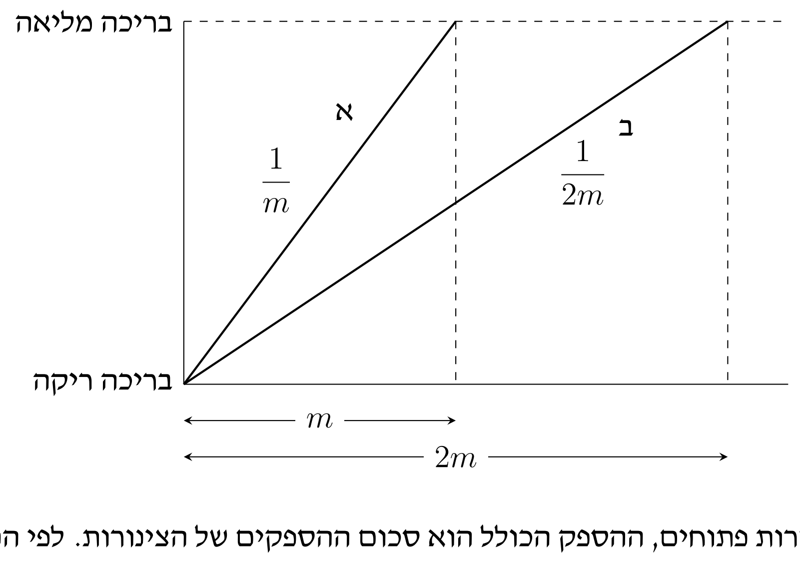
כאשר שני הצינורות פתוחים במקביל, הברֵכה הריקה מתמלאת לגמרי ביותר מ־ 4 שעות.

ביום מסוים הברֵכה הייתה ריקה. פתחו את צינור א׳ בלבד למשך שעתיים.
אחר כך פתחו גם את צינור ב׳, ושני הצינורות היו פתוחים בו בזמן שעתיים נוספות.
בתום אותן שעתיים נוספות יותר מ־ $\frac{1}{2}$ הברֵכה הייתה מלאה.

א. מצא את תחום הערכים האפשריים של m .

ב. ביום אחר $\frac{1}{2}$ הברֵכה הייתה מלאה. פתחו את שני הצינורות, אלא שבשל תקלה טכנית צינור ב׳ רוקן מים מן הברֵכה במקום למלא בה מים. שני הצינורות היו פתוחים בו בזמן במשך שעה אחת, ובמהלכה צינור א׳ מילא מים בברֵכה וצינור ב׳ רוקן ממנה מים.
בתום אותה שעה תוקנה התקלה, ושני הצינורות החלו למלא את הברֵכה יחד, עד שהיא התמלאה לגמרי כעבור שעתיים וחצי נוספות.
נתון שהקצב שבו צינור ב׳ מרוקן מים מהברֵכה שווה לקצב שבו הוא ממלא אותה במים.
מצא את m .

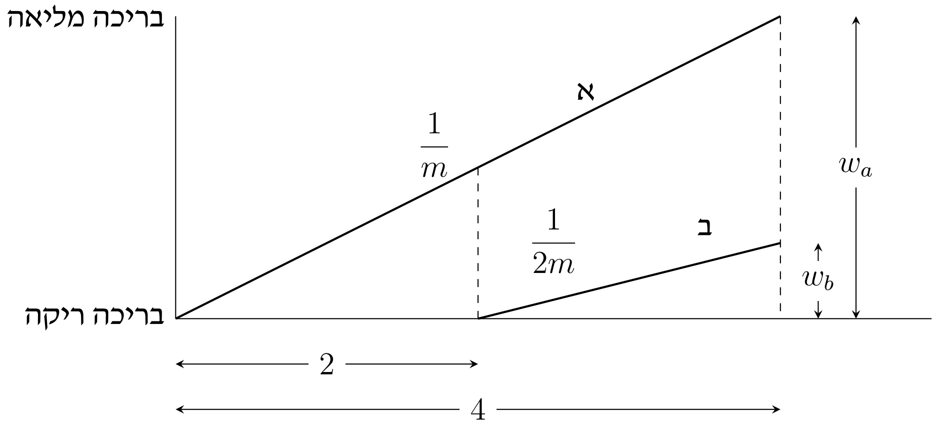
סעיף א



כאשר שני הצינורות פתוחים, ההספק הכולל הוא סכום ההספקים של הצינורות. לפי הנתונים:

$$1/\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2m}\right) > 4\,,$$

כך ש-$m > 6$.



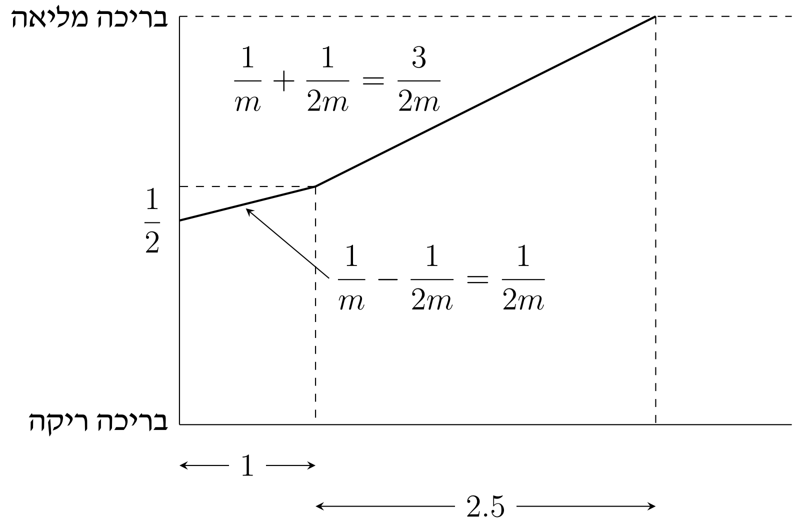
נסמן : $w_a =$ כמות המים שמילא צינור א, $w_b =$ כמות המים שמילא צינור ב.

כמות המים לאחר ארבע שעות שווה לסכום הכמויות שכל צינור מילא והיא לפחות מחצית הבריכה :

$$w_a + w_b = \frac{1}{m} \cdot 4 + \frac{1}{2m} \cdot 2 > \frac{1}{2}\,.$$

מכאן, $m < 10$.

סעיף ב



כדי למלא את הבריכה, מתחילים ממחצית הכמות, מוסיפים)מחסירים כי שלילי(את הכמות של השעה הראשונה, ומוסיפים את הכמות מפרק הזמן השני של שעתיים וחצי :

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m}\right) \cdot 1 + \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2m}\right) \cdot 2.5 = 1\,.$$

הפתרון הוא $m = 8.5$.

1.7 קיץ תשע"ו, מועד ב

1. שני הטכנאים גל ודני עבדו בהרכבת מחשבים. קצב העבודה של כל אחד מהם קבוע.

   א. ביום העבודה הראשון הרכיבו שני הטכנאים אותו מספר של מחשבים.

   גל התחיל לעבוד בשעה $8:00$, וסיים לעבוד בשעה $15:00$.

   דני התחיל לעבוד לאחר השעה $8:00$ ולפני השעה $9:00$, וסיים לעבוד בשעה $13:00$.

   ידוע שגל ודני הרכיבו אותו מספר של מחשבים מהרגע שכל אחד מהם התחיל לעבוד ועד השעה $9:00$.

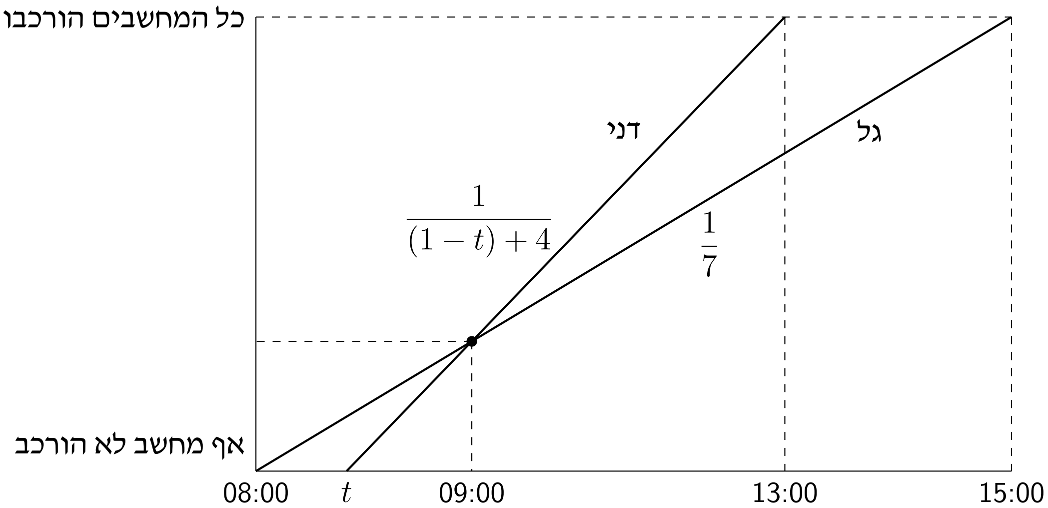
   כמה זמן אחרי השעה $8:00$ התחיל דני לעבוד?

   ב. ביום העבודה השני, התחילו גל ודני לעבוד באותה שעה וסיימו לעבוד באותה שעה.

   ביום זה הם הרכיבו סך הכל יחד את אותו מספר מחשבים שהרכיבו יחד ביום העבודה הראשון.

   כמה זמן עבדו הטכנאים ביום העבודה השני?

סעיף א



נסמן : $t =$ הזמן שדני התחיל בהרכבה.

נשתמש בנתונים כדי למצוא ביטויים עבור ההספקים של דני וגל. נתייחס לסך המחשבים שהרכיב כל אחד כיחידת עבודה אחת. גל עבד שבע שעות ולכן ההספק שלו הוא $\frac{1}{7}$, ודני עבד $1-t$ עד לשעה 09:00 ואחר כך עוד ארבע שעות. ההספק שלו הוא $\frac{1}{(1-t)+4}$.

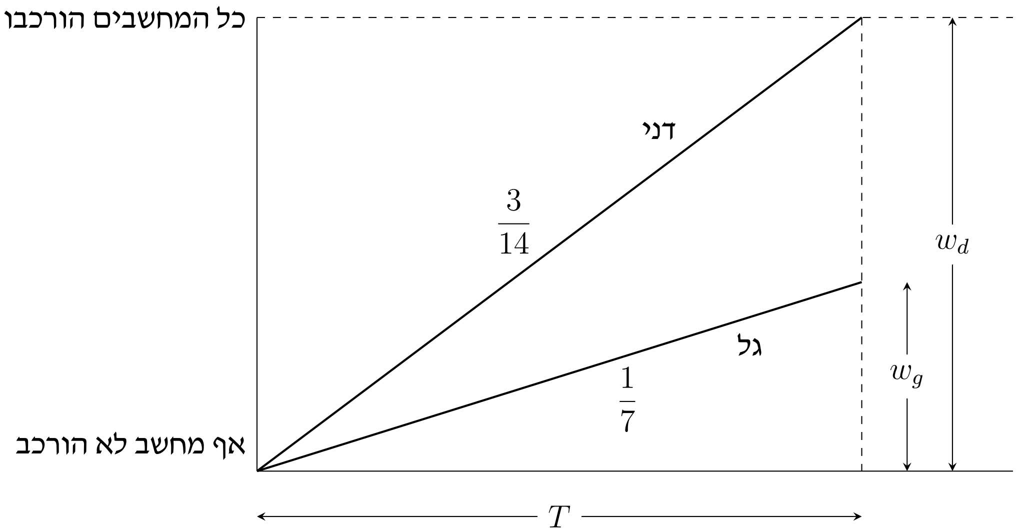
נתון שבשעה 09:00 שניהם סיימו להרכיב אותו כמות של מחשבים:

$$\frac{1}{7}\cdot 1=\frac{1}{(1-t)+4}\cdot(1-t)\,,$$

ולכן דני התחיל לעבוד $t=\dfrac{1}{3}$ שעה לאחר 08:00.

סעיף ב

נצייר תרשים חדש עם המידע הרלוונטי לסעיף זה.



נסמן: $T=$ הזמן ששניהם עבדו ביום השני. על התרשים סימנו גם את כמות העבודה שעשה כל אחד מהם: $w_g=$ העבודה של גל, $w_d=$ העבודה של דני.

בסעיף א הערנו שההספק של גל הוא $\dfrac{1}{7}$, וחישבנו שדני עבד:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)+4=\frac{14}{3}$$

שעות. ההספק שלו הוא:

$$\frac{1}{\frac{14}{3}}=\frac{3}{14}\,.$$

נתון שהם סיימו אותה כמות עבודה כמו היום הראשון:

$$1+1=w_g+w_d=\frac{1}{7}T+\frac{3}{14}T\,,$$

והפתרון הוא $T=\dfrac{28}{5}$.

1.8 קיץ תשע"ו מועד א

שתי מכוניות יצאו באותו זמן מעיר א' לעיר ב'.

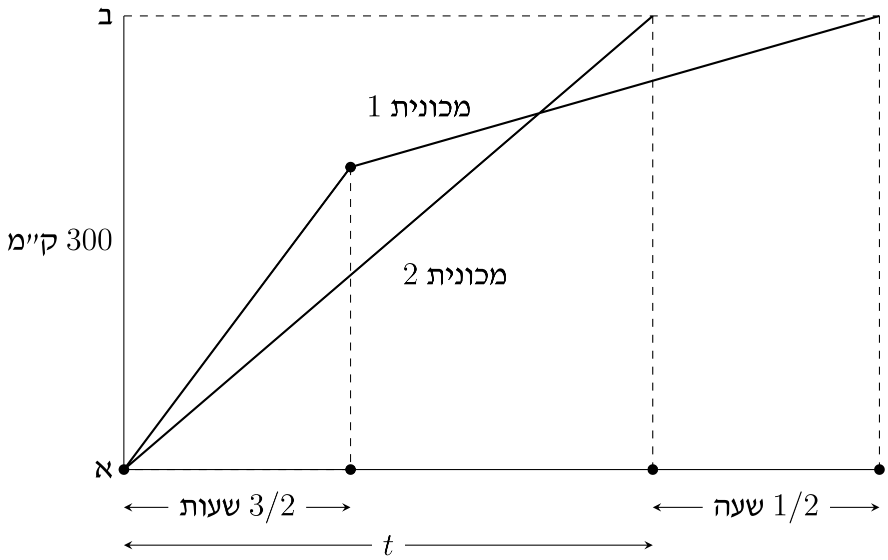
המרחק בין שתי הערים הוא 300 ק"מ.

המכונית הראשונה נסעה במהירות הגדולה ב־ 25 קמ"ש מהמהירות של המכונית השנייה.

כעבור 1.5 שעות מרגע היציאה מעיר א', הקטינה המכונית הראשונה את מהירותה לחצי ממהירותה הקודמת, והגיעה לעיר ב' $\frac{1}{2}$ שעה אחרי המכונית השנייה.

א. מצא את המהירות של המכונית השנייה אם ידוע שמהירותה גדולה מ־ 60 קמ"ש.

ב. מצא כעבור כמה שעות מרגע היציאה מעיר א' ו<u>לפני</u> שהמכונית השנייה השיגה את המכונית הראשונה, היה המרחק בין שתי המכוניות 12.5 ק"מ (מצא את שתי האפשרויות).



נסמן: v_1 = מהירות התחלתית של מכונית 1, v_2 = מהירות של מכונית 2, t = זמן נסיעה של מכונית 2 מעיר א' עד לעיר ב'.

נתון: $v_1 = v_2 + 25$. השיפוע של הקו של מכונית 1 גדולה מהשיפוע של הקו של מכונית 2.

סעיף א

שתי המכוניות נסעו אותו מרחק מעיר א לעיר ב. נכתוב את משוואות התנועה של שתי המכוניות:

$$\begin{aligned} v_1 \cdot \frac{3}{2} + \frac{v_1}{2}\left(\left(t - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) &= 300 \\ v_2 t &= 300\,. \end{aligned}$$

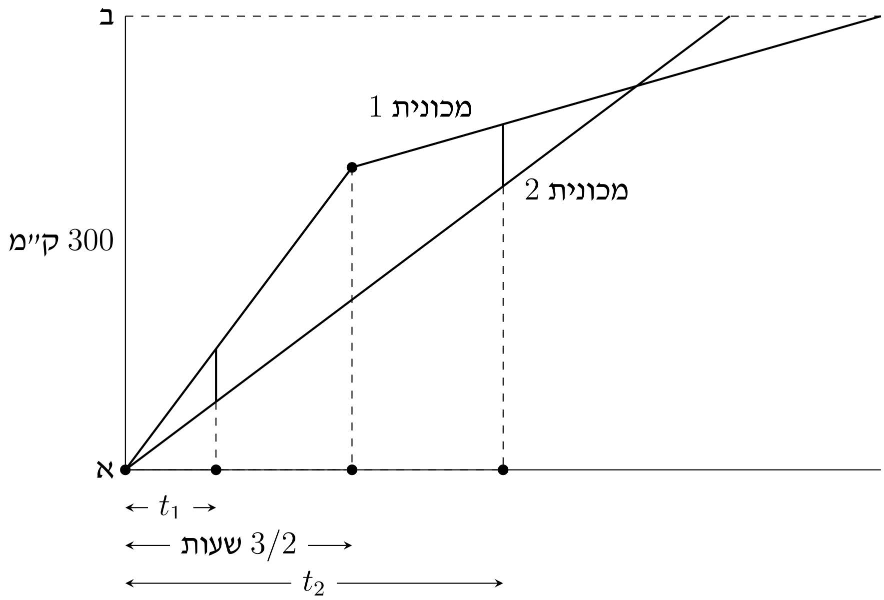
נציב $v_1 = v_2 + 25$, $t = 300/v_2$ במשוואה הראשונה ונקבל משוואה ריבועית ב-v_2:

$$v_2^2 - 125v_2 + 3750 = 0\,.$$

השורשים הם $50, 75$ ונתון ש-$v_2 > 60$ כך שיש לבחור $v_2 = 75$ קמ"ש.

סעיף ב

נצייר תרשים חדש עם המידע הרלוונטי עבור סעיף זה.



הקווים האנכיים הכלואים בין הקווים של שתי המכוניות מסמנים מרחק של 12.5 ק״מ. קו אחד הוא לפני שינוי המהירות בזמן t_1 מתחילת הנסיעה וקו שני לאחר שינוי המהירות.

בסעיף א׳ חישבנו $v_2 = 75$ ולכן $v_1 = v_2 + 25 = 100$.

נכתוב את המשוואות עבור הפרשי המרחקים:

$$
\begin{aligned}
100t_1 - 75t_1 &= 12.5 \\
\left(100 \cdot \frac{3}{2} + 50\left(t_2 - \frac{3}{2}\right)\right) - 75t_2 &= 12.5\,.
\end{aligned}
$$

הפתרונות הם $t = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{5}{2}$ שעות.

1.9 חורף תשע"ו

רוכב אופניים ורוכב אופנוע יצאו באותו רגע זה לקראת זה משני יישובים שונים.

הם נפגשו כעבור 3 שעות.

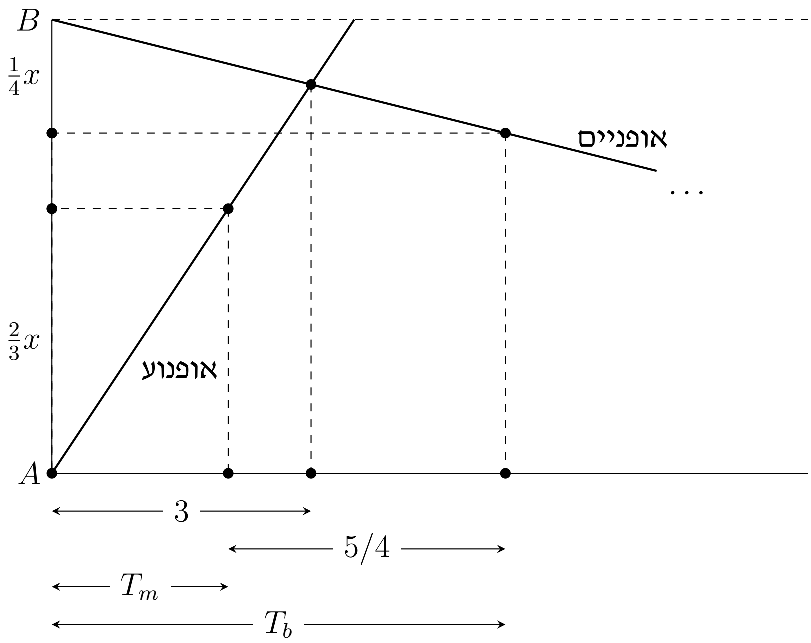
רוכב האופנוע עובר $\frac{2}{3}$ מהדרך שבין שני היישובים ב־ 1.25 שעות פחות מהזמן שרוכב האופניים עובר $\frac{1}{4}$ מהדרך שבין שני היישובים.

מהירויות הרוכבים אינן משתנות.

א. מצא פי כמה המהירות של רוכב האופנוע גדולה מן המהירות של רוכב האופניים.

ב. מצא בכמה שעות עובר רוכב האופנוע את כל הדרך שבין שני היישובים.

סעיף א



נסמן: $v_b =$ מהירות אופניים, $v_m =$ מהירות אופנוע, $x =$ מרחק בין הערים, $T_m =$ פרק הזמן שהאופנוע עובר $\frac{2}{3}$ מהמרחק, $T_b =$ פרק הזמן שהאופניים עובר $\frac{1}{4}$ מהמרחק.

כאשר שני כלי הרכב נפגשים סכום המרחקים שהם עברו הוא המרחק בין הנקודות. המרחק לא נתון ולכן אנו משתמשים בנעלם x:

$$x = 3v_b + 3v_m\,.$$

הנתון השני הוא הקשר בין זמני הנסיעה של חלקי המרחק בין היישובים $T_b = T_m + 1.25$:

$$\frac{x/4}{v_b} = \frac{2x/3}{v_m} + \frac{5}{4}\,.$$

נציב עבור x, נסמן את היחס בין המהירויות $r = \frac{v_m}{v_b}$ ונקבל משוואה הריבועית:

$$\begin{aligned}
\frac{3v_b + 3v_m}{4v_b} &= \frac{2(3v_b + 3v_m)}{3v_m} + \frac{5}{4} \\
\frac{3}{4} + \frac{3}{4}r &= \frac{2}{r} + 2 + \frac{5}{4} \\
3r^2 - 10r - 8 &= 0\,.
\end{aligned}$$

השורש החיובי הוא $r = \frac{v_m}{v_b} = 4$.

סעיף ב

נתונה משוואת המרחק בין היישובים:

$$x = 3v_b + 3v_m\,.$$

נשתמש ביחס שחישבנו בסעיף א כדי לחשב את הזמן של נסיעת האופנוע:

$$\frac{x}{v_m} = \frac{3v_b + 3v_m}{v_m} = 3\frac{v_b}{v_m} + 3 = \frac{3}{r} + 3 = \frac{3}{4} + 3 = \frac{15}{4} \quad \text{שעות}\,.$$

1.10 קיץ תשע"ה מועד ב

בזמן הנסיעה באוטובוס הבחין יוסי ברגע מסוים באימא שלו,

ההולכת ליד האוטובוס בכיוון הפוך לכיוון הנסיעה של האוטובוס.

כעבור 10 שניות מהרגע שיוסי הבחין באימו, עצר האוטובוס בתחנה,

ויוסי רץ מיד כדי להשיג את אימו.

מהירות הריצה של יוסי גדולה פי 2 ממהירות ההליכה של אימו,

והיא $\frac{1}{7}$ ממהירות הנסיעה של האוטובוס.

כל המהירויות הן קבועות.

א. כמה זמן רץ יוסי כדי להשיג את אימו?

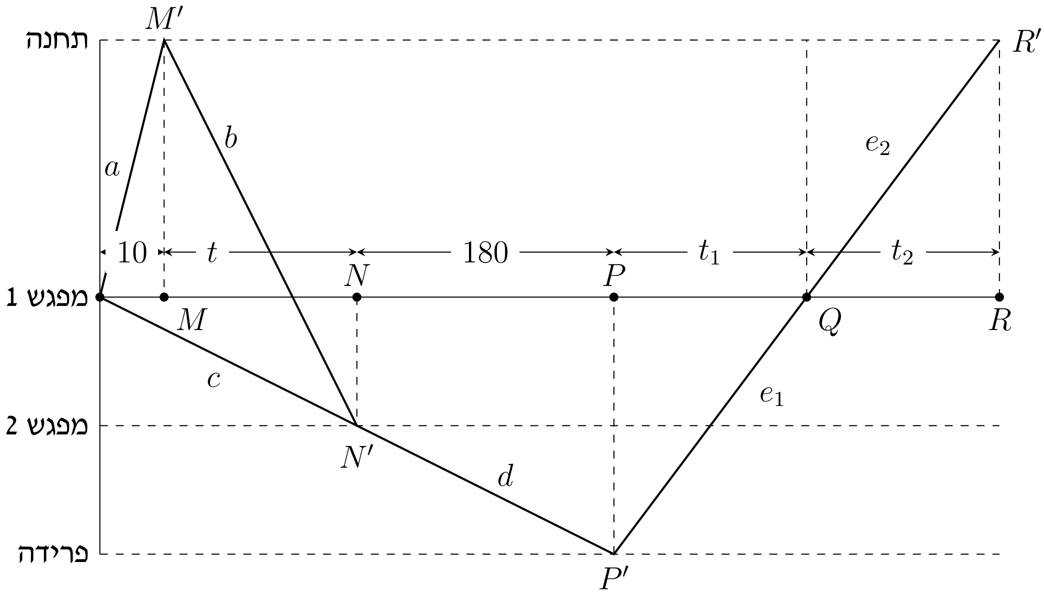
ברגע שיוסי השיג את אימו, הם הלכו יחד 3 <u>דקות</u> במהירות ההליכה של אימו

(בכיוון ההליכה שלה).

מיד בתום 3 הדקות רץ יוסי בחזרה לתחנת האוטובוס שירד בה.

(מהירות הריצה של יוסי היא כמו בסעיף א.)

ב. כמה זמן רץ יוסי בחזרה לתחנת האוטובוס?



בתרשים סימנו את הקטעים:

$a =$ יוסי נוסע באוטובוס $\quad$ $b =$ יוסי רץ לפגישה עם אמא

$c =$ אמא הולכת עד למפגש עם יוסי $\quad$ $d =$ יוסי ואמא הולכים ביחד

$e_1 + e_2 =$ יוסי רץ חזרה לתחנה

נסמן: $t =$ הזמן שיוסי רץ מהתחנה כדי להשיג את אמא.

נסמן מהירויות: $v_y =$ יוסי, $v_a =$ אמא, $v_b =$ אוטובוס.

נתון: $v_y = 2v_a$, $v_y = v_b/7$.

סעיף א

את הזמן t נוכל לחשב ממשוואות התנועה מהמפגש הראשון (יוסי רואה את אימו) ועד למפגש השני (יוסי משיג את אימו). המרחק מסומן NN' בתרשים. נוכל למצוא שתי משוואות עבור מרחק זה, אחד עבור אמא (קטע c):

$$v_a(t+10),$$

ואחד עבור יוסי (קטעים a, b):

$$-v_b \cdot 10 + v_y t\,.$$

שימו לב שבקטע a יוסי **מתרחק** מהמפגש ולכן המהירות שלילית.

נשווה את המרחקים ונציב את יחס המהירויות הנתון:

$$\begin{aligned} v_a(t+10) &= v_y t - v_b \cdot 10 \\ \frac{v_y}{2}(t+10) &= v_y t - 7v_y 10\,. \end{aligned}$$

הפתרון הוא $t = 150$ שניות.

סעיף ב

מהתרשים קל לראות **ששני** קטעי הקווים e_1, e_2 מתארים את הריצה של יוסי בחזרה לתחנה. רואים גם שהמרחק PP' של e_1 הוא גם המרחק שאמא הולכת, קטעים c, d. לפי התוצאה של סעיף א, לוקח לאמא $340 = 180 + 150 + 10$ שניות לעבור מרחק זה. נתון שיוסי רץ פי שניים מהר יותר מההליכה של אמא, ולכן $t_1 = 170$ שניות.

עבור הקטע השני e_2, המרחק RR' שווה למרחק MM', המרחק שהאוטובוס עבר מהמפגש הראשון ועד התחנה. נתון שהאוטובוס עובר מרחק זה ב-10 שניות, ונתון שמהירות הריצה של יוסי פי שבע לאט ממהירות הנסיעה של האוטובוס, כך ש-$t_2 = 70$.

נסכם ונקבל שיוסי רץ מנקודת הפרידה לתחנה ב $t_1 + t_2 = 240$ שניות.

שימו לב למלכודת: זמן ההליכה יחדc נתון בדקות ושאר הזמנים בשניות.

1.11 קיץ תשע"ה מועד א

מכונית I ומכונית II יצאו באותו זמן מאותו מקום ולאותו כיוון.

המהירות של מכונית I הייתה 50 קמ"ש, והמהירות של מכונית II הייתה 40 קמ"ש.

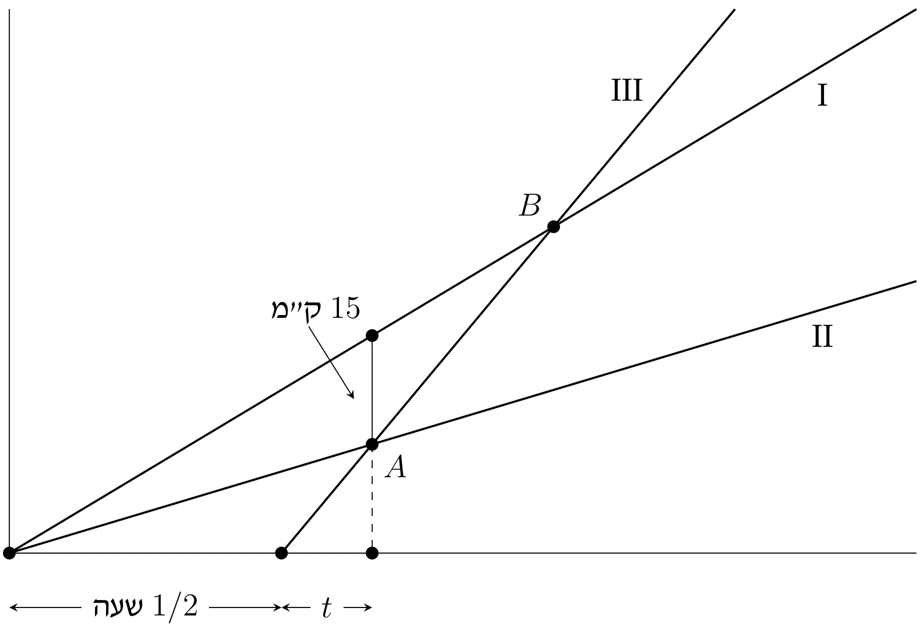
כעבור חצי שעה מרגע היציאה של שתי המכוניות, יצאה גם מכונית III מאותו מקום ולאותו כיוון.

ברגע שמכונית III פגשה במכונית II, המרחק בין מכונית I למכונית II היה 15 ק"מ.

המהירויות של כל המכוניות היו קבועות.

א. מצא את המהירות של מכונית III.

ב. האם ייתכן שאחרי הפגישה בין מכונית III למכונית II, יהיה המרחק בין מכונית III למכונית I שווה למרחק בין מכונית II למכונית I ? נמק.



המהירות של מכונית I גדולה מהמהירות של מכונית II, ולכן השיפוע שלו תלול יותר.

נסמן t = הזמן בין היציאה של III ועד למפגש שלו עם II, v_3 = המהירות של III.

נתון: מהירות של I $50 = v_1$, מהירות של II $40 = v_2$.

סעיף א

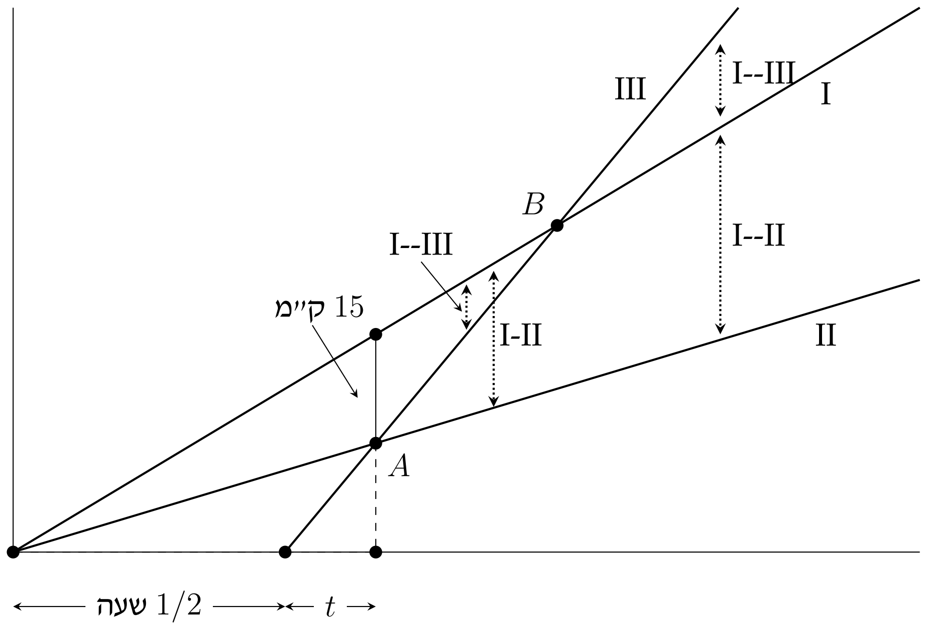
לאחר $t+1/2$ שעות, המכוניות II ו-III עברו אותו מרחק, ומכונית I עבר אותו מרחק ועוד 15 ק"מ. נכתוב את משוואות התנועה לשני המקרים:

$$\begin{aligned} 40(t+1/2) &= v_3 t \\ 50(t+1/2) &= v_3 t + 15\,. \end{aligned}$$

מהמשוואות מתקבל $t = 1$ ואח"כ $v_3 = 60$ קמ"ש.

סעיף ב

נוסיף סימונים לתרשים שיעזרו לנו לפתור את הבעייה:



נעיין בקווים מנוקדים בתרשים ונראה שהמרחקים לא יכולים שווים. בנקודה A הרחקים שווים, אבל מנקודה זו ועד לנקודה B, המרחק I--II גדל והמרחק I--III קטן.

בנקודה B המרחק I--II חיובי והמרחק I--III שווה לאפס. מכאן והלאה, שני המרחקים גדלים באותו קצב כי הפרשי המהירויות שווים: $40 - 50 = 50 - 60 = 10$ קמ״ש.

הוכחה בחישוב

נסמן $t_A =$ זמן מנקודה A, $t_B =$ זמן מנקודה B, $d_B =$ המרחק בין I ל-II בנקודה B.

משמאל לנקודה B המרחקים שווים **אם**:

$$15 + (v_1 - v_2)t_A \stackrel{?}{=} 15 + (v_1 - v_3)t_A\,.$$

נציב $v_1 = 50, v_2 = 40, v_3 = 60$ ונקבל $10 = -10$, כך הטיעון לא יכול להיות נכון.

מימין לנקודה B המרחקים שווים **אם**:

$$(v_3 - v_1)t_B \stackrel{?}{=} d_B + (v_1 - v_2)t_B\,.$$

לאחר הצבה עבור המהירויות, נקבל שהטיעון נכון אם $d_B = 0$, אבל אנחנו יודעים ש-$d_B > 15$.

1.12 חורף תשע"ה

צַבָּעים ותיקים וצַבָּעים מתלמדים צריכים לצבוע מספר מסוים של דלתות.

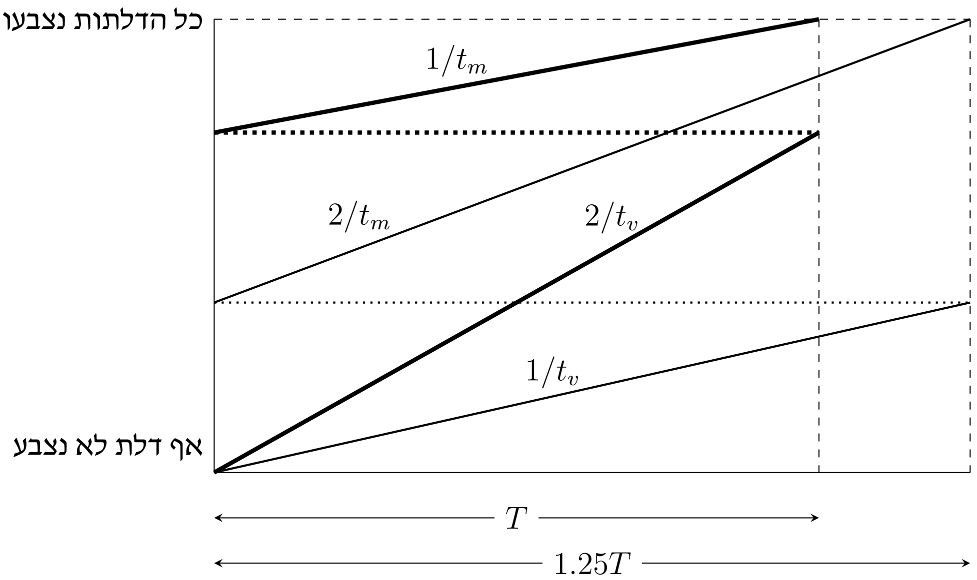
צַבָּע אחד ותיק ו־ 2 צַבָּעים מתלמדים יסיימו את הצביעה בזמן הארוך ב־ 25% מהזמן שבו יסיימו את הצביעה 2 צַבָּעים ותיקים וצַבָּע אחד מתלמד.

לכל צבע ותיק אותו קצב עבודה בלתי משתנה, ולכל צבע מתלמד אותו קצב עבודה בלתי משתנה. (צבע ותיק עובד מהר יותר מצבע מתלמד).

א. מצא את היחס בין הזמן שצבע מתלמד יסיים לבדו את צביעת הדלתות לבין הזמן שצבע ותיק יסיים לבדו את צביעת הדלתות.

ב. מצא כמה צבעים מתלמדים צריכים לעבוד עם צבע אחד ותיק, כדי שהם יסיימו את צביעת הדלתות במשך אותו הזמן שבו יסיימו את הצביעה 2 צבעים ותיקים וצבע אחד מתלמד.

סעיף א



נסמן את הזמנים לצביעת כל הדלתות: $t_v =$ צבע ותיק, $t_m =$ צבע מתלמד.

השאלה שואלת על יחס בין זמנים, ולכן אין חשיבות לזמן הכולל לצביעות כל הדלתות. נסמן $1 =$ הזמן הכולל של שני ותיקים ומתלמד אחד, ו-$1.25 =$ הזמן הכולל של שני מתלמדים וותיק אחד.

הסבר על התרשים

הצבעים עובדים במקביל אבל הציר בתרשים מראה **חלוקת העבודה**, כאילו שצבע (או זוג צבעים) מסיים את חלקו בעבודה ואחר כך הצבע (או הזוג) השני מתחיל את חלקו. כאשר יש זוג צבעים הם רשומים כצבע אחד עם הספק כפול. הקווים הדקים מראים צבע אחד ותיק $(1/t_v)$ ושני צבעים מתלמדים $(2/t_m)$. הקווים העבים מראים שני צבעים ותיקים $(2/t_v)$ וצבע אחד מתלמד $(1/t_m)$.

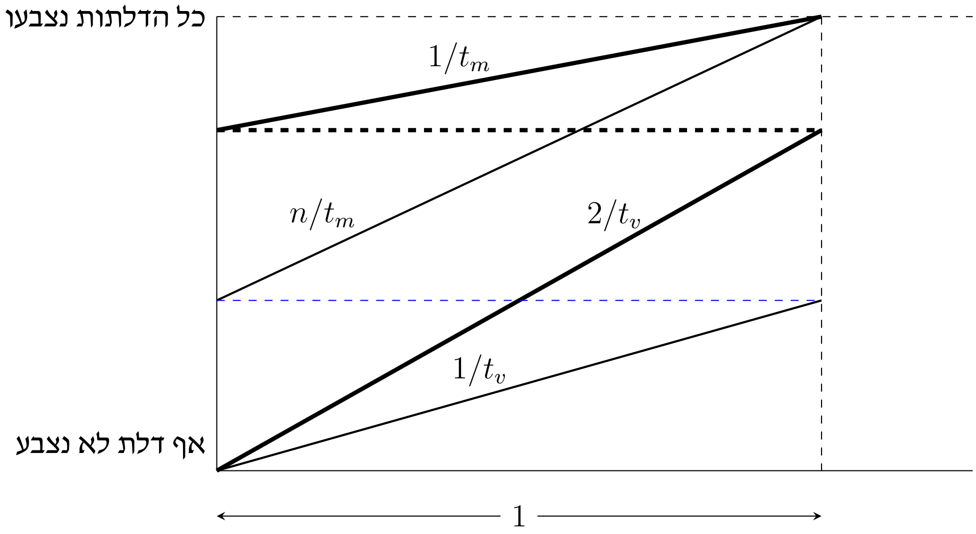
שני ההרכבים סיימו את כל העבודה, ומכאן שמשוואות ההספק נותנות אותו ערך:

$$\frac{2}{t_v}\cdot 1 \,+\, \frac{1}{t_m}\cdot 1 \,=\, \frac{1}{t_v}\cdot 1.25 \,+\, \frac{2}{t_m}\cdot 1.25\,.$$

הפתרון הוא:

$$\frac{t_m}{t_v} = 2\,.$$

סעיף ב



נסמן $n =$ מספר הבצעים המתלמדים. העבודה של שני ההרכבים שווה ולכן:

$$\frac{2}{t_v}+\frac{1}{t_m}=\frac{1}{t_v}+\frac{n}{t_m}\,.$$

נשתמש ביחס שחישבנו בסעיף א ונקבל:

$$n=\frac{t_m}{t_v}+1=2+1=3\,.$$

1.13 קיץ תשע"ד מועד ב

רץ I ורץ II יצאו באותו רגע מאותו מקום. הם רצו במהירות קבועה ובאותו כיוון.

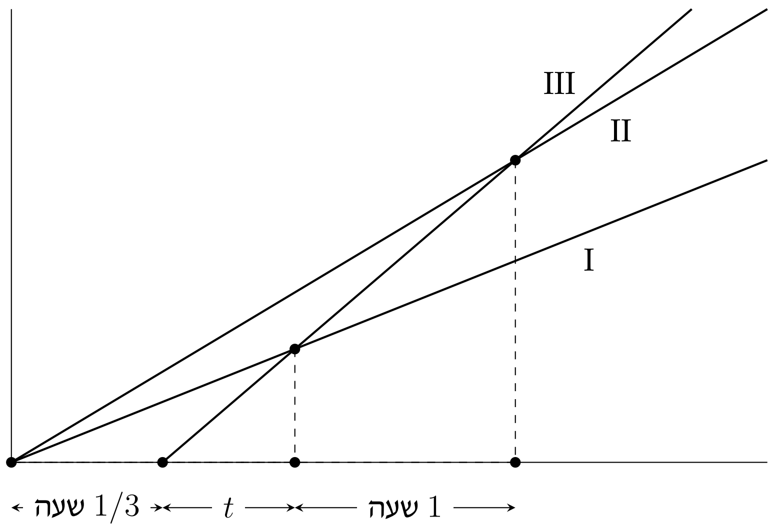
המהירות של רץ I הייתה 6 קמ"ש, והמהירות של רץ II הייתה 7.5 קמ"ש.

כעבור 20 דקות מרגע היציאה של שני הרצים,

יצא רץ III מאותו מקום ובאותו כיוון, והוא רץ במהירות קבועה.

רץ III פגש בדרך את רץ I, ושעה אחר כך הוא פגש את רץ II.

מצא כמה שעות עברו מרגע היציאה של רץ III עד לפגישתו עם רץ II.



נסמן: t = הזמן בין היציאה של III ועד למפגש עם I, v = המהירות של III.

נתון: 6 = מהירות של I ו- 7.5 = המהירות של II. שימו לב לשיפועים של הקווים.

בכל מפגש בין שתי דמויות המרחקים שעברו שווים. המפגש בין I ל-III:

$$6(t + 1/3) = vt\,,$$

והמפגש בין II ו-III:

$$7.5(1/3 + t + 1) = v(t + 1)\,.$$

מהמשוואה הראשונה נקבל ביטוי עבור v ונציב במשוואה השנייה. נקבל משוואה ריבועית ב-t:

$$1.5t^2 + 2t - 2 = 0\,,$$

שיש לה פתרון חיובי אחד $t = 2/3$.

הזמן מהיציאה של III ועד המפגש עם II הוא $t + 1 = 5/3$ שעות.

1.14 קיץ תשע"ד מועד א

משאית יצאה מעיר A, וכעבור 6 שעות מרגע יציאתה הגיעה לעיר B.

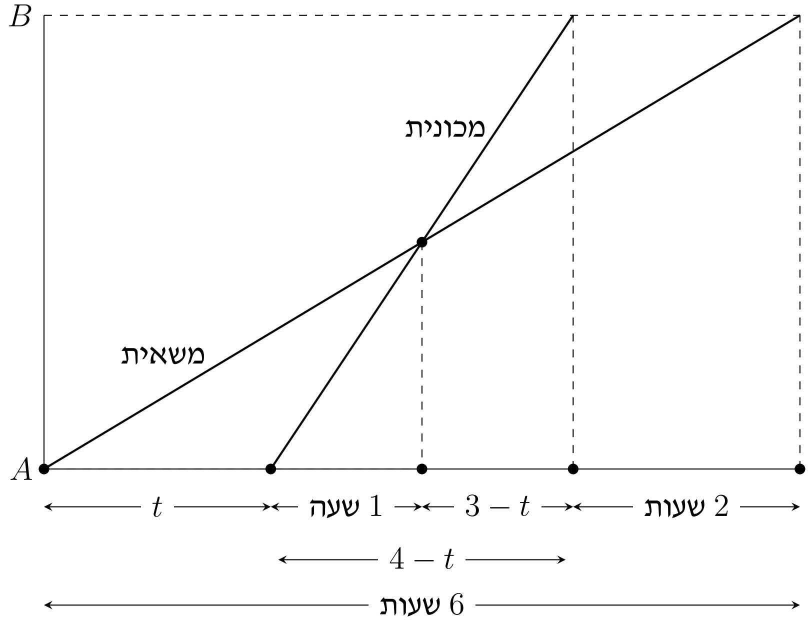
זמן מה אחרי יציאת המשאית יצאה מכונית מעיר A,

והגיעה לעיר B 2 שעות לפני המשאית.

המשאית והמכונית נפגשו כעבור שעה מרגע היציאה של המכונית.

המהירויות של המשאית ושל המכונית היו קבועות.

מצא כמה שעות אחרי רגע היציאה של המשאית יצאה המכונית (מצא את שני הפתרונות).



המפתח לפתרון הוא לסמן כל פרק זמן כפי שעשינו בתרשים.

נסמן: $t =$ זמן יציאת המכונית, $v_c =$ מהירות המכונית, $v_m =$ מהירות המשאית.

נכתוב משוואות למרחקים שווים, מ- A עד למפגש ומ- A עד ל- B:

$$\begin{aligned} v_m(t+1) &= v_c \cdot 1 \\ v_m \cdot 6 &= v_c(4-t)\,. \end{aligned}$$

משתי המשוואות מתקבלת משוואה ריבועית ב- t:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

שיש לה שני פתרונות $t = 1$ שעה ו- $t = 2$ שעות.

1.15 חורף תשע"ד

נמל A ונמל B נמצאים על אותה גדה של נהר, שכיוון הזרם שלו הוא מ־ A ל־ B .

רפסודה הפליגה בשעה 9:00 בבוקר מנמל A אל נמל B , והיא נישאה על גבי הזרם של הנהר

כך שמהירות הרפסודה היא מהירות הזרם.

באותה שעה הפליגה סירה מנמל B (נגד כיוון הזרם) לכיוון נמל A .

מהירות הסירה במים עומדים היא 15 קמ"ש.

הסירה הגיעה לנמל A , ומיד חזרה אל נמל B .

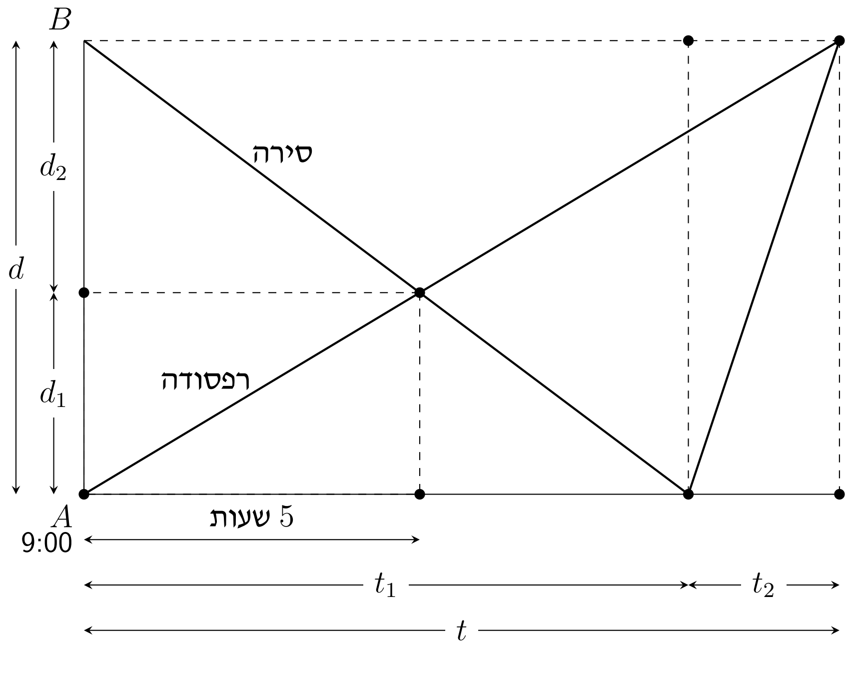
ידוע כי הרפסודה והסירה יגיעו לנמל B באותה שעה.

נתון כי הרפסודה והסירה נפגשו לראשונה כעבור 5 שעות מרגע הפלגתן.

האם הסירה והרפסודה יגיעו לנמל B עד לשעה 9:00 בערב באותו היום? נמק.

מהירות הזרם ומהירות הסירה במים עומדים הן קבועות.

<u>הערה</u>: בחישוביך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.



נסמן: d = מרחק בין שני הנמלים, d_1 = מרחק בין A למפגש, d_2 = מרחק בין B למפגש.

t = זמן עד למפגש ב-B, v = מהירות הזרם.

כאשר הסירה מפליגה מ-B ל-A ובחזרה ל-B, היא עוברת מרחק כפול מהמרחק שהרפסודה עוברת באותו פרק זמן. נשווה את משוואות התנועה:

$$\frac{d}{v} = \frac{d}{15-v} + \frac{d}{15+v} \,.$$

d מצטמצם ונקבל משוואה ריבועית במהירות הזרם v:

$$v^2 + 30v - 225 = 0 \,.$$

השורש החיובי שלה הוא $v = 6.21$.

עכשיו שאנחנו יודעים את המהירויות, והזמן עד למפגש נתון, ננסה לחשב את המרחק d, שהוא הסכום של המרחקים שעוברים הרפסודה והסירה:

$$d = 5v + 5(15-v) \,.$$

הפתרון הוא $d = 75$ (ללא תלות במהירות הזרם v).

את הזמן עד המפגש בנמל B אפשר לחשב לפי ההפלגה של הסירה או לפי ההפלגה של הרפסודה. כמובן שפשוט יותר לחשב עבור הקטע היחיד של הרפסודה:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{75}{6.21} \approx 12.08 \,.$$

בכל זאת נבדוק לפי הסירה:

$$t = \frac{d}{15-v} + \frac{d}{15+v} = \frac{75}{8.79} + \frac{75}{21.21} = 8.532 + 3.536 \approx 12.07 \,.$$

בגלל עיגול של החישובים יש הבדל קטן בין שתי התוצאות.

הסירה והרפסודה יצאו בשעה 09:00 בבוקר וההפלגות לקחו יותר מ-12 שעות, כך המפגש השני התקיים לאחר השעה 09:00 בערב.

המלצות: תנועה והספק

- בניגוד תרשימים חד-ממדיים האורך של קטע קו הוא מרחק הנסיעה, כאן מרחק הנסיעה הוא ההפרש בציר האנכי בין הנקודה ההתחלתית לנקודה הסופית. קטע הקו עצמו יהיה משופע ולכן יהיה אורך יותר ממרחק הנסיעה.

- הקושי בפתרון של הבעיות הללו נובע מהצורך לתרגם את התיאורים המילוליים למשוואת. אפשר בקלות להתבלבל כאשר מתרגמים ביטויים כגון ״לפני״, ״אחרי״, ״מהר יותר״, ״לאט יותר״. בתרשים קל ליצג את התיאורים הללו: נקודות שהן ״לפני״ ו-״אחרי״ נקודת ייחוס יוצגו שמאלה או ימינה מנקודת הייחוס בציר הזמן. קו המסמן מסלול ״מהר יותר״ יוצג עם שיפוע תלול יותר מקו המסמן מסלול ״לאט יותר״.

- מומלץ להכין תרשימים גדולים וברורים כדי שהסימנים שמוסיפים ממידע נתון או ממידע המתקבל מחישובים יהיו קריאים. לעתים, כדאי להכין תרשימים חדשים לכל סעיף כדי שמידע הנחוץ רק לסעיף אחד לא יקשה על עיון במידע הנחוץ לסעיף אחר.

- מצאתי שאפשר ״לקרוא״ את המשוואות ישירות מהתרשימים. לחילופין אפשר גם לסדר את הנתונים בטבלה כמקובל.

- נקודות מפגש נוחות מאוד לכתיבת זוג משוואות תנועה עם אותם נעלמים. הזמנים האם אותם זמנים (לפעמים בתוספת קבוע), והמרחקים שווים (אם הדמויות נוסעות בותו כיוון), או שסכום המרחקים שווה למרחק בין נקודות הקצה (כאשר הדמויות נוסעות אחת כלפי השנייה).

- פתרון המשוואות עצמן הוא בדרך כלל קל: שני משוואות עם שני נעלמים, כאשר המשוואות שיש לפתור הן לינאריות או ריבועיות.

פרק 2 סדרות

2.1 קיץ תשע"ח מועד ב

2. הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n}$, $a_1 = -\frac{1}{c}$. נתון: $c > 0$.

א. הוכח כי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות האי־זוגיים מהווים סדרה הנדסית,
וכי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים גם הם סדרה הנדסית.

ב. **(1)** רשום את 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n . הבע את תשובתך באמצעות c אם יש צורך.

(2) הבע באמצעות c את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n .

(3) הוכח שלכל n טבעי, הסכום של $2n-1$ האיברים הראשונים בסדרה a_n אינו תלוי ב־ n .

ג. הסדרה b_n מוגדרת באופן הזה: $b_n = -\frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$.

(1) הראה כי b_n היא סדרה הנדסית.

(2) מהו תחום הערכים של c שבעבורם b_n היא סדרה יורדת?

(3) נתון שהסדרה האין־סופית b_n היא סדרה יורדת.
הבע באמצעות c את סכומה.

סעיף א

כדי להוכיח שסדרה המוגדרת על ידי כלל נסיגה היא הנדסית, לא כדאי לחשב מנה של שני איברים עוקבים, כי איברים לא יצטמצמו. במקום זה, יש להציב בתוך כלל הנסיגה כדי לקבל ערך של איבר כתלות של איבר אחר:

$$a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n} = -\frac{c^{n-2}}{-\dfrac{c^{n-3}}{a_{n-1}}} = ca_{n-1}\,.$$

המנה $a_{n+1}/a_{n-1} = c$ קבועה ולא תלוי ב-n. ההוכחה נכונה עבור כל זוג של איברים שיש הפרש של שניים במקומות בסדרה, ולכן ההוכחה נכונה גם עבור מספרים זוגיים וגם עבור מספרים א-זוגיים.

סעיף ב (1)

הסדרות של הזוגיים והאי-זוגיים הן סדרות הנדסיות **נפרדות** ויש לחשב את האיברים בנפרד:

$$a_1 = -\frac{1}{c},\quad a_3 = ca_1 = -1,\quad a_5 = ca_3 = -c,\quad a_7 = ca_5 = -c^2$$
$$a_2 = -\frac{c^{1-2}}{a_1} = -\frac{c^{-1}}{-\frac{1}{c}} = 1,\quad a_4 = ca_2 = c,\quad a_6 = ca_4 = c^2\,.$$

שבעת האיברים הראשונים של הסדרה הם:

$$-\frac{1}{c}\,, 1\,, -1\,, c\,, -c\,, c^2\,, -c^2\,.$$

סעיף ב (2)

כאשר מסכמים את האיברים הם מצטמצמים פרט לאיבר הראשון, ולכן $S_7 = -\frac{1}{c}$.

סעיף ב (3)

כאשר יש מספר אי-זוגי של איברים המתחילים ממקום אי-זוגי, מספר האיברים האי-זוגיים גדול באחד ממספר האיברים הזוגיים. נבדוק דוגמה:

$$a_1\,,a_2\,,a_3\,,a_4\,,a_5\,,a_6\,,a_7\,,a_8\,,a_9\,.$$

מספר האיברים הוא 9, מהם 5 אי-זוגיים ו-4 זוגיים.

נצטרך לסכם את זוגיים והאי-זוגיים בנפרד, כי הסדרה המקורית אינה הנדסית. עבור שתי התת-סדרות, המנה הוא c, אבל האיבר הראשון שונה 1, $-\frac{1}{c}$:

$$S_{odd} + S_{even} = -\frac{1}{c}\frac{c^n - 1}{c-1} + 1 \cdot \frac{c^{n-1} - 1}{c-1} = -\frac{1}{c}\,,$$

לא תלוי ב-n.

סעיף ג (1)

כאן הסדרה נתונה על ידי נוסחה ולא כלל נסיגה, ולכן ניתן לחשב ישירות את המנה:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\dfrac{2}{a_{n+1}a_{n+2}}}{\dfrac{2}{a_n a_{n+1}}} = \frac{\dfrac{1}{a_{n+2}}}{\dfrac{1}{a_n}} = \frac{1}{\dfrac{a_{n+2}}{a_n}} = \frac{1}{c}\,.$$

סעיף ג (2)

סדרה יורדת אם $0 < q = \dfrac{1}{c} < 1$. נתון $c > 0$, ולכן הסדרה יורדת כאשר $c > 1$.

סעיף ג (3)

עבור סדרה הנדסית יורדת:

$$\begin{aligned} S_b &= \frac{b_1}{1-(1/c)} \\ &= \frac{-2}{a_1 \cdot a_2} \cdot \frac{c}{c-1} \\ &= \frac{-2}{-\dfrac{1}{c} \cdot 1} \cdot \frac{c}{c-1} = \frac{2c^2}{c-1}\,. \end{aligned}$$

2.2 קיץ תשע"ח מועד א

a_n היא סדרה הנדסית אין־סופית מתכנסת שסכומה שלילי.

a_1 הוא האיבר הראשון בסדרה, ו־ q היא מנת הסדרה.

א. לפניך ארבע טענות (IV-I) . רק אחת מהן בהכרח נכונה. ציין את מספרה ונמק.

I) $q < 0$

II) $a_1 < 0$ וגם $q < 0$

III) $a_1 < 0$

IV) $a_1 > 0$ או $q < 0$

נסמן ב־ T את סכום האיברים במקומות האי־זוגיים בסדרה a_n ,

ונסמן ב־ R את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה a_n .

p הוא פרמטר.

נתון: $T + p \cdot R = 0$.

ב. הבע את p באמצעות q .

b_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא p .

ג. האם b_n היא סדרה מתכנסת? נמק.

ד. נתון: p שלילי. הראה שלכל n טבעי $a_{n+1} > a_n$

(כלומר הראה שהסדרה a_n היא סדרה עולה).

סעיף א

השאלה יפה כי היא דורשת חשיבה, לא חישובים! נבדוק את הטענות על סדרה מוכרת:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2 \,.$$

אם נהפוך את כל הסימנים למינוס, נקבל סדרה שסכומה שלילי:

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = -2 \,.$$

ברור שהמנה עדיין חיובית:

$$\frac{-2^{-(n+1)}}{-2^{-n}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \,.$$

נעבור לסדרה כללית. סדרה הנדסית מתכנסת רק אם $|q| < 1$. מהנוסחה עבור הסכום:

$$S = \frac{a_1}{1-q} < 0 \,,$$

ניתן לראות ש-a_1 חייב להיות שלילי כי המכנה חיובי $0 < 1 - q < 2$.

אפשר לפסול מייד תשובות I, II, IV ונשאר רק תשובה III.

סעיף ב

שני תת-הסדרות הן הנדסית עם מנה זהה q^2. האיברים הראשונים הם a_1 עבור האי-זוגיים ו-$a_2 = a_1 q$ עבור הזוגיים. הסכומים הם:

$$T = \frac{a_1}{1-q^2}, \qquad R = \frac{a_1 q}{1-q^2}\,.$$

מהמשוואה הנתונה $T + pR = 0$, נקבל $\quad 1 + pq = 0 \quad$ ו- $\quad p = -\dfrac{1}{q}$.

סעיף ג

הסדרה לא מתכנסת כי $|q| < 1$ גורר $|p| > 1$.

סעיף ד

שימו לב שהשאלה שואלת על **הסדרה המקורית** a_n ולא על b_n! נתון ש-p שלילי ולכן $q = -\dfrac{1}{p}$ חיובי.

נתון שהסדרה מתכנסת ולכן $0 < q < 1$, חיובי. מצאנו בסעיף א ש-a_1 שלילי. מכפלה של מספר שלילי x עם מספר חיובי פחות מ-1 מקטינה את הערך המוחלט $|x|$ שלו. ככל השערך המחולט של מספר שליליים קטן, הערך שלו עולה. לכן, $a_{n+1} > a_n$.

נבדוק בדוגמה: אם $a_n = -6, q = \frac{1}{2}$, אז:

$$a_{n+1} = a_n q = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3 \ > \ -6 = a_n\,.$$

2.3 חורף תשע"ח

2. a_n היא סדרה חשבונית שההפרש שלה, d, שונה מ־ 0.

נתון: $a_7 = -a_{17}$.

א. מצא את a_{12}.

ב. **(1)** האם קיים בסדרה איבר שערכו שווה ל־ $-a_1$? נמק.

(2) מצא מספר טבעי n שעבורו סכום n האיברים הראשונים בסדרה שווה ל־ 0.

ג. האם קיים n טבעי שעבורו: $a_n \cdot a_{n+1} < 0$? אם כן — מצא n כזה, אם לא — נמק.

ד. האם אפשר לדעת כמה איברים שליליים יש בסדרה? נמק (הבחן בין מקרים שונים).

שאלה זו מתאפיין בהצבה של נוסחאות לאיברים מסויימים לתוך הנוסחאות הכלליות.

סעיף א

נציב $n = 7, n = 17$ במשוואה לאיבר ה-n:

$$\begin{aligned}
&a_7 = a_1 + (7-1)d = -(a_1 + (17-1)d) = -a_{17}\\
&a_1 + 11d = 0\\
&a_{12} = a_1 + 11d = 0\,.
\end{aligned}$$

סעיף ב (1)

נשווה את $-a_1$ לנוסחה לאיבר כללי:

$$-a_1 = a_n = a_1 + (n-1)d\,.$$

נציב $a_1 = -11d$ שישבנו בסעיף א:

$$-(-11d) = -11d + (n-1)d\,.$$

d מצטמצם ונקבל $n = 23$.

סעיף ב (2)

נציב $a_1 = -11d$ בנוסחה לסכום של סדרה חשבונית:

$$\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2\cdot -11d + (n-1)d) = \frac{dn}{2}(n-23) = 0\,.$$

נתון שההפרש d שונה מאפס וש-n מספר טבעי ולכן חיובי, כך שהביטוי מתאפס רק עבור $n = 23$.

סעיף ג

אם איבר חיובי וההפרש חיובי, המכפלה של שני איברים עוקבים היא חיובית, וכך גם אם שניהם שליליים. האפשרות היחידה לקבל מכפלה שלילית היא איבר שלילי והפרש חיובי או איבר חיובי והפרש שלילי:

$$\begin{aligned} a_k < 0,\ d > 0: &\quad a_{k+1} = a_k + d > 0 \\ a_k > 0,\ d < 0: &\quad a_{k+1} = a_k + d < 0\,. \end{aligned}$$

אבל ידוע שאחד האיברים בסדרה (a_{12}) הוא אפס:

$$\begin{aligned} &\ldots, a_{10} < 0, a_{11} < 0,\ a_{12} = 0,\ a_{13} > 0, a_{14} > 0, \ldots \\ &\ldots, a_{10} > 0, a_{11} > 0,\ a_{12} = 0,\ a_{13} < 0, a_{14} < 0, \ldots\,, \end{aligned}$$

ולכן המכפלה של זוג איברים עוקבים חייבת להיות חיובית או אפס.

סעיף ד

נרשום את הסדרה לפי מה שיודע לנו ש-$a_{12} = 0$:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{11},\ 0,\ -a_{11},\ \ldots,\ -a_2,\ -a_1,\ \ldots\,.$$

או ש-11 האיברים הראשונים שליליים אם ההפרש חיובי, או כל האיברים לאחר האיבר $a_{12} = 0$ שליליים אם ההפרש שלילי. הנה דוגמה עם $d = \pm 2$:

$$\begin{aligned} &-22, -20, \ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots \\ &22, 20, \ldots, 4, 2, 0, -2, -4, \ldots\,. \end{aligned}$$

2.4 קיץ תשע״ז מועד ב

2. נתונה סדרה כללית a_n.

נסמן ב־ S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n.

נתון: $S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}}$ לכל n טבעי. k הוא מספר קבוע.

א. הבע את a_1 ואת האיבר הכללי a_n עבור $1 < n$ באמצעות n ו־ k במידת הצורך.

ב. מצא את k שעבורו הסדרה a_n היא סדרה הנדסית. נמק.

נגדיר: $T = a_2{}^2 + a_5{}^2 + a_8{}^2 + \ldots$ (סכום ריבועֵי כל איבר שלישי בסדרה a_n החל ב־ a_2).

ג. חשב את T.

שאלה זו שונה משאלות אחרות כי נתון ביטוי עבור **הסכומים** ולא עבור האיברים בסדרה.

סעיף א

ניתן לחשב את האיברים על ידי שימוש בנוסחה עבור S_n. האיבר הראשון מתקבל ישירות מהנוסחה:

$$a_1 = S_1 = k - \frac{1}{3^{1+1}} = k - \frac{1}{9},$$

והאיבר הכללי מתקבל על ידי ההפרש בין הנוסחאות לסכומים עוקבים:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \left(k - \frac{1}{3^{n+1}}\right) - \left(k - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{2}{3^{n+1}}\,.$$

סעיף ב

המנה $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$ לא תלויה ב-k. במבט ראשון נראה שהתשובה היא שהסדרה היא הנדסית עבור כל ערך של k, אולם זו טעות. המנה המתקבלת מ-$\frac{a_2}{a_1}$ חייבת להיות שווה למנה המתקבלת מהמקרה הכללי $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. נחשב:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{2}{3^3}}{k - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3(9k-1)} = \frac{1}{3} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\,.$$

הפתרון היחיד הוא $k = \frac{1}{3}$.

עבור הסעיף הבא נצטרך את האיבר הראשון:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}\,.$$

סעיף ג

האיבר הראשון בסדרה החדשה הוא:

$$a'_1 = a_2^2 = (a_1 q)^2 = \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{729}\,,$$

הסדרה החדשה היא הנדסית:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_{3(k+1)-1}}{a_{3k-1}}\right)^2 &= \left(\frac{a_{3k+2}}{a_{3k-1}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{q a_{3k+1}}{a_{3k-1}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{q^2 a_{3k}}{a_{3k-1}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{q^3 a_{3k-1}}{a_{3k-1}}\right)^2 = q^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}\,.
\end{aligned}$$

הסכום מתקבל מהנוסחה לסדרה הנדסית אינסופית עבור a', q':

$$S' = \frac{a'_1}{1-q'} = \frac{\frac{4}{729}}{1-\frac{1}{729}} = \frac{1}{182}\,.$$

2.5 קיץ תשע"ז מועד א

נתונה הסדרה $a_n = \frac{(2^n+1)(2^n-1)}{2^n}$.

b_n ו־ c_n הן סדרות הנדסיות שכל איבריהן חיוביים, המקיימות לכל n טבעי: $a_n = b_n - c_n$.

נתון: $c_3 = \frac{1}{8}$, $b_6 = 64$.

א. (1) מצא את b_1 ואת המנה של הסדרה b_n .

(2) מצא את c_1 ואת המנה של הסדרה c_n .

את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n נסמן ב־ A_n ,

את סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n נסמן ב־ B_n ,

ואת סכום n האיברים הראשונים בסדרה c_n נסמן ב־ C_n .

ב. הראה ש־ $C_n = B_n - A_n$.

ג. עבור אילו ערכי n מתקיים האי־שוויון: $0.9 < B_n - A_n < 1$?

הנוסחה ל-a_n אינה כלל נסיגה כי איברים של הסדרה לא מופיעים בצד הימני של המשוואה. נתון שהסדרות b_n, c_n הנדסיות אך לא נתון אם הסדרה המקורית a_n הנדסית או לא.

סעיף א $(1,2)$

נתון ש-$a_n = b_n - c_n$, לכן כדי לקבל ערך של איבר בסדרה b_n, נצטרך לחשב את הערכים a_n, c_n, ובאופן דומה עבור איברים בסדרה c_n. נתון שני ערכים b_6, c_3 וקל לחשב איברים ב-a_n כי הם נתונים כפונקציה של n בלבד:

$$a_6 = \frac{(2^6+1)(2^6-1)}{2^6} = \frac{65 \cdot 63}{64} \qquad a_3 = \frac{(2^3+1)(2^3-1)}{2^3} = \frac{63}{8}$$

$$c_6 = b_6 - a_6 = 64 - \frac{65 \cdot 63}{64} = \frac{1}{64}\,. \qquad b_3 = a_3 + c_3 = \frac{63}{8} + \frac{1}{8} = 8$$

כדי לחשב את המנה של b_n והמנה של c_n נשתמש בנתון שהן סדרות הנדסיות. את האיבר הששי של הסדרות נקבל מהאיבר השלישי על ידי הכפלתו במנה לחזקה שלוש:

$$b_3 = b_1 q_b^2, \quad b_1 = \frac{b_3}{q_b^2} = \frac{8}{4} = 2 \qquad b_6 = b_3 q_b^3, \quad q_b = \sqrt[3]{\frac{b_6}{b_3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$c_3 = c_1 q_c^2 \quad c_1 = \frac{c_3}{q_c^2} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}\,. \qquad c_6 = c_3 q_c^3, \quad q_c = \sqrt[3]{\frac{c_6}{c_3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

סעיף ב

הטיעון נובע מחוקי הקיבוץ והחילוף של מספרים שלמים:

$$\begin{aligned} C_n &= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n) \\ &= (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= B_n - A_n \,. \end{aligned}$$

סעיף ג

הוכחנו ש-$C_n = B_n - A_n$, ונתונה שהסדרה c_n הנדסית. מסעיף א $c_1 = \frac{1}{2}$, $q_c = \frac{1}{2}$, ולכן:

$$C_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = 1 - 2^{-n} \,.$$

בדיקה במחשבון מראה ש:

$$0.9 \not< 1 - 2^{-3} = 0.875 < 1$$

$$0.9 < 1 - 2^{-4} = 0.938 < 1 \,.$$

לא לעצור כאן! השאלה מבקשת את **כל הערכים** של n המקיימים את האי-שוויון, ולכן התשובה המליאה היא כל מספר גדול או שווה ל-4, כי כאשר n גדל מעל ל-4, הערך של $1 - 2^{-n}$ עולה (ולכן גדול מ-0.9) אבל תמיד פחות מ-1.

2.6 חורף תשע״ז

נתונה סדרה a_n המקיימת את כלל הנסיגה: $a_{n+1} = \frac{a_n}{4 \cdot a_n + 3}$, $a_1 = -1$.

נגדיר סדרה חדשה b_n : $b_n = \frac{1}{a_n} + 2$.

א. הוכח כי b_n היא סדרה הנדסית.

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$.

ג. נתון: n הוא מספר זוגי.

הבע באמצעות n את הסכום: $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$.

