

# **בחינות בגרות במתמטיקה: התהילה**

**מוטי בן-ארי**

<http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/>

**גרסה 1.4.5**

**12 בינואר 2020**

מוטי בן-ארי 2019-20

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).





# **תוכן עניינים**

9	הקדמה	
<b>11</b>	<b>1 תנועה והספק</b>	
11	קייז תשע"ח מועד ב	1.1
13	קייז תשע"ח מועד א	1.2
15	חרוף תשע"ח	1.3
17	קייז תשע"ז מועד ב	1.4
20	קייז תשע"ז מועד א	1.5
22	חרוף תשע"ז	1.6
24	קייז תשע"ו, מועד ב	1.7
26	קייז תשע"ו מועד א	1.8
28	חרוף תשע"ו	1.9
30	קייז תשע"ה מועד ב	1.10
32	קייז תשע"ה מועד א	1.11
34	חרוף תשע"ה	1.12
36	קייז תשע"ד מועד ב	1.13
37	קייז תשע"ד מועד א	1.14
38	חרוף תשע"ד	1.15
<b>40</b>	<b>המלצות: תנועה והספק</b>	
<b>41</b>	<b>2 סדרות</b>	
41	קייז תשע"ח מועד ב	2.1
43	קייז תשע"ח מועד א	2.2
45	חרוף תשע"ח	2.3
47	קייז תשע"ז מועד ב	2.4
49	קייז תשע"ז מועד א	2.5

51	chorf_tshu'z	2.6
52	kiy_tshu'zo_moud_b	2.7
53	kiy_tshu'zo_moud_a	2.8
54	chorf_tshu'zo	2.9
56	kiy_tshu'ha_moud_b	2.10
57	kiy_tshu'ha_moud_a	2.11
58	chorf_tshu'ha	2.12
60	kiy_tshu'd_moud_b	2.13
61	kiy_tshu'd_moud_a	2.14
63	chorf_tshu'd	2.15

#### המלצות: סדרות

64		
67		3 הסתרות
67	kiy_tshu'ch_moud_b	3.1
69	kiy_tshu'ch_moud_a	3.2
72	chorf_tshu'ch	3.3
73	kiy_tshu'z_moud_b	3.4
75	kiy_tshu'z_moud_a	3.5
77	chorf_tshu'z	3.6
79	kiy_tshu'zo_moud_b	3.7
80	kiy_tshu'zo_moud_a	3.8
82	chorf_tshu'zo	3.9
84	kiy_tshu'ha_moud_b	3.10
86	kiy_tshu'ha_moud_a	3.11
89	chorf_tshu'ha	3.12
90	kiy_tshu'd_moud_b	3.13
92	kiy_tshu'd_moud_a	3.14
94	chorf_tshu'd	3.15

#### המלצות: הסתרות

96		
99		4 גיאומטריה
99	kiy_tshu'ch_moud_b	4.1
102	kiy_tshu'ch_moud_a	4.2

104	chorf_tshuach	4.3
107	kiy_tshuaz_moud_b	4.4
110	kiy_tshuaz_moud_a	4.5
113	chorf_tshuaz	4.6
115	kiy_tshuao_moud_b	4.7
117	kiy_tshuao_moud_a	4.8
119	chorf_tshuao	4.9
121	kiy_tshuah_moud_b	4.10
123	kiy_tshuah_moud_a	4.11
125	chorf_tshuah	4.12
127	kiy_tshuad_moud_b	4.13
129	kiy_tshuad_moud_a	4.14
131	chorf_tshuad	4.15

## 133 המלצות: גיאומטריה

135	<b>5 טריגונומטריה</b>	
135	kiy_tshuah_moud_b	5.1
138	kiy_tshuah_moud_a	5.2
140	chorf_tshuach	5.3
142	kiy_tshuaz_moud_b	5.4
144	kiy_tshuaz_moud_a	5.5
146	chorf_tshuaz	5.6
149	kiy_tshuao_moud_b	5.7
152	kiy_tshuao_moud_a	5.8
154	chorf_tshuao	5.9
156	kiy_tshuah_moud_b	5.10
158	kiy_tshuah_moud_a	5.11
160	chorf_tshuah	5.12
162	kiy_tshuad_moud_b	5.13
166	kiy_tshuad_moud_a	5.14
168	chorf_tshuad	5.15
170	chorf_tshuad (שאלה 6)	5.16

## 172 המלצות: טריגונומטריה

<b>173</b>	<b>חדו"א שאלת 6</b>	
173 . . . . .	קייז תשע"ח מועד ב . . . . .	6.1
175 . . . . .	קייז תשע"ח מועד א . . . . .	6.2
177 . . . . .	חרוף תשע"ח . . . . .	6.3
180 . . . . .	קייז תשע"ז מועד ב . . . . .	6.4
182 . . . . .	קייז תשע"ז מועד א . . . . .	6.5
185 . . . . .	חרוף תשע"ז . . . . .	6.6
187 . . . . .	קייז תשע"ו מועד ב . . . . .	6.7
189 . . . . .	קייז תשע"ו מועד א . . . . .	6.8
192 . . . . .	חרוף תשע"ו . . . . .	6.9
195 . . . . .	קייז תשע"ה מועד ב . . . . .	6.10
197 . . . . .	קייז תשע"ה מועד א . . . . .	6.11
199 . . . . .	חרוף תשע"ה . . . . .	6.12
201 . . . . .	קייז תשע"ד מועד ב . . . . .	6.13
203 . . . . .	קייז תשע"ד מועד א . . . . .	6.14
205 . . . . .	חרוף תשע"ד . . . . .	6.15
<b>207</b>	<b>חדו"א שאלת 7</b>	
207 . . . . .	קייז תשע"ח מועד ב . . . . .	7.1
209 . . . . .	קייז תשע"ח מועד א . . . . .	7.2
211 . . . . .	חרוף תשע"ח . . . . .	7.3
213 . . . . .	קייז תשע"ז מועד ב . . . . .	7.4
215 . . . . .	קייז תשע"ז מועד א . . . . .	7.5
217 . . . . .	חרוף תשע"ז . . . . .	7.6
219 . . . . .	קייז תשע"ו מועד ב . . . . .	7.7
221 . . . . .	קייז תשע"ו מועד א . . . . .	7.8
223 . . . . .	חרוף תשע"ו . . . . .	7.9
225 . . . . .	קייז תשע"ה מועד ב . . . . .	7.10
227 . . . . .	קייז תשע"ה מועד א . . . . .	7.11
229 . . . . .	חרוף תשע"ה . . . . .	7.12
231 . . . . .	קייז תשע"ד מועד ב . . . . .	7.13
233 . . . . .	קייז תשע"ד מועד א . . . . .	7.14
235 . . . . .	חרוף תשע"ד . . . . .	7.15

**8 חדו"א שאלת**

237	קייז תשע"ח מועד ב	8.1
239	קייז תשע"ח מועד א	8.2
241	חרוף תשע"ח . . . . .	8.3
243	קייז תשע"ז מועד ב	8.4
245	קייז תשע"ז מועד א	8.5
247	חרוף תשע"ז . . . . .	8.6
249	קייז תשע"ו מועד ב	8.7
251	קייז תשע"ו מועד א	8.8
253	חרוף תשע"ו . . . . .	8.9
255	קייז תשע"ה מועד ב	8.10
257	קייז תשע"ה מועד א	8.11
259	חרוף תשע"ה . . . . .	8.12
261	קייז תשע"ד מועד ב	8.13
263	קייז תשע"ד מועד א	8.14
265	חרוף תשע"ד . . . . .	8.15

**267 המלצות: חשבון דיפרנציאלי ואיינטגרלי**

**271 א' אין לסמוֹך על איורים**

**273 ב' ייצוג גרפי של משפטי בגיאומטריה**

**275 ג' מעגל היחידה**



## הקדמה

מתמטיקאים ידועים לטענה כי הם מפרסמים הוכחות מסוימות וברורות, ומסתירים את העבודה של הנימיות שלהם מלא עד אפס מקום בניסיונות שהובילו למבואות טונמים וטעויים. תלמידים לא נחשפים **لتהלייפט** למציאות הפתרונות, וזה עלול למסכל אותם. הם צריכים למדוד לא התייחס כאשר הם לא מצליחים לפתרור בעיות בנסיון הראשון. לא חסרים פתרונות של בחינות הבגרות, אבל גם הם "נקים" ללא ניסיונות שלא צלחו ודינמיים על דרכי החשיבה שהובילו לפתרונות.

בחוברת זו פתרונות לבחינות הבגרות שאלון 806 מהשנים תשע"ד עד תשע"ח. אני משתמש לתאר את חוויתי בחיפוש פתרונות, כגון הבנה מוטעית של ניסוח השאלות, מלכודות שנפלתי בהם ופתרונות חלופיים שמצאתי. בסוף כל פרק רשמי המלצות שגיבשתי לאורך העבודה.

shawoati את הפתרונות שלי לפתרונות המופיעים בראש, אבל הפתרונות הם שלי ובסגנון שלי. קיצרתי בהציג חישובים ברורים ואני משתמש תמיד בדרכים מקובלות להציג פתרונות, כגון טבלאות בבעיות תנואה.

## תנוועה והספק

הצעה של אביתל אלבום-כהן כיוונה אותה לפתח את תהליך הפתרון של בעיות הללו באמצעות תרשימים דו-ממדיים. מצאתי שהתרשיים מאוד עוזרים בזיהוי הקשרים בין קטיעי התנוועה ובכתיבת הנוסחאות. ניתן להיעזר בתרשימי דו-ממדיים גם בעיות הספק שיש להן מבנה דומה לבעיות תנואה. התרשיים קלים מאוד לציר ומוסילים גם אם קני מידיה לא מדויקים, כך שניתן להשתמש בהם כאשר פותרים בחינות.

הציר האופקי בתרשימי הוא ציר הזמן, והציר האנכי הוא ציר המהלך בעיות תנואה וציר העבודה בעיות הספק. היתרון של ייצוג זה הוא שמהירות וההספקים מוצגים כSHIPועים של הקווים. ככל שהמהירות או ההספק גבוהה יותר, הקו תלול יותר. לכל דמות (מכונית, סירה, צבע, וכדומה) צירתי קו עבור כל קטיעת תנואה או עבודה.

המאמר "פתרונות שונים בעיות הספק באמצעות גרפיים" מאת אביתל אלבום-כהן וג'יסון קופר. על"ה גיליון 51, מרץ 2015, עמ' 14-19, מביא פתרונות גיאומטריים עבור בעיות הספק.

## סדרות

לדעתי, שאלות על סדרות הן וכי קלות כי בסופו של דבר יש יחסים ברורים בין איברים עוקבים בסדרה (חשבונית או הנדסית), ובין האיברים לסכומים. עם זאת, מצאתי שקל מאד לטעת, למשל, אם מבלבלים בין האינדקסים של איברי הסדרה לבין ערכיהם.

## הסתברות

הчисובים בעיות עם הסתברות פשוטים, אבל קשה לתרגם את העלילה המילולית למשוואות הנכונות. הדבר נכון במיוחד כאשר השאלה שואלת על הסתברות מותנית. מצאתי עשר רב של ביטויים המכונים להסתברות מותנית (ראו בסעיף **המלצות**), וזה לא מקל על הפתרון.

קושי נוסף נובע מהעובדה שיש שתי דרכים לארגן את המידע הנתנו ואת החישובים: בטבלה או בעץ. שאלת המנוסחת "גם א וגם ב" מכוונת לחיתוך של הסתברויות ולטבלה, לעומת שאלת המנוסחת "א אחר ב" שמקוונת למכלפה של הסתברויות ולהצגה בעץ.

## גיאומטריה וטריגונומטריה

הפתרונות מביאים ציטוטים של המשפטים המתקדמיים מתוך רשיימות המשפטים שהתלמידים רשאים לצטט ללא הוכחה. כל אחד זוכר ללא קושי שימושים חופפים לפי צ.צ.צ., אבל קשה יותר לאזכור משפטים כגון שווין הזווית בין משיק למיתר.

יש חשיבות רבה לצירורים גדולים עליהם ניתן לרשום ערכיהם, נעלמים ובניות עזר בצורה ברורה. אני ממליץ להכין צירורים שונים לסעיפים שונים של שאלת.

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

בחדו"א שיטות ברורות לחישוב תחומי ההגדלה, נקודות הקיצון והאסימפטוטות, אבל לעיתים החישובים ארוכים. חשוב לדikk כי שגיאה בסעיף אחד תגרום לשגיאות בהמשך.

הספר "לימוד ולימד אנליזה" מציג את הנושא בצורה מקיפה ביותר, ומהווה משאב חשוב למורה.

<http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/>

[Mazkirut\\_Pedagogit/Matematika/ChativaElyona/Analiza.htm](Mazkirut_Pedagogit/Matematika/ChativaElyona/Analiza.htm).

## נספחים

בנספח א' "הוכחה" ידועה שככל משולש שווה שוקיים. ההוכחה מראה שתזרים אינם תחליף להוכחה.

נספח ב' מכיל צירורים צבעוניים של מספר משפטיים מתקדמיים בגיאומטריה. בנושא כל כך מוחשי קל יותר לזכור ציור ולא תיאור מיילולי מסורבל. כדאי להדפיס עמודים אלה בדף.

נספח ג' עוסק במעגל היחידה. כאשר אני פותר בעיה בבטריגונומטריה, אני מצייר בצד תזרים של מעגל היחידה כדי לראות את הקשרים של הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות שונות. למשל, לא כדאי לזכור זהויות כגון  $\sin \theta = \sin(180 - \theta)$  אלא לשחרר אותן מתרשים של מעגל יחידה.

## הבעת תודה

אני מודה לד"ר רונית בר-בסט לוי ולד"ר אביטל אלבוייס-כהן שלוו אותי בצלילה למתמטיקה של בתים ספר תיכוניים, חמישים שנה לאחר שסיימתי את לימודיו!

# פרק 1 תנועה והספק

## 1.1 קיז תשע"ח מועד ב

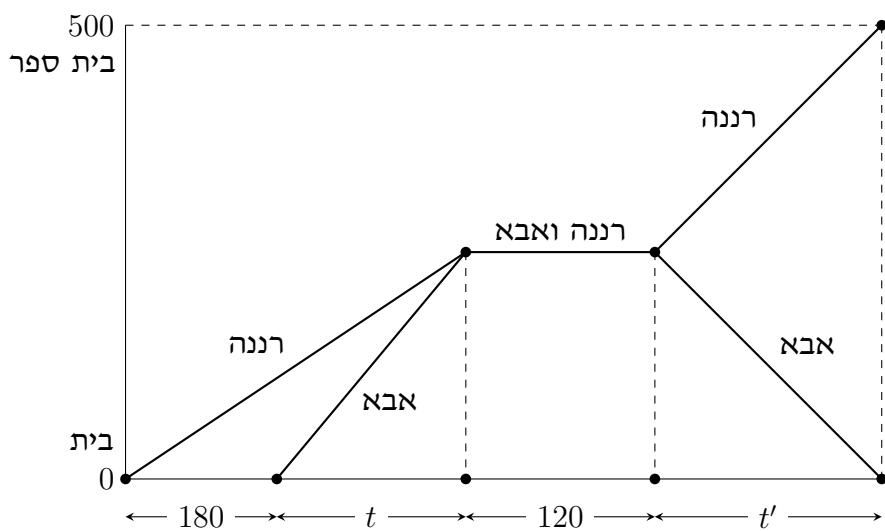
המרחק מביתה של רננה עד בית הספר הוא 500 מטרים. רננה יצאתה מביתה אל בית הספר והלכה במהירות קבועה. 3 דקות לאחר שיצאה מביתה, יצא אביה בעקבותיה כדי להביא לה כריך ששכחה. הוא רץ במהירות קבועה של 2.5 מטרים לשנייה.

כאשר הגיע האב לרננה הם עמדו ושוחחו במשך 2 דקות והוא נתן לה את הכריך, ולאחר מכן הלך כל אחד מהם לדרכו – רננה לבית הספר והאב בחזרה אל הבית. רננה המשיכה ללכת באותה מהירות שהלכה לפני כן, והאב הלך במהירות של 1.5 מטרים לשנייה.

אביה של רננה הגיע אל הבית לבדוק באותו הזמן שהגיעה רננה אל בית הספר.

א. חשב את מהירות ההליכה של רננה.

ב. כמה זמן עבר מן הרגע שרננה יצאתה מביתה ועד שהגיעה אל בית הספר?



נסמן:  $v$  = מהירות ההליכה של רננה,  $t$  = הזמן עד למפגש בין רננה לאביה,  $t'$  = הזמן מהפרידה בין רננה לאביה עד שנייהם מגיעים ליעדם.

מהתרשים אפשר לראות שוויונות בין מרחקים: (א) המרחק שרננה הלכה עד למפגש שווה למרחק שבא האב אל בחזרה מהפגש, (ג) המרחק לבית הספר שווה למרחק שרננה הלכה עד למפגש ועוד המרחק שהוא הילך מהפגש עד לבית הספר.

**סעיף א**

תחילת נשואה את המרחקים שאבא עבר מהבית עד למפגש ובחזרה:

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}t &= \frac{3}{2}t' \\ t' &= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}t = \frac{5}{3}t.\end{aligned}$$

נמשיך בהשוואת המרחק עד למפגש של שניהם:

$$v(t + 180) = \frac{5}{2}t.$$

אנו זקוקים לשתי משוואות עם שני הנעלמים כדי למצוא את  $t$ . אי-אפשר למצוא משואה שנייה מהנתונים מהמפגש עד ליעדים שלהם, כי המרחקים לא בהכרח שווים. במקומות זה נמצא דרך אחרת להשוות את המרחק שעוברים רננה ואבא מהבית עד למפגש. עבור אבא נשתמש שוב ב- $\frac{5}{2}t$ . עבור רננה נשים לב שנייתן לחשב את המרחק המבית עד למפגש כהפרש בין המרחק מהבית לבית הספר (500) לבין המרחק שהוא עבר מהמפגש ועד לבית הספר':  $vt'$ :

$$\frac{5}{2}t = 500 - vt' = 500 - v\left(\frac{5}{3}t\right).$$

כעת יש לנו שתי משוואות בשני הנעלמים  $t, v$ . מהראISON נחשב:

$$t = \frac{360v}{5 - 2v},$$

ונציב שניי:

$$\frac{5}{2}\left(\frac{360v}{5 - 2v}\right) = 500 - v\left(\frac{5}{3} \cdot \frac{360v}{5 - 2v}\right).$$

נפחס את המשוואה ונקבל משואה ריבועית עבור  $v$ :

$$\begin{aligned}6v^2 + 19v - 25 &= 0 \\ (v - 1)(6v + 25) &= 0.\end{aligned}$$

המהירות חייבת להיות חיובית ולכן הפרטון היחיד הוא  $v = 1$ .

**סעיף ב**

מן  $t = 120$ , נקבל  $t = 120$ , ונסכם את פרקי הזמן על הציר האופקי בתרשים:

$$180 + 120 + 120 + \frac{5}{3} \cdot 120 = 620 \text{ (שניות)}.$$

**הערה**

שיםו לב למלכודות שקל ליפול לתוכה: הזמן נתונים בדקות והמהירות נתונות במטרים שנייה!

## 1.2 קיז' תשע"ח מועד א

שני רוכבי אופניים, אמיר ומשה, יצאו בשעה 6:00 זה לכיוונו של זה. אמיר רכב ב מהירות קבועה מעיר א לעיר ב, ומשה רכב ב מהירות קבועה מעיר ב לעיר א. אמיר ומשה עברו זה על פני זה והמשיכו כל אחד ליעדו. אמיר הגיע לעיר ב שעתים אחרי שעבר על פני משה, ואילו משה הגיע לעיר א 8 שעות אחרי שעבר על פני אמיר.

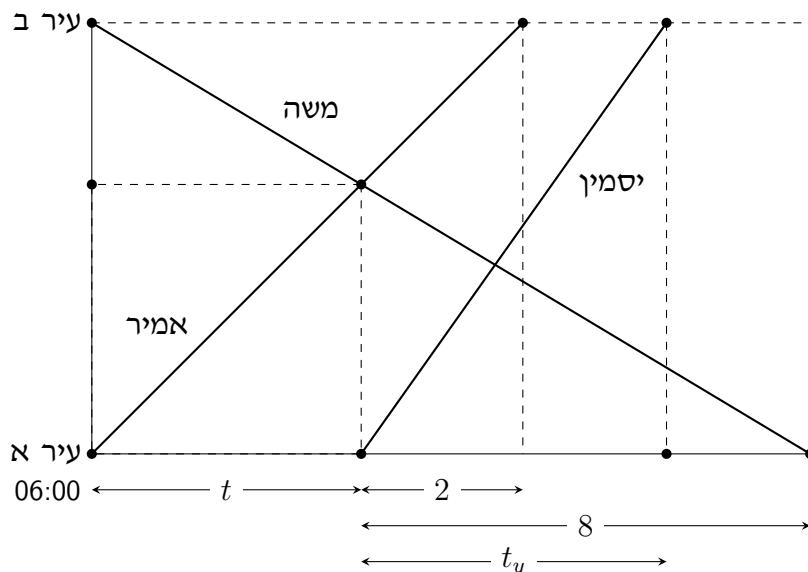
**א.** באיזו שעה עברו אמיר ומשה זה על פני זה?

נסמן את מהירותם נסיעתו של אמיר באות  $V$ .

בדוק כאשר עברו אמיר ומשה זה על פני ישמעין, רוכבה על אופנו, מעיר א לעיר ב, ב מהירות קבועה. נתון שישמעין הגיע לעיר ב אחרי אמיר, אך לפני שהוא הגיע לעיר א.

**ב.** (1) הבע באמצעות  $V$  את המרחק בין עיר א לעיר ב.

(2) הבע באמצעות  $V$  את טווח המהירות האפשרי של ישמעין.



נסמן:  $t$  = הזמן עד למפגש בין אמיר למשה,  $t_y$  = זמן הנסיעה של ישמעין מעיר א לעיר ב,  $v_a, v_m, v_y$  = מהירותם של אמיר, משה וישמעין.

### סעיף א

מהתרשים ניתן לראות שיש **שלושה** ביטויים עבור המרחק בין הערים: (א) הרחק שנסע אמיר, (ב) המרחק שנסע משה, ו(ג) סכום המרחקים שנסעו אמיר ומשה עד למפגש:

$$tv_a + tv_m = (t + 2)v_a = (t + 8)v_m.$$

משני הביטויים הראשונים אנו מקבלים:

$$\frac{v_a}{v_m} = \frac{t}{2}.$$

נציב בשני הביטויים האחראוניים:

$$(t+2) \cdot \frac{tv_m}{2} = (t+8)v_m .$$

$v_m$  מצטמצם ונקבל משווה ריבועית  $t^2 - 16t - 16 = 0$  עם הפתרון החיובי  $t = 4$ .

### שיעור לב

יש נטייה לעצור כאן כאשר חישבנו את הזמן  $t$ , אבל עיון חוזר בשאלת מראה שהיא מבקשת את השעה של המפגש שהיא 10:00.

### סעיף ב

המרחק בין הערים הוא  $V = 6v_a$  (הסימן הנтон  $v_a$  שונה מ- $v$  שבחרתי).

### סעיף ג

נתון שיסמין מגיע לעיר באחרי אמיר ולפני משה. מהתרשים רואים ש:

$$2 < t_y < 8 .$$

זמן הוא מרחק חלק מהירות ואת המרחק חישבנו בסעיף ב:

$$2 < \frac{6V}{v_j} < 8 .$$

מכאן ש:

$$\frac{3}{4}V < v_j < 3V$$

כי כיווני האיזוויון מתחלפים עם היפוך השבר.

### 1.3 חורף תשע"ח

בכפר נופש יש שתי בריכות: בריכה א' ובריכה ב'.

הנפח של בריכה א' הוא  $V_1$  והנפח של בריכה ב' הוא  $V_2$ .

את הבריכות ממלאים באמצעות 4 צינורות בעלי אותו הספק.

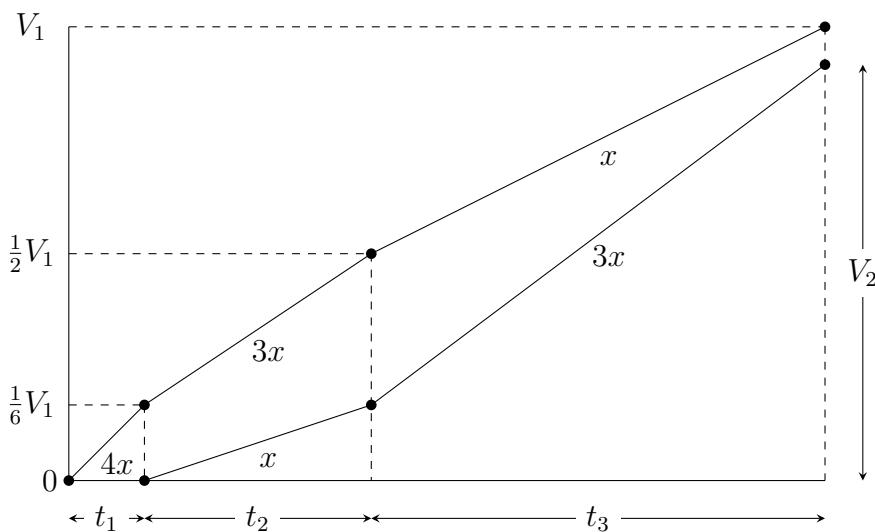
ביום כלשהו שתי הבריכות היו ריקות.

התחלו למלא את בריכה א' באמצעות ארבעת הצינורות. כאשר הת מלאה בריכה א' לכדי  $\frac{1}{6}$  מנפחיה, העבירו אחד מן הצינורות לבריכה ב' והתחלו למלא אותה באמצעותו. כאשר הת מלאה בריכה א' עד מחציתה, העבירו עוד שני צינורות למילוי בריכה ב'.

מילי שתי הבריכות הסתיימו באותו הזמן.

כל הצינורות הזרימו מים ללא הפסקה עד שהת מלאו שתי הבריכות.

$$\text{חישב את היחס } \frac{V_1}{V_2}.$$



נסמן:  $x$  = קצב המילוי של הצינורות ("אותו הספק"),  $t_1, t_2, t_3 =$  פרקי הזמן בין העברת הצינורות. הקו העליון בתרשים מתאר את המילוי של בריכה א', והקו התחתון מתאר את מילוי של בריכה ב. שימוש לב שיכל לשיתר צינורות מלאים בריכה, השיפוע של הקו תלול יותר. יש לנו שלוש קבוניות של נתונים:  $x$ , שלושת ה- $t_i$  ושני ה- $V_i$ . אם נצליח להיפטר מ- $x$  או מה- $t_i$ , השני יצטמצם כאשר נחלק את ה- $V_i$ .

נתחיל עם משוואות ההספק עבור בריכה א', כאשר בכל פרק זמן ממלאים את ההפרשיות של הנפחים, למשל, בזמן  $t_2$  בריכה א' מתמלאת משנית מנפחיה לחצי מנפחיה:

$$\begin{aligned} 4xt_1 &= \frac{1}{6}V_1 \\ 3xt_2 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)V_1 \\ xt_3 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)V_1. \end{aligned}$$

נשתמש במשוואת כדי לחשב את פרקי הזמן כתלות בנפח בברינה:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{V_1}{24x} \\ t_2 &= \frac{V_1}{9x} \\ t_3 &= \frac{V_1}{2x}. \end{aligned}$$

מהתרשים רואים שאפשר לבטא את הנפח של  $V_2$  בסכום: הנפח שמתמלא בפרק הזמן  $t_2$  ועוד הנפח המתמלא בפרק הזמן  $t_3$ . כאשר נציב את המשוואות שקיבלנו עבור בפרק הזמן, קיבל את הנפח של  $V_2$  כתלות ב-  $V_1$  בלבד, כי המשתנה  $x$  מצטמצם:

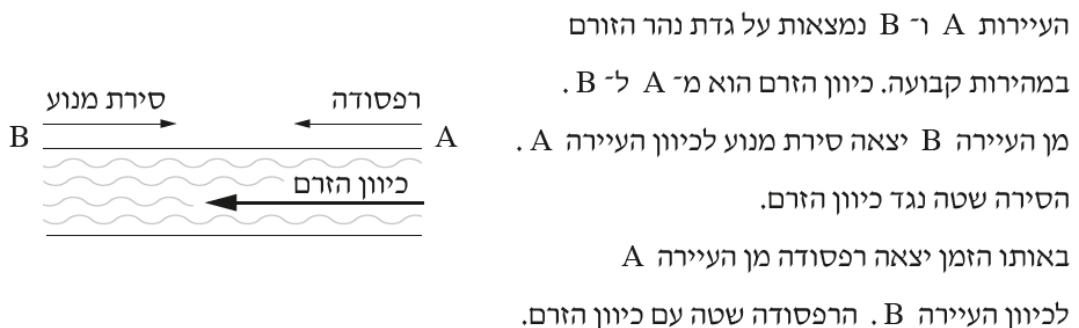
$$\begin{aligned} V_2 &= xt_2 + 3xt_3 = \frac{xV_1}{9x} + \frac{3xV_1}{2x} = \frac{29}{18}V_1 \\ \frac{V_1}{V_2} &= \frac{18}{29}. \end{aligned}$$

#### הערה

קיבלו שהנפח של ברינה ב גודל מהנפח של ברינה א, עובדה שלא ידעת כי אם ציירתי את התרשים עם נפח ברינה א גדול מנפח ברינה ב! אין לזה חשיבות. מטרת התרשים היא להציג את התסריט כדי שנוכל לכתוב את המשוואות הנכונות.

פרט מעניין הוא שפרק הזמן הראשון  $t_1$  לא נחוץ לפתרון, כי המילוי של ברינה ב מתבצע בשני שלבים לאחר העברת הצינור הראשון.

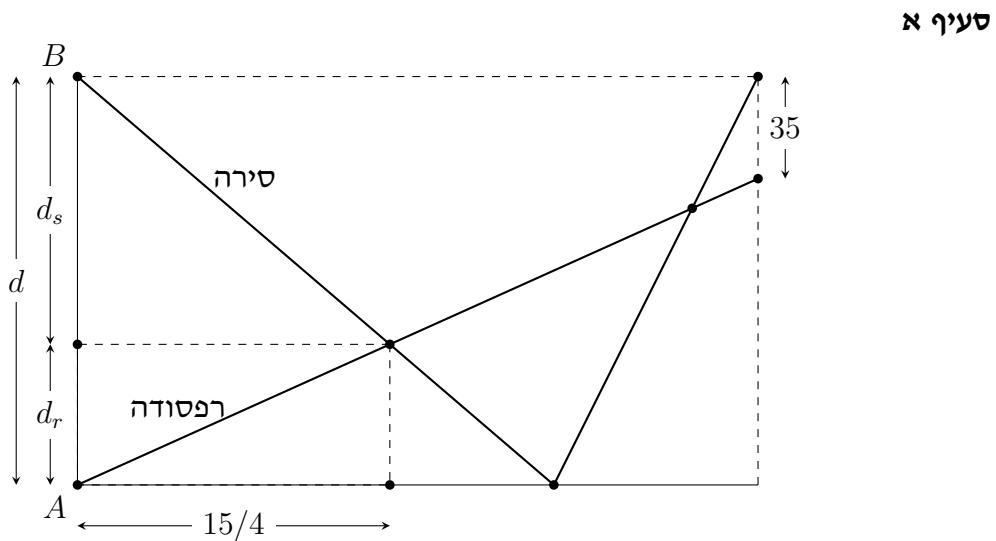
## 1.4 קיז' תשע"ז מועד ב



מהירות סירת המנוע במים עומדים היא קבועה וגדולה פי 4 מהירות הזורם של הנהר.  
מהירות הרפסודה במים עומדים היא אפס. במקרים זורמים הרפסודה שטה עם הזורם.

הסירה והרפסודה נפגשו 3 שעות ו- 45 דקות אחרי יציאתן לדרכן והמשיכו בדרכן. סירת המנוע הגיעו לעיר A ומיד הסתובבה ושטה בחזרה לעיר B.  
כאשר סירת המנוע הגיעו לעיר B, הרפסודה הייתה למרחק של 35 ק"מ מן העיר B.

- א. חשב את מהירות הזורם ואת מהירות סירת המנוע במים עומדים.
- ב. בדרך חזרה לעיר Bפגשה סירת המנוע את הרפסודה בפעם השנייה. כמה זמן עבר מרגע יציאתה של הרפסודה מן העיר A עד שהסירה והרפסודה נפגשו בפעם השנייה?



נסמן:  $d$  = המרחק בין שני הנמלים,  $d_s$  = מרחק הפלגה של הסירה והרפסודה עד למפגש הראשון,  $v_z$  = מהירות הזורם,  $v_s$  = מהירות הסירה במים עומדים. ציר הזמן הוא בשעות.

הזמן עד למפגש הראשון שווה עבור הסירה והרפסודה ויחס המהירות של הסירה והזרם ידוע, כך שניתן לכתוב את משוואות התנועה עד למפגש. נתון:

$$v_z = v_s/4.$$

במפגש הראשון:

$$d = d_s + d_r = \frac{15}{4}(v_s - v_z) + \frac{15}{4}v_z.$$

מהירות הזרם מתאפסת ומתקבל:

$$d = \frac{15}{4}v_s.$$

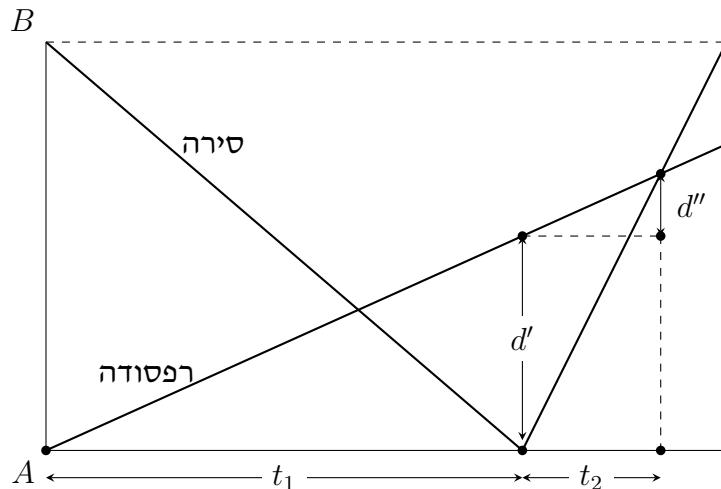
עת נכתוב משוואות תנועה כדי להשוו את הזמן עד סוף הסיפור. בפרק הזמן שהסירה מפליגה ל- $A'$  ובחרזה ל- $B$  (מרחק של  $d + d'$ ), הרפסודה מפליגה מ- $A$  ומגעה "כמעט" לנמל  $B$ :

$$\frac{d}{v_s - v_z} + \frac{d'}{v_s + v_z} = \frac{d - 35}{v_z}.$$

מהנתנו על יחס המהירות ומחישוב המרחק, נציב עבור  $v_z$  ו- $d'$ , ונקבל משווה עם נעלם אחד בלבד,  $v_s$ . הפתרון הוא  $v_s = 20$  ויחס המהירות  $v_z = 5$ . נחשב גם  $d = 75$  שנוצר במשך.

### סעיף ב

נציר תרשימים חדש עם סימונים הקשורים למפגש השני.



נסמן:  $t_1$  = הזמן שהסירה מפליגה ל- $A'$  ל- $B$ ,  $t_2$  = הזמן שהסירה מפליגה מ- $A$  למפגש השני.  $d'$  = המרחק שהרפסודה מפליגה בזמן  $t_1$ ,  $d''$  = המרחק שהרפסודה מפליגה בזמן  $t_2$ .

קל לחשב  $t_1$  ממשוואת התנועה של הסירה:

$$t_1 = \frac{d}{v_s - v_z} = \frac{75}{20 - 5} = 5,$$

ולחשב את המרחק  $d'$  מהמשווה של הרפסודה:

$$d' = v_z t_1 = 5 \cdot 5 = 25.$$

נשאר לחשב את פרק הזמן  $t_2$ . בפרק זמן זה הטיירה מפליגה מרחק  $d' + d''$  והרפסודה מפליגה מרחק  $d''$ . המהירות ידועות, כך שיש לנו שתי משוואות עבור  $t_2$ :

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{d' + d''}{v_s + v_z} = \frac{25 + d''}{25} \\ t_2 &= \frac{d''}{v_z} = \frac{d''}{5}. \end{aligned}$$

נפתרו את המשוואת ונקבל:

$$\begin{aligned} d'' &= \frac{25}{4} \\ t_2 &= \frac{d''}{v_z} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

### שימו לב

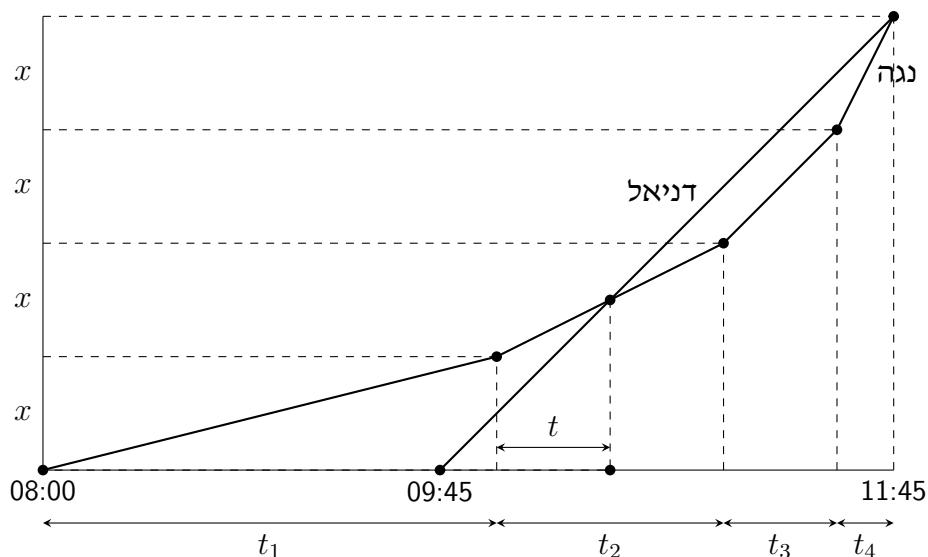
שהשאלה מבקשת את זמן הפלגה של הרפסודה מנמל  $A$  ועד לפגש השני:

$$t_1 + t_2 = 5 + \frac{5}{4} = \frac{25}{4}.$$

## 1.5 קיז תשע"ז מועד א

נגה רכבה על אופניים במסלול באורך מסויים, באربع מהירותים קבועות. בכל פעם, לאחר שעברה מקטע שאורכו רבע מן המסלול, היא הגבירה את מהירותה, ורכבה ב מהירות הגדולה פי 2 מ מהירות הקודמת. בקטע האחרון היא רכבה ב מהירות של 40 קמ"ש. נגה יצאה לדרכ בשעה 08:00 בבוקר וסיימה את המסלול בשעה 11:45 בבוקר.

- א. מהו אורך המסלול?  
 ב. דניאל יצא לדרכ באותו מסלול בשעה 9:45, ונסע ב מהירות קבועה לאורך כל המסלול. גם הוא הגיע ל סוף המסלול בשעה 11:45.  
 באיזה מארבעת מקטעי המסלולפגש דניאל את נגה בפעם הראשונה, ובאיזה שעה?



נסמן:  $x$  = המרחק של מקטע,  $t_1, t_2, t_3, t_4 = t_1, t_2, t_3, t_4$  = זמני רכיבה של נגה בקטעים.  
 נתון:  $40$  = המהירות בקטע האחרון, אך המהירותים האחרים הן  $10, 20, 5$ .

### סעיף א

נתון לנו הזמן הכלול ומהירות (אםنم רק מהירות האחרונה נתונה, אבל אפשר לחשב את האחרות), והנעלם היחיד הוא המרחק. נסכם את הזמינים של המקטעים:

$$\left( \frac{x}{5} + \frac{x}{10} + \frac{x}{20} + \frac{x}{40} \right) = \frac{15}{4}.$$

הפתרון הוא  $x = 10$  וכאן אורך המסלול הוא  $40$  ק"מ.

**סעיף ב**

חישבנו את המרחק ונתנו הזמן של דניאל. מהירותו של דניאל היא  $20 = 40/2$  קמ"ש. אפשר אולי למצוא נוסחה עבור המפגש, אבל פשוט יותר לעבור מקטע קצר ולבודק אם המפגש מתקיים באותו מקטע.

נעה עוברת  $10$  ק"מ בכל מקטע. מה המרחק שעובר דניאל עד סוף המקטע הראשון?  $t_1 = 10/5 = 2$  כך שסוף המקטע הוא ב-  $10:00$ . דניאל רוכב רבע שעה מד-  $09:45$  ועד  $10:00$  ולכן המרחק שהוא עבר הוא רק  $5 = \frac{1}{4} \cdot 20$  ק"מ והפגש לא התקיים במקטע הראשון. מתי נעה מגיעה לסוף המקטע השני?  $t_2 = 10/10 = 1$  כך שסוף המקטע הוא ב-  $11:00$ . בשעה רביע בין  $09:45$  ל  $11:00$  דניאל רוכב  $25 = \frac{5}{4} \cdot 20$  ק"מ, מרחק גדול מהמרחק של נעה, לכן המפגש מתקיים במקטע השני.

נשאר רק לחשב את פרק הזמן בתוך המקטע השני עד למפגש, שנסמך  $t$ . נכתב משווהה למרחקים השווים של נעה ודניאל. נעה רכבה  $10$  ק"מ עד סוף הקטע הראשון ודניאל רכב  $5$  ק"מ. מסוף הקטע הראשון, הם רכבו  $t$  שעות, כל אחד במהירות שלו:

$$\begin{aligned} 10 + 10t &= 5 + 20t \\ t &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**שימו לב**

השאלה מבקשת את שעת המפגש. כבר חישבנו שתחילת המקטע השני בשעה  $10:00$ , ולכן שעת המפגש היא  $10:30$ .

## 1.6 חורף תשע"ז

שני צינורות א' ו-ב' מזרימים מים לברכה בקצב קבוע.

כאשר צינור א' בלבד פתוח, הברכה הריקה מתמלאת לגמרי ב-  $m$  שעות.

כאשר צינור ב' בלבד פתוח, הברכה הריקה מת מלאת לגמרי ב-  $2m$  שעות.

כאשר שני הצינורות פתוחים במקביל, הברכה הריקה מת מלאת לגמרי ביותר מ-  $4$  שעות.

ביום מסויים הברכה הייתה ריקה. פתחו את צינור א' בלבד במשך שעתיים.

אחר כך פתחו גם את צינור ב', ושני הצינורות היו פתוחים בו בזמן שעתיים נוספות.

בתום אותן שעתיים נוספות יותר מ-  $\frac{1}{2}$  הברכה הייתה מלאה.

א. מצא את תחום הערכאים האפשריים של  $m$ .

ב. ביום אחר  $\frac{1}{2}$  הברכה הייתה מלאה. פתחו את שני הצינורות, אלא שבשל התקלה תכנית

צינור ב' רוקן מים מן הברכה במקום למלא בה מים. שני הצינורות היו פתוחים בו בזמן

במשך שעה אחת, ובמהלכה צינור א' מילא מים בברכה וצינור ב' רוקן ממנו מים.

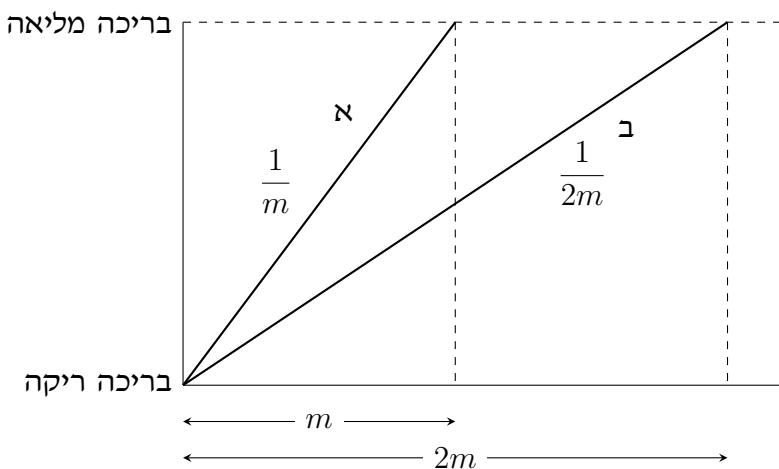
בתום אותה שעה תקלה, ושני הצינורות החלו למלא את הברכה יחד, עד שהיא

התמלאה לגמרי בעבר שעתיים וחצי נוספת.

נתון שהקצב שבו צינור ב' מרוקן מים מהברכה שווה לקצב שבו הוא ממלא אותה במים.

מצא את  $m$ .

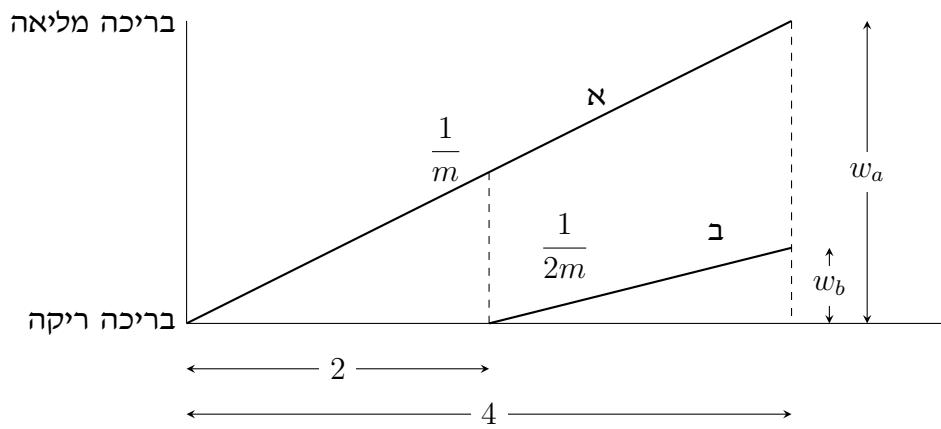
### סעיף א



כאשר שני הצינורות פתוחים, ההספק הכלול הוא סכום ההספקים של הצינורות. לפי הנתונים:

$$1/\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2m}\right) > 4,$$

$$\text{כך ש-} m > 6.$$



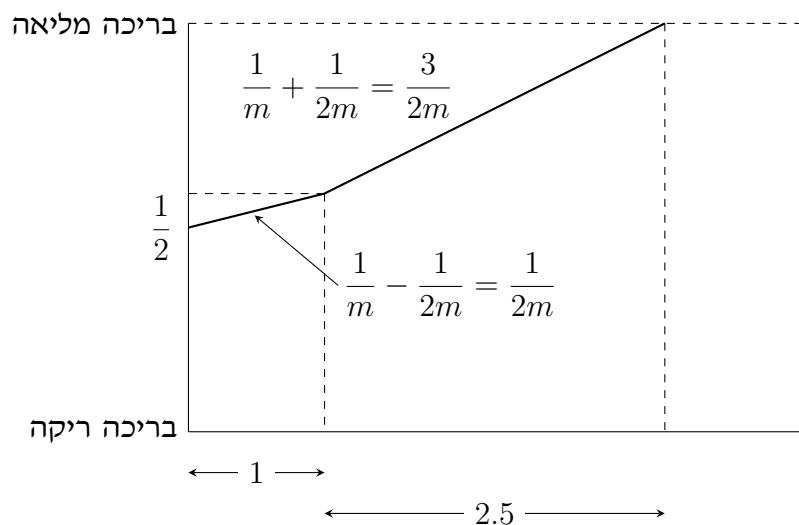
נסמן:  $w_a = \text{כמות המים שמי לא צינור א}, w_b = \text{כמות המים שמי לא צינור ב}.$

כמויות המים לאחר ארבע שעות שווה לסכום הכמות שכל צינור מלא והוא לפחות ממחצית הבריכה:

$$w_a + w_b = \frac{1}{m} \cdot 4 + \frac{1}{2m} \cdot 2 > \frac{1}{2}.$$

. $m < 10$

### סעיף ב



כדי למלא את הבריכה, מתחילה ממחצית הכמות, מוסיפים (מחסירים כי שלילי) את הכמות של השעה הראשונה, ומוסיפים את הכמות מפרק הזמן השני של שעתיים וחצי:

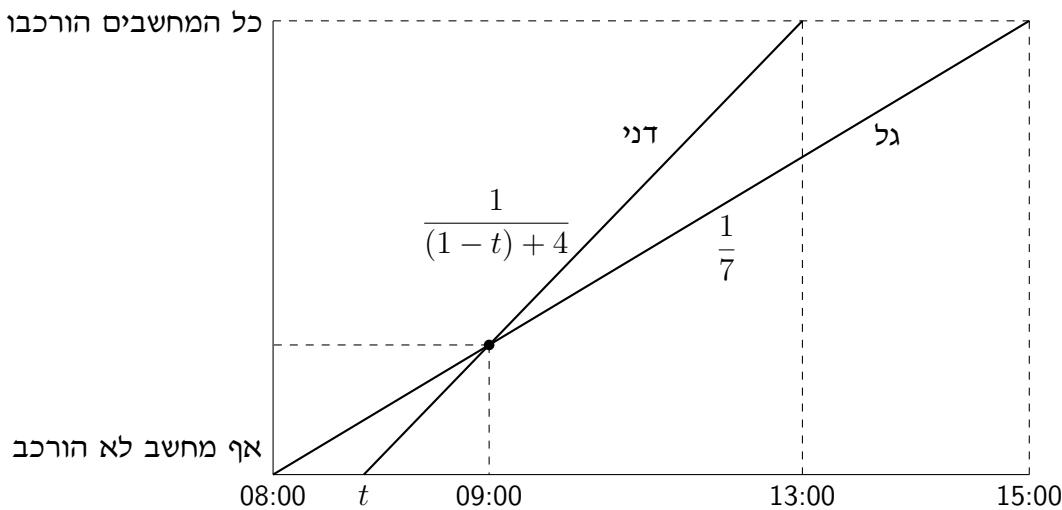
$$\frac{1}{2} + \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{2m} \right) \cdot 1 + \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{2m} \right) \cdot 2.5 = 1.$$

. $m = 8.5$  הפטרון הוא

## 1.7 קיז תשע"ו, מועד ב

- . שני הטכנאים גל ודני עבדו בהרכבת מחשבים. קצב העבודה של כל אחד מהם קבוע.
- . א. ביום העבודה הראשון הרכיבו שני הטכנאים אותו מספר של מחשבים.  
gal התחליל לעבוד בשעה 8:00, וסיים לעבוד בשעה 15:00.  
דני התחליל לעבוד לאחר השעה 00:00 ו לפני השעה 9:00, וסיים לעבוד בשעה 13:00.  
ידעו שגל ודני הרכיבו אותו מספר של מחשבים מהרגע שכל אחד מהם התחליל לעבוד ועד השעה 09:00.  
כמה זמן אחרי השעה 00:00 התחליל דני לעבוד?
- . ב. ביום העבודה השני, התחילו גל ודני לעבוד באותו שעה וסיימו לעבוד באותו שעה.  
בימים זהם הרכיבו סך הכל יחד את אותו מספר מחשבים שהרכיבו יחד ביום העבודה הראשון.  
כמה זמן עבדו הטכנאים ביום העבודה השני?

**סעיף א**



נסמן:  $t = \text{זמן שדני התחליל בהרכבה}$ .  
נשתמש בנתונים כדי למצוא ביטויים עבור ההספקים של דני וגל. נתייחס לכך שהמחשבים שהרכיבם כל אחד כיחידה עבודה אחת. גל עבד שבע שעות ולכן ההספק שלו הוא  $\frac{1}{7}$ , ודני עבד  $t - 1$  עד לשעה 09:00 ולאחר מכן עוד ארבע שעות. ההספק שלו הוא  $\frac{1}{(1-t)+4}$ .

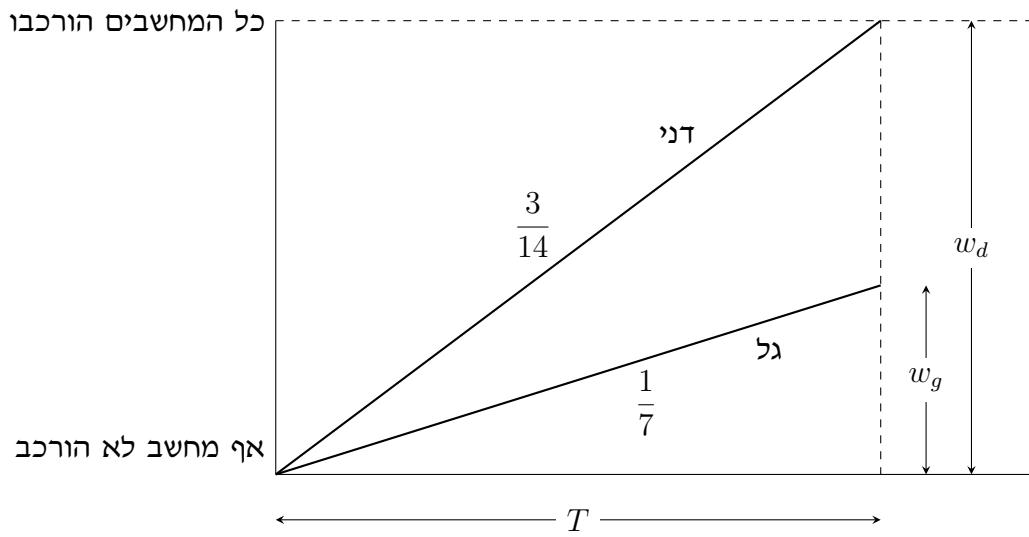
נתון ששבועה 09:00 שניהם סיימו להרכיב אותו כמות של מחשבים:

$$\frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{1}{(1-t) + 4} \cdot (1-t),$$

ולכן דני התחיל לעבוד  $t = \frac{1}{3}$  שעה לאחר 08:00.

### סעיף ב

מציר תרשימים חדש עם המידע הרלוונטי לסעיף זה.



נסמן:  $T$  = הזמן שניהם עבדו ביום השני. על התרשימים סיימנו גם את כמות העבודה שעשה כל אחד מהם:  $w_g$  = העבודה של גל,  $w_d$  = העבודה של דני.

בסעיף א הערכנו שההספק של גל הוא  $\frac{1}{7}$ , וчисבנו שדני עבד:

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) + 4 = \frac{14}{3}$$

שעות. ההספק שלו הוא:

$$\frac{1}{\frac{14}{3}} = \frac{3}{14}.$$

נתון שהם סיימו אותה כמות עבודה כמו היום הראשון:

$$1 + 1 = w_g + w_d = \frac{1}{7}T + \frac{3}{14}T,$$

$$T = \frac{28}{5}$$

## 1.8 קיז תשע"ו מועד א

שתי מכוניות יצאו באותו זמן מעיר א' לעיר ב'.

המרחק בין שתי הערים הוא 300 ק"מ.

המכונית הראשונה נסעה במהירות הגדולה ב- 25 קמ"ש מהמהירות של המכונית השנייה.

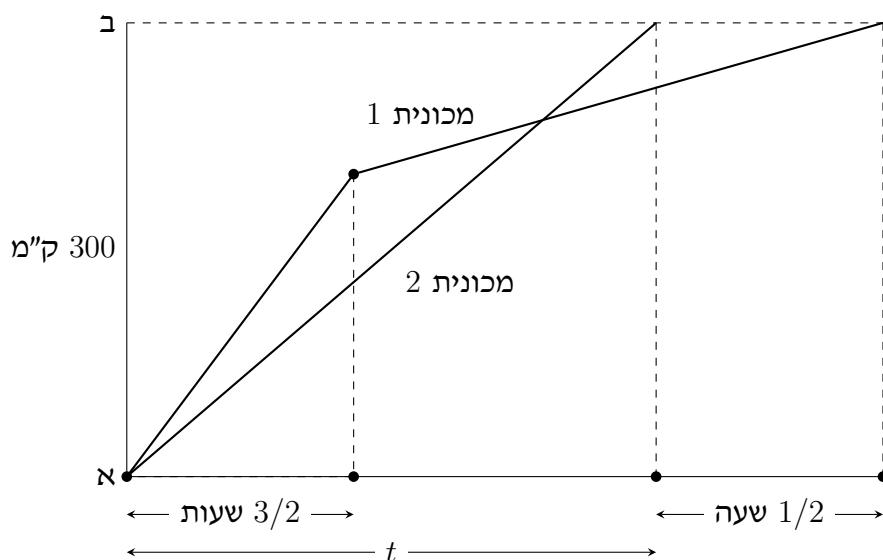
כעבור 1.5 שעות מרגע יציאה מעיר א', הקטינה המכונית הראשונה את מהירותה לחצי מהירותה הקודמת, והגעה לעיר ב'  $\frac{1}{2}$  שעה אחרי המכונית השנייה.

א. מצא את המהירות של המכונית השנייה אם ידוע שמהירותה גדולה מ- 60 קמ"ש.

ב. מצא כעבור כמה שעות מרגע יציאה מעיר א' ולפנוי שהמכונית השנייה השיגה את

המכונית הראשונה, היה המרחק בין שתי המכוניות 12.5 ק"מ

(מצא את שתי האפשרויות).



נסמן:  $v_1$  = מהירות התחלתית של מכונית 1,  $v_2$  = מהירות של מכונית 2,  $t$  = זמן נסעה של מכונית 2 מעיר א' עד לעיר ב'.

נתון:  $v_2 + 25 = v_1$ . השיפוע של הקו של מכונית 1 גדולה מהשיפוע של הקו של מכונית 2.

### סעיף א

שתי המכוניות נסעו אותו מרחק מעיר א' לעיר ב'. נכתוב את משוואות התנועה של שתי המכוניות:

$$\begin{aligned} v_1 \cdot \frac{3}{2} + \frac{v_1}{2} \left( \left( t - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} \right) &= 300 \\ v_2 t &= 300. \end{aligned}$$

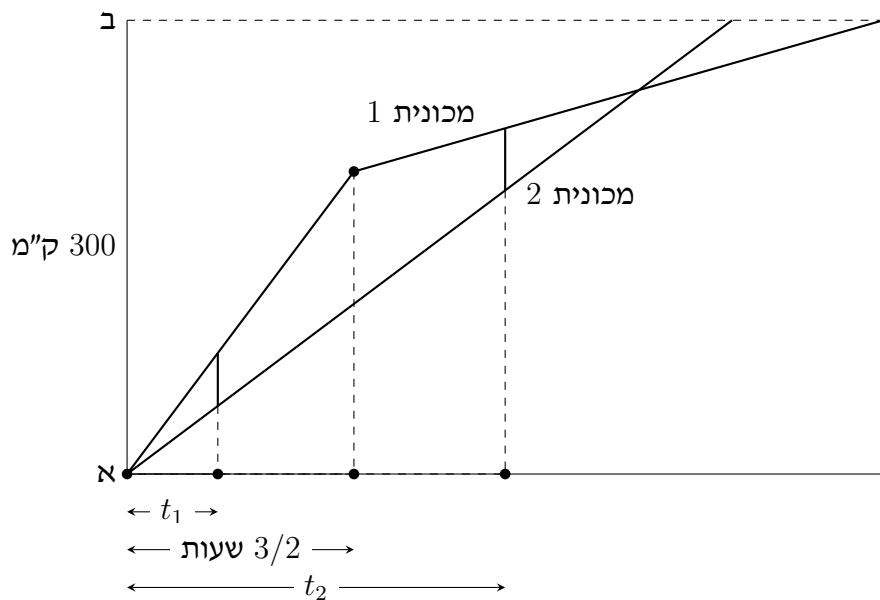
נציב  $v_2 = v_1 + 25$  במשוואת הראשונה ונקבל משווה ריבועית ב-  $v_1$ :

$$v_1^2 - 125v_1 + 3750 = 0.$$

השורשים הם 50, 75 ונתון  $75 > 50$ , לכן  $v_1 = 75$  קמ"ש.

## סעיף ב

נציר תרשים חדש עם המידע הרלוונטי עבור סעיף זה.



הקוויים האנכיים הכלואים בין הקווים של שתי המכוניות מסמנים מרחק של 12.5 ק"מ. קו אחד הוא לפניו שינוי המהירות בזמן  $t_1$  מתחילה הנסעה וקו שני לאחר שינוי המהירות.

בסעיף א' חישבנו  $v_1 = v_2 + 25$  ולבן  $v_1 = 100$  ו $v_2 = 75$ .

נכתב את המשוואות עבור הפרשי המרחקים:

$$\begin{aligned} 100t_1 - 75t_1 &= 12.5 \\ \left(100 \cdot \frac{3}{2} + 50 \left(t_2 - \frac{3}{2}\right)\right) - 75t_2 &= 12.5. \end{aligned}$$

פתרונותם  $t = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{5}{2}$  שניות.

## 1.9 חורף תשע"ו

רוכב אופניים ורוכב אופנו **יעצאו** באותו רגע זה **לקראת** זה **משני יישובים** **שונים**.

הם נפגשו **כעבור 3 שעות**.

רוכב האופנו **עובד**  $\frac{2}{3}$  מהדרך שבין שני היישובים ב- 1.25 שעות פחות מהזמן שרוכב

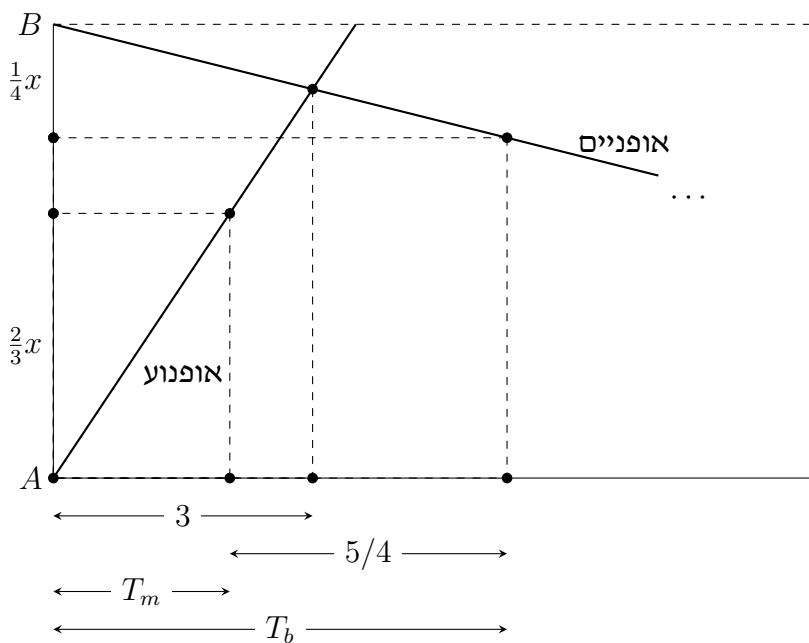
האופניים **עובד**  $\frac{1}{4}$  מהדרך שבין שני היישובים.

**מהירותם הרוכבים** **אין** **משתנות**.

א. **מצא** **בכמה** **mph** **רוכב האופנו** **גדולה** **מן** **mph** **של** **רוכב האופניים**.

ב. **מצא** **בכמה** **שעות** **עובד** **רוכב האופנו** **את** **כל** **הדרך** **שבין** **שני** **היישובים**.

### סעיף א



נסמן:  $v_b$  = מהירות אופניים,  $v_m$  = מהירות אופנו,  $x$  = מרחק בין הערים,  $T_m$  = פרק הזמן שהאופנו **עובד**  $\frac{2}{3}$  מהמרחק,  $T_b$  = פרק הזמן שהאופניים **עובד**  $\frac{1}{4}$  מהמרחק.

כאשר שני כלי הרכב נפגשים סכום המרחקים שהם עברו הוא המרחק בין הנקודות. המרחק לא נתון ולכן אנו משתמשים בנעלם  $x$ :

$$x = 3v_b + 3v_m.$$

הנתון השני הוא הקשר בין זמני הנסיעה של חלקים המרחק בין היישובים:

$$\frac{x/4}{v_b} = \frac{2x/3}{v_m} + \frac{5}{4}.$$

נציב עבור  $x$ , נסמן את היחס בין המהירותים  $r = \frac{v_m}{v_b}$  ונקבל משוואת הריבועית:

$$\frac{3v_b + 3v_m}{4v_b} = \frac{2(3v_b + 3v_m)}{3v_m} + \frac{5}{4}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4}r = \frac{2}{r} + 2 + \frac{5}{4}$$

$$3r^2 - 10r - 8 = 0.$$

$$\text{השורש החיובי הוא } r = \frac{v_m}{v_b} = 4$$

### סעיף ב

נתונה משוואת המרחק בין היישובים:

$$x = 3v_b + 3v_m.$$

נשתמש ביחס שחישבנו בסעיף א כדי לחשב את הזמן של נסיעת האופנו:

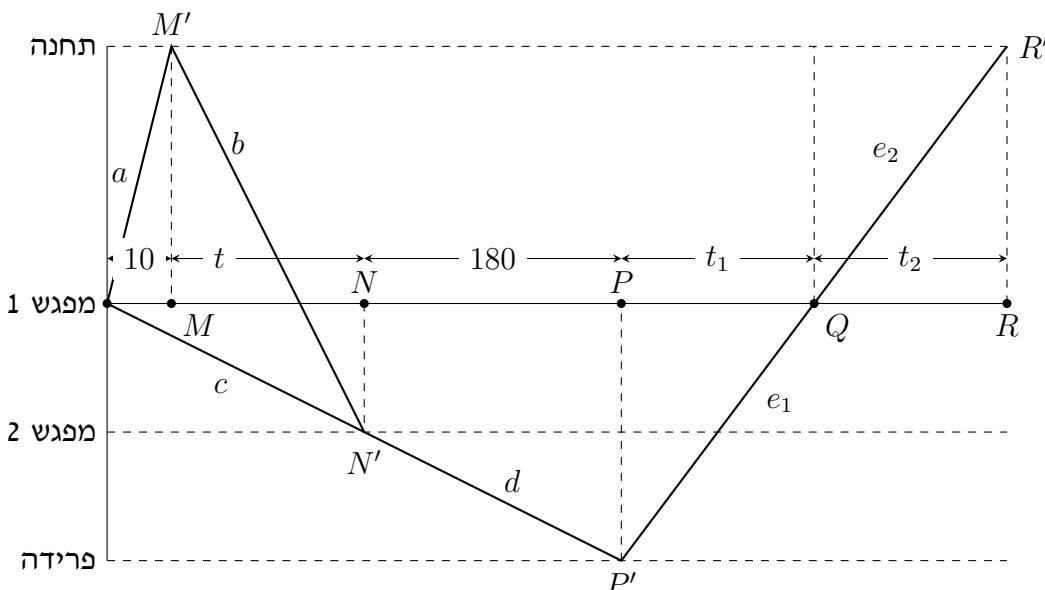
$$\frac{x}{v_m} = \frac{3v_b + 3v_m}{v_m} = 3\frac{v_b}{v_m} + 3 = 3\frac{r}{4} + 3 = \frac{3}{4} + 3 = \frac{15}{4} \text{ שעות.}$$

## 1.10 קיז תשע"ה מועד ב

בזמן הנסיעה באוטובוס הבחן יוסי ברגע מסויים באימהו שלו, הולכת ליד האוטובוס בכיוון הפוך לכיוון הנסיעה של האוטובוס. כעבור 10 שניות מהרגע שiosisי הבחן באימוי, עצר האוטובוס בתחנה, וIOSI רץ מיד כדי להשיג את אימויו. מהירות הריצה של IOSI גדולה פי 2 מהירות ההליכה של אימויו, והוא  $\frac{1}{7}$  מהירות הנסיעה של האוטובוס. כל מהירותו הנקבעות. א. כמה זמן רץ IOSI כדי להשיג את אימויו?

ברגע שiosisי הגיע את אימויו, הם הלכו יחד 3 דקות במהירות ההליכה של אימויו (בכיוון ההליכה שלה). מיד בתום 3 הדקות רץ IOSI בחזרה לתחנת האוטובוס שירד בה. (מהירות הריצה של IOSI היא כמו בסעיף א.).

ב. כמה זמן רץ IOSI בחזרה לתחנת האוטובוס?



בתרשימים סימנו את הקטעים:

$a = \text{IOSI נושא באוטובוס}$

$c = \text{אמא הולכת עד למפגש עם IOSI}$

$e_1 + e_2 = \text{IOSI רץ חזרה לתחנה}$

נסמן:  $t$  = הזמן שיושי רץ מהתחנה כדי להציג את אמא.

נסמן מהירותו:  $v_a$  = יוסי,  $v_b$  = אמא,  $v_y$  = אוטובוס.

נתון:  $v_y = 2v_a$ ,  $v_y = v_b/7$ .

### סעיף א

את הזמן  $t$  נוכל לחשב ממשוואות התנועה מהפגש הראשון (יוסי רואה את אימו) ועד למפגש השני (יוסי משיג את אימו). המרחק מסומן  $NN'$  בתרשים. נוכל למצוא שתי משוואות עבור מרחק זה, אחד עבור אמא (קטע  $c$ ):

$$v_a(t + 10),$$

ואחד עבור יוסי (קטעים  $a, b$ ):

$$-v_b \cdot 10 + v_y t.$$

שימוש לב שבקטע  $a$  יוסי מתרחק מהפגש ולכון מהירותו שלילית.

נשווה את המרחקים ונציב את יחס מהירותו הנתון:

$$v_a(t + 10) = v_y t - v_b \cdot 10$$

$$\frac{v_y}{2}(t + 10) = v_y t - 7v_y 10.$$

הפתרון הוא  $t = 150$  שניות.

### סעיף ב

מהתרשים קל לראות **שני** קטעי הקווים  $e_1, e_2$  מתארים את הרכיה של יוסי בחזרה לתחנה. רואים גם שהמרחק  $PP'$  של  $e_1$  הוא גם המרחק שאמא הולכת, קטעים  $d, c$ . לפי התוצאה של סעיף א, לוקח לאמא  $180 + 150 + 10 = 340$  שניות עבור מרחק זה. נתון שיושי רץ פי שניים מהר יותר מההילכה של אמא, ולכן  $170 = t_1$  שניות.

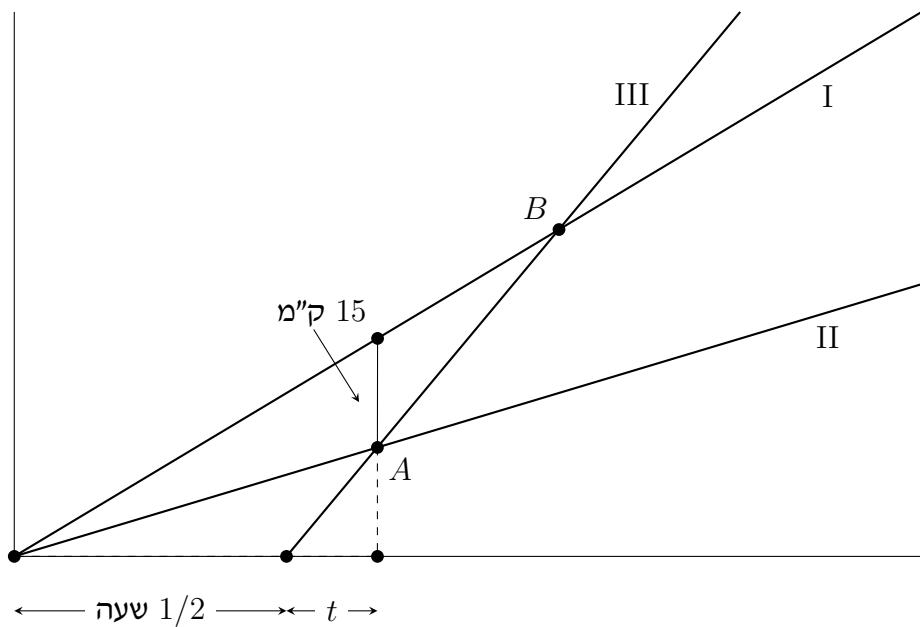
עבור הקטע השני  $e_2$ , המרחק  $RR'$  שווה למרחק  $MM'$ , המרחק שהאוטובוס עבר מהפגש הראשון ועד התחנה. נתון שהאוטובוס עבר מרחק זה ב-10 שניות, ונתון שמהירות הרכיה של יוסי פי שבע לפחות מהירות הנסעה של האוטובוס, כך ש- $70 = t_2$ .

נסכם ונקבל שיושי רץ מנוקדת הפרידה לתחנה ב- $t_1 + t_2 = 240$  שניות.

**שימוש לב למכודות:** זמן ההליכה יחד נתון בדקות ושאר הזמן בשניות.

## 1.11 קיז תשע"ה מועד א

- מכוניות I ומכוניות II יצאו באותו זמן מאותו מקום ולאוטו כיוון.  
 מהירות של מכונית I הייתה 50 קמ"ש, ומהירות של מכונית II הייתה 40 קמ"ש.  
 בעבר חצי שעה מרגע היציאה של שתי המכוניות, יצא גם מכונית III מאותו מקום  
 ולאוטו כיוון.  
 ברגע שמכונית III פגשה במכונית II, המרחק בין מכונית I למכונית II היה 15 ק"מ.  
 מהירות של כל המכוניות היו קבועות.  
 א. מצא את מהירות של מכונית III.  
 ב. האם יתכן שאחרי הפגישה בין מכונית III למכונית II, יהיה המרחק  
 בין מכונית III למכונית I שווה למרחק בין מכונית II למכונית I ? נמק.



המהירות של מכונית I גדולה מהמהירות של מכונית II, ולכן השיפוע שלו תלול יותר.  
 נסמן  $t$  = הזמן בין היציאה של III ועד לפגש שלו עם II,  $v_3$  = המהירות של III.  
 נתון: מהירות של I  $v_1 = 50$ , מהירות של II  $v_2 = 40$ .

### סעיף א

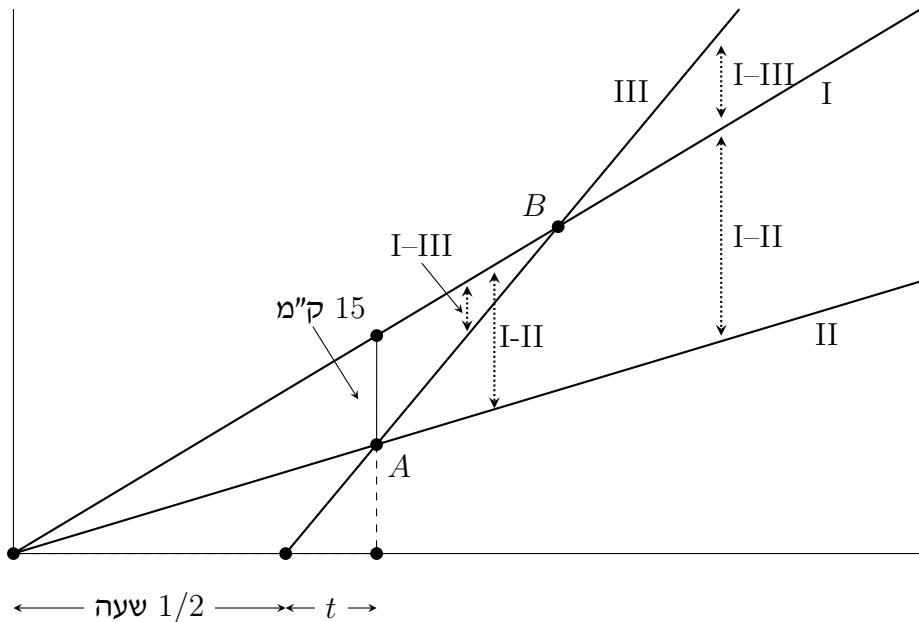
לאחר  $t + 1/2$  שעות, המכוניות II ו-III עברו אותו מרחק, ומכונית I עבר אותו מרחק ועוד 15 ק"מ.  
 כתוב את משוואות התנועה לשני המקרים:

$$\begin{aligned} 40(t + 1/2) &= v_3 t \\ 50(t + 1/2) &= v_3 t + 15. \end{aligned}$$

מהמשוואות מתקיים  $t = 1$  ו $v_3 = 60$  קמ"ש.

## סעיף ב

נוסיף סימונים לתרשים שיעזרו לנו לפתור את הבעיה:



נעין בקווים מנוקדים בתרשים ונראה שהמרחקים לא יכולים להיות שווים. בנקודה  $A$  הרחקים שוים, אבל מנקודה זו ועד לנקודה  $B$ , המרחק  $I-II$  גדול והמרחק  $I-III$  קטן. בנקודה  $B$  המרחק  $I-II$  חיובי והмарחק  $I-III$  שווה לאפס. מכאן ולהלאה, שני המרחקים גדלים באותוקצב כי הפרשי המהירויות שוים:  $60 - 50 = 50 - 40 = 10$  קמ"ש.

### הוכחה בחישוב

נסמן  $t_A$  = זמן מנקודה  $A$ ,  $t_B$  = זמן מנקודה  $B$ ,  $d_B$  = המרחק בין  $I$  ל- $II$  בנקודה  $B$ . משמאלי לנקודה  $B$  המרחקים שוים אם:

$$15 + (v_1 - v_2)t_A \stackrel{?}{=} 15 + (v_1 - v_3)t_A.$$

נציב  $v_1 = 50$ ,  $v_2 = 40$ ,  $v_3 = 60$  ונקבל  $-10 = -10$ , כך הטיעון לא יכול להיות נכון.

מיימין לנקודה  $B$  המרחקים שוים אם:

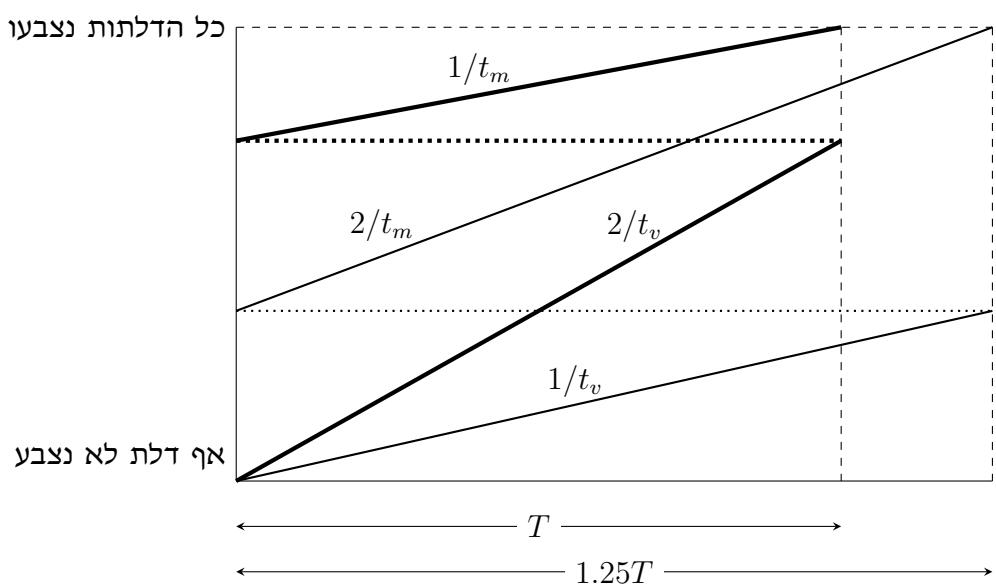
$$(v_3 - v_1)t_B \stackrel{?}{=} d_B + (v_1 - v_2)t_B.$$

לאחר הצבה עבור המהירויות, קיבל שהטיעון נכון אם  $d_B > 15$ .

## 1.12 חורף תשע"ה

- צבעים ותיקים וצבעים מהתלמידים צריכים לצבוע מספר מסויים של דלתות.
- צבע אחד ותיק ו- 2 צבעים מהתלמידים יסייעו את הצבעה בזמן הארוך ב- 25% מהזמן שבו יסייעו את הצבעה 2 צבעים ותיקים וצבע אחד מהתלמיד.
- לכל צבע ותיק אותו קצב עובדה בלתי משתנה, ולכל צבע מהתלמיד אותו קצב עובדה בלתי משתנה. (צבע ותיק עובד יותר מאשר צבע מהתלמיד).
- א. מצא את היחס בין הזמן שצבע מהתלמיד יסייע לבודו את צביעת הדלתות לבין הזמן שצבע ותיק יסייע לבודו את צביעת הדלתות.
- ב. מצא כמה צבעים מהתלמידים צריכים לעבוד עם צבע אחד ותיק, כדי שהם יסייעו את צביעת הדלתות במשך אותו הזמן שבו יסייעו את הצבעה 2 צבעים ותיקים וצבע אחד מהתלמיד.

