הבעיות המאתגרות בהסתברות של Mosteller

מוטי בן-ארי

`http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/`

18 ביולי 2022

תוכן העניינים

מבוא

Frederick Mosteller

Frederick Mosteller (1916--2006) ייסד את המחלקה לסטטיסטיקה באוניברסיטת Harvard והיה ראש המחלקה מ-1957 ועד 1971, ויצא לגמלאות שנת 2003. ל-Mosteller התעניין בחינוך בסטטיסקיה וחיבר ספרי לימוד חלוציים כולל [10] שהידגש את הגישה ההסתברותי לסטטיסטיקה, ו-[9] שהיה אחת מספרי הלימוד הראשונים בניתוח מידע. בראיון תיאר Mosteller את ההתפתחות של גישתו להוראת הסטטיסטיקה [6].

מסמך זה

מסמך זה הוא "עיבוד" לספרו של Mosteller: **חמישים בעיות מאתגרות בהסתברות ופתרונותהן** [8]. הבעיות הפתרונות מוצגות ככל האפשר בצורה נגישה לקוראים עם ידע בסיסי בהסתברות, ובעיות רבות נגישות לתלמידי תיכון ולמורים. שכתבתי אתה בעיות והפתרונות עם חישובים מפורטים והסברים נוספים ואיורים. לעתים כללתי פתרונות נוספים.

רבות מהבעיות שונו כדי שיהיו נגישות: הבאתי גרסאות פשוטות שלהן, חילקתי לתת-בעיות והוספתי רמזים. כהעדפה אישית ניסחתי אותן מחדש בצורה מופשטת יותר מ-Mosteller ולא נתתי ולא תרגמתי יחידות כגון אינצ'ים ומטבעות כגון דולרים.

המספור והכותרות נשארו כדי להקל על השוואה עם ספרו של Mosteller.

מחשבונים מודרניים, כולל אפליקציות לסמארטפון, מסוגלים לבצע את כל החישובים ללא קושי.

עבור רוב הבעיות נכתבו סימולציות בשפת התכנות Python.

בסעיף האחרון חזרה על מושגים בסיסיים בהסתברות לפי [11].

הבעיות סומנו כדלקמן:

- בעיות המסומנות ב-D קשות יותר.
- בעיות עבורן קיימות סימולציות סומנו ב-S.

אתם עלולים למצוא שאפילו בעיות שאינן מסומנות ב-D הן קשות. אל נא להתייאש אם לא תוכלו לפתור אותן. בכל זאת שווה לנסות לפתור את כולן כי כל התקדמות לקראת פתרון תעודד.

סימולציות

Monte Carlo simulations (על שם קזינו מופרסם במונקו) נכתבו בשפת התכנות Python 3. תכנית מחשב "מבצעת ניסוי" כגון "הטלת זוג קוביות" או "הטלת מטעה" מספר רב מאוד של פעמים ומחשב ומציג ממוצעים. השתמשתי במחוללי מספרי אקראיים הבנויים בתוך Python, `random.random()` ו-`random.randint()`, כדי לקבל תוצאות אקראיות לכל ניסוי.

כל תכנית מריצה סימולציה המורכת מ-10000 ניסויים והתוצאות מוצגות עם ארבע ספרות לאחר הנקודה העשרונית. כמעט תמיד התוצאה לא תהיה זהה לתוצאה שמתקבלת מחישוב ההסתברות או התוחלת. תוכל להריץ תכנית פעמים רבות ולבדוק את התוצאות משתנות.

ניתן להוריד את קבצי המקור ב-Python מ:
`https://github.com/motib/probability-mosteller`.

שמות הקבצים הם `N-name.py` כאשר `N` הוא מספר הבעיה ו-`name` הוא שם הבעיה (באנגלית).

שתי תוצאות מוצגות (באנגלית) עבור כל סימולציה:

- התוצאה התיאורטית שהיא **הסתברות** (Probability) או **תוחלת** (Expectation). בדרך כלל, במקום להעתיק את הערכים המחושבים התכנית מחשבת אותם מהנוסחאות.
- תוצאת הסימולציה שהיא **היחס בין מספר ההצלחות לבין מספר הניסויים** (Proportion) שהוא מקביל להסתברות, או **ממוצע ההצלחות** (Average) שהוא מקביל לתוחלת.

חשוב להבין שהסתברות ותוחלת הן מושגים תיאורטיים. **חוק המספרים הגדולים** מבטיח שהתוצאות של מספר רב של ניסויים תהינה קרובות לערכים התיאורטיים, אבל הם לא יהיו בזהות. למשל, ההסתברות לקבל 6 בהטלת קוביה הוגנת היא $1/6 \approx 0.1667$. בהרצת סימולציה של 10000 הטלות קיבלתי טווח של ערכים: $0.1656, 0.1665, 0.1687, 0.1693, 0.1684$.

בעיות ופתרונות

1. מגרת הגרביים (The sock drawer)^S

במגרה נמצאות גרביים אדומות וגרביים שחורות. אם נשלוף שתי גרביים בצורה אקראית **(עם החזרה)** ההסתברות ששתיהן אדומות היא $\frac{1}{2}$.

שאלה 1: מה המספר הקטן ביותר של גרביים שחורות שיכולות להיות במגרה? עבור מספר זה מה מספר הגרביים האדומות?

שאלה 2: מה המספר **הזוגי** הקטן ביותר של גרביים שחורות שיכולות להיות במגרה? עבור מספר זה מה מספר הגרביים האדומות?

פתרון 1

תשובה 1: יהי r מספר הגרביים האדומות במגירה ויהי b מספר הגרביים השחורות. $r \geq 2$ כי נתון שניתן לשלוף שתי גרביים אדומות, ו-$b \geq 1$ אחרת ההסתברות של שליפת שתי גרביים אדומות היה 1. נכפיל את ההסתברויות של שתי השליפות:

$$P(\text{שניים אדומים}) = \frac{r}{r+b} \cdot \frac{(r-1)}{(r-1)+b} = \frac{1}{2}\,. \tag{1}$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית עבור המשתנה r:

$$r^2 - r(2b+1) - (b^2-b) = 0\,. \tag{2}$$

r, b שניהם מספרים שלמים חיוביים ולכן הדיסקרימיננט חייב להיות ריבוע של מספר שלם:

$$(2b+1)^2 + 4(b^2-b) = 8b^2+1 \tag{3}$$

הדיסקרימיננט הוא ריבוע כאשר $b = 1$ (הערך הקטן ביותר). ממשוואה 2, $r = 3$, כאשר אנו דוחים את הפתרון $r = 0$ כי $r \geq 2$. סכום מספר הגרביים הוא 4.

בדיקה: $\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$.

תשובה 2: בדקו כל מספר שלם חיובי זוגית של b כדי למצוא את המספר הקטן ביותר עבורו הדיסקרימיננט הוא ריבוע:

b	$8b^2+1$	$\sqrt{8b^2+1}$
2	33	5.74
4	129	11.36
6	**289**	**17**

עבור $b = 6$ הערך של r הוא 15 שמתקבל על ידי פתרון משוואה 2.

בדיקה: $\frac{1}{2} = \frac{14}{20} \cdot \frac{15}{21}$.

פתרון 2

תשובה 1: האם אי-שוויון זה נכון?

$$\frac{r}{r+b} \overset{?}{>} \frac{r-1}{(r-1)+b}\,. \tag{4}$$

$r \geq 2, b \geq 1$ ולכן שני המכנים חיוביים וניתן להכפיל את שני הצדדים:

$$\begin{aligned} r(r-1+b) &\overset{?}{>} (r-1)(r+b) \\ r^2 - r + rb &\overset{?}{>} r^2 - r + rb - b \\ b &\overset{?}{>} 0\,. \end{aligned}$$

$b > 1$ כך שמשווה 4 נכונה.

לפי משוואות 4 ,1:

$$\left(\frac{r}{r+b}\right)^2 = \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r}{r+b} > \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r-1}{(r-1)+b} = \frac{1}{2}\,, \tag{5}$$

ובאופן דומה:

$$\left(\frac{r-1}{(r-1)+b}\right)^2 = \frac{r-1}{(r-1)+b} \cdot \frac{r-1}{(r-1)+b} < \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r-1}{(r-1)+b} = \frac{1}{2}\,. \tag{6}$$

המכנה $r + b$ שונה מאפס ולכן ניתן לחשב שורש ריבועי ולפשט את משוואה 5:

$$\begin{aligned} \frac{r}{r+b} &> \sqrt{\frac{1}{2}} \\ r &> \frac{b}{\sqrt{2}-1} \\ r &> \frac{b}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \\ r &> b(\sqrt{2}+1)\,. \end{aligned}$$

באופן דומה עבור משוואה 6:

$$\begin{aligned} \frac{r-1}{(r-1)+b} &< \sqrt{\frac{1}{2}} \\ r-1 &< \frac{b}{\sqrt{2}-1} \\ r-1 &< b(\sqrt{2}+1)\,. \end{aligned}$$

משתי המשוואות נקבל:

$$r - 1 < (\sqrt{2}+1)b < r\,. \tag{7}$$

עבור $b = 1$ מתקבל $2.141 < r < 3.141$ ו-3 $b = 1, r =$ הוא פתרון.

תשובה 2: נבדוק מספרים זוגיים עבור b:

b	$(\sqrt{2}+1)b$	$< r <$	$(\sqrt{2}+1)b+1$	r	$P($שתי אדומות$)$
2	4.8	$< r <$	5.8	5	0.4762
4	9.7	$< r <$	10.7	10	0.4945
6	14.5	$< r <$	15.5	15	0.5000

Mosteller מעיר שקיים קשר בין בעיה זו לתורת המספרים ומביא פתרון נוסף: $b = 35, r = 85$.

Simulation

```
Expectation of both red  = 0.5000
Average of both red for (red =  3, black =  1) = 0.5053
Average of both red for (red = 15, black =  6) = 0.5013
Average of both red for (red = 85, black = 35) = 0.4961
```

הערה

בשני הפתרונות אנחנו לא מוכיחים תנאי מספיק עבור הערכים של r, b. בפתרון 1 פיתחנו תנאי הכרחי---לפי משוואה 3 הדיסקרימיננט חייב להיות מספר שלם---ומחפשים ערכים של b שעומדים בדרישה זו. בפתרון 2 התנאי ההכרחי הוא ש-r, b מספקים את האי-שוויונות במשוואה 7 ואז חיפשנו ערכים שעומדים בדרישה זו. כתבתי תכנית קצרה לחפש פתרונות בטווח $[1, 50]$. התוצאות עבור ערכים מסביב ל-35 הן:

```
32 78  90.52 0.500917
33 80  93.34 0.499368
34 83  96.17 0.501474
35 85  99.00 0.500000
36 87 101.83 0.498601
37 90 104.66 0.500562
```

כאשר הטורים הם (משמאל לימין) מספר הגרביים השחורות, מספר הגרביים האדומות, השורש של הדיסקרימיננט (משוואה 3), ההסתברות לשלוף שתי גרביים אדומות.

בעזרת תכנית מחשב מצאתי את הפתרונות הבאים עבור מספר גרביים שחורות פחות ממיליון:

אדומות	שחורות
3	1
15	6
85	35
493	204
2871	1189
16731	6930
97513	40391
568345	235416

2. נצחונות עוקבים (Successive wins)^S

תם משחקים סדרה של שלושה משחקים נגד שני יריבים ואתם מנצחים בסדרה אם אתם מנצחים שני משחקים לפחות מתוך השלושה. ההסתברות שאתם מנצחים במשחק נגד שחקן P_1 היא p_1 וההסתברות שאתם מנצחים במשחק נגד שחקן P_2 היא p_2. נתון ש-$p_1 > p2$. באיזה המתסריטים שלהן יש לכם סיכוי גדול יותר לנצח בסדרה?

- אתם משחקים נגד P_1, P_2, P_1 בסדר זה.
- אתם משחקים נגד P_2, P_1, P_2 בסדר זה.

פתרון 1

אתם מנצחים אם: (א) אתם מנצחים בשני השחקים הראשונים ומפסידים בשלישי, (ב) אתם מפסידים את המשחק הראשון ומנצחים משחק השני ובמשחק השלישי. (ג) אתם מנצחים בשלושת המשחקים.

תהיו p_{121} ו-p_{212} ההסתברויות שאתם מנצחים בסדרה בשני התסריטים:

$$\begin{aligned}
p_{121} &= p_1p_2(1-p_1) + (1-p_1)p_2p_1 + p_1p_2p_1\\
p_{212} &= p_2p_1(1-p_2) + (1-p_2)p_1p_2 + p_2p_1p_2\,.
\end{aligned}$$

קיים סיכוי גדול יותר לנצח בסדרה בתסריט הראשון אם $p_{121} > p_{212}$, כלומר, אם:

$$\begin{aligned}
p_1p_2(1-p_1) + (1-p_1)p_2p_1 + p_1p_2p_1 &\overset{?}{>} p_2p_1(1-p_2) + (1-p_2)p_1p_2 + p_2p_1p_2\\
-p_1p_2p_1 &\overset{?}{>} -p_2p_1p_2\\
p_1 &\overset{?}{<} p_2\,.
\end{aligned}$$

נתון ש-$p_1 > p_2$ לכן כדאי לבחור את התסריט השני.

פתרון 2

הפתרון לא-איטואיטיבי. לפי האינטואיציה, כדאי לבחור לשחק שני משחקים נגד P_1 ואחד נגד P_2 כי יש סיכוי גבוה יותר לנצח משחק נגד P_1. אולם, הדרך היחידה לנצח את הסדרה היא בנצחון ב-**משחק האמצעי**, ולכן, כדאי לשחק את המשחק האמצעי נגד P_1, כי יש סיכוי גבוה יותר לנצח אותו.

סימולציה

```
For p1 = 0.6, p2 = 0.5
Proportion of P121 wins = 0.4166
Proportion of P212 wins = 0.4473
For p1 = 0.6, p2 = 0.4
Proportion of P121 wins = 0.3300
Proportion of P212 wins = 0.3869
For p1 = 0.6, p2 = 0.2
Proportion of P121 wins = 0.1625
Proportion of P212 wins = 0.2141
```

הסבר למה סכום היחסים אינו 1.

3. המושבע קל הדעת (The flippant juror)^S

ש שתי אפשרויות להגיע להכרעה: (א) פאנל של שלושה מושבעים המורכב משני מושבעים שמקבלים החלטה בלתי-תלויה עם הסתברות של p להגיע להחלטה הנכונה ומושבע שלישי שמגיע להחלטה נכונה בהסתברות של $1/2$. ההכרעה הנכונה מתקבלת לפי הצבעת רוב. (ב) ההכרעה מתקבלת על ידי מושבע יחיד שיש לו הסתברות של p להגיע להחלטה נכונה. באיזו אפשרות ההסתברות הגבוהה ביותר להגיע להכרעה שנכונה?

פתרון

הפאנל מגיע להכרעה נכונה אם שלושת המושבעים מגיעים להחלטה נכונה או אם כל שני מושבעים מגיעיה להחלטה נכונה. ההסתברות היא:

$$\overbrace{\left(p\cdot p\cdot\frac{1}{2}\right)}^{\text{שלושה נכונים}} + \overbrace{\left(p(1-p)\cdot\frac{1}{2}+(1-p)p\cdot\frac{1}{2}+p\cdot p\cdot\frac{1}{2}\right)}^{\text{שניים נכונים מתוך שלושה}} = p\,,$$

כך שאין הבדל בין שתי האפשרויות.

Simulation

```
Prediction: probabilities of (a) and (b) are equal
For p = 0.25, proportion correct of (a) = 0.5019, (b) = 0.5046
For p = 0.50, proportion correct of (a) = 0.5072, (b) = 0.4970
For p = 0.75, proportion correct of (a) = 0.5062, (b) = 0.5040
```

4. ניסיונות עד להצלחה הראשונה (Trials until first success)^S

מה התוחלת של מספר ההטלות של קוביה עד שהופיע 6?

פתרון 1

ההסתברות שההטלה ה-i תהיה ההופעה הראשונה של 6 היא ההסתברות שבהטלות $i-1$ יופיע אחד מחמשת המספרים האחרים כפול ההסתברות שבהטלה ה-i יופיע 6. כדי לפשט את הסימון נשתמש ב-p במקום $1/6$:

$$P(i \text{ מופיע לראשונה בהטלה } 6) = (1-p)^{i-1}p\,.$$

מספר ההטלות לא חסום.

תהי $E = E(\text{הטלה ראשונה של } 6)$. אזי:

$$E = 1p(1-p)^0 + 2p(1-p)^1 + 3p(1-p)^2 + 4p(1-p)^3 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} ip(1-p)^{i-1}\,. \tag{8}$$

ללא ה- i הסכום היה ההסתברות של הטלה של 6 בסופי של דבר:

$$P(\text{הטלה בסופו של דבר של } 6) = \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1\,. \tag{9}$$

זאת לא תוצאה מפתיעה.

ניתן לחשב את התוחלת כך:

$$\begin{array}{rcccccccc} E & = & p(1-p)^0 & + & p(1-p)^1 & + & p(1-p)^2 & + & p(1-p)^3 & + \cdots \\ & & & & p(1-p)^1 & + & p(1-p)^2 & + & p(1-p)^3 & + \cdots \\ & & & & & & p(1-p)^2 & + & p(1-p)^3 & + \cdots \\ & & & & & & & & p(1-p)^3 & + \cdots \end{array}$$

השורה הראשונה היא סכום הסדרה ההנדסית ממשוואה 9 שהוא 1. השורה השנייה היא אותה סדרה הנדסית אינסופית עם איבר ראשון $p(1-p)$ ולכן הסכום הוא:

$$\frac{p(1-p)}{1-(1-p)} = 1-p\,.$$

באופן דומה, סכום השורה השלישית הוא $(1-p)^2$ וסכום השורה ה-i הוא $(1-p)^{i-1}$. לכן התוחלת היא סכום הסידרה ההנדסית האינסופית:

$$E = 1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \cdots = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p} = 6\,.$$

פתרון 2

הכפל את משוואה 8 ב-$p-1$ והחסר את תוצאה מאותה משוואה. התוצאה היא הסדרה ההנדסית במשוואה 9:

$$\begin{array}{rcllll} E & = & p(1-p)^0 & + & 2p(1-p)^1 + 3p(1-p)^2 + 4p(1-p)^3 + \cdots \\ E \cdot (1-p) & = & & & p(1-p)^1 + 2p(1-p)^2 + 3p(1-p)^3 + \cdots \\ E \cdot (1-(1-p)) & = & p & + & p(1-p)^1 + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + \cdots \\ & = & 1 & & \\ E & = & 1/p\,. & & \end{array}$$

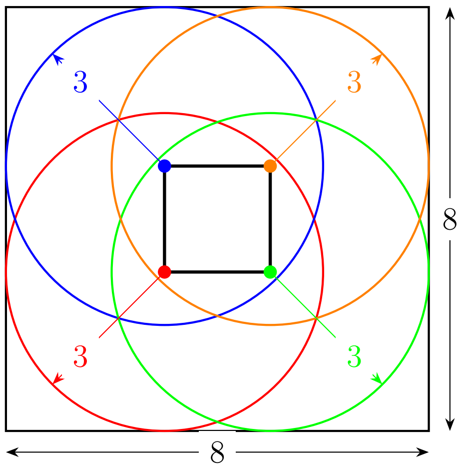
בגלל ש-$p = 1/6$, התוחלת של מספר ההטלות עד להופעה של 6 היא 6.