סעיף א

נחשב את המנה על ידי הצבה עבור b_n לפי ההגדרה, ואחר כך הצבה עבור a_{n+1} לפי כלל הנסיגה. נקבל מנה קבועה ולכן הסדרה הנדסית:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + 2}{\frac{1}{a_n} + 2} = \frac{\frac{4a_n + 3}{a_n} + 2}{\frac{1}{a_n} + 2} = \frac{3(2a_n + 1)}{2a_n + 1} = 3 .$$

סעיף ב

לא נתון שהסדרה a_n הנדסית, אבל בסעיף א הוכחנו שהסדרה b_n הנדסית, ולכן ניתן לבטא את סכום הסדרה $\frac{1}{a_n}$ כסכום של הסדרה b_n על ידי ההצבה $\frac{1}{a_i} = b_i - 2$:

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} = (b_1 - 2) + \cdots + (b_n - 2) = b_1 + \cdots + b_n - 2n .$$

נתון ש $a_1 = -1$, כך ש-$b_1 = \frac{1}{a_1} + 2 = 1$ ובסעיף א חישבנו $q_b = 3$. סכום הסדרה של $\frac{1}{a_n}$ הוא:

$$b_1 + \cdots + b_n - 2n = \frac{1(3^n - 1)}{3 - 1} - 2n = \frac{3^n - 4n - 1}{2} .$$

סעיף ג

לפי ההגדרה של b_n נוכל לבטא את הסכום כך:

$$(b_1 - 2) - (b_2 - 2) + \cdots + (b_{n-1} - 2) - (b_n - 2) .$$

נתון שמספר האיברים זוגי ולכן סכום הקבועים מתאפס. המנה של הסדרה היא -3 והסכום הוא:

$$b_1 - b_2 + \cdots + b_{n-1} - b_n = \frac{1((-3)^n - 1)}{-3 - 1} = \frac{(-3)^n - 1}{-4} = \frac{1 - 3^n}{4} ,$$

כי מספר האיברים זוגי ולכן $(-3)^n = 3^n$.

2.7 קיץ תשע"ו מועד ב

2. נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים. הפרש הסדרה הנתונה הוא 3 ,

א. בין כל שני איברים עוקבים הכניסו איבר אחד נוסף, ונוצרה סדרה חשבונית חדשה.

(1) הראה כי היחס בין סכום האיברים בסדרה החדשה לסכום האיברים בסדרה הנתונה הוא $\frac{2n-1}{n}$.

(2) נתון כי היחס שמופיע בתת־סעיף (1) שווה ל־ 1.9 .

סכום של כל האיברים שהכניסו לסדרה הנתונה הוא 130.5 .

מצא את האיבר הראשון בסדרה הנתונה.

ב. יוצרים סדרה חשבונית נוספת על ידי הכנסת k איברים בין כל שני איברים עוקבים של הסדרה הנתונה. הבע באמצעות k את הפרש הסדרה המתקבלת.

סעיף א (1)

מספר האיברים החדשים הוא $n-1$, כפי שרואים אם רושמים את הסדרה:

$$a_1,\ a_1',\ a_2,\ a_2',\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_{n-1}',\ a_n\,.$$

נתון שהסדרה החדשה גם היא חשבונית. הפרש הסדרה אינו מספר שלם אלא 1.5! אז מה? נחשב את היחס בין סכומי הסדרות, כאשר האיבר a_1 מצטמצם:

$$\frac{S_{new}}{S_{old}}=\frac{\frac{2n-1}{2}(2a_1+1.5((2n-1)-1))}{\frac{n}{2}(2a_1+3(n-1))}=\frac{\frac{2n-1}{2}(2a_1+3(n-1))}{\frac{n}{2}(2a_1+3(n-1))}=\frac{2n-1}{n}\,.$$

סעיף א (2)

מ-$1.9=\frac{2n-1}{n}$ נקבל $n=10$. אם הסדרה הנתונה חשבונית וגם הסדרה החדשה חשבונית, סדרת האיברים החדשים היא חשבונית עם אותו הפרש כמו בסדרה המקורית, 3. האיבר הראשון של האיברים החדשים הוא $a_1'=a_1+1.5$, ונתון סכום האיברים החדשים:

$$\frac{10-1}{2}(2(a_1+1.5)+((10-1)-1)\cdot 3)=130.5\,,$$

והפתרון הוא $a_1=1$.

סעיף ב

נתון שהסדרה המתקבלת לאחר הכנסת k איברים חדשים בין איברים סמוכים של הסדרה הנתונה:

$$a_i,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_k,\ a_{i+1}$$

היא חשבונית. ההפרשים בין האיברים החדשים חייבים להיות שווים וסכומם שווה להפרש של הסדרה הנתונה שהוא 3. יש $k+1$ הפרשים שערכם $\frac{3}{k+1}$.

2.8 קיץ תשע"ו מועד א

2. נתונה סדרה חשבונית a_n המקיימת: $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

א. מצא את הסכום של 19 האיברים הראשונים בסדרה a_n .

הסדרה S_n היא סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה a_n : S_1 , S_2 , S_3 , ...

נתון כי $S_n = n \cdot a_n$ לכל n טבעי.

ב. הראה כי הפרש הסדרה a_n הוא 0.

ג. היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את a_1 .

נתונה סדרה b_n המקיימת את הכלל: $b_{n+1} - b_n = a_n + S_n$ לכל n טבעי.

ד. היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את הסכום

$(b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \dots + (b_{20} - b_{19})$.

סעיף א

האיברים a_4, a_8, a_{12}, a_{16} מהווים סדרה חשבועית עם הפרש d^4. נתון הסכום של הסדרה:

$$\begin{aligned}(a_1+3d)+(a_1+7d)+(a_1+11d)+(a_1+15d) &= 224\\ a_1+9d &= 56\,.\end{aligned}$$

יש לנו משוואה אחת עם שני נעלמים. לא נתייאש וננסה בכל זאת לחשב את הסכום S_{19}:

$$S_{19} = \frac{19}{2}(2a_1+18d) = 19(a_1+9d) = 19\cdot 56 = 1064\,.$$

סעיף ב

נשווה את המשוואה הנתונה $S_n = n\cdot a_n$ לנוסחה עבור סכום של סדרה חשבונית:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d) = n\cdot a_n = n(a_1+(n-1)d)\,.$$

נפשט את המשוואה ונקבל $d = d/2$ שהפתרון היחיד שלה הוא $d=0$.

סעיף ג

נציב 0 עבור d: $a_1+9d = a_1+0 = 56$.

סעיף ד

במבט ראשון נראה שכדאי לצמצם את סכום הסדרה ל-$b_{20}-b_1$, אבל זה מבוי סתום כי אין לנו דרך לחשב את איברי הסדרה b_n. במקום זה נחשב את $(b_{i+1}-b_i)$ וניעזר במשוואה הנתונה:

$$b_{i+1}-b_i = a_i+S_i = (a_1+(i-1)\cdot 0) + \frac{i}{2}(2a_1+(i-1)\cdot 0) = a_1(1+i)\,.$$

הסכום הוא:

$$a_1(2+3+\cdots+20) = 56\cdot\frac{19}{2}(2\cdot 2+(19-1)\cdot 1) = 11704\,.$$

2.9 חורף תשע"ו

2. נתונה סדרה הנדסית עולה: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots\ ,\ a_n\ ,\ \dots$

ההפרש בין האיבר הרביעי בסדרה לאיבר השלישי גדול פי 4

מההפרש בין האיבר השני לאיבר הראשון.

האיבר השישי בסדרה גדול ב־ 31 מהאיבר הראשון.

א. מצא את מנת הסדרה, ואת האיבר הראשון בסדרה.

ב. מהסדרה הנתונה בנו שתי סדרות חדשות, I ו־ II:

$$\text{I.}\quad a_1\cdot a_2\ ,\ a_2\cdot a_3\ ,\ a_3\cdot a_4\ ,\ \dots\ ,\ a_n\cdot a_{n+1}\ ,\ a_{n+1}\cdot a_{n+2}$$

$$\text{II.}\quad \frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}\ ,\ \frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_3}\ ,\ \frac{a_4}{a_3}+\frac{a_5}{a_4}\ ,\ \dots ,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

(1) האם כל אחת מהסדרות החדשות היא סדרה הנדסית עולה? נמק.

הסכום של כל האיברים בסדרה I הוא 2730.

(2) מצא את מספר האיברים בסדרה I.

(3) מצא את הסכום של כל האיברים בסדרה II.

סעיף א

נתון:

$$(1)\ a_4-a_3=4(a_2-a_1),\qquad (2)\ a_6-a_1=31\,.$$

נציב $a_n=a_1q^{n-1}$ עבור a_2,a_3,a_4 ב-(1), ונקבל שלוש תשובות $q=1,q=2,q=-2$.
נתון שהסדרה **עולה** ולכן $q=2$. נציב $a_1q^5=32a_1$ עבור a_6 ב-(2), ונקבל $a_1=1$.

סעיף ב (1)

עבור סדרה I:

$$q_I=\frac{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{a_n\,q^2}{a_n}=q^2=4\,,$$

והסדרה היא סדרה הנדסית עולה. עבור סדרה II:

$$q_{II}=\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right)\Big/\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}+\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\frac{q+q}{q+q}=1\,.$$

הסדרה הנדסית אבל **לא עולה**.

סעיף ב (2)

מסכום הסדרה ניתן לחשב את מספר האיברים בסדרה:

$$\begin{aligned}
a_1\cdot a_2+\cdots+a_{n+1}\cdot a_{n+2} &= 2730\\
(1\cdot 2)\cdot\frac{4^{n+1}-1}{4-1} &= 2730\\
4^{n+1} &= 4096\\
n &= 5\,.
\end{aligned}$$

שימו לב! אמנם $n=5$ אבל מספר האיברים בסדרה I הוא $n+1=6$:

$$(1)\, a_1\cdot a_2,\quad (2)\, a_2\cdot a_3,\quad (3)\, a_3\cdot a_4,\quad (4)\, a_4\cdot a_5,\quad (5)\, a_5\cdot a_6,\quad (6)\, a_6\cdot a_7\ (=a_{n+1}\cdot a_{n+2})\,.$$

סעיף ב (2)

חישבנו $q_{II}=1$. נחשב את a_1^{II}:

$$a_1^{II}=\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}=\frac{2}{1}+\frac{4}{2}=4\,.$$

שימו לב! מספר האיברים בסדרה II הוא 5:

$$(1)\,\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2},\quad (2)\,\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_3},\quad (3)\,\frac{a_4}{a_3}+\frac{a_5}{a_4},\quad (4)\,\frac{a_5}{a_4}+\frac{a_6}{a_5},\quad (5)\,\frac{a_6}{a_5}+\frac{a_7}{a_6}\left(=\frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right)\,.$$

ולכן סכום האיברים הוא:

$$(a_1^{II})+(a_1^{II}\cdot 1^1)+(a_1^{II}\cdot 1^2)+(a_1^{II}\cdot 1^3)+(a_1^{II}\cdot 1^4)=5a_1^{II}=20\,.$$

2.10 קיץ תשע"ה, מועד ב

2. נתונה סדרה b_n המקיימת את הכלל $b_{n+1} = \frac{1}{2^n \cdot b_n}$

א. הוכח כי האיברים העומדים במקומות האי־זוגיים בסדרה מהווים סדרה הנדסית,

וגם האיברים העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה הנדסית.

ב. סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה b_n שווה ל- $3\frac{7}{16}$.

מצא את b_1 (מצא את שתי האפשרויות).

סעיף א

החילוק של איברים במרחק שני מקומות אחד מהשני לא תלוי בזוגיות:

$$\frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{1}{2^{n+1}b_{n+1}} \cdot \frac{1}{b_n} = \frac{1}{2^{n+1} \cdot \frac{1}{2^n b_n} b_n} = \frac{1}{2} .$$

סעיף ב

לא נתון שהסדרה b_n הנדסית, ולכן יש לחשב בנפרד את הסכום של ארבעת האיברים הזוגיים וארבעת האיברים האי-זוגיים:

$$\begin{aligned} S_{odd} &= b_1 + b_3 + b_5 + b_7 = b_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{15}{8} b_1 \\ S_{even} &= b_2 + b_4 + b_6 + b_8 = b_2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{15}{8} b_2 = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{2^1 b_1} . \end{aligned}$$

מ:

$$S_{odd} + S_{even} = \frac{15}{8}\left(b_1 + \frac{1}{2b_1}\right) = 3\frac{7}{16} = \frac{55}{16} ,$$

נקבל משוואה ריבועית $6b_1^2 - 11b_1 + 3 = 0$ שיש לה שני פתרונות $b_1 = \frac{3}{2}, \frac{1}{3}$.

2.11 קיץ תשע"ה מועד א

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית יורדת שכל איבריה חיוביים: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ , \dots , a_n\ , \dots$.
כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו, אחד לפניו ואחד אחריו.

א. מצא את המנה של הסדרה a_n .

ב. נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

(1) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.

(2) סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא $20{,}460$.
מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

סעיף א

נתון:

$$a_n = \frac{2}{5}(a_{n-1} + a_{n+1}) = \frac{2}{5}\left(\frac{a_n}{q} + qa_n\right)$$

עבור $n \geq 2$. a_n מצטמצם ונקבל משוואה ריבועית $2q^2 - 5q + 2 = 0$ שיש לה שני פתרונות $q = \frac{1}{2}, q = 2$. נתון שהסדרה יורדת ולכן $q = \frac{1}{2}$.

סעיף ב (1)

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\dfrac{a_{n+2}}{(a_{n+1})^2}}{\dfrac{(a_n)^2}{a_{n+1}}} = \frac{a_{n+2}}{(a_{n+1})^2} \cdot \frac{(a_n)^2}{a_{n+1}} = \frac{a_n q^2}{(a_n q)^2} \cdot \frac{(a_n)^2}{a_n q} = \frac{1}{q} = 2\,.$$

סעיף ב (2)

מ:

$$S_{10} = \frac{b_1(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 20460$$

מתקבל $b_1 = 20$. השאלה מבקשת את סכום **הסדרה המקורית** a_n. כבר חישבנו את המנה שלה $q = \frac{1}{2}$, וניתן לחשב את האיבר הראשון מהנוסחה עבור b_n:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_2}{a_1^2} = \frac{a_1 q}{(a_1)^2} = \frac{1}{2a_1} \\ a_1 &= \frac{1}{2b_1} = \frac{1}{40} \\ S_a &= \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{40\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{20}\,. \end{aligned}$$

2.12 חורף תשע"ה

2. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל:

$$a_1 = 4$$
$$a_n + a_{n+1} = 4n + 2$$

א. אם בסדרה יש 100 איברים, מצא את הסכום של שני האיברים העומדים במקומות האמצעיים בסדרה.

ב. הוכח כי איברי הסדרה העומדים במקומות אי־זוגיים מהווים סדרה חשבונית, וגם איברי הסדרה העומדים במקומות זוגיים מהווים סדרה חשבונית.

אם בסדרה יש 101 איברים, מצא:

ג. את האיבר העומד באמצע הסדרה.

ד. את הסכום של כל איברי הסדרה.

שימו לב שלא נתון שהסדרה a_n חשבונית.

סעיף א

כדאי לרשום את איברי הסדרה כדי לוודא מהם האיברים האמצעיים:

$$\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_{49}, a_{50}}^{50}, \overbrace{a_{51}, a_{52}, \ldots, a_{100}}^{50} .$$

ניתן לחשב את הסכום מהגדרת הסדרה:

$$a_{50} + a_{51} = 4 \cdot 50 + 2 = 202 .$$

סעיף ב

במבט ראשון השאלה נראית בעייתית כי נתונה נוסחה לחישוב איברים סמוכים זה לזה $a_n + a_{n+1}$, אבל האיברים הזוגיים נמצאים במרחק שני מקומות זה מזה וכך גם האיברים האי-זוגיים $a_{n+2} - a_n$. חבל שאין לנו $a_{n+1} - a_n$ ו-$a_{n+2} - a_{n+1}$. צמד הביטויים האלה יכול לרמוז ל-"טריק" ידוע במתמטיקה: אם נוסיף ונחסיר את אותו ערך לביטוי, ערך הביטוי לא משתנה:

$$\begin{aligned} a_{k+2} - a_k &= a_{k+2} + (a_{k+1} - a_{k+1}) - a_k \\ &= (a_{k+2} + a_{k+1}) - (a_{k+1} + a_k) \\ &= (4(k+1) + 2) - (4k + 2) \\ &= 4 . \end{aligned}$$

ההפרש קבוע ולא תלוי בזוגיות, ולכן הזוגיים והאי-זוגיים מהווים סדרות חשבוניות.

סעיף ג

לא ידוע שהסדרה a_n חשבונית, אבל a_{51} הוא איבר בסדרת **האי-זוגיים**. נרשום את הסדרה כדי לדייק בספירת האיברים הזוגיים והאי-זוגיים:

$$\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_{49}, a_{50}}^{50}, a_{51}, \overbrace{a_{52}, \ldots, a_{100}, a_{101}}^{50} .$$

ברור שמספר האיברים האי-זוגיים גדול באחד ממספר האיברים הזוגיים, 51 אי-זוגיים ו-50 זוגיים. a_{51} הוא האיבר ה-25 העומד באמצע סדרת האי-זוגיים. האיבר הראשון של סדרת האי-זוגיים נתון, $a_1 = 4$, ואת ההפרש $d = 4$ חישבנו בסעיף הקודם. מכאן:

$$a_{51} = a_1 + 25d = 4 + 25 \cdot 4 = 104 .$$

סעיף ד

נחשב את סכום הסדרה כחיבור של סכום האי-זוגיים וסכום הזוגיים. $a_1 = 4$ נתון, ואת a_2 ניתן לחשב לפי הנוסחה הנתונה $a_n + a_{n+1} = 4n + 2$ שהיא $a_{n+1} = (4n+2) - a_n$:

$$a_2 = a_{1+1} = (4 \cdot 1 + 2) - a_1 = 2 .$$

כבר חישבנו שהפרשים של שתי תת-הסדרות הם 4. מספר האי-זוגיים הוא 51 ומספר הזוגיים הוא 50. הסכום הוא:

$$S = S_{odd} + S_{even} = \frac{51}{2}(2 \cdot 4 + 50 \cdot 4) + \frac{50}{2}(2 \cdot 2 + 49 \cdot 4) = 5304 + 5000 = 10304 .$$

2.13 קיץ תשע"ד מועד ב

2. נתונה סדרה חשבונית: a_1 , a_2 , a_3 , ...

שלושה איברים עוקבים בסדרה, a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , מקיימים:

$a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$

$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$

א. מצא את האיבר a_n .

ב. לקחו חלק מהאיברים בסדרה הנתונה ובנו סדרה חשבונית חדשה:

a_5 , a_9 , a_{13} , ... , a_{4k+1}

סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 450 .

האיבר הראשון בסדרה ה<u>נתונה בפתיח</u> הוא $a_1 = -21$.

מצא את הערך של k .

סעיף א

הסדרה חשבונית ולכן ניתן להציב בתוך המשוואות הנתונות ולקבל שתי משוואות עם שני נעלמים:

$$
\begin{aligned}
(a_n+2d)^2 - a_n^2 &= 216 \\
4a_nd + 4d^2 &= 216 \\
a_n + (a_n+d) + (a_n+2d) &= 54 \\
3a_n + 3d &= 54\,.
\end{aligned}
$$

הפתרון הוא $d = 3, a_n = 15$.

סעיף ב

הסדרה החדשה חשבונית שאיבריה הם $a'_1, a'_2, \ldots$:

$$\overbrace{a_5 = a_1 + 4d}^{a'_1}, \quad a_6 = a_5 + 5d, \quad a_7 = a_5 + 6d, \quad a_8 = a_5 + 7d, \quad \overbrace{a_9 = a_5 + 8d}^{a'_2}\,.$$

בסדרה החדשה $d' = 4d = 12$ ו-$a'_1 = a_5 = -21 + 4d = -9$. מסכום הסדרה החדשה:

$$\frac{k}{2}(2a'_1 + (k-1)d') = \frac{k}{2}(-18 + (k-1)\cdot 12) = 450,$$

מתקבלת משוואה ריבועית $2k^2 - 5k - 150 = 0$ שהשורש החיובי שלה הוא $k = 10$.

2.14 קיץ תשע"ד מועד א

2. בסדרה חשבונית יש 3n איברים.

סכום n האיברים האחרונים גדול פי 2 מסכום n האיברים הקודמים להם.

א. הוכח שסכום n האיברים הראשונים הוא 0.

ב. נתון גם שסכום האיברים החמישי והשביעי הוא 0.

סכום כל איברי הסדרה הוא 726.

מצא את הפרש הסדרה.

סעיף א

כדי לדייק עם המקומות של האיברים כדאי לרשום את הסדרה עם סימון של הסדרות החלקיות:

$$\underbrace{\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}^{S_1}, \overbrace{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n}}^{S_2}, \overbrace{a_{2n+1}, a_{2n+2}, \ldots, a_{3n}}^{S_3}}_{S_{3n}} .$$

נתון $S_3 = 2S_2$:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2}(2(a_1+2nd)+(n-1)d) &= 2\cdot\frac{n}{2}(2(a_1+nd)+(n-1)d)\\
2a_1+(5n-1)d &= 4a_1+(6n-2)d\\
2a_1+(n-1)d &= 0\,.
\end{aligned}$$

הביטוי בצד השמאלי של המשוואה האחרונה הוא הסכום S_1.

דרך אחרת לפתור את הבעיה היא להחסיר את סכום התת-הסדרות מסכום הסדרה כולה:

$$\begin{aligned}
S_1 &= S_{3n}-(S_2+S_3) = S_{3n}-(S_2+2S_2) = S_{3n}-3S_2\\
&= \frac{3n}{2}(2a_1+(3n-1)d) - 3\cdot\frac{n}{2}(2(a_1+nd)+(n-1)d)\\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

בבחינה של חורף תשע״ב אורך הסדרה הוא $2n-1$, ונתונים הסכומים של n האיברים הראשונים ו-n האיברים האחרונים. רק רישום זהיר של הסדרה יבהיר שיש חפיפה בין שתי תת-הסדרות:

$$\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}^{n}\!\!\!\underbrace{, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n-1}}_{n}\,.$$

בדוגמה קל יותר לשים לב לחפיפה. עם $n=4$:

$$\overbrace{a_1, a_2, a_3, a_4}^{4}\!\!\!\underbrace{, a_5, a_6, a_7}_{4}\,.$$

סעיף ב

נתון שסכום הסדרה ועלינו למצוא d למרות שאין לנו a_1. נבדוק אם הנתון השני יכול לעזור:

$$a_5 + a_7 = (a_1 + 4d) + (a_1 + 6d) = 0\,.$$

מכאן ש-$a_1 = -5d$.

בסעיף א חישבנו ש-$S_1 = 0$ ונציב עבור a_1:

$$\frac{n}{2}(-10d + (n-1)d) = 0\,.$$

אם $d = 0$, מהנתון $a_5 + a_7 = 0$ אפשר להסיק שכל איברי הסדרה הם אפס. זה סותר את הנתון שהסכום חיובי. לכן אפשר לחלק את המשוואה ב-d ונקבל $n = 11$.

נציב עבור a_1, n בנוסחה ל-S_{3n}:

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{3n}{2}(2a_1 + (3n-1)d)\\
&= \frac{33}{2}(-10d + (33-1)d)\\
&= \frac{33}{2}\cdot 22d = 363d = 726\,,
\end{aligned}$$

ונקבל $d = 2$.

2.15 חורף תשע"ד

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית יורדת: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ a_4\ ,\ \ldots$

סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 6 .

מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה,

ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה: $a_1\ ,\ -a_2\ ,\ a_3\ ,\ -a_4\ ,\ \ldots$

סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא -3 .

מהאיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית: $\frac{1}{a_2}\ ,\ \frac{1}{a_3}\ ,\ \frac{1}{a_4}\ ,\ \ldots$

א. הוכח כי הסדרה השלישית היא סדרה הנדסית.

ב. נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה השלישית הוא 273.25 .

מצא את n .

סעיף א

המנה של הסדרה השלישית קבועה כי נתון שהסדרה הראשונה הנדסית:

$$\frac{1/a_{n+1}}{1/a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}}\,.$$

סעיף ב

נשתמש בשני הסכומים הנתונים כדי לכתוב שתי משוואות עם שני נעלמים:

$$\begin{aligned}\frac{a_2}{1-q} &= 6\\ \frac{-a_2}{1-(-q)} &= -3\,.\end{aligned}$$

הפתרון הוא $q=\frac{1}{3}$ ו־$a_2=4$.

בסדרה השלישית, האיבר הראשון הוא $\frac{1}{4}=\frac{1}{a_2}$ וההפרש הוא $3=\frac{1}{d}$. מהסכום השלישי ונקבל:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\cdot\frac{3^n-1}{3-1} &= 273.25\\ 3^n &= 2187\\ n &= 7\,,\end{aligned}$$

כאשר בדקנו חזקות של 3 עד שהתקבל 2187.

המלצות

- **חובה לקרוא את השאלות בזהירות רבה.** בבחינה של קיץ תשע״ה א, סעיף ב שואלת על סדרה חדשה b_n, אבל בסוף חוזרת ומבקשת למצוא את הסכום של הסדרה הנתונה a_n.

- ברוב השאלות נתונה סדרה ומוגדרת סדרה חדשה המובססת על הסדרה הנתונה. **אין בהכרח קשר** בין תכונה של הסדרה המקורית והסדרה החדשה. להלן שתי סדרות חשבוניות, אבל כאשר משלבים את שתיהן, מתקבלת סדרה שאיננה חשבונית:

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \ldots$$

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \ldots$$

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14,\ \ldots$$

- כאשר מבקשים להוכיח שתת-סדרת הזוגיים חשבונית או הנדסית וגם תת-סדרת האי-זוגיים, הוכחה אחת תספיק כי אם $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}$ קבוע, לא משנה אם n זוגי או אי-זוגי.

- כדאי לרשום את איברי הסדרה כדי לדייק במקומות של האיברים:

$$\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_{49}, a_{50}}^{50}, \overbrace{a_{51}, a_{52}, \ldots, a_{100}}^{50}$$

$$\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_{49}, a_{50}}_{50}, a_{51}, \underbrace{a_{52}, \ldots, a_{100}, a_{101}}_{50}\ .$$

- מקרה מעניין הוא תת-סדרות חופפות (בחינה של חורף תשע״ב שלא נמצאת במסמך זה):

$$\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}^{n}, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n-1}$$

(בדפוס: סוגר תחתון $\underbrace{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n-1}}_{n}$)

- קיימות שתי דרכים לסכם מספר תת-סדרות. דרך אחת היא לסכם כל תת-סדרה בנפרד עם ערכי ה-a_1, d או n, q שלהן. זה קורה לעתים קרובות כאשר השאלה מבקשת לחשב סכום של סדרה, אבל ידוע רק שתת-הסדרות חשבוניות או הנדסיות, למשל, זוגיים ואי-זוגיים.

- דרך אחרת היא לחבר את הסכומים של תת-סדרות ולהחסיר את התוצאה מסכום הסדרה כולה:

$$S_1 = S_n - (S_2 + S_3)\ .$$

- הבחינה של חורף תשע״ו מעניינת כי מספר האיברים הוא לא הערך של המספר n המופיע בשאלה. חשוב לרשום דוגמה מספרית כדי לוודא מהו מספר האיברים:

$$(1)\ a_1 \cdot a_2,\quad (2)\ a_2 \cdot a_3,\quad \cdots\quad (5)\ a_5 \cdot a_6 = (a_n \cdot a_{n+1}),\quad (6)\ a_6 \cdot a_7\ (= a_{n+1} \cdot a_{n+2})\ .$$

- טריק שימושי הוא לחבר ולהחסיר את אותו ערך בביטוי:

$$a_{k+2} - a_k = a_{k+2} + (a_{k+1} - a_{k+1}) - a_k = (a_{k+2} + a_{k+1}) - (a_{k+1} + a_k)\,.$$

- הכנסת איברים חדשים בתוך סדרה לא בהכרח שומרת על הסדרה כחשבונית או הנדסית. השורה הראשונה להלן היא סדרה חשבונית. בשורה השנייה הוכנסו איברים של סדרה חשבונית נוספת והסדרה החדשה היא חשבונית. בשורה השלישית הוכנסו איברים של סדרה חשבונית נוספת והסדרה החדשה איננה חשבונית.

$$1,\quad 5,\quad 9,\quad 13,\quad 17$$

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad 9,\quad 11,\quad 13,\quad 15,\quad 17$$

$$1,\quad 2,\quad 5,\quad 6,\quad 9,\quad 10,\quad 13,\quad 14,\quad 17$$

- בחישוב הפרש או מנה, כדאי להציב עבור a_{n+1} או a_{n-1} ביטוי שיש בו a_n כדי לקבל משוואה עם נעלם אחד:

$$a_n = \frac{2}{5}(a_{n-1} + a_{n+1}) = \frac{2}{5}\left(\frac{a_n}{q} + qa_n\right)\,.$$

a_n מצטמצם ונקבל משוואה ריבועית ב-q.

פרק 3 הסתברות

3.1 קיץ תשע"ח מועד ב

במבחן רב־ברירה ("אמריקני") יש 5 שאלות.

לכל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.

התלמידים צריכים לסמן תשובה אחת מבין 4 התשובות המוצגות.

תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאלה מקבל 20 נקודות לשאלה זו.

תלמיד שמסמן תשובה לא נכונה על השאלה אינו מקבל נקודות לשאלה.

כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכול.

א. על 2 מן השאלות ידע שחר בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בשאר השאלות הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.

(1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

(2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?

ב. על 2 מן השאלות ידע דניאל בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בוודאות שתשובה אחת, מבין 4 התשובות המוצגות, אינה נכונה,

ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

ג. על 3 מן השאלות ידעה הדס בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימנה אותן.

בכל אחת משתי השאלות האחרות היא ידעה בוודאות ש־ k מבין 4 התשובות המוצגות אינן נכונות, וסימנה

באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיוק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות שהיא תצבור 100 נקודות במבחן.

מצא את k . נמק.

שאלה זו מאוד ארוכה אבל לא קשה במיוחד, כי ניתן לפתור אותה באמצעות נוסחת ברנולי בלבד.

סעיף א (1)

שחר ידע שהוא ענה נכון על שתי שאלות ולכן כדי לקבל ציון 60 עליו לענות על **בדיוק אחת** משלושת השאלות האחרות:

$$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}\,.$$

סעיף א (2)

כדי לעבור את המבחן עליו לצבור **לפחות** שלוש תשובות נכונות. להסתברות מהסעיף הקודם יש להוסיף את ההסבתרויות של ארבע וחמש תשובות נכונות:

$$\frac{27}{64}+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1+\binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{37}{64}\,.$$

סעיף ב

דניאל צריך לענות נכון על שאלה אחת **בדיוק** מתוך שלושת השאלות הנותרות. דניאל ידע שתשובה אחת לא נכונה, לכן ההסתברות שהוא ענה נכון על השאלה היא $\frac{1}{3}$ ולא $\frac{1}{4}$ כמו בסעיף הקודם:

$$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}\,.$$

סעיף ג

אם הדס ידעה ש-k מתוך 4 תשובות לא נכונות, ההסתברות שהיא ענתה תשובה נכונה היא $\frac{1}{4-k}$, וההסתברות שהיא ענתה תשובה לא נכונה היא המשלים ל-1:

$$1-\frac{1}{4-k} = \frac{4-k-1}{4-k}\,.$$

כדי לקבל ציון **בדיוק** 100 הדס צריכה לבחור תשובות נכונות לשתי השאלות הנותרות. כדי לקבל ציון **בדיוק** 60 עליה לבחר תשובות לא נכונות לשתי השאלות הנותרות.

אין צורך להשתמש בנוסחת ברנולי במלואו, כי כאשר מחשבים את ההסתברות של "הכל" או "אף אחד", $\binom{n}{k}=1$, וגם $(1-p)^0=1$ או $p^0=1$, ולכן, מספיק לחשב את ההסתברות של האירוע לחזקת מספר השאלות:

$$\left(\frac{1}{4-k}\right)^2 = \left(\frac{4-k-1}{4-k}\right)^2\,.$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית $k^2-6k+8=0$ שהפתרונות שלה הם $k=2, k=4$. הפרמטר k מוגדר כמספר התשובות שהדס יודעת שהן **אינן** נכונות, ונתון (בשורה השנייה של השאלה) שתשובה אחת נכונה, כך שיש לפסול את הפתרון $k=4$ ולבחור $k=2$.

3.2 קיץ תשע"ח מועד א

בעיר גדולה נערך מבחן לכל תלמידי התיכון.

37% מן התלמידים שניגשו למבחן נעזרו בחבריהם כדי להתכונן למבחן. $\frac{35}{37}$ מהם עברו את המבחן.

מספר התלמידים שלא נעזרו בחבריהם ולא עברו את המבחן קטן פי 5 ממספר התלמידים שנעזרו בחבריהם ועברו את המבחן.

א. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן, והתברר שהוא לא עבר את המבחן. מהי ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?

ב. יעל והדס ניגשו למבחן. ידוע שיעל נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן, והדס לא נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן. האם ההסתברות שיעל עברה את המבחן גבוהה מההסתברות שהדס עברה את המבחן? נמק.

ג. בחרו באקראי 6 תלמידים שניגשו למבחן.

מהי ההסתברות שבדיוק שליש מהם לא נעזרו בחבריהם ועברו את המבחן?

ד. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן. מהי ההסתברות שהוא מקיים לפחות אחת משתי הטענות I-II :

I) התלמיד נעזר בחבריו.

II) התלמיד לא עבר את המבחן.

לפני שניגש לפתור את השאלות בסעיפים, נמלא את טבלת ההסתברויות לפי המידע הנתון.

נסמן ב-N את התלמידים שנעזרו בחבריהם, וב-A את התלמידים שעברו את המבחן.

די ברור שאם 37% נעזרו בחבריהם ו-35 מהם עבור אז $P(N\cap A)=0.35$, אבל בכל זאת נחשב בצורה פרומלית. נתון ש-$P(N)=0.37$. **מהם** עברו את הבחינה $\frac{35}{37}$, כך שערך זה הוא ההסתברות המותנית $P(A/N)$. נחשב:

$$\begin{aligned} P(A/N) &= \frac{P(N\cap A)}{P(N)} = \frac{P(N\cap A)}{0.37} = \frac{35}{37} \\ P(N\cap A) &= 0.35\,. \end{aligned}$$

עד כאן טבלת ההסתברויות היא:

	$\boldsymbol{A}$	$\overline{\boldsymbol{A}}$	
$\boldsymbol{N}$	0.35	0.02	0.37
$\overline{\boldsymbol{N}}$			0.63
			1.0

בהמשך נתון ש:

$$P(\overline{N}\cap\overline{A})=\frac{P(N\cap A)}{5}=\frac{0.35}{5}=0.07\,,$$

וניתן להשלים את הטבלה:

	$\overline{A}$	A	
0.37	0.02	0.35	N
0.63	0.07	0.56	$\overline{N}$
1.0	0.09	0.91	

סעיף א

הניסוח "**בחרו** . . . **תלמיד** . . . **שלא עבר את המבחן. מה ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?**" מכוון להסתברות מותנית:

$$P(N/\overline{A})=\frac{P(N\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{0.02}{0.09}=\frac{2}{9}\,.$$

סעיף ב

הניסוח "**ידוע ש**" מכוון להסתברות מותנית.

עבור יעל ההסתברות המותנית היא:

$$P(A/N)=\frac{P(A\cap N)}{P(N)}=\frac{0.35}{0.37}=0.9459\,,$$

ועבור הדס ההסתברות המותנית היא:

$$P(A/\overline{N})=\frac{P(A\cap\overline{N})}{P(\overline{N})}=\frac{0.56}{0.63}=0.8889\,.$$

ליעל הסתברות גבוהה יותר לעבור את המבחן.

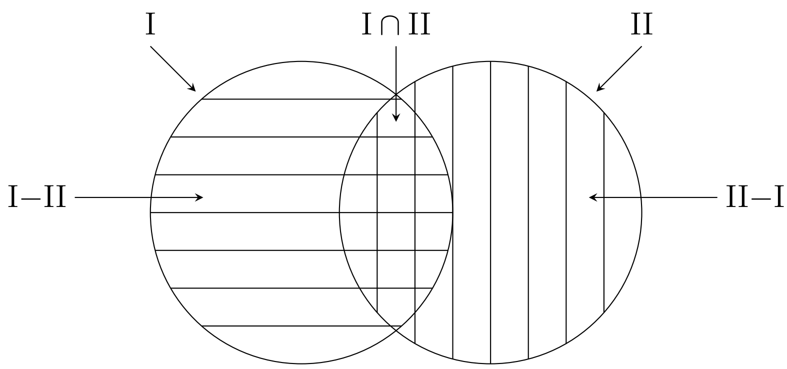
סעיף ג

שליש של שש הוא שניים. (שימו לב שלא לקרוא "שלושה" במקום "שליש"!) החישוב הוא לפי נוסחת ברנולי כאשר הערך $P(\overline{N}\cap A)=0.56$ נמצא בטבלה:

$$\binom{6}{2}(0.56)^2(1-0.56)^4=0.1763\,.$$

סעיף ד

הניסוח "**לפחות אחת**" משתי הטענות I, II אומר שהאירוע קורה אם קורה אחד מהאירועים I, II **או שניהם**. בתרשים להלן שני העגולים המייצגים את שני האירועים I, II והאירוע "לפחות אחת" מיוצג על ידי כל השטח המקווקו:



יש שתי דרכים לחשב את ההסתברות. בדרך הראשונה אנו לוקחים את סכום ההסתברויות של שני האירועים, ומחסירים את ההסתברות של האירוע המשותף כי ספרנו אותו פעמיים, פעם כחלק מהאירוע I ופעם כחלק מהאירוע II:

$$P(\mathrm{I} \cup \mathrm{II}) = P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) - P(\mathrm{I} \cap \mathrm{II})\,.$$

בדרך השניה אנו סופרים כל חלק מהאירוע השותף בנפרד, כאשר הסימון $A-B$ הוא כל האיברים בקבוצה A שאינם בקבוצה B:

$$P(\mathrm{I} \cup \mathrm{II}) = P(\mathrm{I}\ -\ \mathrm{II}) + P(\mathrm{II}\ -\ \mathrm{I}) + P(\mathrm{I} \cap \mathrm{II})\,.$$

את ההסתברויות לחישוב ניקח מהטבלה. הדרך הראשונה מופיעה מימין והדרך השניה משמאל:

	$\overline{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{A}$	
0.37	0.02	0.35	$\boldsymbol{N}$
0.63	0.07	0.56	$\overline{\boldsymbol{N}}$
1.0	0.09	0.91	

	$\overline{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{A}$	
0.37	0.02	0.35	$\boldsymbol{N}$
0.63	0.07	0.56	$\overline{\boldsymbol{N}}$
1.0	0.09	0.91	

בשתי הדרכים מקבלים אותה תוצאה:

$$\begin{aligned} P(N \cup \overline{A}) &= P(N) + P(\overline{A}) - P(N \cap \overline{A}) = 0.37 + 0.09 - 0.02 = 0.44 \\ P(N \cup \overline{A}) &= P(N - \overline{A}) + P(\overline{A} - N) + P(N \cap \overline{A}) = 0.35 + 0.07 + 0.02 = 0.44\,. \end{aligned}$$

3.3 חורף תשע״ח

למיכל יש קובייה מאוזנת. על שלוש מפאות הקובייה שלה כתוב המספר 2 , ועל שלוש הפאות האחרות כתוב המספר 4 .

לגלית יש קובייה מאוזנת אחרת. על כל אחת מפאות הקובייה של גלית כתוב אחד מן המספרים: 1 או 3 .

מיכל וגלית משחקות משחק בן חמישה סיבובים. המשתתפת שתנצח במספר סיבובים רב יותר מחברתה, תנצח במשחק. בכל סיבוב של המשחק כל אחת מהן מטילה את הקובייה שלה פעם אחת.

המנצחת בסיבוב היא השחקנית שהמספר שהתקבל על הקובייה שלה גבוה יותר.

נתון שבסיבוב יחיד הסיכוי של מיכל לנצח את גלית הוא $\frac{7}{12}$.

א. על כמה פאות בקובייה של גלית כתוב המספר 1 ? נמק את תשובתך.

ב. מהו הסיכוי שגלית תנצח במשחק?

ג. מהו הסיכוי של גלית לנצח במשחק, אם ידוע שהיא ניצחה בסיבוב הראשון?

סעיף א

נסמן ב-n את המספר הפאות של הקוביה של גלית שכתוב עליהן 1.

מיכל תנצח אם היא מטילה 4 (הסתברות $\frac{3}{6}$), לא משנה מה גלית מטילה (הסתברות 1), או אם היא מטילה 2 (הסתברות $\frac{3}{6}$), וגלית מטילה 1 (הסתברות $\frac{n}{6}$):

$$\frac{3}{6}\cdot 1+\frac{3}{6}\cdot\frac{n}{6}=\frac{7}{12}\,,$$

והפתרון הוא $n=1$.

סעיף ב

גלית תנצח אם היא תנצח ב-$3,4,5$ סיבובים. ההסתברות לניצחון בכל סיבוב היא $1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$:

$$\binom{5}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{7}{12}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\frac{5}{12}\right)^4\left(\frac{7}{12}\right)^1+\binom{5}{5}\left(\frac{5}{12}\right)^5\left(\frac{7}{12}\right)^0=0.3466\,.$$

סעיף ג

הניסוח **אם ידוע** מכוון להסתברות מותנית:

$$P(\text{גלית תנצח}/\text{גלית ניצחה בסיבוב הראשון})=\frac{P(\text{גלית תנצח}\cap\text{גלית ניצחה בסיבוב הראשון})}{P(\text{גלית ניצחה בסיבוב הראשון})}\,.$$

ההסתברות במונה: כדי שגלית תנצח במשחק וגם בסיבוב הראשון, היא חייבת לנצח בסיבוב הראשון וגם ב-2 או 3 או 4 מהסיבובים הנותרים:

$$\frac{5}{12}\left[\binom{4}{4}\left(\frac{5}{12}\right)^4\left(\frac{7}{12}\right)^0+\binom{4}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{7}{12}\right)^1+\binom{4}{2}\left(\frac{5}{12}\right)^2\left(\frac{7}{12}\right)^2\right]=\frac{5}{12}\cdot 0.5534\,.$$

ההסתברות במכנה היא $\frac{5}{12}$ ולכן התשובה היא 0.5534.

3.4 קיץ תשע״ז מועד ב

בקופסה I יש 10 כדורים, כמה מהם כחולים והשאר אדומים,

ובקופסה II יש 7 כדורים כחולים ו־ 3 כדורים אדומים.

מוציאים באקראי כדור מקופסה I . אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II .

אם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I .

שוב מוציאים באקראי כדור מקופסה I , ושוב, אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II ,

ואם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I .

לאחר מכן מוציאים באקראי כדור אחד מקופסה II .

א. נתון כי ההסתברות שאחרי שתי ההוצאות מקופסה I יועבר כדור אדום אחד בלבד מקופסה I לקופסה II היא $\frac{19}{36}$.

חשב את מספר הכדורים הכחולים שהיו בקופסה I לפני ההוצאה הראשונה.

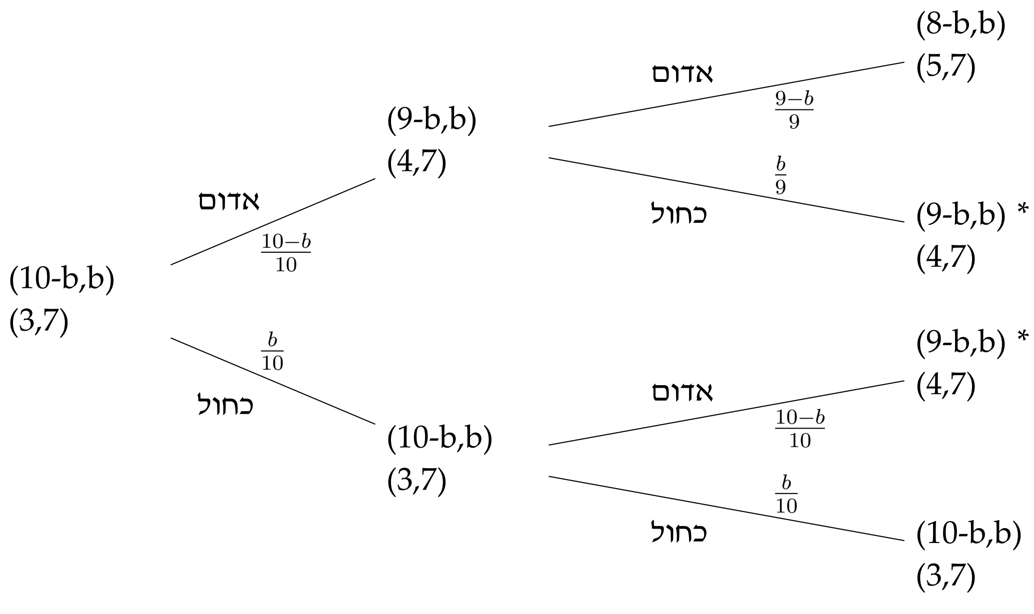
ענה על הסעיפים ב-ג עבור מספר הכדורים הכחולים שחישבת בסעיף א.

ב. מהי ההסתברות שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום?

ג. ידוע שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום.

מהי ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II נשארו בה שלושה כדורים אדומים בדיוק?

הניסוח ״מוציאים באקראי . . . **ולאחר מכן** שוב מוציאים באקראי״ מכוונן לשימוש בעץ. נסמן ב-b את מספר הכדורים הכחולים בקופסה I. בתרשים, בכל צומת רשום שני זוגות של מספרים: מספר הכדורים האדומים ומספר הכדורים הכחולים בקופסה I, ומתחתיו מספר הכדורים האדומים ומספר הכדורים הכחולים בקופסה II.



סעיף א

הכוכביות מסמנות את שתי האפשרויות בהן הוצאנו כדור אדום אחד בדיוק מקופסה I. נשווה את הסתברות הנתונה לסכום ההסתברויות של שני המסלולים:

$$\frac{10-b}{10}\cdot\frac{b}{9}+\frac{b}{10}\cdot\frac{10-b}{10}=\frac{19}{36}\,.$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית $b^2-10b+25=0$ שיש לה פתרון אחד $b=5$.

סעיף ב

בתרשים רשום מספר הכדורים האדומים מתוך כל הכדורים בקופסה II. מלמעלה למטה:

$$\frac{5}{5+7}=\frac{5}{12},\;\frac{4}{4+7}=\frac{4}{11},\;\frac{4}{4+7}=\frac{4}{11},\;\frac{3}{3+7}=\frac{3}{10}\,.$$

את ההסתברויות להגיע לכל אחד מהמצבים נקבל לאחר הצבת $b=5$. נסכם את ההסתברויות להוציא כדור אדום מקופסה II:

$$\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\right)\left(\frac{5}{12}\right)+\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{11}\right)+$$
$$\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\right)\left(\frac{4}{11}\right)+\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)=0.3595\,.$$

סעיף ג

הניסוח "**ידוע ש-**" מכוון להסתברות מותנית:

$$P(\text{נשארו שלושה אדומים בקופסה II}/\text{הוציאו כדור אדום מקופסה II})=$$

$$\frac{P(\text{נשארו שלושה אדומים בקופסה II}\cap\text{הוציאו כדור אדום מקופסה II})}{P(\text{הוציאו כדור אדום מקופסה II})}$$

נשארו שלושה כדורים אדומים רק אם היו אברעה כדורים אדומים לפני הבחירה. ההסתברות במונה היא $\frac{19}{36}$, ההסתברות (הנתונה!) שנגיע לאחד המצבים המסומנים בכוכבית, כפול ההסתברות לבחור אדום מקופסה II, 4 מתוך 11 כדורים. חישבנו את ההסתברות במכנה בסעיף ב:

$$\frac{\frac{19}{36}\cdot\frac{4}{11}}{0.3595}=0.53385\,.$$

3.5 קיץ תשע"ז מועד א

בבית אבות גדול יש לכמה מן הדיירים קלנועית, ולשאר אין.

אם בוחרים באקראי 9 דיירים מבית האבות הזה, ההסתברות שלְ־ 4 מהם בדיוק יש קלנועית גדולה פי 24 מן ההסתברות שלְ־ 6 מהם בדיוק יש קלנועית.

א. מהי ההסתברות שלדייר שנבחר באקראי יש קלנועית?

ב. בוחרים באקראי 6 דיירים מבית האבות. ידוע שלפחות ל־ 3 מהם יש קלנועית. מהי ההסתברות שלְ־ 4 מהם בדיוק יש קלנועית?

ג. בוחרים באקראי דיירים מבית האבות, בזה אחר זה, עד שלְ־ 3 מהם בדיוק יש קלנועית. מהי ההסתברות שייבָּחרו בדרך זו בדיוק 6 דיירים?

סעיף א

נסמן ב-D את האירוע "לדייר יש קלנועית" ואת ההסתברות שלו ב-p. לפי נוסחת ברנולי:

$$\binom{9}{4}p^4(1-p)^5 = 24\binom{9}{6}p^6(1-p)^3 \,.$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית:

$$15p^2 + 2p - 1 = 0 \,,$$

הפתרון החיובי היחיד הוא $p = \frac{1}{5} = 0.2$.

סעיף ב

הניסוח "**ידוע ש-**" מכוון להסתברות מותנית:

$$P(D = 4/D \geq 3) = \frac{P(D = 4 \cap D \geq 3)}{P(D \geq 3)} \,.$$

כאשר יש חפיפה בין שני ביטויים בחיתוך אפשר לפשט אותו: ברור שאם ערך גדול או שווה 3 **וגם** שווה ל-4 אז הוא שווה ל-4:

$$P(D = 4/D \geq 3) = \frac{P(D = 4)}{P(D \geq 3)} \,.$$

לפי נוסחת ברנולי:

$$P(D = 4) = \binom{6}{4}0.2^4(1-0.2)^2 = 0.01536 \,.$$

את המונה $P(D \geq 3)$ אפשר לחשב בשתי דרכים, בצורה ישירה:

$$\binom{6}{3}0.2^3(1-0.2)^3 + \binom{6}{4}0.2^4(1-0.2)^2 + \binom{6}{5}0.2^5(1-0.2)^1 + \binom{6}{6}0.2^6(1-0.2)^0 = 0.099 \,,$$

או כאחד פחות המשלים:

$$1-0.2^0(1-0.2)^6-\binom{6}{1}0.2^1(1-0.2)^5-\binom{6}{2}0.2^2(1-0.2)^4=0.099\,,$$

כמובן שכדאי לבחור את האפשרות השנייה כי יש פחות גורמים לחשב.

התשובה לשאלה היא:

$$P(D=4/D\geq 3)=\frac{P(D=4)}{P(D\geq 3)}=\frac{0.01536}{0.099}=0.15534\,.$$

סעיף ג

המשמעות של "**עד ש**" היא שהבחירה **האחרונה** תהיה "הצלחה" ויהיו שתי "הצלחות" בחמשת הבחירות הקודמות:

$$\overbrace{\pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \pm}^{2/5}\qquad\overbrace{+}^{1/1}\,.$$

התשובה מתקבלת מנוסחת ברנולי לבחירות הראשונות כפול ההסתברות p לבחירה האחרונה:

$$\left[\binom{5}{2}0.2^2(1-.02)^3\right]\cdot 0.2=0.04096\,.$$

3.6 חורף תשע"ז

אביגיל משתתפת במשחק של זריקת חִצים למטרה.

הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד הוא P $(P>0)$, ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים.

כל משתתף זורק 5 זריקות רצופות.

הסיכוי של אביגיל לפגוע במטרה בארבע זריקות מתוך החמש גדול פי 3 מן הסיכוי שלה לפגוע בה בכל חמש הזריקות.

א. מצא את P.

משתתף מנצח במשחק אם מתוך 5 זריקות רצופות, מספר הפגיעות שלו במטרה גדול ממספר ההחטאות שלו (יכול להיות יותר ממנצח אחד במשחק).

ב. מהי ההסתברות שאביגיל תנצח במשחק?

ג. (1) אם אביגיל תחטיא את המטרה בזריקה השנייה, מהי ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

(2) גם תמר משתתפת בַּמשחק, וגם הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד שווה ל- P ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים. תמר החטיאה בזריקה הראשונה.

מה ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

סעיף א

נכתוב משאווה עם נוסחת ברנולי לפי המידע הנתון:

$$\binom{5}{4}p^4(1-p)^1 = 3\binom{5}{5}p^5(1-p)^0 .$$

הגורם p^4 מצטמצם והפתרון הוא $p=\frac{5}{8}$.

סעיף ב

אביגיל תנצח אם היא פוגעת ב-3 או 4 או 5 זריקות. ההסתברות היא:

$$\binom{5}{3}p^3(1-p)^2+\binom{5}{4}p^4(1-p)^1+\binom{5}{5}p^5(1-p)^0.$$

נציב $p=\frac{5}{8}$ ונקבל 0.7248.

סעיף ג (1)

לדעתי, ניסוח השאלה לא ברור. אני פירשתי אותה כך: מה ההסתברות של **האירוע** "אביגיל מחטיאה בזריקה השנייה ופוגעת בשלוש או ארבע מהזריקות האחרות"? כותב הבחינה התכוון להסתברות מותנית: "**אם ידוע ש-**אביגיל החטיאה בזריקה השנייה, מה ההסתברות שהיא פוגעת בשלוש או ארבע מהזריקות האחרות"? הנוסחה היא:

$$P(\text{אביגיל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות } 1,3,4,5 / \text{אביגיל החטיאה בזריקה השניה}) =$$

$$\frac{P(\text{אביגיל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות } 1,3,4,5 \cap \text{אביגיל החטיאה בזריקה השניה})}{P(\text{אביגיל החטיאה בזריקה השניה})}\,.$$

אפשר לפתור את הבעיה בשתי דרכים. נתחיל עם הדרך הפשוטה יותר. נתון שהסיכוי לפגוע במטרה אינו תלוי בניסיונות הקודמים, ולכן ההסתברויות בלתי תלויות והחישוב מצטמצם:

$$\frac{P(\text{אביגיל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות } 1,3,4,5) \cdot P(\text{אביגיל החטיאה בזריקה השניה})}{P(\text{אביגיל החטיאה בזריקה השניה})} =$$

$$P(\text{אביגיל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות } 1,3,4,5)\,.$$

לפי נוסחת ברנולי:

$$\binom{4}{4}\left(\frac{5}{8}\right)^4\left(\frac{3}{6}\right)^0 + \binom{4}{3}\left(\frac{5}{8}\right)^3\left(\frac{3}{8}\right)^1 = 0.5188\,.$$

הדרך השנייה ארוכה יותר אבל מעניינת. האירוע של החיתוך בנוסחה להסתברות מותנית מורכבת משני אירועים:)א(לא משנה מה יצאה מהזריקה הראשונה, הזריקה השניה החטיאה, ושלושת הזריקות האחרונות פגעו.)ב(הזריקה הראשונה פגעה, הזריקה השניה החטיאה, ושתיים מתוך שלושת הזריקות האחרונות פגעו. הסתברות של האירוע המשותף היא:

$$1 \cdot \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3 \quad + \quad \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \left[\binom{3}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^2 \frac{3}{8}\right] = 0.1945\,.$$

נחלק ב-$\frac{3}{8}$, ההסתברות האביגיל החטיאה בזריקה השנייה, ונקבל 0.5188.

סעיף ג (2)

לא משנה איזו זריקה החטיאה, הזריקות בלתי תלויות וחישוב ההסתברות של "תמר פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות $2,3,4,5$" נותן אותה תוצאה כמו האירוע "אביגיל פגעה בשלוש או ארבע מהזריקות $1,3,4,5$".

3.7 קיץ תשע"ו מועד ב

שחמט הוא משחק בין שני שחקנים שיכול להסתיים בניצחון של אחד מהם או בתיקו.

יעל ואנה משחקות זו מול זו בטורניר שחמט בשני סבבים.

ההסתברות של כל אחת מן השחקניות לנצח במשחק בודד היא קבועה בכל הטורניר.

א. בסבב הראשון יש 4 משחקים. ההסתברות שיעל תנצח ב־ 2 משחקים או ב־ 3 משחקים גדולה פי 10 מן ההסתברות שיעל תנצח ב־ 4 משחקים.
חשב את ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד.

בסבב השני יש 2 משחקים.

ההסתברות שתוצאת הסבב השני תהיה שוויון — היא 0.34 .

ב. מהי ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד?

ג. חשב את ההסתברות שאנה תנצח במשחק השני, אם ידוע שתוצאת סבב זה היא שוויון.

נסמן: $y =$ ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד, $a =$ ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד.

סעיף א

לפי המידע הנתון ונוסחת ברנולי:

$$\binom{4}{2}y^2(1-y)^2+\binom{4}{3}y^3(1-y)=10\cdot\binom{4}{4}y^4(1-y)^0\,.$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית $4y^2+4y-3=0$ שהשורש החיובי שלה היא $y=\frac{1}{2}=0.5$.

סעיף ב

האפשרויות לקבל שוויון הן: (א) ניצחון אחד לאנה וליעל, או (ב) תיקו בשני המשחקים. ההסתברות לתיקו היא המשלים לסכום ההסתברויות שאחת מהן תנצח:

$$\binom{2}{1}ya+(1-(y+a))^2=0.34\,.$$

נציב $y=0.5$ ונקבל $a=0.3$.

סעיף ג

הניסוח "**אם ידוע ש-**" מכוונן להסתברות מותנית:

$$=P(\text{אנה תנצח במשחק השני}/\text{תוצאת הסבב השני היא שוויון})$$

$$\frac{P(\text{תוצאת הסבב השני היא שוויון} \cap \text{אנה תנצח במשחק השני})}{P(\text{תוצאת הסבב השני היא שוויון})}\,.$$

ההסתברות לשיוון בסבב השני נתונה. אם אנה תנצח במשחק השני, יהיה שוויון רק אם גם יעל תנצח במשחק הראשון:

$$\frac{ya}{.34}=\frac{0.5\cdot 0.3}{.34}=0.4412\,.$$

שימו לב שלא צריכים $\binom{2}{1}$ כי האירוע הוא שאנה תנצח במשחק **השני** ויעל תנצח במשחק **הראשון**.

3.8 קיץ תשע"ו מועד א

במבחן כניסה למכללה 20% מן הנבחנים היו מקיבוצים.

40% היו ממושבים ו־ 40% היו מערים.

70% מן הנבחנים הצליחו במבחן.

$\frac{1}{8}$ מן הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו במבחן.

ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מעיר וגם הצליח במבחן, גדולה פי 2.5 מן ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מקיבוץ וגם הצליח במבחן.

א. מבין הנבחנים שנכשלו במבחן, מהי ההסתברות לבחור באקראי נבחן שלא היה מעיר?

ב. (1) משה הצליח במבחן.

מהי ההסתברות שהוא לא היה ממושב?

(2) חמישה נבחנים הצליחו במבחן.

מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם היה ממושב?

נסמן S = נבחנים שהצליחו, K = נבחנים מקיבוצים, M = נבחנים ממושבים, E = נבחנים מערים.
ההסתברויות הנתונות הן:

$$P(K)=0.20,\ P(M)=0.40,\ P(E)=0.40,\ P(S)=0.70\,.$$

נתון:

$$P(\overline{S}/M)=P(\overline{S}\cap M)/P(M)=\frac{1}{8}\,,$$

ולכן:

$$P(\overline{S}\cap M)=P(\overline{S}/M)\cdot P(M)=\frac{1}{8}\cdot 0.40=0.05\,.$$

סיכום ביניים:

	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{K}$	
0.70		0.35		$\boldsymbol{S}$
0.30		0.05		$\overline{\boldsymbol{S}}$
1.0	0.40	0.40	0.20	

הנתון האחרון הוא: $P(E\cap S)=2.5\cdot P(K\cap S)$.

נסכם את ההסתברויות להצלחה של נבחנים מהמושב, הקיבוץ והעיר:

$$P(S)=0.70=P(K\cap S)+0.35+2.5\cdot P(K\cap S)\,.$$

נקבל $P(K\cap S)=0.1$ ולפי היחס הנתון $P(E\cap S)=0.25$.

נסכם את המידע בטבלה:

	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{K}$	
0.70	0.25	0.35	0.10	$\boldsymbol{S}$
0.30	0.15	0.05	0.10	$\overline{\boldsymbol{S}}$
1.0	0.40	0.40	0.20	

שימו לב שהניסוח "$\frac{1}{8}$ **מן** הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו" מכוון להסתברות מותנית, לעומת הניסוח "ההסתברות לבחור באקראי **מבין כל** הנבחנים נבחן שהיה מהעיר **וגם** הצליח במבחן" מכוון לחיתוך הסתברויות, כי ההסתברות לבחור אחד "מכל הנבחנים" היא 1:

$$P(E \cap S/\text{כל הנבחנים}) = \frac{(P(E \cap S) \cap \text{כל הנבחנים})}{P(\text{כל הנבחנים})} = \frac{P(E \cap S)}{1} = P(E \cap S)\,.$$

סעיף א

לפי הנוסחה להסתברות מותנית (וההנחה שאף נבחן לא בא גם מקיבוץ וגם ממושב):

$$P(\overline{E}/\overline{S}) = P((K \cup M)/\overline{S}) = \frac{P(K \cap \overline{S}) + P(M \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{0.10 + 0.05}{0.30} = \frac{1}{2}\,.$$

סעיף ב (1)

לפי הנוסחה להסתברות מותנית (וההנחה שאף נבחן לא בא גם מקיבוץ וגם מעיר):

$$P(\overline{M}/S) = P((K \cup E)/S) = \frac{P(K \cap S) + P(E \cap S)}{P(S)} = \frac{0.10 + 0.25}{0.70} = \frac{1}{2}\,.$$

סעיף ב (2)

"לפחות אחד ממושב" הוא המשלים ל-"כולם לא מהמושב":

$$1 - P(\overline{M}/S)^5 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{31}{32}\,.$$

3.9 חורף תשע"ו

במכונת מזל אפשר לזכות ב־ 50 שקל, ב־ 100 שקל או לא לזכות כלל.

דן משחק 5 משחקים במכונה זו.

ההסתברות שדן יזכה ב־ 50 שקל בדיוק פעמיים שווה להסתברות

שהוא יזכה ב־ 50 שקל בדיוק פעם אחת.

(ההסתברות לזכות ב־ 50 שקל שונה מאפס.)

ההסתברות שדן <u>לא</u> יזכה באף משחק היא $\frac{1}{32}$.

א. מהי ההסתברות שדן יזכה ב־ 50 שקל במשחק בודד?

ב. מהי ההסתברות שדן יזכה ב־ 100 שקל במשחק בודד?

ג. ידוע כי לאחר שדן שיחק שני משחקים הוא זכה סך הכול ב־ 100 שקל בדיוק.

מהי ההסתברות שהוא <u>לא</u> זכה ב־ 50 שקל באף אחד משני המשחקים?

נסמן $P(n) =$ ההסתברות שדן זכה ב-n שקלים.

סעיף א

ההסתברות שדן לא יזכה באף אחד מחמישת המשחקים היא $P(0)^5$. נתון שערך זה הוא $\frac{1}{32}$, ולכן $P(0) = \frac{1}{2}$. לפי המידע הנתון:

$$\begin{aligned}\binom{5}{2}P(50)^2(1-P(50))^3 &= \binom{5}{1}P(50)(1-P(50))^4\\ P(50) &= \frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

סעיף ב

לפי ההסתברות המשלימה: $P(100) = 1 - P(0) - P(50) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

סעיף ג

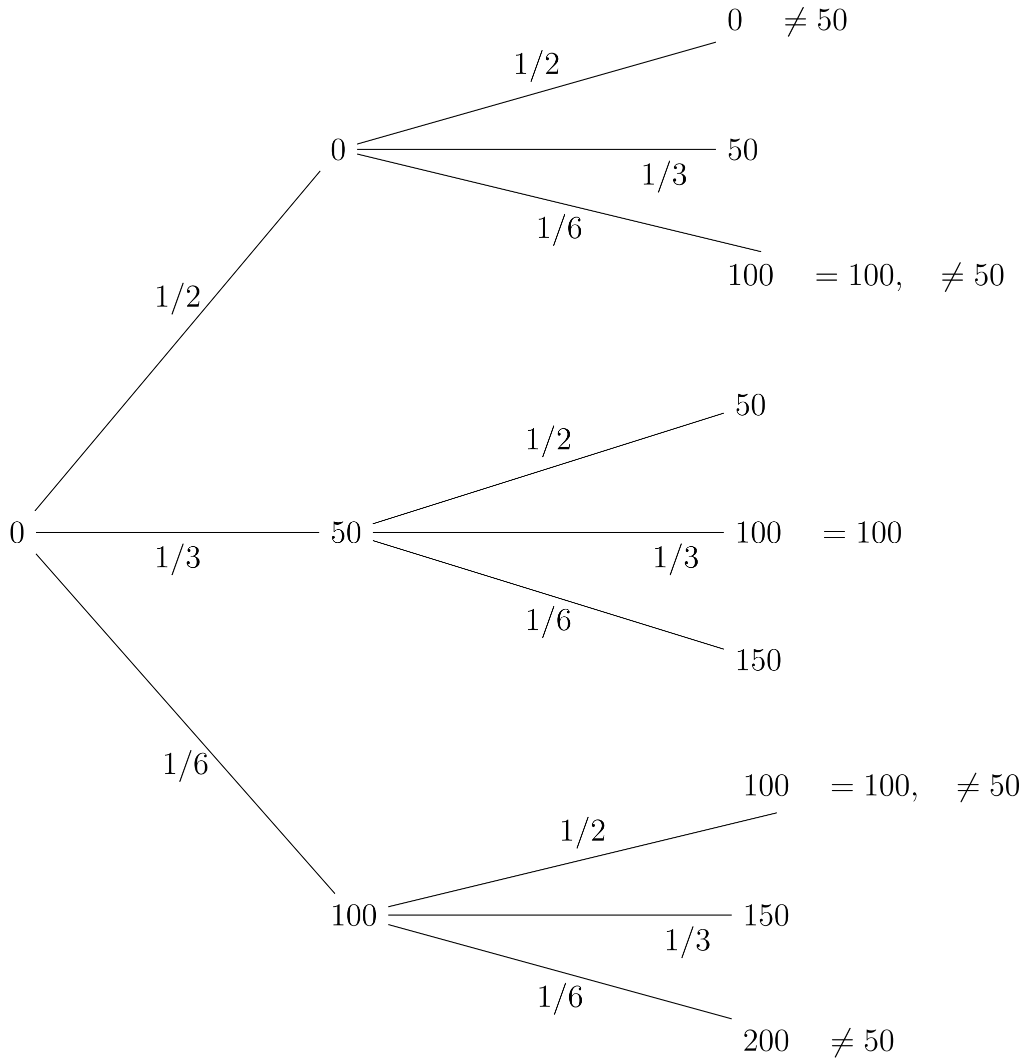
הניסוח "**ידוע כי**" מכוון להסתברות מותנית:

$$P(\text{זכה ב-100 בשני משחקים}/\text{לא זכה ב-50 באף משחק}) =$$

$$\frac{P(\text{זכה ב-100 בשני משחקים} \cap \text{לא זכה ב-50 באף משחק})}{P(\text{זכה ב-100 בשני משחקים})}\,.$$

לא כתוב במפורש אבל נניח שהמשחקים בלתי תלויים, ונבנה עץ (מופיע בעמוד הבא) שמציג את תוצאות שני המשחקים. סימנו את המסלולים בהם דן זכה ב-100 והמסלולים בהם דן לא זכה ב-50 באף אחד משני המשחקים. חישוב ההסתברות המותנית נותן:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}\,.$$


0
1/2
1/3
1/6
0
50
100
1/2
1/3
1/6
1/2
1/3
1/6
1/2
1/3
1/6
0 ≠ 50
50
100 = 100, ≠ 50
50
100 = 100
150
100 = 100, ≠ 50
150
200 ≠ 50

3.10 קיץ תשע"ה מועד ב

חוקר עורך מחקר על הרגלי האכילה של סטודנטים באוניברסיטה גדולה במשך יום לימודים.

חלק מהסטודנטים מביאים תמיד אוכל מהבית, והשאר אינם מביאים אוכל מהבית.

כל הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית אוכלים אותו במשך היום ואינם אוכלים בקפטריה.

הסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אוכלים בקפטריה או אינם אוכלים במשך היום.

א. נמצא כי אם בוחרים באקראי 4 סטודנטים, ההסתברות שבדיוק 2 מהם מביאים אוכל מהבית גדולה פי 6 מההסתברות שבדיוק 1 מהם מביא אוכל מהבית.

(1) מהו אחוז הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית?

(2) החוקר בחר באקראי 8 סטודנטים באוניברסיטה. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם מביא אוכל מהבית, אבל לא כולם?

ב. נמצא כי 60% מהסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אינם אוכלים במשך היום.

(1) מהו אחוז הסטודנטים באוניברסיטה שאוכלים בקפטריה?

(2) מהי ההסתברות לבחור סטודנט שמביא אוכל מהבית מבין הסטודנטים שאוכלים במשך היום?

סעיף א (1)

נסמן b = ההסתברות להביא אוכל מהבית. לפי המידע הנתון:

$$\binom{4}{2}b^2(1-b)^2 = 6\cdot\binom{4}{1}b(1-b)^3\,.$$

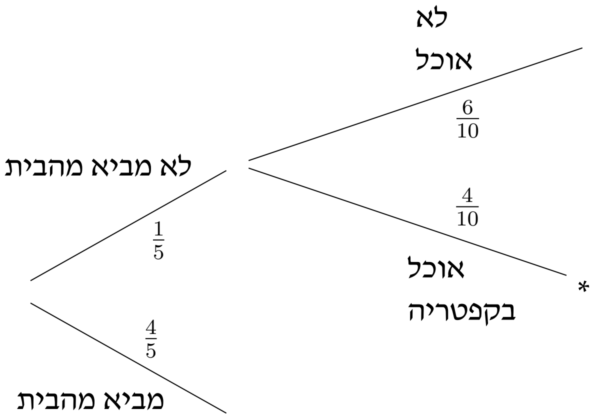
פתרון המשוואה הוא $b=\frac{4}{5}$.

סעיף א (2)

"לפחות אחד אבל לא כולם" היא המשלים ל-"לא אפס ולא כולם":

$$1-\left(\frac{1}{5}\right)^8-\left(\frac{4}{5}\right)^8=0.8322\,.$$

סעיף ב (1)



בעץ ההסתברויות הכוכבית מראה את מהמסלול עבור "אוכל בקפטריה":

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{25}\,.$$

סעיף ב (2)

המילה "**מבין**" מכוונת להסתברות מותנית וקבוצת "מביא אוכל" היא תת-קבוצה של "אוכלים":

$$P(\text{מביא אוכל}/\text{אוכלים}) =$$

$$\frac{P(\text{מביא אוכל} \cap \text{אוכלים})}{P(\text{אוכלים})} =$$

$$\frac{P(\text{מביא אוכל})}{P(\text{אוכלים})}\,.$$

החישוב הוא:

$$\frac{\dfrac{4}{5}}{\dfrac{4}{5}+\dfrac{2}{25}} = \frac{10}{11}\,.$$

3.11 קיץ תשע"ה מועד א

נתונה קבוצה של ספרות שונות: 3 ספרות הן זוגיות (שונות מ־ 0), והשאר הן ספרות אי־זוגיות.

יוני יוצר מספר דו־ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שיוני בוחר באקראי היא ספרת העשרות,

והספרה השנייה שהוא בוחר באקראי היא ספרת היחידות.

יוני בוחר כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.

א. נתון כי ההסתברות שיוני ייצור מספר אי־זוגי היא $\frac{4}{7}$.
מהו מספר הספרות האי־זוגיות בקבוצה הנתונה?

ב. אם ידוע שהמספר שנוצר הוא זוגי, מהי ההסתברות ששתי הספרות שיוני בחר הן זוגיות?

אמילי יוצרת מספר תלת־ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שאמילי בוחרת באקראי היא ספרת המאות,

הספרה השנייה שהיא בוחרת באקראי היא ספרת העשרות,

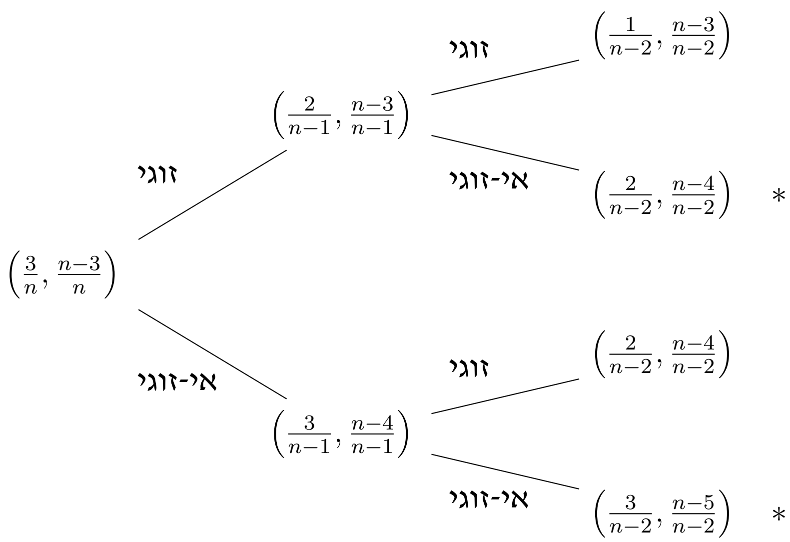
והספרה השלישית שהיא בוחרת באקראי היא ספרת היחידות.