**סעיף א**



נסמן את הזמן לצביעת כל הדלתות:  $t_v = \text{צבע ותיק}$ ,  $t_m = \text{צבע מתלמיד}$ . השאלה שואלת על יחס בין זמנים, ולכן אין חשיבות לזמן הכלול לצביעת כל הדלתות. נסמן  $1 = \text{זמן הכלול של שני ותיקים ומהתלמיד אחד}$ , ו-  $1.25 = \text{זמן הכלול של שני מתלמידים ותיק אחד}$ .

### הסבר על התרשימים

הצבעים עובדים במקביל אבל הציג בתרשימים מראה **חלוקת העבודה**, כאשרו שצבע (או זוג צבעים) מסיים את חלקו בעבודה ולאחר מכן השם (או הזוג) השני מתחילה את חלקו. כאשר יש זוג צבעים הם רשומים כצבע אחד עם הספק כפול. הקווים הקיימים מראים צבע אחד ותיק ( $1/t_v$ ) ושני צבעים מהתלמידים ( $2/t_m$ ). הקווים העבים מראים שני צבעים ותיקים ( $2/t_v$ ) וצבע אחד מהתלמיד ( $1/t_m$ ).

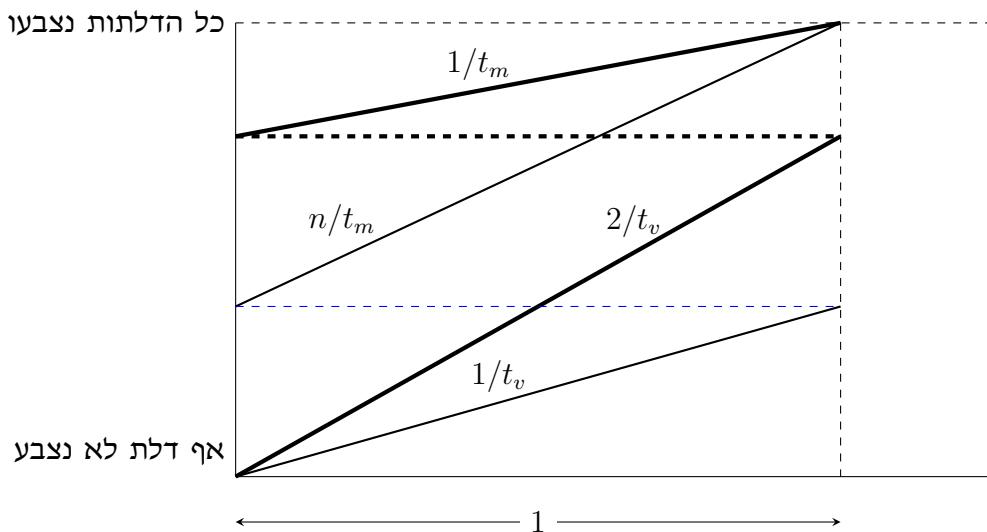
שני הרכיבים סיימו את כל העבודה, ומכאן שימושוות ההספק נותנות אותו ערך:

$$\frac{2}{t_v} \cdot 1 + \frac{1}{t_m} \cdot 1 = \frac{1}{t_v} \cdot 1.25 + \frac{2}{t_m} \cdot 1.25.$$

הפתרון הוא:

$$\frac{t_m}{t_v} = 2.$$

## סעיף ב



נסמן  $n$  = מספר הבכירים המתלמידים. העבודה של שני הרכיבים שווה ולכך:

$$\frac{2}{t_v} + \frac{1}{t_m} = \frac{1}{t_v} + \frac{n}{t_m}.$$

נשתמש ביחס שהישבנו בסעיף א ונקבל:

$$n = \frac{t_m}{t_v} + 1 = 2 + 1 = 3.$$

## 1.13 קיז תשע"ד מועד ב

רץ I ורץ II יצאו באותו רגע מאותו מקום. הם רצו ב מהירות קבועה ובאותו כיוון.

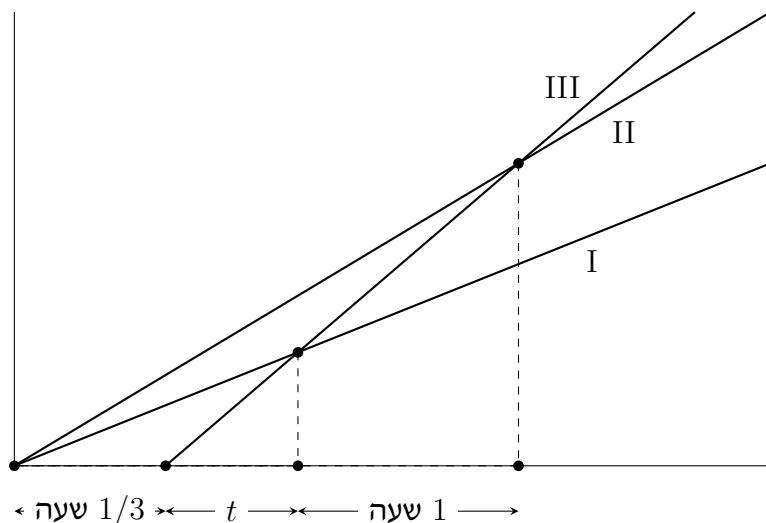
ה מהירות של רץ I הייתה 6 קמ"ש, וה מהירות של רץ II הייתה 7.5 קמ"ש.

כעבור 20 דקות מרגע היציאה של שני הרצים,

יצא רץ III מאותו מקום ובאותו כיוון, והוא רץ ב מהירות קבועה.

רץ III פגש ב דרך את רץ I, ושעה אחר כך הוא פגש את רץ II.

מצא כמה שניות עברו מרגע היציאה של רץ III עד לפגישתו עם רץ II.



נסמן:  $t =$  הזמן בין היציאה של III ועד למפגש עם I,  $v =$  המהירות של III.

נתון:  $6 =$  מהירות של I ו-  $7.5 =$  המהירות של II. שימוש לב לשיפועים של הקווים.

בכל מפגש בין שתי דמיות המרחקים שעברו שווים. המפגש בין I ל-III:

$$6(t + 1/3) = vt,$$

ומפגש בין II ו-III:

$$7.5(1/3 + t + 1) = v(t + 1).$$

מהמשוואת הראשונה קיבל ביטוי עבור  $v$  ונציב במשוואת השניה. קיבל משווהה ריבועית ב- $t$ :

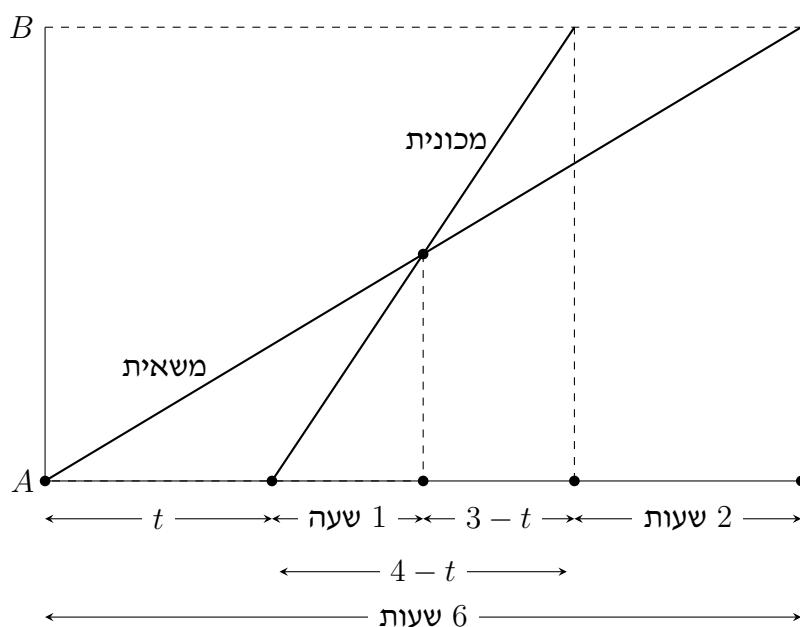
$$1.5t^2 + 2t - 2 = 0,$$

שיש לה פתרון חיובי אחד  $t = 2/3$

הזמן מהיציאה של III ועד המפגש עם II הוא  $t + 1 = 5/3$  שעות.

## 1.14 קיז תשע"ד מועד א

משאית יצאה מעיר A, וכעבור 6 שעות מרגע יציאתה הגיעה לעיר B.  
 זמן מה אחרי יציאת המשאית יצא מכוניות מעיר A,  
 והגעה לעיר B 2 שעות לפני המשאית.  
 המשאית והמכונית נפגשו כעבור שעה מרוגע היציאה של המכונית.  
 מהירותי המשאית ושל המכונית היו קבועות.  
 מצא כמה שעות אחרי רגע היציאה של המשאית יצא המכונית (מצא את שני הפתרונות).



המפתח לפתרון הוא לסמן כל פרק זמן כפי שעשינו בתרשים.  
 נסמן:  $t =$  זמן יציאת המכונית,  $v_c =$  מהירות המכונית,  $v_m =$  מהירות המשאית.  
 נכתוב משוואות למרחקים שווים, מד- $A$  עד למפגש ומד- $A$  עד ל- $B$ :

$$\begin{aligned} v_m(t+1) &= v_c \cdot 1 \\ v_m \cdot 6 &= v_c(4-t). \end{aligned}$$

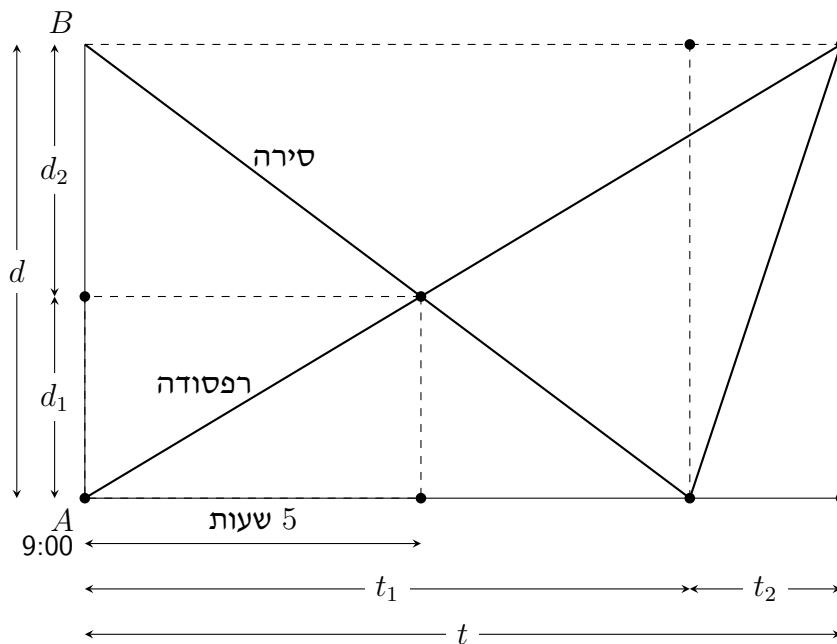
משתי המשוואות מתבלט משווהה ריבועית ב- $t$ :

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

שיש לה שני פתרונות  $t = 1$  שעה ו-  $t = 2$  שעות.

## 1.15 חורף תשע"ד

נמל A ונמל B נמצאים על אותה גדה של נהר, שכיוון הזרם שלו הוא מ- A ל- B . רפסודה הפליגה בשעה 00:00 בבויקר מנמל A אל נמל B , והיא נישאה על גבי הזרם של הנהר כך שמהירות הרפסודה היא מהירות הזרם. באותו שעה הסירה סיירה מנמל B (נגד כיוון הזרם) לכיוון נמל A . מהירות הסירה במים עומדים היא 15 קמ"ש. הסירה הגיעה לנמל A , ומיד חזרה אל נמל B . ידוע כי הרפסודה והסירה הגיעו לנמל B באותו שעה. נתון כי הרפסודה והסירה נפגשו לראשונה כעבור 5 שעות מרגע הפלגתן. האם הסירה והרפסודה הגיעו לנמל B עד לשעה 00:00 בערב באותו יום? נמק. מהירות הזרם ומהירות הסירה במים עומדים הן קבועות. **הערה:** בчисוביך דיקUD ששתי ספרות אחורי הקודעה העשרונית.



נסמן:  $d = d$  מרחק בין שני הנמלים,  $d_1 = d_1$  מרחק בין A למפגש,  $d_2 = d_2$  מרחק בין B למפגש.  $t = t$  זמן עד למפגש ב- B ,  $v = v$  מהירות הזרם.

כאשר הסירה מפליגה מ- B ל- A ובחרזה ל- A , היא עוברת מרחק כפול מהמרחק שהרפסודה עוברת באותו פרק זמן. נשווה את משוואות התנועה:

$$\frac{d}{v} = \frac{d}{15-v} + \frac{d}{15+v}.$$

מצטמצם ונקבל משווה ריבועית ב מהירות הזרם  $v$ :

$$v^2 + 30v - 225 = 0.$$

השורש החיובי שלה הוא  $v = 6.21$ .

עכשו שאנו יודעים את המהירות, והזמן עד לפגש נתון, ננסה לחשב את המרחק  $d$ , שהוא הסכום של המרחקים שעוברם הרפסודה והסירה:

$$d = 5v + 5(15 - v).$$

הפתרון הוא  $d = 75$  (ללא תלות ב מהירות הזרם  $v$ ).

את הזמן עד המפגש ב נמל  $B$  אפשר לחשב לפי הפלגה של הסירה או לפי הפלגה של הרפסודה. כמובן שפשוט יותר לחשב עבור הקטע היחיד של הרפסודה:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{75}{6.21} \approx 12.08.$$

בכל זאת נבדוק לפי הסירה:

$$t = \frac{d}{15-v} + \frac{d}{15+v} = \frac{75}{8.79} + \frac{75}{21.21} = 8.532 + 3.536 \approx 12.07.$$

בגלל עיגול של החישובים יש הבדל קטן בין שתי התוצאות.

הסירה והרפסודה יצאו בשעה 09:00 בבוקר וההפלגות לקחו יותר מ-12 שעות, כך המפגש השני התקיים לאחר השעה 09:00 בערב.

## **המלצות: תנועה והספק**

- בנגד תרשימים חד-ממדיים האורך של קטע קו הוא מרחק הנסיעה, כאן מרחק הנסיעה הוא הפרש בציר האנכי בין נקודת החתלהית לנקודת הסופית. קטע הקו עצמו יהיה משופע וכן יהיה אורך יותר מאשר מרחק הנסעה.
- הקשי בפתרון של בעיות הללו נובע מה צורך לתרגם את התיאורים המילוליים למשוואות. אפשר בклות להתבלבב כאשר מתרגמים ביטויים כגון "לפנוי", "אחרי", "מהר יותר", "לא יותר". בתרשים קל לציג את התיאורים הללו: נקודות שנן "לפנוי" ו-"אחרי" נקודת ייחוס יוצגו שמאליה אוימינה מנקודת הייחוס בציר הזמן. קו המסלול מסלול "מהר יותר" יוצג עם שיפוע תלול יותר מקו המסלול מסלול "לאט יותר".
- מומלץ להכין תרשימים גדולים וברורים כדי שהסטודנטים שמוסיפים מידע נתון או מידע המתקבל מחישובים יהיו קריאים. לעיתים, כדאי להכין תרשימים חדשים לכל סעיף כדי שמיידע הנחוץ רק לסעיף אחד לא יקשה על עיון במידע הנחוץ לסעיף אחר.
- מצאתי שאפשר "לקראא" את המשוואות ישירות מהתרשימים. לחילופין אפשר גם לסדר את הנתונים בטבלה כמפורט.
- נקודות מפגש נוחות מאוד לכתיבת זוג שוואות תנועה עם אותם נעלמים. הזמינים האם אותם זמינים (לפעמים בתוספת קבוע), והמרקם שווים (אם הדמיות נסעות בוtwo כיוון), או שסכום המרחקים שווה למרחק בין נקודות הקצה (כאשר הדמיות נסעות אחת לפני השניה).
- פתרון המשוואות עצמן הוא בדרך כלל קל: שני משוואות עם שני נעלמים, כאשר המשוואות שיש לפתור הן לינאריות או ריבועיות.

## פרק 2 סדרות

### 2.1 קיז תשע"ח מועד ב

2. הסדרה  $a_n$  מוגדרת לכל  $n \in \mathbb{N}$  על ידי כלל הנסיגה:  $a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n}$ ,  $a_1 = -\frac{1}{c}$ . נתון:  $c > 0$ .

א. הוכיח כי האיברים בסדרה  $a_n$  הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים סדרה הנדסית, וכי האיברים בסדרה  $a_n$  הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים גם הם סדרה הנדסית.

ב. (1) רשום את 7 האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$ . הבע את תשובתך באמצעות  $c$  אם יש צורך.

(2) הבע באמצעות  $c$  את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$ .

(3) הוכיח שלכל  $n \in \mathbb{N}$ , הסכום של  $1 - a_1 - a_2 - \dots - a_n$  אינו תלוי ב- $n$ .

ג. הסדרה  $b_n$  מוגדרת באופן הזה:  $b_n = -\frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$ .

(1) הראה כי  $b_n$  היא סדרה הנדסית.

(2) מהו תחום הערכים של  $c$  שבעבורם  $b_n$  היא סדרה יורדת?

(3) נתון שהסדרה האינסופית  $b_n$  היא סדרה יורדת.

הבע באמצעות  $c$  את סכומה.

#### סעיף א

כדי להוכיח שסדרה המוגדרת על ידי כלל נסיגה היא הנדסית, לא כדאי לחשב מנתה של שני איברים עוקבים, כי איברים לא יצטמכו. במקום זה, יש להציב בתוך כלל הנסיגה כדי לקבל ערך של איבר כתלותו של איבר אחר:

$$a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n} = -\frac{c^{n-2}}{-\frac{c^{n-3}}{a_{n-1}}} = ca_{n-1}.$$

ה מנתה  $c = a_{n+1}/a_{n-1}$  קבועה ולא תלוי ב- $n$ . ההוכחה נכונה עבור כל זוג של איברים שיש הפרש של שניים במקומות בסדרה, ולכן ההוכחה נכונה גם עבור מספרים זוגיים וגם עבור מספרים אי-זוגיים.

#### סעיף ב (1)

הסדרות של הזוגיים והאי-זוגיים הן סדרות הנדסיות נפרדות ויש לחשב את האיברים בנפרד:

$$a_1 = -\frac{1}{c}, \quad a_3 = ca_1 = -1, \quad a_5 = ca_3 = -c, \quad a_7 = ca_5 = -c^2$$

$$a_2 = -\frac{c^{1-2}}{a_1} = -\frac{c^{-1}}{-\frac{1}{c}} = 1, \quad a_4 = ca_2 = c, \quad a_6 = ca_4 = c^2.$$

שבעת האיברים הראשונים של הסדרה הם:

$$-\frac{1}{c}, 1, -1, c, -c, c^2, -c^2.$$

**סעיף ב (2)**

כאשר מסכמים את האיברים הם מוצטמצמים פרט לאיבר הראשון, ולכן  $S_7 = -\frac{1}{c}$ .

**סעיף ב (3)**

כאשר יש מספר איזוגי של איברים המתחלים ממוקם איזוגי, מספר האיברים האיזוגיים גדול באחד ממספר האיברים הזוגיים. נבדוק דוגמה:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9.$$

מספר האיברים הוא 9, מהם 5 איזוגיים ו-4 זוגיים.

נוצרך לסכם את זוגיים והאיזוגיים בנפרד, כי הסדרה המקורית אינה הנדסית. עבור שתי התת-סדרות, המנה הינה  $c$ , אבל האיבר הראשון שונה  $-\frac{1}{c}$ :

$$S_{odd} + S_{even} = -\frac{1}{c} \frac{c^n - 1}{c - 1} + 1 \cdot \frac{c^{n-1} - 1}{c - 1} = -\frac{1}{c},$$

לא תלוי ב- $n$ .

**סעיף ג (1)**

כאן הסדרה נתונה על ידי נוסחה ולא כלל נסיגה, ולכן ניתן לחשב יישירות את המנה:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{2}{a_{n+1}a_{n+2}}}{\frac{1}{a_na_{n+1}}} = \frac{\frac{1}{a_{n+2}}}{\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{a_{n+2}}{a_n}} = \frac{1}{c}.$$

**סעיף ג (2)**

סדרה יורדת אם  $c > 1$ , ולכן  $0 < q = \frac{1}{c} < 1$ . נטון  $c > 0$ , ולכן הסדרה יורדת כאשר  $c > 1$ .

**סעיף ג (3)**

עבור סדרה הנדסית יורדת:

$$\begin{aligned} S_b &= \frac{b_1}{1 - (1/c)} \\ &= \frac{-2}{a_1 \cdot a_2} \cdot \frac{c}{c - 1} \\ &= \frac{-2}{-\frac{1}{c} \cdot 1} \cdot \frac{c}{c - 1} = \frac{2c^2}{c - 1}. \end{aligned}$$

## 2.2 קיז תשע"ח מועד א

- a<sub>n</sub> היא סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת שסכוםה שלילי.  
 a<sub>1</sub> הוא האיבר הראשון בסדרה, ר' q היא מנת הסדרה.  
 א. לפניו ארבע טענות (I-IV). רק אחת מהן בהכרח נכונה. צין את מספרה ונמק.

$$q < 0 \quad (\text{I})$$

$$q < 0 \quad \text{וגם} \quad a_1 < 0 \quad (\text{II})$$

$$a_1 < 0 \quad (\text{III})$$

$$q < 0 \quad \text{או} \quad a_1 > 0 \quad (\text{IV})$$

נסמן ב- T את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה a<sub>n</sub>,  
 ונסמן ב- R את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה a<sub>n</sub>.  
 ק הוא פרמטר.

$$\text{נתון: } T + p \cdot R = 0.$$

ב. הביע את ק באמצעות q.

b<sub>n</sub> היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא q.

ג. האם b<sub>n</sub> היא סדרה מתכנסת? נמק.

ד. נתון: q שלילי. הראה שלכל n טבעי T > a<sub>n</sub>.  
 (כלומר הראה שהסדרה a<sub>n</sub> היא סדרה עולה).

### סעיף א

השאלה יפה כי היא דורשת חשיבה, לא חישובים! נבדוק את הטענות על סדרה מוכרת:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2.$$

אם נהפוך את כל הסימנים למינוס, נקבל סדרה שסכוםה שלילי:

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = -2.$$

ברור שהמנה עדין חיובית:

$$\frac{-2^{-(n+1)}}{-2^{-n}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

עבור לסדרה כללית. סדרה הנדסית מתכנסת רק אם  $|q| < 1$ . מהנוסחה עבור הסכום:

$$S = \frac{a_1}{1-q} < 0,$$

ניתן לראות ש- $a_1$  חייב להיות שלילי כי המכנה חיובי  $2 - q < 0$ . אפשר לפסול מיד תשובה IV, II, I ונשאר רק תשובה III.

### סעיף ב'

שני תתי-הסדרות הן הנדסית עם מנתה זהה  $q^2$ . האיברים הראשונים הם  $a_1$  עבור האיזוגים  $1 - a_1q = a_2$  עבור הזוגים. הסכומים הם:

$$T = \frac{a_1}{1 - q^2}, \quad R = \frac{a_1 q}{1 - q^2}.$$

מהמשוואה הנתונה  $0 = T + pR = 1 + pq$ , נקבל  $p = -\frac{1}{q}$  ו-  $1 + pq = 0$ .

### סעיף ג'

הסדרה לא מתכנסת כי  $|q| > 1$  גורר  $|p| > 1$ .

### סעיף ד'

שיםו לב שהשאלה שואלת על **הסדרה המקורית**  $a_n$  ולא על  $b_n$ ! נתון ש- $p$  שלילי ולכן  $q = -\frac{1}{p}$  חיובי. נתון שהסדרה מתכנסת ולכן  $1 < q < 0$ , חיובי. מצאנו בסעיף א' ש- $a_1$  שלילי. מכפלה של מספר שלילי  $x$  עם מספר חיובי פחות מ-1 מקטינה את הערך המוחלט  $|x|$  שלו. ככל השערך המוחלט של מספר שליליים קטן, הערך שלו עולה. לכן,  $a_{n+1} > a_n$ .

נבדוק בדוגמה: אם  $a_n = -6$ ,  $q = \frac{1}{2}$ , אז:

$$a_{n+1} = a_n q = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3 > -6 = a_n.$$

## 2.3 חורף תשע"ח

- 2**  $a_n$  היא סדרה חשבונית שההפרש שלה,  $d$ , שונה מ-0.
- נתון:  $a_7 = -a_{17}$ .
- א. מצא את  $a_{12}$ .
- ב. (1) האם קיימים בסדרה איבר שערכו שווה ל- $a_1$  – ? נמק.
- (2) מצא מספר טבעי  $n$  שעבורו סכום כל האיברים הראשונים בסדרה שווה ל-0.
- ג. האם קיימים  $n$  טבעי ו- $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ ? אם כן – מצא  $n$  כזה, אם לא – נמק.
- ד. האם אפשר לדעת כמה איברים שליליים יש בסדרה? נמק (הבחן בין מקרים שונים).

שאלה זו מתאפיין בהצבה של נוסחאות לאיברים מסוימים בתוך הנוסחאות הכלליות.

### סעיף א

נציב  $n = 7, n = 17$  במשוואת האיבר ה- $n$ :

$$\begin{aligned} a_7 &= a_1 + (7-1)d = -(a_1 + (17-1)d) = -a_{17} \\ a_1 + 11d &= 0 \\ a_{12} &= a_1 + 11d = 0. \end{aligned}$$

### סעיף ב (1)

נשווה את  $-a_1$  – לנוסחה לאיבר כללי:

$$-a_1 = a_n = a_1 + (n-1)d.$$

נציב  $a_1 = -11d$  שישבנו בסעיף א:

$$-(-11d) = -11d + (n-1)d.$$

$n = 23$  מצטמצם ונקבל  $d$

### סעיף ב (2)

נציב  $a_1 = -11d$  בנוסחה לסכום של סדרה חשבונית:

$$\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2 \cdot -11d + (n-1)d) = \frac{dn}{2}(n-23) = 0.$$

נתון שההפרש  $d$  שונה מאפס ושה- $n$  מספר טבעי ולכון חיובי, כך שהביטוי מתאים רק עבור  $n = 23$ .

## סעיף ג

אם איבר חיובי וההפרש חיובי, המכפלה של שני איברים עוקבים היא חיובית, וכך גם אם שניהם שליליים. האפשרות היחידה לקבל מכפלה שלילית היא איבר שלילי והפרש חיובי או איבר חיובי והפרש שלילי:

$$a_k < 0, d > 0 : \quad a_{k+1} = a_k + d > 0$$

$$a_k > 0, d < 0 : \quad a_{k+1} = a_k + d < 0.$$

אבל ידוע שאחד האיברים בסדרה  $(a_{12})$  הוא אפס:

$$\dots, a_{10} < 0, a_{11} < 0, a_{12} = 0, a_{13} > 0, a_{14} > 0, \dots$$

$$\dots, a_{10} > 0, a_{11} > 0, a_{12} = 0, a_{13} < 0, a_{14} < 0, \dots,$$

ולכן המכפלה של זוג איברים עוקבים חייבת להיות חיובית או אפס.

## סעיף ד

נרשום את הסדרה לפי מה שידוע לנו ש- $a_{12} = 0$ :

$$a_1, a_2, \dots, a_{11}, 0, -a_{11}, \dots, -a_2, -a_1, \dots.$$

או ש- $11$  האיברים הראשונים שליליים אם ההפרש חיובי, או כל האיברים לאחר האיבר  $0 = a_{12}$  שליליים אם ההפרש שלילי. הנה דוגמה עם  $d = \pm 2$ :

$$-22, -20, \dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots$$

$$22, 20, \dots, 4, 2, 0, -2, -4, \dots.$$

## 2.4 קיצ' תשע"ז מועד ב

2. נתונה סדרה כללית  $a_n$ .

נסמן ב-  $S_n$  את סכום כל האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$ .

נתון:  $S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}}$  לכל  $n$  טבעי.  $k$  הוא מספר קבוע.

א. הבע את  $a_1$  ואת האיבר הכללי  $a_n$  עבור  $n < 1$  באמצעות  $n$  ו-  $k$  במידת הצורך.

ב. מצא את  $k$  שעבורו הסדרה  $a_n$  היא סדרה הנדסית. נמק.

נגיד:  $T = a_2^2 + a_5^2 + a_8^2 + \dots$  (סכום ריבועי כל איבר שלישי בסדרה  $a_n$  החל מב-  $a_2$ ).

ג. חשב את  $T$ .

שאלה זו שונה משאלות אחרות כי נתון ביטוי עבור **סכוםם** ולא עבור האיברים בסדרה.

### סעיף א

ניתן לחשב את האיברים על ידי שימוש בנוסחה עבור  $S_n$ . האיבר הראשון מתקבל ישירות מהנוסחה:

$$a_1 = S_1 = k - \frac{1}{3^{1+1}} = k - \frac{1}{9},$$

והאיבר הכללי מתקבל על ידי ההפרש בין הנוסחאות לסכומים עוקבים:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \left(k - \frac{1}{3^{n+1}}\right) - \left(k - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{2}{3^{n+1}}.$$

### סעיף ב

המנה  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$  לא תלואה ב-  $n$ . במבט ראשון נראה שההתשובה היא שהסדרה היא הנדסית עבור כל ערך של  $k$ , אולם זו טעות. המנה המתקבלת מ-  $\frac{a_2}{a_1}$  חייבת להיות שווה למנה המתבללת מהמקורה הכללי  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ . נחשב:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{2}{3^3}}{k - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3(9k - 1)} = \frac{1}{3} = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

הפתרון היחיד הוא  $k = \frac{1}{3}$ .

עבור ה**סעיף הבא** נדרש את האיבר הראשון:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

**סעיף ג**

האיבר הראשון בסדרה החדשה הוא:

$$a'_1 = a_2^2 = (a_1 q)^2 = \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{729},$$

הסדרה החדשה היא הנדסית:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_{3(k+1)-1}}{a_{3k-1}}\right)^2 &= \left(\frac{a_{3k+2}}{a_{3k-1}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{qa_{3k+1}}{a_{3k-1}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{q^2 a_{3k}}{a_{3k-1}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{q^3 a_{3k-1}}{a_{3k-1}}\right)^2 = q^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}. \end{aligned}$$

הסכום מתקיים מהנוסחה לסדרה הנדסית אינסופית עבור

$$S' = \frac{a'_1}{1 - q'} = \frac{\frac{4}{729}}{1 - \frac{1}{729}} = \frac{1}{182}.$$

## 2.5 קיז תשע"ז מועד א

$$\cdot a_n = \frac{(2^n + 1)(2^n - 1)}{2^n}$$

.  $a_n = b_n - c_n$  הן סדרות הנדסיות שכל איבריהן חיוביים, המקייםות לכל  $n$  טבעי:

$$\text{נתון: } b_6 = 64, c_3 = \frac{1}{8}$$

א. (1) מצא את  $b_1$  ואת המנה של הסדרה.

(2) מצא את  $c_1$  ואת המנה של הסדרה.

את סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$  נסמן ב-  $A_n$ .

את סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה  $b_n$  נסמן ב-  $B_n$ .

ו את סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה  $c_n$  נסמן ב-  $C_n$ .

ב. הראה ש-  $C_n = B_n - A_n$

ג. עבור אילו ערכי  $n$  מתקיים האידויון:  $0.9 < B_n - A_n < 1$  ?

הנוסחה ל-  $a_n$  אינה כלל נסיגה כי איברים של הסדרה לא מופיעים בצד הימני של המשוואה. נתון

שהסדרות  $b_n, c_n$  הנדסיות אך לא נתון אם הסדרה המקורית  $a_n$  הנדסית או לא.

**סעיף א (1,2)**

נתון ש-  $a_n = b_n - c_n$ , לכן כדי לקבל ערך של איבר בסדרה  $b_n$ , נctrיך לחשב את הערכים  $a_n, c_n$  ובאופן דומה עבור איברים בסדרה  $c_n$ . נתון שני ערכי  $b_6, c_3$  וקל לחשב איברים  $a_n$  כי הם נתונים כפונקציה של  $n$  בלבד:

$$a_3 = \frac{(2^3 + 1)(2^3 - 1)}{2^3} = \frac{63}{8} \quad a_6 = \frac{(2^6 + 1)(2^6 - 1)}{2^6} = \frac{65 \cdot 63}{64}$$

$$b_3 = a_3 + c_3 = \frac{63}{8} + \frac{1}{8} = 8 \quad c_6 = b_6 - a_6 = 64 - \frac{65 \cdot 63}{64} = \frac{1}{64}.$$

כדי לחשב את המנה של  $b_n$  והמנה של  $c_n$  השתמש בתוון שהן סדרות הנדסיות. את האיבר השלישי של הסדרות קיבל מהאיבר השלישי על ידי הכפלתו במנה לחזקה שלוש:

$$b_6 = b_3 q_b^3, \quad q_b = \sqrt[3]{\frac{b_6}{b_3}} = \sqrt[3]{8} = 2 \quad b_3 = b_1 q_b^2, \quad b_1 = \frac{b_3}{q_b^2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$c_6 = c_3 q_c^3, \quad q_c = \sqrt[3]{\frac{c_6}{c_3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \quad c_3 = c_1 q_c^2, \quad c_1 = \frac{c_3}{q_c^2} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}.$$

## סעיף ב

הטייעון נובע מחוקיקי הקיבוץ והחילוף של מספרים שלמים:

$$\begin{aligned} C_n &= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n) \\ &= (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= B_n - A_n. \end{aligned}$$

## סעיף ג

הוכחנו ש- $C_n = B_n - A_n$ , ונתונה שהסדרה  $c_n$  הנדסית. מסעיף א' ולבו:

$$C_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = 1 - 2^{-n}.$$

בדיקה במחשבון מראה ש:

$$0.9 < 1 - 2^{-3} = 0.875 < 1$$

$$0.9 < 1 - 2^{-4} = 0.938 < 1.$$

לא לעצור לנו! השאלה מבקשת את **כל הערכים** של  $n$  המקיימים את האידויון, ולכן התשובה המלאה היא כל מספר גדול או שווה ל- $-4$ , כי כאשר  $n$  גדול מעלה  $-4$ , הערך של  $1 - 2^{-n}$  עולה (ולכן גדול מ-0.9) אבל תמיד פחות מ-1.

## 2.6 חורף תשע"ז

נתונה סדרה  $a_n$  המקיים את כלל הנסיגה:  $a_1 = -1$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n}{4 \cdot a_n + 3}$

$$\text{נגיד סדרה חדשה } b_n = \frac{1}{a_n} + 2$$

א. הוכח כי  $b_n$  היא סדרה הנדסית.

$$\text{ב. הבע באמצעות } n \text{ את הסכום: } \cdot \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

ג. נתון:  $n$  הוא מספר זוגי.

$$\cdot \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$$

### סעיף א

נחשב את המנה על ידי הצבה עבור  $b_n$  לפי ההגדרה, ולאחר כך הצבה עבור  $a_{n+1}$  לפי כלל הנסיגה. נקבל מנה קבועה ולכן הסדרה הנדסית:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + 2}{\frac{1}{a_n} + 2} = \frac{\frac{4a_n + 3}{a_{n+1}} + 2}{\frac{1}{a_n} + 2} = \frac{\frac{3(2a_n + 1)}{a_{n+1}} + 2}{\frac{1}{a_n} + 2} = \frac{3(2a_n + 1)}{2a_n + 1} = 3.$$

### סעיף ב

לא נתון שהסדרה  $a_n$  הנדסית, אבל בסעיף א הוכיחו שהסדרה  $b_n$  הנדסית, ולכן ניתן לבטא את סכום הסדרה  $\frac{1}{a_i}$  כסכום של הסדרה  $b_n$  על ידי החוצה  $b_i - 2$ :

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = (b_1 - 2) + \dots + (b_n - 2) = b_1 + \dots + b_n - 2n.$$

נתון ש  $a_1 = -1$ ,  $b_1 = \frac{1}{a_1} + 2 = 1$  והוא קבועה. סכום הסדרה של  $b_n$  הוא:

$$b_1 + \dots + b_n = \frac{1(3^n - 1)}{3 - 1} - 2n = \frac{3^n - 4n - 1}{2}.$$

### סעיף ג

לפי ההגדרה של  $b_n$  נוכל לבטא את הסכום כך:

$$(b_1 - 2) - (b_2 - 2) + \dots + (b_{n-1} - 2) - (b_n - 2).$$

נתון שמספר האיברים הזוגיים ולכן סכום הקבועים מתאפס. המנה של הסדרה היא  $-3$  – והסכום הוא:

$$b_1 - b_2 + \dots + b_{n-1} - b_n = \frac{1((-3)^n - 1)}{-3 - 1} = \frac{(-3)^n - 1}{-4} = \frac{1 - 3^n}{4},$$

כי מספר האיברים הזוגיים ולכן  $(-3)^n = 3^n$ .

## 2.7 קיז תשע"ו מועד ב

- .2. נתונה סדרה חשבונית שיש בה  $n$  איברים. הפרש הסדרה הנתונה הוא 3, בין כל שני איברים עוקבים הכניסו איבר אחד נוספת, וኖצרה סדרה חשבונית חדשה.
- (1) הראה כי היחס בין סכום האיברים בסדרה החדשה לסכום האיברים בסדרה הנתונה הוא  $\frac{2n-1}{n}$ .
- (2) נתון כי היחס שਮופיע בתת-סעיף (1) שווה ל-1.9. סכום של כל האיברים שהכניסו לסדרה הנתונה הוא 130.5. מצא את האיבר הראשון בסדרה הנתונה.
- ב. יוצרים סדרה חשבונית נוספת על ידי הכנסת  $k$  איברים בין כל שני איברים עוקבים של הסדרה הנתונה. הביע באמצעות  $k$  את הפרש הסדרה המתבקשת.

### סעיף א (1)

מספר האיברים החדשים הוא  $1 - n$ , כפי שראויים אם רושמים את הסדרה:

$$a_1, a'_1, a_2, a'_2, \dots, a_{n-1}, a'_{n-1}, a_n.$$

נתון שהסדרה החדשה גם היא חשבונית. הפרש הסדרה אינו מספרשלם אלא 1.5! אז מה? נחשב את היחס בין סכומי הסדרות, כאשר האיבר  $a_1$  מצטמצם:

$$\frac{S_{new}}{S_{old}} = \frac{\frac{2n-1}{2}(2a_1 + 1.5((2n-1)-1))}{\frac{n}{2}(2a_1 + 3(n-1))} = \frac{\frac{2n-1}{2}(2a_1 + 3(n-1))}{\frac{n}{2}(2a_1 + 3(n-1))} = \frac{2n-1}{n}.$$

### סעיף א (2)

מ- $\frac{2n-1}{n} = 1.9$  נקבל  $2n-1 = 1.9n$ . אם הסדרה הנתונה חשבונית וגם הסדרה החדשה חשבונית, סדרת האיברים החדשים היא חשבונית עם אותו הפרש כמו בסדרה המקורית, 3. האיבר הראשון של האיברים החדשים הוא  $a'_1 = a_1 + 1.5$ , וננתן סכום האיברים החדשים:

$$\frac{10-1}{2}(2(a_1 + 1.5) + ((10-1)-1) \cdot 3) = 130.5,$$

והפתרון הוא  $a_1 = 1$ .

### סעיף ב

נתון שהסדרה המתבקשת לאחר הכנסת  $k$  איברים חדשים בין איברים סמוכים של הסדרה הנתונה:

$$a_i, b_1, b_2, \dots, b_k, a_{i+1}$$

היא חשבונית. ההפרשים בין האיברים החדשים חייבים להיות שווים וסכום שווה להפרש של הסדרה הנתונה שהוא 3. יש  $k+1$  הפרשים שערכם  $\frac{3}{k+1}$ .

## 2.8 קיז תשע"ו מועד א

- .  $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$  המקיים:  
א. מצא את הסכום של 19 האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$ .

הסדרה  $S_n$  היא סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה  $a_n$ : ...  
נתון כי  $a_n \cdot n = S_n$  לכל  $n$  טבעי.

- ב. הראה כי הפרש הסדרה  $a_n$  הוא 0.  
ג. היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את  $a_1$ .  
ד. היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את הסכום  
.  $(b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \dots + (b_{20} - b_{19})$

### סעיף א

האיברים  $a_4, a_8, a_{12}, a_{16}$  מהווים סדרה חשבוועית עם הפרש  $d^4$ . נתון הסכום של הסדרה:

$$\begin{aligned}(a_1 + 3d) + (a_1 + 7d) + (a_1 + 11d) + (a_1 + 15d) &= 224 \\ a_1 + 9d &= 56.\end{aligned}$$

יש לנו משווה אחת עם שני נעלמים. לא נתיאש וננסה בכל זאת לחשב את הסכום  $S_{19}$ :

$$S_{19} = \frac{19}{2}(2a_1 + 18d) = 19(a_1 + 9d) = 19 \cdot 56 = 1064.$$

### סעיף ב

נשווה את המשווה הנתונה  $S_n = n \cdot a_n$  לנוסחה עבור סכום של סדרה חשבוועית:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = n \cdot a_n = n(a_1 + (n-1)d).$$

נפשת את המשווה ונקבל  $d = d/2 = 0$  שהפתרון היחיד שלו הוא 0.

### סעיף ג

נציב 0 עבור  $d$ :  $a_1 + 9d = a_1 + 0 = 56$

### סעיף ד

במבחן ראשון נראה שכדי לצלם את סכום הסדרה  $b_{20} - b_1$ , אבל זה מבוי סתום כי אין לנו דרך לחשב את איברי הסדרה  $b_n$ . במקום זה נחשב את  $(b_{i+1} - b_i)$  ומייעזר במשווה הנתונה:

$$b_{i+1} - b_i = a_i + S_i = (a_1 + (i-1) \cdot 0) + \frac{i}{2}(2a_1 + (i-1) \cdot 0) = a_1(1+i).$$

הסכום הוא:

$$a_1(2 + 3 + \dots + 20) = 56 \cdot \frac{19}{2}(2 \cdot 2 + (19-1) \cdot 1) = 11704.$$

## 2.9 חורף תשע"ו

נתונה סדרה הנדסית עולה: 2.  
 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

ההפרש בין האיבר הרביעי בסדרה לאיבר השלישי גדול פי 4

מההפרש בין האיבר השני לאיבר הראשון.

האיבר השישי בסדרה גדול ב- 31 מהאיבר הראשון.

א. מצא את מנת הסדרה, ואת האיבר הראשון בסדרה.

ב. מהסדרה הנתונה בנו שתי סדרות חדשות, I ו- II:

$$\text{I. } a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, a_3 \cdot a_4, \dots, a_n \cdot a_{n+1}, a_{n+1} \cdot a_{n+2}$$

$$\text{II. } \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_3}, \frac{a_4}{a_3} + \frac{a_5}{a_4}, \dots, \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

(1) האם כל אחת מהסדרות החדשות היא סדרה הנדסית עולה? נמק.

הסכום של כל האיברים בסדרה I הוא 2730.

(2) מצא את מספר האיברים בסדרה I.

(3) מצא את הסכום של כל האיברים בסדרה II.

### סעיף א

נתון:

$$(1) a_4 - a_3 = 4(a_2 - a_1), \quad (2) a_6 - a_1 = 31.$$

נציב  $.q = 1, q = 2, q = -2$  עבור  $a_n = a_1 q^{n-1}$ , נקבע שłówש תשובות (1), (2), (3), ונמצא את מנת הסדרה **עליה** ולכн  $a_1 = 1$ .

### סעיף ב (1)

עבור סדרה I:

$$q_I = \frac{a_{n+1} \cdot a_{n+2}}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_n q^2}{a_n} = q^2 = 4,$$

והסדרה היא סדרה הנדסית **עליה**. עבור סדרה II:

$$q_{II} = \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right) / \left( \frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \frac{q + q}{q + q} = 1.$$

הסדרה הנדסית אבל **לא עליה**.

### סעיף ב (2)

סכום הסדרה ניתן לחשב את מספר האיברים בסדרה:

$$a_1 \cdot a_2 + \dots + a_{n+1} \cdot a_{n+2} = 2730$$

$$(1 \cdot 2) \cdot \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} = 2730$$

$$4^{n+1} = 4096$$

$$n = 5.$$

**משמעותו!** אם  $n = 5$  אбел מספר האיברים בסדרה I הוא  $n + 1 = 6$

- (1)  $a_1 \cdot a_2$ , (2)  $a_2 \cdot a_3$ , (3)  $a_3 \cdot a_4$ , (4)  $a_4 \cdot a_5$ , (5)  $a_5 \cdot a_6$ , (6)  $a_6 \cdot a_7 (= a_{n+1} \cdot a_{n+2})$ .

**סעיף ב (2)**

נחשב את  $a_1^{II}$ . נישבנו  $1 = q_{II}$ .

$$a_1^{II} = \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} + \frac{4}{2} = 4.$$

**משמעותו!** מספר האיברים בסדרה II הוא 5:

$$(1) \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2}, (2) \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_3}, (3) \frac{a_4}{a_3} + \frac{a_5}{a_4}, (4) \frac{a_5}{a_4} + \frac{a_6}{a_5}, (5) \frac{a_6}{a_5} + \frac{a_7}{a_6} \left( = \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right).$$

ולכן סכום האיברים הוא:

$$(a_1^{II}) + (a_1^{II} \cdot 1^1) + (a_1^{II} \cdot 1^2) + (a_1^{II} \cdot 1^3) + (a_1^{II} \cdot 1^4) = 5a_1^{II} = 20.$$

## 2.10 קיז תשע"ה, מועד ב

- .2. נתונה סדרה  $b_n$  המקיימת את הכלל  $b_{n+1} = \frac{1}{2^n} \cdot b_n$
- א. הוכח כי האיברים העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה הנדסית, וגם האיברים העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה הנדסית.
- ב. סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה  $b_n$  שווה ל-  $\frac{7}{16}$ .  
מצא את  $b_1$  (מצא את שתי האפשרויות).

### סעיף א

החילוק של איברים במרחב שני מקומות אחד מהשני לא תלוי בזוגיות:

$$\frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{1}{2^{n+1}b_{n+1}} \cdot \frac{1}{b_n} = \frac{1}{2^{n+1} \cdot \frac{1}{2^n}b_n} = \frac{1}{2}.$$

### סעיף ב

לא נתון שהסדרה  $b_n$  הנדסית, ולכן יש לחשב בנפרד את הסכום של ארבעת האיברים הזוגיים וארבעת האיברים האי-זוגיים:

$$\begin{aligned} S_{odd} &= b_1 + b_3 + b_5 + b_7 = b_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{15}{8}b_1 \\ S_{even} &= b_2 + b_4 + b_6 + b_8 = b_2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{15}{8}b_2 = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{2^1}b_1. \end{aligned}$$

מ:

$$S_{odd} + S_{even} = \frac{15}{8} \left(b_1 + \frac{1}{2b_1}\right) = 3\frac{7}{16} = \frac{55}{16},$$

נקבל משוואה ריבועית 0  $6b_1^2 - 11b_1 + 3 = 0$

## 2.11 **קייז תשע"ה מועד א**

- .  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  נתונה סדרה הנדסית אינ-סופית יורדת שכל איבריה חיוביים: כל איבר בסדרה זו (חו"ז מהראשון) הוא  $\frac{2}{5}$  מסכום שני האיברים הסמוכים לו, אחד לפניו ואחד אחריו.

א. מצא את המנה של הסדרה .

ב. נתונה הסדרה  $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$

(1) הוכח כי הסדרה  $b_n$  היא סדרה הנדסית.

(2) סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה  $b_n$  הוא 20,460 .

מצא את סכום כל האיברים בסדרה  $a_n$  .

### **סעיף א**

נתון:

$$a_n = \frac{2}{5}(a_{n-1} + a_{n+1}) = \frac{2}{5} \left( \frac{a_n}{q} + qa_n \right)$$

עבור  $n \geq 2$  מוצטמצם ונקבל משווה ריבועית  $2q^2 - 5q + 2 = 0$  שיש לה שני פתרונות  $q = \frac{1}{2}, q = 2$ .

### **סעיף ב (1)**

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{a_{n+2}}{(a_{n+1})^2}}{\frac{(a_n)^2}{a_{n+1}}} = \frac{a_{n+2}}{(a_{n+1})^2} \cdot \frac{(a_n)^2}{a_{n+1}} = \frac{a_n q^2}{(a_n q)^2} \cdot \frac{(a_n)^2}{a_n q} = \frac{1}{q} = 2 .$$

### **סעיף ב (2)**

מ:

$$S_{10} = \frac{b_1(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 20460$$

מתקובל  $b_1 = 20$ . השאלה מבקשת את סכום הסדרה המקורית  $a_n$ . כבר חישבנו את המנה שלה  $q = \frac{1}{2}$ , וניתן לחשב את האיבר הראשון מהנוסחה עבור  $a_n$ :

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1^2} = \frac{a_1 q}{(a_1)^2} = \frac{1}{2a_1}$$

$$a_1 = \frac{1}{2b_1} = \frac{1}{40}$$

$$S_a = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{40 \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{20} .$$

## 2.12 חורף תשע"ה

.2 סדרה מוגדרת לכל  $n \geq 1$  טبוי על ידי הכלל:

$$a_1 = 4$$

$$a_n + a_{n+1} = 4n + 2$$

א. אם בסדרה יש 100 איברים, מצא את הסכום של שני האיברים העומדים במקומות

האמצעיים בסדרה.

ב. הוכח כי איברי הסדרה העומדים במקומות אי-זוגיים מהווים סדרה חשבונית,

וגם איברי הסדרה העומדים במקומות זוגיים מהווים סדרה חשבונית.

אם בסדרה יש 101 איברים, מצא:

ג. את האיבר העומד באמצע הסדרה.

ד. את הסכום של כל איברי הסדרה.

**שימו לב** שלא ניתן לומר שהסדרה  $a_n$  חשבונית.

### סעיף א

כדי לרשום את איברי הסדרה כדי לוודא מהם האיברים الأوسطים:

$$\overbrace{a_1, a_2, \dots, a_{49}}^{50}, \overbrace{a_{50}, a_{51}, a_{52}, \dots, a_{100}}^{50} .$$

ניתן לחשב את הסכום מהגדרת הסדרה:

$$a_{50} + a_{51} = 4 \cdot 50 + 2 = 202 .$$

### סעיף ב

במבט ראשון השאלה נראהת בעייתית כי נתונה נוסחה לחישוב איברים סמוכים זה לזה  $a_n + a_{n+1}$ , אבל האיברים הזוגיים נמצאים במרחק שני מקומות זה מזה וכך גם האיברים האי-זוגיים  $a_{n+2} - a_n$ . חבל שאין לנו  $a_n - a_{n+1} - a_{n+2} - a_n$ . צמד הביטויים האלה יכול לרמזו ל-"טריק" ידוע במתמטיקה: אם נוסיף ונהסיר את אותו ערך לביטוי, ערך הביטוי לא משתנה:

$$\begin{aligned} a_{k+2} - a_k &= a_{k+2} + (a_{k+1} - a_{k+1}) - a_k \\ &= (a_{k+2} + a_{k+1}) - (a_{k+1} + a_k) \\ &= (4(k+1) + 2) - (4k + 2) \\ &= 4 . \end{aligned}$$

ההפרש קבוע ולא תלוי בזוגיות, ולכן הזוגיים והאי-זוגיים מהווים סדרות חשבוניות.

## סעיף ג

לא ידוע שהסדרה  $a_n$  חשבונית, אבל  $a_{51}$  הוא איבר בסדרת **האי-זוגיים**. נרשום את הסדרה כדי לדijk במספר האיברים הזוגיים והאי-זוגיים:

$$\overbrace{a_1, a_2, \dots, a_{49}, a_{50}}^{50}, a_{51}, \overbrace{a_{52}, \dots, a_{100}, a_{101}}^{50}.$$

ברור שמספר האיברים האי-זוגיים גדול באחד ממספר האיברים הזוגיים, 51 אי-זוגיים ו-50 זוגיים.  $a_{51}$  הוא האיבר ה-25 העומד באמצע סדרת האי-זוגיים. האיבר הראשון של סדרת האי-זוגיים נתון,  $a_1 = 4$ , ואת ההפרש  $d = 4$  חישבנו בסעיף הקודם. מכאן:

$$a_{51} = a_1 + 25d = 4 + 25 \cdot 4 = 104.$$

## סעיף ד

נחשב את סכום הסדרה כחיבור של סכום האי-זוגיים וסכום הזוגיים.  $a_1 = 4$  נתון, ואת  $a_2$  ניתן:  $a_{n+1} = (4n + 2) - a_n$  שהיא  $a_n + a_{n+1} = 4n + 2$

$$a_2 = a_{1+1} = (4 \cdot 1 + 2) - a_1 = 2.$$

כבר חישבנו שהפרשים של שתי תת-הסדרות הם 4. מספר האי-זוגיים הוא 51 ומספר הזוגיים הוא 50. הסכום הוא:

$$S = S_{odd} + S_{even} = \frac{51}{2}(2 \cdot 4 + 50 \cdot 4) + \frac{50}{2}(2 \cdot 2 + 49 \cdot 4) = 5304 + 5000 = 10304.$$

## 2.13 קיז תשע"ד מועד ב

.2. נתונה סדרה חשבונית:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ , מקיימים:

$$a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$$

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$$

א. מצא את האיבר  $a_n$ .

ב. לקחו חלק מהאיברים בסדרה הנתונה ובנו סדרה חשבונית חדשה:  
 $a_5, a_9, a_{13}, \dots, a_{4k+1}$   
 סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 450.  
 האיבר הראשון בסדרה הנתונה בפתרונות הוא  $-21$   
 מצא את הערך של  $k$ .

### סעיף א

הסדרה חשבונית ולכן ניתן להציב בתוקן המשוואות הנתונות ולקבל שתי משוואות עם שני נעלמים:

$$\begin{aligned} (a_n + 2d)^2 - a_n^2 &= 216 \\ 4a_n d + 4d^2 &= 216 \\ a_n + (a_n + d) + (a_n + 2d) &= 54 \\ 3a_n + 3d &= 54. \end{aligned}$$

$$\text{פתרונות הוא } d = 3, a_n = 15$$

### סעיף ב

הסדרה החדשה חשבונית שאיבריה  $a'_1, a'_2, \dots$  הם:

$$\overbrace{a_5 = a_1 + 4d}^{a'_1}, \quad a_6 = a_5 + 5d, \quad a_7 = a_5 + 6d, \quad a_8 = a_5 + 7d, \quad \overbrace{a_9 = a_5 + 8d}^{a'_2}.$$

בסדרה החדשה  $a'_1 = a_5 = -21 + 4d = -9$  ו-  $d' = 4d = 12$ . מסכום הסדרה החדשה:

$$\frac{k}{2}(2a'_1 + (k-1)d') = \frac{k}{2}(-18 + (k-1) \cdot 12) = 450,$$

$$\text{מתקבלת המשוואה ריבועית } 2k^2 - 5k - 150 = 0$$

## 2.14 קיז תשע"ד מועד א

.2. בסדרה חשבונית יש 3 איברים.

סכום כל האיברים האחרונים גדול פי 2 מסכום כל האיברים הקודמים להם.

א. הוכח שסכום כל האיברים הראשונים הוא 0.

ב. נתון גם שסכום האיברים החמישי והשביעי הוא 0.

סכום כל איברי הסדרה הוא 726.

מצא את הפרש הסדרה.

### סעיף א

כדי לדiyק עם המקומות של האיברים כדי לרשום את הסדרה עם סימון של הסדרות החלקיים:

$$\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}_{S_{3n}}, \underbrace{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}}_{S_2}, \underbrace{a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{3n}}_{S_3}.$$

: $S_3 = 2S_2$

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}(2(a_1 + 2nd) + (n - 1)d) &= 2 \cdot \frac{n}{2}(2(a_1 + nd) + (n - 1)d) \\ 2a_1 + (5n - 1)d &= 4a_1 + (6n - 2)d \\ 2a_1 + (n - 1)d &= 0. \end{aligned}$$

הביטוי בצד השמאלי של המשוואה האחרון הוא הסכום  $S_1$ .

דרך אחרת לפתרור את הבעיה היא להחסיר את סכום התת-סדרות מסכום הסדרה כולה:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_{3n} - (S_2 + S_3) = S_{3n} - (S_2 + 2S_2) = S_{3n} - 3S_2 \\ &= \frac{3n}{2}(2a_1 + (3n - 1)d) - 3 \cdot \frac{n}{2}(2(a_1 + nd) + (n - 1)d) \\ &= 0. \end{aligned}$$

בבוחינה של חורף תשע"ב אורך הסדרה הוא  $1 - 2n$ , ונתונים הסכומים של  $n$  האיברים הראשונים ו- $n$  האיברים האחרונים. רק רישום זהיר של הסדרה יבהיר שיש חפיפה בין שתי תת-הסדרות:

$$\overbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}^n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n-1}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n$

בדוגמה קל יותר לשים לב לחפיפה. עם  $n = 4$ :

$$\overbrace{a_1, a_2, a_3, a_4}^4, a_5, a_6, a_7.$$

$\underbrace{\hspace{4em}}_4$

## סעיף ב'

נתון שסכום הסדרה ועלינו למצוא  $d$  למרות שאין לנו  $a_1$ . נבדוק אם הנתון השני יכול לעזור:

$$a_5 + a_7 = (a_1 + 4d) + (a_1 + 6d) = 0.$$

$$\text{מכאן } a_1 = -5d$$

בסעיף א' חישבנו  $S_1 = 0$  ונציב עבור  $a_1$ :

$$\frac{n}{2}(-10d + (n-1)d) = 0.$$

אם  $d = 0$ , מהנתון  $a_5 + a_7 = 0$  אפשר להסיק שכל איברי הסדרה הם אפס. זה סותר את הנתון  $n = 11$ . השהסכום חיובי. לכן אפשר לחלק את המשוואה ב- $d$  ונקבל

נציב עבור  $n$   $a_1$  בנוסחה  $S_{3n}$ :

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{3n}{2}(2a_1 + (3n-1)d) \\ &= \frac{33}{2}(-10d + (33-1)d) \\ &= \frac{33}{2} \cdot 22d = 363d = 726, \end{aligned}$$

$$\text{ונקבל } d = 2$$

## 2.15 חורף תשע"ז

a<sub>1</sub> , a<sub>2</sub> , a<sub>3</sub> , a<sub>4</sub> , ...      2. נתונה סדרה הנדסית אינ-סופית יורדת:

סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 6.

מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה,

a<sub>1</sub> , -a<sub>2</sub> , a<sub>3</sub> , -a<sub>4</sub> , ...      ומקבלת סדרה הנדסית חדשה:

סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא -3.

מהאיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית: ... ,  $\frac{1}{a_2}$  ,  $\frac{1}{a_3}$  ,  $\frac{1}{a_4}$  , ...

A. הוכח כי הסדרה השלישית היא סדרה הנדסית.

B. נתון כי סכום ת-ה איברים הראשונים בסדרה השלישית הוא 273.25.

מצא את ת.

### סעיף א

המנה של הסדרה השלישית קבועה כי נתון שהסדרה הראשונה הנדסית:

$$\frac{1/a_{n+1}}{1/a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

### סעיף ב

נשתמש בשני הסכומים הנתונים כדי לכתוב שתי משוואות עם שני נעלמים:

$$\frac{a_2}{1-q} = 6$$

$$\frac{-a_2}{1-(-q)} = -3.$$

$$a_2 = 4 \quad q = \frac{1}{3}$$

בסדרה השלישית, האיבר הראשון הוא  $\frac{1}{d} = 3$  וההפרש הוא  $\frac{1}{a_2} = \frac{1}{4}$ . מהסכום השלישי ונקבל:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = 273.25$$

$$3^n = 2187$$

$$n = 7,$$

כאשר בדקנו חזקות של 3 עד שהתקבל 2187.

## המלצות

- **חובה לקרוא את השאלות בזיהירות רבה.** בבחינה של קיז תשע"ה א', סעיף ב' שואלת על סדרה חדשה  $b_n$ , אבל בסוף חוזרת וمبקשת למצוא את הסכום של הסדרה הנתונה  $a_n$ .
- ברוב השאלות נתונה סדרה ומוגדרת סדרה חדשה המובססת על הסדרה הנתונה. אין בהכרח קשר בין תכונה של הסדרה המקורית והסדרה החדשה. להלן שתי סדרות חשבוניות, אבל כאשר משלבים את שתיהן, מתקבלת סדרה שאיננה חשבונית:

$$1, 4, 7, 10, 13, \dots$$

$$2, 5, 8, 11, 14, \dots$$

$$1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, \dots$$

- כאשר מבקשים להוכיח שתת-סדרת הזוגיים חשבונית או הנדסית וגם שת-סדרת האיזוגיים, הוכחה אחת תספיק כי אם  $\frac{a_{n+2}}{a_n}$  קבוע, לא משנה אם  $n$  זוגי או אי-זוגי.
- כדי לרשום את איברי הסדרה כדי לבדוק במקומות של האיברים:

$$\overbrace{a_1, a_2, \dots, a_{49}, a_{50}}^{50}, \overbrace{a_{51}, a_{52}, \dots, a_{100}}^{50}$$

$$\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_{49}, a_{50}}_{50}, \underbrace{a_{51}, a_{52}, \dots, a_{100}, a_{101}}_{50}.$$

- מקרה מעניין הוא תת-סדרות חופפות (בחינה של חורף תשע"ב שלא נמצאת במסמך זה):

$$\overbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}^n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n-1}$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{n}$$

- קיימות שתי דרכים לסכם מספר תת-סדרות. דרך אחת היא לסכם כל תת-סדרה בנפרד עם ערכי  $d, a_1$  או  $q$ ,  $n$  שללה. זה קורה לעיתים קרובות כאשר השאלה מבקשת לחשב סכום של סדרה, אבל ידוע רק שתת-הסדרות חשבוניות או הנדסיות, למשל, זוגיים וαι-זוגיים.
- דרך אחרת היא לחבר את הסכומים של תת-סדרות ולהחסיר את התוצאה מסכום הסדרה כולה:

$$S_1 = S_n - (S_2 + S_3).$$

- הבדיקה של חורף תשע"ו מעניינת כי מספר האיברים הוא לא הערך של המספר  $n$  המופיע בשאלת. חשוב לרשום דוגמה מסוימת כדי לוודא מהו מספר האיברים:

$$(1) a_1 \cdot a_2, \quad (2) a_2 \cdot a_3, \quad \dots \quad (5) a_5 \cdot a_6 = (a_n \cdot a_{n+1}), \quad (6) a_6 \cdot a_7 (= a_{n+1} \cdot a_{n+2}).$$

- טרייך שימושי הוא לחבר ולהחסיר את אותו ערך בביטוי:

$$a_{k+2} - a_k = a_{k+2} + (a_{k+1} - a_{k+1}) - a_k = (a_{k+2} + a_{k+1}) - (a_{k+1} + a_k).$$

- הכנסת איברים חדשים בתוך סדרה לא בהכרח שומרת על הסדרה כحسابונית או הנדסית. השורה הראשונה להן היא סדרה חשבונית. בשורה השנייה הוכנסו איברים של סדרה חשבונית נוספת והסדרה החדשה היא חשבונית. בשורה השלישית הוכנסו איברים של סדרה חשבונית נוספת והסדרה החדשה אינה חשבונית.

$$1, \quad 5, \quad 9, \quad 13, \quad 17$$

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11, \quad 13, \quad 15, \quad 17$$

$$1, \quad 2, \quad 5, \quad 6, \quad 9, \quad 10, \quad 13, \quad 14, \quad 17$$

- בחישוב הפרש או מנתה, כדאי להציב עבור  $a_{n+1}$  או  $a_{n-1}$  ביטוי שיש בו  $a_n$  כדי לקבל משואה עם נעלם אחד:

$$a_n = \frac{2}{5}(a_{n-1} + a_{n+1}) = \frac{2}{5} \left( \frac{a_n}{q} + qa_n \right).$$

$a_n$  מצטמצם ונקבל משואה ריבועית ב- $q$ .



## פרק 3 הסתברות

### 3.1 קיז תשע"ח מועד ב

במבחן רב-ברירה ("אמריקני") יש 5 שאלות.

כל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.

התלמידים צריכים לסמך תשובה אחת מבין 4 התשובות המוצגות.

תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאלה מקבל 20 נקודות לשאלה זו.

תלמיד שמסמן תשובה לא נכונה על השאלה אינו מקבל נקודות לשאלה.

כדי לעبور את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכל.

א. על 2 מן השאלות ידע שחר בודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בשאר השאלות הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.

(1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיק 60 נקודות?

(2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?

ב. על 2 מן השאלות ידע דניאל בודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.

בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בודאות שתשובה אחת, מבין 4 התשובות המוצגות, אינה נכונה,

ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיק 60 נקודות?

ג. על 3 מן השאלות ידעה הדס בודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימנה אותן.

בכל אחת משתי השאלות האחרות היא ידעה בודאות ש k מבין 4 התשובות המוצגות אינן נכונות, וסימנה

באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.

ידעו שההסתברות שהדס תצבור בדיק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות שהיא תצBOR 100 נקודות במבחן.

מצא את k . נמק.

שאלה זו מאוד ארוכה אבל לא קשה במיוחד, כי ניתן לפתור אותה באמצעות נוסחת ברנולי בלבד.

**סעיף א (1)**

שחר ידע שהוא ענה נכון על שתי שאלות ולכן כדי לקבל ציון 60 עליו לענות על **בדיקות אחת** משלושת השאלות האחרות:

$$\binom{3}{1} \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}.$$

**סעיף א (2)**

כדי לעبور את המבחן עליו לצBOR **פחות** שלוש תשובות נכונות. להסתברות מהסעיף הקודם יש להוסיף את ההסתברויות של ארבע וחמש תשובות נכונות:

$$\frac{27}{64} + \binom{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{3}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{37}{64}.$$

## סעיף ב

דניאל צריך לענות נכון על שאלה אחת **בזיוק** מתוך שלושת השאלות הנותרות. דניאל ידע שתשובה אחת לא נכון, אך ההסתברות שהוא ענה נכון על השאלה היא  $\frac{1}{4}$  ולא  $\frac{1}{3}$  כמו בסעיף הקודם:

$$\binom{3}{1} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

## סעיף ג

אם הדס ידע ש- $k$  מתוך 4 תשובות לא נכוןות, ההסתברות שהיא ענתה תשובה נכוןה היא  $\frac{1}{4-k}$ , וההסתברות שהיא ענתה תשובה לא נכוןה היא המשלים לה:

$$1 - \frac{1}{4-k} = \frac{4-k-1}{4-k}.$$

כדי לקבל ציון **בזיוק** 100 הדס צריכה לבחור תשובות נכוןות לשתי השאלות הנותרות. כדי לקבל ציון **בזיוק** 60 עליה לבחור תשובות לא נכוןות לשתי השאלות הנותרות.

אין צורך להשתמש בנוסחת ברנולי במלואו, כי כאשר מחשבים את ההסתברות של "הכל" או "אף אחד",  $\binom{n}{k} = 1$ , וגם  $1^0 = 1$  או  $p^0 = 1$ , ולכן, מספיק לחשב את ההסתברות של האירוע לחזקת מספר השאלות:

$$\left(\frac{1}{4-k}\right)^2 = \left(\frac{4-k-1}{4-k}\right)^2.$$

נפשט ונקבל משווה ריבועית  $0 = k^2 - 6k + 8$ . הפרמטר  $k = 2, k = 4$  מוגדר כמספר התשובות שהדס יודעת שהן **אין** נכוןות, ונתון (בשורה השנייה של השאלה) תשובה אחת נכוןה, כך שיש לפසול את הפתרון  $k = 4$  ולבחר  $k = 2$ .

## 3.2 קיז תשע"ח מועד א

בעיר גדולה נערך מבחון לכל תלמידי התיכון.

$\frac{35}{37}$  מן התלמידים שניגשו לבחון נעזרו בחבריהם כדי להתכוון ל מבחון. מהם עברו את המבחן. מספר התלמידים שלא נעזרו בחבריהם ולא עברו את המבחן קטן פי 5 מסטף התלמידים שנעזרו בחבריהם ועברו את המבחן.

- א. בחרו באקראי תלמיד שניגש לבחון, והתברר שהוא לא עבר את המבחן. מהי ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?
- ב. יעל והדס ניגשו לבחון. ידוע שיעיל נעזרה בחבריה כדי להתכוון לבחון, והדס לא נעזרה בחבריה כדי להתכוון לבחון. האם ההסתברות שיעיל עברה את המבחן גבוהה מההסתברות שהדס עברה את המבחן? נמק.
- ג. בחרו באקראי 6 תלמידים שניגשו לבחון. מהי ההסתברות שליש מהם לא נעזרו בחבריהם ועברו את המבחן?
- ד. בחרו באקראי תלמיד שניגש לבחון. מהי ההסתברות שהוא מקיים לפחות אחת משתי הטענות I-II:
  - (I) התלמיד נעזר בחבריו.
  - (II) התלמיד לא עבר את המבחן.

לפנינו שני תוצאות לפתרון את השאלות בסעיפים, נמלא את טבלת ההסתברויות לפי המידע הנתון. נסמן ב- $N$  את התלמידים שנעזרו בחבריהם, וב- $A$  את התלמידים שעברו את המבחן.

די ברור שאם  $37\%$  נעזרו בחבריהם ו- $35$  מהם עברו אז  $P(N \cap A) = 0.35$ , אבל בכל זאת נחשב בצורה פרומלית. נתון ש- $P(N) = 0.37$ . מהם עברו את הבחינה  $\frac{35}{37}$ , כך שעריך זה הוא ההסתברות המותנית  $P(A|N)$ . נחשב:

$$P(A|N) = \frac{P(N \cap A)}{P(N)} = \frac{P(N \cap A)}{0.37} = \frac{35}{37}$$

$$P(N \cap A) = 0.35.$$

עד כאן טבלת ההסתברויות היא:

		$\bar{A}$	$A$	$N$
$\bar{N}$	$\bar{A}$	0.37	0.02	0.35
	$A$	0.63		
	$A$	1.0		

בالمישק נתון ש:

$$P(\bar{N} \cap \bar{A}) = \frac{P(N \cap A)}{5} = \frac{0.35}{5} = 0.07,$$

וניתן להשלים את הטבלה:

	$\bar{A}$	$A$	
$N$	0.37	0.02	0.35
$\bar{N}$	0.63	0.07	0.56
	1.0	0.09	0.91

### סעיף א

הניסוח "בחרו ... תלמיד ... שלא עבר את המבחן. מה ההסתברות שהוא עוזר בחברי?" מכון להסתברות מותנית:

$$P(N/\bar{A}) = \frac{P(N \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0.02}{0.09} = \frac{2}{9}.$$

### סעיף ב

הניסוח "ידעו ש" מכון להסתברות מותנית.

עבור עיל ההסתברות המותנית היא:

$$P(A/N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{0.35}{0.37} = 0.9459,$$

ובבור הדס ההסתברות המותנית היא:

$$P(A/\bar{N}) = \frac{P(A \cap \bar{N})}{P(\bar{N})} = \frac{0.56}{0.63} = 0.8889.$$

ליעל ההסתברות גבוהה יותר לעبور את המבחן.

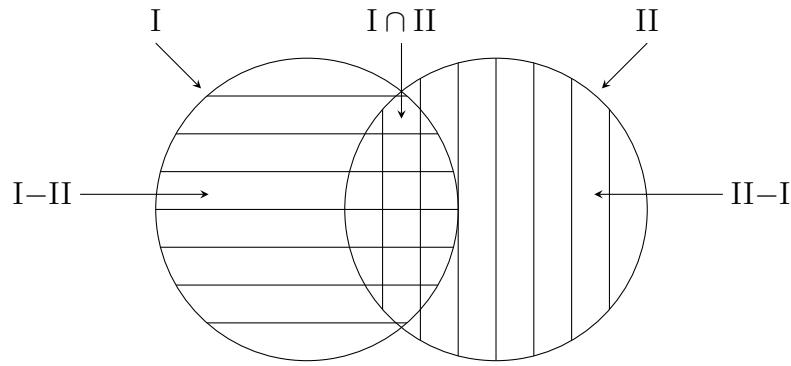
### סעיף ג

שלישי של שש הוא שניים. (שימוש לב שלא לקרוא "שלואה" במקום "שלישי") החישוב הוא לפי נוסחת ברנולי כאשר הערך  $P(\bar{N} \cap A) = 0.56$  נמצא בטבלה:

$$\binom{6}{2} (0.56)^2 (1 - 0.56)^4 = 0.1763.$$

### סעיף ד

הניסוח "פחות אחת" משתי הטענות I, II אומר שהairoע קורה אם קורה אחד מהairoעים I, II או שנייהם. בתרשימים להלן שני העגולים המייצגים את שני האירועים I, II, והairoע "פחות אחת" מיוצג על ידי כל השטח המזוקן:



יש שתי דרכים לחשב את ההסתברות. בדרכ הראשונה אנו לוקחים את סכום ההסתברויות של שני האירועים, ומחסרים את ההסתברות של האירוע המשותף כי ספרנו אותו פעמיים, פעם כחלק מהאירוע I ופעם כחלק מהאירוע II:

$$P(I \cup II) = P(I) + P(II) - P(I \cap II).$$

בדרך השנייה אנו סופרים כל חלק מהאירוע השותף בנפרד, כאשר הסימון  $A - B$  הוא כל האיברים בקבוצה  $A$  שאינם בקבוצה  $B$ :

$$P(I \cup II) = P(I - II) + P(II - I) + P(I \cap II).$$

את ההסתברויות לחישוב ניקח מהטבלה. הדרך הראשונה מופיעה מימין והדרך השנייה משמאלי:

	$\bar{A}$	$A$		$\bar{A}$	$A$		
$N$	0.37	0.02	0.35	0.37	0.02	0.35	$N$
$\bar{N}$	0.63	0.07	0.56	0.63	0.07	0.56	$\bar{N}$
	1.0	0.09	0.91	1.0	0.09	0.91	

בשתי הדרכים מקבלים אותה תוצאה:

$$P(N \cup \bar{A}) = P(N) + P(\bar{A}) - P(N \cap \bar{A}) = 0.37 + 0.09 - 0.02 = 0.44$$

$$P(N \cup \bar{A}) = P(N - \bar{A}) + P(\bar{A} - N) + P(N \cap \bar{A}) = 0.35 + 0.07 + 0.02 = 0.44.$$

### 3.3 חורף תשע"ח

למיכל יש קופיה מאוזנת. על שלוש מפאות הקופיה שלה כתוב המספר 2, ועל שלוש הפאות האחרות כתוב המספר 4.

לגלית יש קופיה מאוזנת אחרת. על כל אחת מפאות הקופיה של גלית כתוב אחד מן המספרים: 1 או 3. מיכל וגלית משחקים משחק בן חמישה סיבובים. המשתbetaת שתנצח במספר סיבובים רב יותר מחברתה, תנצח במשחק. בכל סיבוב המשחק כל אחת מהן מטילה את הקופיה שלה פעם אחת.

המנצחת בסיבוב היא השחקנית שהמספר שהתקבל על הקופיה שלה גבוהה יותר.

נתנו שבסיבוב יחיד הסיכוי של מיכל לנצח את גלית הוא  $\frac{7}{12}$ .

א. על כמה פאות בקופיה של גלית כתוב המספר 1? נמק את תשובתך.

ב. מהו הסיכוי שgalit תנצח במשחק?

ג. מהו הסיכוי של גלית לנצח במשחק, אם ידוע שהיא ניצחה בסיבוב הראשון?

#### סעיף א

נסמן ב- $a$  את המספר הפאות של הקופיה של גלית שכותוב עלייהן 1. מיכל תנצח אם היא מטילה 4 (הסתברות  $\frac{3}{6}$ ), לא משנה מה גלית מטילה (הסתברות 1), או אם היא מטילה 2 (הסתברות  $\frac{3}{6}$ ), ו galit מטילה 1 (הסתברות  $\frac{n}{6}$ ):

$$\frac{3}{6} \cdot 1 + \frac{3}{6} \cdot \frac{n}{6} = \frac{7}{12},$$

והפתרון הוא  $n = 1$ .

#### סעיף ב

galit תנצח אם היא תנצח ב-5, 4, 3 סיבובים. ההסתברות לניצחון בכל סיבוב היא:

$$\binom{5}{3} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(\frac{7}{12}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{5}{12}\right)^4 \left(\frac{7}{12}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{5}{12}\right)^5 \left(\frac{7}{12}\right)^0 = 0.3466.$$

#### סעיף ג

הניסוח אם ידוע מכוון להסתברות מותנית:

$$P(\text{galit ניצחה בסיבוב הראשון} \cap \text{galit תנצח}) = \frac{P(\text{galit ניצחה בסיבוב הראשון}/\text{galit תנצח})}{P(\text{galit ניצחה בסיבוב הראשון})}.$$

ההסתברות במוניה: כדי שgalit תנצח במשחק וגם בסיבוב הראשון, היא חייבת לנצח בסיבוב הראשון וגם ב-2 או 3 או 4 מהסיבובים הנותרים:

$$\frac{5}{12} \left[ \binom{4}{4} \left(\frac{5}{12}\right)^4 \left(\frac{7}{12}\right)^0 + \binom{4}{3} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(\frac{7}{12}\right)^1 + \binom{4}{2} \left(\frac{5}{12}\right)^2 \left(\frac{7}{12}\right)^2 \right] = \frac{5}{12} \cdot 0.5534.$$

ההסתברות במכנה היא  $\frac{5}{12}$  ולכן התשובה היא 0.5534.

### 3.4 קיז תשע"ז מועד ב

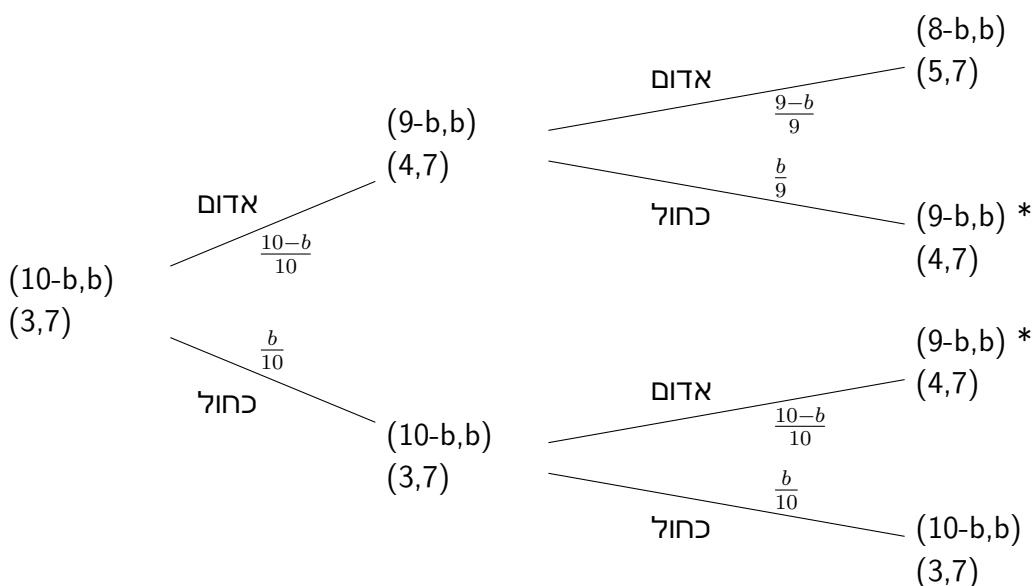
בקופסה I יש 10 כדורים, כמה מהם כחולים והשאר אדומים, ובקופסה II יש 7 כדורים כחולים ו- 3 כדורים אדומים. מוצאים באקראי כדור מקופסה I. אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II. אם יצא כדור כחול, מוחזרים אותו לקופסה I. שוב מוצאים באקראי כדור מקופסה I, ושוב, אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II. ואם יצא כדור כחול, מוחזרים אותו לקופסה I. לאחר מכן מוצאים באקראי כדור אחד מקופסה II. נתון כי ההסתברות שאחרי שתי הוצאות מקופסה I יועבר כדור אדום אחד בלבד מקופסה I לקופסה II היא  $\frac{19}{36}$ . חשב את מספר ה כדורים הכהולים שהיו בkopfse I לפני הוצאה הראשונה.

ענה על הסעיפים ב-ג עבור מספר ה כדורים הכהולים שהיחס בתשע"ג.

ב. מהי ההסתברות שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום?

ג. ידוע שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום. מהי ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II נשארו בה שלושה כדורים אדומים בדיק?