פתרון 3

נתייחס להטלה הראשונה בנפרד משאר ההטלות. אם בהטלה הראשונה מופיע 6 (בהסתברות p) הטלה אחת מספיקה. אחרת, אם בהטלה לא מופיע 6 (הסתברות $1-p$) אזי ההטלות הבאות מרכיבות סדרה זהה לסדרה המקורית שהתוחלת שלה היא E. לכן התוחלת היא:

$$\begin{aligned} E &= 1 \cdot p + (E+1)(1-p) \\ E &= \frac{1}{p} = 6\,. \end{aligned}$$

סימולציה



איור 1 : גבולות למטבעות שאינם חותכות את הריבוע

```
Expectation of first success = 6
Average of first success     = 6.0161
```

5. מטבע בריבוע (Coin in a square)^S

שאלה 1: נתון ריבוע עם צלע באורך 8 ומטבע עם רדיוס 3. הטל את המטבע על הריבוע. מרכז המטבע נוחת בתוך המטבע עם התפלגות אחידה. מה ההסתברות שהמטבע נוחת כולו בתוך הריבוע?

שאלה 2: בכל הטלה אתה מרוויח 5 אם המטבע נוחת בתוך הריבוע ומפסיק 1 אם הוא נוגע בריבוע. מה תוחלת הרווח לכל הטלה?

שאלה 3: פתח נוסחה להסתברות שהמטבע נוחת בתוך הריבוע אם אורך הצלע הוא a ורדיוס המטבע הוא r כאשר $r < a/4$.

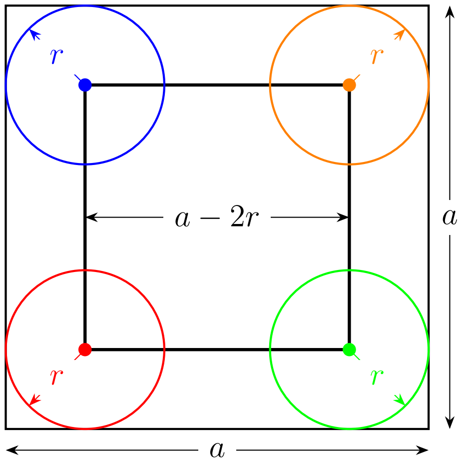
פתרון

תשובה 1: איור 1 מראה מטבע על צלע 8 וארבעה מעגלים בקוטר 3 חסומים על ידי פינות הריבוע. מרכזי המעגלים מרכיבים ריבוע פנימי עם צלע 2. כל מטבע שמרכזו מחוץ לריבוע יחתוך צלע של הריבוע החיצוני. למיקום של מרכז המטבע התפלגות אחידה ולכן ההסתברות שהמטבע נוחת כולו בתוך הריבוע הוא היחס בין השטח של הריבוע הפנימי לשטח של הריבוע החיצוני :

$$P(\text{המטבע נוחת כולו בתוך הריבוע}) = \frac{2\cdot 2}{8\cdot 8} = \frac{1}{16} = 0.0625\,.$$

תשובה 2: התוחלת שלילית :

$$E(\text{הטלה לכל הטלה}) = 5\cdot\frac{1}{16} + (-1)\cdot\frac{15}{16} = -\frac{10}{16} = -0.625\,.$$



איור 2: מטבעות בריבוע גדול

תשובה 3: איור 2 מראה ארבעה מעגלים חסומים על ידי פינות הריבוע. הצלע של הריבוע הפנימית הוא $a-2r$ ולכן:

$$P(\text{המטבע נוחת בתוך המעגל}) = \frac{(a-2r)^2}{a^2}\,.$$

סימולציה

```
For side = 8, radius = 1:
Probability of landing within the square = 0.5625
Proportion landing within the square     = 0.5704
For side = 8, radius = 2:
Probability of landing within the square = 0.2500
Proportion landing within the square     = 0.2481
For side = 8, radius = 3:
Probability of landing within the square = 0.0625
Proportion landing within the square     = 0.0639
For side = 8, radius = 4:
Probability of landing within the square = 0.0000
Proportion landing within the square     = 0.0000
```

6. הטלת מזל (Chuck-a-luck)^S

חר מספר n בין 1 ל-6. הטל שלוש קוביות. אם לא מופיע n על אף קוביה אתה מפסיד 1; אם n מופיע על קוביה אחת אתה מרוויח 1; אם n מופיע על שתי קוביות אתה מרוויח 2; אם n מופיע על כל שלושת הקוביות אתה מרוויח 3. מה התוחלת של הרווח?

פתרון

תהי $P(k)$ ההסתברות ש-n מופיע על k קוביות. אזי:

$$E(\text{רווח לכל הטלה}) = -1P(0) + 1P(1) + 2P(2) + 3P(3)\,.$$

ההטלות של שלושת הקוביה הן בלתי-תלויות ולכן כל ההסתברויות ניתנות על ידי ההתפלגות הבינומית עם $p = 1/6$, ההסתברות ש-n מופיע על קוביה:

$$\begin{aligned}
E(\text{רווח לכל הטלה}) &= -1\binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 + 1\binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \\
&\quad 2\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 + 3\binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 \\
&= \frac{1}{216}(-125 + 75 + 30 + 3) \\
&= -\frac{17}{216} \approx -0.0787\,.
\end{aligned}$$

סימולציה

```
Expectation of winnings = -0.0787
Average winnings        = -0.0724
```

7. לרפא את המהמר הכפייתי (Curing the compulsive gambler)^S

ולט roulette הוא משחק מזל שמשחקים עם גלגל בעל 38 כיסים ממוספרים: 18 אדומים, 18 שחורים ו-2 ירוקים.[1] מסובבים את הגלגל וכדור נוחת באחד הכיסים. הקזינו מזוכה אם הכדור נוחת בכיס ירוק; אחרת, את מרוויחה 36 עבור הימור של 1 על מספר הכיס (אדום או שחור) בו נוחת הכדור. את משחקת 36 סבבים של רולט ומהממרת 1 בכל סבב.

שאלה 1: מה התוחלת של הרווח?

שאלה 2: חברך מציע להמר 20 שאחרי 36 סבבים את **תפסידי** כסף. מה התוחלת של הרווח בהתחשב ברווח או הפסד של המשחק וגם של ההימור על חברך?

פתרון

תשובה 1: ההסתברות של ניצחון בסבב אחד היא $1/38$ ולכן:

$$\begin{aligned}
E(\text{רווח בסבב אחד}) &= 35 \cdot \frac{1}{38} + (-1) \cdot \frac{37}{38} = -\frac{2}{38} \approx -0.0526 \\
E(\text{ רווח ב-36 סבבים }) &= 36 \cdot -0.05266 = -1.8947\,.
\end{aligned}$$

(הרווח נטו הוא 35 כי ה-36 שאת מקבלת כולל החזרת ה-1 של ההימור.)

תשובה 2: נבדוק את ארבעת התוצאות של 36 של משחק הרולט:

---

[1] ברולט אמריקאי נמצאים שני כיסים ירוקים וברולט אירופאי נמצא כיס ירוק אחד.

- אם את מפסידה בכל הסבבים ההפסד הוא 36.
- אם את זוכה בסבב אחד ומפסידה ב-36 סבבים אין רווח ואין הפסד.
- אם את זוכה בשני סבבים את מרוויחה 70 ומפסידה 34 בשאר הסבבים כך שהרווח נטו הוא 36.
- אם את זוכה ב-k עבור $2 < k \leq 36$, הרווח נטו הוא $35k - (36 - k) > 0$.

לכן את הפסידה כסף רק אם את מפסידה את כל הסבבים:

$$P(\text{מפסידה ב-36 סבבים}) = \left(\frac{37}{38}\right)^{36} \approx 0.3829\,.$$

ההסתברות לא להפסיד בכל הסבבים היא $1 - 0.3829 = 0.6171$. לכן:

$$\overbrace{-1.8947}^{\text{E של כל הסבבים}} + \overbrace{-20 \cdot 0.3829}^{\text{מפסידה בהימור}} + \overbrace{20 \cdot 0.6171}^{\text{זוכה בהימור}} \approx 2.7904\,.$$

ברור שכדאי להסכים להימור המוצע!

סימולציה

```
Expectation of winning a round = -0.0526
Average winnings for a round   = -0.0593
```

בסימוליה היתה שונות גדולה שהוקטנה כל ידי הרצת מיליון ניסויים.

8. קלפים מושלמים בברידג' Perfect bridge hand

חר באקראי 13 קלפים בחפיסה של 52 קלפים. מה ההסתברות שכולם מאותה סדרה?

פתרון 1

בכל חפיסה יש 13 קלפים מכל סדרה כך שיש $\binom{52}{13}$ דרכים לבחור 13 מסדרה אחת, למשל, לבבות. יש רק דרך אחת לבחירת 13 לבבות כך ש:

$$P(\text{בחירת 13 לבבות}) = \frac{1}{\binom{52}{13}} = \frac{13!39!}{52!} = \approx 1.5747 \times 10^{-12}\,.$$

בחפיסה ארבע סדרות ולכן:

$$P(\text{בחירת 13 קלפים מאותה סדרה}) = 4 \cdot \frac{13!39!}{52!} \approx 6.2991 \times 10^{-12}\,.$$

פתרון 2

יש 52 דרכים לבחור את הקלף הראשון. אח״כ יש 12 דרכים לבחור את הקלף השני מאותה סדרה מתוך 51 הקלפים שנשארו, 11 דרכים לבחור את הקלף השלישי, וכו׳. מכאן:

$$P(\text{בחירת 13 קלפים מאותה סדרה}) = \frac{52}{52}\cdot\frac{12}{51}\cdot\frac{11}{50}\cdots\frac{1}{40} = \frac{12!}{51!/39!} \approx 6.2991\times 10^{-12}\,.$$

אין טעם להריץ סימולציה כי כמעט בוודאות התוצאה תהיה אפס.

9. משחק קוביות Craps^{D,S}

שחק ה-craps הוא משחק עם זוג קוביות. בהטלה הראשונה אתה זוכה אם סכום המספרים הוא 7 או 11, ואתה מפסיד אם הסכום הוא 2, 3 או 12. אם הסכום בהטלה הראשונה הוא $n = 4, 5, 6, 8, 9, 10$ (נקרא ״נקודה״ point), המשך להטיל את הקוביות עד שמופיעה הנקודה n (ניצחון) או 7 (הפסד).

שאלה 1: מה ההסתברות של האירועים בהטלה הראשונה: ניצחון, הפסד, לא ניצחון ולא הפסד?

שאלה 2: מה ההסתברות לניצחון?

פתרון 1

תשובה 1: להסתברות של המספרים המופיעים כאשר מטילים קוביה התפלגות אחידה השווה ל-$1/6$. ההטלות של שתי קוביות בלתי תלויות ולכן ההסתברות של כל תוצאה היא $1/36$. מספר הדרכים לקבל כל אחד מהאירועים (הסכום של זוג קוביות) $2, \ldots, 12$ הוא:

סכום	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
זוגות	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

בהטלה הראשונה יש 8 דרכים לקבל 7 או 11 וההסתברות היא $8/36$ לזוכה. יש 4 דרכים לקבל $2, 3, 12$ וההסתברות היא $4/36$. ההסתברות לא לזכות ולא להפסיד היא בהטלה הראשונה היא:

$$1 - \frac{8}{36} - \frac{4}{36} = \frac{24}{36}\,.$$

תשובה 2: נעיין בשני מקרים תוך התייחסות לטבלה לעיל:

- הנקודה היא 4. ההסתברות לזכות בהטלה השנייה (4) היא $3/36$ וההסתברות להפסיד (7) היא $6/36$. ההסתברות לא לזכות ולא להפסיד היא $1 - (3/36) - (6/36) = 27/36$.
- הנקודה היא 8. ההסתברות לזכות בהטלה השנייה (8) היא $5/36$ וההסתברות להפסיד (7) היא $6/36$. ההסתברות לא לזכות ולא להפסיד היא $1 - (5/36) - (6/36) = 25/36$.

אנו רואים שחייבים לחשב את ההסתברות לזכות בנפרד עבור כל אחת מהנקודות $4, 5, 6, 8, 9, 10$. נפתח נוסחה כללית להסתברות.

לאחר שהתקבלה **הנקודה** n בהטלה הראשונה, תהי P_n ההסתברות ההסתברות לזכייה בהטלת הנקודה n בהטלה כשלהי אחר כך, ותהי Q_n ההסתברות לא לזכות ולא להפסיד בהטלה כלשהי. תהי W_n ההסתברות לזכייה על ידי הטלת הנקודה n **בהטלה לאחר ההטלה הראשונה**. ניתן לחשב את W_n על ידי חיבור:

- ההסתברות להופעת הנקודה בהטלה השנייה.
- ההסתברות לא לזכות ולא להפסיד בהטלה השנייה כפול ההסתברות להופעת הנקודה בהטלה השלישית.
- ההסתברות לא לזכות ולא להפסיד בהטלה השנייה והשלישית כפול ההסתברות להופעת הנקודה בהטלה הרביעית,

וכך הלאה.

$$\begin{aligned} W_n &= P_n + Q_n P_n + Q_n^2 P_n + Q_n^3 P_n + \cdots \\ &= P_n \left(1 + Q_n^1 + Q_n^2 + Q_n^3 + \cdots\right) \\ &= P_n \left(\frac{1}{1-Q_n}\right) . \end{aligned}$$

אתה מפסיד אם בהטלה כלשהי לאחר הראשונה מופיע 7 עם הסתברות $6/36$ ולכן:

$$\begin{aligned} Q_n &= 1 - P_n - (6/36) \\ W_n &= \frac{P_n}{P_n + (6/36)} . \end{aligned}$$

W_n עבור ששת הנקודות היא:

n	4	5	6	8	9	10
P_n	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$
W_n	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{9}$

נחשב את W, ההסתברות לזכות, על ידי חיבור ההסתברות לזכות בהטלה הראשונה לסכום ההסתברויות עבור ששת הזכיות בהטלת נקודה כפול ההסתברות להופעת **אותה נקודה** בהטלה הראשונה:

$$W = \frac{8}{36} + \sum_{n \in \{4,5,6,8,9,10\}} P_n W_n \approx 0.4929 . \tag{10}$$

שסיכוי שהקזינו יזכה במשחק אחד של craps הוא רק $0.5 - 0.4949 \approx 0.5\%$ אבל חוק המספרי הגדולים מבטיח שבסופו של דבר הם יזכו ואתה תפסיד!

פתרון 2

תשובה 2: נעיין בסדרות ההטלות שלהן כאשר בכולן הנקודה היא 4.

4 8 9 9 9 8 8 8 9 8 4
4 8 9 9 9 8 8 8 9 8 7
4 9 9 9 8 8 4

המשחק מסתיים רק אם מטילים 4 (ניצחון) או מטילים 7 (הפסד), כך שהופעות של 8 או 9 לא משפיעות על התוצאה. מכאן שהסתברות לזכות היא ההסתברות המותנית שמופיע 4 אם נתון שהופיע 4 או 7. יהי f האירוע ש-4 מופיע ויהי s האירוע ש-7 מופיע. אזי:

$$P(f|f \cup s) = \frac{P(f) \cap P(f \cup s)}{P(f \cup s)} = \frac{P(f)}{P(f \cup s)} = \frac{3/36}{(3+6)/36} = \frac{3}{9},$$

בדיוק התוצאה W_4 שמופיעה בטבלה לעיל. כעת ניתן להשתמש במשוואה 10 כדי לחשב את W.

השתמשנו בהסתברות בצורה סמויה בפתרון הראשון כי W_n היא ההסתברות המותנית שבהטלה הראשונה מופיעה הנקודה n.

סימולציה

```
Probability of winning = 0.4929
Proportion of wins     = 0.4948
```

13. דילמת האסיר The prisoner's dilemma^D

שלושה אסירים A, B, C מועמדים לשחרור מוקדם. וועדת השחרורים ישחרר שניים מהם עם הסתברות שווה ל-$\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$, כך שהסיכוי ש-$A$ ישוחרר הוא $2/3$. לאסיר A נמסר שמו של אחד האסירים האחרים שישוחרר. אם מוסרים לו ש-B מה הסיכוי ש-A ישוחרר גם כן?

[2] הוא מאמר מקיף על דילמת האסיר ועל בעיית Monty Hall הדומה.

פתרון 1

יהיו $P(A), P(B), P(C)$ ההסתברות ש-A, B, C ישוחררו. A מעוניין בהסתברות המותנית $P(A|B)$ שהוא ישוחרר אם B ישוחרר. נדמה שהחישוב שלהלן הוא מה שאנחנו רוצים:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}\,.$$

אבל זאת לא ההסתברות הנכונה! יהי R_{AB} האירוע של-A נמסר ש-B ישוחרר. ההסתברות שיש לחשב היא $P(A|R_{AB})$:

$$P(A|R_{AB}) = \frac{P(A \cap R_{AB})}{P(R_{AB})}\,.$$

אנו מניחים שהמידע על שחרורו של B הוא אמת ולכן:

$$P(A \cap R_{AB}) = P(\{A, B\}) = \frac{1}{3}\,.$$

כעת:

$$P(R_{AB}) = P(\{A, B\}) + P(\{B, C\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\,.$$

אם התכנית היא ש-$\{B, C\}$ ישוחררו, ניתן למסור ל-A או ש-B ישוחרר או ש-C ישוחרר ולכן הגורם $1/2$. מכאן:

$$P(A|R_{AB}) = \frac{P(A \cap R_{AB})}{P(R_{AB})} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}\,,$$

כך שמסירה ל-A ש-B ישוחרר לא משנה את ההסתברות שהוא ישוחרר.

פתרון 2

ארבעת האירועים האפשריים הם:

e_1: ל-A נמסר ש-B ישוחרר ו-$\{A, B\}$ שוחררו.

e_2: ל-A נמסר ש-C ישוחרר ו-$\{A, C\}$ שוחררו.

e_3: ל-A נמסר ש-B ישוחרר ו-$\{B, C\}$ שוחררו.

e_4: ל-C נמסר ש-B ישוחרר ו-$\{B, C\}$ שוחררו.

ההסתברות של כל זוג לשחרור שווה ולכן:

$$P(e_1) = P(e_2) = P(e_3 \cup e_4) = \frac{1}{3}\,.$$

נניח שאם $\{B, C\}$ ישוחררו, בהסתברות שווה ימסרו ל-A ש-B ישוחרר או ש-C ישוחרר, ולכן $P(e_3) = P(e_4) = 1/6$. מכאן שההסתברות ש-A ישוחרר בהינתן האירוע $R_{AB} = e_1 \cup e_3$ שנמסר לו ש-B ישוחרר היא:

$$P(A|R_{AB}) = \frac{P(e_1 \cap (e_1 \cup e_3))}{P(e_1 \cup e_3)} = \frac{P(e_1)}{P(e_1 \cup e_3)} = \frac{1/3}{(1/3) + (1/6)} = \frac{2}{3}\,.$$

פתרון 3

חידה שמיוחסת ל-Abraham Lincoln שואל: "אם תקרא לזנב של כלב רגל, כמה רגליים יש לכלב?" התשובה היא שלקרוא לזנב רגל לא הופך אותו לרגל ולכן לכלב עדיין יש ארבע רגליים. ברור שאם A יודע את העתיד המחכה ל-B זה לא משנה את הסיכוי שלו לשיחרור.

14. איסוף תלושים Collecting coupons^S

תוך סדרה של קופסאות ובתוך כל אחת נמצא תלוש עם אחד המספרים 1 עד 5. את שולפת תלוש אחד מכל קופסה אחת אחרי השנייה.

שאלה 1: מה התוחלת של מספר התלושים שיש לשלוף עד שתקבלי את כל חמשת המספרים?

שאלה 2: פתחי נוסחה לתוחלת ל-n מספרים.

רמז: תשתמשי בפתרון לבעיה 4 (עמוד 10) והקירוב לסכום של מספרים הורמוניים (עמוד 82).