אמילי בוחרת כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.

ג. ידוע כי הספרה הראשונה שאמילי בחרה היא זוגית.
מהי ההסתברות שבמספר התלת־ספרתי שאמילי יצרה, סכום הספרות היה זוגי?

נסמן n = מספר הספרות בקבוצה. מספר הזוגיים = 3, ומספר האי-זוגיים = $n-3$.

בחירה של ספרת העשרות ואחר כך ספרת היחידות מכוונת לעץ הסתברויות. כדי לפשט את התרשים רשמתי בכל צומת את ההסתברויות (אי-זוגי,זוגי), ולא את מספר הספרות.



סעיף א

המספר שיוני בחר יהיה אי-זוגי רק אם **הבחירה השנייה** היא ספרה אי-זוגית. המסלולים המתאימים מסומנים בתרשים בכוכביות. נשווה את סכום ההסתברויות של המסלולים לערך הנתון:

$$\frac{3}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \; + \; \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} = \frac{4}{7}\,.$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית $n^2 - 8n + 7 = 0$ שיש לה שני פתרונות חיוביים $n = 1, n = 7$. נתון שיש לפחות שלוש ספרות, לכן מספר הספרות הוא 7.

שימו לב שהשאלה מבקשת את מספר הספרות **האי-זוגיות** ולכן התשובה היא $7 - 3 = 4$.

סעיף ב

במספר זוגי הספרה האחרונה זוגית. הניסוח "**אם ידוע ש-**" מכוון להסתברות מותנית:

$$P(\text{שתי ספרות זוגיות} / \text{ספרה אחרונה זוגית}) =$$

$$\frac{P(\text{שתי ספרות זוגיות} \cap \text{ספרה אחרונה זוגית})}{P(\text{ספרה אחרונה זוגית})} =$$

$$\frac{P(\text{שתי ספרות זוגיות})}{P(\text{ספרה אחרונה זוגית})}\,.$$

את החיתוך אפשר לפשט כי אם שתי הספרות זוגיות הספרה האחרונה חייבת להיות זוגית.

ניתן לחשב את ההסתברות "ספרה אחרונה זוגית" במכנה לפי המידע בעץ או פשוט לשים לב שהיא המשלימה להסתברות הנתון בסעיף א של "הספרה האחרונה אי-זוגית" $1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$.

חישוב ההסתברות במונה לפי המסלול העליון בעץ עבור בחירה של שתי ספרות זוגיות:

$$\frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}}{1 - \frac{4}{7}} = \frac{1}{3}\,.$$

סעיף ג

הסכום יהיה זוגי רק אם שתי הספרות האחרונת הן זוגיות או אי-זוגיות:

$$\begin{aligned} 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 &= 2(k_1 + k_2 + k_3) \\ 2k_1 + 2(k_2+1) + 2(k_3+1) &= 2(k_1 + k_2 + k_3 + 1)\,. \end{aligned}$$

שני האירועים)בחירת הספרות(בלתי תלויים, ולכן אפשר לבטא את החיתוך כמכפלה:

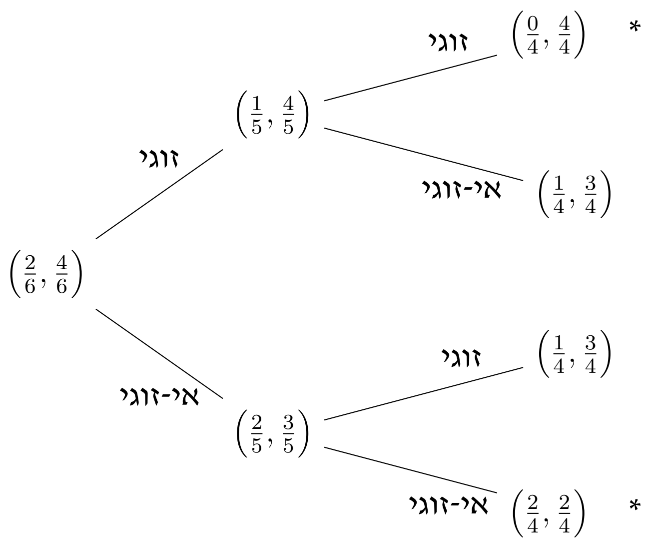
$$P(\text{סכום זוגי} / \text{ספרה ראשונה זוגית}) =$$

$$\frac{P(\text{סכום זוגי} \cap \text{ספרה ראשונה זוגית})}{P(\text{ספרה ראשונה זוגית})} =$$

$$\frac{P(\text{סכום זוגי}) \cdot P(\text{ספרה ראשונה זוגית})}{P(\text{ספרה ראשונה זוגית})} =$$

$$P(\text{סכום זוגי})\,.$$

שימו לב שלאחר הבחירה הראשונה של אמילי מספר הספרות הוא שש. הנה עץ ההסתברויות לאחר בחירה הראשונה, כאשר הכוכביות מסמנות את המסלולים לסכום זוגי (שני מספרים זוגיים או שני מספרים אי-זוגיים):



ההסתברות היא:

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{15}\,.$$

3.12 חורף תשע"ה

ביישוב גדול $\frac{1}{3}$ מהתושבים הם נשים, והשאר הם גברים.

מבין התושבים בוחרים באקראי שתי קבוצות:

קבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון ברדיו

וקבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון בטלוויזיה.

א. מהי ההסתברות שבכל קבוצה יש בדיוק 2 גברים?

ב. ידוע כי בקבוצה שנבחרה לריאיון ברדיו היו לכל היותר 2 גברים.

מהי ההסתברות שהיו בקבוצה זו בדיוק 2 גברים?

"יישוב גדול" אומר לי שניתן לבחור מספר רב של תושבים, לפחות שמונה תושבים כפי שנדרש.

סעיף א

כל קבוצה היא בחירה בלתי תלוייה. לפי נוסחת ברנולי ההסתברות לבחור בדיוק שני גברים **בקבוצה אחת** היא:

$$\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}\,.$$

כדי לקבל את ההסתברות שיהיו בדיוק שני גברים בשתי הקבוצות, נעלה ערך זה בריבוע:

$$\left(\frac{8}{27}\right)^2=\frac{64}{729}\,.$$

סעיף ב

הניסוח "**ידוע כי**" מכוון להסתברות מותנית:

$$P(\text{בדיוק שני גברים}/\text{לכל היותר שני גברים})=$$

$$\frac{P(\text{בדיוק שני גברים}\cap\text{לכל היותר שני גברים})}{P(\text{לכל היותר שני גברים})}\,.$$

החיתוך במונה שקולה ל-"בדיוק שני גברים" $\frac{8}{27}$ שחישבנו בסעיף א, כי "לכל היותר שני גברים" היא $0,1,2$ גברים. "לכל היותר שני גברים" הוא הסכום של שלוש נוסחאות ברנולי:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4+\binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3+\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{11}{27}$$

והתשובה לשאלה היא:

$$\frac{\frac{8}{27}}{\frac{11}{27}}=\frac{8}{11}\,.$$

3.13 קיץ תשע"ד מועד ב

בעיר גדולה כל אחד מתלמידי כיתות י"ב בשנה מסוימת בוחר באחד משני המסלולים לטיול שנתי:

מסלול א' או מסלול ב'.

נמצא: 75% מן התלמידים שבחרו במסלול א' הן בנות.

10% מן הבנות בחרו במסלול ב'.

40% מן התלמידים הם בנות.

א. בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת).

מהי ההסתברות שהוא בחר במסלול א'?

ב. כאשר בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת), האם המאורע "התלמיד הוא בת"

והמאורע "התלמיד (בן/בת) בחר במסלול א'" הם מאורעות בלתי תלויים? נמק.

ג. בחרו באקראי כמה בנות מבין התלמידים.

נמצא שההסתברות שלפחות אחת מהן בחרה במסלול א' היא 0.99.

(הבחירות של המסלולים על ידי הבנות שנבחרו הן בלתי תלויות.)

כמה בנות נבחרו?

אני מלאתי את טבלת ההסתבוריות לפי חישוב לא פורמלי.

נתון ש-0.4 מהתלמידים הן בנות. 10% מהם בחרו במסלול ב: $0.1 \times 0.4 = .04$. מכאן ש- $0.4 - 0.04 = 0.36$ בחרו במסלול א.

נתון ש-75% מהתלמידים שבחרו במסלול א הן בנות:

$$0.75 \times \text{בחרו במסלול א} = 0.36\,,$$

ולכן $0.36/0.75 = 0.48$ מהתלמידים בחרו מסלול א. כעת ניתן נמלא את טבלת ההסתברויות:

	בנות	בנים	
א	$.4 - .04 =$ $.36$	$.48 - .36 =$ $.12$	$.36/.75 =$ $.48$
ב	$.1 \times .4 =$ $.04$	$.52 - .04 =$ $.48$	$1 - .48 =$ $.52$
	נתון 0.4	$1 - .4 =$ $.6$	1

נחשב את הערכים בטבלה בצורה יותר מפורשת תוך שימוש בהסתברות מותנית:

$$0.1 = P(\text{בנות/מסלול ב}) = \frac{P(\text{בנות} \cap \text{מסלול ב})}{P(\text{בנות})} = \frac{P(\text{בנות} \cap \text{מסלול ב})}{0.4}\,.$$

מכאן ש:

$$P(\text{בנות} \cap \text{מסלול ב}) = 0.4 \cdot 0.1 = 0.04\,.$$

נמשיך עם הנתון הנוסף:

$$0.75 = P(\text{מסלול א/בנות}) = \frac{P(\text{מסלול א} \cap \text{בנות})}{P(\text{מסלול א})} = \frac{0.36}{P(\text{מסלול א})}\,.$$

מכאן ש:

$$P(\text{מסלול א}) = \frac{0.36}{0.75} = 0.48\,.$$

סעיף א

הסעיף מבקש $P(\text{מסלול א})$ וחישבנו שערכו 0.48.

סעיף ב

$$\begin{aligned} P(\text{מסלול א} \cap \text{התלמיד הוא בת}) &= 0.36 \\ P(\text{התלמיד הוא בת}) \cdot P(\text{מסלול א}) &= 0.4 \cdot 0.48 = 0.192\,. \end{aligned}$$

האירועים **אינם** בלתי תלויים.

סעיף ג

כדי לחשב "**לפחות אחת**", נחשב שת ההסתברות המשלימה ל-"**אף אחת**". ההסתברות שבת לא תבחר מסלול א היא ההסתברות שהיא תבחר מסלול ב:

$$P(\text{בת/מסלול ב}) = \frac{P(\text{בת} \cap \text{מסלול ב})}{P(\text{בת})} = \frac{0.04}{0.4} = 0.1\,.$$

נפתור את המשוואה:

$$(0.1)^n = 1 - 0.99 = 0.01\,,$$

ונקבל $n = 2$.

3.14 קיץ תשע״ד מועד א

אבא ודני משחקים בזריקת כדור לסל. בכל משחק שני סיבובים.

המנצח בסיבוב מקבל נקודה אחת. אם הסיבוב מסתיים בתיקו, כל אחד מקבל חצי נקודה.

נתון: ההסתברות שדני ינצח בסיבוב היא 0.1 ,

ההסתברות שאבא ינצח בסיבוב היא 0.2 ,

ההסתברות שהסיבוב יסתיים בתיקו היא 0.7 .

הסיבובים אינם תלויים זה בזה.

א. מהי ההסתברות שאבא יצבור בשני הסיבובים יותר מנקודה אחת?

ב. מהי ההסתברות שדני יצבור בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת?

ג. ידוע כי דני צבר בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת.

מהי ההסתברות שאחד הסיבובים הסתיים בתיקו והאחר הסתיים בניצחון של דני?

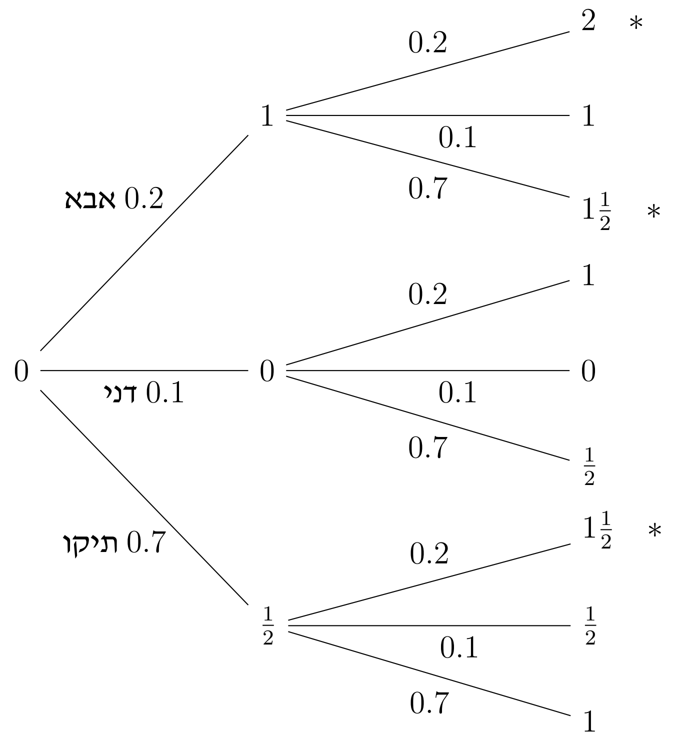
ד. אבא ודני משחקים 4 פעמים את המשחק שמתואר בפתיח. (בכל משחק שני סיבובים.)

מהי ההסתברות שדני יצבור לפחות נקודה אחת 2 פעמים בדיוק?

סעיף א

עץ ההסתברות מראה את צבירת הנקודות של אבא בשני הסיבובים, כאשר המצבים בהם אבא צובר **יותר** מנקודה אחת מסומנים בכוכביות. ההסתברות של האירוע היא :

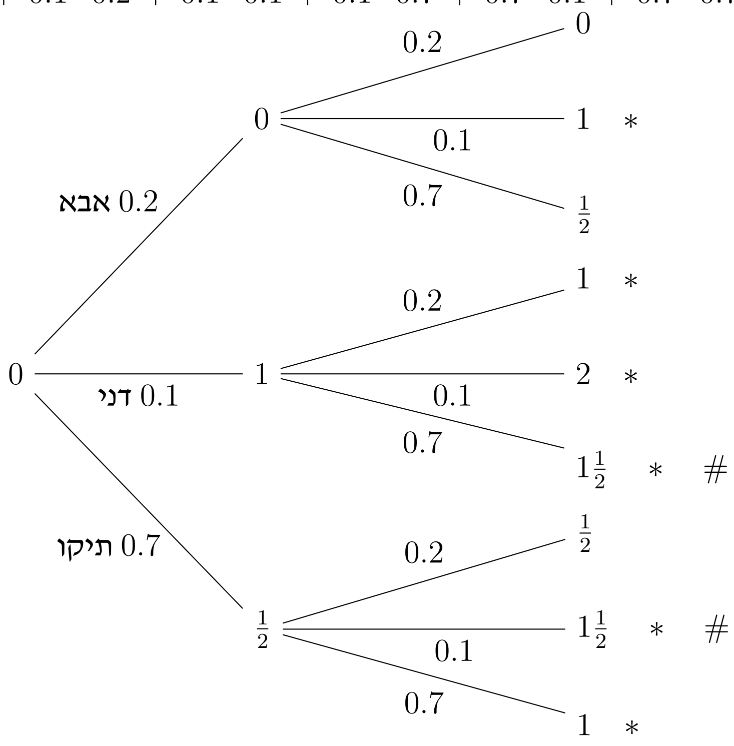
$$0.2 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.2 = 0.32 .$$



סעיף ב

עץ ההסתברות מראה את צבירת הנקודות של דני בשני הסיבובים, כאשר המצבים בהם דני צובר **לפחות** מנקודה אחת מסומנים בכוכביות. ההסתברות של האירוע היא:

$$0.2 \cdot 0.1 \,+\, 0.1 \cdot 0.2 \,+\, 0.1 \cdot 0.1 \,+\, 0.1 \cdot 0.7 \,+\, 0.7 \cdot 0.1 \,+\, 0.7 \cdot 0.7 \,=\, 0.68\,.$$



סעיף ג

הניסוח "**ידוע כי**" מכוון להסתברות מותנית והחיתוך מצטמצם כי אם יש תיקו אחד וניצחון אחד של דני אז דני צבר לפחות נקודה אחת:

$$P(\text{דני צבר לפחות נקודה אחת/תיקו אחד, ניצחון אחד לדני}) =$$

$$\frac{P(\text{דני צבר לפחות נקודה אחת} \cap \text{תיקו אחד, ניצחון אחד לדני})}{P(\text{דני צבר לפחות נקודה אחת})} =$$

$$\frac{P(\text{תיקו אחד, ניצחון אחד לדני})}{P(\text{דני צבר לפחות נקודה אחת})}\,.$$

נחשב את המונה על ידי חיבור ההסתברויות של שני מסלולים בעץ המסומנים ב-#. ההסתברות במכנה חושבה בסעיף ב:

$$\frac{0.1 \cdot 0.7 \,+\, 0.7 \cdot 0.1}{0.68} = .2059\,.$$

סעיף ד

סעיף ב חישבנו את ההסתברות של האירוע בכל סיבוב, ונשאר רק לחשב:

$$\binom{4}{2}(0.68)^2(0.32)^2 = 0.2841\,.$$

3.15 חורף תשע"ד

בעיר מסוימת יש תושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, יש תושבים המשתתפים בחוג לתאטרון ויש תושבים המשתתפים בשני החוגים.

נמצא כי המאורע "תושב העיר משתתף בחוג לריקודי עם"

והמאורע "תושב העיר משתתף בחוג לתאטרון" הם מאורעות בלתי תלויים.

מספר התושבים שמשתתפים בחוג לריקודי עם גדול פי 2 ממספר התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון.

מבין התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון, 60% משתתפים בחוג לריקודי עם.

א. מהו אחוז התושבים בעיר שמשתתפים בחוג לריקודי עם וגם בחוג לתאטרון?

ב. יום אחד נערך בעיר כנס שהשתתפו בו כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, ורק הם. עיתונאי ראיין 6 משתתפים בכנס שנבחרו באקראי. מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם משתתפים בחוג לתאטרון?

נסמן $T =$ מספר המשתתפים בתאטרון, $R =$ מספר המשתתפים בריקודי עם.

המילה "**מבין**" מכוונת להתסברות מותנית. נתון $P(R/T) = 0.6$ ושהאירועים בלתי תלויים. נחשב:

$$0.6 = P(R/T) = \frac{P(R \cap T)}{P(T)} = \frac{P(R) \cdot P(T)}{P(T)} = P(R)\,.$$

ביחד עם הנתון $P(R) = 2 \cdot P(T)$ נתחיל למלא את הטבלה:

	$\boldsymbol{T}$	$\overline{\boldsymbol{T}}$	
$\boldsymbol{R}$			0.60
$\overline{\boldsymbol{R}}$			0.40
	0.30	0.70	1.0

שוב נסתמך על העובדה שהאירועים בלתי תלויים ונקבל:

$$P(R \cap T) = P(R) \cdot P(T) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18\,,$$

כעת נמלא את הטבלה לפי הסתברויות משלימות:

	$\overline{\boldsymbol{T}}$	$\boldsymbol{T}$	
0.60	0.42	0.18	$\boldsymbol{R}$
0.40	0.28	0.12	$\overline{\boldsymbol{R}}$
1.0	0.70	0.30	

סעיף א

חישבנו ש-$P(R \cap T) = 0.18$.

סעיף ב

הניסוח "כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, **ורק הם**" מכוונות להסתברות מותנית. אם ידוע שתושב משתתף בריקודי עם, ההסתברות שהוא משתתף גם בתאטרון היא:

$$P(T/R) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)} = \frac{0.18}{0.60} = 0.3\,.$$

כדי לחשב "לפחות שניים" עדיף לחשב את המשלים ל-"אפס או אחד":

$$1 - \binom{6}{0}(0.3)^0(0.7)^6 - \binom{6}{1}(0.3)^1(0.7)^5 = 0.5798\,.$$

המלצות: הסתברות

- קרא בזהירות את השאלות. לעתים הן ארוכות (בחינות של קיץ תשע״ה א, קיץ תשע״ח ב) וחשוב להבין את המשמעות של כל פסקה.

- כמעט כל הבחינות מכילות שאלות על **הסתברות מותנית**. ניסוחים רבים מכוונים להסתברות מותנית וחשוב להכיר אותם!

  – הניסוח השכיח ביותר משתמש במילים ״**אם ידוע ש-**״ או ״**ידוע כי**״.

  – בבחינה של חורף תשע״ז כתוב ״**אם** . . . , **מהי ההסתברות** . . .״. לא לגמרי ברור שלמילה ״אם״ יש משמעות של ״אם ידוע״, אבל זאת הכוונה.

  – לעתים קרובות (בחינה של קיץ תשע״ה ב) כתוב ״**מה ההסתברות לבחור** . . . **מבין** . . .״.

  – **יוצא מן הכלל**: בבחינה של קיץ תשע״ו א כתוב ״**מבין** כל הנבחנים״. המילה ״מבין״ בדרך כלל מכוונת להסתברות מותנית, אבל כאשר ״מבין״ מתייחס ל-״**כל** הנבחנים״, אין הסתברות מותנית. לחילופין אפשר לחשב הסתברות מותנית בהסתברות שהיא 1 והחיתוך מצטמצם:

$$P(X/\text{כל הנבחנים}) = \frac{P(X \cap \text{כל הנבחנים})}{P(\text{כל הנבחנים})} = \frac{P(X)}{1} = P(X)\,.$$

  מצב דומה מופיע בבחינה של קיץ תשע״ד ב (״בוחרים באקראי תלמיד י״ב (בן/בת)״, ובבחינה של קיץ תשע״ח ב (״מן התלמידים שנגשו למבחן״).

  – בבחינה של קיץ תשע״ח א הניסוח הוא: ״$n\%$ נעזרו בחבריהם (נקרא לאירוע A) ו-$\frac{k}{n}$ **מהם** עברו את הבחינה״ (נקרא לאירוע B). ברור ש-$P(B\cap A) = k$, אבל נבדוק לפי הנוסחה להסתברות מונתית:

$$\begin{aligned} P(B/A) &= \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(B\cap A)}{n} = \frac{k}{n} \\ P(B\cap A) &= k\,. \end{aligned}$$

  – בבחינה של חורף תשע״ד יש ניסוח אחר: **כל התושבים המשתתפים ב-** . . ., **ורק הם**.

- כאשר יש חיתוך בחישוב של הסתברות מותנית, לעתים קרובות ניתן לפשט את החישוב. בבחינה של קיץ תשע״ז א יש לחשב $P(D=4\cap D\geq 3)$, אבל אם ערך גדול או שווה 3 **וגם** שווה ל-4, אז הוא שווה ל-4, ולכן מספיק לחשב $P(D=4)$.

- אם שני אירועים בלתי תלויים, חישוב ההסתברות המותנית מצטמצם:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)\cdot P(A)}{P(A)} = P(B)\,.$$

  מצב זמ מופיע בבחינות של חורף תשע״ז, חורף משע״ח, קיץ תשע״ה א, חורף תשע״ד.

- המילה **בדיוק** מכוונת לחישוב אחד של נוסחת ברנולי, כי נתון כמה "הצלחות" צריכות להיות וגם כמה "כשלונות". מקרה מעניין נמצא בבחינה של קיץ תשע"ח ב כאשר נתון שההסתברות לקבל 60 שווה להסתברות לקבל 100. נתון גם שיש שלוש הצלחות מתוך חמש (20 נקודות כל אחת), אז ההסתברות לקבל שני כשלונות (20 נקודות כל אחת) צריכה להיות שווה להסתברות לקבל שתי הצלחות (20 נקודות כל אחת).

- בבחינה של קיץ תשע"ז א כתוב "**בוחרים באקראי** ...,. **עד של-** 3 מהם **בדיוק** יש קלנועית". המשמעות של "עד ש-" היא שמפסיקים את הבחירה האקראית כאשר הבחירה **האחרונה** היא "הצלחה". במקרה זה נשארו שתי "הצלחות" שיש לחשב את ההסתברות שלהן לפי נוסחת ברנולי, ואז להכפיל בהסתברות של "הצלחה" בבחירה האחרונה:

$$\overbrace{\pm\ \pm\ \pm\ \pm\ \pm}^{2/5}\qquad \overbrace{+}^{1/1}\,.$$

- בבחינה של קיץ תשע"ז ב הביטוי "מוציאים באקראי ...", ובהמשך הביטוי "מוציאים באקראי **שוב** ..." מכוון לשימוש בעץ כדי לתאר את הבחירה הסדרתית.

- בבחינה של קיץ תשע"ח א, המשמעות של הניסוח "**לפחות אחת** משתי הטענות I, II היא שהאירוע קורה אם קורה אחד מהאירועים I, II **או שניהם**, המסומן $\mathrm{I} \cup \mathrm{II}$. יש שתי דרכים לחשב את ההסתברות: על ידי חיבור ההסתברות של שני האירועים וחיסור האירוע המשותף כדי לקזז את הספירה הכפולה, או לחבר את האירוע המשותף עם האירועים של אחד ולא השני המסומן $\mathrm{I}-\mathrm{II}$, $\mathrm{II}-\mathrm{I}$:

$$\begin{aligned} P(\mathrm{I}\cup\mathrm{II}) &= P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) - P(\mathrm{I}\cap\mathrm{II}) \\ P(\mathrm{I}\cup\mathrm{II}) &= P(\mathrm{I}-\mathrm{II}) + P(\mathrm{II}-\mathrm{I}) + P(\mathrm{I}\cap\mathrm{II})\,. \end{aligned}$$

- בבחינה של קיץ תשע"ח ב יש לחשב את ההסבתרות של תשובה נכונה **לכל** ($k=n$) השאלות או תשובה נכונה **לאף אחת** ($k=0$) מהשאלות, כאשר ההסתברות לתשובה נכונה אחת היא p. אין צורך להשתמש בנוסחת ברנולי הכללית:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,.$$

אם $k=0$, $\binom{n}{0}=1$, ואז הנוסחה מצטמצמת ל-$p^0(1-p)^{n-0}=(1-p)^n$.

אם $k=n$, $\binom{n}{n}=1$, ואז הנוסחה מצטמצמת ל-$p^n(1-p)^{n-n}=p^n$.

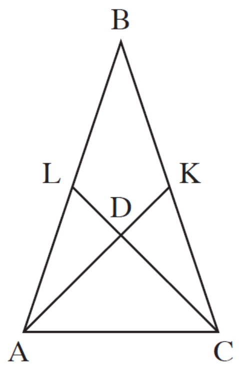
- בבחינות של קיץ תשע"ו א, ב יש שלוש תוצאות לפעולה במקום שתיים. סכום ההסתברויות חייב להיות אחד, ולכן כאשר מחשבים משלים להסתברות אחת, יש להחסיר את שתי ההסתברויות האחרות. בבחינה של מועד ב, ההסתברות לתיקו היא אחד פחות ההסתברות שיעל תנצח פחות ההסתברות אנה תנצח:

$$P(\text{תיקו}) = 1 - (P(\text{יעל}) + P(\text{אנה})) = 1 - P(\text{יעל}) - P(\text{אנה})\,.$$

- במספר בחינות (חורף תשע"ה, קיץ תשע"ד ב, קיץ תשע"ה ב) כתוב "ישוב גדול", "עיר גדולה", "אוניברסיטה גדולה". אני מניח שבמילה "גדול" מבטיחה שאפשר לבחור תושבים או סטודנטים כפי שדרוש בשאלות. אין משמעות לבחור ארבעה סטודנטים אם יש רק שניים.

פרק 4 גיאומטריה

4.1 קיץ תשע״ח מועד ב



ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB = BC)$.

AK ו־ CL הם תיכונים במשולש, החותכים זה את זה בנקודה D.

נתון: $AK \perp CL$.

א. הוכח: $BD = AC$.

ב. חשב את היחס $\frac{S_{BLDK}}{S_{\Delta ABC}}$.

ג. M הוא מרכז המעגל החוסם את המרובע ALKC.

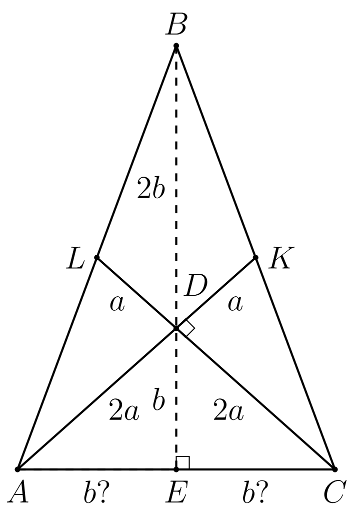
(1) הוכח: $\sphericalangle AML = 90^o$.

(2) מצא את היחס $\frac{AM}{AD}$.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

סעיף א

כאשר יש תיכונים נחתכים מיד חושבים על משפט 45 ״שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת״, ובמשפט 46 ״נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $1 : 2$״. נבנה BE, התיכון מ-B ל-AC, שחותך את מפגש התיכונים האחרים ב-D. $BE \perp AC$ לפי משפט 6 ״במשולש שווה-שוקיים , חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים״. קל להראות שהתיכונים AK, CL שווים, כי $\triangle CED \cong \triangle AED$ ואז $\triangle KDC \cong \triangle LDA$. סימנו את הקטעים $DK = DL = a$, $DC = DA = 2a$.



אם נוכיח ש-$AE = EC = DE$, נקבל ש-$BD = 2b = 2DE = AE + ED = AC$. לפי משפט 6, BE הוא חוצה זווית של $\angle ABC$, וגם של $\angle ADC$ כי חוצה הזווית והתיכון מתלכדים. נתון ש-$AK \perp CL$ כך ש-$\angle ADC = 90°$, ולכן $\angle ADE, \angle CDE$ שוות ל-$45° = \frac{1}{2} \cdot 90°$. במשולשים ישר-זווית $\triangle ADE, \triangle CDE$, זוויות חדות של $45°$, ולכן גם הזוויות $\angle DAE, \angle DCE$ שוות $45°$, והמשולשים שווה-שוקיים. מכאן ש-$AE = EC = DE = b$.

אפשרות אחרת, פשוטה יותר, להוכיח $AE = EC = DE = b$ היא להשתמש במשפט 86 "במשולש ישר-זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר" ב-$\triangle ADC$.

סעיף ב

כדאי לחשב S_{BLDK} על ידי חיסור שטח המצולע $ALDKC$ מהשטח של $\triangle ABC$, כי המצולע מורכב ממשולשים ישר-זווית וחישוב השטח שלהם קל מאוד:

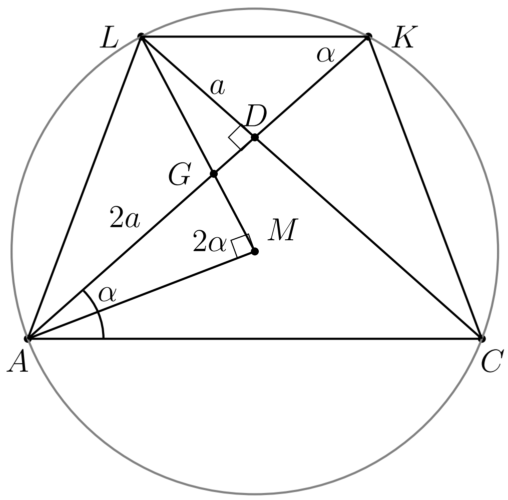
$$\begin{aligned}
S_{ALDKC} &= S_{ADL} + S_{KDC} + S_{ADC} = 2S_{ADL} + S_{ADC} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot DL + \frac{1}{2} AC \cdot DE \\
&= 2a \cdot a + \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot b \\
&= 2a^2 + b^2 \,.
\end{aligned}$$

אפשר להניח שהיחס המבוקש אינו תלוי באורכן של הצלעות, לכן נחפש דרך להביע את שטח המצולע S_{ALDKC} כפונקציה של b בלבד. ממשפט פיתגורס על $\triangle ADE$:

$$\begin{aligned}
b^2 + b^2 &= (2a)^2 = 4a^2 \\
S_{ALDKC} &= 2a^2 + b^2 = 2 \cdot \frac{1}{4}(b^2 + b^2) + b^2 = 2b^2 \\
S_{ABC} &= \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{1}{2} 2b \cdot 3b = 3b^2 \\
S_{BLDK} &= S_{ABC} - S_{ALDKC} = 3b^2 - 2b^2 = b^2 \\
\frac{S_{BLDK}}{S_{ABC}} &= \frac{b^2}{3b^2} = \frac{1}{3} \,.
\end{aligned}$$

סעיף ג (1)

לא התקדמתי עד שציירתי תרשים חדש עם המעגל וראיתי שהזווית ההיקפית $\angle LKA$ נשענת על המיתר עליו נשענת הזווית המרכזית $\angle AML$, כך ש-$\angle AML = 2\angle LKA$ לפי משפט 69 "במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת". אבל לפי משפט 14 "קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה", $LK \| AC$, ולכן $\angle KAC = \angle LKA = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות, והוכחנו בסעיף הקודם ש-$\alpha = 45°$, לכן, $\angle AML = 2\alpha = 90°$.

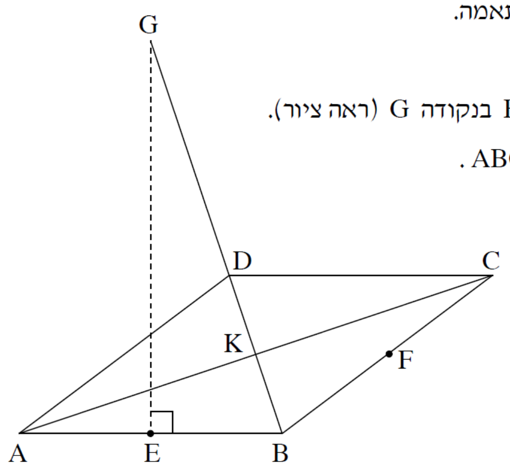


סעיף ג (2)

תחילה שמתי לב ש-$\triangle DGL \sim \triangle MGA$ כי במשולשים ישר-זווית, הזוויות $\angle DGL = \angle MGA$ קודקודיות. גישה זו לא הצליחה כי לא מצאתי דרך לבטא את הקשר בין AD לבין AG, GD. לבסוף שמתי לב שלמשולשים $\triangle LDA, \triangle LMA$ יתר משותף, והמשולש $\triangle LMA$ שווה-שוקיים כי שתי הצלעות AM, ML הן רדיוסים. ממשפט פיתגורס:

$$
\begin{aligned}
AM^2 + ML^2 &= AL^2 \\
2AM^2 &= AL^2 \\
LD^2 + AD^2 &= AL^2 \\
a^2 + AD^2 &= 2AM^2 \\
\frac{1}{4}AD^2 + AD^2 &= 2AM^2 \\
\frac{AM}{AD} &= \sqrt{\frac{5}{8}} \, .
\end{aligned}
$$

4.2 קיץ תשע״ח מועד א



ABCD הוא מעוין. E ו־ F הן אמצעי הצלעות AB ו־ BC בהתאמה.

הנקודה K היא מפגש האלכסונים של המעוין.

מן הנקודה E העלו אנך ל־ AB , החותך את המשך האלכסון BD בנקודה G (ראה ציור).

א. הוכח: הנקודה G היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC .

הקטע GF חותך את האלכסון AC בנקודה M ,

שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש BDC .

ב. הוכח שהמשולשים MFC , BKC ו־ BFG דומים זה לזה.

נסמן ב־ R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC ,

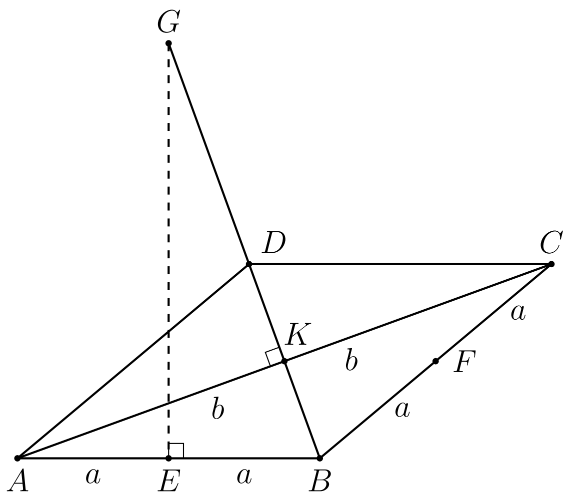
וב־ r את רדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC .

ג. **(1)** הוכח כי $\frac{MF}{CF} = \frac{MC}{GB}$ וכי $\frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK}$.

(2) הראה כי היחס בין אלכסוני המעוין שווה ל־ $\frac{r}{R}$.

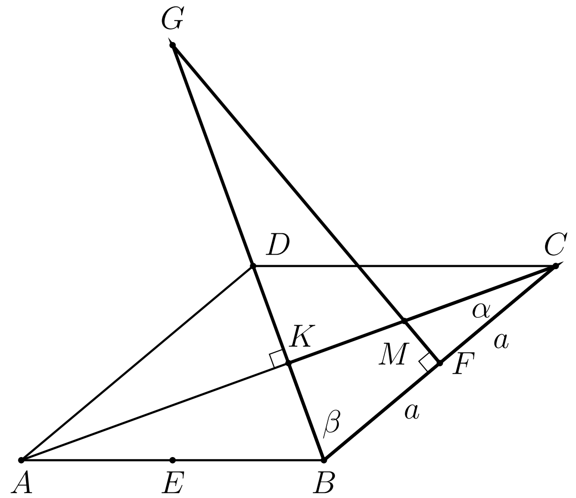
סעיף א

כדי להוכיח שהנקודה G היא מרכז של מעגל חוסם נשתמש במשפט 54 ״במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת , שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש״. צריך להוכיח ש-GE, GB הם אנכים אמצעיים של $\triangle ABC$. מעוין הוא מקבילית עם צלעות שוות, וכמקבילית, ניתן להשתמש במשפט 28 ״במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה״. סימנו בציר את אורכי האלכסון AC ב-b. ביחד עם משפט 35 ״במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה״, GB הוא אנך אמצעי ל-AC. נתון שנקודת E היא אמצע של AB, וש-GE הוא אנך ל-AB, ולכן G היא נקודת החיתוך של שני אנכים אמצעיים ומכאן מרכז המעגל החוסם את $\triangle ABC$.



סעיף ב

ההוכחה שהמשולשים דומים תהיה קל יותר אם נבנה מחדש את התרשים תוך הדגשת צלעות המשולשים.
לפי משפט 35 האלכסון AC הוא אנך אמצעי ל-DB. נתון שהנקודה M היא מרכז המעגל החוסם את $\triangle BDC$, ולכן הקו GF שחותכת את CK ב-M היא אנך אמצעי ל-BC. הזווית α משותפת לשני משולשים ישר-זווית, כך ש-$\triangle MFC \sim \triangle BKC$. הזווית β משותפת לשני משולשים ישר-זווית, כך ש-$\triangle BKC \sim \triangle BFG$ וביחד $\triangle MFC \sim \triangle BKC \sim \triangle BFG$.



סעיף ג (1)

לפי דמיון המשולשים $\triangle MFC \sim \triangle BFG$:

$$\frac{MC}{GB} = \frac{MF}{BF} = \frac{MF}{CF},$$

כי $BF = CF$ בגלל ש-F הוא אמצע הצלע BC.

מדמיון המשולשים $\triangle MFC \sim \triangle BKC$. מתקבל:

$$\frac{MF}{BK} = \frac{CF}{CK},$$

ובחישוב פשוט:

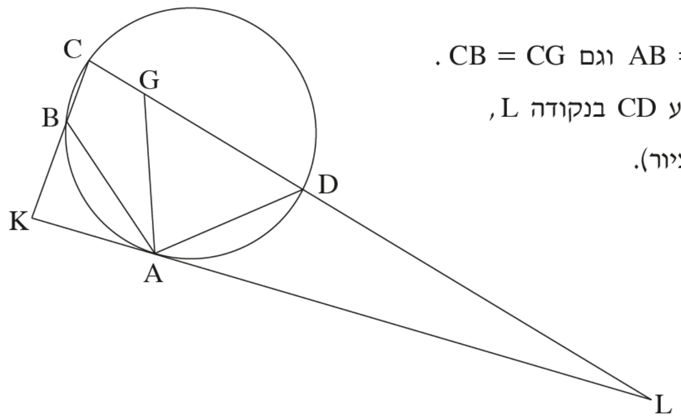
$$\frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK}.$$

סעיף ג (2)

מהנתון שהנקודה M היא המרכז של המעגל החוסם את BDC, אנו מקבלים שהאלכסון MC שווה ל-r. בסעיף א הוכחנו שהנקודה G היא מרכז המעגל החוסם את ABC, ולכן GB שווה ל-R. נחשב את יחס הרדיוסים תוך שימוש ביחס שחישבנו בסעיף ג (1) ומשפט 28 "מקבילית)מעוין(האלכסונים חוצים זה את זה":

$$\frac{r}{R} = \frac{MC}{GB} = \frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK} = \frac{DB/2}{AC/2} = \frac{DB}{AC}$$

4.3 חורף תשע"ח



המרובע ABCD חסום במעגל.

הנקודה G נמצאת על הצלע CD כך ש- AB = AG וגם CB = CG .

המשיק למעגל בנקודה A חותך את המשך הצלע CD בנקודה L ,

וחותך את המשך הצלע CB בנקודה K (ראה ציור).

א. הוכח כי AD = AG .

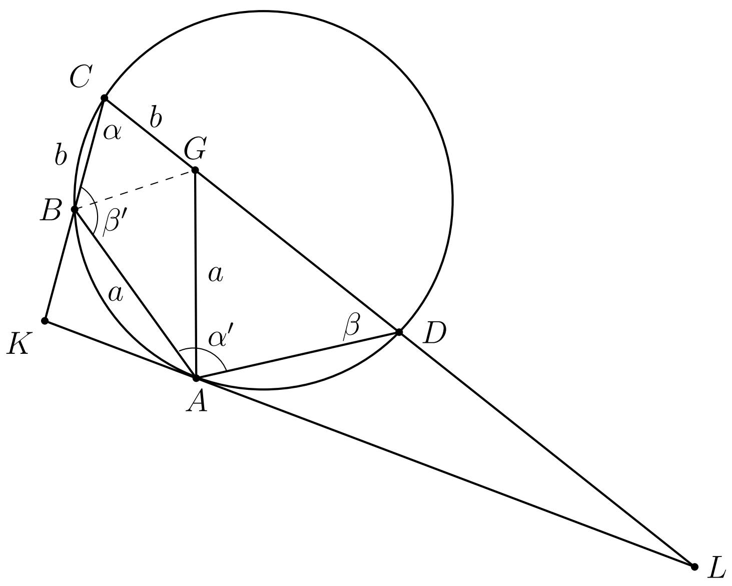
ב. **(1)** הוכח כי $\triangle ABK \sim \triangle CDA$.

(2) הוכח כי $AD^2 = BK \cdot CD$

ג. הראה כי $\frac{LA}{AK} = \frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}}$.

סעיף א

נתון ש-$AB = AG, CB = CG$ כך ש-$ABCG$ הוא דלתון, אבל לא ברור בשלב זה אם זה יעזור בפתרון. נתון שהמרובע $ABCD$ חסום במעגל, ולפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-$180°$". סימנו זוויות α, β ו-$\alpha' = 180 - \alpha, \beta' = 180 - \beta$:



כדי להוכיח ש-$AD = AG$ נשתמש במשפט 3 "במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות", ונוכיח ש-$\angle AGD = \angle ADG = \beta$. נזכור ש-$ABCG$ דלתון והזוויות הצדדיות שלו שוות, כך ש- $\angle AGC =$ $\angle ABC = \beta'$, לפי זוויות משלימות $\angle AGD = 180 - \beta' = 180 - (180 - \beta) = \beta$.

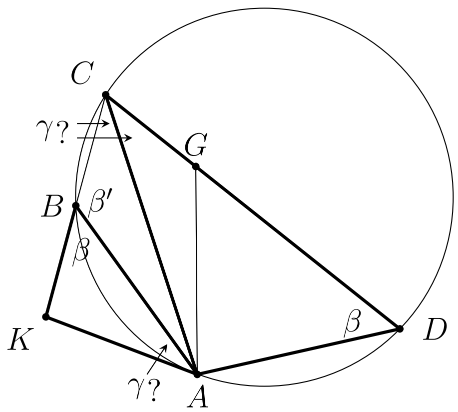
רשימת המשפטים לבגרות לא כוללת משפט על שוויון זוויות בדלתון, אז נצטרך להוכיח אותו. דלתון מוגדר כמרובע עם שני זוגות של צלעות סמוכות שוות, כך שהוא מורכב משני משולשים שווה-שוקיים המוצמדים בבסיסיהם (קו מקווקו בתרשים):

$$\angle ABC = \angle ABG + \angle GBC = \angle AGB + \angle BGC = \angle AGC\,.$$

סעיף ב (1)

נדגיש בתרשים את המשולשים $\triangle ABK, \triangle CDA$ שיש להוכיח שהם דומים. הוספנו לתרשים את הסימון $\angle ABK = \beta$ כי $\angle ABK$ היא הזווית המשלימה ל-$\angle ABC = \beta' = 180 - \beta$. אם נמצא עוד זוג של זוויות שוות נקבל שהמשולשים דומים לפי ז.ז. ננסה להוכיח ש-$\angle ACD = \angle BAK = \gamma$.

$\angle BAK$ היא הזווית בין המשיק KA והמיתר AB. לפי משפט 79 "זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני", $\angle BAK = \angle BCA = \gamma$. לפי משפט 21 "האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש ...", $\angle BCA = \angle ACD = \gamma$. מכאן ש-$\triangle ABK \sim \triangle CDA$.



דרך אחרת להוכיח ש-$\angle BCA = \angle ACD$ היא לשים לב ש-$AB = AG = AD$. נשתמש במשפט 63 "במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו" ומשפט 71 "במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות", ונקבל $\angle BCA = \angle ACD$.

סעיף ב (2)

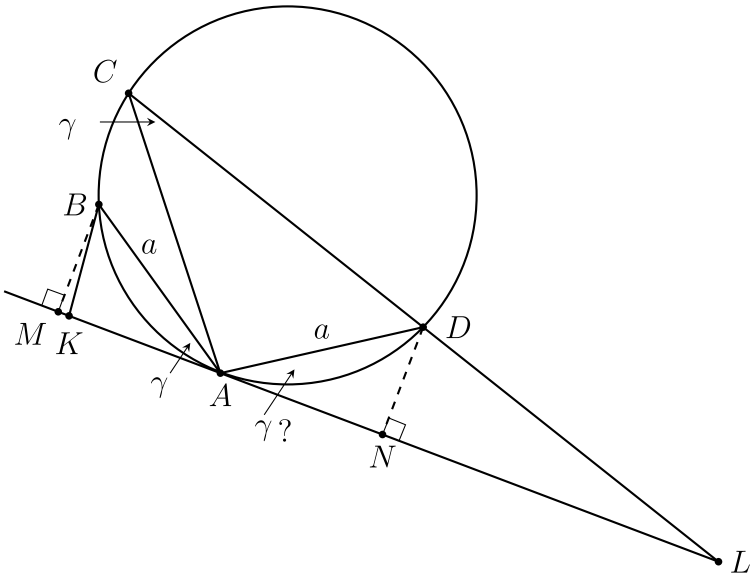
לפי $\triangle CDA \sim \triangle ABK$ שהוכחנו בחלק הראשון של הסעיף ולפי $AB = AD$:

$$\begin{aligned}
\frac{AB}{CD} &= \frac{BK}{AD}\\
AB \cdot AD &= BK \cdot CD\\
AD^2 &= BK \cdot CD\,.
\end{aligned}$$

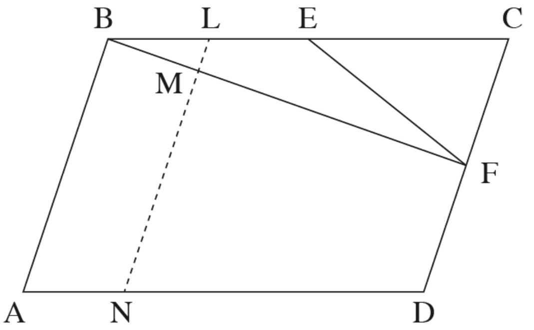
סעיף ג

LA, AK הם הבסיסים של המשולשים $\triangle LDA, \triangle KAB$ כך שנקבל את היחס המבוקש אם נוכיח שהגבהים שווים. הוכחנו שהיתרים ב-$\triangle ADN, \triangle ABM$ שווים $AB = AD = a$, כך שנשאר רק להוכיח שהזוויות שוות $\angle BAK = \angle DAL = \gamma$. הוכחנו ש-$\angle BAK = \angle DCA = \gamma$, ו-$\angle DAL$ היא הזווית בין המשיק LA והמיתר AD. הזווית $\angle DCA$ נשענת על מיתר זה, כך ש-$\angle DCA = \angle DAL$ לפי משפט 79, ו-$\angle BAK = \angle DCA = \angle DAL = \gamma$. כעת ניתן לחשב את השטחים:

$$\begin{aligned}
\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} &= \frac{(LA \cdot DN)/2}{(AK \cdot BM)/2} \\
DN &= AD \sin \angle DAL = a \sin \gamma \\
BM &= AB \sin \angle BAK = a \sin \gamma = DN \\
\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} &= \frac{LA}{AK}\,.
\end{aligned}$$



4.4 קיץ תשע"ז מועד ב



המרובע ABCD הוא מקבילית.
הזווית A היא זווית חדה.
הנקודה E היא אמצע הצלע BC
והנקודה F היא אמצע הצלע CD
(ראה ציור).

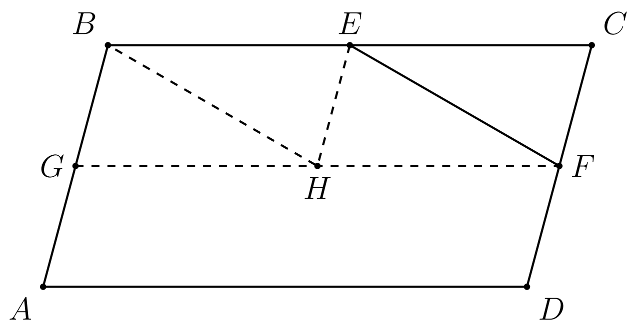
א. שטח המשולש ECF הוא S .
הבע את שטח המקבילית ABCD
באמצעות S . נמק את תשובתך.

ב. הנקודה L היא אמצע הקטע BE .
דרך הנקודה L העבירו ישר המקביל ל־ AB וחותך את BF ואת AD
בנקודות M ו־ N בהתאמה.
חשב את היחס $\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{MN}}$.

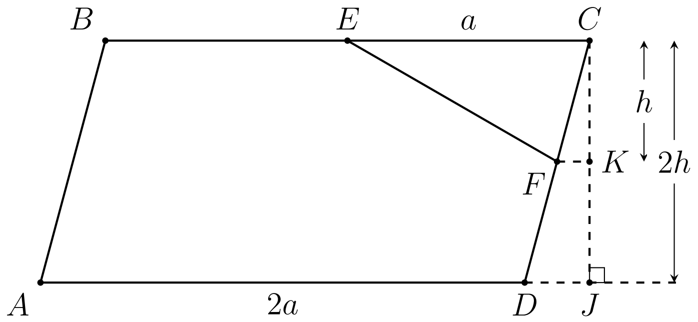
ג. נתון BE = EF .
האם אפשר לחסום את המרובע ABFD במעגל? נמק את קביעתך.

סעיף א

נפרק את המקבילית למשולשים. יהי GF קטע קו המקביל ל-BC ו-EH מקביל ל-CD. לפי זוויות מתאימות ומשלימות, המרובעים $BEHG, ECFH$ הם מקביליות. בגלל ש-E היא נקודת האמצע של BC, H היא נקודת האמצע של $GF = BC$. מכאן שכל המשולשים $\triangle ECF, \triangle EHF, \triangle HEB, \triangle BGH$ חופפים ולכן $S_{BCFG} = 4S$. GF הוא קו אמצעים ומחלק את המקבילית לשני חלקים שווים, כך ש-$S_{ABCD} = S_{BCFG} + S_{GFDA} = 8S$.



הוכחה אחרת משתמשת במשפט 5א "שטח מקבילית שווה למכפלת צלע המקבילית בגובה לצלע זו".
הגובה של המקבילית באורך כפול מהגובה של המשולש לפי דמיון המשולשים $\triangle FCK, \triangle DCJ$:



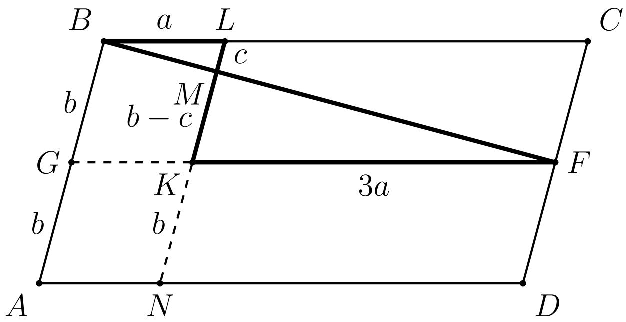
$$S_{ECF} = \frac{1}{2}ah = S$$
$$S_{ABCD} = 2a \cdot 2h = 4ah = 8S\,.$$

סעיף ב

נקבל יחס בין קטעי קו אם נמצא משולשים דומים שקטעי הקו הם צלעות שלהם. בתרשים להלן הדגשתי משולשים שיכולים להתאים. קטע האמצעים במקבילית מקביל לבסיסים $BC \| GF$, ומזוויות מתחלפות $\angle LBM = \angle MFK$ וזוויות קודקודיות $\angle LMB = \angle KMF$, נקבל:

$$\triangle LMB \sim \triangle KMF\,.$$

בתרשים רשמנו את אורכי הקטעים תוך שימוש בנעלמים a, b, c.

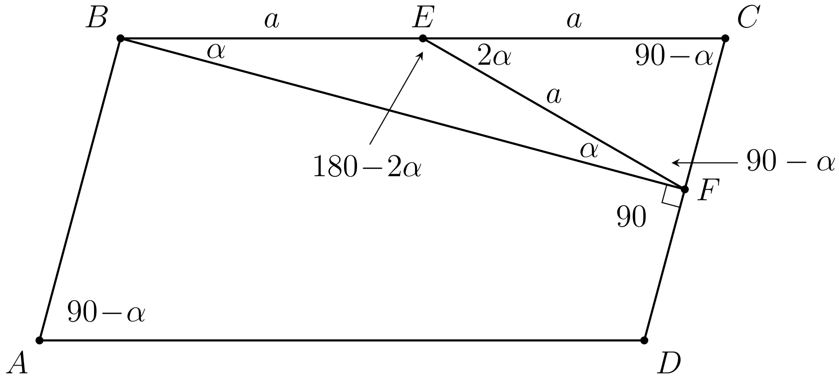


$$\frac{c}{b-c} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$
$$b = 4c$$
$$\frac{LM}{MN} = \frac{c}{2b-c} = \frac{a}{2 \cdot 4c - c} = \frac{1}{7}\,.$$

סעיף ג לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-180°".

בתרשים להלן הוספתי את הנתון $BE = EF$. אפשר למצוא פתרון שמשתמש במשפט 87 "משולש בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה הוא משולש ישר זווית".

אפשר לפתור את השאלה ללא שימוש במשפט 86. נתון ש-$BE = EF$, ולכן $\angle EBF = \angle EFB$ שנסמן α. כדי שסכום הזוויות במשולש יהיה 180, $\angle BEF = 180 - 2\alpha$, ולפי זוויות משלימות $\angle CEF = 2\alpha$. נתון גם ש-$BE = EC$ ולכן $\angle ECF = \angle EFC$, והזוויות הללו שוות $90 - \alpha$ כדי שסכום הזוויות במשולש יהיה 180. נחבר זוויות ונקבל $\angle BFD = 90$.



לפי משפט 26 ״במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו״ $\angle BAD = \angle BCD = 90 - \alpha$. לפי משפט 56 חייב להתקיים:

$$\angle BFD + \angle BAD = 90 + (90 - \alpha) = 180 - \alpha = 180\,.$$

נתון ש-$\angle BAD$ היא זווית חדה (פחות מ-90°) ולכן $\alpha > 0$, שסותר את $180 - \alpha = 180$.

אי אפשר לחסום את המרובע במעגל.

4.5 קיץ תשע״ז מועד א

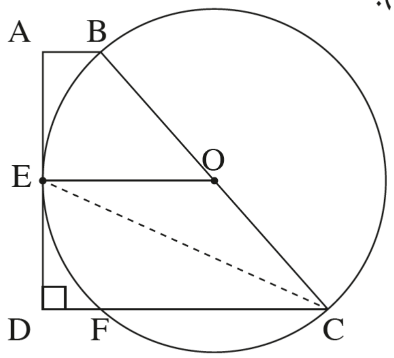
נתון מעגל שמרכזו O .

ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel DC$, $\sphericalangle ADC = 90^o$).

הצלע AD משיקה למעגל בנקודה E ,

והנקודות B ו־ C נמצאות על המעגל כך ש־ BC הוא קוטר.

הצלע DC חותכת את המעגל בנקודה F , כמתואר בציור.



א. הוכח: $\sphericalangle BCD = 2\sphericalangle DEF$.

ב. הוכח: $\Delta ABE \cong \Delta DFE$.

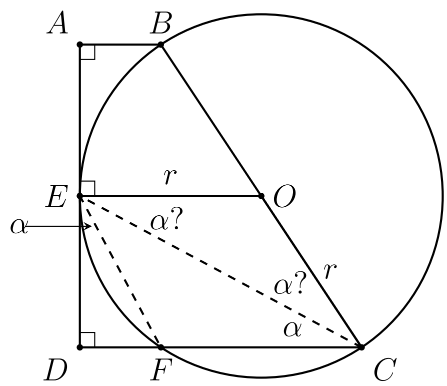
ג. הוכח: $BC = DF + DC$.

סעיף א

השאלה שואלת על זוויות ויש לנו קווים מקבילים, משיק וזווית ישרה. ננסה להסיק מסקנות על זוויות. מחברי השאלה סיפקו רמז: הקו המקווקוו EC. $\angle DEF$ היא הזווית בין המשיק ED לבין במיתר EF. לפי משפט 79 ״זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני״, $\angle DEF = \angle ECF$. סימנו את הזוויות ב-α.

אם נידע את $\angle ECO$, נקבל $\angle BCD = \angle ECF + \angle ECO$. נתון ש-$AB \| DC, \angle ADC = 90^\circ$. המשיק מאונך לרדיוס EO, ולכן, $EO \perp AD$, $EO \| DC$, ו-$\angle OEC = \angle ECD = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות. $\triangle ECO$ שווה-שוקיים כי הצלעות הן רדיוסים, ולכן $\angle ECO = \alpha$ ו:

$$\angle BCD = \angle ECF + \angle ECO = 2\alpha = 2\angle DEF\,.$$



הוכחה אחרת משתמשת במשפט 103 ״אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק״. לכן:

$$\begin{aligned} ED^2 &= DC \cdot DF \\ \frac{ED}{DF} &= \frac{DC}{ED} \\ \triangle EDF &\sim \triangle CDE\,. \end{aligned}$$

נשתמש במשפט 69 ״במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת״. $\angle BOE = \angle BCD$ לפי זוויות מתאימות, ולכן:

$$\angle BCD = \angle BOE = 2 \cdot \angle BCE\,.$$

מחיבור של זוויות:

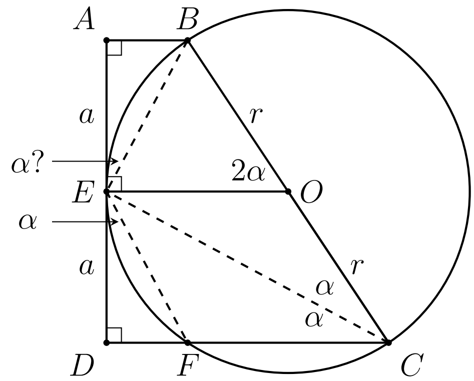
$$\angle ECD = \angle BCD - \angle BCE = \angle BCD - \angle BCD/2 = \angle BCD/2\,.$$

הוכחנו ש-$\triangle EDF \sim \triangle CDE$, ולכן:

$$\angle DEF = \angle ECD = \angle BCD/2\,.$$

סעיף ב

נתון ש-BC הוא קוטר שמרכזו O ולכן $BO = OC = r$. נפעיל את השפט 44 ״בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה״ על הטרפז $ABCD$, כדי לקבל $AE = DE$. נבנה את המיתר BE. לפי משפט 79, $\angle AEB = \angle ECB$, הזווית ההיקפית, ומהסעיף הקודם, $\angle ECB = \angle ECO = \angle DEF = \alpha$. $\angle EAB = \angle EDF = 90$, ולכן $\triangle ABE \cong DFE$ לפי צ.ז.צ.



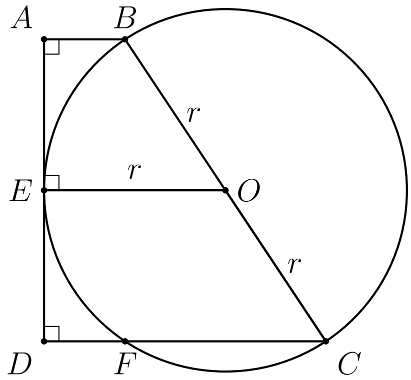
הוכחה אחרת מחשבת זוויות של $\triangle BOE$ שהוא שווה-שוקיים כי $BO = OC = r$. בסעיף א הוכחנו ש-$\angle BOE = 2\alpha$, ולכן $\angle BEO = \angle OBE = 90 - \alpha$. כדי להשלים ל-90, $\angle AEB = \alpha$ ו-$\angle DEF = \alpha$. $BE = EF$ בגלל שהם נשענים על זוויות היקפיות שוות $\angle BCE = \angle ECF = \alpha$, ולכן $\triangle ABE \cong \triangle DFE$.

סעיף ג

האורך של BC הוא $2r$, כך שעלינו להוכיח ש-$DF + DC = 2r$. אם נפשט את התרשים נראה ש-EO הוא קטע אמצעים של הטרפז $ABCD$, כי $BO = OC = r$ ו-$AE = ED$ לפי הסעיף הקודם. לפי משפט 43 ״קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם״:

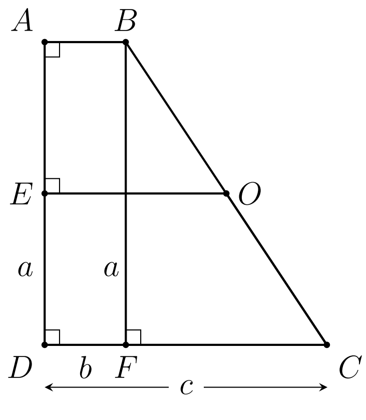
$$\begin{aligned} EO &= \frac{1}{2}(AB + DC) \\ &= \frac{1}{2}(DF + DC) = r\,, \end{aligned}$$

כי $AB = DF$ לפי משולשים חופפים שהוכחנו בסעיף הקודם, ו-EO הוא רדיוס. מכאן ש-$BC = 2r =$ $DF + DC$.

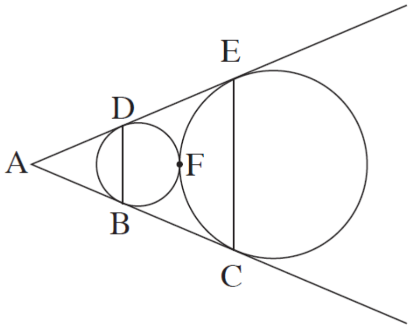


הוכחה אחרת משתמשת במשפט פיתגורס ומשפט 103 על משיק וקו חותך. נסמן את אורכי הצלעות בתרשים ונקבל:

$$\begin{aligned} a^2 &= bc \\ BC^2 &= (2a)^2 + (c-b)^2 = 4a^2 + (c-b)^2 \\ &= 4bc + c^2 - 2bc + b^2 \\ &= c^2 + 2bc + b^2 = (c+b)^2 \\ BC &= c + b = DC + DF\,. \end{aligned}$$



4.6 חורף תשע"ז



נתונים שני מעגלים בעלי רדיוס שונה,

המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה F .

AC משיק לשני המעגלים בנקודות B ו־ C ,

AE משיק לשני המעגלים בנקודות D ו־ E ,

כמתואר בציור.

א. הוכח שהמרובע BDEC הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. המשיק המשותף למעגלים העובר בנקודה F חותך את שוקי הטרפז, BC ו־ DE , בנקודות G ו־ H בהתאמה.
הוכח: GH הוא קטע אמצעים בטרפז.

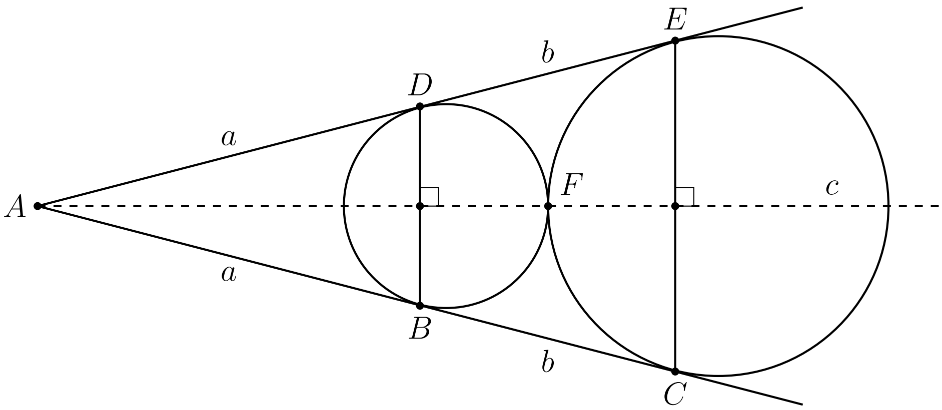
ג. נסמן ב־ R את רדיוס המעגל הגדול וב־ r את רדיוס המעגל הקטן.
הוכח כי $R \cdot BD = r \cdot CE$.

סעיף א

נפעיל את משפט 80 "שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה" על AC, AE :

$$\begin{aligned} AD &= AB = a \\ AE &= AC = a+b \\ DE &= BC = b\,. \end{aligned}$$

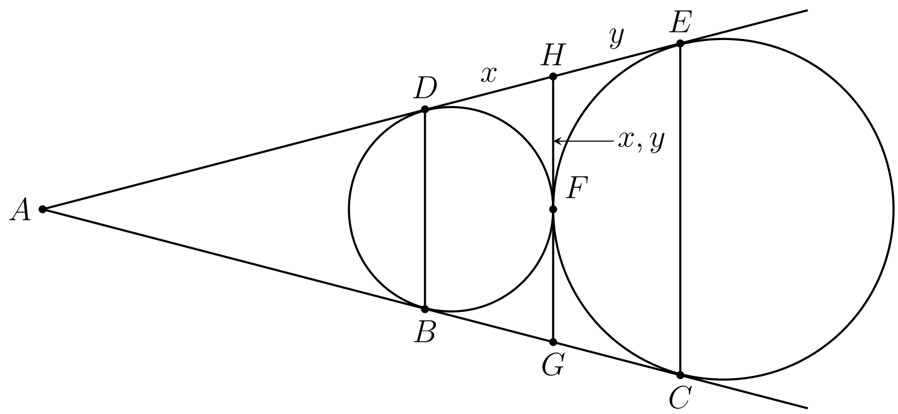
אם נוכיח ש-$DB \| EC$, המרובע $BDEC$ יהיה טרפז לפי ההגדרה והוכחנו שהוא שווה-שוקיים.



$\triangle AEC \sim \triangle ADB$ לפי צ.ז.צ כי יש להם זווית משותפת ב-A והוכחנו ש-$\frac{AB}{AC} = \frac{a}{a+b} = \frac{AD}{AE}$. המשולשים $\triangle ADB, \triangle AEC$ שווה-שוקיים, ולכן לפי משפט 6 "במשולש שווה-שוקיים , חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים". הקו c, חוצה הזווית $\angle A$, הוא גם גובה. מכאן שבסיסי המשולשים DB, EC מאונכים שניהם לקו c ו-$DB \| EC$.

סעיף ב

במבט ראשון חשבתי להשתמש במשפט 43 ״קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם״, כאן, $GH = \frac{1}{2}(BD + CE)$, והנוסחה לשטח של טרפז $S_{BDEC} = h \cdot \frac{1}{2}(BD + CE)$, אבל זה לא הוביל לפתרון. אחר כך ניסיתי להשתמש במשפט 14 ״קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה״, אבל לא מצאתי משולש מתאים. לאחר פישוט התרשים שמתי לב שאפשר להפעיל את משפט 80 על הנקודות H, G. $DH = HF = x$ ו-$HE = HF = y$, ולכן $DH = HE$. אותה הוכחה מראה ש-$BG = GC$, ו-GH הוא קטע אמצעים של הטרפז.



סעיף ג

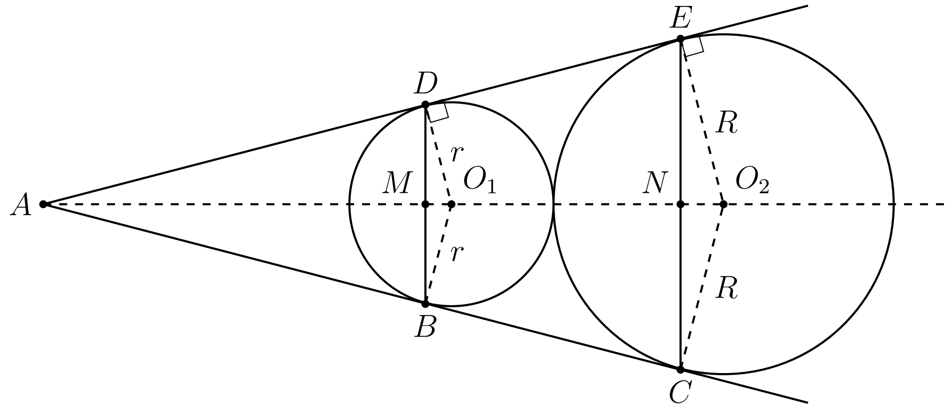
נוכיח ש-$\triangle BO_1D \sim \triangle CO_2E$, כאשר O_1, O_2 הן מרכזי המעגלים, ולכן:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{r}{R}\,.$$

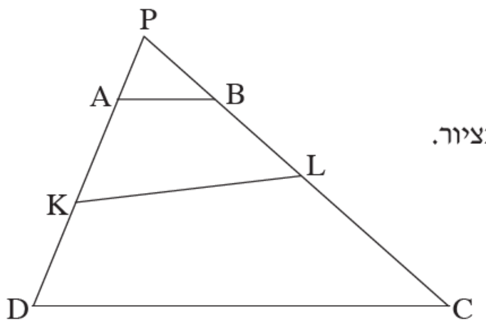
המשולשים מורכבים משני זוגות של משולשים ישר-זווית חופפים $\triangle MO_1B \cong \triangle MO_1D$ ו-$\triangle NO_2E \cong \triangle NO_2C$, כי $O_1D = O_1B = r$, $O_2E = O_2C = R$, ו-O_1M, O_2N הן צלעות משותפות. כבר הוכחנו ש-$DB \| EC$ והזוויות בין הרדיוסים למשיקים ישרות, ולכן:

$$\angle MDO_1 = 90 - \angle MDA = 90 - \angle NEA = \angle NEO_2\,,$$

ו-$\triangle BO_1D \sim \triangle CO_2E$ לפי ז.ז.



4.7 קיץ תשע"ו מועד ב



4. נתון משולש PDC.

הנקודות B ו־ L מונחות על הצלע PC.

הנקודות A ו־ K מונחות על הצלע PD, כמתואר בציור.

נתון כי המרובע ABLK הוא בר־חסימה במעגל

וגם המרובע KLCD הוא בר־חסימה במעגל.

א. הוכח: AB ∥ DC.

נתון: PA = 3 ס"מ , PB = 4 ס"מ ,

שטח המשולש ABP הוא S סמ"ר,

שטח המרובע ABCD הוא 24S סמ"ר.

ב. האם אפשר לחסום במעגל את המרובע ABCD ? נמק.

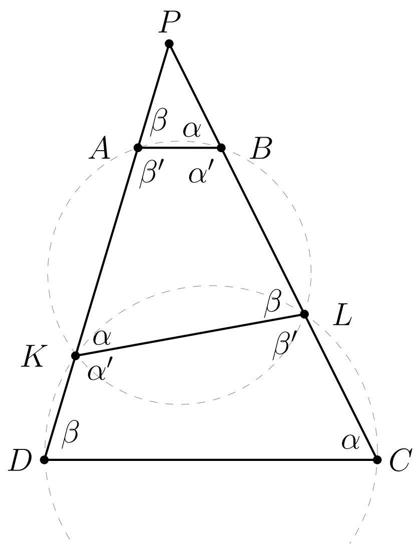
ג. מצא את אורך הצלע PD.