הניסוח "מוצאים באקראי ... ולאחר מכן שוב מוצאים באקראי" מכוון לשימוש בעץ. נסמן ב- $b$  את מספר ה כדורים הכהולים בkopfse I. בתרשים, בכל צומת רשום שני זוגות של מספרים: מספר ה כדורים האדומים ומספר ה כדורים הכהולים בkopfse I, ומתחתיו מספר ה כדורים האדומים ומספר ה כדורים הכהולים בkopfse II.



## סעיף א

הכוכبيות מסמנות את שתי האפשרויות בהן הוצאנו כדור אדום אחד בדיק מקופסה I. נשווה את הסתברות הנתונה לסכום ההסתברויות של שני המסלולים:

$$\frac{10-b}{10} \cdot \frac{b}{9} + \frac{b}{10} \cdot \frac{10-b}{10} = \frac{19}{36}.$$

נפשט ונקבל משווה ריבועית  $b^2 - 10b + 25 = 0$ .  $b = 5$  שיש לה פתרון אחד.

## סעיף ב

בתרשים רשום מספר ה כדורים האדומים מתוך כל ה כדורים בקופסה II. מלמעלה למטה:

$$\frac{5}{5+7} = \frac{5}{12}, \quad \frac{4}{4+7} = \frac{4}{11}, \quad \frac{4}{4+7} = \frac{4}{11}, \quad \frac{3}{3+7} = \frac{3}{10}.$$

את ההסתברויות להגעה לכל אחד מהמצבים נקבל לאחר הצבת  $b = 5$ . נסכם את ההסתברויות להוציא כדור אדום מקופסה II:

$$\left( \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \right) \left( \frac{5}{12} \right) + \left( \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \right) \left( \frac{4}{11} \right) + \\ \left( \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \right) \left( \frac{4}{11} \right) + \left( \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \right) \left( \frac{3}{10} \right) = 0.3595.$$

## סעיף ג

הניסוח "ידעו ש-" מכוון להסתברות מותנית:

$P(\text{הוציאו כדור אדום מקופסה II} / \text{נשארו שלושה אדומים בקופסה II}) =$

$$\frac{P(\text{הוציאו כדור אדום מקופסה II} \cap \text{נשארו שלושה אדומים בקופסה II})}{P(\text{הוציאו כדור אדום מקופסה II})}$$

נשארו שלושה כדורים אדומים רק אם היו ארבעה כדורים אדומים לפני הבחירה. ההסתברות במוניה היא  $\frac{19}{36}$ , ההסתברות (הנתונה!) שנגיע לאחד הממצבים המסומנים בכוכבית, כפול ההסתברות לבחור אדום מקופסה II, 4 מתוך 11 כדורים. חישבנו את ההסתברות במכנה בסעיף ב:

$$\frac{\frac{19}{36} \cdot \frac{4}{11}}{0.3595} = 0.53385.$$

### 3.5 קיז תשע"ז מועד א

- בבית אבות גדול יש לכמה מן הדירות קלנוועית, ולשאר אין.
- אם בוחרים באקראי 9 דירות מבית האבות הזה, ההסתברות של 4 מהם בדיק יש קלנוועית גדולה פי 24 מזו ההסתברות של 6 מהם בדיק יש קלנוועית.
- מיהי ההסתברות שלدير שנבחר באקראי יש קלנוועית?
  - בוחרים באקראי 6 דירות מבית האבות. ידוע שלפחות ל-3 מהם יש קלנוועית.
  - בוחרים באקראי 4 דירות מבית האבות, זה אחר זה, עד של-3 מהם בדיק יש קלנוועית.
  - מיהי ההסתברות שיבחרו בדרך זו בדיק 6 דירות?

#### סעיף א

נסמן ב- $D$  את האירוע "לدير יש קלנוועית" ואת ההסתברות שלו ב- $p$ . לפי נוסחת ברנולי:

$$\binom{9}{4}p^4(1-p)^5 = 24\binom{9}{6}p^6(1-p)^3.$$

נפשט ונקבל משווה ריבועית:

$$15p^2 + 2p - 1 = 0,$$

$$p = \frac{1}{5} = 0.2$$

#### סעיף ב

הניסוח "ידוע ש-" מכון להסתברות מותנית:

$$P(D = 4 | D \geq 3) = \frac{P(D = 4 \cap D \geq 3)}{P(D \geq 3)}.$$

כאשר יש חפיפה בין שני ביטויים בחיתוך אפשר לפשט אותן: ברור שם ערך גדול או שווה 3 וגם שווה ל-4 אז הוא שווה ל-4:

$$P(D = 4 | D \geq 3) = \frac{P(D = 4)}{P(D \geq 3)}.$$

לפי נוסחת ברנולי:

$$P(D = 4) = \binom{6}{4}0.2^4(1-0.2)^2 = 0.01536.$$

את המונח  $P(D \geq 3)$  אפשר לחשב בשתי דרכים, בצורה ישירה:

$$\binom{6}{3}0.2^3(1-0.2)^3 + \binom{6}{4}0.2^4(1-0.2)^2 + \binom{6}{5}0.2^5(1-0.2)^1 + \binom{6}{6}0.2^6(1-0.2)^0 = 0.099,$$

או אחד פחות המשלימים:

$$1 - 0.2^0(1 - 0.2)^6 - \binom{6}{1}0.2^1(1 - 0.2)^5 - \binom{6}{2}0.2^2(1 - 0.2)^4 = 0.099,$$

כMOVED שנדאי לבחור את האפשרות השנייה כי יש פחות גורמים לחשב.

התשובה לשאלה היא:

$$P(D = 4/D \geq 3) = \frac{P(D = 4)}{P(D \geq 3)} = \frac{0.01536}{0.099} = 0.15534.$$

#### סעיף ג

המשמעות של "עד ש" היא שהבחירה **אחרונה** תהיה "הצלחה" ויהיו שתי "הצלחות" בחמשת הבחירה קודמות:

$$\underbrace{\pm \pm \pm \pm \pm}_{2/5} \quad \underbrace{+}_{1/1}.$$

התשובה מתΚבלת מנוסחת ברנולי לבחירות הראשונות כפול ההסתברות  $p$  לבחירה האחרונה:

$$\left[ \binom{5}{2} 0.2^2(1 - .02)^3 \right] \cdot 0.2 = 0.04096.$$

## 3.6 חורף תשע"ז

אבייגיל משתתפת במשחק של זרייקת חצים למטרה. הסיכוי שלו לפגוע במטרה בניסיון בודד הוא  $P(0 > P)$ , ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים. כל משתתף זורק 5 זרייקות רצופות. הסיכוי של ABIIGIL לפגוע במטרה ארבע זרייקות מתוך החמש גדול פי 3 מן הסיכוי שלו לפגוע בה בכל חמש הזריקות.

א. מצא את  $P$ .

- משתתף מנצח במשחק אם מנצח 5 זרייקות רצופות, מספר הפגיעות שלו במטרה גדול ממספר ההחטאות שלו (יכול להיות יותר ממנצח אחד במשחק).
- ב. מהי ההסתברות שאבייגיל תנצח במשחק?
- ג. (1) אם ABIIGIL תחטיא את המטרה בזריקה השנייה, מהי ההסתברות שהיא תנצח במשחק?  
(2) גם TAMER משתתפת במשחק, וגם הסיכוי שלו לפגוע במטרה בניסיון בודד שווה ל- $P$ . ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים. TAMER החטיא בזריקה הראשונה. מה ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

### סעיף א

כתב מסאווה עם נוסחת ברנולי לפי המידע הנוכחי:

$$\binom{5}{4} p^4 (1-p)^1 = 3 \binom{5}{5} p^5 (1-p)^0.$$

הגורם  $p^4$  מctratzם והפתרון הוא  $p = \frac{5}{8}$ .

### סעיף ב

ABIIGIL תנצח אם היא פוגעת ב-3 או 4 או 5 זרייקות. ההסתברות היא:

$$\binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p)^1 + \binom{5}{5} p^5 (1-p)^0.$$

נציב  $p = \frac{5}{8}$  ונקבל 0.7248.

**סעיף ג (1)**

לדעתו, ניסוח השאלה לא ברור. אני פירשתי אותה כך: מה ההסתברות של **האירוע "אביגיל החטיאה בזירה השניה ופוגעת בשלוש או ארבע מהזריקות האחרות"**? כותב הבדיקה התכוון להסתברות מותנית: **"אם ידוע ש-'אביגיל החטיאה בזירה השניה', מה ההסתברות שהיא פוגעת בשלוש או ארבע מהזריקות האחרות?"** הנוסחה היא:

$$P(1, 3, 4, 5) = \frac{P(1, 3, 4, 5) \cdot P(\text{אביגיל החטיאה בזירה השניה})}{P(\text{אביגיל החטיאה בזירה השניה})}.$$

אפשר לפטור את הבעה בשתי דרכים. נתחיל עם הדרך הפשטוטה יותר. נתון שהסיכוי לפגוע במטרה אינו תלוי בנסיבות הקודמים, ולכן ההסתברויות בלתי תלויות והחישוב מוצטמצם:

$$P(1, 3, 4, 5) = \frac{P(1, 3, 4, 5) \cdot P(\text{אביגיל החטיאה בזירה השניה})}{P(\text{אביגיל החטיאה בזירה השניה})}.$$

$$\text{אביגיל פוגעה בשלוש או ארבע מהזריקות} = P(1, 3, 4, 5).$$

לפי נוסחת ברנולי:

$$\binom{4}{4} \left(\frac{5}{8}\right)^4 \left(\frac{3}{6}\right)^0 + \binom{4}{3} \left(\frac{5}{8}\right)^3 \left(\frac{3}{8}\right)^1 = 0.5188.$$

הדרך השנייה ארוכה יותר אבל מעניינת. האירוע של החיתוך בנוסחה להסתברות מותנית מורכבת משני אירועים: (א) לא משנה מה יצא מהזריקה הראשונה, הזריקה השנייה החטיאה, ושלושת הזריקות האחרונות פוגעו. (ב) הזריקה הראשונה פוגעה, הזריקה השנייה החטיאה, ושתים מתוך שלושת הזריקות האחרונות פוגעו. הסתברות של האירוע המשותף היא:

$$1 \cdot \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3 + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \left[\binom{3}{2} \left(\frac{5}{8}\right)^2 \left(\frac{3}{8}\right)\right] = 0.1945.$$

נחלק ב-  $\frac{3}{8}$ , ההסתברות האביגיל החטיאה בזירה השניה, ונקבל 0.5188.

**סעיף ג (2)**

לא משנה איזו זריקה החטיאה, הזריקות בלתי תלויות וחישוב ההסתברות של "תמר פוגעה בשלוש או ארבע מהזריקות 2, 3, 4, 5" נותן אותה תוצאה כמו האירוע "אביגיל פוגעה בשלוש או ארבע מהזריקות 1, 3, 4, 5".

### 3.7 קיז תשע"ו מועד ב

שחמט הוא משחק בין שני שחקנים שיכל להסתיים בניצחון של אחד מהם או בתיקו.

יעל וアナ משחקות זו מול זו בטורניר שחמט בשני סבבים.

ההסתברות של כל אחת מן השחקניות לניצח במשחק בודד היא קבועה בכל הטורניר.

א. בסבב הראשון יש 4 משחקים. ההסתברות שיעל תנצח ב- 2 משחקים

או ב- 3 משחקים גדולה פי 10 מן ההסתברות שיעל תנצח ב- 4 משחקים.

חשב את ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד.

בסבב השני יש 2 משחקים.

ההסתברות שתוצאת הסבב השני תהיה שוויה – היא 0.34.

ב. מהי ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד?

ג. חשב את ההסתברות שאנה תנצח במשחק השני, אם ידוע שתוצאת סבב זה היא שוויה.

נסמן:  $y$  = ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד,  $a$  = ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד.

#### סעיף א

לפי המידע הנוכחי ונוסחת ברנולי:

$$\binom{4}{2}y^2(1-y)^2 + \binom{4}{3}y^3(1-y) = 10 \cdot \binom{4}{4}y^4(1-y)^0.$$

נפשט ונקבל משווה ריבועית  $0 = 4y^2 + 4y - 3 = 4y^2 + 4y - 3 = 0$  שהשורש החיובי שלה היא  $y = \frac{1}{2} = 0.5$ .

#### סעיף ב

האפשרויות לקבל שוויון הן: (א) ניצחון אחד לאנה וליעל, או (ב) תיקו בשני המשחקים. ההסתברות לתיקו היא המשלים לסכום ההסתברויות שאחת מהן תנצח:

$$\binom{2}{1}ya + (1 - (y + a))^2 = 0.34.$$

נציב  $y = 0.5$  ונקבל  $a = 0.3$ .

#### סעיף ג

הניסוח "אם ידוע ש-" מכונן להסתברות מותנית:

$P = (\text{תוצאת הסבב השני היא שוויה}/\text{אננה תנצח במשחק השני})$

$\underline{P = (\text{תוצאת הסבב השני היא שוויה} \cap \text{אננה תנצח במשחק השני})} / P = (\text{תוצאת הסבב השני היא שוויה})$

ההסתברות לשווין בסבב השני נתונה. אם אננה תנצח במשחק השני, יהיה שוויון רק אם גם יעל תנצח במשחק הראשון:

$$\frac{ya}{.34} = \frac{0.5 \cdot 0.3}{.34} = 0.4412.$$

שםו לב שלא צריכים  $\binom{2}{1}$  כי האירוע הוא שאנה תנצח במשחק השני ויעל תנצח במשחק הראשון.

### 3.8 קיז תשע"ו מועד א

במבחן כניסה למכללה 20% מן הנבחנים היו מקיובצים.

40% היו ממושבים ו- 40% היו מעירים.

70% מן הנבחנים הצלicho ב מבחן.

$\frac{1}{8}$  מן הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו ב מבחן.

הסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהוא מקיובץ וגם הצלich ב מבחן, גדולה פי 2.5 מן הסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהוא מקיובץ וגם הצלich ב מבחן.

א. מבין הנבחנים שנכשלו ב מבחן, מהי הסתברות לבחור באקראי נבחן שלא היה מעיר?

ב. (1) משה הצלich ב מבחן.

מהי הסתברות שהוא לא היה ממושב?

(2) חמישה נבחנים הצלicho ב מבחן.

מהי הסתברות שלפחות אחד מהם היה ממושב?

נסמן  $S = \text{נבחנים שהצלicho}$ ,  $K = \text{נבחנים מקיובצים}$ ,  $M = \text{נבחנים ממושבים}$ ,  $E = \text{נבחנים מעירים}$ . ההסתברויות הנתונות הן:

$$P(K) = 0.20, P(M) = 0.40, P(E) = 0.40, P(S) = 0.70.$$

נתון:

$$P(\bar{S}/M) = P(\bar{S} \cap M)/P(M) = \frac{1}{8},$$

ולכן:

$$P(\bar{S} \cap M) = P(\bar{S}/M) \cdot P(M) = \frac{1}{8} \cdot 0.40 = 0.05.$$

סיכום ביניים:

	$E$	$M$	$K$	
$S$	0.70		0.35	
$\bar{S}$	0.30		0.05	
	1.0	0.40	0.40	0.20

הنتון האחרון הוא:  $P(E \cap S) = 2.5 \cdot P(K \cap S)$

נסכם את ההסתברויות להצלחה של נבחנים ממושב, הקיובץ והעיר:

$$P(S) = 0.70 = P(K \cap S) + 0.35 + 2.5 \cdot P(K \cap S).$$

נקבל  $P(E \cap S) = 0.25$  ולפי היחס הנtenton  $P(K \cap S) = 0.1$ .

נסכם את המידע בטבלה:

	$E$	$M$	$K$	
$S$	0.70	0.25	0.35	0.10
$\bar{S}$	0.30	0.15	0.05	0.10
	1.0	0.40	0.40	0.20

**שיעור ב** שהניסוח  $\frac{1}{8}$  מן הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו" מכון להסתברות מותנית, לעומת הניסוח **"הסתברות לבחור באקראי בין כל הנבחנים נבחן שהיה מהעיר וגם הצליח ב מבחן" מכון לחיתוך הסתברויות, כי הסתברות לבחור אחד "מכל הנבחנים" היא 1:**

$$P(E \cap S) = \frac{(P(E \cap S) / P(S))}{(ככל הנבחנים / ככל הנבחנים)} = \frac{P(E \cap S)}{1} = P(E \cap S).$$

### סעיף א

לפי הנוסחה להסתברות מותנית (זהנחה שאף נבחן לא בא גם מקיוץ וגם ממושב):

$$P(\bar{E}/\bar{S}) = P((K \cup M)/\bar{S}) = \frac{P(K \cap \bar{S}) + P(M \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{0.10 + 0.05}{0.30} = \frac{1}{2}.$$

### סעיף ב (1)

לפי הנוסחה להסתברות מותנית (זהנחה שאף נבחן לא בא גם מקיוץ וגם מעיר):

$$P(\bar{M}/S) = P((K \cup E)/S) = \frac{P(K \cap S) + P(E \cap S)}{P(S)} = \frac{0.10 + 0.25}{0.70} = \frac{1}{2}.$$

### סעיף ב (2)

"פחות אחד ממושב" הוא המשלים ל-"olumn לא מהמושב":

$$1 - P(\bar{M}/S)^5 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{31}{32}.$$

### 3.9 חורף תשע"ו

במכוונת מזל אפשר לזכות ב- 50 שקל, ב- 100 שקל או לא לזכות כלל.

דן משחק 5 משחקים במכוונה זו.

ההסתברות שדן זוכה ב- 50 שקל בדיק פעם שווה להסתברות שהוא זוכה ב- 50 שקל בדיק פעם אחת.

(ההסתברות לזכות ב- 50 שקל שונה מאפס).

ההסתברות שדן לא זוכה באך משחק היא  $\frac{1}{32}$ .

א. מהי ההסתברות שדן זוכה ב- 50 שקל במשחק בודד?

ב. מהי ההסתברות שדן זוכה ב- 100 שקל במשחק בודד?

ג. ידוע כי לאחר שדן שיחק שני משחקים הוא זכה סך הכל ב- 100 שקל בדיק.

מהי ההסתברות שהוא לא זוכה ב- 50 שקל באך אחד ממשחקים?

נסמן  $P(n) = \text{ההסתברות שדן זוכה ב-} n \text{ שקלים.}$

#### סעיף א

ההסתברות שדן לא זוכה באך אחד מחמשת המשחקים היא  $P(0) = \frac{1}{32}$ . נתון שערך זה הוא,

ולכן  $P(0) = \frac{1}{2}$ . לפי המידע הנתון:

$$\begin{aligned} \binom{5}{2} P(50)^2 (1 - P(50))^3 &= \binom{5}{1} P(50) (1 - P(50))^4 \\ P(50) &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

#### סעיף ב

לפי ההסתברות המשלימה:  $P(100) = 1 - P(0) - P(50) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

#### סעיף ג

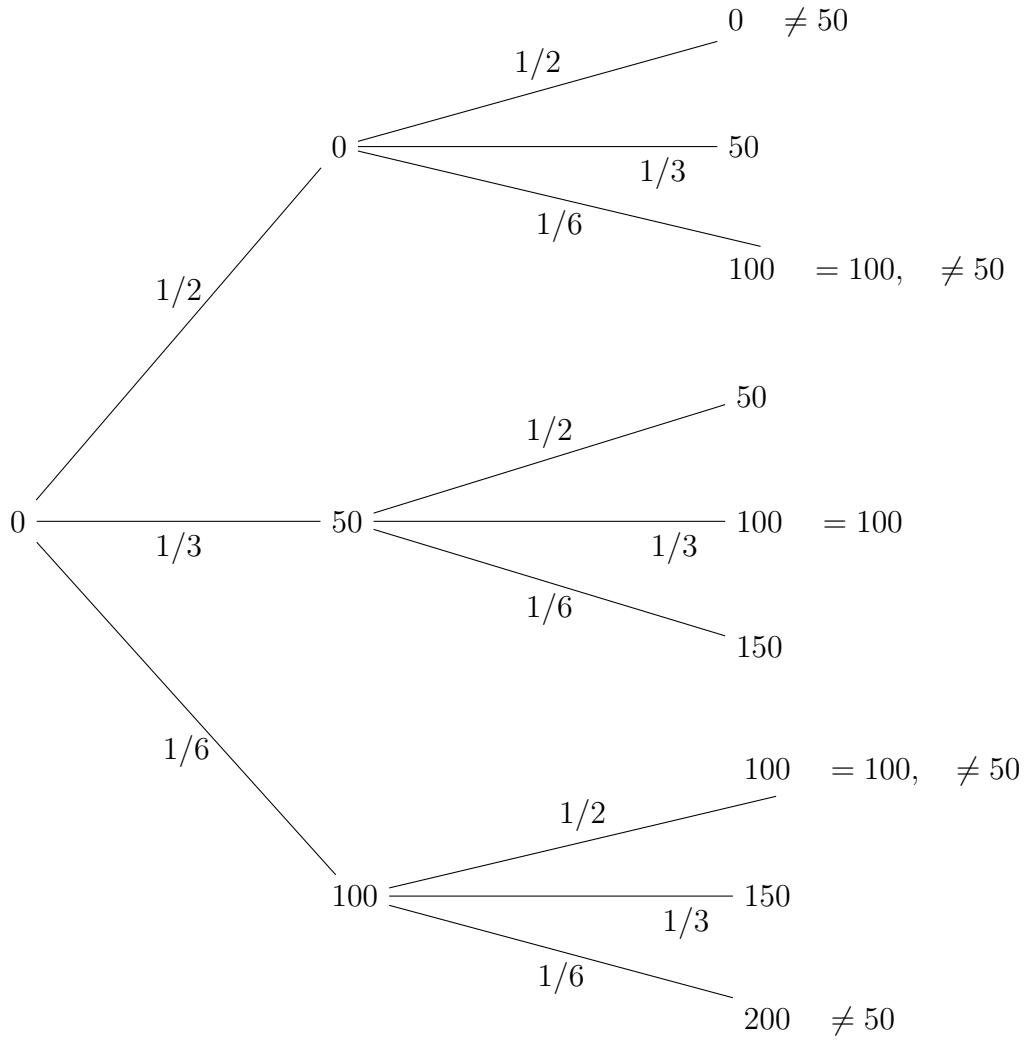
הניסוח "ידוע כי" מכוען להסתברות מותנית:

$P(\text{זוכה ב-} 100 \text{ בשני משחקים/לא זוכה ב-} 50 \text{ באך משחק}) = (\text{זוכה ב-} 100 \text{ בשני משחקים/לא זוכה ב-} 50 \text{ באך משחק})$

$$\frac{(\text{זוכה ב-} 100 \text{ בשני משחקים} \cap \text{לא זוכה ב-} 50 \text{ באך משחק})}{P(\text{זוכה ב-} 100 \text{ בשני משחקים})}.$$

לא כתוב במפורש אבל נניח שהמשחקים בלתי תלויים, ובננה עץ (מופיע בעמוד הבא) שמציג את תוצאות שני המשחקים. סימנו את המסלולים בהם דן זוכה ב- 100 והמסלולים בהם דן לא זוכה ב- 50 באך אחד ממשחקים. חישוב ההסתברות המותנית נתון:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}.$$



### 3.10 **קי' תשע"ה מועד ב**

חוקר עורך מחקר על הרגלי האכילה של סטודנטים באוניברסיטה גדולה במשך יום לימודים.

חלק מהסטודנטים מבאים תמיד אוכל מהבית, והשאר אינם מבאים אוכל מהבית.

כל הסטודנטים שמבאים אוכל מהבית אותו ביום ואינם אוכלים בקפטריה.

הסטודנטים שאינם מבאים אוכל מהבית אוכלים בקפטריה או אינם אוכלים באותו יום.

א. נמצא כי אם בוחרים באקראי 4 סטודנטים, ההסתברות שבדוק 2 מהם מבאים אוכל מהבית גדולה פי 6 מההסתברות שבדוק 1 מהם מביא אוכל מהבית.

(1) מהו אחוז הסטודנטים שמבאים אוכל מהבית?

(2) החוקר בחר באקראי 8 סטודנטים באוניברסיטה.

מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם מביא אוכל מהבית, אבל לא כולם?

ב. נמצא כי 60% מהסטודנטים שאינם מבאים אוכל מהבית אינם אוכלים באותו יום.

(1) מהו אחוז הסטודנטים באוניברסיטה שאוכלים בקפטריה?

(2) מהי ההסתברות לבחור סטודנט שמביא אוכל מהבית מ בין הסטודנטים שאוכלים

באותו יום?

**סעיף א (1)**

נסמן  $b$  = ההסתברות להביא אוכל מהבית. לפי המידע הנתון:

$$\binom{4}{2} b^2 (1-b)^2 = 6 \cdot \binom{4}{1} b (1-b)^3.$$

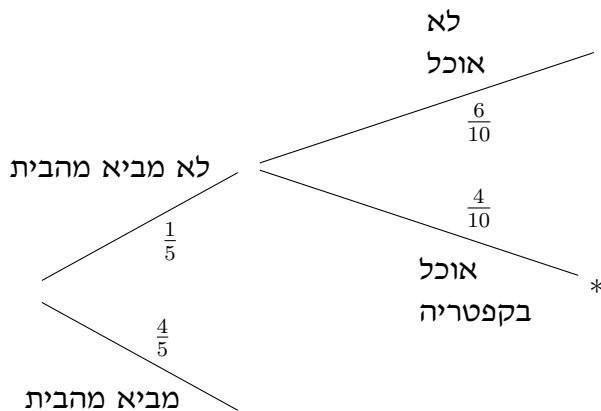
פתרון המשווה הוא  $b = \frac{4}{5}$

**סעיף א (2)**

"פחות אחד אבל לא כולם" היא המשלים ל-"לא אפס ולא כולם":

$$1 - \left(\frac{1}{5}\right)^8 - \left(\frac{4}{5}\right)^8 = 0.8322.$$

**סעיף ב (1)**



בעז ההסתברויות הכוכביות מראה את מהמסלול עבור "אוכל בCAFETERIA":

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{25}.$$

**סעיף ב (2)**

המילה "מבין" מכוונת להסתברות מותנית וקבוצת "מביא אוכל" היא תות-קבוצה של "אוכליים":

$$P(\text{אוכליים}/\text{מביא אוכל}) =$$

$$\frac{P(\text{אוכליים} \cap \text{מביא אוכל})}{P(\text{אוכליים})} =$$

$$\frac{P(\text{מביא אוכל})}{P(\text{אוכליים})}.$$

הчисלוב הוא:

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5} + \frac{2}{25}} = \frac{10}{11}.$$

### 3.11 קיז תשע"ה מועד א

נתונה קבוצה של ספורות שונות: 3 זוגיות (שונות מ-0), והשאר הן ספורות אי-זוגיות.

יוני יוצר מספר דו-ספרתי מן הספורות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שיוני בוחר באקראי היא ספרת העשרות,

הספרה השנייה שהוא בוחר באקראי היא ספרת היחידות.

יוני בוחר כל ספרה בדיק פעם אחת בלי החזרה.

א. נתון כי הסתברות שיוני ייצור מספר אי-זוגי היא  $\frac{4}{7}$ .

מהו מספר הספורות הא-זוגיות בקבוצה הנתונה?

ב. אם ידוע שהמספר שנוצר הוא זוגי, מהי הסתברות שתי הספרות שיוני בחר הן זוגיות?

אמיליאן יוצרת מספר תלת-ספרתי מן הספורות שבקבוצה הנתונה באופן זה:

הספרה הראשונה שאmilian בוחרת באקראי היא ספרת המאות,

הספרה השנייה שהיא בוחרת באקראי היא ספרת העשרות,

והספרה השלישית שהיא בוחרת באקראי היא ספרת היחידות.

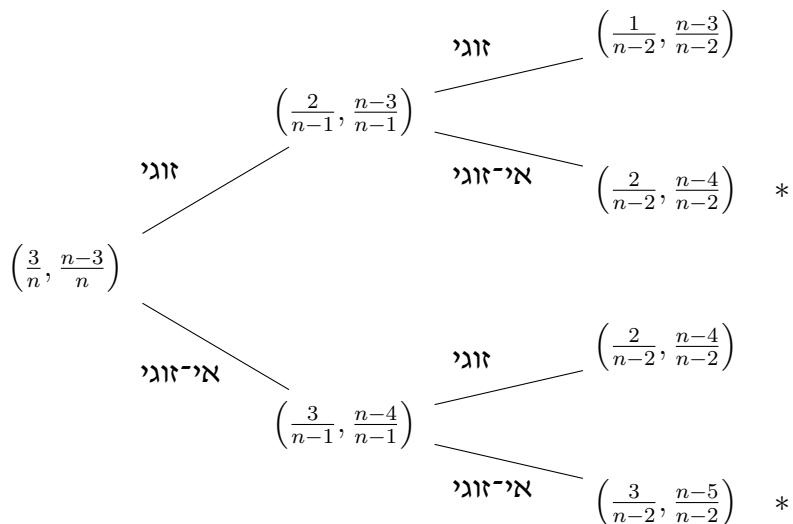
אמיליאן בוחרת כל ספרה בדיק פעם אחת בלי החזרה.

ג. ידוע כי הספרה הראשונה שאmilian בחרה היא זוגית.

מהי הסתברות שבמספר התלת-ספרתי שאmilian יצרה, סכום הספרות היה זוגי?

נסמן  $n =$  מספר הספרות בקבוצה. מספר הזוגיים = 3, ומספר הא-זוגיים =  $3 - n$ .

בחירה של ספרת העשרות ואחר כך ספרת היחידות מכוונת לעצם הסתברויות. כדי לפשט את התרשים רשמי, בכל צומת את ההסתברויות (אי-זוגי, זוגי), ולא את מספר הספרות.



## סעיף א

המספר שיוני בחר יהיה איזוגי רק אם **הבחירה השנייה** היא ספרה איזוגית. המסלולים המתאימים מסומנים בתרשים בכוכבויות. נשווה את סכום ההסתברויות של המסלולים לערך הנتوון:

$$\frac{3}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} + \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} = \frac{4}{7}.$$

נפשט ונקבל משווה ריבועית  $0 = 8n^2 - 8n + 7 = n^2$  לה שני פתרונות חיוביים  $n = 7$  ו- $n = 1$ . נתון שיש לפחות שלוש ספרות, לכן מספר הספרות הוא 7.

**שימו לב** שהשאלה מבקשת את מספר הספרות **האיזוגיות** ולכן התשובה היא  $4 = 7 - 3$ .

## סעיף ב

במספר זוגי הספרה האחרונה זוגית. הניסוח "**אם ידוע ש-**" מכוון להסתברות מותנית:

$$= (\text{ספרה אחרונה זוגית} / \text{שתי ספרות זוגיות}) P$$

$$= \frac{(\text{ספרה אחרונה זוגית} \cap \text{שתי ספרות זוגיות})}{P} =$$

$$\frac{P}{(\text{ספרה אחרונה זוגית})}.$$

את החיתוך אפשר לפשט כי אם שתי הספרות זוגיות הספרה האחרונה חייבת להיות זוגית. ניתן לחשב את ההסתברות "ספרה אחרונה זוגית" במכנה לפי המידע בעז או פשוט לשים לב שהוא המשלימה להסתברות הנתון בסעיף א של "ספרה האחרונה איזוגית"  $\frac{3}{7} = 1 - \frac{4}{7}$ .  
чисוב ההסתברות במונח לפי המסלול העליון בעז עבר בחירה של שתי ספרות זוגיות:

$$\frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}}{1 - \frac{4}{7}} = \frac{1}{3}.$$

## סעיף ג

הסכום יהיה זוגי רק אם שתי הספרות האחרונות הן זוגיות או איזוגיות:

$$2k_1 + 2k_2 + 2k_3 = 2(k_1 + k_2 + k_3)$$

$$2k_1 + 2(k_2 + 1) + 2(k_3 + 1) = 2(k_1 + k_2 + k_3 + 1).$$

שני האירועים (בחירה הספרות) בלתי תלויים, ולכן אפשר לבטא את החיתוך כמכפלה:

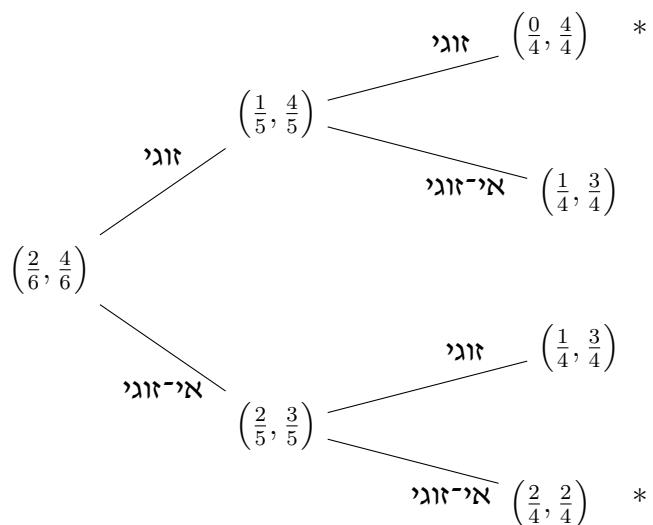
$$= (\text{ספרה ראשונה זוגית} / \text{סכום זוגי}) P$$

$$= \frac{P}{(\text{ספרה ראשונה זוגית} \cap \text{סכום זוגי})} =$$

$$= \frac{(\text{ספרה ראשונה זוגית}) \cdot (\text{סכום זוגי})}{P} =$$

$$P(\text{סכום זוגי}).$$

שיםו לב שלאחר הבחירה הראשונה של אמילי מספר הספרות הוא ש. הנה עז ההסתברויות לאחר בחירה הראשונה, כאשר הכוכبيות מסמןות את המסלולים לסכום זוגי (שני מספרים זוגיים או שני מספרים אי-זוגיים):



ההסתברות היא:

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{15}.$$

### 3.12 חורף תשע"ה

בישוב גדול  $\frac{1}{3}$  מהתושבים הם נשים, והשאר הם גברים.

מבין התושבים בוחרים באקראי שתי קבוצות:

קבוצת של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון ברדיו

וקבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון בטלוויזיה.

א. מהי ההסתברות שכל קבוצה יש בדיק 2 גברים?

ב. ידוע כי בקבוצה שנבחרה לריאיון ברדיו היו לכל היותר 2 גברים.

מהי ההסתברות שהיו בקבוצה זו בדיק 2 גברים?

"ישוב גדול" אומר לי שnitן לבחור מספר רב של תושבים, לפחות שמונה תושבים כדי שנדרש.

#### סעיף א

כל קבוצה היא בחירה בלתי תלوية. לפי נוסחת ברנולי ההסתברות לבחור בדיק שני גברים בקבוצה אחת היא:

$$\binom{4}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$$

כדי לקבל את ההסתברות שהיו בדיק שני גברים בשתי הקבוצות, נעלם ערך זה בריבוע:

$$\left(\frac{8}{27}\right)^2 = \frac{64}{729}.$$

#### סעיף ב

הניסוח "ידוע כי" מכוון להסתברות מותנית:

$P = (\text{לכל היותר שני גברים}/\text{בדיקות שני גברים})$

$$\frac{(\text{לכל היותר שני גברים} \cap \text{בדיקות שני גברים})}{P}.$$

הчитוך במונה שcolaה ל-"בדיקות שני גברים"  $\frac{8}{27}$  שחישבנו בסעיף א, כי "לכל היותר שני גברים" היא 0, 1, 2 גברים. "לכל היותר שני גברים" הוא הסכום של שלוש נוסחאות ברנולי:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \binom{4}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{4}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{27}$$

וההתשובה לשאלת היא:

$$\frac{\frac{8}{27}}{\frac{11}{27}} = \frac{8}{11}.$$

### 3.13 קיז תשע"ד מועד ב

בעיר גודלה כל אחד מתלמידי כיתות י"ב בשנה מסוימת בוחר באחד משני המסלולים לטיוול שנתי:  
מסלול א' או מסלול ב'.

נמצא: 75% מן התלמידים שבחרו במסלול א' הן בנות.

% 10% מן הבנות בחרו במסלול ב'.

% 40% מן התלמידים הם בנות.

א. בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת).

מהי ההסתברות שהוא בחר במסלול א'?

ב. כאשר בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת), האם המאורע "התלמיד הוא בת"

והמאורע "התלמיד (בן/בת) בחר במסלול א'" הם מאורעות בלתי תלויים? נמק.

ג. בחרו באקראי כמה בנות מבין התלמידים.

נמצא שההסתברות שלפחות אחת מהן בחרה במסלול א' היא 0.99.

(הבחירה של המסלולים על ידי הבנות שנבחרו הן בלתי תלויות.)

כמה בנות נבחרו?

אני מלאתי את טבלת ההסתברויות לפי חישוב לא פורמלי.

נתון ש- 0.4 מהתלמידים הן בנות. % 10% מהם בחרו במסלול ב':  $0.4 \times 0.1 = 0.04$ . מכאן ש-  $0.4 - 0.04 = 0.36$ .

נתון ש- 75% מהתלמידים שבחרו במסלול א' הן בנות:

$$0.75 = \text{בחרו במסלול א' } \times 0.36,$$

ולכן  $0.36 / 0.75 = 0.48$  מהתלמידים בחרו מסלול א'. כעת ניתן למלא את טבלת ההסתברויות:

		בנות	בנים
		נתון	
.36/.75 =	.48 - .36 =	.4 - .04 =	
.48	.12	.36	
$1 - .48 =$	$.52 - .04 =$	$.1 \times .4 =$	
.52	.48	.04	
1	$1 - .4 =$	נתון	
	.6	0.4	

א

ב

נחשב את הערכים בטבלה בצורה יותר מפורשת תוך שימוש בהסתברות מותנית:

$$0.1 = P(\text{בנות} \cap \text{מסלול ב}) = \frac{P(\text{בנות} \cap \text{מסלול ב})}{P(\text{בנות})} = \frac{(\text{בנות} \cap \text{מסלול ב}) / (\text{בנות})}{0.4}.$$

מכאן ש:

$$P(\text{בנות} \cap \text{מסלול ב}) = 0.4 \cdot 0.1 = 0.04.$$

המשך עם הנתון הנוסף:

$$0.75 = P(\text{מסלול א} \cap \text{בנות}) = \frac{P(\text{מסלול א} \cap \text{בנות})}{P(\text{מסלול א})} = \frac{(\text{מסלול א} \cap \text{בנות}) / (\text{מסלול א})}{0.36}.$$

מכאן ש:

$$P(\text{מסלול א}) = \frac{0.36}{0.75} = 0.48.$$

### סעיף א

הסעיף מבקש ( $\text{מסלול א}$ )  $P$  וчисבנו שערכו 0.48.

### סעיף ב

$$\begin{aligned} P(\text{מסלול א} \cap \text{התלמיד הוא בת}) &= 0.36 \\ P(\text{מסלול א}) \cdot P(\text{התלמיד הוא בת}) &= 0.4 \cdot 0.48 = 0.192. \end{aligned}$$

האירועים **אינם** בלתי תלויים.

### סעיף ג

כדי ליחס "לפחות אחת", נחשב שת ההסתברות המשלימה ל-"**אף אחת**" הינה  $P(\text{בנה})$ . ההסתברות שבת לא תבחר מסלול א היא ההסתברות שהיא תבחר מסלול ב:

$$P(\text{בנה}) = \frac{P(\text{בנה} \cap \text{מסלול ב})}{P(\text{בנה})} = \frac{(\text{בנה} \cap \text{מסלול ב}) / (\text{בנה})}{0.4} = \frac{0.04}{0.4} = 0.1.$$

נפתרו את המשוואה:

$$(0.1)^n = 1 - 0.99 = 0.01,$$

ונקבל  $n = 2$ .

### 3.14 קיז תשע"ד מועד א

אבא ובני משחקים בזריקת כדור לסל. בכל משחק שני סיבובים. המנצח בסיבוב מקבל נקודה אחת. אם הסיבוב מסתיים בתיקו, כל אחד מקבל חצי נקודה.

נתון: ההסתברות שבני ינצח בסיבוב היא 0.1,

ההסתברות שאבא ינצח בסיבוב היא 0.2,

ההסתברות שהסיבוב יסתיים בתיקו היא 0.7.

הסיבובים אינם תלויים זה בזה.

א. מהי ההסתברות שאבא יצBOR בשני הסיבובים יוטר מנוקודה אחת?

ב. מהי ההסתברות שבני יצBOR בשני הסיבובים פחות נקודה אחת?

ג. ידוע כי בני צBOR בשני הסיבובים פחות נקודה אחת.

מהי ההסתברות שאחד הסיבובים הסתיים בתיקו והאחר הסתיים בניצחון של בני?

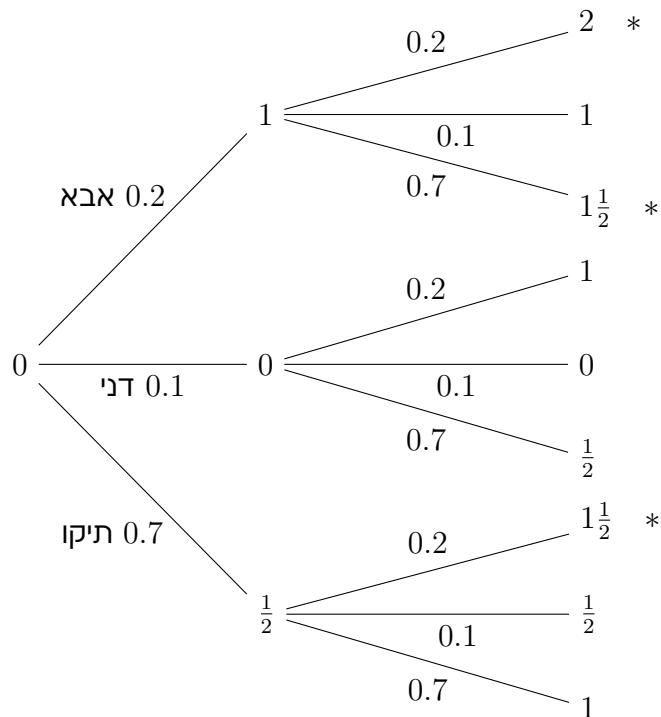
ד. אבא ובני משחקים 4 פעמים את המשחק שמתחiar בפתיחה. (בכל משחק שני סיבובים).

מהי ההסתברות שבני ימצBOR נקודה אחת 2 פעמים בדיקות?

#### סעיף א

ע"ז ההסתברות מראה את צבירת הנקודות של אבא בשני הסיבובים, כאשר המცבים בהם אבא צBOR יוטר מנוקודה אחת מסומנים בכוכביות. ההסתברות של האירוע היא:

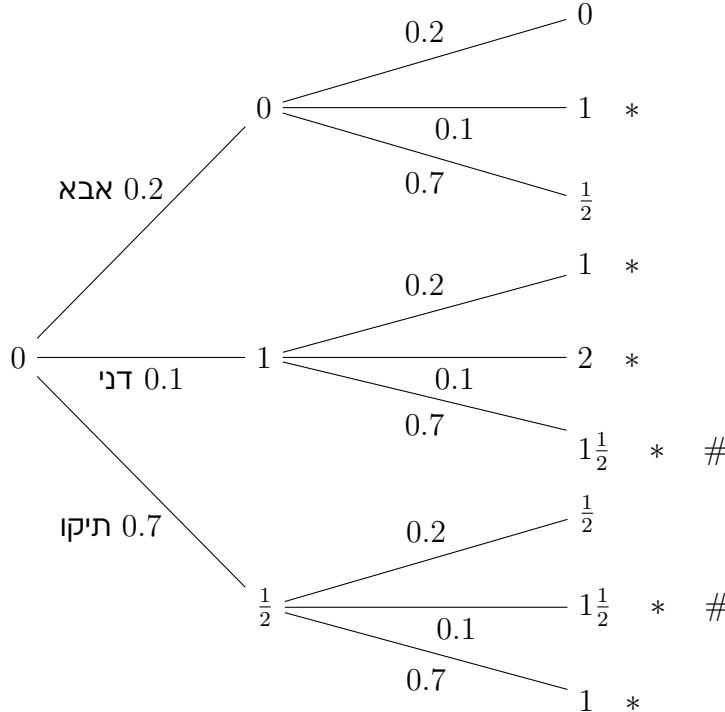
$$0.2 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.2 = 0.32.$$



## סעיף ב

עż הסתברות מראה את צבירת הנקודות של דני בשני הסיבובים, כאשר המცבים בהם דני צובר לפחות נקודה אחת מסומנים בכוכבות. הסתברות של האירוע היא:

$$0.2 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.1 + 0.7 \cdot 0.7 = 0.68.$$



## סעיף ג

הניסוח "ידוע כי" מכוון להסתברות מותנית והחיתוך מצטמצם כי אם יש תיקו אחד וניצחון של דני אז דני צבר לפחות נקודה אחת:

$$P(\text{דני צבר לפחות נקודה אחת/תיקו אחד, ניצחון אחד לדני}) =$$

$$\frac{P(\text{דני צבר לפחות נקודה אחת} \cap \text{תיקו אחד, ניצחון אחד לדני})}{P(\text{דני צבר לפחות נקודה אחת})} =$$

$$\frac{P(\text{תיקו אחד, ניצחון אחד לדני})}{P(\text{דני צבר לפחות נקודה אחת})}.$$

נחשב את המונח על ידי חיבור הסתברויות של שני מסלולים בעץ המסומנים ב-#. הסתברות במכנה חושבה בסעיף ב:

$$\frac{0.1 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.1}{0.68} = .2059.$$

## סעיף ד

סעיף ב חישבנו את הסתברות של האירוע בכל סיבוב, ונשאר רק לחשב:

$$\binom{4}{2} (0.68)^2 (0.32)^2 = 0.2841.$$

### 3.15 חורף תשע"ד

בעיר מסוימת יש תושבים המשתתפים בחוג לרכיבי עם, יש תושבים המשתתפים בחוג לתאטרון ויש תושבים המשתתפים בשני החוגים.

נמצא כי המאורע "תושב העיר משתתף בחוג לרכיבי עם"

המאורע "תושב העיר משתתף בחוג לתאטרון" הם מאורעות בלתי תלויים.

מספר התושבים המשתתפים בחוג לרכיבי עם גדול פי 2 ממספר התושבים המשתתפים בחוג לתאטרון.

מבין התושבים המשתתפים בחוג לתאטרון, 60% משתתפים בחוג לרכיבי עם.

א. מהו אחוז התושבים בעיר המשתתפים בחוג לרכיבי עם וגם בחוג לתאטרון?

ב. يوم אחד נערכ בעיר כנס שהשתתפו בו כל התושבים המשתתפים בחוג לרכיבי עם, וركם עיתונאי ריין 6 משתתפים בכנס שנבחרו באקראי.

מהי ההסתברות של לפחות 2 מהם משתתפים בחוג לתאטרון?

נסמן  $T$  = מספר המשתתפים בתאטרון,  $R$  = מספר המשתתפים ברכיבי עם. המילה "**מ בין**" מכוonta להסתברות מותנית. נתון  $P(R/T) = 0.6$  ושהאירועים בלתי תלויים. נחשב:

$$0.6 = P(R/T) = \frac{P(R \cap T)}{P(T)} = \frac{P(R) \cdot P(T)}{P(T)} = P(R).$$

ביחד עם הנתון  $P(T) = 2 \cdot P(R)$  נתחל למלא את הטבלה:

	$\bar{T}$	$T$	
$R$	0.60		
$\bar{R}$	0.40		
1.0	0.70	0.30	

שוב נסתמך על העובדה שהאירועים בלתי תלויים ונקבל:

$$P(R \cap T) = P(R) \cdot P(T) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18,$$

כעת נמלא את הטבלה לפי הסתברויות משלימות:

$\bar{T}$	$T$		
			$R$
			$\bar{R}$
0.60	0.42	0.18	
0.40	0.28	0.12	
1.0	0.70	0.30	

#### סעיף א

$$P(R \cap T) = 0.18$$

#### סעיף ב

הניסוח "כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, ורק הם" מכוננות להסתברות מותנית. אם ידוע שתושב משתתף בריקודי עם, ההסתברות שהוא משתתף גם בתיאטרון היא:

$$P(T|R) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)} = \frac{0.18}{0.60} = 0.3.$$

כדי לחשב "פחות שניים" עדיף לחשב את המשללים לאפס או אחד:

$$1 - \binom{6}{0}(0.3)^0(0.7)^6 - \binom{6}{1}(0.3)^1(0.7)^5 = 0.5798.$$

## המלצות: הסתברות

- קרא באזירות את השאלות. לעיתים הן ארוכות (בחינות של קיז תשע"ה א, קיז תשע"ח ב) וחשוב לחבין את המשמעות של כל פסקה.
- כמעט כל הבדיקות מכילות שאלות על **הסתברות מותנית**. ניסוחים רבים מכוונים להסתברות מותנית וחשוב להכיר אותן!
  - הניסוח השכיח ביותר משתמש במילים "**אם ידוע ש-**" או "**ידוע כי**".
  - בבדיקה של חורף תשע"ז כתוב "**אם ... מהי ההסתברות ...**". לא גמור ברור שלמילה "**אם**" יש משמעות של "**אם ידוע**", אבל זאת הכוונה.
  - לעיתים קרובות (בדיקה של קיז תשע"ה ב) כתוב "**מה ההסתברות לבחור ... מבין ...**".
  - יוצא מן הכלל: בבדיקה של קיז תשע"ו או כתוב "**מבין כל הנבחנים**". המילה "**מבין**" בדרך כלל מכוונת להסתברות מותנית, אבל כאשר "**מבין**" מתייחס ל"**כל הנבחנים**", אין הסתברות מותנית. לחילופין אפשר לחשב הסתברות מותנית בהסתברות שהיא 1 והיתוך מצטמצם:

$$P(X) = \frac{P(X \cap \text{כל הנבחנים})}{P(\text{כל הנבחנים})} = \frac{P(X)}{1} = P(X).$$

מצב דומה מופיע בבדיקה של קיז תשע"ד ב ("בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת")", ובבדיקה של קיז תשע"ח ב ("מן התלמידים שנגשו למבחן").

- בבדיקה של קיז תשע"ח א הניסוח הוא: " $\frac{k}{n}$  נעצרו בחבריהם (נקרא לאירוע A) ו- **מהם עברו את הבדיקה**" (נקרא לאירוע B). ברור ש- $P(B \cap A) = k$ , אבל לבדוק לפי הנוסחה להסתברות מותנית:

$$\begin{aligned} P(B/A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{\frac{k}{n}} = \frac{k}{n} \\ P(B \cap A) &= k. \end{aligned}$$

- בבדיקה של חורף תשע"ד יש ניסוח אחר: **כל התושבים המשתתפים ב...**, ויק הם.
- כאשר יש חיתוך בחישוב של הסתברות מותנית, לעיתים קרובות ניתן לפשט את החישוב. בבדיקה של קיז תשע"ז א יש לחשב  $P(D = 4 \cap D \geq 3)$ , אבל אם ערך גדול או שווה 3 וגם שווה ל-4, אז הוא שווה ל-4, ולכן מספיק לחשב  $P(D = 4)$ .
- אם שני אירועים בלתי תלויים, חישוב הסתברות המותנית מצטמצם:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B).$$

מצב זם מופיע בבדיקות של חורף תשע"ז, חורף תשע"ח, קיז תשע"ה א, חורף תשע"ד.

- המילה **בדיק** מכוונת לחישוב אחד של נוסחת ברנולי, כי נתון כמה "הצלחות" צריכות להיות גם כמה "כשלונות". מקרה מעניין נמצא בבדיקה של קיז תשע"ח באשר נתון שההסתברות לקבל 60 שווה להסתברות לקבל 100. נתון גם שיש שלוש הצלחות מתוך חמיש (20 נקודות כל אחת), אז ההסתברות לקבל שני כשלונות (20 נקודות כל אחת) צריכה להיות שווה להסתברות לקבל שתי הצלחות (20 נקודות כל אחת).

- בבדיקה של קיז תשע"ז כתוב **"בוחרים באקראי ... עד של"** 3 מהם **בדיק** יש קלונועית". המשמעות של "עד ש" היא שmpsיקים את הבחירה האקראית כאשר הבחירה **אחרונה** היא "הצלחה". במקרה זה נשארו שתי הצלחות" שיש לחשב את ההסתברות שלhn לפוי נוסחת ברנולי, ואז להכפיל בהסתברות של הצלחה" בבחירה האחרונה:

$$\overbrace{\pm \pm \pm \pm}^{2/5} \quad \overbrace{+}^{1/1}.$$

- בבדיקה של קיז תשע"ז בבייטוי "מוסכאים באקראי ...", ובהמשך הביטוי "מוסכאים באקראי **שוב ...**" מכוון לשימוש בעץ כדי לתאר את הבחירה הסדרתית.

- בבדיקה של קיז תשע"ח א, המשמעות של הניסוח **"לפחות אחת משתי הטענות I, II היא שהairoう קורה אם קורה אחד מהairoうים I, II, או שנייהם, המסומן I ∪ II.** יש שתי דרכים לחשב את ההסתברות: על ידי חיבור ההסתברות של שני הairoうים וחיסורairoう המשותף כדי לקזז את הספירה הכפולה, או לחבר אתairoう המשותף עםairoうים של אחד ולא השני המסומן I-I, II-II:

$$\begin{aligned} P(I \cup II) &= P(I) + P(II) - P(I \cap II) \\ P(I \cup II) &= P(I - II) + P(II - I) + P(I \cap II). \end{aligned}$$

- בבדיקה של קיז תשע"ח ב יש לחשב את ההסתברות של תשובה נconaה **לכל** ( $n = k$ ) השאלות או תשובה נconaה **לאף אחת** ( $0 = k$ ) מהשאלות, כאשר ההסתברות לתשובה נconaה אחת היא  $p$ . אין צורך להשתמש בנוסחת ברנולי הכללית:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$\begin{aligned} \text{אם } p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n = \binom{n}{0} = 1, k = 0 \\ \text{אם } n = n, k = 1, p^n (1-p)^{n-n} = p^n = \binom{n}{n} = 1. \end{aligned}$$

- בבדיקות של קיז תשע"ז, ב יש שלוש תוצאות פועלה במקום שתיים. סכום ההסתברויות חייב להיות אחד, ולכן כאשר מחשבים משלים להסתברות אחת, יש להחסיר את שתי הסתברויות האחרות. בבדיקה של מועד ב, ההסתברות לティקו היא אחד פחות ההסתברות שיעל תנצה פחות ההסתברות أنها תנצה:

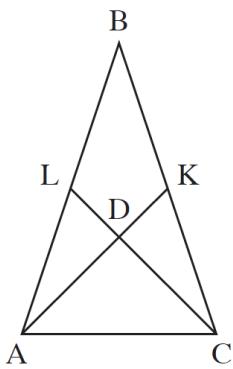
$$P(\text{אניה}) = 1 - (P(\text{יעל}) + P(\text{יעל})) = 1 - P(\text{יעל}) - P(\text{אניה}).$$

- במספר בבדיקות (חויר תשע"ה, קיז תשע"ד ב, קיז תשע"ה ב) כתוב **"ישוב גדול", "עיר גדולה", "אוניברסיטה גדולה". אני מניח שבמילה "גדול" מבטיחה שאפשר לבחור תושבים או סטודנטים כפי שדרוש בשאלות. אין משמעות לבחור ארבעה סטודנטים אם יש רק שניים.**



## פרק 4 גיאומטריה

### 4.1 קיז תשע"ח מועד ב



.  $ABC$  הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = BC$ ) .

$AK$  ו-  $CL$  הם תיכוןים במשולש, החותכיהם זה את זה בנקודה  $D$  .

נתון:  $AK \perp CL$  .

א. הוכח:  $BD = AC$  .

$$\text{ב.} \quad \text{חשב את היחס} \quad \frac{S_{BLDK}}{S_{\Delta ABC}} \cdot$$

ג.  $M$  הוא מרכז המפגש החוסם את המרובע  $ALKC$  .

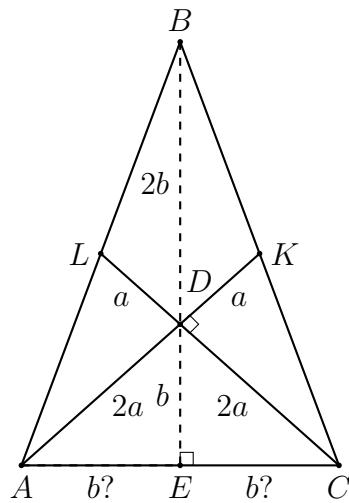
$$\text{הוכח: } \angle AML = 90^\circ \quad (1)$$

$$\text{ממצא את היחס} \quad \frac{AM}{AD} \quad (2)$$

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

#### סעיף א

כאשר יש תיכוןים נחתכים מיד חושבים על משפט 45 "שלושת התיכוןים במשולש נחתכים בנקודה אחת", ובמשפט 46 "נקודת חיתוך התיכוןים מחלקת כל תיכון ביחס 1 : 2". נבנה  $BE$ ,  $BE \perp AC$ , התיכון מ- $B$ - $C$ , שחותך את מפגש התיכוןים האחרים ב- $D$ .  $BE \perp AC$  לפי משפט 6 "במשולש שווה-שוקיים, כווצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים". קל להראות שהትיכוןים  $AK, CL$ ,  $DK = DL = a$  ו-  $\triangle LDA \cong \triangle KDC \cong \triangle CED \cong \triangle AED$ . סימנו את הקטעים  $DC = DA = 2a$



אם נוכיח ש- $BD = 2b = 2DE = AE + ED = AC - AE = EC = DE$ . לפי משפט 6, הוא חוצה זווית של  $\angle ABC$ , וגם של  $\angle ADC$  כי חוצה הזווית והתיכון מתלכדים. נתון  $AK \perp CL$  כך  $\angle AKE = \angle CLK = 90^\circ$ .  $\angle ADE = \angle CDE = 90^\circ$ . במשולשים  $\triangle ADE$ ,  $\triangle DCE$ ,  $\angle DAE = \angle DCE = 45^\circ$ , וכן גם הזווית  $\angle DAE = \angle DCE = 45^\circ$  והמשולשים שווה-שוקיים. מכאן ש- $AE = EC = DE = b$ .

אפשרות אחרת, פשוטה יותר, להוכיח  $AE = EC = DE = b$  באמצעות משפט 86 "במשולש ישר-זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר" ב- $\triangle ADC$ .

### סעיף ב

כדי לחשב  $S_{BLDK}$  על ידי חיסור שטח המצלע  $ALDKC$  מהשטח של  $\triangle ABC$ , כי המצלע מורכב משולשים ישר-זווית וחישוב השטח שלהם קל מאוד:

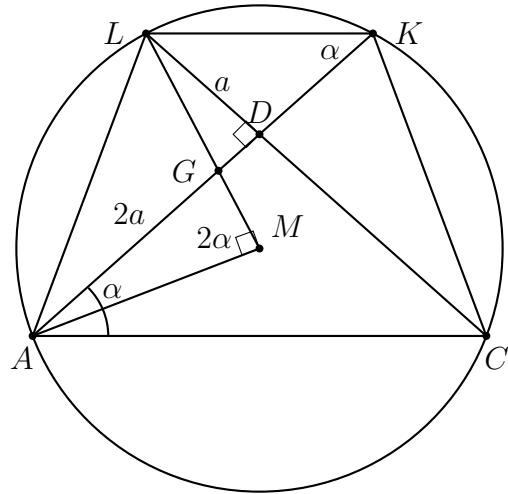
$$\begin{aligned} S_{ALDKC} &= S_{ADL} + S_{KDC} + S_{ADC} = 2S_{ADL} + S_{ADC} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot DL + \frac{1}{2} AC \cdot DE \\ &= 2a \cdot a + \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot b \\ &= 2a^2 + b^2. \end{aligned}$$

אפשר להניח שהיחס המבוקש אינו תלוי באורך של הצלעות, لكن נחפש דרך להביע את שטח המצלע  $S_{ALDKC}$  כפונקציה של  $b$  בלבד. משפט פיתגורס על  $\triangle ADE$ :

$$\begin{aligned} b^2 + b^2 &= (2a)^2 = 4a^2 \\ S_{ALDKC} &= 2a^2 + b^2 = 2 \cdot \frac{1}{4}(b^2 + b^2) + b^2 = 2b^2 \\ S_{ABC} &= \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{1}{2} 2b \cdot 3b = 3b^2 \\ S_{BLDK} &= S_{ABC} - S_{ALDKC} = 3b^2 - 2b^2 = b^2 \\ \frac{S_{BLDK}}{S_{ABC}} &= \frac{b^2}{3b^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

### סעיף ג (1)

לא התקדמתי עד שציירתי תרשימים חדש עם המעגל וראיתי שהזווית היקפית  $\angle LKA$  נשענת על המיתר  $UL$  נשענת הזווית המרכזית  $\angle AML = 2\angle LKA$ , כך ש- $\angle AML = 2\angle LKA$  לפי משפט 69 "במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת". אבל לפי משפט 14 "קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה",  $LK \parallel AC$ , ולכן  $\angle KAC = \angle LKA = \alpha$ . לפי זוויות מתחלפות, והוכחנו בסעיף הקודם ש- $\angle AML = 2\alpha = 90^\circ$ , ולכן  $\alpha = 45^\circ$ .



### סעיף ג (2)

תחליה שמתי לב ש- $\triangle MGA \sim \triangle DGL$  כי במשולשים ישר-זווית, הזוויות  $\angle MGA = \angle DGL$  קודקודיות. גישה זו לא הצליחה כי לא מצאתי דרך לבטא את הקשר בין  $AD, AG, GD$  לבין  $AM, ML$ . לבסוף שמתי לב שלמשולשים  $\triangle LDA$ ,  $\triangle LMA$ , והמשולש  $\triangle LMA$  שווה-שוקיים כי שתי הצלעות  $AM, ML$  הן רדיוסים. ממשפט פיתגורס:

$$AM^2 + ML^2 = AL^2$$

$$2AM^2 = AL^2$$

$$LD^2 + AD^2 = AL^2$$

$$a^2 + AD^2 = 2AM^2$$

$$\frac{1}{4}AD^2 + AD^2 = 2AM^2$$

$$\frac{AM}{AD} = \sqrt{\frac{5}{8}}.$$

## 4.2 קיז תשע"ח מועד א

ABCD הוא מעוין. E ו F הן אמצעי הצלעות AB ו BC בהתאם.

נקודה K היא מפגש האלכסונים של המעוין.

מן הנקודה E העלו אנך ל- AB, החותר את המשך האלכסון BD בנקודה G (ראה ציור).

א. הוכח: הנקודה G היא מרכזו המעגל החוסם את המשולש ABC.

הקטע GF חותר את האלכסון AC בנקודה M,

שהיא מרכזו המעגל החוסם את המשולש CDB.

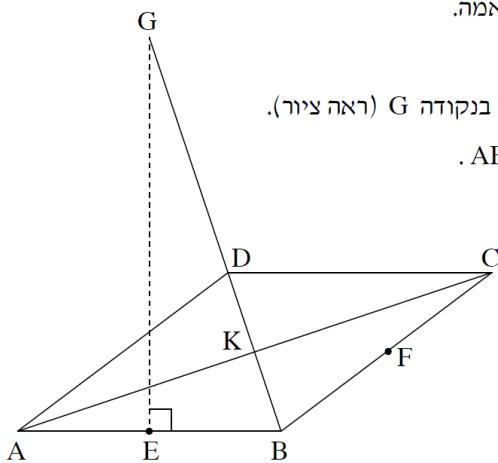
ב. הוכח שהמשולשים CFC, BKC, MFC ו BFG דומים זה לזה.

נסמן ב- R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC,

וב- z את רדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC.

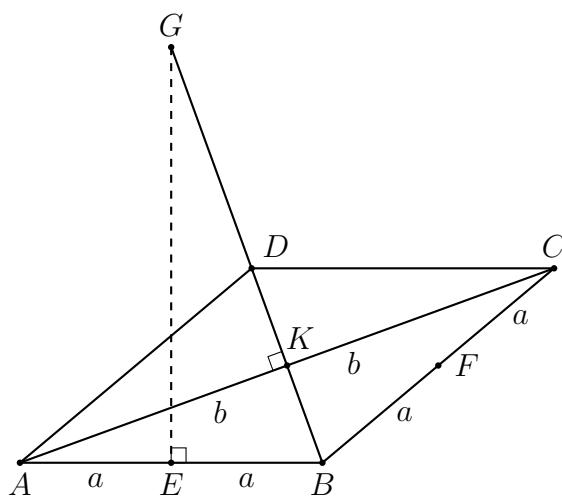
ג. (1) הוכח כי  $\frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK} = \frac{MC}{GB}$  וכי  $\frac{MF}{CF} = \frac{r}{R}$ .

(2) הראה כי היחס בין אלכסוני המעוין שווה ל-  $\frac{r}{R}$ .



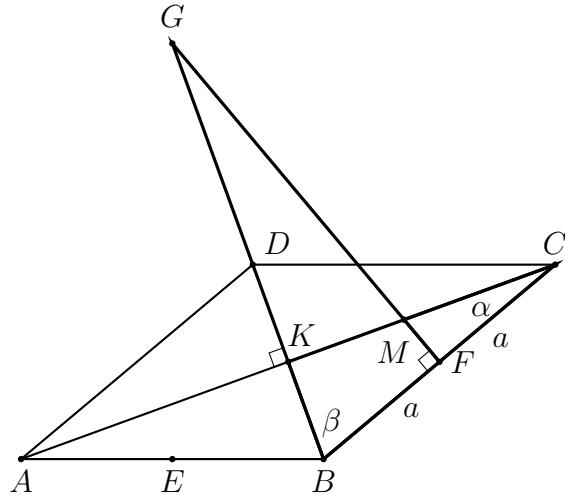
### סעיף א

כדי להוכיח שהנקודה G היא מרכזו של מעגל חוסם נשתמש במשפט 54 "במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכזו המעגל החוסם את המשולש". צריך להוכיח ש- GE, GB הם אנכים אמצעיים של  $\triangle ABC$ . מעוין הוא מקבילית עם צלעות שוות, וכמקבילית, ניתן להשתמש במשפט 28 "במקבילית האלכסונים חוצים אותה". סימנו בציר את אורך האלכסון AC ב- b. ביחד עם משפט 35 "במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה", GB הוא אכן אמצעי ל- AC. נתון שנקודת E היא אמצע של AB, וש- GE, AB הוא אנך ל- AB, ולכן G היא נקודת החיתוך של שני אנכים אמצעיים וממרכז המעגל החוסם את  $\triangle ABC$ .



## סעיף ב

הוכיחה שהמשולשים דומים תהיה קל יותר אם נבנה מחדש את התרשים תוך הדגשת צלעות המשולשים. לפי משפט 35 האלכסון  $AC$  הוא אכן אמצעי ל- $DB$ . נתון שהנקודה  $M$  היא מרכז המרגל החוסם את  $CK$ ,  $\triangle BDC$  שחותכת את  $CK$  ב- $M$  היא אכן אמצעי ל- $BC$ . הזווית  $\alpha$  משותפת לשני משולשים ישר-זווית, כך ש- $\triangle BKC \sim \triangle MFC$ . הזווית  $\beta$  משותפת לשני משולשים ישר-זווית, וכך  $\triangle BFG \sim \triangle BKC \sim \triangle MFC$  וביחד  $\triangle BFG \sim \triangle MFC$ .



## סעיף ג (1)

לפי דמיון המשולשים  $\triangle BFG \sim \triangle MFC$

$$\frac{MC}{GB} = \frac{MF}{BF} = \frac{MF}{CF},$$

כי בגלל ש- $F$  הוא אמצע הצלע  $BC$ .

מדמיון המשולשים  $\triangle BKC \sim \triangle MFC$  מתקבל:

$$\frac{MF}{BK} = \frac{CF}{CK},$$

ובчисוב פשוט:

$$\frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK}.$$

## סעיף ג (2)

מן נתון שהנקודה  $M$  היא המרכז של המרגל החוסם את  $BDC$ , אנו מקבלים שהאלכסון  $MC$  שווה ל- $r$ . בסעיף א הוכיחנו שהנקודה  $G$  היא מרכז המרגל החוסם את  $ABC$ , ולכן  $GB$  שווה ל- $R$ . נחשב את יחס הרדיוסים תוך שימוש ביחס שחישבנו בסעיף ג (1) ומשפט 28 "מקבילית (מעוין) האלכסונים חוצים זה את זה":

$$\frac{r}{R} = \frac{MC}{GB} = \frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK} = \frac{DB/2}{AC/2} = \frac{DB}{AC}$$

חורף תשע"ח 4.3

המרובע ABCD חסום במעגל.

.  $CB = CG$  נמצאת על הצלע  $CD$  כך ש-  $AB = AG$  וגם המשיק למעגל בנקודה  $A$  חותך את המשך הצלע  $CD$  בנקודה  $L$ , וחותך את המשך הצלע  $CB$  בנקודה  $K$  (ראה ציור).

. AD = AG הוכח כי א.

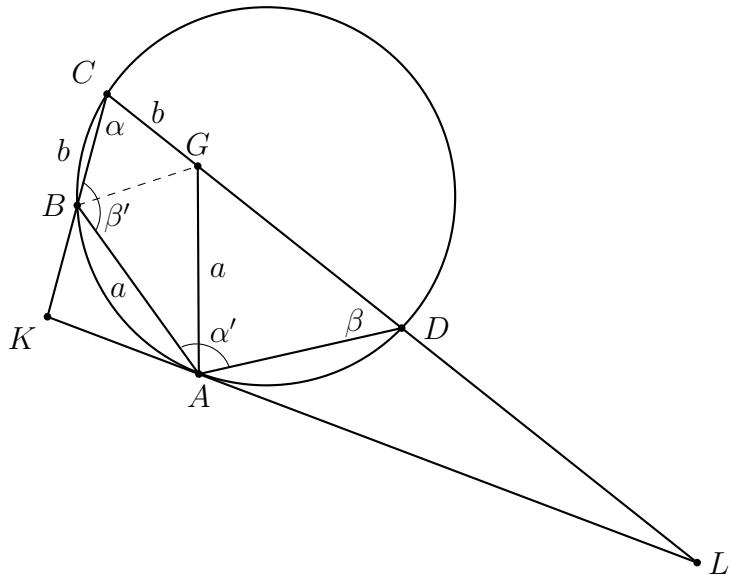
. ב. (1) הוכח כי  $\triangle ABK \sim \triangle CDA$

$$AD^2 = BK \cdot CD \quad (2)$$

$$\cdot \frac{S_{\Delta LDA}}{S_{\Delta KAB}} = \frac{LA}{AK} \quad \text{הראה כי} \quad \text{ג'}$$

סעיף א

נתון ש-  $AB = AG$ ,  $CB = CG$  ו-  $ABCG$  הוא דלתון, אבל לא ברור בשלב זה אם זה עוזר בפתרונו. נתון שהמרובע  $ABCD$  חסום במעגל, ולפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180^\circ$ ". סימנו  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ו-  $\delta$  ונקבע  $\alpha' = 180 - \alpha$ ,  $\beta' = 180 - \beta$ :



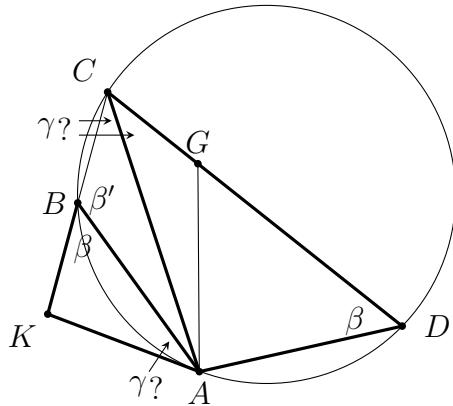
כדי להוכיח ש- $AD = AG$  נשתמש במשפט 3 "במשולש, מול זווית שווה מונחות צלעות שוות", ווכlich ש- $\beta = \angle AGD$ . נזכיר ש- $ABCG$  דלתון והזווית הצדדיות שלו שוות, כך ש- $\angle AGD = 180 - \beta' = 180 - (180 - \beta) = \beta$ . לפ"ז  $\angle AGC = \angle ABC = \beta'$ .

רישימת המשפטים לבגירות לא כוללת משפט על שוויון זויות בדلتון, או נדרש להוכיח אותו. דلتון מוגדר כמרובע עם שני זוגות של צלעות סמכות שוות, כך שהוא מורכב משני משולשים שווה-שוקיים המוצמדים בבסיסיהם (קו מקווקו בתרשים):

$$\angle ABC = \angle ABG + \angle GBC = \angle AGB + \angle BGC = \angle AGC.$$

**סעיף ב (1)**

נדגש בתרשים את המשולשים  $\triangle ABK, \triangle CDA$  שיש להוכיח שהם דומים. הוספנו לתרשים את הסימון  $\beta = \angle ABK$  כי הווית המשלימה  $\angle ABC = \beta' = 180 - \beta$ . אם נמצא  $\angle ACD = \angle BAK = \gamma$ . עוד זוג של זוויות שותת נקבל שהמשולשים דומים לפי ז.ז. ננסה להוכיח  $\gamma = \angle BCA$ . הווית  $\angle BAK$  היא הווית בין המשיק  $KA$  והmittar  $AB$ . לפי משפט 79 "הווית בין משיק ומיתר שווה להיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני",  $\gamma = \angle BCA = \angle BAK$ . לפי משפט 21 "האלכסון הראשי בדلتון חוצה את זוויות הראש ...". מכאן  $\angle BCA = \angle ACD = \gamma$ .  
 $\triangle ABK \sim \triangle CDA$ .



דרך אחרת להוכיח  $\angle BCA = \angle ACD$  היא לשים לב ש- $\angle BCA = \angle ACD$ . נשתמש במשפט 63 "במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו" ומשפט 71 "במעגל, לקשתות שותת מתאימות זווית היקפות שותת", ונקבל  $\angle BCA = \angle ACD$ .

**סעיף ב (2)**

לפי  $AB = AD$  שהוכחנו בהחלק הראשון של הסעיף ולפי

$$\begin{aligned} \frac{AB}{CD} &= \frac{BK}{AD} \\ AB \cdot AD &= BK \cdot CD \\ AD^2 &= BK \cdot CD. \end{aligned}$$

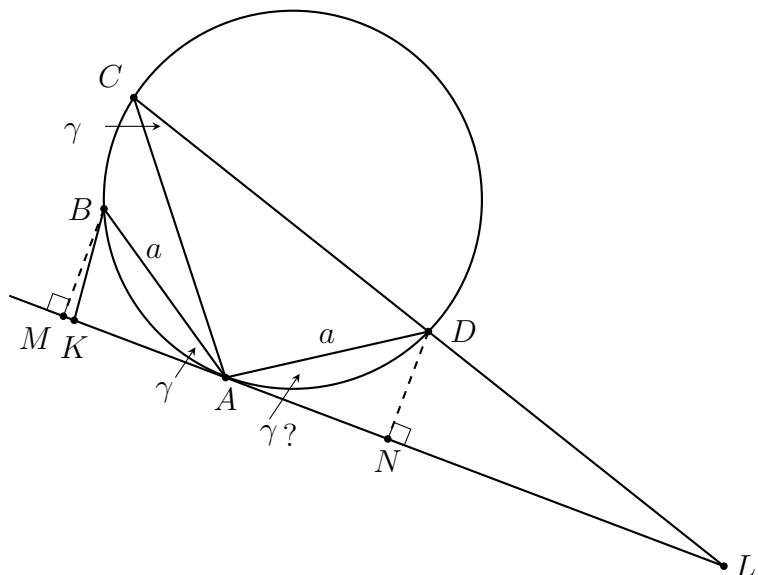
הם הבסיסים של המשולשים  $\triangle LDA$ ,  $\triangle KAB$  כך שנתקבל את היחס המבוקש אם נוכיח שהגבהים שוויים. הוכחנו שהיתרים ב- $\triangle ADN$ ,  $\triangle ABM$  שוים  $AB = AD = a$ , כך שנשאר רק להוכיח שהזווית שווה  $\gamma$ . הוכחנו ש- $\angle BAK = \angle DAL = \gamma$ . ה- $\angle DCA$  היא הזווית בין המשיק  $LA$  והמיתר  $AD$ . הזווית  $\angle DCA$  נשענת על מיתר זה, כך ש- $\angle DCA = \angle DAL = \gamma$ . לפיה מושפט  $\angle BAK = \angle DCA = \angle DAL = \gamma$ . כעת ניתן לחשב את השטחים:

$$\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{(LA \cdot DN)/2}{(AK \cdot BM)/2}$$

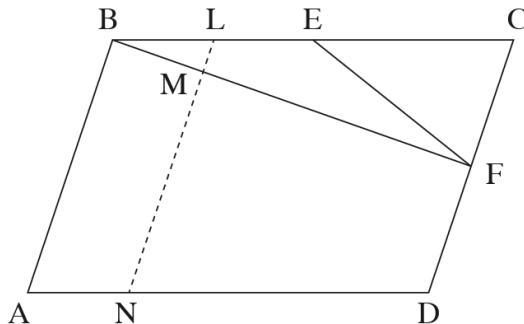
$$DN = AD \sin \angle DAL = a \sin \gamma$$

$$BM = AB \sin \angle BAK = a \sin \gamma = DN$$

$$\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{LA}{AK}.$$



## 4.4 קיז' תשע"ז מועד ב



המרובע  $ABCD$  הוא מקבילית.

הزاوية  $A$  היא זווית חדה.

הנקודה  $E$  היא אמצע הצלע  $BC$

והנקודה  $F$  היא אמצע הצלע  $CD$

(ראה ציור).

.א. שטח המשולש  $ECF$  הוא  $S$ .

הבע את שטח המקבילית  $ABCD$

באמצעות  $S$ . נמק את תשובתך.

.ב. הנקודה  $L$  היא אמצע הקטע  $BE$ .

דרך הנקודה  $L$  העבירו ישר המקביל ל- $AB$  וחותך את  $BF$  ואת  $AD$

בנקודות  $M$  ו- $N$  בהתאם.

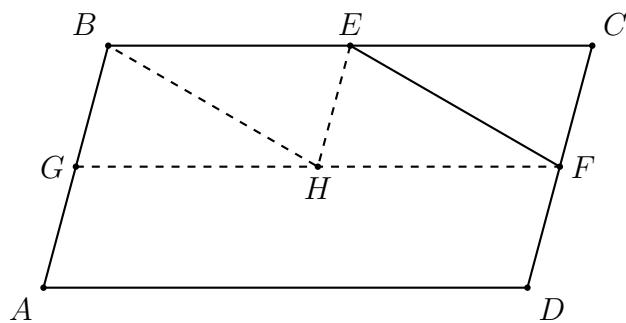
חשב את היחס  $\frac{LM}{MN}$ .

.ג. נתון  $BE = EF$ .

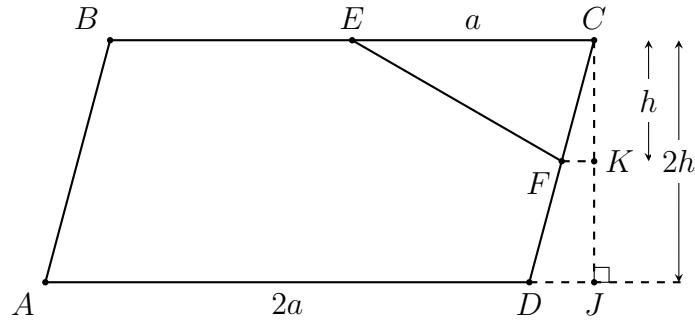
האם אפשר לחסום את המרובע  $ABFD$  במעגל? נמק את קביעתך.

### סעיף א

נפרק את המקבילית למשולשים. هي  $GF$  קטו קו המקביל ל- $BC$  ו- $DH$  מקביל ל- $CD$ . לפי זווית מתאימות ומשלים, המרובעים  $BEHG, ECFH$  הם מקבילות. בכלל ש- $E$  היא נקודת האמצע של  $BC$ ,  $H$  היא נקודת האמצע של  $GF$ . מכאן שכל המשולשים  $\triangle ECF, \triangle EHF, \triangle HEB, \triangle BGH$  הוו קוו אמצעים ומחלק את המקבילית לשני חלקים שווים, כך ש- $S_{ABCD} = S_{BCFG} + S_{GFDA} = 8S$ .