פתרון

תשובה 1: מה התוחלת של מספר השליפות עד שאת מקבלת מספר **שונה** מכל הקודמים? לפי בעייה 4 התוחלת היא $1/p$ כאשר p היא ההסתברות לשליפת מספר שונה. עבור השליפה הראשונה, ההסתברות היא 1 כך שהתוחלת היא גם 1. עבור השליפה השנייה ההסתברות היא $4/5$ כך שהתוחלת היא $5/4$ וכך הלאה. לכן:

$$E(\text{כל חמשת המספרים}) = \frac{5}{5} + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + \frac{5}{1} = \;= \frac{1370}{120} \approx 11.4167\,.$$

תשובה 2: נשמתמש באותה שיטה ובקירוב לסכום המספרים ההרומוניים (עמוד 82):

$$E(\text{כל } n \text{ המספרים}) = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots \frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right) = nH_n \approx n\left(\ln n + \frac{1}{2n} + 0.5772\right)\,.$$

עבור $n = 5$ מתקבל:

$$E(\text{כל חמשת המספרים}) = 5H_5 \approx 5(\ln 5 + \frac{1}{10} + 0.5772) \approx 11.4332\,.$$

סימולציה

```
For  5 coupons:
Expectation of draws = 11.9332
Average draws        = 11.4272
For 10 coupons:
Expectation of draws = 29.7979
Average draws        = 29.2929
For 20 coupons:
Expectation of draws = 72.4586
Average draws        = 72.2136
```

15. שורה בתיאטרון The theater row^S

דר שמונה מספרים זוגיים ושבעה מספרים אי-זוגיים בשורה בצורה אקראית, למשל:

$$10 \quad 12 \quad 3 \quad 2 \quad 9 \quad 6 \quad 1 \quad 13 \quad 7 \quad 10 \quad 3 \quad 8 \quad 8 \quad 5 \quad 20\,,$$

שנוכל לכתוב כך:

$$E \quad E \quad O \quad E \quad O \quad E \quad O \quad O \quad O \quad E \quad O \quad E \quad E \quad O \quad E\,,$$

כי המספרים עצמם אינם חשובים.

מה התוחלת שלמספר הזוגות השכנים שהם זוג/אי-זוגי או אי-זוגי/זוגי?

בדוגמה יש 10 זוגות שכנים שהם EO או OE.

רמז: התייחס לכל זוג שכנים בנפרד. מה ההסתברות שהם שונים?

פתרון

הטבלה שלהן מראה את עשרת הסידורים השונים עבור שלושה מספרים זוגיים ושני מספרים אי-זוגיים. מספר הזוגות השכנים השונים הוא 24 והממוצע הוא $24/10 = 2.4$.

זוגות	סידור	זוגות	סידור
3	$EEOEO$	1	$EEEOO$
4	$EOEOE$	2	$EEOOE$
1	$EOOEE$	3	$EOEEO$
2	$OEEEO$	3	$OEEOE$
1	$OOEEE$	3	$OEOEE$

נחזור לדוגמה עם 15 מספרים. תהי P_d ההסתברות שזוג נתון בסידור הוא EO או OE. אזי:

$$P_d = P(EO) + P(OE) = \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} + \frac{7}{15} \cdot \frac{8}{14} = 2 \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} = \frac{8}{15}\,.$$

תהי E_d התוחלת של מספר הזוגות בסידור שהם EO או OE. זוג (EO,OE) תורם 1 למספר הזוגות השונים וזוג (EE,OO) תורם 0:

$$E_d = \sum_{\text{זוגות}} 1\cdot P_d = 14\cdot\frac{8}{15}\approx 7.4667\,.$$

עבור עשרה מספרים:

$$\begin{aligned}
P_d &= P(EO)+P(OE)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{5}\\
E_d &= 4\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{5}=2.4\,.
\end{aligned}$$

Simulation

```
For  5 places:
Expectation of different pairs = 2.4000
Average different pairs        = 2.3855
For 15 places:
Expectation of different pairs = 7.4667
Average different pairs        = 7.4566
For 27 places:
Expectation of different pairs = 13.4815
Average different pairs        = 13.4835
For 49 places:
Expectation of different pairs = 24.4898
Average different pairs        = 24.4725
```

16. האם השני בדירוג יזכה המקום שני? Will the second-best be runner-up?^{S}

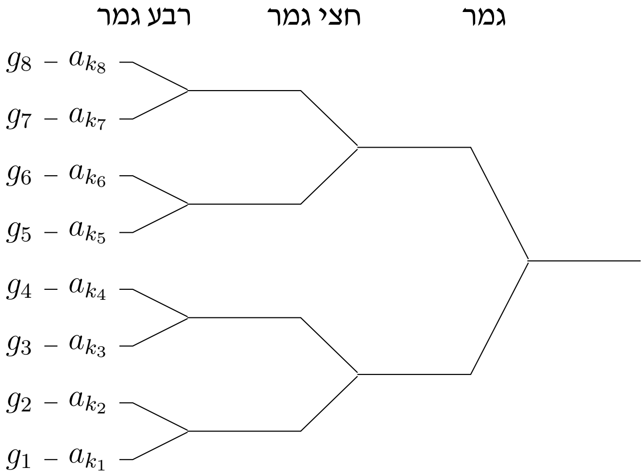
שמונה שחקים בתחרות $\{a_1,\ldots,a_8\}$ נקבעים משחקים $\{g_1,\ldots,g_8\}$ בצורה אקראית כך ששחקן a_{k_i} משחק את המשחק הראשון שלו במקום g_{k_i} (איור 3). השחקנים מדורגים כך שהטוב ביותר הוא a_1 והגרוע ביותר הוא a_8. השחקן הטוב יותר לעולם ינצח שחקן פחות. ברור ששחקן a_1 ינצח בתחרות.

שאלה 1: מה ההסתברות שהשחקן a_2 יזכה במקום השני כאשר הוא משחק נגד a_1 בגמר ומפסיד?

שאלה 2: עבור 2^n שחקנים, מה ההסתברות שהשחקן a_2 יזכה במקום השני כאשר הוא משחק נגד a_1 בגמר ומפסיד?

פתרון

תשובה 1: אם a_1 משחק באחד משחקים $\{g_1,g_2,g_3,g_4\}$ אף שחקן המשחקים במשחקים הללו לא יגיע לגמר, לכן a_2 חייב לשחק באחד מהמשחקים $\{g_5,g_6,g_7,g_8\}$. המסקנה המתבקש היא שההסתברות ש-a_2 יזכה במקום השני היא $1/2$ כי הוא חייב לשחק באחד מארבעת המשחקים $\{g_1,g_2,g_3,g_4\}$. אולם, a_2 חייב לשחק באחד מארבעה המשחקים מתוך שבעת המשחקים ש-a_1 לא משחק בו וההסתברות היא $4/7$.



איור 3: טבלת משחקים לתחרות

תשובה 2: באופן דומה, מתוך $2^n - 1$ המשחקים בהם a_1 לא משחק, a_2 חייב לשחק באחד מ-2^{n-1} המשחקים במחצית הטבלה שלא כוללת את a_1. מכאן:

$$P(a_1, a_2 \text{ משחקים אחד נגד השני בגמר}) = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}\,.$$

סימולציה

```
For   8 players:
Probability a2 is runner-up                = 0.5714
Proportion of games where a2 is runner-up  = 0.5707
For  32 players:
Probability a2 is runner-up                = 0.5161
Proportion of games where a2 is runner-up  = 0.5184
For 128 players:
Probability a2 is runner-up                = 0.5039
Proportion of games where a2 is runner-up  = 0.5060
```

17. זוג אבירים Twin knights^{D,S}

לשמונה שחקנים בתחרות $\{a_1, \ldots, a_8\}$ נקבעים משחקים $\{g_1, \ldots, g_8\}$ בצורה אקראית כך ששחקן a_{k_i} משחק את המשחק הראשון שלו במקום g_{k_i} (איור 3). לכל i, j, ההסתברות ש-a_i מנצחת במשחק נגד a_j היא $1/2$ כמו גם ההסתברות ש-a_j מנצחת את a_i.

שאלה 1: מה ההסתברות שהשחקנים a_1, a_2 משחקים משחק אחת נגד השנייה.

שאלה 2: עבור 2^n שחקנים, מה ההסתברות שהשחקנים a_1, a_2 משחקים משחק אחת נגד השנייה.

פתרון

תשובה 1: ללא הגבלת הכלליות נקבע ש-a_1 משחקת במשחק g_1. מה האפשרויות בהן a_1, a_2 ישחקו אחת נגד השנייה. בהסתברות $1/7$ נקבע ש-a_2 משחקת במשחק g_2. בהסתברות $2/7$ נקבע ש-a_2 משחקת במשחק g_3 או g_4, אבל היא לא משחקת נגד a_1 אלא אם **שתיהן** מנצחות במשחק הראשון שלהן, כך שיש להכפיל את ההסתברות ב-$1/4$. בהסתברות $4/7$ נקבע ש-a_2 משחקת במשחק g_5, g_6, g_7, g_8, אבל היא לא משחקת נגד a_1 אלא אם **שתיהן** מנצחות בשני המשחקים שלהן, כך שיש להכפיל את ההסתברות ב-$1/16$. מכאן:

$$P(a_1, a_2 \text{ play each other}) = \frac{1}{7} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7} + \frac{1}{16}\cdot\frac{4}{7} = \frac{1}{4}\,.$$

תשובה 2: תהי P_n ההסתברות שבתחרות עם 2^n שחקנים, a_1 ו-a_2 משחקות אחת נגד השנייה. ראינו ש-$P_3 = 1/4$. מה עם P_4? באותה שיטה:

$$\begin{aligned} P_4 &= \frac{1}{15} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{15} + \frac{1}{16}\cdot\frac{4}{15} + \frac{1}{64}\cdot\frac{8}{15} \\ &= \frac{1}{15}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}\,. \end{aligned}$$

השערה סבירה היא ש-$P_n = 1/2^{n-1}$.

Proof 1: באותה שיטה תוך שימוש בנוסחה לסכום של סדרה הנדסית:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{2^n-1}\sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \\ &= \frac{1}{2^n-1}\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} \\ &= \frac{1}{2^n-1}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\,. \end{aligned}$$

Proof 2: באינדוקציה. טענת הבסיס היא: $P_3 = 1/4 = 1/2^{3-1}$.

יש שני צעדי אינדוקציה:

מקרה 1: נקבע ש-a_1 ו-a_2 משחקות בחצאים שונים של התחרות:

$$P(a_1, a_2 \text{ משחקות בחצאים שונים}) = \frac{2^{n-1}}{2^n-1}\,.$$

הן יכולות להיפגש רק במשחק הגמר ולכן כל אחת חייבת לנצח בכל $n-1$ המשחקים שלהן:

$$P(a_1, a_2 \text{ נפגשות אם משחקות בחצאים שונים}) = \frac{2^{n-1}}{2^n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^{-(n-1)}}{2^n-1}\,. \tag{11}$$

מקרה 2: נקבע ש-a_1 ו-a_2 משחקות באותו חצי תחרות:

$$P(a_1, a_2 \text{ משחקות בחצאים שונים}) = \frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}\,.$$

שתי השחקניות משחקות באותו חצי ולכן הבעיה היא למצוא P_{n-1}. לפי הנחת האינדוקציה:

$$P(a_1, a_2 \text{ נפגשות אם משחקות באותו חצי}) = \frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-2}} = \frac{2^1-2^{-(n-2)}}{2^n-1}\,. \tag{12}$$

ממשוואות 11, 12 נקבל:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{2^{-(n-1)}}{2^n-1}+\frac{2^1-2^{-(n-2)}}{2^n-1} \\ &= \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}}\cdot\frac{2^{-(n-1)}+2^1-2^{-(n-2)}}{2^n-1} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{2^0+2^n-2^1}{2^n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}\,. \end{aligned}$$

סימולציה

```
For   8 players:
Probability that a1, a2 meet = 0.2500
Proportion a1, a2 meet       = 0.2475
For  32 players:
Probability that a1, a2 meet = 0.0625
Proportion a1, a2 meet       = 0.0644
For 128 players:
Probability that a1, a2 meet = 0.0156
Proportion a1, a2 meet       = 0.0137
```

18. תוצאה שווה בהטלת מטבע An even split at coin tossing^S

1 אם אתה זורק מטבע הוגן 20 פעמים, מה ההסתברות לקבל ״עץ״ בדיוק 10 פעמים?

שאלה 2: אם אתה זורק מטבע הוגן 40 פעמים, מה ההסתברות לקבל ״עץ״ בדיוק 20 פעמים?

פתרון

תשובה 1: המטבע הוגן ולכן ההסתברות מתקבלת מהמקדם הבינומי:

$$P(\text{10 ״עץ״ ב-20 הטלות}) = \binom{20}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.1762\,.$$

תשובה 2: אפשר לשער שהתוצאה תהיה זהה לשאלה הקודמת אבל:

$$P(\text{20 ״עץ״ ב-40 הטלות}) = \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 0.1254\,.$$

לפי חוק המספרים הגדולים מספר ״עץ״ ומספר ״לפי״ יהיו ״בערך״ שווים [11, Section 8.4], אבל הסיכוי נמוך מאוד שיהיו שווים בדיוק, והסיכוי לאירוע זה הופך להיות קטן יותר ככל שמספר ההטלות גדל.

סימולציה

```
Probability of 10 heads for  20 tosses = 0.1762
Proportion  of 10 heads for  20 tosses = 0.1790
Probability of 20 heads for  40 tosses = 0.1254
Proportion  of 20 heads for  40 tosses = 0.1212
Probability of 50 heads for 100 tosses = 0.0796
Proportion  of 50 heads for 100 tosses = 0.0785
```

19. Isaac Newton עוזר ל-Samuel Pepys Isaac Newton helps Samuel Pepys^S

1 מה ההסתברות לקבל **לפחות** 6 **אחד** כאשר מטילים 6 קוביות.

שאלה 2: מה ההסתברות לקבל **לפחות שני** 6 כאשר מטילים 12 קוביות.

שאלה 3: פתח נוסחה להסתברות לקבל לפחות n 6 כאשר מטילים $6n$ קוביות.

פתרון

תשובה 1: ההסתברות היא המשלים להסתברות לקבל אפס 6 ב-6 הטלות, שהיא המכפלה של לקבל מספר שונה מ-6 בכל ההטלות:

$$P(\text{לפחות 6 אחד}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.6651\,.$$

תשובה 2: ההסתברות היא המשלים להסתברות לקבל אפס או אחד 6 ב-12 הטלות:

$$P(\text{לפחות שני 6}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - \binom{12}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 0.6187\,.$$

לאירוע זה הסתברות קטנה יותר מהאירוע הקודם.

תשובה 3: ההסתברות היא המשלים להסתברות לקבל פחות מ-n 6 ב-$6n$ הטלות:

$$\begin{aligned} P(\text{לפחות } n \text{ 6}) &= 1 - \binom{6n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{6n-0} - \binom{6n}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{6n-1} - \cdots \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{n-1}\binom{6n}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{6n-i}\,. \end{aligned}$$

סימולציה

```
For   6 dice to throw  1 sixes:
Probability = 0.6651
Proportion  = 0.6566
For  12 dice to throw  2 sixes:
Probability = 0.6187
Proportion  = 0.6220
```

```
For  18 dice to throw  3 sixes:
Probability = 0.5973
Proportion  = 0.5949
For  96 dice to throw 16 sixes:
Probability = 0.5424
Proportion  = 0.5425
For 360 dice to throw 60 sixes:
Probability = 0.5219
Proportion  = 0.5250
```

20. דו-קרב משולש (The three-cornered duel)^S

A, B, C מנהלות סדרה של קרבות בזוגות. לכל אחת הסתברות קבועה לנצח ללא קשר לזהות היריבה:

$$P(A) = 0.3, \quad P(B) = 1, \quad P(C) = 0.5\,.$$

מי שנפגעת לא ממשיכה להשתתף בקרבות. יורים את היריות בסדר קבוע A, B, C. אם שתי יריבות עדיין עומדות, היורה יכולה להחליט למי היא יורה. אפשר להניח שכל אחת מקבלת החלטה מיטבית נגד מי לירות.

שאלה 1: מה האסטרטגיה המיטבית של A?

שאלה 2: נניח ש-A יורה את היריה הראשונה באוויר. האם זו אסטרטגיה טובה יותר?

רמז: חשב את ההסתברויות המותנות של A לנצח בתלות בהחלטתה אל מי לירות קודם B או C.

פתרון

סימון: $X \xrightarrow{H} Y$ מסמן ש-X יורה לעבר Y ופוגע. $X \xrightarrow{M} Y$ מסמן ש-X יורה לעבר Y ומחטיא.

תשובה 1: חשב את ההסתברויות המותנות ש-A תנצח.

מקרה 1: A בוחרת לירות את היריה הראשונה לעבר C.

אם $A \xrightarrow{M} C$ (הסתברות 0.7) אזי $B \xrightarrow{H} C$ כי C היא מסוכנת יותר מ-A. כעת A יורה שוב לעבר B עם הסתברות 0.3 לפגוע, אבל אם A מחטיאה, $B \xrightarrow{H} A$ בהסתברות 1 ו-A מפסידה.

אם $A \xrightarrow{H} C$ (הסתברות 0.3) אזי $B \xrightarrow{H} A$ 1 ו-A מפסידה.

חשב את התוחלת עם הערכים 1 כאשר A מנצחת ו-0 כאשר A מפסידה:

$$E(\text{מנצחת } A|C \text{ בוחרת לירות קודם ב- } A) =$$

$$\overbrace{1\cdot(0.7\cdot 0.3)}^{A\xrightarrow{M}C,A\xrightarrow{H}B} + \overbrace{0\cdot(0.7\cdot 0.7\cdot 1)}^{A\xrightarrow{M}C,A\xrightarrow{M}B,B\xrightarrow{H}A} + \overbrace{0\cdot(0.3\cdot 1)}^{A\xrightarrow{M}C,B\xrightarrow{H}A} = 0.2100\,.$$

מקרה 2: A בוחרת לירות את היריה הראשונה לעבר B.

אם $A \xrightarrow{M} B$ (הסתברות 0.7), אזי כמו במקרה הקודם $B \xrightarrow{H} C$ ול-A הזדמנות אחת נוספת לפגוע ב-B (הסתברות 0.3), אחרת $B \xrightarrow{H} A$ בהסתברות 1 ו-A מפסידה.

אם $A \xrightarrow{H} B$ (הסתברות 0.3) אזי A, C יורות לסירוגין אחת לעבר השנייה עד שאחת נפגעת. התסריטים האפשריים הם:

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad C \xrightarrow{H} A\\
&(2)\quad C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{H} C\\
&(3)\quad C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{H} A\\
&(4)\quad C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{H} C\\
&(5)\quad C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{H} A\\
&(6)\quad C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{H} C\\
&\qquad \ldots
\end{aligned}
$$

ההסתברות ש-A מנצחת כי היא פוגעת ב-C בסופו של דבר היא סכום ההסתברויות של הסתריטים הזוגיים ברשימה:

$$
\begin{aligned}
P(\text{מנצחת } A\ |B \text{ ב- פוגעת } A) &= (0.5\cdot 0.3)+\\
&\ (0.5\cdot 0.7)(0.5\cdot 0.3)+\\
&\ (0.5\cdot 0.7)(0.5\cdot 0.7)(0.5\cdot 0.3)+\cdots\\
&= 0.15\sum_{i=0}^{\infty}0.35^i = \frac{0.15}{1-0.35} = \frac{3}{13} \approx 0.2308\,.
\end{aligned}
$$

באופן דומה, ההסתברות ש-C מנצחת היא $\frac{0.5}{1-0.35} = \frac{1}{13} \approx 0.0760$.

התוחלת היא:

$$
E(\text{מנצחת } A) = E(\text{מנצחת } A \mid B \text{ מחטיאה את } A) + E(\text{מנצחת } A \mid B \text{ פוגעת ב- } A) =
$$

$$
\overbrace{1\cdot(0.7\cdot 1\cdot 0.3)}^{A\xrightarrow{M}B,B\xrightarrow{H}C,A\xrightarrow{H}B} + \overbrace{0\cdot(0.7\cdot 1\cdot 0.7\cdot 1)}^{A\xrightarrow{M}B,B\xrightarrow{H}C,A\xrightarrow{M}B,B\xrightarrow{H}A} +
$$

$$
\overbrace{1\cdot(0.2308)}^{A\xrightarrow{H}B,C\overset{H}{\longleftrightarrow}{*}A,C\xrightarrow{H}A} + \overbrace{0\cdot(0.3\cdot(0.0769))}^{A\xrightarrow{H}B,C\overset{H}{\longleftrightarrow}A,C\xrightarrow{H}A} \approx 0.2792\,,
$$

שהיא גבוהה יותר מהתוחלת לנצח על ידי ירי תחילה לעבר C.

