בחינות בגרות במתמטיקה: החוויה

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

מוטי בן־ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci¯tea/benari/

גרסה 1.2.2

24 במרץ 2019

תוכן עניינים

הקדמה

מתמטיקאים ידועים לשמצה כי הם מפרסמים והוכחות מסודרות וברורות, ומסתירים את העובדה שסל הניירות שלהם מלא עד אפס מקום בניסיונות שהובילו למבואות סתומים וטעויות. ההיעדר של **תהליכי** הפתרון עלול לתסכל תלמידים שמתייאשים כאשר הם לא מצליחים לפתור בעיות בניסיון הראשון. לא חסרים פתרונות של בחינות הבגרות, אבל גם הם "נקיים" ללא ניסיונות שלא צלחו, פתרונות שונים לאותה בעייה, ודיונים על דרכי החשיבה שהובילו לפתרונות.

מסמך זה מכיל פתרונות לשאלות בפרק השלישי של הבחינות 806 בשנים תשע"ד עד תשע"ח.

השאלות יחסית פשוטות כי יש שיטות מוגדרות לחישוב תחומי הגדרה, נקודות קיצון ואסימפטוטות. עם זאת, לעתים החישובים הם ארוכים וחשוב לדייק כדי שגיאה בסעיף אחד יגרום לשגיאות בסעיפים הבאים.

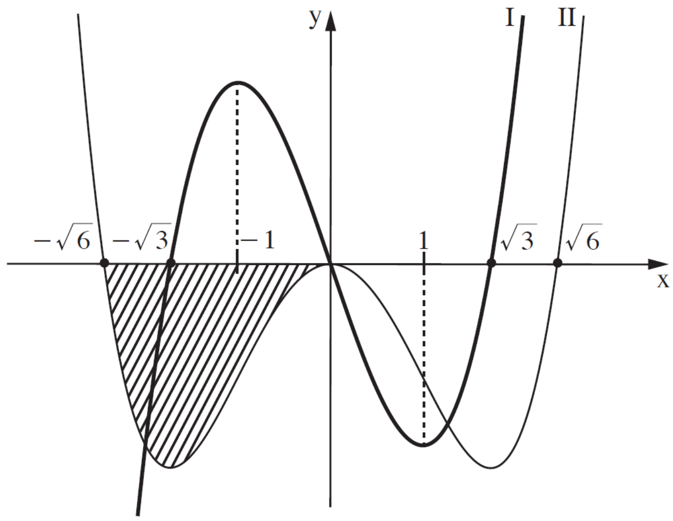
הערות על נוסחאות

בנספח רשמתי כמה הערות על הדרך שלי לחשב נוסחאות הנחוצות הפתרון הבעיות בפרק זה. מומלץ לעיין בנספח לפני קריאת הפתרונות. טרם נכתב.

פרק 6 חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

6.1 קיץ תשע"ח מועד ב

לפניך הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו־ $f''(x)$ (פונקציית הנגזרת הראשונה ופונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$) בתחום $-2.5 \le x \le 2.5$. שני הגרפים עוברים בראשית הצירים.



א. התאם בין הגרפים I ו־ II ובין הפונקציות $f'(x)$ ו־ $f''(x)$. נמק.

ב. **(1)** כמה נקודות קיצון פנימיות יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המתואר בגרף? נמק את תשובתך.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המתואר בגרף? נמק את תשובתך.

ג. עבור איזה ערך של x בתחום $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$ שיפוע המשיק לגרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, הוא מינימלי?

נתון: $f(x)$ היא פונקציה אי־זוגית.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה הוא t .

ה. הבע באמצעות t את השטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי החלק השלילי של ציר ה־ x (השטח המקווקו בציור).

ו. נתון: קיימים a, b ו־ c ממשיים כך ש־ $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$.

מצא את c ואת היחס $\frac{a}{b}$.

סעיף א

נקודות הקיצון של $f'(x)$ הן הנקודות בהן $f''(x) = 0$. לגרף II נקודות קיצון ב־$\pm\sqrt{3}, 0$ ובנקודות הללו הגרף I חותך את ציר ה־x. לכן, II הוא הגרף של $f'(x)$ ו־I הוא הגרף של $f''(x)$.

סעיף ב

(1) הגרף II מתאפס ב־$\pm\sqrt{6}, 0$, אבל ב־0 היא לא מחליף סימן ולכן 0 הוא לא נקודת קיצון.

(2) הנגזרת השנייה מתאפסת בשלוש נקודות $\pm\sqrt{6}, 0$. בכל שלושת הנקודות הנגזרת הראשונה לא מחליפה סימן, ולכן כולן נקודות פיתול ולא נקודות קיצון.

סעיף ג

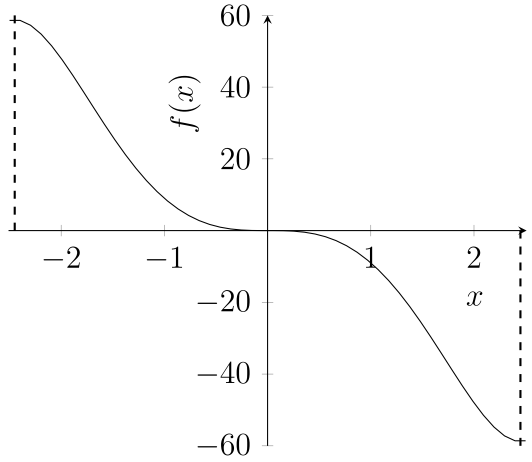
הנגזרת השנייה היא שיפוע המשיק לנגזרת הראשונה. בתחום הניתן הערך המינימלי מתקבל ב־1.

סעיף ד

נתון שהפוקציה אי־זוגית אז $f(0) = 0$.

$$a = -a \text{ אם ורק אם } a = 0 \text{. אם } f(x) \text{ אי־זוגית, } f(0) = f(-0) = -f(0) = 0 .$$

בין 0 ל־$\sqrt{3}$ הנגזרת הראשונה, השיפוע, שלילית (גרף II), ולכן $f(x)$ יורדת מאפס לערכים שליליים. בסעיף ב חישבנו שיש שתי נקודות פיתול נוספות ב־$\pm\sqrt{6} \approx 2.45$. נתון שהפונקציה אי־זוגיות כך שאפשר לקבל את הערכים עבור $x < 0$ על ידי סימטריה סביב ציר ה־y. הגרף נראה כך:



סעיף ה

מהגרף רואים שהגבולות הם $-\sqrt{6}, 0$, אבל כדי לנמק. מצאנו בסעיף ב ש־$f'(-\sqrt{6}) = 0$, ובסעיף ד ראינו ש־$f(0) = 0$, כך שציר ה־x תוחם את השטח. האינטגרל הוא:

$$\int_{-\sqrt{6}}^{0} 0 - f'(x)dx = - \left. f(x) \right|_{-\sqrt{6}}^{0} = -(-f(-\sqrt{6})) = t \,,$$

כי נקודת המקסימום של $f(x)$ היא ב־$x = -\sqrt{6}$.

סעיף ו

לפי $f(0) = 0$, $c = 0$.

הנגזרת הראשונה מתאפסת ב־$\pm\sqrt{6}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5ax^4 + 3bx^2 \\ &= 5a(\pm\sqrt{6})^4 + 3b(\pm\sqrt{6})^2 \\ &= 5a(\pm\sqrt{6})^2 + 3b = 0 \\ \frac{a}{b} &= -\frac{1}{10} \,. \end{aligned}$$

6.2 קיץ תשע"ח מועד א

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax-1}{\sqrt{ax^2-2x+1}}$. a הוא פרמטר.

נתון: הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x.

א. הוכח: $a>1$.

ענה על סעיף ב. אם יש צורך, הבע באמצעות a .

ב. **(1)** מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) כתוב את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה־ x .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $a=3$.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־ x , ועל ידי הישרים $x=\frac{2}{3}$ ו־ $x=2$.

ד. $g(x)$ היא פונקציה רציפה המוגדרת לכל x .

נסמן ב־ S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{3}$ ו־ $x=b$ ($b>\frac{1}{3}$).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{3}$ ו־ $x=b$ שווה ל־ 2S בעבור כל b .

הבע את $g(x)$ באמצעות $f(x)$ בתחום $x>\frac{1}{3}$ (כתוב את שתי האפשרויות). אין צורך להוכיח את תשובתך.

סעיף א

נתון שהפונקציה מוגדרת לכל x, ולכן הפולינום במכנה לא יהיו שורשים, כלומר, ש־$b^2-4ac<0$. $(-2)^2-4\cdot a\cdot 1=4-4a<0$, ולכן $a>1$. כמו כן, אסור שלפולינום יהיו ערכים שליליים כדי שהשורש יהיה מוגדר. לפולינום יש לפחות ערך חיובי אחד, למשל, $x=\frac{1}{2}$, $a>1>0$. אם הפולינום לא יכול לקבל ערך אפס, אין נקודות חיתוך עם ציר ה־x ולא יהיו ערכים שליליים.

סעיף ב

(1) $f(0)=\frac{-1}{\sqrt{1}}$ ונקודת החיתוך עם ציר ה־y היא $(0,-1)$. המכנה חיובי כך שנקודת החיתוך עם ציר ה־x מתקבל מ־$ax-1=0$, והנקודה היא $(\frac{1}{a},0)$.

(2) עבור $x\rightarrow+\infty$:

$$\frac{\left(a-\frac{1}{x}\right)}{+\sqrt{a-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}\xrightarrow[+\infty]{}=\frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}\,.$$

עבור $x\rightarrow-\infty$:

$$\frac{\left(a-\frac{1}{x}\right)}{-\sqrt{a-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}\xrightarrow[-\infty]{}=-\frac{a}{\sqrt{a}}=-\sqrt{a}\,.$$

(3) נחשב את הנגזרת הראשונה:

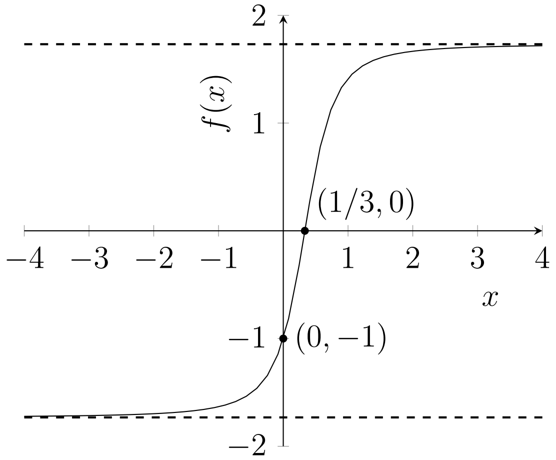
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a\sqrt{ax^2-2x+1} - (ax-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{ax^2-2x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}(2ax-2)}{(\sqrt{ax^2-2x+1})^2} \\ &= \frac{a(ax^2-2x+1)-(ax-1)(ax-1)}{(\sqrt{ax^2-2x+1})^2\sqrt{ax^2-2x+1}}\,. \end{aligned}$$

המכנה חיובי ולכן סימן הנגזרת תלוי בסימן המונה:

$$a^2x^2-2ax+a-a^2x^2+2ax-1=a-1\,.$$

הוכחנו ש־$a>1$ ולכן $a-1>0$ והפונקציה תמיד עולה.

(4)



סעיף ג

$\frac{2}{3}>\frac{1}{3}$ ולכן גבולות האינטגרל הם בחלק החיובי של הפונקציה.

$$\begin{aligned} \int_{2/3}^{2}\frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+1}} &= \int_{2/3}^{2}\frac{2}{2}\left(\sqrt{3x^2-2x+1}\right)' \\ &= \sqrt{3x^2-2x+1}\Big|_{2/3}^{2} \\ &= \sqrt{12-4+1}-\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{4}{3}+1}=3-1=2\,. \end{aligned}$$

סעיף ד

נתון ש־$b>\frac{1}{3}$ כך שגבולות האינטגרלים בתחום החיובי של הפונקציות. שתי האפשרויות הן ש־$f(x)$ מעל $g(x)$ וש־$g(x)$ מעל $f(x)$.

$$\int(g-f)=\int g-\int f=\int g-S=2S\,,$$

ולכן $\int g=3S$ ו־$g=3f$.

$$\int(f-g)=\int f-\int g=S-\int g=2S\,,$$

ולכן $\int g=-S$ ו־$g=-f$.

6.3 חורף תשע"ח

נתונות הפונקציות $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$, $g(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$.

ענה על סעיף א עבור התחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le \pi$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכות לציר ה־ x .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענה גם על סעיף ב עבור התחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le \pi$.

ב. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) הוכח: $g(x)=-f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

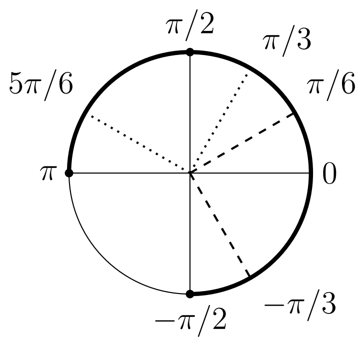
(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ג. מצא את ערך הביטוי $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$. נמק את תשובתך.

הקשת העבה מראה את התחום והקווים מראים איך מתקבל $x-\dfrac{\pi}{2}$ עבור $x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$:

$$\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{6}=-\frac{2\pi}{6}=-\frac{\pi}{3},\qquad \frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}-\frac{3\pi}{6}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\,.$$



סעיף א

(1) $f(x)$ מוגדרת אם $\cos x>0$, אם x מימין לציר ה־y. תחום ההגדרה הוא $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

(2)

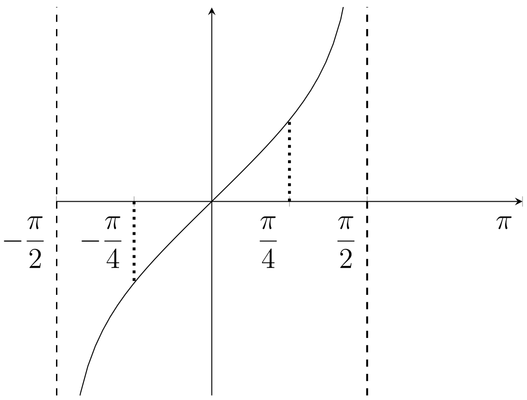
$$\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\xrightarrow[+\frac{\pi}{2}]{}\frac{+1}{0}=+\infty,\qquad \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\xrightarrow[-\frac{\pi}{2}]{}\frac{-1}{0}=-\infty\,.$$

(3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x\sqrt{\cos x} - \sin x \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{\cos x})^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sin x)}{\cos x} \\ &= \frac{2\cos^2 x + \sin^2 x}{2\cos x\sqrt{\cos x}} \\ &= \frac{\cos^2 x + 1}{2\cos x\sqrt{\cos x}} \,. \end{aligned}$$

בתחום ההגדרה $\cos x > 0$ ולכן הנגזרת הראשונה תמיד חיובית והפונקציה עולה בכל התחום. שימו לב שאם הנגזרת תמיד חיובית, היא לא מתאפסת בתחום כך שאין נקודות קיצון פנימיות.

(4) $f(0) = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$. ביחד עם חישוב האסימפטוטות, ניתן לצייר את גרף הפונקציה:



סעיף ב

(1) הפונקציה מוגדרת אם $\sin x > 0$: אם y מעל לציר ה־x. תחום ההגדרה הוא $0 < x < \pi$.

(2) חיבור או חיסור של $\frac{\pi}{2}$ משנה סינוס לקוסינוס ולהיפך. צריך רק לקבוע את הסימנים (ראו תרשים לפני סעיף א).

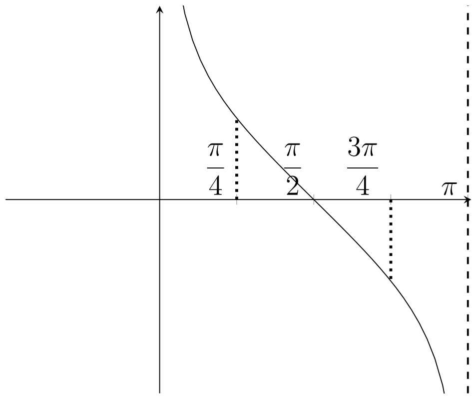
$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{-\cos x}{\sqrt{\sin x}} = -g(x)\,.$$

אפשר גם לחשב לפי הנוסחה לחיסור של סינוס וקוסינוס:

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \cos\frac{\pi}{2} - \cos x \sin\frac{\pi}{2} = -\cos x \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \cos\frac{\pi}{2} + \sin x \sin\frac{\pi}{2} = \sin x\,. \end{aligned}$$

(3) הגרף של $g(x)$ מתקבל מהזזה ימינה של $\frac{\pi}{2}$ והפיכת הסימן. למשל:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = -f\left(-\frac{\pi}{4}\right) .$$



סעיף ג

התרומה של החלק שלילי של הפונקציה לאינטגרל שווה לתרומה של החלק החיובי שלו, ולכן האינטגרל מתאפס.

מי שלא משתכנע מהטיעון יכול לחשב.

$$(\sqrt{\cos x})' = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{\cos x})^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sin x) = -\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} ,$$

ולכן:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} = -2\sqrt{\cos x}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -2\left(\sqrt{\sqrt{2}/2}\right) - (-2)\left(\sqrt{\sqrt{2}/2}\right) = 0 .$$

6.4 קיץ תשע"ז מועד ב

נתונה הפונקציה $f(x)=a-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}$. a הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה־ x .

ב. מצא את a .

הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)=|f(x)+k|$.

ידוע שגרף הפונקציה $g(x)$ משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $f(x)$.

מצא את k (מצא את שתי האפשרויות). נמק את תשובתך.

סעיף א

(1) תחום ההגדרה הוא $x\neq 2$ כי $x=2$ מאפס את המכנה של שני גורמים.

(2) כאשר $x\rightarrow\pm\infty$ שני גורמים שואפים לאפס, ולכן האסימפטוטה האופקית היא $y=a$.

כאשר $x\rightarrow\pm 2$ שני גורמים שואפים לאינסוף, ולכן האסימפטוטה האנכית היא $x=2$.

נבדוק את סימן הפונקציה השואפת לאינסוף. כאשר $x\rightarrow 2$, $\frac{2}{x-2}\gg\frac{1}{(x-2)^2}$ כך ש־$y\rightarrow+\infty$ גם מימין וגם משמאל.

(3)

$$f'(x)=-\frac{2\cdot -1}{(x-2)^2}+\frac{-2}{(x-2)^3}=0\,.$$

הפוקציה לא מוגדרת ב־$x=2$, כך שאפשר להכפיל את המשוואה ב־$(x-2)^3$. נקבל $2(x-2)=2$ ו־$x=3$. נקודת הקיצון היא $(3,a-1)$.

על ידי הכפלה ב־$(x-2)$ וב־$(x-2)^2$ הנגזרת הראשונה היא:

$$f'(x)=\frac{2(x-2)^2-2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{2x^2-10x+12}{(x-2)^4}\,.$$

המכנה חיובי לכן הסימן של הנגזרת השנייה הוא סימן נגזרת המונה $4x-10$. ב־$x=3$, הסימן חיובי והנקודת הקיצון היא מינימום.

דרך אחרת לבדוק אם מדובר במינימום או מקסימום היא באמצעות טבלת עליות וירידות:

x	0	2	2.5	3	4
$f'(x)$	0.75	$\times$	-0.8	0	0.25
$f(x)$	$\nearrow$	$\times$	$\searrow$	$a-1$	$\nearrow$

הנקודה $(3,a-1)$ היא מינימום.

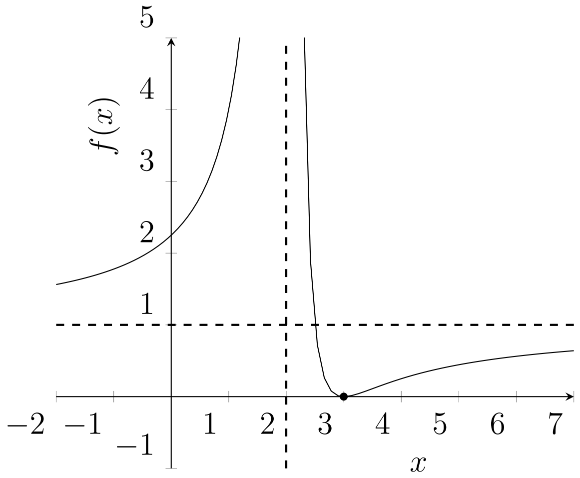
(4) הפתרון מופיע בטבלה בתת־סעיף הקודם.

סעיף ב

נתון שערכה של $f(x)$ בנקודת המינימום הוא אפס. $f(3)=a-1=0$ ו־$a=1$.

סעיף ג

לפי טבלת העליות והירידות, הפונקציה עולה עד לאסימפטוטה האנכית, אח"כ יורדת לנקודת המינימום ואח"כ עולה.



סעיף ד האסימפטוטה האופקית היא $y=a=1$ ונקודת המינימום היא $(3,a-1)=(3,0)$:

$$\begin{aligned} g(3) &= |f(3)+k| = a = 1 \\ |0+k| &= 1 \\ k &= \pm 1\,. \end{aligned}$$

6.5 קיץ תשע"ז מועד א

נתונה הפונקציה $f(x) = \dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+24}}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f(x+5)$.

ב. (1) הוכח ש־ $g(x)$ היא פונקציה אי־זוגית.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. הסבר מדוע לכל $1 < a < b$ מתקיים השוויון: $\int_{a+5}^{b+5} f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.

סעיף א

(1) הפונקציה מוגדרת אם המכנה שונה מאפס ואם הביטוי בשורש גדול או שווה לאפס:

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 24 &> 0 \\ (x-4)(x-6) &> 0\,. \end{aligned}$$

המכפלה חיובית רק אם שני הגורמים גדולים מאפס או שניהם קטנים מאפס. אבל אם $x > 6$ אז גם $x > 4$ ואם $x < 4$ אז גם $x < 6$, ולכן הפונקציה מוגדרת כאשר:

$$x < 4 \quad \text{או} \quad x > 6\,.$$

(2) $f(x) = 0$ אם המכנה חיובי והמונה $x - 5 = 0$. אבל 5 לא בתחום ההגדרה כך שאין נקודת חיתוך עם ציר ה־x. נחשב את נקודת החיתוך $(0, y)$ עם ציר ה־y:

$$y = f(0) = \frac{0-5}{\sqrt{0^2 - 10\cdot 0 + 24}} = \frac{-5}{\sqrt{24}}\,.$$

(3) כאשר $x \to 6^+$ המונה שואף ל־$+1$, ובמכנה שורש חיובי שהולך וקטן, ולכן $f(x) \to +\infty$. $x = 6$ היא אסימפטוטה אנכית אחת. באופן דומה, כאשר $x \to 4^-$, $f(x) \to -\infty$, ו־$x = 4$ היא אסימפטוטה אנכית שנייה.

כאשר $x \to +\infty$ המונה שואף ל־$+\infty$, ובמכנה $x^2 \gg -10x + 24$, וערכו שואף ל־$+\infty$. לכן $y = 1$ היא אסימפטוטה אופקית אחת. באופן דומה, כאשר $x \to -\infty$, $y \to -1$ ו־$y = -1$ היא אסימפטוטה אופקית שנייה.

(4) אי־אפשר מייד להכין טבלה של עליות וירידות, כי אין אנו יודעים אם יש נקודות קיצון בתחום ההגדרה של הפונקציה. כצעד ראשון נבדוק את ערכו של $f(x)'$. לשם קיצור נסמן $u = x^2 - 10x + 24$. הנגזרת היא:

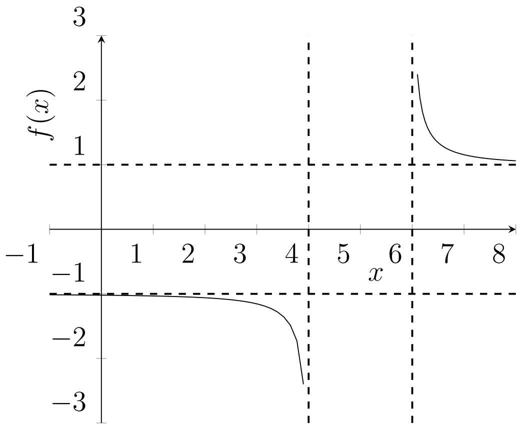
$$\frac{1 \cdot \sqrt{u} - (x-5) \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x-10)}{u} = \frac{u - (x-5)(x-5)}{u\sqrt{u}}\,.$$

u חיובי **בתחום ההגדרה** וגם $\sqrt{u}$ חיובי, ולכן הסימן או נקודת האיפוס של הנגזרת תלוי רק במונה:

$$u - (x-5)(x-5) = x^2 - 10x + 24 - x^2 + 10x - 25 = -1\,.$$

בתחום ההגדרה, הנגזרת שלילית (ולא מתאפסת), ולכן הפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה.

