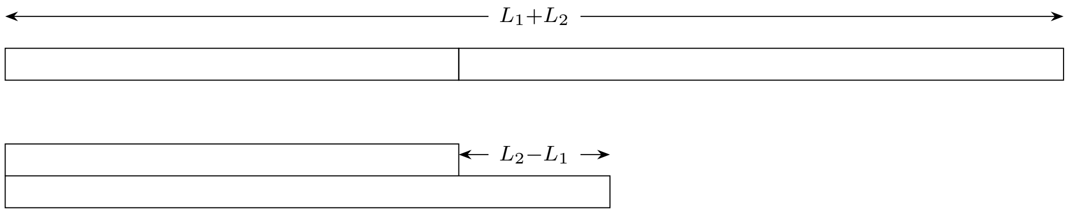


איור 14: מדידת האורכים של שני מקלות

49. להכפיל את הדיוק (Doubling your accuracy)

נתון שני מקלות באורכים $L_1 < L_2$ ומכשיר למדידת מרחק ששגיאת המדידה שלו ניתן על ידי התפלגות נורמלית עם ממוצע 0 ושונות σ^2. ניתן למדוד את אורכי המקלות על ידי מדידת כל מקל בנפרד. האם יש דרך מדוייקת יותר? **פתרון**

הנח את המקלות קצה לקצה ומדד $L_s = L_1 + L_2$, ואחר כך הנח את המקלות צד לצד ומדד $L_d = L_2 - L_1$ (איור 14). חשב L_1, L_2:

$$\frac{1}{2}(L_s - L_d) = \frac{1}{2}((L_1 + L_2) - (L_2 - L_1)) = L_1$$
$$\frac{1}{2}(L_s + L_d) = \frac{1}{2}((L_1 + L_2) + (L_2 - L_1)) = L_2\,.$$

השגיאות במדידות הן e_s, e_d כך שהשגיאות התוצאות הן:

$$\frac{1}{2}((L_s + e_s) - (L_d + e_d)) = L_1 + \frac{1}{2}(e_s - e_d)$$
$$\frac{1}{2}((L_s + e_s) + (L_d + e_d)) = L_2 + \frac{1}{2}(e_s + e_d)\,.$$

ממוצע של השגיאות במכשיר הוא 0 ולכן הממוצע של שתי המדידות גם כן 0. השונות יורדת למחצית ערכה הקודמת:[3]

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{2}\left(e_s - e_d\right)\right) = \frac{1}{4}(\sigma^2 + (-1)^2\sigma^2) = \frac{1}{2}\sigma^2$$
$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{2}(e_s + e_d)\right) = \frac{1}{4}(\sigma^2 + \sigma^2) = \frac{1}{2}\sigma^2\,.$$

50. משוואות ריבועיות אקראיות (Random quadratic equations)^S

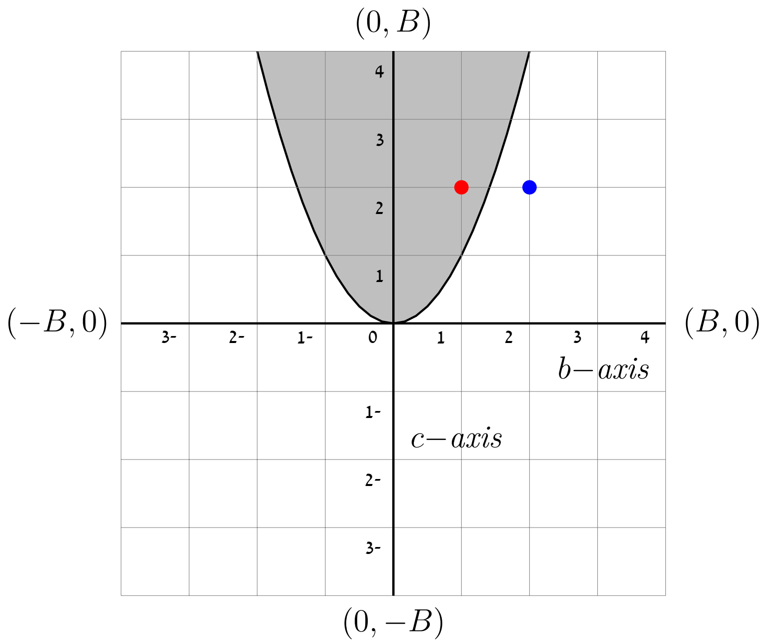
תהי $x^2 + 2bx + c = 0$ משוואה ריבועית המוגדרת מעל $[-B, B] \times [-B, B]$ עבור $B \geq 1$.