ד. נתון גם: BL = 5 ס"מ.

היעזר בדמיון משולשים והבע באמצעות S את שטח המרובע KLCD.

סעיף א

לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-$180°$". נבנה את שני המעגלים החוסמים את המרובעים, ונבחר זוג זוויות נגדיות, למשל, $\angle ABL, \angle LKA$, במרובע $ABLK$. נסמן $\angle LKA = \alpha$ ונשתמש בקיצור $\alpha' = 180° - \alpha$ עבור הזווית הנגדית $\angle ABL$. לפי זוויות משלימות בנקודה B, $\angle ABP = \alpha$, ובנקודה K, $\angle LKD = \alpha'$. נפעיל שוב את משפט 56 כדי להסיק ש-$\angle LCD = \alpha$. מכאן ש-$AB \| DC$ לפי זוויות מתאימות.



סעיף ב

כדי להפעיל שוב את משפט 56 נצטרך להוכיח שהזוויות הנגדיות במרובע $ABCD$ מקיימות $\angle BAD + \angle BCD = 180, \angle ADC + \angle ABC = 180$. נסמן $\angle ADC = \beta$.

הוכחנו ש-$AB \| DC$, ולפי זוויות מתאימות בנקודות A, D ו-B, C, וזוויות משלימות בנקודות A, B, נקבל $\angle PAB = \angle ADC = \beta$, $\angle PBA = \angle BCD = \alpha$.

אם המרובע $ABCD$ בר חסימה, $180 = \alpha' + \beta = 180 - \alpha + \beta$, כך ש-$\alpha = \beta$ שסותר את הנתון $PA \neq PB$. לא ניתן לחסום את המרובע $ABCD$.

סעיף ג

$\triangle PDC \sim \triangle PAB$ לפי ז.ז., אולם, זה לא עוזר: אמנם נתון היחס בין PA, PB, אבל יש שני זוגות של נעלמים PD, PC ו-AB, DC. ניתן השטחים של שני המושלים, ולפי משפט 100 ז "יחס הצלעות הוא השורש של יחס השטחים", נוכל לחשב את יחס הצלעות:

$$\frac{PA}{PD} = \sqrt{\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle PDC}}} = \sqrt{\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABP} + S_{ABCD}}} = \sqrt{\frac{S}{S + 24S}} = \frac{1}{5},$$

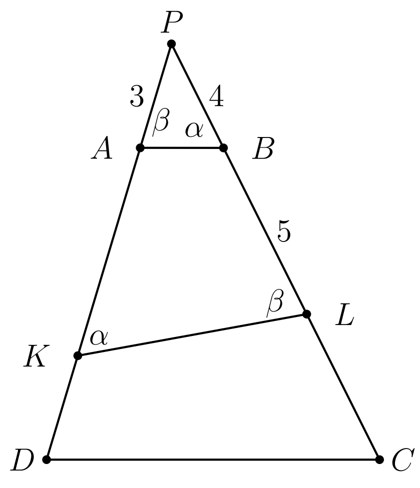
ו-$PD = 5PA = 15$.

סעיף ד

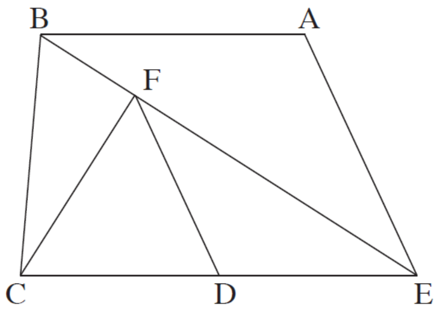
$\triangle LKP \sim \triangle ABP$ לפי ז.ז. יחס השטחים מתקבל מיחס אורכי הצלעות הנתונים ושחישבנו:

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle LKP}} = \left(\frac{PA}{PL}\right)^2 = \left(\frac{3}{4+5}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$S_{KLCD} = S_{\triangle PDC} - S_{\triangle LKP} = 25S - 9S = 16S.$$



4.8 קיץ תשע"ו מועד א



נתון טרפז ABCE $(AB \parallel EC)$

הנקודה F נמצאת על האלכסון BE

כך ש־ $CF \perp BE$.

הנקודה D היא אמצע הבסיס CE (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle CEB = \sphericalangle AEB$

$ED = 3a \quad , \quad EA = 4a$

א. הוכח כי $\Delta EAB \sim \Delta EDF$.

ב. נתון כי שטח המשולש EAB הוא S .

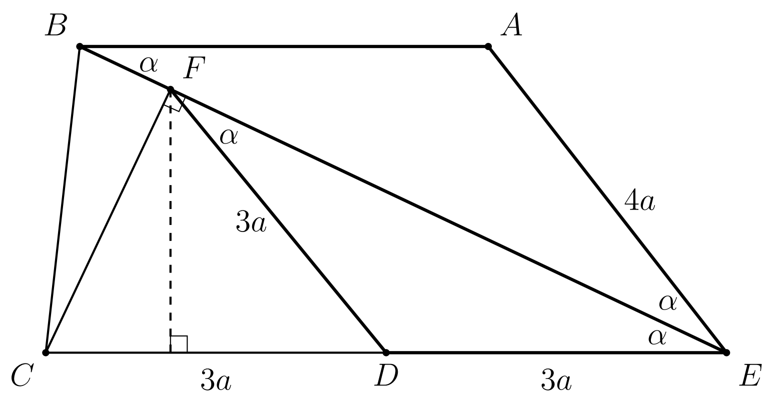
הבע באמצעות S את שטח המשולש CEF .

ג. המשך DF חותך את AB בנקודה G .

הבע באמצעות S את שטח המשולש BFG .

סעיף א

נסמן את הזוויות $\angle AEB = \angle CEB = \alpha$ ונמסן את האורכים הנתונים. לפי משפט 86 "במשולש ישר-זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר", ולכן $DF = CD = DE$. $\triangle EDF$ שווה-שוקיים ולכן $\angle DFE = \alpha$. כמו כן, נתון ש-$AB \| EC$, כך ש-$\angle ABE = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות עם $\angle CEB$. לפי ז.ז. $\triangle EDF \sim \triangle EAB$.



סעיף ב

נבנה גובה מ-F ל-CE. חדי עין ישימו לב גובה זה משותף לשני המשולשים $\triangle CFD, \triangle EFD$. הבסיסים $CD = DE = 3a$ שווים, ולכן השטחים של שני המשולים שווים. בסעיף א הוכחנו ש- $\sim \triangle CEB$ AEB, לפי משפט 100 ז "יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון":

$$\frac{S_{\triangle EFD}}{S_{\triangle EAB}} = \left(\frac{ED}{EA}\right)^2 = \left(\frac{3a}{4a}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$S_{\triangle CEF} = S_{\triangle CFD} + S_{\triangle DFE} = 2\, S_{\triangle DFE} = \frac{9}{8} S\,.$$

סעיף ג

אנחנו צריכים את אורכה של צלע אחת של $\triangle BFG$ כדי לחשב את יחס השטחים. כבר הראינו ש-$\angle ABE = \angle BEC = \alpha$ ו-$\angle BFG = \angle DFE = \alpha$ הן זוויות קודקודיות. לכן לפי ז.ז., $\triangle BFG \sim \triangle DFE$ $\angle AGD = 2\alpha$ לפי משפט 13 "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה". המרובע $AGDE$ הוא מקבילית לפי משפט 29 "מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית". $GD = GF + FD$ וכעת ניתן לחשב את GF:

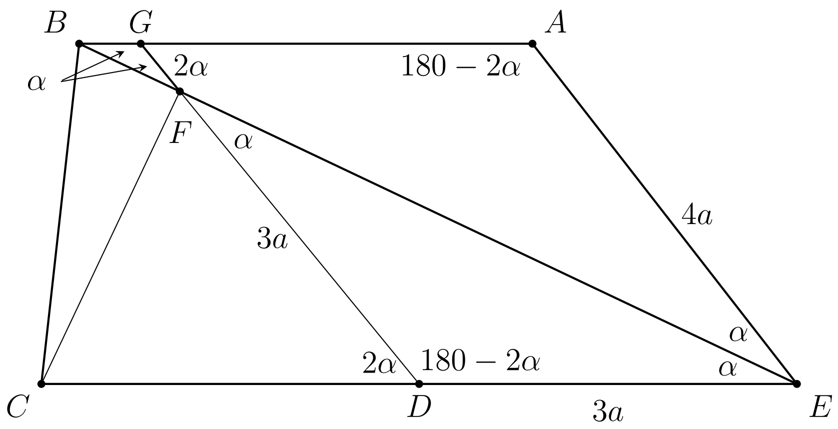
$$GF = GD - DF = EA - DF = 4a - 3a = a\,.$$

נשתמש שוב במשפט 101 ז:

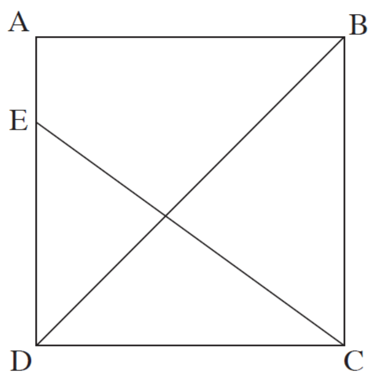
$$\frac{S_{\triangle BFG}}{S_{\triangle DFE}} = \left(\frac{a}{3a}\right)^2 = \frac{1}{9}\,.$$

לפי סעיף א, $\triangle DFE = \triangle CEF$, ולכן:

$$S_{\triangle BFG} = \frac{1}{9}S_{\triangle DFE} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}S_{\triangle CEF} = \frac{1}{(9\cdot 2)}\frac{9}{8}S = \frac{1}{16}S\,.$$



4.9 חורף תשע"ו



בריבוע ABCD הנקודה E
נמצאת על הצלע AD (ראה ציור).
מעגל העובר דרך הנקודות E , D ו־ C
חותך את האלכסון BD בנקודה M ,
ואת הצלע BC בנקודה N .
הנקודה M נמצאת בין הקדקוד B
ובין נקודת החיתוך של BD עם CE .

א. הוכח כי CD = EN .

ב. האם הקטע DM קצר מהקטע CE ,
ארוך ממנו או שווה לו? נמק.

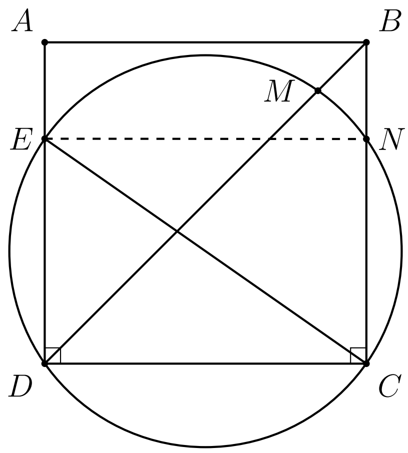
ג. הוכח כי BM · BD = AE · AD .

סעיף א

נצייר תרשים עם הנקודות M, N והקו EN. המעגל עובר דרך הנקודות C, D, E, ונתון גם שהנקודה N נמצאת על המעגל. מכאן ש-$ENDC$ הוא מרובע החסום במעגל. נשתמש במשפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-$180°$". $ABCD$ הוא ריבוע כך ש-$\angle ADC =$ $\angle EDC = 90°$, $\angle BCD = \angle NCD = 90°$. לפי המשפט:

$$\angle ENC = 180 - \angle EDC = 90, \quad \angle NED = 180 - \angle NCD = 90\,.$$

מרובע שכל הזוויות שלו ישרות הוא מלבן ו-$CD = EN$.

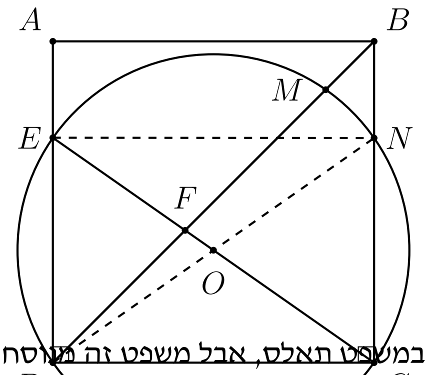


הוכחה אחרת משתמשת במשפט 74 ״זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר״. הנקודות C, D, E, N נמצאות על מעגל, $\angle EDC = 90^\circ$, כך ש-EC הוא קוטר. לפי המשפט ההפוך 73 $\angle ENC = 90^\circ$. כדי להשלים את סכום הזוויות במרובע ל-360°, $\angle NED$ חייב להיות 90° ו-$ENDC$ הוא מלבן.

סעיף ב

בזבזתי הרבה זמן בנסיונות לפתור סעיף זה, כי חשבתי להשוות אורכים לפי משולשים דומים או משפט פיתגורס. לבסוף נזכרתי במשפט 66 ״במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מהמיתר האחר״. בהוכחה השנייה לסעיף א ראינו ש-EC הוא קוטר, ולכן הוא ארוך יותר מכל מיתר שאינו קוטר. מה שנשאר הוא להוכיח ש-DM אינו קוטר, ולכן DM קצר יותר מ-CE.

נתון ש-E נמצאת **על** AD, ונניח שהכוונה היא ש-E שונה מנקודות הקצה A, D. הוכחנו ש-$EN\|AB$ ולכן אם E שונה מ-A גם N שונה מ-B. $ENDC$ הוא מלבן, ולכן $\angle NCD = 90$ ו-DN הוא קוטר. נתון שהנקודה M נמצאת בין B לבין נקודת החיתוך המסומן ב-F, ולכן M אינה מתלכדת עם N ו-DM הוא מיתר שאינו קוטר.

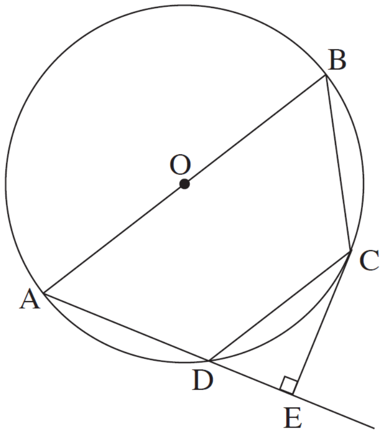


סעיף ג

הנטייה הראשונה היא להשתמש במשפט תאלס, אבל משפט זה מנוסח כחילוק ולא ככפל על קטעים של אותו קו. המשפט שמנוסח ככפל הוא משפט 102 ״אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני״. BC, BD הם חותכים היוצאים מנקודה B, ולפי המשפט $BM \cdot BD = BN \cdot BC$. $AD = BC$ כי הן צלעות בריבוע, ו-$ED = NC$ כי הן צלעות של $ENCD$ שהוכחנו שהוא מלבן. מכאן:

$$BM \cdot BD = BN \cdot BC = (BC - NC) \cdot BD = (AD - ED) \cdot AD = AE \cdot AD\,.$$

4.10 קיץ תשע״ה מועד ב



מרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו O.

הצלע AB היא קוטר.

E היא נקודה על המשך AD כך ש־ $CE \perp AE$.

א. הוכח: $\Delta CDE \sim \Delta ABC$.

נתון גם: $OD \perp AC$, $\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}$.

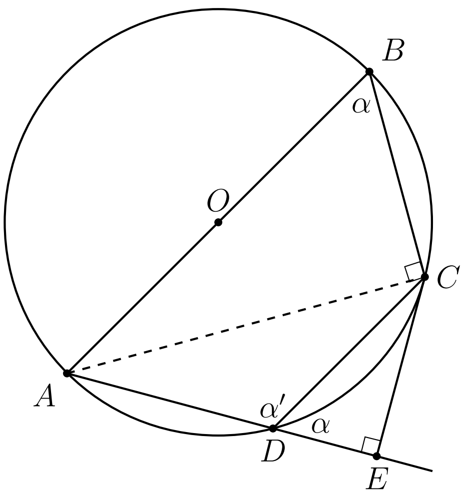
ב. הוכח כי $OC \parallel AD$.

ג. הוכח כי CE משיק למעגל.

סעיף א

לפי משפט 56 ״ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-$180°$״. נתון גם שהצלע AB היא קוטר ולפי משפט 73 ״זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה ($90°$)״. נבנה את הקו AC ונסמן $\angle ACB = 90°$ כי הוא נשען על קוטר.

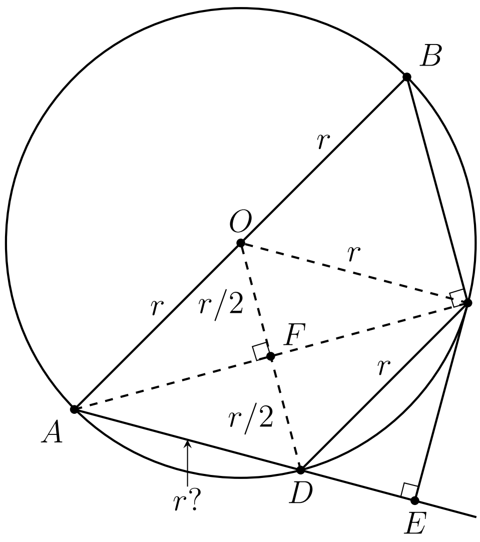
נסמן זוויות לפי משפט 56: $\angle ABC = \alpha$, $\angle ADC = 180 - \alpha = \alpha'$. לפי זוויות משלימות בנקודה D, $\angle CDE = 180 - \alpha' = \alpha = \angle ABC$, ו-$\triangle CDE \sim \triangle ABC$ לפי ז.ז.



סעיף ב

אם נוכיח שהמרובע $AODC$ הוא מקבילית נקבל $OC \| AD$. נתון ש-$OD \perp AC$, כך שאם המרובע הוא מקבילית, הוא גם מעוין לפי משפט 36 ״מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין״. למעשה לא צריך להשתמש בנתון $OC \| AD$, ובמשפט 36 כדי להוכיח שאם המרובע הוא מקבילית אז הוא מעוין כי $OA = OC = r$.

לפי משפט 100 ז ״יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון״, יחס הצלעות במשולשים הדומים הוא $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. מכאן ש-$CD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 2r = r$. אם נוכיח ש-$AD = r$ יהיה לנו את המקבילית (מעוין) שנחוץ כדי להוכיח ש-$OC \| AD$.



נחזור לנתון $OD \perp AC$. הוכחנו ש-$\triangle OCD$ הוא שווה-שוקיים (למעשה הוא שווה-צלעות), כך ש-CA הוא גובה ל-OD, ולפי משפט 6 "במשולש שווה-שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים", ולכן $OF = FD = \frac{r}{2}$ ו-$\triangle OCF \cong \triangle DCF$.[1] אותה הוכחה מראה ש-$\triangle OAF \cong \triangle OCF$ ו-$\triangle OAF \cong \triangle DAF$. מכאן ש-$AD = OA = r$.

בפתרונות אחרים שראיתי, משתמשים בעובדה ש-$\triangle OCD$ הוא שווה-צלעות שהזוויות שלו הן 60°, לא מצאתי שזה נחוץ כדי להוכיח את הטענה.

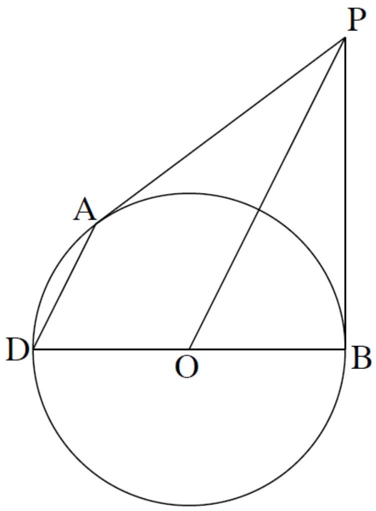
סעיף ג

משפט 78 הוא המשפט היחיד שהמסקנה שלו היא שקו הוא משיק: "ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל", כאן $CE \perp OC$. נשתמש בעובדה ש-$\triangle OCD, \triangle OAD$ הם שווה-צלעות ולכן $\angle OCD = \angle OAD = 60^\circ$. בסעיף א הוכחנו ש-$\triangle ABC \sim \triangle CDE$, כך ש-$\angle CAB = \angle ECD$. בסעיף ב הוכחנו ש-$AC$ הוא חוצה זווית של $\angle OAD$. מכאן:

$$\angle ECO = \angle ECD + \angle OCD = \angle CAB + 60^\circ = \frac{1}{2}\angle OAD + 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ + 60^\circ = 90^\circ\,.$$

[1] החפיפה נובעת ממשפט 20 "משפט חפיפה שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין השתיים" לאחר שנטען שהזווית הישרה גדולה יותר מהזוויות האחרות. בספרי גיאומטריה משתמשים במשפט זה כך: שני משלושים ישר-זווית חופפים עם היתר וצלע אחת שווים.

4.11 קיץ תשע"ה מועד א



PA ו־ PB משיקים למעגל שמרכזו O .

המשך BO חותך את המעגל בנקודה D (ראה ציור).

א. הוכח: PO ∥ AD .

הנקודה C נמצאת על הקוטר DB כך ש־ AC ⊥ DB.

ב. הוכח: ΔADC ~ ΔPOB .

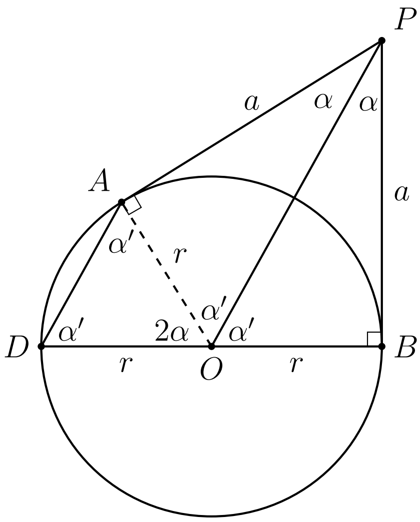
PD חותך את AC בנקודה E .

ג. הוכח: ΔDEC ~ ΔDPB .

ד. הוכח: AC = 2EC .

סעיף א

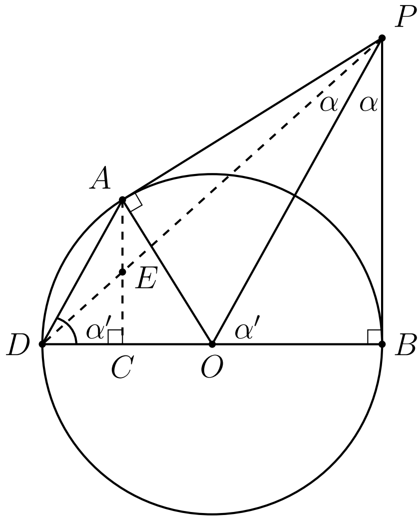
כאשר יש שני משיקים וקו מהנקודת החיתוך של המשיקים למרכז המעגל המשפטים הללו עשויים להיות קלוונטיים: משפט 77 "המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה", משפט 80 "שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה", ומשפט 81 "קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים".



נהשלים את שאר הזוויות כאשר השתמשנו בקיצור $\alpha' = 90^\circ - \alpha$, תוך שימוש בעובדות שסכום הזוויות במשולש הוא 180°, וסכום הזוויות המשלימות לזווית שטוחה הוא 180°. משוויון הרדיוסים נקבל ש-$\triangle AOD$ הוא שווה-שוקיים, ולכן $\angle ADO = \angle DAO = \alpha'$. לפי זוויות מתאימות $\angle ADO = \angle POB = \alpha'$, ו-$PD \| AD$.

סעיף ב

$\angle ADC = \angle POB = \alpha'$, ולכן עבור המשולשים ישר הזווית $\triangle ADC \sim \triangle POB$ לפי ז.ז.



סעיף ג

הזווית $\angle EDC$ של המשולש ישר-זווית $\triangle DEC$ היא למעשה אותה זווית PDB של המשולש ישר-זווית $\triangle DPB$, ולכן $\triangle DEC \sim \triangle DPB$ לפי ז.ז.

סעיף ד

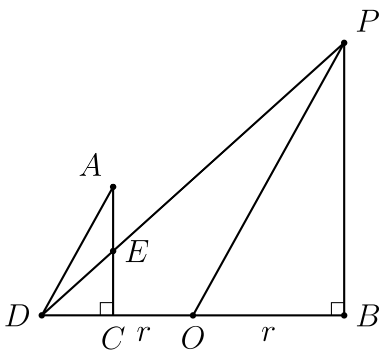
עלינו לחפש ערך אחד שהוא כפול מערך אחר. הקוטר DB כפול מהרדיוסים DO, OB. בסעיפים הקודמים הוכחנו ששני זוגות של משולשים דומים. נפשט את התרשים וננסה להוכיח את המשוואה תוך שימוש במשולשים. עבור AC, מסעיף ב $\triangle ADC \sim \triangle POB$, ולכן:

$$\frac{AC}{PB} = \frac{DC}{OB} = \frac{DC}{r}\,.$$

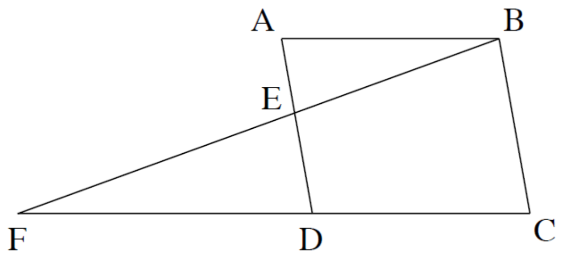
מסעיף ג $\triangle DEC \sim \triangle DPB$, ולכן:

$$\frac{EC}{PB} = \frac{DC}{DB} = \frac{DC}{2r}\,.$$

נציב את $PB \cdot DC$ ממשוואה השנייה בראשונה, ונקבל $AC = 2EC$.



4.12 חורף תשע"ה



במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD.

המשך BE חותך את המשך CD בנקודה F (ראה ציור).

נתון: שטח המשולש ABE הוא 27 סמ"ר.
שטח המשולש DFE הוא 48 סמ"ר.

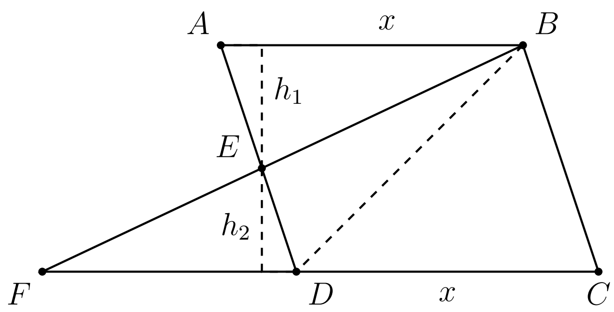
א. מצא את שטח המשולש BED.

ב. נתון גם כי המרובע BCDE הוא בר חסימה במעגל.
מצא את היחס $\frac{AB}{EF}$.

סעיף א

יש שתי דרכים לחשב את השטח של $\triangle BED$. הראשונה היא לחשב את השטח של $\triangle ABD$ ולהחסיר את השטח של $\triangle ABE$. לפי הסימונים בתרשים:

$$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}x(h_1+h_2)\,,\qquad S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}xh_1\,.$$



אם נוכל לבטא את h_2 במונחים של h_1, נוכל להחשב את $S_{\triangle BED}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle ABE}$.

$\triangle ABE\sim\triangle DFE$ לפי ז.ז. בגלל הזוויות המתחלפות ב-A, D ו-B, F. לפי משפט 100 ז "יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון":

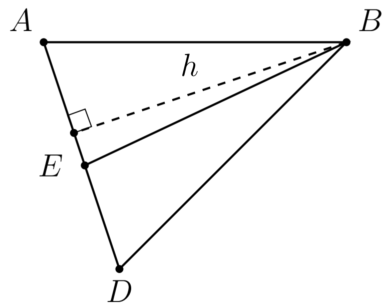
$$\begin{aligned}\frac{h_2}{h_1}&=\sqrt{\frac{S_{DEF}}{S_{ABE}}}=\sqrt{\frac{48}{27}}=\frac{4}{3}\\ S_{\triangle BED}&=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}x\left(h_1+\frac{4}{3}h_1\right)-\frac{1}{2}xh_1\\ &=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}xh_1\right)=\frac{4}{3}\left(S_{ABE}\right)=\frac{4}{3}\cdot 27=36\,.\end{aligned}$$

הדרך השנייה לחשב את השטח של $\triangle BED$ קשה לראות אבל החישוב מאוד פשוט. למשולשים $\triangle ABE, \triangle BED$ גובה זהה h מהנקודה B ועד AD. לכן יחס השטחים שווה ליחס הבסיסים:

$$\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{\frac{1}{2}hAE}{\frac{1}{2}hED} = \frac{AE}{ED} = \frac{4}{3}\,,$$

לפי יחס הצלעות במשולשים $\triangle DFE \sim \triangle ABE$ מסעיף א. מכאן:

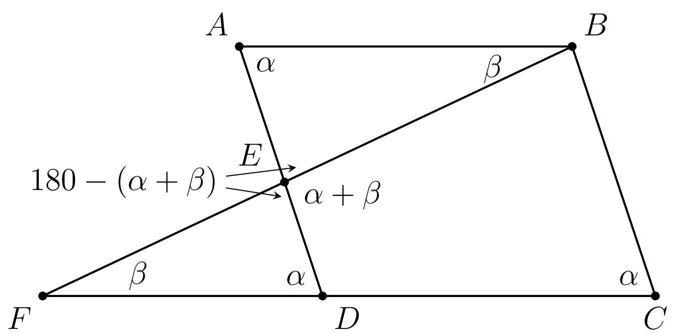
$$S_{\triangle BED} = \frac{4}{3}S_{\triangle ABE} = \frac{4}{3}\cdot 27 = 36\,.$$



סעיף ב

לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-180°". נסמן זוויות ונראה אם יוצא מזה משהו מועיל. נסמן ב-α את הזוויות הנגדיות של המקבילית A, C, ו-$D = C = \alpha$ לפי זוויות המתאימות. נסמן ב-β את הזוויות המתחלפות ב-B, F.

סכום הזוויות במשולש הוא 180 ולכן הזוויות הקודקודיות ב-E שוות ל-$180 - (\alpha + \beta)$. לפי זוויות משלימות $\angle BED = \alpha + \beta$.



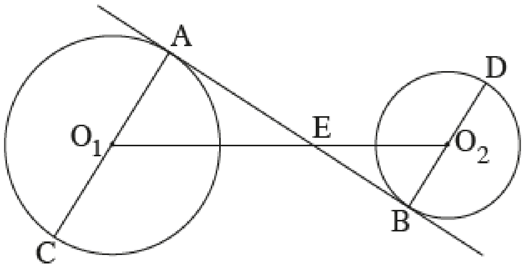
נפעיל את משפט 56 ונקבל:

$$\begin{aligned}
\angle BCD + \angle BED &= 180\\
\alpha + (\alpha + \beta) &= 180\\
\alpha &= 180 - (\alpha + \beta)\,.
\end{aligned}$$

המשולשים $\triangle ABE, \triangle DFE$ שווה-שוקיים! נשתמש ביחס שחישבנו בסעיף א:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AB}{FD} = \frac{3}{4}\,.$$

4.13 קיץ תשע״ד מועד ב



AC הוא קוטר במעגל שמרכזו O_1.
BD הוא קוטר במעגל שמרכזו O_2.
ישר משיק למעגלים O_1 ו־ O_2
בנקודות A ו־ B בהתאמה.
המשיק חותך את קטע המרכזים O_1O_2
בנקודה E (ראה ציור).
נתון: רדיוס המעגל O_1 הוא 30 ס״מ
רדיוס המעגל O_2 הוא 20 ס״מ
אורך קטע המרכזים O_1O_2 הוא 90 ס״מ

א. (1) מצא את היחס $\frac{O_1E}{O_1C}$. נמק.

(2) הוכח כי $\Delta EO_1C \sim \Delta EO_2D$.

ב. הוכח כי הנקודה E נמצאת על הישר CD.

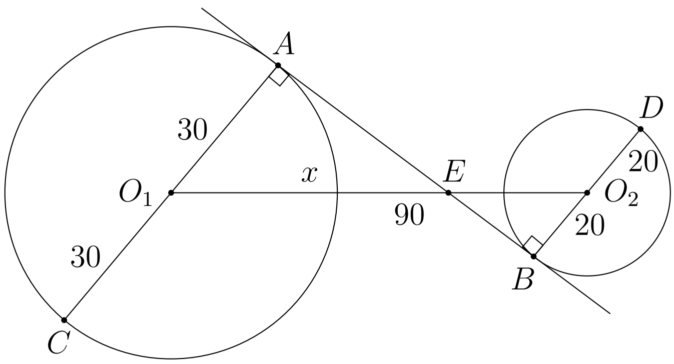
סעיף א (1)

לפי משפט 77 ״המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה״, $\angle O_1AE = \angle O_2BE = 90$. $\angle AEO_1 = \angle BEO_2$ כי הן זוויות קודקודיות. מכאן ש-$\triangle O_1AE \sim \triangle O_2BE$ לפי ז.ז. נסמן ב-x את אורכו של O_1E ונקבל:

$$\frac{O_1E}{O_2E} = \frac{x}{90-x} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{30}{20}$$

$$20x = 30 \cdot 90 - 30x$$

$$\frac{O_1E}{O_1C} = \frac{x}{O_1A} = \frac{54}{30} = \frac{9}{5}\,.$$



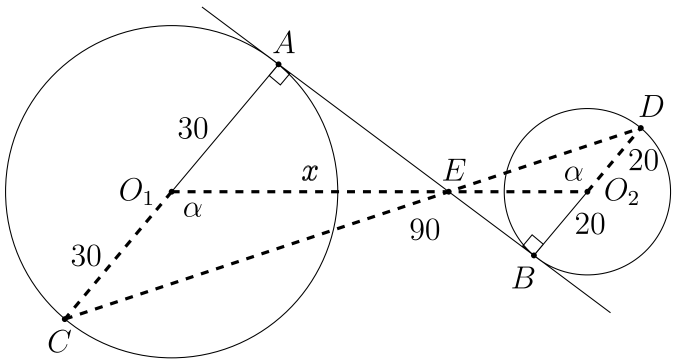
סעיף א (2)

חשבתי שאפשר להשתמש באותה שיטה כדי להוכיח $\triangle EO_1C \sim \triangle EO_2D$, אבל, כפי שמרמז סעיף ב, איננו יודעים שהנקודה E נמצאת על הקו הישר CD, ולכן איננו יכולים להניח ש-$\angle O_1EC = \angle O_2ED$ לפי זוויות קודקודיות. במקום זה, נשתמש בעובדה שהקוטרים מקביליים.

$AC \| DB$ כי שניהם ניצבים לקו O_1O_2, ולכן $\angle CO_1E = \angle DO_2E = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות. $O_1C = O_1A, O_2B = O_2D$ כי הם רדיוסים. הוכחנו ש-$\triangle EO_1A \sim \triangle EO_2B$, ולכן:

$$\frac{O_1E}{O_2E} = \frac{O_1C}{O_2D}\,,$$

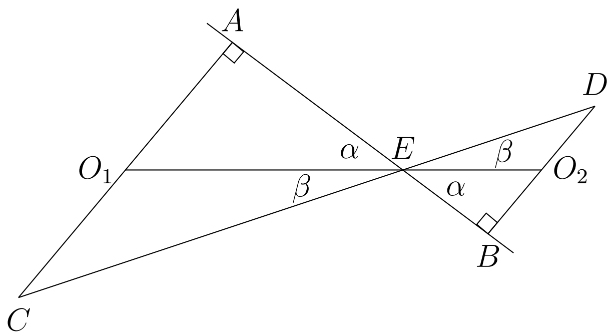
ו-$\triangle EO_1C \sim \triangle EO_2D$ לפי צ.ז.צ.



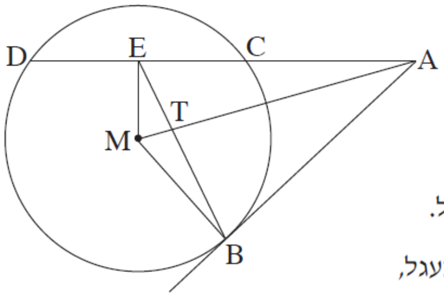
סעיף ב

הנקודה E נמצאת על CD אם $\angle AED + \angle AEC = 180^\circ$. הוכחנו $\triangle O_1EC \sim \triangle O_2ED$ ו-$\triangle O_1AE \sim \triangle O_2BE$, ונסמן את הזוויות השוות α, β. נתון ש-AB הוא קו ישר ו-$\angle AED$ משלימה ל-$\angle DEB$, כך ש-$\angle AED = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. נבדוק עם $\angle AED$ משלימה ל-$\angle AEC$:

$$\angle AED + \angle AEC = (180^\circ - (\alpha + \beta)) + \alpha + \beta = 180^\circ\,.$$



4.14 קיץ תשע״ד מועד א



מנקודה A יוצא ישר המשיק למעגל בנקודה B ,

ויוצא ישר אחר החותך את המעגל בנקודות C ו־ D .

הנקודה E היא אמצע המיתר DC .

הנקודה M היא מרכז המעגל (ראה ציור).

א. הוכח כי המרובע AEMB הוא בר חסימה בְּמעגל.

ב. אלכסוני המרובע AEMB , שהוא בר חסימה בְּמעגל,

נפגשים בנקודה T .

נתון כי הנקודה T היא מפגש התיכונים במשולש BDC .

הוכח כי $TB^2 = 2MT \cdot TA$.

ג. נתון: $TE = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ס״מ , $MT = 1$ ס״מ .

מצא את רדיוס המעגל החוסם את המרובע AEMB .

סעיף א

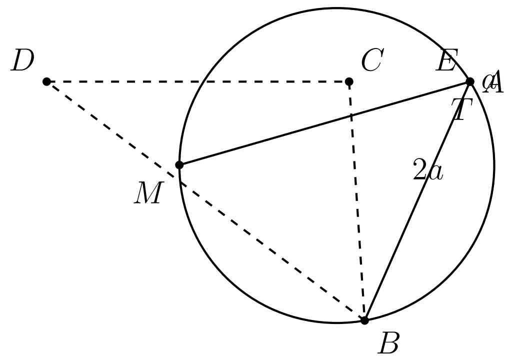
משפטים רלוונטיים: 103 ״אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק״, $AB^2 = AC \cdot AD$. 77 ״המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה״, $MB \perp AB$. 68 ״קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר״, $ME \perp DC$. 56 ״ניתן לחסום מרובע במעגל רק אם סכום הזוויות הנגדיות שווה ל-180°״.

מ-$MB \perp AB$ ו-$ME \perp DC$, $\angle MEA + \angle MBA = 180^\circ$. לפי משפט 106 ״סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $(n-2)180^\circ$״, סכום הזוויות הפנימיות של מרובע הוא 360°, ולכן:

$$\angle EMB + \angle EAB = 360^\circ - (\angle MEA + \angle MBA) = 180^\circ \,.$$

סעיף ב

בתרשים למטה מופיעים: המעגל החוסם את המרובע $AEMB$, האלכסונים שלו AM, EB והמשולש BDC. AM, EB הם מיתרים נחתכים של המעגל החוסם. לפי משפט 101 ״אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני״, $TB \cdot TE = MT \cdot TA$. אם נוכיח $TE = TB/2$, נקבל את המשוואה המבוקשת. נתון ש-T היא מפגש התיכונים, ולפי משפט 46 ״נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $1:2$״, כאן $TB/TE = 2/1$ או $TE = TB/2$.



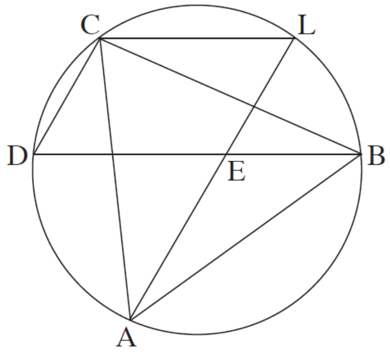
סעיף ג

רדיוס המעגל החוסם הוא קו מהמרכז לאחת הקוקודים A, E, M, B. אין אנו יודעים את מרכז המעגל, אבל MA יכול להיות קוטר ואז נקבל את הרדיוס כמחצית הקוטר.

מסעיף א $\angle MBA$ היא זווית ישרה, ולפי משפט 74 "זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר", MA הוא קוטר. עם הערכים הנתונים נחשב את הרדיוס תוך שימוש בנוסחאות מסעיף ב:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}MA \\ &= \frac{1}{2}(MT+TA) \\ &= \frac{1}{2}\left(MT+\frac{TB^2}{2MT}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(MT+\frac{(2TE)^2}{2MT}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2\cdot 1}\cdot 4\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2\right)=3\,. \end{aligned}$$

4.15 חורף תשע"ד



משולש שווה־צלעות ABC חסום במעגל.

נקודות D ו־ L נמצאות על המעגל כך ש־ $BD \| LC$.

המיתרים AL ו־ BD נחתכים בנקודה E (ראה ציור).

א. הוכח כי המרובע LEDC הוא מקבילית.

ב. (1) הוכח כי $\triangle ADE$ הוא משולש שווה־צלעות.

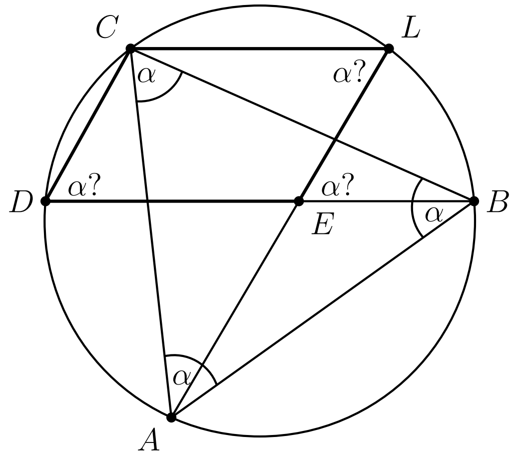
(2) הוכח כי $LC + LB = LA$.

סעיף א

אין לנו מידע על המיתרים המגדירים את המרובע, לכן ננסה להוכיח שהוא מקבילית לפי משפט 29 "מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית". זוויות שוות לפי משפט 72 "במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד של המיתר שוות זו לזו". נסמן את הזוויות של המשולש שווה-צלעות $\triangle ABC$ ב-$\alpha = 60°$.

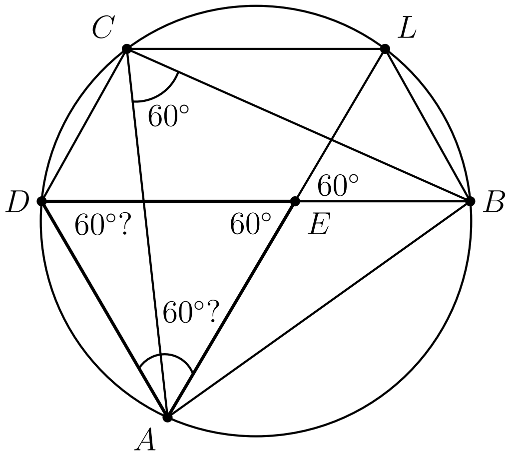
$\angle CLA = \angle CBA = \alpha$ כי הן נשענות על המיתר AC. $\angle CDB = \angle CAB = \alpha$ כי הן נשענות על המיתר BC. נתון ש-$BD \| LC$, ולכן $\angle LEB = \angle CLA = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות.

עכשיו נבדוק את הזוג השני $\angle LED, \angle LCD$. $\angle LED = 180 - \alpha$ לפי זוויות משלימות ב-E. נתון $BD \| LC$ ולכן $\angle LCD = 180 - \angle CDB = 180 - \alpha$ לפי זוויות חד-צדדיות, ו-$\angle LED = \angle LCD$.



סעיף ב (1)

ננסה להוכיח שכל הזוויות של המשולש $\triangle ADE$ שוות. מספיק להוכיח ששתי זוויות שוות ל-$60°$ כי השלישית צריכה להשלים ל-$180°$. בסעיף א הוכחנו ש-$\angle LEB = 60°$, ולכן $\angle DEA = 60°$ לפי זוויות קודקודיות. ננסה להוכיח ש-$\angle DAE = \angle DAL = 60°$ או $\angle ADE = \angle ADB = 60°$ על ידי חיפוש זוויות הנשענת על אותו מיתר. אכן, $\angle ADB, \angle ACB$ נשענות על המיתר AB.



סעיף ב (2)

מהחלק הראשון של הסעיף אנו יודעים ש-$\triangle ADE$ שווה-צלעות, $AE = DE$, ו-$LC = DE$ כי הן צלעות נגדיות של המקבילית. לכן $AE = LC$ ו:

$$LA - LC = (LE + AE) - LC = (LE + LC) - LC = LE\,.$$

נשאר להוכיח $LE = LB$. הוכחנו ש-$\angle LEB = 60^\circ$, כך שאם נוכיח שאחת מ-$\angle BLE, \angle LBE$ שווה ל-60° נקבל משלוש שווה-צלעות. שוב נחפש זוויות הנשענות על אותו מיתר ונקבל ש-$\angle BLE = \angle BLA = \angle BCA = 60^\circ$ כי שתיהן נשענות על המיתר AB.

תוך כי נסיונות לפתור את השאלה, מצאתי הוכחה אחרת מעניינת. $\angle LBD, \angle DCL$ נשענות על אותו קשת אבל **מצדדים נגדיים**. זווית היקפית שנשענת על קשת שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת (משפט 69), ולכן אם סכום שתי הקשתות הוא כל המעגל, סכום הזוויות שווה 180°. במקבילית, $\angle DCL = 120^\circ$, ולכן:

$$\angle LBE = \angle LBD = 180^\circ - \angle DCL = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ\,.$$

המלצות: גיאומטריה

- חשוב לצייר תרשימים **ברורים וגדולים**, עדיף עם סרגל ומחוגה. בתהליך הפתרון אנו מסמנים את המידע המצטבר על הזוויות והצלעות ויש לדאוג שיהיה מספיק מקום.

- כאשר לשאלה יש מספר סעיפים כדאי לצייר תרשימים נפרדים לכל סעיף תוך העלמת מידע לא רלוונטי לאותו סעיף.

- **אין לסמוך על התרשים**. לעתים, מה שנראה ברור בתרשים הוא בדיוק מה שעלינו להוכיח. בנספח א׳ הבאתי הוכחה שכל משולש הוא שווה-שוקיים (!), כאשר ההוכחה מסתמכת על תרשים שאינו נכון. מטרת התרשימים היא לחפש קשרים בין זוויות, צלעות, משיקים, וכו׳, כדי להעלות השערות על דרכים אפשרויות להוכחת הטענות.

- אני מעדיף לסמן זוויות עם אותיות יווניות כגון α, ולא על ידי ציון שלושת הנקודות המגדירות אותה $\angle ABC$. הסיבה היא שקשה יותר לעקוב אחר הנקודות השונות של הזוויות מלעקוב אחר סימן בודד.

- יש משפטים שזוכרים בקלות כי הם די אינטואטיביים, למשל, שמשולשים חופפים לפי צ.צ.צ. ודומים לפי ז.ז. יש משפטים אחרים שקשה יותר לזכור אותם ושהוכחת נכונותם לא קלה. למשל, אני מתקשה לזכור איך להפעיל את המשפט על משיק ומיתר. בנספח ב׳ הבאתי תרשימים צבעוניים של מבחר משפטים בתקווה שהתרשימים יקלו עליכם לזכור אותם, בוודאי יחסית לניסוחים מילוליים מסורבלים.

- כאשר שואלים על שטחים של משולשים יש לחפש גבהים משותפים. אנו רגילים לראות גבהים שיורדים מנקודה לקו אופקי, אבל גבהים יכולים להופיע מכל נקודה לקו ממול ללא קשר למצג של המשולש על הנייר.

- כדי להוכיח חפיפה של משולשים ישר-זווית, מספיק להוכיח שוויון של צלע אחת וזווית חדה אחת מכל משולש. אם הצלע היא בין זווית חדה לבין הזווית הישרה, החפיפה היא מיידית לפי ז.צ.ז. אם הצלע היא בין שתי הזוויות החדות (היתר), זווית שערכה α ושנייה שערכה β, אזי $\beta = 90° - \alpha$, ושוב יש ז.צ.ז. אני מניח שבבחינה צריך לרשום איך מגיעים מזווית חדה וצלע לז.צ.ז., אבל כאשר מחפשים הוכחה לחפיפה קיצור דרך זה יכול להועיל.

פרק 5 טריגונומטריה

5.1 קיץ תשע״ח מועד ב

ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB = AC)$.

BD הוא חוצה זווית במשולש ABC.

המשך הקטע BD חותך את המעגל החוסם את המשולש ABC בנקודה E.

גודל הזווית ABC הוא 2β.

א. הבע באמצעות β את $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$, היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש ADE.

אין צורך לפשט את הביטוי שקיבלת.

נתון: BE שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC.

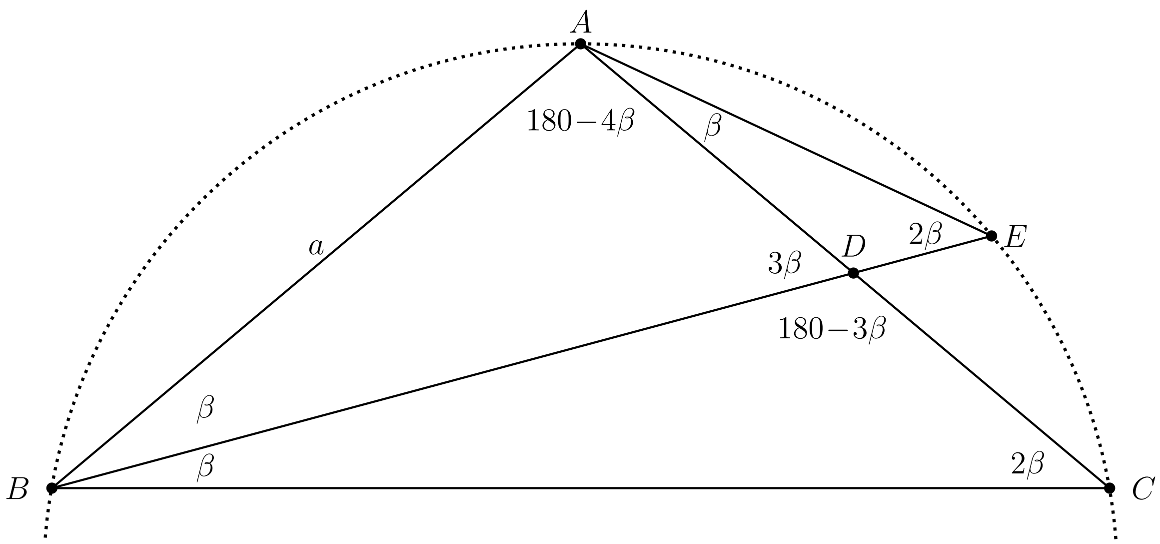
ב. חשב את היחס $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$.

נסמן ב־ a את אורך השוק AB.

ג. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל החסום על ידי המשולש ABC.

בתשובותיך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

להלן תרשים עם הזוויות הנתונות ב-B, C, ולאחר חישוב הזוויות האחרות לפי סכום של זוויות במשולש וזוויות משלימות. $\angle EAC = \angle EBC = \beta$, $\angle AEB = \angle ACB = 2\beta$, כי הן נשענות על אותן קשתות EC, AB.



סעיף א

$\triangle ABC$ משולש שוקיים ולפי הנוסחה הטריגונומטרית לשטח של משולש:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin(180-4\beta) = \frac{a^2}{2} \sin 4\beta\,.$$

כדי שהיחס יהיה ביטוי ב-β בלבד, עלינו למצוא ביטוי ל-$S_{\triangle ADE}$ כך ש-a^2 יצטמצם.

ב-$\triangle ABD$ ו-$\triangle ABE$ צלע אחת שווה a וצלע שנייה היא באורך AD ו-AE. לפי חוק הסינוסים:

$$\begin{aligned}
\frac{AE}{\sin\beta} &= \frac{a}{\sin 2\beta}\\
AE &= \frac{a\sin\beta}{\sin 2\beta}\\
\frac{AD}{\sin\beta} &= \frac{a}{\sin 3\beta}\\
AD &= \frac{a\sin\beta}{\sin 3\beta}\\
S_{\triangle ADE} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sin\beta}{\sin 2\beta}\cdot\frac{a\sin\beta}{\sin 3\beta}\cdot\sin\beta\\
&= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin^3\beta}{\sin 2\beta\sin 3\beta}\\
\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} &= \frac{\sin 4\beta\sin 2\beta\sin 3\beta}{\sin^3\beta}\,.
\end{aligned}$$

הוכחה אחרת: לחשב AE או AD, ולהשתמש בחוק הסינוסים על $\triangle ADE$ כדי לחשב את השני.

סעיף ב

נשתמש בחוק הסינוסים על $\triangle ABE$ עם צלע BE, ומ-$R = BE$ הרדיוס יצטמצם:

$$\begin{aligned}
2R &= \frac{BE}{\sin(180-4\beta+\beta)} = \frac{BE}{\sin 3\beta} = \frac{R}{\sin 3\beta}\\
2\sin 3\beta &= 1\\
3\beta &= 30^\circ\\
\beta &= 10^\circ\,.
\end{aligned}$$

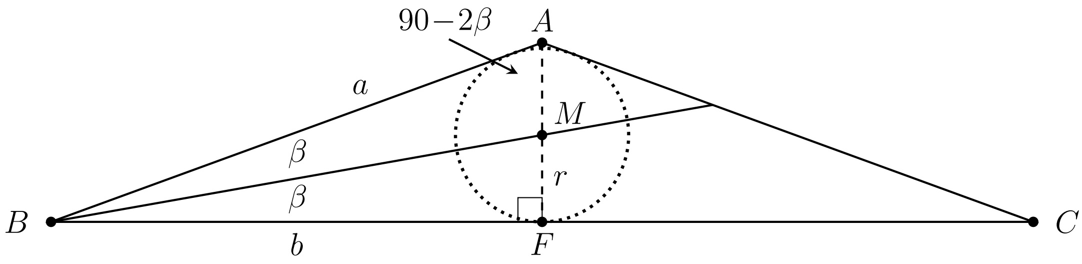
נכון שגם $\sin 3\cdot 50 = \frac{1}{2}$, אבל לא ייתכן שלמשולש שתי זוויות של $2\cdot 50 = 100$.

עם ערכו של β נוכל לחשב את יחס השטחים:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{\sin 4\beta\sin 2\beta\sin 3\beta}{\sin^3\beta} = \frac{\sin 40\sin 20\sin 30}{\sin^3 10} = 20.99^\circ\,.$$

סעיף ג

לפי משפט 6 "במשולש שווה-שוקיים , חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים", כך שחוצה הזווית $\angle BAC$ ניצב ל-BC בנקודה F. לפי משפט 49 "שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש", הנקודה המסומנת M בתרשים היא מרכז המעגל החסום.



נשאר רק להשתמש בהגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות. ב-$\triangle ABF$:

$$\begin{aligned}\sin(90-2\beta) &= \frac{b}{a}\\ b &= a\cos 2\beta\,.\end{aligned}$$

ב-$\triangle BMF$:

$$\begin{aligned}\tan\beta &= \frac{r}{b}\\ r &= a\cos 2\beta\tan\beta\\ &= a\cos 20\tan 10 = 0.1657a\,.\end{aligned}$$

5.2 קיץ תשע"ח מועד א

ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle ABC = 90^o$).

M היא נקודה על היתר כך ש- $AM : MC = \sqrt{3} : 4$.

נתון: $\sphericalangle ABM = 30^o$, $BM = 8$.

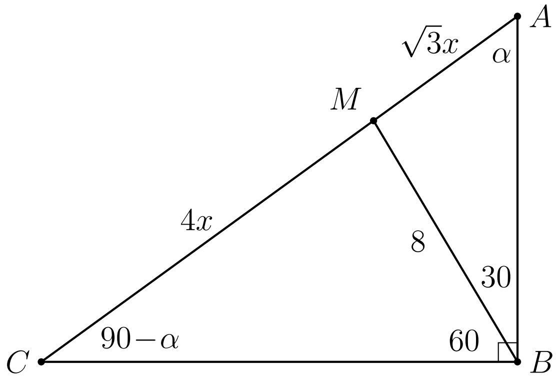
א. **(1)** סמן: $MC = 4x$ וחשב את זוויות המשולש ABC .

(2) חשב את הרדיוסים של המעגלים החוסמים את המשולשים ABM ו- CMB .

ב. נסמן את מרכזי המעגלים החוסמים את המשולשים ABM ו- CBM ב- O_1 ו- O_2 בהתאמה.

(1) הסבר מדוע המרובע BO_1MO_2 הוא דלתון.

(2) חשב את אורך הקטע O_1O_2 .



סעיף א

(1) נסמן $\angle BAM = \alpha, \angle BCM = 90-\alpha$. לשני המשולשים $\triangle ABM, \triangle CMB$ צלע עם הנעלם x, זווית ידועה אחת, וזווית שנייה עם הנעלם α. מחוק הסינוסים נקבל שתי משוואות עם שני הנעלמים שאפשר לפתור כדי לקבל משוואה אחת עם הנעלם α בלבד:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}x}{\sin 30} &= \frac{8}{\sin\alpha} \\
x &= \frac{8\sin 30}{\sqrt{3}\sin\alpha} = \frac{4}{\sqrt{3}\sin\alpha} \\
\frac{4x}{\sin 60} &= \frac{8}{\sin(90-\alpha)} \\
x &= \frac{8\sin 60}{4\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha} \\
\tan\alpha &= \frac{4}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\,.
\end{aligned}
$$

חישוב עם מחשבון נותן $\angle BAC = \alpha \approx 53.13$, ולא נשכח לרשום גם $\angle BCA = 90-\alpha \approx 36.87$.

(2) נחשב $\sin 53.13 \approx 0.8, \cos 53.13 \approx 0.6$. אפשר לקבל ערכים רציונליים על ידי שימוש בנוסחאות)שאינן נמצאות בנוסחאון(:

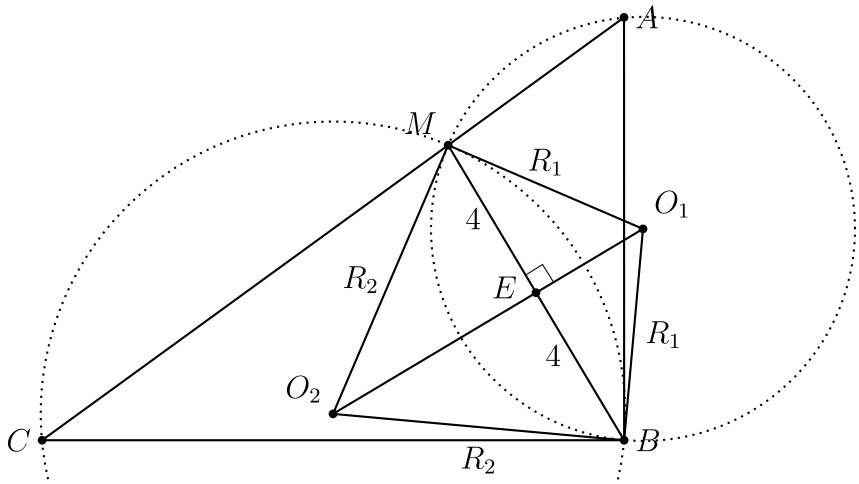
$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{4/3}{\sqrt{1+(4/3)^2}} = \frac{4}{5}\\ \cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+(4/3)^2}} = \frac{3}{5}\,.\end{aligned}$$

נשתמש בחוק הסינוסים עבור $\triangle ABM$, $\triangle CMB$:

$$\begin{aligned}2R_1 &= \frac{8}{\sin\alpha}, & R_1 &= 4\cdot\frac{5}{4} = 5\\ 2R_2 &= \frac{8}{\sin(90-\alpha)}, & R_2 &= 4\cdot\frac{5}{3} = 20/3\,.\end{aligned}$$

סעיף ב

(1) $O_1M = O_1B$ כי הם רדיוסים של המעגל החוסם את $\triangle ABM$, ו-$O_2M = O_2B$ כי הם רדיוסים של המעגל החוסם את $\triangle CBM$. לפי ההגדרה מרובע עם שני זוגות של צלעות שכנות שהן שוות הוא דלתון.

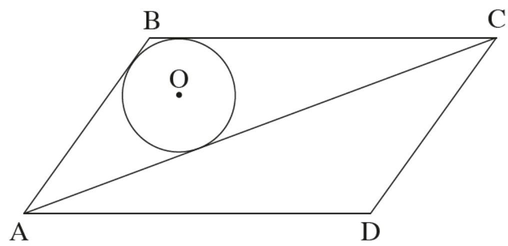


(2) לפי משפט 21 "האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון השני ומאונך לו". מכאן $\angle MEO_1 = \angle MEO_2 = 90$. נתון $MB = 8$ ולכן $ME = EB = 4$. לפי משפט פיתגורס:

$$\begin{aligned}O_1O_2 = O_1E + O_2E &= \sqrt{R_1^2 - 16} + \sqrt{R_2^2 - 16}\\ &= \sqrt{5^2 - 16} + \sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2 - 16} = 3 + \frac{16}{3} = \frac{25}{3}\,.\end{aligned}$$

5.3 חורף תשע"ח

נתונה מקבילית ABCD . AC הוא האלכסון הארוך, כמתואר בציור.



במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו O.

נתון: הנקודה O נמצאת במרחקים 6 ו־ 3

מן הישרים AD ו־ AC בהתאמה;

. OA = 10

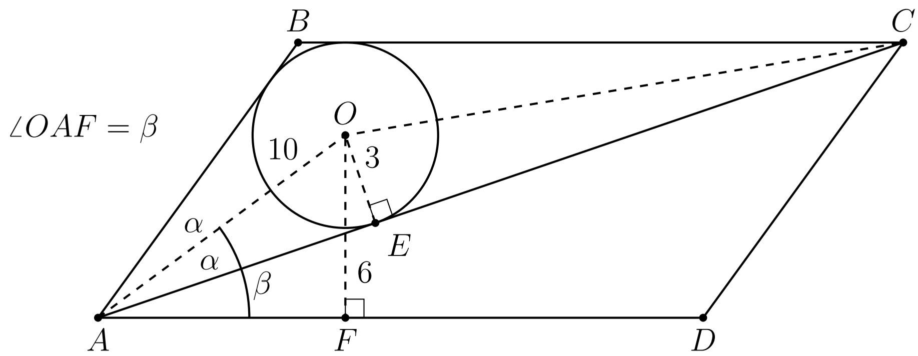
א. חשב את גודלי זוויות המקבילית.

ב. חשב את אורך האלכסון AC .

ג. חשב את שטח המקבילית.

E, F הן נקודות המפגש של האנכים מ-O עם AC, AD. לפי משפט 49 "שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש", AO, CO הם חוצי הזוויות BAC, BCA, בהתאמה. ניסיתי לפתור את השאלה תוך הנחה שאלכסון של מקבילית חוצה את הזוויות $\angle BAC =$ $\angle BCD$. כמובן שזה נכון רק עבור מעוין.

במשולשים ישר-זווית $\triangle AOE, \triangle AOF$ נסמן את הזוויות $\alpha = \angle OAE, \beta = \angle OAF$.



סעיף א

לפי התרשים $\angle BAD = \alpha + \beta$. נחשב α, β מהפונקציות הטריגונומטריות במשולשים ישר-זווית:

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= 3/10, \qquad \alpha = 17.46\\
\sin\beta &= 6/10, \qquad \beta = 36.87\\
\angle BCD = \angle BAD &= \alpha + \beta = 54.33\\
\angle ABC = \angle ADC &= \frac{360 - 2(\alpha + \beta)}{2} = 125.67\,.
\end{aligned}
$$

סעיף ב

האלכסון AC הוא צלע של $\triangle ABC$ והזוויות שלו ידועים, אבל אי-אפשר להשתמש בחוק הסינוסים כי אורכי הצלעות לא ידועים. מהתרשים רואים שהאלכסון מורכב משני קטעי קו AE, EC שהם צלעות של משולשים ישר-זווית $\triangle AOE, \triangle COE$. AE מתקבל ממשפט פיתגורס:

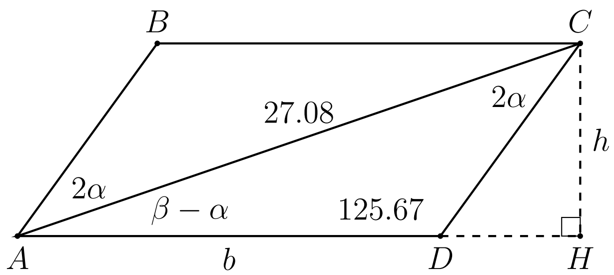
$$AE = \sqrt{10^2 - 3^2} = 9.54\,.$$

נשתמש בחוק הסינוסים ב-$\triangle COE$ (ונימנע מהפיתוי לקבוע ש-$\angle OCE = \alpha$). לפי זוויות מתחלפות $\angle BCA = \angle CAD = \beta - \alpha$. נזכור ש-$CE$ חוצה זווית ונקבל:

$$\begin{aligned}
\angle OCE = \frac{\angle BCA}{2} &= \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{36.87 - 17.46}{2} = 9.71\\
\angle COE &= 180 - 90 - \angle OCE = 80.29\\
\frac{EC}{\sin 80.29} &= \frac{3}{\sin 9.71}\\
EC &= 17.54\\
AC = AE + EC &= 9.54 + 17.54 = 27.08\,.
\end{aligned}$$

סעיף ג

שטח של מקבילית הוא הבסיס כפול הגובה:



$$\begin{aligned}
\frac{b}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{\sin 34.92} &= \frac{27.08}{\sin 125.67}\\
b &= 19.08\\
\sin(\beta - \alpha) = \sin 19.41 &= \frac{h}{27.08}\\
h &= 9\\
S_{ABCD} = bh &= 171.71\,.
\end{aligned}$$

אפשרות אחרת היא לחשב את AB לפי חוק הסינוסים, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AB \sin\angle BAC$, ולהכפיל בשניים.

5.4 קיץ תשע"ז מועד ב

ABCD הוא טרפז חסום במעגל ($AB \parallel DC$).

נתון: $AB = a$, $CD = b$ ($a < b$).

$\sphericalangle C = 60^o$.

א. הבע את שוקי הטרפז, BC ו־ AD, באמצעות a ו־ b.

נתון: $a = 4$, אורך האלכסון BD הוא $4\sqrt{7}$.

ב. חשב את b.

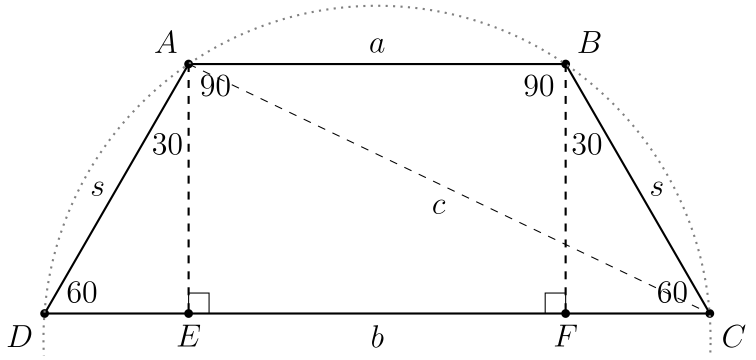
ג. (1) R הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצא את R.

(2) הסבר מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD.

(3) r הוא רדיוס המעגל החסום בטרפז. מצא את r.

סעיף א

לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-180", ולכן $\angle DAB = 120$. נוריד גבהים מ-A, B ל-CD החותכים אותו ב-E, F. $\triangle AED, \triangle BFC$ הם משולשים ישר-זווית. בתרשים השלמנו את הזוויות במשולשים ל-180. לפי משפט 40 "טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה-שוקיים", ולכן $ABCD$ שווה-שוקיים.



$AE = BF$ כך ש-$\triangle AED \cong \triangle BFC$. מכאן:

$$\cos 60 = \frac{(b-a)/2}{s} = \frac{1}{2}$$

$$s = b - a$$

פתרון אחר משתמש בחוק הקוסינוסים על $\triangle ACD, \triangle ACB$. נסמן ב-$c$ את אורך האלכסון AC.

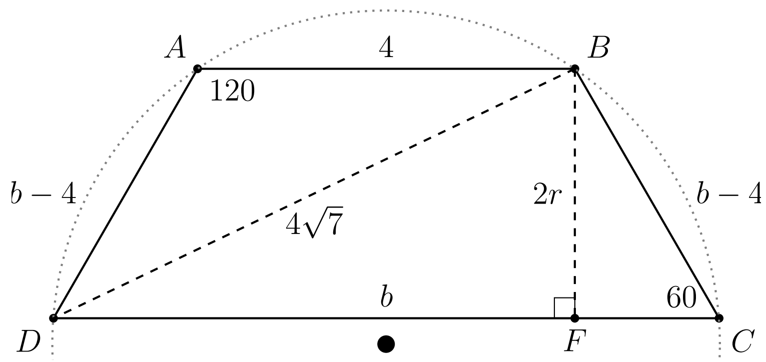
$$\begin{aligned} c^2 &= s^2 + b^2 - 2sb\cos 60 \\ &= s^2 - sb + b^2 \\ c^2 &= s^2 + a^2 - 2sa\cos 120 \\ &= s^2 + sa + a^2 \end{aligned}$$

נשווה את שתי הנוסחאות ל-c^2, והפתרון הוא $s = b - a$.

סעיף ב

שקלתי להשתמש בחוק הסינוסים במשולש $\triangle ADB$: פעם אחת לחשב $\angle ADB$ ופעם שנייה לחשב את s. עדיף להשתמש בחוק הקוסינוסים ב-$\triangle ADB$ כי אנו יודעים ש-$s = b - a = b - 4$:

$$\begin{aligned}
(4\sqrt{7})^2 &= 4^2 + (b-4)^2 - 2\cdot 4\cdot (b-4)\cdot \cos 120\\
b^2 - 4b - 96 &= (b-12)(b+8) = 0\\
b &= 12\,.
\end{aligned}$$



סעיף ג

(1) שימו לב שהאלכסון BD הוא **לא** הקוטר של המעגל החוסם שמסומן בנקודה השחורה הגדולה. לפי חוק הסינוסים ב-$\triangle ADB$:

$$R = \frac{4\sqrt{7}}{2\sin 120} = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = 6.11\,.$$

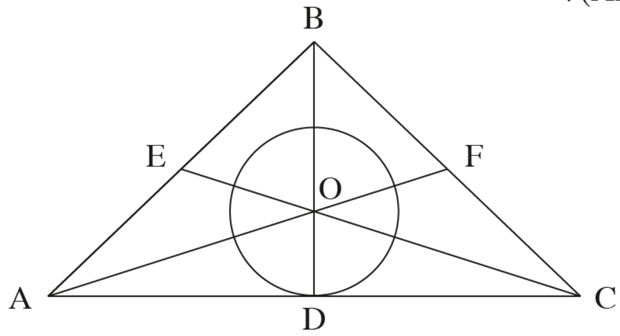
(2) לפי משפט 57, "מרובע קמור חוסם מעגל אם ורק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות":

$$\begin{aligned}
a+b &\stackrel{?}{=} s+s\\
a+b &\stackrel{?}{=} (b-a)+(b-a)\\
3a &\stackrel{?}{=} b\\
3\cdot 4 &= 12\,.
\end{aligned}$$

(3) AB, CD הם משיקים מקבילים למעגל החסום, ולכן $BF = 2r$:

$$\begin{aligned}
\sin 60 &= \frac{2r}{s} = \frac{2r}{b-a} = \frac{2r}{8}\\
r &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 8 = 2\sqrt{3} = 3.464\,.
\end{aligned}$$

5.5 קיץ תשע"ז מועד א



ABC הוא משולש שווה שוקיים (AB = BC) .

AF , CE ו־ BD הם תיכונים במשולש,

הנחתכים בנקודה O (ראה ציור).

א. הוכח: $S_{\Delta BOE} = S_{\Delta COD}$.

מעגל שמרכזו O משיק לצלע AC

בנקודה D .

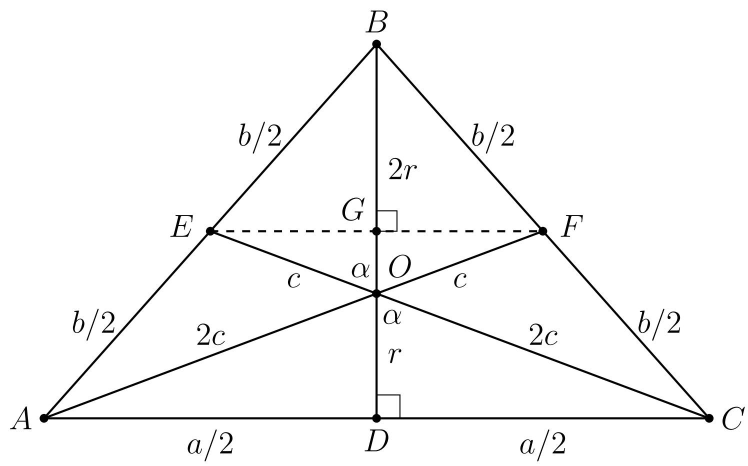
נתון כי שטח העיגול שווה לשטח המשולש AOC .