(5)



סעיף ב

(1) פתרון אחד הוא לחשב את $g(x), g(-x)$ ולהראות ש־$g(-x) = -g(x)$:

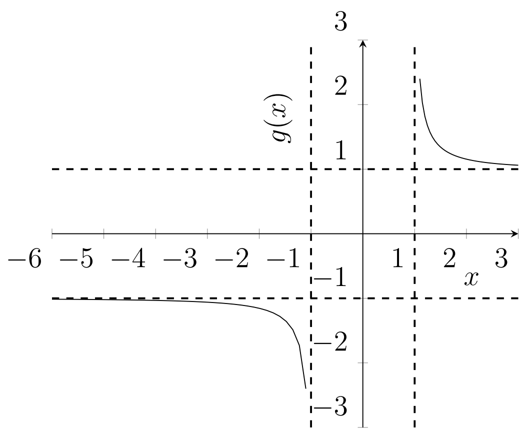
$$\begin{aligned} g(-x) &= f(-x+5) = f(5-x) \\ &= \frac{5-x-5}{\sqrt{(5-x)^2 - 10(5-x) + 24}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{25 - 10x + x^2 - 50 + 10x + 24}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+5) \\ &= \frac{x+5-5}{\sqrt{(x+5)^2 - 10(x+5) + 24}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 10x + 25 - 10x - 50 + 24}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = -\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = -g(-x)\,. \end{aligned}$$

פתרון מעט יותר מסובך הוא להראות $g(-x)=-g(x)$ בצורה ישירה:

$$\begin{aligned} g(-x) &= f(-x+5) = f(5-x) \\ &= \frac{5-x-5}{\sqrt{(5-x)^2-10(5-x)+24}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{25-10x+x^2-50+10x+24}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{(x^2+10x+25)-(10x+50)+24}} \\ &= \frac{-((x+5)-5)}{\sqrt{(x+5)^2-10(x+5)+24}} \\ &= -g(x)\,. \end{aligned}$$

(2) הגרף הוא אותו גרף מוזז שמאלה חמש יחידות:



סעיף ג

נתון ש־$1<a<b$, וכפי שניתן לראות מהגרף, a,b הם בתחום ההגדרה של g. נחשב:

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x+5)dx = \int_{a+5}^{b+5} f(x)dx\,.$$

6.6 חורף תשע"ז

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^2+4x}{x^2+3x+b}$.

a ו־ b הם פרמטרים.

נתון: $x=1$, $y=1$ הן אסימפטוטות של הפונקציה.

א. מצא את a ואת b .

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) האם יש לפונקציה אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים (מלבד $x=1$ ו־ $y=1$) ? הסבר.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. עבור אילו ערכי x מתקיים: $|f(x)|=-f(x)$? נמק.

ה. נגדיר $g(x)=f^2(x)\cdot f'(x)$.

הראה כי השטח המוגבל על ידי ציר ה־ x , על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הישר $x=0.5$ הוא $\frac{1}{3}$. נמק את תשובתך.

סעיף א

נקבל את האסימפטוטה אנכית $x=1$ כאשר המכנה מתאפס:

$$\begin{aligned}x^2+3x+b &= 0\\ 1^2+3\cdot 1+b &= 0\\ b &= -4\,.\end{aligned}$$

נחשב את האסימפטוטה האופקית $y=1$. כאשר $x\rightarrow\infty$, $a=1$.

$$\frac{a+\frac{4}{x}}{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}\rightarrow 1\,,$$

סעיף ב

(1) המכנה מתאפס כאשר:

$$x^2+3x-4=(x+4)(x-1)=0\,,$$

ולכן הפונקציה מוגדרת עבור כל x פרט ל־$x=1, x=-4$.

(2) נציב $x=0$. המונה מתאפס והמכנה לא מתאפס ולכן נקודת החיתוך עם ציר ה־y היא $(0,0)$.

נציב $y=0$ ונקבל $x^2+4x=x(x+4)=0$. $(0,0)$ היא נקודת חיתוך עם שני הצירים. ב־$x=-4$ הפונקציה לא מוגדרת, ולכן אין עוד נקודת חיתוך עם ציר ה־x.

(3) אין עוד אסימפטוטה אופקיות כי לפי החישוב בסעיף א, ה־אסימפטוטה היא $\frac{a}{1}$ שיש לה רק פתרון אחד כי a הוא קבוע.

אסימפטוטה אנכית יש כאשר $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)=0$. אבל $x=-4$ גם מאפס את המונה. נצמצם את הפונקציה:

$$\frac{x^2+4x}{x^2+3x-4}=\frac{x(x+4)}{(x+4)(x-1)}=\frac{x}{x-1}\,.$$

כאשר $x\to -4$ (בשני הכיוונים), ערך הפונקציה שואפת ל־$\frac{4}{5}$, ולכן אין כאן אסימפטוטה אלא חור.

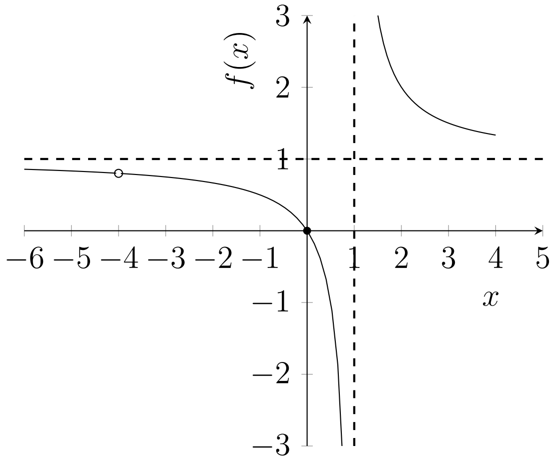
(4) נחשב את הנגזרת הראשונה, כאשר נתייחס רק למונה כי המכנה הוא ריבוע שתמיד חיובי פרט לנקודות של החור והאסימפטוטה:

$$(x^2+4x)'(x^2+3x-4)-(x^2+4x)(x^2+3x-4)'=-(x+4)^2\,.$$

(לא רשמתי את כל החישובים הארוכים.) ערך זה לא מתאפס ותמיד שלילי, ולכן הפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה שלה.

אפשר לקצר אם נצמצם את הפונקציה לפי שנחשב את הנגזרת. $\left(\frac{x}{x-1}\right)'=-1$, שתמיד שלילי.

סעיף ג



סעיף ד

אם נתייחס לגרף, $|f(x)|$ מעביר ערכים מתחת לציר ה־x לערכים מעל לציר, ו־$-f(x)$ מעביר את כל הערכים לצד השני של ציר ה־x. $|f(x)|=-f(x)$ רק עבור ערכים מתחת לציר ה־x כי רק עבור ערכים אלה מתבצעת אותה פעולה. עבור פונקציה זו הערכים הם $0\le x<1$.

סעיף ה

מסעיף ב $f'(x)$ תמיד שלילי ולכן $g(x)=f(x)^2\cdot f'(x)$ תמיד שלילי או אפס. ראינו גם ש־$f(0)=0$, ולכן השטח שיש לחשב נמצא מתחת לציר ה־x ומימין לציר ה־y. נשים לב ש־$(f^3(x))'=3f^2(x)\cdot f'(x)$, ונוכל לחשב את האינטגרל:

$$\int_0^{0.5} 0-f^2(x)\cdot f'(x)=-\frac{1}{3}f^3(x)\Big|_0^{0.5}=-\frac{1}{3}f^3(0.5)=-\frac{1}{3}\cdot -1=\frac{1}{3}\,.$$

6.7 קיץ תשע"ו מועד ב

נתונה הפונקציה: $f(x) = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x}$.

א. בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ x (אם יש כאלה).

(3) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x (אם יש כאלה).

(4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$:

(1) הראה שפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי ציר ה־ y .

סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס. $\cos^2 x = 0$ בתחום כאשר $x = \frac{\pi}{2}$, ולכן תחום ההגדרה הוא $0 \le x < \frac{\pi}{2}$.

(2) כאשר $x \to \frac{\pi}{2}$, המכנה שואף לאפס אבל המונה שואף לערך שונה מאפס -1, ולכן $x = \frac{\pi}{2}$ היא אסימפטוטה אנכית.

(3) בתחום ההגדרה המכנה לא מאפס, ולכן נקודות החיתוך הן הנקודות עבורן המונה מתאפס:

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x &= 1 \\ \cos x &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \,. \end{aligned}$$

בתחום ההגדרה יש רק פתרון אחד ונקודת הקיצון הוא $(\frac{\pi}{4}, 0)$.

(4) בתחום ההגדרה $\cos x > 0$ ולכן $f(x) = 1 - \frac{1}{2\cos^2 x}$. חישוב הנגזרת הוא:

$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)' = -\left(-2\cos x \cdot -\sin x\right) = -2\cos x \sin x = 0 \,.$$

$f'(x)$ מתאפס בתחום ההגדרה כאשר $x = 0$ ונקודת הקיצון היא $(0, \frac{1}{2})$. סינוס וקוסינוס חיוביים בתחום, ולכן הנגזרת שלילית והפונקציה יורדת בכל התחום. נקודת הקיצון היא מקסימום.

אפשרות אחרת היא לחשב את הנגזרת השנייה:

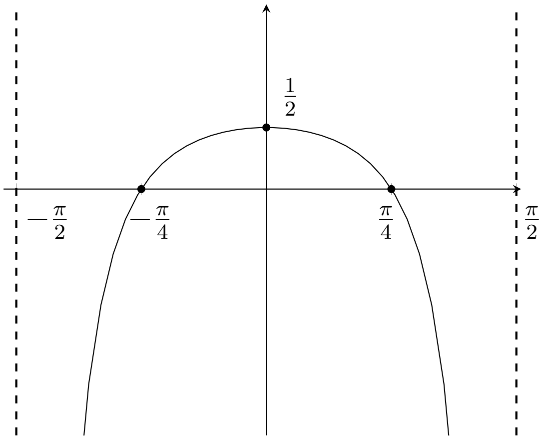
$$f''(x) = (-2\cos x \sin x)' = -2(-\sin^2 x + \cos^2 x) \,.$$

בנקודת הקיצון $x = 0$, $f''(0) = -2 \cdot (-0 + 1) = -2$ ונקודת הקיצון היא מקסימום.

סעיף ב

(1) $\cos(-x) = \cos x$, $\cos^2(-x) = \cos^2 x$ והפונקציה זוגית.

(2) המקסימום הוא ב־$(0, \frac{1}{2})$, הפונקציה יורדת בתחום ההגדרה $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, יש אסימפטוטה אנכית ב־$\frac{\pi}{2}$, והפונקציה זוגית. התרשים שמתקבל הוא:



סעיף ג

הנוסחה $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ אמנם מופיעה בנוסחאון אבל לא מרבים להשתמש בה, כך שהשאלה עלולה להיות קשה.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\cos^2 x} \\
&= x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\tan 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

6.8 קיץ תשע"ו מועד א

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - \sin(2x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le 0$.

ענה על הסעיפים שלפניך עבור התחום הנתון.

א. מצא את השיפוע הגדול ביותר ואת השיפוע הקטן ביותר של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. (1) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

אני ממש לא אוהב את השאלה כי היא מחייבת חישובים רבים עם מחשבון!

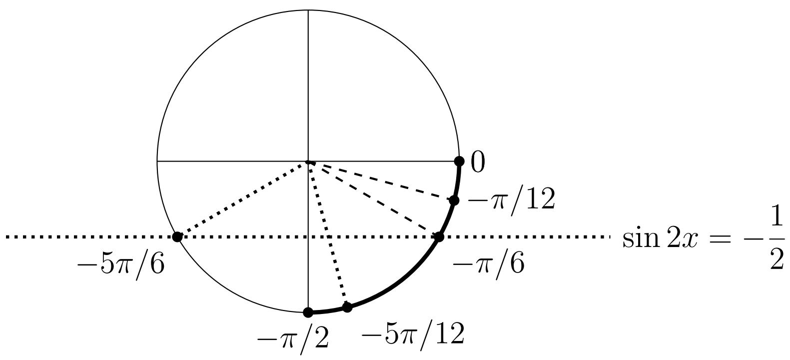
סעיף א

נתחיל עם חישוב הנגזרות:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - \sin 2x \\ f'(x) &= 2x - 2\cos 2x \\ f''(x) &= 2 + 4\sin 2x\,. \end{aligned}$$

השאלה מבקשת את נקודות הקיצון של הנגזרת הראשונה ונקבל אותם על ידי חישוב הנקודות בהן **הנגזרת השנייה** מתאפסת:

$$\begin{aligned} 2 + 4\sin 2x &= 0 \\ \sin 2x &= -\frac{1}{2} \\ 2x &= -\frac{\pi}{6} \\ x &= -\frac{\pi}{12}\,. \end{aligned}$$



כאן יש להיזהר. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ מאפס את הנגזרת השנייה, למרות ש-$2x = -\frac{5\pi}{6}$ לא נמצא בתחום כי $-\frac{5\pi}{6} < -\frac{\pi}{2}$, אבל $x = \frac{1}{2} \cdot -\frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{12} > -\frac{\pi}{2}$ כן נמצא בתחום, ולכן היא נקודת קיצון של הנגזרת הראשון.

כדי לבדוק אם הנקודות הקיצון הן מינימום או מקסימום, נחשב את **הנגזרת השנייה של הנגזרת הראשונה** שהיא הנגזרת השלישית של הפונקציה.

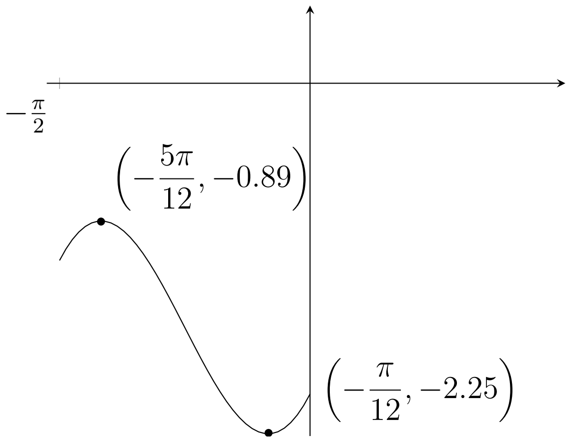
$$\begin{aligned}
f''(x) &= 2 + 4\sin 2x \\
f'''(x) &= 8\cos 2x \\
f'''\left(-\frac{\pi}{12}\right) &= 8\cos\left(-2\cdot\frac{\pi}{12}\right) = 6.93 > 0 \\
f'''\left(-\frac{5\pi}{12}\right) &= 8\cos\left(-2\cdot\frac{5\pi}{12}\right) = -6.93 < 0\,.
\end{aligned}$$

מכאן שהשיפוע הגדול ביותר נמצא ב־$x = -\frac{5\pi}{12}$, והשיפוע הקטן ביותר נמצא ב־$x = -\frac{\pi}{12}$.

שימו לב שהשאלה מבקשת את ערכי הקיצון של **השיפועים** ולא רק איפה הם נמצאים:

$$\begin{aligned}
f'\left(-\frac{5\pi}{12}\right) &= 2\cdot -\frac{5\pi}{12} - 2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -2.62 + 1.73 = -0.89 \\
f'\left(-\frac{\pi}{12}\right) &= 2\cdot -\frac{\pi}{12} - 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -0.52 - 1.73 = -2.25\,.
\end{aligned}$$

סעיף ב



סעיף ג

(1) נקודות הפיתול הן הנקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת $\left(-\frac{\pi}{12}, 0.569\right)$ ו־$\left(-\frac{5\pi}{12}, 2.21\right)$.

עבור הערך $-\frac{5.5\pi}{12}$ שהוא מעט קרוב יותר ל־$\frac{\pi}{2}$ הנגזרת השנייה היא:

$$f''\left(-\frac{5.5\pi}{12}\right) = 2 + 4\sin\left(2\cdot -\frac{5.5\pi}{12}\right) = 0.965 > 0\,,$$

והפונקציה קעורה כפלי מעלה ב־$-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{5\pi}{12}$.

עבור הערך $-\frac{\pi}{4}$ שהוא בין שתי נקודות הפיתול, הנגזרת השנייה היא:

$$f''\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 + 4\sin\left(2\cdot -\frac{\pi}{4}\right) = -2 < 0\,,$$

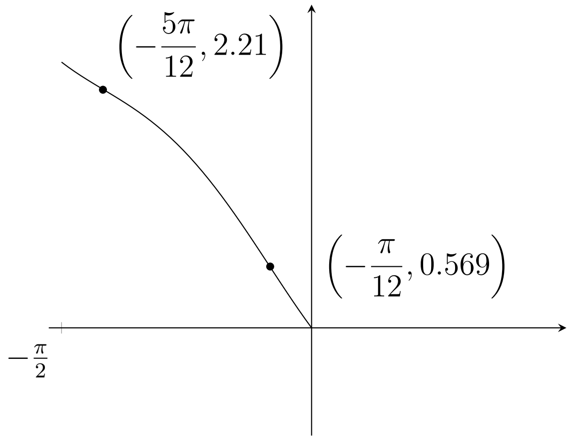
והפונקציה קעורה כפלי מטה ב־$-\frac{5\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{12}$.

עבור הערך $-\frac{\pi}{24}$ שהוא מעט קרוב יותר ל־0 הנגזרת השנייה היא:

$$f''\left(-\frac{\pi}{24}\right) = 2 + 4\sin\left(2 \cdot -\frac{\pi}{24}\right) = 0.965 > 0\,,$$

והפונקציה קעורה כפלי מעלה ב־$-\frac{\pi}{12} < x < 0$.

(2) נקודות הפיתול מסומנות.



6.9 חורף תשע"ו

נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot \sin^2 x + b \cdot \cos(4x)$ בתחום $0 \le x \le \frac{2\pi}{3}$.

a ו־ b הם פרמטרים.

לפונקציה $f(x)$ יש קיצון בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{3}$.

נתון כי $\underline{b < 0}$.

א. הבע באמצעות b (במידת הצורך) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון.

ד. (1) מצא את הערך של האינטגרל $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} f''(x)dx$.

(2) בתחום $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{2\pi}{3}$, הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חותך את ציר ה־ x בנקודה אחת שבה $x = k$.

בתחום $\frac{\pi}{2} \le x \le k$, השטח המוגבל על ידי הגרף של $f''(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$, שווה ל־ S.

הבע באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f''(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = \frac{2\pi}{3}$ בתחום $k \le x \le \frac{2\pi}{3}$. נמק.

<u>הערה</u>: אין צורך למצוא את $f''(x)$.

שאלה מאוד ארוכה. קצת מפחידה!

סעיף א

נחשב את הנגזרת הראשונה, נציב $x = \frac{\pi}{3}$, ונבדוק איפה היא מתאפסל?

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2a \sin x \cos x - 4b \sin 4x \\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2a \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - 4 \sin \frac{4\pi}{3} \\ &= 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - 4b \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = 0 \\ a &= -4b\,. \end{aligned}$$

השאלה מבקשת את נקודות הקיצון באמצעות b ולכן נציב עבור a:

$$f'(x) = -8b\sin x\cos x - 4b\sin 4x = 0\,.$$

המשוואה נראית די מסובכת אבל ניתן לפשט אותו על ידי שימוש בנוסחה עבור $\sin(\theta+\theta)$:

$$\begin{aligned}
-8b\sin x\cos x - 4b\sin 4x &= -4b(2\sin x\cos x + \sin(2x+2x)) \\
&= -4b(\sin 2x + 2\sin 2x\cos 2x) \\
&= -4b\sin 2x(1+\cos 2x) = 0\,.
\end{aligned}$$

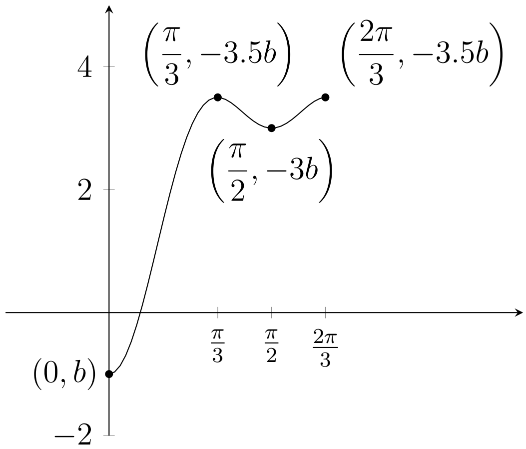
נבדוק כל אחד משני הגורמים כדי לחפש איפה הם מתאפסים בתחום. $\sin 2x = 0$ כאשר $2x = 0, \pm\pi, \ldots$. בתחום, האפשרויות הן $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. מ־$1+\cos 2x = 0$ יש לנו $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ ו־$2x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \ldots$. בתחום, האפשרויות הן $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$. נחשב את נקודות הקיצון:

$$\begin{aligned}
f(0) &= -4b\sin^2 0 + b\cos 0 = b \\
f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -4b\sin^2\frac{\pi}{3} + b\cos\frac{4\pi}{3} = -4b\cdot\frac{3}{4} + b\cdot -\frac{1}{2} = -3.5b \\
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -4b\sin^2\frac{\pi}{2} + b\cos\frac{4\pi}{2} = -4b + b = -3b \\
f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= -4b\sin^2\frac{2\pi}{3} + b\cos\frac{8\pi}{3} = -4b\cdot\frac{3}{4} + b\cdot -\frac{1}{2} = -3.5b\,.
\end{aligned}$$

אלה כל נקודות הקיצון כולל בקצות התחום והפונקציה מוגדרת בכל התחום. נתון $b<0$, ולכן:

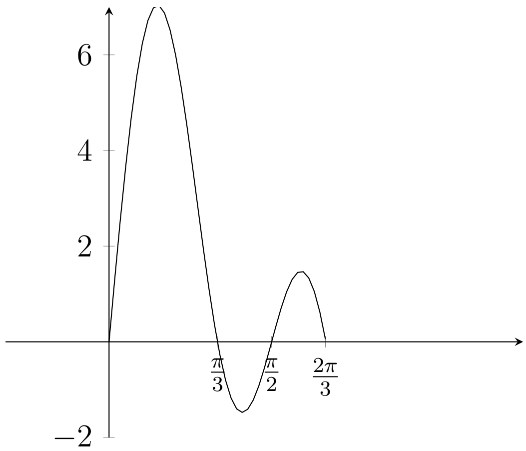
מינימום	$(0,b)$
מקסימום	$\left(\frac{\pi}{3}, -3.5b\right)$
מינימום	$\left(\frac{\pi}{2}, -3b\right)$
מקסימום	$\left(\frac{2\pi}{3}, -3.5b\right)$

סעיף ב



סעיף ג

בארבעת נקודות הקיצון הנגזרת הראשונה היא אפס. מעיון הגרף של $f(x)$, השיפוע מתחיל באפס, עולה ואז יורדת שוב לאפס, אח"כ יורדת עוד ועולה, ולבסוף עולה עוד ויורדת.



סעיף ד

(1)

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} f''(x)dx &= f'(x)|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \\
&= -8b\sin\frac{4\pi}{3}\left(1+2\cos\frac{4\pi}{3}\right) + 8b\sin\frac{2\pi}{2}\left(1+2\cos\frac{2\pi}{2}\right) \\
&= -8b\cdot -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+2\cdot -\frac{1}{2}\right) + 8b\sin 0\,(1+2\cdot -1) \\
&= 0+0=1\,.
\end{aligned}$$

(2) ב־(1) חישבנו שהאיטגרל על כל התחום מ־$\frac{\pi}{2}$ ל־$\frac{2\pi}{3}$ הוא 0. השטח הראשון, האיטגרל מ־$\frac{\pi}{2}$ ל־k, הוא S. לכן השטח השני, האינטגרל מ־k ל־$\frac{2\pi}{3}$, הוא $0 - S = -S$.

6.10 קיץ תשע"ה מועד ב

נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin x\cos x}$, ונתון התחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

בתחום הנתון ענה על הסעיפים א ו־ ב.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית או אי־זוגית? נמק.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)-a$.

(1) מצא את הערכים האפשריים של a שעבורם יש

למשוואה $f(x)-a=0$ פתרון אחד בלבד.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ עבור כל אחד מהערכים של a שמצאת

בתת־סעיף ב (1).

סעיף א

(1) הערכים שמאפסים את המכנה הם:

$$\sin 0=0,\qquad \cos\frac{\pi}{2}=0,\qquad \cos-\frac{\pi}{2}=0\,.$$

תחום ההגדרה הוא:

$$-\frac{\pi}{2}<x<0,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}\,.$$

(2) הפונקציה סינוס היא אי־זוגית והפונקציה קוסינוס היא זוגית. המכפלה שלהן היא אי־זוגיות.

(3)

$$((\sin x\cos x)^{-1})'=-1\cdot(\sin x\cos x)^{-2}(\sin x\cos x)'\,.$$

בתחום ההגדרה המכנה חיובי, כך שנאשר רק לבדוק אם המונה יכול להתאפס.

$$-(\sin x\cos x)'=-(\cos^2 x-\sin^2 x)=(\sin^2 x-\cos^2 x)=0\,.$$

נקודות הקיצון הן בערכים שיש להם ערך מוחלט של סינוס שווה לערך מוחלט של קוסינוס, שהם $\frac{\pi}{4}\pm k\cdot\frac{\pi}{2}$. בתחום ההגדרה:

$$x=\frac{\pi}{4},\ y=\frac{1}{(\sqrt{2}/2)\cdot(\sqrt{2}/2)}=2,\qquad x=-\frac{\pi}{4},\ y=\frac{1}{(-\sqrt{2}/2)\cdot(\sqrt{2}/2)}=-2\,.$$

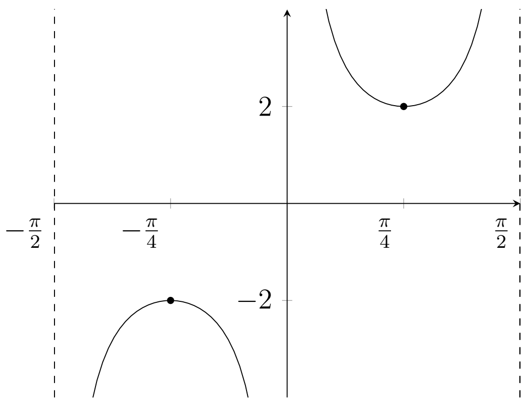
המכנה של הנגזרת הראשונה הוא $(\sin x\cos x)^2$, ערך חיובי בתחום ההגדרה, ולכן, סימן הנגזרת השנייה הוא כסימן הנגזרת של המונה.