שאלה 1: מה ההסתברות שהשורשים ממשיים?

שאלה 2: כאשר $B \to \infty$ מה ההסתברות שהשורשים ממשיים? **פתרון**

תשובה 1: השורשים יהיו ממשיים אם הדיסקרימיננט $4b^2 - 4c \geq 0$ לא-שלילי. איור 15 מראה גרף של הפרבולה $c = b^2$ כאשר השורשים המרוכבים נמצא בשטח האפור. למשל, עבור $(b, c) = (1, 2)$, ל-$x^2 + 2x + 2$ שורשים מרוכבים (נקודה אדומה) ועבור $(b, c) = (2, 2)$ ל-$x^2 + 4x + 2$ שורשים ממשיים (נקודה כחולה).

[3] המדידות בלתי-תלויות ולכן הקווריאנס הוא 0.



איור 15: עבור (b,c) בשטח האפור השורשים של $c=b^2$ מרוכבים

נחשב את השטח האפור על ידי אינטגרציה:

$$\int_{-\sqrt{B}}^{\sqrt{B}} (B-b^2)\,db = Bb - \frac{b^3}{3}\bigg|_{-\sqrt{B}}^{\sqrt{B}} = \left(B^{3/2}-\frac{B^{3/2}}{3}\right) - \left(-B^{3/2}+\frac{B^{3/2}}{3}\right) = \frac{4}{3}B^{3/2}\,.$$

השטח הכולל של $[-B,B]\times[-B,B]$ הוא $4B^2$ ולכן:

$$P(\text{שורשים מרוכבים}) = \frac{\frac{4}{3}B^{3/2}}{4B^2} = \frac{1}{3\sqrt{B}}$$

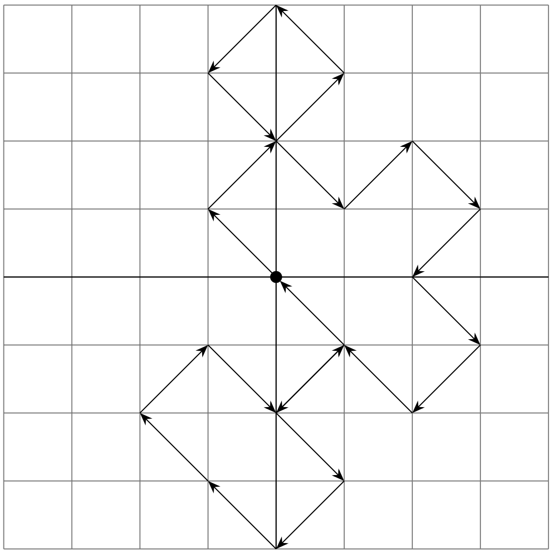
$$P(\text{שורשים ממשיים}) = 1-\frac{1}{3\sqrt{B}}\,.$$

תשובה 2:

$$\lim_{B\to\infty} P(\text{שורשים ממשיים}) = \lim_{B\to\infty}\left(1-\frac{1}{3\sqrt{B}}\right) = 1\,.$$

סימולציה

```
For B =  4:
Probability of real roots = 0.8333
Proportion real roots     = 0.8271
For B = 16:
Probability of real roots = 0.9167
Proportion real roots     = 0.9205
For B = 64:
```



איור 16: הילוך מקרי דו-ממדי

```
Probability of real roots = 0.9583
Proportion real roots     = 0.9582
```

51. הילוך מקרי דו-ממדי (Two-dimensional random walk)^S

חלקיק נמצא במרכז של מערכת צירים דו-ממדית. החלקיק צועד ימינה או שמאלה על ציר ה-x עם הסתברות $1/2$ לכל כיוון **ובו-זמנית** צועד למעלה או למטה על ציר ה-y עם הסתברות $1/2$ לכל כיוון. איור 16 מראה הילוך מקרי של 22 צעדים שמתחיל ונגמר במרכז.