ב. חשב את גודל הזווית ACE .

ג. הבע את אורך הקטע OE באמצעות רדיוס המעגל.

סעיף א

נסמן אורכי צלעות בתרשים לפי $\triangle ABC$ שווה-שוקיים, AF, BD, CF תיכונים, ומשפט 46 "נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס $2:1$". כמו כן, $AF = CE$ כי $\triangle ACE \cong \triangle CAF$ לפי צלע $AC = a$ משותף, זווית $\angle CAE = \angle ACF$ (משולש שווה-שוקיים), צלע $AE = CF = b$.



$\triangle EBF \sim \triangle ABC$ לפי צ.ז.צ., ולכן $EF = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$.$\triangle EBF$ גם הוא שווה-שוקיים, ולכן, BG הוא תיכון של EF ו-$EG = \frac{EF}{2} = \frac{a}{4}$.

$$S_{\triangle BOE} = \frac{1}{2} \cdot EG \cdot BO = \frac{ar}{4}$$

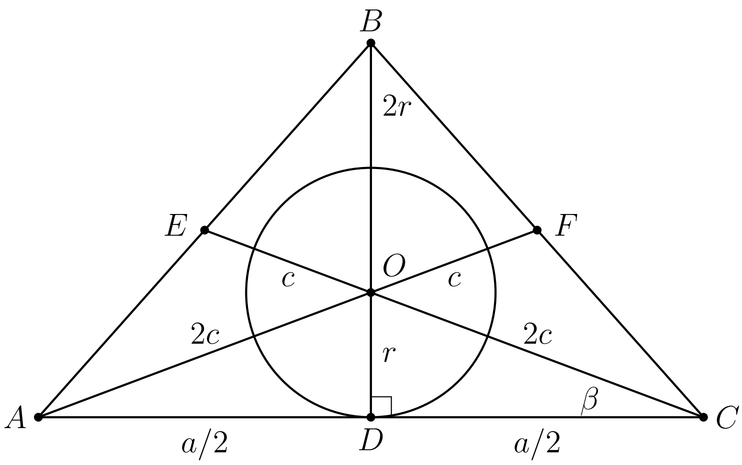
$$S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} \cdot OD \cdot DC = \frac{ar}{4} .$$

פתרון אחר מתקבל מהנוסחה הטריגונומטרית לשטח עם הזוויות הקודקודיות α:

$$\begin{aligned} S_{\triangle BOE} &= \frac{1}{2}\cdot 2r\cdot c\cdot\sin\alpha \\ S_{\triangle COD} &= \frac{1}{2}\cdot r\cdot 2c\cdot\sin\alpha\,. \end{aligned}$$

סעיף ב

נסמן $\angle ACE=\beta$.



נתון:

$$\begin{aligned} S_O &= \pi r^2=\frac{1}{2}ar=S_{\triangle AOC} \\ a &= 2\pi r\,. \end{aligned}$$

נציב עבור a בחישוב הטנגס של β:

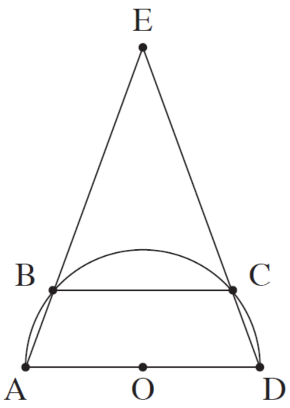
$$\begin{aligned} \tan\beta &= \frac{r}{a/2}=\frac{2r}{2\pi r}=\frac{1}{\pi} \\ \beta &= \tan^{-1}\frac{1}{\pi}=17.66^\circ\,. \end{aligned}$$

סעיף ג

נחשב סינוס של β:

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{r}{2c} \\ c &= \frac{r}{2\sin\beta} \\ &= 1.648r\,. \end{aligned}$$

5.6 חורף תשע"ז



נתון טרפז ABCD ($BC \parallel AD$)
החסום בחצי מעגל שמרכזו O ורדיוסו R
כך ש־ AD הוא קוטר של חצי המעגל.
המשכי השוקיים AB ו־ DC נפגשים
מחוץ למעגל בנקודה E (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle EAD = \alpha$.

א. הבע באמצעות R ו־ α את אורך הקטע BC .

ב. מהו התחום של כל הערכים האפשריים עבור הזווית α ? נמק.

ג. נתון כי שטח משולש AED גדול פי 9 משטח משולש COD .
מהו היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AED לבין R ?

סעיף א

$OA = OB = OC = OD = R$. נסמן זוויות לפי:

$\triangle ABO$ שווה-שוקיים, ו-$\angle BAO = \angle ABO = \alpha$.

כדי להשלים זוויות במשולש, ל 180, $\angle AOB = 180 - 2\alpha$, שנסמן β.

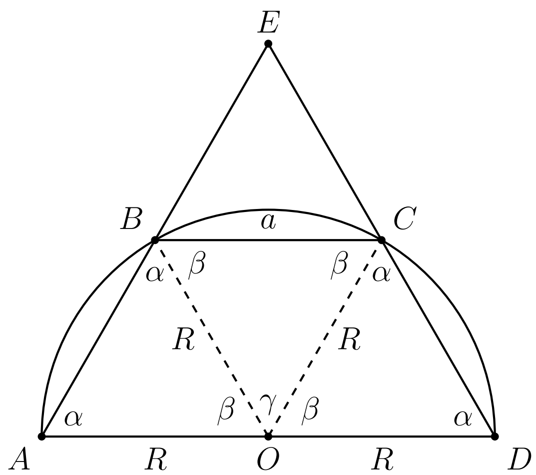
$\angle CBO = \beta$ לפי זוויות מתחלפות.

$\angle BCO = \beta$ כי $\triangle BOC$ שווה-שוקיים.

נשלים זוויות של משולש ל-180 ונקבל $\angle BOC = 180 - 2\beta$ שנסמן γ.

לפי זוויות מתחלפות $\angle COD = \beta$.

$\triangle COD$ שווה-שוקיים, ולכן $\angle CDO = \angle OCD = (180 - \beta)/2 = \alpha$.



נחשב $a = BC$ לפי חוק הסינוסים ולפי חוק הקוסינוסים ב-$\triangle BOC$, ותחליטו איזו שיטה עדיפה!

לפי חוק הסינוסים:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sin\gamma} &= \frac{R}{\sin\beta} \\
a &= \frac{R\sin(180-2\beta)}{\sin\beta} = \frac{R\sin 2\beta}{\sin\beta} \\
&= \frac{R(2\sin\beta\cos\beta)}{\sin\beta} = 2R\cos\beta = 2R\cos(180-2\alpha) \\
&= -2R\cos 2\alpha
\end{aligned}$$

לפי חוק הקוסינוסים:

$$\begin{aligned}
a^2 &= R^2 + R^2 - 2R\cdot R\cos\gamma \\
&= 2R^2(1-\cos(180-2\beta)) = 2R^2(1+\cos 2\beta) \\
&= 2R^2(1+\cos^2\beta - \sin^2\beta) = 2R^2(2\cos^2\beta) \\
a &= 2R\cos\beta = 2R\cos(180-2\alpha) \\
&= -2R\cos 2\alpha\,.
\end{aligned}$$

סעיף ב

האורך של צלע חייב להיות חיובי $a = -2R\cos 2\alpha > 0$, ולכן $\cos 2\alpha < 0$ ו-2α נמצא ברביע השני:

$$\begin{aligned}
90 < 2\alpha \le 180 \\
45 < \alpha \le 90
\end{aligned}$$

$\alpha \neq 90$ כי הזוויות הבסיס של משולש שווה-שוקיים חייבים להיות פחות מ-90.

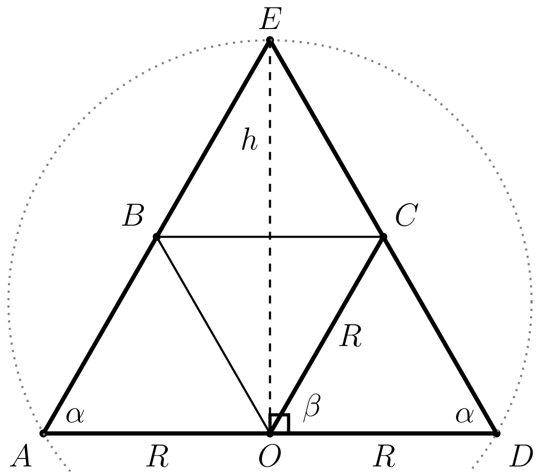
סעיף ג

נחשב $S_{\triangle AED}$ לפי הנוסחה הגיאומטרית. הגובה של $\triangle AED$ הוא $h = R\tan\alpha$, ו:

$$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}\cdot 2R\cdot h = R^2\tan\alpha\,.$$

נחשב $S_{\triangle COD}$ לפי הנוסחה הטריגונומטרית:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle COD} &= \frac{1}{2}R\cdot R\cdot\sin\beta \\
&= \frac{1}{2}R^2\sin(180-2\alpha) = \frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha\,.
\end{aligned}$$



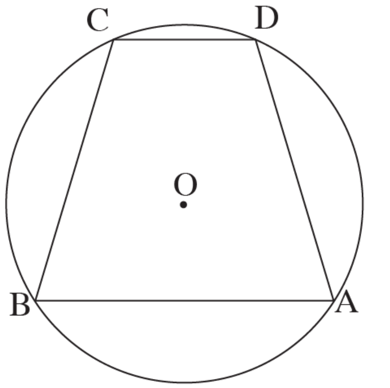
לפי היחס נתון בין השטחים:

$$
\begin{aligned}
R^2\tan\alpha &= 9\cdot\frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha\\
\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} &= 9\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\\
\cos\alpha &= \frac{1}{3}\\
\sin\alpha &= \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\,.
\end{aligned}
$$

נשתמש בחוק הסינוסים כדי לחשב r, הרדיוס של המגעל שחוסם $\triangle AED$:

$$
\begin{aligned}
2r &= \frac{DE}{\sin\alpha}\\
\cos\alpha &= \frac{R}{DE}\\
\frac{r}{R} &= \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}\\
&= \frac{1}{2(2\sqrt{2}/3)(1/3)}=\frac{9}{4\sqrt{2}}=1.591\,.
\end{aligned}
$$

5.7 קיץ תשע"ו מועד ב



במעגל חסום טרפז ABCD (AB ∥ DC).

מרכז המעגל O בתוך הטרפז (ראה ציור).

רדיוס המעגל הוא R וגובה הטרפז הוא h.

נתון: $\sphericalangle COD = \alpha$, $\sphericalangle BOA = 3\alpha$.

א. הבע באמצעות α את $\sphericalangle DAB$.

ב. הבע את האורך של שוק הטרפז באמצעות α ו־ R .

ג. הבע את האורך של שוק הטרפז באמצעות α ו־ h .

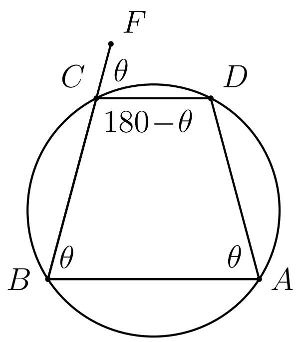
ד. נתון כי שטח המשולש COD הוא $\dfrac{h^2}{12\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

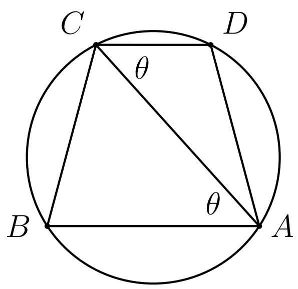
מצא את α .

מהתרשים נראה שהטרפז שווה-שוקיים, אבל אין לסמוך על תרשימים. לקח לי זמן רב עד שעלה בדעתי שטרפז חסום במעגל **חייב** להיות שווה-שוקיים, משפט לא מופיע ברשימת המשפטים לבגרות.בספרי לימוד המשפט לא מובלט ומופיע רק כדוגמה או תרגיל. אני אביא שתי הוכחות: אחת שלי ואחת המופיעה בספרים.

(1): $\angle ACD = \angle CAB$ לפי זוויות מתחלפות ולכן גם המיתרים הכלואים שווים $CB = AD$.

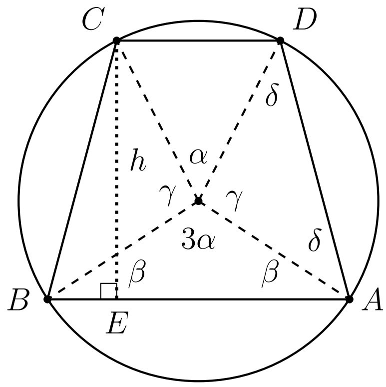
(2): לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-$180°$". נסמן $\angle DAB = \theta$, ולכן $\angle DCB = 180 - \theta$. לפי זוויות משלימות ומתאימות $\angle DCF = \angle ABC = \theta$. לפי משפט 40 "טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה-שוקיים".





סעיף א

בארבעת המשולשים עם קודקוד O, הצלעות המקווקוות הם רדיוסים, כך שהמשולשים שווה-שוקיים. $\triangle DOA \cong \triangle COB$ לפי צ.צ.צ. כי הטרפז שווה-שוקיים. מכאן ש-$\angle DOA = \angle COB$, וניתן לסמן את הזוויות לפי החישובים מימין לתרשים. החישוב של γ מוצדק כי סכום הזוויות סביב נקודה הוא 360. השורה האחרונה מציגה את התשובה לשאלה כי $\angle DAB = \beta + \delta$.



$$\beta = \frac{180-3\alpha}{2}$$
$$\gamma = \frac{360-(\alpha+3\alpha)}{2} = 180-2\alpha$$
$$\delta = \frac{180-\gamma}{2} = \frac{180-(180-2\alpha)}{2} = \alpha$$
$$\beta+\delta = \frac{180-\alpha}{2}\,.$$

סעיף ב

כדי חשב אורך של שוק נחפש משולש שאחת מצלעותיו היא DA. לפי חוק בסינוסים ב-$\triangle DOA$:

$$\frac{DA}{\sin\gamma} = \frac{R}{\sin\delta}$$
$$\frac{DA}{\sin(180-2\alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha}$$
$$DA = \frac{R\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{R\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2R\cos\alpha\,.$$

סעיף ג

בתרשים בנינו את הגובה מהנקודה C כדי לא להסתיר את הסימונים ב-$\triangle DOA$. $CB = DA$ הוא גם שוק. נשתמש בהגדרה של סינוס במשולש $\triangle CBE$:

$$\frac{h}{CB} = \sin\angle CBE = \sin\left(90-\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}\,,$$

כי $\angle CBE = \angle DAB = \beta+\delta$. התשובה היא $CB = \dfrac{h}{\cos(\alpha/2)}$.

סעיף ד

בנוסחה הטריגונטמרית עבור $S_{\triangle COD}$ יופיעו אורכי הצלעות R והזווית α. אנו רוצים נוסחה עם h ו-α כדי להשוות לביטוי הנתון. נשווה את הביטויים עבור שוקי הטרפז מהסעיפים הקודמים:

$$2R\cos\alpha = \frac{h}{\cos(\alpha/2)}$$
$$R = \frac{h}{2\cos\alpha\cos(\alpha/2)}\,.$$

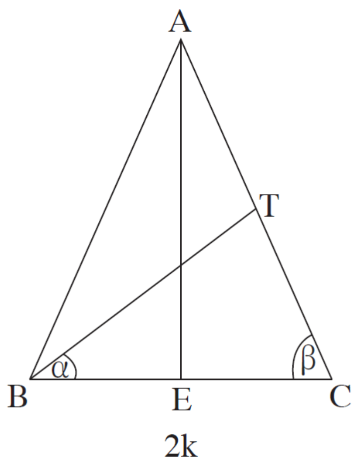
נציב בנוסחה לשטח, נשווה לנוסחה הנתונה לשטח ונצמצם :

$$\begin{aligned}
\frac{h^2}{12\cos^2(\alpha/2)} &= \frac{1}{2}\cdot OC\cdot OD\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}R^2\sin\alpha\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{4}\cdot\frac{1}{(\cos\alpha\cos(\alpha/2))^2}\cdot\sin\alpha\\
\frac{1}{12} &= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\sin^2\alpha}\cdot\sin\alpha\\
2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha - 2 &= (2\sin\alpha-1)(\sin\alpha+2) = 0\,.
\end{aligned}$$

נבחר את השורש $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ כי הערך של סינוס לא יכול להיות -2.

הערך היחיד ש-α יכול לקבל הוא 30° כי זוויות הבסיס של טרפז חייבים להיות פחות מ-90°.

5.8 קיץ תשע"ו מועד א



נתון משולש שווה־שוקיים ABC $(AB = AC)$.

AE הוא גובה לבסיס BC,

ו־ BT הוא תיכון לשוק AC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle ACB = \beta$, $\sphericalangle TBC = \alpha$, $BC = 2k$

(1) הבע את האורך של TC באמצעות k ו־ β בלבד.

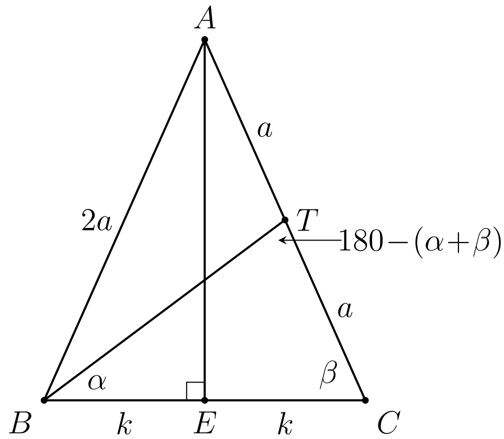
(2) היעזר בתת־סעיף א(1), והראה כי

$$\sin(\alpha + \beta) = 4\sin\alpha\cdot\cos\beta$$

נתון גם: $TE = 5$ ס"מ , $k = 4$ ס"מ.

(1) מצא את β.

(2) מצא את α.



(1) לפי הגדרת הקוסינוס ב-$\triangle AEC$:

$$\cos\beta = \frac{k}{2a}$$

$$TC = a = \frac{k}{2\cos\beta}.$$

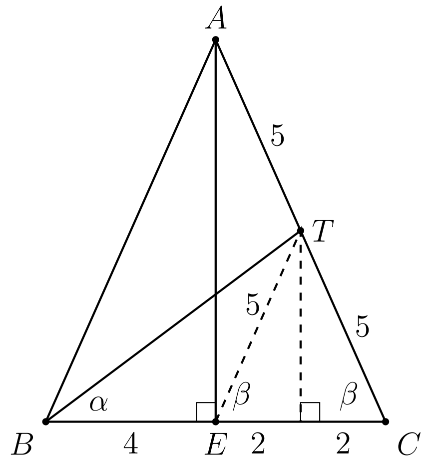
(2) נחפש משולש עבורו חוק הסינוסים ייתן משוואה בה יצטמצם k או a. $\triangle TBC$ מתאים:

$$\frac{2k}{\sin(180-(\alpha+\beta))} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$\frac{2k}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{k/(2\cos\beta)}{\sin\alpha}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = 4\sin\alpha\cos\beta.$$

(1) נוסיף את אורכי הצלעות הנתונים לתרשים ונשתמש במשפט 86 "במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר" כדי להסיק ש-$TE = \frac{1}{2}AC = 5$:



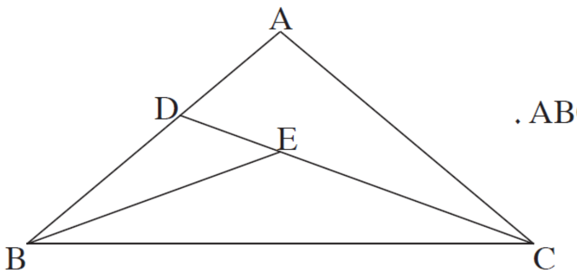
נוריד גובה מ-T שהוא אנך אמצעי במשולש שווה-שוקיים $\triangle ETC$ ונקבל:

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= \frac{2}{5}\\
\beta &= 66.4^\circ\,.
\end{aligned}$$

(2) לפי סעיף (1) וסעיף (2) הקודם:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= 4\sin\alpha\cos\beta\\
\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta &= 4\sin\alpha\cos\beta\\
(\sin\alpha)\cdot\frac{2}{5}+\cos\alpha\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} &= 4\cdot(\sin\alpha)\cdot\frac{2}{5}\\
\sqrt{21}\cos\alpha &= 6\sin\alpha\\
\tan\alpha &= \frac{\sqrt{21}}{6}\\
\alpha &= 37.37^\circ\,.
\end{aligned}$$

5.9 חורף תשע"ו



במשולש שווה־שוקיים ABC ‏(AB = AC)

זווית הבסיס היא 2α .

הנקודה E היא מפגש חוצי־הזווית במשולש ABC .

המשך CE חותך את הצלע AB בנקודה D

(ראה ציור).

נתון: $\frac{EC}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}$, $\sphericalangle BAC > 90^{o}$.

א. מצא את α .

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC ובין רדיוס המעגל <u>החסום</u> במשולש ABC .

ג. נתון כי ההפרש בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC ובין רדיוס המעגל <u>החסום</u> במשולש ABC הוא 2 ס"מ.
מצא את אורך הקטע AE .

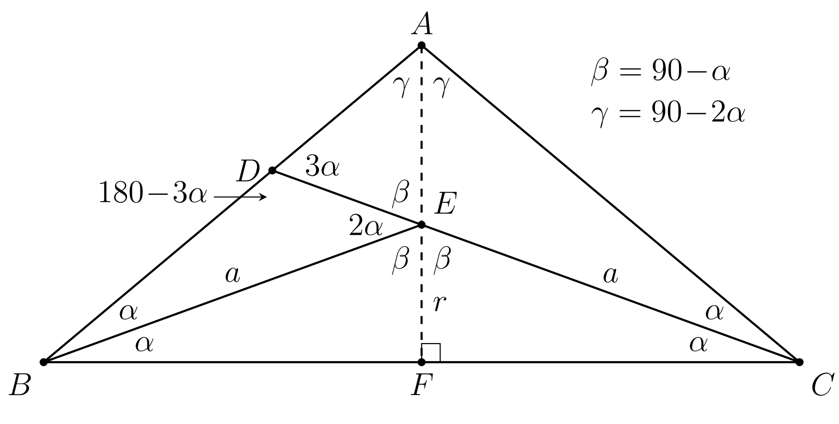
לפי משפט 6 "במשולש שווה-שוקיים , חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים", ולכן חוצה הזווית $\angle BAC$ עובר דרך E וחוצה את BC בנקודה F בזווית ישרה. נסמן זוויות:

$\angle FEB = \triangle FEC = 90$ ולכן $\angle BEF = \angle CEF = 90-\alpha$ שנסמן β.

$\angle AFB = \angle AFC = 90$ ולכן $\angle BAF = \angle CAF = 90-2\alpha$ שנסמן γ.

$\angle AED = \beta$ לפי זוויות קודקודיות, ו-$\angle ADE = 180-\beta-\gamma = 3\alpha$.

$\angle BDE = 180-3\alpha$ לפי זוויות משלימות.



סעיף א

נתון היחס $\frac{EC}{DE}$ כתלות ב-α, ולכן נחפש משלוש שעבורו חוק הסינוסים ייתן יחס אחר כתלות ב-α. $\triangle EFB \cong \triangle EFC$ לפי צ.ז.צ, כך ש-$EB = EC$. לפי חוק הסינוסים ב-$\triangle BDE$:

$$\begin{aligned}
\frac{EB}{\sin(180-3\alpha)} &= \frac{DE}{\sin\alpha}\\
\frac{EB}{DE} &= \frac{\sin(180-3\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}\\
\sin 3\alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,.
\end{aligned}$$

הפתרונות הם $\alpha = 20^\circ, \alpha = 40^\circ$, אבל נבחר $\alpha = 20^\circ$, כי אם $\alpha = 40^\circ$, $\angle BAC = 20^\circ$ הסותר את הנתון $\angle BAC > 90^\circ$.

סעיף ב

לפי משפט 49 "שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש", E היא מרכז המעגל החסום שמשיק לצלע המשולש ב-F, ו-$r = EF$ הוא הרדיוס.

צריך להיזהר שלא לקבוע ש-E היא מרכז המעגל החוסם כי אין אנו יודעים שחוצי הזוויות האחרות הם גם אנכים אמצעיים. במקום זה נשתמש בחוק הסינוסים על המשולש $\triangle ABC$. נבחר את הזווית $\angle BAC = 180-4\alpha$, כי אפשר לחשב את אורך הצלע הנגדית BC כתלות ב-r, α:

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{r}{BF} = \frac{r}{BC/2}\\
2R &= \frac{BC}{\sin(180-4\alpha)} = \frac{2r}{\sin 4\alpha\tan\alpha}\\
\frac{R}{r} &= \frac{1}{\sin 4\alpha\cdot\tan\alpha} = \frac{1}{\sin 80\cdot\tan 20} = 2.79\,.
\end{aligned}$$

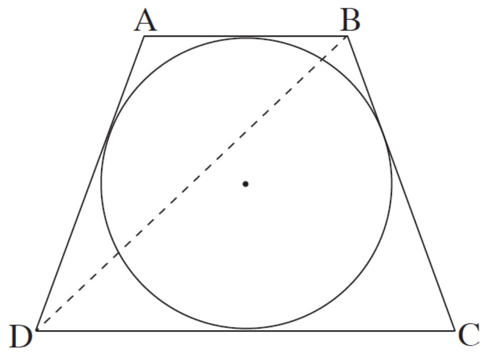
סעיף ג

נתון $R - r = 2$. נציב $R = 2.79r$ שחישבנו בסעיף ב, ונקבל $r = 2/(2.79-1) = 1.117$.

אין לנו מספיק מידע על המשולש $\triangle AED$, ולכן נחשב עם $AF = AE + EF = AE + r$:

$$\begin{aligned}
\tan 2\alpha &= \frac{AF}{BF} = \frac{AE+r}{r/\tan\alpha}\\
AE &= \frac{r(\tan 2\alpha - \tan\alpha)}{\tan\alpha}\\
&= \frac{1.117(\tan 40 - \tan 20)}{\tan 20} = 1.458\,.
\end{aligned}$$

5.10 קיץ תשע״ה מועד ב



מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז שווה־שוקיים ABCD

($AB \parallel DC$), כמתואר בציור.

נתון: $\sphericalangle BCD = 70^\circ$.

א. הבע באמצעות r :

(1) את הבסיס הגדול של הטרפז.

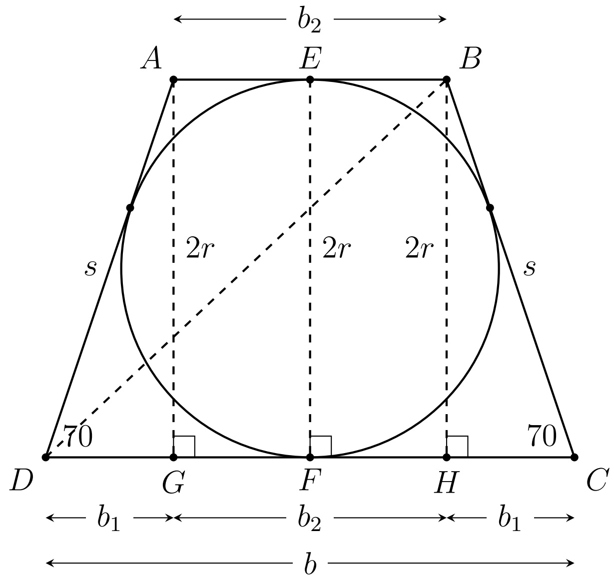
(2) את שוק הטרפז.

(3) את אלכסון הטרפז.

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז ובין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

נוריד אנך מ-A שחתוך את DC ב-G, ואנך מ-B שחותך את DC ב-H. בטרפז $AB\|DC$ ולכן $ABHG$ הוא מלבן. לפי משפט 77 ״המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה״, האנך מנקודת ההשקה של מעגל עם AB עובר דרך מרכז המעגל והוא ניצב לנקודת ההשקה עם DC. מכאן ש-$AG = EF = BF = 2r$.

נסמן $AB = GH = b_2$. הטרפז שווה-שוקיים ולפי משפט 39 ״בטרפז שווה-שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו״, $\angle ADC = 70^\circ$, ו-$\angle DAG = \angle CBH = 20^\circ$ כדי להשלים ל-180 במשולש. ביחד עם $AD = BC$ בטרפז שווה-שוקיים, $\triangle ADG \cong \triangle BCH$. נסמן $DG = HC = b_1$ ונקבל ש-$DC = 2b_1 + b_2$ שנסמן b.



סעיף א

(1) נחפש משפט הקושר צלעות של מרובע עם הרדיוס של המעגל החסום. משפט 57 "מרובע קמור חוסם מעגל אם ורק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות":

$$2s = b + b_2 = (b_1 + b_2 + b_1) + b_2 = 2(b_1 + b_2)\,.$$

ממשוואה זו נחשב משוואות נוספות שיעזרו לנו בהמשך:

$$s = b_1 + b_2, \quad b = 2b_1 + b_2 = s + b_1\,.$$

לפי ההגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות ב-$\triangle ADC$, נוכל לקשר את r לצלעות:

$$\begin{aligned}
\tan 70 &= \frac{2r}{b_1} \\
\sin 70 &= \frac{2r}{s} \\
b &= s + b_1 \\
&= 2r\left(\frac{1}{\sin 70} + \frac{1}{\tan 70}\right) = 2.856r\,.
\end{aligned}$$

(2) $s = \dfrac{2r}{\sin 70} = 2.128r$.

(3) האלכסון הוא היתר של $\triangle BDH$ שצלעותיו ידועות:

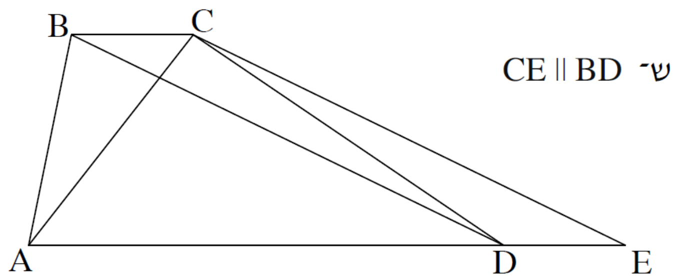
$$\begin{aligned}
DB^2 &= (b_1 + b_2)^2 + (2r)^2 = s^2 + (2r)^2 \\
&= \left(\frac{2r}{\sin 70}\right)^2 + 4r^2 \\
DB &= 2r\sqrt{\left(\frac{1}{\sin 70}\right)^2 + 1} = 2.921r\,.
\end{aligned}$$

סעיף ב

במבט ראשון נראה שכדאי להשתמש במשפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-180°", אבל אין בו צורך. שימו לב שהמרכז של המעגל החוסם לא חופף את המרכז של המעגל החסום, כך שאי-אפשר לחשב R, הרדיוס של המעגל החסום, כמרחק ממרכז המעגל החוסם לאחד מקודקודי הטרפז. במקום זה נשתמש בחוק הסינוסים ב-$\triangle BCD$:

$$\begin{aligned}
2R &= \frac{DB}{\sin BCD} = \frac{2.921r}{\sin 70} \\
\frac{r}{R} &= \frac{2 \cdot \sin 70}{2.921} = 6.434\,.
\end{aligned}$$

5.11 קיץ תשע"ה מועד א



נתון טרפז ABCD ‏(BC ∥ AD).

הנקודה E נמצאת על המשך AD כך ש- CE ∥ BD

(ראה ציור).

נתון: ∢CAD = 2∢DBC

DB = 1.8AC

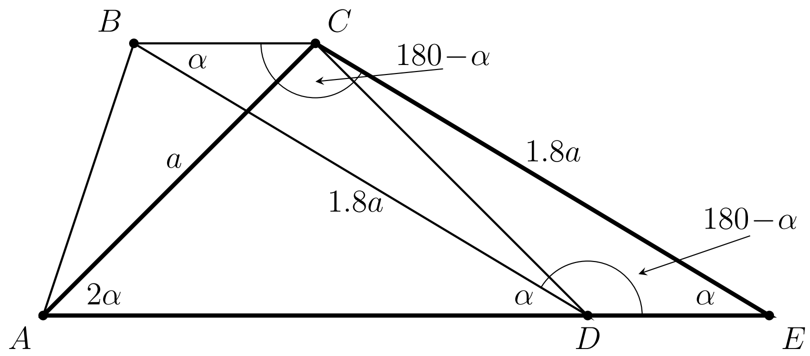
א. מצא את גודל הזווית CEA.

ב. נתון גם כי שטח המשולש ACE הוא 87.873 סמ"ר.

מצא את גובה הטרפז.

סעיף א

נסמן זוויות לפי זוויות מתחלפות, מתאימות ופנימיות: $\angle BCE = ,\angle CBD = \angle BDA = \angle CEA = \alpha$
.$\angle BDE = 180 - \alpha$

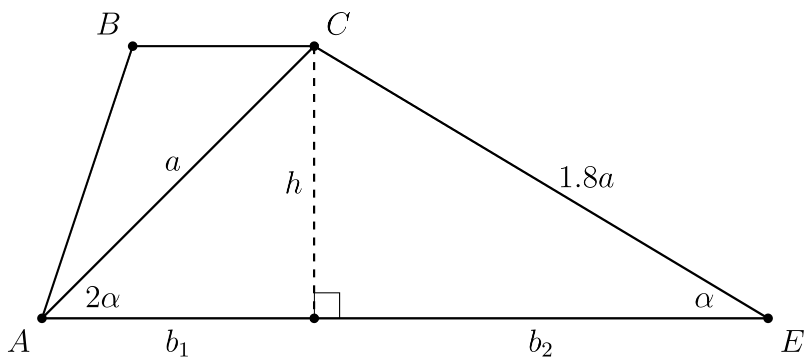


לפי חוק הסינוסים:

$$\begin{aligned}
\frac{AC}{\sin\alpha} &= \frac{CE}{\sin 2\alpha}\\
\frac{a}{\sin\alpha} &= \frac{1.8a}{\sin 2\alpha} = \frac{1.8a}{2\sin\alpha\cos\alpha}\\
\cos\alpha &= 0.9\\
\alpha &= 25.84\,.
\end{aligned}$$

סעיף ב

מהתרשים אפשר לראות ש-$S_{\triangle ACE}$ מורכב מסכום השטחים של שני משולשים עם אותו גובה:

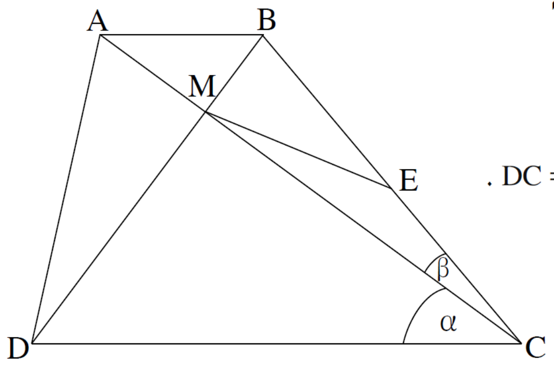


$$
\begin{aligned}
S_{\triangle ACE} &= \frac{1}{2}(b_1+b_2)h\\
b_1 &= \frac{h}{\tan 2\alpha}\\
b_2 &= \frac{h}{\tan \alpha}\\
S_{\triangle ACE} &= \frac{1}{2}h^2\left(\frac{1}{\tan 2\alpha}+\frac{1}{\tan\alpha}\right)\\
87.873 &= \frac{1}{2}h^2(6.79+2.06) = 1.428h^2\\
h &= 7.846\,.
\end{aligned}
$$

פתרון אחר משתמש בנוסחה הטריגונומטרית לשטח:

$$
\begin{aligned}
S_{\triangle ACE} &= \frac{1}{2}\cdot AC\cdot CE\cdot \sin\angle ACE\\
&= \frac{1}{2}\cdot a\cdot 1.8a\cdot \sin(180-3\alpha) = 0.9a^2\sin 3\alpha\\
87.873 &= 0.87873a^2\\
a &= 10\\
h &= a\sin 2\alpha = 7.846\,.
\end{aligned}
$$

5.12 חורף תשע"ה



אלכסוני הטרפז ABCD מאונכים זה לזה

ונפגשים בנקודה M.

E היא אמצע השוק BC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle ACD = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \beta$, $DC = a$.

א. הבע באמצעות a , α ו- β

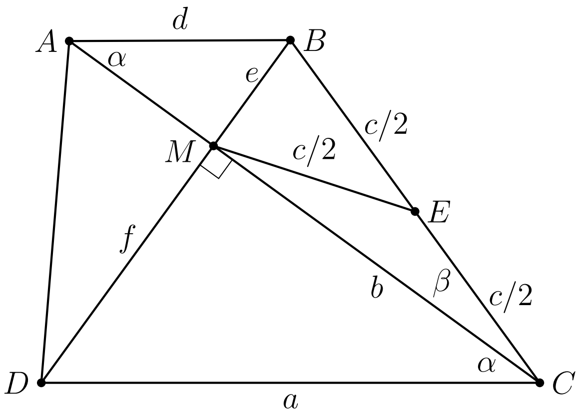
את האורך של ME.

נתון: $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{1}{3}$, $a =$ 6.6 ס"מ .

ב. מצא את האורך של AB.

נתון גם: $BM =$ 1.3 ס"מ .

ג. מצא את הזווית DCB.



סעיף א

$\triangle BMC$ ישר זווית ונתון ש-ME הוא תיכון ליתר. לפי משפט 86 "במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר", $ME = c/2$. לפי ההגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות:

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{b}{c} \\ \cos\alpha &= \frac{b}{a} \\ ME &= \frac{c}{2} = \frac{b}{2\cos\beta} \\ &= \frac{a\cos\alpha}{2\cos\beta}\,. \end{aligned}$$

סעיף ב

למשולשים $\triangle CMB$, $\triangle AMB$ צלע משותפת $MB = e$. לפי ההגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות:

$$\begin{aligned}
\tan\beta &= \frac{e}{b} \\
\sin\alpha &= \frac{e}{d} \\
AB = d &= \frac{e}{\sin\alpha} = \frac{b\tan\beta}{\sin\alpha} \\
&= \frac{a\cos\alpha\tan\beta}{\sin\alpha} = \frac{a\tan\beta}{\tan\alpha} = 6.6\cdot\frac{1}{3} = 2.2\,.
\end{aligned}$$

הוכחת אחרת משתמשת במשולשים דומים. $\angle BAM = \angle MCD = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות ו-$\triangle ABM \sim \triangle DMC$ לפי ז.ז.:

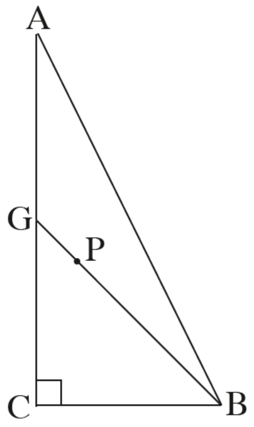
$$\begin{aligned}
\tan\beta &= \frac{e}{b} \\
\tan\alpha &= \frac{f}{b} \\
\frac{e}{f} &= \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{1}{3} \\
\frac{d}{a} &= \frac{e}{f} = \frac{1}{3} \\
AB = d &= \frac{6.6}{3} = 2.2\,.
\end{aligned}$$

סעיף ג

ממשפט פיתגורס $b = \sqrt{a^2 - f^2} = 5.32$, ו:

$$\begin{aligned}
\tan\beta &= \frac{e}{b} = \frac{1.3}{5.32} = 0.2444 \\
\beta &= 13.73 \\
\tan\alpha &= 3\tan\beta = 0.7331 \\
\alpha &= 36.24 \\
\angle DCB &= \alpha + \beta = 49.97\,.
\end{aligned}$$

5.13 קיץ תשע"ד מועד ב



במשולש ישר־זווית ACB ‏($\sphericalangle$ ACB = 90°)

נקודה G היא אמצע הניצב AC .

נקודה P נמצאת על GB כך ש־ BG = 4 · PG ‏(ראה ציור).

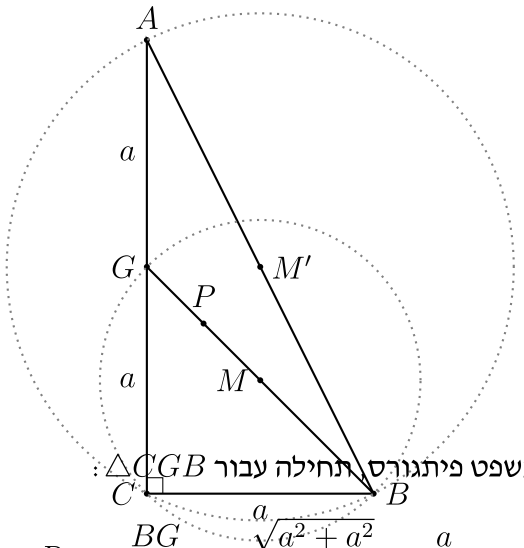
רדיוס המעגל החוסם את המשולש CGB הוא R .

נתון: GC = BC .

א. הבע באמצעות R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB .

ב. הבע באמצעות R את מרחק הנקודה P ממרכז המעגל החוסם את המשולש ACB .

נסמן R, M = מרכז המעגל החוסם את $\triangle CGB$ והרדיוס שלו, ו-R', M' = מרכז המעגל החוסם את $\triangle ACB$ והרדיוס שלו. שימו לב שבתרשים הנקודות M, M' נמצאות על הצלעות GB, AB, אבל אנו חייבים להוכיח את הטענות הללו אם רוצים להשתמש בהן.



סעיף א

נשתמש בחוק הסינוסים ובמשפט פיתגורס, תחילה עבור $\triangle CGB$:

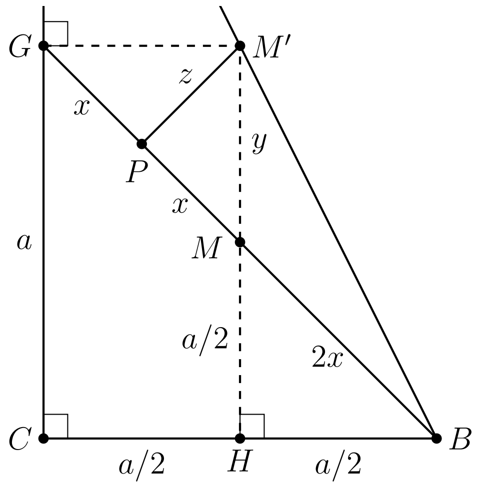
$$R = \frac{BG}{2\sin 90} = \frac{\sqrt{a^2+a^2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}\,,$$

ואחר כך עבור $\triangle ACB$:

$$R' = \frac{AB}{2\sin 90} = \frac{\sqrt{a^2+(2a)^2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)a = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{2}R = \sqrt{\frac{5}{2}}R\,.$$

סעיף ב

M', מרכז המעגל החוסם את $\triangle ACB$, הוא נקודת החיתוך של האנכים GM' ו-$M'H$.



אם נמצא משולש שעבורו נוכל לחשב שתי צלעות והזווית הכלואה ביניהן, נוכל להשתמש בחוק הקוסינוסים. ננסה את $\triangle MPM'$. $CG \| MH$ ולכן לפי משפט 91 "משפט תאלס המורחב: ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים":

$$\frac{GC}{MH} = \frac{CB}{HB} = \frac{a}{a/2} = 2\,,$$

ו-$MH = \frac{a}{2}$. אבל $GCHM'$ הוא מלבן, ולכן:

$$y = MM' = M'H - MH = GC - MH = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}R = \frac{R}{\sqrt{2}}\,.$$

שוב לפי משפט תאלס המורחב:

$$\begin{aligned}
\frac{GB}{MB} &= \frac{GC}{MH} = 2 \\
GB &= GM + MB \\
GM &= GB - MB = 2MB - MB = MB\,.
\end{aligned}$$

שנסמן $GM = MB = 2x$.

נתון $GB = 4 \cdot PG$, כך ש-$PG = \frac{1}{4}(2x + 2x) = x$. לבסוף, $PM = 4x - (2x) - x = x$. את x ניתן לחשב לפי משפט פיתגורס ב-$\triangle CGB$:

$$\begin{aligned}
(4x)^2 &= a^2 + a^2 \\
x &= \frac{1}{\sqrt{8}}a = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{2}R = \frac{R}{2}\,.
\end{aligned}$$

$\triangle MHB$ הוא משולש ישר-זווית שווה-שוקיים, כך ש-$\angle BMH = 45$, ו-$\angle PMM' = 45$ לפי זוויות קודקודיות. כעת יש לנו מספיק נתונים להשתמש בחוק הקוסינוסים. נסמן $PG = z$:

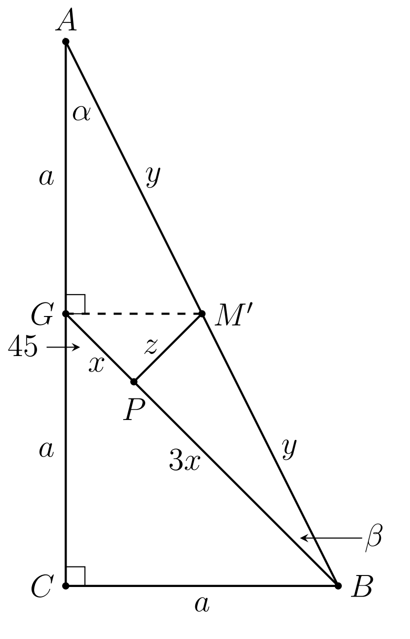
$$
\begin{aligned}
z^2 &= x^2+y^2-2xy\cos\angle PMM' \\
&= \left(\frac{R}{2}\right)^2+\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2-2\left(\frac{R}{2}\right)\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)\cos 45 \\
&= R^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{R^2}{4} \\
z &= \frac{R}{2}\,.
\end{aligned}
$$

* * *

פתרון אחר משתמש בחוק הקוסינוסים על $\triangle PM'B$. GM', האנך האמצעי ל-AC חותך את AB ב-M' (בלי להסתמך על M' כמרכז המעגל החסום את $\triangle ACB$). $GM' \| CB$ ולכן לפי משפט תאלס (הרגיל):

$$
\frac{AG}{GC}=\frac{AM'}{M'B}\,,
$$

ונסמן $y = AM' = M'B$.



ולפי פיתגורס ב-$\triangle GCB$:

$$
\begin{aligned}
(4x)^2 &= a^2+a^2 \\
x &= \frac{1}{\sqrt{8}}a=\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\sqrt{2}R=\frac{R}{2}\,.
\end{aligned}
$$

לפי פיתגורס ב-$\triangle ACB$:

$$\begin{aligned}(2y)^2 &= (2a)^2 + a^2 \\ y &= \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{2}R = \sqrt{\frac{5}{2}}R\,.\end{aligned}$$

נחשב את הזוויות α, β:

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{a}{2y} = \frac{\sqrt{2}R}{2\sqrt{(5/2)}R} = \sqrt{\frac{1}{5}} \\ \alpha &= 26.57 \\ \beta &= 180 - \angle AGB - \alpha = 180 - 135 - 26.57 = 18.43\,.\end{aligned}$$

נשמתש בחוק הקוסינוסים ב-$\triangle PM'B$:

$$\begin{aligned}z^2 &= (3x)^2 + y^2 - 2\cdot 3x\cdot y\cdot\cos\beta \\ &= \left(3\cdot\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{2}}R\right)^2 - 2\cdot 3\cdot\frac{R}{2}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}R\cdot 0.9487 \\ &= 0.25R^2 \\ z &= \frac{R}{2}\,.\end{aligned}$$

אני מעדיף את הפתרון הראשון. התרשים מעט יותר מסובך אבל החישובים יותר פשוטים.

5.14 קיץ תשע"ד מועד א

במשולש שווה־שוקיים ABC ‏($AB = AC$),

BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BAC = 50^{o}$.

א. חשב את גודל הזווית הקהה AMB .

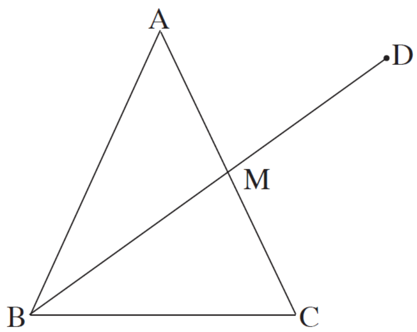
ממשיכים את BM עד הנקודה D .

נתון גם:

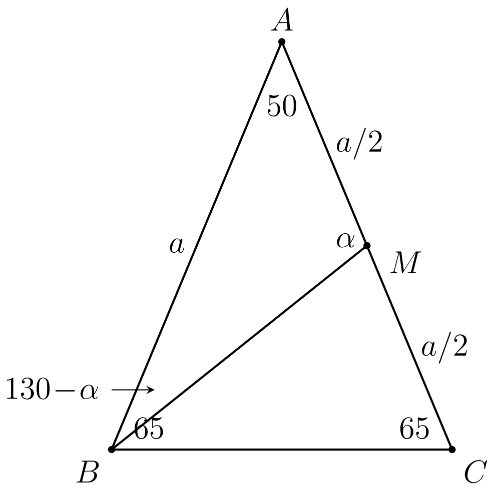
רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ.

רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.

ב. חשב את זוויות המשולש AMD .



נסמן $\angle AMB = \alpha$. נתון $\angle BAC = 50$ ובמשולש שווה-שוקיים $\angle ABC = \angle ACB = (180 - 50)/2 = 65$. נחשב $\angle ABM = 180 - 50 - \alpha = 130 - \alpha$.



סעיף א

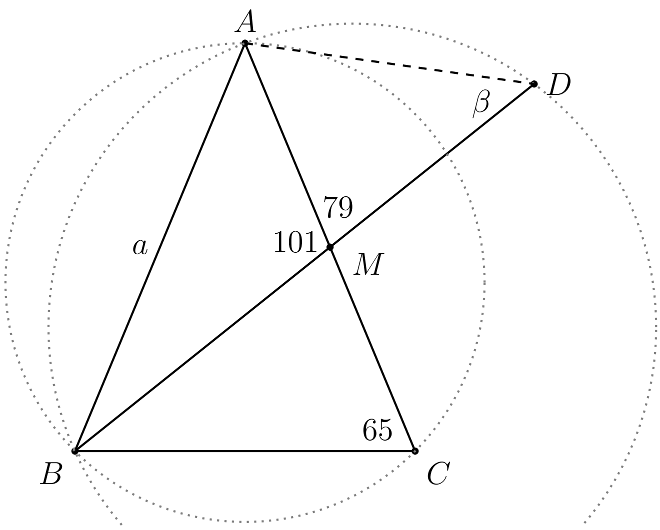
נחפש משולש שעליו אפשר להפעיל את חוק הסינוסים. נתון ש-BM הוא תיכון ל-AC. נסמן את AB, AM עם הנעלם a, ונפעיל את משפט הסינוסים על $\triangle ABM$.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sin\alpha} &= \frac{a/2}{\sin(130-\alpha)} \\
\sin\alpha &= 2\sin(130-\alpha) \\
&= 2\sin 130\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos 130 \\
&= 1.53\cos\alpha + 1.29\sin\alpha
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tan\alpha &= -\frac{1.53}{0.29} \\
\alpha &= -79.27^\circ = 100.73^\circ \approx 101^\circ\,.
\end{aligned}
$$

בהמשך נעבוד עם קירובים למעלה שלמה.

סעיף ב



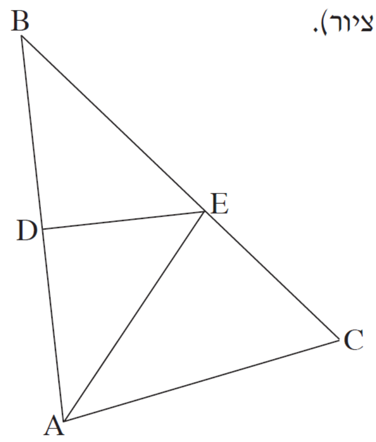
$\angle AMB - 101$ ולכן $\angle AMD =$ לפי זוויות משלימות. נצטרך לחשב אחת מ-$\angle MAD, \angle ADM$, והזווית השלישית תתקבל מסכום הזוויות במשולש. מהתרשים רואים שהצלע AB מול הזווית $\angle ADM = \beta$ היא באורך a, ו-AB היא גם צלע מול $\angle AMB = 101$. לפי חוק הסינוסים ב-$\angle ACB$, $\angle ADB$:

$$
\begin{aligned}
2R_{ABC} &= \frac{a}{\sin 65} = 2\cdot 10 \\
a &= 18.126 \\
2R_{ABD} &= \frac{a}{\sin\beta} = \frac{18.126}{\sin\beta} = 2\cdot 14 \\
\beta &= 40.34\,.
\end{aligned}
$$

הזוויות של $\triangle AMD$ הן $61^\circ, 40^\circ, 79^\circ$.

5.15 חורף תשע"ד

במשולש ABC האנך האמצעי לצלע BA חותך
את הצלעות BC ו־ BA בנקודות E ו־ D בהתאמה (ראה ציור).



נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.

א. (1) הבע באמצעות α ו־ β את $\sphericalangle EAC$.

(2) הבע באמצעות α ו־ β את היחס $\frac{CE}{EB}$.

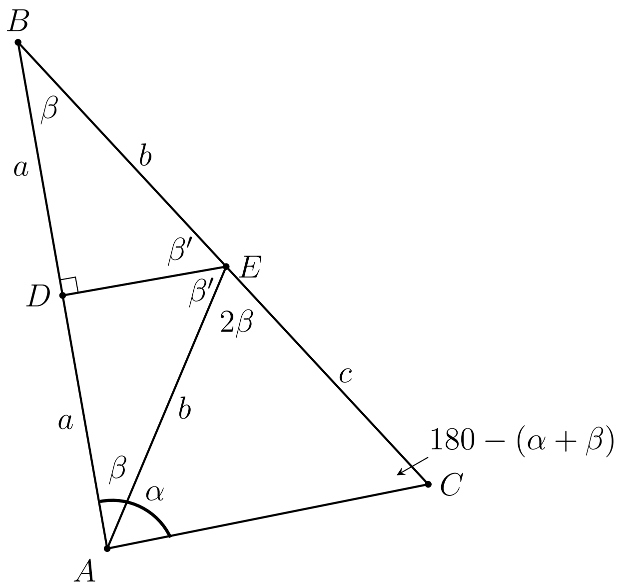
נתון גם: AE חוצה־זווית BAC ,

$AC = 10$ ס"מ , $\beta = 40^o$.

ב. חשב את הרדיוס של המעגל <u>החסום</u> במשולש ABC .

סעיף א

(1) DE הוא האנך האמצעי ל-AB, ולכן $\triangle AED \cong BED$ לפי צ.ז.צ. נסמן את שאר הזוויות לפי זוויות משלימות וסכום זוויות במשולש, כאשר קיצרנו $\beta' = 90-\beta$. התשובה היא $\angle EAC = \alpha-\beta$.



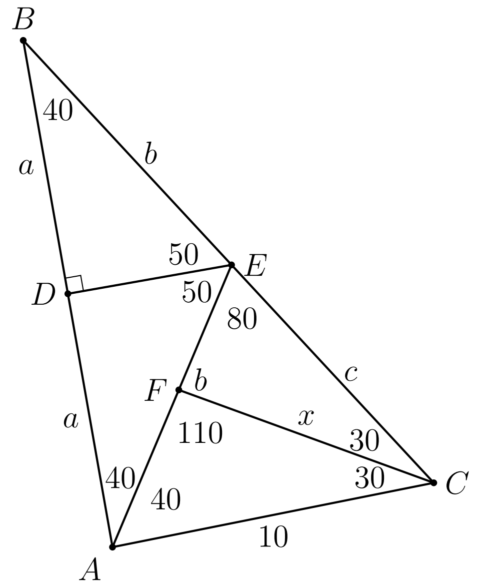
(2) נסמן $BE = b$, $EC = c$. השאלה מבקשת את היחס $\frac{c}{b}$. מהתרשים נראה ש-$\angle BAC = \alpha = 90$ ונוכל להשתמש במשפט תאלס, אבל אי אפשר להסתמך על התרשמות מהתרשים. הראנו ש-$\triangle AED \cong BED$, כך ש-$AE = BE = b$, ונוכל להשתמש בחוק הסינוסים ב-$\triangle AEC$:

$$\begin{aligned}
\frac{c}{\sin(\alpha-\beta)} &= \frac{b}{\sin(180-(\alpha+\beta))} \\
\frac{c}{b} &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} .
\end{aligned}$$

סעיף ב

המשפט הרלוונטי הוא 49 ״שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש״. נתון חוצה זווית AE ב-A. נבנה חוצה זווית שני. ננסה ב-C כי ידוע $AC = 10$ ונוכל להשתמש בחוק הסינוסים ב-$\triangle ACF$, כאשר F היא נקודת החיתוך עם חוצה הזוויות AE, ולכן היא המרכז של המעגל החסום.

נתון ש-$\beta = 40$ וזה מאפשר לנו להשלים זוויות בתרשים:

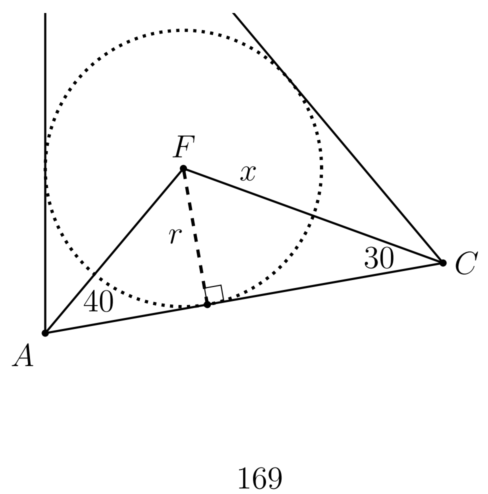


לפי חוק הסינוסים:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sin 40} &= \frac{10}{\sin 110} \\ x &= 6.84\,. \end{aligned}$$

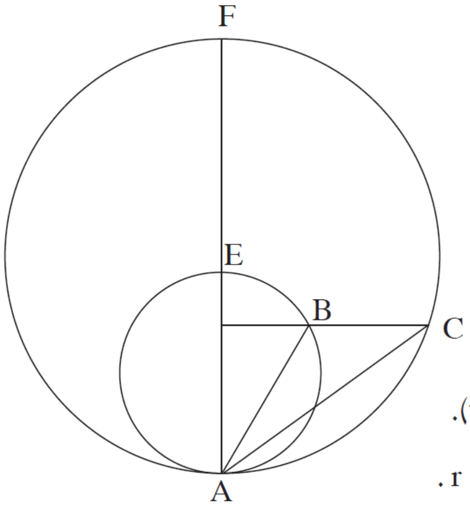
לא לעצור כאן! השאלה מבקשת את הרדיוס של המעגל החסום ולא המרחק אל מרכז המעגל.

נוריד אנך מ-F ל-AC ונחשב: $r = x \sin 30 = 3.42$.



5.16 חורף תשע״ד (שאלה 6)

בבחינה זו היו שלוש שאלות בפרק השני.



שני מעגלים, גדול וקטן, משיקים מבפנים בנקודה A .

נקודה F נמצאת על המעגל הגדול כך ש<u>קטע המרכזים</u>

של שני המעגלים נמצא על AF .

AF חותך את המעגל הקטן בנקודה E .

דרך נקודה B שעל המעגל הקטן העבירו ישר המקביל

למשיק המשותף לשני המעגלים.

המקביל חותך את המעגל הגדול בנקודה C (ראה ציור).

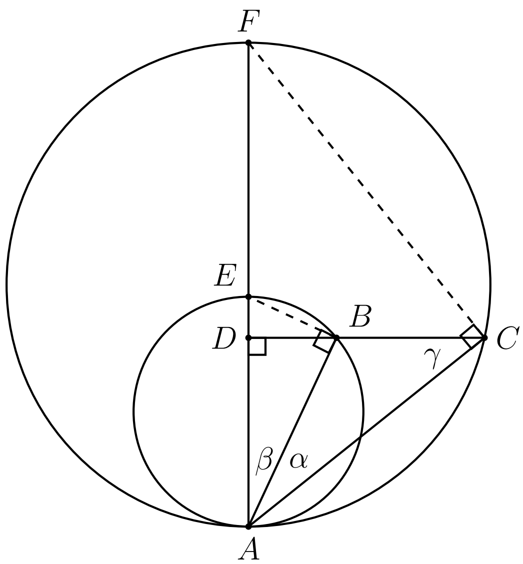
רדיוס המעגל הגדול הוא R , ורדיוס המעגל הקטן הוא r .

נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle FAB = \beta$.

א. (1) הבע באמצעות α ו־ β את $\sphericalangle BCA$. נמק.

(2) הבע רק באמצעות α ו־ β את היחס $\frac{AC}{AB}$.

ב. הבע באמצעות α ו־ β את היחס $\frac{R}{r}$.



סעיף א

(1) $\triangle DCA$ יישר זווית ולכן סכום הזזויות החדות שווה ל-90. $\angle BCA = \gamma = 90 - (\alpha + \beta)$.

AD (2) הוא צלע של $\triangle DCA$ וגם של $\triangle DBA$. נפעיל את חוק הסינוסים פעמיים:

$$\begin{aligned}
\frac{AB}{\sin 90} &= \frac{AD}{\sin(90-\beta)} \\
AD &= AB\cos\beta \\
\frac{AC}{\sin 90} &= \frac{AD}{\sin\gamma} \\
AC &= \frac{AB\cos\beta}{\sin(90-(\alpha+\beta))} \\
\frac{AC}{AB} &= \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)} \,.
\end{aligned}$$

פתרון אחר מתקבל מהפעלת חוק הסינוסים פעם אחת על $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned}
\frac{AC}{\sin(180-\alpha-\gamma)} &= \frac{AB}{\sin\gamma} \\
\frac{AC}{AB} &= \frac{\sin(180-(\alpha+\gamma))}{\sin(90-(\alpha+\beta))} = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\cos(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\sin(\alpha+90-(\alpha+\beta))}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

סעיף ב

לאחר שחישבנו יחס $\frac{AC}{AB}$ נחפש קשר בין AB, AC לבין הרדיוסים. נחבר B ל-E ו-C ל-F. נקבל שני משולשים חסומים במעגלים וניתן להשתמש בנוסחה של חוק הסינוסים עם רדיוס:

$$\begin{aligned}
2R &= \frac{AC}{\sin(90-(\alpha+\beta))} \\
2r &= \frac{AB}{\sin(90-\beta)} \\
\frac{R}{r} &= \frac{AC}{2\cos(\alpha+\beta)}\cdot\frac{2\cos\beta}{AB} == \frac{\cos^2\beta}{\cos^2(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

פתרון אחר: נתון ש-FA הוא קוטר)"קטע המרכזים"(של המעגל הגדול, ולכן EA הוא קוטר של המעגל הקטן. זווית הנשענת על קוטר $\triangle ACF, \triangle ABE$ הן ישר-זווית, ולכן:

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= \frac{AB}{2r} \\
\cos(\alpha+\beta) &= \frac{AC}{2R} \\
\frac{R}{r} &= \frac{AC}{2\cos(\alpha+\beta)}\cdot\frac{2\cos\beta}{AB} = \frac{\cos^2\beta}{\cos^2(\alpha+\beta)} \,.
\end{aligned}$$

המלצות: טריגונומטריה

- ראו נספח ג׳ המסביר את החשיבות של מעגל היחידה בחישובים טריגונומטריים.

  הנספח מציג איך לשחזר בקלות את הנוסחאות ל-$\sin 2\theta$, $\sin(180^\circ - \theta)$, $\sin(90^\circ - \theta)$, ונוסאות דומות עבור קיסינוס.

- חשוב לצייר תרשימים **ברורים וגדולים**, עדיף עם סרגל ומחוגה. בתהליך הפתרון אנו מסמנים את המידע המצטבר על הזוויות והצלעות ויש לדאוג שיהיה מספיק מקום.

- כאשר לשאלה יש מספר סעיפים כדאי לצייר תרשימים נפרדים לכל סעיף תוך העלמת מידע לא רלוונטי לאותו סעיף.

- אני מעדיף לסמן זוויות עם אותיות יווניות כגון α, ולא על ידי ציון שלושת הנקודות המגדירות אותה $\angle ABC$, כי קשה יותר לעקוב אחר הנקודות המגדירות את הזווית.

- השלימו זוויות ככל האפשר תוך שימוש בסכום הזוויות במשולש, ובזוויות משלימות. כדי להקל על החישובים אני משתמש בנעלמים נוספים כדי לקצר ביטויים, למשל, $\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$.

- שימו לב שאין עקביות בסימון A, B, C, D של הקודקודים של משולש או מרובע.

- בשאלות על טריגונומטריה בדרך כלל עדיף להשתמש בנוסחה לשטח משולש:

  $$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha\,,$$

  ולא בחישוב של מחצית מכפלת הבסיס והגובה.

- עבור מעגל חוסם במשולש, המשפט הרלוונטי הוא 54 ״במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת , שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש״. ניתן בקלות למצוא את רדיוס המעגל מחוק הסינוסים:

  $$2R = \frac{a}{\sin\alpha}\,.$$

- עבור מעגל חסום במשולש, המשפט הרלוונטי הוא 49 ״שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש״. אין נוסחה עבור רדיוס המעגל אבל אפשר למצוא אותו כאורך הגובה מהמרכז לאחת הצלעות.

- טרפזים מאוד אהובים על ידי כותבי הבחינות. שננו משפטים 56 ״ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-180״ ו-57 ״מרובע קמור חוסם מעגל אם ורק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות״.

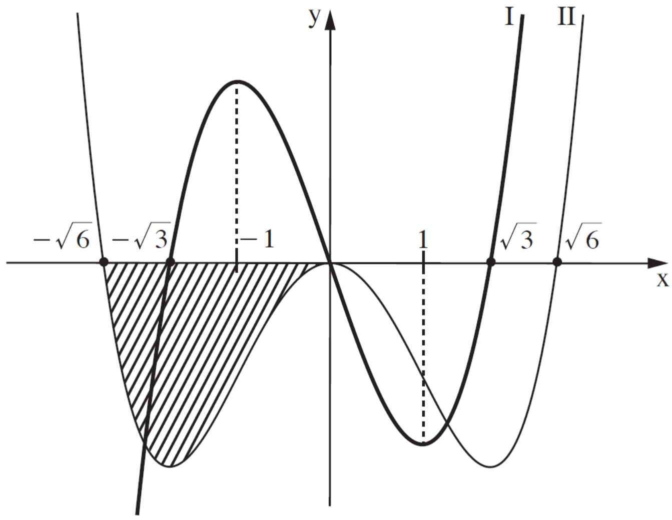
- שימו לב שהמרכז המעגל החוסם לא חופף את מרכז המעגל החסום, אלא במקרים מיוחדים כגון משולש שווה-צלעות וריבוע.

- לעתים קרובות התשובה לשאלה תהיה ערך ממשי לזווית או אורך. אני מעדיף להישאר עם נעלמים כל עוד הדבר אפשרי ורק בסוף להשתמש במחשבון כדי לחשב ערכים.

פרק 6 חדו"א שאלה 6

6.1 קיץ תשע"ח מועד ב

לפניך הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו־ $f''(x)$ (פונקציית הנגזרת הראשונה ופונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$) בתחום $-2.5 \le x \le 2.5$. שני הגרפים עוברים בראשית הצירים.



א. התאם בין הגרפים I ו־ II ובין הפונקציות $f'(x)$ ו־ $f''(x)$. נמק.

ב. **(1)** כמה נקודות קיצון פנימיות יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המתואר בגרף? נמק את תשובתך.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המתואר בגרף? נמק את תשובתך.

ג. עבור איזה ערך של x בתחום $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$ שיפוע המשיק לגרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, הוא מינימלי?

נתון: $f(x)$ היא פונקציה אי־זוגית.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה הוא t.

ה. הבע באמצעות t את השטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי החלק השלילי של ציר ה־ x (השטח המקווקו בציור).

ו. נתון: קיימים a, b ו־ c ממשיים כך ש־ $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$.

מצא את c ואת היחס $\frac{a}{b}$.

סעיף א

נקודות הקיצון של $f'(x)$ הן הנקודות בהן $f''(x) = 0$. לגרף II נקודות קיצון ב-$\pm\sqrt{3}, 0$ ובנקודות הללו הגרף I חותך את ציר ה-x. לכן, II הוא הגרף של $f'(x)$ ו-I הוא הגרף של $f''(x)$.

סעיף ב

(1) הגרף II מתאפס ב-$\pm\sqrt{6}, 0$, אבל ב-0 היא לא מחליף סימן ולכן 0 הוא לא נקודת קיצון.

(2) הנגזרת השנייה מתאפסת בשלוש נקודות $\pm\sqrt{3}, 0$. בכל שלושת הנקודות הנגזרת הראשונה לא מחליפה סימן, ולכן כולן נקודות פיתול ולא נקודות קיצון.

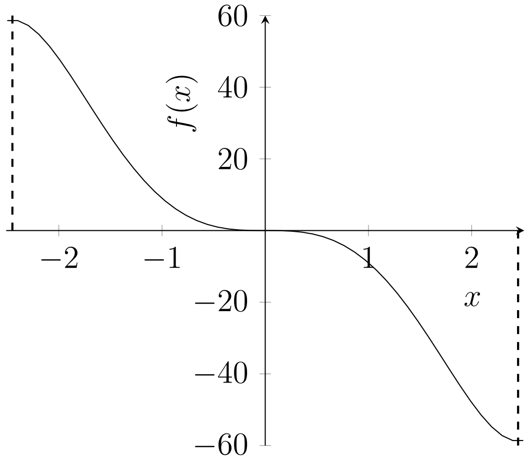
סעיף ג

הנגזרת השנייה היא שיפוע המשיק לנגזרת הראשונה. בתחום הניתן הערך המינימלי מתקבל ב-1.

סעיף ד

נתון שהפונקציה אי-זוגית אז $f(0) = 0$. הוכחה: $a = -a$ אם ורק אם $a = 0$. אם $f(x)$ אי-זוגית, $f(0) = f(-0) = -f(0) = 0$.

בין 0 ל-$\sqrt{3}$ הנגזרת הראשונה, השיפוע, שלילית (גרף II), ולכן $f(x)$ יורדת מאפס לערכים שליליים. בסעיף ב חישבנו שיש שתי נקודות פיתול ב-$\pm\sqrt{3} \approx 1.73$ בנוסף לנקודה ב-0. נתון שהפונקציה אי-זוגיות כך שאפשר לקבל את הערכים עבור $x < 0$ על ידי סימטריה סביב ציר ה-y. הגרף נראה כך:



סעיף ה

מהגרף רואים שהגבולות הם $-\sqrt{6}, 0$, אבל כדאי לנמק. מצאנו בסעיף ב ש-$f'(-\sqrt{6}) = 0$, ובסעיף ד ראינו ש-$f(0) = 0$, כך שציר ה-x תוחם את השטח. חישוב השטח:

$$\int_{-\sqrt{6}}^{0} 0 - f'(x)dx = -\left. f(x)\right|_{-\sqrt{6}}^{0} = 0 - (-f(-\sqrt{6})) = f(-\sqrt{6}) = t\,,$$

כי נקודת המקסימום של $f(x)$ היא ב-$x = -\sqrt{6}$.

סעיף ו

לפי $f(0) = 0$, $c = 0$.

הנגזרת הראשונה מתאפסת ב-$\pm\sqrt{6}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 5ax^4 + 3bx^2 \\
&= 5a(\pm\sqrt{6})^4 + 3b(\pm\sqrt{6})^2 \\
&= 5a(\pm\sqrt{6})^2 + 3b = 0 \\
\frac{a}{b} &= -\frac{1}{10}\,.
\end{aligned}$$

6.2 קיץ תשע"ח מועד א

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax-1}{\sqrt{ax^2-2x+1}}$. a הוא פרמטר.

נתון: הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x.

א. הוכח: $a>1$.

ענה על סעיף ב. אם יש צורך, הבע באמצעות a .

ב. **(1)** מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) כתוב את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה־ x .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $a=3$.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־ x , ועל ידי הישרים $x=\frac{2}{3}$ ו־ $x=2$.

ד. $g(x)$ היא פונקציה רציפה המוגדרת לכל x .

נסמן ב־ S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{3}$ ו־ $x=b$

($b>\frac{1}{3}$).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{3}$ ו־ $x=b$

שווה ל־ $2S$ בעבור כל b .

הבע את $g(x)$ באמצעות $f(x)$ בתחום $x>\frac{1}{3}$ (כתוב את שתי האפשרויות). אין צורך להוכיח את תשובתך.

סעיף א

נתון שהפונקציה מוגדרת לכל x, ולכן לפולינום במכנה לא יהיו שורשים:

$$(-2)^2-4\cdot a\cdot 1=4-4a<0\,,$$

ולכן $a>1$. אסור שלפולינום יהיו ערכים שליליים. לפולינום יש ערך חיובי, למשל, $x=\frac{1}{2}$. אם הפולינום לא יכול לקבל ערך אפס, אין נקודות חיתוך עם ציר ה-x ולא יהיו ערכים שליליים.