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)' = 2\sin x\cos x - 2\cos x(-\sin x) = 4\sin x\cos x\,.$$

עבור $x=\dfrac{\pi}{4}$, $4\sin x\cos x = 2 > 0$ והנקודה היא מינימום.

עבור $x=-\dfrac{\pi}{4}$, $4\sin x\cos x = -2 < 0$ והנקודה היא מקסימום.

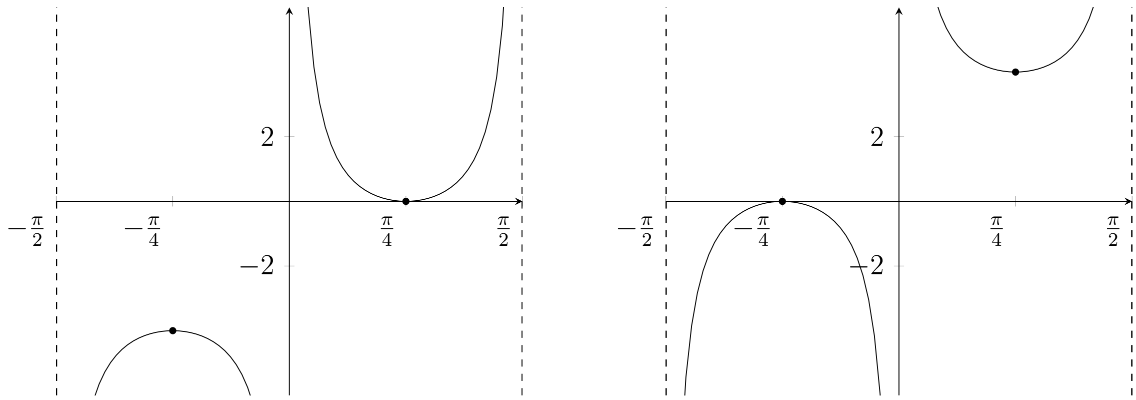
(4)



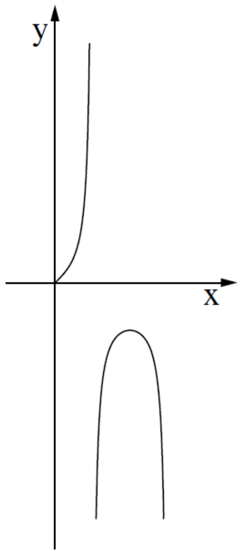
סעיף ב

(1) למשוואה פתרון אחד אם הגרף משיק לציר ה־x או חותך את הציר במקום אחד בלבד (לא קורה כאן). הגרף משיק כאשר $a=\pm 2$, שמעלה או מוריד את הגרף בשתי יחידות.

(2)



6.11 קיץ תשע"ה מועד א



נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos 2x}$ ונתון התחום $0\le x\le\dfrac{3\pi}{4}$

(ראה ציור).

ענה על הסעיפים א, ב ו־ג עבור התחום הנתון.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$,

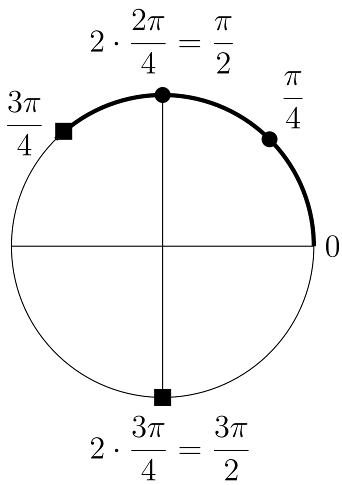
וקבע את סוגן על פי הציור.

ב. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=2f(x)\cdot f'(x)$.

מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$,

על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x=\dfrac{\pi}{6}$.



סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדרת כאשר $\cos 2x=0$. בתחום הנתון, רואים בתרשים שזה קורה עבור $\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}$. תחום ההגדרה הוא:

$$0\le x<\frac{\pi}{4},\quad \frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}\,.$$

(2) האסימפטוטות הן בערכי ציר ה־x בהם הפונקציה לא מוגדרת: $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3\pi}{4}$.

(3) יש נקודת קיצון בקצה התחום $(0,0)$. נחשב את הנגזרת כדי לחפש את נקודת קיצון הפנימית המופיעה בתרשים:

$$\left(\frac{\sin x}{\cos 2x}\right)' = \frac{\cos x\cos 2x - \sin x(-2\sin 2x)}{\cos^2 2x}\,.$$

בתחום ההגדרה המכנה חיובי כך הנגזרת תתאפס אם המונה יתאפס:

$$\begin{aligned}\cos x\cos 2x + 2\sin x\sin 2x &= \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sin x\cdot 2\sin x\cos x\\ &= \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x + 4\sin^2 x)\\ &= \cos x((\cos^2 x + \sin^2 x) + 2\sin^2 x)\\ &= \cos x(1 + 2\sin^2 x)\,.\end{aligned}$$

בתחום ההגדרה $\cos x$ מתאפס כאשר $x = \frac{\pi}{2}$, ו־$1 + 2\sin^2 x$ אף פעם לא מתאפס. נקודת הקיצון היא $\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$. לפי הציור מדובר במקסימום מקומי.

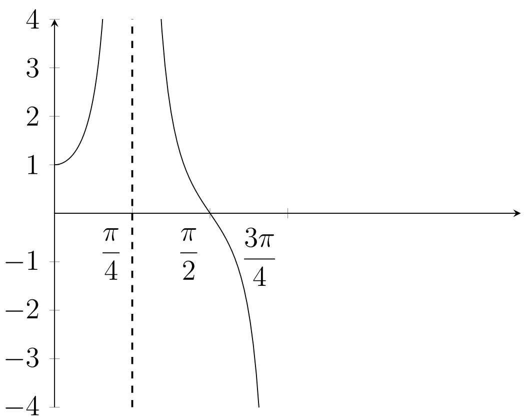
סעיף ב

$$f'(x) = \frac{\cos x(1 + 2\sin^2 x)}{\cos^2 2x}\,.$$

$f'(0) = 1$ ובסעיף הקודם חישבנו ש־$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

המכנה של $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ שווה לאפס, והמונה שונה מאפס, לכן ב־$\frac{\pi}{4}$ יש אסימפטוטה אנכית.

בתרשים הנתון ל־$f(x)$ רואים שהשיפוע (הנגזרת הראשונה של הפונקציה) עולה בין 0 ל־$\frac{\pi}{4}$, ושהיא יורדת בין $\frac{\pi}{4}$ ל־$\frac{3\pi}{4}$. התרשים ל־$f'(x)$ נראה כך:

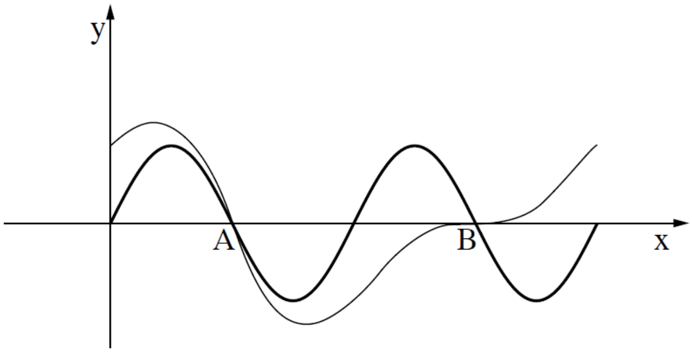


סעיף ג

$(f^2(x))' = 2f(x)\cdot f'(x)$, ולכן:

$$\int_0^{\pi/6} g(x) = \int_0^{\pi/6} 2f(x)\cdot f'(x) = f^2(x)\;|_0^{\pi/6} = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(2\pi/6)} - \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{1/2}{1/2} - \frac{0}{1} = 1\,.$$

6.12 חורף תשע"ה



נתונות שתי פונקציות:

$f(x) = 0.5\sin(2x) + \cos x$

$g(x) = \sin(2x)$

בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

בתחום הנתון

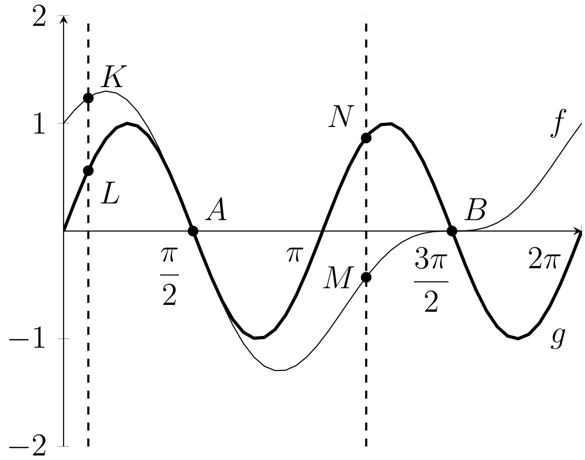
הגרפים של הפונקציות

נפגשים בשתי נקודות, A ו־ B,

הנמצאות על ציר ה־ x, כמתואר בציור.

א. דרך נקודה על ציר ה־ x, הנמצאת בין הנקודות A ו־ B, מעבירים אנך לציר ה־ x.
האנך חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ בנקודות M ו־ N.
מצא את האורך המקסימלי של הקטע MN.

ב. דרך נקודה על ציר ה־ x, הנמצאת בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, מעבירים אנך לציר ה־ x.
האנך חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ בנקודות K ו־ L.
מצא את האורך המקסימלי של הקטע KL.



סעיף א

הגרף המודגש הוא g בגלל המחזוריות, אבל נבדוק על ידי חישוב נקודות החיתוך עם ציר ה־x. $\sin 2x = 0$ בתחום כאשר $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ ורק לגרף המודגש יש חמש נקודות חיתוך.

נחשב את הנגזרת של ההפרש בין הפונקציות:

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= \sin 2x - 0.5\sin 2x - \cos x = 0.5\sin 2x - \cos x \\ (g(x) - f(x))' &= \cos 2x + \sin x = (1 - 2\sin^2 x) + \sin x\,. \end{aligned}$$

נקודות החיתוך A,B של f,g עם ציר ה־x הן נקודות השנייה והרביעית של g שהן $\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$. נבדוק:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0.5\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=0+0=0\\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 0.5\sin 2\cdot\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}=0+0=0\,. \end{aligned}$$

נחשב מתי הנגזרת הראשונה של הפרש הפונקציות מתאפסת בתחום $A=\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3\pi}{2}=B$:

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x-\sin x-1 &= 0\\ (2\sin x+1)(\sin x-1) &= 0\\ \sin x &= 1,-\frac{1}{2}\\ x &= \frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\,. \end{aligned}$$

$g(\frac{\pi}{2})-f(\frac{\pi}{2})=0$, ולכן $\frac{\pi}{2}$ בוודאי אינו המקסימום. $\frac{11\pi}{6}>\frac{3\pi}{2}$ מחוץ לתחום ולא יכול להיות נקודת הקיצון המבוקשת. המסקנה היא שנקודת הקיצון של $f-g$ בין A ל־B היא ב־$x=\frac{7\pi}{6}$.

נבדוק שנקודה זו היא באמת מקסימום על ידי חישוב הנגזרת השנייה:

$$(1-2\sin^2 x+\sin x)'\Big|_{\frac{7\pi}{6}}=(-4\sin x+1)\cos x|_{\frac{7\pi}{6}}=-\left(4\cdot-\frac{1}{2}+1\right)\cdot-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0\,,$$

ולכן:

$$g\left(\frac{7\pi}{2}\right)-f\left(\frac{7\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{7\pi}{3}-\cos\frac{7\pi}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

הוא האורך המקסימלי של MN.

סעיף ב

נקודות חיתוך של שלילה של פונקציה על ציר ה־x זהים לנקודות החיתוך של הפונקציה (ראו בנספח). לכן נקודות האיפוס של $(f(x)-g(x))'$ הן נקודות האיפוס של $(g(x)-f(x))'$, שהן הערכים עבורם $\sin 2x=1,-\frac{1}{2}$. בתחום $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, נקודות האיפוס הן ב־$x=0,\frac{\pi}{2}$. נחשב:

$$\begin{aligned} &f(0)-g(0)=-(0.5\sin(2\cdot 0)-\cos 0)=-(0-1)=1\\ &f\left(\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\left(0.5\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\cos\frac{\pi}{2}\right)=-(0-0)=0\,, \end{aligned}$$

והאורך המקסימלי של KL הוא 1 כאשר $x=0$.

6.13 קיץ תשע"ד מועד ב

נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

$g(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$

א. (1) לשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה.

מצא את תחום ההגדרה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ עם הצירים.

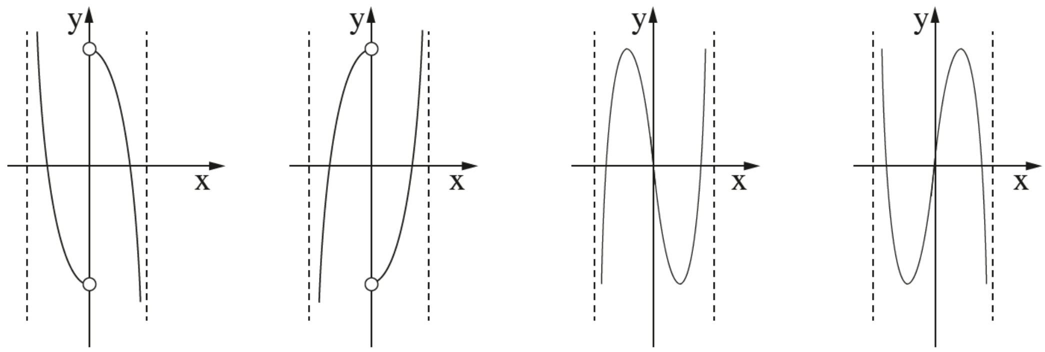
ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של כל אחת מהפונקציות, וקבע את סוגן.

ג. על פי הסעיפים א ו־ ב, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. לפניך ארבעה גרפים, I-IV.

איזה מהגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $g'(x)$? נמק.



סעיף א

(1) הפונקיות מוגדרת כאשר ביטוי בשורש לא שלילי. עבור f אם $8 - x^2 \geq 0$ ותחום ההגדרה הוא $-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$.

עבור g אם $8^2 - x^4 \geq 0$ ותחום ההגדרה מורכב מ־$-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$ ו־$x = 0$. אבל $x = 0$ נמצא בתוך התחום הראשון כך שהוא לא מוסיף ערכים, ותחומי ההגדרה של f, g זהים.

(2) עבור f: אם $y = 0$, $x = 0$ או $\sqrt{8 - x^2} = 0$, ונקודות החיתוך עם ציר ה־x הן $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{8}, 0)$. אם $x = 0$, $y = 0$ ונקודת החיתוך עם ציר ה־y היא $(0, 0)$.

עבור g: אם $y = 0$, $\sqrt{8x^2 - x^4} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{8 - x^2} = 0$ עבור אותם ערכים $0, \pm\sqrt{8}$. ונקודות החיתוך הן אותן נקודות שקיבלנו עבור f.

סעיף ב

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1\cdot\sqrt{8-x^2}+x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{8-x^2}}\cdot(-2x)\\
&= \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}\\
g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{8x^2-x^4}}\cdot(16x-4x^3)\\
&= \frac{8x-2x^3}{\sqrt{8x^2-x^4}}=\frac{x(8-2x^2)}{\sqrt{8x^2-x^4}}\,.
\end{aligned}
$$

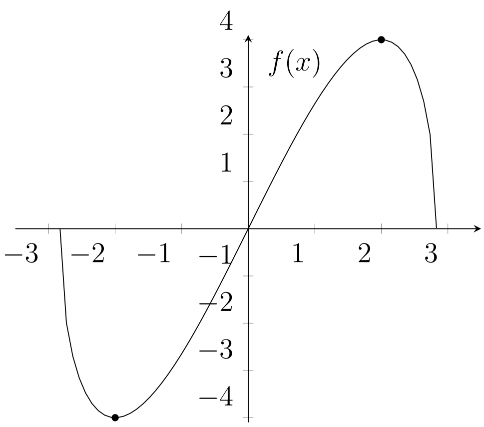
פרט ל־$0,\pm\sqrt{8}$ בהן הפונקציות לא מוגדרות, המכנה חיובי והנגזרות יתאפסו כאשר המונה יתאפס.

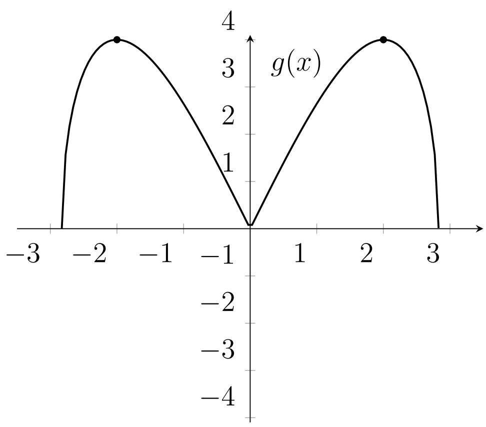
עבור f הנקודות הן $(-2,-4)$, $(2,4)$. בנקודות הקצה ערכי הפונקציה הם $(\pm\sqrt{8},0)$, ולכן $(-2,-4)$ היא מינימום אבסולוטי ו־$(2,4)$ היא מקסימום אבסולוטי.

עבור g הנקודות הן $(0,0)$, $(-2,4)$, $(2,4)$. בנקודות הקצה ערכי הפונקציה הם $(\pm\sqrt{8},0)$, ולכן $(0,0)$, $(\pm\sqrt{8},0)$ הן מינימום אבסולוטי ו־$(-2,4)$,$(2,4)$ הן מקסימום אבסולוטי.

סעיף ג

נתבסס על תחומי ההגדרה ונקודות הקצה של הפונקציות כדי לצייר את התרשים:





סעיף ד

$$g'(x)=\frac{x(8-2x^2)}{\sqrt{8x^2-x^4}}$$

לא מוגדר באפס, ולכן אפשר לפסול III, IV. נחשב מספר ערכים:

x	-2	-1	1	2
$g'(x)$	0	$-(6/7)$	$(6/7)$	0

$g'(x0$ יורדת כאשר מתקרבים לציר ה־y משמאל וגם כאשר מתרחקים מציר ה־y לימין. לכן הגרף I מתאר את הפונקציה.

6.14 קיץ תשע"ד מועד א

נתונות שתי פונקציות: $f(x)=2\sin^2 x$, $g(x)=\sin(2x)$, בתחום $0\le x\le\pi$.

א. בתחום הנתון מצא:

(1) את שיעורי ה־ x של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.

(2) את נקודות החיתוך של כל אחת משתי הפונקציות עם ציר ה־ x .

ב. (1) נתונה הפונקציה $h(x)=x-\dfrac{\sin(2x)}{2}$.

הראה כי $h'(x)=f(x)$.

(2) בתחום $0\le x\le\pi$ מצא את השטח הכלוא בין הגרפים

של שתי הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$.

סעיף א

(1) ברור שערכי הפונקציות שווים ב־$x=0,\pi$ כי $\sin 0=\sin\pi=0$.

נחפש פתרונות אחרים כאשר נניח ש־$\sin x\neq 0$ כדי לחלק ב־$\sin x$:

$$\begin{aligned}2\sin^2 x &= \sin 2x\\ &= 2\sin x\cos x\\ \sin x &= \cos x\\ x &= \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

(2) ראינו ששתי הפונקציות מקבלות ערך אפס ב־$0,\pi$. נחפש ערכים אחרים בתחום.

עבור f: $2\sin^2 x=0$ רק כאשר $x=0,\pi$, ולכן אין נקודות חיתוך נוספות עם ציר הx.

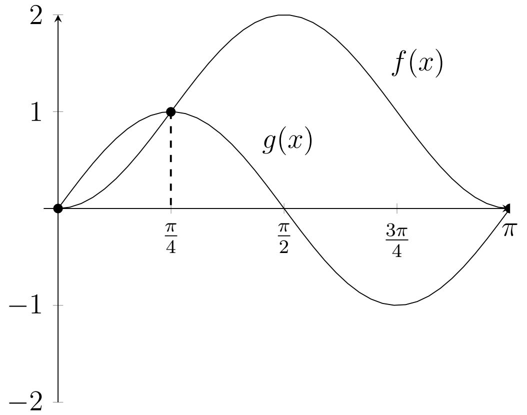
עבור g: $\sin 2x=0$ כאשר $2x=0+k\pi$, ולכן יש נקודת חיתוך גם ב־$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

סעיף ב

(1)

$$\begin{aligned}h(x)'=\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)' &= 1-\frac{2\cos 2x}{2}=1-\cos 2x\\ &= 1-(\cos^2 x-\sin^2 x)=(1-\cos^2 x)+\sin^2 x\\ &= 2\sin^2 x=f(x)\,.\end{aligned}$$

(2) מהתרשים להלן אנו רואים שהשטח מורכב משני קטעים, מ־0 עד $\frac{\pi}{4}$, ומ־$\frac{\pi}{4}$ עד π.



בסעיף זה יש מתנה: כדי לחשב את האינטרגל של $f(x)$ נוכל להשתמש בפונקציה $h(x)$ הנתונה:

$$h(x) = x - \frac{\sin 2x}{2} = \int h'(x) = \int f(x)\,.$$

השטח הראשון הוא:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - f(x))dx &= \frac{-\cos 2x}{2} - \left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &= \left(0 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} - 0 + 0\right) = -\frac{\pi}{4} + 1\,.\end{aligned}$$

השטח השני הוא:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (f(x) - \sin 2x)dx &= \left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) - \frac{-\cos 2x}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\\ &= \left(\pi - 0 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + 0\right) = \frac{3\pi}{4} + 1\,.\end{aligned}$$

השטח הכולל הוא:

$$S = -\frac{\pi}{4} + 1 + \frac{3\pi}{4} + 1 = \frac{\pi}{2} + 2\,.$$

6.15 חורף תשע"ד

נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2+x-a}{x^2-x+a}$. a הוא פרמטר גדול מ־ 1 .

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. (1) מצא את האסימפטוטות של $f(x)$ המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של $f(x)$, וקבע את סוגן.

(הבע באמצעות a במידת הצורך.)

(3) ידוע כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות בדיוק.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. בתחום $x \leq 0$, השטח המוגבל על ידי הגרף של $f'(x)$, על ידי הישר $x=-1$

ועל ידי ציר ה־ x , שווה ל־ $\frac{1}{2}$.

חשב את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x (מצא ערכים מספריים).

בבחינה זו היו שלוש שאלות בפרק השני לכן מספר השאלה הוא 7 **ולא** 6.

נתון שהפונקציה מוגדרת לכל x אבל מתחשק לי לוודא שזה נכון. אם נשווה את המכנה לאפס נקבל משוואה ריבועית שפתרונה היא:

$$\frac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}\,.$$

נתון ש־$a>1$ אז אין פתרונות ממשיים למשוואה.

סעיף א

(1) הפונקציה מוגדרת לכל x אז אין אסימפטוטות אנכיות.

נחלק את הפונקציה בחזקה הגדולה ביותר ונקבל:

$$\frac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^2}}$$

ששואף ל 1 כאשר $x\to\pm\infty$. האסימפטוטה האופקית היא $y=1$.

(2) נחשב את הנגזרת הראשונה:

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2-x+a)-(x^2+x-a)(2x-1)}{(x^2-x+a)^2}=\frac{-2x^2+4xa}{(x^2-x+a)^2}\,.$$

מכנה חיובי ולכן הנגזרת תתאפס כאשר $2x^2=4ax$. נקודות הקיצון הן:

$$(0,-1),\quad \left(2a,\frac{4a+1}{4a-1}\right)\,.$$

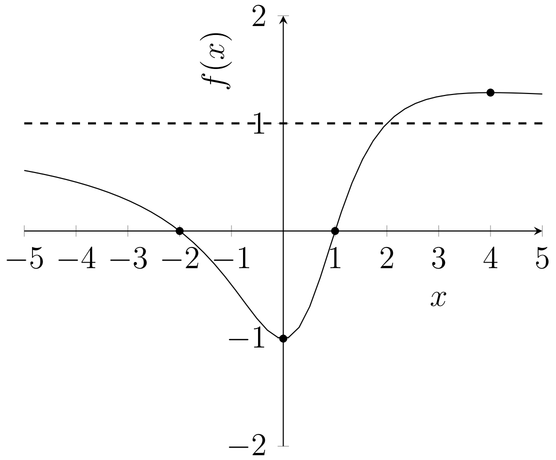
המכנה של הנגזרת הראשונה חיובית ולכן מספיק לבדוק את הסימנים של הנגזרת של המונה:

$$(-2x^2 + 4ax)' = -4x + 4a$$

ב־$x = 0$: $-4x + 4a$ חיובי כי נתון ש־$a > 1$, ולכן נקודת הקיצון היא מינימום.

ב־$x = 2a$: $-8a + 4a = -4a$ שלילי כי נתון ש־$a > 1$, ולכן נקודת הקיצון היא מקסימום.

(3) קיים מינימום ב־$x = 0$ ואסימפטוטה אופקית ב־$y = 1$. לפי הנתון שיש שתי נוקודות חיתוך עם ציר ה־x, הגרף עולה מנקודת המינימום ושואף לאינסוף ב־$y = 1$. נשאר רק להחליט אם נקודת המקסימום היא מעל לאסימפטוטה או מתחתיה. אבל עם $a > 1$, $\frac{4a+1}{4a-1} > 1$ אז הנקודת המקסימום נמצאת מעל לאסימפטוטה.