שאלה 1: מה ההסתברות שהחלקיק חוזר למרכז ב-2 צעדים?

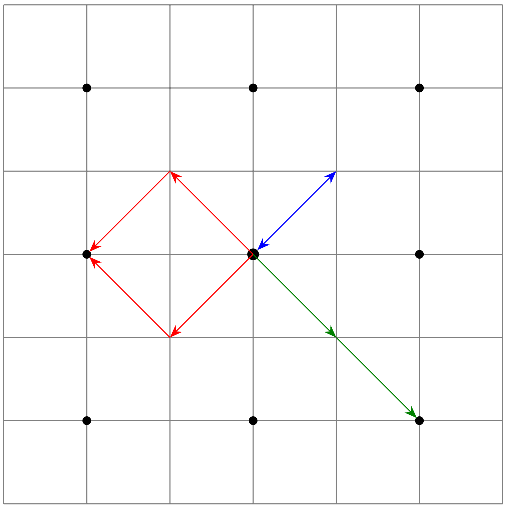
שאלה 2: פתח נוסחה עבור ההתסתברות שהחלקיק חוזר למרכז (פעם אחת או יותר).

שאלה 3: השתמש בקירוב של Stirling כדי לקבל הערכה של ההסתברות עבור n גדול.

פתרון

תשובה 1: הנקודות באיור 17 מראות את המקומות האפשריים בהם החלקיק יכול להיות לאחר שני צעדים:

- המסלול הירוק מראה איך להגיע ל-$(\pm 2, \pm 2)$ על ידי שני צעדים באותו כיוון. ההסתברות היא $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$.
- המסלול האדום מראה איך להגיע ל-$(\pm 2, 0)$ או ל-$(0, \pm 2)$. יש שני מסלולים אפשריים לכל נקודה ולכן ההסתברות היא $2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{2}{16}$.



איור 17: שני צעדים בהילוך מקרי

- המסלול הכחול מראה איך להגיע ל-$(\pm 1, \pm 1)$ ולחזור למרכז. ההסתברות היא $1/16$. יש ארבעה מסלולים שחוזרים למרכז ולכן ההסתברות היא $\frac{4}{16}$.

רק המסלולים הכחולים חוזרים למרכז ולכן:

$$P(\text{חזרה למרכז בשני צעדים}) = \frac{4}{16}\,.$$

תשובה 3: בחירת הכיוון בשני מצירים היא בלתי-תלויה כך שעבור $2n$ צעדים:

$$P_{2n}(\text{חזרה למרכז}) = P_{2n}(\text{חזרה ל-}x\!=\!0)\; P_{2n}(\text{חזרה ל-}y\!=\!0)\,. \tag{33}$$

החלקיק יחזור למרכז אם ורק אם בשני הצירים מספר הצעדים $+1$ שווה המספר צעדים -1. יש $\binom{2n}{n}$ דרכים לסדר $+1$ ו--1 ולכן:

$$P_{2n}(\text{חזרה ל-}x\!=\!0) = P_{2n}(\text{חזרה ל-}y\!=\!0) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{34}$$

$$P_{2n}(\text{חזרה למרכז}) = \left[\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^2 \tag{35}$$

$$P(\text{חזרה למרכז}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(\text{חזרה למרכז}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^2\,. \tag{36}$$