סעיף ב

(1) $f(0)=\frac{-1}{\sqrt{1}}$ ונקודת החיתוך עם ציר ה-y היא $(0,-1)$. המכנה חיובי כך שנקודת החיתוך עם ציר ה-x מתקבל מ-$ax-1=0$, והנקודה היא $(\frac{1}{a},0)$.

(2) עבור $x\rightarrow+\infty$:

$$\frac{\left(a-\frac{1}{x}\right)}{+\sqrt{a-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}\xrightarrow[+\infty]{}=\frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}\,.$$

עבור $x\rightarrow-\infty$:

$$\frac{\left(a-\frac{1}{x}\right)}{-\sqrt{a-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}\xrightarrow[-\infty]{}=-\frac{a}{\sqrt{a}}=-\sqrt{a}\,.$$

(3) נחשב את הנגזרת הראשונה:

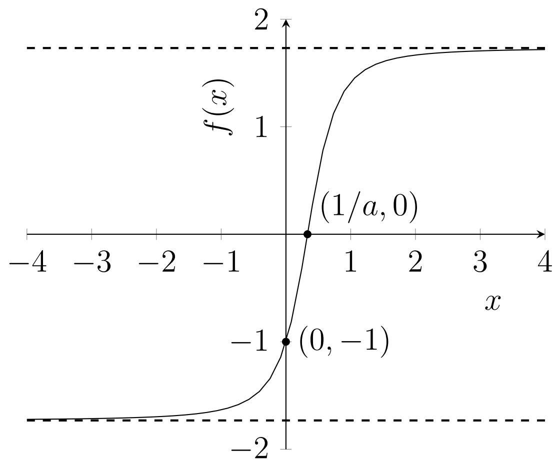
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a\sqrt{ax^2-2x+1} - (ax-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{ax^2-2x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}(2ax-2)}{(\sqrt{ax^2-2x+1})^2} \\ &= \frac{a(ax^2-2x+1)-(ax-1)(ax-1)}{(\sqrt{ax^2-2x+1})^2\sqrt{ax^2-2x+1}}\,. \end{aligned}$$

המכנה חיובי ולכן סימן הנגזרת שווה בסימן המונה:

$$a^2x^2 - 2ax + a - a^2x^2 + 2ax - 1 = a - 1\,.$$

הוכחנו ש-$a > 1$ ולכן $a - 1 > 0$ והפונקציה תמיד עולה.

(4)



סעיף ג

$\frac{2}{3} < \frac{1}{3}$ ולכן גבולות האינטגרל הם בחלק החיובי של הפונקציה.

$$\begin{aligned} \int_{2/3}^{2}\frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+1}} &= \int_{2/3}^{2}\frac{2}{2}\left(\sqrt{3x^2-2x+1}\right)' \\ &= \sqrt{3x^2-2x+1}\Big|_{2/3}^{2} \\ &= \sqrt{12-4+1} - \sqrt{\frac{4}{3}-\frac{4}{3}+1} = 2\,. \end{aligned}$$

סעיף ד

נתון ש-$\frac{1}{3} < b$ כך שגבולות האינטרגלים בתחום החיובי של הפונקציות. שתי האפשרויות הן ש-$f(x)$ מעל $g(x)$ וש-$g(x)$ מעל $f(x)$.

$$\int(g-f) = \int g - \int f = \int g - S = 2S\,,$$

ולכן $\int g = 3S$ ו-$g = 3f$.

$$\int(f-g) = \int f - \int g = S - \int g = 2S\,,$$

ולכן $\int g = -S$ ו-$g = -f$.

6.3 חורף תשע״ח

נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$, $g(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$.

ענה על סעיף א עבור התחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכות לציר ה־ x .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענה גם על סעיף ב עבור התחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$.

ב. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) הוכח: $g(x)=-f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

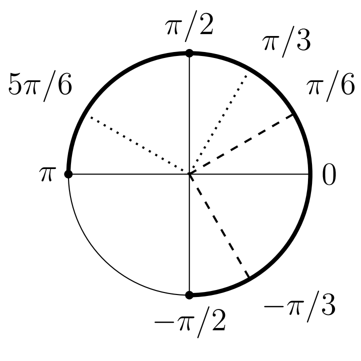
(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ג. מצא את ערך הביטוי $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$. נמק את תשובתך.

הקשת העבה מראה את התחום והקווים מראים את הערך של $x-\frac{\pi}{2}$ עבור $x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$:

$$\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{6}=-\frac{2\pi}{6}=-\frac{\pi}{3},\qquad \frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}-\frac{3\pi}{6}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.$$



סעיף א

(1) $f(x)$ מוגדרת אם $\cos x>0$, אם x מימין לציר ה-y. תחום ההגדרה הוא $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

(2)

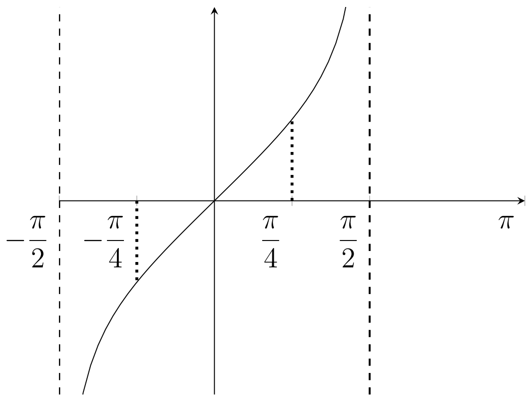
$$\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \xrightarrow[+\frac{\pi}{2}]{} \frac{+1}{0} = +\infty, \qquad \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \xrightarrow[-\frac{\pi}{2}]{} \frac{-1}{0} = -\infty\,.$$

(3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x\sqrt{\cos x} - \sin x \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{\cos x})^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sin x)}{\cos x} \\ &= \frac{2\cos^2 x + \sin^2 x}{2\cos x\sqrt{\cos x}} = \frac{\cos^2 x + 1}{2\cos x\sqrt{\cos x}}\,. \end{aligned}$$

בתחום ההגדרה $\cos x > 0$ ולכן הנגזרת הראשונה תמיד חיובית והפונקציה עולה בכל התחום. מכאן שהנגזרת הראשונה לא מתאפסת בתחום כך שאין נקודות קיצון פנימיות.

(4) הגרף מתקבל מ-$f(0) = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$, מהאסימפטוטות, ומהעובדה שאין נקודות קיצון:



סעיף ב

(1) הפונקציה מוגדרת אם $\sin x > 0$: אם y מעל לציר ה-x. תחום ההגדרה הוא $0 < x < \pi$.

(2) חיבור או חיסור של $\frac{\pi}{2}$ משנה סינוס לקוסינוס ולהיפך. צריך רק לקבוע את הסימנים)ראו תרשים לפני סעיף א(.

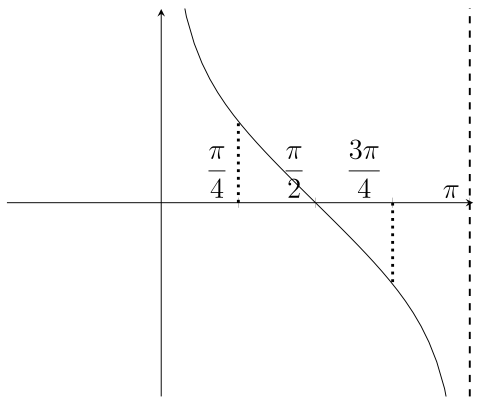
$$-f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}}\right) = -\left(\frac{-\cos x}{\sqrt{\sin x}}\right) = g(x)\,.$$

אפשר גם לחשב לפי הנוסחה לחיסור של סינוס וקוסינוס:

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \cos\frac{\pi}{2} - \cos x \sin\frac{\pi}{2} = -\cos x \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \cos\frac{\pi}{2} + \sin x \sin\frac{\pi}{2} = \sin x\,. \end{aligned}$$

(3) הגרף של $g(x)$ מתקבל מהזזה ימינה של $\frac{\pi}{2}$ והפיכת הסימן. למשל:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=-f\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=-f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\,.$$



סעיף ג

התרומה של החלק שלילי של הפונקציה לאינטגרל שווה לתרומה של החלק החיובי שלו, ולכן האינטגרל מתאפס.

מי שלא משתכנע מהטיעון יכול לחשב:

$$(\sqrt{\cos x})'=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{\cos x})^{-\frac{1}{2}}\cdot(-\sin x)=-\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,,$$

ולכן:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}=-2\sqrt{\cos x}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=-2\left(\sqrt{\sqrt{2}/2}\right)-(-2)\left(\sqrt{\sqrt{2}/2}\right)=0\,.$$

6.4 קיץ תשע״ז מועד ב

נתונה הפונקציה $f(x) = a - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$. a הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה־ x .

ב. מצא את a .

הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x) + k|$.

ידוע שגרף הפונקציה $g(x)$ משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $f(x)$.

מצא את k (מצא את שתי האפשרויות). נמק את תשובתך.

סעיף א

(1) תחום ההגדרה הוא $x \neq 2$ כי $x = 2$ מאפס את המכנה של שני גורמים.

(2) כאשר $x \to \pm\infty$ שני גורמים שואפים לאפס, ולכן האסימפטוטה האופקית היא $y = a$.

כאשר $x \to 2$ שני גורמים שואפים לאינסוף, ולכן האסימפטוטה האנכית היא $x = 2$.

נבדוק את סימן הפונקציה השואפת לאינסוף. כאשר $x \to 2$, $\frac{1}{(x-2)^2} \gg \frac{2}{x-2}$ כך ש-$y \to +\infty$ גם מימין וגם משמאל.

(3)

$$f'(x) = -\frac{2 \cdot -1}{(x-2)^2} + \frac{-2}{(x-2)^3} = 0\,.$$

הפוקציה לא מוגדרת ב-$x = 2$, כך שאפשר להכפיל את המשוואה ב-$(x-2)^3$. נקבל $2(x-2) = 2$ ו-$x = 3$. נקודת הקיצון היא $(3, a-1)$.

על ידי הכפלה בחזקות של $(x-2)$, ניתן לכתוב את הנגזרת הראשונה כך:

$$f'(x) = \frac{2(x-2)^2 - 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2x^2 - 10x + 12}{(x-2)^4}\,.$$

המכנה חיובי לכן הסימן של הנגזרת השנייה שווה לסימן נגזרת המונה $4x-10$. ב-$x=3$, הסימן חיובי והנקודת הקיצון היא מינימום.

דרך אחרת לבדוק אם מדובר במינימום או מקסימום היא באמצעות טבלת עליות וירידות:

x	0	2	2.5	3	4
$f'(x)$	0.75	$\times$	-8	0	0.25
$f(x)$	$\nearrow$	$\times$	$\searrow$	$a-1$	$\nearrow$

הנקודה $(3, a-1)$ היא מינימום.

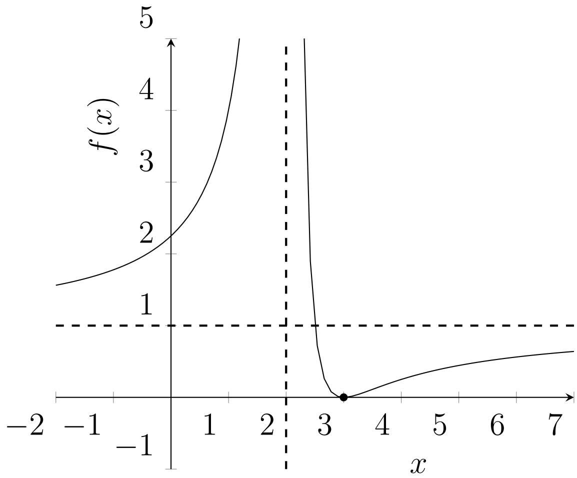
(4) הפתרון מופיע בטבלה בתת-סעיף הקודם.

סעיף ב

נתון שערכה של $f(x)$ בנקודת המינימום הוא אפס. $f(3)=a-1=0$ ו-$a=1$.

סעיף ג

לפי טבלת העליות והירידות, הפונקציה עולה עד לאסימפטוטה האנכית, אח״כ יורדת לנקודת המינימום ואח״כ עולה ושואפת לאסימפטוטה האופקית:



סעיף ד האסימפטוטה האופקית היא $y=a=1$ ונקודת המינימום היא $(3, a-1)=(3,0)$:

$$
\begin{aligned}
g(3) &= |f(3)+k| = a = 1 \\
|0+k| &= 1 \\
k &= \pm 1\,.
\end{aligned}
$$

6.5 קיץ תשע"ז מועד א

נתונה הפונקציה $f(x) = \dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+24}}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f(x+5)$.

ב. (1) הוכח ש־ $g(x)$ היא פונקציה אי־זוגית.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. הסבר מדוע לכל $1 < a < b$ מתקיים השוויון: $\int\limits_{a+5}^{b+5} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} g(x)\,dx$.

סעיף א

(1) הפונקציה מוגדרת אם המכנה שונה מאפס ואם הביטוי בשורש גדול או שווה לאפס:

$$\begin{aligned} x^2-10x+24 &> 0 \\ (x-4)(x-6) &> 0\,. \end{aligned}$$

המכפלה חיובית רק אם שני הגורמים גדולים מאפס או שניהם קטנים מאפס. אבל אם $x > 6$ אז גם $x > 4$ ואם $x < 4$ אז גם $x < 6$, ולכן הפונקציה מוגדרת כאשר:

$$x < 4 \quad \text{או} \quad x > 6\,.$$

(2) $f(x)=0$ אם המכנה חיובי והמונה $x-5=0$. אבל 5 לא בתחום ההגדרה כך שאין נקודת חיתוך עם ציר ה-x. נחשב את נקודת החיתוך $(0,y)$ עם ציר ה-y:

$$y = f(0) = \frac{0-5}{\sqrt{0^2-10\cdot 0+24}} = \frac{-5}{\sqrt{24}}\,.$$

(3) כאשר $x \rightarrow 6^+$ המונה שואף ל-$1+$, ובמכנה שורש חיובי שהולך וקטן, ולכן $f(x) \rightarrow +\infty$. $x=6$ היא אסימפטוטה אנכית אחת. באופן דומה, כאשר $x \rightarrow 4^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$, ו-$x=4$ היא אסימפטוטה אנכית שנייה.

כאשר $x \rightarrow +\infty$ המנה שואף ל-$+\infty$, ובמכנה $x^2 \gg -10x+24$, וערכו שואף ל-$+\infty$. לכן $y=1$ היא אסימפטוטה אופקית אחת. באופן דומה, כאשר $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -1$ ו-$y=-1$ היא אסימפטוטה אופקית שנייה.

(4) אי-אפשר מייד להכין טבלה של עליות וירידות, כי אין אנו יודעים אם יש נקודות קיצון בתחום ההגדרה של הפונקציה. כצעד ראשון נבדוק את ערכו של $f(x)'$. לשם קיצור נסמן $u = x^2 - 10x + 24$. הנגזרת היא:

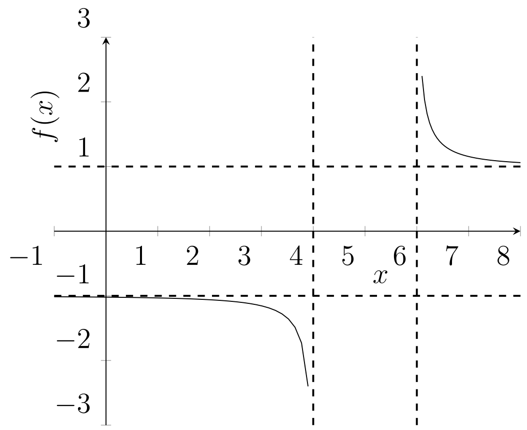
$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{u} - (x-5) \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x-10)}{u} = \frac{u - (x-5)(x-5)}{u\sqrt{u}}\,.$$

u חיובי **בתחום ההגדרה** וגם $\sqrt{u}$ חיובי, ולכן הסימן או נקודת האיפוס של הנגזרת תלוי רק במונה:

$$u - (x-5)(x-5) = x^2 - 10x + 24 - x^2 + 10x - 25 = -1\,.$$

בתחום ההגדרה, הנגזרת שלילית (ולא מתאפסת), ולכן הפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה.

(5)



סעיף ב

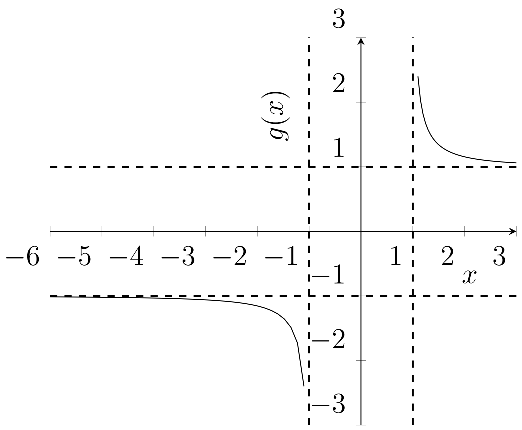
(1) פתרון אחד הוא לחשב את $g(x), g(-x)$ ולהראות ש-$g(-x) = -g(x)$:

$$\begin{aligned}
g(-x) &= f(-x+5) = f(5-x) \\
&= \frac{5-x-5}{\sqrt{(5-x)^2 - 10(5-x) + 24}} \\
&= \frac{-x}{\sqrt{25 - 10x + x^2 - 50 + 10x + 24}} \\
&= \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}\,, \\
g(x) &= f(x+5) \\
&= \frac{x+5-5}{\sqrt{(x+5)^2 - 10(x+5) + 24}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 10x + 25 - 10x - 50 + 24}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = -\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = -g(-x)\,.
\end{aligned}$$

פתרון מעט יותר מסובך הוא להראות $g(-x) = -g(x)$ בצורה ישירה:

$$\begin{aligned}
g(-x) &= f(-x+5) = f(5-x) \\
&= \frac{5-x-5}{\sqrt{(5-x)^2-10(5-x)+24}} \\
&= \frac{-x}{\sqrt{(x^2+10x+25)-(10x+50)+24}} \\
&= \frac{-((x+5)-5)}{\sqrt{(x+5)^2-10(x+5)+24}} = -g(x)\,.
\end{aligned}$$

(2) הגרף הוא אותו גרף מוזז שמאלה חמש יחידות:



סעיף ג

נתון ש-$1 < a < b$, וכפי שניתן לראות מהגרף, a, b הם בתחום ההגדרה של g. נחשב:

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x+5)dx = \int_{a+5}^{b+5} f(x)dx\,.$$

6.6 חורף תשע"ז

נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{ax^2+4x}{x^2+3x+b}$.

a ו־ b הם פרמטרים.

נתון: $x=1$, $y=1$ הן אסימפטוטות של הפונקציה.

א. מצא את a ואת b .

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) האם יש לפונקציה אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים (מלבד $x=1$ ו־ $y=1$)? הסבר.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. עבור אילו ערכי x מתקיים: $|f(x)|=-f(x)$? נמק.

ה. נגדיר $g(x)=f^2(x)\cdot f'(x)$.

הראה כי השטח המוגבל על ידי ציר ה־ x , על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הישר $x=0.5$ הוא $\frac{1}{3}$. נמק את תשובתך.

סעיף א

נקבל את האסימפטוטה אנכית $x=1$ כאשר המכנה מתאפס:

$$\begin{aligned} x^2+3x+b &= 0 \\ 1^2+3\cdot1+b &= 0 \\ b &= -4\,. \end{aligned}$$

נחשב את האסימפטוטה האופקית $y=1$. כאשר $x\to\infty$, $a=1$.

$$\frac{a+\frac{4}{x}}{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}\to 1\,,$$

סעיף ב

(1) המכנה מתאפס כאשר:

$$x^2+3x-4=(x+4)(x-1)=0\,,$$

ולכן הפונקציה מוגדרת עבור כל x פרט ל-$x=1, x=-4$.

(2) נציב $x=0$. המונה מתאפס והמכנה לא מתאפס ולכן נקודת החיתוך עם ציר ה-y היא $(0,0)$.

נציב $y=0$ ונקבל $x^2+4x=x(x+4)=0$. $(0,0)$ היא נקודת חיתוך עם שני הצירים. ב-$x=-4$ הפונקציה לא מוגדרת, ולכן אין עוד נקודת חיתוך עם ציר ה-x.

(3) אין עוד אסימפטוטה אופקיות לפי החישוב בסעיף א.

יש אסימפטוטה אנכית כאשר $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)=0$. אבל $x=-4$ גם מאפס את המונה. נצמצם את הפונקציה:

$$\frac{x^2+4x}{x^2+3x-4}=\frac{x(x+4)}{(x+4)(x-1)}=\frac{x}{x-1}\,.$$

כאשר $x\to -4$ (בשני הכיוונים), ערך הפונקציה שואפת ל-$\frac{4}{5}$, ולכן אין כאן אסימפטוטה אלא חור.

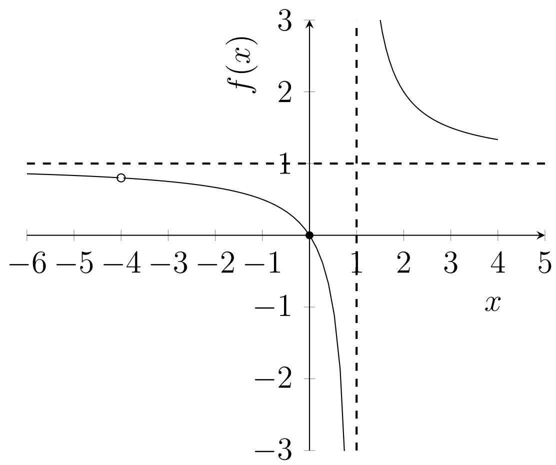
(4) הנגזרת הראשונה (ללא החישובים הארוכים):

$$\frac{(x^2+4x)'(x^2+3x-4)-(x^2+4x)(x^2+3x-4)'}{(x^2+3x-4)^2}=\frac{-(x+4)^2}{(x^2+3x-4)^2}\,.$$

הנגזרת לא מתאפסת ותמיד שלילית, ולכן הפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה שלה.

אפשר לקצר אם נצמצם את הפונקציה לפי שנחשב את הנגזרת. $\left(\frac{x}{x-1}\right)'=-1$, שתמיד שלילי.

סעיף ג



סעיף ד

אם נתייחס לגרף, $|f(x)|$ מעביר ערכים מתחת לציר ה-x לערכים מעל לציר, ו-$-f(x)$ מעביר את כל הערכים לצד השני של ציר ה-x. $|f(x)|=-f(x)$ רק עבור ערכים מתחת לציר ה-x כי רק עבור ערכים אלה מתבצעת אותה פעולה. עבור פונקציה זו הערכים הם $0\le x<1$.

סעיף ה

מצאנו ש-$f(0)=0$ וחישוב פשוט מראה ש-$f(0.5)=\frac{9}{-9}=-1$.

מסעיף ב $f'(x)$ תמיד שלילי ולכן $g(x)=f(x)^2\cdot f'(x)$ תמיד שלילי או אפס. השטח שיש לחשב נמצא מתחת לציר ה-x. נשים לב ש-$(f^3(x))'=3f^2(x)\cdot f'(x)$, ונוכל לחשב את השטח:

$$\int_0^{0.5} 0-f^2(x)\cdot f'(x)=-\frac{1}{3}f^3(x)\Big|_0^{0.5}=-\frac{1}{3}f^3(0.5)-(-0)=-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3=\frac{1}{3}\,.$$

6.7 קיץ תשע"ו מועד ב

נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{2\cos^2 x-1}{2\cos^2 x}$.

א. בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ x (אם יש כאלה).

(3) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x (אם יש כאלה).

(4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה),

וקבע את סוגן.

ב. בתחום $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$:

(1) הראה שפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,

על ידי ציר ה־ x ועל ידי ציר ה־ y .

סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס. $\cos^2 x=0$ בתחום כאשר $x=\frac{\pi}{2}$, ולכן תחום ההגדרה הוא $0\le x<\frac{\pi}{2}$.

(2) כאשר $x\to\frac{\pi}{2}$, המכנה שואף לאפס והמונה שואף ל--1, ולכן $x=\frac{\pi}{2}$ היא אסימפטוטה אנכית.

(3) בתחום ההגדרה המכנה לא מאפס, ולכן נקודות החיתוך הן הנקודות עבורן המונה מתאפס:

$$\begin{aligned}2\cos^2 x &= 1\\ \cos x &= \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,.\end{aligned}$$

בתחום ההגדרה יש רק פתרון אחד ונקודת הקיצון הוא $(\frac{\pi}{4},0)$.

(4) בתחום ההגדרה $\cos x>0$ ולכן $f(x)=1-\frac{1}{2\cos^2 x}$. חישוב הנגזרת:

$$f'(x)=\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)'=-\left(-2\cos x\cdot-\sin x\right)=-2\cos x\sin x=0\,.$$

$f'(x)$ מתאפס בתחום ההגדרה כאשר $x=0$ ונקודת הקיצון היא $(0,\frac{1}{2})$. סינוס וקוסינוס חיוביים בתחום, ולכן הנגזרת שלילית והפונקציה יורדת בכל התחום. נקודת הקיצון היא מקסימום.

אפשרות אחרת היא לחשב את הנגזרת השנייה:

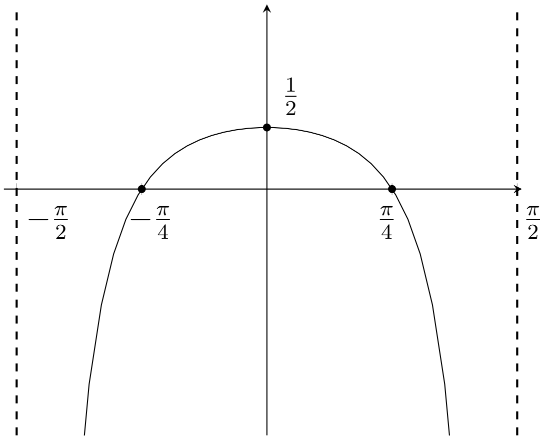
$$f''(x)=(-2\cos x\sin x)'=-2(-\sin^2 x+\cos^2 x)\,.$$

בנקודת הקיצון $x=0$, $f''(0)=-2\cdot(-0+1)=-2$ ונקודת הקיצון היא מקסימום.

סעיף ב

(1) $\cos(-x) = \cos x$ ולכן $\cos^2(-x) = \cos^2 x$ והפונקציה זוגית.

(2) המקסימום הוא ב-$(0, \frac{1}{2})$, הפונקציה יורדת בתחום ההגדרה $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, יש אסימפטוטה אנכית ב-$\frac{\pi}{2}$, והפונקציה זוגית. התרשים שמתקבל הוא:



סעיף ג

הנוסחה $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ אמנם מופיעה בנוסחאון אבל לא מרבים להשתמש בה, כך שהשאלה עלולה להיות קשה.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\cos^2 x} \\
&= x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\tan 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

6.8 קיץ תשע"ו מועד א

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - \sin(2x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le 0$.

ענה על הסעיפים שלפניך עבור התחום הנתון.

א. מצא את השיפוע הגדול ביותר ואת השיפוע הקטן ביותר של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. (1) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

סעיף א

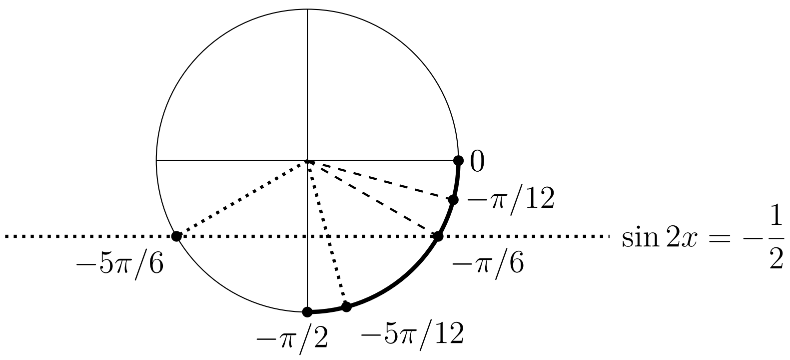
נתחיל עם חישוב הנגזרות:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - \sin 2x \\ f'(x) &= 2x - 2\cos 2x \\ f''(x) &= 2 + 4\sin 2x\,. \end{aligned}$$

השאלה מבקשת את נקודות הקיצון של הנגזרת הראשונה ונקבל אותם על ידי חישוב הנקודות בהן **הנגזרת השנייה** מתאפסת:

$$\begin{aligned} 2 + 4\sin 2x &= 0 \\ 2x &= \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6} \\ x &= -\frac{\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12}\,. \end{aligned}$$

כאן יש להיזהר. למרות ש-$2x = -\frac{5\pi}{6}$ לא נמצא בתחום, $x = -\frac{5\pi}{12}$ כן נמצא בתחום, והיא נקודת קיצון של הנגזרת הראשון.



כדי לבדוק אם נקודות הקיצון הן מינימום או מקסימום, נחשב את **הנגזרת השנייה של הנגזרת הראשונה** שהיא הנגזרת השלישית של הפונקציה.

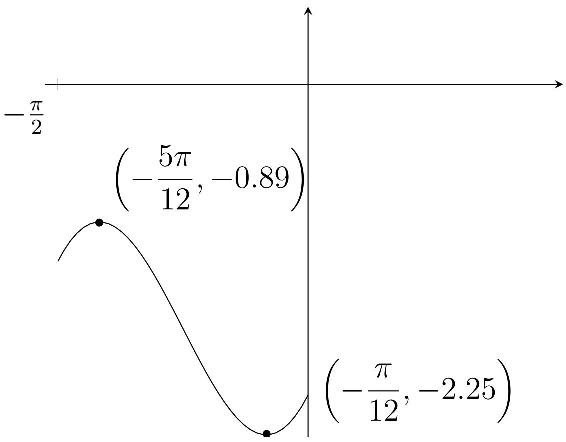
$$\begin{aligned} f'''(x) &= 8\cos 2x \\ f'''\left(-\frac{\pi}{12}\right) &= 8\cos\left(-2\cdot\frac{\pi}{12}\right) = 6.93 > 0 \\ f'''\left(-\frac{5\pi}{12}\right) &= 8\cos\left(-2\cdot\frac{5\pi}{12}\right) = -6.93 < 0\,. \end{aligned}$$

מכאן שהשיפוע הגדול ביותר נמצא ב-$x = -\frac{5\pi}{12}$, והשיפוע הקטן ביותר נמצא ב-$x = -\frac{\pi}{12}$.

שימו לב שהשאלה מבקשת את **ערכי הקיצון של השיפועים** ולא רק איפה הם נמצאים:

$$\begin{aligned} f'\left(-\frac{5\pi}{12}\right) &= 2\cdot -\frac{5\pi}{12} - 2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -2.62 + 1.73 = -0.89 \\ f'\left(-\frac{\pi}{12}\right) &= 2\cdot -\frac{\pi}{12} - 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -0.52 - 1.73 = -2.25\,. \end{aligned}$$

סעיף ב



סעיף ג

(1) נקודות הפיתול הן הנקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת $\left(-\frac{\pi}{12}, 0.569\right)$ ו-$\left(-\frac{5\pi}{12}, 2.21\right)$.

עבור הערך $-\frac{5.5\pi}{12}$ שהוא מעט קרוב יותר ל-$-\frac{\pi}{2}$ הנגזרת השנייה היא:

$$f''\left(-\frac{5.5\pi}{12}\right) = 2 + 4\sin\left(2\cdot -\frac{5.5\pi}{12}\right) = 0.965 > 0\,,$$

והפונקציה קעורה כפלי מעלה ב-$-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{5\pi}{12}$.

עבור הערך $-\frac{\pi}{4}$ שהוא בין שתי נקודות הפיתול, הנגזרת השנייה היא:

$$f''\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 + 4\sin\left(2\cdot -\frac{\pi}{4}\right) = -2 < 0\,,$$

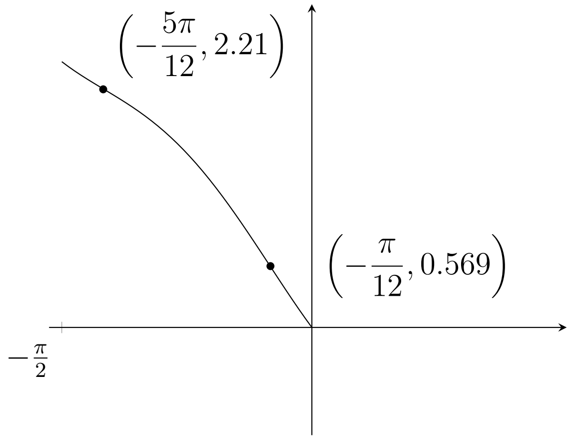
והפונקציה קעורה כפלי מטה ב-$-\frac{5\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{12}$.

עבור הערך $-\frac{\pi}{24}$ שהוא מעט קרוב יותר ל-0 הנגזרת השנייה היא:

$$f''\left(-\frac{\pi}{24}\right) = 2 + 4\sin\left(2 \cdot -\frac{\pi}{24}\right) = 0.965 > 0\,,$$

והפונקציה קעורה כפלי מעלה ב-$-\frac{\pi}{12} < x < 0$.

(2) נקודות הפיתול מסומנות.



6.9 חורף תשע"ו

נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot \sin^2 x + b \cdot \cos(4x)$ בתחום $0 \le x \le \frac{2\pi}{3}$.

a ו־ b הם פרמטרים.

לפונקציה $f(x)$ יש קיצון בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{3}$.

נתון כי $\underline{b < 0}$.

א. הבע באמצעות b (במידת הצורך) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון.

ד. (1) מצא את הערך של האינטגרל $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} f''(x)dx$.

(2) בתחום $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{2\pi}{3}$, הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חותך את ציר ה־ x בנקודה אחת שבה $x = k$.

בתחום $\frac{\pi}{2} \le x \le k$, השטח המוגבל על ידי הגרף של $f''(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$, שווה ל־ S.

הבע באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f''(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = \frac{2\pi}{3}$ בתחום $k \le x \le \frac{2\pi}{3}$. נמק.

<u>הערה</u>: אין צורך למצוא את $f''(x)$.

סעיף א

נחשב את הנגזרת הראשונה, נציב $x = \frac{\pi}{3}$, ונבדוק איפה היא מתאפסת:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2a\sin x\cos x - 4b\sin 4x \\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2a\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{4\pi}{3} \\ &= 2a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} - 4b\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2} = 0 \\ a &= -4b\,. \end{aligned}$$

השאלה מבקשת את נקודות הקיצון באמצעות b ולכן נציב עבור a:

$$f'(x) = -8b\sin x\cos x - 4b\sin 4x = 0\,.$$

המשוואה נראית די מסובכת אבל ניתן לפשט אותו על ידי שימוש בנוסחה עבור $\sin(\theta+\theta)$:

$$\begin{aligned}
-8b\sin x\cos x - 4b\sin 4x &= -4b(2\sin x\cos x + \sin(2x+2x))\\
&= -4b(\sin 2x + 2\sin 2x\cos 2x)\\
&= -4b\sin 2x(1+\cos 2x) = 0\,.
\end{aligned}$$

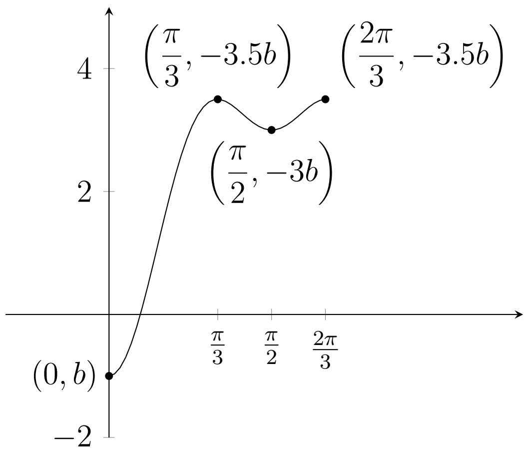
נבדוק כל אחד משני הגורמים כדי לחפש איפה הם מתאפסים בתחום. $\sin 2x = 0$ כאשר $2x = 0, \pm\pi, \ldots$. בתחום, האפשרויות הן $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. מ-$1+\cos 2x = 0$ יש לנו $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ ו-$2x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \ldots$. בתחום, האפשרויות הן $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$. נחשב את נקודות הקיצון:

$$\begin{aligned}
f(0) &= -4b\sin^2 0 + b\cos 0 = b\\
f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -4b\sin^2\frac{\pi}{3} + b\cos\frac{4\pi}{3} = -4b\cdot\frac{3}{4} + b\cdot -\frac{1}{2} = -3.5b\\
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -4b\sin^2\frac{\pi}{2} + b\cos\frac{4\pi}{2} = -4b + b = -3b\\
f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= -4b\sin^2\frac{2\pi}{3} + b\cos\frac{8\pi}{3} = -4b\cdot\frac{3}{4} + b\cdot -\frac{1}{2} = -3.5b\,.
\end{aligned}$$

אלה כל נקודות הקיצון כולל בקצות התחום והפונקציה מוגדרת בכל התחום. נתון $b<0$, ולכן:

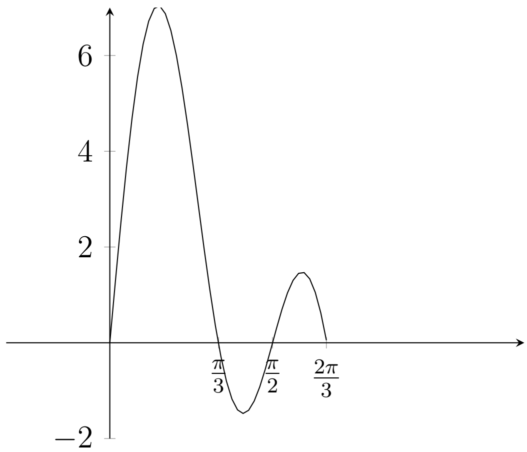
מקסימום $\left(\frac{2\pi}{3}, -3.5b\right)$, מינימום $\left(\frac{\pi}{2}, -3b\right)$, מקסימום $\left(\frac{\pi}{3}, -3.5b\right)$, מינימום $(0,b)$

סעיף ב



סעיף ג

בארבעת נקודות הקיצון הנגזרת הראשונה היא אפס. מעיון הגרף של $f(x)$, השיפוע מתחיל באפס, עולה ואז יורדת שוב לאפס, אח״כ יורדת עוד ועולה, ולבסוף עולה עוד ויורדת.



סעיף ד

(1)

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} f''(x)dx &= f'(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \\
&= -4b\sin\frac{4\pi}{3}\left(1+2\cos\frac{4\pi}{3}\right)+4b\sin\frac{2\pi}{2}\left(1+2\cos\frac{2\pi}{2}\right) \\
&= -4b\cdot-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+2\cdot-\frac{1}{2}\right)+4b\sin 0\,(1+2\cdot-1) \\
&= 0+0=1\,.
\end{aligned}$$

(2) ב-(1) חישבנו שהאיטגרל על כל התחום מ-$\frac{\pi}{2}$ ל-$\frac{2\pi}{3}$ הוא 0. השטח הראשון, האיטגרל מ-$\frac{\pi}{2}$ ל-k, הוא S. לכן השטח השני, האינטגרל מ-k ל-$\frac{2\pi}{3}$, הוא $0-S=-S$.

6.10 קיץ תשע"ה מועד ב

נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$, ונתון התחום $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$.

בתחום הנתון ענה על הסעיפים א ו־ ב.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית או אי־זוגית? נמק.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)-a$.

(1) מצא את הערכים האפשריים של a שעבורם יש

למשוואה $f(x)-a=0$ פתרון אחד בלבד.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ עבור כל אחד מהערכים של a שמצאת

בתת־סעיף ב (1).

סעיף א

(1) הערכים שמאפסים את המכנה הם:

$$\sin 0=0,\qquad \cos\frac{\pi}{2}=0,\qquad \cos-\frac{\pi}{2}=0\,.$$

תחום ההגדרה הוא:

$$-\frac{\pi}{2}<x<0,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}\,.$$

(2) הפונקציה סינוס היא אי-זוגית והפונקציה קוסינוס היא זוגית. המכפלה שלהן היא אי-זוגיות.

(3)

$$((\sin x\cos x)^{-1})'=-1\cdot(\sin x\cos x)^{-2}(\sin x\cos x)'\,.$$

בתחום ההגדרה המכנה חיובי, כך שנאשר רק לבדוק אם המונה יכול להתאפס.

$$-(\sin x\cos x)'=-(\cos^2 x-\sin^2 x)=(\sin^2 x-\cos^2 x)=0\,.$$

נקודות הקיצון הן בערכים שיש להם ערך מוחלט של סינוס שווה לערך מוחלט של קוסינוס, שהם $\frac{\pi}{4}\pm k\cdot\frac{\pi}{2}$. בתחום ההגדרה:

$$x=\frac{\pi}{4},\ y=\frac{1}{(\sqrt{2}/2)\cdot(\sqrt{2}/2)}=2,\qquad x=-\frac{\pi}{4},\ y=\frac{1}{(-\sqrt{2}/2)\cdot(\sqrt{2}/2)}=-2\,.$$

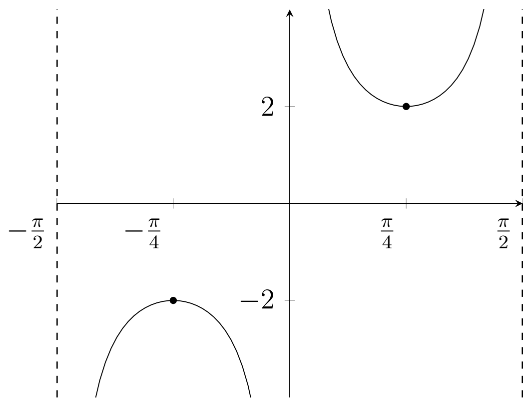
המכנה של הנגזרת הראשונה הוא $(\sin x\cos x)^2$, ערך חיובי בתחום ההגדרה, ולכן, סימן הנגזרת השנייה הוא כסימן הנגזרת של המונה.

$$(\sin^2 x-\cos^2 x)' = 2\sin x\cos x - 2\cos x(-\sin x) = 4\sin x\cos x\,.$$

עבור $x=\dfrac{\pi}{4}$, $4\sin x\cos x = 2 > 0$ והנקודה היא מינימום.

עבור $x=-\dfrac{\pi}{4}$, $4\sin x\cos x = -2 < 0$ והנקודה היא מקסימום.

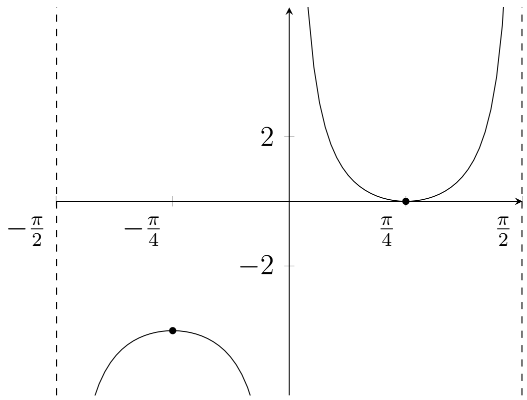
(4)

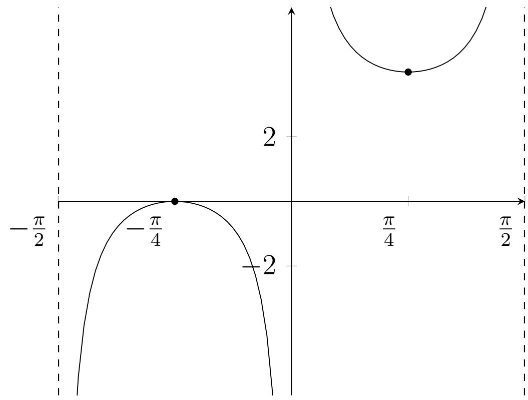


סעיף ב

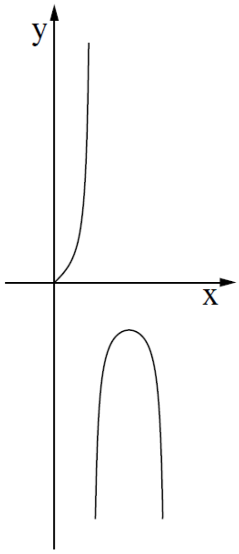
(1) למשוואה פתרון אחד אם הגרף משיק לציר ה-x או חותך את הציר במקום אחד בלבד)לא קורה כאן(. הגרף משיק כאשר $a=\pm 2$, שמעלה או מוריד את הגרף בשתי יחידות.

(2)





6.11 קיץ תשע״ה מועד א



נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sin x}{\cos 2x}$ ונתון התחום $0\le x\le \frac{3\pi}{4}$

(ראה ציור).

ענה על הסעיפים א, ב ו־ג עבור התחום הנתון.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$,

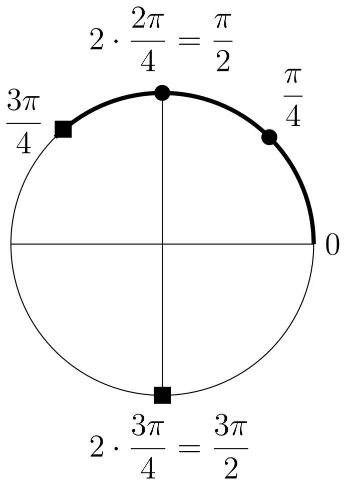
וקבע את סוגן על פי הציור.

ב. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=2f(x)\cdot f'(x)$.

מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$,

על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x=\frac{\pi}{6}$.



סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדרת כאשר $\cos 2x=0$. בתחום הנתון, רואים בתרשים שזה קורה עבור $\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$.
תחום ההגדרה הוא:

$$0\le x<\frac{\pi}{4},\quad \frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}.$$

(2) האסימפטוטות הן בערכי ציר ה-x בהם הפונקציה לא מוגדרת: $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3\pi}{4}$.

(3) יש נקודת קיצון בקצה התחום $(0,0)$. נחשב את הנגזרת כדי לחפש את נקודת קיצון הפנימית המופיעה בתרשים:

$$\left(\frac{\sin x}{\cos 2x}\right)' = \frac{\cos x \cos 2x - \sin x(-2\sin 2x)}{\cos^2 2x}\,.$$

בתחום ההגדרה המכנה חיובי כך הנגזרת תתאפס אם המונה יתאפס:

$$\begin{aligned}
\cos x\cos 2x + 2\sin x \sin 2x &= \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sin x \cdot 2\sin x\cos x\\
&= \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x + 4\sin^2 x)\\
&= \cos x((\cos^2 x + \sin^2 x) + 2\sin^2 x)\\
&= \cos x(1+2\sin^2 x)\,.
\end{aligned}$$

בתחום ההגדרה $\cos x$ מתאפס כאשר $x = \frac{\pi}{2}$, ו-$1+2\sin^2 x$ אף פעם לא מתאפס. נקודת הקיצון היא $\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$. לפי הציור מדובר במקסימום מקומי.

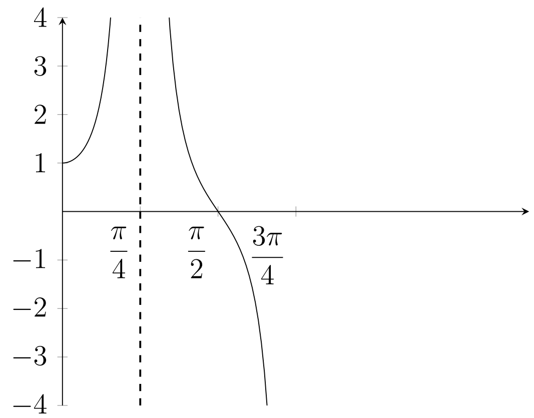
סעיף ב

$$f'(x) = \frac{\cos x(1+2\sin^2 x)}{\cos^2 2x}\,.$$

$f'(0)=1$ ובסעיף הקודם חישבנו ש-$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

המכנה של $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ שווה לאפס, והמונה שונה מאפס, לכן ב-$\frac{\pi}{4}$ יש אסימפטוטה אנכית.

בתרשים הנתון ל-$f(x)$ רואים שהשיפוע (הנגזרת הראשונה של הפונקציה) עולה בין 0 ל-$\frac{\pi}{4}$, ושהיא יורדת בין $\frac{\pi}{4}$ ל-$\frac{3\pi}{4}$. התרשים ל-$f'(x)$ נראה כך:

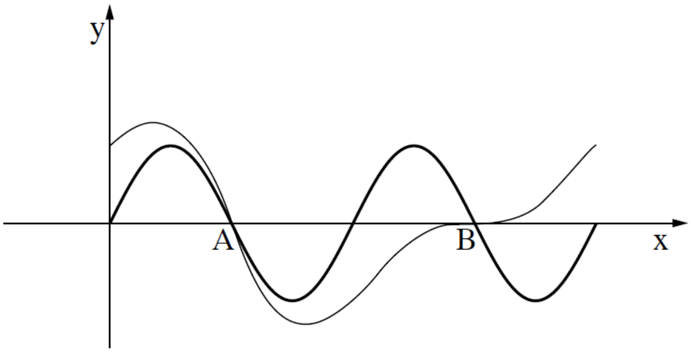


סעיף ג

$(f^2(x))' = 2f(x)\cdot f'(x)$, ולכן:

$$\int_0^{\pi/6} g(x) = \int_0^{\pi/6} 2f(x)\cdot f'(x) = f^2(x)\mid_0^{\pi/6} = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(2\pi/6)} - \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{1/2}{1/2} - \frac{0}{1} = 1\,.$$

6.12 חורף תשע"ה



נתונות שתי פונקציות:

$f(x) = 0.5\sin(2x) + \cos x$

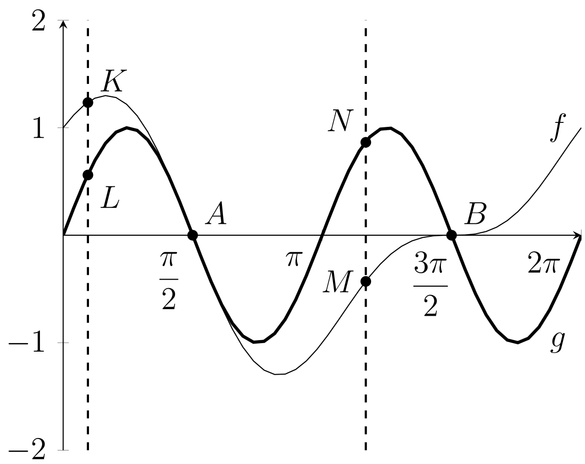
$g(x) = \sin(2x)$

בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

בתחום הנתון הגרפים של הפונקציות נפגשים בשתי נקודות, A ו־ B, הנמצאות על ציר ה־ x , כמתואר בציור.

א. דרך נקודה על ציר ה־ x , הנמצאת בין הנקודות A ו־ B , מעבירים אנך לציר ה־ x .
האנך חותך את הגרפים של הפונקציות f(x) ו־ g(x) בנקודות M ו־ N .
מצא את האורך המקסימלי של הקטע MN .

ב. דרך נקודה על ציר ה־ x , הנמצאת בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, מעבירים אנך לציר ה־ x .
האנך חותך את הגרפים של הפונקציות f(x) ו־ g(x) בנקודות K ו־ L .
מצא את האורך המקסימלי של הקטע KL .



סעיף א

הגרף המודגש הוא g בגלל המחזוריות, אבל נבדוק על ידי חישוב נקודות החיתוך עם ציר ה-x. $\sin 2x = 0$ בתחום כאשר $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ ורק לגרף המודגש יש חמש נקודות חיתוך.

נחשב את הנגזרת של ההפרש בין הפונקציות:

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= \sin 2x - 0.5\sin 2x - \cos x = 0.5\sin 2x - \cos x \\ (g(x) - f(x))' &= \cos 2x + \sin x = (1 - 2\sin^2 x) + \sin x\,. \end{aligned}$$

נקודות החיתוך A, B של f, g עם ציר ה-x הן נקודות השנייה והרביעית של g שהן $\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$. נבדוק:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.5\sin 2\cdot\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 0 + 0 = 0$$
$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.5\sin 2\cdot\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} = 0 + 0 = 0\,.$$

נחשב מתי הנגזרת הראשונה של הפרש הפונקציות מתאפסת בתחום $A = \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} = B$:

$$\begin{aligned}
2\sin^2 x - \sin x - 1 &= 0\\
(2\sin x + 1)(\sin x - 1) &= 0\\
\sin x &= 1, -\frac{1}{2}\\
x &= \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\,.
\end{aligned}$$

$g(\frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{2}) = 0$, ולכן $\frac{\pi}{2}$ בוודאי אינו המקסימום. $\frac{11\pi}{6} > \frac{3\pi}{2}$ מחוץ לתחום ולא יכול להיות נקודת הקיצון המבוקשת. המסקנה היא שנקודת הקיצון של $f - g$ בין A ל-B היא ב-$x = \frac{7\pi}{6}$.

נבדוק שנקודה זו היא באמת מקסימום על ידי חישוב הנגזרת השנייה:

$$(1 - 2\sin^2 x + \sin x)'\Big|_{\frac{7\pi}{6}} = (-4\sin x + 1)\cos x|_{\frac{7\pi}{6}} = -\left(4\cdot -\frac{1}{2} + 1\right)\cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0\,,$$

ולכן:

$$g\left(\frac{7\pi}{2}\right) - f\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\frac{7\pi}{3} - \cos\frac{7\pi}{6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

הוא האורך המקסימלי של MN.

סעיף ב

נקודות חיתוך של שלילה של פונקציה על ציר ה-x זהים לנקודות החיתוך של הפונקציה)ראו בנספח(. לכן נקודות האיפוס של $(f(x) - g(x))'$ הן נקודות האיפוס של $(g(x) - f(x))'$, שהן הערכים עבורם $\sin 2x = 1, -\frac{1}{2}$. בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, נקודות האיפוס הן ב-$x = 0, \frac{\pi}{2}$. נחשב:

$$f(0) - g(0) = -(0.5\sin(2\cdot 0) - \cos 0) = -(0 - 1) = 1$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(0.5\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \cos\frac{\pi}{2}\right) = -(0 - 0) = 0\,,$$

והאורך המקסימלי של KL הוא 1 כאשר $x = 0$.

6.13 קיץ תשע״ד מועד ב

נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

$g(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$

א. (1) לשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה.

מצא את תחום ההגדרה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ עם הצירים.

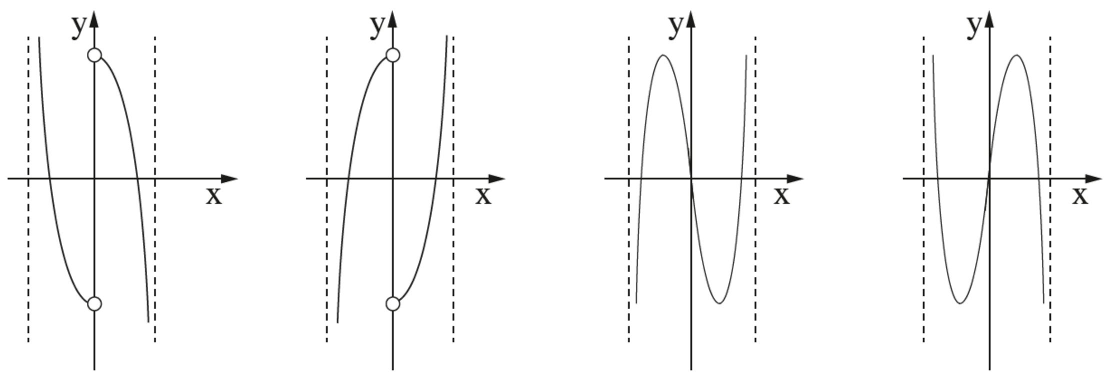
ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של כל אחת מהפונקציות, וקבע את סוגן.

ג. על פי הסעיפים א ו־ ב, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. לפניך ארבעה גרפים, I-IV .

איזה מהגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $g'(x)$? נמק.



I II III IV

סעיף א

(1) הפונקיות מוגדרת כאשר ביטוי בשורש לא שלילי. עבור f אם $8 - x^2 \geq 0$ ותחום ההגדרה הוא $-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$.

עבור g אם $8^2 - x^4 \geq 0$ ותחום ההגדרה מורכב מ-$-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$ ו-$x = 0$. אבל $x = 0$ נמצא בתוך התחום הראשון כך שהוא לא מוסיף ערכים, ותחומי ההגדרה של f, g זהים.

(2) עבור f : אם $y = 0$, $x = 0$ או $\sqrt{8 - x^2} = 0$, ונקודות החיתוך עם ציר ה-x הן $(0,0)$, $(\pm\sqrt{8}, 0)$.
אם $x = 0$, $y = 0$ ונקודת החיתוך עם ציר ה-y היא $(0,0)$.

עבור g : אם $y = 0$, $\sqrt{8x^2 - x^4} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{8 - x^2} = 0$ עבור אותם ערכים $0, \pm\sqrt{8}$. ונקודות החיתוך הן אותן נקודות שקיבלנו עבור f.

סעיף ב

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1\cdot\sqrt{8-x^2}+x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{8-x^2}}\cdot(-2x)\\
&= \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}\\
g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{8x^2-x^4}}\cdot(16x-4x^3)\\
&= \frac{8x-2x^3}{\sqrt{8x^2-x^4}}=\frac{x(8-2x^2)}{\sqrt{8x^2-x^4}}\,.
\end{aligned}
$$

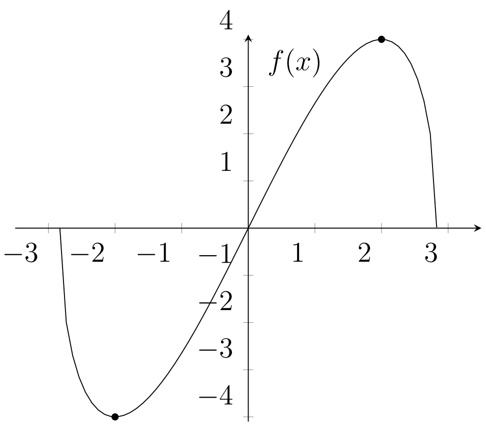
פרט ל-$\pm\sqrt{8}$, 0 בהן הפונקציות לא מוגדרות, המכנה חיובי והנגזרות יתאפסו כאשר המונה יתאפס.

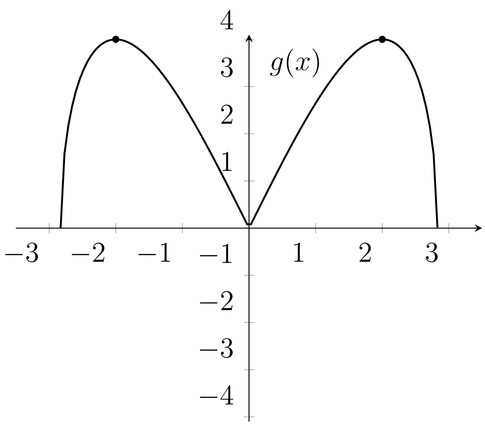
עבור f הנקודות הן $(-2,-4)$, $(2,4)$. בנקודות הקצה ערכי הפונקציה הם $(\pm\sqrt{8},0)$, ולכן $(-2,-4)$ היא מינימום אבסולוטי ו-$(2,4)$ היא מקסימום אבסולוטי.

עבור g הנקודות הן $(0,0)$, $(-2,4)$, $(2,4)$. בנקודות הקצה ערכי הפונקציה הם $(\pm\sqrt{8},0)$, ולכן $(0,0)$, $(\pm\sqrt{8},0)$ הן מינימום אבסולוטי ו-$(-2,4)$,$(2,4)$ הן מקסימום אבסולוטי.

סעיף ג

נתבסס על תחומי ההגדרה ונקודות הקצה של הפונקציות כדי לצייר את התרשים:





סעיף ד

$$g'(x)=\frac{x(8-2x^2)}{\sqrt{8x^2-x^4}}$$

לא מוגדר באפס, ולכן אפשר לפסול III, VI.

מהתרשים עבור $g(x)$ או לפי חישוב ערכים לפני ואחרי נקודות הקיצון, רואים ש: $g(x)$ עולה ואז יורדת כאשר מתקרבים לציר ה-y משמאל, ולכן $g'(x)$ חיובית ואז שלילית כאשר מתקרבים לציר. $g(x)$ עולה ואז יורדת כאשר מתרחקים מציר ה-y לימין, ולכן $g'(x)$ חיובית ואז שלילית כאשר מתרחקים מהציר. הגרף I מתאר את הפונקציה.

6.14 קיץ תשע"ד מועד א

נתונות שתי פונקציות: $f(x)=2\sin^2 x$, $g(x)=\sin(2x)$, בתחום $0\le x\le\pi$.

א. בתחום הנתון מצא:

(1) את שיעורי ה־ x של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.

(2) את נקודות החיתוך של כל אחת משתי הפונקציות עם ציר ה־ x .

ב. (1) נתונה הפונקציה $h(x)=x-\dfrac{\sin(2x)}{2}$.

הראה כי $h'(x)=f(x)$.

(2) בתחום $0\le x\le\pi$ מצא את השטח הכלוא בין הגרפים

של שתי הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$.

סעיף א

(1) ברור שערכי הפונקציות שווים ב-$0,\pi$ כי $x=0,\pi$ כי $\sin 0=\sin\pi=0$.

נחפש פתרונות אחרים כאשר נניח ש-$\sin x\neq 0$ כדי לחלק ב-$\sin x$:

$$\begin{aligned}2\sin^2 x &= \sin 2x=2\sin x\cos x\\ \sin x &= \cos x\\ x &= \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

(2) ראינו ששתי הפונקציות מקבלות ערך אפס ב-$0,\pi$. נחפש ערכים אחרים בתחום.

עבור f: $2\sin^2 x=0$ רק כאשר $x=0,\pi$, ולכן אין נקודות חיתוך נוספות עם ציר ה-x.

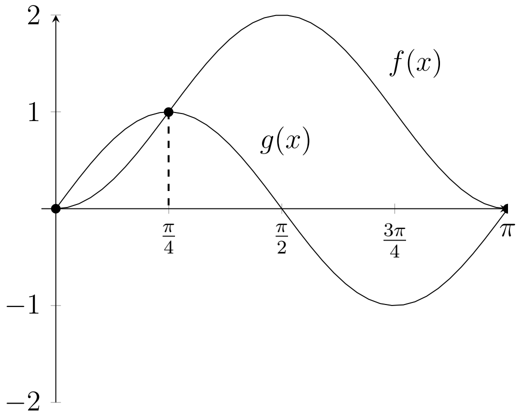
עבור g: $\sin 2x=0$ כאשר $2x=0+k\pi$, ולכן יש נקודת חיתוך גם ב-$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

סעיף ב

(1)

$$\begin{aligned}h(x)'=\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)' &= 1-\frac{2\cos 2x}{2}=1-\cos 2x\\ &= 1-(\cos^2 x-\sin^2 x)=(1-\cos^2 x)+\sin^2 x\\ &= 2\sin^2 x=f(x)\,.\end{aligned}$$

(2) מהתרשים להלן אנו רואים שהשטח מורכב משני קטעים, מ-0 עד $\frac{\pi}{4}$, ומ-$\frac{\pi}{4}$ עד π.



בסעיף זה יש מתנה: כדי לחשב את האינטגרל של $f(x)$ נוכל להשתמש בפונקציה $h(x)$ הנתונה:

$$h(x) = x - \frac{\sin 2x}{2} = \int h'(x) = \int f(x)\,.$$

השטח הראשון הוא:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - f(x))dx &= \frac{-\cos 2x}{2} - \left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(0 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} - 0 + 0\right) = -\frac{\pi}{4} + 1\,.\end{aligned}$$

השטח השני הוא:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (f(x) - \sin 2x)dx &= \left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) - \frac{-\cos 2x}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\ &= \left(\pi - 0 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + 0\right) = \frac{3\pi}{4} + 1\,.\end{aligned}$$

השטח הכולל הוא:

$$S = -\frac{\pi}{4} + 1 + \frac{3\pi}{4} + 1 = \frac{\pi}{2} + 2\,.$$

6.15 חורף תשע"ד

נתונה הפונקציה $f(x) = \dfrac{x^2+x-a}{x^2-x+a}$. a הוא פרמטר גדול מ־ 1 .

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. (1) מצא את האסימפטוטות של $f(x)$ המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של $f(x)$, וקבע את סוגן.

(הבע באמצעות a במידת הצורך.)

(3) ידוע כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות בדיוק.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. בתחום $x \le 0$, השטח המוגבל על ידי הגרף של $f'(x)$, על ידי הישר $x = -1$

ועל ידי ציר ה־ x , שווה ל־ $\frac{1}{2}$.

חשב את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x (מצא ערכים מספריים).

בבחינה זו היו שלוש שאלות בפרק השני לכן מספר השאלה הוא 7 **ולא** 6.

נתון שהפונקציה מוגדרת לכל x אבל מתחשק לי לוודא שזה נכון. אם נשווה את המכנה לאפס נקבל משוואה ריבועית שפתרונה היא:

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} .$$

נתון ש-$a > 1$ אז אין פתרונות ממשיים למשוואה.

סעיף א

(1) הפונקציה מוגדרת לכל x אז אין אסימפטוטות אנכיות.

נחלק את הפונקציה בחזקה הגדולה ביותר ונקבל:

$$\frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}}$$

ששואף ל 1 כאשר $x \to \pm\infty$. האסימפטוטה האופקית היא $y = 1$.

(2) נחשב את הנגזרת הראשונה:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2-x+a) - (x^2+x-a)(2x-1)}{(x^2-x+a)^2} = \frac{-2x^2+4xa}{(x^2-x+a)^2} .$$

המכנה חיובי ולכן הנגזרת תתאפס כאשר $2x^2 = 4ax$. נקודות הקיצון הן:

$$(0,-1), \quad \left(2a, \frac{4a+1}{4a-1}\right) .$$

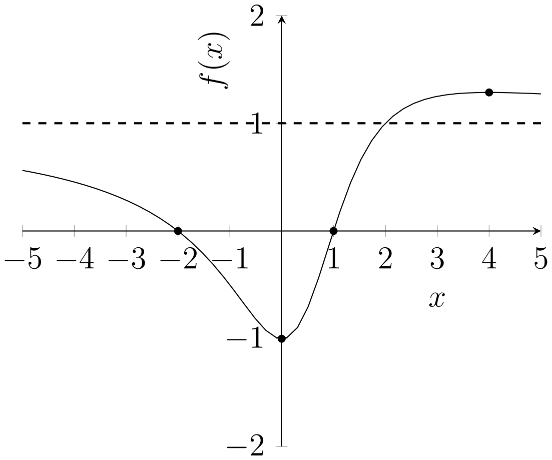
המכנה של הנגזרת הראשונה חיובית ולכן מספיק לבדוק את הסימן של הנגזרת של המונה:

$$(-2x^2+4ax)' = -4x+4a$$

ב-$x=0$: $-4x+4a$ חיובי כי נתון ש-$a>1$, ולכן נקודת הקיצון היא מינימום.

ב-$x=2a$: $-8a+4a=-4a$ שלילי כי נתון ש-$a>1$, ולכן נקודת הקיצון היא מקסימום.

(3) קיים מינימום ב-$(0,-1)$ ואסימפטוטה אופקית ב-$y=1$. לפי הנתון שיש שתי נוקודות חיתוך עם ציר ה-x, הגרף עולה מנקודת המינימום ושואף לאינסוף ב-$y=1$. נשאר רק להחליט אם נקודת המקסימום היא מעל לאסימפטוטה או מתחתיה. אבל אם $a>1$, $\frac{4a+1}{4a-1}>1$ אז הנקודת המקסימום נמצאת מעל לאסימפטוטה.



סעיף ב

נחשב את האינטגרל של הנגזרת הראשונה הוא הפונקציה עצמה:

$$\left|\int_{-1}^{0} -f'(x)dx\right| = \left|f(x)|_{-1}^{0}\right| = |f(0)-f(-1)| = \left|-1-\frac{-a}{a+2}\right| = \left|\frac{-2}{a+2}\right| .$$

נתון שהשטח שווה ל-$\frac{1}{2}$ ולכן $a=2$. ערכי ה-x של נקודות החיתוך הן הפתרונות של:

$$x^2+x-2=0$$

שהם $x=1, x=-2$. נקודות החיתוך הן $(1,0), (-2,0)$.

פרק 7 חדו"א שאלה 7

7.1 קיץ תשע"ח מועד ב

נתונה הפונקציה $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ענה על הסעיפים ב-ה עבור התחום $x \geq \frac{2}{7}$.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית. מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענה על סעיף ו עבור התחום $x > 0$.

ו. נסתכל על נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

לפניך 3 טענות (i-iii). אחת מהן נכונה. איזו מהן היא הנכונה? נמק.

i) ככל שמתקרבים ל־ $x=0$, המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וקָטֵן.

ii) המרחק בין כל שתי נקודות חיתוך סמוכות נשאר קבוע.

iii) ככל שמתקרבים ל־ $x=0$, המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וגָדֵל.

סעיף א

הפונקציה מוגדרת כאשר במכנה $x \neq 0$.

סעיף ב

$$\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)=0, \qquad \frac{\pi}{x}=k\pi, \qquad x=\frac{1}{k}\,.$$

נבדוק עבור כמה ערכים של $[k,x]$:

$$[1,1], \ \left[2,\frac{1}{2}\right], \ \left[3,\frac{1}{3}\right], \ \left[4,\frac{1}{4}\right].$$

אבל $0.286 \approx \frac{2}{7}$ כך שעבור $k \geq 4$, הנקודות מחוץ לתחום. נקודות החיתוך הן :

$$\left(\frac{1}{3},0\right), \ \left(\frac{1}{2},0\right), \ (1,0)\,.$$

סעיף ג

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)=0\,.$$

הגורם $-\frac{\pi}{x^2}$ לא יכול לקבל ערך אפס, ולכן נקודות הקיצון הן הנקודות :

$$\frac{\pi}{x}=\frac{\pi}{2}+k\pi, \qquad \frac{1}{x}=\frac{1}{2}+k, \qquad x=\frac{2}{1+2k}\,.$$

נבדוק עבור כמה ערכים של $[k,x]$:

$$[0,2],\ \left[1,\frac{2}{3}\right],\ \left[2,\frac{2}{5}\right],\ \left[3,\frac{2}{7}\right].$$

ברור שעבור $k\geq 4$ הנקודות מחוץ לתחום.

לפי הערכים של $f(x)$ אפשר לקבוע את סוג נקודות הקיצון:

מקסימום $(2,1)$ מינימום $\left(\frac{2}{3},-1\right)$ מקסימום $\left(\frac{2}{5},1\right)$ מינימום $\left(\frac{2}{7},-1\right)$

אפשר לבדוק לפי נגזרת שנייה. המכנה של הנגזרת הראשונה x^2 חיובית, ולכן מספיק לבדוק את הסימן של הנגזרת של המונה:

$$-\left(\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)' = -\left(-\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{x^2}\right) = -\frac{\pi}{x^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

מכאן שסימן הנגזרת השנייה תלוי בסימן של $-\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1,\quad -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1,\quad -\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)=-1,\quad -\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)=1.$$

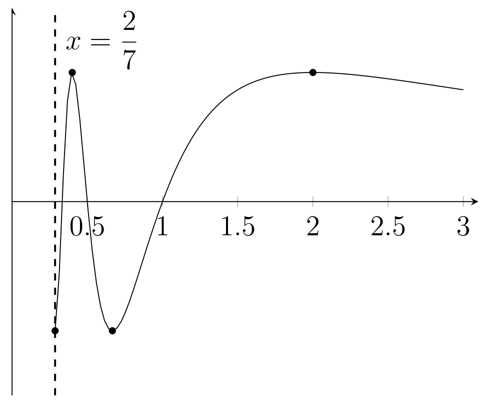
הסימנים תואמים את קביעת סוג נקודות הקיצון שרשמנו.

סעיף ד

$0 \xrightarrow[+\infty]{} \frac{\pi}{x}$ ו-$0 \xrightarrow[+\infty]{} f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$. יש אסימפטוטה אופקית ב-$y=0$.

סעיף ה

נקודות הקיצון מסומנות:



סעיף ו

$x=\frac{1}{k}$. ככל ש-x מתקרב לאפס k עולה. המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות $\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}$ הוא:

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)},$$

וברור שערך זה קטן ככל ש-x מתקרב לאפס ו-k עולה. המסקנה היא ש-(i) נכון.

7.2 קיץ תשע"ח מועד א

$f(x)$ היא פונקציה גזירה, המוגדרת לכל x, כך ש- $f(x) \neq 0$ לכל x.

א. הוכח שאם הפונקציה $f(x)$ עולה בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יורדת באותו הקטע;
ואם הפונקציה $f(x)$ יורדת בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ עולה באותו הקטע.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$, המוגדרת לכל x.

ב. האם קיים x שבעבורו $g(x) = 0$? נמק.

ג. (1) האם הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית? נמק.

(2) הראה שלכל x מתקיים: $g(x) = g(x + 2\pi)$.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq 3\pi$.