סעיף ב

נחשב את האינטגרל של הנגזרת הראשונה הוא הפונקציה עצמה:

$$\left|\int_{-1}^{0} -f'(x)dx\right| = \left|\, f(x)|_{-1}^{0}\right| = |f(0) - f(-1)| = \left|-1 - \frac{-a}{a+2}\right| = \left|\frac{-2}{a+2}\right| = \frac{1}{2}\,.$$

נתון שהשטח שווה ל־$\frac{1}{2}$ ולכן $a = 2$. ערכי ה־x של נקודות החיתוך הן הפתרונות של:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

שהם $x = 1, x = -2$. נקודות החיתוך הן $(1,0), (-2,0)$.

פרק 7 חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

7.1 קיץ תשע"ח מועד ב

נתונה הפונקציה $\mathrm{f(x)} = \sin\left(\frac{\pi}{\mathrm{x}}\right)$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $\mathrm{f(x)}$?

ענה על הסעיפים ב-ה עבור התחום $\mathrm{x} \geq \frac{2}{7}$.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $\mathrm{f(x)}$ עם ציר ה־ x .

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $\mathrm{f(x)}$, וקבע את סוגן.

ד. לפונקציה $\mathrm{f(x)}$ יש אסימפטוטה אופקית. מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $\mathrm{f(x)}$

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $\mathrm{f(x)}$.

ענה על סעיף ו עבור התחום $\mathrm{x} > 0$.

ו. נסתכל על נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $\mathrm{f(x)}$ עם ציר ה־ x .

לפניך 3 טענות (i-iii). אחת מהן נכונה. איזו מהן היא הנכונה? נמק.

i) ככל שמתקרבים ל־ $\mathrm{x} = 0$, המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וקָטֵן.

ii) המרחק בין כל שתי נקודות חיתוך סמוכות נשאר קבוע.

iii) ככל שמתקרבים ל־ $\mathrm{x} = 0$, המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וגָדֵל.

סעיף א

הפונקציה לא מוגדרת רק כאשר המכנה $x \neq 0$.

סעיף ב

$$\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0, \qquad \frac{\pi}{x} = k\pi, \qquad x = \frac{1}{k}\,.$$

נבדוק עבור כמה ערכים של $[k, x]$:

$$[1,1],\ \left[2, \frac{1}{2}\right],\ \left[3, \frac{1}{3}\right],\ \left[4, \frac{1}{4}\right]\,.$$

אבל $\frac{2}{7} \approx 0.286$ כך שעבור $k \geq 4$, הנקודות מחוץ לתחום. נקודות החיתוך הן:

$$\left(\frac{1}{3}, 0\right),\ \left(\frac{1}{2}, 0\right),\ (1, 0)\,.$$

סעיף ג

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0\,.$$

הגורם $-\frac{1}{x^2}$ לא יכול לקבל ערך אפס, ולכן נקודות הקיצון הן הנקודות:

$$\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad \frac{1}{x} = \frac{1}{2} + k, \qquad x = \frac{2}{1+2k}\,.$$

נבדוק עבור כמה ערכים של $[k,x]$:

$$[0,2],\ \left[1,\frac{2}{3}\right],\ \left[2,\frac{2}{5}\right],\ \left[3,\frac{2}{7}\right].$$

ברור שעבור $k \geq 4$ הנקודות מחוץ לתחום.

לפי הערכים של $f(x)$ אפשר לקבוע את סוג נקודות הקיצון:

מקסימום $(2,1)$ מינימום $\left(\frac{2}{3},-1\right)$ מקסימום $\left(\frac{2}{5},1\right)$ מינימום $\left(\frac{2}{7},-1\right)$

אפשר לבדוק לפי נגזרת שנייה. המכנה של הנגזרת הראשונה x^2 חיובית, ולכן מספיק לבדוק את הסימן של הנגזרת של המונה:

$$-\left(\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)' = -\left(-\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2}.$$

מכאן שסימן הנגזרת השנייה תלוי בסימן של $-\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1,\quad -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1,\quad -\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)=-1,\quad -\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)=1.$$

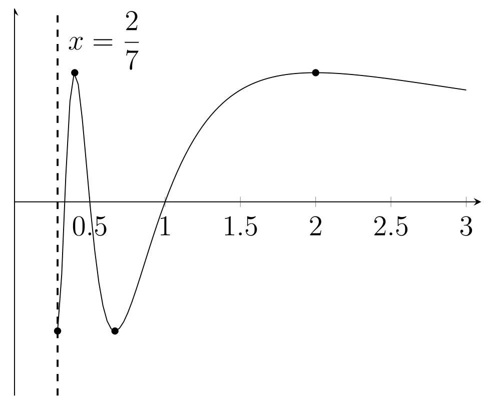
הסימנים תואמים את קביעת סוג נקודות הקיצון שרשמנו.

סעיף ד

$\frac{\pi}{x} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ ו־$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \xrightarrow[+\infty]{} 0$. יש אסימפטוטה אופקית ב־$y=0$.

סעיף ה

נקודות הקיצון מסומנות:



סעיף ו

$x=\frac{1}{k}$ אז ככל שמתקרבים לאפס הערך של k עולה. המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות $\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}$ הוא:

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)},$$

וברור שערך זה קטן ככל ש־x מתקרב לאפס ולכן k עולה. המסקנה היא ש־(i) נכון.

7.2 קיץ תשע"ח מועד א

$f(x)$ היא פונקציה גזירה, המוגדרת לכל x, כך ש־ $f(x) \neq 0$ לכל x.

א. הוכח שאם הפונקציה $f(x)$ עולה בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יורדת באותו הקטע;

ואם הפונקציה $f(x)$ יורדת בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ עולה באותו הקטע.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$, המוגדרת לכל x.

ב. האם קיים x שבעבורו $g(x) = 0$? נמק.

ג. **(1)** האם הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית? נמק.

(2) הראה שלכל x מתקיים: $g(x) = g(x + 2\pi)$.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq 3\pi$.

נתונה הפונקציה $h(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$.

ענה על סעיף ד. תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ד. **(1)** מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$? נמק.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$ באותה מערכת צירים שבה סרטטת את גרף הפונקציה $g(x)$.

סעיף א

לכאורה הטיעון ברור מאליו אבל כנראה צריך להוכיח באמצעות נגזרות:

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -1 \cdot f(x)^{-2} \cdot f'(x)\,.$$

נתון ש־$f(x)$ מוגדרת בכל התחום, ו־$f(x)^{-2}$ חיובי בכל התחום. הסימן של $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'$ הפוך מהסימן של $f'(x)$, ולכן אם אחת עולה השנייה יורדת.

סעיף ב

$\sin^2 x \geq 0$ ו־$\cos x \geq -1$. לכן $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2 \geq 1$ והפונקציה לא מתאפסת.

סעיף ג

(1) הפונקציה זוגית, כי $\cos$ זוגית ו־$\sin$ אי־זוגית, אבל $\sin^2$ זוגית. בחישוב:

$$\sin^2(-x) + \cos(-x) + 2 = (-\sin x)^2 + \cos x + 2 = \sin^2 x + \cos x + 2\,.$$

(2) $\sin(x+2\pi)=\sin x, \cos(x+2\pi)=\cos x$ ולכן $g(x)=g(x+2\pi)$.

אפשר גם לחשב:

$$\begin{aligned}&\sin^2(x+2\pi)+\cos(x+2\pi)+2=\\&\qquad(\sin x\cos 2\pi+\sin 2\pi\cos x)^2+(\cos x\cos 2\pi-\sin x\sin 2\pi)+2=\\&\qquad\sin^2 x+\cos x+2\,.\end{aligned}$$

(3) נחשב את הנגזרת הראשונה:

$$g'(x)=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(2\cos x-1)=0\,.$$

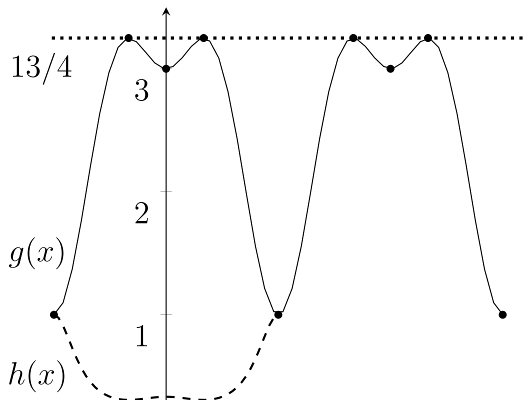
בתחום $0\le x\le\pi$, $\sin x$ מתאפס ב־$x=0, x=\pi$, ו־$2\cos x-1$ מתאפס ב־$\dfrac{\pi}{3}$. נקודות הקיצון הן $(\pi,1)$, $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{13}{4}\right)$, $(0,3)$.

נחשב את הנגזרת השנייה:

$$\begin{aligned}g''(x)&=\cos x(2\cos x-1)+\sin x(-2\sin x)\\&=2\cos^2 x-2\sin^2 x-\cos x\\&=4\cos^2 x-1-\cos x\,.\end{aligned}$$

בנקודות הקיצון: $g''(0)=2$ והנקודה היא מינימום. $g''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ והנקודה היא מקסימום. $g''(\pi)=4$ והנקודה היא מינימום.

(4) לפי נקודות הקיצון נצייר את הגרף עבור $0\le x\le\pi$. לפי (1) הפונקציה זוגית אז הגרף עבור $-\pi\le x\le 0$ זהה. לפי (2) הפונקציה מחזורית וניתן להעתיק את הגרף לתחום $\pi\le x\le 3\pi$.



סעיף ד

(1) עבור כל x, $f(x)>0$, ולכן עבור כל x, $h(x)=\frac{1}{f(x)}>0$ והפונקציה מוגדרת.

(2) ב־$-\pi\le x\le\pi$ נחשב את נקודות הקיצון ונהפוך את תחומי העלייה והירידה לפי סעיף א.

7.3 חורף תשע"ח

נתונה משפחת הפונקציות: $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2 - a}$. a הוא פרמטר, $a \neq 0$, $a \neq 4$.

ענה על סעיף א. הבע באמצעות a במידת הצורך. הבחן בין $a > 0$ ובין $a < 0$ במידת הצורך.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המקבילה לציר ה־ x .

(4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ x (אם יש כאלה).

ענה על סעיף ב. הבע באמצעות a במידת הצורך. הבחן בין $a > 4$ ובין $a < 4$ במידת הצורך.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

סעיף ג של השאלה מופיע בהמשך.

תחילה התעלמתי מהנתון על הסימן של a וזה סיבך אותי.

סעיף א

(1) כאשר $a > 0$, הפונקציה לא מוגדרת עבור $x = \pm\sqrt{a}$, ערכים שמאפסים את המכנה.

כאשר $a < 0$, המכנה תמיד חיובי והפונקציה מוגדרת לכל x.

(2) חישוב נקודת החיתוך עם ציר ה־y: $f(0) = \dfrac{(-2)^2}{-a} = -\dfrac{4}{a}$.

חישוב נקודת החיתוך עם ציר ה־x: כאשר $a < 0$, המכנה חיובית והפונקציה מתאפסת כאשר $x = 2$. נתון ש־$x \neq 4$, ולכן גם כאשר $a > 0$, המכנה לא מתאפסת והפונקציה מתאפסת ב־$x = 2$:

$$\frac{(x-2)^2}{x^2 - a} = \frac{(x-2)(x-2)}{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}\,.$$

(3) נחלק את המונה והמכנה ב־x^2 (נתון ש־$x \neq 0$):

$$f(x) = \frac{1 - \frac{4x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{a}{x^2}} \xrightarrow[\pm\infty]{} = 1\,.$$

$y = 1$ היא אסימפטוטה אופקית.

(4) אסימפטוטות אנכיות יכולות להימצא רק עבור ערכי x עבורם הפונקציה לא מוגדרת.

כאשר $a < 0$ הפונקציה מוגדרת לכל x ואין אסימפטוטה.

כאשר $a > 0$: נתון $a \neq 4$ כך ש־$\sqrt{a} \neq 2$, לכן המונה של הפונקציה לא מתאפסת כאשר $x \to \pm\sqrt{a}$ ויש אסימפטוטות אנכיות $x = \sqrt{a}, x = -\sqrt{a}$.

סעיף ב

$$f'(x) = \left(\frac{(x-2)^2}{x^2-a}\right)' = \frac{2(x-2)(x^2-a)-(x-2)^2\cdot 2x}{(x^2-a)^2}$$
$$= \frac{2(x-2)\,(2x-a)}{(x^2-a)^2}\,.$$

נקודות הקיצון הן $(2,0)$, $\left(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a}\right)$.

נחשב את הסימן של הנגזרת של המונה של הנגזרת הראשונה:

$$(2(x-2)\,(2x-a))' = 8x-2a-8\,.$$

לפי ההנחיה בשאלה נבדוק בנפרד עבור ערכים חיוביים ושליליים של a.

עבור $a>4$, $8\cdot 2-2a-8=2(4-a)<0$ ו־$(2,0)$ היא מקסימום.

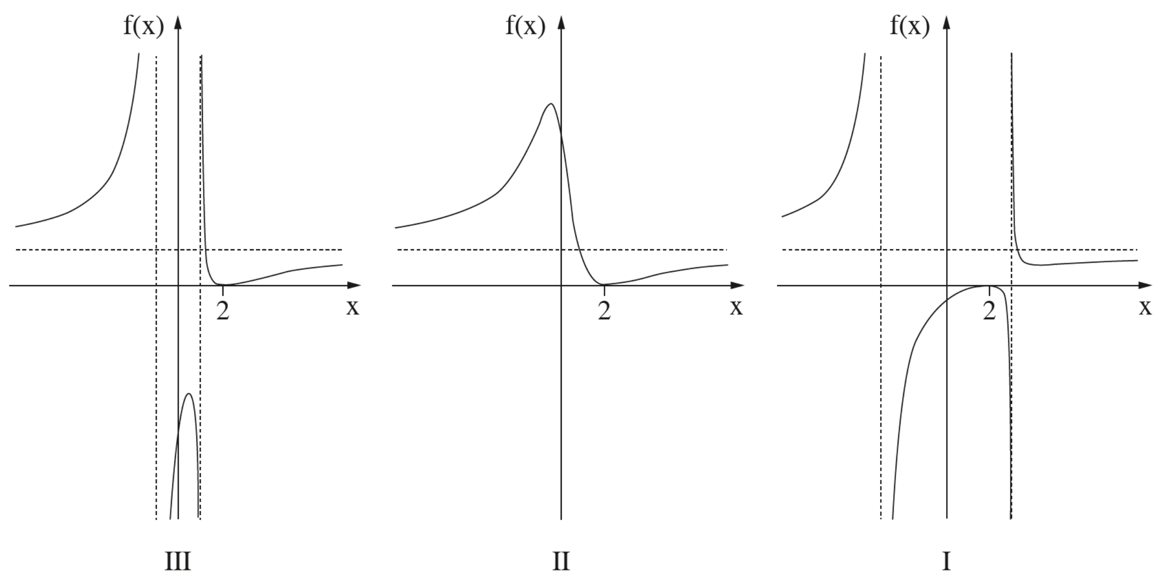
$8\cdot\frac{a}{2}-2a-8=2(a-4)<0$ ו־$\left(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a}\right)$ היא מינימום.

עבור $a<4$ הסימנים מתחלפים ו־$(2,0)$ היא מינימום ו־$\left(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a}\right)$ היא מקסימום.

סעיף ג

ג. לפניך שלושה גרפים אפשריים של הפונקציה f(x), כל אחד עבור ערך אחר של a.

כתוב מהו תחום הערכים של a המתאים לכל אחד מן הגרפים I-III. נמק את תשובתך.



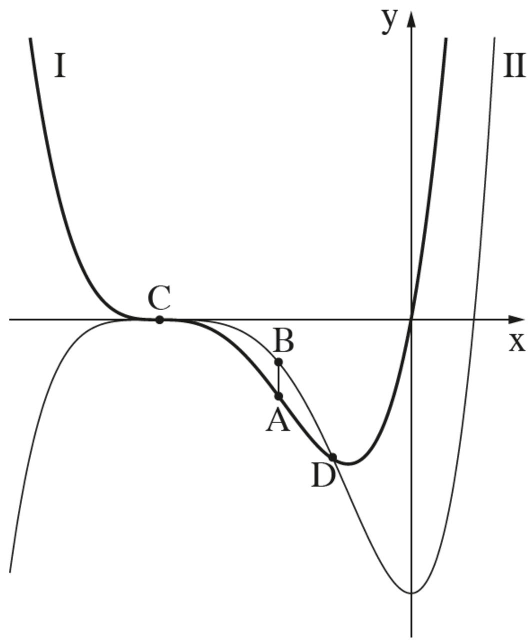
כאשר $a>4$ נקודות הקיצון ב־$(2,0)$ היא מקסימום כפי שמופיע בגרף I.

כאשר $a<0$ הפונקציה מוגדרת כל ל־x כפי שמופיע בגרף II.

כאשר $0<a<4$ נקודות הקיצון ב־$(2,0)$ היא מינימום, ויש אסימפטוטות ב־$x=\pm\sqrt{a}$ כפי שמופיע בגרף III.

7.4 קיץ תשע"ז מועד ב

לפניך הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$.



א. התאם בין הגרפים I ו־ II

לבין הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$. נמק.

נתון: $f'(x) = x(x+b)^3$. $b > 1$ הוא פרמטר.

לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול ב־ $x = -1$.

ב. מצא את b .

C ו־ D הן נקודות החיתוך

של הפונקציות $f(x)$ ו־ $f'(x)$

בתחום $x < 0$, כמתואר בציור.

הנקודות A ו־ B נמצאות על הגרפים I ו־ II

בהתאמה, כך שהישר AB מאונך לציר ה־ x .

נתון: $x_C < x_A < x_D$,

$x_C = -4$,

$x_D = 1 - \sqrt{5}$.

ג. מצא את שיעור ה־ x של הנקודות A ו־ B שעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי

(אפשר לפתור את הסעיף בלי למצוא את הפונקציה $f(x)$).

סעיף א

הגרף I מתאפס בנקודה C שם לגרף II יש נקודה מקסימום. גרף I מתאפס ב־$(0,0)$ שם לגרף II יש נקודה מינימום. לכן, II הוא הגרף של $f(x)$ ו־I הוא הגרף של $f'(x)$.

סעיף ב

בנקודת פיתול הנגזרת השנייה מתאפסת:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 1\cdot(x+b)^3 + x\cdot 3(x+b)^2 = (x+b)^2(4x+b)\\
f''(-1) &= (b-1)^2(b-4) = 0\\
b &= 4\,,
\end{aligned}$$

כי נתון ש־$b > 1$.

סעיף ג

הערך המקסימלי יתקבל כאשר הנגזרת של ההפרש מאפסת:

$$\begin{aligned}(f(x)-f'(x))' &= f'(x)-(x(x+4))^3)' \\ &= x(x+4)^3-(1\cdot(x+4)^3)+x\cdot 3(x+4)^2) \\ &= (x+4)^2(x^2-4)=0\,.\end{aligned}$$

הפתרונות הם $x=\pm 2$,$x=-4$. הערך היחיד בתחום בין $x_C=-4$ ל-$x_D=1-\sqrt{5}$ הוא -2.

נבדוק:

$$4<-2<1-\sqrt{5}=-1.24\,.$$

7.5 קיץ תשע"ז מועד א

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$.

ג. נתון: $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $x = a$ וציר ה־ x שווה ל־ 1 .

מצא את a .

סעיף א

(1) הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה לא מתאפס, כאשר $x \neq \frac{\pi}{2} \pm n\pi$.

(2) נקודות החיתוך עם ציר ה־x הן כל הנקודות עבורן $\sin x = 0$ ו־$\cos x \neq 0$, שהן $x = \pm n\pi$. כאשר $x = 0$, $y = 0$ והנקודה היא גם נקודת חיתוך עם ציר ה־y.

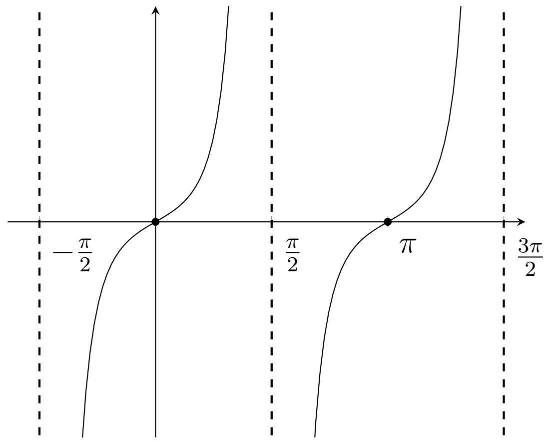
(3) כאשר $x = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$, הפונקציה לא מוגדרת כי המכנה מתאפס והמונה לא מתאפס, לכן הן אסימפטוטות אנכיות. אין אסימפטוטה אופקיות: ככל ש־$|x|$ גדל, כל פעם שהוא מתקרב ל־$\frac{\pi}{2} \pm n\pi$, הפונקציה לא חסומה.

(4)

$$f'(x) = (\frac{2\cos x \cdot \cos^3 x) - (2\sin x \cdot 3\cos^2 x \cdot -\sin x)}{\cos^6 x} = \frac{2\cos^2 x + 6\sin^2 x}{\cos^4 x},$$

כאשר צימצמנו $\cos^2 x$ בתחום ההגדרה. כל הגורמים בביטוי חיוביים ולכן הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה.

סעיף ב



סעיף ג

$$\int_0^a \frac{2\sin x}{\cos^3 x}dx = \cos^{-2} x\Big|_0^a = \frac{1}{\cos^2 a} - \frac{1}{1^2} = 1\,.$$

מכאן ש־$\cos a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, והפתרון היחיד בתחום $0 < a < \frac{\pi}{2}$ הוא $a = \frac{\pi}{4}$.

7.6 חורף תשע"ז

נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, a הוא פרמטר.

ענה על הסעיפים א-ו עבור $a>0$. הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. (1) רשום את האסימפטוטות המאונכות לצירים של גרף הנגזרת $f'(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.

ו. מצא את ערך הביטוי: $\int_{-3a}^{-2a} f(x)\,dx + \int_{2a}^{3a} f(x)\,dx$.

ענה על סעיף ז עבור $a=0$.

ז. (1) מצא את תחום ההגדרה של $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

סעיף א

הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס $x=\pm a$, או כאשר הביטוי בשורש שלילי $|x|\leq a$.
תחום ההגדרה היא $|x|>a$ שהוא $x>a, x<-a$.

סעיף ב

המכנה תמיד חיובי אבל ה־x במונה גורם להסימן של האסימפטוטות האכניות להיות תלויות בכיוון ההתקרבות לנקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת. כאשר $x\to +a$, $f(x)\to+\infty$, וכאשר $x\to -a$, $f(x)\to-\infty$.

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}=\frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}=\pm 1\,.$$

האסימפטוטה האופקית היא $y=1$ כאשר $x>a$ ו־$y=-1$ כאשר $x<-a$.

סעיף ג

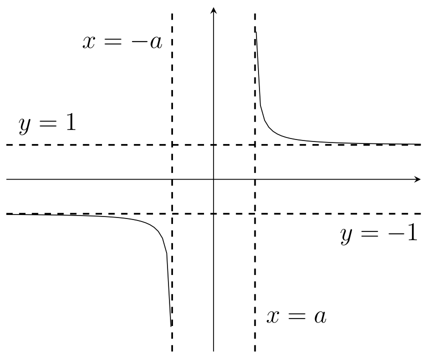
נבדוק את הסימן של הנגזרת הראשונה:

$$f'(x)=1\cdot(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}+x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2-a^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{-a^2}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

המכנה חיובי והמונה שלילי, לכן הנגזרת שלילי והפונקציה יורדת בכל תחום ההגדרה שלה.

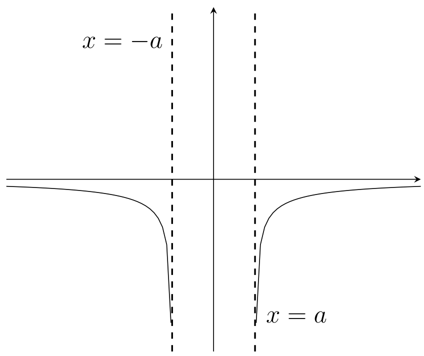
סעיף ד

יש לנו את האסימפטוטות מסעיף ב, ומסעיף ג אנו יודעים שהפונקציה תמיד יורדת. הגרף הוא:



סעיף ה

(1) המכנה של $f'(x)$ מתאפסת כאשר $x=\pm a$ ולכן יש אסימפטוטות אנכיות ב־$x=\pm a$.
כאשר $x\to\pm\infty$, המונה חיובי והמכנה שואפת ל־$+\infty$, ולכן יש אסימפטוטה אופקית ב־$y=0$.
(2) לפי סעיף ג הנגזרת תמיד שלילי ויש אסימפטוטות ב־$\pm a$. הגרף הוא:



סעיף ו

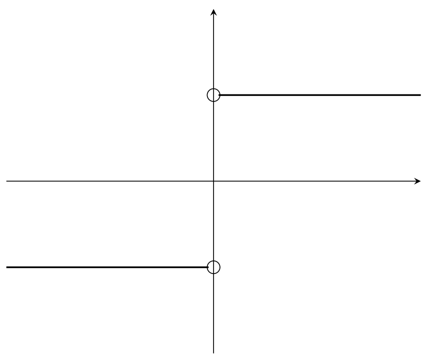
$$f(-x)=\frac{-x}{(-x)^2-a^2}=-\frac{x}{x^2-a^2}=-f(x)\,.$$

הפונקציה אי־זוגיות ולכן אינטגרציה של קטעים סימטריים מצדי ציר ה־y מצטצמים והסכום $=0$.