תשובה 3: לפי הקירוב של Stirling $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$:

$$\begin{aligned} P_{2n}(\text{חזרה למרכז}) &= \left[\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^2 \\ &= \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^2 \end{aligned}$$

$$\approx \left(\frac{1}{2}\right)^{4n} \frac{(\sqrt{2\pi \cdot 2n})^2\,(2n/e)^{4n}}{(\sqrt{2\pi n})^4\,(n/e)^{4n}}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{4n} \frac{4\pi n}{4\pi^2 n^2} \cdot \frac{(n/e)^{4n}\cdot 2^{4n}}{(n/e)^{4n}}$$
$$= \frac{1}{\pi n}$$
$$P(\text{חזרה למרכז}) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,,$$

שהיא **סידרה הרמונית** שמתבדרת, כלומר, עם הסתברות 1 החלקיק חוזר למרכז!

סימולציה הרצתי את הסימולציה מיליון פעמים במקום עשרת אלפים פעמים אבל התוצאה לא מראה שהחלקיק מגיע למרכז בוואדות.

```
Proportion returned to origin       = 0.8700
```

52. הילוך מקרי תלת-ממדי (Three-dimensional random walk)^{D,S}

לקיק נמצא במרכז של מערכת צירים תלת-ממדית. החלקיק צועד ימינה או שמאלה על ציר ה-x עם הסתברות $1/2$ לכל כיוון **ובו-זמנית** צועד למעלה או למטה על ציר ה-y עם הסתברות $1/2$ לכל כיוון. **ובו-זמנית** צועד פנימה או החוצה על ציר ה-z עם הסתברות $1/2$ לכל כיוון.

שאלה 1: מה **התוחלת** של מספר הפעמים שהחלקיק חוזר למרכז?

רמז: חשב את ההסתברות ואחר כך תשתמש במשתנה מסמן (indicator variable).

שאלה 2: מה ההסתברות שהחלקיק יחזור למרכז לפחות פעם אחת?

רמז: תשתמש בשיטה של בעיה 4. **פתרון**

P_{2n}, ההסתברות לחזור למרכז לאחר $2n$ נתון על ידי הכללת משוואה 33 לשלושה ממדים:

$$P_{2n} = P_{2n}(x=0\text{-חוזר ל})\,P_{2n}(y=0\text{-חוזר ל})\,P_{2n}(z=0\text{-חוזר ל})\,.$$

P_r, ההסתברות לחזור למרכז לפחות פעם אחת ניתנת על ידי הכללה לשלושה ממדים של משוואה 36:

$$P_r = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^3 .$$

מהקירוב של Stirling:[4]

$$P_{2n} = \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^3$$

[4] Mosteller השתמש ב-18 איברים בחישוב שלו וקיבל 0.315. התכנית שלי השתמש ב-500 איברים וקיבלתי 0.3772.

$$\approx \left(\frac{1}{2}\right)^{6n} \frac{(\sqrt{2\pi \cdot 2n})^3\,(2n/e)^{6n}}{(\sqrt{2\pi n})^6\,(n/e)^{6n}}$$
$$= \frac{(4\pi n)^{3/2}}{(2\pi n)^3} = \frac{1}{(\pi n)^{3/2}}$$
$$P_r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^{3/2}} \approx 0.3772\,.$$

יהי I_k משתנה מסמן עבור חזרה למרכז בצעד k:

$$I_k = \begin{cases} 1, & k \text{ אם החלקיק חוזר למרכז בצעד} \\ 0, & k \text{ אם החלקיק לא חוזר למרכז בצעד}\,. \end{cases} \tag{37}$$

אזי:

$$E(\text{מספר החזרות למרכז}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}\, I_{2n} = P_r \approx 0.3772\,,$$

ולכן התוחלת למספר החזרות למרכז שווה להסתברות.