נתונה הפונקציה $h(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$.

ענה על סעיף ד. תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ד. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$? נמק.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$ באותה מערכת צירים שבה סרטטת את גרף הפונקציה $g(x)$.

סעיף א

לכאורה הטיעון ברור מאליו אבל כנראה שצריך להוכיח באמצעות הנגזרות:

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -1 \cdot f(x)^{-2} \cdot f'(x)\,.$$

נתון ש-$f(x)$ מוגדרת בכל התחום, ו-$f(x)^{-2}$ חיובי בכל התחום. הסימן של $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'$ הפוך מהסימן של $f'(x)$, ולכן אם $f(x)$ עולה $\frac{1}{f(x)}$ יורדת, ולהיפך.

סעיף ב

$\sin^2 x \geq 0$ ו-$\cos x \geq -1$. לכן $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2 \geq 1$ והפונקציה לא מתאפסת.

סעיף ג

(1) הפונקציה זוגית, כי $\cos$ זוגית ו-$\sin$ אי-זוגית, אבל $\sin^2$ זוגית. בחישוב:

$$\sin^2(-x) + \cos(-x) + 2 = (-\sin x)^2 + \cos x + 2 = \sin^2 x + \cos x + 2\,.$$

(2) $\cos(x+2\pi)=\cos x$, $\sin(x+2\pi)=\sin x$ ולכן $g(x)=g(x+2\pi)$.

אפשר גם לחשב:

$$\begin{gathered}\sin^2(x+2\pi)+\cos(x+2\pi)+2= \\ (\sin x\cos 2\pi+\sin 2\pi\cos x)^2+(\cos x\cos 2\pi-\sin x\sin 2\pi)+2= \\ \sin^2 x+\cos x+2\,.\end{gathered}$$

(3) נחשב את הנגזרת הראשונה:

$$g'(x)=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(2\cos x-1)=0\,.$$

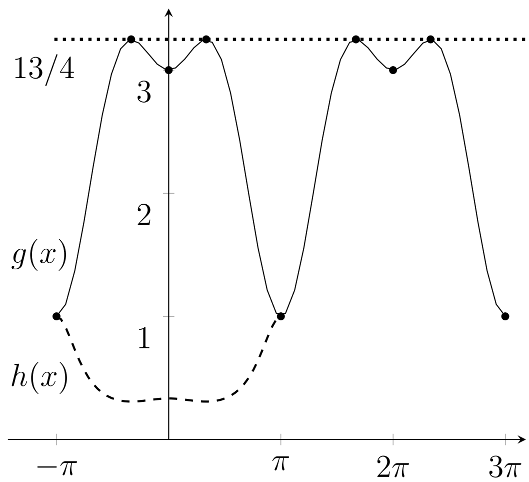
בתחום $0\le x\le\pi$, $\sin x$ מתאפס ב-$x=0, x=\pi$, ו-$2\cos x-1$ מתאפס ב-$\frac{\pi}{3}$. נקודות הקיצון הן $(\pi,1)$, $\left(\frac{\pi}{3},\frac{13}{4}\right)$, $(0,3)$. נחשב את הנגזרת השנייה:

$$\begin{aligned}g''(x)&=\cos x(2\cos x-1)+\sin x(-2\sin x)\\&=2\cos^2 x-2\sin^2 x-\cos x\\&=2\cos^2 x-2(1-\cos^2 x)-\cos x\\&=4\cos^2 x-2-\cos x\,.\end{aligned}$$

בנקודות הקיצון: $g''(0)=1$ והנקודה היא מינימום. $g''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3}{2}$ והנקודה היא מקסימום.

$g''(\pi)=3$ והנקודה היא מינימום.

(4) לפי נקודות הקיצון נצייר את הגרף עבור $0\le x\le\pi$. לפי (1) הפונקציה זוגית אז הגרף עבור $-\pi\le x\le 0$ זהה. לפי (2) הפונקציה מחזורית וניתן להעתיק את הגרף לתחום $\pi\le x\le 3\pi$.



סעיף ד

(1) עבור כל x, $f(x)>0$, ולכן עבור כל x, $h(x)=\frac{1}{f(x)}>0$ והפונקציה מוגדרת.

(2) ב-$-\pi\le x\le\pi$ נקודות הקיצון יהיו $\left(\pm\frac{\pi}{3},\frac{4}{13}\right)$, $\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

תחום העלייה של $h(x)$ הוא תחום הירידה של $g(x)$ ולהיפך.

7.3 חורף תשע"ח

נתונה משפחת הפונקציות: $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-a}$. a הוא פרמטר, $a \neq 0$, $a \neq 4$.

ענה על סעיף א. הבע באמצעות a במידת הצורך. הבחן בין $a > 0$ ובין $a < 0$ במידת הצורך.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המקבילה לציר ה־ x .

(4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ x (אם יש כאלה).

ענה על סעיף ב. הבע באמצעות a במידת הצורך. הבחן בין $a > 4$ ובין $a < 4$ במידת הצורך.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

סעיף ג של השאלה מופיע בהמשך.

סעיף א

(1) כאשר $a > 0$, הפונקציה לא מוגדרת עבור $x = \pm\sqrt{a}$, ערכים שמאפסים את המכנה.

כאשר $a < 0$, המכנה תמיד חיובי והפונקציה מוגדרת לכל x.

(2) חישוב נקודת החיתוך עם ציר ה-y: $f(0) = \frac{(-2)^2}{-a} = -\frac{4}{a}$.

חישוב נקודת החיתוך עם ציר ה-x: כאשר $a < 0$, המכנה חיובית והפונקציה מתאפסת כאשר $x = 2$.
נתון ש-$a \neq 4$, ולכן גם כאשר $a > 0$, ב-$x = 2$ המכנה לא מתאפסת ומונה מתאפסת:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-a} = \frac{(x-2)(x-2)}{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}, \quad f(2) = 0 .$$

(3) $y = 1$ היא אסימפטוטה אופקית:

$$f(x) = \frac{1 - \frac{4x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{a}{x^2}} \xrightarrow[\pm\infty]{} = 1 .$$

(4) כאשר $a < 0$ הפונקציה מוגדרת לכל x ואין אסימפטוטה.

כאשר $a > 0$: נתון $a \neq 4$ כך ש-$\sqrt{a} \neq 2$, לכן המונה של הפונקציה לא מתאפסת כאשר $x \to \pm\sqrt{a}$.
יש אסימפטוטות אנכיות $x = \pm\sqrt{a}$.

סעיף ב

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{(x-2)^2}{x^2-a}\right)' &= \frac{2(x-2)(x^2-a) - (x-2)^2 \cdot 2x}{(x^2-a)^2} \\ &= \frac{2(x-2)\,(2x-a)}{(x^2-a)^2} . \end{aligned}$$

נקודות הקיצון הן $(2,0)$, $\left(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a}\right)$.

נחשב את הסימן של הנגזרת של המונה של הנגזרת הראשונה:

$$(2(x-2)\,(2x-a))' = 8x-2a-8\,.$$

לפי ההנחיה בשאלה נבדוק בנפרד עבור ערכים חיוביים ושליליים של a.

עבור $a>4$:

$8\cdot 2-2a-8=2(4-a)<0$ ו-$(2,0)$ היא מקסימום.

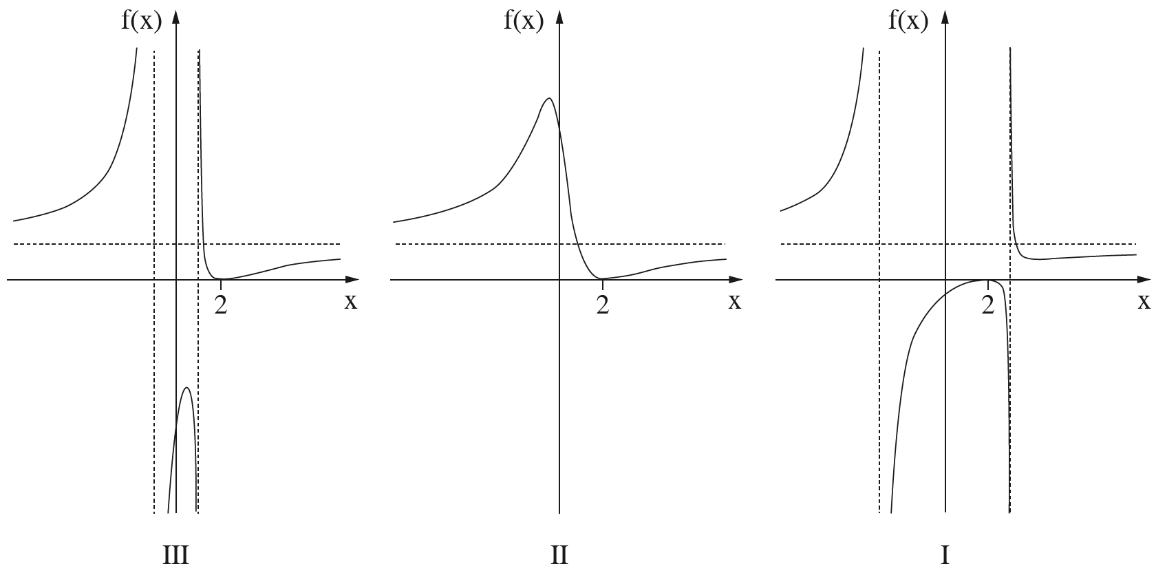
$8\cdot\frac{a}{2}-2a-8=2(a-4)>0$ ו-$\left(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a}\right)$ היא מינימום.

עבור $a<4$ הסימנים מתחלפים ו-$(2,0)$ היא מינימום ו-$\left(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a}\right)$ היא מקסימום.

סעיף ג

ג. לפניך שלושה גרפים אפשריים של הפונקציה $f(x)$, כל אחד עבור ערך אחר של a.

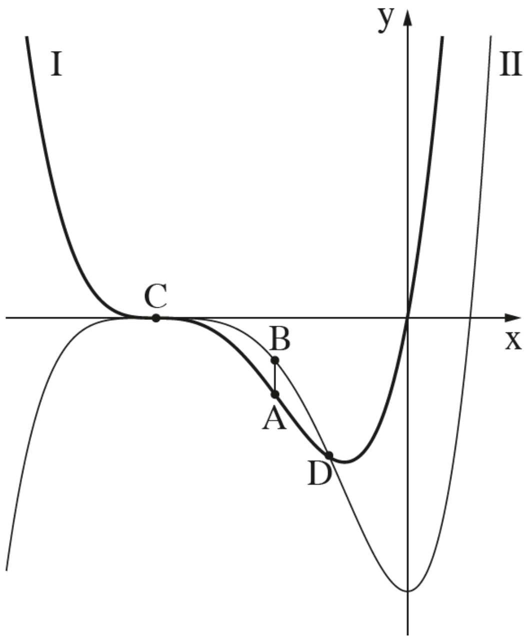
כתוב מהו תחום הערכים של a המתאים לכל אחד מן הגרפים I-III. נמק את תשובתך.



כאשר $a>4$ נקודות הקיצון ב-$(2,0)$ היא מקסימום כפי שמופיע בגרף I. כאשר $a<0$ הפונקציה מוגדרת כל ל-x כפי שמופיע בגרף II. כאשר $0<a<4$ נקודת הקיצון ב-$(2,0)$ היא מינימום, ויש אסימפטוטות ב-$x=\pm\sqrt{a}$ כפי שמופיע בגרף III.

7.4 קיץ תשע"ז מועד ב

לפניך הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$.



א. התאם בין הגרפים I ו־ II

לבין הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$. נמק.

נתון: $f'(x) = x(x+b)^3$. $b > 1$ הוא פרמטר.

לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול ב־ $x = -1$.

ב. מצא את b .

C ו־ D הן נקודות החיתוך

של הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$

בתחום $x < 0$, כמתואר בציור.

הנקודות A ו־ B נמצאות על הגרפים I ו־ II

בהתאמה, כך שהישר AB מאונך לציר ה־ x .

נתון: $x_C < x_A < x_D$,

$x_C = -4$,

$x_D = 1 - \sqrt{5}$.

ג. מצא את שיעור ה־ x של הנקודות A ו־ B שעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי

(אפשר לפתור את הסעיף בלי למצוא את הפונקציה $f(x)$).

סעיף א

הגרף I מתאפס בנקודה C שם לגרף II יש נקודה מקסימום. גרף I מתאפס ב-$(0,0)$ שם לגרף II יש נקודה מינימום. לכן, II הוא הגרף של $f(x)$ ו-I הוא הגרף של $f'(x)$.

סעיף ב

בנקודת פיתול הנגזרת השנייה מתאפסת:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 1\cdot(x+b)^3 + x\cdot 3(x+b)^2 = (x+b)^2(4x+b) \\ f''(-1) &= (b-1)^2(b-4) = 0 \\ b &= 4\,, \end{aligned}$$

כי נתון ש-$b > 1$.

סעיף ג

הערך המקסימלי יתקבל כאשר הנגזרת של ההפרש מאפסת. הנגזרת הראשונה, הנגזרת של $f(x)$ נתונה, והנגזרת השנייה, הנגזרת של הנגזרת הראשונה חושבה בסעיף ב, שם קבלנו ש-$b = 4$:

$$\begin{aligned}
(f(x) - f'(x))' &= x(x+4)^3 - (x(x+4))^3)' \\
&= x(x+4)^3 - (x+4)^2(4x+4) \\
&= (x+4)^2(x^2-4) = 0\,.
\end{aligned}$$

הפתרונות הם $x = -4, x = \pm 2$.

$x_C = -4$, $x_D = 1 - \sqrt{5} = -1.24$, ולכן הפתרון היחיד בתחום הוא $x = -2$.

7.5 קיץ תשע"ז מועד א

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

ג. נתון: $0<a<\frac{\pi}{2}$.

השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $x=a$ וציר ה־ x שווה ל־ 1 .

מצא את a .

סעיף א

(1) הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה לא מתאפס: $x\neq\frac{\pi}{2}\pm n\pi$.

(2) נקודות החיתוך עם ציר ה-x הן כל הנקודות עבורן $\sin x=0$ ו-$\cos x\neq 0$, שהן $x=\pm n\pi$. כאשר $x=0$, $y=0$ והנקודה היא גם נקודת חיתוך עם ציר ה-y.

(3) יש אסימפטוטות אנכיות ב-$x=\frac{\pi}{2}\pm n\pi$ כי הפונקציה שואפת לאינסוף שם.

אין אסימפטוטה אופקיות: כאשר $x\rightarrow\pm\infty$, הפונקציה לא חסומה ושואפת לאינסוף שוב ושוב.

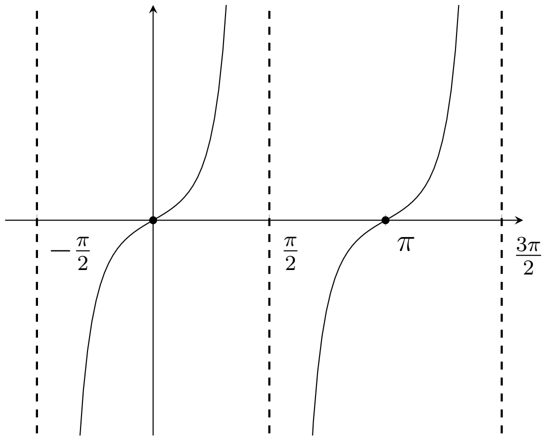
(4)

$$f'(x)=\frac{(2\cos x\cdot\cos^3 x)-(2\sin x\cdot 3\cos^2 x\cdot -\sin x)}{\cos^6 x}=\frac{2\cos^4 x+6\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x}\,.$$

כל הגורמים בביטוי חיוביים כי הם חזקות זוגיות של פונקציות טריגונומטריות, ולכן הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה.

סעיף ב

הסרטוט מבוסס על נקודות החיתוך עם ציר ה-x, האסימפטוטות האנכיות, והעובדה שהפונקציה תמיד עולה.



סעיף ג

$$\int_0^a \frac{2\sin x}{\cos^3 x}dx = \cos^{-2} x\Big|_0^a = \frac{1}{\cos^2 a} - \frac{1}{1^2} = 1\,.$$

מכאן ש-$\cos a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, והפתרון היחיד בתחום $0 < a < \frac{\pi}{2}$ הוא $a = \frac{\pi}{4}$.

7.6 חורף תשע"ז

נתונה הפונקציה: $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, a הוא פרמטר.

ענה על הסעיפים א-ו עבור $a > 0$. הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. (1) רשום את האסימפטוטות המאונכות לצירים של גרף הנגזרת $f'(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.

ו. מצא את ערך הביטוי: $\displaystyle\int_{-3a}^{-2a} f(x)\,dx + \int_{2a}^{3a} f(x)\,dx$.

ענה על סעיף ז עבור $a = 0$.

ז. (1) מצא את תחום ההגדרה של $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

סעיף א

הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס $x = \pm a$ או כאשר הביטוי בשורש שלילי $|x| \leq a$. תחום ההגדרה הוא $|x| > a$.

סעיף ב

המכנה תמיד חיובי אבל ה-x במונה גורם לסימן של האסימפטוטות האנכיות להיות תלויות בכיוון ההתקרבות לנקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת:

$$\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{x^2}}} = \frac{\dfrac{x}{|x|}}{\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{x^2}}} \xrightarrow[\pm a]{} \pm 1 .$$

האסימפטוטה האופקית היא $y = \pm 1$, כאשר הסימן הוא לפי כיוון השאיפה לאינסוף:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - a}} \approx \frac{x}{\sqrt{x^2}} \xrightarrow[\pm\infty]{} \pm 1 .$$

סעיף ג

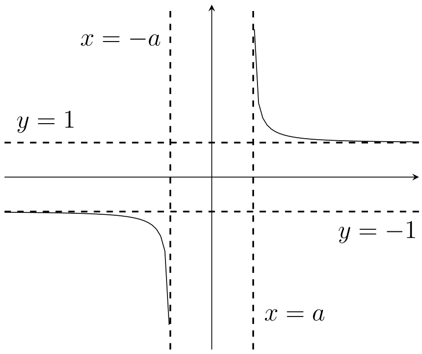
נבדוק את הסימן של הנגזרת הראשונה:

$$f'(x) = 1 \cdot (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 - a^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{-a^2}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

המכנה חיובי והמונה שלילי, לכן הנגזרת שלילי והפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה שלה.

סעיף ד

יש לנו את האסימפטוטות מסעיף ב, ומסעיף ג אנו יודעים שהפונקציה תמיד יורדת:

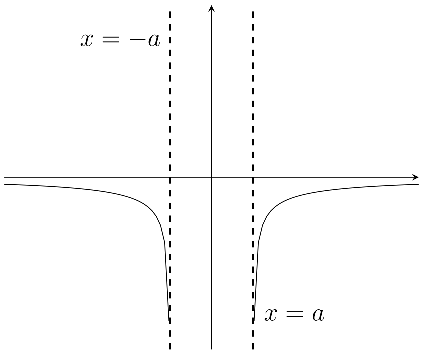


סעיף ה

(1) המכנה של $f'(x)$ מתאפסת כאשר $x=\pm a$ ולכן יש אסימפטוטות אנכיות ב-$x=\pm a$.

כאשר $x\to\pm\infty$, המונה חיובי והמכנה שואפת ל-$+\infty$, ולכן יש אסימפטוטה אופקית ב-$y=0$.

(2) לפי סעיף ג הנגזרת תמיד שלילי ויש אסימפטוטות ב-$\pm a$:



סעיף ו

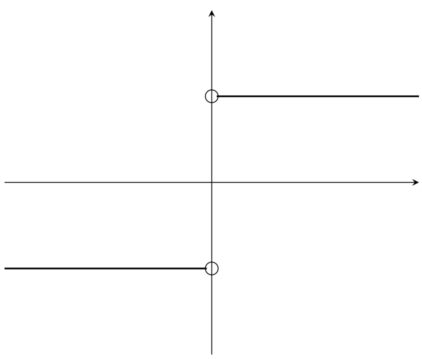
$$f(-x)=\frac{-x}{(-x)^2-a^2}=-\frac{x}{x^2-a^2}=-f(x)\,.$$

הפונקציה אי-זוגיות ולכן אינטגרציה של קטעים סימטריים מצדי ציר ה-y מצטצמים והסכום $=0$.

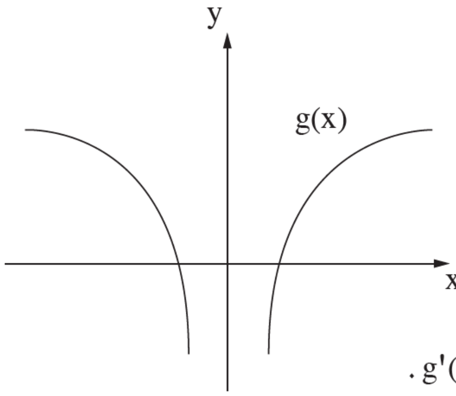
סעיף ז

(1) $\pm 1=\dfrac{x}{|x|}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}=f(x)$ עבור $x\neq 0$. כאשר הסימן הוא הסימן של x.

(2)



7.7 קיץ תשע"ו מועד ב



בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה $g(x)$.

הפונקציות $g''(x)$, $g'(x)$, $g(x)$

מוגדרות לכל x השונה מ־ 0 ,

ואין להן נקודות קיצון או נקודות פיתול.

הישר $x = 0$ הוא האסימפטוטה האנכית

לכל אחד מן הגרפים של הפונקציות האלה.

א. (1) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$.

נמק את שיקוליך.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת השנייה $g''(x)$. נמק את שיקוליך.

נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $g''(x)$,

על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו־ $x = 2$ שווה ל־ 5.25 .

ב. הישר $x = 1$ חותך את הגרף של פונקציית הנגזרת $g'(x)$ בנקודה A ,

והישר $x = 2$ חותך גרף זה בנקודה B .

מצא את ההפרש בין שיעור ה־ y של הנקודה A ובין שיעור ה־ y של הנקודה B . נמק.

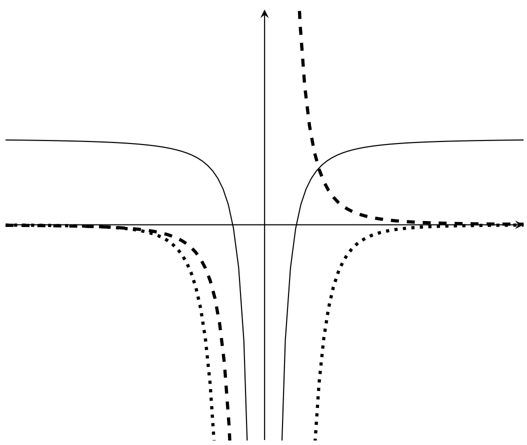
ג. הביטוי $y = \frac{a}{x^3}$ מתאר אחת מן הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$.

a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

(1) קבע איזו מן הפונקציות הביטוי מתאר. נמק את קביעתך.

(2) מצא את הערך של a .

נוח לי להציג את כל שלושת הגרפים במערכת צירים אחת, למרות שאיפיון הגרפים יתברר רק במהלך פתרון השאלה. $g(x)$: קו רגיל. $g'(x)$: קו מקווקוו. $g''(x)$: קו מנוקד.



סעיף א

(1) משמאל לימין עבור ערכים שליליים של x, השיפוע של פונקציה שלילי ויורדת תמיד ולכן הנגזרת תמיד שלילית. ערכה של הנגזרת מתחילה קרוב לאפס, יורדת לאט ואז יורדת מהר ושואפת $-\infty$.

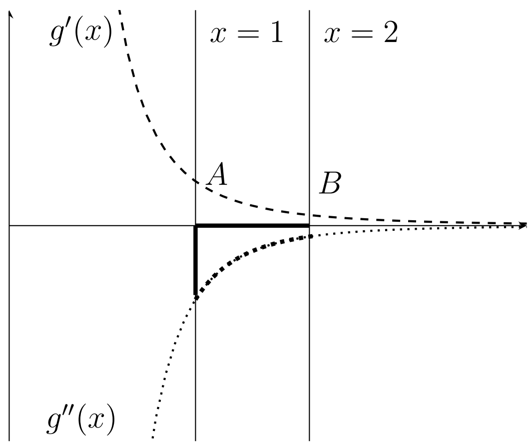
משמאל לימין עבור ערכים חיוביים של x, השיפוע של פונקציה חיובי ויורדת תמיד ולכן הנגזרת חיובית. ערכה של הנגזרת מתחילה קרוב ל-$+\infty$, יורדת מהר ואז יורדת לאט ושואפת 0.

(2) משמאל לימין עבור ערכים שליליים של x, הנגזרת הראשונה מתנהגות בדיוק כמו הפונקציה, ולכן הגרף של הנגזרת השנייה דומה לגרף של הנגזרת הראשונה.

משמאל לימין עבור ערכים חיוביים של x, השיפוע של הנגזרת הראשונה שלילי ועולה תמיד ולכן הנגזרת השנייה שלילית. ערכה של הנגזרת השנייה מתחילה קרוב ל-$-\infty$, עולה מהר ואז עולה לאט ושואפת 0.

סעיף ב

התרשים להלן מראה את $g'(x), g''(x)$ עבור ערכים חיוביים. השטח המתואר מודגש.



חישוב השטח:

$$S = \int_1^2 -g''(x)dx = -g'(x)\Big|_1^2 = g'(1) - g'(2) = 5.25\,.$$

אבל זה בדיוק ההפרש בין ערך ה-y של הנקודה A לבין ערך ה-y של נקודה B.

סעיף ג

(1) הביטוי לא מתאפס ולכן לא יוכל להיות $g(x)$. הביטוי חיובי עבור $x > 0$ ולכן לא יכול להיות $g''(x)$. נשאר $g'(x) = \dfrac{a}{x^3}$.

(2) מסעיף ב:

$$\begin{aligned} g'(1) - g'(2) &= 5.25 \\ \frac{a}{1^3} - \frac{a}{2^3} &= \frac{21}{4} \\ a &= \frac{8}{7} \cdot \frac{21}{4} = 6\,. \end{aligned}$$

7.8 קיץ תשע"ו מועד א

נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{ax^3+2ax}{\sqrt{x^4+4x^2+4}}$.

a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית? נמק.

ג. השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־x

ועל ידי הישרים $x=1$ ו־ $x=-1$, שווה ל־ 4 .

מצא את הערך של a .

ד. נתון כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת $f(x)=g'(x)$.

אחת מנקודות החיתוך בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ היא

נקודה שבה $x=0$.

(1) הראה כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=2x^2$.

(2) מצא את התחום שבו מתקיים $f(x)>g(x)$.

סעיף א

השאלה פשוטה יותר אם נשים לב ש:

$$f(x)=\frac{ax^3+2ax}{\sqrt{x^4+4x^+4}}=\frac{ax(x^2+2)}{\sqrt{(x^2+2)^2}}=\frac{ax(x^2+2)}{x^2+2}=ax\,.$$

אנחנו מסתמכים על העובדה ש-$x^2+2>0$ כך שניתן לחשב את השורש במכנה ולצמצם את השבר, בלי לשנות את התכונות של הפונקציה.

ברור ש-$f(x)$ מוגדרת לכל x.

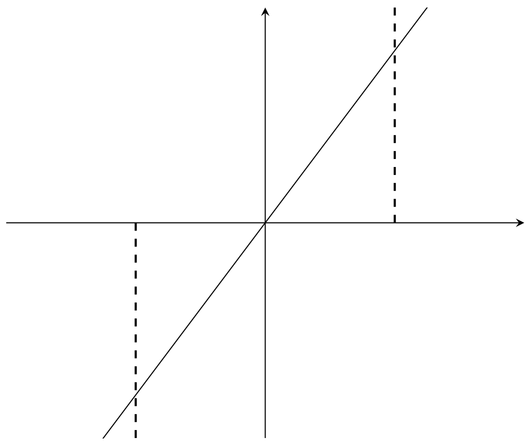
סעיף ב

x^2+2 זוגית כך שהזוגיות תלוייה רק בזוגיות של ax. $a(-x)=-(ax)$ והפונקציה אי-זוגיות.

סעיף ג

כאן צריך להיזהר. **האינטגרל** של פונקציה אי-זוגית בתחום הסימטרי בין $-k$ ל-k הוא אפס כי התרומה של הערכים החיוביים והשליליים מצטמצמים. אבל **השטח** התחום על ידי תחום סימטרי כולל את השטח מתחת לציר ה-x והשטח מעל לציר ה-x. עבור פונקציה אי-זוגית, השטחים שווים.

$$S=2\int_0^1 ax\,dx=ax^2\Big|_0^1=a=4\,.$$



סעיף ד

(1)

$$g(x)=\int g'(x)\,dx=\int f(x)\,dx=\int ax\,dx=\frac{1}{2}ax^2+c\,.$$

לפי הנתון על נקודת החיתוך:

$$f(0)=a\cdot 0=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 0^2+c=g(0)\,,$$

ו-$c=0$. לכן $g(x)=\frac{1}{2}\cdot 4x^2+0=2x^2$.

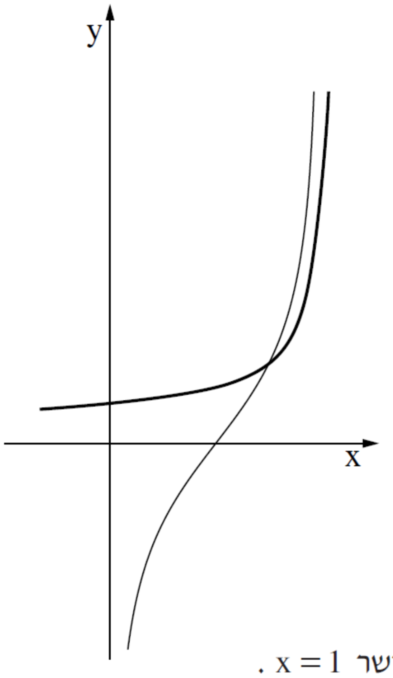
(2)

$$\begin{array}{lcr} f(x) & \stackrel{?}{>} & g(x) \\ 4x & \stackrel{?}{>} & 2x^2 \\ 2 & > & x\,. \end{array}$$

אפשר לצמצם x כי $f(0)=g(0)=0$, ולכן $x=0$ אינו ערך עבורו $f(x)>g(x)$.

עבור $x<0$, $f(x)$ שלילי ו-$g(x)$ חיובי, וברור ש-$f(x)\not> g(x)$. לכן התחום בו $f(x)>g(x)$ הוא $0<x<2$.

7.9 חורף תשע"ו



נתונות הפונקציות:
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$$
$$g(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}$$
(ראה ציור).

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$,
ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים
של הפונקציה $f(x)$,
ואת האסימפטוטות המאונכות לצירים
של הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים
של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = 1$.

ג. נתונות הפונקציות: $h(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}} + 2$, $t(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}} + 2$,

S_1 הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ ועל ידי הישר $x = 2.5$.

S_2 הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $h(x)$ ו־ $t(x)$ ועל ידי הישר $x = 2.5$.

האם השטח S_1 גדול מהשטח S_2, קטן ממנו או שווה לו? נמק.

סעיף א

(1) $f(x)$: השורש לא שלילי לכן $x \le 3$. המכנה לא אפס לכן $x \ne 3$. ביחד $x < 3$.

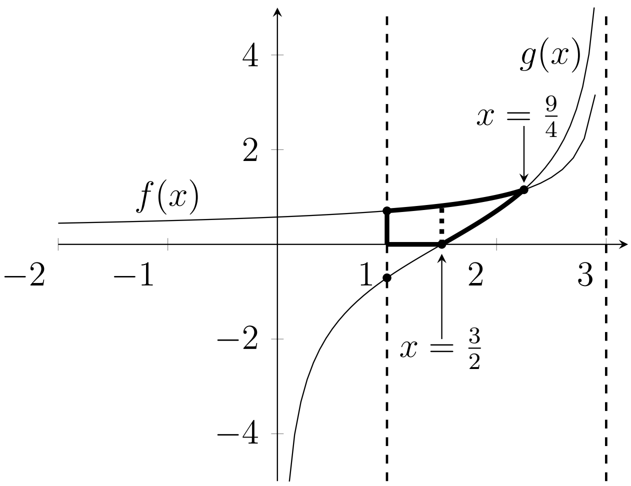
$g(x)$: כמו עבור $f(x)$, $x < 3$. אבל x בשורש לא יכול להיות אפס. כמו כן, עבור $x < 0$, בגלל ש-$3 - x > 0$ אנו מקבלים $x(3-x) < 0$, והשורש לא מוגדר. תחום ההגדרה הוא $0 < x < 3$.

(2) אסימפטוטות אנכיות: $x = 3$ מאפס את המכנה של שתי הפונקציות, ו-$x = 0$ מאפס גם את $g(x)$. בכל אחד מהערכים האלה המונה לא מתאפס ולכן הם מגדירים אסימפטוטות.

אסימפטוטות אופקיות: שתי הפונקציות לא מוגדרות עבור $x > 3$ ולכן אין אסימפטוטות כאשר $x \to +\infty$. כאשר $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$, ולכן יש ל-$f(x)$ אסימפטוטה אופקית $y = 0$. הפונקציה $g(x)$ איננה מוגדרת עבור $x < 0$ ולכן אין אסימפטוטה כאשר $x \to -\infty$.

סעיף ב

השטח התחום גם על ידי ציר ה-x בתרשים גבולות השטח מסומנים בקו עבה, וברור שצריך להחשב בשני חלקים. אחד מ-$x = 1$ ועד לנקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר ה-x, והשני, ההמשך עד לנקודת החיתוך של שתי הפונצקיות.



נקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר ה-x: המכנה חיובי בתחום ההגדרה והמונה מתאפס כאשר $x = \frac{3}{2}$.

נחשב את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות:

$$\frac{1}{\sqrt{3-x}} = \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}\,.$$

בתחום ההגדרה, x ו-$3-x$ חיוביים. נצמצם $\sqrt{3-x}$, נעלה בחזקת 2 כדי להיפטר מהשורש, ונקבל משוואה ריבועית:

$$4x^2 - 13x + 9 = (4x-9)(x-1) = 0$$

שיש לה שני פתרונות $x = \frac{9}{4}$, $x = 1$. בדיקה מראה ש-$f(1) = 1, g(1) = -1$, כך שאין חיתוך בנקודה זו. נקודת החיתוך היא $(\frac{9}{4}, \frac{2}{\sqrt{3}})$.

נחשב את שני חלקי השטח בנפרד:

$$S_1 = \int_1^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{3-x}} - 0\right) dx = -2\sqrt{3-x}\Big|_1^{\frac{3}{2}} = -2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{2}\right) = 0.379$$

$$S_2 = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{4}} \left(\frac{1}{\sqrt{3-x}} - \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}\right) dx = -2\left(\sqrt{3-x} - \sqrt{x(3-x)}\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{4}} =$$

$$(-1.732 + 2.598) + (2.449 - 3) = 0.315$$

$$S = 0.379 + 0.315 = 0.694\,.$$

סעיף ג

בניגוד לשאלה בסעיף ב, כאן הצירים לא תוחמים את השטח. השטח מחושב על ידי ההפרש בערכי הפונקציות, ולכן הוספות קבוע לפונקציות מצטמצם וערך השטח לא משתנה.

7.10 קיץ תשע"ה מועד ב

נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

הישר $y = \frac{1}{3}x + 3$ חותך את הגרף של הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 0$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ושל הפונקציה $f(x)$?

(2) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(6) הוסף לסקיצה שסרטטת בתת־סעיף ב (5) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתונות שתי משוואות, I ו־ II : $\quad$ I. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} = k$, $\quad$ II. $\sqrt{x^2+9} = k$

נתון כי $k > 0$.

מצא את תחום הערכים של k שעבורם

אין פתרון למשוואה I וגם אין פתרון למשוואה II .

סעיף א

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{1}{2}(x^2+9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\,dx = (x^2+9)^{\frac{1}{2}} + c\,.$$

לפי הנתון, $\sqrt{0^2+9} + c = 3$, ולכן $c = 0$ ו-$f(x) = \sqrt{x^2+9}$.

סעיף ב

(1) x^2+9 חיובי עבור כל x לכן $f(x)$ ו-$f'(x)$ מוגדרות עבור כל x.

(2) $f'(x)$ מוגדרת עבור כל x אז אין אסימפטוטות אנכיות.

$$\frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} \xrightarrow[\pm\infty]{} \pm 1\,,$$

לכן $y = 1$ היא אסימפטוטה אופקית כאשר $x \to +\infty$, ו-$y = -1$ היא אסימפטוטה אופקית כאשר $x \to -\infty$.

(3) על ידי הצבה של $x = 0$ יש נקודת חיתוך ב-$(0,0)$.

המכנה חיובי לכן $y = 0$ רק אם $x = 0$ וכבר קיבלנו נקודת חיתוך זו.

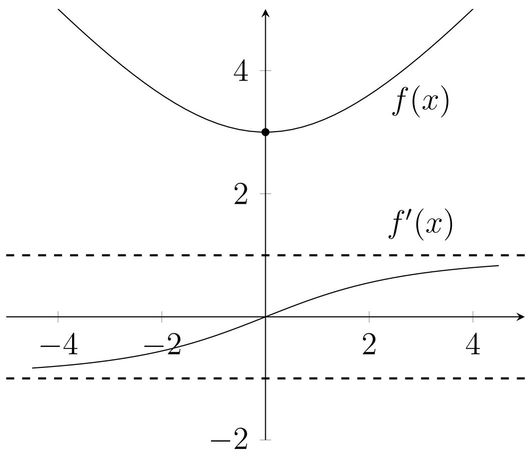
(4)

$$f''(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+9} - x \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}} \cdot 2x}{x^2+9} = \frac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}\,.$$

הנגזרת השנייה תמיד חיובית ולכן הנגזרת הראשונה עולה בכל התחום.

$(5,6)$ ל-$f(x)$ נקודת מינימום ב-$(0,3)$. מסעיף (4) הנגזרת הראשונה עולה בכל התחום. הסימן של $f'(x)$ שלילית עבור ערכים שליליים של x וחיובית עבור ערכים חיוביים.

לפי (3) ל-$f'(x)$ יש נקודת חיתוך ב-$(0,0)$. לפי (2) יש אסימפטוטות ב-± 1 כאשר השאיפה היא ל-1 עבור $x \to +\infty$, ול--1 עבור $x \to -\infty$.



סעיף ג

הערך הקטן ביותר של $\sqrt{x^2+9}$ הוא 3, ולכן אין פתרון למשוואה II כאשר $0 < k < 3$. זה ברור גם מהגרף כי $(0,3)$ היא נקודת מינימום של $f(x)$.

מהגרף של $f'(x)$ ברור שאין פתרון למשוואה I כאשר $k \geq 1$. אפשר גם בחישוב:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2+9} &= k^2 \\ x &= \frac{3k}{\sqrt{1-k^2}}\,. \end{aligned}$$

כדי שניתן להוציא שורש חייב להתקיים $k < 1$, ולכן אין פתרון כאשר $k \geq 1$.

שימו לב שהשאלה ביקשה את התחום בו אין פתרון ל-I **וגם** ל-II. צירוף שתי התוצאות נותן שאין פתרון לשתי המשוואות כאשר $1 \leq k < 3$.

7.11 קיץ תשע״ה מועד א

נתונה הפונקציה $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{(x-1)^3}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(4) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד.

על סמך הגרף של הפונקציה $f(x)$, ציין באיזה תחום נמצאת כל אחת מנקודות אלה.

ג. האם השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים,

גדול מ־ 4 , קטן מ־ 4 או שווה ל־ 4 ? נמק.

סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס ב-$x=1$. תחום ההגדרה הוא $x \neq 1$.

(2) כאשר $x=1$ המכנה מתאפס אבל המונה לא מתאפס, לכן $x=1$ היא אסימפטוטה אנכית.

$$\frac{\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{4x}{x^3}+\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}-\dfrac{3x^2}{x^3}+\dfrac{3x}{x^3}-\dfrac{1}{x^3}} \xrightarrow[\pm\infty]{} 0\,.$$

הכנה שואף ל-1 והמונה שואף ל-0, ולכן יש אסימפטוטה אופקית ב-$y=0$.

(3) כאשר $x=0$, $y=\frac{4}{-1}=-4$.

כדי ש-$y=0$, $(x+2)^2=0$, $x=-2$ והמכנה לא מתאפס עבור $x=-2$.

נקודות החיתוך הן $(0,-4), (-2,0)$.

(4)

$$f'(x)=\frac{2(x+2)(x-1)^3-(x+2)^2\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}=-\frac{(x+2)(x+8)}{(x-1)^6}\,.$$

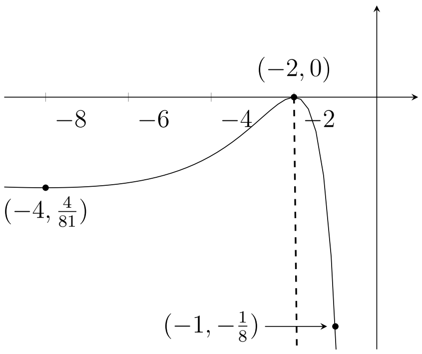
המכנה לא מתאפס בתחום ההגדרה, לכן נקודות הקיצון הן $\left(-8,-\dfrac{4}{81}\right), (-2,0)$.

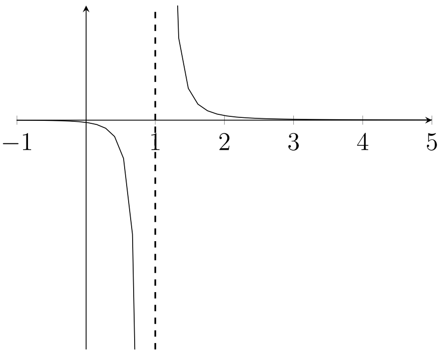
המכנה חיובי ולכן סימן הנגזרת השנייה שווה לסימן הנגזרת של המונה $-2(x+5)$.

$-2(-2+5)<0$ ולכן $(-2,0)$ היא מקסימום.

$-2(-8+5)>0$ ולכן $\left(-8,-\dfrac{4}{81}\right)$ היא מינימום.

(5) לא ניתן לראות את כל המידע החשוב בגרף בקנה מידה אמיתי. הבאתי שני גרפים, אחד מימין לציר ה-y מהראה את האסימפטוטות, ואחד משמאל לציר ה-y המראה את נקודות הקיצון.





סעיף ב

בין $-\infty$ ל--8, השיפוע יורד ואז עולה ויש נקודת פיתול. בין -8 ל--2 השיפוע עולה ואז יורד ויש נקודת פיתול.

סעיף ג

הקו בין $(-2,0)$ לבין $(0,-4)$ תוחם משולש (ישר זווית) ששטחו $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = 4$. הגרף נמצאת מעל לקו לכן השטח שהוא תוחם פחות מ-4.

בגלל קנה המידה בתרשים קשה לראות שהגרף תמיד מעל לקו המקווקוו, אז נבדוק בחישוב. ב-$x=-1$, $f(-1) = -\frac{1}{8} = -0.125$. לפי משולשים דומים, $x=-1$ חוצה את הבסיס ולכן הנקודה על היתר של המשולש היא $(-1,-2)$. הגרף מעל לקו כי $-2 < -0.125$.

7.12 חורף תשע"ה

נתונות הפונקציות:
$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$$
$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{3x^2+2}}$$

א. מצא עבור כל אחת מהפונקציות:

(1) את תחום ההגדרה.

(2) את האסימפטוטות המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) את השיעורים של נקודות הקיצון (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה אחת בלבד.

ג. נתונה הפונקציה $h(x)=g(x)-k$, $k>0$.

עבור אילו ערכים של k אין לפונקציה $h(x)$ נקודות חיתוך עם הפונקציה $f(x)$? נמק.

סעיף א

(1) המכנה של שתי הפונקציות חיובי, ולכן $g(x)$ מוגדרת עבור כל x. $f(x)$ לא מוגדרת עבור $x<0$ בגלל ה-x במונה, כך שתחום ההגדרה הוא $x\geq 0$.

(2) אין אסימפטוטות אנכיות הפונקציות מוגדרת כל אחת בתחום שלה.

$$\sqrt{\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1}}\xrightarrow[+\infty]{}0\,,$$

ולכן $y=0$ היא אסימפטוטה אופקית.

כאשר $x\xrightarrow[\pm\infty]{}$, המכנה של $g(x)$ שהוא חיובי שואף ל-$+\infty$, ולכן $y=0$ היא אסימפטוטה אופקית.

(3) עבור $f(x)$:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot(2x)}{\frac{x}{1+x^2}}\right)=\frac{1}{2}\frac{1-x^2}{\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

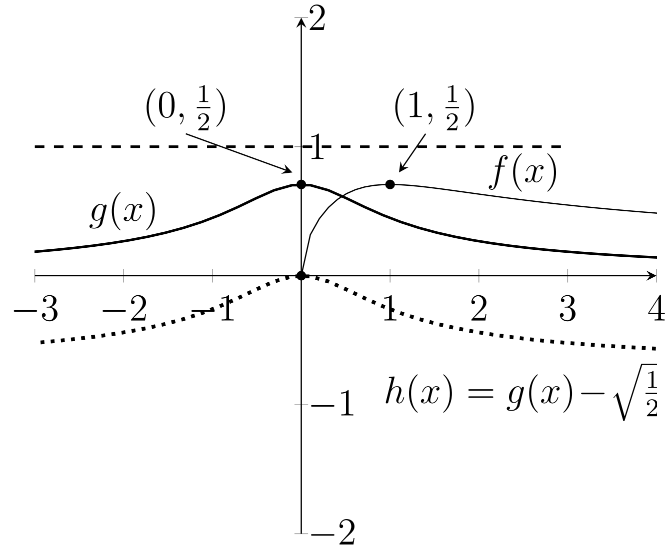
המכנה חיובי והנגזרת מתאפסת כאשר המונה מתאפס $x=\pm 1$. $f(x)$ לא מוגדרת כאשר $x<0$ ונקודת הקיצון היחידה היא $\left(1,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. הסימן של הנגזרת השנייה שווה לסימן של הנגזרת של המונה: $\frac{1}{2}\cdot -2x$ שהיא שלילית עבור כל x בתחום, ולכן נקודת הקיצון היא מקסימום.

עבור $g(x)$:

$$g'(x) = -\frac{1}{2}\left(3x^2+2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 6x$$

המכנה חיובי לכן הנגזרת מתאפסת כאשר $x = 0$. נקודת הקיצון היא $\left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. הנגזרת של המונה היא $-3 < 0$, ונקודות הקיצון היא מקסימום.

סעיף ב



ההערה "אם ידוע כי הפונקציות תחתכות בנקודה אחת בלבד" היתה לי די מוזרה, אבל לאחר מחשבה הבנתי שההערה באה למנוע אפשר של חיתוך כאשר $x > 1$ ושואף לאינסוף.

רציתי להשתכנע שאכן ההערה נכונה. כאשר משווים $f(x) = g(x)$ ומפשטים, מקבלים משוואה ממעלה שלישי:

$$3x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0\,.$$

לא חיפשתי את הנוסחה (המסובכת) למציאת פתרונות למשוואות ממעלה שלישי, אבל לבסוף שמתי לב שאם $x > 1$ אז $3x^3 - x^2 > 0$ ו-$2x - 1 > 0$, ולכן לא יכול להיות פתרונות נוספים.

סעיף ג

הערך המינימלי של $f(x)$ הוא 0, והערך המקסימלי של $g(x)$ הוא $\sqrt{\frac{1}{2}}$. אם $k > \sqrt{\frac{1}{2}}$ לא יהיו נקודות חיתוך בין שתי הפונקציות.

7.13 קיץ תשע"ד מועד ב

נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x^2-1}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. רק על פי סעיף א, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. רק על פי הסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ שסרטטת, מצא את התחום שבו מתקיים:
פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית.
נמק.

סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס $x=\pm 1$.

(2) האסימפטוטות האנכיות הן במקומות שהפונקציה לא מוגדרת $x=\pm 1$.

חישוב האסימפטוטה האופקית $y=1$:

$$\frac{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}} \xrightarrow[\pm\infty]{} \frac{1}{1}=1\,.$$

(3) כאשר $x=0$, $y=-4$.

כאשר $x=2$ המונה מתאפס והמכנה לא מתאפס.

נקודות החיתוך הן $(0,-4)$, $(2,0)$.

(4) חישוב הנגזרת הראשונה:

$$f'(x)=\frac{2(x-2)(x^2-1)-(x-2)^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2(2x^2-5x+2)}{(x^2-1)^2}=(2x-1)(x-2)\,.$$

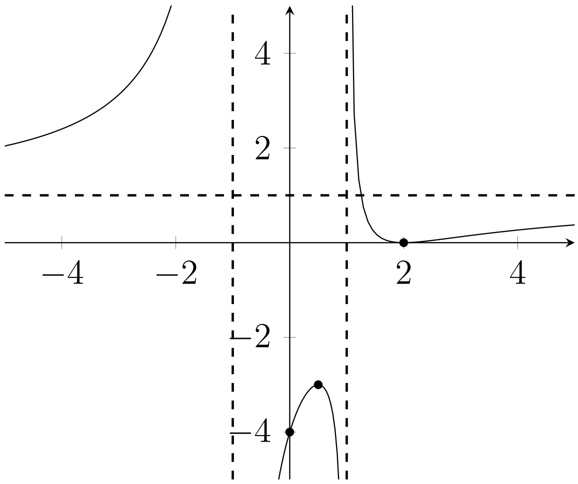
המכנה חיובי בתחום ההגדרה ולכן נקודות הקיצון נמצאות ב-$x=\frac{1}{2}, x=2$.

המכנה חיובי לכן סימן הנגזרת השנייה שווה לסימן הנגזרת של המונה: $2(4x-5)$. ביטוי זה חיובי עבור $x=2$, ושלילי עבור $x=\frac{1}{2}$. נקודות הקיצון הן:

$(2,0)$ מינימום, $\left(\dfrac{1}{2},-3\right)$ מקסימום.

סעיף ב

חישבנו את האסימפטוטות, נקודות החיתוך עם הצירים וונקודות הקיצון. מידע זה מספיק לצייר תרשים עבור $x > -1$. עבור $x < -1$ נבדוק אם הגרף מעל לאסימפטוטה האופקית או מתחתיה. $f(-2) = \frac{16}{3} > 1$ ולכן הגרף מעל לאסימפטוטה.



סעיף ג

כדי שהנגזרת הראשונה תהיה שלילית, הפונקציה חייבת לרדת:

$$\frac{1}{2} < x < 1, \quad 1 < x < 2\,.$$

כדי שהנגזרת השנייה תהיה חיובית, הנגזרת הראשונה חייבת לעלות:

$$x < -1, \quad 1 < x < x_1\,,$$

כאשר x_1 היא נקודת הפיתול אי-שם מימין ל-$x = 2$.

החיתוך בין שני התחומים הוא $1 < x < 2$.

7.14 קיץ תשע"ד מועד א

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax^2+9}$. a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) הראה כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

(2) הבע באמצעות a את האסימפטוטות האופקיות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־ x

ועל ידי הישר $x=-4$, שווה ל־ 2 .

בלי לחשב את הערך של a , חשב את הערך המספרי של $f(-4)$

ואת הערך המספרי של $f(4)$.

סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדר כאשר $ax^2+9\le 0$. נתון ש-$a>0$ אז הביטוי תמיד גדול מאפס, והפונקציה מוגדרת עבור כל x.

(2) נחשב את הנגזרת הראשונה והנגזרת השנייה:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}(ax^2+9)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2ax=\frac{ax}{\sqrt{ax^2+9}}\\
f''(x) &= \frac{a\sqrt{ax^2+9}-ax\cdot\dfrac{ax}{\sqrt{ax^2+9}}}{ax^2+9}\\
&= \frac{9a}{(ax^2+9)\sqrt{ax^2+9}}\,.
\end{aligned}$$

)א(הנגזרת השנייה מוגדרת לכל x, ו-)ב(גם המונה וגם המכנה חיוביים, ולכן הנגזרת השנייה לא מתאפסת. המסקנה היא שאין נקודות פיתול.

סעיף ב

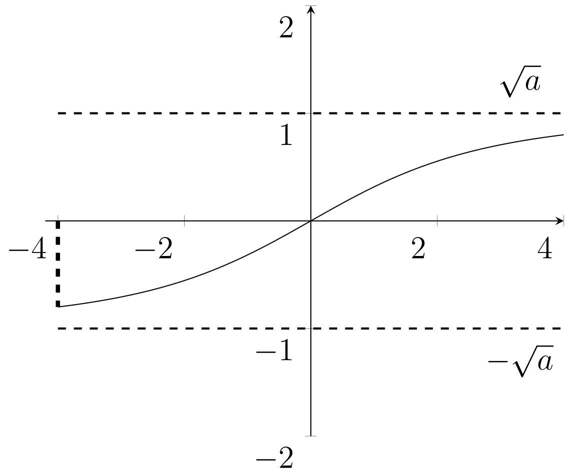
(1) $f'(x)$ מוגדרת כאשר $ax^2+9>0$, ולכן היא מוגדרת לכל x בדיוק כמו $f(x)$.

(2) יש אסימפטוטות אופקיות ב-$\pm\sqrt{a}$:

$$f'(x)=\frac{\dfrac{ax}{|x|}}{\sqrt{a+\dfrac{9}{x^2}}}\xrightarrow[\pm\infty]{}\pm\sqrt{a}\,.$$

(3) ראינו בסעיף א שהנגזרת השנייה תמיד חיובית ולכן הנגזרת הראשונה תמיד עולה.

(4) נשתמש במידע: $f'(0)=0$, יש אסימפטוטות אופקיות ב-$\pm\sqrt{a}$, הנגזרת תמיד עולה:



סעיף ג

האינטגרל של הנגזרת של פונקציה הוא הפונקציה עצמה.

$$\int_{-4}^{0} 0 - f'(x)dx = -\int_{-4}^{0} f'(x)dx = -f(x)\Big|_{-4}^{0} = -f(0) + f(-4)\,.$$

קל לחשב ש-$f(0)=\sqrt{9}=3$ ו-$f(-4)=\sqrt{16a+9}$. הפיתוי הוא לחשב את הערך של a אבל השאלה דורשת את הערך של $f(-4)$ בלי לחשב את הערך של a. החישוב אפילו קל יותר:

$$\begin{aligned} -f(0)+f(-4) &= 2 \\ f(-4) &= 2+f(0)=2+3=5\,. \end{aligned}$$

הפונקציה זוגית, לכן $f(4)=f(-4)=5$.

מי שמעוניין יכול לחשב את ערכו של a:

$$\begin{aligned} \sqrt{16a+9} &= 2+3 \\ a &= 1\,. \end{aligned}$$

7.15 חורף תשע"ד

במשולש שווה־שוקיים ABC $(AB = AC)$ אורך השוק הוא b .

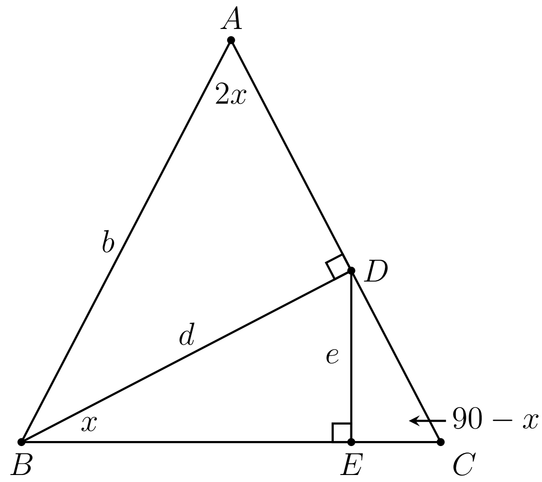
BD הוא גובה לשוק AC . DE הוא אנך לבסיס BC .

סמן $\measuredangle BAC = 2x$, ומצא מה צריך להיות הגודל של $\measuredangle BAC$,

כדי שאורך האנך DE יהיה מקסימלי.

בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

בבחינה זו היו שלוש שאלות בפרק השני לכן מספר השאלה הוא 8 ולא 7.



נצדיק את סימון הזוויות בתרשים. משולש שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות והסכום כל הזוויות במשולש שווה 180 :

$$\angle ACB = \angle ABC = \frac{180 - 2x}{2} = 90 - x\,.$$

במשולש ישר-זווית $\triangle BDC$, $\angle DBC = 90 - (90 - x) = x$.

במבט ראשון נראה שאפשר למצוא את הערך המקסימלי של $e = DE$ על ידי מציאת הנגזרת $e' = (d\sin x)' = d(\sin x)' = 0$. אבל זה לא נכון כי d איננה קבוע ולכן אי אפשר להוציא אותו מהנגזרת. נתון ש-b קבוע, כך שעלינו למצוא ביטוי מהצורה $e = b \cdot f(x)$.

את החישוב נבצע בשני שלבים, תחילה נבטא את e כפונקציה של x, d, ואח"כ נבטא את d כפונקציה של x, b. אפשר להשתמש בחוק הסינוסים, אבל פשוט יותר להשתמש בהגדרת הפונקציות הטריגונמטריות במשלושים ישר-זווית $\triangle BED, \triangle BDA$:

$$\begin{aligned}
e &= d\sin x\\
d &= b\sin 2x\\
e &= (b\sin 2x)\sin x\\
&= b(2\sin x\cos x)\sin x = 2b\sin^2 x\cos x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e' &= 2b(2\sin x\cos x\cos x + \sin^2 x\cdot(-\sin x)) \\
&= 2b\sin x(2\cos^2 x - \sin^2 x) = 0\,.
\end{aligned}
$$

הנגזרת מתאפסת אם $\sin x = 0$ שלא ייתכן, כי $x = 0, x = 180$ אינם יכולים להיות זוויות במשולש.
הנגזרת גם מתאפסת אם:

$$
\begin{aligned}
2\cos^2 x - \sin^2 x &= 0 \\
\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 &= 2 \\
\tan x &= \pm\sqrt{2} \\
x &= 54.74,\ 125.26\,.
\end{aligned}
$$

אבל $\angle BAC = 2x$ כך ש-$x = 54.74$ הוא הפתרון האפשרי היחיד.

השאלה מבקשת את ערכו של הזוויות $\angle BAC = 2x = 109.47$.

פרק 8 חדו"א שאלה 8

8.1 קיץ תשע"ח מועד ב

בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}$ בתחום $x>0$,

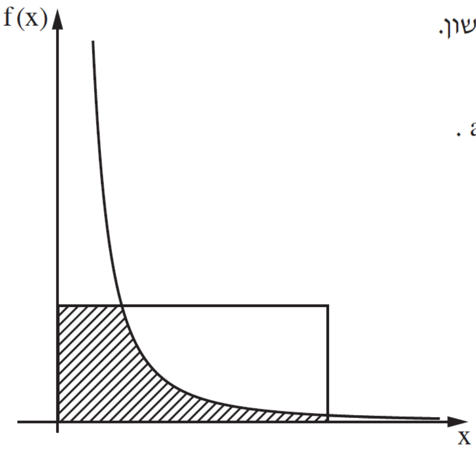
ומלבן ששתיים מצלעותיו נמצאות על הצירים והוא נמצא ברביע הראשון.

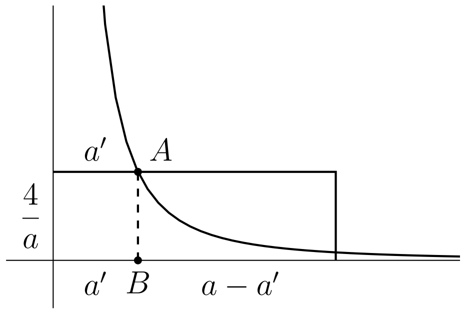
נתון: שטח המלבן הוא 4 .

נסמן ב־ a את אורך צלע המלבן שנמצאת על ציר ה־ x . נתון: $a\geq\frac{1}{4}$.

א. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הצירים, על ידי צלעות המלבן ועל ידי גרף הפונקציה $f(x)$ (השטח המקווקו בציור).

ב. עבור איזה ערך של a השטח שמצאת בסעיף א הוא מקסימלי?





סעיף א

נתון שמרחק הצלע התחתונה של המלבן מציר ה-y הוא a, ונתון שטח המלבן 4, ולכן אורך הצלע האנכית של המלבן הוא $\frac{4}{a}$. נסמן ב-A את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצלע העליונה של המלבן. נסמן ב-a' את אורך הקטע בין A לציר ה-y, ונסמן ב-B נקודה על ציר ה-x, הנמצאת במרחק a' מציר ה-y. לפי הגדרת הפונקציה

$$\begin{aligned} f(a') &= \frac{1}{(a')^2}=\frac{4}{a} \\ a' &= \frac{\sqrt{a}}{2}\,. \end{aligned}$$

נחשב את השטח המבוקש כסכום השטח של מלבן מציר ה-y ועד לצלע AB, והשטח מתחת לפונקציה מ-B ועד ל-$x=a$:

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{4}{a}\cdot\frac{\sqrt{a}}{2}+\int_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^{a}\frac{1}{x^2}dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{a}}+(-1)\cdot x^{-1}\Big|_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^{a} \\
&= \frac{2}{\sqrt{a}}-\frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{\sqrt{a}}{2}}=\frac{4\sqrt{a}-1}{a}\,.
\end{aligned}
$$

סעיף ב

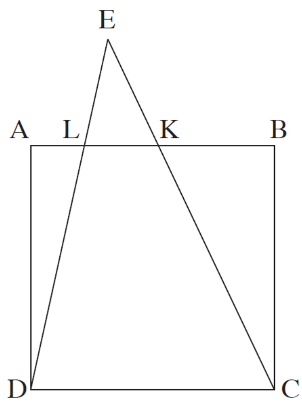
ברור ש-$S=\frac{4\sqrt{a}-1}{a}$ יורדת בעיקביות ככל ש-a עולה, לכן הערך המקסימלי צריך להיות בערך הקטן ביותר של התחום הנתון $a=\frac{1}{4}$.

אפשר גם לחשב את הנגזרת הראשונה:

$$
\left(\frac{4\sqrt{a}-1}{a}\right)'=\frac{\left(4\cdot\frac{1}{2}\cdot a^{-\frac{1}{2}}\cdot a\right)-((4\sqrt{a}-1)\cdot 1)}{a^2}=\frac{-2\sqrt{a}+1}{a^2}\,,
$$

שמתאפסת ב-$a=\frac{1}{4}$.

8.2 קיץ תשע"ח מועד א



ABCD הוא ריבוע שאורך צלעו 6 ס"מ.

K ו־ L הן נקודות על הצלע AB.

נתון כי הישרים CK ו־ DL חותכים זה את זה בנקודה E,

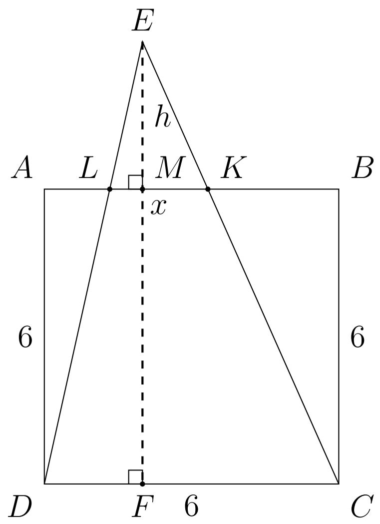
הנמצאת מחוץ לריבוע ABCD (ראה ציור).

נסמן: LK = x.

א. הבע באמצעות x את גובה המשולש KLE.

ב. עבור איזה ערך של x סכום שטחי המשולשים BCK, ADL ו־ KLE הוא מינימלי? נמק.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.



סעיף א

$DC\|LK$ ולכן $\triangle CDE \sim \triangle KLE$. נשים לב שהגובה של $\triangle CDE$ הוא $h+6$, ולכן:

$$\begin{aligned} \frac{h}{x} &= \frac{h+6}{6} \\ h &= \frac{6x}{6-x}\,. \end{aligned}$$

סעיף ב

נחשב את שלושת השטחים:

$$\begin{aligned} S_{\triangle KLE} &= \frac{1}{2}\cdot x\cdot h = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{6x}{6-x} \\ S_{\triangle ADL} &= \frac{1}{2}\cdot AL\cdot 6 \\ S_{\triangle BCK} &= \frac{1}{2}\cdot BK\cdot 6\,. \end{aligned}$$

המצב נראה אבוד כי AL, BK לא ידועים ואין נתונים עליהם. אבל, נשים לב ש-AB היא צלע של הריבוע, ולכן $AL + BK = AB - LK = 6 - x$. סכום השטחי המשולשים הוא:

$$\begin{aligned} S = S_{\triangle KLE} + S_{\triangle ADL} + S_{\triangle BCK} &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{6x}{6-x} + \frac{1}{2} \cdot (6-x) \cdot 6 \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2(x^2 - 6x + 18)}{6-x} \right) \\ &= 6 \cdot \frac{x^2 - 6x + 18)}{6-x} \, . \end{aligned}$$

נחשב את נגזרת הראשונה (ללא הקבוע 6):

$$\begin{aligned} S' &= \frac{(2x-6)(6-x) - (x^2 - 6x + 18)(-1)}{(6-x)^2} \\ &= \frac{-x^2 + 12x - 18}{(6-x)^2} \, . \end{aligned}$$

המכנה חיובי ולכן המונה מתאפס עבור:

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 18}}{-2} = 6 \mp 3\sqrt{2} \, .$$

הערך $6 + 3\sqrt{2} > 6$ אינו פתרון כי LK הוא קטע של צלע שאורכה 6. נקודת הקיצון היא $6 - 3\sqrt{2}$.

המכנה של S' חיובי לכן הסימן של הנגזרת השנייה שווה לסימן של הנגזרת של המונה: $-2x + 12$. עבור נקודת הקיצון:

$$-2(6 - 3\sqrt{2}) + 12 = 6\sqrt{2} > 0 \, ,$$

והנקודה היא מינימום.

8.3 חורף תשע״ח

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=t$.

נתון: $1\le t\le 5$.

המשיק חותך את ציר ה־ x בנקודה A ואת ציר ה־ y בנקודה B . הנקודה O היא ראשית הצירים.

א. מצא את שיעור ה־ x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מינימלי.

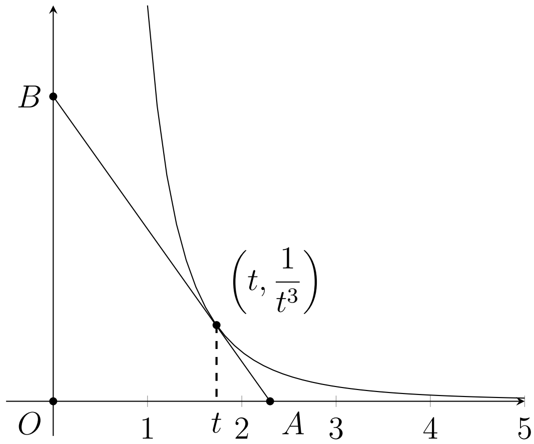
ב. מצא את שיעור ה־ x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מקסימלי.

הסתבכתי כאן בגלל שלא תירגלתי מזמן את המשוואה לקו ישר. נדמה לי שזו הפעם היחידה שהמשוואה נדרשת בכל הבחינות הללו.

סעיף א

ערך ההפונקציה חיובית עבור ערכי x חיוביים, ולכן המשיק נמצא ברביע הראשון.

)הערכים בציר ה-y בתרשים הוכפלו פי שמונה כדי לאפשר הצגת תרשים ברור.(



הנגזרת של הפונקציה היא $f'(x)=\frac{-3}{x^4}$, לכן הקו המשיק לגרף הפונקציה הוא:

$$y-\frac{1}{t^3}=\frac{-3}{t^4}(x-t)\,.$$

נחשב את הנקודות על הצירים. עבור ציר ה-x:

$$\begin{aligned}
0-\frac{1}{t^3} &= \frac{-3}{t^4}(x_A-t)\\
3x_A &= t^4\left(\frac{3t}{t^4}+\frac{1}{t^3}\right)=3t+t\\
x_A &= \frac{4t}{3}\,.
\end{aligned}$$

עבור ציר ה-y:

$$\begin{aligned} y_B - \frac{1}{t^3} &= \frac{-3}{t^4}(0-t) \\ y_B &= \frac{3t}{t^4} + \frac{1}{t^3} = \frac{4}{t^3}\,. \end{aligned}$$

השאלה מבקשת את נקודת הקיצון של:

$$g(t) = x_A + x_B = \frac{4t}{3} + \frac{4}{t^3}\,.$$

הנגזרת הראשונה והנגזרת השנייה הן:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{4}{3} + \frac{-12}{t^4} \\ g''(x) &= \frac{48}{t^5}\,. \end{aligned}$$

הנחשב את t כאשר הנגזרת הראשונה מתאפסת:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{4}{3} + \frac{-12}{t^4} = 0 \\ t^4 &= \frac{3}{4} \cdot 12 = 9 \\ t &= \pm\sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

נתון ש-$t > 0$ ולכן נקודת הקיצון היא $t = \sqrt{3}$. הנגזרת השנייה חיובית עבור כל $t > 0$ ולכן נקודת הקיצון היא מינימום.

סעיף ב

אם יש רק נקודת קיצון פנימית אחת שהיא מינימום, אז המקסימום חייב להיות בקצה התחום:

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{4 \cdot 1}{3} + \frac{4}{1^3} = \frac{16}{3} \\ g(5) &= \frac{4 \cdot 5}{3} + \frac{4}{5^3} = \frac{20}{3} + \frac{4}{125}\,. \end{aligned}$$

ברור ש-$g(1) < g(5)$ ולכן המקסימום הוא ב-$t = 5$.

8.4 קיץ תשע"ז מועד ב

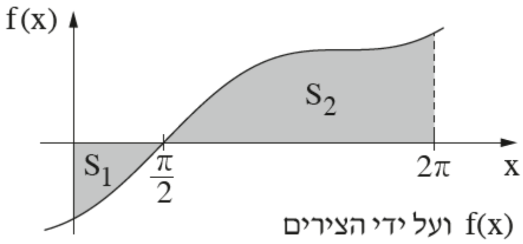
$f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x .

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־ y בחלקו השלילי.

נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x היא $(\frac{\pi}{2}, 0)$ (ראה ציור).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הצירים ועל ידי הישר $x = 2\pi$
(השטח האפור בציור) שווה ל־ $10\pi^2 + 16$.

נתון גם: $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 8\pi^2$.



א. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים
(השטח S_1 המסומן בציור).

הפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$. נתון: $F(0) = 0$.

ב. מצא את $F(\frac{\pi}{2})$.

נתון: $f'(x) = 8\sin x + 8$.

ג. מצא את $f(x)$.

בשאלה זו צירך לשים לב להבדל בין חישוב אינטרגל של פונקציה ובין השימוש באינטגרל לחישוב שטח. בתרשים בשאלה, אם מחשבים אינטגרל מ-0 ל-2π, הערכים השליליים עד $\frac{\pi}{2}$ "מורידים" מערך האינטגרל. כאשר מחשבים את השטח $S_1 + S_2$ התרומה של S_1 חיובית ויש לחשב את האינטגרל של השלילה של הפונצקיה.

סעיף א

הערך של $f(x)$ שלילי בין 0 ל-$\frac{\pi}{2}$ ולכן:

$$S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} f(x)dx = 10\pi^2 + 16\,.$$

נתון ש:

$$-S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx = 8\pi^2\,.$$

נחסיר את המשוואה השנייה מהראשונה ונקבל:

$$S_1 = \pi^2 + 8\,.$$

סעיף ב

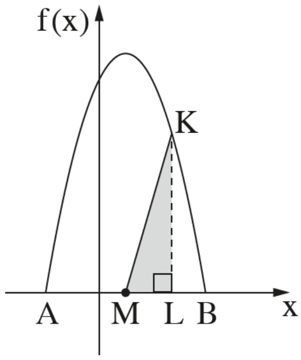
$$-S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = F\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(\pi^2+8)\,.$$

סעיף ג

נתון $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = \int (8\sin x + 8)dx \\ &= -8\cos x + 8x + c \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -8\cos\frac{\pi}{2} + 8\cdot\frac{\pi}{2} + c = 0 \\ c &= -4\pi \\ f(x) &= -8\cos x + 8x - 4\pi\,. \end{aligned}$$

8.5 קיץ תשע״ז מועד א



בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 + 2x + c$

בתחום האי־שליליות שלה.

A ו־ B הן נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

נתון: $x_A = -t$, $x_B = 2t$ $(t > 0)$.

א. מצא את t ואת c .

M היא נקודת החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה עם ציר ה־ x .

K היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה $f(x)$ מעל לציר ה־ x .

מהנקודה K הורידו אנך לציר ה־ x , החותך את הקטע AB בנקודה L .

ב. מצא עבור אילו שיעורי x של הנקודה K שטח המשולש KLM הוא מקסימלי.