הוכחה אחרת משתמשת במשפט 5 א "שטח מקבילית שווה למכפלת צלע המקבילית בגובה לצלע זו". הגובה של המקבילית באורך כפול מהגובה של המשולש לפי דמיון המשולשים  $\triangle FCK, \triangle DCJ$ :



$$S_{ECF} = \frac{1}{2}ah = S$$

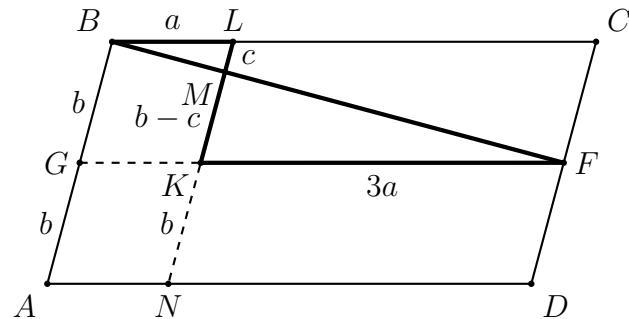
$$S_{ABCD} = 2a \cdot 2h = 4ah = 8S.$$

### סעיף ב

נ קיבל יחס בין קטעי קו אם נמצא משולשים דומים שקטעי הקו הם צלעות שלהם. בתרשים להלן הדגשתי משולשים שיכולים להתאים. קטע האמצעים במקבילית מקביל לבסיסים  $BC \parallel GF$  ו זוויות מתחלפות  $\angle LMB = \angle KMF$  ו  $\angle LBM = \angle MKF$ , נקבל:

$$\triangle LMB \sim \triangle KMF.$$

בתרשים רשםנו את אורכי הקטעים תוך שימוש בגעמים  $a, b, c$ .



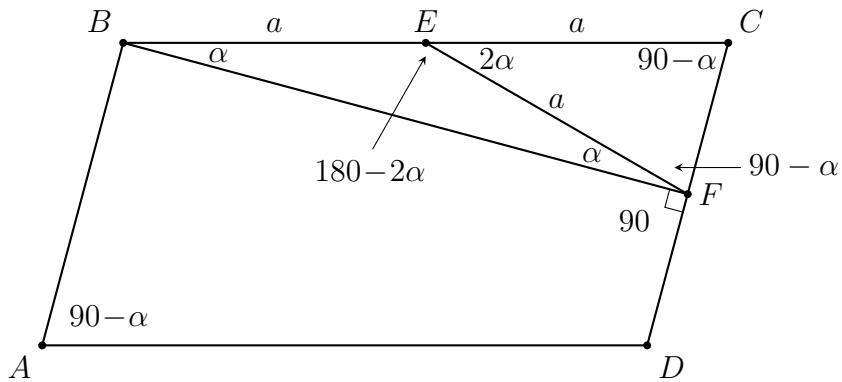
$$\frac{c}{b-c} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

$$b = 4c$$

$$\frac{LM}{MN} = \frac{c}{2b-c} = \frac{a}{2 \cdot 4c - c} = \frac{1}{7}.$$

**סעיף ג** לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במוגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180^\circ$ ".  
בתרשים להלן הוספתי את הנטון  $BE = EF$ . אפשר למצוא פתרון שמשתמש במשפט 87 "משולש בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה הוא משולש ישר זוית".

אפשר לפתור את השאלה ללא שימוש במשפט 86. נתון  $\angle EBF = \angle EFB$ ,  $BE = EF$  וכאן  $\triangle BEF$  משפט 56. כדי שסכום הזווית במשולש יהיה  $180 - 2\alpha$ , ולפי זווית משלימה של נסמן  $\alpha$ . נתון גם  $\angle BEF = 180 - 2\alpha$ , והזווית הללו שוות  $90 - \alpha$  כדי שסכום הזוויות במשולש יהיה 180. נחבר זוויות ונקבל  $\angle BFD = 90$ .



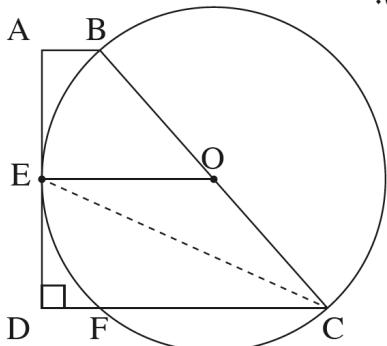
לפי משפט 26 "במקבילית כל שתי זוויות נגדיוות שוות או לזו". לפיה משפט 56 חייב להתקיים:

$$\angle BFD + \angle BAD = 90 + (90 - \alpha) = 180 - \alpha = 180.$$

נתון  $\angle BAD = 180 - \alpha$  היא זוית חדה (פחות מ- $90^\circ$ ) ולכן  $0 < \alpha < 90$ , שסותר את משפט 56. אי אפשר לחסום את המרובע במעגל.

## 4.5 קיז תשע"ז מועד א

נתון מעגל שמרכזו  $O$ .



$\angle ADC = 90^\circ$ ,  $AB \parallel DC$  הוא טרפז ישר זוית ( ).

הצלע  $AD$  משיקה למעגל בנקודה  $E$ ,

והנקודות  $B$  ו-  $C$  נמצאות על המעגל כך שר-  $BC$  הוא קוטר.

הצלע  $DC$  חותכת את המעגל בנקודה  $F$ , כמתואר בציור.

א. הוכח:  $\angle BCD = 2\angle DEF$ .

ב. הוכח:  $\triangle ABE \cong \triangle DFE$ .

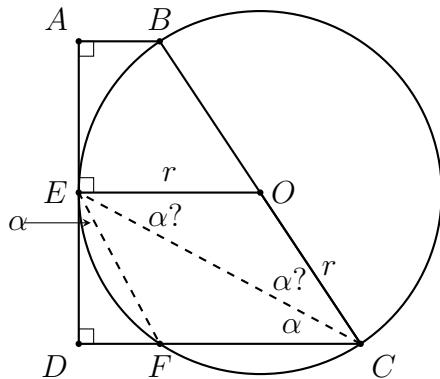
ג. הוכח:  $BC = DF + DC$ .

### סעיף א

השאלה שואלת על זוויות ויש לנו קווים מקבילים, משיק וזוית ישרה. ננסה להסיק מסקנות על זוויות. מחרבי השאלה סיפקו רמז: הקו המקבילו  $EC$  היא זוית בין המשיק  $ED$  לבין ביני  $EF$ . לפ"ז  $\angle ECF$  "זוית בין משיק ומיתר שווה לזוית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני",  $\angle DEF = \angle ECF$ . סימנו את זוויות ב- $\alpha$ .

אם נידע את  $\angle ECO$ , נקבל  $\angle BCD = \angle ECF + \angle ECO$ . נתון ש-  $AB \parallel DC$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$ .  $\angle BCD = \angle ECF + \angle ECO = \angle ECD + \angle ECO$ .  $EO \perp AD$ ,  $EO \parallel DC$ ,  $EO \perp AD$ ,  $\angle OEC = \angle ECD$ ,  $EO = r$ ,  $\angle OEC = \angle ECO$ . לפ"ז  $\angle ECO = \alpha$ .  $\angle ECO$  שווה-שוקיים כי הצלעות הן רדיוסים, ולכן  $\angle ECO = \alpha$ :

$$\angle BCD = \angle ECF + \angle ECO = 2\alpha = 2\angle DEF.$$



הוכחה אחרת משתמשת במשפט 103 "אם נקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלוקת החיצוני שווה לריבוע המשיק". לכן:

$$ED^2 = DC \cdot DF$$

$$\frac{ED}{DF} = \frac{DC}{ED}$$

$$\triangle EDF \sim \triangle CDE.$$

נשתמש במשפט 69 "במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת".

$$\angle BCD = \angle BOE = 2 \cdot \angle BCE.$$

מחיבור של זוויות:

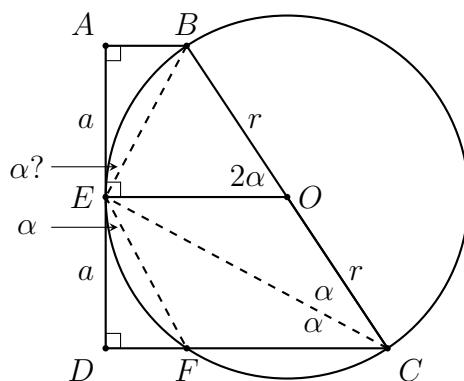
$$\angle ECD = \angle BCD - \angle BCE = \angle BCD - \angle BCD/2 = \angle BCD/2.$$

הוכחנו ש- $\triangle EDF \sim \triangle CDE$ , ולכן:

$$\angle DEF = \angle ECD = \angle BCD/2.$$

## סעיף ב

נתון ש- $BC$  הוא קוטר שמרכזו  $O$  ולבן  $BO = OC = r$ . נפעיל את המשפט 44 "בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השני" על הטרפז  $ABCD$ , כדי לקבל  $AE = DE$ ,  $\angle AEB = \angle ECB$ ,  $\angle AED = \angle EDC$ ,  $\angle EAB = \angle EDC = 90^\circ$ . נבנה את המיתר  $BE$ . לפי משפט 79, הזווית היקפית, ומהסעיף הקודם, נבנה את המיתר  $BE$ . לפי משפט 79,  $\angle AEB = \angle ECB = 90^\circ$ .  $\angle EAB = \angle EDC = \alpha$ .



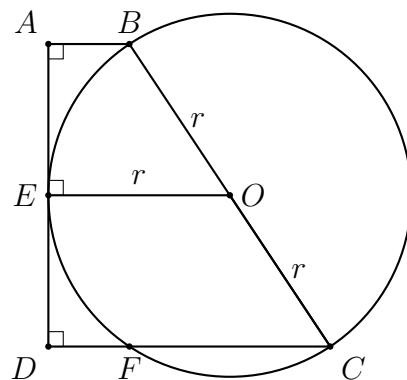
הוכחה אחרת מחשבת זווית של  $\triangle BOE$  שהוא שווה-שוקיים כי  $BO = OC = r$ . בסעיף א הוכחנו ש- $\angle BOE = 2\alpha$ , ולכן  $\angle BEO = \angle OBE = 90 - \alpha$ . כדי להשלים ל- $90^\circ$ , נסמן  $\angle BCE = \angle ECF = \alpha$  בಗל שום נטענים על זווית היקפיות שותות  $BE = EF$ .  $\angle DEF = \alpha$ .  $\triangle ABE \cong \triangle DFE$  ולכן.

## סעיף ג'

האורך של  $BC$  הוא  $2r$ , כך שעלינו להוכיח ש- $DF + DC = 2r$ . אם נפשת את התרשים נראה ש- $EO$  הוא קטע אמצעים של הטרפז  $ABCD$ , כי  $AB = ED$  ו- $BO = OC = r$ . לפי הסעיף הקודם מושפט 43 "קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם":

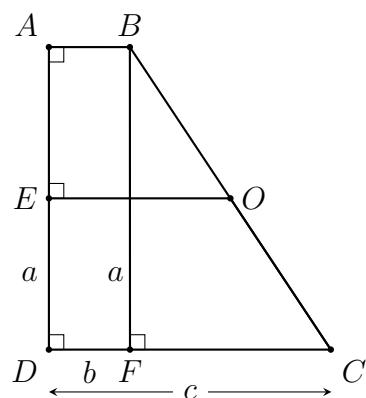
$$\begin{aligned} EO &= \frac{1}{2}(AB + DC) \\ &= \frac{1}{2}(DF + DC) = r, \end{aligned}$$

כי משולשים חופפים שהוכחנו בסעיף הקודם, ו- $EO$  הוא רדיוס. מכאן ש- $BC = 2r = DF + DC$ .

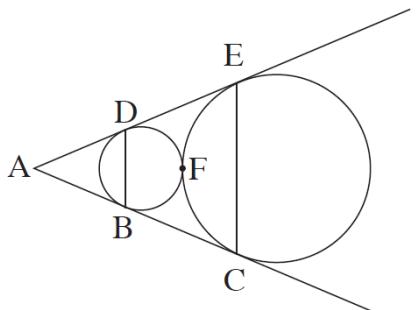


הוכחה אחרת משתמשת במשפט פיתגורס ומשפט 103 על משיק וקו חותך. נסמן את אורךי הצלעות בתרשימים ונקבל:

$$\begin{aligned} a^2 &= bc \\ BC^2 &= (2a)^2 + (c - b)^2 = 4a^2 + (c - b)^2 \\ &= 4bc + c^2 - 2bc + b^2 \\ &= c^2 + 2bc + b^2 = (c + b)^2 \\ BC &= c + b = DC + DF. \end{aligned}$$



## 4.6 חורף תשע"ז



נתונים שני מעגלים בעלי רדיוס שווה,  
המשיקים זה לזה מתחוץ בנקודה F.

משיק לשני המעגלים בנקודות B ו C

משיק לשני המעגלים בנקודות D ו E

כמתואר בציור.

א. הוכח שהמרובע BDEC הוא טרפז שווה-שוקיים.

ב. המשיק המשותף למעגלים העובר בנקודה F חותך את

שוקי הטרפז, BC ו DE, בנקודות G ו H בהתאמה.

הוכחה: GH הוא קטע אמצעים בטרפז.

ג. נסמן ב- R את רדיוס המעגל הגדול וב- r את רדיוס המעגל הקטן.

$$\text{הוכחה כי } R \cdot BD = r \cdot CE .$$

### סעיף א

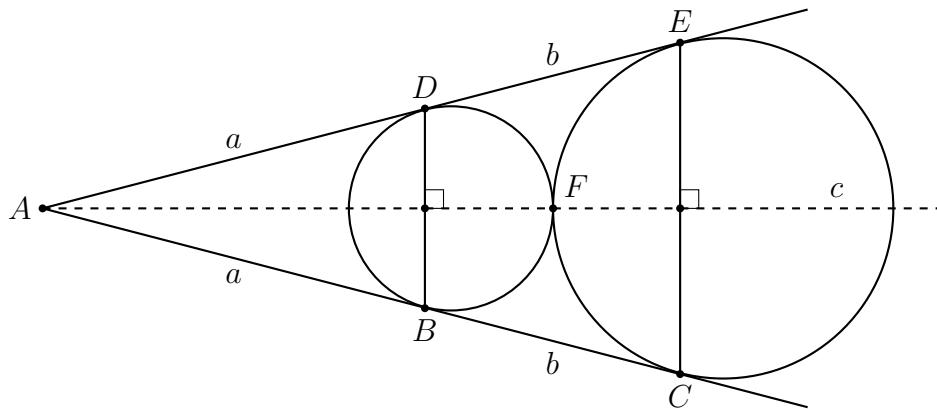
נפעיל את משפט 80 "שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שוים זה לזה" על  $:AC, AE$

$$AD = AB = a$$

$$AE = AC = a + b$$

$$DE = BC = b .$$

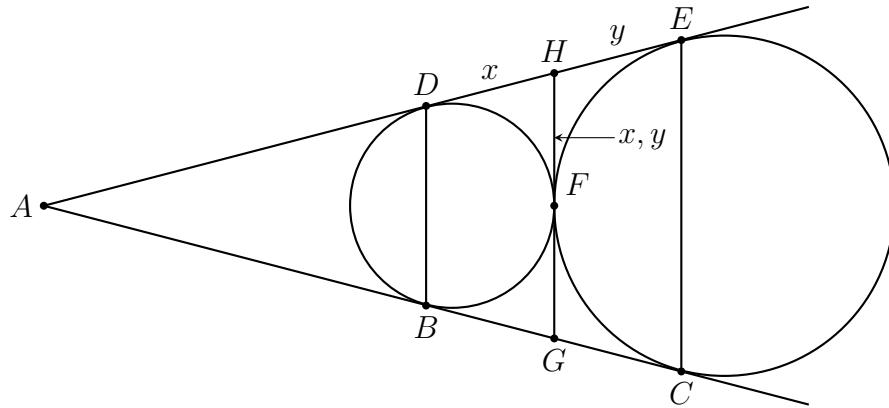
אם נכח ש- $DB \parallel EC$ , המרובע  $BDEC$  יהיה טרפז לפי ההגדרה והוכחנו שהוא שווה-שוקיים.



$\frac{AD}{AE} = \frac{a}{a+b} = \frac{AB}{AC}$  לפי צ.צ כי יש להם זוויות משותפות ב- A והוכחנו ש- $\triangle ADB \sim \triangle AEC$  המשולשים  $\triangle ADB, \triangle AEC$  שווה-שוקיים, ולכן לפי משפט 6 "במשולש שווה-שוקיים, חוצה זוית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים". הקוו c, חוצה זוית A, הוא גם גובה. מכאן שבבסיסי המשולשים  $DB, EC$  מאונכים שניהם לקו c ו-  $DB \parallel EC$ .

## סעיף ב

בमבטו ראשון חשבתי להשתמש במשפט 43 "קטע האמצאים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם", כאן,  $GH = \frac{1}{2}(BD + CE)$ , והנוסחה לשטח של טרפז  $S_{BDEC} = h \cdot \frac{1}{2}(BD + CE)$  אבל זה לא הוביל לפתרון. אחר כך ניסיתי להשתמש במשפט 14 "קטע אמצאים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה", אבל לא מצאתי משולש מתאים. לאחר פישוט התרשים שמתי לב שאפשר להפעיל את משפט 80 על הנקודות  $DH = HF = x$  ו- $y$ ,  $DH = HF = x$ ,  $H, G$  הוא קטע אמצאים של הטרפז. אותה הוכחה מראה שה- $GH = GC$  הוא קטע אמצאים של הטרפז.



## סעיף ג

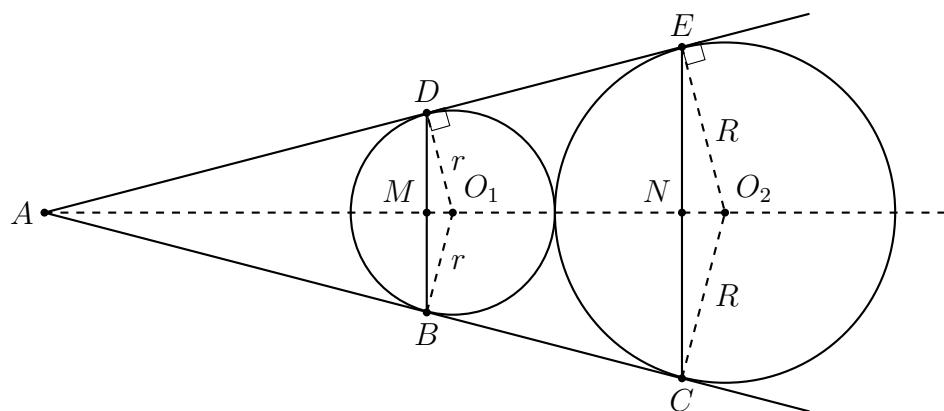
נוכיח שה- $\triangle BO_1D \sim \triangle CO_2E$ , כאשר  $O_1, O_2$  הן מרכזי המעגלים, וכך:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{r}{R}.$$

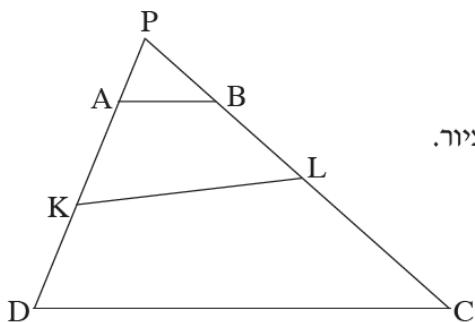
המשולשים מורכבים משני זוגות של משולשים ישר-זווית חופפים  $\triangle MO_1D \cong \triangle MO_1B$  ו- $\triangle NO_2E \cong \triangle NO_2C$ , כי  $O_1M, O_2N, O_2E = O_2C = R$ ,  $O_1D = O_1B = r$ ,  $\angle MO_1D \cong \angle MO_1B$  ו- $\angle NO_2E \cong \angle NO_2C$ . כבר הוכחנו שה- $DB \parallel EC$  והזווית בין הרדיוסים למשיקים ישרות, וכך:

$$\angle MDO_1 = 90^\circ - \angle MDA = 90^\circ - \angle NEA = \angle NEO_2,$$

לפי זה  $\triangle BO_1D \sim \triangle CO_2E$  ו-



4.7 **קייז תשע"ו מועד ב**



- . A. הוכחה:  $AB \parallel DC$

ונתנו כי המרובע  $ABLK$  הוא בר-חסימה במעגל  
וגם המרובע  $KLCD$  הוא בר-חסימה במעגל.  
הנקודות  $A$  ו-  $D$  מונחות על הצלע  $KL$ , כמתואר בציור.  
הנקודות  $B$  ו-  $C$  מונחות על הצלע  $PD$ , כמתואר בציור.  
נתון משולש  $PDC$  .

, PB = ס"מ 4 , PA = 3 נתון:

שטח המשולש ABP הוא S סמ"ר.

שטח המרובע ABCD הוא 24 סמ"ר.

ב. האם אפשר לחסום במעגל את המרובע ABCD ? נמק.

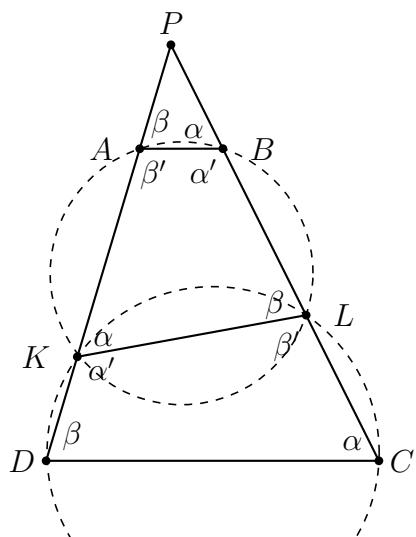
ג. מצא את אורך הצלע PD.

.BL = ס"מ 5 גם נתן .7

היעזר בדמיון משולשים והבע באמצעות S את שטח המרובע KLCD.

סעיף א

לפי משפט 56 "ניתן להוכיח מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה  $-180^\circ$ ".  
 בנייתו את שני המוגלים החוסמים את המרובעים, ונבחר זוג זוויות נגדיות, למשל,  $\angle LKA$ ,  $\angle ABL$ ,  
 במרובע  $ABLK$ . נסמן  $\alpha = \angle LKA$  ונסתמש בקיצור  $\alpha = 180^\circ - \angle ABL$  עבור הזווית הנגדית  
 בזווית  $\angle ABP = \alpha$  משילמות בנקודה  $B$ , ובנקודה  $K$ ,  $\alpha' = \angle LKD$ . נפעיל שוב  
 את משפט 56 כדי להסביר ש-  $\angle LCD = \alpha'$ . מכאן ש-  $AB \parallel DC$  לפי זוויות מתאימות.



## סעיף ב

כדי להפעיל שוב את משפט 56 נctrיך להוכיח שהزاויות הנגדיות במרובע  $ABCD$  מקיימות  $\angle ADC = \beta$ ,  $\angle BAD + \angle BCD = 180$ ,  $\angle ADC + \angle ABC = 180$  הוכחנו ש- $AB \parallel DC$ , ולפי זווית מתאימות בנקודות  $A, D$  ו- $C, B$ , זווית משלימות בנקודות  $B, C$  ו- $A, D$ . נסמן  $\angle PBA = \angle BCD = \alpha$ ,  $\angle PAB = \angle ADC = \beta$  נקבל אם המרובע  $ABCD$  בר חסימה,  $\alpha' + \beta = 180 - \alpha + \beta = 180$ , כך ש- $\alpha' + \beta = 180 - \alpha + \beta = 180$  שסותר את הטענה  $PA \neq PB$ .

## סעיף ג

לפי 2.ז., אולם, זה לא עוזר: אמם נטוון היחס בין  $PA, PB$ , אבל יש שני זוגות של נעלמים  $AB, DC$  ו- $PD, PC$ . ניתן השטחים של שני המושלים, ולפי משפט 100 ז"י "יחס הצלעות הוא השורש של יחס השטחים", נוכל לחשב את יחס הצלעות:

$$\frac{PA}{PD} = \sqrt{\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle PDC}}} = \sqrt{\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABP} + S_{ABCD}}} = \sqrt{\frac{S}{S + 24S}} = \frac{1}{5},$$

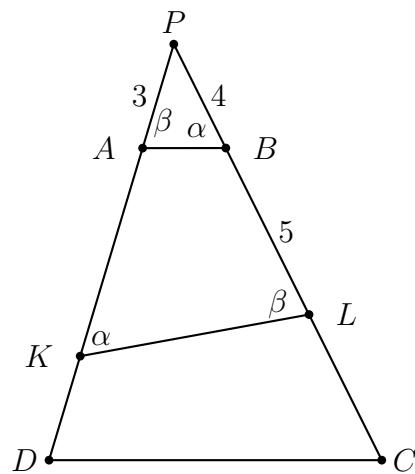
$PD = 5PA = 15$ .

## סעיף ד

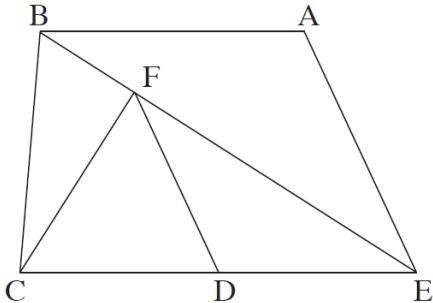
לפי 2.ז. יחס השטחים מתקיים מתקבל מיחס אורכי הצלעות הנתונים וcalculando:

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle LKP}} = \left(\frac{PA}{PL}\right)^2 = \left(\frac{3}{4+5}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$S_{KLCD} = S_{\triangle PDC} - S_{\triangle LKP} = 25S - 9S = 16S.$$



## 4.8 קיז' תשע"ו מועד א



נתון טרפז  $(AB \parallel EC)$   $ABCE$

הנקודה  $F$  נמצאת על האלכסון  $BE$

.  $CF \perp BE$

הנקודה  $D$  היא אמצע הבסיס  $CE$  (ראה ציור).

נתון:  $\angle CEB = \angle AEB$

$$ED = 3a, EA = 4a$$

.  $\triangle EAB \sim \triangle EDF$

נתון כי שטח המשולש  $EAB$  הוא  $S$ .

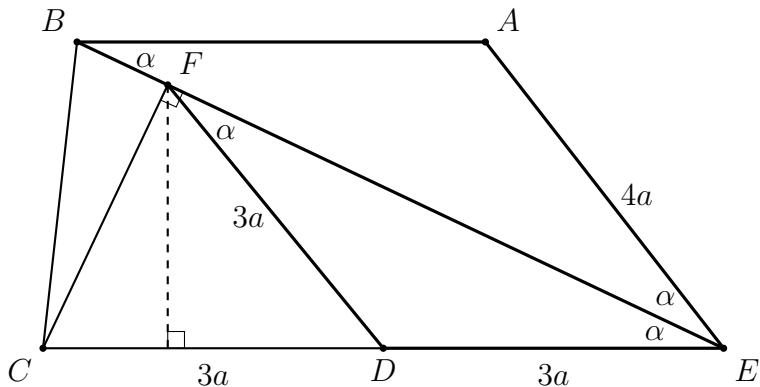
הבע באמצעות  $S$  את שטח המשולש  $CEF$ .

. המשך  $DF$  חותך את  $AB$  בנקודה  $G$ .

הבע באמצעות  $S$  את שטח המשולש  $BFG$

### סעיף א

נסמן את הזוויתות  $\angle AEB = \angle CEB = \alpha$  ונסמן את האורכים הנתונים. לפי משפט 86 "במשולש ישר-זווית התיכון ליתר שווה למחצי היתר", ולכן  $\triangle EDF$  שווה-שוקיים ולכן  $\angle DFE = \alpha$ . כמו כן, נתון  $AB \parallel EC$ , כך  $\angle ABE = \alpha$ ,  $\angle DFE = \alpha$ . לפי זוויתות מתחלפות עם  $\angle ABE = \alpha$ ,  $\angle DFE = \alpha$ . לפי ז.ג.  $\triangle EDF \sim \triangle EAB$ . לפי ז.ג.  $\triangle EDF \sim \triangle CEB$ .



### סעיף ב

בנייה גובה מ- $F$  ל- $CE$ . כדי עין ישימו לב גובה זה משותף לשני המשולשים  $\triangle CFD, \triangle EFD$  והבסיסים  $CD = DE = 3a$  שווים, ולכן השטחים של שני המשולשים שווים. בסעיף א הוכחנו ש- $\triangle CEB \sim \triangle EAB$ , לפי משפט 100 ז"ה "יחס השטחים שווה לריבועיחס הדמיון":

$$\frac{S_{\triangle EFD}}{S_{\triangle EAB}} = \left(\frac{ED}{EA}\right)^2 = \left(\frac{3a}{4a}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$S_{\triangle CEF} = S_{\triangle CFD} + S_{\triangle DFE} = 2S_{\triangle DFE} = \frac{9}{8}S.$$

## סעיף ג

אנחנו צריכים את אורך של צלע אחת של  $\triangle BFG$  כדי לחשב את יחס השטחים. כבר הראינו ש- $\angle ABE = \angle BEC = \alpha$  ו- $\angle BFG = \angle DFE = \alpha$ . אך לפי ז.ז., משפט 13 "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה". המרובע  $AGDE$  הוא מקבילית לפי משפט 29 "מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית". ועתה ניתן לחשב את  $GF$ :

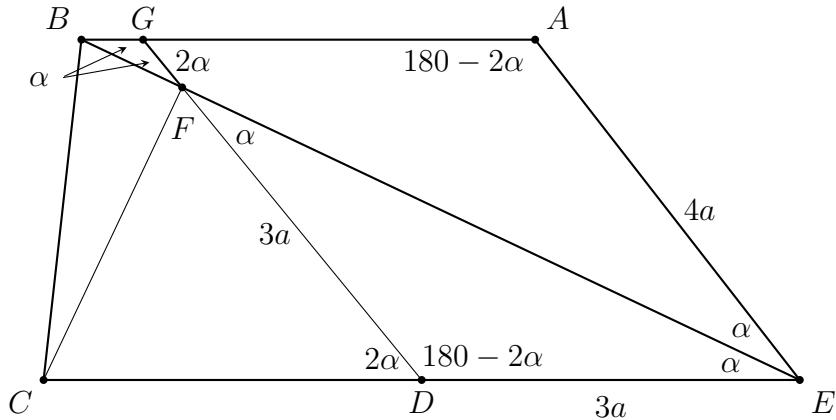
$$GF = GD - DF = EA - DF = 4a - 3a = a.$$

נשתמששוב במשפט 101:

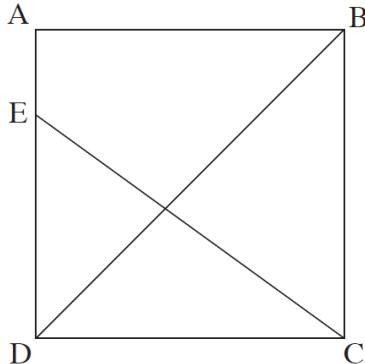
$$\frac{S_{\triangle BFG}}{S_{\triangle DFE}} = \left(\frac{a}{3a}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

לפי סעיף א,  $\triangle DFE = \triangle CEF$ , ולכן:

$$S_{\triangle BFG} = \frac{1}{9}S_{\triangle DFE} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2}S_{\triangle CEF} = \frac{1}{(9 \cdot 2)} \frac{9}{8}S = \frac{1}{16}S.$$



## 4.9 חורף תשע"ו

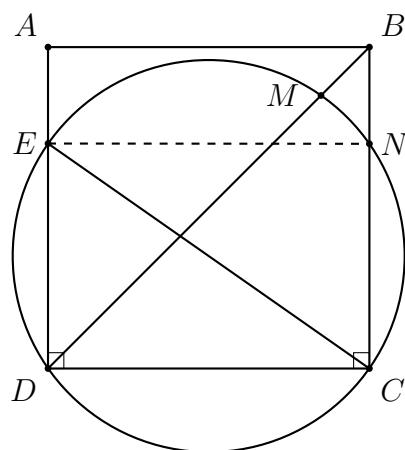


- בריבוע  $ABCD$  הנקודה  $E$   
נמצאת על הצלע  $AD$  (ראה צייר).  
מעגל העובר דרך הנקודות  $D, E, C$  ו-  $C$   
חותך את האלכסון  $BD$  בנקודה  $M$   
ואת הצלע  $BC$  בנקודה  $N$ .  
הנקודה  $M$  נמצאת בין הקדקוד  $B$   
ובין נקודת החיתוך של  $CE$  עם  $BD$ .  
א. הוכח כי  $CD = EN$ .  
ב. האם הקטע  $DM$  קצר מהקטע  $CE$ ,  
ארוך ממנו או שווה לו? נמק.  
ג. הוכח כי  $BM \cdot BD = AE \cdot AD$ .

### סעיף א

נציר תרשים עם הנקודות  $M, N$  והקו  $EN$ . המעלג עובר דרך הנקודות  $C, D, E$ , ונתון גם  
שהנקודה  $N$  נמצאת על המעלג. מכאן ש-  $ENDC$  הוא מרובע החסום במעגל. השתמש במשפט  
56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל-  $180^\circ$ ".  
ריבוע כך ש-  $\angle BCD = \angle NCD = 90^\circ$ ,  $\angle ADC = \angle EDC = 90^\circ$ . לפי המשפט:  
 $\angle ENC = 180 - \angle EDC = 90$ ,  $\angle NED = 180 - \angle NCD = 90$ .

מרובע שכל זוויות שלו ישרות הוא מלבן ו-  $CD = EN$ .

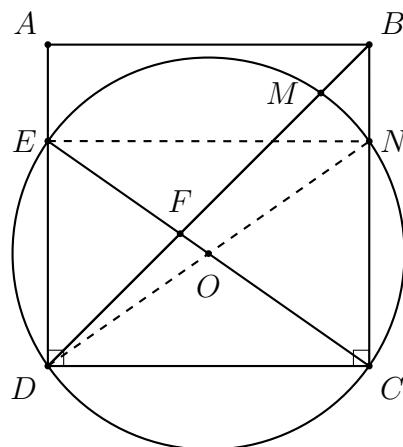


הוכחה אחרת משתמשת במשפט 74 "זווית היקפית בת  $90^\circ$  נשענת על קוטר". הנקודות  $N, C, D, E$  נמצאות על מעגל, כך  $\angle EDC = 90^\circ$ , וכך  $EC$  הוא קוטר. לפי המשפט הח龠  $\angle ENC = 90^\circ$ . כדי להשלים את סכום הזוויות במרובע ל- $360^\circ$ , צריך  $\angle NED$  להיות  $90^\circ$  ו- $\angle END$  הוא מלבן.

### סעיף ב

בזבוזתי הרבה זמן בניסיונות לפתרו סעיף זה, כי חשבתי להשווות אורכים לפי משולשים דומים או משפט פיתגורס. לבסוף נזכרתי במשפט 66 "במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מאשר המיתר האחר". בהוכחה השנייה לשעיף א ראיינו  $EC$  הוא קוטר, ולכן הוא ארוך יותר מכל מיתר שאינו קוטר. מה שנשאר הוא להוכיח ש- $DM$  אינו קוטר, ולכן  $DM$  קצר יותר מאשר  $CE$ .

נתון ש- $E$  נמצאת על  $AD$ , ונניח שהכוונה היא ש- $E$  שונה מנקודות הקצה  $A, D$ . הוכחנו ש- $EN \parallel AB$  ולכן אם  $E$  שונה מ- $A$  גם  $N$  שונה מ- $B$ . נתון שהנקודה  $M$  נמצאת בין  $B$  לבין נקודות החיתוך המסומן ב- $F, G$ , ולכן  $M$  אינה מותלכדת עם  $N$  ו- $DN$  הוא מיתר שאינו קוטר.

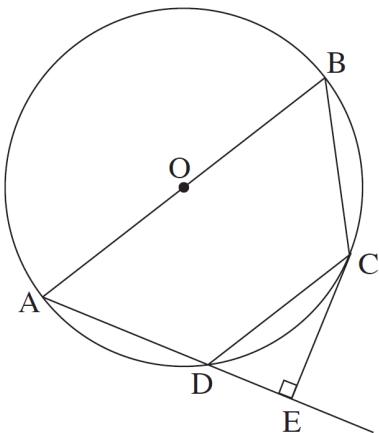


### סעיף ג

הנטיה הראשונה היא להשתמש במשפט תאילס, אבל המשפט זה מנוסח כחלוקת ולא ככפל על קטיעים של אותו קו. המשפט שמנוסח ככפל הוא משפט 102 "אם מוקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלוקת החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלוקת החיצוני".  $AD = BC$ ,  $BC \cdot BD = BN \cdot BC$ , ולפי המשפט  $BM \cdot BD = BN \cdot BC$ . כיוון ש- $ED = NC$  (מכאן:  $ED = NC$  כי הן צלעות בריבוע, ו- $ED = NC$  כי הן צלעות של  $ENCD$  שהוא מלבן). מכאן:

$$BM \cdot BD = BN \cdot BC = (BC - NC) \cdot BD = (AD - ED) \cdot AD = AE \cdot AD.$$

## 4.10 קיז תשע"ה מועד ב



מרובע  $ABCD$  חסום במעגל שמרכזו  $O$ .  
הצלע  $AB$  היא קוטר.

$E$  היא נקודה על המשך  $AD$  כך ש-  $\angle CE \perp AE$   
א. הוכח:  $\Delta CDE \sim \Delta ABC$

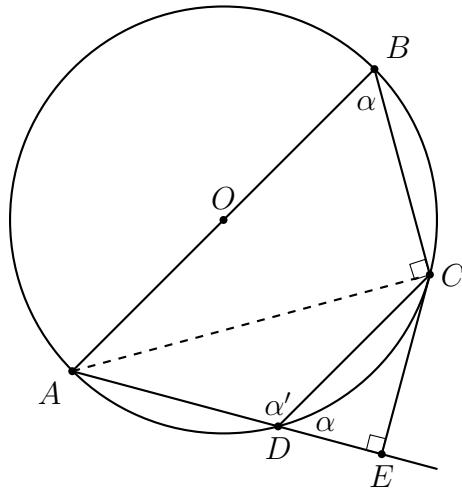
נתון גם:  $\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}$ ,  $OD \perp AC$   
ב. הוכח כי  $OC \parallel AD$ .

ג. הוכח כי  $CE$  משיק למעגל.

### סעיף א

לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיתות שווה ל- $180^\circ$ ". נתון  
גם שהצלע  $AB$  היא קוטר ולפי משפט 73 "זווית הקפיה הנשענת על קוטר היא זווית ישרה ( $90^\circ$ )".  
נבנה את הקו  $AC = 90^\circ$  כי הוא נשען על קוטר.

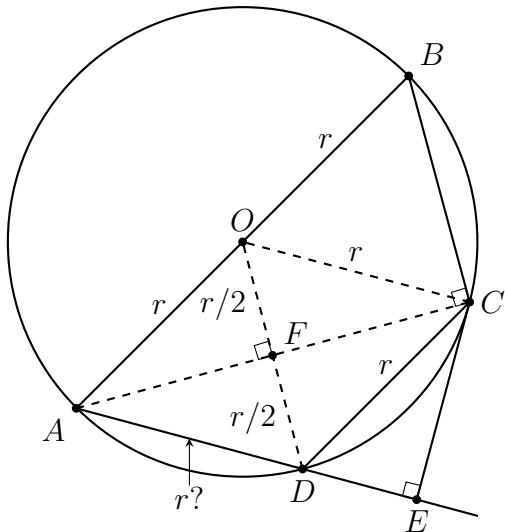
נסמן זוויות לפי משפט 56:  $\angle ABC = \alpha$ ,  $\angle ADC = 180 - \alpha = \alpha'$ ,  $\angle ABC = \alpha'$ ,  $\angle CDE = 180 - \alpha' = \alpha = \angle ABC$ ,  $D$



### סעיף ב

אם נכיח שהמרובע  $AODC$  הוא מקבילית נקבל  $OD \perp AC \parallel AD$ . נתון ש-  $OD \perp AC \parallel AD$ , כך שאם  
המרובע הוא מקבילית, הוא גם מעוין לפי משפט 36 "מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה  
היא מעוין". למעשה לא צריך להשתמש בנתון  $OD \perp AD \parallel OC$ , ובמשפט 36 כדי להוכיח שאם המרובע  
הוא מקבילית אז הוא מעוין כי  $OA = OC = r$ .

לפי משפט 100 ז"י חס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון", חס הצלעות במשולשים הדומים הוא  
מכאן ש-  $AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 2r = r$ . אם נכיח ש-  $r = CD$  יהיה לנו את המקבילית  
(ומוין) שנחוץ כדי להוכיח ש-  $OC \parallel AD$ .



בפתרונות אחרים שראיתי, משתמשים בעובדה ש- $\triangle OCD$  הוא שווה-צלעות שהזווית שלו  $60^\circ$ , לא מצאת שזיה נחוץ כדי להוכיח את הטענה.

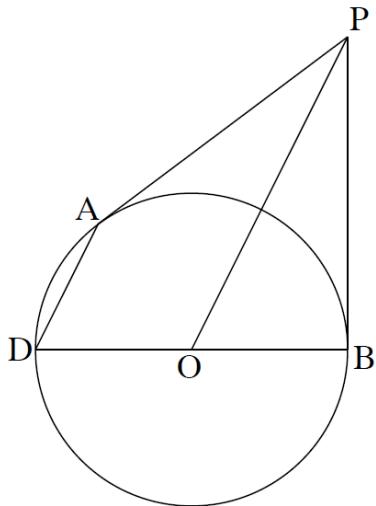
סעיף ג

משפט 78 הוא המשפט היחיד שהמסקנה שלו היא שקו הוא משיק: "ישר המאונך לרדיס בקצחו הוא משיק למגעל",  $AC \perp OC$   $\angle$ . נשתמש בעובדה ש-  $\triangle OCD$ ,  $\triangle OAD$  הם שווה-צלעות ולכן  $\angle CAB = \angle ECD$ . בסעיף א הוכחנו ש-  $\triangle CDE \sim \triangle ABC$ , כך ש-  $\angle OCD = \angle OAD = 60^\circ$ . בסעיף ב הוכחנו ש-  $AC$  חוצה זוית של  $\angle OAD$ . מכאן:

$$\angle ECO = \angle ECD + \angle OCD = \angle CAB + 60^\circ = \frac{1}{2} \angle OAD + 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$

<sup>1</sup>הUPI נובעת ממשפט 20 "משפט חפיפה שתי צלעות והזווית שמלול הצלע הגדולה מבין השתיים" לאחר שנטען שהזווית הימשה גדולה יותר מהזוויות האחרות. בספר גיאומטריה משתמשים במשפט זה כך: שני משלוחים ישראליים חופפים עם היתר ואילו אחת שווים.

4.11 **קייז תשע"ה מועד א**



המשך BO חותך את המעלג בנקודה D (ראה ציור). PA ו- PB משיקים לمعالג שמרכזו O.

. PO || AD : א. הוכח:

. הנקודה C נמצאת על הקוטר DB כרשות

. ב. הוכחה:  $\Delta \text{ADC} \sim \Delta \text{POB}$

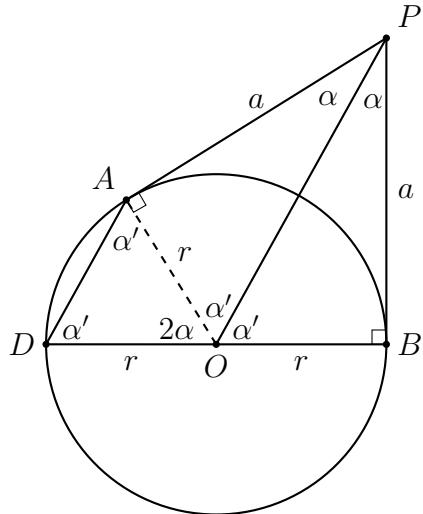
. חוטר את AC בנקודה E

.  $\Delta \text{DEC} \sim \Delta \text{DPB}$  הוכח: ג.

. ד. הוכחה:  $AC = 2EC$

## **סעיף א**

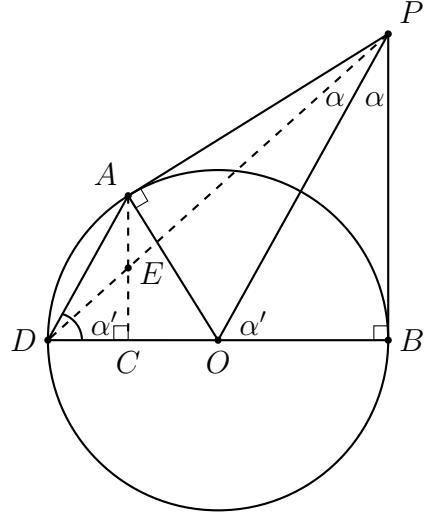
באשר יש שני מושיקים וקו מהנקודות החיתוך של המושיקים למרכז המעלג המשפטים הללו עשויים להיות קלונטיים: משפט 77 "המשיך למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה", משפט 80 "שני מושיקים למעגל היוצאים מאותה נקודת שווים זה לזה", ומשפט 81 "קבע המחבר את מרכז המעלג לנקודה ממנה יוצאים שני מושיקים למעגל, חוצה את הזרויות שבין המושיקים".



נleshlim at sh'ar h佐iot ca'ser hsh'tmshn o' b'k'zor  $\alpha$  -  $\alpha'$ , tuk' sh'mosh be'ubodot sh'scom h佐iot b'meshol'h  $180^\circ$ , wscom h佐iot h'mshlimot l'zo'ot sh'tv'cha ho'a  $180^\circ$ . m'shvi'inon h'r'diosim n'kbel sh'-sh'okim, wlken  $\angle DAO = \angle ADO = \alpha'$ . l'pi' zo'ot mataimot . $PD \parallel AD$ ,  $\angle ADO = \angle POB = \alpha'$

**סעיף ב**

$\triangle ADC \sim \triangle POB$ , ולכן המושולשים ישר הזווית  $\angle ADC = \angle POB = \alpha'$  לפि זז.



**סעיף ג**

הזווית  $\angle EDC$  של המשולש ישר-זווית  $\triangle DEC$  היא למעשה אותה זווית  $PDB$  של המשולש ישר-זווית  $\triangle DPB$ , ולכן  $\triangle DEC \sim \triangle DPB$  לפি זז.

**סעיף ד**

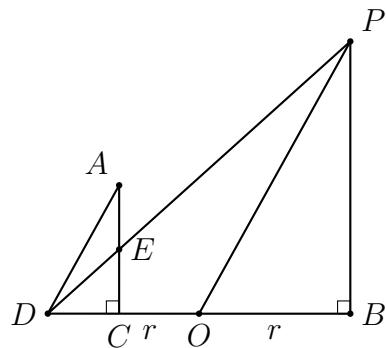
עלינו לחפש ערך אחד שהוא כפול מערך אחר. הקוטר  $DB$  כפול מהרדיסים  $DO, OB$ . בסעיפים הקודמים הוכחנו שני זוגות של משולשים דומים. נפשת את התרשים ונסנה להוכיח את המשוואואה תוך שימוש במשולשים. עבור  $AC$ , מסעיף ב,  $\triangle ADC \sim \triangle POB$ , ולכן:

$$\frac{AC}{PB} = \frac{DC}{OB} = \frac{DC}{r}.$$

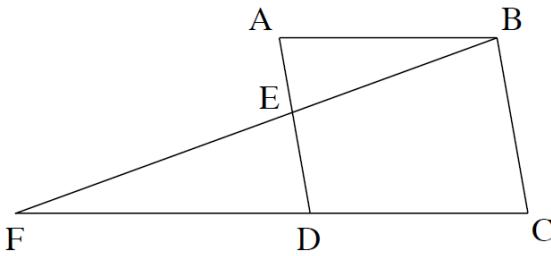
מסעיף ג,  $\triangle DEC \sim \triangle DPB$ , ולכן:

$$\frac{EC}{PB} = \frac{DC}{DB} = \frac{DC}{2r}.$$

נציב את  $PB \cdot DC$  ממשוואת השניה בראשונה, ונקבל  $AC = 2EC$ ,



## 4.12 חורף תשע"ה



במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD.

המשך BE חותם את המשך CD בנקודה F (ראה ציור).

נתון: שטח המשולש ABE הוא 27 סמ"ר.

שטח המשולש DFE הוא 48 סמ"ר.

א. מצא את שטח המשולש BED.

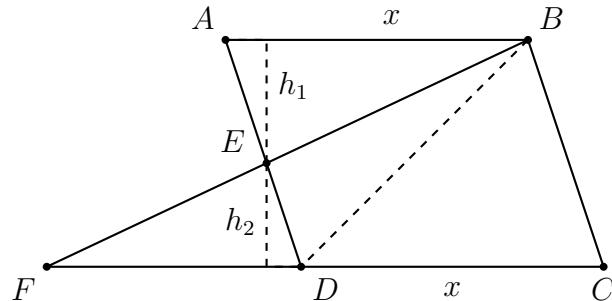
ב. נתון גם כי המרובע BCDE הוא בר חסימה במעגל.

$$\text{מצא את היחס } \frac{AB}{EF}.$$

### סעיף א

יש שתי דרכים לחשב את השטח של  $\triangle BED$ . הראשונה היא לחשב את השטח של  $\triangle ABD$  ולהחסיר את השטח של  $\triangle ABE$ . לפי הסימונים בתרשימים:

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}x(h_1 + h_2), \quad S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}xh_1.$$



אם נוכל לבטא את  $h_2$  במונחים של  $h_1$ , נוכל להחשב את  $h_2$ . בגלל הזהויות המתחולפות ב-  $A, D, F$  ו-  $B, E, C$ , לפי משפט 100 ז"י "יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון":

$$\frac{h_2}{h_1} = \sqrt{\frac{S_{DEF}}{S_{ABE}}} = \sqrt{\frac{48}{27}} = \frac{4}{3}$$

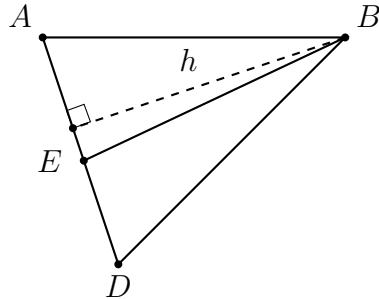
$$\begin{aligned} S_{\triangle BED} &= S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}x \left( h_1 + \frac{4}{3}h_1 \right) - \frac{1}{2}xh_1 \\ &= \frac{4}{3} \left( \frac{1}{2}xh_1 \right) = \frac{4}{3} (S_{ABE}) = \frac{4}{3} \cdot 27 = 36. \end{aligned}$$

הדרך השנייה לחשב את השטח של  $\triangle BED$  קשה לראות אבל החישוב מאד פשוט. למשולשים: גובה זהה  $h$  מהנקודה  $B$  ועד  $AD$ . לכן יחס השטחים שווה לחישוב הבסיסים:

$$\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{\frac{1}{2}hAE}{\frac{1}{2}hED} = \frac{AE}{ED} = \frac{4}{3},$$

לפי יחס הצלעות במשולשים  $\triangle ABE \sim \triangle DFE$  מסעיף א. מכאן:

$$S_{\triangle BED} = \frac{4}{3}S_{\triangle ABE} = \frac{4}{3} \cdot 27 = 36.$$

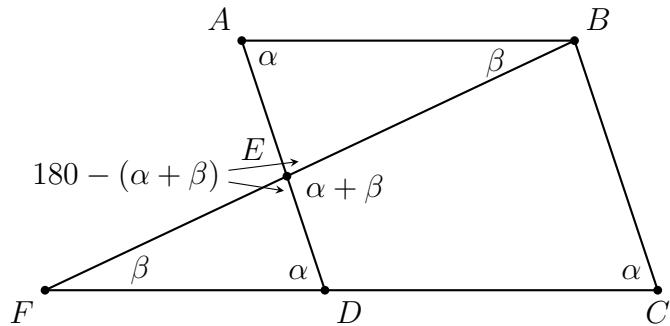


### סעיף ב

לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במוגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180^\circ$ ". נסמן זוויות ונראה אם יוצא מושגנו מועליל. נסמן ב- $\alpha$  את זוויות הנגדיות של המקבילתי  $A, C$ ,  $B, F$ .

$\angle D = C = \alpha$  לפי זוויות המתאימות. נסמן ב- $\beta$  את זוויות המתחלפות ב- $F$ .

סכום זוויות המשולש הוא 180 וכאן זוויות הקודקודיות ב- $E$  שוות ל- $180 - (\alpha + \beta)$ . לפי זוויות משלימות  $\angle BED = \alpha + \beta$ .



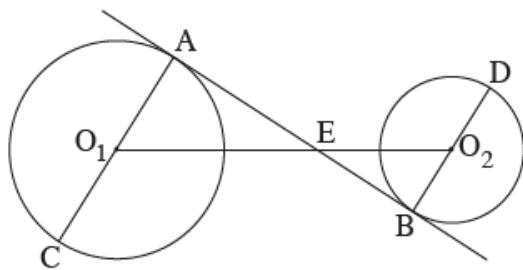
נפעיל את משפט 56 ונקבל:

$$\begin{aligned}\angle BCD + \angle BED &= 180 \\ \alpha + (\alpha + \beta) &= 180 \\ \alpha &= 180 - (\alpha + \beta).\end{aligned}$$

המשולשים  $\triangle ABE, \triangle DFE$  שווה-שוקיים! נשתמש以此 לחישובו בסעיף א:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AB}{FD} = \frac{3}{4}.$$

## 4.13 קיז תשע"ד מועד ב



.  
הוּא קוֹטֵר בְּמַעְגֵּל שֶׁמְרַכֵּזוֹ  $O_1$   
.  $O_2$  הוּא קוֹטֵר בְּמַעְגֵּל שֶׁמְרַכֵּזוֹ .  
ישֶׁר מִשְׁקָק לְמַעְגֵּלִים  $O_1$  וּ  $O_2$  בְּנֶקְוֹדֹת A וּ B בְּהָתָאמָה.  
הַמִּשְׁקָק חֹותֵךְ אֶת קַטְעַם הַמְּרַכְזִים  $O_1O_2$  בְּנֶקְוֹדָה E (רָאָה צִוּר).

נוֹתָן: רַדיּוֹס הַמַּעְגֵּל  $O_1$  הוּא 30 ס"מ

רַדיּוֹס הַמַּעְגֵּל  $O_2$  הוּא 20 ס"מ

אוֹרֶךְ קַטְעַם הַמְּרַכְזִים  $O_1O_2$  הוּא 90 ס"מ

א. (1) מִצְאָה אֶת הַיחָס  $\frac{O_1E}{O_1C}$  . נִמְק.

. (2) הַוְּכוֹחַ כִּי  $\triangle EO_1C \sim \triangle EO_2D$

ב. הַוְּכוֹחַ כִּי הַנֶּקְוֹדָה E נִמְצָאת עַל הַיְשָׁרָה CD .

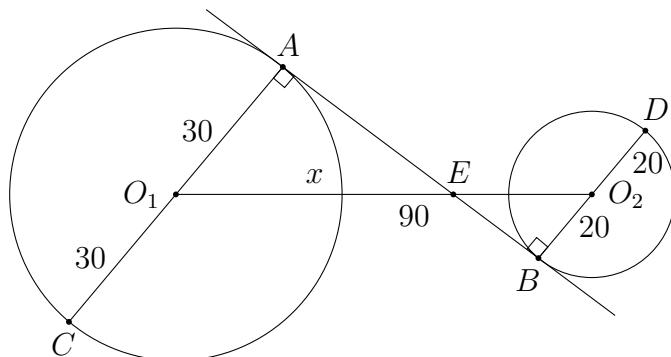
**סעיף א** (1)

לפי משפט 77 "המשיק למעגל מאונך לרדיוֹס בְּנֶקְוֹדַת הַהַשְׁקָה",  $\angle O_1AE = \angle O_2BE = 90^\circ$ , כי הַן זָווּיּוֹת קּוֹדְקוֹדִיות. מכאן ש- $\triangle O_1AE \sim \triangle O_2BE$  לפי ז.ז. נסמן ב- $x$  את אוֹרֶךְ  $O_1E$  ונקבל:

$$\frac{O_1E}{O_2E} = \frac{x}{90-x} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{30}{20}$$

$$20x = 30 \cdot 90 - 30x$$

$$\frac{O_1E}{O_1C} = \frac{x}{O_1A} = \frac{54}{30} = \frac{9}{5} .$$

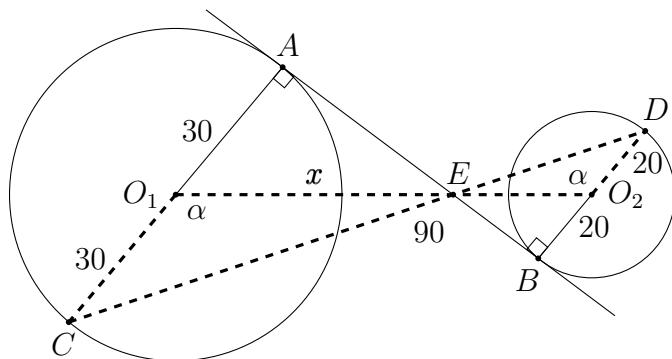


**סעיף א (2)**

חכתי שאפשר להשתמש בשיטה כדי להוכיח  $\triangle EO_1C \sim \triangle EO_2D$ , אבל, כפי שמרמז סעיף ב, איןנו יודעים שהנקודה  $E$  נמצאת על הקו הישר  $CD$ , ולכן איןנו יכולים להניח ש- $\angle O_1EC = \angle O_2ED$  לפי זוויות קודקודיות. במקום זה, נשתמש בעובדה שהקוטרים מקבילים. כי שניים ניצבים לקו  $O_1O_2$ ,  $O_1O_2 = \alpha$ , וכך  $\angle CO_1E = \angle DO_2E = \alpha$  לפי זוויות מתחולפות.  $AC \parallel DB$  כי הם רדיוסים. הוכחנו ש- $\triangle EO_1A \sim \triangle EO_2B$ , ולכן  $O_1C = O_1A, O_2B = O_2D$ :

$$\frac{O_1E}{O_2E} = \frac{O_1C}{O_2D},$$

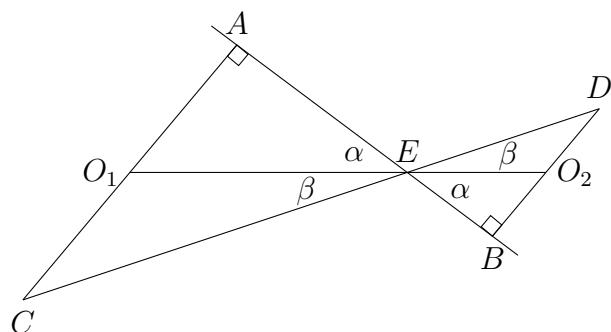
ולפי צ.צ.  $\triangle EO_1C \sim \triangle EO_2D$ .



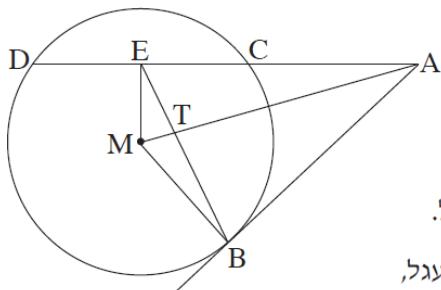
**סעיף ב**

הנקודה  $E$  נמצאת על  $CD$  אם  $\angle AED + \angle AEC = 180^\circ$ . הוכחנו  $\angle AED + \angle AEC = 180^\circ - \angle AED$ , ונסמן את הזווית השותה  $\alpha, \beta$ . נתון ש- $AB$  הוא קו ישר ו- $\angle AED = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ . נבדוק עם  $\angle AEC$  משלימה ל- $\angle AED$ .

$$\angle AED + \angle AEC = (180^\circ - (\alpha + \beta)) + \alpha + \beta = 180^\circ.$$



## 4.14 קיז תשע"ד מועד א



מןוקודה A יוצא ישר המשיק למעגל בנקודה B ,

ויצא ישר אחר החותך את המעגל בנקודות C ו-D .

הנקודה E היא אמצע המיתר DC .

הנקודה M היא מרכזו המעגל (ראה ציור) .

א. הוכח כי המרובע AEMB הוא בר חסימה במעגל .

ב. אלכסוני המרובע AEMB , שהוא בר חסימה במעגל ,

נפגשים בנקודה T .

נתון כי הנקודה T היא מפגש התיכונים במשולש BDC .

$$\text{הוכח כי } TB^2 = 2MT \cdot TA$$

$$\text{ג. נתון: } MT = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ ס"מ , } TE = \text{ ס"מ} .$$

**סעיף א** מצא את רדיוס המעגל החוסם את המרובע AEMB .

משפטים רלוונטיים: 103 "אם מןוקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק", 77 "המשיק למעגל מאונך לרדיויס בנקודות ההשקה", 68 "קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר", 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל רק אם סכום האזויות הנגדיות שווה ל- $180^\circ$ ".  
 $ME \perp DC$  מ- $AB \perp MB$  ו- $DC \perp ME$ . לפי משפט 106 "סכום הזויות הפנימיות של מצולע קמור הוא  $(n-2)180^\circ$ ", סכום הזויות הפנימיות של מרובע הוא  $360^\circ$ , ולכן:

$$\angle EMB + \angle EAB = 360^\circ - (\angleMEA + \angleMBA) = 180^\circ .$$

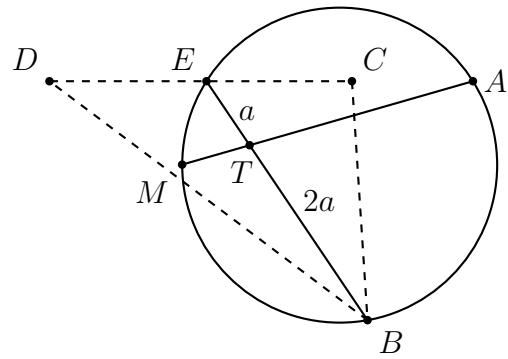
### **סעיף ב**

בתרשים למטה מופיעים: המעגל החוסם את המרובע AEMB , האלכסונים שלו AM,EB והמשולש BDC הם מיתרים נחכמים של המעגל החוסם. לפי משפט 101 "אם במעגל שני מיתרים נחכמים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני",  
 $TE = TB/2$ . אם נוכיח  $TA \cdot TB = MT \cdot TA$  הוכחנו את המשוואה המבוקשת. נתון ש- $T$  היא מפגש התיכונים, ולפי משפט 46 "נקודות חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס 1 : 2", כלומר  $TE = TB/2$  או  $TB/TE = 2/1$

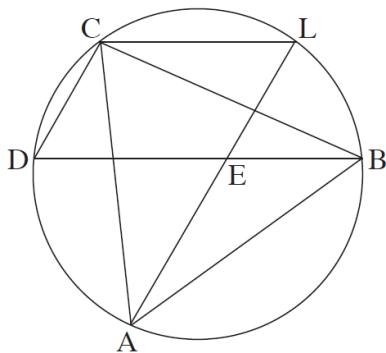
## סעיף ג

רדיוס המוגל החוסם הוא קו מהמרכז לאחת הקוקודים  $A, E, M, B$ . אין לנו יודעים את מרכז המוגל, אבל  $MA$  יכול להיות קוטר ואז נקבל את הרדיוס כמחצית הקוטר.  
מסעיף א  $\angle MBA$  היא זוויות ישרה, ולפי משפט 74 "זוויות היקפית בת  $90^\circ$  נשענת על קוטר,"  $MA$  הוא קוטר. עם הערכיהם הנתונים נחשב את הרדיוס תוך שימוש בנוסחאות מסעיף ב:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{1}{2}MA \\
 &= \frac{1}{2}(MT + TA) \\
 &= \frac{1}{2}\left(MT + \frac{TB^2}{2MT}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left(MT + \frac{(2TE)^2}{2MT}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 1} \cdot 4\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2\right) = 3.
 \end{aligned}$$



## 4.15 חורף תשע"ז



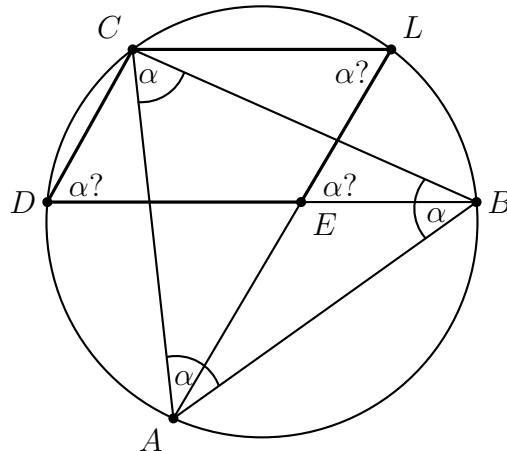
- משולש שווה-צלעות  $\triangle ABC$  חסום במעגל.
- נקודות  $D$  ו-  $L$  נמצאות על המעגל כך ש-  $BD \parallel LC$ .
- הmittרים  $AL$  ו-  $BD$  נחתכים בנקודה  $E$  (ראה ציר).
- א. הוכח כי המרובע  $LEDC$  הוא מקבילית.
- ב. (1) הוכח כי  $\triangle ADE$  הוא משולש שווה-צלעות.
- (2) הוכח כי  $LC + LB = LA$ .

### סעיף א

אין לנו מידע על המיתרים המגדירים את המרובע, לכן ננסה להוכיח שהוא מקבילית לפי משפט 29 "מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית". זוויות שוות לפי משפט 72 "במעגל, כל הזוגיות ההיקפיות הנשענות על מיתר מסוים כד של המיתר שוות זו לזו". נסמן את הזוגיות של המשולש שווה-צלעות  $\triangle ABC$  ב- $\alpha = 60^\circ$ .

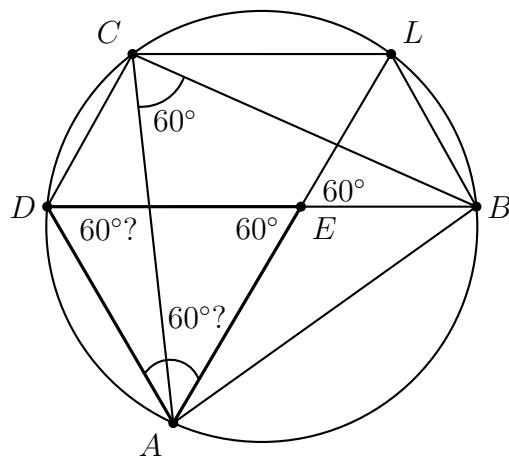
$\angle CLA = \angle CBA = \alpha$  כי הן נשענות על המיתר  $AC$ .  $\angle CAB = \angle CDB = \alpha$  כי הן נשענות על המיתר  $BC$ . נתון שגם  $BD \parallel LC$ , ולכן  $\angle LEB = \angle CLA = \alpha$  לפי זוויות מתחלפות.

עכשו נבדוק את הזוג השני  $\angle LED = 180^\circ - \angle LCD$ ,  $\angle LCD = 180^\circ - \angle CDB = 180^\circ - \alpha$ . נתון  $\angle LEB = \alpha$  לפי זוויות חד-צדדיות, ולכן  $\angle LED = 180^\circ - \alpha$ .



### סעיף ב (1)

נססה להוכיח שכל הزواויות של המשולש  $\triangle ADE$  שוות. מספיק להוכיח שתי זווית זווית שוות ל- $60^\circ$  כי השלישית צריכה להשלים ל- $180^\circ$ . בסעיף א הוכחנו ש-  $\angle LEB = 60^\circ$ , ולכן  $\angle DEA = 60^\circ$  לפי זווית קודקודית. נססה להוכיח ש-  $\angle DAE = \angle DAL = 60^\circ$  או  $\angle ADE = \angle ADB = 60^\circ$  או  $\angle DAE = \angle ADB$  על ידי חיפוש זווית נשענת על אותו מיתר. אכן,  $\angle ADB$ ,  $\angle ACB$  נשענות על המיתר  $AB$ .



### סעיף ב (2)

מהחלהך הראשון של הסעיף אנו יודעים ש- $\triangle ADE$  שווה-צלעות,  $LC = DE$ ,  $AE = DE$  כי  $\angle ADE = 60^\circ$ . מכאן  $AE = LC$  כי  $\triangle AEC$  שווה-צלעות נגדיות של המקבילית.

$$LA - LC = (LE + AE) - LC = (LE + LC) - LC = LE.$$

נשאר להוכיח  $LE = LB$ . הוכחנו ש- $\angle LEB = 60^\circ$ , כך שאם נוכיח שאחת מ- $\angle LBE$ ,  $\angle LBE$  שווה ל- $60^\circ$  נקבל מושולש שווה-צלעות.שוב נחפש זוויות הנשענות על אותו מיתר ונקבל ש- $\angle BLE = \angle BCA = 60^\circ$ .  $\angle BCA = 60^\circ$  כי שתייה נשענות על המיתר  $AB$ .  
תוך כי נסינוות לפטור את השאלה, מצאתי הוכחה אחרת מעניינת. נשענות על  $\angle LBD$ ,  $\angle DCL$  אותו קשת אבל **מצדים נגדיים**. זווית היקפית שנשענת על קשת שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת (משפט 69), ולכן אם סכום שתי הקשתות הוא כל המעגל, סכום הזוויות שווה  $180^\circ$ . במקבילית,  $\angle DCL = 120^\circ$ , ולכן:

$$\angle LBE = \angle LBD = 180^\circ - \angle DCL = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

## המלצות: גיאומטריה

- חשוב לציר תרשימים ברורים וגדולים, עדיף עם סרגל ומחוגה. בתחילת הפתרון אנו מסמנים את המידע המתברר על הזוגות והצלעות ויש לדאוג שהיה מספיק מקום.
- כאשר לשאלת יש מספר סעיפים כדאי לציר תרשימים נפרדים לכל סעיף תוך העלמת מידע לא רלוונטי לאותו סעיף.
- אין לסמן על התרשימים. לעיתים, מה שנראה ברור בתרשימים הוא בדיק מה שעשינו להוכיח. במקרה א' הבנתי הוכחה שכל משולש הוא שווה-שוקיים (!), כאשר ההוכחה משתמשת בתרשימים שאינם נכונים. מטרת התרשימים היא לחפש קשרים בין זוגיות, צלעות, משיקים, וכו', כדי להעלות השערות על דרכי אפשרויות להוכחת הטענות.
- אני מעודיף לסמן זוגיות עם אותיות יווניות כגון  $\alpha$ , ולא על ידי ציון שלושת הנקודות המגדירות אותה  $\triangle ABC$ . הסיבה היא שקשה יותר לעקוב אחר הנקודות השונות של הזוגות מלעקב אחר סימן בודד.
- יש משפטים שזכרים בקלות כי הם דיאינטואטיביים, למשל, שימושים חופפים לפי צ.צ.צ. ודוגמים לפיו ז.ז. יש משפטיים אחרים שקשה יותר לזכור אותם ושהוכחת נכונותם לא קלה. למשל, אני מתנסה לזכור איך להפעיל את המשפט על משיק ומיתר. במקרה ב' הבנתי תרשימים צבעוניים של מבחר משפטיים בתקווה שהתרשיים יקלו עליהם לזכור אותם, בוודאי יחסית לניסוחים מיולאים מסווגים.
- כאשר שואלים על שטחים של משולשים יש לחפש גבהים משותפים. אנו רגילים לראות גבהים שיורדים מנקודת לeko אופקי, אבל גבהים יכולים להופיע מכל נקודת לeko ממול ללא קשר למצג של המשולש על הנייר.
- כדי להוכיח חפיפה של משולשים ישר-זווית, מספיק להוכיח שוויון של צלע אחת וזוית חדה אחת מכל משולש. אם הצלע היא בין זוית חדה לבין זוית הישרה, החפיפה היא מיידית, לפי צ.צ.ז. אם הצלע היא בין שתי הזוגות החזקות (היתר), זוית שערכה  $\alpha$  ושנייה שערכה  $\beta$ , אז  $\alpha = \beta$ , ושוב יש צ.צ.ז. אני מניח שבבchnerה צריכה לרשום איך מגעים מזוית חדה וצלע לא.צ.ז., אבל כאשר מחפשים הוכחה לחפיפה קיצור דרך זה יכול להועיל.



## פרק 5 טריגונומטריה

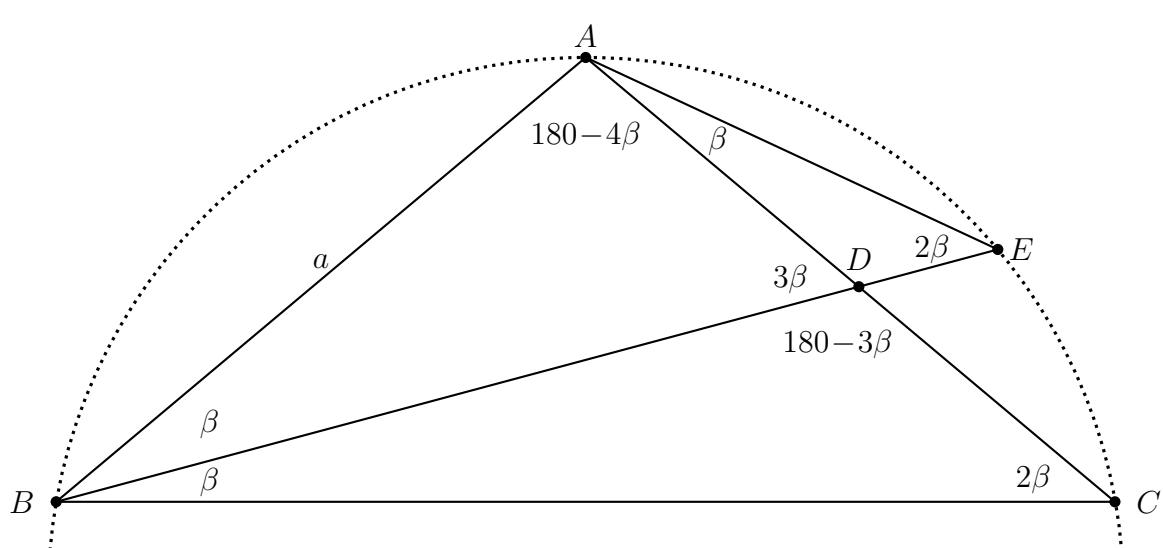
### 5.1 קיז תשע"ח מועד ב

. (AB = AC) הוא משולש שווה שוקיים . ABC הוא חוצה זווית במשולש ABC. המשך הקטע BD חותך את המרجل החוסם את המשולש ABC בנקודה E. גודל הזווית ABC הוא  $2\beta$  .  
**א.** הבע באמצעות  $\beta$  את  $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$ , היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש ADE.  
 אין צורך לפשט את הביטוי שקיבלת.

. נתון: BE שווה באורכו לרדיווס המרجل החוסם את המשולש ABC .

**ב.** חשב את היחס  $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$  .  
 נסמן ב-  $a$  את אורך השוק AB .  
**ג.** הבע באמצעות  $a$  את רדיוס המרجل החסום על ידי המשולש ABC .  
 בתשובותיך השארשתי ספורות אחרי הנקודה העשרונית.

להלן תרשימים עם הזרויות הנתונות ב-  $B, C, A$ , ולאחר חישוב הזרויות האחרות לפי סכום של זוויות המשולש וזרויות משלימות.  $\angle AEB = \angle ACB = 2\beta$ ,  $\angle EAC = \angle EBC = \beta$ , כי הן נשענות על אותן קשתות  $EC, AB$ .



## סעיף א

$\triangle ABC$  משולש שוקיים ולפי הנוסחה הטריגונומטרית לשטח של משולש:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin(180 - 4\beta) = \frac{a^2}{2} \sin 4\beta.$$

כדי שהיחס יהיה ביטוי ב- $\beta$  בלבד, علينا למצוא ביטוי ל- $S_{\triangle ADE}$  כך ש- $a^2$  יצטמצם. צלע אחת שווה  $a$  וצלע שנייה היא באורך  $AD$  ו- $AE$ . לפי חוק הסינוסים: ב- $\triangle ABE$  ו- $\triangle ABD$

$$\begin{aligned} \frac{AE}{\sin \beta} &= \frac{a}{\sin 2\beta} \\ AE &= \frac{a \sin \beta}{\sin 2\beta} \\ \frac{AD}{\sin \beta} &= \frac{a}{\sin 3\beta} \\ AD &= \frac{a \sin \beta}{\sin 3\beta} \\ S_{\triangle ADE} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a \sin \beta}{\sin 2\beta} \cdot \frac{a \sin \beta}{\sin 3\beta} \cdot \sin \beta \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin^3 \beta}{\sin 2\beta \sin 3\beta} \\ \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} &= \frac{\sin 4\beta \sin 2\beta \sin 3\beta}{\sin^3 \beta}. \end{aligned}$$

הוכחה אחרת: לחשב  $AE$  או  $AD$ , ולחמש בחוק הסינוסים על  $\triangle ADE$  כדי לחשב את השני.

## סעיף ב

נשתמש בחוק הסינוסים על  $\triangle ABE$  עם צלע  $R = BE$ ,  $BE$  ו- $AB$  הרדיאס יצטמצם:

$$2R = \frac{BE}{\sin(180 - 4\beta + \beta)} = \frac{BE}{\sin 3\beta} = \frac{R}{\sin 3\beta}$$

$$2 \sin 3\beta = 1$$

$$3\beta = 30^\circ$$

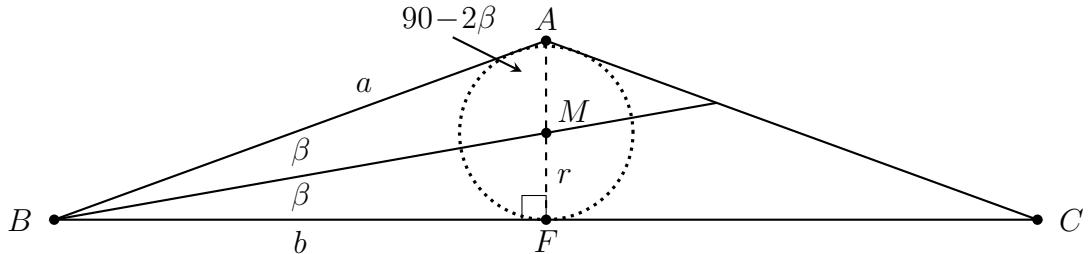
$$\beta = 10^\circ.$$

נכון שגם  $\sin 3 \cdot 50 = \frac{1}{2}$ , אבל לא ניתן שלמשולש שתי זוויות של  $100^\circ$  ו- $10^\circ$ . עם ערכו של  $\beta$  נוכל לחשב את יחס השטחים:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{\sin 4\beta \sin 2\beta \sin 3\beta}{\sin^3 \beta} = \frac{\sin 40 \sin 20 \sin 30}{\sin^3 10} = 20.99^\circ.$$

## סעיף ג

לפי משפט 6 "במשולש שווה-שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים", כך שחותча הזווית  $\angle BAC$  ניצב ל- $BC$  בנקודה  $F$ . לפי משפט 49 "שלושת חוצי הזווית של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש", הנקודה המסומנת  $M$  בתרשים היא מרכז המעגל החסום.



: $\triangle ABF$ -ב השתמש בהגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות. ב- $\triangle BMF$ -ב

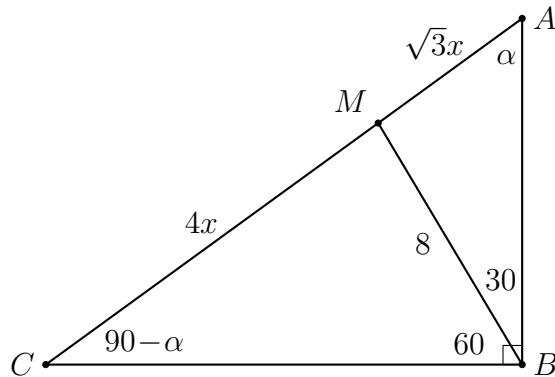
$$\begin{aligned}\sin(90 - 2\beta) &= \frac{b}{a} \\ b &= a \cos 2\beta.\end{aligned}$$

: $\triangle BMF$ -ב

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \frac{r}{b} \\ r &= a \cos 2\beta \tan \beta \\ &= a \cos 20 \tan 10 = 0.1657a.\end{aligned}$$

## 5.2 קיז' תשע"ח מועד א

- ABC הוא משולש ישר זווית ( $\angle ABC = 90^\circ$ ).  
 $M$  היא נקודה על היתר  $CR$  ש-  
 $AM : MC = \sqrt{3} : 4$ .  
 $BM = 8$ ,  $\angle ABM = 30^\circ$ .  
**א.** סמן:  $MC = 4x$  וחשב את זוויות המשולש ABC.  
**ב.** נסמן את מרכזי המעגלים החוסמים את המשולשים  $ABM$  ו-  $CMB$  ב-  $O_1$  ו-  $O_2$  בהתאם.  
**(1)** הסבר מדוע המרובע  $BO_1MO_2$  הוא דלטון.  
**(2)** חשב את אורך הקטע  $O_1O_2$ .