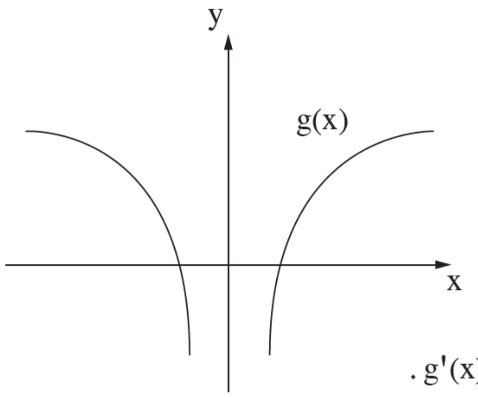
סעיף ז

(1) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}=\dfrac{x}{|x|}=\pm 1$ עבור $x\neq 0$. כאשר הסימן הוא הסימן של x.

(2)



7.7 קיץ תשע"ו מועד ב



בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה $g(x)$.

הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$

מוגדרות לכל x השונה מ־ 0 ,

ואין להן נקודות קיצון או נקודות פיתול.

הישר $x=0$ הוא האסימפטוטה האנכית

לכל אחד מן הגרפים של הפונקציות האלה.

א. (1) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$.
נמק את שיקוליך.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת השנייה $g''(x)$. נמק את שיקוליך.

נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $g''(x)$,
על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=1$ ו־ $x=2$ שווה ל־ 5.25 .

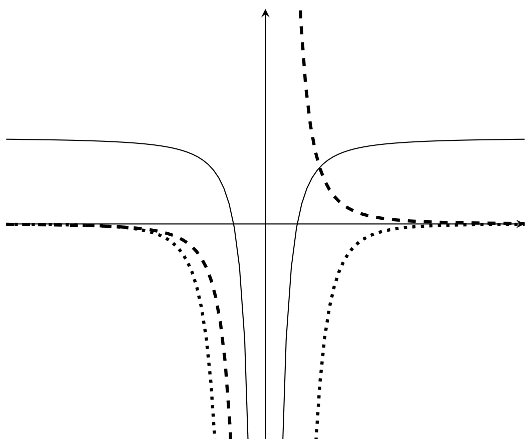
ב. הישר $x=1$ חותך את הגרף של פונקציית הנגזרת $g'(x)$ בנקודה A ,
והישר $x=2$ חותך גרף זה בנקודה B .
מצא את ההפרש בין שיעור ה־ y של הנקודה A ובין שיעור ה־ y של הנקודה B . נמק.

ג. הביטוי $y=\frac{a}{x^3}$ מתאר אחת מן הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$.
a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

(1) קבע איזו מן הפונקציות הביטוי מתאר. נמק את קביעתך.

(2) מצא את הערך של a .

נוח לי להציג את כל שלושת הגרפים במערכת צירים אחת, למרות שאיפיון הגרפים יתברר רק במהלך פתרון השאלה. $g(x)$: קו רגיל. $g'(x)$: קו מקווקוו. $g''(x)$: קו מנוקד.



סעיף א

(1) משמאל לימין עבור ערכים שליליים של x, השיפוע של פונקציה שלילי ויורדת תמיד ולכן הנגזרת תמיד שלילית. ערכה של הנגזרת מתחילה קרוב לאפס, יורדת לאט ואז יורדת מהר ושואפת $-\infty$.

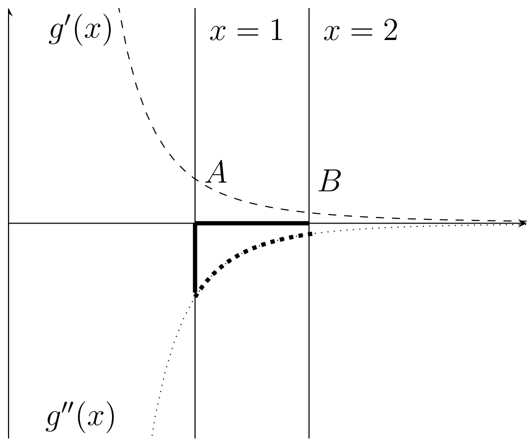
משמאל לימין עבור ערכים חיוביים של x, השיפוע של פונקציה חיובי ויורדת תמיד ולכן הנגזרת חיובית. ערכה של הנגזרת מתחילה קרוב ל־$+\infty$, יורדת מהר ואז יורדת לאט ושואפת 0.

(2) משמאל לימין עבור ערכים שליליים של x, הנגזרת הראשונה מתנהגות בדיוק כמו הפונקציה, ולכן הגרף של הנגזרת השנייה דומה לגרף של הנגזרת הראשונה.

משמאל לימין עבור ערכים חיוביים של x, השיפוע של הנגזרת הראשונה שלילי ועולה תמיד ולכן הנגזרת השנייה שלילית. ערכה של הנגזרת השנייה מתחילה קרוב ל־$-\infty$, עולה מהר ואז עולה לאט ושואפת 0.

סעיף ב

התרשים להלן מראה את $g'(x), g''(x)$ עבור ערכים חיוביים. השטח המתואר מודגש.



חישוב השטח:

$$S = \int_1^2 -g''(x)dx = -g'(x)|_1^2 = g'(1) - g'(2) = 5.25\,.$$

אבל זה בדיוק ההפרש בין ערך ה־y של הנקודה A לבין ערך ה־y של נקודה B.

סעיף ג

(1) הביטוי לא מתאפס ולכן לא יוכל להיות $g(x)$. הביטוי חיובי עבור $x>0$ ולכן לא יכול להיות $g''(x)$. נשאר $g'(x) = \dfrac{a}{x^3}$.

(2) מסעיף ב:

$$\begin{aligned} g'(1) - g'(2) &= 5.25 \\ \frac{a}{1^3} - \frac{a}{2^3} &= \frac{21}{4} \\ a &= \frac{8}{7}\cdot\frac{21}{4} = 6\,. \end{aligned}$$

7.8 קיץ תשע"ו מועד א

נתונה הפונקציה $f(x) = \dfrac{ax^3 + 2ax}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 4}}$.

a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית? נמק.

ג. השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה־x

ועל ידי הישרים $x = 1$ ו־ $x = -1$, שווה ל־ 4 .

מצא את הערך של a .

ד. נתון כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת $f(x) = g'(x)$.

אחת מנקודות החיתוך בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ היא

נקודה שבה $x = 0$.

(1) הראה כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = 2x^2$.

(2) מצא את התחום שבו מתקיים $f(x) > g(x)$.

סעיף א

השאלה פשוטה יותר אם נשים לב ש:

$$f(x) = \frac{ax^3 + 2ax}{\sqrt{x^4 + 4x^{+}4}} = \frac{ax(x^2+2)}{\sqrt{(x^2+2)^2}} = \frac{ax(x^2+2)}{x^2+2} = ax\,.$$

אנחנו מסתמכים על העובדה ש־$x^2 + 2 > 0$ כך שניתן לחשב את השורש במכנה ולצמצם את השבר, בלי לשנות את התכונות של הפונקציה.

ברור ש־$f(x)$ מוגדרת לכל x.

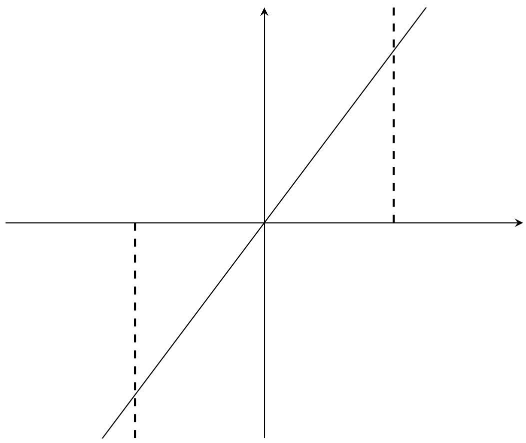
סעיף ב

$x^2 + 2$ זוגית כך שהזוגיות תלויה רק בזוגיות של ax. $a(-x) = -(ax)$ והפונקציה אי־זוגית.

סעיף ג

כאן צריך להיזהר. **האינטגרל** של פונצקיה אי־זוגית בתחום הסימטרי בין $-k$ ל־k הוא אפס כי התרומה של הערכים החיוביים והשליליים מצטמצמים. אבל **השטח** התחום על ידי תחום סימטרי כולל את השטח מתחת לציר ה־x והשטח מעל לציר ה־x. עבור פונקציה אי־זוגית, השטחים שווים.

$$S = 2\int_0^1 ax\,dx = ax^2\Big|_0^1 = a = 4\,.$$



סעיף ד

(1)

$$g(x) = \int g'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = \int ax\,dx = \frac{1}{2}ax^2 + c\,.$$

לפי הנתון על נקודת החיתוך:

$$f(0) = a \cdot 0 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 0^2 + c = g(0)\,,$$

ו־$c = 0$. לכן $g(x) = \frac{1}{2} \cdot 4x^2 + 0 = 2x^2$.

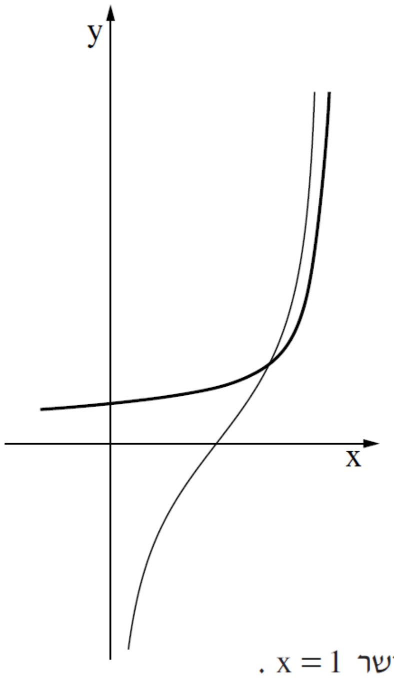
(2)

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{?}{>} g(x) \\ 4x &\stackrel{?}{>} 2x^2 \\ 2 &> x\,. \end{aligned}$$

אפשר לצמצם $x = 0$ כי $f(0) = 0 \not> g(0) = 0$.

עבור $x < 0$, $f(x)$ שלילי ו־$g(x)$ חיובי, וברור ש־$f(x) \not> g(x)$. לכן התחום בו $f(x) > g(x)$ הוא $0 < x < 2$.

7.9 חורף תשע"ו



נתונות הפונקציות:
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$$
$$g(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}$$
(ראה ציור).

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$,
ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים
של הפונקציה $f(x)$,
ואת האסימפטוטות המאונכות לצירים
של הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים
של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = 1$.

ג. נתונות הפונקציות: $h(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}} + 2$, $t(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}} + 2$,

S_1 הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ ועל ידי הישר $x = 2.5$.

S_2 הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $h(x)$ ו־ $t(x)$ ועל ידי הישר $x = 2.5$.

האם השטח S_1 גדול מהשטח S_2, קטן ממנו או שווה לו? נמק.

סעיף א

(1) $f(x)$: השורש לא שלילי לכן $x \leq 3$. המכנה לא אפס לכן $x \neq 3$. ביחד $x < 3$.

$g(x)$: כמו עבור $f(x)$, $x < 3$. אבל x בשuרש לא יכול להיות אפס. כמו כן, עבור $x < 0$, בגלל ש־$3 - x > 0$ אנו מקבלים $x(3-x) < 0$, והשורש לא מוגדר. תחום ההגדרה הוא $0 < x < 3$.

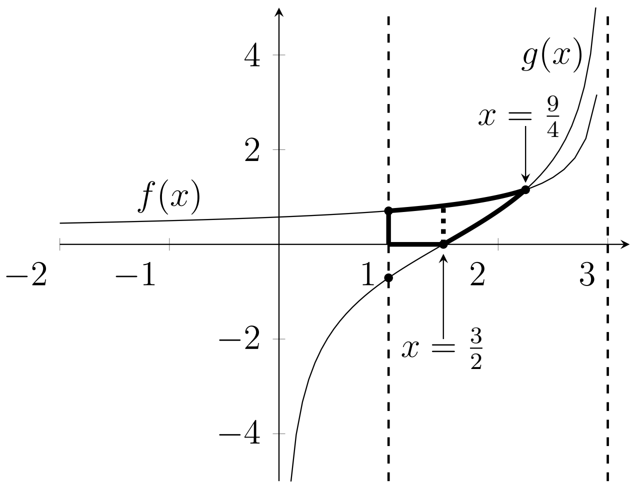
(2) אסימפטוטות אנכיות: $x = 3$ מאפס את המכנה של שתי הפונקציות, ו־$x = 0$ מאפס גם את $g(x)$. בכל אחד מהערכים האלה המונה לא מתאפס ולכן הם מגדירים אסימפטוטות.

אסימפטוטות אופקיות: שתי הפונקציות לא מוגדרות עבור $x > 3$ ולכן אין אסימפטוטות כאשר $x \to +\infty$. כאשר $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$, ולכן יש ל־$f(x)$ אסימפטוטה אופקית $y = 0$. הפונקציה $g(x)$ איננה מוגדרת עבור $x < 0$ ולכן אין אסימפטוטה כאשר $x \to -\infty$.

סעיף ב

שאלה זו ממש לא מוצאת חן בעיני בגלל כמות חישובים רבה!

השטח התחום גם על ידי ציר ה־x וגם על ידי גרף מעט קשה לדמיין, אבל תרשים עוזר. בתרשים גבולות השטח מסומנים בקו עבה, וברור שצריך להחשב בשני חלקים. אחד מ־$x = 1$ ועד לנקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר ה־x, והשני, ההמשך עד לנקודת החיתוך של שתי הפונקציות.



נקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר ה־x: המכנה חיובי בתחום ההגדרה והמונה מתאפס כאשר $x=\frac{3}{2}$.
נחשב את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות:

$$\frac{1}{\sqrt{3-x}}=\frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}\,.$$

בתחום ההגדרה, x ו־$3-x$ חיוביים. נצמצם $\sqrt{3-x}$ ונקבל $x=\frac{9}{4}$. נקודת החיתוך היא $\left(\frac{9}{4},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.
נחשב את שני חלקי השטח בנפרד (לא הבאתי את החישובים המייגעים):

$$S_1=\int_1^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3-x}}-0\right)dx=-2\sqrt{3-x}\Big|_1^{\frac{3}{2}}=-2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{2}\right)=0.379$$

$$S_2=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{4}}\left(\frac{1}{\sqrt{3-x}}-\frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}\right)dx=-2\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{x(3-x)}\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{4}}=$$

$$(-1.732+2.598)+(2.449-3)=0.315$$

$$S=0.379+0.315=0.694\,.$$

סעיף ג

בניגוד לשאלה בסעיף ב, כאן הצירים לא תוחמים את השטח. השטח מחושב על ידי ההפרש בערכי הפונקציות, ולכן הוספות קבוע לפונקציות מצטמצם וערך השטח לא משתנה.

7.10 קיץ תשע"ה מועד ב

נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

הישר $y = \frac{1}{3}x + 3$ חותך את הגרף של הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 0$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ושל הפונקציה $f(x)$?

(2) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(6) הוסף לסקיצה שסרטטת בתת־סעיף ב (5) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתונות שתי משוואות, I ו־ II : $\quad$ I. $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = k$ $\quad$, $\quad$ II. $\sqrt{x^2+9} = k$

נתון כי $k > 0$.

מצא את תחום הערכים של k שעבורם

אין פתרון למשוואה I וגם אין פתרון למשוואה II .

סעיף א

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{1}{2}(x^2+9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\,dx = (x^2+9)^{\frac{1}{2}} + c\,.$$

לפי הנתון, $\sqrt{0^2+9} + c = 3$, ולכן $c = 0$ ו־$f(x) = \sqrt{x^2+9}$.

סעיף ב

(1) x^2+9 חיובי עבור כל x לכן $f(x)$ ו־$f'(x)$ מוגדרות עבור כל x.

(2) $f'(x)$ מוגדרת עבור כל x אז אין אסימפטוטות אנכיות.

$$\frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} \xrightarrow[\pm\infty]{} \pm 1\,,$$

לכן $y = 1$ היא אסימפטוטה אופקית כאשר $x \to +\infty$, ו־$y = -1$ היא אסימפטוטה אופקית כאשר $x \to -\infty$.

(3) על ידי הצבה של $x = 0$ יש נקודת חיתוך ב־$(0,0)$.

המכנה חיובי לכן $y = 0$ רק אם $x = 0$ וכבר קיבלנו נקודת חיתוך זו.

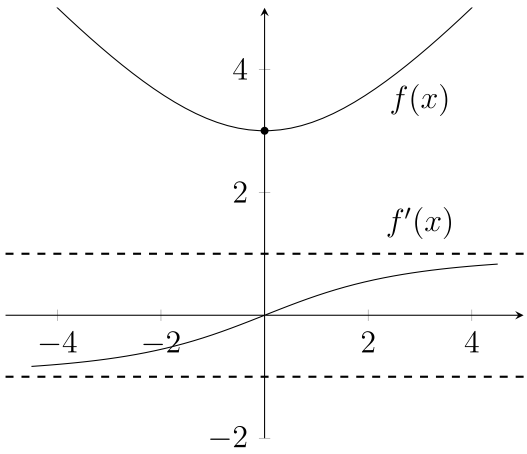
(4)

$$f''(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+9} - x \cdot \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}} \cdot 2x}{x^2+9} = \frac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}} \,.$$

הנגזרת השנייה תמיד חיובי ולכן הנגזרת הראשונה עולה בכל התחום.

(5, 6) $f(x)$ היא פרבולה עם נקודת מינימום ב־$(0,3)$.

לפי (3) ל־$f'(x)$ יש נקודת חיתוך ב־$(0,0)$. לפי (2) יש אסימפטוטות ב־± 1 כאשר השאיפה היא ל־1 עבור $x \to +\infty$, והשאיפה היא ל־-1 עבור $x \to -\infty$.



סעיף ג

הערך הקטן ביותר של $\sqrt{x^2+9}$ הוא 3, ולכן אין פתרון למשוואה II כאשר $0 < k < 3$. זה ברור גם מהגרף כי $(0,3)$ היא נקודת מינימום של $f(x)$.

מהגרף של $f'(x)$ ברור שאין פתרון למשוואה I כאשר $k \geq 1$. אפשר גם בחישוב:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2+9} &= k^2 \\ x &= \frac{3k}{\sqrt{1-k^2}} \,. \end{aligned}$$

כדי שניתן להוציא שורש חייב להתקיים $k < 1$, ולכן אין פתרון כאשר $k \geq 1$.

שימו לב שהשאלה ביקשה את התחום בו אין פתרון ל־I **וגם** ל־II. צירוף שתי התוצאות נותן שאין פתרון לשתי המשוואות כאשר $1 \leq k < 3$.

7.11 קיץ תשע"ה מועד א

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(4) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד.

על סמך הגרף של הפונקציה $f(x)$, ציין באיזה תחום נמצאת כל אחת מנקודות אלה.

ג. האם השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים,

גדול מ־ 4 , קטן מ־ 4 או שווה ל־ 4 ? נמק.

סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס ב־$x=1$. תחום ההגדרה הוא $x\neq 1$.

(2) כאשר $x=1$ המכנה מתאפס אבל המונה לא מתאפס, לכן $x=1$ היא אסימפטוטה אנכית.

$$\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{4x}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}\xrightarrow[\pm\infty]{}0\,.$$

לכן יש אסימפטוטה אופקית ב־$y=0$.

(3) כאשר $x=0$, $y=\frac{4}{-1}=-4$.

כדי ש־$y=0$, $(x+2)^2=0$, $x=-2$ והמכנה מתאפס רק עבור $x=1$.

נקודות החיתוך הן $(0,-4),(-2,0)$.

(4)

$$f'(x)=\frac{2(x+2)(x-1)^3-(x+2)^2\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}=-\frac{(x+2)(x+8)}{(x-1)^6}\,.$$

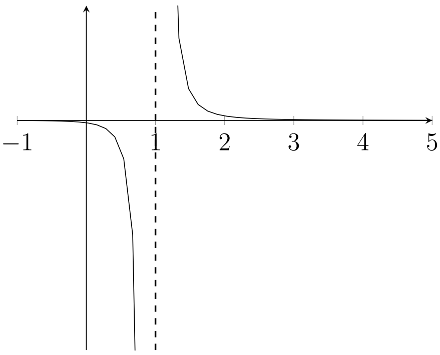
המכנה לא מתאפס בתחום ההגדרה, לכן נקודות הקיצון הן $\left(-8,-\frac{4}{81}\right),(-2,0)$.

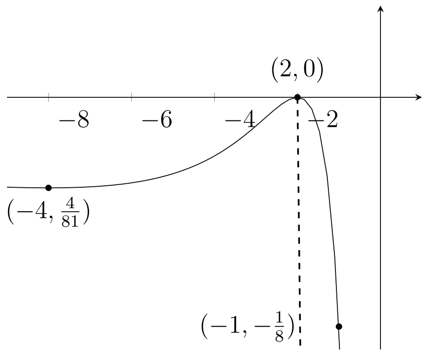
המכנה חיובי ולכן סימן הנגזרת השנייה היא סימן הנגזרת של המונה $-2(x+5)$.

$-2(-2+5)<0$ ולכן $(-2,0)$ היא מקסימום.

$-2(-8+5)>0$ ולכן $\left(-8,-\frac{4}{81}\right)$ היא מינימום.

(5) לא ניתן לראות את כל המידע החשוב בגרף בקנה מידה אמיתי. הבאתי שני גרפים, אחד מימין לציר ה־y מהראה את האסימפטוטות, ואחד משמאל לציר ה־y המראה את נקודות הקיצון.





סעיף ב

בין $-\infty$ ל־-8, השיפוע יורד ואז עולה ויש נקודת פיתול. בין -8 ל־-2 השיפוע עולה ואז יורד ויש נקודת פיתול.

סעיף ג

הקו בין $(-2,0)$ לבין $(0,-4)$ תוחם משולש (ישר זווית) ששטחו $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = 4$. הגרף נמצאת מעל לקו לכן השטח שהוא תוחם פחות מ־4.

בגלל קנה המידה בתרשים קשה לראות שהגרף תמיד מעל לקו המקווקו, אז נבדוק בחישוב. ב־$x = -1$, $f(-1) = -\frac{1}{8} = -0.125$. לפי משולשים דומים, $x = -1$ חוצה את הבסיס ולכן הנקודה על היתר של המשולש היא $(-1,-2)$. הגרף מעל לקו כי $-0.125 > -2$.

7.12 חורף תשע"ה

נתונות הפונקציות: $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{3x^2+2}}$$

א. מצא עבור כל אחת מהפונקציות:

(1) את תחום ההגדרה.

(2) את האסימפטוטות המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) את השיעורים של נקודות הקיצון (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה אחת בלבד.

ג. נתונה הפונקציה $h(x)=g(x)-k$, $k>0$.

עבור אילו ערכים של k אין לפונקציה $h(x)$ נקודות חיתוך עם הפונקציה $f(x)$? נמק.

סעיף א

(1) המכנה של שתי הפונקציות חיובי, ולכן $g(x)$ מוגדרת עבור כל x. $f(x)$ לא מוגדרת עבור $x<0$ בגלל ה־x במונה, כך שתחום ההגדרה הוא $x\geq 0$.

(2) אין אסימפטוטות אנכיות כי כל אחת מהפונקציות מוגדרת בכל התחום שלה.

$$\sqrt{\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1}}\xrightarrow[+\infty]{}0\,,$$

ולכן $y=0$ היא אסימפטוטה אופקית.

כאשר $x\xrightarrow[\pm\infty]{}$, המכנה של $g(x)$ שהוא חיובי שואף ל־$+\infty$, ולכן $y=0$ היא אסימפטוטה אופקית.

(3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot(2x)}{\frac{x}{1+x^2}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{1-x^2}{\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\,. \end{aligned}$$

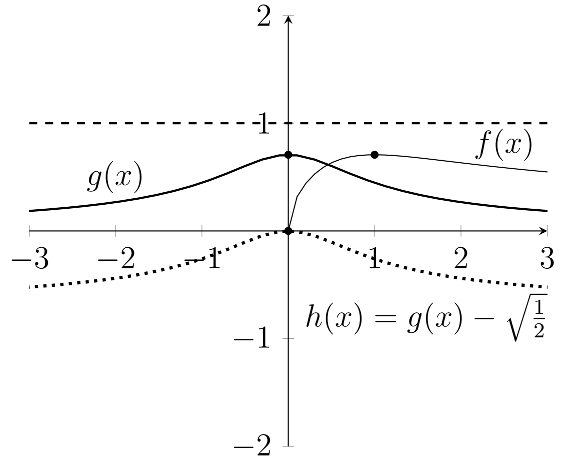
המכנה חיובי לכן הנגזרת מתאפסת כאשר המונה מתאפס $x=\pm1$. $f(x)$ לא מוגדרת כאשר $x<0$ ולכן נקודת הקיצון היחיד היא $\left(1,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. הסימן של הנגזרת השנייה הוא הסימן של הנגזרת של המונה של $f'(x)$: $\frac{1}{2}\cdot-2x$ שהיא שלילית עבור כל x בתחום, ולכן נקודת הקיצון היא מקסימום.

הנגזרת הראשונה היא:

$$g'(x) = -\frac{1}{2}\left(3x^2+2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 6x$$

המכנה חיובי לכן הנגזרת מתאפסת כאשר $x=0$. נקודת הקיצון היא $\left(1,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. הנגזרת של המונה היא $-3<0$, ונקודות הקיצון היא מקסימום.

סעיף ב



ההערה "אם ידוע כי הפונקציות תחתכות בנקודה אחת בלבד" היתה לי די מוזרה, אבל לאחר מחשבה הבנתי שההערה באה למנוע אפשר של חיתוך כאשר $x>1$ ושואף לאינסוף.