שאלה 2: תהי P_1 ההסתברות שהחלקיק חוזר למרכז **לפחות פעם אחת**. מבעיה 4 אנו יודעים שהתוחלת של מספר בניסויים עד מראשון בו החלקיק **לא** חוזר למרכז היא $1/(1-P_1)$. לכן, התוחלת של מספר הניסויים עד שהחליק כן חוזר למרכז היא אחד פחות, כי החלקיק יכול לחזור למרכז מספר רב של פעמים עד שהוא לא חוזר.[5]

תהי $E_r = E(\text{מספר החזרות למרכז})$. אזי:

$$E_r = \frac{1}{1-P_1} - 1$$
$$P_1 = \frac{E_r}{1+E_r}\,.$$

ב-**תשובה 1** חישבנו ש-$E_r \approx 0.3772$ ולכן:

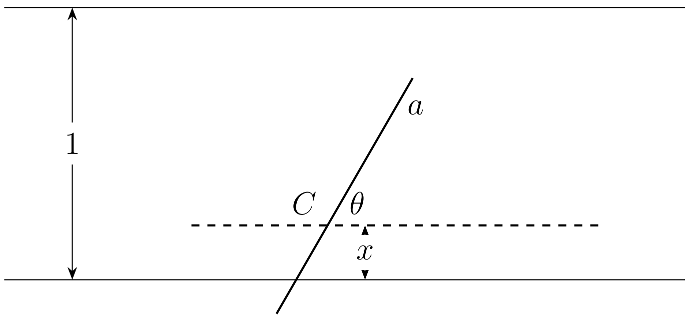
$$P_1 \approx 1 - \frac{1}{1+0.3772} \approx 0.2739\,.$$

סימולציה

```
Expectation of reaching origin = 0.3772
Average times reached origin   = 0.3630
Probability of reaching origin = 0.2739
Proportion reached origin      = 0.2790
```

53. המחט של Buffon (Buffon's needle)^{D,S}

[5] קשה לעקוב אחר הצגת הדברים של Mosteller. ברצוני להודות ל-Aaron Montgomery שהבהיר לי את הפתרון [5].



איור 18: המחט של Buffon

נתון משטח עם קווים מקבילים במרחק 1 אחד מהשני. קח מחט באורך $a \leq 1$ וזרוק אותו על המשטח. מה ההסתברות שהמחט חוצה קו?[6]

רמז: יש שני משתנים אקראיים (איור 18): x, המקום של מרכז המחט ביחס לקו הקרוב ביותר עם התפלגות אחידה בטווח $[0, 1/2]$, ו-θ, הזווית שבין המחט לבין הקווים המקבילים עם התפלגות אחידה בטווח $[0, \pi/2]$.

פתרון 1

תהי $p(a)$ ההסתברות שמחט באורך a חוצה קו והגדר משתנה מסמן:

$$I_{\text{חוצה קו}} = \begin{cases} 1, & \text{מחט באורך } a \text{ חוצה קו} \\ 0, & \text{מחט באורך } a \text{ חוצה לא קו} \,. \end{cases}$$

אזי:

$$E(I_{\text{חוצה קו}}) = 1 \cdot p(a) + 0 \cdot (1 - p(a)) = p(a)\,, \tag{38}$$

וניתן לחשב את ההסתברות על ידי חישוב התוחלת.

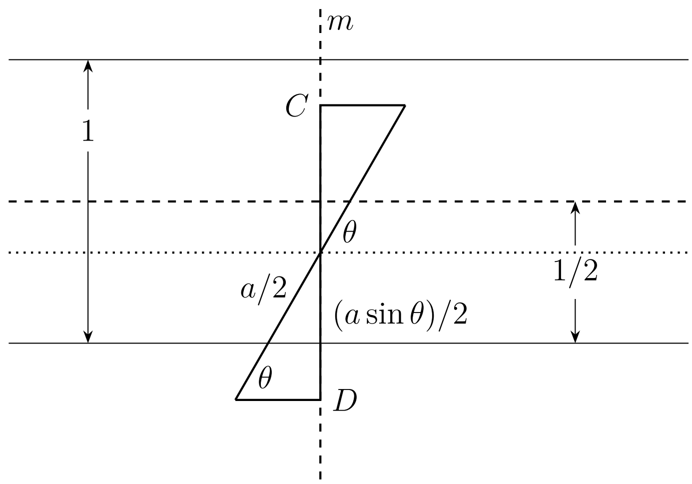
יהי m אנך לקווים המקבילים שעובר דרך מרכז המחט ותהי θ הזווית בין המחט לבין אחד מהקווים המקבילים. הטל את המחט על m כדי לקבל את הקטע הקו $\overline{CD}$ (איור 19). ההסתברות שהמחט חוצה קו היא:

$$P(\text{מחט באורך } a \text{ וזווית } \theta \text{ חוצה קו}) = \frac{(a/2)\sin\theta}{1/2} = a\sin\theta\,. \tag{39}$$