### סעיף א

(1) נסמן  $\angle BAM = \alpha$ ,  $\angle BCM = 90 - \alpha$ . לשני המשולשים  $\triangle ABM$ ,  $\triangle CMB$  צלע עם הנעלם  $x$ , זווית ידועה אחת, זווית שנייה עם הנעלם  $\alpha$ . מחוק הסינוסים נקבל שתי משוואות עם שני הנעלמים שאפשר לפתור כדי לקבל משוואה אחת עם הנעלם  $\alpha$  בלבד:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}x}{\sin 30} &= \frac{8}{\sin \alpha} \\ x &= \frac{8 \sin 30}{\sqrt{3} \sin \alpha} = \frac{4}{\sqrt{3} \sin \alpha} \\ \frac{4x}{\sin 60} &= \frac{8}{\sin(90 - \alpha)} \\ x &= \frac{8 \sin 60}{4 \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\cos \alpha} \\ \tan \alpha &= \frac{4}{\sqrt{3} \sqrt{3}} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

$\angle BCA = 90 - \alpha \approx 36.87^\circ$ , ולא נשכח לרשום גם  $\angle BAC = \alpha \approx 53.13^\circ$

(2) נחשב נחטיב רצינליים על ידי שימוש  $\sin 53.13 \approx 0.8, \cos 53.13 \approx 0.6$  בנוסחאות (שאינם נמצאות בנוסחאון):

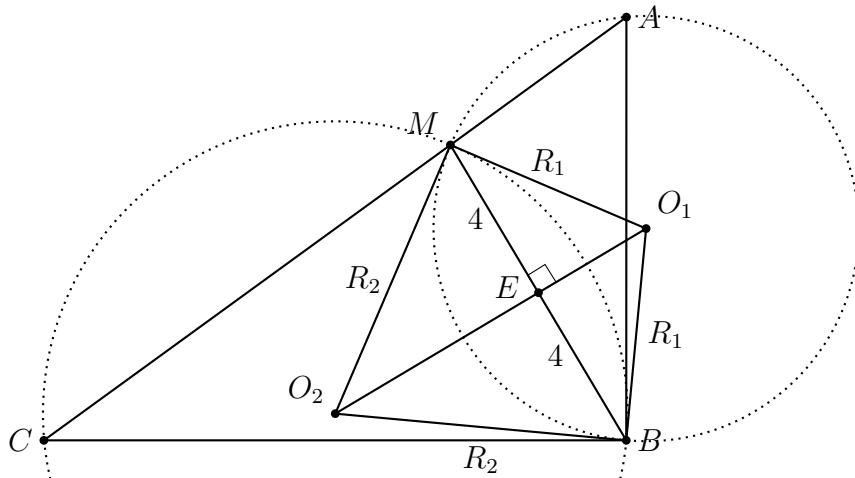
$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{4/3}{\sqrt{1 + (4/3)^2}} = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (4/3)^2}} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

נשתמש בחוק הסינוסים עבור  $\triangle CMB, \triangle ABM$

$$\begin{aligned}2R_1 &= \frac{8}{\sin \alpha}, & R_1 &= 4 \cdot \frac{5}{4} = 5 \\ 2R_2 &= \frac{8}{\sin(90 - \alpha)}, & R_2 &= 4 \cdot \frac{5}{3} = 20/3.\end{aligned}$$

### סעיף ב

(1) כי הם רדיוסים של המעגל החוסם את  $\triangle ABM$ ,  $O_1M = O_1B$  כי הם רדיוסים של המעגל החוסם את  $\triangle CBM$ . לפי ההגדרה מרובע עם שני זוגות של צלעות שכונות שهن שוות הוא דלתון.

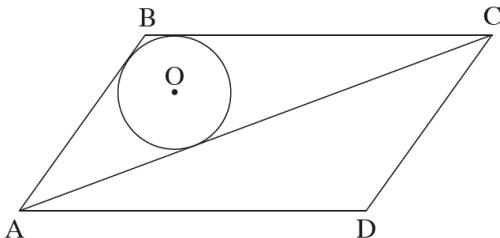


(2) לפי משפט 21 "האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון השני ומאונך לו". מכאן  $\angle MEO_1 = \angle MEO_2 = 90^\circ$ . נתון  $MB = 8$  ולכן  $ME = EB = 4$ . לפי משפט פיתגורס:

$$\begin{aligned}O_1O_2 &= O_1E + O_2E = \sqrt{R_1^2 - 16} + \sqrt{R_2^2 - 16} \\ &= \sqrt{5^2 - 16} + \sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2 - 16} = 3 + \frac{16}{3} = \frac{25}{3}.\end{aligned}$$

### 5.3 חורף תשע"ח

נתונה מקבילית  $ABCD$ .  $AC$  הוא האלכסון הארוך, כמפורט בציור.



במשולש  $ABC$  חסום מעגל שמרכזו  $O$ .

נתון: הנקודה  $O$  נמצאת מרחקים 6 ו- 3

מן השרירים  $AD$  ו-  $AC$  בהתאם;

$$OA = 10$$

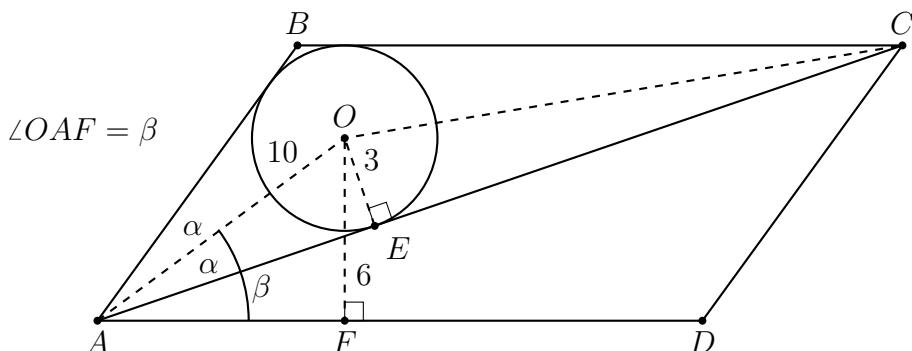
א. חשב את גודלי זוויות המקבילית.

ב. חשב את אורך האלכסון  $AC$ .

ג. חשב את שטח המקבילית.

הן נקודות המפגש של האנכים מ-  $O$  עם  $AC, AD$  עם  $\angle E, F$ ,  $F$  נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש",  $AO, CO$  הם חוצי זוויות משולש  $BAC, BCA$ , בהתאם. ניסיתי לפרט את השאלה תוק הנחה שאלכסון של מקבילית חוצה את זוויות  $BAC = \angle BCD$ . כמובן שהוא נכון רק עבור מעוין.

במשולשים ישר-זווית  $\triangle AOE, \triangle AOF$  נסמן את הזווית  $\alpha = \angle OAE, \beta = \angle OAF$



#### סעיף א

לפי התרשים מהפונקציות הטריגונומטריות במשולשים ישר-זווית:

$$\sin \alpha = 3/10, \quad \alpha = 17.46$$

$$\sin \beta = 6/10, \quad \beta = 36.87$$

$$\angle BCD = \angle BAD = \alpha + \beta = 54.33$$

$$\angle ABC = \angle ADC = \frac{360 - 2(\alpha + \beta)}{2} = 125.67.$$

## סעיף ב

האלכסון  $AC$  הוא צלע של  $\triangle ABC$  והזווית שלו ידועים, אבל אי-אפשר להשתמש בחוק הסינוסים כי אורכי הצלעות לא ידועים. מהתרשים רואים שהאלכסון מורכב משני קטעי  $AE, EC$  קווים שهما צלעות של משולשים ישר-זוויתים  $\triangle AOE, \triangle COE$  מושפט פיתגורס:

$$AE = \sqrt{10^2 - 3^2} = 9.54.$$

נשתמש בחוק הסינוסים ב- $\triangle COE$  (ונימנע מהפיתוי לקבוע  $\angle OCE = \alpha$ ). לפי זוויות מתחלפות נזכור ש- $\angle BCA = \angle CAD = \beta - \alpha$  ונקבל:

$$\angle OCE = \frac{\angle BCA}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{36.87 - 17.46}{2} = 9.71$$

$$\angle COE = 180 - 90 - \angle OCE = 80.29$$

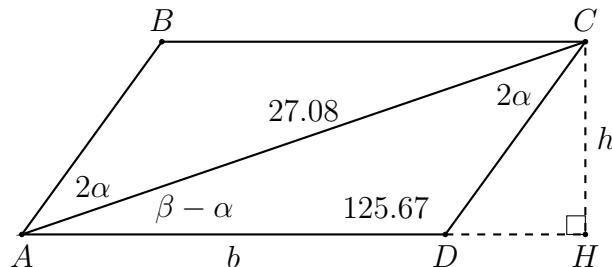
$$\frac{EC}{\sin 80.29} = \frac{3}{\sin 9.71}$$

$$EC = 17.54$$

$$AC = AE + EC = 9.54 + 17.54 = 27.08.$$

## סעיף ג

שטח של מקבילית הוא הבסיס כפול הגובה:



$$\frac{b}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{\sin 34.92} = \frac{27.08}{\sin 125.67}$$

$$b = 19.08$$

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin 19.41 = \frac{h}{27.08}$$

$$h = 9$$

$$S_{ABCD} = bh = 171.71.$$

אפשרות אחרת היא לחשב את  $AB$  לפי חוק הסינוסים, ולהכפיל בשניים.

## 5.4 קיז תשע"ז מועד ב

ABCD הוא טרפז חסום במעגל  $(AB \parallel DC)$

נתון:  $a < b$ ,  $CD = b$ ,  $AB = a$

$$\angle C = 60^\circ$$

א. הביע את שוקי הטרפז, BC ו-AD, באמצעות a ו- b.

נתון:  $a = 4$ , אורך האלכסון BD הוא  $4\sqrt{7}$ .

ב. חשב את b.

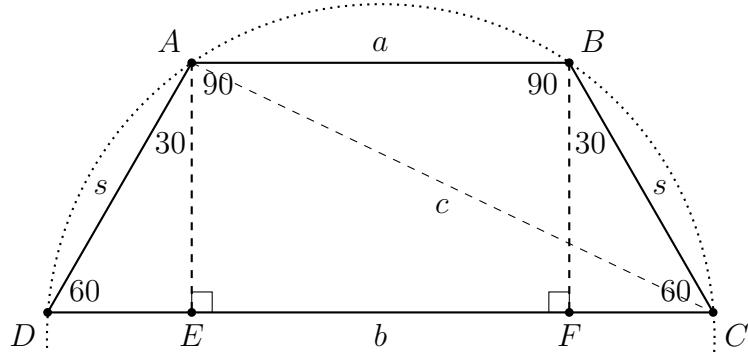
ג. (1) R הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצא את R.

(2) הסבר מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD.

(3) r הוא רדיוס המעגל החוסם בטרפז. מצא את r.

### סעיף א

לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180^\circ$ ", ולכן נוריד גבהים מ- $A, B, C$  ל- $CD$  החותכים אותו ב- $E, F$ .  $\angle DAB = 120^\circ$ . בתרשים השלמנו את הזווית במשולשים ל- $180^\circ$ . לפי משפט 40 "טרפז בו הזווית שליד אותו בסיס שווות זו לו הוא טרפז שווה-שוקיים", ולכן  $ABCD$  שווה-שוקיים.



מכאן:  $\triangle AED \cong \triangle BFC$  כי  $AE = BF$

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ &= \frac{(b-a)/2}{s} = \frac{1}{2} \\ s &= b - a. \end{aligned}$$

פתרון אחר משתמש בחוק הקוסינוסים על  $\triangle ACD, \triangle ACB$ . נסמן ב- $c$  את אורך האלכסון  $AC$ .

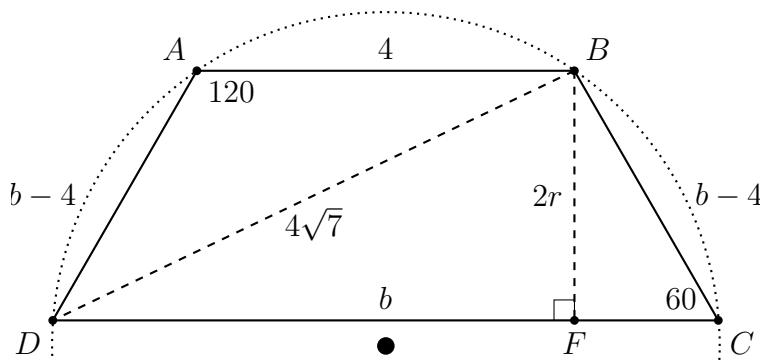
$$\begin{aligned} c^2 &= s^2 + b^2 - 2sb \cos 60^\circ \\ &= s^2 - sb + b^2 \\ c^2 &= s^2 + a^2 - 2sa \cos 120^\circ \\ &= s^2 + sa + a^2 \end{aligned}$$

נשווה את שתי הנוסחאות ל- $c^2$ , והפתרון הוא  $s = b - a$ .

סעיף ב

שקלתי להשתמש בחוק הסינוסים במשולש  $\triangle ADB$ : פעם אחת לחשב  $\angle ADB$  ופעם שנייה לחשב את  $s$ . עדיף להשתמש בחוק הקוסינוסים ב- $\triangle ADB$  כי אנו יודעים ש- $a = b - c$ .

$$\begin{aligned}(4\sqrt{7})^2 &= 4^2 + (b-4)^2 - 2 \cdot 4 \cdot (b-4) \cdot \cos 120^\circ \\ b^2 - 4b - 96 &= (b-12)(b+8) = 0 \\ b &= 12.\end{aligned}$$



סעיף ג

(1) שימו לב שהאלכסון  $BD$  הוא **לא** הקוטר של המעגל החוסם שמסומן בנקודת השchorה הגדולה. לפי חוק הסינוסים ב- $\triangle ADB$ :

$$R = \frac{4\sqrt{7}}{2 \sin 120} = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = 6.11.$$

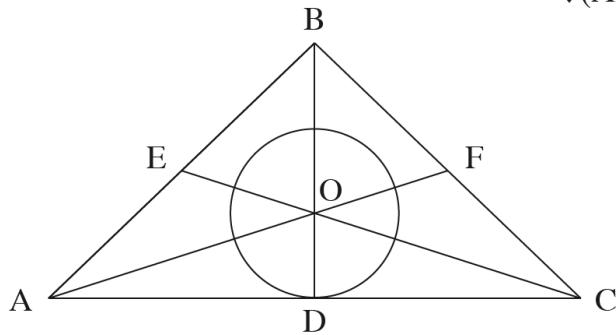
(2) לפי משפט 57, "מרובע קמור חוסם מעגל אם ורוק אם סכום שתי צלעות נגדית שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות":

$$\begin{aligned} a + b & \stackrel{?}{=} s + s \\ a + b & \stackrel{?}{=} (b - a) + (b - a) \\ 3a & \stackrel{?}{=} b \\ 3 \cdot 4 & = 12. \end{aligned}$$

$:BF = AB, CD$  (3) הם משיקים מקבילים למעגל החסום, ולכן  $r = 2r$

$$\begin{aligned}\sin 60^\circ &= \frac{2r}{s} = \frac{2r}{b-a} = \frac{2r}{8} \\ r &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 = 2\sqrt{3} = 3.464.\end{aligned}$$

## 5.5 קיז' תשע"ז מועד א



. (AB = BC) הוא משולש שווה שוקיים ABC

ור- BD הם תיכוןים במשולש,

הנחתכים בנקודה O (ראה ציור).

. א. הוכחה:  $S_{\triangle BOE} = S_{\triangle COD}$

מעגל שמרכזו O משיק לצלע AC בנקודה D.

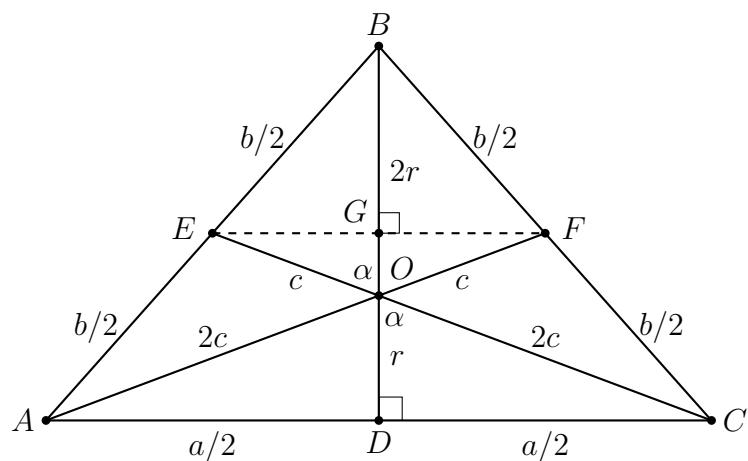
נתון כי שטח העיגול שווה לשטח המשולש AOC .

ב. חשב את גודל הזווית ACE .

ג. הביע את אורך הקטע OE באמצעות רדיוס המעגל.

### סעיף א

נסמן אורכי צלעות בתרשים לפי  $\triangle ABC$  שווה-שוקיים, ומשפט 46 "נקודות חיתוך התיכוןים מחלקת כל תיכון ביחס 1:2". כמו כן, כי  $AF = CE$  כי  $\triangle CAF \cong \triangle ACE$  כי  $AE = CF = b$  (משולש שווה-שוקיים), צלע  $\angle CAE = \angle ACF$  כי  $AC = a$



$\triangle EBF \sim \triangle ABC$  לפי צ.צ.צ., ולכן  $EG = \frac{EF}{2} = \frac{a}{4}$  EF ו- EG הוא תיכון של  $\triangle EBF$  . $EG = \frac{EF}{2} = \frac{a}{4}$

$$S_{\triangle BOE} = \frac{1}{2} \cdot EG \cdot BO = \frac{ar}{4}$$

$$S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} \cdot OD \cdot DC = \frac{ar}{4} .$$

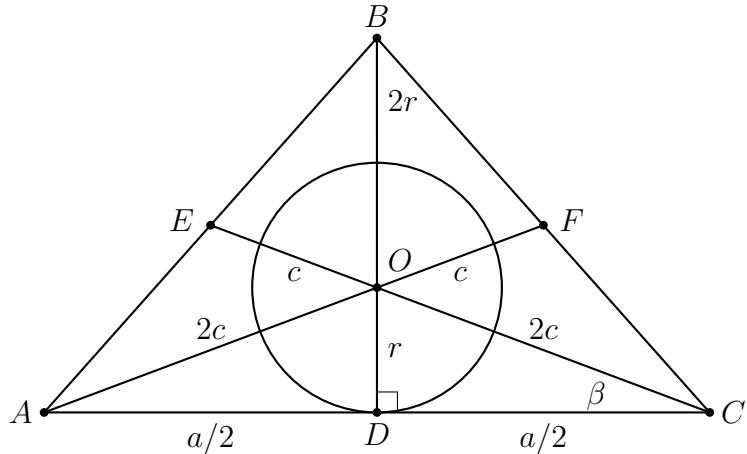
פתרונות אחר מתקבל מהנוסחה הטריגונומטרית לשטח עם האזויות הקודקודיות  $\alpha$ :

$$S_{\triangle BOE} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot c \cdot \sin \alpha$$

$$S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2c \cdot \sin \alpha.$$

### סעיף ב

נסמן  $\angle ACE = \beta$



נתון:

$$S_O = \pi r^2 = \frac{1}{2} ar = S_{\triangle AOC}$$

$$a = 2\pi r.$$

נציב עבור  $a$  בחישוב הטנגס של  $\beta$ :

$$\tan \beta = \frac{r}{a/2} = \frac{2r}{2\pi r} = \frac{1}{\pi}$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{1}{\pi} = 17.66^\circ.$$

### סעיף ג

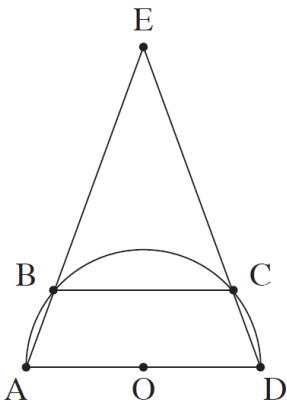
נחשב סינוס של  $\beta$ :

$$\sin \beta = \frac{r}{2c}$$

$$c = \frac{r}{2 \sin \beta}$$

$$= 1.648r.$$

חורף תשע"ז 5.6



נתון טרפז ABCD (BC || AD) ABCD  
החסום בחצי מעגל שמרכזו O ורדיוסו R  
כך ש- AD הוא קוטר של חצי המעגל.  
המשכי השוקיים AB ו- DC נפגשים  
מחוץ למעגל בנקודה E (ראה ציור).  
נתון:  $\alpha = \angle EAD$ .

א. הבע באמצעות R ו-  $\alpha$  את אורך הקטע BC.

ב. מהו התוחם של כל הערכים האפשריים עבור הזווית  $\alpha$ ? נמק.

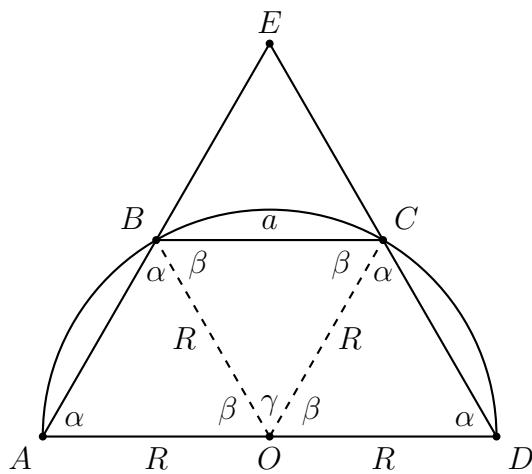
ג. נתון כי שטח משולש AED גדול פי 9 משטח משולש COD.  
מהו היחס בין רדיוס המעגל החסום את המשולש AED לבין R?

סעיף א'

נשלים זוויות של משולש ל- $180^\circ$  ונקבל  $\angle BOC = 180^\circ - 2\beta$  שנסמן  $\gamma$ .  
 לפि זוויות מתחלפות  $\angle COD = \beta$ .

$\angle CDO = \angle OCD = (180^\circ - \beta)/2 = \alpha$  ולכן  $\triangle COD$  שווה-שוקיים, ולכן  $\angle BAO = \angle ABO = \alpha$  ו- $\angle BAO = \angle BCO = \beta$  כי  $\triangle BOC$  שווה-שוקיים.

כדי להשלים זוויות במשולש, ל- $180^\circ - 2\alpha$ , נסמן  $\beta$ .  
 נסמן  $OA = OB = OC = OD = R$  ונוכיח  $\triangle ABO \cong \triangle BCO$  על ידי צל-צל-צל (SSS).



נחשב  $a = BC$  לפי חוק הסינוסים ולפי חוק הקוסינוסים ב- $\triangle BOC$ , ותחליטו איזו שיטה עדיפה!

לפי חוק הסינוסים:

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin \gamma} &= \frac{R}{\sin \beta} \\ a &= \frac{R \sin(180 - 2\beta)}{\sin \beta} = \frac{R \sin 2\beta}{\sin \beta} \\ &= \frac{R(2 \sin \beta \cos \beta)}{\sin \beta} = 2R \cos \beta = 2R \cos(180 - 2\alpha) \\ &= -2R \cos 2\alpha.\end{aligned}$$

לפי חוק הקוסינוסים:

$$\begin{aligned}a^2 &= R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cos \gamma \\ &= 2R^2(1 - \cos(180 - 2\beta)) = 2R^2(1 + \cos 2\beta) \\ &= 2R^2(1 + \cos^2 \beta - \sin^2 \beta) = 2R^2(2 \cos^2 \beta) \\ a &= 2R \cos \beta = 2R \cos(180 - 2\alpha) \\ &= -2R \cos 2\alpha.\end{aligned}$$

### סעיף ב

האורך של צלע חייב להיות חיובי  $a = -2R \cos 2\alpha < 0$ , ולכן  $2\alpha$  נמצא בربיע השני:

$$\begin{aligned}90^\circ < 2\alpha &\leq 180^\circ \\ 45^\circ < \alpha &\leq 90^\circ.\end{aligned}$$

$\alpha \neq 90^\circ$  כי הזרויות הבסיס של משולש שווה-שוקיים חייבים להיות פחות מ- $90^\circ$ .

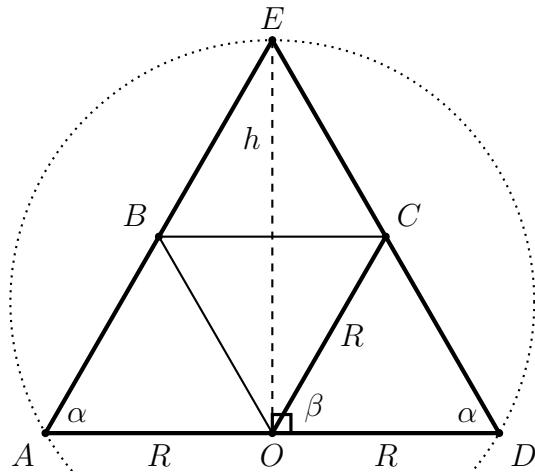
### סעיף ג

נחשב  $S_{\triangle AED}$  לפי הנוסחה הגיאומטרית. הגובה של  $\triangle AED$  הוא  $h = R \tan \alpha$ :

$$S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot h = R^2 \tan \alpha.$$

נחשב  $S_{\triangle COD}$  לפי הנוסחה הטריגונומטרית:

$$\begin{aligned}S_{\triangle COD} &= \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin \beta \\ &= \frac{1}{2} R^2 \sin(180 - 2\alpha) = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha.\end{aligned}$$



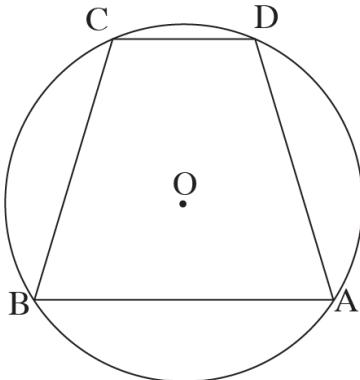
לפי היחס נתון בין השטחים:

$$\begin{aligned} R^2 \tan \alpha &= 9 \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha \\ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos \alpha &= \frac{1}{3} \\ \sin \alpha &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

נשתמש בחוק הסינוסים כדי לחשב  $r$ , הרדיוס של המגעל שחווסף:

$$\begin{aligned}2r &= \frac{DE}{\sin \alpha} \\ \cos \alpha &= \frac{R}{DE} \\ \frac{r}{R} &= \frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{1}{2(2\sqrt{2}/3)(1/3)} = \frac{9}{4\sqrt{2}} = 1.591.\end{aligned}$$

## 5.7 קיז' תשע"ו מועד ב



במugen חסום טרפז  $ABCD$  ( $AB \parallel DC$ ) מרכז המugen  $O$  בתוך הטרפז (ראה ציור).

רדיוס המugen הוא  $R$  וגובה הטרפז הוא  $h$ .

נתון:  $\alpha = \angle BOA = 3\alpha$ ,  $\angle COD = \alpha$ .

א. הביע באמצעות  $\alpha$  את  $\angle DAB$ .

ב. הביע את האורך של שוק הטרפז באמצעות  $\alpha$  ו-  $R$ .

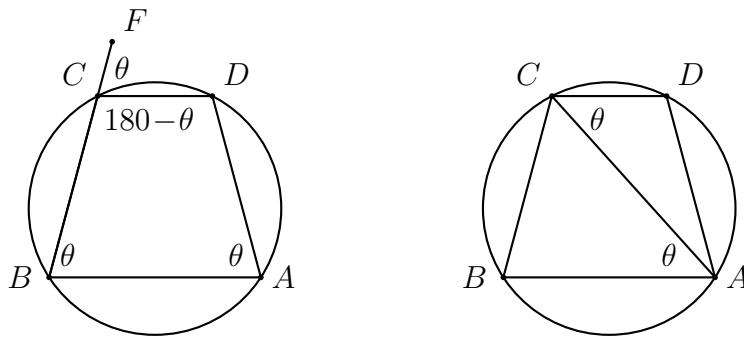
ג. הביע את האורך של שוק הטרפז באמצעות  $\alpha$  ו-  $h$ .

ד. נתון כי שטח המשולש  $COD$  הוא  $\frac{h^2}{12\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ . מצא את  $\alpha$ .

מהתרשים נראה שהטרפז שווה-שוקיים, אבל אין לסמן על תרשימים. לקח לי זמן רב עד שעה בדעתני שטרפז חסום במugen **חייב** להיות שווה-שוקיים, משפט לא מופיע ברשימת המשפטים לבגרות. בספרי לימוד המשפט לא מובלט ומופיע רק כדוגמה או תרגיל. אני אביא שתי הוכחות: אחת שלי ואחת המופיעעה בספרים.

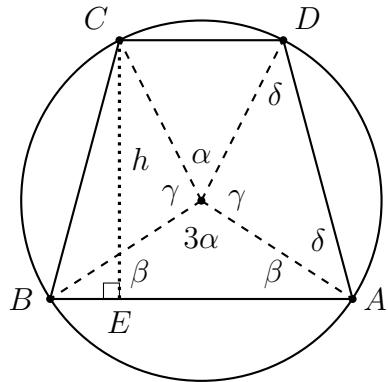
(1):  $\angle CAB = \angle ACD = \angle ACB$  לפי זוויות מתחלפות ולכון גם המיתרים הכלואים שווים  $CB = AD$

(2): לפי משפט 56 "ניתן לחסום מרובע במugen אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180^\circ$ ". נסמן  $\theta = \angle DAB$ , ולכון  $\theta - \angle DCB = 180^\circ$ . לפי זוויות משלימות ומתאימות  $\angle ABC = \angle DCF = \angle ABD = \angle FDC$ . לפי משפט 40 "טרפז בו זוויות שליד אותו בסיס שוות אז הוא טרפז שווה-שוקיים".  $\theta$ .



### סעיף א

בארבעת המשולשים עם קודקוד  $O$ , הצלעות המקווקות הם רדיוסים, כך שהמשולשים שווה-שוקיים.  $\triangle COB \cong \triangle DOA$  לפי צ.צ. מכאן  $\angle COB = \angle DOA$ . ניתן לסמך את הזויות לפי החישובים מימין לתרשים. החישוב של  $\gamma$  מוכיח כי סכום הזויות סביב נקודה הוא  $360^\circ$ . השורה الأخيرة מציגה את התשובה לשאלת כי  $\angle DAB = \beta + \gamma$ .



$$\begin{aligned}\beta &= \frac{180 - 3\alpha}{2} \\ \gamma &= \frac{360 - (\alpha + 3\alpha)}{2} = 180 - 2\alpha \\ \delta &= \frac{180 - \gamma}{2} = \frac{180 - (180 - 2\alpha)}{2} = \alpha \\ \beta + \delta &= \frac{180 - \alpha}{2}.\end{aligned}$$

סעיף ב

כדי חשב אורך של שוק נחפש משולש שאחת מצלעותיו היא  $DA$ . לפי חוק בסינוסים ב- $\triangle DOA$ :

$$\begin{aligned}\frac{DA}{\sin \gamma} &= \frac{R}{\sin \delta} \\ \frac{DA}{\sin(180 - 2\alpha)} &= \frac{R}{\sin \alpha} \\ DA &= \frac{R \sin 2\alpha}{\sin \alpha} \\ &= \frac{R \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2R \cos \alpha.\end{aligned}$$

סעיף ג

בתרשים בנוינו את הגובה מהנקודה  $C$  כדי לא להסתיר את הסימונים ב- $\triangle DOA$ .  
הוא גם שוק. נשתמש בהגדירה של סינוס במשולש  $\triangle CBE$ :

$$\frac{h}{CB} = \sin \angle CBE = \sin \left( 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \frac{\alpha}{2},$$

$.CB = \frac{h}{\cos(\alpha/2)}$  כי התשובה היא  $\angle CBE = \angle DAB = \beta + \delta$

סעיף ד

בנוסחה הטריגונומטרית עבור  $S_{\triangle COD}$  יופיעו אורך הצלעות  $R$  והזווית  $\alpha$ . אנו רוצים נוסחה עם  $h$  כדי להשווות לביטוי הנתון. נשווה את הביטויים עבור שוקי הטרפז מהסעיפים הקודמים:

$$2R \cos \alpha = \frac{h}{\cos(\alpha/2)}$$

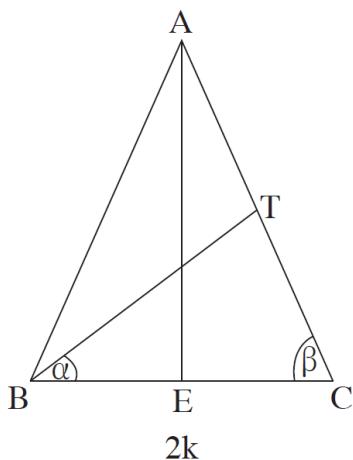
$$R = \frac{h}{2 \cos \alpha \cos(\alpha/2)}.$$

נציב בנוסחה לשטח, נשווה לנוסחה הנתונה לשטח ונמצא:

$$\begin{aligned}
 \frac{h^2}{12 \cos^2(\alpha/2)} &= \frac{1}{2} \cdot OC \cdot OD \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{4} \cdot \frac{1}{(\cos \alpha \cos(\alpha/2))^2} \cdot \sin \alpha \\
 \frac{1}{12} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - \sin^2 \alpha} \cdot \sin \alpha \\
 2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha - 2 &= (2 \sin \alpha - 1)(\sin \alpha + 2) = 0.
 \end{aligned}$$

נבחר את השורש  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$  כי הערך של סינוס לא יכול להיות  $-2$ .  
הערך היחיד ש- $\alpha$  יכול לקבל הוא  $30^\circ$  כי זוויות הבסיס של טרפז חיברים להיות פחות מ- $90^\circ$ .

## 5.8 קיז' תשע"ו מועד א



נתון משולש שווה-שוקיים  $\triangle ABC$  ( $AB = AC$ )

$BC$  הוא גובה לבסיס  $AE$

ור- $BT$  הוא תיכון לשוק  $AC$  (ראה צייר).

נתון:  $BC = 2k$ ,  $\angle TBC = \alpha$ ,  $\angle ACB = \beta$

(1) הבע את האורך של  $TC$  באמצעות  $k$  ו- $\beta$  בלבד.

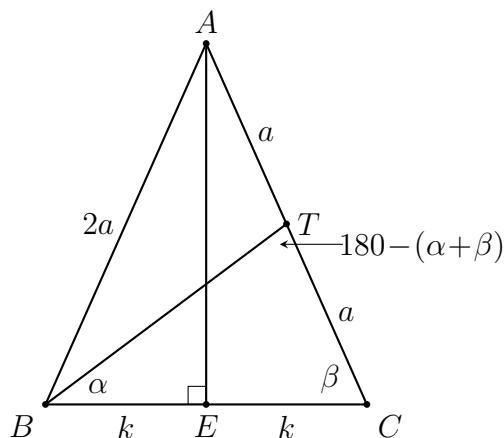
(2) היעזר בתת-סעיף (1), והראה כי

$$\sin(\alpha + \beta) = 4 \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

נתון גם:  $5 \text{ ס"מ} = 4 \text{ ס"מ}$ ,  $TE = ?$ .

(1) מצא את  $\beta$ .

(2) מצא את  $\alpha$ .



(1) לפי הגדרת הקוסינוס ב- $\triangle AEC$ :

$$\cos \beta = \frac{k}{2a}$$

$$TC = a = \frac{k}{2 \cos \beta}.$$

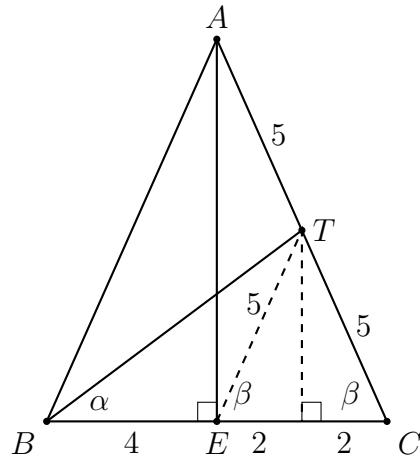
(2) נחפש משולש עבורו חוק הסינוסים ייתן משמעות בה יצטמצם  $k$  או  $a$ . מתחאים:

$$\frac{2k}{\sin(180 - (\alpha + \beta))} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$\frac{2k}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{k / (2 \cos \beta)}{\sin \alpha}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = 4 \sin \alpha \cos \beta.$$

(1) נוסיף את אורך הצלעות הנתונות לתרשים ונשתמש במשפט 86 "במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר" כדי להסיק ש- $TE = \frac{1}{2}AC = 5$



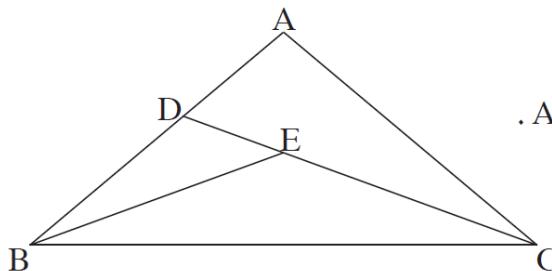
נוריד גובה מ- $T$  שהוא אכן אמצעי במשולש שווה-שוקיים  $\triangle ETC$  ונקבל:

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{2}{5} \\ \beta &= 66.4^\circ.\end{aligned}$$

(2) לפי סעיף (1) וסעיף (2) הקודם:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= 4 \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta &= 4 \sin \alpha \cos \beta \\ (\sin \alpha) \cdot \frac{2}{5} + \cos \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} &= 4 \cdot (\sin \alpha) \cdot \frac{2}{5} \\ \sqrt{21} \cos \alpha &= 6 \sin \alpha \\ \tan \alpha &= \frac{\sqrt{21}}{6} \\ \alpha &= 37.37^\circ.\end{aligned}$$

## 5.9 חורף תשע"ו



במשולש שווה-שוקיים  $\triangle ABC$  ( $AB = AC$ ) זווית הבסיס היא  $2\alpha$ .

הנקודה  $E$  היא מפגש חוצי-הזווית במשולש  $\triangle ABC$ . המשך  $CE$  חותך את הצלע  $AB$  בנקודה  $D$  (ראה ציור).

נתון:  $\angle BAC > 90^\circ$ ,  $\frac{EC}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \alpha}$

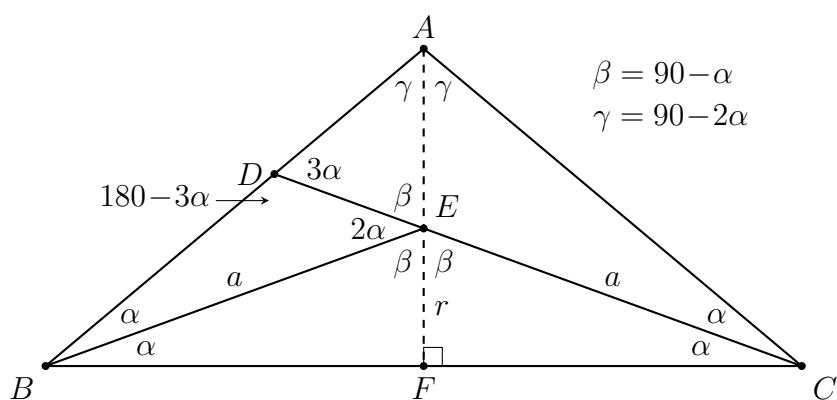
א. מצא את  $\alpha$ .

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $\triangle ABC$  ובין רדיוס המעגל החסום במשולש  $\triangle ABC$ .

ג. נתון כי ההפרש בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $\triangle ABC$  ובין רדיוס המעגל החסום במשולש  $\triangle ABC$  הוא 2 ס"מ.

מצא את אורך הקטע  $AE$ .

לפי משפט 6 "במשולש שווה-שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים", ולכן חוצה הזווית  $\angle BAC$  עובר דרך  $E$  וחוצה את  $BC$  בנקודה  $F$  בזווית ישרה. נסמן זוויות:  $\angle BEF = \angle CEF = 90 - \alpha$ , ולכן  $\angle FEC = 90 - \alpha$  שננסמן  $\beta$ .  $\angle BAF = \angle CAF = 90 - 2\alpha$ , ולכן  $\angle AFB = \angle AFC = 90 - \alpha$  שננסמן  $\gamma$ .  $\angle ADE = 180 - \beta - \gamma = 3\alpha$ , ולפי זווית קודקודית,  $\angle AED = \beta$ .  $\angle BDE = 180 - 3\alpha$  לפי זווית משילימות.



### סעיף א

נתון היחס כתלות ב- $\alpha$ , ולכן נחפש משולש שעבורו חוק הסינוסים ייתן יחס אחר כתלות ב- $\alpha$ :  $\triangle BDE \cong \triangle EFC$  לפי צ.צ.ז.  $EB = EC$ ,  $\angle EBD = \angle ECF$ .

$$\begin{aligned}\frac{EB}{\sin(180-3\alpha)} &= \frac{DE}{\sin \alpha} \\ \frac{EB}{DE} &= \frac{\sin(180-3\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \alpha} \\ \sin 3\alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

הפתרונות הם  $\angle BAC = 20^\circ, \alpha = 40^\circ$ , אבל נבחר  $\alpha = 20^\circ, \angle BAC = 40^\circ$ , כי אם  $\alpha = 20^\circ, \angle BAC > 90^\circ$ .

### סעיף ב

לפי משפט 49 "שלושת חוצי הזוויות של משולש נתכנים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש",  $E$  היא מרכז המעגל החסום שמשיק לצלע המשולש ב- $F$ , ו- $r = EF$  הוא הרדיוס.

צריך להיזהר שלא לקבע  $E$  היא מרכז המעגל החסום כי אין לנו ידועים שהחוצי הזוויות האחרות הם גם אנכיים אמצעיים. במקום זה נשתמש בחוק הסינוסים על המשולש  $\triangle ABC$ . נבחר את הזוויות  $\alpha$  כתלות ב- $r$ , כי אפשר לחשב את אורך הצלע הנגדית  $BC$  כתלות ב- $\alpha$ :

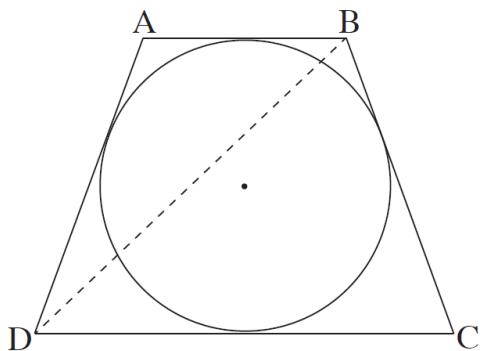
$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{r}{BF} = \frac{r}{BC/2} \\ 2R &= \frac{BC}{\sin(180-4\alpha)} = \frac{2r}{\sin 4\alpha \tan \alpha} \\ \frac{R}{r} &= \frac{1}{\sin 4\alpha \cdot \tan \alpha} = \frac{1}{\sin 80 \cdot \tan 20} = 2.79.\end{aligned}$$

### סעיף ג

$r = 2/(2.79 - 1) = 1.117$ . נציב  $R = 2.79r$  שיחסנו בסעיף ב, ונקבל  $R - r = 2$ . נתון  $AF = AE + EF = AE + r$ , ולכן נחשב עם  $\triangle AED$  אין לנו מספיק מידע על המשולש.

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \frac{AF}{BF} = \frac{AE + r}{r / \tan \alpha} \\ AE &= \frac{r(\tan 2\alpha - \tan \alpha)}{\tan \alpha} \\ &= \frac{1.117(\tan 40 - \tan 20)}{\tan 20} = 1.458.\end{aligned}$$

## 5.10 קיז תשע"ה מועד ב



מעגל שרדיוסו  $r$  חסום בטרפז שווה-שוקיים  $ABCD$  ( $AB \parallel DC$ ), כמתואר בציור.

נתון:  $\angle BCD = 70^\circ$ .

א. הבע באמצעות  $r$ :

(1) את הבסיס הגדול של הטרפז.

(2) את שוק הטרפז.

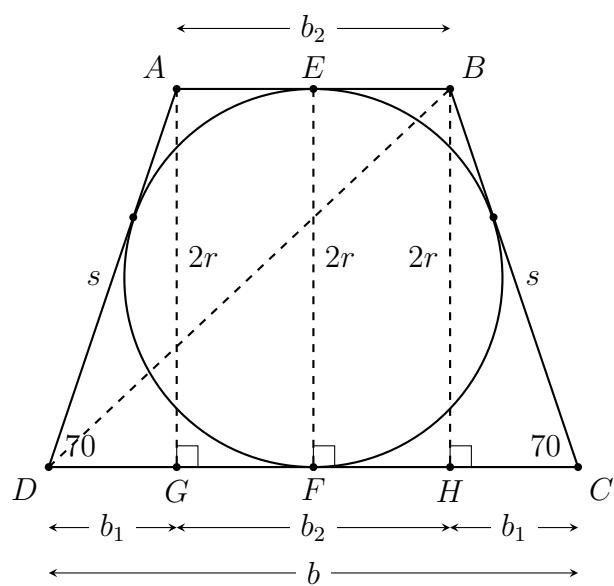
(3) את אלכסון הטרפז.

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז

ובין רדיוס המעגל החסם את הטרפז.

נוריד אנק מ- $A$  שחתוך את  $DC$  ב- $G$ , ואנק מ- $B$  שחתוך את  $DC$  ב- $H$ . בטרפז  $ABHG$   $AB \parallel DC$  והוא מלבן. לפי משפט 77 "המשיק למעגל מאונך לרדיויס בנקודת ההשקה", האנק מנקודת ההשקה של מעגל עם  $AB$  עובר דרך מרכז המעגל והוא ניצב לנקודת ההשקה עם  $DC$ . מכאן  $AG = EF = BF = 2r$

נסמן  $AB = GH = b_2$ . הטרפז שווה-שוקיים ולפי משפט 39 "בטרפז שווה-שוקיים הزواויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו",  $\angle DAG = \angle CBH = 20^\circ$ ,  $\angle ADC = 70^\circ$  כדי להשלים ל- $180^\circ$  במשולש. ביחד עם  $AD = BC$  בטרפז שווה-שוקיים,  $\triangle ADG \cong \triangle BCH$ , ונקבל  $DG = HC = b_1$ . נסמן  $b = DC = 2b_1 + b_2$ .



## סעיף א

(1) נחפש משפט הקשור צלעות של מרובע עם הרדיוס של המרגל החסום. משפט 57 "מרובע קמור":  
חוסם מעגל אם ורק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות:"

$$2s = b + b_2 = (b_1 + b_2 + b_1) + b_2 = 2(b_1 + b_2).$$

משמעותה זו נחשב משוואות נוספות שיעזרו לנו בהמשך:

$$s = b_1 + b_2, \quad b = 2b_1 + b_2 = s + b_1.$$

לפי ההגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות ב- $\triangle ADC$ , נוכל לקשר את  $r$  לצלעות:

$$\begin{aligned} \tan 70 &= \frac{2r}{b_1} \\ \sin 70 &= \frac{2r}{s} \\ b &= s + b_1 \\ &= 2r \left( \frac{1}{\sin 70} + \frac{1}{\tan 70} \right) = 2.856r. \\ .s &= \frac{2r}{\sin 70} = 2.128r \quad (2) \end{aligned}$$

(3) האלכסון הוא היתר של  $\triangle BDH$  שצלעותיו ידועות:

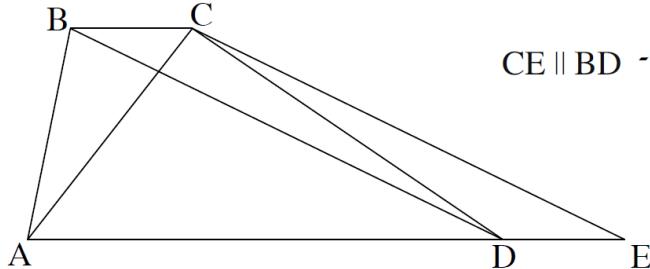
$$\begin{aligned} DB^2 &= (b_1 + b_2)^2 + (2r)^2 = s^2 + (2r)^2 \\ &= \left( \frac{2r}{\sin 70} \right)^2 + 4r^2 \\ DB &= 2r \sqrt{\left( \frac{1}{\sin 70} \right)^2 + 1} = 2.921r. \end{aligned}$$

## סעיף ב

במבחן ראשון נראה שכדי להשתמש במשפט 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180^\circ$ ", אבל אין בו צורך. שימו לב שהמרכז של המרגל החסום לא חופף את המרכז של המרגל החסום, כך שאפשר לחשב  $R$ , הרדיוס של המרגל החסום, כמורחך ממרכז המרגל החסום לאחד מקודקי הטרפה. במקום זה נשתמש בחוק הסינוסים ב- $\triangle BCD$ :

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{DB}{\sin BCD} = \frac{2.921r}{\sin 70} \\ \frac{r}{R} &= \frac{2 \cdot \sin 70}{2.921} = 6.434. \end{aligned}$$

## 5.11 קיז תשע"ה מועד א



נתון טרפז  $(BC \parallel AD)$   $ABCD$ .

הנקודה  $E$  נמצאת על המשך  $AD$  כך ש-  $CE \parallel BD$

(ראה ציור).

נתון:  $\angle CAD = 2\angle DBC$

$DB = 1.8AC$

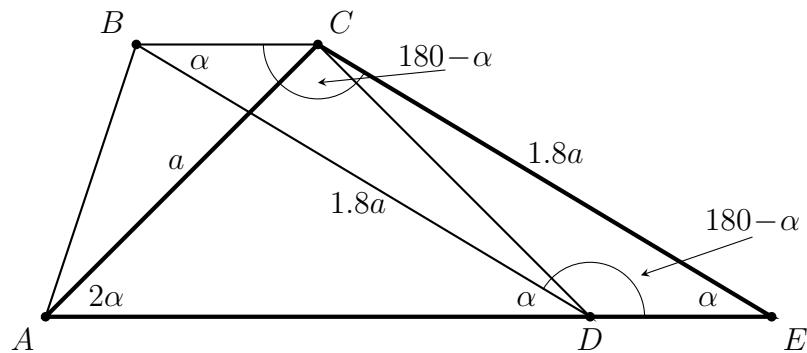
א. מצא את גודל הזווית  $\angle CEA$ .

ב. נתון גם כי שטח המשולש  $ACE$  הוא  $87.873$  סמ"ר.

מצא את גובה הטרפז.

### סעיף א

נסמן זוויתות לפי זוויתות מתחלפות, מתאימות ופנימיות:  $\angle CBD = \angle BDA = \angle CEA = \alpha$ ,  $\angle BCE = \angle BDE = 180 - \alpha$ .



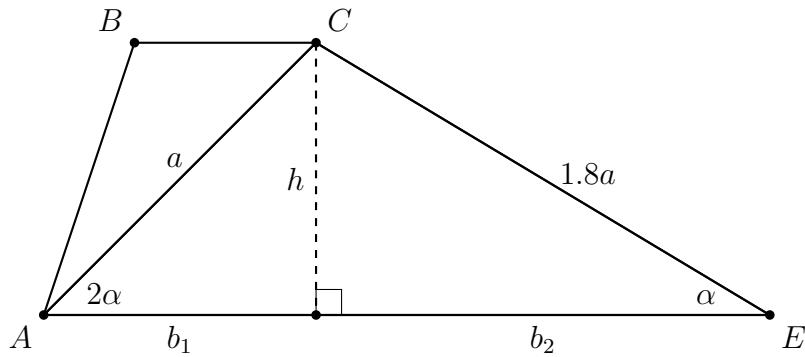
לפי חוק הסינוסים:

$$\begin{aligned} \frac{AC}{\sin \alpha} &= \frac{CE}{\sin 2\alpha} \\ \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{1.8a}{\sin 2\alpha} = \frac{1.8a}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \\ \cos \alpha &= 0.9 \end{aligned}$$

$$\alpha = 25.84^\circ.$$

### סעיף ב

מהתרשים אפשר לראות ש-  $S_{\triangle ACE}$  מורכב מסכום השטחים של שני משולשים עם אותו גובה:

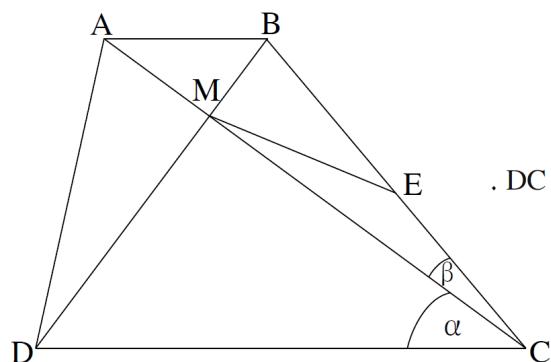


$$\begin{aligned}
 S_{\triangle ACE} &= \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h \\
 b_1 &= \frac{h}{\tan 2\alpha} \\
 b_2 &= \frac{h}{\tan \alpha} \\
 S_{\triangle ACE} &= \frac{1}{2}h^2 \left( \frac{1}{\tan 2\alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} \right) \\
 87.873 &= \frac{1}{2}h^2(6.79 + 2.06) = 1.428h^2 \\
 h &= 7.846.
 \end{aligned}$$

פתרונות אחר משתמש בנוסחה הטריגונומטרית לשטח:

$$\begin{aligned}
 S_{\triangle ACE} &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CE \cdot \sin \angle ACE \\
 &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1.8a \cdot \sin(180 - 3\alpha) = 0.9a^2 \sin 3\alpha \\
 87.873 &= 0.87873a^2 \\
 a &= 10 \\
 h &= a \sin 2\alpha = 7.846.
 \end{aligned}$$

## 5.12 חורף תשע"ה



אלכסוני הטרפז  $ABCD$  מאונכים זה זהה

ונפגשים בנקודה  $M$ .

$E$  היא אמצע השוק (ראה ציר).

נתון:  $DC = a$ ,  $\angle ACB = \beta$ ,  $\angle ACD = \alpha$

א. הבע באמצעות  $a$ ,  $\alpha$  ו-  $\beta$

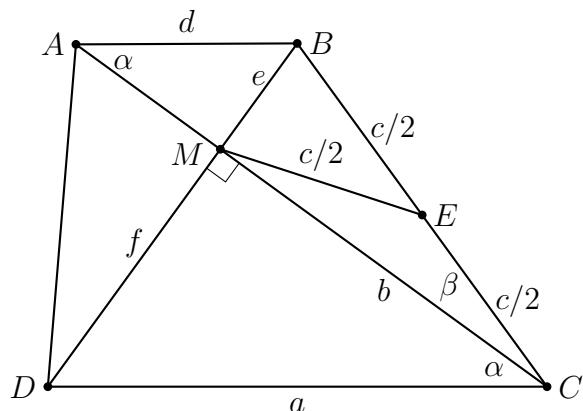
את האורך של  $ME$ .

נתון:  $a = 6.6$ ,  $\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{1}{3}$

ב. מצא את האורך של  $AB$ .

נתון גם:  $BM = 1.3$  ס"מ

ג. מצא את הזווית  $DCB$ .



### סעיף א

$\triangle BMC$  יש זווית נתון  $\angle ME$  הוא תיכון ליתר. לפי משפט 86 "במשולש יש זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר",  $ME = c/2$ . לפי ההגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות:

$$\cos \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} ME &= \frac{c}{2} = \frac{b}{2 \cos \beta} \\ &= \frac{a \cos \alpha}{2 \cos \beta}. \end{aligned}$$

## סעיף ב

למשולשים  $\triangle AMB, \triangle CMB$  צלע משותפת  $MB = e$ . לפי ההגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות:

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \frac{e}{b} \\ \sin \alpha &= \frac{e}{d} \\ AB = d &= \frac{e}{\sin \alpha} = \frac{b \tan \beta}{\sin \alpha} \\ &= \frac{a \cos \alpha \tan \beta}{\sin \alpha} = \frac{a \tan \beta}{\tan \alpha} = 6.6 \cdot \frac{1}{3} = 2.2.\end{aligned}$$

הוכחת אחרת משתמשת במשולשים דומים. לפי זוויות מתחכבות  $\angle BAM = \angle MCD = \alpha$  ו- $\triangle ABM \sim \triangle DMC$ .

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \frac{e}{b} \\ \tan \alpha &= \frac{f}{b} \\ \frac{e}{f} &= \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{1}{3} \\ \frac{d}{a} &= \frac{e}{f} = \frac{1}{3} \\ AB = d &= \frac{6.6}{3} = 2.2.\end{aligned}$$

## סעיף ג

ממשפט פיתגורס  $b = \sqrt{a^2 - f^2} = 5.32$

$$\tan \beta = \frac{e}{b} = \frac{1.3}{5.32} = 0.2444$$

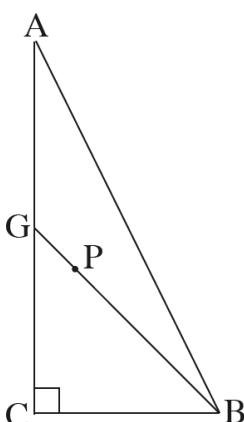
$$\beta = 13.73$$

$$\tan \alpha = 3 \tan \beta = 0.7331$$

$$\alpha = 36.24$$

$$\angle DCB = \alpha + \beta = 49.97.$$

## 5.13 קייז תשע"ד מועד ב



במשולש ישר-זווית  $\angle ACB = 90^\circ$   $ACB$

נקודה  $G$  היא אמצע ה辧  $AC$ .

נקודה  $P$  נמצאת על  $GB$  כך ש-  $BG = 4 \cdot PG$  (ראה ציור).

רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $CGB$  הוא  $R$ .

נתון:  $GC = BC$

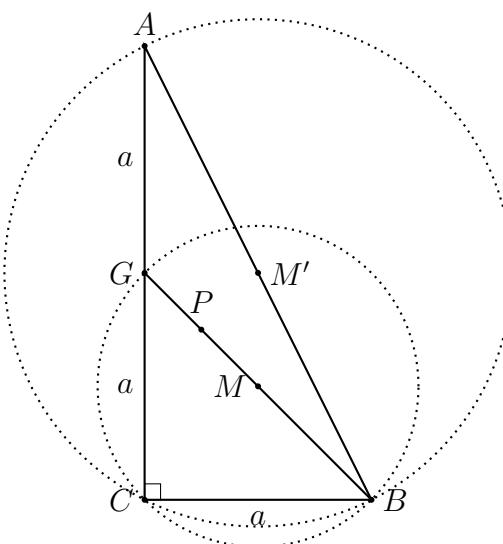
א. הבע באמצעות  $R$  את רדיוס המעגל

הchosם את המשולש  $ACB$ .

ב. הבע באמצעות  $R$  את מרחק הנקודה  $P$

ממרכז המעגל החוסם את המשולש  $ACB$ .

נסמן  $M$  = מרכז המעגל החוסם את  $\triangle CGB$  והרדיוס שלו, ו-  $R'$  = מרכז המעגל החוסם את  $\triangle ACB$  והרדיוס שלו. שימו לב שבתרשים הנקודות  $M, M'$  נמצאות על הצלעות  $AB, CB$ ,  $AC$  ו-  $GB$ . מרכז המעגל החוסם את  $\triangle ACB$  נמצא בנקודה  $M$ 。



### סעיף א

נשתמש בחוק הסינוסים ובמשפט פיתגורס, תחילת עבור  $\triangle CGB$

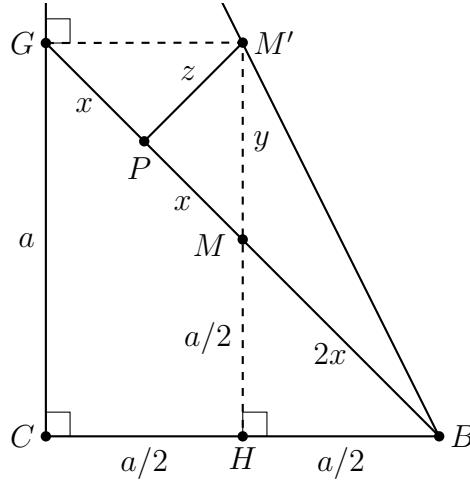
$$R = \frac{BG}{2 \sin 90^\circ} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

ואחר כך עבור  $\triangle ACB$

$$R' = \frac{AB}{2 \sin 90^\circ} = \frac{\sqrt{a^2 + (2a)^2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)a = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{2}R = \sqrt{\frac{5}{2}}R.$$

## סעיף ב

$M'$ , מרכז המעלג החוסם את  $\triangle ACB$ , הוא נקודת החיתוך של האנכים  $GM'$  ו-  $M'H$ .



אם נמצא משולש שuberו נוכל לחשב שתי צלעות והזווית הכלואה ביןיהם, נוכל להשתמש בחוק הקוסינוסים. ננסה את  $\triangle MPM'$ . נסמן  $CG \parallel MH$  ולכן לפי משפט 91 "משפט תאלס המורחב: ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהם בקטיעים פרופורציוניים":

$$\frac{GC}{MH} = \frac{CB}{HB} = \frac{a}{a/2} = 2,$$

ולכן:  $MH = \frac{a}{2}$ . אבל  $GCHM'$  הוא מלבן, ולכן:

$$y = MM' = M'H - MH = GC - MH = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}R = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

שוב לפי משפט תאלס המורחב:

$$\frac{GB}{MB} = \frac{GC}{MH} = 2$$

$$GB = GM + MB$$

$$GM = GB - MB = 2MB - MB = MB.$$

$$\text{שנسمן } GM = MB = 2x$$

נתון  $.PM = 4x - (2x) - x = x$ ,  $PG = \frac{1}{4}(2x + 2x) = x$ . לבסוף,  $GB = 4 \cdot PG$ , כך ש-  $x$  ניתן לחשב לפי משפט פיתגורס ב-  $\triangle CGB$  בזווית  $x$ :

$$(4x)^2 = a^2 + a^2$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{8}}a = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{2}R = \frac{R}{2}.$$

$\triangle MHB$  הוא משולש ישר-זווית שווה-שוקיים, כך ש-  $\angle BMH = 45^\circ$ , ו-  $\angle PMM' = 45^\circ$  לפי זוויות קודקודיות. כעת יש לנו מספיק נתונים להשתמש בחוק הקוסינוסים. נסמן  $z$  :

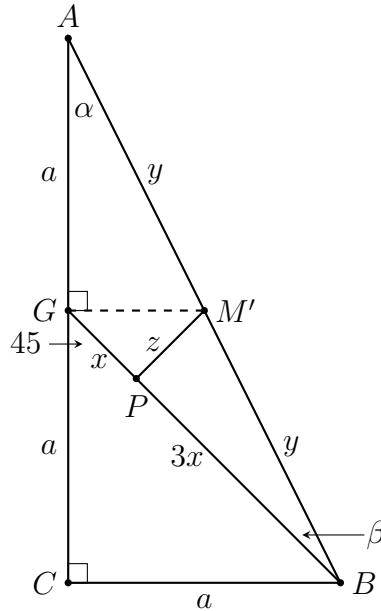
$$\begin{aligned}
z^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos \angle PMM' \\
&= \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{2}\right)\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) \cos 45^\circ \\
&= R^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{R^2}{4} \\
z &= \frac{R}{2}.
\end{aligned}$$

\* \* \*

פתרון אחר משמש בחוק הקוסינוסים על  $\triangle PM'B$ , האנץ האמצעי ל- $\triangle ACB$  חותך את  $AB$ ,  $GM'$ , האנץ האמצעי ל- $\triangle PM'B$ . (בלי להסתמך על מרכזו המוגל החסום את  $GM' \parallel CB$ ). ( $\triangle ACB$  ולכן לפי משפט תאלס (הריגיל):

$$\frac{AG}{GC} = \frac{AM'}{M'B},$$

ונסמן  $y = AM' = M'B$



ולפי פיתגורס ב- $\triangle GCB$ :

$$\begin{aligned}
(4x)^2 &= a^2 + a^2 \\
x &= \frac{1}{\sqrt{8}}a = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{2}R = \frac{R}{2}.
\end{aligned}$$

לפי פיתגורס ב- $\triangle ACB$

$$\begin{aligned}(2y)^2 &= (2a)^2 + a^2 \\ y &= \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{2}R = \sqrt{\frac{5}{2}}R.\end{aligned}$$

נחשב את האזויות  $\alpha, \beta$ :

$$\sin \alpha = \frac{a}{2y} = \frac{\sqrt{2}R}{2\sqrt{(5/2)R}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\alpha = 26.57$$

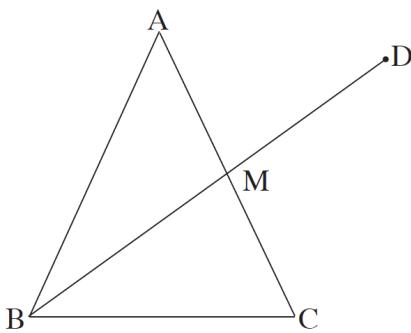
$$\beta = 180 - \angle AGB - \alpha = 180 - 135 - 26.57 = 18.43.$$

נשメתש בחוק הקוסינוסים ב- $\triangle PM'B'$ :

$$\begin{aligned}z^2 &= (3x)^2 + y^2 - 2 \cdot 3x \cdot y \cdot \cos \beta \\ &= \left(3 \cdot \frac{R}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{2}}R\right)^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}R \cdot 0.9487 \\ &= 0.25R^2 \\ z &= \frac{R}{2}.\end{aligned}$$

אני מעדיף את הפתרון הראשון. התרשימים מעט יותר מסובך אבל החישובים יותר פשוטים.

## 5.14 קיז תשע"ד מועד א



במשולש שווה-שוקיים  $\triangle ABC$  ( $AB = AC$ ) הוא תיכון  $BM$  לשוק ( $\angle BAC$ ).

נתון:  $\angle BAC = 50^\circ$ .

א. חשב את גודל הזווית הקהה  $\angle AMB$ .

ממשיכים את  $BM$  עד הנקודה  $D$ .

נתון גם:

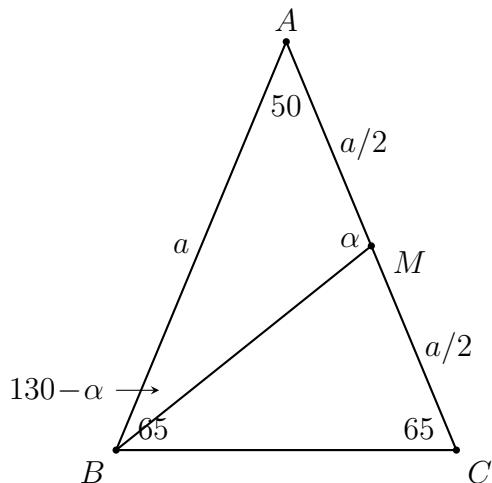
רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $\triangle ABC$  הוא 10 ס"מ.

רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $\triangle ABD$  הוא 14 ס"מ.

ב. חשב את זווית המשולש  $\angle AMD$ .

נסמן  $\angle ABC = \angle ACB = (180 - \angle BAC) / 2 = 65^\circ$ . נתון  $\angle BAC = 50^\circ$  ובמשולש שווה-שוקיים  $\angle BAC = 50^\circ$ . נחיש  $\angle ABM = 180 - 50 - \alpha = 130 - \alpha$ .

$$\angle ABM = 180 - 50 - \alpha = 130 - \alpha = 65^\circ$$



### סעיף א

נחפש משולש שעליו אפשר להפעיל את חוק הסינוסים. נתון  $BM$  הוא תיכון ל- $AC$ . נסמן את  $\triangle ABM$  עם הנעלם  $\alpha$ , ונפעיל את משפט הסינוסים על  $\triangle ABM$ .

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a/2}{\sin(130 - \alpha)}$$

$$\sin \alpha = 2 \sin(130 - \alpha)$$

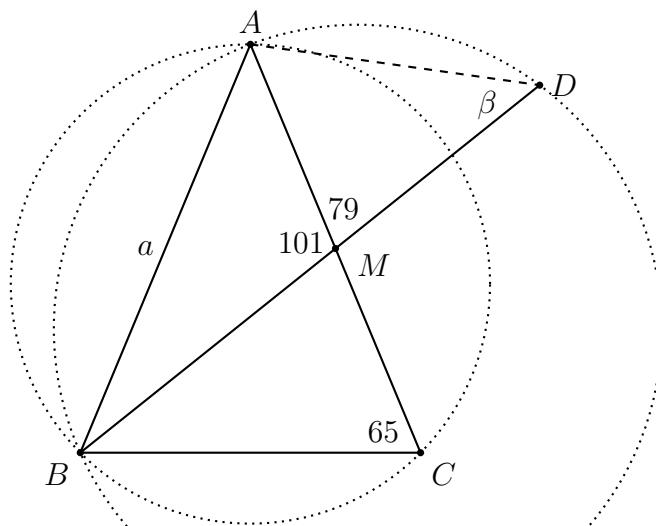
$$= 2 \sin 130 \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cos 130$$

$$= 1.53 \cos \alpha + 1.29 \sin \alpha$$

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= -\frac{1.53}{0.29} \\ \alpha &= -79.27^\circ = 100.73^\circ \approx 101^\circ.\end{aligned}$$

בהמשך נעבד עם קירובים למעלה שלמה.

### סעיף ב

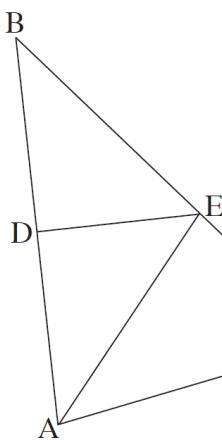


ולכן  $\angle AMB = 101^\circ$  ולכן  $\angle AMD = 101^\circ$  לפי זוויות משילימות. נctrיך לחשב את מ- $\angle AMD$ ,  $\angle ADM$  והזווית השלישית שתתקבל מסכום הזוויות המשולש. מהתרשים רואים שהצלע  $AB$  מול הזווית  $\angle AMB = 101^\circ$  היא באורך  $a$ , ו- $\angle ADB = \beta$  הוא צלע מול  $\angle ADM = 65^\circ$ . לפי חוק הסינוסים ב- $\triangle ADB$ ,  $\angle ACB$ :

$$\begin{aligned}2R_{ABC} &= \frac{a}{\sin 65^\circ} = 2 \cdot 10 \\ a &= 18.126 \\ 2R_{ABD} &= \frac{a}{\sin \beta} = \frac{18.126}{\sin \beta} = 2 \cdot 14 \\ \beta &= 40.34^\circ.\end{aligned}$$

הزوויות של  $\triangle AMD$  הן  $79^\circ, 40^\circ, 61^\circ$ .

## 5.15 חורף תשע"ד



במשולש ABC האנך האמצעי לצלע BA חותם את הצלעות BC ו- DA בנקודות E ו- D בהתאמה (ראה ציור).

$$\text{נתון: } \angle ABC = \beta, \angle BAC = \alpha$$

א. (1) הבע באמצעות  $\alpha$  ו-  $\beta$  את  $\angle EAC$ .

$$\cdot \frac{CE}{EB} \quad \text{(2) הבע באמצעות } \alpha \text{ ו- } \beta \text{ את היחס}$$

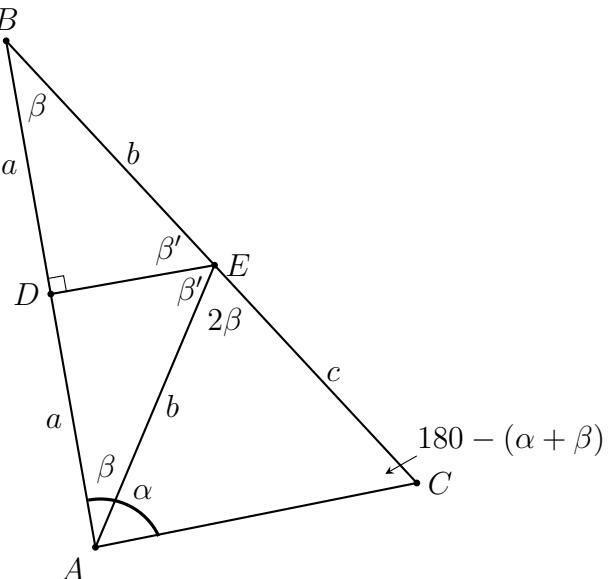
נתון גם:  $\angle BAC$  חוצה-זווית AE

$$\beta = 40^\circ, AC = 10$$

ב. חשב את הרדיוס של המרجل החסום במשולש ABC.

### סעיף א

(1) הוא האנך האמצעי ל-AB, ולכן  $\triangle AED \cong BED$  לפי צ.ג.צ. נסמן את שאר הזוויות לפי זווית משלימות וסכום זווית במשולש, כאשר קיצרנו  $\angle EAC = \alpha - \beta$ . התשובה היא  $\beta' = 90^\circ - \beta$ .



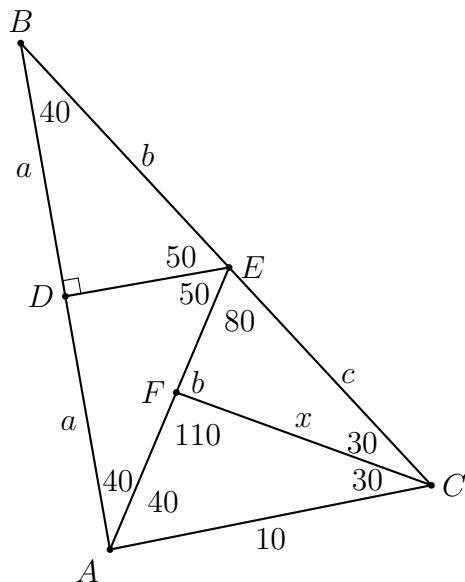
(2) נסמן  $\angle BAC = \alpha = 90^\circ$ . השאלת מבקשת את היחס  $\frac{c}{b}$ . מהתרשים נראה ש-  $\triangle AEC \cong BED$  ונוכל להשתמש במשפט תאלס, אבל אי אפשר להסתמך על התרומות מהתרשים. הראנו ש-  $\angle AEC = \angle BED$ , ונוכל להשתמש בחוק הסינוסים ב-  $\triangle AEC$ , כי  $\frac{c}{b} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(180 - (\alpha + \beta))}$ .

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sin(\alpha - \beta)} &= \frac{b}{\sin(180 - (\alpha + \beta))} \\ \frac{c}{b} &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

## סעיף ב

המשפט הרלונטי הוא 49 "שלושת חוצי הווית של משולש נחכמים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעלג החסום במשולש". נתון חוצה זווית  $AE$  ב- $A$ . נבנה חוצה זווית שני. נססה ב- $C$  כי ידוע  $AC = 10$  וnocל להשתמש בחוק הסינוסים ב- $\triangle ACF$ , כאשר  $F$  היא נקודת החיתוך עם חוצה הווית  $AE$ , ולכן היא המרכז של המעלג החסום.

נתון ש- $\beta = 40^\circ$  וזה מאפשר לנו להשלים זוויות בתרשים:

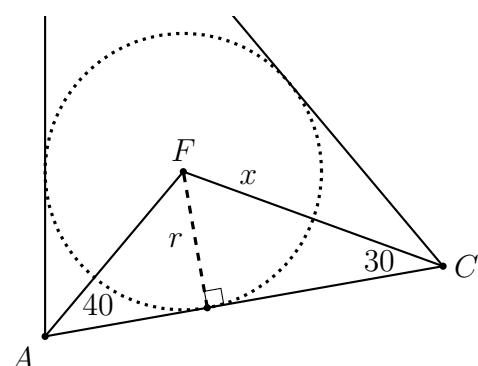


לפי חוק הסינוסים:

$$\frac{x}{\sin 40^\circ} = \frac{10}{\sin 110^\circ}$$

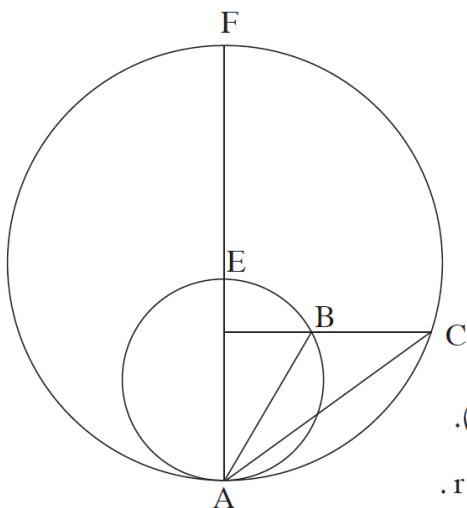
$$x = 6.84.$$

**לא לעצור כאן!** השאלה מבקשת את הרדיוס של המעלג החסום ולא המרחק אל מרכז המעלג.  
ווריד אnek מ- $F$  ל- $AC$  ונחשב:  $r = x \sin 30^\circ = 3.42$



## 5.16 חורף תשע"ד (שאלה 6)

בבחינה זו היו שלוש שאלות בפרק השני.

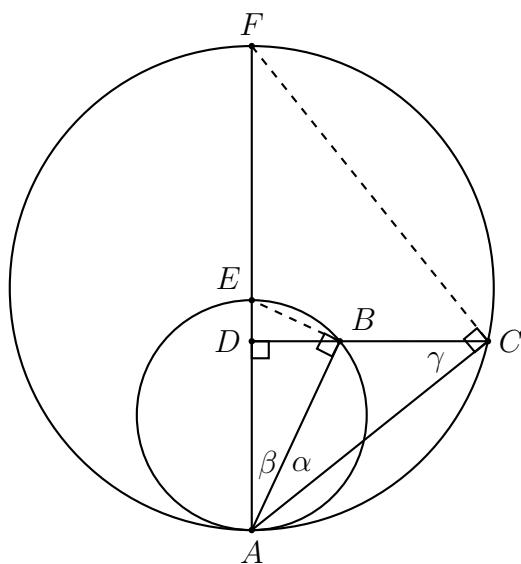


שני מעגלים, גדול וקטן, משיקים מפנים בנקודה A. נקודה F נמצאת על המעגל הגדל כך שقطع המרכזים של שני המעגלים נמצא על AF. חותך את המעגל הקטן בנקודה E. דרך נקודה B של המעגל הקטן העבירו ישר המקביל למשיק המשותף לשני המעגלים. המקביל חותך את המעגל הגדל בנקודה C (ראה ציור). רדיוס המעגל הגדל הוא R, ורדיוס המעגל הקטן הוא r. נתון:  $\angle FAB = \beta$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .

א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו-  $\beta$  את  $\angle BCA$ . נמק. (1)

ב. הבע רק באמצעות  $\alpha$  ו-  $\beta$  את היחס  $\frac{AC}{AB}$ . (2)

ג. הבע באמצעות  $\alpha$  ו-  $\beta$  את היחס  $\frac{R}{r}$ .