תשובה 2: אם A יורה לאוויר ולא פוגעת באף יריבה אזי $B \xrightarrow{H} C$ בהסתברות 1 ו-A יכולה לנסות לפגוע ב-B בהסתברות 0.3. התוחלת היא:

$$
E(\text{מנצחת } A \mid \text{יורה באוויר } A) = 1\cdot(0.3) + 0\cdot(0.7) = 0.3\,,
$$

שהיא גבוהה יותר מהתוחלת של שתי האסטרטגיות האחרות!

סימולציה

```
For A fires first at C:
```

```
Expectation of wins = 0.2100
Average wins        = 0.2138
For A fires first at B:
Expectation of wins = 0.2792
Average wins        = 0.2754
For A fires in the air:
Expectation of wins = 0.3000
Average wins        = 0.3000
```

21. לדגום עם או בלי החזרות? (Should you sample with or without replacement?)^{D,S}

בכד A נמצאים 2 כדורים אדומים ו-1 כדור ירוק, ובכד B נמצאים 101 כדורים אדומים ו-100 כדורים ירוקים. בחר כד אחד בצורה אקראי ושלוף שני כדורים באופן אקראי מהכד שנבחר. אתה מנצח אם אתה מזהה נכון אם כדורים נשלפו מכד A או כד B.

חשב את ההסתברויות לניצחון של כל אחד מהחוקים שלהן וקבע איזה חוק נותן את ההסתברות הגבוהה ביותר לניצחון.

שאלה 1: אתה מחזיר את הכדור הראשון לפני השליפה השנייה.

שאלה 2: אתה לא מחזיר את הכדור הראשון לפני השליפה השנייה.

שאלה 3: לאחר נשלף הכדור הראשון אתה יכול להחליט אם להחזיר אותו או לא.

רמז: כאשר מחשבים הסתברויות:

$$\frac{101}{201} \approx \frac{100}{201} \approx \frac{100}{200} \approx \frac{1}{2}\,.$$

פתרון

יש ארבע תוצאות שנסמן RR, RG, GR, GG. לכל אחד מהחוקים נחשב את ההסתברויות המתנות של ארבעת התוצאות תלוי בזהות הכד A או B שנבחר תחילה. אחר כך נכפיל את ההסתברויות ב-$1/2$ כדי לקחת בחשבון את הבחירה האקראית של הכד.

תשובה 1: שליפה עם החזרה:

$$\begin{array}{rcccc}
P(RR|A) & = & \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} & = & \frac{4}{9}\\
P(RR|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4}\\
\hline
P(RG|A) & = & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} & = & \frac{2}{9}\\
P(RG|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4}\\
\hline
P(GR|A) & = & \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} & = & \frac{2}{9}\\
P(GR|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4}\\
\hline
P(GG|A) & = & \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} & = & \frac{1}{9}\\
P(GG|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4}
\end{array}$$

אם התוצאה היא RR ההסתברות שכד A נבחר $(4/9)$ גבוהה מהסתברות שכד B נבחר $(1/4)$; אחרת, ההסתברות ש-B נבחר גבוהה יותר. לכן:

$$P(\text{ניצחון}) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = \frac{43}{72} \approx 0.5972\,.$$

תשובה 2: שליפה ללא החזרה:

$$\begin{array}{rcccc}
P(RR|A) & = & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{3} \\
P(RR|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4} \\
\hline
P(RG|A) & = & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{3} \\
P(RG|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4} \\
\hline
P(GR|A) & = & \frac{1}{3}\cdot 1 & = & \frac{1}{3} \\
P(GR|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4} \\
\hline
P(GG|A) & = & \frac{1}{3}\cdot 0 & = & 0 \\
P(GG|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4}
\end{array}$$

אם התוצאה היא GG ההסתברות שכד B נבחר גבוהה יותר (כמובן!) מההסתברות שכד A נבחר; אחרת, ההסתברות שכד A נבחר גבוהה יותר. לכן:

$$P(\mathrm{win}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8} = 0.6250\,,$$

שהיא גבוהה יותר מההסתברות לניצחון כאשר שליפה היא עם החזרה.

תשובה 3: ההחלטה נעשית על סמך התוצאות מהשליפה הראשונה.

אם השליפה הראשונה היא מכד A ההסתברויות חייבות להיות מותנות בהחלטה להחזיר או לא. שליפה הראשונה היא מכד B לא משפיעה על ההסתברויות בגלל הקירוב ברמז.

$$\begin{array}{lcccc}
P(RR|A,w) & = & \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} & = & \frac{4}{9} \\
P(RR|A,w/o) & = & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{3} \\
P(RR|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4} \\
\hline
P(RG|A,w) & = & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} & = & \frac{2}{9} \\
P(RG|A,w/o) & = & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{3} \\
P(RG|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4} \\
\hline
P(GR|A,w) & = & \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} & = & \frac{2}{9} \\
P(GR|A,w/o) & = & \frac{1}{3}\cdot 1 & = & \frac{1}{3} \\
P(GR|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4} \\
\hline
P(GG|A,w) & = & \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} & = & \frac{1}{9} \\
P(GG|A,w/o) & = & \frac{1}{3}\cdot 0 & = & 0 \\
P(GG|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4}
\end{array}$$

אם כדור אדום נשלף ראשונה אזי $\frac{4}{9} > \frac{1}{4}$ ו-$\frac{2}{9} < \frac{1}{4}$ עם החזרה, לעומת $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ ו-$\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ ללא החזרה, לכן הכדור השני יכול לעזור בזיהוי הכד רק אם השליפה נעשית **עם** החזרה: אם אדום כד A ואם ירוק כד B. נבחר שליפה עם החזרה ו:

$$P(\text{ניצחון אם אדום ראשון}) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{72}\,.$$

אם כדור ירוק נשלף ראשון אזי $\frac{2}{9} < \frac{1}{4}$ ו-$\frac{1}{9} < \frac{1}{4}$ עם החזרה, לעומת $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ ו-$0 < \frac{1}{4}$ ללא החזרה, לכן הכדור השני יכול לעזור בזיהוי הכד רק אם השליפה נעשית **בלי** החזרה ו:

$$P(\text{ניצחון אם ירוק ראשון}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{24}\,.$$

ההסתברות לניצחון היא:

$$P(\text{ניצחון}) = \frac{25}{72}+\frac{7}{24} = \frac{23}{36} \approx 0.6389\,.$$

ההסתברות הגבוהה ביותר לניצחון מתקבלת כאשר ההחלטה לשלוף עם או בלי החזרה מתקבל בהתאם לתוצאה של השליפה הראשונה.

סימולציה

```
With replacement:
Expectation of winning = 0.5972
Average wins           = 0.5976
Without replacement:
Expectation of winning = 0.6250
Average wins           = 0.6207
Decide after first draw:
Expectation of winning = 0.6389
Average wins           = 0.6379
```

22. הקלפי (The ballot box)^S

שתי מועמדות A ו-B מתמודדות בבחירות. A קיבלה a קולות ו-B קיבלה b קולות, $a > b$. הקולות נספרים אחד-אחד וסכומי הביניים $(a_i, b_i), 1 \le i \le a+b$ מתעדכנים לאחר ספירת כל קול. מה ההסתברות שעבור לפחות i אחד, $a_i = b_i$?

שאלה 1: פתור עבור $a=3, b=2$ על ידי הכנת רשימה (a_i, b_i) עבור $1 \le i \le 5$.

שאלה 2: פתור עבור כל $a > b$.

רמז 1: מה ניתן להגיד על זהות המועמדת שמובילה עד לתיקו **ראשון**?

Hint 2: מה החשיבות של הקול הראשון שנספר.

פתרון

תשובה 1: מספר הדרכים לסדר את סכומי הביניים הוא $10 = \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$ כי המיקום הקולות עבור מועמדת אחת קובע את מיקום הקולות של המועמדת השנייה. בטבלה שלהלן רשומים הסידורים האפשריים של הקולות וסכומי הביניים כאשר התיקו הראשון מודגש:

$A\ A\ A\ B\ B$	$(1,0)$	$(2,0)$	$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$A\ A\ B\ A\ B$	$(1,0)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$A\ B\ A\ A\ B$	$(1,0)$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$B\ A\ A\ A\ B$	$(0,1)$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$A\ A\ B\ B\ A$	$(1,0)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(\mathbf{2},\mathbf{2})$	$(3,2)$
$A\ B\ A\ B\ A$	$(1,0)$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,2)$
$B\ A\ A\ B\ A$	$(0,1)$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,2)$
$A\ B\ B\ A\ A$	$(1,0)$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(1,2)$	$(2,2)$	$(3,2)$
$B\ A\ B\ A\ A$	$(0,1)$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(1,2)$	$(2,2)$	$(3,2)$
$B\ B\ A\ A\ A$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,2)$	$(\mathbf{2},\mathbf{2})$	$(3,2)$

קיימים מצבי תיקו בכל הסידורים פרט לשני הראשונים ולכן:

$$P(\text{קיים תיקו עם } (3,2) \text{ קולות}) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}\,.$$

תשובה 2: נתחיל את הפתרון עם דיון איך לגשת לפתרון של השאלה השנייה. הנה מספר סידורים עבור $(a,b) = (3,2)$ עד לקבלת **התיקו הראשון**:

A leads until tie	B leads until tie
$A\ B$	$B\ A$
$A\ A\ B\ B$	$B\ B\ A\ A$

לכל סידור בו A מובילה עד לתיקו הראשון, קיים סידור שהוא תמונת ראי בו B מובילה עד לקבלת התיקו הראשון. השיקוף מתקבל על ידי החלפת כל A ב-B ולהפך.

לפני התיקו הראשון אחת מהמועמדות חייבת להוביל. אם הקול הראשון שנספר הוא עבור B חייב להיות תיקו בהמשך הספירה כי $a > b$.

ההסתברות שהקול הראשון היא עבור B היא:

$$P(\text{קול ראשון עבור } B) = \frac{b}{a+b}\,.$$

על ידי שיקוף המיקומים של הקולות, מספר הסידורים שמובילים לתיקו שמתחילים בקול עבור A שווה למספר הסידורים שמובילים לתיקו שמתחילים בקול עבור B. לכן:

$$P(\text{קיים תיקו}) = 2 \cdot \frac{b}{a+b}\,.$$

בדיקה:

$$P(\text{קיים תיקו עם } (3,2) \text{ קולות}) = 2 \cdot \frac{2}{2+3} = \frac{4}{5}\,.$$

סימולציה

```
For a =  3, b =  2:
Probability of a tie = 0.8000
Proportion of ties   = 0.8118
For a = 10, b =  8:
Probability of a tie = 0.8889
Proportion of ties   = 0.8977
For a = 20, b = 18:
Probability of a tie = 0.9474
Proportion of ties   = 0.9354
```

23. תיקו בהשוואת מטבעות (Ties in matching pennies)^{D,S}

הטל זוג מטבעות הוגנות N פעמים עבור N זוג, ורשום את מספר הפעמים שהזוגיות היא זוגי (עץ-עץ או פלי-פלי) ומספר הפעמים שהזוגיות היא אי-זוגי (עץ-פלי או פלי-עץ). מה ההסתברות לקבל תיקו (לא כולל התיקו $0-0$ בהתחלה)?

שאלה 1: פתור עבור $N = 4$ על ידי רישום כל התוצאות האפשריות.

שאלה 2: פתור עבור $N = 6$ על ידי פיתוח נוסחה להסתברות.

שאלה 3: פתח נוסחה עבור כל N זוגי.

שאלה 4: הסבר מדוע ההסתברות למספר אי-זוגי $N + 1$ שווה להסתברות של המספר הזוגי N.

רמז: השתמש בפתרון לבעיה 22.

פתרון

תשובה 1: נסמן את ההטלות עם זוגיות זוגי ב-E וההטלות עם זוגיות אי-זוגי ב-O. בעשרה מתוך שש עשרה סידורי ההטלות יש תיקו (מודגש):

EOOO	**EOOE**	**EOEO**	**EOEE**	**EEOO**	EEOE	EEEO	EEEE
OOOO	OOOE	OOEO	**OOEE**	**OEOO**	**OEOE**	**OEEO**	**OEEE**

תשובה 2: לפי בעיה 22:

$$P(i \text{ תיקו בהטלה}) = \begin{cases} 2i/N & \text{if } i \leq N/2 \\ 2(N-i)/N & \text{if } i \geq N/2\,, \end{cases} \tag{13}$$

כי בבעיית הקלפי ראינו שהערך הנמוך יותר קובע את ההסתברות.

החישובים שלהלן די מסובכים לכן נצדיק כל חישוב לפרטים.

ההסתברות ל-i זוגיים ניתן על ידי ההתפלגות הבינומית:

$$P(i \text{ זוגיים}) = \binom{N}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-i} = \binom{N}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{N} = 2^{-N}\binom{N}{i}\,. \tag{14}$$

ההסתברות לתיקו היא הסכום מעל i של ההסתברות לקבל i זוגיים כפול ההסתברות לתיקו בהטלה ה-i (משוואה 13). For $N = 6$:

$$P(\text{ties}) = 2 \cdot 2^{-6} \left[\frac{0}{6}\binom{6}{0} + \frac{1}{6}\binom{6}{1} + \frac{2}{6}\binom{6}{2} + \frac{3}{6}\binom{6}{3} + \frac{2}{6}\binom{6}{4} + \frac{1}{6}\binom{6}{5} + \frac{0}{6}\binom{6}{6} \right] . \tag{15}$$

משוואה 16 נובעת ממשוואה 15 על ידי השמטת שני הגורמים שהם אפס, כתיבת ה combination??? עם עצרת, צימצום $1/6$ מ-$6!$:

$$P(\text{ties}) = 2^{-5} \left[1 \cdot \frac{5!}{1!5!} + 2 \cdot \frac{5!}{2!4!} + 3 \cdot \frac{5!}{3!3!} + 2 \cdot \frac{5!}{4!2!} + 1 \cdot \frac{5!}{5!1!} \right] . \tag{16}$$

משוואה 17 מתקבלת מצימצום i מ-$i!$:

$$P(\text{ties}) = 2^{-5} \left[\frac{5!}{1!5!} + \frac{5!}{1!4!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{5!1!} \right] . \tag{17}$$

כדי לקבל משוואה 18 ממשוואה 17 חבר וחסר $\frac{5!}{3!2!}$:

$$P(\text{ties}) = 2^{-5} \left[\left(\frac{5!}{1!5!} + \frac{5!}{1!4!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{5!1!} \right) - \frac{5!}{3!2!} \right] . \tag{18}$$

משוואה 19 מתקבלת על ידי הצבת $0!$ במקום $1!$:

$$P(\text{ties}) = 2^{-5} \left[\left(\frac{5!}{0!5!} + \frac{5!}{1!4!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{5!0!} \right) - \frac{5!}{3!2!} \right] . \tag{19}$$

נבטא בחזרה את הביטוי עם עצרת ל combinations ונקבל את המשוואה 20 :

$$P(\text{ties}) = 2^{-5} \left[\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} - \binom{5}{3} \right] . \tag{20}$$

לבסוף, מהוואה 21 מתקבלת ממשפט הבינום :

$$P(\text{ties}) = 2^{-5} \left(2^5 - 10 \right) = \frac{11}{16} \approx 0.6875 . \tag{21}$$

תשובה 3: חשב את אותם חישובים כמו ב**תשובה 2:** עם N שרירותי. התוצאה היא :

$$P(\text{ties}) = 2^{-N+1} \left[2^{N-1} - \binom{N-1}{N/2} \right] = \left[1 - \binom{N-1}{N/2} \Big/ 2^{N-1} \right] .$$

תשובה 4: התיקו הראשון בהטלה ה-$N+1$ מתרחש רק עם הספירה כמעט זהות לאחר ההטלה ה-N :

$$\begin{array}{l} ((N/2) - 1, (N/2) + 1) \\ ((N/2), (N/2)) \\ ((N/2) + 1, (N/2) - 1) \end{array}$$

אבל ללא תלות התוצאת ההטלה הסופית הספירות לא יהיו שוות.

סימולציה

```
For  4 tosses:
Probability of ties = 0.6250
Proportion of ties  = 0.6192
For  6 tosses:
Probability of ties = 0.6875
Proportion of ties  = 0.6900
For  7 tosses:
Probability of ties = 0.6875
Proportion of ties  = 0.6811
For 10 tosses:
Probability of ties = 0.7539
Proportion of ties  = 0.7559
For 20 tosses:
Probability of ties = 0.8238
Proportion of ties  = 0.8255
```

25. אורכים של מיתרים אקראיים (Lengths of random chords)^S

בחר מיתר אקראי במעגל היחידה. מה ההסתברות שאורכו של המיתר גדול מ-1?

כדי לפתור את הבעיה עליך להחליט איך לבחור מיתר אקראי. פתור את הבעיה עבור מהאפשרויות שלהלן:

שאלה 1: התפלגות אחידה של מרחק המיתר מהמרכז המעגל.

שאלה 2: התפלגות אחידה של הנקודה האמצעית של המיתר בתוך המעגל.

שאלה 3: התפלגות נקודות הקצה של המיתר על היקף המעגל.

פתרון

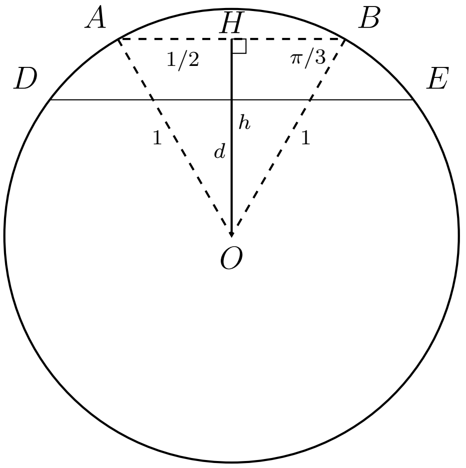
תשובה 1: מיתר ארוך יותר מהרדיוס אם הוא קרוב יותר למרכז ממיתר באורך 1. יהי $\overline{AB}$ מיתר באורך 1 ובנה גובה $\overline{OH}$ מהמרכז O אל המיתר (איור איור 4(א)). בגלל $\triangle AOB$ שווי-צלעות, $\triangle OHB$ הוא משולש ישר-זווית ואורכו של הגובה הוא:

$$h = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

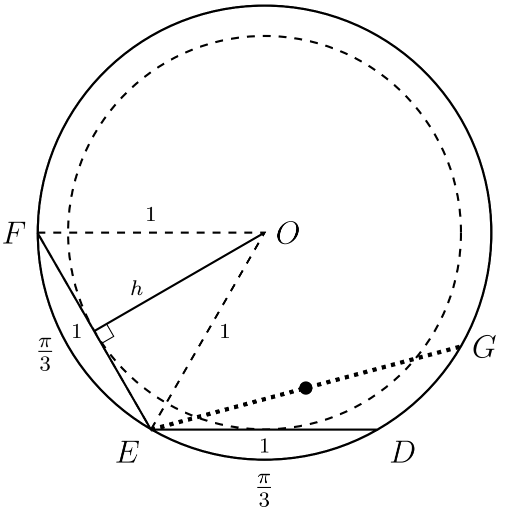
יהי d המרחק של המיתר $\overline{DE}$ מהמרכז. לפי ההנחה ההתפלגות של d אחידה ב-$(0,1)$ ולכן:

$$P(\overline{DE} > 1) = P(d < h) = \frac{h}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866\,.$$

תשובה 2: בנה מעגל עם מרכז O ורדיוס h כאשר h הוא אורכו של גובה לגובה למיתר באורך 1. משיק לכל נקודה על המעגל יהיה המיתר $\overline{FE}$ שאורכו 1. אורכו של כל מיתר $\overline{EG}$ שנקודת האמצע שלו נמצאת



איור 4(א) מרחק של מיתר מהמרכז בפילוג מ-$(0,1)$



איור 4(ב) נקודת האמצע של מיתר עם פילוג בתוך מעגל וקצות המיתר בפילוג בהיקף

בתוך המעגל יהיה גדול מ-1 (איור איור 4(ב)). לכן ההסתברות שאורכו של מיתר גדול מ-1 היא היחס בין השטחים של שני המעגלים:

$$P(\overline{EG} > 1) = \frac{\pi \cdot h^2}{\pi \cdot 1^2} = h^2 = \frac{3}{4}\,.$$

הסתברות זו היא הריבוע של ההסתברות שחישבנו בשאלה הקודמת.