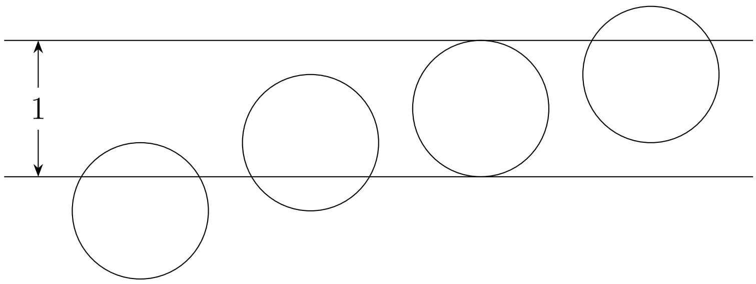
התוחלת של מספר הקווים שהמחט חוצה מתקבלת על ידי אינטגרציה מעל לזוויות האפשריות:

$$E(\text{lines crossed}) = \frac{1}{(\pi/2) - 0}\int_0^{\pi/2} a\sin\theta\, d\theta = \frac{2}{\pi}\cdot a(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2a}{\pi}\,. \tag{40}$$

פתרון 2 הפתרון מבוסס על [1, Chapter 26].



איור 19 : משולש ישר-זווית לפתרון בעיית המחט של Buffon



איור 20 : הפתרון של בעיית המחט של Buffon על מעגלים

תהי $E(x)$ התוחלת שמ מספר הקווים המקבילים שקו באורך x חוצה. עיין עכשיו בקו שמסובבים למעגל C **בקוטר** 1 והיקף π. אם תזרוק את המעגל על המשטח, הוא יחצה קו **בדיוק** פעמיים (איור 20), ולכן :

$$E(C) = 2\,. \tag{41}$$

בנה מצולע משוכלל Q_n חסום על ידי c (אדום), ובנה מצולע משוכלל R_n שחוסם את c (כחול) (איור 21). כל קו ש-Q_n חוצה (אדום) חייב לחצות את המעגל וכל קו שחוצה את המעגל (כחול) חייב לחצות את R_n. לכן :

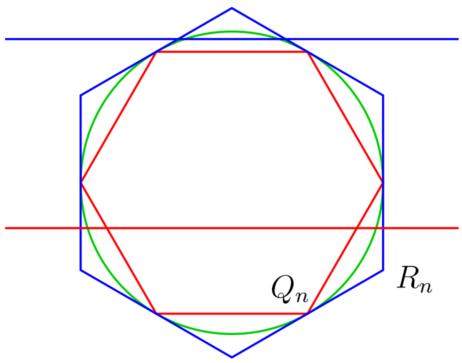
$$E(Q_n) \leq E(C) \leq E(R_n)\,. \tag{42}$$

יהי a_Q, a_R סכומי באורכים של צלעות של Q_n, R_n, בהתאמה. לפי הליניאריות של התוחלת :

$$E(Q_n) = \sum_{i=1}^{n} E(a_Q \text{ צלעות של}) = a_Q E(1) \tag{43}$$

$$E(R_n) = \sum_{i=1}^{n} E(a_R \text{ צלעות של}) = a_R E(1)\,. \tag{44}$$

[6] כדי להקל על החישובים אנו מניחים שהמרחק בין הקווים הוא 1. ניתן להתעלם מאפשרות שהמחט שוכב כולו לאורך אחד הקווים וכן את האפשרות שהוא נודע בשני קווים כי ההתסברות של אירועים אלה היא אפס.