**סעיף א**

$\angle BCA = \gamma = 90 - (\alpha + \beta)$ .  $\triangle DCA$  ישר זווית ולכן סכום הזווויות החודות שווה ל- $90^\circ$ . (1)

זהו צלע של  $\triangle DCA$  וגם של  $\triangle DBA$ . נפעיל את חוק הסינוסים פעמיים:

$$\begin{aligned}\frac{AB}{\sin 90} &= \frac{AD}{\sin(90 - \beta)} \\ AD &= AB \cos \beta \\ \frac{AC}{\sin 90} &= \frac{AD}{\sin \gamma} \\ AC &= \frac{AB \cos \beta}{\sin(90 - (\alpha + \beta))} \\ \frac{AC}{AB} &= \frac{\cos \beta}{\cos(\alpha + \beta)}.\end{aligned}$$

פתרון אחר מתקבל מהפעלת חוק הסינוסים פעם אחת על  $\triangle ABC$ :

$$\begin{aligned}\frac{AC}{\sin(180 - \alpha - \gamma)} &= \frac{AB}{\sin \gamma} \\ \frac{AC}{AB} &= \frac{\sin(180 - (\alpha + \gamma))}{\sin(90 - (\alpha + \beta))} = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin(\alpha + 90 - (\alpha + \beta))}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \beta}{\cos(\alpha + \beta)}\end{aligned}$$

## סעיף ב

לאחר שהיחסינו יחס  $\frac{AC}{AB}$  נחפש קשר בין  $AB, AC$  לבין הרדיוסים. לחבר  $B$  ל- $E$  ו- $F$ . נקבל שני משולשים חסומים במעגלים וניתן להשתמש בנוסחה של חוק הסינוסים עם רדיוס:

$$\begin{aligned}2R &= \frac{AC}{\sin(90 - (\alpha + \beta))} \\ 2r &= \frac{AB}{\sin(90 - \beta)} \\ \frac{R}{r} &= \frac{AC}{2 \cos(\alpha + \beta)} \cdot \frac{2 \cos \beta}{AB} = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2(\alpha + \beta)}\end{aligned}$$

פתרון אחר: נתון ש- $FA$  הוא קוטר ("קטע המרכזים") של המगעל הגדול, ולכן  $EA$  הוא קוטר של המגעל הקטן. זווית הנשענת על קוטר  $\triangle ACF, \triangle ABE$  הן ישר-זווית, ולכן:

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{AB}{2r} \\ \cos(\alpha + \beta) &= \frac{AC}{2R} \\ \frac{R}{r} &= \frac{AC}{2 \cos(\alpha + \beta)} \cdot \frac{2 \cos \beta}{AB} = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2(\alpha + \beta)}.\end{aligned}$$

## המלצות: טריגונומטריה

- ראו נספח ג' המסביר את החשיבות של מעגל היחידה בחישובים טריגונומטריים.
- הנספח מציג איך לשזר בקבוק את הנוסחאות  $\sin(180^\circ - \theta)$ ,  $\sin(90^\circ - \theta)$  ונוסאות דומות עבור קיסינוס.
- חשוב לציר תרשימים ברורים וגדולים, עדיף עם סרגל ומחוגה. בתהליך הפתרון אנו מסמנים את המידע המצטבר על הזווית והצלעות ויש לדאוג שייהה מספיק מקום.
- כאשר לשאלה יש מספר סעיפים כדאי לציר תרשימים נפרדים לכל סעיף תוך העלמת מידע לא רלוונטי לאותו סעיף.
- אני מעדיף לסמן זווית עם אותיות יוונית כגון  $\alpha$ , ולא על ידי ציון שלושת הנקודות המגדירות אותה  $\angle ABC$ , כי קשה יותר לעקוב אחר הנקודות המגדירות את הזווית.
- השלימו זווית ככל האפשר תוך שימוש בסכום הזווית במשולש, ובזוויתות משילומיות. כדי להקל על החישובים אני משתמש בנעלמים נוספים נספחים כדי לkürק ביטויים, למשל,  $(\alpha + \beta) - 180 = \gamma$ .
- שימוש לב שאין עיקריות בסימון  $A, B, C, D$  של הקודקודים של משולש או מרובע.
- בשאלות על טריגונומטריה בדרך כלל עדיף להשתמש בנוסחה לשטח משולש:

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha,$$

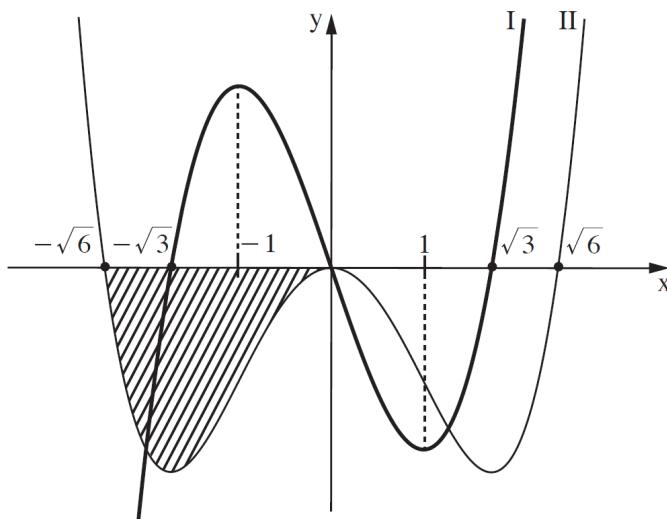
ולא בחישוב של מחצית מכפלת הבסיס והגובה.

- עבור מעגל חסום במשולש, המשפט הרלוונטי הוא 54 "במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום את המשולש". ניתן בקבוק למצוא את רדיוס המעגל מיחס הסינוסים:
$$2R = \frac{a}{\sin \alpha}.$$
- עבור מעגל חסום במשולש, המשפט הרלוונטי הוא 49 "שלושת חוצי הזווית של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש". אין נוסחה עבור רדיוס המעגל אבל אפשר למצוא אותו כאורך הגובה מהמרכז לאחת הצלעות.
- טרפזים מאד אהובים על ידי כתבי הבחן. שננו משפטיים 56 "ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויתות נגדיות שווה ל- $180^\circ$ " ו-57 "מרובע קמור חסום מעגל אם ורק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות".
- שימוש לב שהמרכז המעגל החסום לא חופף את מרכז המעגל החסום, אלא במקרים מיוחדים כגון משולש שווה-צלעות וריבוע.
- לעתים קרובות התשובה לשאלה תהיה ערך ממשי לאוית או אורך. אני מעדיף להישאר עם נתונים כל עוד הדבר אפשרי ורק בסוף להשתמש במחשבון כדי לחשב ערכים.

## פרק 6 חדו"א שאלה 6

### 6.1 קיז תשע"ח מועד ב

לפניך הגרפים של הפונקציות  $(x)f'$  ו- $(x)f''$  (פונקציית הנגזרת הראשונה ופונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה  $(x)f$ ) בתחום  $-2.5 \leq x \leq 2.5$ . שני הגרפים עוברים בראשית הצירים.



- א. התאם בין הגרפים I ו- II ובין הפונקציות  $(x)f'$  ו-  $(x)f''$ . נמק.  
 ב. (1) כמה נקודות קיצון פנימיות יש לפונקציה  $(x)f$  בתחום המתוואר בגרף? נמק את תשובתך.  
 (2) כמה נקודות פיתול יש למונקציה  $(x)f$  בתחום המתוואר בגרף? נמק את תשובתך.  
 ג. עבור איזה ערך של  $x$  בתחום  $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{6}$  שיפוע המשיק לגרף פונקציית הנגזרת,  $(x)f'$ , הוא מינימלי?  
 נתון:  $(x)f$  היא פונקציה אי-זוגית.

- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $(x)f$ .

- נתון: ערך הפונקציה  $(x)f$  בנקודת המקסימום שלו הוא  $t$ .  
 ה. הביע באמצעות  $t$  את השטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי החלק השלילי של ציר ה-  $x$  (השטח המוקווקו בציור).  
 ו. נתון: קבועים  $a$ ,  $b$  ו-  $c$  ממשיים כך ש-  $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$ .  
 מצא את  $c$  ואת היחס  $\frac{a}{b}$ .

#### סעיף א

נקודות הקיצון של  $(x)f'$  הן הנקודות בהן  $= (x)f''$ . לgraf II נקודות קיצון ב-  $0, \pm\sqrt{3}$  ובנקודות הללו הgraf I חותך את ציר ה-  $x$ . לכן, II הוא הgraf של  $(x)f'$  ו-I הוא הgraf של  $(x)f''$ .

#### סעיף ב

- (1) הgraf II מתאפס ב-  $0, \pm\sqrt{6}$ , אבל ב-  $0$  הוא לא מחליף סימן ולכן הוא לא נקודת קיצון.  
 (2) הנגזרת השנייה מתאפסת בשלוש נקודות  $0, \pm\sqrt{3}$ . בכל שלושת הנקודות הנגזרת הראשונה לא מחליפה סימן, ולכן כולם נקודות פיתול ולא נקודות קיצון.

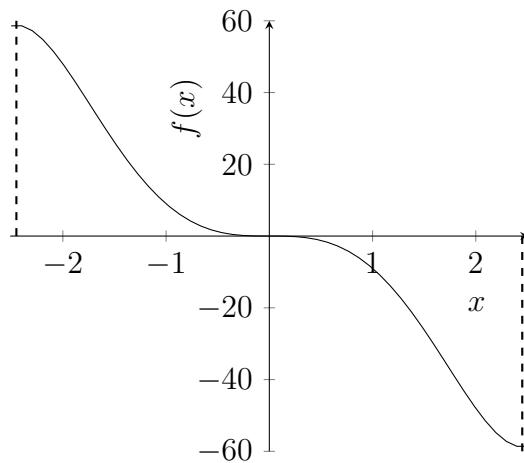
## סעיף ג

הנגזרת השנייה היא שיפוע המשיק לנגזרת הראשונה. בתחום הניתן הערך המינימלי מתקבל ב-1.

## סעיף ד

נתון שהפונקציה אי-זוגית אז  $f(0) = 0$ . הוכחה:  $a = -a$  אם ורק אם  $a = 0$ . אם  $f(x) = f(-x)$  אז  $f(0) = f(-0) = -f(0) = 0$ .

בין 0 ל- $\sqrt{3}$  הנגזרת הראשונה, השיפוע, שלילית (graf II), ולכן  $f(x)$  יורדת מאפס לערכים שליליים. בסעיף ב חישבנו שיש שתי נקודות פיטול ב- $\approx 1.73 \pm \sqrt{3}$  בנוסף לנקודה ב-0. נתון שהפונקציה אי-זוגיות כך שאפשר לקבל את הערכים עבור  $0 < x$  על ידי סימטריה סביב ציר ה- $y$ . הgraf נראה כך:



## סעיף ה

מהגרף רואים שהגבולות הם  $0, -\sqrt{6}, \sqrt{6}, -\infty$ , אבל כדאי לנמק. מצאנו בסעיף ב  $f'(0) = 0$ , ובסעיף ד רأינו  $f'(-\sqrt{6}) = 0$ , כך שציר ה- $x$  תוחם את השטח. חישוב השטח:

$$\int_{-\sqrt{6}}^0 0 - f'(x) dx = -f(x) \Big|_{-\sqrt{6}}^0 = 0 - (-f(-\sqrt{6})) = f(-\sqrt{6}) = t,$$

כי נקודת המקסימום של  $f(x)$  היא ב- $x = -\sqrt{6}$

## סעיף ו

לפי  $f(0) = 0$ ,

הנגזרת הראשונה מתאפסת ב- $\pm\sqrt{6}$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5ax^4 + 3bx^2 \\ &= 5a(\pm\sqrt{6})^4 + 3b(\pm\sqrt{6})^2 \\ &= 5a(\pm\sqrt{6})^2 + 3b = 0 \\ \frac{a}{b} &= -\frac{1}{10}. \end{aligned}$$

## 6.2 קיז' תשע"ח מועד א

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax - 1}{\sqrt{ax^2 - 2x + 1}}$ .  $a$  הוא פרמטר.

נתון: הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$ .

**א.** הוכח:  $a > 1$

ענוה על סעיף ב. אם יש צורך, הביע באמצעות  $a$ .

**ב.** (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גраф הפונקציה  $(x, f(x))$  עם הצירים.

(2) כתוב את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $(x, f(x))$  המקבילות לציר ה- $x$ .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $(x, f(x))$  (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גраф הפונקציה  $(x, f(x))$ .

נתון:  $a = 3$ .

**ג.** חשב את השטח המוגבל על ידי גраф הפונקציה  $(x, f(x))$ , על ידי ציר ה- $x$ , ועל ידי הישרים  $x = 2$  ו-  $x = \frac{2}{3}$ .

**ד.** (x) g היא פונקציה רציפה המוגדרת לכל  $x$ .

נסמן ב-  $S$  את השטח המוגבל על ידי גраф הפונקציה  $(x, f(x))$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים  $x = \frac{1}{3}$  ו-  $x = b$  ( $\frac{1}{3} < b$ ).

נתון: השטח המוגבל על ידי גраф הפונקציה  $(x, f(x))$ , על ידי גраф הפונקציה  $(x, g(x))$  ועל ידי הישרים  $x = b$  ו-  $x = \frac{1}{3}$  שווה ל-  $2S$  בעבר כל  $b$ .

הבע את  $(x, g(x))$  באמצעות  $(x, f(x))$  בתחום  $\frac{1}{3} < x$  (כתב את שתי האפשרויות). אין צורך להוכיח את השובטן.

### סעיף א

נתון שהפונקציה מוגדרת לכל  $x$ , ולכן לפולינום במכנה לא יהיו שורשים:

$$(-2)^2 - 4 \cdot a \cdot 1 = 4 - 4a < 0,$$

ולכן  $1 > a$ . אסור שלפולינום יהיה ערכים שליליים. לפולינום יש ערך חיובי, למשל,  $x = \frac{1}{2}$ . אם הפולינום לא יכול לקבל ערך אפס, אין נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$  ולא יהיה ערכים שליליים.

### סעיף ב

(1)  $f(0) = \frac{-1}{\sqrt{1}} = -1$  ונקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  היא  $(0, -1)$ . המכנה חיובי כך שנקודות החיתוך עם ציר ה- $x$  מתקבל מ-  $ax - 1 = 0$ , והנקודה היא  $(\frac{1}{a}, 0)$ .

: $x \rightarrow +\infty$  עבור (2)

$$\frac{\left(a - \frac{1}{x}\right)}{+\sqrt{a - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}} \xrightarrow{+\infty} = \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}.$$

: $x \rightarrow -\infty$  עבור

$$\frac{\left(a - \frac{1}{x}\right)}{-\sqrt{a - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}} \xrightarrow{-\infty} = -\frac{a}{\sqrt{a}} = -\sqrt{a}.$$

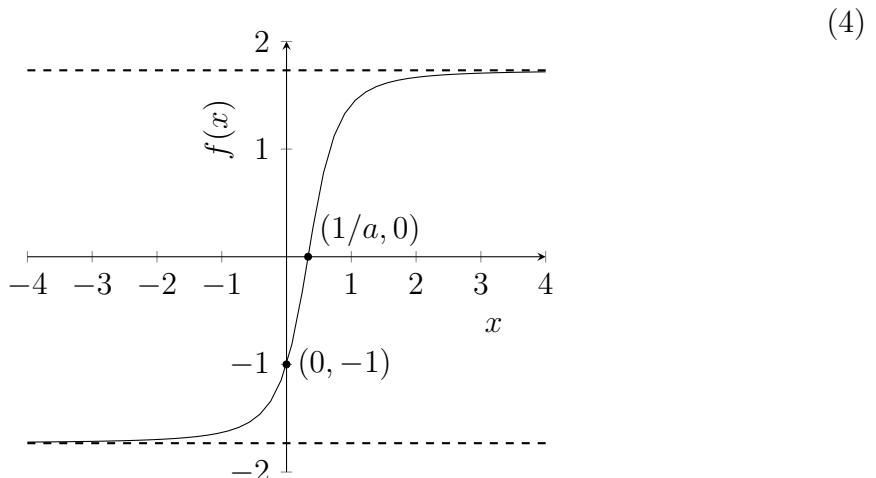
(3) נחשב את הנגזרת הראשונה:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a\sqrt{ax^2 - 2x + 1} - (ax - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{ax^2 - 2x + 1})^{-\frac{1}{2}} (2ax - 2)}{(\sqrt{ax^2 - 2x + 1})^2} \\ &= \frac{a(ax^2 - 2x + 1) - (ax - 1)(ax - 1)}{(\sqrt{ax^2 - 2x + 1})^2 \sqrt{ax^2 - 2x + 1}}. \end{aligned}$$

המכנה חיובי ולכן סימן הנגזרת שווה בסימן המונה:

$$a^2x^2 - 2ax + a - a^2x^2 + 2ax - 1 = a - 1.$$

וכחנו ש-  $a > 1$  ולכן  $a - 1 > 0$  והפונקציה תמיד עולה.



#### סעיף ג

ולכן גבולות האינטגרל הם בחלוקת החיובי של הפונקציה.  $\frac{1}{3} < \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \int_{2/3}^2 \frac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} &= \int_{2/3}^2 \frac{2}{2} \left( \sqrt{3x^2 - 2x + 1} \right)' \\ &= \sqrt{3x^2 - 2x + 1} \Big|_{2/3}^2 \\ &= \sqrt{12 - 4 + 1} - \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{4}{3} + 1} = 2. \end{aligned}$$

#### סעיף ד

נתון ש-  $b > \frac{1}{3}$  כך שבגבול האינטגרלים בתחום החיובי של הפונקציות. שתי האפשרויות הן  $f(x) \geq g(x)$  ו-  $g(x) \geq f(x)$ .

$$\int(g - f) = \int g - \int f = \int g - S = 2S,$$

ולכן  $g = 3f$  ו-  $\int g = 3S$

$$\int(f - g) = \int f - \int g = S - \int g = 2S,$$

ולכן  $g = -f$  ו-  $\int g = -S$

### 6.3 חורף תשע"ח

$$\text{נתונות הפונקציות } g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$$

ענה על סעיף א' עבור התחום  $\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

ב. מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$ , המאונכות לציר ה- $x$ .

ג. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ענה גם על סעיף ב' עבור התחום  $\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ .

$$g(x) = -f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

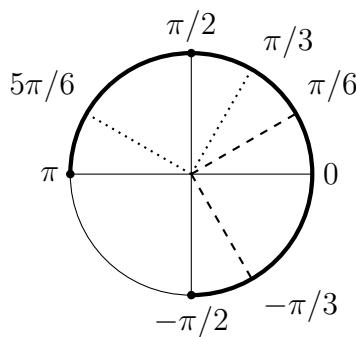
ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

$$\text{ג. מצא את ערך הביטוי } \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx. \quad \text{נמק את תשובתך.}$$

הקשת העבה מראה את התחים והקוים מראים את הערך של  $x$  עבור  $\pi < x < -\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$



#### סעיף א'

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  מוגדרת אם  $\cos x > 0$ , ואם  $x$  מימין לציר ה- $y$ . תחום ההגדרה הוא  $f(x)$  (1)

(2)

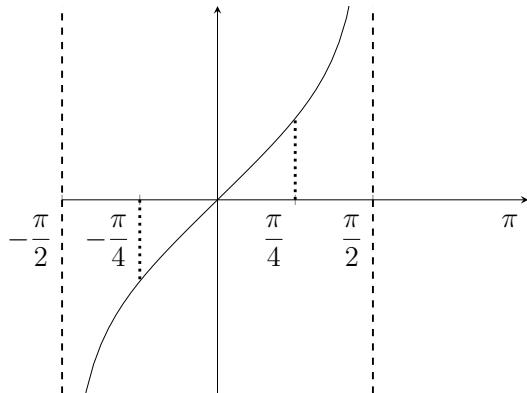
$$\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \xrightarrow{+\frac{\pi}{2}} \frac{+1}{0} = +\infty, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \xrightarrow{-\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{0} = -\infty.$$

(3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x \sqrt{\cos x} - \sin x \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{\cos x})^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sin x)}{\cos x} \\ &= \frac{2 \cos^2 x + \sin^2 x}{2 \cos x \sqrt{\cos x}} = \frac{\cos^2 x + 1}{2 \cos x \sqrt{\cos x}}. \end{aligned}$$

בתחומי ההגדרה  $\cos x > 0$  ולכון הנגזרת הראשונה תמיד חיובית והפונקציה עולה בכל התחום. מכאן שהנגזרת הראשונה לא מתאפשרת בתחום כך שאין נקודות קיצון פנימיות.

(4) הגרף מתקיים מ- $0 = f(0) = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1}$ , מהאסימפטוטות, ומהעובדת שאין נקודות קיצון:



## סעיף ב

- (1) הפונקציה מוגדרת אם  $\sin x > 0$  מעל לציר ה- $x$ . תחום ההגדרה הוא  $\pi < x < 0$ .
- (2) חיבור או חיסור של  $\frac{\pi}{2}$  משנה סינוס לקוסינוס ולהיפך. צריך רק לקבוע את הסימנים (ראו תרשים לפני סעיף א).

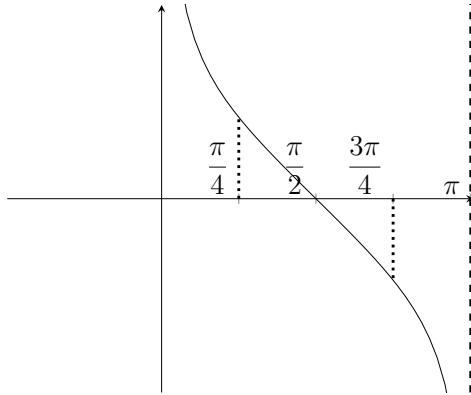
$$-f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}}\right) = -\left(\frac{-\cos x}{\sqrt{\sin x}}\right) = g(x).$$

אפשר גם לחשב לפי הנוסחה לחישור של סינוס וкосינוס:

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \cos \frac{\pi}{2} - \cos x \sin \frac{\pi}{2} = -\cos x \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \cos \frac{\pi}{2} + \sin x \sin \frac{\pi}{2} = \sin x. \end{aligned}$$

(3) הגרף של  $g(x)$  מתקבל מהזזה ימנית של  $\frac{\pi}{2}$  והפיכת הסימן. למשל:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = -f\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$



### סעיף ג

התרומה של החלק שלילי של הפונקציה לאינטגרל שווה לתרומה של החלק החיובי שלו, ולכן האינטגרל מתאפס.

מי שלא משתמש מהטייעון יכול לחשב:

$$(\sqrt{\cos x})' = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{\cos x})^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sin x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}},$$

ולכן:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} = -2\sqrt{\cos x} \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -2\left(\sqrt{\sqrt{2}/2}\right) - (-2)\left(\sqrt{\sqrt{2}/2}\right) = 0.$$

## 6.4 קיז תשע"ז מועד ב

נתונה הפונקציה  $f(x) = a - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ .  $a$  הוא פרמטר.

עננה על סעיף א. הביע את תשובותיך באמצעות  $a$  במידת הצורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

נתון כי גраф הפונקציה  $f(x)$  משיק לציר ה- $x$ .

ב. מצא את  $a$ .

הציב את הערך של  $a$  שמצאת ועננה על הסעיפים ג-ד.

ג. סרטט סקיצה של גраф הפונקציה  $f(x)$ .

ד. נתונה הפונקציה  $g(x) = |f(x) + k|$ .

ידעו שגרף הפונקציה  $g(x)$  משיק לאסימפטוטה האופקית של גраф הפונקציה  $f(x)$ .

מצא את  $k$  (מצא את שתי האפשרויות). נמק את תשובתך.

### סעיף א

(1) תחום ההגדרה הוא  $2 \neq x \Rightarrow x = 2$  מאנפס את המכנה של שני גורמים.

(2) כאשר  $\infty \pm \rightarrow x$  שני גורמים שוואים לאפס, ולכן האסימפטוטה האופקית היא  $y = a$ .

כאשר  $2 \rightarrow x$  שני גורמים שוואים לאינסוף, ולכן האסימפטוטה האנכית היא  $x = 2$ .

نبזוק את סימן הפונקציה השואפת לאינסוף. כאשר  $2 \rightarrow x$ ,  $\frac{1}{(x-2)^2} \gg \frac{2}{x-2}$  כך  $\infty \rightarrow y$  גם מימין וגם משמאל.

(3)

$$f'(x) = -\frac{2 \cdot -1}{(x-2)^2} + \frac{-2}{(x-2)^3} = 0.$$

הפונקציה לא מוגדרת ב- $x = 2$ , וכך לא ניתן להכפיל את המשווה ב- $(x-2)^3$ . נקבל  $2 = x - 3$ . נקודת הקיצון היא  $(3, a-1)$ .

על ידי הכפלה בחזקות של  $(x-2)^3$ , ניתן לכתוב את הנגזרת הראשונית כך:

$$f'(x) = \frac{2(x-2)^2 - 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2x^2 - 10x + 12}{(x-2)^4}.$$

המכנה חיובי ולכן הסימן של הנזורה השנייה שווה לסימן נזורת המונה  $10 - 4x$ . ב- $x = 3$ , הסימן חיובי והנקודות הקיצון היא מינימום.

דרך אחרת לבדוק אם מדובר במינימום או מקסימום היא באמצעות טבלת עליות וירידות:

$x$	0	2	2.5	3	4
$f'(x)$	0.75	$\times$	-8	0	0.25
$f(x)$	$\nearrow$	$\times$	$\searrow$	$a - 1$	$\nearrow$

הנקודה  $(3, a - 1)$  היא מינימום.

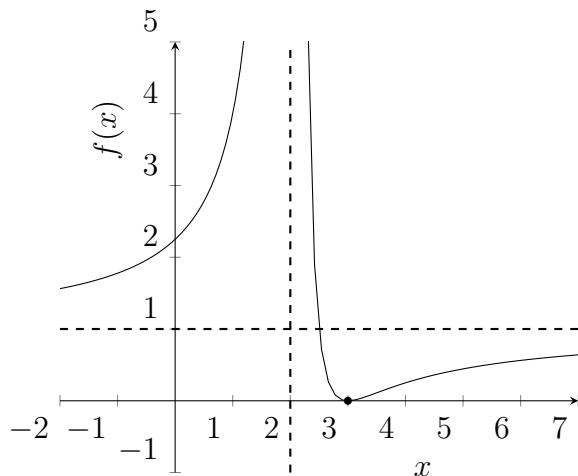
(4) הפתרון מופיע בטבלה בתת-סעיף הקודם.

### סעיף ב

נתנו שערך של  $f(x)$  בנקודת המינימום הוא אפס.  $a = 1$  ו- $f(3) = a - 1 = 0$ .

### סעיף ג

לפי טבלת העליות והירידות, הפונקציה עולה עד לאסימפטוטה האנכית, אך"כ יורדת לנקודת המינימום ואותה עולה ושוואת לאסימפטוטה האופקית:



(4) האסימפטוטה האופקית היא  $y = a = 1$  ונקודת המינימום היא  $(3, 0)$

$$\begin{aligned} g(3) &= |f(3) + k| = a = 1 \\ |0 + k| &= 1 \\ k &= \pm 1. \end{aligned}$$

## 6.5 קיז תשע"ז מועד א

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{x^2 - 10x + 24}}$$

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) מצא את נקודות החיתוך של גраф הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).  
 (3) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.  
 (4) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).  
 (5) סרטט סקיצה של גраф הפונקציה  $f(x)$ .

נתונה הפונקציה  $(x) g$  המקיימת:  $g(x) = f(x+5)$

- ב. (1) הוכח ש-  $g(x)$  היא פונקציה אי-זוגית.  
 (2) סרטט סקיצה של גраф הפונקציה  $g(x)$ .

$$\cdot \int_a^b g(x) dx = \int_{a+5}^{b+5} f(x) dx \quad \text{הסביר מדוע לכל } b < a \text{ מתקיים השוויון:}$$

### סעיף א

(1) הפונקציה מוגדרת אם המכנה שונה מאפס ואם הביטוי בשורש גדול או שווה לאפס:

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 24 &> 0 \\ (x-4)(x-6) &> 0. \end{aligned}$$

המכפלה חיובית רק אם שני הגורמים גדולים מאפס או שניהם קטנים מאפס. אבל אם  $x > 6$  אז גם  $x > 4$  וגם  $x < 4$ , ולכן הפונקציה מוגדרת כאשר:

$$x < 4 \quad \text{או} \quad x > 6.$$

(2) אם המכנה חיובי והמונה  $0 = x - 5$ . אבל 5 לא בתחום ההגדרה כך שאין נקודה חיתוך עם ציר ה- $x$ . נחשב את נקודת החיתוך  $(0, y)$  עם ציר ה- $y$ :

$$y = f(0) = \frac{0-5}{\sqrt{0^2 - 10 \cdot 0 + 24}} = \frac{-5}{\sqrt{24}}.$$

(3) כאשר  $x \rightarrow 6^+$  המונה שווה ל- $+1$ , ובמכנה שורש חיובי שהולך וקטן, ולכן  $\infty$ . לכן  $f(x) \rightarrow +\infty$  כ- $x = 6$  היא אסימפטוטה אנכית אחת. באופן דומה, כאשר  $x \rightarrow 4^-$ , כלומר  $x = 4$  היא אסימפטוטה אנכית שנייה.

כאשר  $x \rightarrow +\infty$  המונה שווה ל- $+\infty$ , ובמכנה  $x^2 \gg -10x + 24$ , וערך שווה ל- $+\infty$ . לכן  $f(x) \rightarrow +\infty$  כ- $x \rightarrow +\infty$ , והוא אסימפטוטה אופקית אחת. באופן דומה, כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , כלומר  $x = -1$  ו- $y = 1$  היא אסימפטוטה אופקית שנייה.

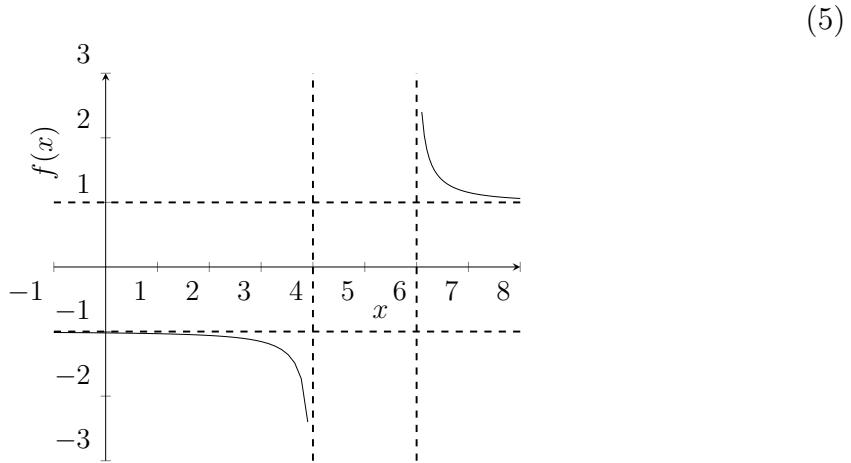
(4) אי-אפשר מייד להכין טבלה של עליות וירידות, כי אין לנו ידיעים אם יש נקודות קיצון בתחום ההגדרה של הפונקציה. כצעד ראשון נבדוק את ערכו של  $f'(x)$ . לשם קיצור נסמן  $u = x^2 - 10x + 24$ :

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{u} - (x-5) \cdot \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x-10)}{u} = \frac{u - (x-5)(x-5)}{u\sqrt{u}}.$$

נ<sup>ר</sup> חובי בתחום ההגדרה וגם  $\sqrt{u}$  חיובי, ולכן הסימן או נקודות האיפוס של הנגזרת תלוי רק במונה:

$$u - (x-5)(x-5) = x^2 - 10x + 24 - x^2 + 10x - 25 = -1.$$

בתחום ההגדרה, הנגזרת שלילית (ולא מטאפסת), ולכן הפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה.



## סעיף ב

(1) פתרון אחד הוא לחשב את  $g(x), g(-x)$  ולהראות ש-

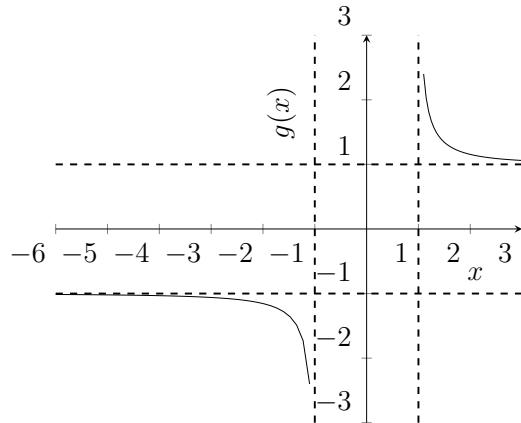
$$\begin{aligned} g(-x) &= f(-x+5) = f(5-x) \\ &= \frac{5-x-5}{\sqrt{(5-x)^2 - 10(5-x) + 24}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{25-10x+x^2-50+10x+24}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+5) \\ &= \frac{x+5-5}{\sqrt{(x+5)^2 - 10(x+5) + 24}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+10x+25-10x-50+24}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = -\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = -g(-x). \end{aligned}$$

פתרון מעט יותר מסובך הוא להראות  $g(-x) = -g(x)$  בצורה ישירה:

$$\begin{aligned}
 g(-x) &= f(-x + 5) = f(5 - x) \\
 &= \frac{5 - x - 5}{\sqrt{(5 - x)^2 - 10(5 - x) + 24}} \\
 &= \frac{-x}{\sqrt{(x^2 + 10x + 25) - (10x + 50) + 24}} \\
 &= \frac{-(x + 5) - 5}{\sqrt{(x + 5)^2 - 10(x + 5) + 24}} = -g(x).
 \end{aligned}$$

(2) הגרף הוא אותו גраф מוז' שמאלה חמש יחידות:



## סעיף ג'

נתון ש-  $a < b < 1$ , וכפי שניתן לראות מהגרף,  $a$  הם בתחום ההגדרה של  $g$ . נחשב:

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x+5) dx = \int_{a+5}^{b+5} f(x) dx.$$

## 6.6 חורף תשע"ז

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{ax^2 + 4x}{x^2 + 3x + b}.$$

a ו- b הם פרמטרים.

נתון:  $x = 1$ ,  $y = 1$ , הן אסימפטוטות של הפונקציה.

א. מצא את a ואת b.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גраф הפונקציה עם הציריים (אם יש כאלה).

(3) האם יש לפונקציה אסימפטוטות נוספת המאונכות לציריים

( בלבד  $x = 1$  ו-  $y = ?$  ) ? הסבר.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ג. סרטט סקיצה של גраф הפונקציה.

ד. עבור אילו ערכי x מתקיים:  $|f(x)| = -f(x)$  ? נמק.

ה. נגדיר  $g(x) = f^2(x) \cdot f'(x)$ .

הראה כי השטח המוגבל על ידי ציר ה- x, על ידי גраф הפונקציה  $(x)$  g

ועל ידי הישר  $x = 0.5$  הוא  $\frac{1}{3}$ . נמק את תשובתך.

### סעיף א

נקבל את האסימפטוטה אנכית  $x = 1$  כאשר המכנה מתאפס:

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + b &= 0 \\ 1^2 + 3 \cdot 1 + b &= 0 \\ b &= -4. \end{aligned}$$

נחשב את האסימפטוטה האופקית  $y = 1$ . כאשר  $\infty \rightarrow x$ .

$$\frac{a + \frac{4}{x}}{1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} \rightarrow 1,$$

### סעיף ב

(1) המכנה מתאפס כאשר:

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1) = 0,$$

ולכן הפונקציה מוגדרת עבור כל  $x$  פרט ל-  $-4$ .

(2) נציב  $0 = x$ . המונה מתאפס והמכנה לא מתאפס ולכן נקודת החיתוך עם ציר ה- y היא  $(0, 0)$ .

נציב  $0 = y$  ונקבל  $0 = x^2 + 4x = x(x + 4) = 0$ . הינה נקודת חיתוך עם שני הציריים. ב-  $-4$  הפונקציה לא מוגדרת, ולכן אין עוד נקודת חיתוך עם ציר ה- x.

(3) אין עוד אסימפטוטה אופקיות לפי החישוב בסעיף א.

יש אסימפטוטה אנכית כאשר  $x = -4$ . אבל  $x = -4$  גם מאייש את המוניה. נצמצם את הפונקציה:

$$\frac{x^2 + 4x}{x^2 + 3x - 4} = \frac{x(x+4)}{(x+4)(x-1)} = \frac{x}{x-1}.$$

כאשר  $x \rightarrow -4$  (בשני הכוונים), ערך הפונקציה שואפת ל- $\frac{4}{5}$ , ולכן אין כאן אסימפטוטה אלא חור.

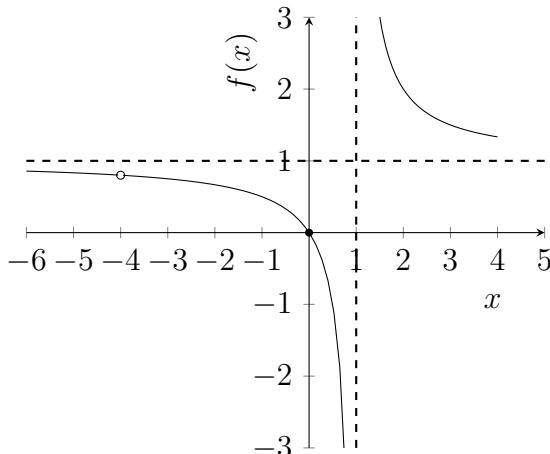
(4) הנגזרת הראשונה (ללא החישובים הארכיים):

$$\frac{(x^2 + 4x)'(x^2 + 3x - 4) - (x^2 + 4x)(x^2 + 3x - 4)'}{(x^2 + 3x - 4)^2} = \frac{-(x+4)^2}{(x^2 + 3x - 4)^2}.$$

הנגזרת לא מתאפסת ותמיד שלילית, ולכן הפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה שלה.

אפשר לקצר אם נצמצם את הפונקציה לפי שנחשב את הנגזרת.  $1 - \left(\frac{x}{x-1}\right)' = -1$ , שתמיד שלילי.

**סעיף ג**



**סעיף ד**

אם נתיחס לגרף,  $|f(x)|$  מעביר ערכים מתחת לציר ה- $x$  לערכים מעל לציר, ו- $-f(x)$  – מעביר את כל הערכים לצד השני של ציר ה- $x$ .  $|f(x)| = -f(x)$  רק עבור ערכים מתחת לציר ה- $x$  כי רק עבור ערכים אלה מתבצעת אותה פעולה. עבור פונקציה זו הערכים הם  $0 \leq x < 1$ .

**סעיף ה**

מצאו ש- $f'(0) = 0$  וחישוב פשוט מראה שה- $f'(0.5) = -\frac{9}{4} = -2.25$ .

סעיף ב  $f''(x)$  תמיד שלילי ולכן  $g(x) = f(x)^2 \cdot f'(x)$  תמיד שלילי או אפס. השטח שיש לחשב נמצא מתחתי לציר ה- $x$ . נשים לב שה- $(f^3(x))' = 3f^2(x) \cdot f'(x)$ , ונוכל לחשב את השטח:

$$\int_0^{0.5} 0 - f^2(x) \cdot f'(x) = -\frac{1}{3}f^3(x) \Big|_0^{0.5} = -\frac{1}{3}f^3(0.5) - (-0) = -\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 = \frac{1}{3}.$$

## 6.7 קיז' תשע"ו מועד ב

$$f(x) = \frac{2\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x} \quad \text{נתונה הפונקציה:}$$

א. בתחום  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לציר ה- $x$  (אם יש כאלה).

(3) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  (אם יש כאלה).

(4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. בתחום  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(1) הראה שפונקציה  $f(x)$  היא זוגית.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ג. מצא את השטח הרביעי הראשון המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי ציר ה- $y$ .

### סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס.  $\cos^2 x = 0$  בתחום כאשר  $x = \frac{\pi}{2}$ , ולכן תחום ההגדרה הוא  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ .

(2) כאשר  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , המכנה שואף לאפס והמונה שואף ל- $-1$ , ולכן  $x = \frac{\pi}{2}$  היא אסימפטוטה אנכית.

(3) בתחום ההגדרה המכנה לא מאפס, ולכן נקודות החיתוך הן הנקודות עבורה המונה מתאפס:

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x &= 1 \\ \cos x &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

בתחום ההגדרה יש רק פתרון אחד ונקודת הקיצון הוא  $(\frac{\pi}{4}, 0)$ .

(4) בתחום ההגדרה  $0 < \cos x < 1$  ולכן  $f(x) = 1 - \frac{1}{2\cos^2 x}$ . חישוב הנגזרת:

$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)' = -(-2\cos x \cdot -\sin x) = 2\cos x \sin x = 0.$$

$f'(x)$  מתאפס בתחום ההגדרה כאשר  $x = 0$  ונקודת הקיצון היא  $(0, \frac{1}{2})$ . סינוס וקוסינוס חיוביים בתחום, ולכן הנגזרת שלילית והפונקציה יורדת בכל התחומים. נקודת הקיצון היא מקסימום. אפשרות אחרת היא לחשב את הנגזרת השנייה:

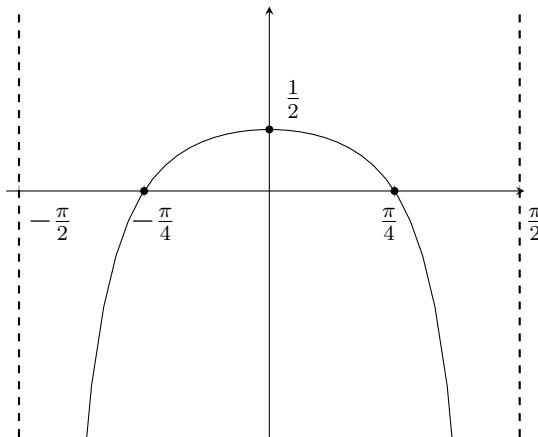
$$f''(x) = (-2\cos x \sin x)' = -2(-\sin^2 x + \cos^2 x).$$

בנקודת הקיצון  $0$   $f''(0) = -2 \cdot (-0 + 1) = -2$ ,  $x = 0$  מקסימום.

## סעיף ב

$\cos^2(-x) = \cos^2 x$  ולכן  $\cos(-x) = \cos x$  (1)

(2) המקסימום הוא ב- $(0, \frac{1}{2})$ , הfonקציה יורדת בתחום ההגדרה  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ , יש אסימפטוטה אנכית ב- $\frac{\pi}{2}$ , והfonקציה זוגית. התרשימים שמתקבל הוא:



## סעיף ג

הנוסחה  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$  אמנים מופיעה בנוסחאות אבל לא מרבים להשתמש בה, כך שהשאלה עלולה להיות קשה.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\cos^2 x} dx \\
 &= x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

## 6.8 קיצ'ן תשע"ו מועד א

נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 - \sin(2x)$  בתחום  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

עננה על הסעיפים שלפניך עבור התחום הנתון.

- מצא את השיפוע הגדול ביותר ואת השיפוע הקטן ביותר של גוף הפונקציה  $f(x)$ .
- סרטט סקיצה של גוף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .
- (1) מצא את תחומי הקוירוט כלפי מעלה ו כלפימטה של גוף הפונקציה  $f(x)$ .
- (2)סרטט סקיצה של גוף הפונקציה  $f(x)$ .

### סעיף א

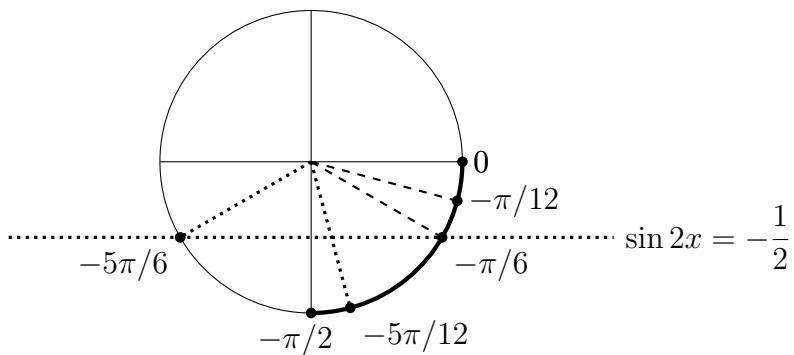
נתחיל עם חישוב הנגזרות:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - \sin 2x \\ f'(x) &= 2x - 2 \cos 2x \\ f''(x) &= 2 + 4 \sin 2x. \end{aligned}$$

השאלה מבקשת את נקודות הקיצון של הנגזרת הראשונה ונתקבל אותן על ידי חישוב הנקודות ב**הנגזרת השנייה** מתאפסת:

$$\begin{aligned} 2 + 4 \sin 2x &= 0 \\ 2x &= \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6} \\ x &= -\frac{\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12}. \end{aligned}$$

כאן יש להיזהר. למרות ש- $x = -\frac{5\pi}{12}$  לא נמצא בתחום,  $2x = -\frac{5\pi}{6}$  כן נמצא בתחום, והוא נקודת קיצון של הנגזרת הראשונית.



כדי לבדוק אם נקודות הקיצון הן מינימום או מקסימום, נחשב את **הנגזרת השנייה** של הנגזרת **הראשונה** שהיא הנגזרת השלישייה של הפונקציה.

$$f'''(x) = 8 \cos 2x$$

$$f''' \left( -\frac{\pi}{12} \right) = 8 \cos \left( -2 \cdot \frac{\pi}{12} \right) = 6.93 > 0$$

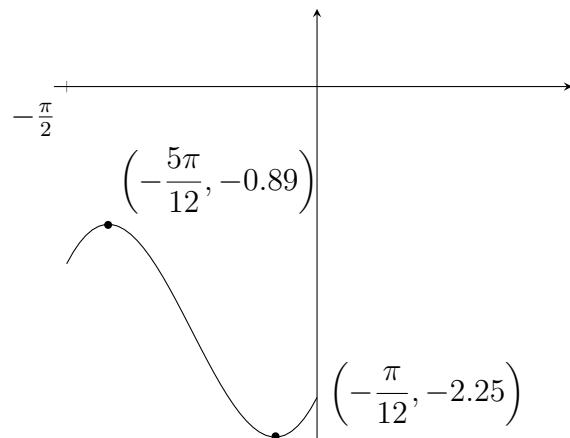
$$f''' \left( -\frac{5\pi}{12} \right) = 8 \cos \left( -2 \cdot \frac{5\pi}{12} \right) = -6.93 < 0.$$

מכאן שהSHIPועו הגדול ביותר נמצא ב-  $x = -\frac{5\pi}{12}$ , והSHIPועו הקטן ביותר נמצא ב-  $x = -\frac{\pi}{12}$ .  
משמעותו לב שהשאלה מבקשת את **ערך הקיצון של השיפועים** ולא רק איפה הם נמצאים:

$$f' \left( -\frac{5\pi}{12} \right) = 2 \cdot -\frac{5\pi}{12} - 2 \cos \left( -\frac{5\pi}{6} \right) = -2.62 + 1.73 = -0.89$$

$$f' \left( -\frac{\pi}{12} \right) = 2 \cdot -\frac{\pi}{12} - 2 \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) = -0.52 - 1.73 = -2.25.$$

### סעיף ב



### סעיף ג

(1) נקודות הפיתול הן הנקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת  $\cdot \left( -\frac{5\pi}{12}, 2.21 \right)$  ו-  $\left( -\frac{\pi}{12}, 0.569 \right)$

עבור הערך  $-\frac{5.5\pi}{12}$  שהוא מעט קרוב יותר ל-  $-\frac{\pi}{2}$  הנגזרת השנייה היא:

$$f'' \left( -\frac{5.5\pi}{12} \right) = 2 + 4 \sin \left( 2 \cdot -\frac{5.5\pi}{12} \right) = 0.965 > 0,$$

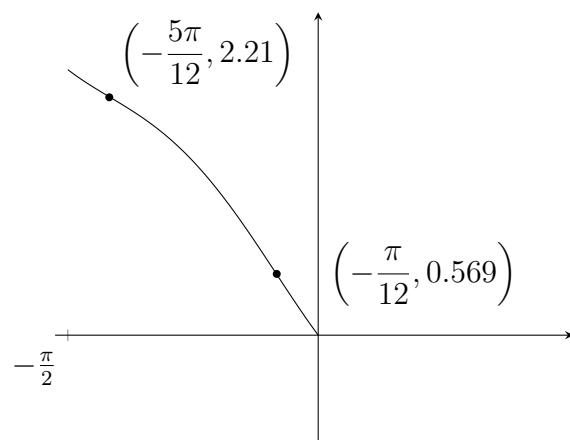
והפונקציה קעורה כלפי מעלה ב-  $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{5\pi}{12}$ .  
עבור הערך  $-\frac{\pi}{4}$  שהוא בין שתי נקודות הפיתול, הנגזרת השנייה היא:

$$f'' \left( -\frac{\pi}{4} \right) = 2 + 4 \sin \left( 2 \cdot -\frac{\pi}{4} \right) = -2 < 0,$$

והפונקציה קעורה כלפי מטה ב-  $x < -\frac{\pi}{12}$   
 עברו הערך  $-\frac{\pi}{24}$  שהוא מעט קרוב יותר ל-0 הנגזרת השנייה היא:

$$f''\left(-\frac{\pi}{24}\right) = 2 + 4 \sin\left(2 \cdot -\frac{\pi}{24}\right) = 0.965 > 0,$$

והפונקציה קעורה כלפי מעלה ב-  $x < 0$   
 נקודות הפיתול מסומנות. (2)



## 6.9 חורף תשע"ו

נתונה הפונקציה  $f(x) = a \cdot \sin^2 x + b \cdot \cos(4x)$  בתחום  $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ . ורט  $a$  ו- $b$  הם פרמטרים.

לפונקציה  $f(x)$  יש קיצון בנקודת שבה  $x = \frac{\pi}{3}$ . נתון כי  $b < 0$ .

א. הבע באמצעות  $b$  (במידת הצורך) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גורף הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון.

ג. סרטט סקיצה של גורף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  בתחום הנתון.

ד. (1) מצא את הערך של האינטגרל  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} f''(x) dx$ . (2)

בתחום  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ , הגורף של פונקציית הנגזרת השנייה  $f''(x)$  חותך את ציר ה- $x$  בנקודה אחת שבה  $x = k$ .

בתחום  $k \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , השטח המוגבל על ידי הגורף של  $f''(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישר  $x = \frac{\pi}{2}$ , שווה ל-  $S$ .

הבע באמצעות  $S$  את השטח המוגבל על ידי הגורף של  $f''(x)$ , על ידי ציר ה- $x$

�על ידי הישר  $x = \frac{2\pi}{3}$ .  $k \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$  נמק.

הערה: אין צורך למצוא את  $f''(x)$ .

### סעיף א

נחשב את הנגזרת הראשונה, נציב  $x = \frac{\pi}{3}$ , ונבדוק אם היא מתאפסת?

$$f'(x) = 2a \sin x \cos x - 4b \sin 4x$$

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2a \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - 4 \sin \frac{4\pi}{3} \\ &= 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - 4b \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$a = -4b.$$

השאלה מבקשת את נקודות הקיצון באמצעות  $b$  ולכן נציב עבור  $a$ :

$$f'(x) = -8b \sin x \cos x - 4b \sin 4x = 0.$$

המשווה נראית די מסובכת אבל ניתן לפשט אותו על ידי שימוש בנוסחה עבור  $\sin(\theta + \theta)$ :

$$\begin{aligned} -8b \sin x \cos x - 4b \sin 4x &= -4b(2 \sin x \cos x + \sin(2x + 2x)) \\ &= -4b(\sin 2x + 2 \sin 2x \cos 2x) \\ &= -4b \sin 2x(1 + \cos 2x) = 0. \end{aligned}$$

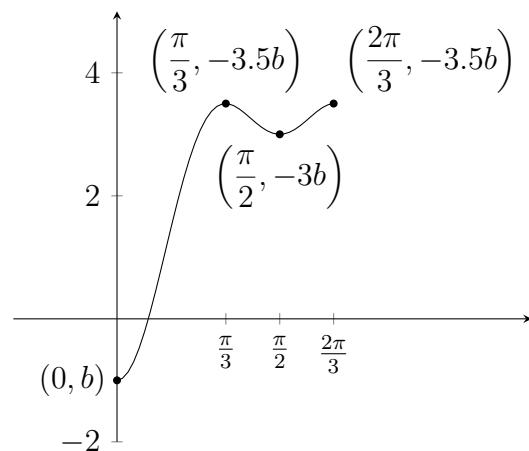
נבדוק כל אחד משני הגורמים כדי לחפש איפה הם מתאפסים בתחום. כאשר  $\sin 2x = 0$  נובט  $2x = k\pi$ , כלומר  $x = \frac{k\pi}{2}$ . בתחום האפשריות הן  $1 + \cos 2x = 0$ , כלומר  $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ . נשים  $2x = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \dots$ . נחשב את נקודות הקיצון:

$$\begin{aligned} f(0) &= -4b \sin^2 0 + b \cos 0 = b \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -4b \sin^2 \frac{\pi}{3} + b \cos \frac{4\pi}{3} = -4b \cdot \frac{3}{4} + b \cdot -\frac{1}{2} = -3.5b \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -4b \sin^2 \frac{\pi}{2} + b \cos \frac{4\pi}{2} = -4b + b = -3b \\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= -4b \sin^2 \frac{2\pi}{3} + b \cos \frac{8\pi}{3} = -4b \cdot \frac{3}{4} + b \cdot -\frac{1}{2} = -3.5b. \end{aligned}$$

אליה כל נקודות הקיצון כולל בקצות התחום והפונקציה מוגדרת בכל התחום. נתון  $0 < b$ , ולכן:

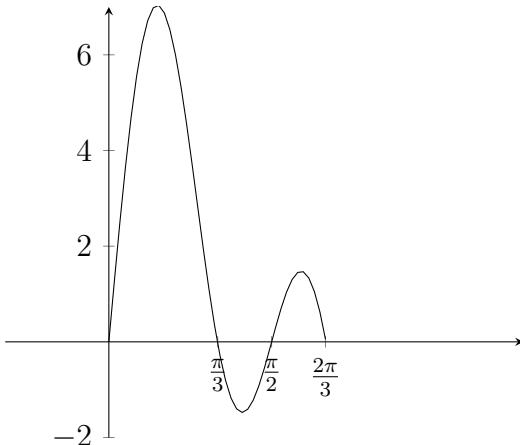
$(0, b)$ ,  $\left(\frac{\pi}{3}, -3.5b\right)$ ,  $\left(\frac{\pi}{2}, -3b\right)$ , מינימום,  $\left(\frac{2\pi}{3}, -3.5b\right)$ , מקסימום

## סעיף ב



## סעיף 5

בארכבעת נקודות הקיצון הנגזרת הראשונה היא אפס. מעיון הגרף של  $f(x)$ , השיפוע מתחילה באפס, עולה וاز' יורדת שוב לאפס, אח"כ יורדת עוד ועולה, ולבסוף עולה עוד יורדת.



## סעיף 7

(1)

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} f''(x) dx &= f'(x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \\
 &= -4b \sin \frac{4\pi}{3} \left( 1 + 2 \cos \frac{4\pi}{3} \right) + 4b \sin \frac{2\pi}{2} \left( 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{2} \right) \\
 &= -4b \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} \left( 1 + 2 \cdot -\frac{1}{2} \right) + 4b \sin 0 (1 + 2 \cdot -1) \\
 &= 0 + 0 = 1.
 \end{aligned}$$

(2) ב-(1) חישבנו שהאינטגרל על כל התוחום מ- $\frac{\pi}{2}$  ל- $\frac{2\pi}{3}$  הוא 0. השטח הראשוני, האינטגרל מ- $\frac{\pi}{2}$  ל- $k$ , הוא  $S$ . لكن השטח השני, האינטגרל מ- $k$  ל- $\frac{2\pi}{3}$ , הוא  $.0 - S = -S$ .

## 6.10 קיז תשע"ה מועד ב

נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$ , ונתון התחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , ונתון הגדירה של הפונקציה  $f(x)$ .

בתחום הנתון ענה על הסעיפים א' ו-ב'.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) האם הפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית או אי-זוגית? נמק.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גורף הפונקציה  $f(x)$ .

ב. נתונה הפונקציה  $a - f(x) = g(x)$ .

(1) מצא את הערכים האפשריים של  $a$  שעבורם יש

$f(x) - a = 0$  פתרון אחד בלבד.

(2) סרטט סקיצה של גורף הפונקציה  $g(x)$  עבור כל אחד מהערכים של  $a$  שמצוות

בתת-סעיף ב(1).

### סעיף א'

(1) הערכים שמאפסים את המכנה הם:

$$\sin 0 = 0, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos -\frac{\pi}{2} = 0.$$

תחום ההגדרה הוא:

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

(2) הפונקציה סינוס היא אי-זוגית והפונקציה קוסינוס היא זוגית. המכפלה שלן היא אי-זוגית.

(3)

$$((\sin x \cos x)^{-1})' = -1 \cdot (\sin x \cos x)^{-2} (\sin x \cos x)'.$$

בתחום ההגדרה המכנה חיובי, כך שנאשר רק לבדוק אם המונה יכול להתaffle.

$$-(\sin x \cos x)' = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = (\sin^2 x - \cos^2 x) = 0.$$

נקודות הקיצון הם ערכי מוחלט של סינוס שווה לערך מוחלט של קוסינוס, שהם  $\frac{\pi}{4} \pm k \cdot \frac{\pi}{2}$ . בתחום ההגדרה:

$$x = \frac{\pi}{4}, \quad y = \frac{1}{(\sqrt{2}/2) \cdot (\sqrt{2}/2)} = 2, \quad x = -\frac{\pi}{4}, \quad y = \frac{1}{(-\sqrt{2}/2) \cdot (\sqrt{2}/2)} = -2.$$

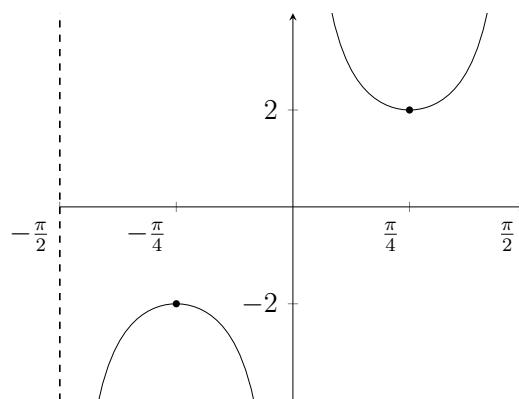
המכנה של הנגזרת הראשונה הוא  $(\sin x \cos x)^2$ , ערך חיובי בתחום ההגדרה, ולכן, סימן הנגזרת השנייה הוא כסימן הנגזרת של המוניה.

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)' = 2 \sin x \cos x - 2 \cos x (-\sin x) = 4 \sin x \cos x.$$

עבור  $x = \frac{\pi}{4}$  והנקודה היא מינימום.

עבור  $x = -\frac{\pi}{4}$  והנקודה היא מקסימום.

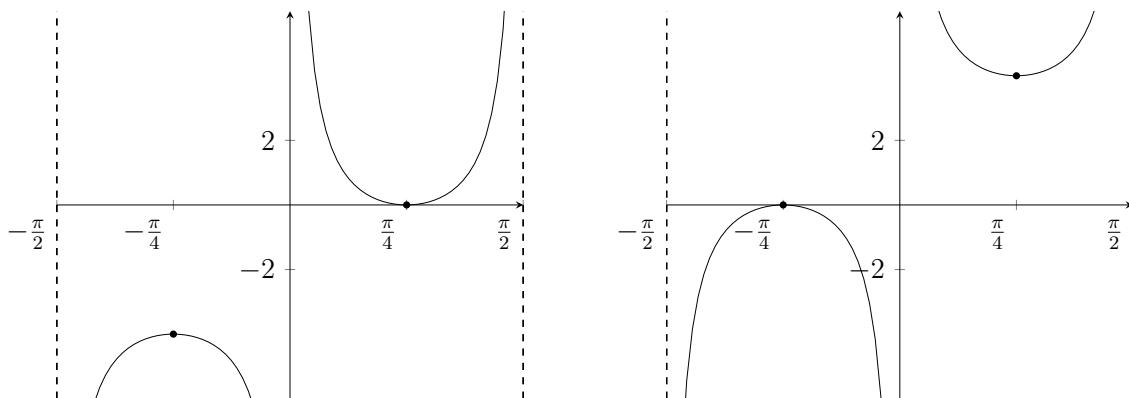
(4)



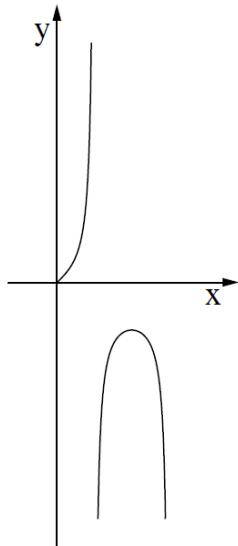
## סעיף ב

(1) למשוואת פתרון אחד אם הגרף משיק לציר ה- $x$  או חותך את הציר במקום אחד בלבד (לא קורה כאן). הגרף משיק כאשר  $a = \pm 2$ , שמעלה או מוריד את הגרף בשתי ייחיות.

(2)

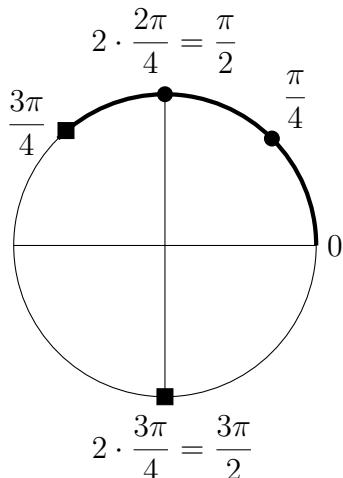


## 6.11 קיז' תשע"ה מועד א



נתונה הפונקציה  $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$   $f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$  ונתון התחום  
(ראה ציור).

- ענוה על הטעיפים א, ב וג' עבור התחום הנתון.
- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
  - (2) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה  $f(x)$ .
  - (3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן על פי הציור.
- ב. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .
- ג. נתונה הפונקציה  $g(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$ . המקיים:  
מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $g(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישר  $x = \frac{\pi}{6}$ .



### סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדרת כאשר  $\cos 2x = 0$ . בתחום הנתון, רואים בתרשים שזה קורה עברו  $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ . תחום ההגדרה הוא:

$$0 \leq x < \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}.$$

(2) האסימפטוטות הן בערכי ציר ה- $x$  בהם הפונקציה לא מוגדרת:  $x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$ .

(3) יש נקודת קיצון בקצתה התחום  $(0, 0)$ . נחשב את הנגזרת כדי לחפש את נקודת קיצון הפנימית המופיעה בתרשים:

$$\left( \frac{\sin x}{\cos 2x} \right)' = \frac{\cos x \cos 2x - \sin x(-2 \sin 2x)}{\cos^2 2x}.$$

בתוחם ההגדרה המכנה חיובי וכך הנגזרת מתאפס אם המונה יתאפס:

$$\begin{aligned} \cos x \cos 2x + 2 \sin x \sin 2x &= \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \sin x \cdot 2 \sin x \cos x \\ &= \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x + 4 \sin^2 x) \\ &= \cos x((\cos^2 x + \sin^2 x) + 2 \sin^2 x) \\ &= \cos x(1 + 2 \sin^2 x). \end{aligned}$$

בתוחם ההגדרה  $\cos x$  מתאפס כאשר  $x = \frac{\pi}{2}$ , אך פעמי לא מתאפס. נקודת הקיצון היא  $(\frac{\pi}{2}, -1)$ . לפי הظיר מדבר במקסימום מקומי.

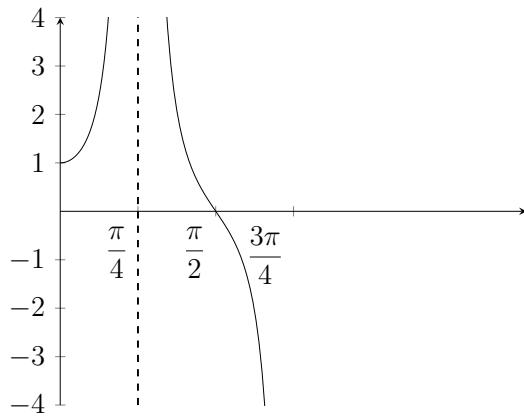
### סעיף ב

$$f'(x) = \frac{\cos x(1 + 2 \sin^2 x)}{\cos^2 2x}.$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad \text{ובסעיף הקודם חישבנו ש-}$$

המכנה של  $f'(\frac{\pi}{4})$  שווה לאפס, והמונה שונה מאפס, ולכן ב- $\frac{\pi}{4}$  יש אסימפטוטה אנכית.

בתרשים הנתון ל-(x)  $f(x)$  רואים שהשיפוע (הנגזרת הראשונה של הפונקציה) עולה בין  $0$  ל- $\frac{\pi}{4}$ , ושהיא יורדת בין  $\frac{\pi}{4}$  ל- $\frac{3\pi}{4}$ . התרשים ל-(x)  $f'(x)$  נראה כך:

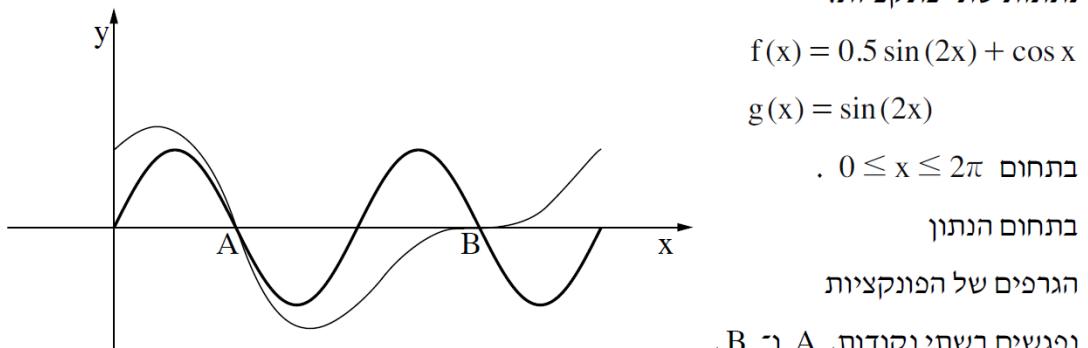


### סעיף ג

$$(f^2(x))' = 2f(x) \cdot f'(x) \quad \text{ולכן:}$$

$$\int_0^{\pi/6} g(x) dx = \int_0^{\pi/6} 2f(x) \cdot f'(x) dx = f^2(x) \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(2\pi/6)} - \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{1/2}{1/2} - \frac{0}{1} = 1.$$

## 6.12 חורף תשע"ה



בתחום הנתון

הגרפים של הפונקציות

נפגשים בשתי נקודות, A ו- B.

הנמצאות על ציר ה- x, כמתואר בציור.

א. דרך נקודה על ציר ה- x, הנמצאת בין הנקודות A ו- B, מעבירים אנך לציר ה- x.

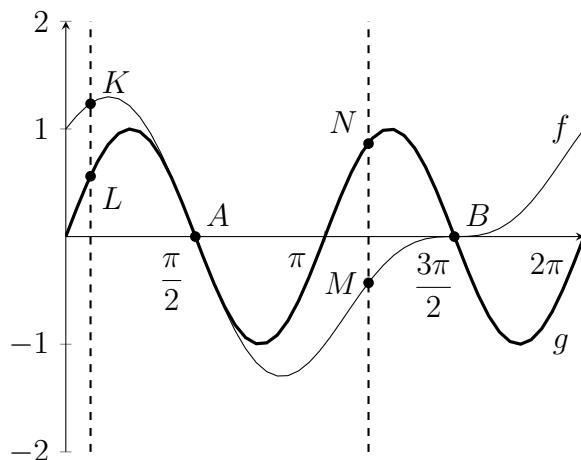
האנך חותך את הגרפים של הפונקציות  $(x)f$  ו-  $(x)g$  בנקודות M ו- N.

מצא את האורך המקסימלי של הקטע MN.

ב. דרך נקודה על ציר ה- x, הנמצאת בתחום  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , מעבירים אנך לציר ה- x.

האנך חותך את הגרפים של הפונקציות  $(x)f$  ו-  $(x)g$  בנקודות K ו- L.

מצא את האורך המקסימלי של הקטע KL.



### סעיף א

הgraf המודגש הוא  $g$  בغالל המשוריות, אבל נבדוק על ידי חישוב נקודות החיתוך עם ציר ה- x. בתחום כאשר  $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$   $\sin 2x = 0$  וرك McGraff המודגש יש חמישה נקודות חיתוך.

נחשב את הנגזרת של ההפרש בין הפונקציות:

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= \sin 2x - 0.5 \sin 2x - \cos x = 0.5 \sin 2x - \cos x \\ (g(x) - f(x))' &= \cos 2x + \sin x = (1 - 2 \sin^2 x) + \sin x. \end{aligned}$$

נקודות החיתוך של  $f, g$  ב- $A, B$  עם ציר ה- $x$  הן נקודות השניה והרביעית של  $g$  שהן  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ . נבדוק:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0.5 \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 0 + 0 = 0 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 0.5 \sin 2 \cdot \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2} = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

נחשב מתי הנגזרת הראשונה של הפרש הפונקציות מתאפסת בתחום  $:A = \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} = B$

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$(2 \sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = 1, -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}.$$

נקודות הקיצון המבוקשת. המשקנה היא שנקודות הקיצון של  $g - f$  בין  $A$  ל- $B$  היא ב- $x = \frac{7\pi}{6}$  ו- $\frac{11\pi}{6}$ . נבדוק שנקודה זו היא באמות מקסימום על ידי חישוב הנגזרת השניה:

$$(1 - 2 \sin^2 x + \sin x)' \Big|_{\frac{7\pi}{6}} = (-4 \sin x + 1) \cos x \Big|_{\frac{7\pi}{6}} = -\left(4 \cdot -\frac{1}{2} + 1\right) \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0,$$

ולכן:

$$g\left(\frac{7\pi}{2}\right) - f\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{7\pi}{3} - \cos \frac{7\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

הוא האורך המקסימלי של  $MN$ .

## סעיף ב

נקודות חיתוך של שליליה של פונקציה על ציר ה- $x$  זהים לנקודות החיתוך של הפונקציה (ראו בנספח). לכן נקודות האיפוס של  $(f(x) - g(x))'$  הן נקודות האיפוס של  $(g(x) - f(x))'$ , שהן הערכים עבורם  $\sin 2x = 1, -\frac{1}{2}$ . בתחום  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , נקודות האיפוס הן ב- $x = 0, \frac{\pi}{2}$ . נחשב:

$$f(0) - g(0) = -(0.5 \sin(2 \cdot 0) - \cos 0) = -(0 - 1) = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(0.5 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \cos \frac{\pi}{2}\right) = -(0 - 0) = 0,$$

והאורך המקסימלי של  $KL$  הוא 1 כאשר  $x = 0$ .

## 6.13 קיז תשע"ד מועד ב

$$f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$$

$$g(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$$

א. (1) לשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה.

מצא את תחום ההגדרה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  עם הצירים.

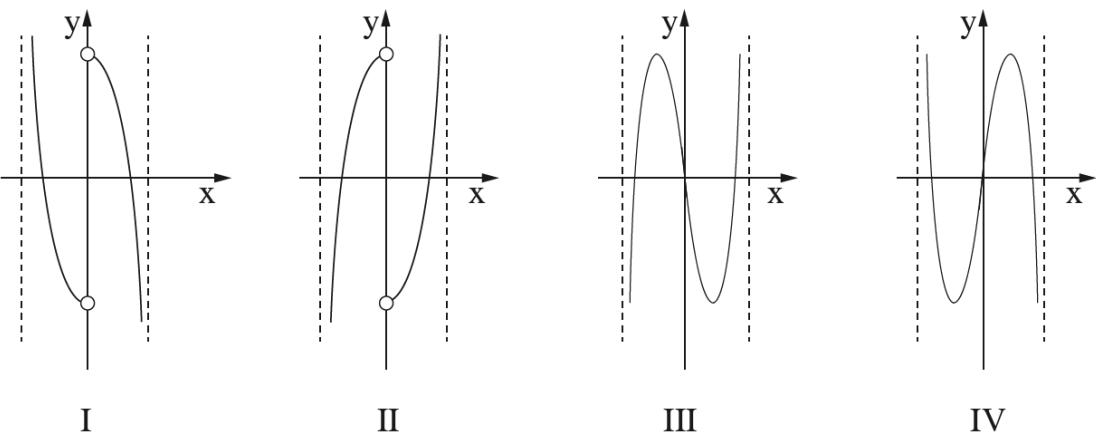
ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של כל אחת מהפונקציות, וקבע את סוגן.

ג. על פי הסעיפים א ו-ב, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ד. וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

ד'. לפניך ארבעה גרפים, I-IV.

איזה מהגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת  $(x^2 - 8)^{-1/2}$ ? נמק.



### סעיף א

(1) הפונקיות מוגדרת כאשר ביטוי בשורש לא שלילי. עבור  $f$  אם  $0 \leq x^2 - 8$  ותחום ההגדרה הוא  $-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$ .

עבור  $g$  אם  $0 \leq x^4 - 8^2$  ותחום ההגדרה מורכב מ- $-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$  ו- $x = 0$ . אבל  $x = 0$  נמצא בתחום הראשון כך שהוא לא מושיף ערכיים, ותחומי ההגדרה של  $f, g$  זהים.

(2) עבור  $f$ : אם  $x = 0, y = 0$ , ונקודת החיתוך עם ציר ה- $x$  היא  $(0, 0)$ . ואם  $x = 0, y = 0$ , ונקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  היא  $(0, 0)$ .

עבור  $g$ : אם  $x = 0, y = 0$ ,  $\sqrt{8x^2 - x^4} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{8 - x^2} = 0$  עבור אותם ערכים  $\pm\sqrt{8}$ . ונקודות החיתוך הן אותן נקודות שקיבלנו עבור  $f$ .

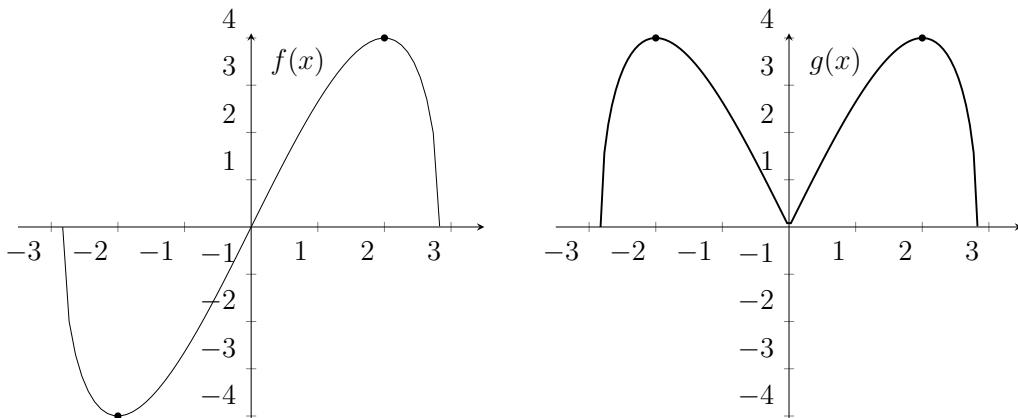
## סעיף ב

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 \cdot \sqrt{8-x^2} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{8-x^2}} \cdot (-2x) \\
 &= \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}} \\
 g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{8x^2-x^4}} \cdot (16x-4x^3) \\
 &= \frac{8x-2x^3}{\sqrt{8x^2-x^4}} = \frac{x(8-2x^2)}{\sqrt{8x^2-x^4}}.
 \end{aligned}$$

פרט ל- $\pm\sqrt{8}$ , בוחן הפונקציות לא מוגדרות, המכנה חיובי והנגזרות יתאפסו כאשר המונה יתאפס.  
 עבור  $f$  הנקודות הן  $(-2, -4)$ ,  $(2, 4)$ . בנקודות הקצה ערכי הפונקציה הם  $(\pm\sqrt{8}, 0)$ , ולכן  $(-2, -4)$  היא מינימום אבסולוטי ו- $(2, 4)$  היא מקסימום אבסולוטי.  
 עבור  $g$  הנקודות הן  $(0, 0)$ ,  $(-2, 4)$ ,  $(2, 4)$ . בנקודות הקצה ערכי הפונקציה הם  $(\pm\sqrt{8}, 0)$ , ולכן  $(-2, 4)$ ,  $(2, 4)$  הן מינימום אבסולוטי ו- $(0, 0)$ ,  $(\pm\sqrt{8}, 0)$  הן מקסימום אבסולוטי.

## סעיף ג

נתבוס על תחומי ההגדרה ונקודות הקצה של הפונקציות כדי לצייר את התרשימים:



## סעיף ד

$$g'(x) = \frac{x(8-2x^2)}{\sqrt{8x^2-x^4}}$$

לא מוגדר באפס, ולכן אפשר לפסול III, IV.

מהתרשים עבור  $g(x)$  או לפי חישוב ערכים לפני ואחרי נקודות הקיצון, רואים ש:  $g(x)$  עולה וازורדת כאשר מתקרבים לציר ה- $y$  משמאלו, ולכן  $(x)'$  חיובית ו- $g$  שלילית כאשר מתקרבים לציר.  $g(x)$  עולה ו- $g$  יורדת כאשר מתרכחים מציר ה- $y$  לימינו, ולכן  $(x)'$  חיובית ו- $g$  שלילית כאשר מתרכחים מימינו. הgraf I מתאר את הפונקציה.

## 6.14 קיז תשע"ד מועד א

.  $0 \leq x \leq \pi$  ,  $g(x) = \sin(2x)$  ,  $f(x) = 2 \sin^2 x$  בתוחם

א. בתחום הנתון מצא:

(1) את שיעורי  $x$  של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.

(2) את נקודות החיתוך של כל אחת משתי הפונקציות עם ציר  $x$ .

$$\text{ב. (1)} \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad h(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$$

$$\text{הראה כי } h'(x) = f(x).$$

(2) בתחום  $\pi \leq x \leq 0$  מצא את השטח הכלוא בין הגרפים

של שתי הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$ .

### סעיף א

(1) בזרור שערבי הפונקציות שוויים ב- $\pi$ ,  $x = 0$  כי  $\sin 0 = \sin \pi = 0$ . נחפש פתרונות אחרים כאשר נניח ש- $\sin x \neq 0$  כדי לחלק ב- $\sin x$ :

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 x &= \sin 2x = 2 \sin x \cos x \\ \sin x &= \cos x \\ x &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

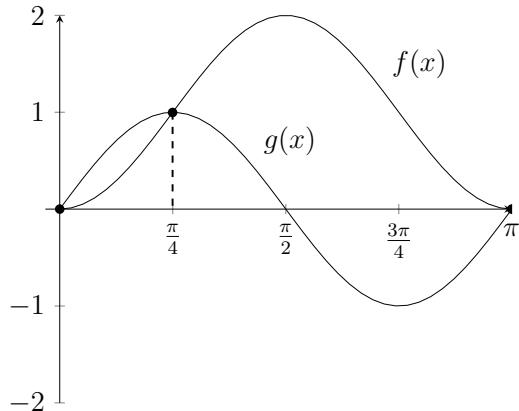
(2) ראיינו שתי הפונקציות ערך אפס ב- $\pi$ , 0. נחפש ערכים אחרים בתחום. עבור  $f$ :  $2 \sin^2 x = 0$  רק כאשר  $x = 0, \pi$ , ולכן אין נקודות חיתוך נוספות עם ציר  $x$ . עבור  $g$ :  $\sin 2x = 0 + k\pi$  כאשר  $2x = 0 + k\pi$  גם ב- $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ .

### סעיף ב

(1)

$$\begin{aligned} h(x)' &= \left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)' = 1 - \frac{2 \cos 2x}{2} = 1 - \cos 2x \\ &= 1 - (\cos^2 x - \sin^2 x) = (1 - \cos^2 x) + \sin^2 x \\ &= 2 \sin^2 x = f(x). \end{aligned}$$

(2) מהתרשים להלן אנו רואים שהשטח מורכב משני קטעים, מ-0 עד  $\frac{\pi}{4}$ , ומן  $\frac{\pi}{4}$  עד  $\pi$ .



בסעיף זה יש מתנה: כדי לחשב את האינטגרל של  $f(x)$  נוכל להשתמש בפונקציה  $h(x)$  הנתונה:

$$h(x) = x - \frac{\sin 2x}{2} = \int h'(x) = \int f(x).$$

השטח הראשון הוא:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - f(x)) dx &= \left. \frac{-\cos 2x}{2} - \left( x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \right|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left( 0 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) - \left( -\frac{1}{2} - 0 + 0 \right) = -\frac{\pi}{4} + 1. \end{aligned}$$

השטח השני הוא:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (f(x) - \sin 2x) dx &= \left. \left( x - \frac{\sin 2x}{2} \right) - \frac{-\cos 2x}{2} \right|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\ &= \left( \pi - 0 + \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{3\pi}{4} + 1. \end{aligned}$$

השטח הכללי הוא:

$$S = -\frac{\pi}{4} + 1 + \frac{3\pi}{4} + 1 = \frac{\pi}{2} + 2.$$

## 6.15 חורף תשע"ז

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x^2 - x + a} . \quad a \text{ הוא פרמטר גדול מ-1} .$$

הfonקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$ .

א. (1) מצא את האסימפטוטות של  $f(x)$  המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

(הבע באמצעות  $a$  במידה הצורך).

(3) ידוע כי גраф הפונקציה  $f(x)$  חותך את ציר ה- $x$  בשתי נקודות בדיזוק.

סרטט סקיצה של גраф הפונקציה  $f(x)$ .

ב. בתחום  $0 \leq x$ , השטח המוגבל על ידי הגраф של  $f(x)$ , על ידי הישר  $x = 1$

ועל ידי ציר ה- $x$ , שווה ל-  $\frac{1}{2}$ .

חשב את נקודות החיתוך של גраф הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  (מצא ערכים מספריים).

**בבחינה זו היו שלוש שאלות בפרק השני לבן מספר השאלה הוא 7 ולא 6.**

נתון שהfonקציה מוגדרת לכל  $x$  אבל מתחשך לי לוודא שזה נכון. אם נשווה את המכנה לאפס נקבל משווה ריבועית שפתרונה היא:

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2} .$$

נתון ש-  $-1 > a$  אז אין פתרונות ממשיים לשוויה.

### סעיף א'

(1) הפונקציה מוגדרת לכל  $x$  אז אין אסימפטוטות אנכיות.

נחלק את הפונקציה בחזקה הגדולה ביותר ונקבל:

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{a}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{a}{x^2}}$$

ששווה ל- 1 כאשר  $x \rightarrow \pm\infty$ . האסימפטוטה האופקית היא  $y = 1$ .