תשובה 3: בנקודה שרירותית על ההיקף של מעגל היחידה (E באיור איור 4(ב)). כל נקודה אחרת על ההיקף (כגון G באיור) מגדירה מיתר שאורכו גדול באחד אלא אם הנקודה שנבחרה נופל על הקשתות $\widehat{EF}$ או $\widehat{ED}$. לכן ההסתברות היא היחס בין הקשת $\widehat{FD}$ להיקף המעגל:

$$P(\overline{EG} > 1) = \frac{(2\pi - (2\pi/3)) \cdot 1}{2\pi \cdot 1} = \frac{2}{3}\,.$$

סימולציה הסימולציה היא עבור בחירת שתי נקודות על ההיקף.

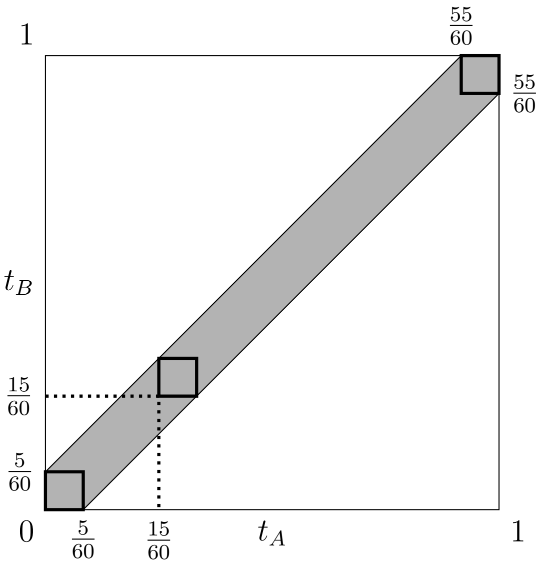
```
Probability of long chords = 0.6667
Proportion of long chords  = 0.6627
```

26. ממהרים לדו-קרב (The hurried duelers)^S

A ו-B מגיעים לנקודת מפגש בזמן אקראי עם התלפגות אחידה בתוך פרק זמן של שעה. אם A מגיע קודם ו-B לא מגיע במשך 5 דקות, A עוזב. באופן דומה אם B מגיע קודם ו-A לא מגיע במשך 5 דקות, B עוזב. מה ההסתברות שהם יפגשו?

בפרק הזמן של שעה הזמן הוא **רציף** בתחום $[0,1]$, כלומר, אי-אפשר **לספור** מספר בדיד של דקות או שניות כדי לחשב הסתברויות. כן ניתן לחשב הסתברויות של **פרקי זמן**.

רמז: צייר גרף כאשר ציר ה-x הוא זמן הגעתו של A וציר ה-y הוא זמן הגעתו של B.



איור 5: זמנים המבטיחים מפגש בין A ל-B

פתרון

ללא הגבלת הכלליות הנח ש-A מגיע קודם. אם A מגיע ב-$t_A = 0$ ואם B מגיע לפני $t_B = 5/60$ הם נפגשים, אחרת אין הם נפגשים. מצב זה מוצג באיור 5 על ידי ריבוע קטן בראשית הצירים. אם A מגיע יותר מאוחר אזי גם B חייב להגיע באותו איחור; למשל, אם A מגיע ב-$t_A = 15$, B חייב להגיע בין $t_B = 15$ ו-$t_B = 20$. לכן הפגישה תתקיים בריבוע המתקבל על ידי הזזת הריבוע ב-15 מ-$(0,0)$ ל-$(15/60, 15/60)$.

ההסתברות לפגישה היא היחס בין השטח האפור בגרף לשטח הריבוע הגדול. קל יותר לחשב את המשלים שהוא היחס בין שטח המשולשים הלבנים לשטח הריבוע הגדול:

$$\begin{aligned} P(A,B \text{ נפגשים}) &= 1 - P(A,B \text{ לא נפגשים}) \\ &= 1 - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{55}{60}\cdot\frac{55}{60}\right) = \frac{23}{144} \approx 0.1597\,. \end{aligned}$$

סימולציה

```
Probability of meeting   = 0.1597
Proportion of meetings   = 0.1549
```

27. לתפוס את הזייפן הזהיר (Catching the cautious counterfeiter)^S

נתון n קופסאות ובכל אחת n מטבעות כאשר מטבע אחד בכל קופסה מזויף. שלוף מטבע אחד מכל קופסה ובדוק אם הוא מזויף או אמיתי. מה ההסתברות שכל המטבעות שנשלפות מזויפים?

שאלה 1: פתור עבור $n = 10$.

שאלה 2: פתור עבור $n = 100$.

שאלה 3: פתור עבור n שרירותי.

שאלה 4: פתח נוסחה עבור ההסתברות כאשר n שואב לאיסוף.

פתרון

השליפות בלתי תלויות ולכן ההסתברות היא מכפלת ההסתברות של כל שליפה.

תשובה 1:

$$P(\text{כל המטבעות אמיתיים}) = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = 0.3487\,.$$

תשובה 2:

$$P(\text{כל המטבעות אמיתיים}) = \left(\frac{99}{100}\right)^{100} = 0.3660\,.$$

תשובה 3:

$$P(\text{כל המטבעות אמיתיים}) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\,.$$

תשובה 4:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e}\,. \tag{22}$$

ניתן להוכיח את הגבול בעזרת חשבון דיפרנציאלי. תחילה ניתן לחשב את הגבול של הלוגריתם של הצד השמולי של משוואה 22:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1/n}\,.$$

אם נחשב את הגבול נקבל $(ln\ 1)/0 = 0/0$ אבל לפי חוק l'Hôpital נוכל להחליף את הביטוי בחילוק הנגזרות:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}(-(-n^{-2}))}{-n^{-2}} = -1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = e^{-1} \approx 0.3679\,.$$

סימולציה

```
For  10 boxes:
Probability of all real = 0.3487
Proportion all real     = 0.3480
For 100 boxes:
Probability of all real = 0.3660
Proportion all real     = 0.3730
For 200 boxes:
Probability of all real = 0.3670
Proportion all real     = 0.3690
```

28. לתפוס את הזייפן החמדן (Catching the greedy counterfeiter)^S

נתון n קופסאות ובכל אחת n מטבעות מהם m מזוייפים. שלוף מטבע אחת מכל קופסה ובדוק אם הוא מזויף או אמיתי. מה ההסתברות $P(n,m,r)$ ש-r מתוך המטבעות הם מזוייפים?

שאלה 1: פתח נוסחה עבור $P(n,m,r)$.

שאלה 2: חשב $P(20,10,2), P(20,10,8), P(20,5,2), P(20,5,4)$.

פתרון

תשובה 1: יש $\binom{n}{r}$ אוספים של קופסאות מהן המטבעות המזוייפים נשלפו. מההתפלגות הבינומית:

$$P(n,m,r) = \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^r\left(\frac{n-m}{n}\right)^{n-r}.$$

תשובה 2:

$$\begin{aligned}
P(20,10,2) &= \binom{20}{2}\left(\frac{10}{20}\right)^2\left(\frac{10}{20}\right)^{18} \approx 0.0002\\
P(20,10,8) &= \binom{20}{8}\left(\frac{10}{20}\right)^8\left(\frac{10}{20}\right)^{12} \approx 0.1201\\
P(20,5,2) &= \binom{20}{2}\left(\frac{5}{20}\right)^2\left(\frac{15}{20}\right)^{18} \approx 0.0669\\
P(20,5,4) &= \binom{20}{4}\left(\frac{5}{20}\right)^4\left(\frac{15}{20}\right)^{12} \approx 0.1952\,.
\end{aligned}$$

Mosteller מראה שעבור m, r נתונים, כאשר n שואף לאינסוף:

$$\lim_{n\to\infty} P(n,m,r) = \frac{e^{-m}m^r}{r!}\,. \tag{23}$$

סימולציה

```
For 10 bad coins,  2 draws:
Probability of counterfeit  = 0.0002
Proportion counterfeit      = 0.0002
For 10 bad coins,  8 draws:
Probability of counterfeit  = 0.1201
Proportion counterfeit      = 0.1181
For  5 bad coins,  2 draws:
Probability of counterfeit  = 0.0669
Proportion counterfeit      = 0.0688
For  5 bad coins,  4 draws:
Probability of counterfeit  = 0.1897
Proportion counterfeit      = 0.1905
```

29. עובש בג'לטין (Moldy gelatin)^S

נתון לוח מלבני שמחולק ל-n משבצות ריבועיות קטנות. בכל משבצת יש r חיידקים בממוצע.

שאלה 1: פתח נוסחה להסתברות שיש בדיוק r חיידקים ב-n המשבצות.

שאלה 2: חשב את ההסתברות עבור $n = 100, r = 3$.

רמז: בעיה זו דומה לבעיה 28.

פתרון

תשובה 1: תהי p ההסתברות שבמשבצת אחת נמצא חידק. (ניתן להתעלם מהאפשרות חידק את מוכל באופן חלקי בשתי משבצות או יותר.) m, המספר הממוצע של חיידקים במשבצת, היא מספר המשבצות n כפול ההסברות p שחידק נמצא במשבצת. $P(n, m, r)$, ההסתברות שיש בדיוק r חיידקים ב-n משבצות ניתנת על ידי ההתפלגות הבינומית:

$$P(n,m,r) = \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^r\left(\frac{n-m}{n}\right)^{n-r} .$$

תשובה 2:

$$P(10,3,3) = \binom{100}{3}\left(\frac{3}{100}\right)^3\left(\frac{97}{100}\right)^{97} \approx 0.2275 .$$

משוואה 23 מתאים גם כאן ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} P(n,3,3) = \frac{e^{-3}\cdot 3^3}{3!} \approx 0.2240 .$$

סימולציה

```
For  20 squares:
Probability of exactly  3 microbes  = 0.2428
Proportion of exactly   3 microbes  = 0.2436
Probability of exactly  5 microbes  = 0.2023
Proportion of exactly   5 microbes  = 0.1954
For 100 squares:
Probability of exactly  3 microbes  = 0.2275
Proportion of exactly   3 microbes  = 0.2247
Probability of exactly  5 microbes  = 0.1800
Proportion of exactly   5 microbes  = 0.1851
```

31. ימי הולדת זהים (Birthday pairings)^S

בחר באקראי 23 אנשים ושאל כל אחד ליום ההולדת שלו. הנח התפלגות אחידה של 365 ימי ההולדת השונים (אף אחד לא נולד ב-29 לפברואר). הראה שההסתברות שלפחות שניים מהם יהיו יום הולדת זהה היא גדולה מ-0.5.

פתרון

נחשב את ההסתברות ש-**אף אחד** מה-23 אין ימי הולדת זהים ונראה שהיא פחות מ-0.5. בחר יום הולדת ראשון בצורה אקראית, את יום ההולדת הבא בחר מתוך שאר הימים, את יום ההולדת הבא בחר מתוך שאר הימים, כך הלאה:

$$\begin{aligned}
P(\text{אין זוג עם ימי הולדת זהים}) &= \overbrace{\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\;\cdots\;\cdot\frac{344}{365}\cdot\frac{343}{365}}^{23\text{ fractions}}\\
&= \frac{365!}{365^{23}\cdot 342!}\approx 0.4927\,.
\end{aligned}$$

רוב האנשים מנחשים שצריכים יותר מ-23 כדי למוצא שניים עם ימי הולדת זהים.

מחשבון מודרני מסוגל לחשב את ההסתברות, אבל שווה לחשבה באמצעות הקירוב של Stirling שהוא $\ln n! \approx n\ln n - n$:

$$\begin{aligned}
\ln P(\text{אין זוג עם ימי הולדת זהים}) &= \ln\left(\frac{365!}{342!\cdot 365^{23}}\right) = \ln 365! - \ln 342! - 23\ln 365\\
&\approx (365\ln 365 - 365) - (342\ln 342 - 342) - 23\,\ln 365\\
&\approx -0.7404\\
P(\text{אין זוג עם ימי הולדת זהים}) &\approx e^{-0.7404} = 0.4769\,.
\end{aligned}$$

הקורא מוזמן לחשב את ההסתברות עם הקירוב המדוייק יותר:

$$\ln n! \approx n\ln n - n + \frac{1}{6}\left(8n^3 + 4n^2 + n + \frac{1}{30}\right) + \frac{1}{2}\ln\pi\,.$$

סימולציה

```
For 21 people:
Expectation of no pairs = 0.5563
Average no pairs        = 0.5497
For 22 people:
Expectation of no pairs = 0.5243
Average no pairs        = 0.5237
```

```
For 23 people:
Expectation of no pairs = 0.4927
Average no pairs        = 0.4933
For 24 people:
Expectation of no pairs = 0.4617
Average no pairs        = 0.4576
For 25 people:
Expectation of no pairs = 0.4313
Average no pairs        = 0.4345
```

32. למצוא עמית ליום ההולדת (Finding your birthmate)^S

עמית יום הולדת, בקיצור עמית, הוא אדם עם ביום הולדת זהה לשלך.

מדוע מציאת עמית היא בעיה שונה ממציאת זוג עם ימי הולדת זהים?

שאלה 1: כמה אנשים עליך לשאול כדי שההסתברות למציאת עמית גבוהה מ-0.5?

שאלה 2: פתור את הבעיה על ידי שימוש במשוואה 22 (עמוד 39).

פתרון

להרבה אנשים יכול להיות יום הולדת זהה שנחשב כהצלחה במציאת זוג, אבל לא הצלחה במציאת עמית אלא אם יום ההולדת שלו זהה לשלך.

תשובה 1: מצא את המספר הקטן של אנשים כך ההסתברות שאף אחד מהם הוא עמית היא פחות מ-0.5. ההסתברות שהאדם הראשון שאתה שואל אינו עמית היא $364/365$, אבל זאת גם ההסתברות שהשני, השלילי, ..., אינו עמית. הפתרון הוא ה-k הקטן ביותר כך ש:

$$P(\text{לא נמצא עמית}) = \left(\frac{364}{365}\right)^k < \frac{1}{2}\,,$$

$k = 253$ is which:

$$\left(\frac{364}{365}\right)^{253} \approx 0.4995\,.$$

תשובה 2: משוואה 22 היא:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\,,$$

וניתן להשתמש בה לחשב את ההסתברות:

$$P(\text{לא נמצא עמית}) = \left(\frac{365-1}{365}\right)^k = \left[\left(\frac{364}{365}\right)^{365}\right]^{k/365} \approx e^{-k/365}$$

$$e^{-253/365} \approx 0.5000\,.$$

סימולציה

```
For 251 people:
Probability of no match = 0.5023
Proportion no match     = 0.5120
For 252 people:
Probability of no match = 0.5009
Proportion no match     = 0.5055
For 253 people:
Probability of no match = 0.4995
Proportion no match     = 0.4984
For 254 people:
Probability of no match = 0.4982
Proportion no match     = 0.4987
For 255 people:
Probability of no match = 0.4968
Proportion no match     = 0.5078
```

33. השוואת הבעיות יום הולדת זהה ועמית ליום ההולדת

(Relating the birthday pairings and the birthmate problems)

סמן ב-$P_{\text{זוג}}(r)$ את ההסתברות שמתוך r אנשים לשניים יש יום הולדת זהה (בעיה 31), וב-$P_{\text{עמית}}(n)$ את ההסתברות שמתוך n אנשים לפחות אחד הוא עימית שלך (בעיה 32). נתון r עבור איזה n, $P_{\text{זוג}}(r) \approx P_{\text{עמית}}(n)$?

פתרון 1

הפתרון מבוסס על [7].

סמן ב-$P_{\text{זוג}}(r)$ את המשלים ל-$P_{\text{אין זוג}}(r)$. מהפתרון לבעיית 31 מתקבל:

$$\begin{aligned}
P_{\text{אין זוג}}(r) &= \frac{365}{365}\cdot\frac{365-1}{365}\cdot\frac{365-2}{365}\cdot\;\cdots\;\cdot\frac{365-(r-1)}{365}\\
&= 1\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdot\;\cdots\;\cdot\left(1-\frac{r-1}{365}\right)\\
&\approx 1-\frac{1}{365}-\frac{2}{365}-\cdots-\frac{r-1}{365}\\
&= 1-\frac{1+2+3+\cdots+(r-1)}{365}\\
&= 1-\frac{r(r-1)/2}{365},
\end{aligned}$$

כאשר הקירוב במשוואה השלישית מתקבל מהשמטת חזקות של $1/365$ גדולות מאחת כי הן קטנות מדי להשפיע באופן מהותי על התוצאה.

נסמן ב-$P_{\text{אין עמית}}(n)$ את המשלים ל-$P_{\text{עמית}}(n)$ ונשתמש באותו קירוב. מהפתרון לבעיה 32 נקבל:

$$\begin{aligned} P_{\text{אין עמית}}(n) &= \overbrace{\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{1}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{365}\right)}^{n} \\ &\approx 1-\overbrace{\frac{1}{365}-\frac{1}{365}\cdots-\frac{1}{365}}^{n} \\ &\approx 1-\frac{n}{365} \end{aligned}$$

לכן $P_{\text{אין עמית}}(n) \approx P_{\text{אין זוג}}(r)$ כאשר:

$$n=\frac{r(r-1)}{2}\,.$$

עבור $r=23$, $n=(23\cdot 22)/2=253$.

פתרון 2

Mosteller [7, p. 322] מביא את הפתרון האיטואיטיבי שלהלן:

> כאשר משווים בין בעיית הזוג ובעיית העמית, אנו שמים לב שעבור r אנשים בבעיית הזוג, קיימים $r(r-1)/2$ זוגות או **הזדמנויות** לידי הולדת זהים; לעומת זאת, אם שואלים n בבעיית העמית, קיימות רק n הזדמנויות כדי שאמצא עמית אחד או יותר.

מכאן הוא מסיק ש-$n \approx r(r-1)/2$.

ניתן להבין את הטיעון כך: בבעיית הזוג, בחר תאריך שרירותי ושאל אם לשניים מתוך r **תאריך זה** הוא יום ההולדת שלהם. יש

$$\binom{r}{2}=\frac{r!}{2!(r-2)!}=\frac{r(r-1)}{2}$$

דרכים שזה אפשרי. עבור בעיית העמית, יום ההולדת שלך נתון. יש אפשרות שלכל אחד מתוך n אנשים יש את אותו יום הולדת. על ידי השוואת שני ביטויים נקבל n עבורו $P_{\text{עמית}}(n) \approx P_{\text{זוג}}(r)$.

תוכל להריץ את הסימולציות לבעיות $31, 32$ ולבדוק תוצאה זו.

34. חופש בימי הולדת (Birthday holidays)^{D,S}

בית חרושת נסגר בכל יום שהוא יום הולדת של אחד העובדים. אין חופשות נוספות.

שאלה 1: כמה עובדים כדי להעסיק כדי לקבל את מספר ימי-העבודה המקסימליים בשנה אחת?

שאלה 2: מה התוחלת של היחס בין מספר ימי-העבודה המקסימליים לבין 365^2, מספר ימי-העבודה עם כל אחד מ-365 העובדים עובדים כל יום?

רמז: הוכח שחייב להיות מקסימום על ידי בדיקת מקרי הקצה. אחר כך פתח נוסחה של התוחלת של ימי-העבודה ביום אחד.