איור 21 : מצולעים כקירובים למעגל

כאשר $n \to \infty$ שני המצולעים הם קירובים למעגל ולכן :

$$\lim_{n\to\infty} a_Q = \lim_{n\to\infty} a_R = \pi \,, \tag{45}$$

ההיקף של המעגל. ממשוואות 41--45 מתקבל:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} E(Q_n) = E(C) = \lim_{n\to\infty} E(R_n)\\
&E(C) = aE(1) = \pi E(1) = 2\\
&E(1) = \frac{2}{\pi}\\
&E(a) = aE(1) = \frac{2a}{\pi}\,.
\end{aligned}$$

סימולציה

$\pi = 2a/E$ ולכן ניתן לחשב קירוב לערכו על ידי הרצת סימולציה או זריקת מחטים על שולחן!

```
For length = 0.2:
Expectation of crossings = 0.1273
Average crossings        = 0.1308
Empirical value for pi   = 3.0581

For length = 0.5:
Expectation of crossings = 0.3183
Average crossings        = 0.3227
Empirical value for pi   = 3.0989

For length = 1.0:
Expectation of crossings = 0.6366
Average crossings        = 0.6333
Empirical value for pi   = 3.1581
```

54. המחט של Buffon עם רשת אופקי ואנכי
(Buffon's needle with horizontal and vertical rulings)

פתור את בעיית המחט של Buffon עבור משטח עם רשת אופקי ואנכי כאשר גודל המשבצות הוא 1×1. מחט יכול לחצות קו אנכי (ירוק), קו אופקי (כחול), שניהם (אדום) או אף אחד (כתום) (איור 22).

רמז: האם מספר הקווים האופקים והאכנים שהמחט חוצה בלתי-תלויים?

פתרון

מספר הקווים האופקים והאכנים שהמחט חוצה אכן בלתי-תלויים, ולפי הליניאריות של התוחלת:

$$\begin{aligned} E(\text{קווים שמחט באורך } a \text{ חוצה}) &= E(\text{קווים אנכים שמחט באורך } a \text{ חוצה } + \\ &\qquad \text{קווים אופקים שמחט באורך a חוצה}) \\ &\quad E(\text{קווים אנכים שמחט באורך } a \text{ חוצה}) + \\ &\quad E(\text{קווים אופקים שמחט באורך a חוצה}) \\ &= \frac{2a}{\pi} + \frac{2a}{\pi} = \frac{4a}{\pi}\,. \end{aligned}$$

55. מחטים ארוכים (Long needles)^{D,S}

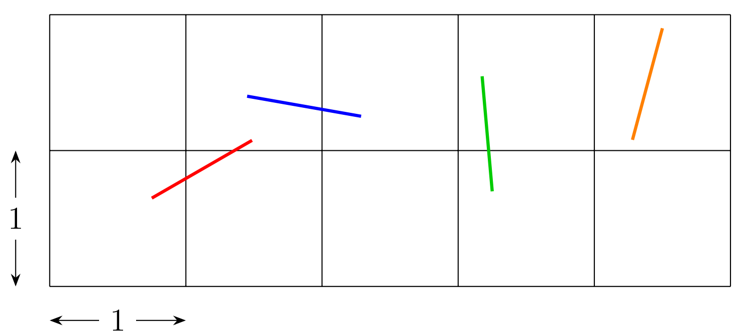
יהי $a > 1$ אורכו של המחט בבעייתו של Buffon.

שאלה 1: מה התוחלת של **מספר הקווים** שמחט חוצה?