(2) נחשב את הנגזרת הראשונה:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2-x+a) - (x^2+x-a)(2x-1)}{(x^2-x+a)^2} = \frac{-2x^2 + 4xa}{(x^2-x+a)^2} .$$

המכנה חיובי ולכן הנגזרת תתאפס כאשר  $2x^2 = 4ax$ . נקודות הקיצון הן:

$$(0, -1), \quad \left(2a, \frac{4a+1}{4a-1}\right).$$

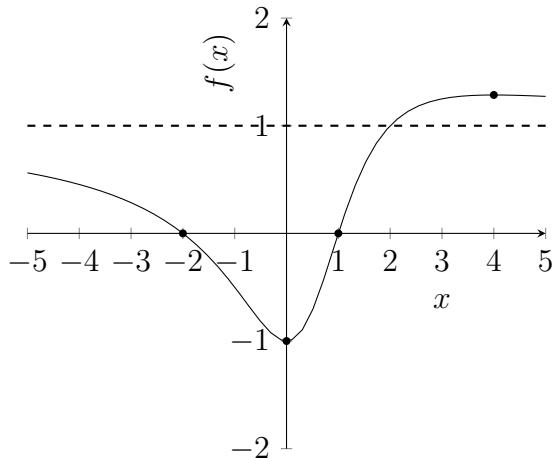
המכנה של הנגזרת הראשונה חיובית ולכן מספיק לבדוק את הסימן של הנגזרת של המוניה:

$$(-2x^2 + 4ax)' = -4x + 4a$$

$b^-0 : x = -4x + 4a < 0$  – חיובי כי נתון  $-1 > a$ , ולכן נקודת הקיצון היא מינימום.

$b^-2a : x = 2a < -8a + 4a = -4a$  – שלילי כי נתון  $-1 > a$ , ולכן נקודת הקיצון היא מקסימום.

(3) קיימים מינימום ב- $(-1, 0)$  ואסימפטוטה אופקית ב- $y = u$ . לפי הנתון שיש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- $x$ , הגראף עולה מנקודת המינימום וושאך לאינסוף ב- $x = u$ . נשאר רק להחליט אם נקודת המקסימום היא מעל לאסימפטוטה או מתחתיה. אבל אם  $1 > a > \frac{4a+1}{4a-1}$  אז נקודת המקסימום נמצאת מעל לאסימפטוטה.



## סעיף ב

נחשב את האינטגרל של הנגזרת הראשונה הוא הפונקציה עצמה:

$$\left| \int_{-1}^0 -f'(x) dx \right| = \left| f(x) \Big|_{-1}^0 \right| = |f(0) - f(-1)| = \left| -1 - \frac{-a}{a+2} \right| = \left| \frac{-2}{a+2} \right|.$$

נתון שהשטח שווה ל- $\frac{1}{2}$  ולכן  $a = 2$ . ערכי ה- $x$  של נקודות החיתוך הם הפתרונות של:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

שהם  $x = 1, x = -2$ . נקודות החיתוך הן  $(1, 0), (-2, 0)$ .

# פרק 7 חדי"א שאלה 7

## 7.1 קיז תשע"ח מועד ב

נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ .

**a.** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ ?

ענה על הסעיפים ב-ה עבור התחום  $x \geq \frac{2}{7}$ .

**b.** מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ .

**c.** מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

**d.** לפונקציה  $f(x)$  יש אסימפטוטה אופקית. מצא את משווהת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה  $f(x)$ .

**e.** סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ענה על סעיף ו עבור התחום  $x > 0$ .

**f.** נסתכל על נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ .

לפניך 3 טענות (i-iii). אחות מהן נכונה. Aiyo מהן היא הנכונה? נמק.

(i) ככל שמתקרבים ל- $x = 0$ , המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וקטן.

(ii) המרחק בין כל שתי נקודות חיתוך סמוכות נשאר קבוע.

(iii) ככל שמתקרבים ל- $x = 0$ , המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך ונידל.

### סעיף א

הfonקציה מוגדרת כאשר במכנה  $0 \neq x$ .

### סעיף ב

$$\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0, \quad \frac{\pi}{x} = k\pi, \quad x = \frac{1}{k}.$$

נבדוק עבור כמה ערכי של  $[k, x]$

$$[1, 1], \quad \left[2, \frac{1}{2}\right], \quad \left[3, \frac{1}{3}\right], \quad \left[4, \frac{1}{4}\right].$$

אבל  $0.286 \approx \frac{2}{7}$  כז שעבור  $k \geq 4$ , הנקודות מחוץ לתחום. נקודות החיתוך הן:

$$\left(\frac{1}{3}, 0\right), \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad (1, 0).$$

### סעיף ג

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) = 0.$$

הגורם  $-\frac{\pi}{x^2}$  לא יכול לקבל ערך אפס, ולכן נקודות הקיצון הן הנקודות:

$$\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{2} + k, \quad x = \frac{2}{1+2k}.$$

נבדוק עבור כמה ערכים של  $[k, x]$ :

$$[0, 2], \left[1, \frac{2}{3}\right], \left[2, \frac{2}{5}\right], \left[3, \frac{2}{7}\right].$$

ברור שעבור  $k \geq 4$  הנקודות מחוץ לתוחום.

לפי הערכים של  $f(x)$  אפשר לקבוע את סוג נקודות הקיצון:

$$\left(\frac{2}{7}, -1\right) \quad \left(\frac{2}{5}, 1\right) \text{ מקסימום} \quad \left(\frac{2}{3}, -1\right) \text{ מינימום}$$

אפשר לבדוק לפי נגזרת שנייה. המכנה של הנגזרת הראשונה  $x^2$  חיובית, ולכן מספיק לבדוק את הסימן של הנגזרת של המונה:

$$-\left(\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)' = -\left(-\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) = -\frac{\pi}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

מכאן שסימן הנגזרת השנייה תלוי בסימן של  $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ .

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1, \quad -\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -1, \quad -\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 1.$$

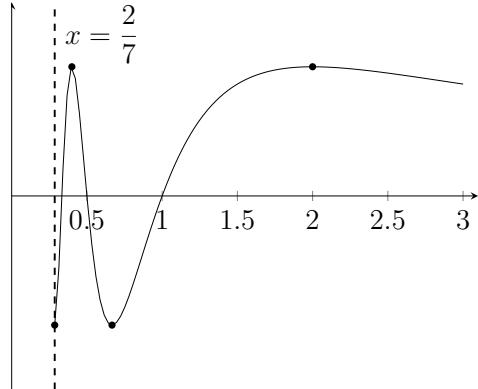
הסימנים תואמים את קביעת סוג נקודות הקיצון שרשמננו.

#### סעיף 7

$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ . יש אסימפטוטה אופקית ב- $y=0$ .

#### סעיף 8

נקודות הקיצון מסומנות:



#### סעיף 9

ככל ש- $x$  מתקרב לאפס  $k$  עולה. המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הוא  $\frac{1}{k}$ .

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)},$$

וברור שערך זה קטן ככל ש- $x$  מתקרב לאפס ו- $k$  עולה. המסקנה היא ש-(i) נכון.

## 7.2 קיז' תשע"ח מועד א

$f(x)$  היא פונקציה גזירה, המוגדרת לכל  $x$ , כך ש-  $f'(x) \neq 0$  לכל  $x$ .

**a.** הוכח שאם הפונקציה  $f(x)$  עולה בקטע מסוים, אז הפונקציה  $\frac{1}{f(x)}$  יורדת באותו הקטע;

ואם הפונקציה  $f(x)$  יורדת בקטע מסוים, אז הפונקציה  $\frac{1}{f(x)}$  עולה באותו הקטע.

נתונה הפונקציה  $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$ , המוגדרת לכל  $x$ .

**b.** האם קיים  $x$  שבבבבו  $0 = g(x)$ ? נמק.

**c.** (1) האם הפונקציה  $g(x)$  היא פונקציה זוגית? נמק.

(2) הראה שלכל  $x$  מתקיים:  $g(x) = g(x + 2\pi)$ .

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$  בתחום  $x \leq 0$ , וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גורף הפונקציה  $g(x)$  בתחום  $-\pi \leq x \leq 3\pi$ .

$$\text{נתונה הפונקציה } h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}.$$

עננה על סעיף ד. תוכל להיעזר בתשובה תרגיל על הסעיפים הקודמים.

**d.** (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $h(x)$ ? נמק.

(2) סרטט סקיצה של גורף הפונקציה  $h(x)$  בתחום  $\pi \leq x \leq -\pi$  – באותה מערכת צירים שבה סרטטת את

גורף הפונקציה  $g(x)$ .

### סעיף א

לכואורה הטיעון ברור מallow אבל כנראה נדרש להוכיח באמצעות הנגזרות:

$$\left( \frac{1}{f(x)} \right)' = -1 \cdot f(x)^{-2} \cdot f'(x).$$

נתון ש-  $f(x)$  מוגדרת בכל התחומים, ו-  $f'(x)$  חיובי בכל התחומים. הסימן של הפוך מהסימן של  $f'(x)$ , ולכן אם  $f(x)$  עולה  $\frac{1}{f(x)}$  יורדת, ולהיפך.

### סעיף ב

לכן  $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2 \geq 1$ .  $\cos x \geq -1$  ו-  $\sin^2 x \geq 0$  והפונקציה לא מותאמת.

### סעיף ג

(1) הפונקציה זוגית, כי  $\cos$  זוגית ו-  $\sin$  אי-זוגית, אבל  $\sin^2$  זוגית. בחישוב:

$$\sin^2(-x) + \cos(-x) + 2 = (-\sin x)^2 + \cos x + 2 = \sin^2 x + \cos x + 2.$$

$$g(x) = g(x + 2\pi) \text{ ולכן } \sin(x + 2\pi) = \sin x, \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad (2)$$

אפשר גם לחשב:

$$\begin{aligned} \sin^2(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) + 2 &= \\ (\sin x \cos 2\pi + \sin 2\pi \cos x)^2 + (\cos x \cos 2\pi - \sin x \sin 2\pi) + 2 &= \\ \sin^2 x + \cos x + 2. \end{aligned}$$

נחשב את הנגזרת הראשונה: (3)

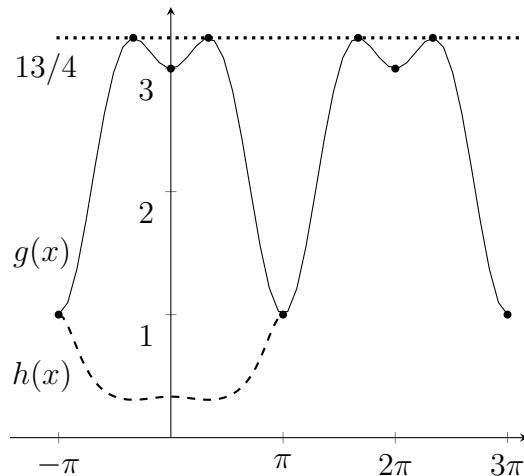
$$g'(x) = 2 \sin x \cos x - \sin x = \sin x(2 \cos x - 1) = 0.$$

בתוחם  $\sin x$  מתאפס ב- $x = 0, x = \pi$  ו- $2 \cos x - 1 = 0$ . נקודות הקיצון  $\frac{\pi}{3}$ . נחשב את הנגזרת השניה: חן  $(0, 3), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{13}{4}\right), (\pi, 1)$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \cos x(2 \cos x - 1) + \sin x(-2 \sin x) \\ &= 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - \cos x \\ &= 2 \cos^2 x - 2(1 - \cos^2 x) - \cos x \\ &= 4 \cos^2 x - 2 - \cos x. \end{aligned}$$

בנקודות הקיצון:  $g''(0) = 1$  והנקודה היא מינימום.  $g''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}$  והנקודה היא מינימום.  $g''(\pi) = 3$

(4) לפי נקודות הקיצון נצייר את הגרף עבור  $x \leq \pi$ . לפי (1) הפונקציה זוגית אז הגרף עבור  $x \leq -\pi$  זהה. לפי (2) הפונקציה מחזורית וניתן להעתיק את הגרף לתוחם  $0 \leq x \leq 3\pi$ .



#### סעיף ۴

(1) עבור כל  $x, f(x) > 0$ , ולכן עבור כל  $x, h(x) = \frac{1}{f(x)} > 0$  והפונקציה מוגדרת.

(2) ב- $-\pi \leq x \leq 0$  נקודות הקיצון יהיו  $\left(0, \frac{1}{3}\right), \left(\pm \frac{\pi}{3}, \frac{4}{13}\right)$ . תחום העלייה של  $h(x)$  הוא תחום הירידה של  $g(x)$  ולהיפך.

### 7.3 חורף תשע"ח

נתונה משפחת הפונקציות:  $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-a}$  כאשר  $a \neq 4$ ,  $a \neq 0$ .  $f(x)$  הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע באמצעות  $a$  במידת הצורך. הבחן בין  $0 > a$  ובין  $0 < a$  במידת הצורך.

- א. (1) מצא את תחום הגדרה של הפונקציה  $(x)$ .
- (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $(x)$  עם הצירים.
- (3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה  $(x)$  המקבילה לציר ה- $x$ .
- (4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $(x)$  המאונכות לציר ה- $x$  (אם יש כאלה).

ענה על סעיף ב. הבע באמצעות  $a$  במידת הצורך. הבחן בין  $4 > a$  ובין  $4 < a$  במידת הצורך.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $(x)$ , וקבע את סוגן.

#### סעיף ג של השאלה מופיע בהמשך.

#### סעיף א

(1) כאשר  $0 > a$ , הפונקציה לא מוגדרת עבור  $x = \pm\sqrt{a}$ , ערכיהם שמאפסים את המכנה.

כאשר  $0 < a$ , המכנה תמיד חיובי והפונקציה מוגדרת לכל  $x$ .

$$(2) \text{ חישוב נקודת החיתוך עם ציר ה-} y: f(0) = \frac{(-2)^2}{-a} = -\frac{4}{a}.$$

חישוב נקודת החיתוך עם ציר ה- $x$ : כאשר  $0 < a$ , המכנה חיובית והפונקציה מתאפסת כאשר נתון  $x = 2$ . ולכן גם כאשר  $0 < a < 4$ , המכנה לא מתאפסת ומוניה מתאפסת:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-a} = \frac{(x-2)(x-2)}{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}, \quad f(2) = 0.$$

היא אסימפטוטה אופקית:  $y = 1$  (3)

$$f(x) = \frac{1 - \frac{4x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{a}{x^2}} \xrightarrow{\pm\infty} 1.$$

(4) כאשר  $0 < a$  הפונקציה מוגדרת לכל  $x$  ואין אסימפטוטה.

כאשר  $0 > a$ : נתון  $\sqrt{a} \neq 2$  כך  $\sqrt{a} \neq 2$ , לכן המונה של הפונקציה לא מתאפסת כאשר  $x = \pm\sqrt{a} \rightarrow \pm\sqrt{a}$ . יש אסימפטוטות אנכיות.

#### סעיף ב

$$\begin{aligned} f'(x) = \left( \frac{(x-2)^2}{x^2-a} \right)' &= \frac{2(x-2)(x^2-a) - (x-2)^2 \cdot 2x}{(x^2-a)^2} \\ &= \frac{2(x-2)(2x-a)}{(x^2-a)^2}. \end{aligned}$$

נקודות הקיצון הן  $(2, 0)$ ,  $\left(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a}\right)$ .

נחשב את הסימן של הנגזרת של המונה של הנגזרת הראשונה:

$$(2(x-2)(2x-a))' = 8x - 2a - 8.$$

לפי ההנחה ב שאלה נבדוק בנפרד עבור ערכים חיוביים ושליליים של  $a$ .

עבור  $a > 4$

$8 \cdot 2 - 2a - 8 = 2(4 - a) < 0$  והוא מקסימום.

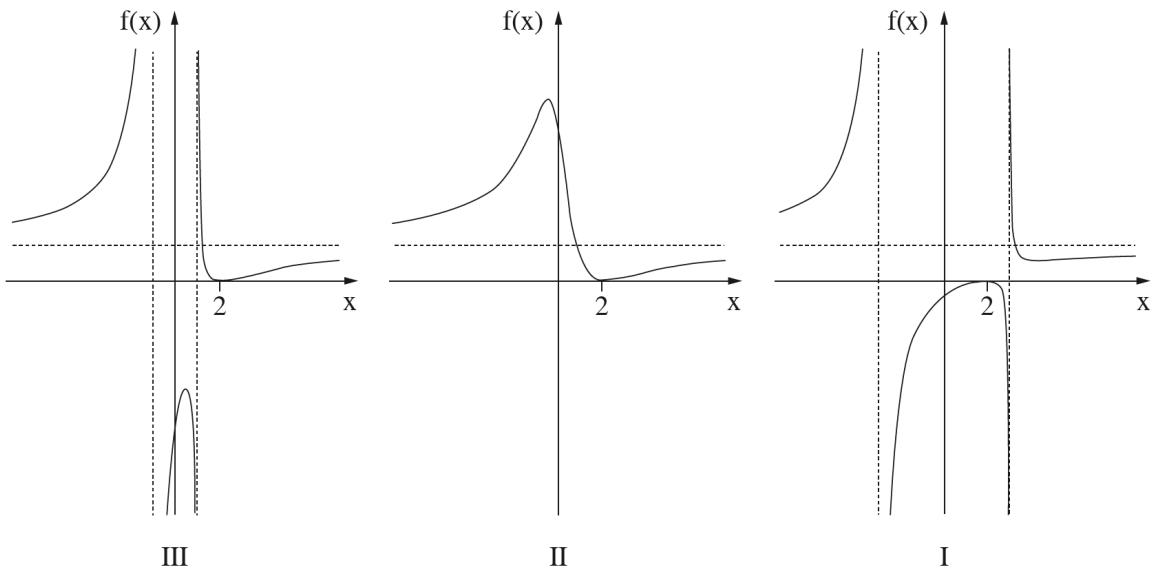
$8 \cdot \frac{a}{2} - 2a - 8 = 2(a - 4) > 0$  והוא מינימום.

עבור  $a < 4$  הטעמים מתחלפים ו- $(2, 0)$  הוא מינימום ו- $\left(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a}\right)$  הוא מקסימום.

### סעיף ג

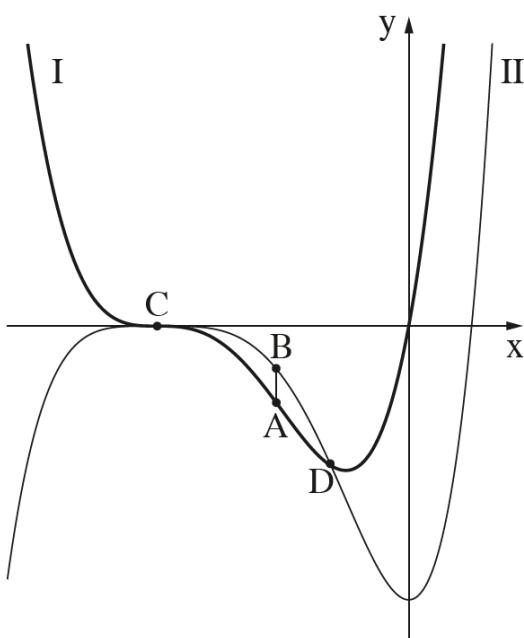
ג. לפניו שלושה גרפים אפשריים של הפונקציה  $f(x)$ , כל אחד עבור ערך אחר של  $a$ .

כתב מהו תחום הערכים של  $a$  המתאים לכל אחד מן הגרפים I-II-III. נמק את תשובה.



כאשר  $a > 4$  נקודות הקיצון ב- $(2, 0)$  היא מקסימום כפי שמצוין בגרף I. כאשר  $0 < a < 4$  הפונקציה מוגדרת כל  $-x$  כפי שמצוין בגרף II. כאשר  $a < 0$  נקודת הקיצון ב- $(2, 0)$  היא מינימום, ויש אסימפטוטות ב- $x = \pm\sqrt{-a}$  כפי שמצוין בגרף III.

## 7.4 קיצ' תשע"ז מועד ב



לפניך הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $f'(x)$ .

א. התאם בין הגרפים I ו- II

לבין הפונקציות  $f(x)$  ו-  $f'(x)$ . נמק.

נתון:  $f(x) = x(x + b)^3$  הוא פרמטר.  
לגרף הפונקציה  $f(x)$  יש נקודת פיתול ב-  $x = -1$ .

ב. מצא את  $b$ .

C ו- D הן נקודות החיתוך  
של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $f'(x)$   
בתחום  $0 < x$ , כמפורט בציור.

נקודות A ו- B נמצאות על הגרפים I ו- II  
בהתאם, כך שהישר AB מאונך לציר ה- x.

נתון:  $x_C < x_A < x_D$

$$x_C = -4$$

$$x_D = 1 - \sqrt{5}$$

ג. מצא את שיעור ה- x של הנקודות A ו- B שעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי  
(אפשר לפתרו את הסעיף בלי למצוא את הפונקציה  $f(x)$ ).

### סעיף א

הגרף I מתאפס בנקודת C שם לגרף II יש נקודת מקסימום. גраф I מתאפס ב-  $(0,0)$  שם לגרף II יש נקודת מינימום. לכן, II הוא הגרף של  $f(x)$  ו- I הוא הגרף של  $f'(x)$ .

### סעיף ב

בנקודת פיתול הנגזרת השנייה מתאפסת:

$$f''(x) = 1 \cdot (x + b)^3 + x \cdot 3(x + b)^2 = (x + b)^2(4x + b)$$

$$f''(-1) = (b - 1)^2(b - 4) = 0$$

$$b = 4,$$

כי נתון  $b > 1$ .

**סעיף ג**

הערך המקסימלי יתקבל כאשר הנגזרת של ההפרש מאפסת. הנגזרת הראשונה, הנגזרת של  $f(x) - f'(x)$  נתונה, והנגזרת השנייה, הנגזרת הראשונה חושבה בסעיף ב, שם קיבלנו ש- $b = 4$ :

$$\begin{aligned}(f(x) - f'(x))' &= x(x+4)^3 - (x(x+4))^3)' \\ &= x(x+4)^3 - (x+4)^2(4x+4) \\ &= (x+4)^2(x^2 - 4) = 0.\end{aligned}$$

**פתרונות** הם  $x = -4, x = \pm 2$

$x = -2$ , ולכן הפתרון היחיד בתחום הוא  $x_D = 1 - \sqrt{5} = -1.24$ ,  $x_C = -4$

## 7.5 קיז' תשע"ז מועד א

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (2) מצא את נקודות החיתוך של גраф הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.  
 (3) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה  $f(x)$ .  
 (4) מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).
- ב. סרטט סקיצה של גраф הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ .
- ג. נתון:  $\pi < a < \frac{\pi}{2}$ .  
 השטח המוגבל על ידי גраф הפונקציה  $f(x)$ , הישר  $x = a$  וציר ה- $x$  שווה ל-1.  
 מצא את  $a$ .

### סעיף א

- (1) הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה לא מתאפשר:  $x \neq n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ .  
 (2) נקודות החיתוך עם ציר ה- $x$  הן כל הנקודות עבורן  $\sin x = 0$  ו- $\cos x \neq 0$ , כלומר  $x = \pm n\pi$ , כאשר  $n \in \mathbb{Z}$ .  
 (3) יש אסימפטוטות אנכיות ב- $x = n\pi \pm \frac{\pi}{2}$  כי הפונקציה שאופפת לאינסוף שם.  
 אין אסימפטוטה אופקית: כאשר  $x \rightarrow \pm\infty$ , הפונקציה לא חסומה ושוואפת לאינסוף שוב ושוב.

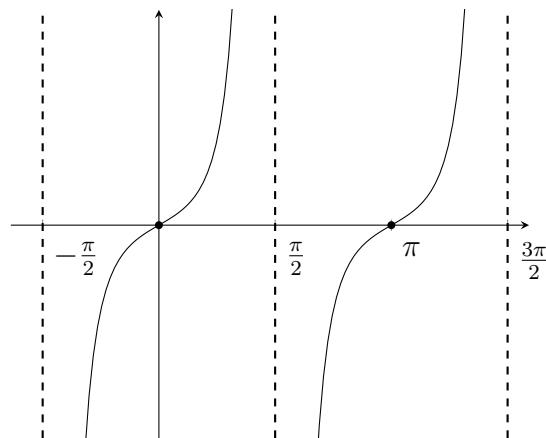
(4)

$$f'(x) = \frac{(2 \cos x \cdot \cos^3 x) - (2 \sin x \cdot 3 \cos^2 x \cdot -\sin x)}{\cos^6 x} = \frac{2 \cos^4 x + 6 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x}.$$

כל הגורמים בביטוי חיוביים כי הם חזקות זוגיות של פונקציות טרייגונומטריות, ולכן הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה.

**סעיף ב**

הסרטוט מבוסס על נקודות החיתוך עם ציר ה- $x$ , האסימפטוטות האנכיות, והעובדת שהפונקציה תמיד עולה.

**סעיף ג**

$$\int_0^a \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} dx = \cos^{-2} x \Big|_0^a = \frac{1}{\cos^2 a} - \frac{1}{1^2} = 1.$$

$a = \frac{\pi}{4}$  הוא  $0 < a < \frac{\pi}{2}$ , והפתרון היחיד בתחום  $\cos a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

## 7.6 חורף תשע"ז

$$\text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad , \quad a \text{ הוא פרמטר.}$$

עננה על הסעיפים א-ו עבור  $a > 0$ . הביע את תשובותיך באמצעות  $a$  במידת הצורך.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
- ג. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ה. (1) רשם את האסימפטוטות המאונכות לצירים של גרף הנגזרת  $(x'f)$ .
- (2) סרטט סקיצה של גרף הנגזרת  $(x'f)$ .

$$\cdot \int_{2a}^{3a} f(x) dx + \int_{-3a}^{-2a} f(x) dx \quad . \quad \text{ו. מצא את ערך הביטוי:}$$

עננה על סעיף ז' עבור  $a = 0$ .

- ז. (1) מצא את תחום ההגדרה של  $(x)f$ .
- (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $(x)f$ .

### סעיף א'

הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס  $\pm a = x$  או כאשר הביטוי בשורש שלילי  $a \leq |x|$ . תחום ההגדרה הוא  $|x| > a$ .

### סעיף ב'

המכנה תמיד חיובי אבל הדגש במונה גורם לסיומו של האסימפטוטות האכניות להיות תלויות בכיוון ההתקראבות לנקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת:

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} = \frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \xrightarrow{\pm a} \pm 1.$$

האסימפטוטה האופקית היא  $y = \pm 1$ , כאשר הסימן הוא לפי כיוון השאייפה לאינסוף:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \approx \frac{x}{\sqrt{x^2}} \xrightarrow{\pm \infty} \pm 1.$$

### סעיף ג'

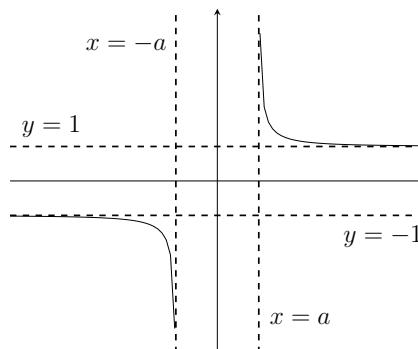
נבדוק את הסימן של הנגזרת הראשונה:

$$f'(x) = 1 \cdot (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 - a^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{-a^2}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

המכנה חיובי והמונה שלילי, לכן הנגזרת שלילי והפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה שלה.

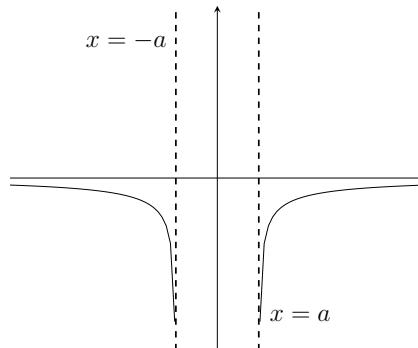
## סעיף 2

יש לנו את האסימפטוטות מסעיף ב, ומסעיף ג' אנו יודעים שהפונקציה תמיד יורדת:



## סעיף 3

- (1) המכנה של  $f'(x)$  מתאפסת כאשר  $x = \pm a$  ולכן יש אסימפטוטות אנכיות ב- $x = \pm a$  כאשר  $\infty \rightarrow x$ , המונה חיובי והמכנה שואפת ל $+\infty$ , ולכן יש אסימפטוטה אופקית ב- $y = 0$ .
- (2) לפי סעיף ג הנגזרת תמיד שלילי ויש אסימפטוטות ב- $\pm a$ :



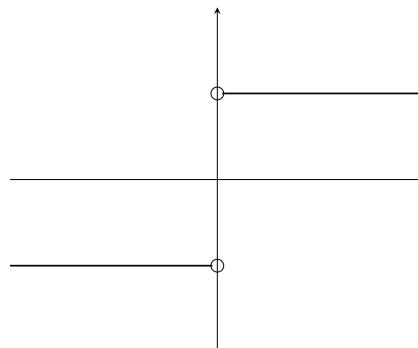
## סעיף 1

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - a^2} = -\frac{x}{x^2 - a^2} = -f(x).$$

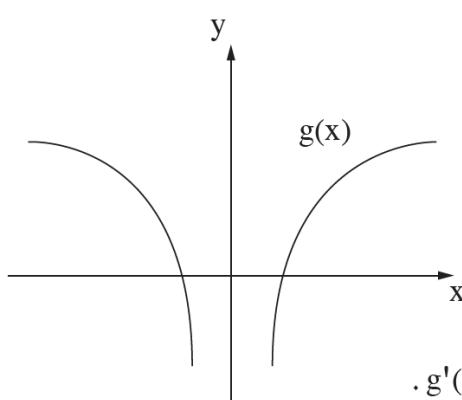
הפונקציה אי-זוגית ולכן אינטגרציה של קטעים סימטריים מצד ציר ה- $y$  מוצטמים והסכום = 0.

## סעיף 2

$$\text{עבור } 0 \neq x. \text{ כאשר הסימן הוא הסימן של } x. f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} = \pm 1 \quad (1) \quad (2)$$



## 7.7 קיצ' תשע"ו מועד ב



בສרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $(x)g$ .

הfonקציות  $(x)g$ ,  $(x)g'$ ,  $(x)g''$

מוגדרות לכל  $x$  השונה מד' 0,

ואין להן נקודות קיצון או נקודות פיתול.

הישר  $0 = x$  הוא האסימפטוטה האנכית

לכל אחד מן הגרפים של הפונקציות האלה.

א. (1) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $(x)g'$ .

نمוק את שיקוליך.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת השנייה  $(x)g''$ . נמוק את שיקוליך.

נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה  $(x)g''$ ,

על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים  $1 = x$  ו $2 = x$  שווה ל- 5.25.

ב. הישר  $1 = x$  חותך את הגרף של פונקציית הנגזרת  $(x)g'$  בנקודה A,

והישר  $2 = x$  חותך גраф זה בנקודה B.

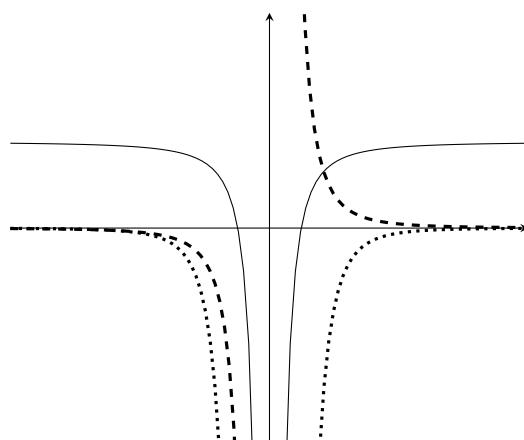
מצא את ההפרש בין שיעור ה- y של הנקודה A ובין שיעור ה- y של הנקודה B. נמוק.

ג. הביטוי  $\frac{a}{x^3} = y$  מתאר אחת מן הפונקציות  $(x)g$ ,  $(x)g'$ ,  $(x)g''$   
a הוא פרמטר גדול מד' 0.

(1) קבע איזו מן הפונקציות הביטוי מתאר. נמוק את קבועותה.

(2) מצא את הערך של a.

נוח לי להציג את כל שלושת הגרפים במערכת צירים אחת, למרות שאיפיוון הגרפים יתברר רק  
במהלך פתרון השאלה.  $(x)g$ : קו רגיל.  $(x)g'$ : קו מקווקו.  $(x)g''$ : קו מנוקד.

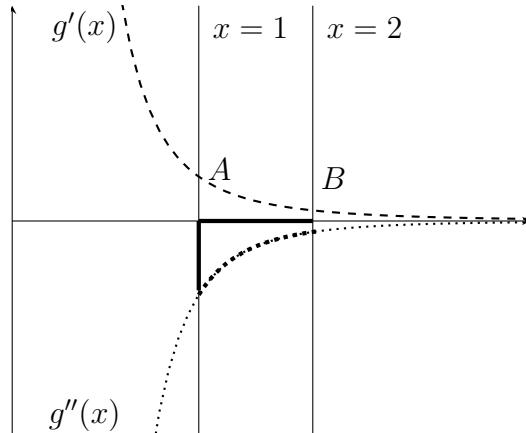


## סעיף א

- (1) משמאלי לימין עבור ערכים שליליים של  $x$ , השיפוע של פונקציה שלילי וירדת תמיד ולכון הנגזרת תמיד שלילית. ערכה של הנגזרת מתחילה קרוב לאפס, יורדת לאט ואז יורדת מהר ושוואפת  $-\infty$ .–.
- משמאלי לימין עבור ערכים חיוביים של  $x$ , השיפוע של פונקציה חיובי ויורדת תמיד ולכון הנגזרת חיובית. ערכה של הנגזרת מתחילה קרוב  $+\infty$ , יורדת מהר ואז יורדת לאט ושוואפת 0.
- (2) משמאלי לימין עבור ערכים שליליים של  $x$ , הנגזרת הראשונה מתנהגות בדיק כמו הפונקציה, ולכון הגרף של הנגזרת השנייה דומה לgraf של הנגזרת הראשונה.
- משמאלי לימין עבור ערכים חיוביים של  $x$ , השיפוע של הנגזרת הראשונה שלילי ועולה תמיד ולכון הנגזרת השנייה שלילית. ערכה של הנגזרת השנייה מתחילה קרוב  $-\infty$ , עולה מהר ואז עולה לאט ושוואפת 0.

## סעיף ב

התרשימים להלן מראה את  $g'(x)$ ,  $g''(x)$  עבור ערכים חיוביים. השטח המתוואר מודגש.



чисוב השטח:

$$S = \int_1^2 -g''(x)dx = -g'(x)\Big|_1^2 = g'(1) - g'(2) = 5.25.$$

אבל זה בדיק ההפרש בין ערך ה- $y$  של נקודה  $A$  לבין ערך ה- $y$  של נקודה  $B$ .

## סעיף ג

- (1) הביטוי לא מתאפס ולכון לא יכול להיות  $g(x)$ . הביטוי חיובי עבור  $0 < x$  ולכון לא יכול להיות  $g'(x) = \frac{a}{x^3}$ .
- (2) מסעיף ב:

$$\begin{aligned} g'(1) - g'(2) &= 5.25 \\ \frac{a}{1^3} - \frac{a}{2^3} &= \frac{21}{4} \\ a &= \frac{8}{7} \cdot \frac{21}{4} = 6. \end{aligned}$$

## 7.8 קיצ' תשע"ו מועד א

$$f(x) = \frac{ax^3 + 2ax}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 4}}$$

a הוא פרמטר גדול מד' 0.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

ב. האם הפונקציה  $f(x)$  היא זוגית או אי-זוגית? נמק.

ג. השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על ידי ציר ה- $x$

ועל ידי הישרים  $1 = x$  ו-  $1 - x = 0$ , שווה ל- 4.

מצא את הערך של a.

ד. נתון כי הפונקציה  $f(x)$  מקיימת  $f(g(x)) = g(f(x))$ . הינו

אחת מנקודות החיתוך בין הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$  היא

נקודה שבה  $x = 0$ .

(1) הראה כי הפונקציה  $f(x)$  מקיימת:

(2) מצא את התחום שבו מתקיים  $f(x) > g(x)$ .

### סעיף א

השאלה פשוטה יותר אם נשים לב ש:

$$f(x) = \frac{ax^3 + 2ax}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 4}} = \frac{ax(x^2 + 2)}{\sqrt{(x^2 + 2)^2}} = \frac{ax(x^2 + 2)}{x^2 + 2} = ax.$$

אנחנו משתמשים על העובדה  $\sqrt{x^2 + 2} > x^2 + 2$  כך שנitin לחשב את השורש במכנה ולצמצם את

השבר, בלי לשנות את התכונות של הפונקציה.

ברור ש-  $f(x)$  מוגדרת לכל x.

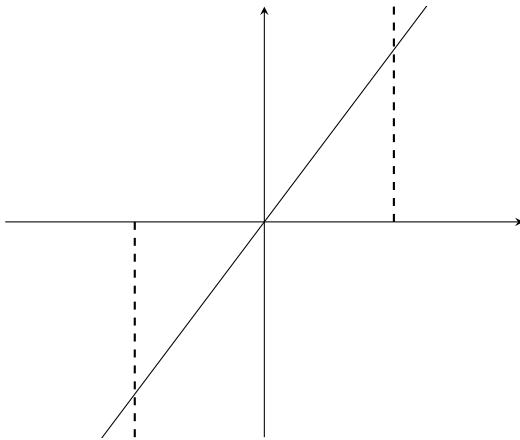
### סעיף ב

$x^2 + 2$  זוגית כך שהזוגיות תלויות רק בזוגיות של  $ax$ .  $a(-x) = -(ax)$  והפונקציה אי-זוגית.

### סעיף ג

כآن צריך להיזהר. **האינטגרל** של פונקציה אי-זוגית בתחום הסימטרי בין  $-k$  ל-  $k$  הוא אפס כי התרומה של הערכים החיוביים והשליליים מctrmciim. אבל השטח בתחום על ידי תחום סימטרי כולל את השטח מתחת לציר ה- $x$  והשטח מעל לציר ה- $x$ . עברו פונקציה אי-זוגית, השטחים שווים.

$$S = 2 \int_0^1 ax dx = ax^2 \Big|_0^1 = a = 4.$$



## סעיף ۷

$$(1) \quad g(x) = \int g'(x) dx = \int f(x) dx = \int ax dx = \frac{1}{2}ax^2 + c.$$

לפי הנתון על נקודות החיתוך:

$$f(0) = a \cdot 0 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 0^2 + c = g(0),$$

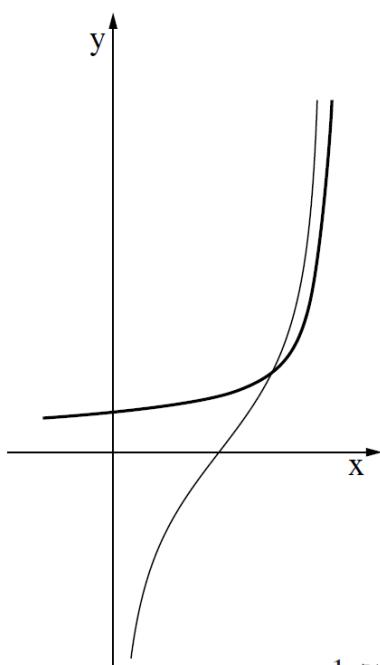
$$\text{ולכן } g(x) = \frac{1}{2} \cdot 4x^2 + 0 = 2x^2.$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) & \stackrel{?}{>} g(x) \\ 4x & \stackrel{?}{>} 2x^2 \\ 2 & > x. \end{aligned}$$

אפשר לצמצם  $x$  כי  $0 < x < 2$ .  $f(x) > g(x)$ , ולכן  $f(0) = g(0) = 0$ .  $x = 0$  אין ערך עבורו  $f(x) > g(x)$ , כי  $f(x)$  שלילי ו- $g(x)$  חיובי, וברור ש- $f(x) > g(x)$ . לכן התחום בו  $f(x) > g(x)$  הוא  $0 < x < 2$ .

## 7.9 חורף תשע"ו



נתונות הפונקציות:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$

$g(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}$  (ראה ציור).

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ ,  $g(x)$ .  
ואת תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x) \cdot g(x)$ .

(2) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים  
של הפונקציה  $f(x)$ ,  
ואת האסימפטוטות המאונכות לצירים  
של הפונקציה  $g(x)$ .

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים  
של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$ , על ידי ציר ה-  $x$  ועל ידי הישר  $x = 1$ .

ג. נתונות הפונקציות:  $t(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}} + 2$ ,  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}} + 2$ .

$S_1$  הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$  ועל ידי הישר  $x = 2.5$ .  
 $S_2$  הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות  $h(x)$  ו-  $t(x)$  ועל ידי הישר  $x = 2.5$ .  
האם השטח  $S_1$  גדול מהשטח  $S_2$ , קטן ממנו או שווה לו? נמק.

### סעיף א

(1)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ : השורש לא שלילי לכן  $3 \leq x$ . המכנה לא אפשר濂  $3 \neq x$ . ביחיד  $x < 3$ .

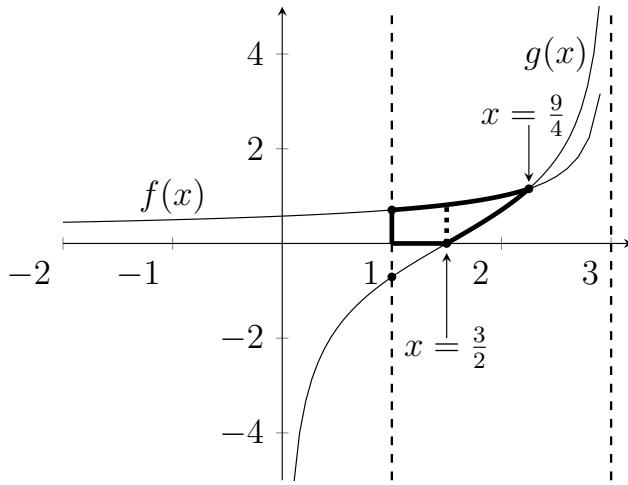
$g(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}$ : כמו עבור  $x < 3$ , אבל  $x$  בשורש לא יכול להיות אפשר濂. כמו כן, עבור  $0 < x$ , בగלל  $3-x > 0$  אנו מקבלים  $0 < 3-x$ , והשורש לא מוגדר. תחום ההגדרה הוא  $0 < x < 3$ .

(2) אסימפטוטות אנכיות:  $x = 3$  מאפס את המכנה של שתי הפונקציות, ו-  $x = 0$  מאפס גם את  $g(x)$ . בכל אחד מערכיהם האלה המונה לא מתאפשר ולבן הם מגדירים אסימפטוטות.

אסימפטוטות אופקיות: שתי הפונקציות לא מוגדרות עבור  $x > 3$  ולבן אין אסימפטוטות כאשר  $x \rightarrow -\infty$ . כאשר  $x \rightarrow 0$ ,  $f(x) \rightarrow \infty$ , ולכן יש ל-  $f(x)$  אסימפטוטה אופקית  $y = 0$ . הפונקציה  $g(x)$  אינה מוגדרת עבור  $0 < x$  ולבן אין אסימפטוטה כאשר  $x \rightarrow -\infty$ .

### סעיף ב

השטח התחום גם על ידי ציר ה-  $x$  בתרשים גבולות השטח מסומנים בקו עבה, וברור שצורך להחשב בשני חלקים. אחד מ-  $x = 1$  ועד נקודת החיתוך של  $g(x)$  עם ציר ה-  $x$ , והשני, המשך עד לנקודת החיתוך של שתי הפונקציות.



נקודות החיתוך של  $g(x)$  עם ציר  $x$ : המכנה חיובי בתחום ההגדרה והמונה מתאפס כאשר  $x = \frac{3}{2}$ . נחשב את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות:

$$\frac{1}{\sqrt{3-x}} = \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}.$$

בתחום ההגדרה,  $x < 3$ , נעלם בחזקת 2 כדי להיפטר מהשורש, ונקבל משווואה ריבועית:

$$4x^2 - 13x + 9 = (4x-9)(x-1) = 0$$

ישש לה שני פתרונות  $x = 1, g(1) = 1, f(1) = -1$ . בדיקה מראה ש- $x = \frac{9}{4}$  כך שאין חיתוך בנקודה זו. נקודות החיתוך היא  $(\frac{9}{4}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ . נחשב את שני חלקיו השטח בפרד:

$$S_1 = \int_1^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{3-x}} - 0 \right) dx = -2\sqrt{3-x} \Big|_1^{\frac{3}{2}} = -2 \left( \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{2} \right) = 0.379$$

$$S_2 = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{4}} \left( \frac{1}{\sqrt{3-x}} - \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}} \right) dx = -2 \left( \sqrt{3-x} - \sqrt{x(3-x)} \right) \Big|_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{4}} =$$

$$(-1.732 + 2.598) + (2.449 - 3) = 0.315$$

$$S = 0.379 + 0.315 = 0.694.$$

## סעיף ג

בניגוד לשאלת בסעיף ב, כאן הציריים לא תוחמים את השטח. השטח מחושב על ידי ההפרש בערכי הפונקציות, ולכן הוספות קבועות לפונקציות מצטמצם וערך השטח לא משתנה.

## 7.10 קיז תשע"ה מועד ב

$$\text{נתונה פונקציית הנגזרת } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

הישר  $y = \frac{1}{3}x + 3$  חותך את הגרף של הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x = 0$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת  $(x)f'$  ושל הפונקציה  $(x)f$ ?

(2) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של פונקציית הנגזרת  $(x)f'$ .

(3) מצא את נקודות החיתוך של גраф פונקציית הנגזרת  $(x)f'$  עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את תחומי העליה והירידה של פונקציית הנגזרת  $(x)f'$  (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גраф פונקציית הנגזרת  $(x)f'$ .

(6) הוסף לסקיצה שרטtot בתת-סעיף ב (5) סקיצה של גраф הפונקציה  $f(x)$ .

$$\text{II. } \sqrt{x^2 + 9} = k \quad , \quad \text{I. } \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = k \quad : \quad \text{נתונות שתי המשוואות, I ו-II:}$$

נתון כי  $k > 0$ .

מצא את תחום הערכים של  $k$  שעבורם אין פתרון למשואה I וגם אין פתרון למשואה II.

### סעיף א

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{2}(x^2 + 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x dx = (x^2 + 9)^{\frac{1}{2}} + c.$$

לפי הנתון,  $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$  ו-  $c = 0$ , ולכן  $\sqrt{0^2 + 9} + c = 3$ .

### סעיף ב

$x$  חיובי עבור כל  $x$  שכן  $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} > 0$  מוגדרות עבור כל  $x$ .

$x$  מוגדרת עבור כל  $x$  אז אין אסימפטוטות אנכיות.

$$\frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} \xrightarrow{\pm\infty} \pm 1,$$

לכן  $y = 1$  היא אסימפטוטה אופקית כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , ו-  $y = -1$  היא אסימפטוטה אופקית כאשר  $x \rightarrow -\infty$ .

(3) על ידי הצגה של  $x = 0$  יש נקודת חיתוך  $(0, 0)$ .

המכנה חיובי שכן  $x = 0$  רק אם  $x \neq 0$  וכך קיבלנו נקודת חיתוך זו.

(4)

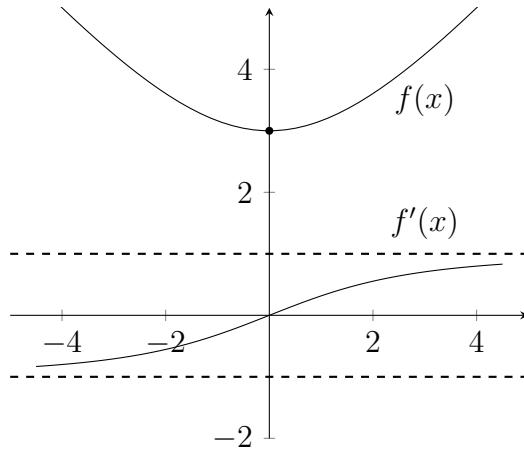
$$f''(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + 9} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 9}} \cdot 2x}{x^2 + 9} = \frac{9}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}.$$

הנגזרת השנייה תמיד חיובית ולכן הנגזרת הראשונה עולה בכל התחום.

(5, 6) ל-( $f(x)$ ) נקודת מינימום ב-(0, 3). מסעיף (4) הנגזרת הראשונה עולה בכל התחום. הסימן

של ( $f'(x)$ ) שלילית עבור ערכי  $x$  שליליים ושל  $x$  וחזיבית עבור ערכי  $x$  חיוביים.

לפי (3) ל-( $f''(x)$ ) יש נקודת חיתוך ב-(0, 0). לפי (2) יש אסימפטוטות ב- $1 \pm$  כאשר השאייה היא  
ל-1 עבור  $\infty \rightarrow +x$ , ול-1 עבור  $\infty \rightarrow -x$ .



### סעיף ג'

הערך הקטן ביותר של  $\sqrt{x^2 + 9}$  הוא 3, ולכן אין פתרון למשוואה II כאשר  $3 < k < 0$ . זה ברור גם מהגרף כי (0, 3) היא נקודת מינימום של  $f(x)$ .

מהגרף של ( $f'(x)$ ) ברור שאין פתרון למשוואה I כאשר  $k \geq 1$ . אפשר גם בחישוב:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2 + 9} &= k^2 \\ x &= \frac{3k}{\sqrt{1 - k^2}}. \end{aligned}$$

כדי שניתן להוציא שורש חייב להתקיים  $1 < k$ , ולכן אין פתרון כאשר  $k \geq 1$ .  
שים לב שהשאלה בקשה את התחום בו אין פתרון ל-I וגם ל-II. צירוף שתי התוצאות נותן שאין פתרון לשתי המשוואות כאשר  $1 \leq k < 3$ .

## 7.11 קיז תשע"ה מועד א

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}$$

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרע הפונקציה עם הצירים.

(4) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

(5) סרטט סקיצה של גרע הפונקציה.

ב. לפונקציה  $f(x)$  יש שתי נקודות פיתול בלבד.

על סמך הגרף של הפונקציה  $f(x)$ , ציין באיזה תחום נמצאת כל אחת מן נקודות אלה.

ג. האם השטח, המוגבל על ידי גרע הפונקציה  $f(x)$  ועל ידי הצירים,

גדול מ- 4, קטן מ- 4 או שווה ל- 4 ? נמק.

### סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס ב-  $x = 1$ . תחום ההגדרה הוא  $x \neq 1$ .

(2) כאשר  $x = 1$  המכנה מתאפס אבל המונה לא מתאפס, לכן  $x = 1$  היא אסימפטוטה אנכית.

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{x^3} + \frac{4x}{x^3} + \frac{4}{x^3} \\ & \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3} \xrightarrow{\pm\infty} 0. \end{aligned}$$

הכנה שואף ל- 1 והמונה שואף ל- 0, ולכן יש אסימפטוטה אופקית ב-  $y = 1$ .

$$(3) \text{ כאשר } y = \frac{4}{-1} = -4, x = 0$$

כדי ש-  $y = -4$  והמכנה לא מתאפס עבור  $x = 0$ ,  $(x+2)^2 = 0$ ,  $x = -2$ .

נקודות החיתוך הן  $(0, -4), (-2, 0)$ .

$$(4) f'(x) = \frac{2(x+2)(x-1)^3 - (x+2)^2 \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = -\frac{(x+2)(x+8)}{(x-1)^6}.$$

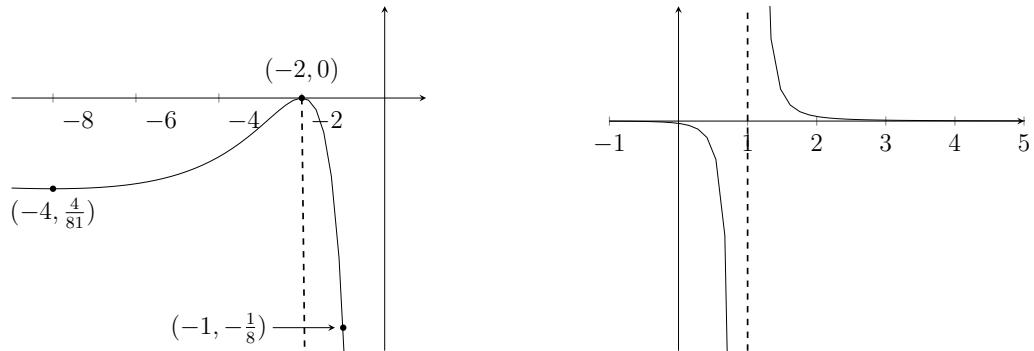
המכנה לא מתאפס בתחום ההגדרה, ולכן נקודות הקיצון הן  $(-2, 0), \left(-8, -\frac{4}{81}\right)$ .

המכנה חיובי ולכן סימן הנגזרת השנייה לשiman הנגזרת של המונה (5).

$-2 < x < -2 + 5$  ולכן  $(-2, 0)$  היא מקסימום.

$$\left(-8, -\frac{4}{81}\right) \text{ ולכן } -2(-8 + 5) > 0 \text{ היא מינימום.}$$

(5) לא ניתן לראות את כל המידע החשוב בגרף בקנה מידת אמיתית. הבאתי שני גרפים, אחד מימין לציר  $\text{ה-}y$  מהראה את האסימפטוטות, ואחד משמאלו לציר  $\text{ה-}x$  המראה את נקודות הקיצון.



### סעיף ב

בין  $-\infty$  ל- $-8$ , השיפוע יורד וاز עולה ויש נקודת פיתול. בין  $-8$  ל- $-2$  – השיפוע עולה וاز יורד. ויש נקודת פיתול.

### סעיף ג

הקו בין  $(0, -4)$  לבין  $(0, 0)$  תומם משולש (ישר זווית) שטחו  $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 16$ . הגרא נמצאת מעל לקו שכן השטח שהוא תומם פחות מ-4.

בגלל קנה מידת התרשים קשה לראות שהgra תמיד מעלה לקו המקווקו, אז נבדוק בחישוב. ב- $x = -1$ ,  $f(-1) = -\frac{1}{8} = -0.125$ . לפי משולשים דומים,  $-1 = x$  חוצה את הבסיס ולכן הנקודה על הייתר של המשולש היא  $(-2, -1)$ . gra מעלה לקו כי  $-2 > -1$ .

## 7.12 חורף תשע"ה

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x^2}} \quad \text{נתונות הפונקציות:}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 2}}$$

א. מצא עבור כל אחת מהfonקציות:

(1) את תחום ההגדרה.

(2) את האסימפטוטות המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) את השיעורים של נקודות הקיצון (אם יש כאלה), וקבע את סוגם.

ב. סרטט במערכת צירים את סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$

וסקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ , אם ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה אחת בלבד.

ג. נתונה הפונקציה  $k > 0$ ,  $h(x) = g(x) - k$ .

עבור אילו ערכים של  $k$  אין לפונקציה  $(x) h$  נקודות חיתוך עם הפונקציה  $f(x)$ ? נמק.

### סעיף א

- (1) המכנה של שתי הפונקציות חיובי, ולכן  $g(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$  מוגדרת עבור כל  $x$ .  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$  לא מוגדרת עבור  $x < 0$  בגלל ה- $x$  במונה, כך שתחום ההגדרה הוא  $x \geq 0$ .
- (2) אין אסימפטוטות אונכיות לפונקציות מוגדרת כל אחת בתחום שלה.

$$\sqrt{\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + 1}} \xrightarrow{+∞} 0,$$

ולכן  $y = 0$  היא אסימפטוטה אופקית.

כאשר  $\xrightarrow{±∞}$  המכנה של  $g(x)$  שהוא חיובי שואף ל $+\infty$ , ולכן  $y = 0$  היא אסימפטוטה אופקית.

: $f(x)$  (3)

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{1+x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot (2x)}{x} \right) = \frac{1}{2} \frac{1-x^2}{\left( \frac{x}{1+x^2} \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

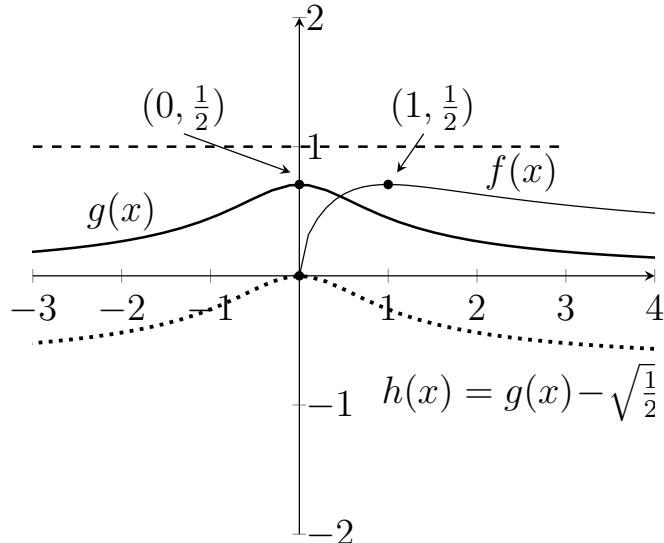
המכנה חיובי והנגזרת מתאפסת כאשר המונה מתאפס  $x = \pm 1$ .  $f(x)$  לא מוגדרת כאשר  $x < 0$  ונקודת הקיצון היחידה היא  $\left(1, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ . הסימן של הנגזרת השנייה שווה לסימן של הנגזרת של המונה:  $x^2 - 2x < 0$  שהיא שלילית עבור כל  $x$  בתחום, ולכן נקודת הקיצון היא מקסימום.

עבור  $g(x)$

$$g'(x) = -\frac{1}{2} (3x^2 + 2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 6x$$

המכנה חיובי ולכן הנגזרת מתאפסת כאשר  $x = 0$ . נקודות הקיצון היא  $(0, \sqrt{\frac{1}{2}})$ . הנגזרת של המונה היא  $0 < 3$ , ונקודות הקיצון היא מקסימום.

### סעיף ב



ההערה "אם ידוע כי הפונקציות תחתכו בנקודה אחת בלבד" הייתה לי די מוזרה, אבל לאחר מחשבה הבנתי שההערה באה למניע אפשר של חיתוך כאשר  $x > 1$  ושווא לאינסוף. רציתי להשתכנע שאכן ההערה נכונה. כאשר משווים  $f(x) = g(x)$  ומפשטים, מקבלים משווהה ממעלה שלישי:

$$3x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0.$$

לא חיפשתי את הנוסחה (המסובכת) למציאת פתרונות למשוואות ממעלת שלישי, אבל לבסוף שמתי לב שאם  $1 > x$  אז  $0 > 3x^3 - x^2 - 1$ , ולכן  $3x^3 - x^2 - 1 > 0$ , וכך לא יכול להיות פתרונות נוספים.

### סעיף ג

הערך המינימי של  $f(x)$  הוא  $0$ , והערך המקסימי של  $g(x)$  הוא  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ . אם לא יהיו נקודות חיתוך בין שתי הפונקציות.

## 7.13 קיז תשע"ד מועד ב

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 - 1}.$$

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המקבילות לצירים.
- (3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.
- (4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.
- ב. רק על פי סעיף א, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ג. רק על פי הסקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  שרטט, מצא את התחומים שבו מתקיים:  
פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  שלילית ופונקציית הנגזרת השנייה  $f''(x)$  חיובית.  
נמק.

### סעיף א

- (1) הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס  $x = \pm 1$ .
- (2) האסימפטוטות האנכיות הן במקומות שהפונקציה לא מוגדרת  $x = \pm 1$ .  
чисוב האסימפטוטה האופקית  $y = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \stackrel{\pm\infty}{\rightarrow} \frac{1}{1} = 1.$$

(3) כאשר  $y = -4$ ,  $x = 0$ .

כasher  $x = 2$  המונה מתאפס והמכנה לא מתאפס.

נקודות החיתוך הן  $(2, 0), (0, -4)$ .

(4) חישוב הנגזרת הראשונה:

$$f'(x) = \frac{2(x-2)(x^2-1) - (x-2)^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2(2x^2-5x+2)}{(x^2-1)^2} = (2x-1)(x-2).$$

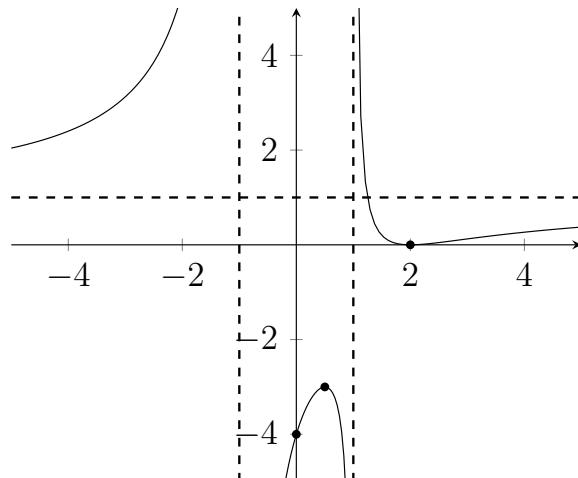
המכנה חיובי בתחום ההגדרה ולכן נקודות הקיצון נמצאות ב-  $x = 2, x = \frac{1}{2}$ .

המכנה חיובי لكن סימן הנגזרת השנייה שווה לסימן הנגזרת של המונה:  $(5-x)/4$ . ביטוי זה חיובי עבור  $x = 2$ , ושלילי עבור  $x = \frac{1}{2}$ . נקודות הקיצון הן:

$$(2, 0), \text{ מינימום} \quad \left(\frac{1}{2}, -3\right) \text{ מקסימום.}$$

## סעיף ב

чисבנו את האסימפטוטות, נקודות החיתוך עם הצירים ונקודת הקיצון. מידע זה מספיק לצירז תרשימים עבור  $x < -1$ . עבור  $x > -1$  נבדוק אם הגרף מעלה לאסימפטוטה האופקית או מתחתיה.  $f(-2) = \frac{16}{3} > 1$  ולכן הגרף מעלה לאסימפטוטה.



## סעיף ג

כדי שהנגזרת הראשונה תהיה שלילית, הפונקציה חייבת לרדת:

$$\frac{1}{2} < x < 1, \quad 1 < x < 2.$$

כדי שהנגזרת השנייה תהיה חיובית, הנגזרת הראשונה חייבת לעלות:

$$x < -1, \quad 1 < x < x_1,$$

כאשר  $x_1$  היא נקודת הפיתול אידם מימין ל-2 = .

הhitotz בין שני התחומים הוא  $1 < x < 2$ .

## 7.14 קיז תשע"ד מועד א

נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{ax^2 + 9}$ .  $a$  הוא פרמטר גדול מ-0.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ ?

(2) הראה כי לפונקציה  $f(x)$  אין נקודות פיתול.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ ?

(2) הביע באמצעות  $a$  את האסימפטוטות האופקיות של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

(3) מצא תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

ג. השטח, המוגבל על ידי הגראן של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ , על ידי ציר ה- $x$

ועל ידי הישר  $x = -4$ , שווה ל-2.

בלי לחשב את הערך של  $a$ , חשב את הערך המספרי של

ואת הערך המספרי של  $f(-4)$ .

### סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדר כאשר  $0 \leq ax^2 + 9 < a$ . נתון ש- $a > 0$  אז הביטוי תמיד גדול מאפס, והפונקציה מוגדרת עבור כל  $x$ .

(2) נחשב את הנגזרת הראשונה והנגזרת השנייה:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(ax^2 + 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2ax = \frac{ax}{\sqrt{ax^2 + 9}}$$

$$f''(x) = \frac{a\sqrt{ax^2 + 9} - ax \cdot \frac{ax}{\sqrt{ax^2 + 9}}}{ax^2 + 9}$$

$$= \frac{9a}{(ax^2 + 9)\sqrt{ax^2 + 9}}.$$

(א) הנגזרת השנייה מוגדרת לכל  $x$ , ו-(ב) גם המוניה וגם המכנה חיוביים, ולכן הנגזרת השנייה לא מתאפסת. המשקנה היא שאין נקודות פיתול.

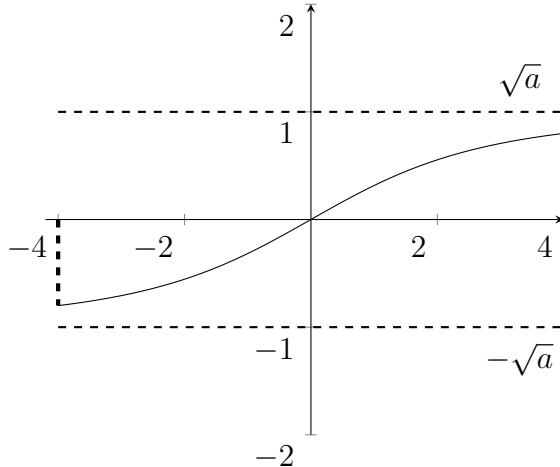
### סעיף ב

(1)  $f'(x)$  מוגדרת כאשר  $0 < ax^2 + 9$ , ולכן היא מוגדרת לכל  $x$  בבדיקה כמו  $f(x)$ .

(2) יש אסימפטוטות אופקיות ב- $\pm\sqrt{a}$ :

$$f'(x) = \frac{\frac{ax}{|x|}}{\sqrt{a + \frac{9}{x^2}}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\sqrt{a}.$$

- (3) ראיינו בסעיף א' שהנגזרת השנייה תמיד חיובית ולכן הנגזרת הראשונה תמיד עולה.  
 (4) נשתמש במידע:  $f'(0) = 0$ , יש אסימפטוטות אופקיות ב- $\pm\sqrt{a}$ , הנגזרת תמיד עולה:



### סעיף ג'

הaintגרל של הנגזרת של פונקציה הוא הפונקציה עצמה.

$$\int_{-4}^0 0 - f'(x) dx = - \int_{-4}^0 f'(x) dx = -f(x) \Big|_{-4}^0 = -f(0) + f(-4).$$

כל לחשב ש- $f(-4) = \sqrt{16a+9}$  ו- $f(0) = \sqrt{9} = 3$ . הפיתוי הוא לחשב את הערך של  $a$  אבל השאלה דורשת את הערך של  $f(-4)$  בלבד לחשב את הערך של  $a$ . החישוב איפילו קל יותר:

$$\begin{aligned} -f(0) + f(-4) &= 2 \\ f(-4) &= 2 + f(0) = 2 + 3 = 5. \end{aligned}$$

הפונקציה זוגית, לכן  $f(4) = f(-4) = 5$ .

מי שמעוניין יכול לחשב את ערכו של  $a$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{16a+9} &= 2 + 3 \\ a &= 1. \end{aligned}$$

## 7.15 חורף תשע"ז

במשולש שווה-שוקיים  $\triangle ABC$  ( $AB = AC$ ) אורך השוק הוא  $b$ .

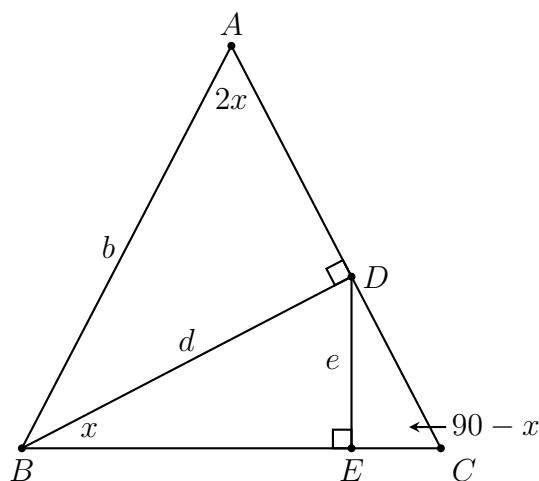
$BD$  הוא גובה לשוק  $AC$ .  $DE$  הוא אנך לבסיס  $BC$ .

סכום  $x + \angle BAC = 2x$ , ומוצא מה צריך להיות הגודל של  $\angle BAC$

כדי שאורך האנך  $DE$  יהיה מקסימלי.

בתשובה תדיק עד שתி ספרות אחורי הנקודה העשרונית.

בבחינה זו היו שלוש שאלות בפרק השני לבן מס' 8 ולא 7.



נזכיר את סימון הזווית בתרשימים.  $\triangle ABC$  שווה-שוקיים זווית הבסיס שווה והסכום כל הזווית במשולש שווה:  $180$ :

$$\angle ACB = \angle ABC = \frac{180 - 2x}{2} = 90 - x.$$

במשולש ישר-זווית  $\triangle BDC$   $\angle DBC = 90 - (90 - x) = x$ .

במבחן הראשון נראה שאפשר למצוא את הערך המקסימלי של  $DE = e$  על ידי מציאת הנגזרת  $0 = (d \sin x)' = d(\sin x)' = d \cos x$ . אבל זה לא נכון כי  $d$  איננה קבוע ולבן אי אפשר להוציאו ממהונזרת. נתון ש- $d$  קבוע, כך שעליינו למצוא ביטוי מהצורה  $(d \cos x)' = -d \sin x = b \cdot f'(x) = b \cdot f(x)$ .

את החישוב נבצע בשני שלבים, תחיליה נבטא את  $e$  כפונקציה של  $x$ ,  $d$ ,  $b$ , ואח"כ נבטא את כפונקציה של  $b$ ,  $x$ . אפשר להשתמש בחוק הסינוסים, אבל פשוט יותר להשתמש בהגדרת הפונקציות  $\triangle BED$ ,  $\triangle BDA$  הטריגונומטריות במשולשים ישר-זווית.

$$e = d \sin x$$

$$d = b \sin 2x$$

$$e = (b \sin 2x) \sin x$$

$$= b(2 \sin x \cos x) \sin x = 2b \sin^2 x \cos x$$

$$\begin{aligned} e' &= 2b(2 \sin x \cos x \cos x + \sin^2 x \cdot (-\sin x)) \\ &= 2b \sin x (2 \cos^2 x - \sin^2 x) = 0. \end{aligned}$$

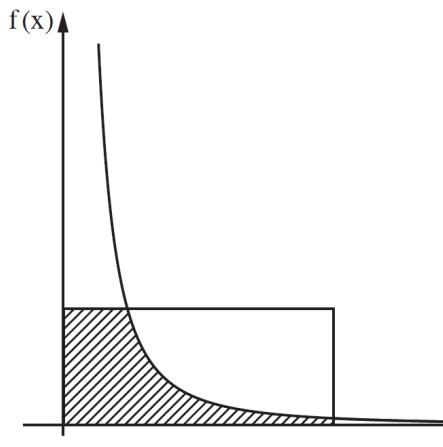
הנזרת מתאפסת אם  $x = 0, x = 180$ , כי  $\sin x = 0$  שלא יתכן, וכי אין יכולם להיות זוויות במשולש. הנזרת גם מתאפסת אם:

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 x - \sin^2 x &= 0 \\ \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 &= 2 \\ \tan x &= \pm\sqrt{2} \\ x &= 54.74, 125.26. \end{aligned}$$

אבל  $x = 54.74^\circ$  הוא הפתרון האפשרי היחיד.  
השאלה מבקשת את ערכו של זוויות  $\angle BAC = 2x = 109.47^\circ$

## פרק 8 חדו"א שאלה 8

### 8.1 קיז תשע"ח מועד ב



בציר שלפניך מתואר גраф הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  בתחום  $x > 0$   
ומלבן ששתיים מצלעותיו נמצאות על הצירים והוא נמצא בריבוע הראשון.  
נתון: שטח המלבן הוא 4.

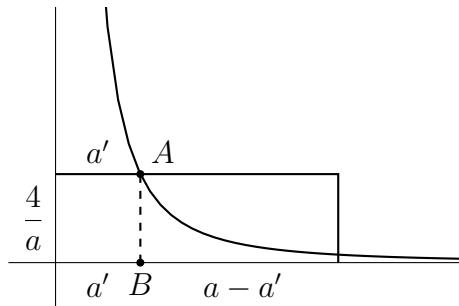
נסמן ב- $a$  את אורך צלע המלבן שנמצאת על ציר ה- $x$ . נתון:  $a \geq \frac{1}{4}$ .

א. הבע באמצעות  $a$  את השטח המוגבל על ידי הצירים,

על ידי צלעות המלבן ועל ידי גраф הפונקציה  $f(x)$

(השטח המוקוּן בציר).

ב. עבור איזה ערך של  $a$  השטח שמצוֹת בסעיף א הוא מקסימלי?



#### סעיף א

נתון שמרחק הצלע התחתונה של המלבן מציר ה- $y$  הוא  $a$ , ונתון שטח המלבן 4, ולכן אורך הצלע האנכית של המלבן הוא  $\frac{4}{a}$ . נסמן ב- $A$  את נקודת החיתוך של גраф הפונקציה עם הצלע העילונית של המלבן. נסמן ב- $a'$  את אורך הקטע בין  $A$  לציר ה- $y$ , ונסמן ב- $B$  נקודת על ציר ה- $x$ , הנמצאת במרחק  $a'$  מציר ה- $y$ . לפי הגדרת הפונקציה

$$\begin{aligned} f(a') &= \frac{1}{(a')^2} = \frac{4}{a} \\ a' &= \frac{\sqrt{a}}{2}. \end{aligned}$$

נחשב את השטח המבוקש כסכום השטח של מלבן מציר ה- $y$  ועד לצלע  $AB$ , והשטח מתחת לפונקציה מ- $B$  ועד ל- $x = a$ :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{4}{a} \cdot \frac{\sqrt{a}}{2} + \int_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^a \frac{1}{x^2} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{a}} + (-1) \cdot x^{-1} \Big|_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^a \\
&= \frac{2}{\sqrt{a}} - \frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{\sqrt{a}}{2}} = \frac{4\sqrt{a} - 1}{a}.
\end{aligned}$$

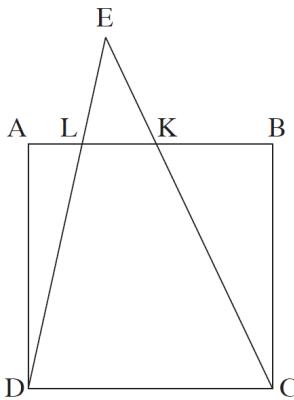
### סעיף ב

ברור ש-  $S = \frac{4\sqrt{a} - 1}{a}$  יורדת בעיקיות ככל ש-  $a$  עולה, לכן הערך המקסימלי צריך להיות בערך הקטן ביותר של התחום הנוכחי  $.a = \frac{1}{4}$ . אפשר גם לחשב את הנגזרת הראשונה:

$$\left( \frac{4\sqrt{a} - 1}{a} \right)' = \frac{\left( 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot a \right) - ((4\sqrt{a} - 1) \cdot 1)}{a^2} = \frac{-2\sqrt{a} + 1}{a^2},$$

שמתאפשרת ב-  $.a = \frac{1}{4}$

## 8.2 קיז' תשע"ח מועד א



הו ריבוע שאורך צלעו 6 ס"מ.

ר L הן נקודות על הצלע AB.

נתון כי היסרים CK ו DL חותכים זה את זה בנקודה E

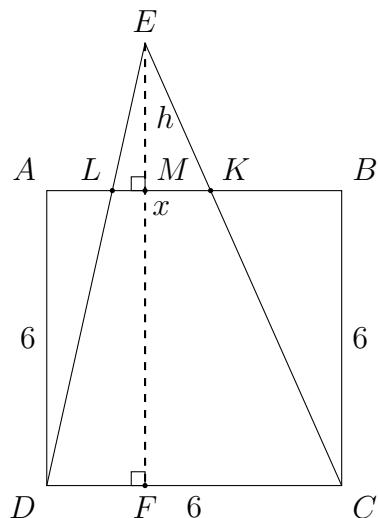
הנמצאת מרוחק לרכיב ABCD (ראה ציור).

נסמן:  $x = LK$ .

a. הבע באמצעות  $x$  את גובה המשולש KLE.

b. עבור أي זערך של  $x$  סכום שטחי המשולשים ADL, BCK ו KLE הוא מינימלי? נמק.

תוכל להשאיר שורש בתשובהך.



### סעיף א

ולכן  $\triangle CDE \sim \triangle KLE$ . נשים לב שהגובה של  $\triangle CDE$  הוא  $h + 6$ , ולכן:

$$\frac{h}{x} = \frac{h+6}{6}$$

$$h = \frac{6x}{6-x}.$$

### סעיף ב

מחשב את שטושת השטחים:

$$S_{\triangle KLE} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{6x}{6-x}$$

$$S_{\triangle ADL} = \frac{1}{2} \cdot AL \cdot 6$$

$$S_{\triangle BCK} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot 6.$$

המצב נראה אבוד כי  $AL, BK$  לא ידועים ואין נתונים עליהם. אבל, נשים לב ש- $AB$  היא צלע של הריבוע, ולכן  $x$  הוא סכום השטחים המשולשים הוא:

$$\begin{aligned} S = S_{\triangle KLE} + S_{\triangle ADL} + S_{\triangle BCK} &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{6x}{6-x} + \frac{1}{2} \cdot (6-x) \cdot 6 \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{2(x^2 - 6x + 18)}{6-x} \right) \\ &= 6 \cdot \frac{x^2 - 6x + 18}{6-x}. \end{aligned}$$

נחשב את נגזרת הראשונה (ללא הקבוע 6):

$$\begin{aligned} S' &= \frac{(2x-6)(6-x) - (x^2 - 6x + 18)(-1)}{(6-x)^2} \\ &= \frac{-x^2 + 12x - 18}{(6-x)^2}. \end{aligned}$$

המכנה חיובי ולכן המונה מתאפס עבורו:

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 18}}{-2} = 6 \mp 3\sqrt{2}.$$

הערך  $6 - 3\sqrt{2} > 6 + 3\sqrt{2}$  אינו פתרון כי  $LK$  הוא קטע של צלע שאורכה 6. נקודת הקיצון היא  $6 - 3\sqrt{2}$ . המכנה של  $S'$  חיובי ולכן הסימן של הנגזרת השנייה שווה לסימן של הנגזרת של המונה:  $-2x + 12$ . עבור נקודת הקיצון:

$$-2(6 - 3\sqrt{2}) + 12 = 6\sqrt{2} > 0,$$

ונקודה היא מינימום.

### 8.3 חורף תשע"ח

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{1}{x^3}$$

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x = t$ .

נתון:  $1 \leq t \leq 5$ .

המשך חותך את ציר ה- $x$  בנקודה A ואת ציר ה- $y$  בנקודה B. הנקודה O היא ראשית הצירים.

**a.** מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מינימלי.

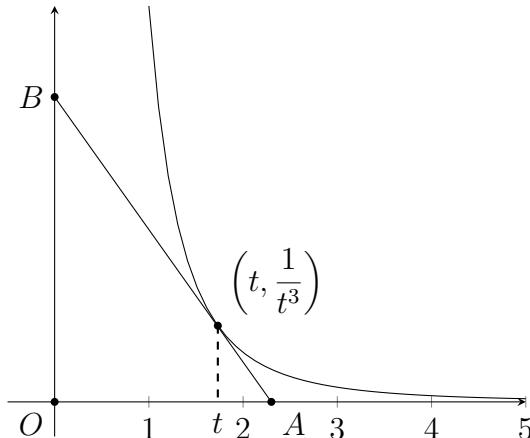
**b.** מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מקסימלי.

הסתובכתי כאן בגלל שלא תירגלו מזמן את המשוואה לקו ישר. נדמה לי שזו הפעם היחידה שהמשוואה נדרשת בכל הבחינות הללו.

#### סעיף א

ערך הפונקציה חיובית עבור ערכי  $x$  חיוביים, ולכן המשיק נמצא בربיע הראשון.

(הערכים בציר ה- $y$  בתרשימים הוכפלו פי שמונה כדי לאפשר הצגת תרשימים ברורים).



הנגזרת של הפונקציה היא  $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$ , לכן הקו המשיק לגרף הפונקציה הוא:

$$y - \frac{1}{t^3} = -\frac{3}{t^4}(x - t).$$

נחשב את הנקודות על הצירים. עבור ציר ה- $x$ :

$$0 - \frac{1}{t^3} = -\frac{3}{t^4}(x_A - t)$$

$$3x_A = t^4 \left( \frac{3t}{t^4} + \frac{1}{t^3} \right) = 3t + t$$

$$x_A = \frac{4t}{3}.$$

עבור ציר ה- $y$ :

$$\begin{aligned} y_B - \frac{1}{t^3} &= \frac{-3}{t^4}(0-t) \\ y_B &= \frac{3t}{t^4} + \frac{1}{t^3} = \frac{4}{t^3}. \end{aligned}$$

השאלה מבקשת את נקודת הקיצון של:

$$g(t) = x_A + x_B = \frac{4t}{3} + \frac{4}{t^3}.$$

הנגזרת הראשונה והנגזרת השנייה הן:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{4}{3} + \frac{-12}{t^4} \\ g''(x) &= \frac{48}{t^5}. \end{aligned}$$

הנחשב את  $t$  כאשר הנגזרת הראשונה מתאפשרת:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{4}{3} + \frac{-12}{t^4} = 0 \\ t^4 &= \frac{3}{4} \cdot 12 = 9 \\ t &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

נתון  $t > 0$  ולכן נקודת הקיצון היא  $t = \sqrt{3}$ . הנגזרת השנייה חיובית עבור כל  $t > 0$  ולכן נקודת הקיצון היא מינימום.