רציתי להשתכנע שאכן ההערה נכונה. כאשר משווים $f(x)=g(x)$ ומפשטים, מקבלים פולינום ממעלה שלישי:

$$3x^3-x^2+2x-1=0\,.$$

לא התחשק לי לחפש את הנוסחה (המסובכת) למציאת פתרונות למשוואות ממעלה שלישי, אבל לבסוף שמתי לב שאם $x>1$ אז $3x^3-x^2>0$ ו־$2x-1>0$, ולכן לא יכול להיות פתרונות נוספים.

סעיף ג

הערך המינימלי של $f(x)$ הוא 0, והערך המקסימלי של $g(x)$ הוא $\sqrt{\frac{1}{2}}$. אם $k>\sqrt{\frac{1}{2}}$ לא יהיו נקודות חיתוך בין שתי הפונקציות.

7.13 קיץ תשע"ד מועד ב

נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x^2-1}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. רק על פי סעיף א, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. רק על פי הסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ שסרטטת, מצא את התחום שבו מתקיים:

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית.

נמק.

סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס $x=\pm 1$.

(2) האסימפטוטות האנכיות הן במקומות שהפונקציה לא מוגדרת $x=\pm 1$.

חישוב האסימפטוטה האופקית:

$$\frac{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}} \xrightarrow[\pm\infty]{} \frac{1}{1}=1\,.$$

(3) כאשר $x=0$, $y=-4$.

כאשר $x=2$ המונה מתאפס והמכנה לא מתאפס.

נקודות החיתוך הן $(2,0),(0,-4)$.

(4) חישוב הנגזרת הראשונה:

$$f'(x)=\frac{2(x-2)(x^2-1)-(x-2)^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2(2x^2-5x+2)}{(x^2-1)^2}\,.$$

המכנה חיובי בתחום ההגדרה ולכן נקודות הקיצון הן הפתרונות של:

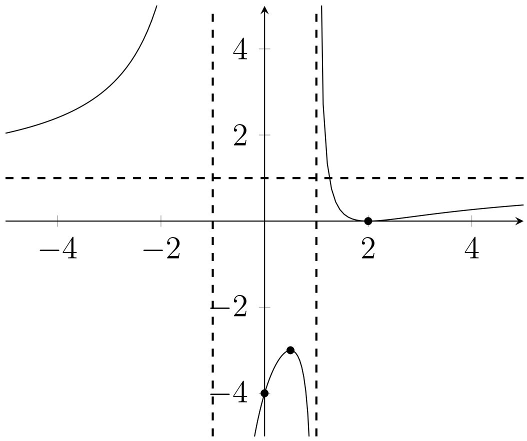
$$2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)=0\,.$$

המכנה חיובי לכן סימן הנגזרת השנייה הוא הסימן של הנגזרת של המונה של הנגזרת הראשונה $2(4x-5)$. ביטוי זה חיובי עבור $x=2$, ושלילי עבור $x=\frac{1}{2}$. נקודות הקיצון הן:

$(2,0)$ מינימום, $\left(\dfrac{1}{2},-3\right)$ מקסימום.

סעיף ב

בסעיפים הקודמים חישבנו את האסימפטוטות, נקודות החיתוך עם הצירים וונקודות הקיצון. מידע זה מספיק לצייר תרשים עבור $x > -1$. עבור $x < -1$ נבדוק אם הגרף מעל לאסימפטוטה האופקית או מתחתיה. $f(-2) = \frac{16}{3} > 1$ ולכן הגרף מעל לאסימפטוטה.



סעיף ג

כדי שהנגזרת הראשונה תהיה שלילית, הפונקציה צריכה לרדת:

$$\frac{1}{2} < x < 1, 1 < x < 2\,.$$

כדי שהנגזרת השנייה תהיה חיובית, הנגזרת הראשונה חייב לעלות:

$$x < -1, -1 < x < \frac{1}{2}, 1 < x < x_1\,,$$

כאשר x_1 היא נקודת הפיתול אי־שם מימין ל־$x = 2$.

החיתוך בין שני התחומים הוא $1 < x < 2$.

7.14 קיץ תשע"ד מועד א

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax^2+9}$. a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) הראה כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

(2) הבע באמצעות a את האסימפטוטות האופקיות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־ x
ועל ידי הישר $x=-4$, שווה ל־ 2 .
בלי לחשב את הערך של a , חשב את הערך המספרי של $f(-4)$
ואת הערך המספרי של $f(4)$.

סעיף א

(1) הפונקציה לא מוגדר כאשר $ax^2+9\le 0$. נתון ש־$a>0$ אז הביטוי תמיד גדול מאפס, והפונקציה מוגדרת עבור כל x.

(2) נחשב את הנגזרת הראשונה והנגזרת השנייה:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(ax^2+9)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2ax=\frac{ax}{\sqrt{ax^2+9}}$$

$$f''(x) = \frac{a\sqrt{ax^2+9}-ax\cdot\dfrac{ax}{\sqrt{ax^2+9}}}{ax^2+9}$$

$$= \frac{9a}{(ax^2+9)\sqrt{ax^2+9}}\,.$$

(א) הנגזרת השנייה מוגדרת לכל x, ו־(ב) גם המונה וגם המכנה חיוביים, ולכן הנגזרת השנייה לא מתאפסת. המסקנה היא שאין נקודות פיתול.

סעיף ב

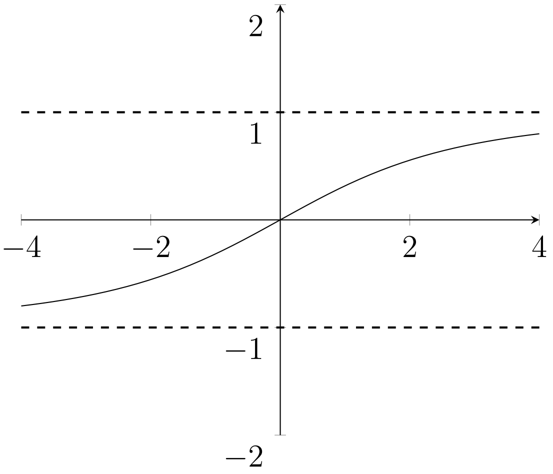
(1) $f'(x)$ מוגדרת כאשר $ax^2+9>0$, ולכן היא מוגדרת לכל x בדיוק כמו $f(x)$.

(2) נחלק את המונה והמכנה ב־$\sqrt{x^2}$:

$$f'(x)=\frac{\dfrac{ax}{|x|}}{\sqrt{a+\dfrac{9}{x^2}}}\xrightarrow[\pm\infty]{}\pm\sqrt{a}\,.$$

(3) ראינו בסעיף א שהנגזרת השנייה תמיד חיובית ולכן הנגזרת הראשונה תמיד עולה.

(4)



סעיף ג

האינטגרל של הנגזרת של פונקציה הוא הפונקציה עצמה.

$$\int_{-4}^{0} 0 - f'(x)dx = -\int_{-4}^{0} f'(x)dx = -f(x)|_{-4}^{0} = -f(0) + f(-4) = 2\,.$$

קל לחשב ש־$f(0) = \sqrt{9} = 3$ ו־$f(-4) = \sqrt{16a+9}$. הפיתוי הוא לחשב את הערך של a אבל השאלה דורשת את הערך של $f(-4)$ בלי לחשב את הערך של a. החישוב אפילו קל יותר:

$$f(-4) = 2 + f(0) = 2 + 3 = 5\,.$$

הפונקציה זוגית, לכן $f(4) = f(-4) = 5$.

מי שמעוניין יכול לחשב את ערכו של a:

$$\begin{aligned}\sqrt{16a+9} &= 2+3\\ a &= 1\,.\end{aligned}$$

7.15 חורף תשע"ד

במשולש שווה־שוקיים ABC ‏(AB = AC) אורך השוק הוא b .

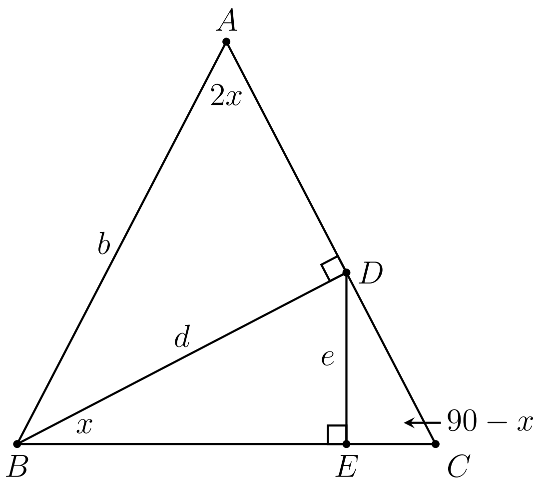
BD הוא גובה לשוק AC . DE הוא אנך לבסיס BC .

סמן ∢BAC = 2x , ומצא מה צריך להיות הגודל של ∢BAC ,

כדי שאורך האנך DE יהיה מקסימלי.

בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

בבחינה זו היו שלוש שאלות בפרק השני לכן מספר השאלה הוא 8 **ולא** 7.



נצדיק את סימון הזוויות בתרשים. זוויות הבסיס $\angle ACB, \angle ABC$ של המשולש שווה־שוקיים הן:

$$\frac{180-2x}{2} = 90 - x\,.$$

במשולש ישר־זווית $\triangle BDC$, $\angle DBC = 90-(90-x) = x$.

במבט ראשון נראה שאפשר למצוא את הערך המקסימלי של $DE = e$ על ידי מציאת הנגזרת $e' = (d \sin x)' = d(\sin x)' = 0$. אבל זה לא נכון כי d איננה קבוע ולכן אי אפשר להוציא אותו מהנגזרת. נתון ש־b קבוע, כך שעלינו למצוא ביטוי מהצורה $e = b \cdot f(x)$.

את החישוב נבצע בשני שלבים, תחילה נבטא את e כפונקציה של x, d, ואח"כ נבטא את d כפונקציה של x, b. אפשר להשתמש בחוק הסינוסים, אבל פשוט יותר להשתמש בהגדרת הפונקציות הטריגונומטריות במשולשים ישר־זווית $\triangle BED, \triangle BDA$:

$$\begin{aligned}
e &= d \sin x \\
d &= b \sin 2x \\
e &= (b \sin 2x) \sin x \\
&= b(2 \sin x \cos x) \sin x = 2b \sin^2 x \cos x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e' &= 2b(2\sin x\cos x\cos x + \sin^2 x\cdot(-\sin x)) \\
&= 2b\sin x(2\cos^2 x - \sin^2 x) = 0\,.
\end{aligned}
$$

הנגזרת מתאפסת אם $\sin x = 0$ שלא ייתכן, כי $x = 0, x = 180$ אינם יכולים להיות זוויות במשולש. הנגזרת גם מתאפסת אם:

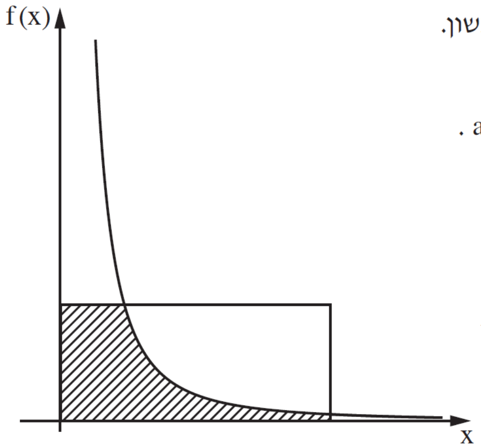
$$
\begin{aligned}
2\cos^2 x - \sin^2 x &= 0 \\
\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 &= 2 \\
\tan x &= \pm\sqrt{2} \\
x &= 54.74,\ 125.26\,.
\end{aligned}
$$

אבל $\angle BAC = 2x$ כך ש־$x = 54.74$ הוא הפתרון האפשרי היחיד.

השאלה מבקשת את ערכו של הזווית $\angle BAC = 2x = 109.47$.

פרק 8 חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

8.1 קיץ תשע"ח מועד ב



בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}$ בתחום $x>0$,

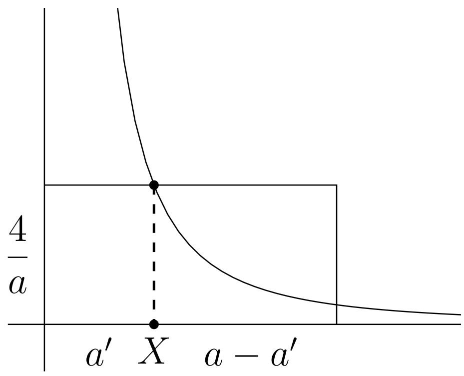
ומלבן ששתיים מצלעותיו נמצאות על הצירים והוא נמצא ברביע הראשון.

נתון: שטח המלבן הוא 4 .

נסמן ב־ a את אורך צלע המלבן שנמצאת על ציר ה־ x . נתון: $a\ge\frac{1}{4}$.

א. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הצירים, על ידי צלעות המלבן ועל ידי גרף הפונקציה f(x) (השטח המקווקו בציור).

ב. עבור איזה ערך של a השטח שמצאת בסעיף א הוא מקסימלי?



סעיף א

נתון שהשטח של המלבן הוא 4 ולכן הצלע האנכית שלו הוא $\frac{4}{a}$. נסמן ב־X נקודה על ציר ה־x, ונסמן את האורך בין X למרכז הצירים ב־a'. לפי ההגדרה של הפונקציה $f(a')=\frac{1}{(a')^2}=\frac{4}{a}$ ו־$a'=\frac{\sqrt{a}}{2}$. נחשב את השטח המבוקש כסכום השטח של המלבן עד הנקודה X והשטח מתחת לפונקציה מ־X ועד ל־$x=a$:

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{a}\cdot\frac{\sqrt{a}}{2}+\int_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^{a}\frac{1}{x^2}dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{a}}+(-1)\cdot x^{-1}\Big|_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^{a} \\ &= \frac{2}{\sqrt{a}}-\frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{\sqrt{a}}{2}}=\frac{4\sqrt{a}-1}{a}\,. \end{aligned}$$

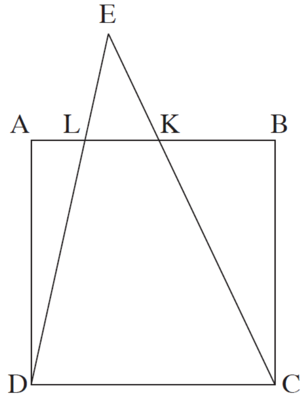
סעיף ב

ברור ש־$S = \frac{4\sqrt{a}-1}{a}$ יורדת בעיקביות ככל ש־a עולה, לכן הערך המקסימלי צריך להיות בערך הקטן ביותר של התחום הנתון $a = \frac{1}{4}$. אם רוצים ניתן לחשב את הנגזרת הראשונה:

$$\left(\frac{4\sqrt{a}-1}{a}\right)' = \frac{\left(4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot a\right) - ((4\sqrt{a}-1) \cdot 1)}{a^2} = \frac{-2\sqrt{a}+1}{a^2}\,,$$

שמתאפסת ב־$a = \frac{1}{4}$.

8.2 קיץ תשע"ח מועד א



ABCD הוא ריבוע שאורך צלעו 6 ס"מ.

K ו־ L הן נקודות על הצלע AB .

נתון כי הישרים CK ו־ DL חותכים זה את זה בנקודה E ,

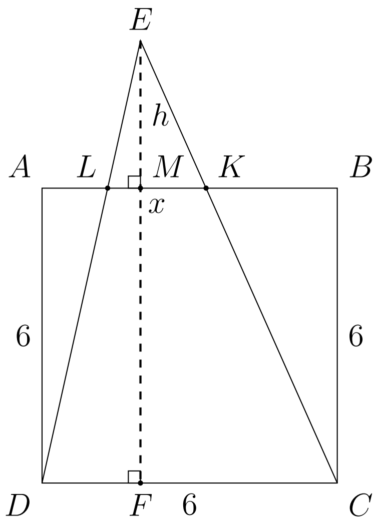
הנמצאת מחוץ לריבוע ABCD (ראה ציור).

נסמן: LK = x .

א. הבע באמצעות x את גובה המשולש KLE .

ב. עבור איזה ערך של x סכום שטחי המשולשים BCK , ADL ו־ KLE הוא מינימלי? נמק.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.



סעיף א

לאחר שנשלים סימונים בתרשים, אנו רואים ש־$\triangle KLE \sim \triangle CDE$ כי $DC \| LK$. בנוסף, נשים לב שהגובה של $\triangle CDE$ הוא $h+6$. לכן:

$$\begin{aligned} \frac{h}{x} &= \frac{h+6}{6} \\ h &= \frac{6x}{6-x} \,. \end{aligned}$$

סעיף ב

נחשב את שלושת השטחים:

$$\begin{aligned} S_{\triangle KLE} &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot h = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{6x}{6-x} \\ S_{\triangle ADL} &= \frac{1}{2} \cdot AL \cdot 6 \\ S_{\triangle BCK} &= \frac{1}{2} \cdot BK \cdot 6 \,. \end{aligned}$$

המצב נראה אבוד כי AL, BK לא ידועים ואין נתונים עליהם. אבל, נשים לב ש-AB הוא צלע של הריבוע ולכן $AL + BK = AB - LK = 6 - x$. לכן סכום השטחי המשולשים הוא:

$$\begin{aligned} S = S_{\triangle KLE} + S_{\triangle ADL} + S_{\triangle BCK} &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{6x}{6-x} + \frac{1}{2} \cdot (6-x) \cdot 6 \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2(x^2 - 6x + 18)}{6-x} \right) . \end{aligned}$$

נחשב את נגזרת הראשונה (ללא הקבועים 2, $\frac{1}{2}$, 6):

$$\begin{aligned} S' &= \frac{(2x-6)(6-x) - (x^2 - 6x + 18)(-1)}{(6-x)^2} \\ &= \frac{-x^2 + 12x - 18}{(6-x)^2} . \end{aligned}$$

המכנה חיובי ולכן המונה מתאפס עבור:

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 18}}{-2} = 6 \mp 3\sqrt{2} .$$

הערך $6 + 3\sqrt{2} > 6$ אינו פתרון כי LK הוא קטע של צלע שאורכו 6. נקודת הקיצון היא $6 - 3\sqrt{2}$. המכנה של S' חיובי לכן הסימן של הנגזרת השנייה יהיה הסימן של הנגזרת של המונה של S' עבור נקודת הקיצון. הנגזרת היא $-2x + 12$. עבור נקודת הקיצון:

$$-2(6 - 3\sqrt{2}) + 12 = 6\sqrt{2} > 0 ,$$

והנקודה היא מינימום.

8.3 חורף תשע"ח

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = t$.

נתון: $1 \le t \le 5$.

המשיק חותך את ציר ה־ x בנקודה A ואת ציר ה־ y בנקודה B . הנקודה O היא ראשית הצירים.

א. מצא את שיעור ה־ x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מינימלי.

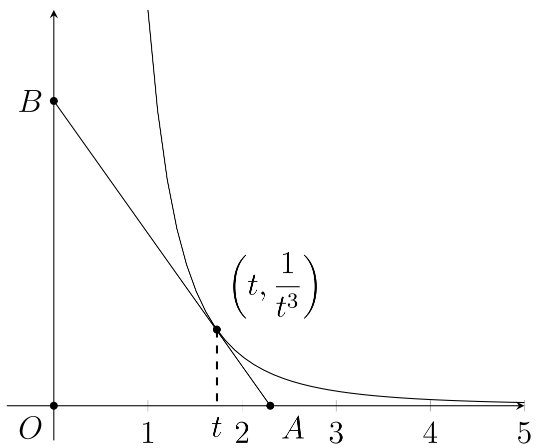
ב. מצא את שיעור ה־ x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מקסימלי.

אני מודה שהסתבכתי כאן בגלל שלא תירגלי מזמן את המשוואה לקו ישר. נדמה לי שזו הפעם היחידה שהמשוואה נדרשת בכל הבחינות הללו.

סעיף א

ערך ההפונקציה חיובית עבור ערכי x חיוביים, ולכן המשיק נמצא ברביע הראשון.

(הערכים בציר ה־y בתרשים הוכפלו פי שמונה כדי לאפשר הצגת תרשים ברור.)



הנגזרת של הפונקציה היא $f'(x) = \frac{-3}{x^4}$ לכן הקו המשיק לגרף הפונקציה הוא:

$$y - \frac{1}{t^3} = \frac{-3}{t^4}(x - t) \,.$$

נחשב את הנקודות על הצירים:

$$\begin{aligned}
0 - \frac{1}{t^3} &= \frac{-3}{t^4}(x_A - t) \\
x_A &= \frac{t}{3} + t = \frac{4t}{3} \\
y_B - \frac{1}{t^3} &= \frac{-3}{t^4}(0 - t) \\
y_B &= \frac{1}{t^3} + \frac{3}{t^3} = \frac{4}{t^3} \,.
\end{aligned}$$

השאלה מבקשת את נקודת הקיצון של:

$$g(t) = x_A + x_B = \frac{4t}{3} + \frac{4}{t^3}\,.$$

הנגזרת הראשונה והנגזרת השנייה הן:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{4}{3} + \frac{-12}{t^4} \\ g''(x) &= \frac{48}{t^5}\,. \end{aligned}$$

הנחשב את t כאשר הנגזרת הראשונה מתאפסת:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{4}{3} + \frac{-12}{t^4} = 0 \\ t^4 &= \frac{3}{4} \cdot 12 = 9 \\ t &= \pm\sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

נתון ש־$t > 0$ ולכן נקודת הקיצון היא $t = \sqrt{3}$. הנגזרת השנייה חיובית עבור כל $t > 0$ ולכן נקודת הקיצון היא מינימום.

סעיף ב

אם יש רק נקודת קיצון פנימית אחת שהיא מינימום, אז המקסימום חייב להיות בקצה התחום.

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{4 \cdot 1}{3} + \frac{4}{1^3} = \frac{16}{3} \\ g(5) &= \frac{4 \cdot 5}{3} + \frac{4}{5^3} = \frac{20}{3} + \frac{4}{125}\,. \end{aligned}$$

ברור ש־$g(1) < g(5)$ ולכן המקסימום הוא ב־$t = 5$.

8.4 קיץ תשע"ז מועד ב

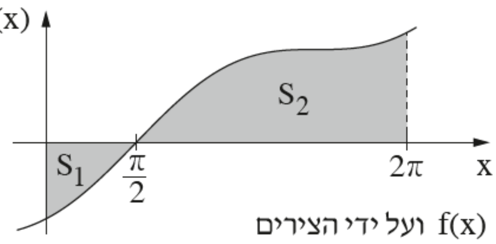
$f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־ y בחלקו השלילי.

נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x היא $(\frac{\pi}{2}, 0)$ (ראה ציור).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הצירים ועל ידי הישר $x = 2\pi$ (השטח האפור בציור) שווה ל־ $10\pi^2 + 16$.

נתון גם: $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 8\pi^2$.



א. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים (השטח S_1 המסומן בציור).

הפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$. נתון: $F(0) = 0$.

ב. מצא את $F(\frac{\pi}{2})$.

נתון: $f'(x) = 8\sin x + 8$.

ג. מצא את $f(x)$.

בשאלה זו צירך לשים לב להבדל בין חישוב אינטרגל של פונקציה ובין השימוש באינטגרל לחישוב שטח. בתרשים בשאלה, אם מחשבים אינטגרל מ־0 ל־2π, הערכים השליליים עד $\frac{\pi}{2}$ "מורידים" מערך האינטגרל. כאשר מחשבים את השטח $S_1 + S_2$ התרומה של S_1 חיובית ויש לחשב את האינטגרל של השלילה של הפונצקיה.

סעיף א

הערך של $f(x)$ שלילי בין 0 ל־$\frac{\pi}{2}$ ולכן:

$$S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} f(x)dx = 10\pi^2 + 16\,.$$

נתון ש:

$$-S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx = 8\pi^2\,.$$

נחסיר את המשוואה השנייה מהראשונה ונקבל:

$$S_1 = \pi^2 + 8\,.$$

סעיף ב

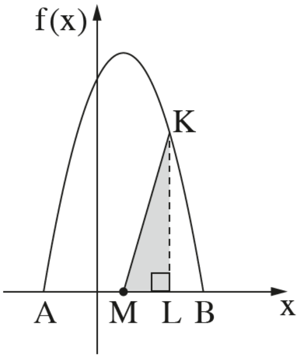
$$-S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = F|_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(\pi^2 + 8)\,.$$

סעיף ג

נתון $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = \int (8\sin x + 8)dx \\ &= -8\cos x + 8x + c \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -8\cos\frac{\pi}{2} + 8\cdot\frac{\pi}{2} + c = 0 \\ c &= -4\pi \\ f(x) &= -8\cos x + 8x - 4\pi\,. \end{aligned}$$

8.5 קיץ תשע"ז מועד א



בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 + 2x + c$

בתחום האי־שליליות שלה.

A ו־ B הן נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

נתון: $x_A = -t$, $x_B = 2t$ $(t > 0)$.

א. מצא את t ואת c .

M היא נקודת החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה עם ציר ה־ x .

K היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה $f(x)$ מעל לציר ה־ x .

מהנקודה K הורידו אנך לציר ה־ x , החותך את הקטע AB בנקודה L .

ב. מצא עבור אילו שיעורי x של הנקודה K שטח המשולש KLM הוא מקסימלי.