פתרון

תשובה 1: בקצה אחד אם יש רק עובד אחד, יהיו 364 ימי-עבודה. אם יש שני עובדים מספר ימי-העבודה הוא $726 = 363 + 363$ (כאשר נתעלם המאפשרות הזניחה שלשניהם אותו יום הולדת). בקצה השני אם יש מיליון עובדים, מספר ימי-העבודה יהיה אפס כמעט בוודאות. אם מספר ימי-העבודה עולה ואחר כך חוזר לאפס, חייב להיות מקסימום בין הקצבות.

כדי לפשט את הסימונים, נסמן את המספר הימים בשנה ב-N ומספר העובדים ב-n.

לכל יום נתון ההסתברות שהוא יום-עבודה היא ההסתברות שלכל עובד יום הולדת בתאריך אחר:

$$P(\text{יום נתון הוא יום עבודה}) = \overbrace{\frac{N-1}{N}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{N-1}{N}}^{n} = \left(1-\frac{1}{N}\right)^{n} .$$

סמן ב-p את $\left(1-\dfrac{1}{N}\right)$. אזי:

$$E(\text{ימי-עבודה ליום נתון}) = n\cdot p^{n} + 0\cdot(1-p^{n}) = np^{n} .$$

לכל ימי השנה אותה תוחלת כך שרק נותר להכפיל ב-N כדי לקבל את התוחלת לשנה:

$$E(\text{ימי-עבודה לשנה}) = Nnp^{n} . \tag{24}$$

כדי למצוא את המקסימום נגזור את משוואה 24 ביחס ל-n ונשמתש ב-$(p^{n})' = p^{n}\ln p$ ניתן להוכיח בעזרת כלל השרשרת:

$$(p^{n})' = ((e^{\ln p})^{n})' = (e^{n\ln p})' = e^{n\ln p}(n\ln p)' = (e^{\ln p})^{n}\ln p = p^{n}\ln p .$$

הנגזרת של משוואה 24

היא:

$$(Nnp^{n})' = N(p^{n} + n(p^{n})') = N(p^{n} + np^{n}\ln p) ,$$

שהיא 0 כאשר:

$$n = -\frac{1}{\ln p} .$$

עבור $N = 365$ מתקבל $n = 364.5$ אבל n הוא מספר שלם ולכן המקסימום מתקבל ב-$n = 364$ או $n = 365$ שנותנים אותו תוחלת של ימי-עבודה:

$$\begin{aligned}
E(\text{ימי-עבודה לשנה}) &= Nnp^{n} \\
&= 365\cdot 364\cdot\left(\frac{364}{365}\right)^{364} \\
&= 365\cdot 364\cdot\frac{365}{365}\left(\frac{364}{365}\right)^{364} \\
&= 365\cdot 365\cdot\left(\frac{364}{365}\right)^{365} \\
&= 48944 .
\end{aligned}$$

תשובה 2: התוחלת של היחס היא:

$$E(\text{ימי-עבודה אפשריים}/\text{ימי-עבודה מקסימליים}) = \frac{365\cdot 365\cdot\left(\frac{364}{365}\right)^{365}}{365\cdot 365} = \left(\frac{364}{365}\right)^{365} \approx 0.3674\,.$$

לפי משוואה 22:

$$\lim_{n\to\infty} E(\text{ימי-עבודה אפשריים}/\text{ימי-עבודה מקסימליים}) = \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{e}\,.$$

סימולציה

```
For 100 people
Expectation work-days    =  27742
Average work days        =  27743
Ratio work-days / 365**2 = 0.2082
For 250 people
Expectation work-days    =  45958
Average work days        =  45939
Ratio work-days / 365**2 = 0.3450
For 364 people
Expectation work-days    =  48944
Average work days        =  48936
Ratio work-days / 365**2 = 0.3674
For 365 people
Expectation work-days    =  48944
Average work days        =  48917
Ratio work-days / 365**2 = 0.3674
```

35. על שפת התהום (The cliff-hanger)^S

לקיק מוצב על ציר ה-x במקום 1. בכל מקום על ציר ה-x הוא יכול לצעוד צעד ימינה עם הסתברות $2/3$ וצעד שמאלה עם הסתברות $1/3$ (איור 6).

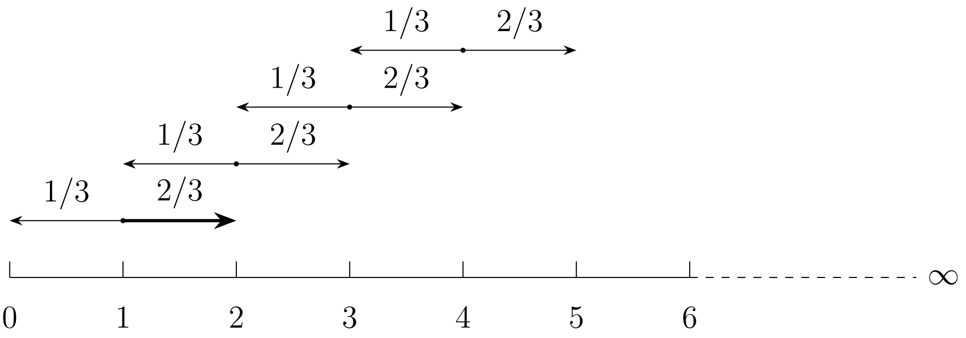
שאלה 1: מה ההסתברות שהחלקיק יגיע למקום 0 בסופו של דבר?

שאלה 2: אם ההסתברות של צעד ימינה היא p וההסתברות של צעד שמאלה היא $1-p$, מה ההסתברות שהחלקיק יגיע למקום 0 בסופו של דבר? נתח את האפשרויות לערכים שונים של p.

רמז: השתמש בהסתרויות מותנות לאחר הצעד הראשון.

פתרון

ניתן את הפרתונות של שתי השאלות ביחד כי חישוב ההסתברות ל-p לא קשה יותר מחישוב ל-$p = 2/3$.



איור 6: ?האם חלקיק יכול להגיע ל-0 (הציר אינסופי לימין)

תשובה 1,2: ננסה לחשב את ההסתברות בצורה ישירה. נסמן צעד שמאלה ב-L וצעד ימינה ב-R. החלקיק יכול להגיע ל-0 ישירות על ידי צעד L עם הסתברות $\frac{1}{3}$, או על ידי צעד RLL עם הסתברות $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$, או על ידי צעד $RRLLL$ עם הסתברות $\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $\ldots$. החישוב נראה כמו סידרה הנדסית פשוטה אבל הוא מתעלם האפשרויות כגון $RLRLL$.

נחשב את ההתסתברות שהחלקיק מגיעה ל-0 מ-1 בתלות בצעד הראשון:

$$\begin{aligned} P(\text{מגיע ל-0 מ-1}) &= P(\text{מגיע ל-0 מ-1}|\text{צעד ראשון שמאלה}) + \\ &\quad P(\text{מגיע ל-0 מ-1}|\text{צעד ראשון ימינה}) \\ &= (1-p)\cdot 1 + pP(\text{מגיע ל-1 מ-2})P(\text{מגיע ל-0 מ-1})\,. \end{aligned}$$

אבל ההסתברות להגיע ל-1 מ-2 היא בדיוק ההסתברות להגיע ל-0 מ-1. נסמן ב-P את $P(\text{מגיע ל-0 מ-1})$ ונקבל:

$$\begin{aligned} P &= (1-p) + pP^2 \\ pP^2 - P + (1-p) &= 0 \\ P &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p} \\ P &= 1,\ (1-p)/p\,. \end{aligned}$$

אם $p \le 1/2$ אזי $(1-p)/p \ge 1$, כך ש-$P=1$ הוא הפתרון היחיד ובטוח שהחלקיק יגיע ל-0.

אם $p=1$ אזי $P=0$ כי אם החלקיק תמיד צועד ימינה הוא לא יכול להחזור ל-0.

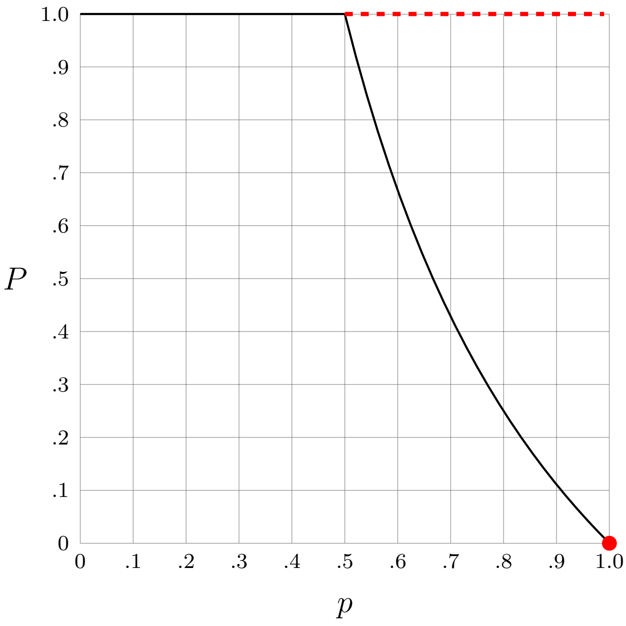
נניח ש-$P=1$ עבור $1/2<p<1$, כלומר, P **לא תלוי ב-**p. אבל P לא יכול ״לקפוץ״ פתאום מ-1 ל-0 כאשר p שואף ל-1: באיור 7 הקו האדום המקווקוו והנקודה האדומה ב-$(1,0)$. לכן, עבור $p>1/2$ הפתרון היחיד הוא $P=(1-p)/p<1$.[2]

עבור $p=2/3, P=1/2$ ועבור $p=1/2, P=1$. זאת תוצאה מפתיעה כי לא היינו מצפים שהחלקיק יחזור תמיד ל-0 אם כיוון הצעד נקבע על ידי הטלת מטבע הוגן! אנו זקוקים למטבע ממש לא-הוגן (הסתברות של ״עץ״ שווה ל-$2/3$) כדי להשוות את הסיכויים לחזור ל-0 או לא.

סימולציה

---

[2] Mosteller כותב שזה נובע מרציפות אבל הוא לא מספק הוכחה.



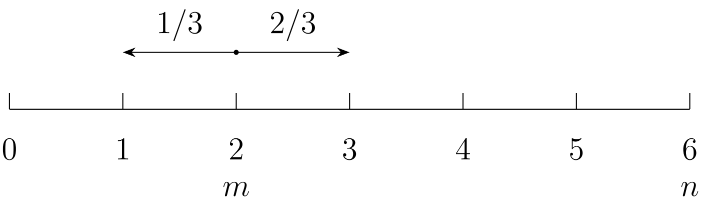
איור 7: הגרף של $P = \min(p/(1-p), 1)$ עבור $p \in [0,1]$

```
For probability = 0.2500:
Probability of reaching 0 = 1.0000
Proportion reaching 0     = 1.0000
For probability = 0.5000:
Probability of reaching 0 = 1.0000
Proportion reaching 0     = 0.9612
For probability = 0.6667:
Probability of reaching 0 = 0.5000
Proportion reaching 0     = 0.5043
For probability = 0.7500:
Probability of reaching 0 = 0.3333
Proportion reaching 0     = 0.3316
For probability = 0.8000:
Probability of reaching 0 = 0.2500
Proportion reaching 0     = 0.2502
```

36. המהמר פשט רגל (Gambler's ruin)^{D,S}

לקיק מוצב על ציר ה-x במקום $m \geq 1$. בכל מקום על ציר ה-x הוא יכול לצעוד צעד ימינה עם הסתברות $p > 1/2$ וצעד שמאלה עם הסתברות $1-p$.

שאלה 1: מה ההסתברות שהחלקיק יגיע למקום 0 בסופו של דבר?



איור 8: האם החלקיק יכול לחזור ל-0 (ציר סופי)?

שאלה 2: יהי $m < n$. אם החלקיק מגיע למקום 0 או למקום n הוא מפסיק לצעוד (איור 8). מה ההסתברות שהחלקיק יגיע למקום 0? מה ההסתברות שהחלקיק יגיע למקום n בסופו של דבר?

הערה: בעיה 35 מייצגת מהמר המשחק עם כמות סופית של כסף נגד קזינו עם כמות בלתי מוגבלת של כסף. הבעיה מבקשת את ההסתברות שהמהמר יפסיד את כל כספו. בעיה זו מייצגת מהמר אחד עם m שמשחק נגד מהמר שני עם $n - m$. הבעיה מבקשת את ההסתברויות ש**אחד** מהם מפסיד את כל כספו לשני.

פתרון

הפתרון מבוסס על [11, Chapter 2, Example 4m].

תשובה 1: הבפתרון לבעיה 35 ראינו שעבור $p > 1/2$ (כאן ההנחה נתונה), אם חלקיק נמצא במקום 1 ההסתברות שלו להגיע ל-0 היא $r = (1-p)/p$. סימון: תהי $P(i,j)$ ההסתברות להגיע מ-i מ-j. בגלל שההסתברות של חלקיק להגיע ממקום אחד לשני לא תלוי במקום האבסולוטי:

$$P(0,m) = P(m-1,m)P(m-2,m-1)\cdots P(1,2)P(0,1) = r^m\,. \tag{25}$$

תשובה 2: תהי $P_i = P(n,i)$ וחשב אותה תוך שימוש בהסתברות מותנית:

$$\begin{aligned}
P_i &= pP_{i+1} + (1-p)P_{i-1}\\
pP_{i+1} &= 1\cdot P_i - (1-p)P_{i-1}\\
pP_{i+1} &= (p+(1-p))P_i - (1-p)P_{i-1}\\
p(P_{i+1}-P_i) &= (1-p)(P_i - P_{i-1})\\
P_{i+1}-P_i &= r(P_i - P_{i-1})\,.
\end{aligned}$$

$P_0 = 0$ כי אם החלקיק נמצא ב-0 הוא מפסיק לצעוד. לכן:

$$\begin{aligned}
P_2 - P_1 &= r(P_1 - P_0) = rP_1\\
P_3 - P_2 &= r(P_2 - P_1) = r^2P_1\\
\cdots &= \cdots\\
P_i - P_{i-1} &= r(P_{i-1} - P_{i-2}) = r^{i-1}P_1\,.
\end{aligned}$$

רוב הגורמים בצד השמאלי מצטמצמים כאשר מחברים את המשוואות:

$$\begin{aligned}
P_i - P_1 &= P_1 \sum_{j=2}^{i} r^{j-1} \\
&= P_1 + P_1 \sum_{j=2}^{i} r^{j-1} - P_1 \\
P_i &= P_1 \sum_{j=0}^{i-1} r^j = P_1 \left(\frac{1-r^i}{1-r} \right) .
\end{aligned}$$

אם חלקיק נמצא ב-n הוא כבר נמצא ב-n כך ש-$P_n = 1$:

$$\begin{aligned}
1 &= P_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right) \\
P_1 &= \left(\frac{1-r}{1-r^n} \right) ,
\end{aligned}$$

ולכן (בהוכחה סימטרית שמחליפה p ו-$1-p$):

$$P(n,i) = \left(\frac{1-r^i}{1-r^n} \right) \tag{26}$$

$$P(0,i) = \left(\frac{1-(1/r)^{n-i}}{1-(1/r)^n} \right) . \tag{27}$$

הקורא מוזמן להראות שהסכום של משוואות 26, 27 הוא 1 כלומר שמובטח שאחד המהמרים יזכה והשני יפסיד.

עבור $m = 1, n = 3, p = 2/3$:

$$\begin{aligned}
P(0,1) &= \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3} \right) = \frac{4}{7} \\
P(3,1) &= \left(\frac{1-2^2}{1-2^3} \right) = \frac{3}{7} .
\end{aligned}$$

סימולציה

```
For probability = 0.6667:
Probability of reaching (0,10) from 1 = (0.4995,0.5005)
Proportion reaching     (0,10) from 1 = (0.5056,0.4944)
Probability of reaching (0,10) from 4 = (0.0616,0.9384)
Proportion reaching     (0,10) from 4 = (0.0643,0.9357)
Probability of reaching (0,10) from 6 = (0.0147,0.9853)
Proportion reaching     (0,10) from 6 = (0.0123,0.9877)

For probability = 0.7500:
```

```
Probability of reaching (0,10) from 1 = (0.3333,0.6667)
Proportion reaching     (0,10) from 1 = (0.3395,0.6605)
Probability of reaching (0,10) from 4 = (0.0123,0.9877)
Proportion reaching     (0,10) from 4 = (0.0115,0.9885)
Probability of reaching (0,10) from 6 = (0.0014,0.9986)
Proportion reaching     (0,10) from 6 = (0.0015,0.9985)
```

ככל שלמהמר בצד שמאל יש יותר והסתברות גבוהה היותר לזכות בכל צעד, כך ההסתברות שלו לזכות גדלה.

37. משחק נועז או משחק זהיר (Bold play vs. cautious play)^S

רולט ניתן להמר שהכדור יפול בכיס המסומן במספר זוגי. ההסתברות היא $18/38$ כי יש 18 מספרים זוגיים, 18 מספרים אי-זוגיים ו-2 מספרים ירוקים עליהם הקזינו זוכה.

איזו מהאסטרגיות שלהלן עדיפה?

1. משחק נועז: להמר 20 בסיבוב אחד.
2. משחק זהיר: להמר 1 בכל סיבוב עד שאתה זוכה או מפסיד 20.

רמז: השתמש בתוצאות של בעיה 36.

פתרון

ההסתברות לזכיה עם משחק נועז היא $18/38 \approx 0.4737$.

ההסתברות לזכיה עם משחק זהיר היא (משוואה 26):

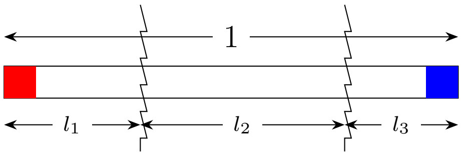
$$\begin{aligned} r &= \frac{20}{38}\Big/\frac{18}{38} = \frac{20}{18} \\ P(40,20) &= \frac{1-(20/18)^{20}}{1-(20/18)^{40}} \approx 0.1084\,. \end{aligned}$$

ברור שמשחק נועז עדיף על משחק זהיר.

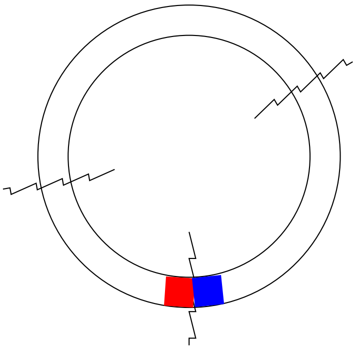
Mosteller מביא הסבר איטואטיבי: הימור בסיבובים רבים חושף את המהמר לאפשרות שהקזינו מצנח בהסתברות $2/38$.

סימולציה

```
Probability of bold wins     = 0.4737
Proportion bold wins         = 0.4677
Probability of cautious wins = 0.1084
Proportion cautious wins     = 0.1094
```



איור 9(א) חלוקת מקל לשלושה חלקים



איור 9(ב) חלוקת טבעת לשלושה חלקים

39. הכימאי המגושם (The clumsy chemist)^S

נתון מספר רב של מקלות מזכוכית באורך 1. קצה אחד צבוע באדום ושני בכחול. כאשר זורקים אותם על הרצפה, הם נשברים לשלושה חלקים עם התפלגות אחידה של האורכים (איור 9(א)). מה התוחלת של אורכו של החלק בקצה הכחול?

רמז: במקום מקלות ישרים הנח שקבלת טבעות זכוכית ללא סימנים שגם הם נשברים לשלושה החלקים (איור 9(ב)).

פתרון 1

אין סימטריה במלקות כי הקצות שונים מהחלק האמצני. אולם הטבעת סימטרית ולכן ההתפלגויות של שלושת החלקים יהיו אחידות עם תוחלת $1/3$. על ידי צביעת אחת מנקודות השבירה כפי שמופיע באיור 9(ב), הבעיה הופכת להיות זהה לבעיית המקל כך שההתפלגויות זהות. לכן התוחלת של אורכי החלקים היא גם $1/3$.

פתרון 2

הפתרון אלגנטי שלהלן מבוסס על [4].