### סעיף ב'

אם יש רק נקודת קיצון פנימית אחת שהיא מינימום, אז המקסימום חייב להיות בקצה התוחום:

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{4 \cdot 1}{3} + \frac{4}{1^3} = \frac{16}{3} \\ g(5) &= \frac{4 \cdot 5}{3} + \frac{4}{5^3} = \frac{20}{3} + \frac{4}{125}. \end{aligned}$$

ברור  $g(1) < g(5)$  ולכן המקסימום הוא ב- $5$ .

## 8.4 קיז' תשע"ז מועד ב

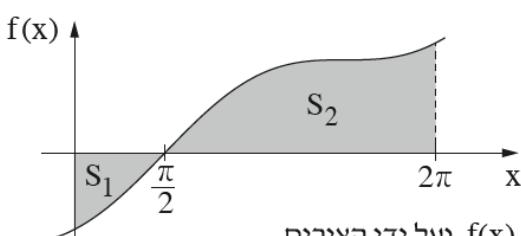
(x) היא פונקציה המוגדרת לכל  $x$ .

גרף הפונקציה (x) חותך את ציר ה- $y$  בחלקו השלילי.

נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה (x)  $f$  עם ציר ה- $x$  היא  $(0, \frac{\pi}{2})$  (ראה ציור).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה (x)  $f$ , על ידי הצירים ועל ידי הישר  $x = 2\pi$

$$(\text{השטח האפור בציור}) \text{ שווה ל- } 10\pi^2 + 16.$$



$$\text{נתון גם: } \int_0^{2\pi} f(x) dx = 8\pi^2$$

א. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה (x)  $f$  ועל ידי הצירים

(השטח  $S_1$  המסומן בציור).

הפונקציה (x)  $F$  היא פונקציה קדומה לפונקציה (x)  $f$ . נתון:  $F(0) = 0$ .

ב. מצא את  $F(\frac{\pi}{2})$ .

נתון:  $f'(x) = 8 \sin x + 8$ .

ג. מצא את (x)  $f$ .

בשאלה זו צריך לשים לב להבדל בין חישוב אינטגרל של פונקציה ובין השימוש באינטגרל לחישוב שטח. בתרשים בשאלה, אם מחשבים אינטגרל מ-0 ל- $2\pi$ , הערכים השליליים עד  $\frac{\pi}{2}$  "מורידים" מערך האינטגרל. כאשר מחשבים את השטח  $S_1 + S_2$  התרומה של  $S_1$  חיובית ויש לחשב את האינטגרל של השילילה של הפונקציה.

### סעיף א

הערך של  $f(x)$  שלילי בין  $0$  ל- $\frac{\pi}{2}$  ולכן:

$$S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} f(x) dx = 10\pi^2 + 16.$$

נתון ש:

$$-S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx = 8\pi^2.$$

נחסיר את המשווהה השנייה מהראשונה ונקבל:

$$S_1 = \pi^2 + 8.$$

**סעיף ב'**

$$-S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = F\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(\pi^2 + 8).$$

**סעיף ג'**

$$\text{נתון } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (8 \sin x + 8) dx$$

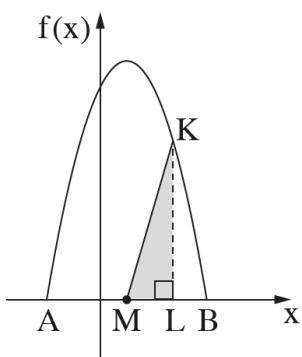
$$= -8 \cos x + 8x + c$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8 \cos \frac{\pi}{2} + 8 \cdot \frac{\pi}{2} + c = 0$$

$$c = -4\pi$$

$$f(x) = -8 \cos x + 8x - 4\pi.$$

## 8.5 קיז' תשע"ז מועד א



בציר שלפניך מתואר גраф הפונקציה  $f(x) = -x^2 + 2x + c$  בתחום האידישליות שלה.

A ו B הן נקודות החיתוך של הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ .

$$\text{נתון: } (t > 0) \quad x_B = 2t, \quad x_A = -t$$

א. מצא את  $t$  ואת  $c$ .

M היא נקודה החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה עם ציר ה- $x$ .

K היא נקודה כלשהי על גраф הפונקציה  $f(x)$  מעל לציר ה- $x$ .

מהנקודה K הורידו אנך לציר ה- $x$ , החותך את הקטע AB בנקודה L.

ב. מצא עבור אילו שיעורי  $x$  של הנקודה K שטח המשולש KLM הוא מקסימלי.

מצא את שני הפתרונות האפשריים.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

### סעיף א

נציב את הביטויים הנתונים עבור  $A, B$  ונקבל שתי משוואת בשני נעלמים  $t, c$ , שנוכל לפתור:

$$\begin{aligned} -(2t)^2 + 2(2t) + c &= 0 \\ -(-t)^2 + 2(-t) + c &= 0 \\ t(6t - 3) &= 0 \\ t &= 2. \end{aligned}$$

פסלנו את הפתרון  $t = 0$  כי נתון  $t > 0$ . נחשב את  $c$ :

$$\begin{aligned} -(-2)^2 + 2(-2) + c &= 0 \\ c &= 8. \end{aligned}$$

הfonקציה היא  $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

### סעיף ב

נקודות החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה עם  $f(x)$  היא נקודת המקסימום של  $f(x) = -2x + 2 = 0$  מתקבלת הראושונה  $f'(x) = -2x + 2 = 0$ .

הקודקודים של  $\triangle KLM$  הם ( $x, -x^2 + 2x + 8$ ) (כאשר  $x$  היא הקואורדינטה של  $K, L$  על ציר ה- $x$ ):

$$\begin{aligned} M &= (1, 0) \\ L &= (x, 0) \\ K &= (x, -x^2 + 2x + 8). \end{aligned}$$

השטח של  $\triangle KLM$  הוא:

$$S(x) = \frac{1}{2}(x-1)(-x^2 + 2x + 8),$$

והגזרת הראשונה היא:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{1}{2}(1 \cdot (-x^2 + 2x + 8) + (x-1)(-2x+2)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-3x^2 + 6x + 6) \\ &= -\frac{3}{2} \cdot (x^2 - 2x - 2). \end{aligned}$$

הנגזרת מתאפסת ב:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 2}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

הנגזרת השנייה היא  $S''(x) = -3(x-1)$ .

$S''(1 + \sqrt{3}) = -3\sqrt{3} < 0$  והוא מקסימום כי  $1 + \sqrt{3} > 1$ .

פתרונות  $1 - \sqrt{3}$  מותאים למשולש הסימטרי כאשר  $K, L$  משמאלי ל- $M$ . אורך הבסיס יהיה  $x - 1 - \sqrt{3}$ . הטענה יתאפשרו ונקבל שטח חיובי ומקסימלי.

פתרונות אחר משתמשים במונח "קודקוד הפרבולה". לא נתקלתי בו בספרי לימוד או בבחינות אחרות. עבור פרבולה  $ax^2 + bx + c$  ערך ה- $x$  של הקודקוד הוא  $\frac{-b}{2a}$ . אין צורך לזכור את הנוסחה כי ניתן לשחזר אותה על ידי חישוב הנגזרת:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot -1} = 1.$$

## 8.6 חורף תשע"ז

נתונה גזרת עיגול  $BAC$  שהוא  $\frac{1}{6}$  מעיגול שרדיויסו  $R$  ומרכזו  $A$ .

מנקודת כלשהי  $P$ , הנמצאת על הקשת  $BC$ ,

הורדיו ארכן ל- $AC$  החותך את הרדיוס  $AC$  בנקודה  $L$  (ראה ציור).

השטח האפור שבציוור הוא השטח הכלוא בין הקשת  $BC$  ובין הרדיוסים  $AB$  ו- $AP$ , והקטעים  $LP$  ו- $LC$ .

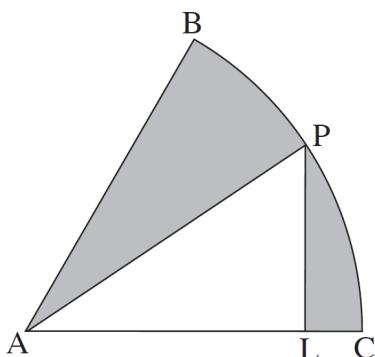
נתון שהשטח האפור המינימלי הוא  $36 - 24\pi$ .

א. (1) מצא את הזווית  $PAC$  שעבורה

השטח האפור שמתקיים הוא מינימלי.

(2) מצא את  $R$ .

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש  $APL$ ? נמק.



### סעיף א

(1) במקום לחשב את השטח האפור (משימה שנראית די קשה), נחשב את שטחו כהפרש בין השטח של גזרת המעגל  $BAC$  לבין השטח של המשולש  $\triangle APL$ .

שטח הגזרה הוא ששית משטח המעגל כולם  $\frac{1}{6} \cdot \pi R^2$ .

שטח המשולש הוא מחצית המכפלת הבסיס  $AL$  והגובה  $PL$ , אבל ניתן להביע אותם באמצעות הרדיוס  $R$  והזווית  $AP = R \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{AL}{R}$$

$$\sin \alpha = \frac{PL}{R}$$

$$S_{\triangle APL} = \frac{1}{2} \cdot R \cos \alpha \cdot R \sin \alpha.$$

השטח האפור הוא:

$$S_{\text{אפור}} = \text{אפור} = \frac{R^2}{2} \left( \frac{\pi}{3} - \cos \alpha \sin \alpha \right)$$

בלי הקבוע  $\frac{R^2}{2}$  הנגזרת הראשונה היא:

$$-((- \sin \alpha) \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha.$$

הנגזרת מתאפשרת כאשר  $\cos \alpha = \pm \sin \alpha$ . בזרה  $0 < \alpha < \frac{1}{6} \cdot 2\pi$ , הפתרון היחיד הוא  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

(2) הנגזרת השנייה היא  $4 \sin \alpha \cos \alpha$  שחייבת בגירה, ולכן נקודות הקיצון היא מינימום.

נשווה את החישוב שקיבלנו עם השטח הנתון:

$$\frac{R^2}{2} \left( \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \right) = 24\pi - 36 = 12(2\pi - 3)$$

$$\frac{R^2}{2} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 12(2\pi - 3)$$

$$\frac{R^2}{2} \cdot \frac{1}{6} (2\pi - 3) = 12(2\pi - 3)$$

$$R = 12.$$

## סעיף ב

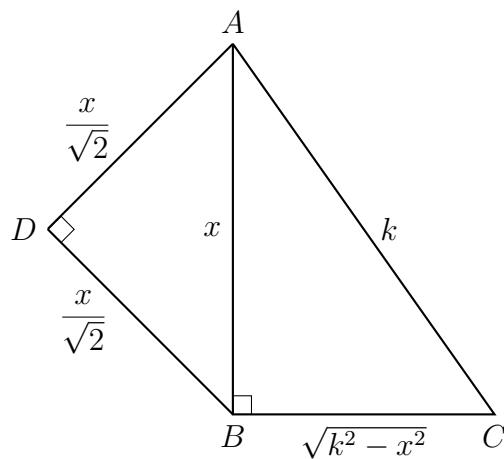
השטח המקסימלי של  $\triangle APL$  הוא שטח הגירה פחות השטח המינימלי של השטח האפור:

$$\begin{aligned} S_{\triangle APL} &= \frac{\pi R^2}{6} - (24\pi - 36) \\ &= 24\pi - (24\pi - 36) = 36. \end{aligned}$$

## 8.7 קיז' תשע"ו מועד ב

- במשולש ישר זווית  $\triangle ABC$  ( $\angle ABC = 90^\circ$ ) אורך היתר הוא  $k$  ס"מ ( $k$  הוא פרמטר).  
 הניצב  $AB$  הוא גם יתר במשולש  $\triangle ADB$ , שהוא שווה-שוקיים וישר זווית ( $\angle ADB = 90^\circ$ ).  
 א. סמן  $x = AB$  והבע את  $BC$  באמצעות  $x$  ו-  $k$ .  
 ב. נתון כי הערך המקסימלי של המכפלה  $BC \cdot AD^2$  הוא  $3\sqrt{3}$ .  
 מצא את שטח המשולש  $\triangle ADB$  (ערך מסווני), כאשר המכפלה  $BC \cdot AD^2$  היא מקסימלית.

בזיבוזתי הרבה זמן על השאלה כי בהעדר תרשימים שמתי את הנקודה  $D$  על היתר  $AC$ !



### סעיף א

הביטויים עבור  $BC, BD, AD$  מהנתון  $\triangle ADB$  שווה-שוקיים.

### סעיף ב

$$\begin{aligned}
 (BC \cdot AD^2)' &= \left( \sqrt{k^2 - x^2} \cdot \frac{x^2}{2} \right)' \\
 &= \frac{-2x}{2\sqrt{k^2 - x^2}} \cdot \frac{x^2}{2} + \sqrt{k^2 - x^2} \cdot x \\
 &= \frac{-x^3}{2\sqrt{k^2 - x^2}} + \frac{2(k^2 - x^2)x}{2\sqrt{k^2 - x^2}} \\
 &= \frac{2k^2x - 3x^3}{2\sqrt{k^2 - x^2}}.
 \end{aligned}$$

נניח כਮובן שהמשולש לא מנוון כך ש-  $k \neq x$ . הנגזרת מתאפסת כאשר:

$$k = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}}k.$$

סימן הנגזרת השנייה שווה לסימן הנגזרת של המונה:

$$(2k^2 - 3x^2)' = -6x < 0,$$

נקודות הקיצון היא מקסימלית.

נחשב  $x = \sqrt{\frac{2}{3}}k$  כדי לקבל ערך מסווני עבור  $k$ . נציב  $BC \cdot AD^2 = 3\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \sqrt{k^2 - x^2} \cdot \frac{x^2}{2} &= \sqrt{k^2 - \frac{2}{3}k^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}k^2 \\ &= k^3 \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$k^3 = 27$$

$$k = 3.$$

מכאן ש:

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}k = \sqrt{6}.$$

השטח המקסימלי של  $\triangle ADB$  הוא:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x^2}{4} = \frac{(\sqrt{6})^2}{4} = \frac{3}{2}.$$

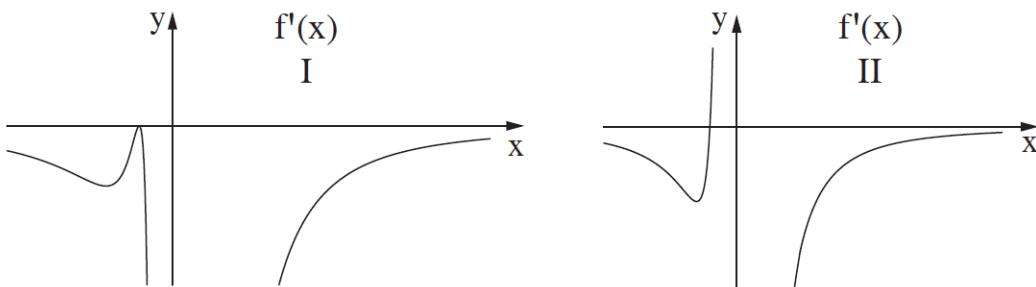
## 8.8 קיצ' תשע"ו מועד א

נתונה הפונקציה  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$   $x \neq 0$ .  $n$  הוא מספר טבעי גדול מ-1.

א. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.

ב. הראה כי עבור  $x$  איזוגי  $0 \leq f'(x) \leq 0$  לכל  $x \neq 0$ .

לפניך שני גרפים, I ו- II. (בגרפים מוצגות כל נקודות הקיצון).



אחד הגראפים מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  עבור  $x$  זוגי,

והגרף האחר מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  עבור  $x$  אי-זוגי.

היעזר בגרפים I ו- II, וענה על הסעיפים ג, ד, ו-ה.

ג. עבור  $x$  אי-זוגי:

(1) מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה  $f(x)$ . נמק.

(2) מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה  $f(x)$ . נמק.

ד. עבור  $x$  זוגי:

(1) מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה  $f(x)$ . נמק.

(2) מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה  $f(x)$ . נמק.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ה. נתונות הפונקציות:  $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$ ,  $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$ .

מהו הסימן של המכפלה  $g''(x) \cdot h''(x) > 0$ ? נמק.

### סעיף א

$f(x) \rightarrow 1$   $\infty$  עבור  $x \rightarrow -\infty$ , עדין יש אסימפטוטה אופקית ב- $y=1$ .  $f(x)$  שואפת ל-0 מעל לציר ה- $x$  עבור  $x$  זוגית, ומתחת לציר עבור  $x$  אי-זוגי.

הפונקציה לא מוגדרת עבור  $x = 0$  ולכן  $x = 0$  היא אסימפטוטה אנכית.

#### סעיף ב

$$f'(x) = \left( (1 + x^{-1})^n \right)' = n (1 + x^{-1})^{n-1} \cdot -x^{-2}.$$

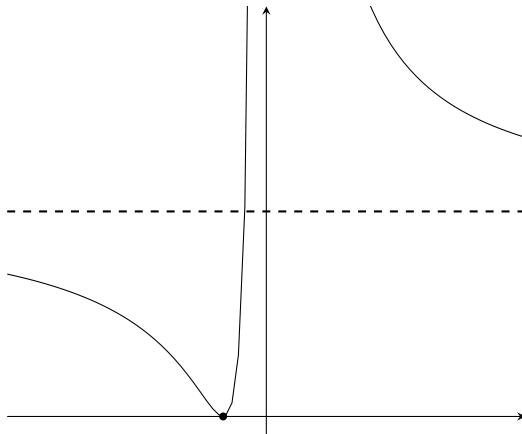
נתון ש- $n$  חיובית. אם  $n$  אי-זוגית,  $1 - n$  זוגית, ו- $(1 + x^{-1})^{n-1}$  חיובית או אפס. כמובן ש- $x^{-2}$  חיובית (לא אפס כי  $0 \neq x$ ). לכן סימן המינוס לפני  $x^{-2}$  גורם לכל הביטוי להיות שלילי או אפס. מכאן שגרף I מתאים ל- $n$  אי-זוגית וגרף II ל- $n$  זוגית.

#### סעיף ג

- (1) בנקודת קיצון של  $f(x)$  הנגזרת הראשונה  $f'(x)$  חוצה את ציר ה- $x$ , שכן אין נקודות קיצון.
- (2) בנקודת פיתול הנגזרת השנייה מתאפסת. זה קורה פעמיים אחת בנקודת המינימום של  $f''(x)$  ופעמיים נוספת כאשר  $f''(x)$  יש נקודת מקסימום. לכן יש שתי נקודות פיתול.

#### סעיף ד

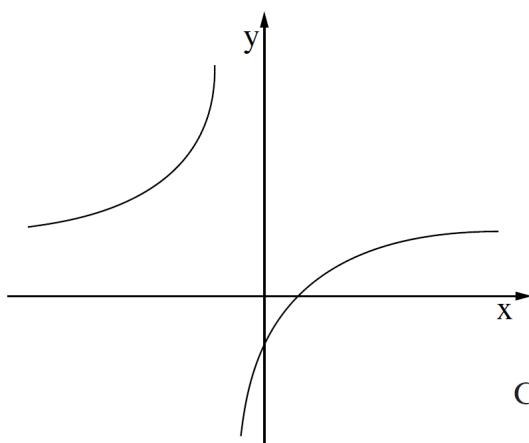
- (1) בנקודת קיצון של  $f(x)$  הנגזרת הראשונה  $f'(x)$  חוצה את ציר ה- $x$ , שכן יש נקודת קיצון אחת.
- (2) נקודות פיתול הנגזרת השנייה מתאפסת, כלומר, יש נקודת קיצון לנגזרת הראשונה, שכן יש נקודות פיתול אחת.
- (3) לפי גраф II, עבור  $x < 0$ , השיפוע קרוב לאפס באסימפטוטה האופקית. השיפוע יורדת ממש מאלעד לנקודה פיתול שם השיפוע עולה עד לנקודה מינימום של  $f(x)$  ואז ממשיך לעלות. עבור  $x > 0$  השיפוע תמיד עולה מערך שלילי נמוך מאוד ועד קרוב לאפס בכיוון האסימפטוטה האופקית.



#### סעיף ה

רואים בשני הגרפים שעבור  $x > 0$ , השיפוע, הנגזרת הראשונה, עולה, כך שהנגזרת השנייה חיובית. מכפלה של שני ערכים חיוביים היא חיובית.

## 8.9 חורף תשע"ו



$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

נתונה הפונקציה  
(ראה ציור).

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה,

ואת האסימפטוטות של הפונקציה  
המקבילות לצירים.

ב. העבירו ישר המקביל לציר ה- $x$ .

הישר חותם את גרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $C$   
ואת הישר  $x = 2$  בנקודה  $D$ .

נסמן את שיעור ה- $x$  של הנקודה  $C$  ב- $t$ .

מצא מה צריך להיות הערך של  $t$ , כדי שהאורך של הקטע  $CD$  יהיה מינימלי:

$$\text{עבור } t > -1. \quad (1)$$

$$\text{עבור } t < -1. \quad (2)$$

ג. מצא את האורך המינימלי של הקטע  $CD$  עבור כל  $t \neq -1$ .

### סעיף א

הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס:  $x = -1$ .

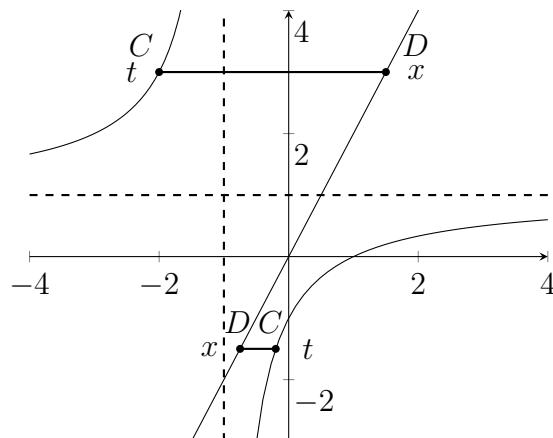
ב- $x = -1$  יש אסימפטוטה אנכית כי המכנה מתאפס והמונה לא מתאפס.

$y = 1$  היא אסימפטוטה אופקית כי:

$$\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 1.$$

### סעיף ב

בתרשים סימנו את ערכי ה- $x$  ליד שמות הנקודות:



יש כאן מלכודת שנייתן להימנע ממנה על ידי הcntת תרשימים מדויק. אמם  $t$  מוגדר כערך ה- $x$  של  $f(x)$  אבל האורך בין הפונקציה והקו  $y = 2x$  תלוי במקומם היחסי בין הקו וגרף הפונקציה. ניתן גם לראות בחלוקת לשני תת-סעיפים רמז שיש לטפל בשני המקרים בפרט.

(1) כאשר  $-1 < t$  אורך הקטע  $DC$  (נסמן  $a$ ) הוא  $a = -x - (-t) = t - x$ . (מדובר במקרה ש- $x, t$ , שליליים, אבל הנוסחה מתאימה גם אם קו במקומות אחרים). ערכי ה- $y$  של שתי הנקודות שוויים, ולכן ניתן להציב בנוסחה עבור  $a$ :  $x = \frac{y}{2} = \frac{f(t)}{2}$

$$\begin{aligned} a &= t - x = t - \frac{t-1}{2(t+1)} \\ &= \frac{2t^2 + t + 1}{2(t+1)} \\ a' &= \frac{(4t+1) \cdot 2(t+1) - (2t^2 + t + 1)(2)}{4(t+1)^2} \\ &= \frac{4t^2 + 8t}{4(t+1)^2} = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2} = 0. \end{aligned}$$

ערכי  $t$  של נקודות הקיצון נמצאות במקומות שהנגזרת הראשונה מתאפסת:  $t = 0, t = -2$ . המכנה של הנגזרת הראשונה תמיד חיובי ולכן סוג נקודות הקיצון מקבל מהסימן של הנגזרת של המונה:  $2t + 2$ . כאשר  $t = 0$ , הנגזרת חיובית והנקודה היא מינימום. כאשר  $t = -2$  הנגזרת שלילית והנקודה היא מקסימום. לכן האורך המינימלי הוא:

$$t - x = 0 - \frac{0-1}{2(0+1)} = \frac{1}{2}.$$

(2) כאשר  $-1 < t < 0$  אורך הקטע  $a$  הוא  $a = x + (-t) = x - t$ .

$$\begin{aligned} a &= x - t = \frac{t-1}{2(t+1)} - t \\ &= \frac{-(2t^2 + t + 1)}{2(t+1)} \\ a' &= \frac{-(4t+1) \cdot 2(t+1) + (2t^2 + t + 1)(2)}{4(t+1)^2} \\ &= \frac{-4t^2 - 8t}{4(t+1)^2} = \frac{-t(t+2)}{(t+1)^2} = 0. \end{aligned}$$

ערכי  $t$  של נקודות הקיצון נמצאות במקומות שהנגזרת הראשונה מתאפסת, שוב ב- $-2$ . המכנה של הנגזרת הראשונה תמיד חיובי ולכן סוג נקודות הקיצון מתקבל מהסימן של הנגזרת של המונה:  $(2t+2) -$ . כאשר  $t = 0$ , הנגזרת שלילית והנקודה היא מקסימום. כאשר  $t = -2$  הנגזרת חיובית והנקודה היא מינימום. לכן, האורך המינימלי הוא:

$$x - t = -\frac{-2-1}{2(-2+1)} - (-2) = \frac{7}{2}.$$

## סעיף ג'

לכן האורך המינימלי עבור  $-1 < t < \frac{7}{2}$  הוא  $\frac{1}{2}$  כאשר  $t = 0$ .

## 8.10 קיז תשע"ה מועד ב

נתונה הפונקציה  $(x)f$ , ונตอน כי כל אחת מהפונקציות  $f(x)$ ,  $f'(x)$  ו-  $f''(x)$  מוגדרת בתחום  $x > 0$ .

נתון גם: הגרף של  $(x)f'$  חותך את ציר ה-  $x$  בנקודה שבה  $x = 1$ ,  $x > 3$  עולה בתחום  $0 < x < 3$ , ו יורדת בתחום  $x > 3$ . האסימפטוטות של  $(x)f'$  הן  $y = 0$  ו-  $x = 0$ .

א. סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת  $(x)f'$ .

נתון גם כי לפונקציה  $(x)f$  יש אסימפטוטה אחת שמשוואתה  $x = 0$ .

ב. מצא את שיעורי ה-  $x$  של נקודות הקיצון של הפונקציה  $(x)f$  (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ג. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה  $\cup$  וככלפי מטה  $\cap$  של הפונקציה  $(x)f$ . נמק.

ד. הפונקציה  $(x)f$  מקבלת את כל הערכים בטוחה  $y \geq 4$  ורק אותם. סרטט סקיצה של גוף הפונקציה  $(x)f$ .

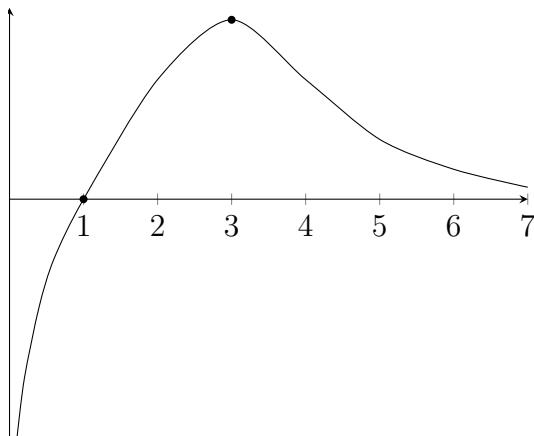
צין על ציר ה-  $x$  ועל ציר ה-  $y$  את הערכים שמצוות.

ה. נתונה הפונקציה  $g(x) = -[f(x)]^3$ .

מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $(x)g$ .

### סעיף א

(בשאלה אין נוסחה לפונקציה, גם לא לאחר פתרון השאלה, ולכן התרשימים הם ממש "סקיצות".)



## סעיף ב

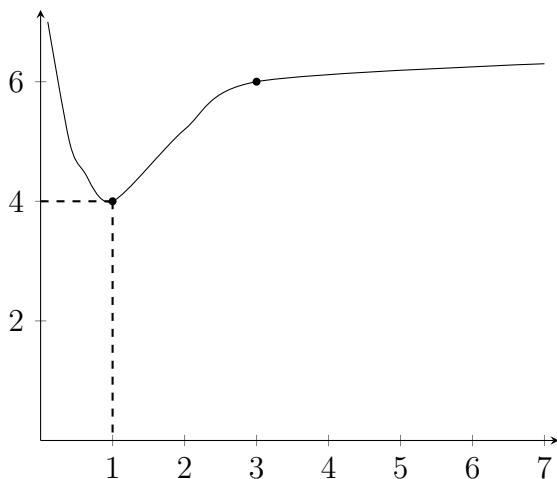
קיימת נקודת קיצון ב- $x = -1$  כי הנגזרת הראשונה מותאמת ומחליפה סימן. הנקודה היא מינימום כי הנגזרת עולה (הנגזרת השנייה חיובית).

## סעיף ג

הנגזרת השנייה היא השיפוע של הנגזרת הראשונה, שהוא חיובי עבור  $x < 0$  ושלילי עבור  $x > 3$ . לכן הפונקציה קעורה כלפי מעלה ב- $x < 0$  וקעורה כלפימטה ב- $x > 3$ . ב- $x = 3$  הנגזרת השנייה מותאמת ללא שינוי בסימן הנגזרת הראשונה, ולכן היא נקודת פיתול.

## סעיף ד

אם הפונקציה מקבלת את כל ערכי  $y \geq 4$ , בקודת המינימום  $x = 4 = y$ . משתמש בנתון שלפונקציה יש אסימפטוטה ב- $x = 0$ , וכיוני הקויריות מסעיף ג כדי להשלים את צורת הגרף:



## סעיף ה

$f(x)$  חיובית בכל תחום ההגדרה, לכן גם  $f^3(x)$  חיובית. סימן המינוס הופך את הסימן של ערך הפונקציה.  $f(x)$  יורדת ב- $x < 0$  ולכן  $g(x) = f(x)^3$  עולה בתחום זה.  $f(x)$  עולה ב- $x < 1$  ולכן  $g(x)$  יורדת בתחום זה.

אפשר להשתמש בנגזרת של  $g(x)$ :

$$g'(x) = -3f^2(x)f'(x).$$

$f^2(x)$  תמיד חיובי, ולכן לאור המינוס בתחילת הביטוי, תחומי העלייה והירדה הם התחומים שערכי  $f'(x)$  שליליים או חיוביים בהתאם.  $f'(x)$  חותך את ציר ה- $x$  משליליים לחוביים ב- $x = 1$ , ולכן  $g(x)$  עולה ב- $-1 < x < 0$  ויורד ב- $x < -1$ .

## 8.11 קיז תשע"ה מועד א

- נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x + a^2$ ,  $a$  הוא פרמטר גדול מ-0.
- הראה כי המקסימום של הפונקציה מתקיים בנקודת שבה  $y > 0$ .
  - מצא עבור איזה ערך/איזה תחום ערכיהם של  $a$  נקודת המינימום של הפונקציה:
    - (1) נמצאת על ציר ה- $x$ .
    - (2) נמצאת מעל ציר ה- $x$ .
    - (3) נמצאת מתחת לציר ה- $x$ .
  - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור כל אחד משלשות המקרים שבסעיף ב.
  - כמה פתרונות יש למשוואה  $\frac{1}{3}x^3 - x + 1 = 0$ ? נמק.

### סעיף א

נגזרת ראשונה:

$$f'(x) = x^2 - a^2 = 0$$

$$x = \pm a$$

$$f''(x) = 2x$$

$$f''(+a) = 2a > 0$$

$$f''(-a) = -2a < 0.$$

בשתי השורות האחרונות השתמשנו בנתון  $a > 0$ .

המקסימום הוא ב- $-a = x$  והמינימום הוא ב- $a$ .

### סעיף ב

המינימום הוא ב- $a = x$ .

$$f(a) = -\frac{2}{3}a^3 + a^2 = a^2 \left( -\frac{2}{3}a + 1 \right).$$

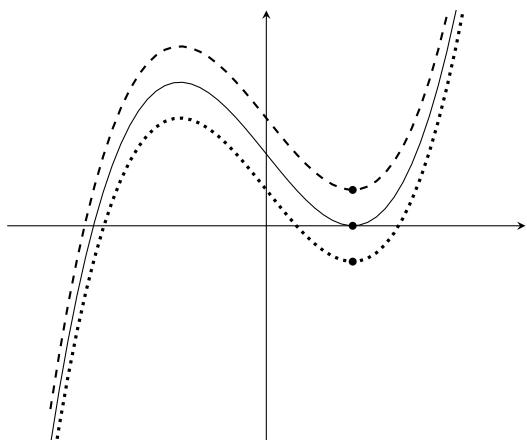
$a^2$  חיובי ולא משנה על סימן של נקודות המינימום. הפתרון מתקיים על ידי השוואת  $-\frac{2}{3}a + 1 = 0$  לאפס:

$a = \frac{3}{2}$	$x$	על ציר ה- $x$
$a < \frac{3}{2}$	$x$	מעל ציר ה- $x$
$a > \frac{3}{2}$	$x$	מתחת לציר ה- $x$

## סעיף ג

נקודות המינימום ב- $a = x$  מסומנות.

קו רציף: על הציר. קו מקווקו: מעל לציר. קו מנוקד: מתחת לציר.



## סעיף ד

משווה זו היא המשווה הנתונה בשאלת  $1 = a$ . אבל  $\frac{3}{2} < 1$ . לפי סעיף ב המינימום נמצא מעל לציר  $\text{-}x$ . יש רק פתרון אחד כאשר הפונקציה חותכת את ציר  $\text{-}x$  משמאלו למקסימום.

## חומר תשע"ה 8.12

נתון כי הפונקציה  $f(x)$  ופונקציית הנגזרת שלה  $f'(x)$  מקיימות  
נתון גם:  $f(0) = 1$ ,  $f'(x) = kx + 2$ . הוא פרמטר.

א. מצא את הערך המספרי של  $f(3)$ , ומצא את הפונקציה  $f(x)$  (בלי פרמטרים).

ב. הפונקציה  $g(x)$  מקיימת  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ .

$$(1) \quad g(x) = |x + 1|$$

(2) סרטט במערכת צירים את סקיצה של גורף הפונקציה  $g(x)$

וסקיצה של גורף הפונקציה  $f(x)$ .

### סעיף א

לפי הנוסחה לנגזרת של חזקה של פונקציה,  $(f(x)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}f(x)^{-\frac{1}{2}}f'(x)$  שהיא הפונקציה המופיעות באינטגרל. נחשב את האינטגרל כדי לקבל  $f(3)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx &= \left[ \sqrt{f(x)} \right]_0^3 \\ &= \sqrt{f(3)} - \sqrt{f(0)} = \sqrt{f(3)} - 1 = 3 \\ f(3) &= 16. \end{aligned}$$

מציאת הפונקציה  $f(x)$ :

$$f(x) = \int (kx + 2) dx = \frac{1}{2}kx^2 + 2x + c$$

$$f(0) = c = 1$$

$$f(3) = \frac{9}{2}k + 7 = 16$$

$$k = 2$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 1.$$

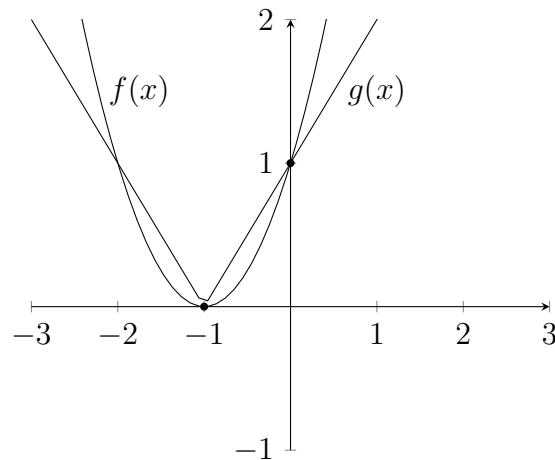
## סעיף ב'

$$g(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|.$$

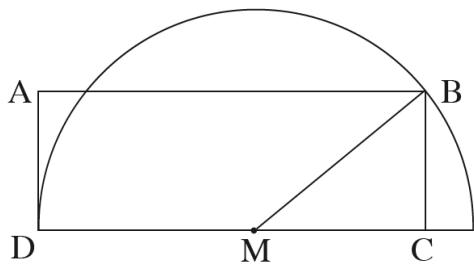
אם  $x+1 < 0$ ,  $g(x) = -(x+1)$ . ביחד  $g(x) = x+1$ ,  $x+1 \geq 0$ .

## סעיף ג'

הגרף של  $f(x)$  הוא פרבולה קעורה כלפי מעלה עם נקודות מינימום ב- $(-1, 0)$  ונקודות חיתוך עם ציר ה- $y$  ב- $(0, 1)$ . הגרף של  $g(x)$  מורכב משני קווים ישרים עם ערכי חיווקים אбел עם שיפועים עם סימנים הפוכים. נקודת המינימום היא גם כן  $(-1, 0)$ .



## 8.13 קיז תשע"ד מועד ב



נתון מלבן  $ABCD$ .

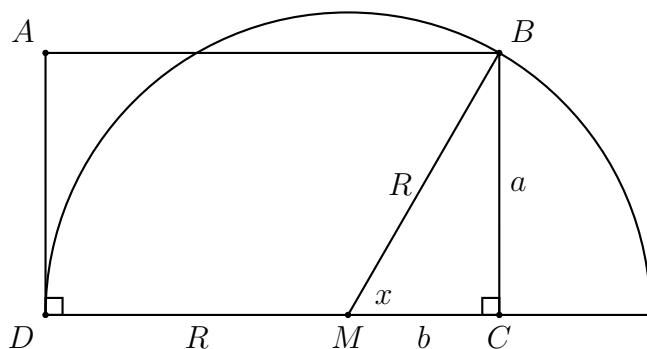
הצלע  $DC$  מונחת על הקוטר של חצי מעגל שהרדיוס שלו  $R$  ומרכזו  $M$  כך ש-  $DC \geq R$ . הצלע  $AD$  משיקה לחצי המעגל בנקודה  $D$ , והקדקוד  $B$  נמצא על המעגל (ראה ציור).

נסמן:  $\angle BMC = x$

$ABCD$  – שטח המלבן  $= S(x)$

- א. מצא מה צריך להיות  $x$ , כדי ששטח המלבן  $S(x)$  יהיה מקסימלי.
- ב. הביע באמצעות  $R$  את השטח המוגבל על ידי גוף הפונקציה  $S(x)$  ועל ידי ציר ה-  $x$

בתוחם  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .



### סעיף א

עם הסימונים בתרשימים:

$$S(x) = a(R + b) = R \sin x(R + R \cos x) = R^2 \sin x(1 + \cos x).$$

נחשב את הנגזרת:

$$\begin{aligned} S'(x) &= R^2(\cos x(1 + \cos x) + \sin x \cdot -\sin x) \\ &= R^2(\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= R^2(\cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) \\ &= R^2(2 \cos^2 x + \cos x - 1) \\ &= R^2(2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 0. \end{aligned}$$

בנחתה שהמשולש  $\triangle BMC$  אינו מנוון,  $0 < x < 180^\circ$ . ניתן לפסול את הפתרון  $x = 60^\circ$ ,  $\cos x = \frac{1}{2}$  והפתרון היחיד הוא  $x = 180^\circ$ .

הנגזרת השנייה היא:

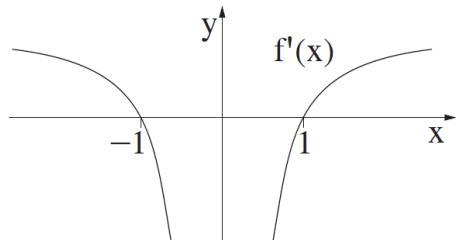
$$\begin{aligned}(2\cos^2 x + \cos x - 1)' &= -\sin x(4\cos x + 1) \\ &= -\sin 60(4\cos 60 + 1) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (4 \cdot \frac{1}{2} + 1) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0.\end{aligned}$$

נקודת הקיצון היא מקסימום.

## סעיף ב'

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin x (1 + \cos x) dx &= R^2 \cdot -\frac{1}{2} (1 + \cos x)^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{R^2}{2} (1^2 - 2^2) = \frac{3R^2}{2}.\end{aligned}$$

## 8.14 קיז תשע"ד מועד א



בצורו שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .  
האסימפטוטה היחידה של הפונקציה  $f(x)$  היא  $x = 0$ .  
נתון כי יש פתרון אחד בלבד למשוואה  $f(x) = 2$   
ופתרון אחד בלבד למשוואה  $f(x) = -2$ .  
אך על פי נתונים השאלה,  
סרטט סקיצה של הפונקציה  $f(x)$ .

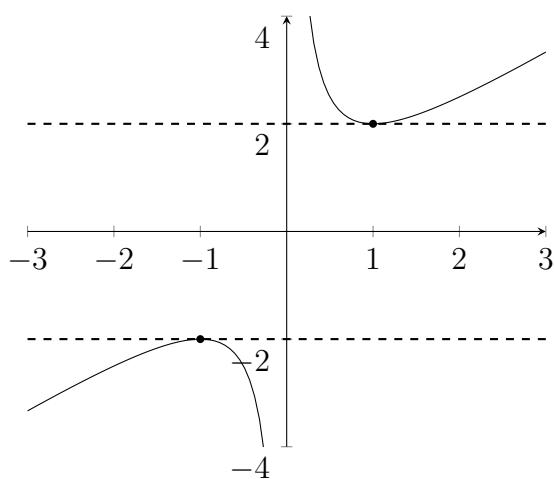
ב. נתון גם כי פונקציית הנגזרת  $(x)f'$  היא:  
$$f'(x) = \frac{ax^2 - b}{ax^2}$$
  $a$  ו-  $b$  הם פרמטרים שונים מד-0.

מצא את הפונקציה  $f(x)$  (בלי פרמטרים).

### סעיף א

כאשר  $x$  עולה מאפס ל- $-\infty$ , הנגזרת עולה בצורה תלולה בערכים השליליים ובצורה מתונה בערכים החוביים, ולכן הפונקציה יורדת בצורה תלולה ואח"כ עולה בצורה מתונה.  
כאשר  $x$  עולה מ- $+\infty$  לאפס, הנגזרת יורדת בצורה מתונה בערכים החוביים ובצורה תלולה בערכים שליליים, ולכן הפונקציה עולה בצורה מתונה ואח"כ יורדת בצורה תלולה.  
לפי התרשימים הנתנו  $f''(x) = -1$ , בנקודת  $x = -1$  יש נקודת קיצון שהיא מינימום כי השיפוע יורדת (הנגזרת השנייה שלילית). בנקודת  $x = 1$  יש נקודת קיצון שהיא מינימום כי השיפוע עולה (הנגזרת השנייה חיובית).

לפי הנתון שיש לפונקציה פתרונות יחידים  $x = \pm 2$ , הגרף של פונקציה חייב לגעת בקווים  $x = \pm 2$   $y = u$  אבל לא בחותם. לפי ההסברים הקודמים,  $(-1, -2)$  היא מינימום ו- $(1, 2)$  היא מינימום, ולכן אנו יודעים שהגרף מעלה  $x = -2$  ו מתחת  $x = 2$ .



**סעיף ב**

לפי הגרף  $a = b$  ו-  $\frac{a-b}{a} = 0$  ונתון  $a \neq 0$ , ולכן  $f'(1) = f'(-1) = 0$   
שוב בגלל ש-  $a \neq 0$  אפשר למצמצם את הפרמטרים:

$$f'(x) = \frac{a(x^2 - 1)}{ax^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

נחשב את האיטרגל של הנגזרת כדי למצוא את הפונקציה:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = x + \frac{1}{x} + c.$$

נתו **ערכי הפונקציה**  $f(\pm 1) = \pm 2$ , ולכן:

$$1 + \frac{1}{1} + c = 2$$

. $c = 0$

. $f(x) = x + \frac{1}{x}$   
**הfonקציה** היא

## 8.15 חורף תשע"ז

בטבלה שלפניך מוצגים ערכים מסוימים של הפונקציה  $f(x)$  בקטע  $1 < x < 2$ .

x	1.1	1.2	1.3	1.4
$f(x)$	1.19	1.28	1.36	1.43

הfonקציה  $f(x)$  חיובית בקטע הנדון, ואין לה נקודות קיצון פנימיות בקטע זה.

נתון כי פונקציית הנגזרת השנייה  $f''(x)$  שלילית בקטע הנדון.

א. קבוע מהו הסימן של  $f'(1.2)$ ? נמק.

ב. קבוע אם הטענה  $f'(1.3) < f'(1.2) < f'(1.1)$  נכונה. נמק.

נתונה הפונקציה  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  בקטע  $1 < x < 2$ .

ג. בקטע הנדון מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה  $g(x)$  (אם יש כאלה). נמק.

ד. הראה כי בתחום  $1.1 \leq x \leq 1.3$  אין פתרון למשוואה  $g'(x) = f'(x)$ .

**בבחינה זו היו שלוש שאלות בפרק השני לבן מספר השאלה הוא 9 ולא 8.**

**סעיף א**

לפי הطבלה הפונקציה עולה מ- $x = 1.1$  ל- $x = 1.2$ . נטען שאין נקודות קיצון פנימיות ולכן הנגזרת הראשונה חיובית.

**סעיף ב**

הנגזרת השנייה שלילית כך שהנגזרת הראשונה יורדת בתחום ולכן הטענה נכונה.

**סעיף ג**

$$g'(x) = \frac{1}{2}f(x)^{-\frac{1}{2}}f'(x).$$

מהטבלה  $f(x)$  חיובית בתחום ו**סעיף א**  $f'(x)$  חיובית בתחום, ולכן  $g'(x)$  חיובי, וזה עולה בתחום.

**סעיף ד**

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \\ \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x) &= f'(x) \\ f(x) &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

מצאנו שהנגזרת הראשונה חיובית כך שאפשר לצמצם אותה. לפי הטבלה,  $f(x)$  אינה פונקציה קבועה בכל התחומים, אך לא ניתן ש- $f'(x) = g'(x)$ .



## המלצות: חישון דיפרנציאלי וrintgrali

- אי-אפשר להכין טבלה של עליות וירידות עד שלא מחשבים את תחום ההגדלה וגם כל נקודות הקיצון של הפונקציה, כי רק בינם אפשר לטעון על זה שאין שינוי בכיוון הפונקציה.
- אני אוהב להשתמש בתנועות ידיהם כדי "לראות שיפועים" ולקבוע אם פונקציה עולה או יורדת, וכן אם נקודות קיצון היא מקסימום או מינימום. אני מזין ידי שיטה לאורך הפונקציה מערכיים שליליים לחיבוביים על ציר ה- $x$ . אם כיוון היד למטה הפונקציה יורדת, ואם הכיוון לעליה הפונקציה עולה. אם היד עוברת מכיוון למטה לכיוון לעלה, השיפוע (הנגזרת) עולה, כך שהנגזרת השנייה היא חיובית ונקודת הקיצון היא מינימום. שינוי הפוך בכיוון היד מראה שקיים מקסימום.
- אני מציע להתרחק מהמחשבון עד כמה שאפשר ולחשב עם סימנים אלגבריים. הסיבה היא קשה למצוא שגיאות הנגרמות מטעויות בклדה על המחשבון, אבל אפשר לעבור שוב ושוב על חישוב אלגבראי כדי לוודא את נכונותו.
- אל תקצרו בחישובים. לעיתים קרובות שגיתי כי השטתי סימן מינוס. לוקח מעט זמן לרשות שורה נוספת לעומת הזמן הדרוש לחפש שגיאה בחישוב מקוצר.
- אני מעדיף לסוג נקודות קיצון על ידי בדיקת הסימן של הנגזרת השנייה ולא על ידי חישוב טבלת עליות וירידות.
- ככלים יודעים שאם הסימן של המכנה של הנגזרת הראשונה חיובי, הסימן של הנגזרת השנייה זהה לסימן של הנגזרת של המונה של הנגזרת הראשונה. חשוב לא לטעון שהנגזרת השנייה שווה לנגזרת של המונה של הנגזרת הראשונה!<sup>1</sup> עם זאת, יש נוסחה לנגזרת השנייה התקפה רק עבור נקודות בהן הנגזרת הראשונה מתאפסת והן **חוודות נקודות הקיצון**.<sup>2</sup> עברו:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$f''(a) = \frac{g'(a)}{h(a)}.$$

הוכחה פשוטה: חישבו את הנגזרת. נביא דוגמה:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} \\ f'(x) &= \frac{-2x^2 + 4x}{(x^2 - x + 1)^2}. \end{aligned}$$

נקודות הקיצון הן:

$$a_1 = (0, -1), \quad a_2 = \left(2, \frac{5}{3}\right).$$

---

<sup>1</sup>ראו יונתן אחיטוב. 'גירה שנייה מקוצרת' כדרך לאפיון נקודות קיצון. על"ה 20, 2002, עמ' 27–26.

<sup>2</sup>ראו במאמר של אחיטוב וגם "לŁmod ולŁmd אנלייז", עמ' 323 – 322.

בגלו שהמכנה חיובי, הסימן של הנגזרת השנייה הוא הסימן של:

$$(-2x^2 + 4x)' = -4x + 4,$$

למרות שזו לא הנגזרת השנייה. עבור נקודות הקיצון,  $0 > 4 \cdot 0 + 4 = 4$  ו-  $a_1$  היא מינימום,  $0 < -4 \cdot 2 + 4 = -4$  ו-  $a_2$  היא מקסימום.

עבור הנקודות  $a = a_1, a = a_2$  אפשר לחשב את הנגזרת השנייה ולבודק ש:

$$f''(a) = \frac{-4a + 4}{a^2 - a + 1}.$$

- שימושו לב להגדירה של נקודת פיתול: נקודה בה משתנה הקעירות של הפונקציה. בנקודת פיתול, הנגזרת השנייה מתאפשרת או לא מוגדרת, אבל יש פונקציות שמקיימות אחד מהתנאים הללו בנקודת מסוימת אבל אין שם נקודת פיתול. למשל, הנגזרת השנייה של  $f(x) = x^4$  מתאפשרת ב-  $x = 0$  אבל יש שם מינימום ולא נקודת פיתול.<sup>3</sup>

בנקודות פיתול **הנגזרת הראשונה** לא חייב להתאפס. למשל, עבור  $x$  :

$$\begin{aligned} f'(0) &= \cos 0 = 1 \\ f''(0) &= -\sin 0 = 0. \end{aligned}$$

- כאשר מופיע שורש בפונקציה הכוונה היא לשורש החיובי. אבל, כאשר לוקחים שורש של  $x^2$  הכוונה היא **לערך המוחלט של  $x$** . למשל, אם  $x = 3 = x$ , אבל אם  $x = -3 = \sqrt{3^2} = 3$ , אבל אם  $x = -3 = \sqrt{(-3)^2} = 3 = -x$ . זה חשוב כאשר אסימפטוטות של פונקציות עם שורשים:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} = \frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \xrightarrow{\pm\infty} \pm 1.$$

- אם השאלה מבקשת נקודות חיתוך עם הצירים או נקודות קיצון, יש נטייה להסתפק בחישוב ערך ה- $x$ , אבל התשובה חייבת להיות קואורדינטות  $(x, y)$ .

- כאשר מבקשים לחשב אינטגרל "mphcid" של פונקציה, תמיד הפונקציה תהיה נגזרת של פונקציה שאפשר לנחש במדויק. למשל:

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} dx$$

נראה "mphcid" אבל אם נתבונן בו קצת נבין ש:

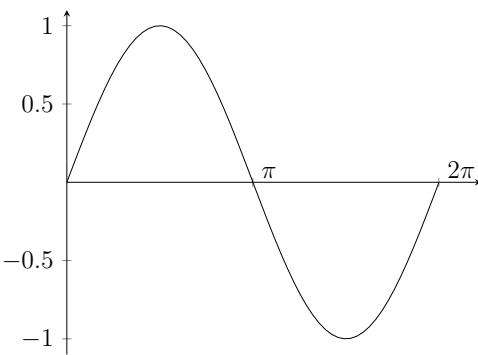
$$(\cos^{-2} x) = -2 \cdot (-\sin x) \cos^{-3} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}.$$

לפעמים מבקשים  $\int f'(x) dx$  כאשר  $f(x)$  נתון, אז אין מה לחשב!

---

<sup>3</sup>"לומוד וללמד אנליזה", עמ' 227.

- שימושו לב להבדל בין שטח לאינטגרל.



אם מבקשים את האינטגרל של סינוס מאפס עד  $2\pi$ , התשובה היא אפס:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(1 - 1) = 0.$$

אבל אם מבקשים את השטח התחום על ידי הפונקציה וציר ה- $x$  התשובה היא:

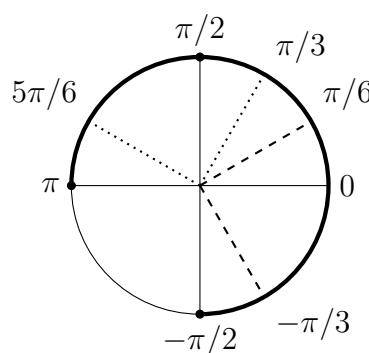
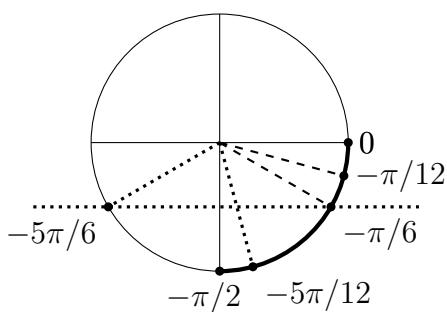
$$\int_0^\pi \sin x \, dx + \int_\pi^{2\pi} -\sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi + \cos x \Big|_\pi^{2\pi} = -(-1 - (1)) + (1 - (-1)) = 4.$$

- אינטגרל של פונקציה אי-זוגית בתחום סימטרי סביב ציר ה- $y$  הוא אפס, ואינטגרל של פונקציה זוגית בתחום סימטרי הוא פי שניים האינטגרל של התחום החסובי בלבד.
- ראו נספח ג' המסביר את החשיבות של מעגל היחידה בחישובים טריגונומטריים.
- בבעיות עם פונקציות טריגונומטריות, בנו תרשימים של מעגל היחידה וסמןנו עליו את התחום ההגדרה. התרשימים יעזר בקביעת סימני הפונקציות ובערכיה הפונקציות כאשר מוסיפים או מחסרים כפולות רצינליות של  $\pi$ .

$$\sin 2x = -(1/2) \quad (5\pi/6) - (\pi/2) = (\pi/3)$$

$$2x = -(5\pi/6), \quad x = -(5\pi/12) \quad (\pi/6) - (\pi/2) = -(\pi/3)$$

$$2x = -(\pi/6), \quad x = -(\pi/12)$$



- נניח שהתחום הנתון הוא  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , ונניח שמקבלים את התוצאה  $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . ברור שתשובה אחת היא  $2x = \frac{\pi}{3}$  ו- $2x = \frac{\pi}{6}$ . לא לשכוח את התשובה השנייה:  $\sin 2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ו- $x = \frac{\pi}{3}$  בתחום, למרות ש- $2x = \frac{2\pi}{3}$  אינו בתחום.

• בנוסחאות נتون:

$$(x^t)' = tx^{t-1}, \quad (\text{ט' ממשי})$$

אולם משתמשים בנוסחה רק עבור  $t$  שלם וחובי. אני מעדיף להשתמש בנוסחה זו עבור **כל**  $t$ , כי קל לזכור את הנוסחה והчисובים פשוטים. למשל, מיותר לזכור את הנוסחה הנתונה:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

כ"י:

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

הчисICON בולט כאשר צריכים לחשב נגזרת רציננית. כאשר  $f(x) = 1, g(x) = x^t$ , במקומות להשתמש בנוסחה המוסבכת עבור הנגזרת של  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , פשוט יותר לחשב:

$$\left(\frac{1}{x^t}\right)' = (x^{-t})' = -t(x^{-t-1}) = \frac{-t}{x^{t+1}}.$$

כאשר במונה יש קבוע ובמכנה יש פונקציה מורכבת עדין החישוב לא מסובך. למשל:

$$\begin{aligned} \left(\frac{14}{x^2 - 3x + 4}\right)' &= 14 \left((x^2 - 3x + 4)^{-1}\right)' \\ &= -14(x^2 - 3x + 4)^{-2}(2x - 3) \\ &= \frac{-14(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 4)^2}. \end{aligned}$$

• אם  $f(x) = 0$  או  $-f(x) = -0 = 0$ . אמנם התוצאה פשוטה אבל היא שימושית כאשר חושבו נקודות איפוס של נגזרת, וצריך למצוא נקודות איפוס של השיליה של הנגזרת, למשל:

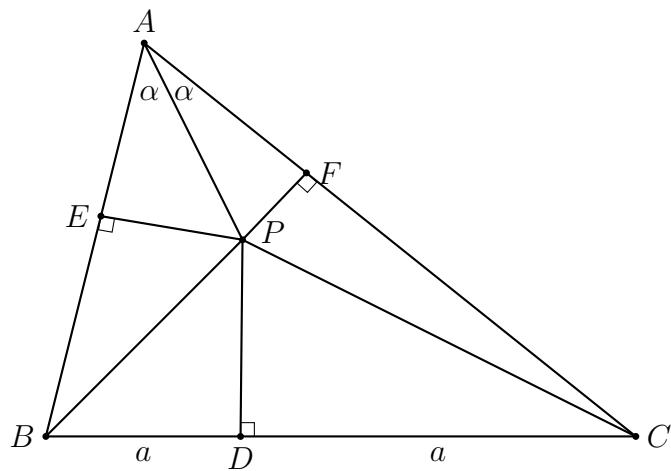
$$(g(x) - f(x))' = (-1 \cdot (f(x) - g(x))' = -1(f(x) - g(x))',$$

ולכן אם  $(g(x_1) - f(x_1))' = -1 \cdot 0 = 0$ , מתקבל מיד  $(f(x_1) - g(x_1))' = 0$

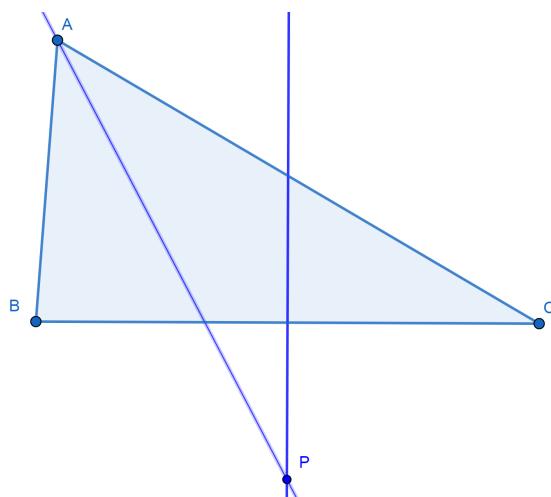
## נספח א' אין לสมוד על איוורים

הנה הוכחה "נכונה" שכל משולש שווה שוקיים!  
 נתון משולש שרירוטי  $ABC$ , תהי נקודת החיתוך בין **חותם הזווית** של  $\angle BAC$  לבין האנך  $BC$ ,  $AB, AC$  מ- $P$  לצלעות  $BC$ . סימנו ב- $D, E, F$  את נקודות החיתוך של האנכים מ- $P$  לצלעות  $AB, AC$  ו- $AP$  משותף.  
 $\triangle APE \cong \triangle APF$  כי הם משולשים ישר זווית עם זוויות שוות  $\alpha$  וצלע  $AP$  משותף.  
 $\triangle DPB \cong \triangle DPC$  כי הם משולשים ישר זווית עם צלע משותף  $PD = DC = a$  ו- $BD$  הוא האנך האמצעי ל- $BC$ .  
 $\triangle EPB \cong \triangle FPC$ , כי הם משולשים ישר זווית עם  $EP = PF$  לפי החפיפה הראשונה ו- $PB = PC$  לפי החפיפה השנייה.  
 לחבר את השוויונות ונקבל ש- $\triangle ABC$  שווה שוקיים:

$$AB = AE + EB = AF + FC = AC.$$

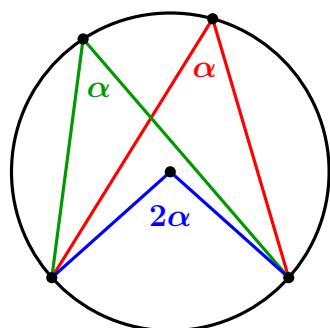
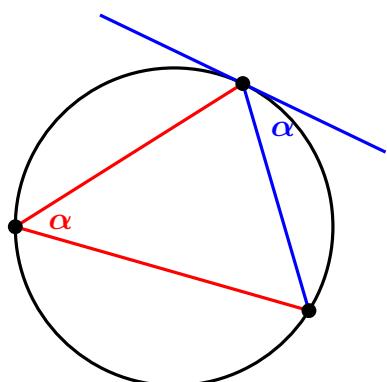
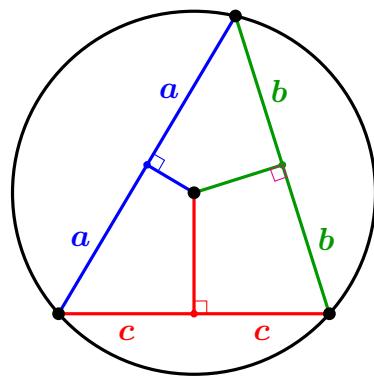
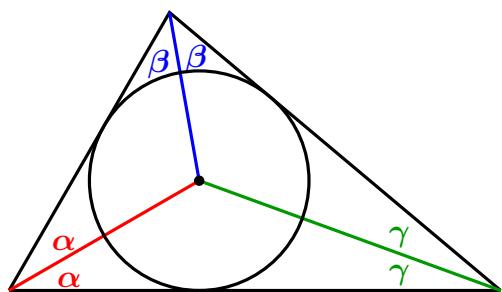
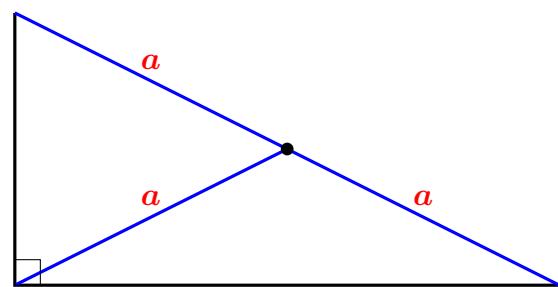
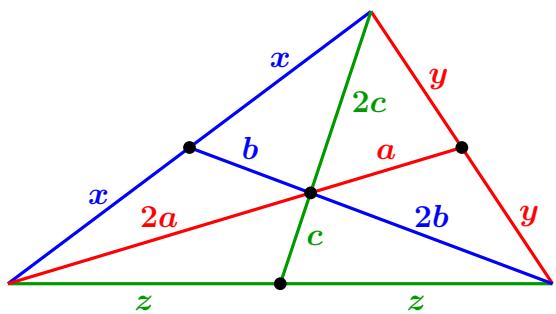
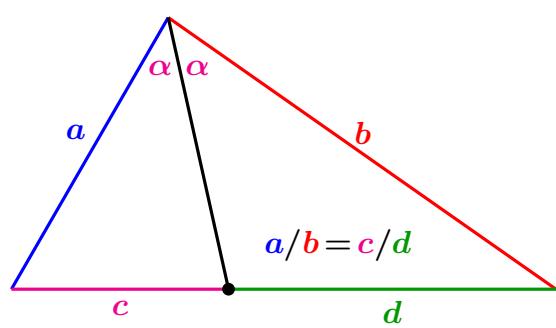
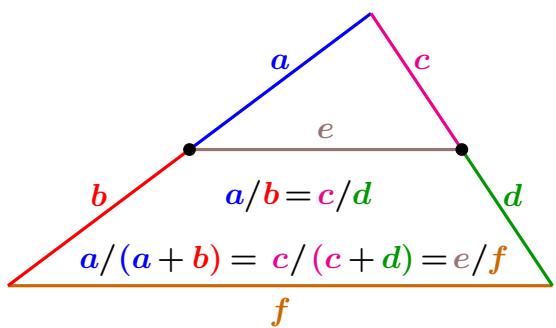


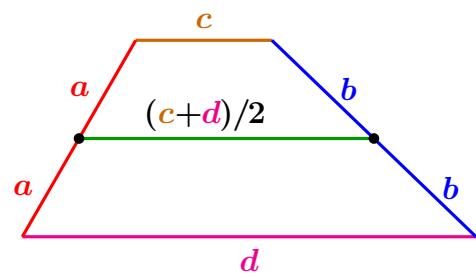
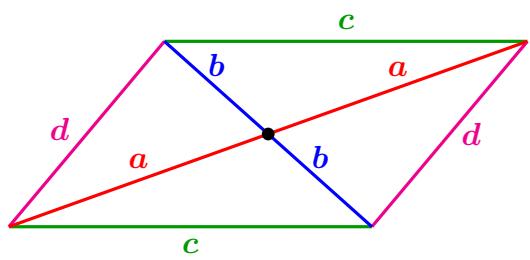
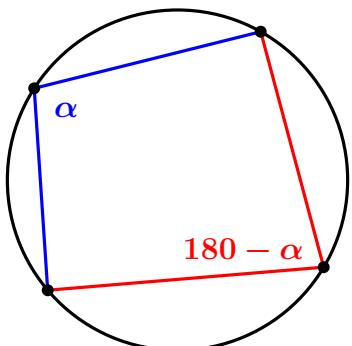
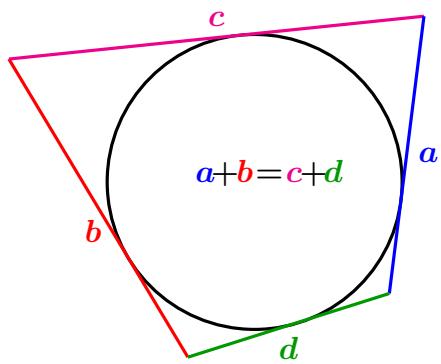
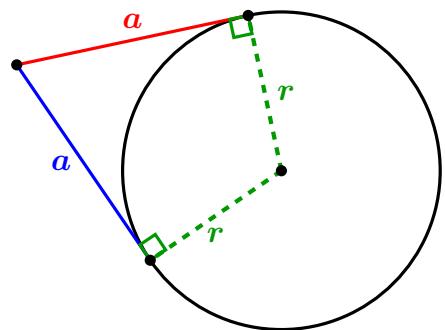
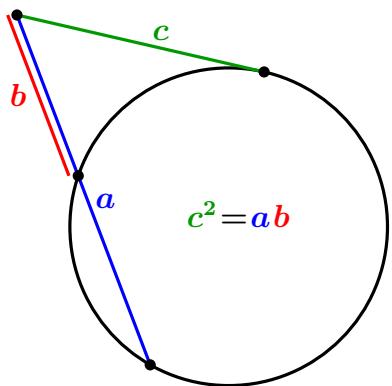
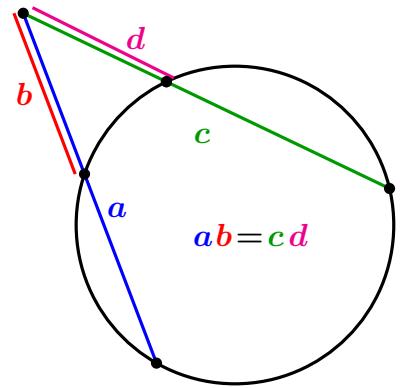
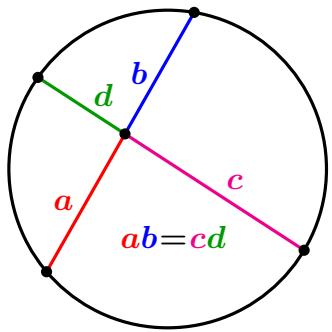
הבעיה בהוכחה היא שהאיור אינו נכון כי הנקודה  $P$  נמצאות **מחוץ** למשולש:





## נספח ב' ייצוג גרפי של משפטים בגיאומטריה

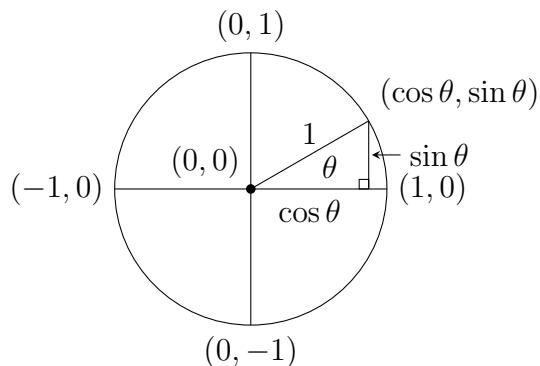




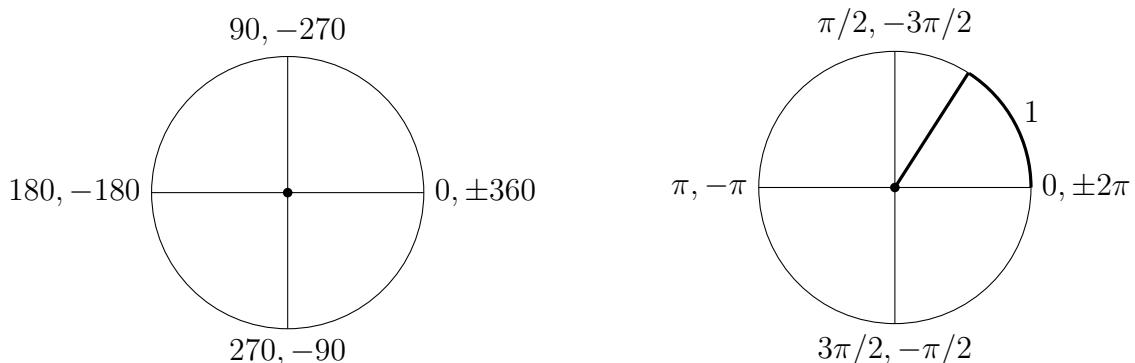
## נספח ג' מעגל היחידה

### רבייעים של מעגל היחידה

מעגל שהרדיוס שלו 1 נקרא **מעגל היחידה**.



הציריים של מעגל היחידה מחלקים אותו באופן טבעי לארבעה רבייעים. זוויות נמדדות במעלהות בין  $0^\circ$  ל- $360^\circ \pm$ , כאשר הערכיים חיוביים אם מודדים נגד כיוון השעון, ושליליים עם כיוון השעון. ייחידה אחרת לזוויות היא הרדיאן. רדיאן אחד הוא הזוויות הכולאת קשת שאורכו שווה לרדיוס. במעגל היחידה הרדיוס הוא 1 ולכן היקף הוא  $2\pi$ . רדיאן אחד שווה בערך 57.3 מעלות.

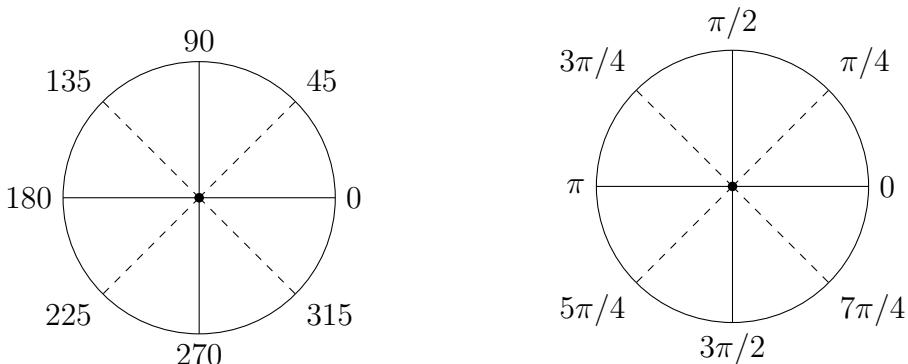


מהחיתוכים של הציריים עם מעגל היחידה נקבל את ערכי הסינוס והקוסינוס של הזוויות:

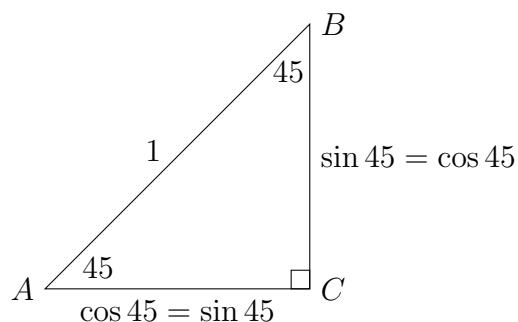
זוויות (מעלהות)	זוויות (רדייאנים)	$\sin$	$\cos$
0	0	0	1
90, -270	$\pi/2, -3\pi/2$	1	0
180, -180	$\pi, -\pi$	0	-1
270, -90	$3\pi/2, -\pi/2$	-1	0

## חלוקת מעגל היחידה ל-8 קטעים

נחלק כל רביע בחצי ונקבל 8 קטעים. האזווית של כל קטע הוא  $45^\circ$  או  $\pi/4$  רדיאנטים:



במשולש  $\triangle ABC$  אם האזווית  $\angle BAC = 45^\circ$ , גמ  $\angle ABC = 45^\circ$  כדי שסכום האזויות במשולש יהיה  $180^\circ$ . המשולש שווי-שוקיים כך שערכי הסינוס והקוסינוס שוויים.



מממשפט פיתגורס:

$$\sin^2 45 + \cos^2 45 = 1$$

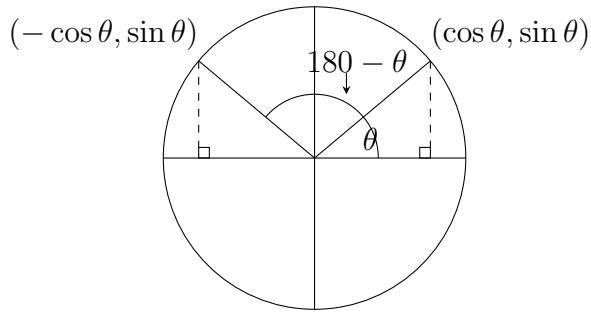
$$2 \sin^2 45 = 1$$

$$\sin 45 = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

## סינוס וкосינוס של זוויות הגודלות מ- $90^\circ$

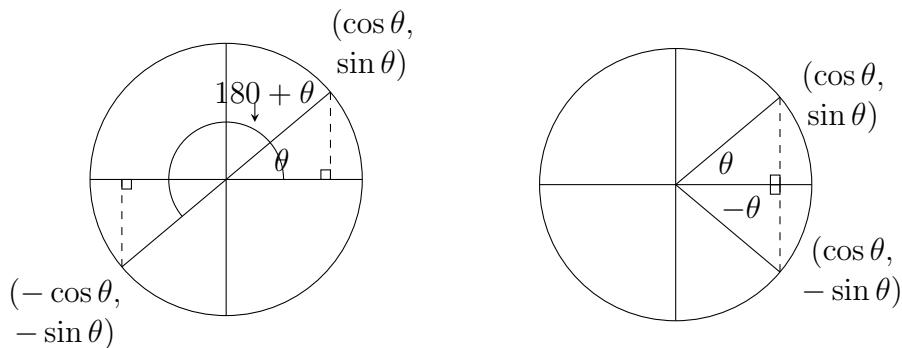
עכשו שאנו ידעים את ערכי הסינוס והקוסינוס של  $45^\circ$ , נוכל לשאול על האזויות הסימטריות  $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ ,  $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$ ,  $315^\circ = -45^\circ$ . בתרשיים שלහן סימנו את הزواיות הסימטריות עבור זוויות שרירותית  $\theta$  בربיע הראשון. ערכי  $x, y$  שווים פרט לסימנים.

בריבוע השני:



$$\cos 135 = -\cos 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 135 = \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

בריבוע השלישי והרביעי:



$$\cos 225 = -\cos 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 225 = -\sin 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315 = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 315 = -\sin 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

נסכם את הערךים בטבלה:

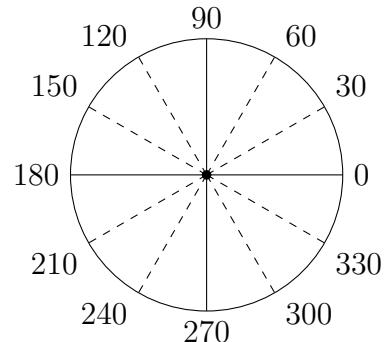
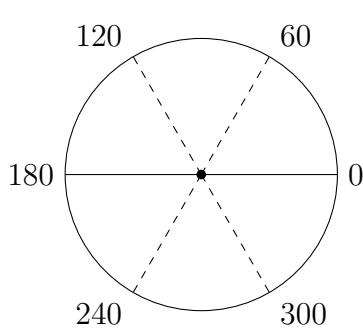
זווית (מעלות)	זווית (רדיאנים)	$\sin$	$\cos$
$\theta$	$\theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$
$180 - \theta$	$\pi - \theta$	$\sin \theta$	$-\cos \theta$
$180 + \theta$	$\pi + \theta$	$-\sin \theta$	$-\cos \theta$
$-\theta$	$\theta$	$-\sin \theta$	$\cos \theta$

ועבור  $45^\circ$

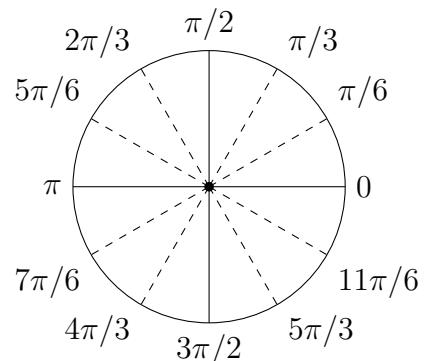
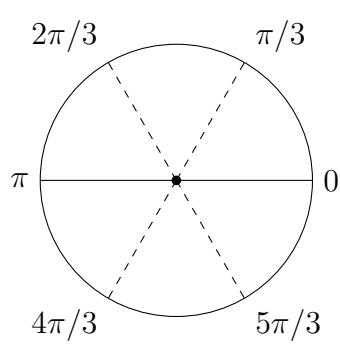
זווית (מעלות)	זווית (רדיאנים)	$\sin$	$\cos$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
135	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
225	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
315	$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$

## הסינוס והקוסינוס של $30^\circ$ ו- $60^\circ$

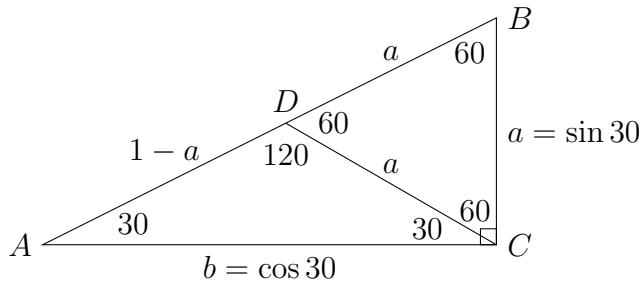
את מעגל היחידה ניתן לחלק ל-6 קטעים של  $60^\circ$  או ל-12 קטעים של  $30^\circ$ :



ברדיאנים:



נחשב את הסינוס של  $\angle BAC = 30^\circ$ . במשולש ישר-זווית  $\triangle ACB$  עם יתר באורך 1:



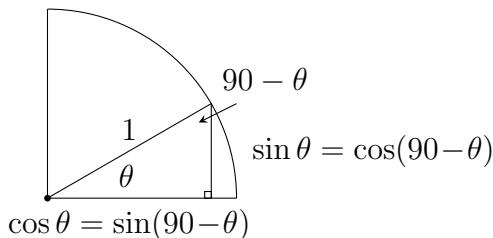
ציר קו אל היתר  $CD$  ש- $\angle ADC = 120^\circ$ ,  $\angle DCA = 30^\circ$  במשולש, וניתן  $\angle BCD = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$ . כדי להשלים ל- $180^\circ$  במשולש  $\triangle BCD$  שווי-צלעות ולכון  $\triangle ACD$  שווי-שוקיים:  $DC = a = \sin 30^\circ$ . ערך הקוסינוס הוא:

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

### סינוס וкосינוס של $(90 - \theta)$

הצלע הנגדי לזוויות מתחלף עם הצלע השכן של הזוויות ומכאן:

$$\cos(90 - \theta) = \sin \theta, \quad \sin(90 - \theta) = \cos \theta.$$



### סינוס וкосינוס של $2\theta$

את הנוסחאות  $\sin 2\theta, \cos 2\theta$  ניתן לשחזר מנוסחאות לחיבור של זוויות הניתנות בנוסחאות:

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= \sin(\theta + \theta) \\ &= \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta &= \cos(\theta + \theta) \\ &= \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