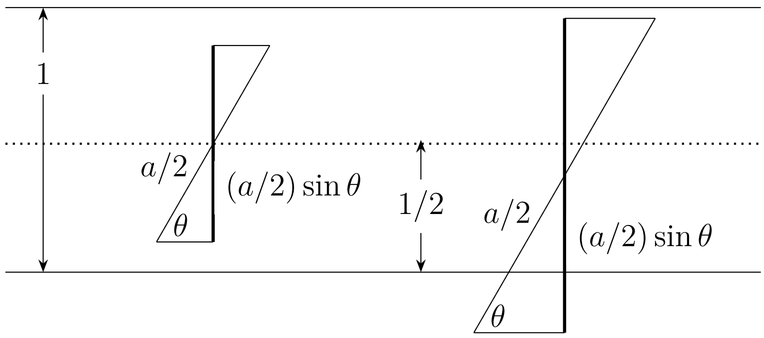
שאלה 2: מה ההסתברות שהמחט חוצה **לפחות** קו אחד?

רמז: עבור איזו זוויות θ ההסתברות של חציית קו היא 1?

פתרון



איור 22: בעיית המחט של Buffon עבור משטח עם רשת אופקי ואנכי



איור 23 : מחטים ארוכים

תשובה 1: שבור את המחט לחלקים באורים $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $a_i < 1$, כך ש-$\sum_{i=1}^{n} a_i = a$. לפי הליניאריות של התוחלת והפתרון של בעיה 53 :

$$E(a) = \sum_{i=1}^{n} E(a_i) = \frac{2a}{\pi}\,.$$

תשובה 2: הפתרון מבוסס על [12] ו-[1, Chapter 26].

לפי משוואה 39 ההסתברות שהמחט יחצה קו היא $a\sin\theta$ **אם** $a\sin\theta \le 1$, כלומר, אם $0 \le \theta \le \sin^{-1}(1/a)$. אבל, אם $a\sin\theta > 1$ ההסתברות היא 1 (איור 23). נכליל את משוואה 40 עבור $a > 0$ שרירותי. האינטגרל מוחשב בשני חלקים, אחד עבור $\theta < \sin^{-1}(1/a)$) ואחר עבור $\theta > \sin^{-1}(1/a)$) :

$$\begin{aligned}
E(a) &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\sin^{-1}(1/a)} a\sin\theta\, d\theta + \int_{\sin^{-1}(1/a)}^{\pi/2} 1\, d\theta\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(a(-\cos\theta)\big|_0^{\sin^{-1}(1/a)} + \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1/a)\right)\right)\\
&= 1 + \frac{2}{\pi}\left(a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}\right) - \sin^{-1}(1/a)\right)\,.
\end{aligned}$$

סימולציה

```
For length = 1.5:
Expectation of crossings = 0.7786
Average crossings        = 0.7780
For length = 2.0:
Expectation of crossings = 0.8372
Average crossings        = 0.8383
For length = 3.0:
Expectation of crossings = 0.8929
Average crossings        = 0.8897
```

56. הכד של Molina (Molina's urns)

שני כדים U_1, U_2 מכילים m כדורים כל אחד. ב-U_1 נמצאים w_1 כדורים לבנים ו-b_1 כדורים שחורים, וב-U_2 נמצאים w_2 כדורים לבנים ו-b_2 כדורים שחורים. מכל כד שלוף n כדורים **עם החזרה**.

שאלה 1: עבור ערכים שונים של $n > 1$ מצא w_1, b_1, w_2, b_2 כך ש:

$$P(\text{כל כדורים שנשלפו מ-}U_1\text{ לבנים}) = P(\text{כל כדורים שנשלפו מ-}U_2\text{ לבנים או שחורים})\,.$$

פתרון

תשובה 1: עבור $n = 2$ המשוואה שיש לפתור היא:

$$\left(\frac{w_1}{m}\right)^2 = \left(\frac{w_2}{m}\right)^2 + \left(\frac{b_2}{m}\right)^2$$
$$w_1^2 = w_2^2 + b_2^2\,.$$

פתרון אחד הוא $w_1 = 10, b_1 = 4, w_2 = 6, b_2 = 8$.

תשובה 2: לפי המשפט האחרון של Fermat, שהוכח ב-1995 על ידי Andrew Wiles, אין פתרונות ל-$w_1^n = w_2^n + b_2^n$ עבור $n \geq 3$.