נניח שהמקל מייצג את קטע הקו $(0,1)$. המקל נשבר בשני מקומות שניתן לייצג בני משתנים אקראיים בלתי-תלויים עם התפלגות אחידה $X, Y \in (0,1)$. נחשב את ההסתברות $P(|X-Y|>a)$.

טבלה 1 מראה נקודות (x,y) כאשר $x, y \in \{0.0, 0.1, 0.2, \ldots, 0.9\}$ והנקודה העשרונית הושמטה. הערכים בטבלה הם $|X-Y|$. עבור $a=0.6$ הערכים למעלה משמאל מ-$(0,6)$--$(6,9)$, והערכים למטה ומימין מ-$(6,0)$--$(9,6)$, הם התוצאות שמגדירות את $P(|X-Y|>a)$:

$$P(|X-Y|>a) = 2 \cdot \frac{1}{2}(1-a)(1-a) = (1-a)^2\,.$$

עבור $a=0.6$, $P(|X-Y|>0.6) = (0.4)^2 = 0.16$.

המשלים הוא:

$$P(|X-Y|<a) = 1-(1-a)^2\,.$$

a

	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
	8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	
	7	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	
a	6	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	
	5	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	
	4	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	
y	3	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	a
	2	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	
	1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

x a

טבלה 1 : התפלגות נקודות השבירה ב-$(0,1) \times (0,1)$

הסתברות זו היא ההתפלגות ההסתברות המצטברת cumulative probability distribution (CPD) בקטע. $(0,1)$. ניתן לקבל את פונצקית הסתברות הצפיפות probability density function (PDF) על ידי גזירת ה-CDP:

$$P(|X-Y|=a)=\frac{d}{da}P(|X-Y|<a)=\frac{d}{da}(1-(1-a)^2)=2(1-a)\,.$$

התוחלת היא האינטגרל ה-PDF כפול הערך:

$$E(|X-Y|)=\int_0^1 a\cdot 2(1-a)\,da=2\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\,.$$

סימולציה

```
Expectation of length of right piece = 0.3333
Average length of right piece        = 0.3359
```

40. האס הראשון (The first ace)^S

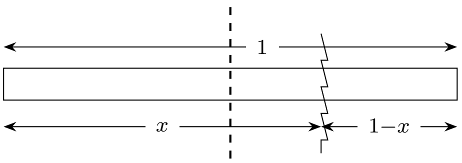
לק קלפים מחפיסה מעורבת היטב עד שמופיע אס. מה התוחלת של מספר הקלפים שיש לחלק?

רמז: חשוב על חפיסת קלפים ללא האסים מסודרת בשורה.

פתרון הקלפים הם כמו "מקל" באורך 48 "שנשבר" על ידי 4 ל-5 חלקים. הפתרון של בעיה 39 מתאים גם כאן והתוחלת של חלק היא $48/5=9.6$.

סימולציה

```
Expectation of first ace = 9.6000
Average first ace        = 9.5805
```



איור 10: שבירת מקל לשני חלקים

42. הקצה הקצר של המקל (The little end of the stick)^S

אתה שובר מספר גדול של מקלות זכוכית באורך 1 לשני חלקים. למקום השבירה התפלגות אחידה לאורך המקל.

שאלה 1: מה התוחלת של אורכו של החלק **הקטן** יותר?

שאלה 2: מה התוחלת של היחס בין אורכו של החלק הקטן לאורכו של החלק הגדול?

פתרון

תשובה 1: ההסתברות שנקודת השבירה היא בצד השמאלי של המקל היא $1/2$ שהיא גם ההסתברות שהנקודה בצד ימין. החלק הקטן יותר נמצא באותו צד שבו נמצאת נקודת השבירה. התוחלת של נדוקת השבירה היא באמצע בין קצה המקל לבין אמצע המקל:

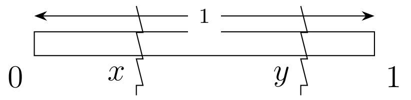
$$E(\text{אורך הקטן יותר}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,.$$

תשובה 2: ללא הגבלת הכלליות הנח שנקודת השבירה נמצאת בצד הימני של המקל (איור 10). היחס בין החלק הקטן והחלק הגדול הוא $(1-x)/x$ ואורכו של החלק הגדול מתפלג אחיד בתוך $(1/2,1)$. לכן:

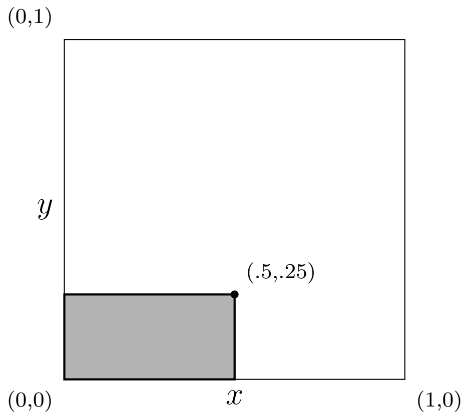
$$\begin{aligned}
E(\text{יחס גדול יותר / קטן יותר}) &= \left(\frac{1}{1-(1/2)}\right)\int_{1/2}^{1}\frac{1-x}{x}\,dx\\
&= 2\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{x}-1\right)\,dx\\
&= 2\,(\ln|x|-x)\big|_{1/2}^{1} = 2\ln 2 - 1 \approx 0.3863\,.
\end{aligned}$$

סימולציה

```
Expectation of length of smaller = 0.2500
Average length of smaller        = 0.2490
Expectation of smaller/larger    = 0.3863
Average smaller/larger           = 0.3845
```



איור 11(א) חלוקת מקל לשני חלקים



איור 11(ב) יצוג האורכים במעגל היחידה

43. המקל השבור (The broken bar)^{D,S}

אתה שובר מספר רב של מקלות זכוכית באורך 1 בשתי נדוקות שבירה (איור איור 11(א)).

שאלה 1: מה התוחלת של אורכו של החלק הקצר ביותר?

שאלה 2: מה התוחלת של אורכו של החלק הארוך ביותר?

רמז: x, y הם משתנים אקראים בלתי-תלויים בהתפלגות אחידה בתוך $(0,1)$. ניתן להציג כל זוג (x,y) כנקודה בריבוע $(0,1) \times (0,1)$ (איור איור 11(ב)). מה ההסתברות ש-$(x,y) < (.5,.25)$?

Hint: עבור **שאלה 1:** הנח שהחלק השמאלי הוא הקצר ביותר ועבור **שאלה 2:** הנח שהחלק השמאלי הוא בארוך ביותר.

פתרון

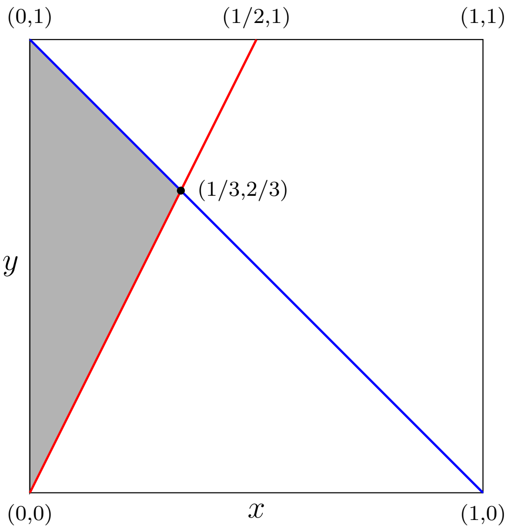
תשובה 1: ללא הגבלת הכלליות הנח שהחלק השמאלי שאורכו x הוא החלק הקצר ביותר. מכאן ש-$x < y - x$ ו-$x < 1 - y$ שניתן לפשט ולקבל $2x < y$ ו-$x + y < 1$.

איור איור 12(א) מראה את הקווים $y = 2x$ (אדום) ו-$y = 1 - x$ (כחול). כדי לאמת את אי-השוויונות, (x,y) חייבת להיות באיזור באפור לשמאל לשני הקווים. ניתן לחשב את נקודת החיתוך $(1/2, 2/3)$ על ידי פתרון שתי המשוואות.

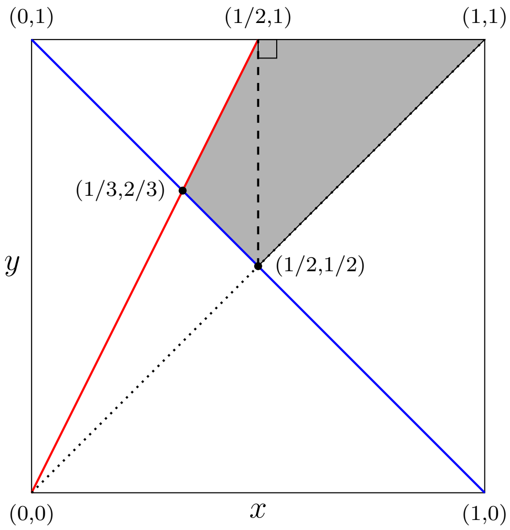
הערכים של (x,y) נמצאים בריבוע $(0,1) \times (0,1)$, ולכן יש לחשב את התוחלת מעל לתת-קבוצה האפורה של הריבוע על ידי חילוק האינטגרל בשטח של האיזור האפור $\frac{1}{2}(\frac{1}{3} \cdot 1) = \frac{1}{6}$:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{1/6} \int_0^{1/3} x[(1-x) - 2x]\, dx \\ &= \int_0^{1/3} (6x - 18x^2)\, dx \\ &= (3x^2 - 6x^3)\Big|_0^{1/3} = \frac{2}{18} \approx 0.1111\,. \end{aligned}$$

תשובה 2: כדי שהחלק השמאלי יהיה הארוך ביותר $x > y - x$ ו-$x > 1 - y$, ולכן (x,y) חייבת להיות לימינו של $y = 2x$ (אדום) ולימינו של $y = 1 - x$ (כחול) (איור איור 12(ב)). בנוסף, לפי הנחה ש-x נמצא לשמאלו של y, (x,y) חייבת להיות לשמאלו של $y = x$ (מנוקד).



איור 12(א) איזור אפור עבור המקל הקצר ביותר



איור 12(ב) איזור אפור עבור המקל הארוך ביותר

כדי להקל על החישוב נחלק את האיזור האפור לשני משולשים (מקווקו) ונחשב את התוחלת בנפרד בשניהם. השטח של האיזור האפור מתקבל כסכום השטחים של המשולשים $1/24+1/8 = 1/6$. מכאן:

$$\begin{aligned}
E(\text{במשולש השמאלי } x) &= 6\int_{1/3}^{1/2} x[2x-(1-x)]\,dx\\
&= \int_{1/3}^{1/2} \left(18x^2-6x\right)\,dx\\
&= \left(6x^3-3x^2\right)\Big|_{1/3}^{1/2} = \frac{1}{9}\\
E(\text{במשולש הימני } x) &= 6\int_{1/2}^{1} x[1-x]\,dx\\
&= \int_{1/2}^{1} (6x-6x^2)\,dx\\
&= \left(3x^2-2x^3\right)\Big|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}\\
E(x) &= \frac{1}{9}+\frac{1}{2} = \frac{11}{18} \approx 0.6111\,.
\end{aligned}$$

התוחלת של אורכו של החלק הבינוני היא $1-\frac{2}{18}-\frac{11}{18}=\frac{5}{18}\approx 0.2778$.

סימולציה

```
Expectations: shortest = 0.1111, middle = 0.2778, longest = 0.6111
Averages:     shortest = 0.1115, middle = 0.2783, longest = 0.6102
```

44. לנצח במשחק לא-הוגן (Winning an unfair game)^{D,S}

נתון מטבע לא-הוגנת שההסתברות לעץ היא $1/3 < p < 1/2$. הטל את המטבע מספר זוגי של פעמים $N = 2n$. אתה מנצח אם ורק אם **ביותר** ממחצית ההטלטת מופיע עץ.

שאלה 1: פתח נוסחה עבור ההסתברות לנצח P_N ונוסחה עבור ההסתברות לתיקו T_N.

שאלה 2: פתח נוסחה עבור ה-N עבורו יש את ההסתברות הגבוהה ביותר לנצח.

רמז: אם ההסתברות הגבוהה ביותר לנצח היא ב-N הטלות אזי $P_{N-2} \leq P_N$ ו-$P_N \geq P_{N+2}$.

פתרון

תשובה 1: כדי לנצח, עץ חייב להופיע ב-$i \in \{n+1, n+2, \ldots, 2n-1, 2n = N\}$ הטלות. מההתפלגות הבינומית:

$$
\begin{aligned}
P_N &= \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{2n}{i} p^i (1-p)^{2n-i} \\
T_N &= \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \,.
\end{aligned}
$$

תשובה 2: כדי שההסתברות הגבוהה ביותר תהיהעבור $N = 2n$ חייב להתקיים:

$$P_{2n-2} \leq P_{2n} \quad \text{ו-} \quad P_{2n} \geq P_{2n+2}\,.$$

מתי $P_{2n-2} \neq P_{2n}$?

מקרה 1: לאחר הטלה $2n-2$, עץ הופיע n פעמים ופלי $n-2$ פעמים (כך שהיית זוכה אם היית עוצר כאן), אבל פלי מופיע בשתי ההטלות הבאות. עכשיו יש n עץ ו-n פלי ולכן אתה מפסיד. ההסתברות היא:

$$\binom{2n-2}{n} p^n (1-p)^{n-2} (1-p)^2\,.$$

מקרה 2: לאחר הטלה $2n-2$, עץ הופיע $n-1$ פעמים ופלי $n-1$ פעמים (כך שהיית מפסיד אם היית עוצר כאן), אבל עץ מופיע בשתי ההטלות הבאות. עכשיו יש $n+1$ עץ ו-$n-1$ פלי ולכן אתה מנצח. ההסתברות היא:

$$\binom{2n-2}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{n-1} p^2\,.$$

כדי לאמת את $P_{2n-2} \leq P_{2n}$, P_{2n-2} לא יכול לגדול כאשר P_{2n} נשאר ללא שינוי (מקרה 1), אבל P_{2n} יכול לגבול עד שהיא גבוהה מ-P_{2n-2} (מקרה 2). לכן:

$$
\begin{aligned}
\binom{2n-2}{n} p^n (1-p)^{n-2} (1-p)^2 &\leq \binom{2n-2}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{n-1} p^2 \\
\frac{1}{n}(1-p) &\leq \frac{1}{n-1} p \\
(n-1)(1-p) &\leq np \\
n &\leq \frac{1-p}{1-2p} \\
2n &\leq \frac{1}{1-2p} + 1\,.
\end{aligned}
$$

באופן דומה, כדי לאמת את $P_{2n} \ge P_{2n+2}$ חייב להיול ש :

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n+1}p^{n+1}(1-p)^{n-1}(1-p)^2 &\ge \binom{2n}{n}p^n(1-p)^np^2\\
\frac{1}{n+1}(1-p) &\ge \frac{1}{n}p\\
n(1-p) &\ge (n+1)p\\
n &\ge \frac{p}{1-2p}\\
2n &\ge \frac{1}{1-2p}-1\,.
\end{aligned}$$

לכן, ערך עבור $N = 2n$ שעבורו מתקבל ההסתברות הגבוהה ביותר הוא המספר השלם הזוגי הקרוב ביותר ל-$1/(1-2p)$. הקורא מוזמן להראות שאם $1/(1-2p)$ אי-זוגי אזי $P_{2n} = P_{2n+2}$.

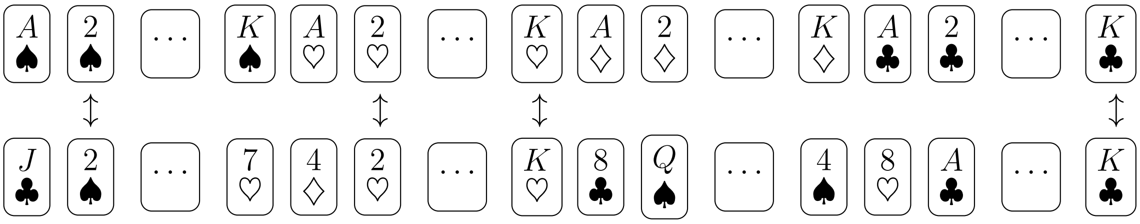
סימולציה

```
For probability             = 0.3700
Optimal games to be played  = 4
For  2 games, average won   = 0.1372
For  4 games, average won   = 0.1445
For  6 games, average won   = 0.1431

For probability             = 0.4000
Optimal games to be played  = 6
For  4 games, average won   = 0.1820
For  6 games, average won   = 0.1845
For  8 games, average won   = 0.1680

For probability             = 0.4500
Optimal games to be played  = 10
For  8 games, average won   = 0.2671
For 10 games, average won   = 0.2646
For 12 games, average won   = 0.2640
```

45. ממוצע של מספר ההתאמות (Average number of matches)^S

דר חפיסת קלפים בשורה בסדר הסטנדרטי ואז סדר חפיסה שניה שורה בסדר אקראי מתחת לשורה הראשונה (איור 13). מה התוחלת של מספר ההתאמות של קלף בשורה הראשונה עם קלף בשורה מתחתיו?

פתרון



איור 13: התאמת שתי חפיסות קלפים

ההתפלגות אחידה כי לכל קלף בשורה השניה אותה המסתברות להתאים לקלף מעליו. לכן:

$$E(\text{מספר ההתאמות}) = 52 \cdot \frac{1}{52} = 1\,.$$

```
Expectation of matches = 1.00
Average of matches     = 1.01
```

46. הסתברויות של התאמות (Probabilities of matches)^S

סדר חפיסת קלפים בשורה בסדר הסטנדרטי ואז סדר חפיסה שניה שורה בסדר אקראי מתחת לשורה הראשונה (איור 13). פתח נוסחה עבור $P(n,r)$, ההסתברות שיהיו בדיוק r התאמות של קלף בשורה הראשונה עם קלף בשורה מתחתיו? הנח ש-$P(k,0)$ נתון עבור $0 \le k \le n$.

פתרון

במבט ראשון נראה שבעיה זו דומה לבעיה 28 אבל קיים הבדל מהותי. השליפות המקופסאות הן בלתי-תלויות אבל כאן ההתאמות תלויות אחת בשניה. למשל, אם יש התאמה בקלף ראשון (בהסתברות $1/n$), ההסתברות של התאמה בקלף השני היא $1/(n-1)$.

ההסתברות שקבוצה **נתונה** של r קלפים מתאימות היא:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{n+r-1}\,. \tag{28}$$

כדי לקבל בדיוק r התאמות, יש להכפיל משוואה 28 ב-$P(n-r,0)$, ההסתברות שאין בכלל התאמות בשאר $n-r$ הקלפים. לבסוף, יש $\binom{n}{r}$ דרכים לבחור r התאמות, ולכן:

$$\begin{aligned} P(n,r) &= \binom{n}{r} \frac{1}{n(n-1)(n+r-1)} P(n-r,0) \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{1}{n!/(n-r)!} P(n-r,0) \\ &= \frac{1}{r!} P(n-r,0)\,. \end{aligned}$$

נוסחה זו פותרת את הבעיה כי $P(k,0)$ נתונה.

Mosteller מפתח נוסחה סגורה וגבול עבור $P(n,r)$:

$$P(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} \tag{29}$$

$$\lim_{n-r\to\infty} P(n,k) \approx \frac{1}{k!}e^{-1}\,. \tag{30}$$

סימולציה

הרצתי את הסימולציה עבור $n=52$ קלפים וחישבתי את ההסתברות ממשוואה 30.

```
Probability of 1 matches = 0.3679
Proportion 1 matches     = 0.3710
Probability of 2 matches = 0.1839
Proportion 2 matches     = 0.1828
Probability of 3 matches = 0.0613
Proportion 3 matches     = 0.0569
Probability of 4 matches = 0.0153
Proportion 4 matches     = 0.0168
```

47. לבחור את הנדוניה הגדול ביותר (Choosing the largest dowry)^{D,S}

הנח סידרה של n קלפים עם הפנים למטה. על פניו של כל קלף נמצא מספר שלם חיובי אבל אין מידע על ההתלפגות שלהם. הפוך את הקלפים אחד-אחד ועיין במספרים. לאחר חשיפת כל אחד מהקלפים, אתה יכול להכריז שמספר זה הוא הגדול ביותר בסידרה. אם אתה צודק אתה מנצח, אחרת אתה מפסיד. למשל, אם הסדרה היא $(47,23,55,4)$, אתה מנצח רק אם אתה בוחר שת הקלף השלישי.