מצא את שני הפתרונות האפשריים.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

סעיף א

נציב את הביטויים הנתונים עבור A, B ונקבל שתי משוואות בשני נעלמים t, c שנוכל לפתור:

$$\begin{aligned}
-(2t)^2 + 2(2t) + c &= 0\\
-(-t)^2 + 2(-t) + c &= 0\\
t(6t-3) &= 0\\
t &= 2\,.
\end{aligned}$$

פסלנו את הפתרון $t = 0$ כי נתון ש־$t > 0$. נחשב את c:

$$\begin{aligned}
-(-2)^2 + 2(-2) + c &= 0\\
c &= 8\,.
\end{aligned}$$

הפונקציה היא $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.

סעיף ב

נקודת החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה עם הפונקציה היא נקודת המקסימום של $f(x)$.
מהנגזרת הראשונה $f'(x) = -2x + 2 = 0$ מתקבל $x = 1$.

הקודקודים של $\triangle KLM$ הם:

$$\begin{aligned}
M &= (1, 0)\\
L &= (x, 0)\\
K &= (x, -x^2 + 2x + 8)\,.
\end{aligned}$$

השטח של $\triangle KLM$ הוא:

$$S(x) = \frac{1}{2}(x-1)(-x^2+2x+8)\,,$$

והגזרת הראשונה היא:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{1}{2}\cdot -3x^2+6x+6 \\ &= -\frac{3}{2}\cdot(x^2-2x-2)\,. \end{aligned}$$

הנגזרת מתאפסת ב:

$$x = \frac{2\pm\sqrt{4+4\cdot 2}}{2} = 1\pm\sqrt{3}\,.$$

השטחים מקסימליים כי חישוב הנגזרת השנייה נותן:

$$\begin{aligned} S''(x) &= -3(x-1) \\ S''(1+\sqrt{3}) &= -\sqrt{3}<0\,. \end{aligned}$$

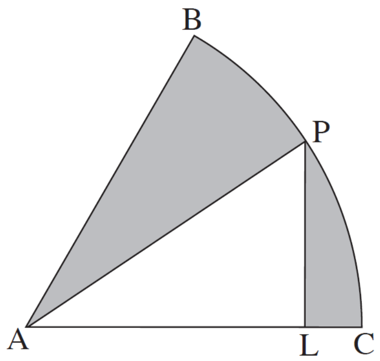
הפתרון $1+\sqrt{3}$ מתאים למשולש בתרשים.

הפתרון $1-\sqrt{3}$ מתאים למשולש הסימטרי משמאל ל־M. אורך הבסיס יהיה $1-x$, הסימנים יתהפכו ונקבל שטח חיובי ומקסימלי.

פתרונות אחרים משתמשים במונח "קודקוד הפרבולה". לא נתקלתי בו בספרי לימוד או בבחינות אחרות. עבור פרבולה ax^2+bx+c ערך ה־x של הקודקוד הוא $\frac{-b}{2a}$. אין צורך לזכור את הנוסחה כי ניתן לשחזור אותה על ידי חישוב הנגזרת:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2+bx+c \\ f'(x) &= 2ax+b=0 \\ x &= \frac{-b}{2a}\,. \end{aligned}$$

8.6 חורף תשע"ז



נתונה גזרת עיגול BAC שהיא $\frac{1}{6}$ מעיגול שרדיוסו R ומרכזו A.
מנקודה כלשהי P, הנמצאת על הקשת BC,
הורידו אנך ל־ AC החותך את הרדיוס AC בנקודה L
(ראה ציור).
השטח האפור שבציור הוא השטח הכלוא בין הקשת BC
ובין הרדיוסים AB ו־ AP, והקטעים LP ו־ LC.
נתון שהשטח האפור המינימלי הוא $24\pi - 36$.

א. (1) מצא את הזווית PAC שעבורה השטח האפור שמתקבל הוא מינימלי.

(2) מצא את R.

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש APL? נמק.

סעיף א

(1) במקום לחשב את השטח האפור שצורה ישירה (משימה שנראית די קשה) נחשב את שטחו כהפרש בין השטח של גזרת המעגל BAC לבין שטח של המשולש $\triangle APL$.

שטח הגזרה הוא שישית משטח המעגל כולו $\frac{1}{6} \cdot \pi R^2$.

שטח המשולש הוא מחצית המכפלת הבסיס AL והגובה PL, אבל ניתן להביע אותם באמצעות הרדיוס $AP = R$ והזווית $\alpha = \angle PAC$:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{AL}{R} \\
\sin\alpha &= \frac{PL}{R} \\
S_{\triangle APL} &= \frac{1}{2} \cdot R\cos\alpha \cdot R\sin\alpha \,.
\end{aligned}$$

השטח האפור הוא:

$$S_{\text{אפור}} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \cos\alpha\sin\alpha\right)$$

בלי הקבוע $\frac{R^2}{2}$ הנגזרת הראשונה היא:

$$-((-\sin\alpha)\cdot\sin\alpha + \cos\alpha\cdot\cos\alpha) = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha \,.$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $\sin\alpha = \cos\alpha$. בגזרה $0 < \alpha < \frac{1}{6}\cdot 2\pi$, הפתרון היחיד הוא $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

(2) הנגזרת השנייה היא $4\sin\alpha\cos\alpha$ שהיא חיובית בגזרה, ולכן נקודות הקיצון היא מינימום.
נשווה את החישוב שקיבלנו עם השטח הנתון:

$$\begin{aligned}
\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}\right) &= 24\pi-36=12(2\pi-3)\\
R^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= 24(2\pi-3)\\
\frac{R^2}{6}(2\pi-3) &= 24(2\pi-3)\\
R &= 12\,.
\end{aligned}$$

סעיף ב

השטח המקסימלי של $\triangle APL$ הוא שטח הגזרה פחות השטח המינימלי של השטח האפור:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle APL} &= \frac{\pi R^2}{6}-(24\pi-36)\\
&= 24\pi-(24\pi-36)=36\,.
\end{aligned}$$

8.7 קיץ תשע"ו מועד ב

במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle ABC = 90^o$) אורך היתר הוא k ס"מ (k הוא פרמטר).

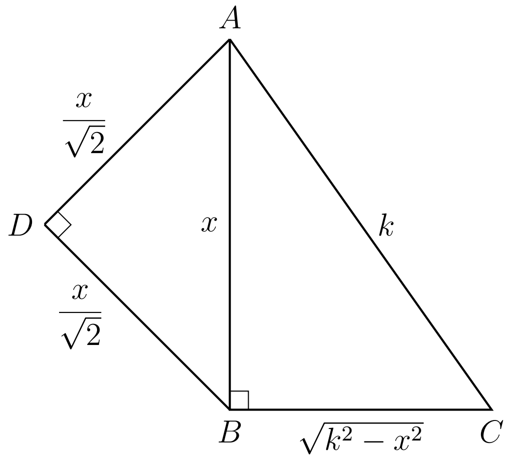
הניצב AB הוא גם יתר במשולש ADB, שהוא שווה שוקיים וישר זווית ($\sphericalangle ADB = 90^o$).

א. סמן $AB = x$ והבע את BC באמצעות x ו־k.

ב. נתון כי הערך המקסימלי של המכפלה $BC \cdot AD^2$ הוא $3\sqrt{3}$.

מצא את שטח המשולש ADB (ערך מספרי), כאשר המכפלה $BC \cdot AD^2$ היא מקסימלית.

ביזבזתי הרבה זמן על השאלה כי בהעדר תרשים שמתי את הנקודה D על היתר AC!



סעיף א

הביטויים עבור BC, AD, BD נובעים ממשפט פתגורס ומהנתון ש־$\triangle ADB$ שווה־שוקיים.

סעיף ב

$$\begin{aligned}\left(BC \cdot AD^2\right)' &= \left(\sqrt{k^2 - x^2} \cdot \frac{x^2}{2}\right)' \\ &= \frac{-2x}{2\sqrt{k^2 - x^2}} \cdot \frac{x^2}{2} + \sqrt{k^2 - x^2} \cdot x \\ &= \frac{2k^2 x - 3x^3}{2\sqrt{k^2 - x^2}}\,.\end{aligned}$$

נניח כמובן שהמשולש לא מנוון כך ש־$x \neq 0$. הנגזרת מתאפסת כאשר:

$$k = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \qquad x = \sqrt{\frac{2}{3}}k\,.$$

סימן הנגזרת השנייה הוא סימן הנגזרת של המונה של הנגזרת הראשונה:

$$(2k^2 - 3x^2)' = -6x < 0\,,$$

נקודת הקיצון היא מקסימלית.

נחשב $BC \cdot AD^2 = 3\sqrt{3}$ כדי לקבל ערך מספרי עבור k. נציב $x = \sqrt{\frac{2}{3}}k$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{k^2 - x^2} \cdot \frac{x^2}{2} &= \sqrt{k^2 - \frac{2}{3}k^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}k^2 \\
&= k^3\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} = 3\sqrt{3} \\
k^3 &= 27 \\
k &= 3\,.
\end{aligned}$$

מכאן ש:

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}k = \sqrt{6}\,.$$

השטח המקסימלי של $\triangle ADB$ הוא:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x^2}{4} = \frac{(\sqrt{6})^2}{4} = 1.5\,.$$

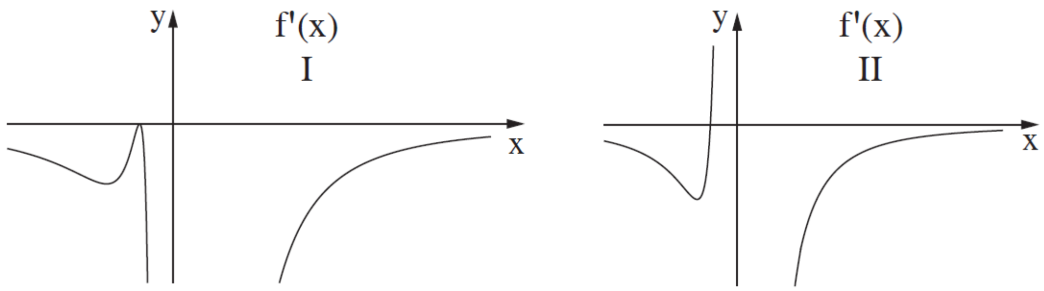
8.8 קיץ תשע"ו מועד א

נתונה הפונקציה $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n}$, $x \neq 0$. n הוא מספר טבעי גדול מ־ 1 .

א. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ב. הראה כי עבור n אי־זוגי $f'(x) \leq 0$ לכל $x \neq 0$.

לפניך שני גרפים, I ו־ II . (בגרפים מוצגות כל נקודות הקיצון.)



אחד הגרפים מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור n זוגי,

והגרף האחר מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור n אי־זוגי.

היעזר בגרפים I ו־ II , וענה על הסעיפים ג , ד , ו־ ה.

ג. עבור n אי־זוגי:

(1) מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. עבור n זוגי:

(1) מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונות הפונקציות: $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3}$, $h(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4}$.

מהו הסימן של המכפלה $g''(x)\cdot h''(x)$ עבור $x>0$? נמק.

השאלה ארוכה מאוד אבל התשובות קצרות!

אני הסתבכתי כי לא פעלתי לפי ההנחייה: "היעזר בגרפים ...".

סעיף א

$f(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$ ויש אסימפטוטה אופקית ב־$y = 1$. עבור $x \to -\infty$, עדיין יש אסימפטוטה אופקית ב־$y = 0$, רק $f(x)$ שואפת ל־0 מעל לציר ה־x עבור n זוגית, ומתחת לציר עבור n אי־זוגי.

הפונקציה לא מוגדרת עבור $x = 0$ ולכן $x = 0$ היא אסימפטוטה אנכית.

סעיף ב

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(1 + x^{-1}\right)^n\right)' \\ &= n\left(1 + x^{-1}\right)^{n-1} \cdot -x^{-2} \,. \end{aligned}$$

נתון ש־n חיובית. אם n אי־זוגית, $n - 1$ זוגית, ו־$(1 + x^{-1})^{n-1}$ חיובית או אפס. כמובן ש־x^{-2} חיובית (ולא אפס כי נתון ש־$x \neq 0$. לכן סימן המינוס לפני x^{-2} גורם לכל הביטוי להיות שלילי.

מכאן שגרף I מתאים ל־n אי־זוגית וגרף II ל־n זוגית.

סעיף ג

(1) בנקודת קיצון של $f(x)$ הנגזרת הראשונה $f'(x)$ **חוצה** את ציר ה־x, לכן אין נקודות קיצון.

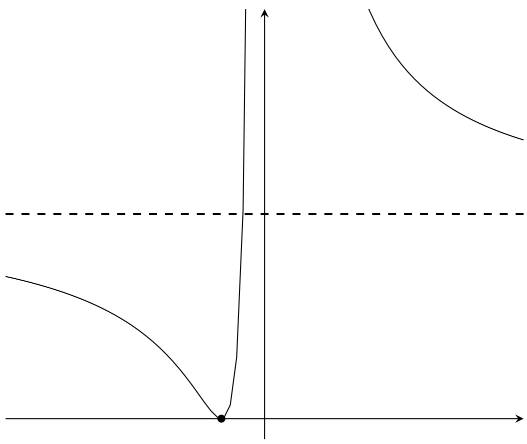
(2) בנקודת פיתול הנגזרת השנייה מתאפסת. זה קורה פעם אחת משמאל למינימום של $f'(x)$ ופעם אחת כאשר ל־$f'(x)$ יש נקודות מקסימום ללא שינוי בסימן. לכן יש שתי נקודות פיתול.

סעיף ד

(1) בנקודת קיצון של $f(x)$ הנגזרת הראשונה $f'(x)$ **חוצה** את ציר ה־x, לכן יש נקודת קיצון אחת.

(2) נקודת פיתול הנגזרת השנייה מתאפסת, כלומר, יש נקודת קיצון לנגזרת הראשונה, לכן יש נקודת פיתול אחת.

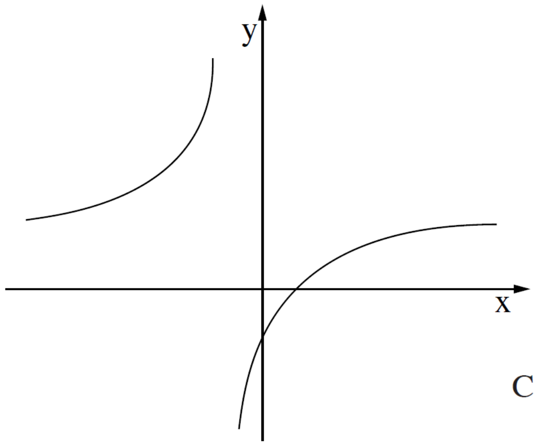
(3) לפי גרף II, עבור $x < 0$, השיפוע קרוב לאפס באסימפטוטה האופקית. השיפוע יורד משמאל עד לנקודת פיתול שם השיפוע עולה עד לנקודת מינימום של $f(x)$, ואז השיפוע עולה. עבור $x > 0$ השיפוע תמיד עולה מערך שלילי נמוך מאוד ועד קרוב לאפס בכיוון האסימפטוטה האופקית.



סעיף ה

רואים בשני הגרפים שעבור $x > 0$, השיפוע, הנגזרת הראשונה, עולה, כך שהנגזרת השנייה חיובית. מכפלה של שני ערכים חיוביים היא חיובית.

8.9 חורף תשע"ו



נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

(ראה ציור).

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה,
ואת האסימפטוטות של הפונקציה
המקבילות לצירים.

ב. העבירו ישר המקביל לציר ה־ x .
הישר חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה C
ואת הישר $y = 2x$ בנקודה D .
נסמן את שיעור ה־ x של הנקודה C ב־ t .
מצא מה צריך להיות הערך של t , כדי שהאורך של הקטע CD יהיה מינימלי:
(1) עבור $t > -1$.
(2) עבור $t < -1$.

ג. מצא את האורך המינימלי של הקטע CD עבור כל $t \neq -1$.

סעיף א

הפונקציה לא מוגדרת כאשר המכנה מתאפס: $x = -1$.

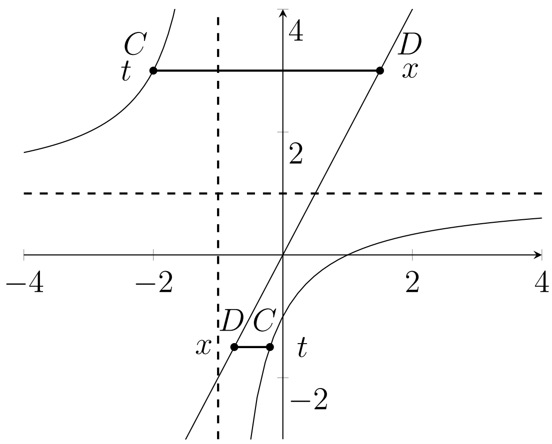
ב־$x = -1$ יש אסימפטוטה אנכית כי המכנה מתאפס והמונה לא מתאפס.

$y = 1$ היא אסימפטוטה אופקית כי:

$$\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \xrightarrow[\pm\infty]{} 1\,.$$

סעיף ב

בתרשים סימנו את ערכי ה־x ליש שמות הנקודות:



יש כאן מלכודת שניתן להימנע ממנו רק אם מציירים תרשים מדוייק. אמנם t מוגדר כערך ה־x של $f(x)$ אבל **האורך** בין הפונקציה והקו $y = 2x$ תלוי במיקום היחסי בין הקו וגרף הפונקציה. ניתן גם לראות את החלוקה לשני תת־סעיפים רמז שיש לטפל בשני המקרים בנפרד.

(1) כאשר $t < -1$ אורך הקטע DC (נסמן a) הוא $a = -x - (-t) = t - x$. (מדובר במקרה ש־t, x שליליים, אבל הנוסחה מתאימה גם אם קטע הקו במקום אחר.) ערכי ה־y של שתי הנקודות שווים, ולכן ניתן להציב בנוסחה עבור a: $x = \frac{y}{2} = \frac{f(t)}{2}$:

$$\begin{aligned}
a &= t - x = t - \frac{t-1}{2(t+1)} \\
&= \frac{2t^2+t+1}{2(t+1)} \\
a' &= \frac{(4t+1)\cdot 2(t+1) - (2t^2+t+1)(2)}{4(t+1)^2} \\
&= \frac{4t^2+8t}{4(t+1)^2} = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2} = 0\,.
\end{aligned}$$

ערכי t של נקודות הקיצון נמצאות במקומות שהנגזרת הראשונה מתאפסת: $t = 0, t = -2$. את סוג נקודות הקיצון נקבל מהנגזרת השנייה: $2t + 2$. כאשר $t = 0$, הנגזרת חיובית והנקודה היא מינימים. כאשר $t = -2$ הנגזרת שלילית והנקודה היא מקסימום. לכן האורך המינימלי הוא:

$$t - x = 0 - \frac{0-1}{2(0+1)} = \frac{1}{2}\,.$$

(2) כאשר $t > -1$ אורך הקטע a הוא $a = x + (-t) = x - t$.

$$\begin{aligned}
a &= x - t = \frac{t-1}{2(t+1)} - t \\
&= \frac{-(2t^2+t+1)}{2(t+1)} \\
a' &= \frac{-(4t+1)\cdot 2(t+1) + (2t^2+t+1)(2)}{4(t+1)^2} \\
&= \frac{-4t^2-8t}{4(t+1)^2} = \frac{-t(t+2)}{(t+1)^2} = 0\,.
\end{aligned}$$

ערכי t של נקודות הקיצון נמצאות במקומות שהנגזרת הראשונה מתאפסת, שוב ב־$t = 0, t = -2$. הנגזרת השנייה היא $-(2t+2)$. כאשר $t = 0$, הנגזרת שלילית והנקודה היא מקסימום. כאשר $t = -2$ הנגזרת חיובית והנקודה היא מינימום. לכן, האורך המינימלי הוא:

$$x - t = -\frac{-2-1}{2(-2+1)} - (-2) = \frac{7}{2}\,.$$

סעיף ג

$\frac{1}{2} < \frac{7}{2}$ לכן האורך המינימלי עבור $t \neq -1$ הוא $\frac{1}{2}$ כאשר $t = 0$.

8.10 קיץ תשע"ה מועד ב

נתונה הפונקציה $f(x)$, ונתון כי כל אחת מהפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו־ $f''(x)$ מוגדרת בתחום $x > 0$.

נתון גם: הגרף של $f'(x)$ חותך את ציר ה־ x בנקודה שבה $x = 1$,
$f'(x)$ עולה בתחום $0 < x < 3$, ויורדת בתחום $x > 3$,
האסימפטוטות של $f'(x)$ הן $x = 0$ ו־ $y = 0$.

א. סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתון גם כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אחת שמשוואתה $x = 0$.

ב. מצא את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

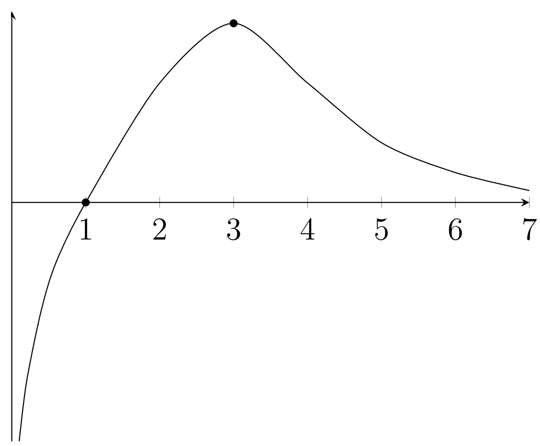
ג. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. הפונקציה $f(x)$ מקבלת את כל הערכים בטווח $y \geq 4$ ורק אותם.
סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ציין על ציר ה־ x ועל ציר ה־ y את הערכים שמצאת.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = -[f(x)]^3$.
מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

סעיף א

(בשאלה אין נוסחה לפנוקציה, גם לא לאחר פתרון השאלה, ולכן התרשים הוא ממש "סקיצה".)



סעיף ב

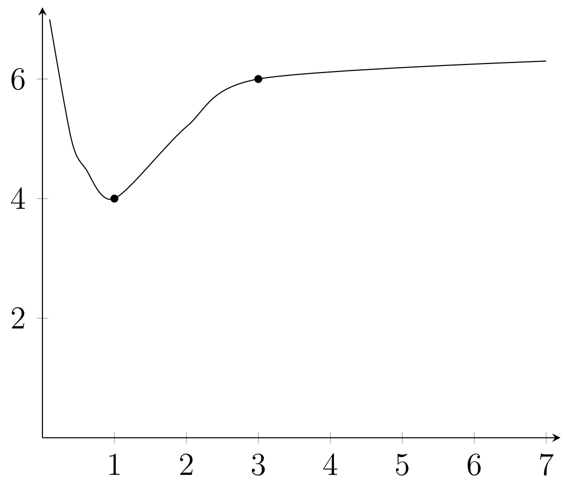
קיימת נקודת קיצון ב־$x = 1$ כי הנגזרת הראשונה מתאפסת ומחליפה סימן. הנקודה היא מינימום כי הנגזרת עולה.

סעיף ג

הנגזרת השנייה היא השיפוע של הנגזרת הראשונה, שהוא חיובי עבור $0 < x < 3$ ושלילי עבור $x > 3$. לכן הפונקציה קעורה כלפי מעלה ב־$0 < x < 3$ וקעורה כלפי מטה ב־$x > 3$.

סעיף ד

אם הפונקציה מקבלת ערכים $y \geq 4$ אזי נקודות המינימום שמתקבלת ב־$x = 1$ צריך לקבל את הערך $y = 4$. נשתמש בנתון שלפונקציה יש אסימפטוטה ב־$x = 0$, וכיווני הקעירות מסעיף ג כדי להשלים את צורת הגרף:



סעיף ה

$f(x)$ חיובית בכל תחום ההגדרה, לכן גם $f^3(x)$ חיובית. סימן המינוס הופך את הסימן של ערך הפונקציה. $f(x)$ יורד ב־$0 < x < 1$ ולכן $g(x)$ עולה בתחום זה. $f(x)$ עולה ב־$x > 1$ ולכן $g(x)$ יורד בתחום זה.

אפשר להשתמש בנגזרת של $g(x)$:

$$g'(x) = -3f^2(x)f'(x)\,.$$

$f^2(x)$ תמיד חיובי, ולכן לאור המינוס בתחילת הביטוי, תחומי העלייה והירדה הם התחומים שערכי $f'(x)$ שליליים או חיוביים בהתאמה. $f'(x)$ חותך את ציר ה־x משליליים לחיוביים ב־$x = 1$, ולכן $g(x)$ עולה ב־$0 < x < 1$ ויורד ב־$x > 1$.

8.11 קיץ תשע"ה מועד א

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a^2x+a^2$, a הוא פרמטר גדול מ־ 0 .

א. הראה כי המקסימום של הפונקציה מתקבל בנקודה שבה $y>0$.

ב. מצא עבור איזה ערך/איזה תחום ערכים של a נקודת המינימום של הפונקציה:

(1) נמצאת על ציר ה־ x .

(2) נמצאת מעל ציר ה־ x .

(3) נמצאת מתחת לציר ה־ x .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור כל אחד משלושת המקרים שבסעיף ב.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה $\frac{1}{3}x^3-x+1=0$? נמק.

סעיף א

נגזרת ראשונה:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2-a^2=0 \\ x &= \pm a \\ f''(x) &= 2x \\ f''(+a) &= 2a>0 \\ f''(-a) &= -2a<0\,. \end{aligned}$$

בשתי השורות האחרונות השתמשנו בנתון $a>0$.

המקסימום הוא ב־$x=-a$ והמינימום הוא ב־$x=a$.