מצא את שני הפתרונות האפשריים.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

סעיף א

נציב את הביטויים הנתונים עבור A, B ונקבל שתי משוואות בשני נעלמים t, c שנוכל לפתור:

$$\begin{aligned}
-(2t)^2 + 2(2t) + c &= 0\\
-(-t)^2 + 2(-t) + c &= 0\\
t(6t-3) &= 0\\
t &= 2\,.
\end{aligned}$$

פסלנו את הפתרון $t = 0$ כי נתון ש-$t > 0$. נחשב את c:

$$\begin{aligned}
-(-2)^2 + 2(-2) + c &= 0\\
c &= 8\,.
\end{aligned}$$

הפונקציה היא $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.

סעיף ב

נקודת החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה עם $f(x)$ היא נקודת המקסימום של $f(x)$. מהנגזרת הראשונה $f'(x) = -2x + 2 = 0$ מתקבל $x = 1$.

הקודקודים של $\triangle KLM$ הם (כאשר x היא הקואורדינטה של K, L על ציר ה-x):

$$\begin{aligned}
M &= (1,0)\\
L &= (x,0)\\
K &= (x, -x^2+2x+8)\,.
\end{aligned}$$

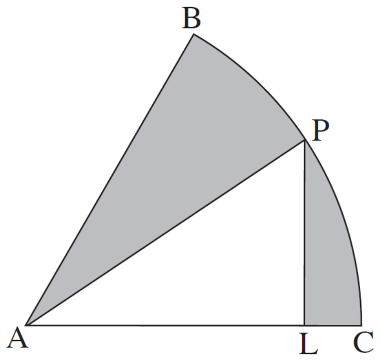
השטח של $\triangle KLM$ הוא:
$$S(x)=\frac{1}{2}(x-1)(-x^2+2x+8)\,,$$
והגזרת הראשונה היא:
$$\begin{aligned}S'(x) &= \frac{1}{2}(1\cdot(-x^2+2x+8)+(x-1)(-2x+2))\\ &= \frac{1}{2}\cdot(-3x^2+6x+6)\\ &= -\frac{3}{2}\cdot(x^2-2x-2)\,.\end{aligned}$$
הנגזרת מתאפסת ב:
$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+4\cdot 2}}{2}=1\pm\sqrt{3}\,.$$
הנגזרת השנייה היא $S''(x)=-3(x-1)$.

הפתרון $\sqrt{3}+1$ הוא מקסימום כי $S''(1+\sqrt{3})=-3\sqrt{3}<0$.

הפתרון $1-\sqrt{3}$ מתאים למשולש הסימטרי כאשר K,L משמאל ל-M. אורך הבסיס יהיה $x-1$, הסימנים יתהפכו ונקבל שטח חיובי ומקסימלי.

פתרון אחר משתמשים במונח "קודקוד הפרבולה". לא נתקלתי בו בספרי לימוד או בבחינות אחרות. עבור פרבולה ax^2+bx+c ערך ה-x של הקודקוד הוא $\frac{-b}{2a}$. אין צורך לזכור את הנוסחה כי ניתן לשחזור אותה על ידי חישוב הנגזרת:
$$\begin{aligned}f(x) &= ax^2+bx+c\\ f'(x) &= 2ax+b=0\\ x &= \frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2\cdot -1}=1\,.\end{aligned}$$

8.6 חורף תשע"ז



נתונה גזרת עיגול BAC שהיא $\frac{1}{6}$ מעיגול שרדיוסו R ומרכזו A.
מנקודה כלשהי P, הנמצאת על הקשת BC,
הורידו אנך ל־ AC החותך את הרדיוס AC בנקודה L
(ראה ציור).
השטח האפור שבציור הוא השטח הכלוא בין הקשת BC
ובין הרדיוסים AB ו־ AP, והקטעים LP ו־ LC.
נתון שהשטח האפור המינימלי הוא $24\pi - 36$.

א. (1) מצא את הזווית PAC שעבורה השטח האפור שמתקבל הוא מינימלי.

(2) מצא את R.

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש APL? נמק.

סעיף א

(1) במקום לחשב את השטח האפור (משימה שנראית די קשה), נחשב את שטחו כהפרש בין השטח של גזרת המעגל BAC לבין השטח של המשולש $\triangle APL$.

שטח הגזרה הוא שישית משטח המעגל כולו $\frac{1}{6} \cdot \pi R^2$.

שטח המשולש הוא מחצית המכפלת הבסיס AL והגובה PL, אבל ניתן להביע אותם באמצעות הרדיוס $AP = R$ והזווית $\alpha = \angle PAC$:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{AL}{R}\\ \sin\alpha &= \frac{PL}{R}\\ S_{\triangle APL} &= \frac{1}{2}\cdot R\cos\alpha\cdot R\sin\alpha\,.\end{aligned}$$

השטח האפור הוא:

$$S_{\text{אפור}} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \cos\alpha\sin\alpha\right)$$

בלי הקבוע $\frac{R^2}{2}$ הנגזרת הראשונה היא:

$$-((-\sin\alpha)\cdot\sin\alpha + \cos\alpha\cdot\cos\alpha) = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha\,.$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $\cos\alpha = \pm\sin\alpha$. בגזרה $0 < \alpha < \frac{1}{6}\cdot 2\pi$, הפתרון היחיד הוא $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

(2) הנגזרת השנייה היא $4\sin\alpha\cos\alpha$ שהיא חיובית בגזרה, ולכן נקודות הקיצון היא מינימום.

נשווה את החישוב שקיבלנו עם השטח הנתון:

$$\begin{aligned}
\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}\right) &= 24\pi-36=12(2\pi-3)\\
\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= 12(2\pi-3)\\
\frac{R^2}{2}\cdot\frac{1}{6}(2\pi-3) &= 12(2\pi-3)\\
R &= 12\,.
\end{aligned}$$

סעיף ב

השטח המקסימלי של $\triangle APL$ הוא שטח הגזרה פחות השטח המינימלי של השטח האפור:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle APL} &= \frac{\pi R^2}{6}-(24\pi-36)\\
&= 24\pi-(24\pi-36)=36\,.
\end{aligned}$$

8.7 קיץ תשע"ו מועד ב

במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle ABC = 90^{o}$) אורך היתר הוא k ס"מ (k הוא פרמטר).

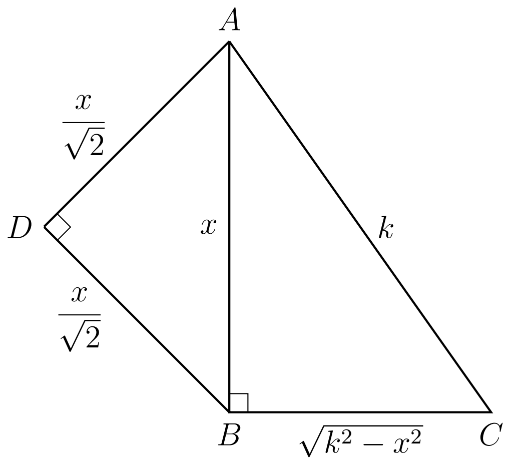
הניצב AB הוא גם יתר במשולש ADB, שהוא שווה שוקיים וישר זווית ($\sphericalangle ADB = 90^{o}$).

א. סמן $AB = x$ והבע את BC באמצעות x ו־ k.

ב. נתון כי הערך המקסימלי של המכפלה $BC \cdot AD^2$ הוא $3\sqrt{3}$.

מצא את שטח המשולש ADB (ערך מספרי), כאשר המכפלה $BC \cdot AD^2$ היא מקסימלית.

ביזבזתי הרבה זמן על השאלה כי בהעדר תרשים שמתי את הנקודה D על היתר AC!



סעיף א

הביטויים עבור BC, AD, BD נובעים ממשפט פתגורס ומהנתון ש-$\triangle ADB$ שווה-שוקיים.

סעיף ב

$$\begin{aligned}
\left(BC \cdot AD^2\right)' &= \left(\sqrt{k^2-x^2} \cdot \frac{x^2}{2}\right)' \\
&= \frac{-2x}{2\sqrt{k^2-x^2}} \cdot \frac{x^2}{2} + \sqrt{k^2-x^2} \cdot x \\
&= \frac{-x^3}{2\sqrt{k^2-x^2}} + \frac{2(k^2-x^2)x}{2\sqrt{k^2-x^2}} \\
&= \frac{2k^2x-3x^3}{2\sqrt{k^2-x^2}} .
\end{aligned}$$

נניח כמובן שהמשולש לא מנוון כך ש-$k \neq x$. הנגזרת מתאפסת כאשר:

$$k = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \qquad x = \sqrt{\frac{2}{3}}k\,.$$

סימן הנגזרת השנייה שווה לסימן הנגזרת של המונה:

$$(2k^2 - 3x^2)' = -6x < 0\,,$$

נקודת הקיצון היא מקסימלית.

נחשב $BC \cdot AD^2 = 3\sqrt{3}$ כדי לקבל ערך מספרי עבור k. נציב $x = \sqrt{\frac{2}{3}}k$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{k^2 - x^2} \cdot \frac{x^2}{2} &= \sqrt{k^2 - \frac{2}{3}k^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}k^2 \\
&= k^3\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} = 3\sqrt{3} \\
k^3 &= 27 \\
k &= 3\,.
\end{aligned}$$

מכאן ש:

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}k = \sqrt{6}\,.$$

השטח המקסימלי של $\triangle ADB$ הוא:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x^2}{4} = \frac{(\sqrt{6})^2}{4} = \frac{3}{2}\,.$$

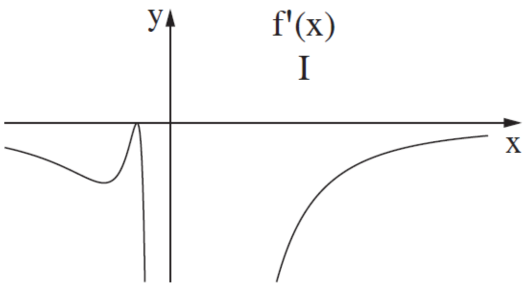
8.8 קיץ תשע"ו מועד א

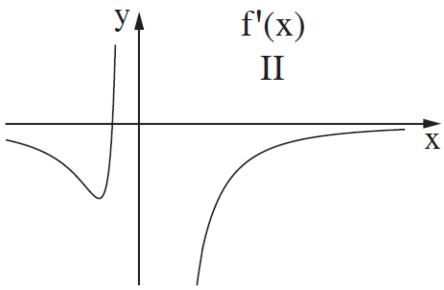
נתונה הפונקציה $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$, $x \neq 0$. n הוא מספר טבעי גדול מ־ 1 .

א. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ב. הראה כי עבור n אי־זוגי $f'(x) \leq 0$ לכל $x \neq 0$.

לפניך שני גרפים, I ו־ II . (בגרפים מוצגות כל נקודות הקיצון.)





אחד הגרפים מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור n זוגי,

והגרף האחר מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור n אי־זוגי.

היעזר בגרפים I ו־ II , וענה על הסעיפים ג , ד , ו־ ה.

ג. עבור n אי־זוגי:

(1) מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. עבור n זוגי:

(1) מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונות הפונקציות: $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^3$, $h(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$.

מהו הסימן של המכפלה $g''(x) \cdot h''(x)$ עבור $0 < x$? נמק.

סעיף א

$f(x) \xrightarrow[+\infty]{} 1$ ויש אסימפטוטה אופקית ב-$y = 1$. עבור $x \to -\infty$, עדיין יש אסימפטוטה אופקית ב-$y = 0$, רק $f(x)$ שואפת ל-0 מעל לציר ה-x עבור n זוגית, ומתחת לציר עבור n אי-זוגי.

הפונקציה לא מוגדרת עבור $x = 0$ ולכן $x = 0$ היא אסימפטוטה אנכית.

סעיף ב

$$f'(x) = \left(\left(1 + x^{-1}\right)^n\right)' = n\left(1 + x^{-1}\right)^{n-1} \cdot -x^{-2}\,.$$

נתון ש-n חיובית. אם n אי-זוגית, $n - 1$ זוגית, ו-$(1 + x^{-1})^{n-1}$ חיובית או אפס. כמובן ש-x^{-2} חיובית)לא אפס כי $x \neq 0$(. לכן סימן המינוס לפני x^{-2} גורם לכל הביטוי להיות שלילי או אפס.

מכאן שגרף I מתאים ל-n אי-זוגית וגרף II ל-n זוגית.

סעיף ג

(1) בנקודת קיצון של $f(x)$ הנגזרת הראשונה $f'(x)$ **חוצה** את ציר ה-x, לכן אין נקודות קיצון.

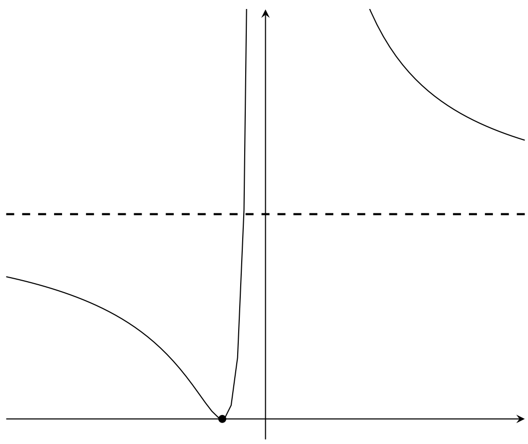
(2) בנקודת פיתול הנגזרת השנייה מתאפסת. זה קורה פעם אחת בנקודת המינימום של $f'(x)$ ופעם אחת כאשר ל-$f'(x)$ יש נקודת מקסימום. לכן יש שתי נקודות פיתול.

סעיף ד

(1) בנקודת קיצון של $f(x)$ הנגזרת הראשונה $f'(x)$ **חוצה** את ציר ה-x, לכן יש נקודת קיצון אחת.

(2) נקודת פיתול הנגזרת השנייה מתאפסת, כלומר, יש נקודת קיצון לנגזרת הראשונה, לכן יש נקודת פיתול אחת.

(3) לפי גרף II, עבור $x < 0$, השיפוע קרוב לאפס באסימפטוטה האופקית. השיפוע יורד משמאל עד לנקודת פיתול שם השיפוע עולה עד לנקודת מינימום של $f(x)$ ואז ממשיך לעלות. עבור $x > 0$ השיפוע תמיד עולה מערך שלילי נמוך מאוד ועד קרוב לאפס בכיוון האסימפטוטה האופקית.



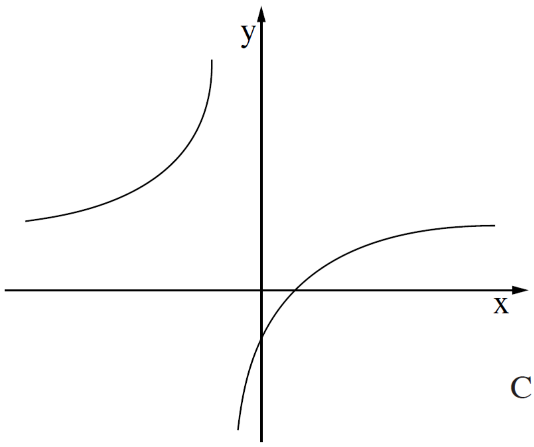
סעיף ה

רואים בשני הגרפים שעבור $x > 0$, השיפוע, הנגזרת הראשונה, עולה, כך שהנגזרת השנייה חיובית. מכפלה של שני ערכים חיוביים היא חיובית.

8.9 חורף תשע"ו

נתונה הפונקציה $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

(ראה ציור).



א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה,
ואת האסימפטוטות של הפונקציה
המקבילות לצירים.

ב. העבירו ישר המקביל לציר ה־ x .
הישר חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה C
ואת הישר $y = 2x$ בנקודה D .
נסמן את שיעור ה־ x של הנקודה C ב־ t .
מצא מה צריך להיות הערך של t , כדי שהאורך של הקטע CD יהיה מינימלי:

(1) עבור $t > -1$.

(2) עבור $t < -1$.

ג. מצא את האורך המינימלי של הקטע CD עבור כל $t \neq -1$.

סעיף א

הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס: $x = -1$.

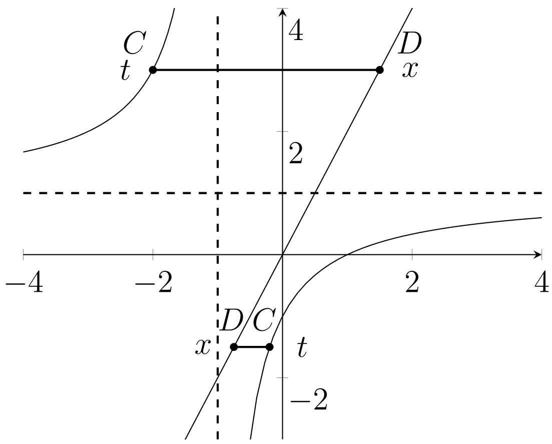
ב-$x = -1$ יש אסימפטוטה אנכית כי המכנה מתאפס והמונה לא מתאפס.

$y = 1$ היא אסימפטוטה אופקית כי:

$$\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow[\pm\infty]{} 1 \,.$$

סעיף ב

בתרשים סימנו את ערכי ה-x ליד שמות הנקודות:



יש כאן מלכודת שניתן להימנע ממנו על ידי הכנת תרשים מדוייק. אמנם t מוגדר כערך ה-x של $f(x)$ אבל **האורך** בין הפונקציה והקו $y = 2x$ תלוי במיקום היחסי בין הקו וגרף הפונקציה. ניתן גם לראות בחלוקה לשני תת-סעיפים רמז שיש לטפל בשני המקרים בנפרד.

(1) כאשר $t > -1$ אורך הקטע DC (נסמן a) הוא $a = -x - (-t) = t - x$. (מדובר במקרה ש-t, x שליליים, אבל הנוסחה מתאימה גם אם קטע הקו במקום אחר.) ערכי ה-y של שתי הנקודות שווים, ולכן ניתן להציב בנוסחה עבור a: $x = \frac{y}{2} = \frac{f(t)}{2}$:

$$\begin{aligned} a &= t - x = t - \frac{t-1}{2(t+1)} \\ &= \frac{2t^2+t+1}{2(t+1)} \\ a' &= \frac{(4t+1)\cdot 2(t+1) - (2t^2+t+1)(2)}{4(t+1)^2} \\ &= \frac{4t^2+8t}{4(t+1)^2} = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2} = 0\,. \end{aligned}$$

ערכי t של נקודות הקיצון נמצאות במקומות שהנגזרת הראשונה מתאפסת: $t = 0, t = -2$. המכנה של הנגזרת הראשונה תמיד חיובי ולכן סוג נקודות הקיצון נקבל מהסימן של הנגזרת של המונה: $2t + 2$. כאשר $t = 0$, הנגזרת חיובית והנקודה היא מינימים. כאשר $t = -2$ הנגזרת שלילית והנקודה היא מקסימום. לכן האורך המינימלי הוא:

$$t - x = 0 - \frac{0-1}{2(0+1)} = \frac{1}{2}\,.$$

(2) כאשר $t < -1$ אורך הקטע a הוא $a = x + (-t) = x - t$.

$$\begin{aligned} a &= x - t = \frac{t-1}{2(t+1)} - t \\ &= \frac{-(2t^2+t+1)}{2(t+1)} \\ a' &= \frac{-(4t+1)\cdot 2(t+1) + (2t^2+t+1)(2)}{4(t+1)^2} \\ &= \frac{-4t^2-8t}{4(t+1)^2} = \frac{-t(t+2)}{(t+1)^2} = 0\,. \end{aligned}$$

ערכי t של נקודות הקיצון נמצאות במקומות שהנגזרת הראשונה מתאפסת, שוב ב-$t = 0, t = -2$. המכנה של הנגזרת הראשונה תמיד חיובי ולכן סוג נקודות הקיצון מתקבל מהסימן של הנגזרת של המונה: $-(2t + 2)$. כאשר $t = 0$, הנגזרת שלילית והנקודה היא מקסימום. כאשר $t = -2$ הנגזרת חיובית והנקודה היא מינימום. לכן, האורך המינימלי הוא:

$$x - t = -\frac{-2-1}{2(-2+1)} - (-2) = \frac{7}{2}\,.$$

סעיף ג

$\frac{1}{2} < \frac{7}{2}$ לכן האורך המינימלי עבור $t \neq -1$ הוא $\frac{1}{2}$ כאשר $t = 0$.

8.10 קיץ תשע"ה מועד ב

נתונה הפונקציה $f(x)$, ונתון כי כל אחת מהפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו־ $f''(x)$ מוגדרת בתחום $x > 0$.

נתון גם: הגרף של $f'(x)$ חותך את ציר ה־ x בנקודה שבה $x = 1$,

$f'(x)$ עולה בתחום $0 < x < 3$, ויורדת בתחום $x > 3$,

האסימפטוטות של $f'(x)$ הן $x = 0$ ו־ $y = 0$.

א. סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתון גם כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אחת שמשוואתה $x = 0$.

ב. מצא את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ג. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. הפונקציה $f(x)$ מקבלת את כל הערכים בטווח $y \geq 4$ ורק אותם.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

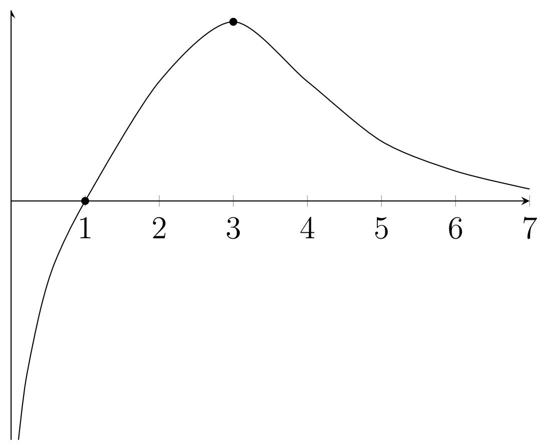
ציין על ציר ה־ x ועל ציר ה־ y את הערכים שמצאת.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = -[f(x)]^3$.

מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

סעיף א

(בשאלה אין נוסחה לפנוקציה, גם לא לאחר פתרון השאלה, ולכן התרשימים הם ממש "סקיצות".)



סעיף ב

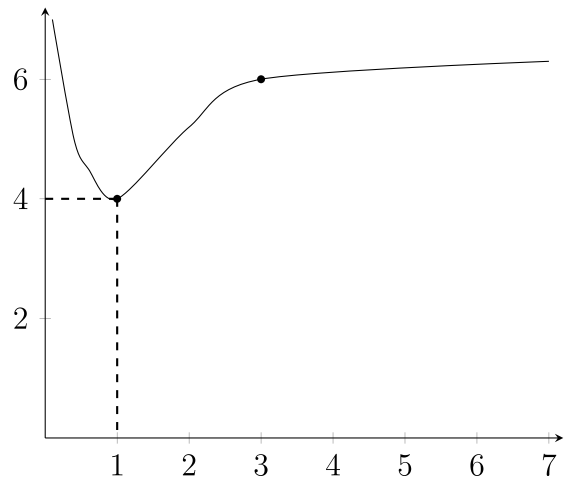
קיימת נקודת קיצון ב-$x = 1$ כי הנגזרת הראשונה מתאפסת ומחליפה סימן. הנקודה היא מינימום כי הנגזרת עולה (הנגזרת השנייה חיובית).

סעיף ג

הנגזרת השנייה היא השיפוע של הנגזרת הראשונה, שהוא חיובי עבור $0 < x < 3$ ושלילי עבור $x > 3$. לכן הפונקציה קעורה כלפי מעלה ב-$0 < x < 3$ וקעורה כלפי מטה ב-$x > 3$. ב-$x = 3$ הנגזרת השנייה מתאפסת ללא שינוי בסימן הנגזרת הראשונה,ולכן היא נקודת פיתול.

סעיף ד

אם הפונקציה מקבלת את כל ערכים $y \geq 4$, בקודת המינימום $x = 1$, $y = 4$. נשתמש בנתון שלפונקציה יש אסימפטוטה ב-$x = 0$, וכיווני הקעירות מסעיף ג כדי להשלים את צורת הגרף:



סעיף ה

$f(x)$ חיובית בכל תחום ההגדרה, לכן גם $f^3(x)$ חיובית. סימן המינוס הופך את הסימן של ערך הפונקציה. $f(x)$ יורד ב-$0 < x < 1$ ולכן $g(x)$ עולה בתחום זה. $f(x)$ עולה ב-$x > 1$ ולכן $g(x)$ יורד בתחום זה.

אפשר להשתמש בנגזרת של $g(x)$:

$$g'(x) = -3f^2(x)f'(x)\,.$$

$f^2(x)$ תמיד חיובי, ולכן לאור המינוס בתחילת הביטוי, תחומי העלייה והירדה הם התחומים שערכי $f'(x)$ שליליים או חיוביים בהתאמה. $f'(x)$ חותך את ציר ה-x משליליים לחיוביים ב-$x = 1$, ולכן $g(x)$ עולה ב-$0 < x < 1$ ויורד ב-$x > 1$.

8.11 קיץ תשע"ה מועד א

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a^2x+a^2$, a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

א. הראה כי המקסימום של הפונקציה מתקבל בנקודה שבה $y>0$.

ב. מצא עבור איזה ערך/איזה תחום ערכים של a נקודת המינימום של הפונקציה:

(1) נמצאת על ציר ה־ x .

(2) נמצאת מעל ציר ה־ x .

(3) נמצאת מתחת לציר ה־ x .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור כל אחד משלושת המקרים שבסעיף ב.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה $\frac{1}{3}x^3-x+1=0$? נמק.

סעיף א

נגזרת ראשונה:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= x^2-a^2=0\\
x &= \pm a\\
f''(x) &= 2x\\
f''(+a) &= 2a>0\\
f''(-a) &= -2a<0\,.
\end{aligned}$$

בשתי השורות האחרונות השתמשנו בנתון $a>0$.

המקסימום הוא ב-$x=-a$ והמינימום הוא ב-$x=a$.

סעיף ב

המינימום הוא ב-$x=a$.

$$f(a)=-\frac{2}{3}a^3+a^2=a^2\left(-\frac{2}{3}a+1\right)\,.$$

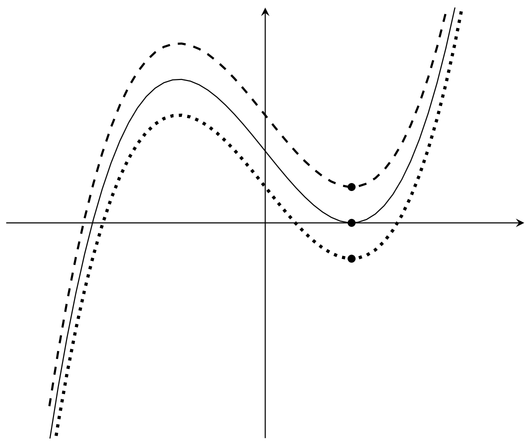
a^2 חיובי ולא משפיע על סימן של נקודות המינימום. הפתרון מתקבל על ידי השוואת $-\frac{2}{3}a+1$ לאפס:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{3}{2} && \text{על ציר ה-x}\\
a &< \frac{3}{2} && \text{מעל ציר ה-x}\\
a &> \frac{3}{2} && \text{מתחת לציר ה-x}\,.
\end{aligned}$$

סעיף ג

נקודות המינימום ב-$x = a$ מסומנות.

קו רציף: על הציר. קו מקווקוו: מעל לציר. קו מנוקד: מתחת לציר.



סעיף ד

משוואה זו היא המשוואה הנתונה בשאלה כאשר $a = 1$. אבל $\frac{3}{2} < 1$. לפי סעיף ב המינימום נמצא מעל לציר ה-x. יש רק פתרון אחד כאשר הפונקציה חותכת את ציר ה-x משמאל למקסימום.

8.12 חורף תשע"ה

נתון כי הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מקיימות $\int_0^3 \frac{f'(x)}{2\cdot\sqrt{f(x)}}dx = 3$.

נתון גם: $f'(x) = kx + 2$, $f(0) = 1$. k הוא פרמטר.

א. מצא את הערך המספרי של $f(3)$, ומצא את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

(1) הראה כי $g(x) = |x+1|$.

(2) סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

סעיף א

לפי הנוסחה לנגזרת של חזקה של פונקציה, $(f(x)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}f(x)^{-\frac{1}{2}}f'(x)$ שהיא הפונקציה המופיעה באינטגרל. נחשב את האינטגרל כדי לקבל $f(3)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,dx &= \left.\sqrt{f(x)}\right|_0^3 \\
&= \sqrt{f(3)} - \sqrt{f(0)} = \sqrt{f(3)} - 1 = 3 \\
f(3) &= 16\,.
\end{aligned}$$

מציאת הפונקציה $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int (kx+2)\,dx = \frac{1}{2}kx^2 + 2x + c \\
f(0) &= c = 1 \\
f(3) &= \frac{9}{2}k + 7 = 16 \\
k &= 2 \\
f(x) &= x^2 + 2x + 1\,.
\end{aligned}$$

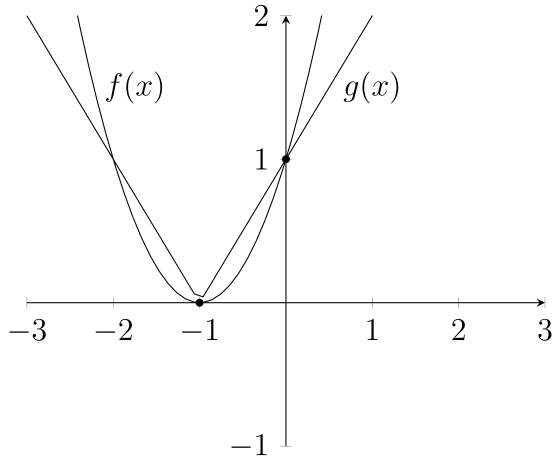
סעיף ב

$$g(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|\,.$$

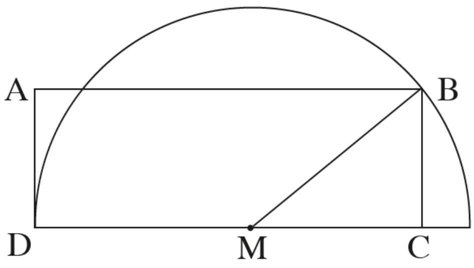
אם $x+1 \geq 0$, $g(x) = x+1$, ו-אם $x+1 < 0$, $g(x) = -(x+1)$. ביחד $g(x) = |x+1|$.

סעיף ג

הגרף של $f(x)$ הוא פרבולה קעורה כלפי מעלה עם נקודות מינימום ב-$(-1,0)$ ונקודת חיתוך עם ציר ה-y ב-$(0,1)$. הגרף של $g(x)$ מורכב משני קווים ישרים עם ערכים חיוביים אבל עם שיפועים עם סימנים הפוכים. נקודת המינימום היא גם כן $(-1,0)$.



8.13 קיץ תשע״ד מועד ב



נתון מלבן ABCD .

הצלע DC מונחת על הקוטר של חצי מעגל

שהרדיוס שלו R ומרכזו M כך ש־ $DC \geq R$.

הצלע AD משיקה לחצי המעגל בנקודה D ,

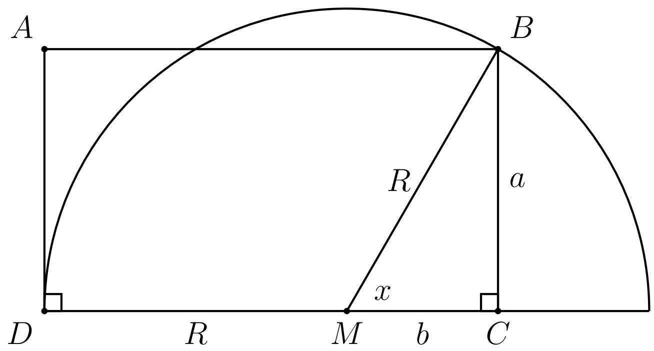
והקדקוד B נמצא על המעגל (ראה ציור).

נסמן: $\measuredangle BMC = x$

$S(x)$ — שטח המלבן ABCD

א. מצא מה צריך להיות x , כדי ששטח המלבן $S(x)$ יהיה מקסימלי.

ב. הבע באמצעות R את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $S(x)$ ועל ידי ציר ה־ x בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.



סעיף א

עם הסימונים בתרשים:

$$S(x) = a(R+b) = R\sin x(R + R\cos x) = R^2 \sin x(1+\cos x)\,.$$

נחשב את הנגזרת:

$$\begin{aligned} S'(x) &= R^2(\cos x(1+\cos x) + \sin x \cdot -\sin x) \\ &= R^2(\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= R^2(\cos x + \cos^2 x - (1-\cos^2 x)) \\ &= R^2(2\cos^2 x + \cos x - 1) \\ &= R^2(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0\,. \end{aligned}$$

בהנחה שהמשולש $\triangle BMC$ אינו מנוון, $0 < x < 180$. ניתן לפסול את הפתרון $\cos x = -1$, $x = 180$ והפתרון היחיד הוא $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = 60$.

הנגזרת השנייה היא:

$$\begin{aligned}
(2\cos^2 x + \cos x - 1)' &= -\sin x(4\cos x + 1) \\
&= -\sin 60(4\cos 60 + 1) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (4 \cdot \frac{1}{2} + 1) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0\,.
\end{aligned}$$

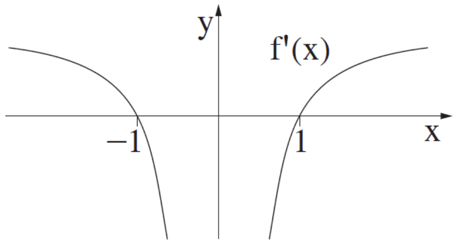
נקודת הקיצון היא מקסימום.

סעיף ב

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin x(1 + \cos x)dx &= R^2 \cdot -\frac{1}{2}(1 + \cos x)^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{R^2}{2}(1^2 - 2^2) = \frac{3R^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

8.14 קיץ תשע"ד מועד א

בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



האסימפטוטה היחידה של הפונקציה $f(x)$ היא $x = 0$.

נתון כי יש פתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = 2$

ופתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = -2$.

א. רק על פי נתוני השאלה,

סרטט סקיצה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ב. נתון גם כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא: $f'(x) = \frac{ax^2 - b}{ax^2}$,

a ו־ b הם פרמטרים שונים מ־ 0.

מצא את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).

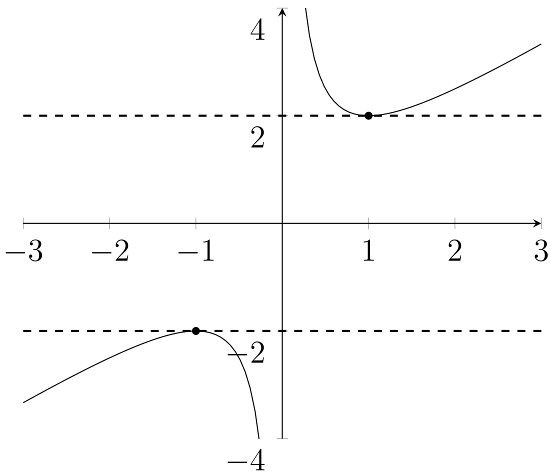
סעיף א

כאשר x עולה מאפס ל-∞, הנגזרת עולה בצורה תלולה בערכים השליליים ובצורה מתונה בערכים החיוביים, ולכן הפונקציה יורדת בצורה תלולה ואח"כ עולה בצורה מתונה.

כאשר x עולה מ-$-\infty$ לאפס, הנגזרת יורדת בצורה מתונה בערכים החיוביים ובצורה תלולה בערכים שליליים, ולכן הפונקציה עולה בצורה מתונה ואח"כ יורדת בצורה תלולה.

לפי התרשים הנתון ל-$f'(x)$, בנקודה $x = -1$ יש נקודה קיצון שהיא מקסימום כי השיפוע יורד (הנגזרת השנייה שלילית). בנקודה $x = 1$ יש נקודת קיצון שהיא מינימום כי השיפוע עולה (הנגזרת השנייה חיובית).

לפי הנתון שיש לפונקציה פתרונות יחידים ל-$f(x) = \pm 2$, הגרף של פונקציה חייב לגעת בקווים $y = \pm 2$ אבל לא לחותך אותם. לפי ההסברים הקודמים, $(-1, -2)$ היא מינימום ו-$(1, 2)$ היא מינימים, ולכן אנו יודעים שהגרף מעל ל-$y = 2$ ומתחת ל-$y = -2$.



סעיף ב

לפי הגרף $f'(1) = f'(-1) = 0$ ונתון $a \neq 0$, ולכן $\frac{a-b}{a} = 0$, ו-$a = b$.

שוב בגלל ש-$a \neq 0$ אפשר לצמצם את הפרמטרים:

$$f'(x) = \frac{a(x^2-1)}{ax^2} = \frac{x^2-1}{x^2}\,.$$

נחשב את האיטרגל של הנגזרת כדי למצוא את הפונקציה:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = x + \frac{1}{x} + c\,.$$

נתון ערכי הפונקציה $f(\pm 1) = \pm 2$, ולכן:

$$1 + \frac{1}{1} + c = 2$$

ו-$c = 0$.

הפונקציה היא $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

8.15 חורף תשע"ד

בטבלה שלפניך מוצגים ערכים מסוימים של הפונקציה $f(x)$ בקטע $1 < x < 2$.

x	1.1	1.2	1.3	1.4
f(x)	1.19	1.28	1.36	1.43

הפונקציה $f(x)$ חיובית בקטע הנתון, ואין לה נקודות קיצון פנימיות בקטע זה.

נתון כי פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית בקטע הנתון.

א. קבע מהו הסימן של $f'(1.2)$. נמק.

ב. קבע אם הטענה $f'(1.1) < f'(1.2) < f'(1.3)$ נכונה. נמק.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ בקטע $1 < x < 2$.

ג. בקטע הנתון מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

ד. הראה כי בתחום $1.1 \le x \le 1.3$ אין פתרון למשוואה $g'(x) = f'(x)$.

בבחינה זו היו שלוש שאלות בפרק השני לכן מספר השאלה הוא 9 ולא 8.

סעיף א

לפי הטבלה הפונקציה עולה מ-$x = 1.1$ דרך $x = 1.2$ ל-$x = 1.3$. נתון שאין נקודות קיצון פנימיות ולכן הנגזרת הראשונה חיובית.

סעיף ב

הנגזרת השנייה שלילית כך שהנגזרת הראשונה יורדת בתחום ולכן הטענה נכונה.

סעיף ג

$$g'(x) = \frac{1}{2}f(x)^{-\frac{1}{2}}f'(x)\,.$$

מהטבלה $f(x)$ חיובית בתחום ומסעיף א $f'(x)$ חיובית בתחום, ולכן $g'(x)$ חיובי, ו-$g(x)$ עולה בתחום.

סעיף ד

$$\begin{aligned}
g'(x) &= f'(x) \\
\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x) &= f'(x) \\
f(x) &= \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

מצאנו שהנגזרת הראשונה חיובית כך שאפשר לצמצם אותה. לפי הטבלה, $f(x)$ איננה פונקציה קבועה בכל התחום, לכן לא ייתכן ש-$g'(x) = f'(x)$.

המלצות: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

- אי-אפשר להכין טבלה של עליות וירידות עד שלא מחשבים את תחום ההגדרה **וגם** כל נקודות הקיצון של הפנוקציה, כי רק ביניהם אפשר לסמוך על זה שאין שינוי בכיוון הפונקציה.

- אני אוהב להשתמש בתנועות ידיים כדי "לראות שיפועים" ולקבוע אם פונקציה עולה או יורדת, וכן אם נקודות קיצון היא מקסימום או מינימום. אני מזיז כף יד שטוחה לאורך הפונקציה מערכים שליליים לחיוביים על ציר ה-x. אם כיוון היד למטה הפונקציה יורדת, ואם הכיוון למעלה הפונקציה עולה. אם היד עוברת מכיוון למטה לכיוון למעלה, השיפוע (הנגזרת) עולה, כך שהנגזרת השנייה היא חיובית ונקודת הקיצון היא מינימום. שינוי הפוך בכיוון היד מראה שקיים מקסימום.

- אני מציע להתרחק מהמחשבון עד כמה שאפשר ולחשב עם סימנים אלגבריים. הסיבה היא שקשה למצוא שגיאות הנגרמות מטעויות בקלדה על המחשבון, אבל אפשר לעבור שוב ושוב על חישוב אלגבראי כדי לוודא את נכונותו.

- אל תקצרו בחישובים. לעתים קרובות שגיתי כי השמטתי סימן מינוס. לוקח מעט זמן לרשום שורה נוספת לעומת הזמן הדרוש לחפש שגיאה בחישוב מקוצר.

- אני מעדיף לסווג נקודות קיצון על ידי בדיקת הסימן של הנגזרת השנייה ולא על ידי חישוב טבלת עליות וירידות.

- כלום יודעים שאם הסימן של המכנה של הנגזרת הראשונה חיובי, הסימן של הנגזרת השנייה זהה לסימן של הנגזרת של המונה של הנגזרת הראשונה. חשוב לא לטעון שהנגזרת השנייה **שווה** לנגזרת של המונה של הנגזרת הראשונה![1] עם זאת, יש נוסחה לנגזרת השנייה התקפה **רק עבור נקודות בהן הנגזרת הראשונה מתאפסת והן חשודות כנקודות הקיצון.**[2] עבור:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

ו-a כך ש-$f'(a) = 0$:

$$f''(a) = \frac{g'(a)}{h(a)} \,.$$

ההוכחה פשוטה: חישבו את הנגזרת. נביא דוגמה:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+x-1}{x^2-x+1} \\ f'(x) &= \frac{-2x^2+4x}{(x^2-x+1)^2} \,. \end{aligned}$$

נקודות הקיצון הן:

$$a_1 = (0,-1),\ a_2 = \left(2, \frac{5}{3}\right) \,.$$

[1] ראו יונתן אחיטוב. 'גזירה שנייה מקוצרת' כדרך לאפיון נקודות קיצון. על"ה 20, 2002, עמ' 27–26.

[2] ראו במאמר של אחיטוב וגם "ללמוד וללמד אנליזה", עמ' 323 – 322.

בגלל שהמכנה חיובי, הסימן של הנגזרת השנייה הוא הסימן של:

$$\left(-2x^2+4x\right)'=-4x+4\,,$$

למרות שזו לא הנגזרת השנייה. עבור נקודות הקיצון, $-4\cdot 0+4=4>0$ ו-a_1 היא מינימום, ו-$-4\cdot 2+4=-4<0$ ו-a_2 היא מקסימום.

עבור הנקודות $a=a_1, a=a_2$ אפשר לחשב את הנגזרת השנייה ולבדוק ש:

$$f''(a)=\frac{-4a+4}{a^2-a+1}\,.$$

- שימו לב להגדרה של נקודת פיתול: נקודה בה משתנה הקעירות של הפונקציה. בנקודת פיתול, הנגזרת השנייה מתאפסת או לא מוגדרת, אבל יש פונקציות שמקיימות אחד מהתנאים הללו בנקודה מסויימת אבל אין שם נקודת פיתול. למשל, הנגזרת שנייה של $f(x)=x^4$ מתאפסת ב-$x=0$ אבל יש שם מינימום ולא נקודת פיתול.[3]

בנקודת פיתול **הנגזרת הראשונה** לא חייב להתאפס. למשל, עבור $f(x)=\sin x$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \cos 0 = 1 \\ f''(0) &= -\sin 0 = 0\,. \end{aligned}$$

- כאשר מופיע שורש בפונקציה הכוונה היא לשורש החיובי. אבל, כאשר לוקחים שורש של x^2 הכוונה היא לערך המוחלט של x. למשל, אם $x=3$, $\sqrt{3^2}=3=x$, אבל אם $x=-3$, $\sqrt{(-3)^2}=3=-x$. זה חשוב כאשר אסימפטוטות של פונקציות עם שורשים:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}}=\frac{\dfrac{x}{|x|}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}\xrightarrow[\pm\infty]{}\pm 1\,.$$

- אם השאלה מבקשת נקודות חיתוך עם הצירים או נקודות קיצון, יש נטייה להסתפק בחישב ערך ה-x, אבל התשובה חייבת להיות קואורדינטות (x,y).

- כאשר מבקשים לחשב אינטגרל ״מפחיד״ של פונקציה, תמיד הפונקציה תהיה נגזרת של פונקציה שאפשר לנחש בקלות. למשל:

$$\int\frac{2\sin x}{\cos^3 x}dx$$

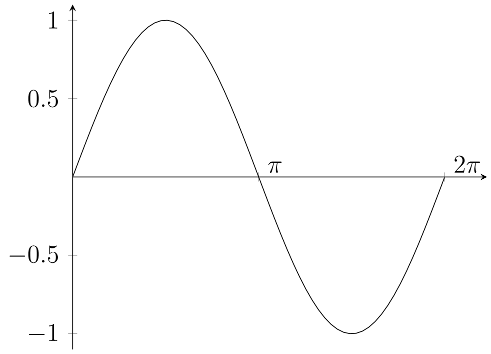
נראה ״מפחיד״ אבל אם נתבונן בו קצת נבין ש:

$$(\cos^{-2}x)=-2\cdot(-\sin x)\cos^{-3}=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\,.$$

לפעמים מבקשים $\int f'(x)dx$ כאשר $f(x)$ נתון, ואז אין מה לחשב!

[3] ״ללמוד וללמד אנליזה״, עמ׳ 227.

• שימו לב להבדל בין שטח לאיטגרל.



אם מבקשים את האיטגרל של סינוס מאפס עד 2π, התשובה היא אפס:

$$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x|_0^{2\pi} = -(1-1) = 0\,.$$

אבל אם מבקשים את השטח התחום על ידי הפונקציה וציר ה-x התשובה היא:

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x\, dx = -\cos x|_0^{\pi} + \cos x|_{\pi}^{2\pi} = -(-1-(1)) + (1-(-1)) = 4\,.$$

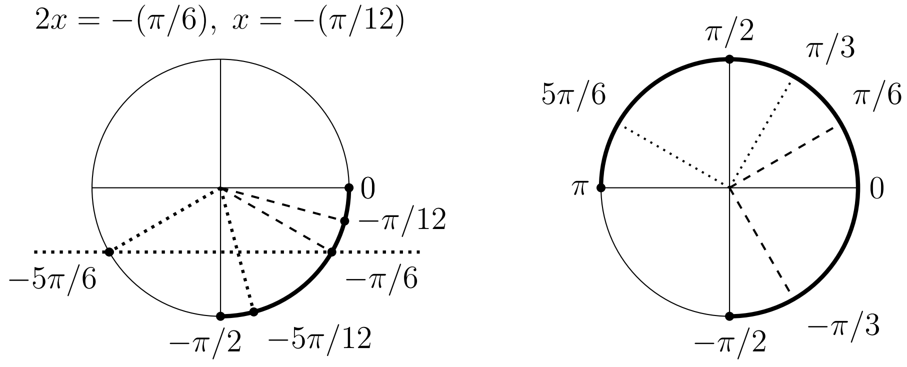
• איטגרל של פונקציה אי-זוגית בתחום סימטרי סביב ציר ה-y הוא אפס, ואינטגרל של פונקציה זוגית בתחום סימטרי הוא פי שניים האינטגרל של התחום החיובי בלבד.

• ראו נספח ג׳ המסביר את החשיבות של מעגל היחידה בחישובים טריגונומטריים.

• בבעיות עם פונקציות טריגונומטריות, בנו תרשים של מעגל היחידה וסמנו עליו את תחום ההגדרה. התרשים יעזור בקביעת סימני הפונקציות ובערכי הפונקציות כאשר מוסיפים או מחסירים כפולות רציונליות של π.

$$\sin 2x = -(1/2)$$
$$2x = -(5\pi/6),\ x = -(5\pi/12)$$
$$2x = -(\pi/6),\ x = -(\pi/12)$$

$$(5\pi/6) - (\pi/2) = (\pi/3)$$
$$(\pi/6) - (\pi/2) = -(\pi/3)$$



• נניח שהתחום הנתון הוא $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, ונניח שמקבלים את התוצאה $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ברור שתשובה אחת היא $2x = \frac{\pi}{3}$ ו-$x = \frac{\pi}{6}$. לא לשכוח את התשובה השנייה: $\sin 2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ו-$x = \frac{\pi}{3}$ בתחום, למרות ש-$2x = \frac{2\pi}{3}$ אינו בתחום.

• בנוסחאון נתון:

$$(x^t)' = tx^{t-1}\,, \qquad \text{(ממשי t)}$$

אולם משתמשים בנוסחה רק עבור t שלם וחיובי. אני מעדיף להשתמש בנוסחה זו עבור **כל** t, כי קל לזכור את הנוסחה והחישובים פשוטים. למשל, מיותר לזכור את הנוסחה הנתונה:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

כי:

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

החיסכון בולט כאשר צריכים לחשב נגזרת רציונלית. כאשר $f(x) = 1, g(x) = x^t$, במקום להשתמש בנוסחה המוסבכת עבור הנגזרת של $\frac{f(x)}{g(x)}$, פשוט יותר לחשב:

$$\left(\frac{1}{x^t}\right)' = (x^{-t})' = -t(x^{-t-1}) = \frac{-t}{x^{t+1}}\,.$$

כאשר במונה יש קבוע ובמכנה יש פונקציה מורכבת עדיין החישוב לא מסובך. למשל:

$$\begin{aligned}\left(\frac{14}{x^2-3x+4}\right)' &= 14\left((x^2-3x+4)^{-1}\right)' \\ &= -14(x^2-3x+4)^{-2}(2x-3) \\ &= \frac{-14(2x-3)}{(x^2-3x+4)^2}\,.\end{aligned}$$

• אם $f(x) = 0$ אז $-f(x) = -0 = 0$. אמנם התוצאה פשוטה אבל היא שימושית כאשר חושבו נקודות איפוס של נגזרת, וצריך למצוא נקודות איפוס של השלילה של הנגזרת, למשל:

$$(g(x) - f(x))' = (-1\cdot(f(x) - g(x))' = -1(f(x) - g(x))'\,,$$

ולכן אם $(f(x_1) - g(x_1))' = 0$, מתקבל מייד $(g(x_1) - f(x_1))' = -1\cdot 0 = 0$.

נספח א׳ אין לסמוך על איורים

הנה הוכחה ״נכונה״ **שכל** משולש שווה שוקיים!

נתון משולש שרירותי ABC, תהי P נקודת החיתוך בין **חוצה הזווית** של $\angle BAC$ לבין **האנך האמצעי** של BC. סימנו ב-D, E, F את נקודות החיתוך של האנכים מ-P לצלעות BC, AB, AC.

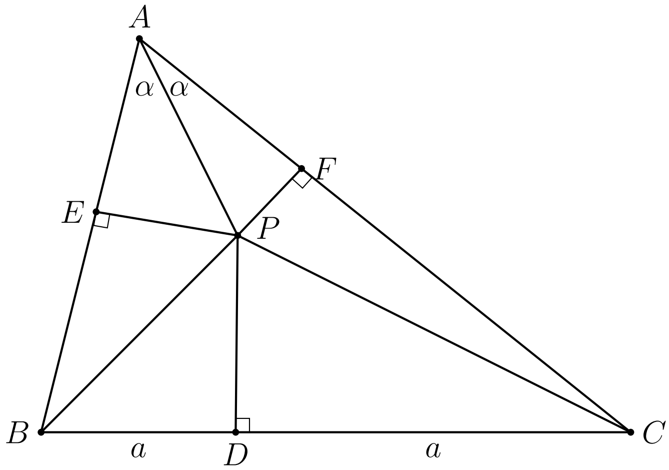
$\triangle APE \cong \triangle APF$ כי הם משולשים ישר זווית עם זוויות שוות α וצלע AP משותף.

$\triangle DPB \cong \triangle DPC$ כי הם משולשים ישר זווית עם צלע משותף PD ו-$BD = DC = a$ כי PD הוא האנך האמצעי ל-BC.

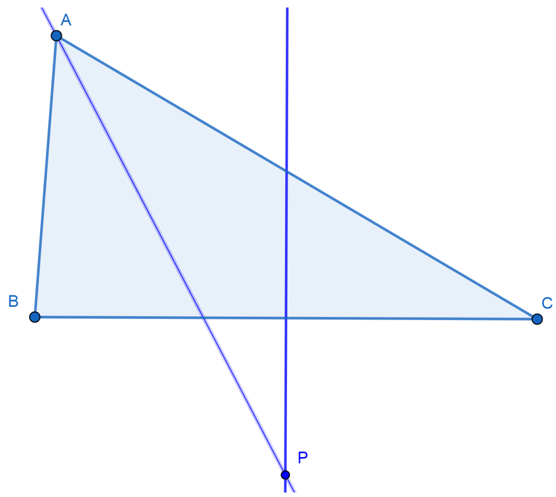
$\triangle EPB \cong \triangle FPC$, כי הם משולשים ישר זווית עם $EP = PF$ לפי החפיפה הראשונה ו-$PB = PC$ לפי החפיפה השנייה.

נחבר את השוויונות ונקבל ש-$\triangle ABC$ שווה שוקיים:

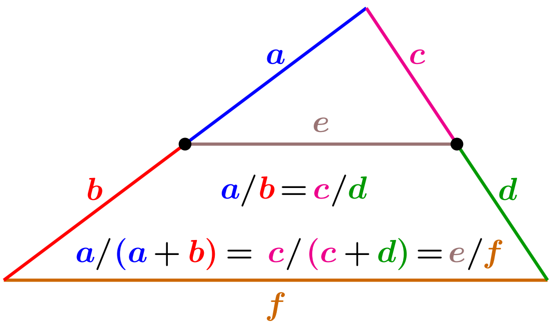
$$AB = AE + EB = AF + FC = AC\,.$$

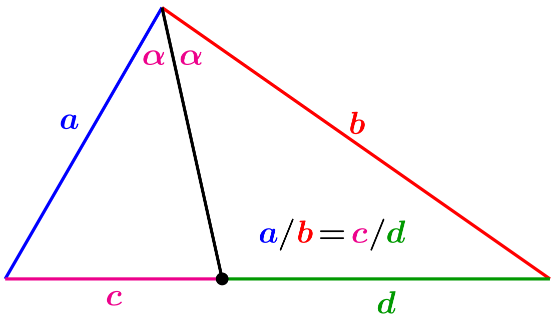


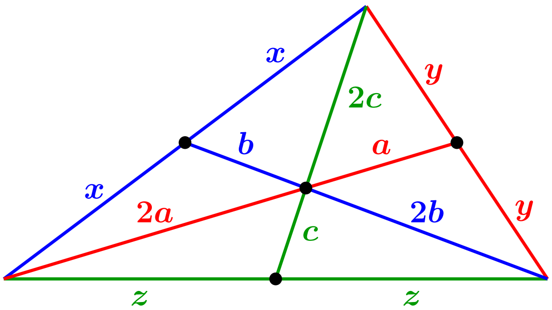
הבעיה בהוכחה היא שהאיור אינו נכון כי הנקודה P נמצאות **מחוץ** למשולש:

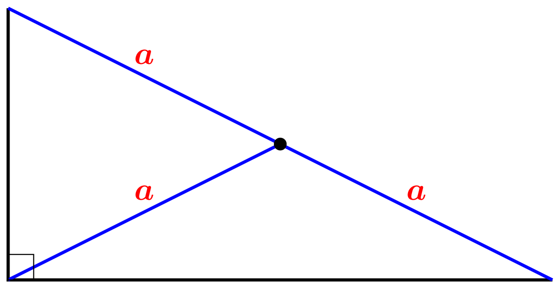


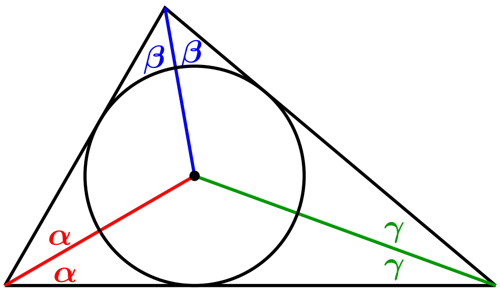
נספח ב׳ ייצוג גרפי של משפטים בגיאומטריה

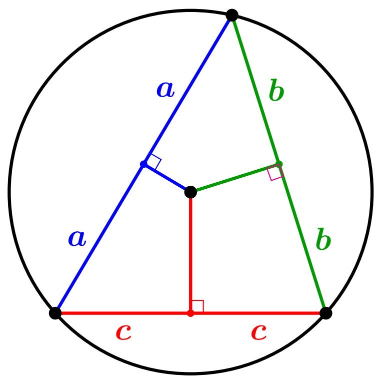


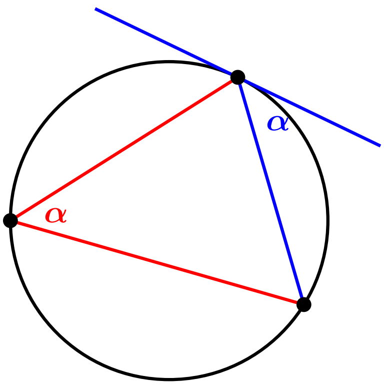


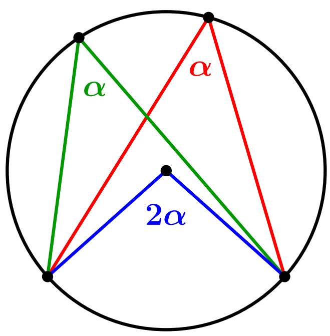


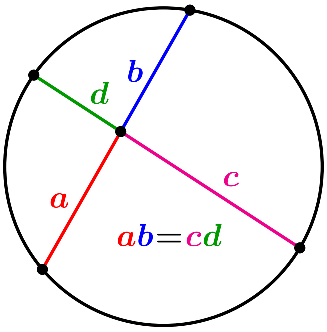


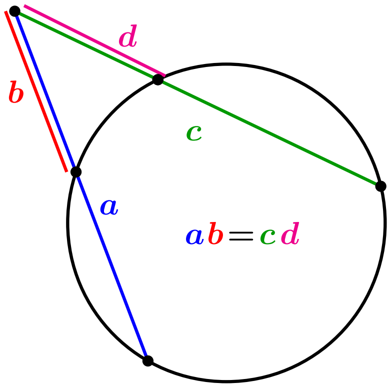


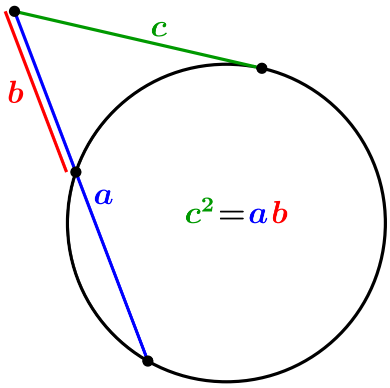


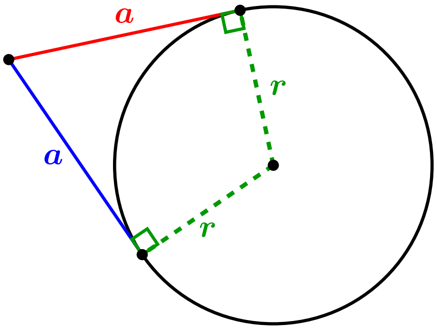


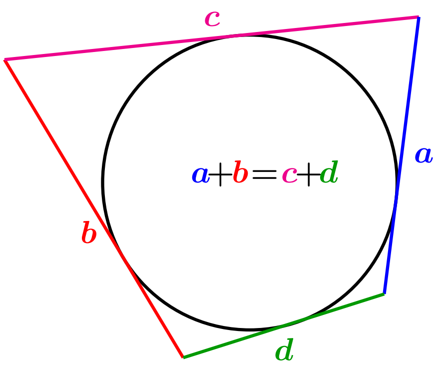


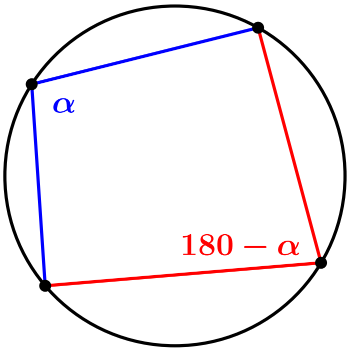

a b c d
$ab=cd$

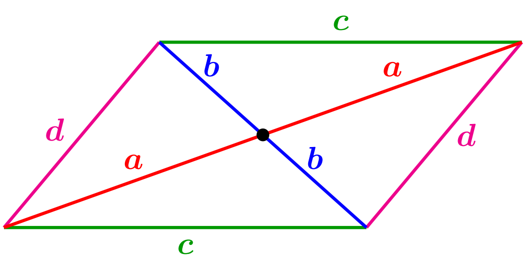

a b c d
$ab=cd$

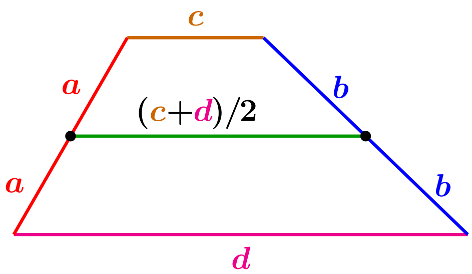

a b c
$c^2=ab$


a a r r


a b c d
$a+b=c+d$


α
$180-\alpha$

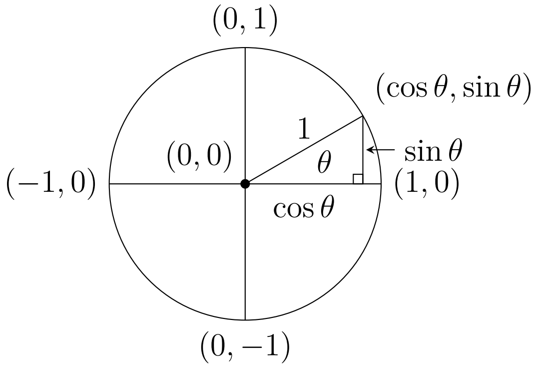

a a b b c c d d


a a b b c d
$(c+d)/2$

נספח ג׳ מעגל היחידה

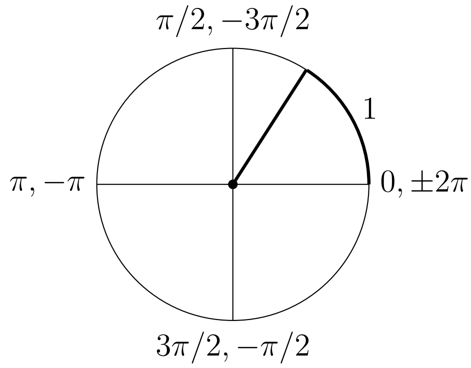
רביעים של מעגל היחידה

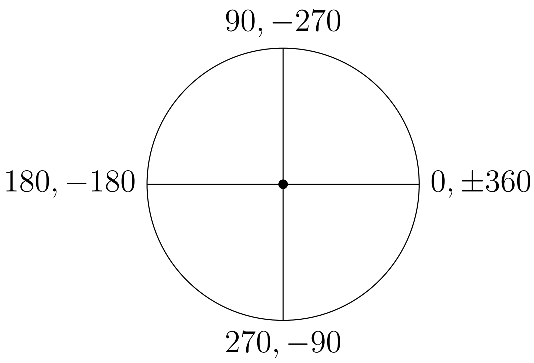
מעגל שהרדיוס שלו 1 נקרא **מעגל היחידה**.



הצירים של מעגל היחידה מחלקים אותו באופן טבעי לארבעה **רביעים**. זוויות נמדדות **במעלות** בין 0° ל-$\pm 360^\circ$, כאשר הערכים חיוביים אם מודדים נגד כיוון השעון, ושליליים עם כיוון השעון.

יחידה אחרת לזווית היא ה-**רדיאן**. רדיאן אחד הוא הזווית הכולאת קשת שאורכו שווה לרדיוס. במעגל היחידה הרדיוס הוא 1 ולכן אורך ההיקף הוא 2π. רדיאן אחד שווה בערך 57.3 מעלות.



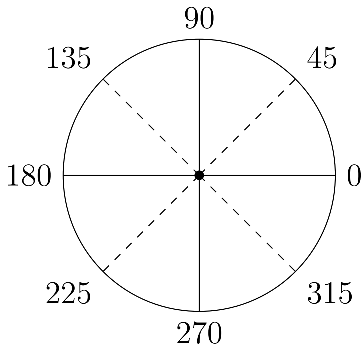


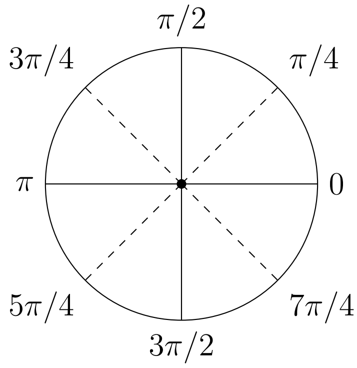
מהחיתוכים של הצירים עם מעגל היחידה נקבל את ערכי הסינוס והקוסינוס של הזוויות:

זווית (מעלות)	זווית (רדיאנים)	sin	cos
0	0	0	1
$90, -270$	$\pi/2, -3\pi/2$	1	0
$180, -180$	$\pi, -\pi$	0	-1
$270, -90$	$3\pi/2, -\pi/2$	-1	0

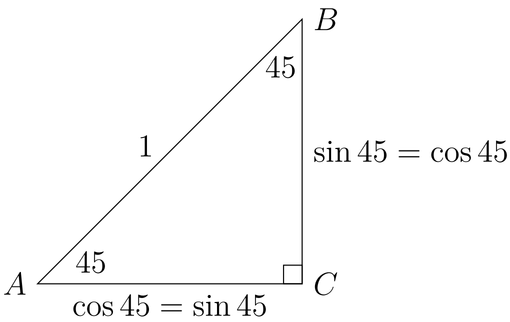
חלוקת מעגל היחידה ל-8 קטעים

נחלק כל רביע בחצי ונקבל 8 קטעים. הזווית של כל קטע הוא 45° או $\pi/4$ רדיאנים:





במשולש $\triangle ABC$ אם הזווית $\angle BAC$ היא 45°, הזווית הנגדית $\angle ABC$ גם היא 45° כדי שסכום הזוויות במשולש יהיה 180°. המשולש שווי-שוקיים כך שערכי הסינוס והקוסינוס שווים.



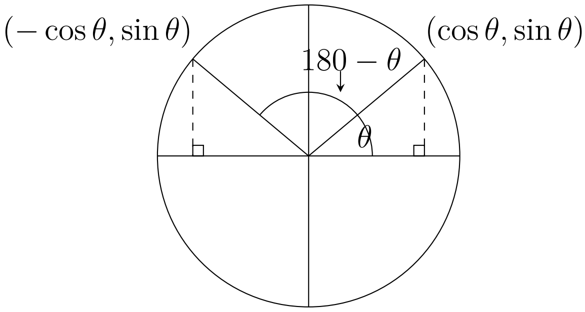
ממשפט פיתגורס:

$$
\begin{aligned}
\sin^2 45 + \cos^2 45 &= 1 \\
2\sin^2 45 &= 1 \\
\sin 45 = \cos 45 &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.
\end{aligned}
$$

סינוס וקוסינוס של זוויות הגדולות מ-90°

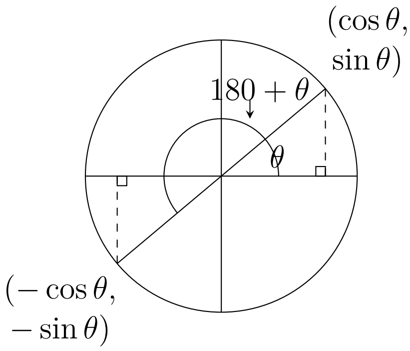
עכשיו שאנו יודעים את ערכי הסינוס והקוסינוס של 45°, נוכל לשאול על הזוויות הסימטריות $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$, $225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$, $315^\circ = -45^\circ$. בתרשימים שלהלן סימנו את הזוויות הסימטריות עבור זווית שרירותית θ ברביע הראשון. ערכי ה-x, y שווים פרט לסימנים.

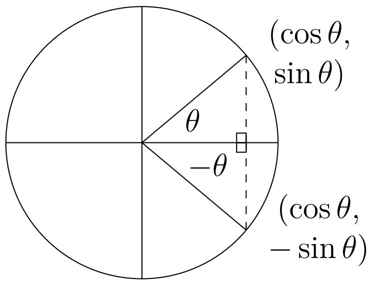
ברביע השני:



$$\cos 135 = -\cos 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin 135 = \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ברביע השלישי והרביעי:





$$\cos 225 = -\cos 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin 225 = -\sin 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315 = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin 315 = -\sin 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

נסכם את הערכים בטבלה:

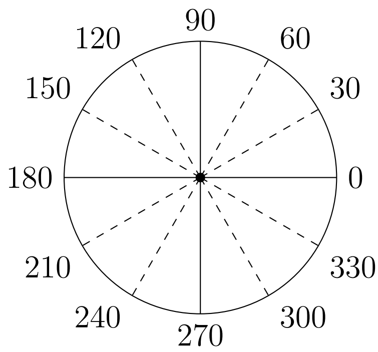
זווית (מעלות)	זווית (רדיאנים)	sin	cos
θ	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
$180-\theta$	$\pi-\theta$	$\sin\theta$	$-\cos\theta$
$180+\theta$	$\pi+\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$
$-\theta$	θ	$-\sin\theta$	$\cos\theta$

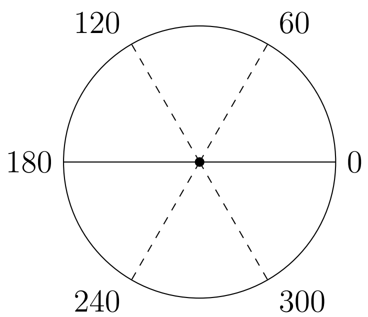
ועבור 45°:

זווית (מעלות)	זווית (רדיאנים)	sin	cos
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
135	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
225	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
315	$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$

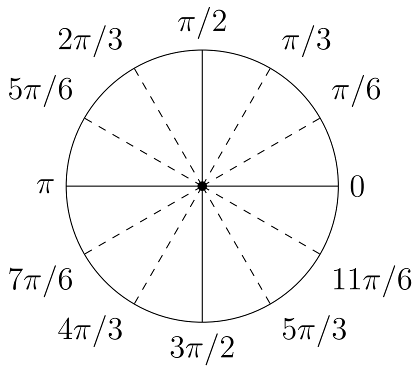
הסינוס והקוסינוס של 30° ו 60°

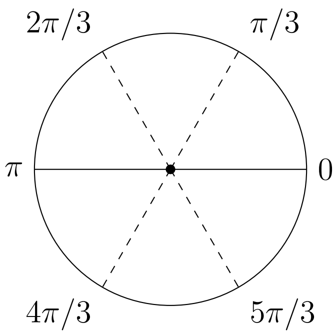
את מעגל היחידה ניתן לחלק ל-6 קטעים של 60° או ל-12 קטעים של 30°:



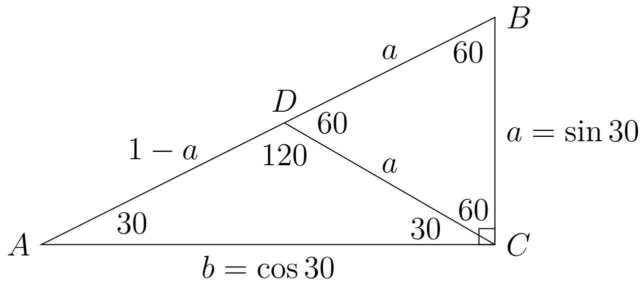


ברדיאנים:





נחשב את הסינוס של $\angle BAC = 30^\circ$. במשולש ישר-זווית $\triangle ACB$ עם יתר באורך 1:



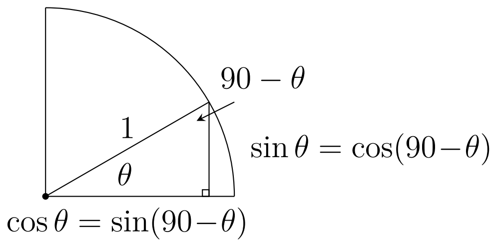
צייר קו CD אל היתר כך ש-$\angle DCA = 30^\circ$. כדי להשלים ל-180° במשולש, $\angle ADC = 120^\circ$, וניתן לחשב את שאר הזוויות. $\triangle BCD$ שווי-צלעות ולכן $DC = a = \sin 30^\circ$. $\triangle ACD$ שווי-שוקיים כך ש-$a = 1 - a$ ו-$\sin 30^\circ = a = \frac{1}{2}$. ערך הקוסינוס הוא:

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

סינוס וקוסינוס של $(90-\theta)$

הצלע הנגדי לזווית מתחלף עם הצלע השכן של הזוויות ומכאן:

$$\cos(90-\theta) = \sin\theta, \qquad \sin(90-\theta) = \cos\theta\,.$$



סינוס וקוסינוס של 2θ

את הנוסחאות ל-$\sin 2\theta, \cos 2\theta$ ניתן לשחזר מהנוסחאות לחיבור של זוויות הניתנות בנוסחאון:

$$\begin{aligned}
\sin 2\theta &= \sin(\theta + \theta)\\
&= \sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta\\
&= 2\sin\theta\cos\theta\\
\cos 2\theta &= \cos(\theta + \theta)\\
&= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta\\
&= \cos^2\theta - \sin^2\theta\\
&= (1 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta\\
&= 1 - 2\sin^2\theta\,.
\end{aligned}$$