סעיף ב

המינימום הוא ב־$x=a$.

$$f(a)=-\frac{2}{3}a^3+a^2=a^2\left(-\frac{2}{3}a+1\right)\,.$$

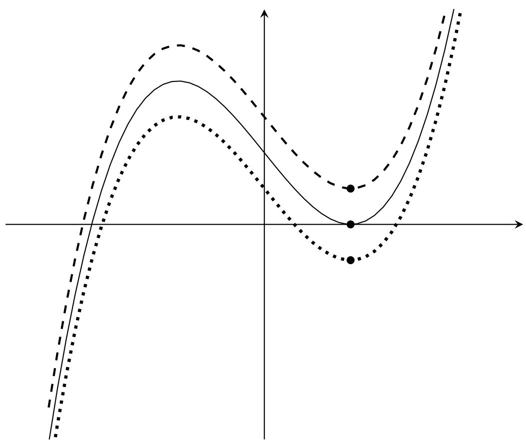
a^2 חיובי ולא משפיע על סימן של נקודות המינימום. הפתרון מתקבל על ידי השוואת $-\frac{2}{3}a+1$ לאפס:

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{2} && \text{על ציר ה־x} \\ a &< \frac{3}{2} && \text{מעל ציר ה־x} \\ a &> \frac{3}{2} && \text{מתחת לציר ה־x}\,. \end{aligned}$$

סעיף ג

נקודות המינימום מסומנות.

קו רציף: על הציר. קו מקווקו: מעל לציר. קו מנוקד: מתחת לציר.



סעיף ד

משוואה זו היא המשוואה הנתונה בשאלה כאשר $a = 1$. אבל $1 < \frac{3}{2}$, ולכן לפי סעיף ב המינימום נמצא מעל לציר ה־x. מכאן שאין פתרון אחר פרט לנקודת החיתוך של הגרף לפני המקסימום.

8.12 חורף תשע"ה

נתון כי הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מקיימות $\int_0^3 \frac{f'(x)}{2\cdot\sqrt{f(x)}}dx=3$.

נתון גם: $f'(x)=kx+2$, $f(0)=1$. k הוא פרמטר.

א. מצא את הערך המספרי של $f(3)$, ומצא את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

(1) הראה כי $g(x)=|x+1|$.

(2) סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

סעיף א

לפי הנוסחה לנגזרת של חזקה של פונקציה, $(f(x)^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}f(x)^{-\frac{1}{2}}f'(x)$ שהיא הפונקציה המופיעה באינטגרל. נחשב את ערך האינטגרל:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx &= \left.\sqrt{f(x)}\right|_0^3\\ &= \sqrt{f(3)}-\sqrt{f(0)}=\sqrt{f(3)}-1=3\\ f(3) &= 4^2=16\,.\end{aligned}$$

הפונקציה $f(x)$ מתקבלת מאינטגרציה של הנוסחה הנתונה לנגזרת ומחישוב הקבוע והפרמטר מהערכים הידועים של $f(0), f(3)$:

$$\begin{aligned}f(x) &= \int(kx+2)\,dx=\frac{1}{2}kx^2+2x+c\\ f(0) &= c=1\\ f(3) &= \frac{9}{2}k+7=16\\ k &= 2\\ f(x) &= x^2+2x+1\,.\end{aligned}$$

סעיף ב

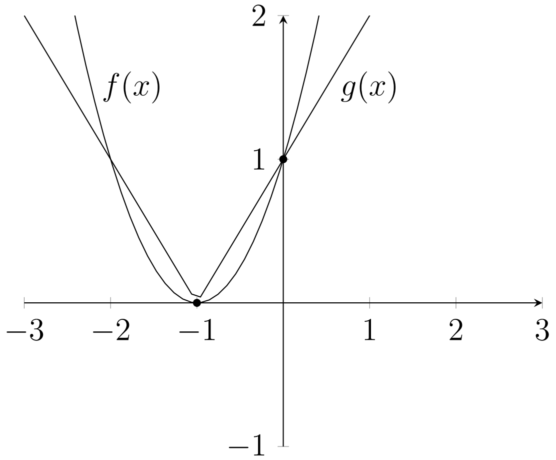
$$g(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|\,.$$

אם $x \geq -1$, $x+1$ לא שלילי ו־$g(x) = x+1$.

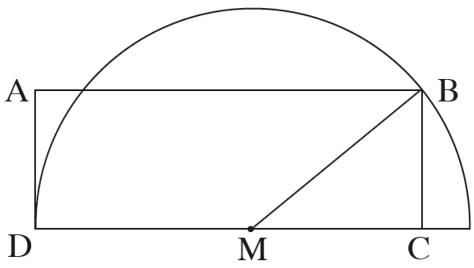
אם $x < -1$, $x+1$ שלילי ו־$g(x) = -(x+1)$.

ביחד יש לנו $g(x) = |x+1|$.

סעיף ג



8.13 קיץ תשע"ד מועד ב



נתון מלבן ABCD .

הצלע DC מונחת על הקוטר של חצי מעגל

שהרדיוס שלו R ומרכזו M כך ש־ $DC \geq R$.

הצלע AD משיקה לחצי המעגל בנקודה D ,

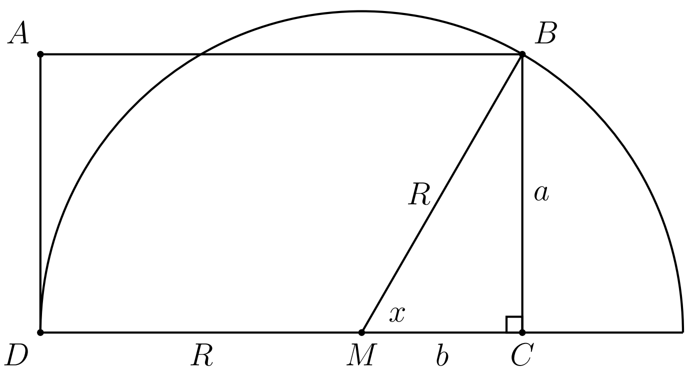
והקדקוד B נמצא על המעגל (ראה ציור).

נסמן: $\sphericalangle BMC = x$

$S(x)$ — שטח המלבן ABCD

א. מצא מה צריך להיות x , כדי ששטח המלבן $S(x)$ יהיה מקסימלי.

ב. הבע באמצעות R את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $S(x)$ ועל ידי ציר ה־ x בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.



סעיף א

עם הסימונים בתרשים:

$$S(x) = a(R+b) = R\sin x(R + R\cos x) = R^2 \sin x(1+\cos x)\,.$$

נחשב את הנגזרת:

$$\begin{aligned} S'(x) &= R^2(\cos x(1+\cos x) + \sin x \cdot -\sin x) \\ &= R^2(\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= R^2(\cos x + \cos^2 x - (1-\cos^2 x)) \\ &= R^2(2\cos^2 x + \cos x - 1) = 0 \\ &= R^2(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0\,. \end{aligned}$$

אנחנו פוסלים את הפתרון $\cos x = -1$ כי $x = 180^\circ$ לא יכול להיות זווית במשולש.

לכן, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = 60^\circ$.

הנגזרת השנייה היא: $(2\cos^2 x + \cos x - 1)' = -\sin x(4\cos x + 1)$.

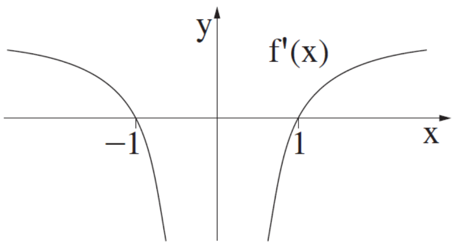
$$-\sin 60(4\cos 60 + 1) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (4 \cdot \frac{1}{2} + 1) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0\,,$$

ולכן נקודת הקיצון היא מקסימום.

סעיף ב

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin x(1+\cos x)dx = R^2 \cdot -\frac{1}{2}(1+\cos x)^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{R^2}{2}(1^2 - 2^2) = \frac{3R^2}{2}\,.$$

8.14 קיץ תשע"ד מועד א



בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

האסימפטוטה היחידה של הפונקציה $f(x)$ היא $x = 0$.

נתון כי יש פתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = 2$

ופתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = -2$.

א. רק על פי נתוני השאלה,

סרטט סקיצה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ב. נתון גם כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא: $f'(x) = \frac{ax^2 - b}{ax^2}$,

a ו־ b הם פרמטרים שונים מ־ 0.

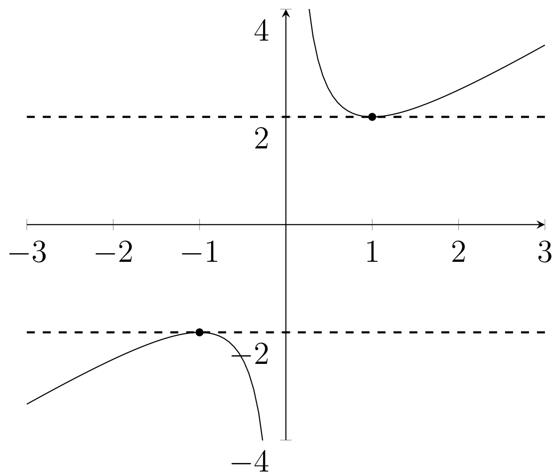
מצא את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).

סעיף א

כאשר x עולה בערכים חיוביים, הנגזרת עולה בצורה תלולה מערכים שליליים ובצורה מתונה לערכים חיוביים, ולכן הפונקציה יורדת בצורה תלולה ואח"כ עולה בצורה מתונה.

כאשר x עולה בערכים שליליים, הנגזרת יורדת בצורה מתונה מערכים חיוביים ובצורה תלולה לערכים שליליים, ולכן הפונקציה עולה בצורה מתונה ואח"כ יורדת בצורה תלולה.

לפי התרשים הנתון בנקודה $x = -1$ יש נקודה קיצון שהיא מקסימום כי השיפוע יורד. בנקודה $x = 1$ יש נקודת קיצון שהיא מינימום כי השיפוע עולה. לפי המידע הנתון על הפתרונות של $f(x)$, נקודת הקיצון שהיא המקסימום היא $(-1, -2)$ ונקודת הקיצון שהיא מינימום היא $(1, 2)$, כי אם יש רק פתרון אחד, גרף הפונצקיה לא יכול לחצות את הקווים $y = -2, y = 2$.



סעיף ב

לפי הגרף $f'(1) = f'(-1) = 0$ ונתון $a \neq 0$, ולכן $\dfrac{a-b}{a} = 0$, ו־$a = b$.

שוב בגלל ש־$a \neq 0$ אפשר לצמצם את הפרמטרים:

$$f'(x) = \frac{a(x^2-1)}{ax^2} = \frac{x^2-1}{x^2}\,.$$

נחשב את האיטרגל של הנגזרת כדי למצוא את הפונקציה:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = x + \frac{1}{x} + c\,.$$

הנגזרת מתאפסת ב־± 1, ולכן נקודות המינימום והמקסימום גם הן ב־± 1:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1} + c &= 2 \\ -1 + \frac{1}{-1} + c &= -2\,, \end{aligned}$$

ולכן $c = 0$.

הפונקציה היא $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

8.15 חורף תשע"ד

בטבלה שלפניך מוצגים ערכים מסוימים של הפונקציה $f(x)$ בקטע $1 < x < 2$.

x	1.1	1.2	1.3	1.4
f(x)	1.19	1.28	1.36	1.43

הפונקציה $f(x)$ חיובית בקטע הנתון, ואין לה נקודות קיצון פנימיות בקטע זה.

נתון כי פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית בקטע הנתון.

א. קבע מהו הסימן של $f'(1.2)$. נמק.

ב. קבע אם הטענה $f'(1.1) < f'(1.2) < f'(1.3)$ נכונה. נמק.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ בקטע $1 < x < 2$.

ג. בקטע הנתון מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

ד. הראה כי בתחום $1.1 \le x \le 1.3$ אין פתרון למשוואה $g'(x) = f'(x)$.

בבחינה זו היו שלוש שאלות בפרק השני לכן מספר השאלה הוא 9 ולא 8.

סעיף א

לפי הטבלה הפונקציה עולה מ־$x = 1.1$ דרך $x = 1.2$ ל־$x = 1.3$. נתון שאין נקודות קיצון פנימיות ולכן הנגזרת הראשונה חיובית.

סעיף ב

הנגזרת השנייה שלילית כך שהנגזרת הראשונה יורדת בתחום ולכן הטענה נכונה.

סעיף ג

$$g'(x) = \frac{1}{2} f(x)^{-\frac{1}{2}} f'(x)\,.$$

מסעיף א, גם $f(x)$ וגם $f'(x)$ חיוביים בתחום, ולכן $g'(x)$ חיובי, ו־$g(x)$ עולה בתחום.

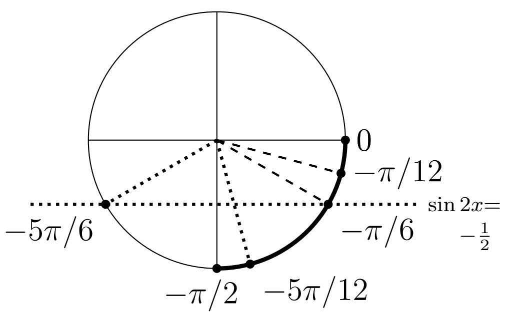
סעיף ד

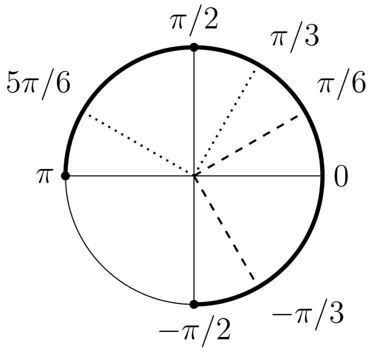
$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \\ \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x) &= f'(x) \\ f(x) &= \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

מצאנו שהנגזרת הראשונה חיובית כך שאפשר לצמצם אותה. לפי הטבלה, $f(x)$ איננה פונקציה קבועה בכל התחום, לכן לא ייתכן ש־$g'(x) = f'(x)$.

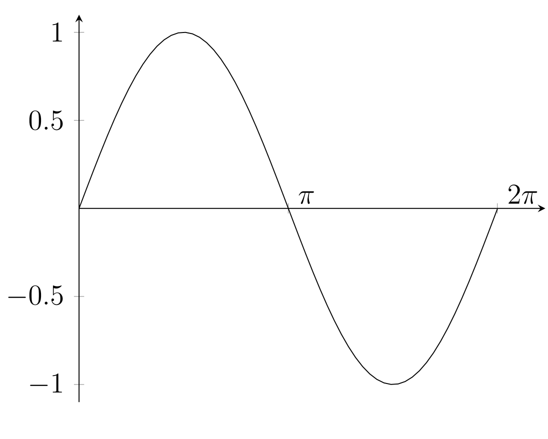
המלצות

- אי־אפשר להכין טבלה של עליות וירידות עד שלא מחשבים את תחום ההגדרה **וגם** כל נקודות הקיצון של הפנוקציה, כי רק ביניהם אפשר לסמוך על זה שאין שינוי בכיוון הפונקציה.
- אני אוהב להשתמש בתנועות ידיים כדי "לראות שיפועים" ולקבוע אם פונקציה עולה או יורדת, וכן אם נקודות קיצון היא מקסימום או מינימים. אני מזיז כף יד שטוחה לאורך הפונקציה מערכים שליליים לחיוביים על ציר ה־x. אם כיוון היד למטה הפונקציה יורדת, ואם הכיוון למעלה הפונקציה עולה. אם היד עוברת מכיוון למטה לכיוון למעלה, השיפוע (הנגזרת) עולה, כך שהנגזרת השנייה היא חיובית ונקודת הקיצון היא מינימים. שינוי הפוך בכיוון היד מראה שקיים מקסימום.
- אני מציע להתרחק מהמחשבון עד כמה שאפשר ולחשב עם סימנים אלגבריים. הסיבה היא שאי־אפשר למצוא בקלות שגיאות הנגרמות על ידי טעויות בקלדה על המחשבון, אבל אפשר לעבור שוב ושוב על חישוב אלגבראי כדי לוודא את נכונותו.
- אל תקצרו בחישובים. לעתים קרובות שגיתי כי השמטתי סימן מינוס בטעות. לוקח מעט זמן לרשום שורה נוספת, לעומת הזמן הדרוש לחפש שגיאה בחישוב מקוצר.
- בבעיות עם פונקציות טריגונומטריות, ציירו תרשים של מעגל היחידה וסמנו עליו את תחום ההגדרה. התרשים יעזור בקביעת סימני הפונקציות ובערכי הפונקציות כאשר מוסיפים או מחסירים כפולות רציונליות של π.





- שימו לב להבדל בין שטח לאיטגרל.



אם מבקשים את האיטגרל של סינוס מאפס עד 2π, התשובה היא אפס:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x|_0^{2\pi} = -(1-1) = 0\,.$$

אבל אם מבקשים את השטח התחום על ידי הפונקציה וציר ה־x התשובה היא:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x \, dx = -\cos x|_0^{\pi} + \cos x|_{\pi}^{2\pi} = -(-1-(1)) + (1-(-1)) = 4\,.$$

- איטגרל של פונקציה אי־זוגית בתחום סימטרי סביב ציר ה־y הוא אפס, ואינטגרל של פונקציה זוגית בתחום סימטרי הוא פי שניים האינטגרל של התחום החיובי בלבד.

- אני מעדיף לסווג נקודות קיצון על ידי בדיקת הסימן של הנגזרת השנייה ולא על ידי חישוב טבלת עליות וירידות. ידוע שאם הסימן של המכנה של הנגזרת הראשונה חיובי, הסימן של הנגזרת השנייה שווה לסימן של הנגזרת של המונה של הנגזרת הראשונה. חשוב לא לטעון שהנגזרת השנייה **שווה** לנגזרת של המונה של הנגזרת הראשונה![1] אם זאת יש נוסחה לנגזרת השנייה התקפה **רק עבור נקודות בהן הנגזרת האשונה מתאפסת והן חשודות כנקודות הקיצון**.[2] עבור:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

ו־a כך ש־$f'(a) = 0$:

$$f''(a) = \frac{g'(a)}{h(a)}\,.$$

ההוכחה פשוטה: חישבו את הנגזרת וצמצמו את השבר.

נביא דוגמה:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+x-1}{x^2-x+1} \\ f'(x) &= \frac{-2x^2+4x}{(x^2-x+1)^2}\,. \end{aligned}$$

נקודות הקיצון הן:

$$a_1 = (0,-1),\;\; a_2 = (2, \frac{5}{3})\,.$$

בגלל שהמכנה חיובי, הסימן של הנגזרת השנייה הוא הסימן של:

$$\left(-2x^2+4x\right)' = -4x+4\,,$$

למרות שזו לא הנגזרת השנייה. עבור נקודות הקיצון, $-4\cdot 0+4 = 4 > 0$ ו־a_1 היא מינימום, ו־$-4\cdot 2+4 = -4 < 0$ ו־a_2 היא מקסימום.

עבור הנקודות $a = a_1, a = a_2$ אפשר לחשב את הנגזרת השנייה ולבדוק ש:

$$f''(a) = \frac{-4a+4}{a^2-a+1}\,.$$

---

[1] ראו: יונתן אחיטוב. ,'גזירה שנייה מקוצרת' כדרך לאפיון נקודות קיצון. על"ה 20, 2002, עמ' 27 – 26.

[2] ראו במאמר של אחיטוב וגם "ללמוד וללמד אנליזה", עמ' 323 – 322.

- שימו לב להגדרה של נקודת פיתול: נקודה בה משתנה הקעירות של הפונקציה. בנקודת פיתול, הנגזרת השנייה מתאפסת או לא מוגדרת, אבל יש פונקציות שמקיימות אחד מהתנאים האלה בנקודה מסויימת אבל אין שם נקודת פיתול. למשל, הנגזרת שנייה של $f(x) = x^4$ מתאפסת ב־$0 = x$ אבל יש שם מינימום ולא מקסימום.[3]

  בנקודת פיתול **הנגזרת הראשונה** לא חייב להתאפס. למשל, עבור $f(x) = \sin x$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \cos 0 = 1 \\ f''(0) &= -\sin 0 = 0\,. \end{aligned}$$

- כאשר מבקשים לחשב אינטגרל "מפחיד" של פונקציה, תמיד הפונקציה תהיה נגזרת של פונקציה שאפשר לנחש בקלות. למשל,

$$\int \frac{2\sin x}{\cos^3 x} dx$$

  נראה "מפחיד" אבל אם נתבונן קצת נבין ש־

$$(\cos^{-2} x) = -2 \cdot (-\sin x) \cos^{-3} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\,.$$

  לפעמים מבקשים $\int f'(x)dx$ כאשר $f(x)$ נתון, ואז אין מה לחשב!

- כאשר מופיע שורש בפונקציה הכוונה היא לשורש החיובי. אבל, כאשר לוקחים שורש של x^2 הכוונה היא לערך המוחלט של x. למשל, אם $x = 3$, $\sqrt{3^2} = 3 = x$, אבל למשל, אם $x = -3$, $\sqrt{(-3)^2} = 3 = -x$.

  כאשר מחשבים אסימפטוטות של פונקציות עם שורשים, יש לקחת את זה בחשבון:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{x^2}}} = \frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \xrightarrow[\pm\infty]{} \pm 1\,.$$

- כאשר מבקשים נקודות חיתוך עם הצירים או נקודות קיצון, יש נטייה להסתפק בחשב ערך ה־x, אבל התשובה חייבת להיות קואודינטות (x, y).

[3] "ללמוד וללמד אנליזה", עמ' 227.

נספח א' הערות על נוסחאות

אני נוהג לחשב מספר חישובים בדרך שונה מעט ממה שנהוג. בעיקר אני נמנע מלזכור נוסחאות, ובמקום זה אני משחזר אותן מנוסחאות קלות לזכור או מנוסחאות הניתנות בנוסחאון.

סינוס וקוסינוס של $2x$

לעתים קרובות מופיעים נוסחאות עם $\sin 2x$ ו־$\cos 2x$. אין צורך לזכור את הנוסחאות המאפשרות לבטא את הפונקציות הללו עם x במקום $2x$, כי ניתן לשחזר אותן תוך מספר שניות מהנוסחאות הטריגונומטריות עבור חיבור של זוויות, נוסחאות הניתנות בנוסחאון:

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= \sin(x+x)\\
&= \sin x\cos x+\sin x\cos x\\
&= 2\sin x\cos x\\
\cos 2x &= \cos(x+x)\\
&= \cos x\cos x-\sin x\sin x\\
&= \cos^2 x-\sin^2 x\\
&= (1-\sin^2 x)-\sin^2 x\\
&= 1-2\sin^2 x\,.
\end{aligned}$$

x בתחום גם אם $2x$ לא בתחום

נניח שהתחום הנתון הוא $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, ונניח שמקבלים את התוצאה $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ברור שתשובה אחת היא $2x = \frac{\pi}{3}$ ו־$x = \frac{\pi}{6}$. שימו לב שגם $\frac{\pi}{3}$ וגם $\frac{\pi}{6}$ נמצאים בתחום. לא לשכוח ש־$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 2\left(\frac{\pi}{3}\right)$, ו־$x = \frac{\pi}{3}$ בתחום, למרות ש־$2x = \frac{2\pi}{3}$ אינו בתחום.

חיבור או חיסור של $\frac{\pi}{2}$

חיבור או חיסור של $\frac{\pi}{2}$ משנה סינוס לקוסינוס ולהיפך. קל להשתכנע כי במשולש ישר זווית, הזוויות החדות הן θ, $\frac{\pi}{2}-\theta$, והצלע הנגדי של הזווית המופיע בהגדרת הסינוס מתחלף עם הצלע השכן של הפונקציה המופיע בהגדרת הקוסינוס.

נגזרות של פונקציות עם גורמים בחזקות לא שלמות וחיוביות

בנוסחאון נתון:

$$(x^t)' = tx^{t-1}\,, \qquad \text{(t ממשי)}$$

אולם משתמשים בנוסחה רק עבור t שלם וחיובי. אני מעדיף להשתמש בנוסחה זו עבור **כל** t כי קל לזכור את הנוסחה והחישובים פשוטים. למשל, הנוסחה הנתונה:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

מיותרת כי:

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \,.$$

החיסכון בולט יותר כאשר צריכים לחשב נגזרת רציונלית:

$$\left(\frac{1}{x^t}\right)' \,.$$

אני רואה שמשתמשים בנוסחה המסובכת עבור נגזרת של פונקציה שהיא חלוקה $\frac{f(x)}{g(x)}$ כאשר $f(x) = 1, g(x) = x^t$. פשוט יותר לחשב:

$$\left(\frac{1}{x^t}\right)' = (x^{-t})' = -t(x^{-t-1}) = \frac{-t}{x^{t+1}} \,.$$

כאשר במונה יש קבוע ובמכנה יש פונקציה מורכבת עדיין החישוב לא מסובך במיוחד. למשל:

$$\begin{aligned}\left(\frac{14}{x^2-3x+4}\right)' &= 14\left((x^2-3x+4)^{-1}\right)' \\ &= -14(x^2-3x+4)^{-2}(2x-3) \\ &= \frac{-14(2x-3)}{(x^2-3x+4)^2} \,.\end{aligned}$$

נקודות חיתוך של שלילה של פונקציה

אם $f(x) = 0$ אז $-f(x) = -0 = 0$. אמנם התוצאה פשוטה אבל היא שימושית כאשר חושבו נקודות איפוס של נגזרת וצריכים למצוא נקודות איפוס של השלילה של הנגזרת, למשל:

$$(g(x) - f(x))' = (-1 \cdot (f(x) - g(x))' = -1(f(x) - g(x))' \,,$$

ולכן אם $(f(x_1) - g(x_1))' = 0$, מתקבל מייד $(g(x_1) - f(x_1))' = -1 \cdot 0 = 0$.