הנה אסטרטגיה: ל-r קבוע, וותר על $r-1$ הקלפים הראשונים ובחר את הקלף הראשון שמספרו גדול מכל $r-1$ הקלפים.

שאלה 1: עבור $n=4$ ו-$r=3$ בדוק את כל התמורות ומצא בכמה מהם את מנצח.

שאלה 2: פתח נוסחה עבור ההסתברות לניצחון עבור n,r שרירותיים.

שאלה 3: מצא קירוב להסתברות כאשר $n,r\to\infty$.

רמז: נתון r באיזה מקומות יכול להופיע המספר הגדול ביותר m ובאיזה מקומות המספרים שהם פחות או שווים ל-m?

פתרון

תשובה 1: כדי לפשט את הסימון נכתוב את דירוג מספרים כ-$1,2,3,4$ למרות שהערכים אמיתיים של המספרים לא ידועים, ולמשל יכולים להיות $4,23,47,55$. אם אתה חושף קלפים $1,2,3$ (שהם בעצם $4,23,47$), אינך יודע אם לבחור 47 או לחכות ובחור את הקלף האחרון.

יש 24 תמורות של ארבעה מספרים. לפי האסטרטגיה אתה מוותר על שני הקלפים הראשונים ובוחר או את הקלף השלישי או את הקלף הרביעי, כך שאתה מפסיד אם 4 נמצא במקום הראשון של התמורה. מה עם התמורה $(1,2,3,4)$? אתה מוותר על $1,2$ ובוחר 3 בגלל שהוא גובהה יותר מ-$1,2$ אבל אתה מפסיד כי זה לא המספר הגדול ביותר. מה עם התמורה $(1,3,2,4)$? שוב, לפי האסטרטגיה אתה מוותר על $1,3$, אבל מוותר גם על 2 כי הוא **לא** גדול יותר מ-$1,3$. כעת אתה בוחר 4 ומנצח. נסח טיעונים דומים לכל התמורות ובדוק שכל התמורות עם 4 במסגרת הן נצחונות:

$1\ 4 \mid 3\ 2$	$1\ 4 \mid 2\ 3$	$1\ 3 \mid \boxed{4}\ 2$	$1\ 3 \mid 2\ \boxed{4}$	$1\ 2 \mid \boxed{4}\ 3$	$1\ 2 \mid 3\ 4$
$2\ 4 \mid 3\ 1$	$2\ 4 \mid 1\ 3$	$2\ 3 \mid \boxed{4}\ 1$	$2\ 3 \mid 1\ \boxed{4}$	$2\ 1 \mid \boxed{4}\ 3$	$2\ 1 \mid 3\ 4$
$3\ 4 \mid 2\ 1$	$3\ 4 \mid 2\ 1$	$3\ 2 \mid \boxed{4}\ 1$	$3\ 2 \mid 1\ \boxed{4}$	$3\ 1 \mid \boxed{4}\ 2$	$3\ 1 \mid 2\ \boxed{4}$
$4\ 3 \mid 2\ 1$	$4\ 3 \mid 1\ 2$	$4\ 2 \mid 3\ 1$	$4\ 2 \mid 1\ 3$	$4\ 1 \mid 3\ 2$	$4\ 1 \mid 2\ 3$

ההסתברות לנצח היא $10/24$.

תשובה 2: אתה מפסיד אם המספר הגדול ביותר נמצא באחד המקומות $1,\ldots,r-1$. לכן כדי לנצח מספר הגדול ביותר חייב להיות במקום m כאשר $r \le m \le n$:

$$1 \quad 2 \quad \cdots \quad r-2 \quad r-1 \quad \overbrace{r \quad r+1 \quad \cdots \quad m-1 \quad m \quad m+1 \quad \cdots \quad n}^{\text{מספר גדול ביותר חייב להיות כאן}} .$$

לפי האסטרטגיה אתה מוותר על $r-1$ הקלפים הראשונים. אתה תבחר מקום m אם ורק אם **כל** במספרים ב-$(r,\ldots,m-1)$ קטנים מ**כל** המספרים ב-$(1,\ldots,r)$. במילים אחרות, המספר הגדול ביותר בסידרה $(1,\ldots,m-1)$ הוא **לא** בחלק השני של הסידרה $(r,\ldots m-1)$ אלא בחלק הראשון $(1,\ldots,r-1)$. ההסתברות היא:

$$P(\text{(המספר הגדול ביותר ב-}(1,\ldots,m-1)\text{ נמצא ב-}(1,\ldots,r-1)\text{)}) = \frac{r-1}{m-1}\,.$$

ההסתברות שהמספר הגדול ביותר נמצא ב-m הוא $1/n$ ולכן:

$$P(\text{ניצחון}) = \sum_{m=r}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{r-1}{m-1} = \frac{r-1}{n}\sum_{m=r}^{n}\frac{1}{m-1}\,. \tag{31}$$

עבור $r=3$, $n=4$, $P(\text{ניצחון}) = 5/12 = 10/24$.

משוואה 31 לא מוגדרת עבור $r=1$ אבל ההסתברות לנצח כאשר אתה בוחר את המספר הראשון הוא $1/n$. לערך גבוהה ביותר של r יש הסתברות גבוהה יותר כפי שראינו בדוגמה.

תשובה 3: נכתוב משוואה 31 כך:

$$P(\text{ניצחון}) = \frac{r-1}{n}\left(\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m-1} - \sum_{m=2}^{r-1}\frac{1}{m-1}\right)\,. \tag{32}$$

עבור n,r גדולים, ניתן למצוא קירוב למשוואה 32 כך:

$$P(\text{ניצחון}) = \frac{r}{n}(\ln n - \ln r) = \frac{r}{n}\ln\frac{n}{r} = -\frac{r}{n}\ln\frac{r}{n}\,.$$

נסמן $x = r/n$ ונמצא את המקסימום מהנגזרת:

$$\begin{aligned}(-x\ln x)' &= -x\cdot\frac{1}{x} + (-1)\ln x = 0\\ \ln x &= -1\\ x &= 1/e\,.\end{aligned}$$

כדי למקסם את ההסתברות לנצח בחר $r \approx n/e$.

סימולציה

הרצתי את הסימולציה עם 100 קלפים וערכי r קרובים ל-$100/e$:

```
Reject cards before r = 36:
Probability of wins   = 0.3674
Proportion wins       = 0.3641
Reject cards before r = 37:
Probability of wins   = 0.3678
Proportion wins       = 0.3759
Reject cards before r = 38:
Probability of wins   = 0.3679
Proportion wins       = 0.3548
Reject cards before r = 30:
Probability of wins   = 0.3590
Proportion wins       = 0.3601
```

48. בחירת המספר האקראי הגדול ביותר (Choosing the largest random number)^{D,S}

הנח סידרה של n קלפים עם הפנים למטה. על פניו של כל קלף נמצא מספר ממשי עם התפלגות אחידה ב-$0.0 \leq x < 1.0$. הפוך את הקלפים אחד-אחד ועיין במספרים. לאחר חשיפת כל אחד מהקלפים, אתה יכול להכריז שמספר זה הוא הגדול ביותר בסידרה. אם אתה צודק אתה מנצח, אחרת אתה מפסיד.

השתמש באסטרטגיה של בעיה 37: החלט על ערך r כך שאתה מוותר על $r-1$ הקלפים הראשונים ובוחר את הקלף הראשון שגדול מהמספר הגדול ביותר ב-$r-1$ קלפים הראשונים.

הגדרה: d, **ערך שווה-נפש**, הוא הערך שמתחתיו אתה מוותר על הקלף ומעליו את לבחור את הקלף.

שאלה 1: חשב את d עבור $n = 1$ וחשב את ההסתברות לנצח.

שאלה 2: חשב את d עבור $n = 2$ וחשב את ההסתברות לנצח.

שאלה 3: חשב את d עבור $n = 3$. אל תנסה לחשב את ההסתברות לנצח!

הערה: בבעיה 37 בערכים יכולים להיות $100, 200, 300$ או $100, 50, 20$ כך שחשיפת המספר הראשון לא מספק שום מידע על המספרים האחרים. בבעיה זו, ההתפלגות אחידה, ולכן אם המספר הראשון הוא 0.2, ההסתברות שהמספר השני יהיה גדול יותר היא 0.8 ואם המספר הראשון הוא 0.8 ההסתברות שהמספר השני יהיה גדול יותר היא 0.2.

פתרון

יהי v_1, v_2, v_3 המספרים על שלושת הכרטיסים.

תשובה 1: אין ברירה אלא לבחור את הקלף הראשון כי אין קלפים אחרים. לכן אין ערך שווה-נפש. v_1 הוא המספר "הגדול ביותר", $P() = 1$.

תשובה 2: אם אתה בוחר את הקלף הראשון $P(\text{ניצחון}) = v_1$ שהיא ההסתברות שהמספר על הקלף השני קטן יותר. אם אתה מוותר על הקלף הראשון, $P(\text{ניצחון}) = 1 - v_1$ שהיא ההסתברות ש-$v_2 > v_1$. לכן, אם $v_1 < 0.5$ בחר את הקלף השני כי $1 - v_1 > 0.5$ ואם $v_1 > 0.5$ בחר את הקלף הראשון. מכאן ש-$d = 0.5$.

הנה הנוסחה לחישוב ההסתברות לנצח:

$$P(\text{ניצחון}) = p(\text{ניצחון} \,|\, v_1 < 0.5)\, p(v_1 < 0.5) + p(\text{ניצחון} \,|\, v_1 > 0.5)\, p(v_1 > 0.5)\,.$$

$p(v_1 < 0.5) = 0.5$ נובע מההתפלגות האחידה. מה עם $p(\text{ניצחון} \,|\, v_1 < 0.5)$? לפי האסטרטגיה אתה מנצח אם $0.5 < v_2 < 1$ אבל גם אם $v_1 < v_2 < 0.5$. ההתפלגות של v_1 היא אחידה ב-$(0, 0.5)$ ולכן:

$$p(\text{ניצחון} \,|\, v_1 < 0.5) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\,.$$

ניתן לעשות חישוב דומה עבור $v_1 > 0.5$. נרכיב את כל החישובים הללו ביחד וקבל:

$$P(\text{ניצחון}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\,.$$

תשובה 3: אם אתה בוחר את הקלף הראשון, $P(\text{ניצחון}) = v_1^2$ כי הקלף השני והשלישי חייבים להיות קטנים מהראשון.

אם אתה מוותר על הקלף הראשון ובוחר את השני כי $v_2 > v_1$ אזי:

- $P(\text{ניצחון}) = (1 - v_1)v_1$ אם $v_2 > v_1$ ו-$v_3 < v_1$.
- $P(\text{ניצחון}) = v_1(1 - v_1)$ אם $v_2 < v_1$ ו-$v_3 > v_1$.
- $P(\text{ניצחון}) = \frac{1}{2}(1 - v_1)^2$ אם $v_2 > v_1$ ו-$v_3 > v_1$, כי ניצחון תלוי בסדר: אם הוא $(0.55, 0.75, 0.65)$ אתה מנצח ואם הוא $(0.55, 0.65, 0.75)$ אתה מפסיד.

הערך שווה-נפש d הוא ערך עבורו ההסתברות לנצח על ידי בחירת הקלף הראשון שווה להסתברות לנצח על ידי ויתור על הקלף הראשון:

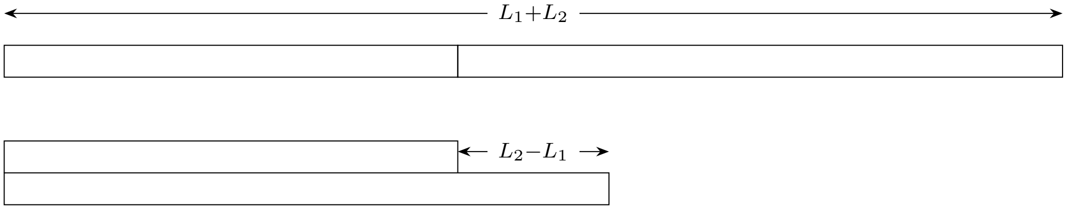
$$\begin{aligned} d^2 &= 2d(1 - d) + \frac{1}{2}(1 - d)^2 \\ 5d^2 - 2d - 1 &= 0 \\ d &= \frac{1 + \sqrt{6}}{5} \approx 0.6899\,. \end{aligned}$$

Gilbert&Mosteller [3, page 55] מראים שעבור $n = 3$:

$$P(\text{ניצחון}) = \frac{1}{3} + \frac{d}{2} + \frac{d^2}{1} - \frac{3d^3}{2} \approx 0.6617\,.$$

סימולציה

```
For  3 cards:
Indifference value = 0.6000
Probability of win = 0.6693
Proportion of wins = 0.6628
Indifference value = 0.6899
Probability of win = 0.6617
Proportion of wins = 0.6711
Indifference value = 0.7200
Probability of win = 0.6519
Proportion of wins = 0.6473
```



rods two of lengths the Measuring :14 איור

49. להכפיל את הדיוק (Doubling you accuracy)

is error possible whose instrument measuring a and $L_1 < L_2$ lengths of rods two given are ou can rods two the of lengths The $.\sigma^2$ variance and 0 mean with distribution normal a by given method? accurate more a there Is separately. one each measuring by measured be

פתרון

and side-by-side rods the place then and $L_s = L_1 + L_2$ measure and end-to-end rods the Place $: L_1, L_2$ Compute .(14 (Figure $L_d = L_2 - L_1$ measure

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(L_s - L_d) &= \tfrac{1}{2}((L_1 + L_2) - (L_2 - L_1)) = L_1\\ \tfrac{1}{2}(L_s + L_d) &= \tfrac{1}{2}((L_1 + L_2) + (L_2 - L_1)) = L_2\,.\end{aligned}$$

are: results the in errors the so e_s, e_d are measurements the in errors The

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}((L_s + e_s) - (L_d + e_d)) &= L_1 + \tfrac{1}{2}(e_s - e_d)\\ \tfrac{1}{2}((L_s + e_s) + (L_d + e_d)) &= L_2 + \tfrac{1}{2}(e_s + e_d)\,.\end{aligned}$$

measurements these of errors the of mean the ,0 is instrument measurement the of mean the Since [3]value: previous its half to reduced is variance The zero. also is

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\tfrac{1}{2}\left(e_s - e_d\right)\right) &= \tfrac{1}{4}(\sigma^2 + (-1)^2\sigma^2) = \tfrac{1}{2}\sigma^2\\ \mathrm{Var}\left(\tfrac{1}{2}(e_s + e_d)\right) &= \tfrac{1}{4}(\sigma^2 + \sigma^2) = \tfrac{1}{2}\sigma^2\,.\end{aligned}$$

50. משוואות ריבועיות אקראיות (Random quadratic equations)^S

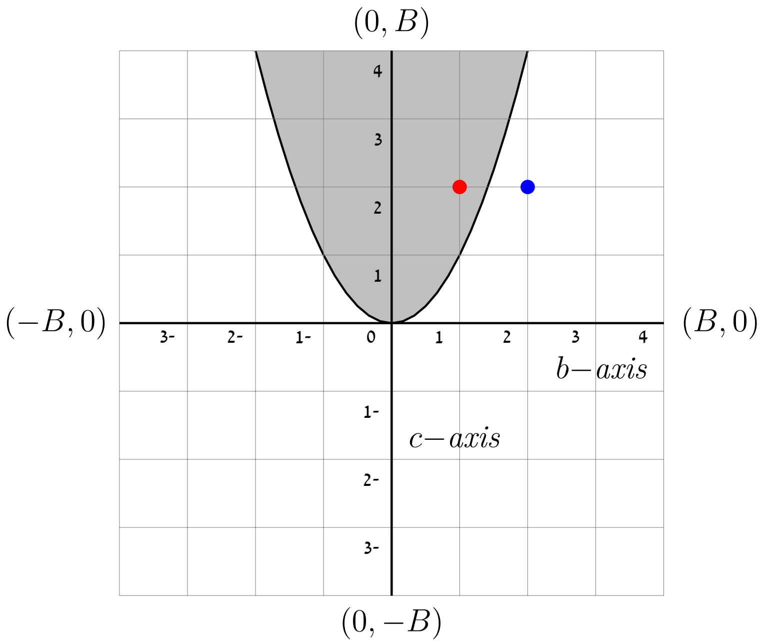
$.B \geq 1$ for $[-B, B] \times [-B, B]$ on defined $x^2 + 2bx + c = 0$ equation quadratic the Consider

שאלה 1: real? are roots the that probability the is What

שאלה 2: real? are roots the that probability the is what $B \to \infty$ As

---

[3] zero. is covariance the so independent are measurements the that fact the use We



איור 15: For (b,c) in the shaded area the roots of $c=b^2$ are complex

פתרון

תשובה 1: The roots will be real if the discriminant is non-negative $4b^2-4c\geq 0$. Figure 15 shows a plot of the parabola $c=b^2$ where the complex roots are within the shaded area. For example, for $(b,c)=(1,2)$, x^2+2x+2 has complex roots (red dot), while for $(b,c)=(2,2)$, x^2+4x+2 has real roots (blue dot).

The shaded area can be computed by integration:

$$\int_{-\sqrt{B}}^{\sqrt{B}}(B-b^2)\,db = Bb-\frac{b^3}{3}\bigg|_{-\sqrt{B}}^{\sqrt{B}} = \left(B^{3/2}-\frac{B^{3/2}}{3}\right)-\left(-B^{3/2}+\frac{B^{3/2}}{3}\right)=\frac{4}{3}B^{3/2}\,.$$

The total area of the range $[-B,B]\times[-B,B]$ is $4B^2$, so:

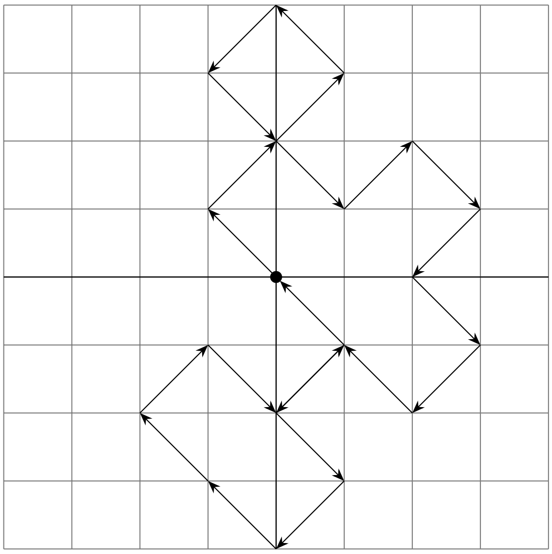
$$\begin{aligned} P(\text{complex roots}) &= \frac{\frac{4}{3}B^{3/2}}{4B^2}=\frac{1}{3\sqrt{B}}\\ P(\text{real roots}) &= 1-\frac{1}{3\sqrt{B}}\,. \end{aligned}$$

תשובה 2:

$$\lim_{B\to\infty}P(\text{real roots})=\lim_{B\to\infty}\left(1-\frac{1}{3\sqrt{B}}\right)=1\,.$$

Simulation

`For B = 4:`



איור 16: walk random Two-dimensional

```
0.8333 = roots real of Probability
0.8271 =     roots real Proportion
                         16: = B For
0.9167 = roots real of Probability
0.9205 =     roots real Proportion
                         64: = B For
0.9583 = roots real of Probability
0.9582 =     roots real Proportion
```

51. הילוך מקרי דו-ממדי (Two-dimensional random walk)^S

moves particle The system. coordinate two-dimensional a of origin the at placed is particle left or right on the x-axis with probabilities $1/2$ and up or down the y-axis with probabilities $1/2$. Figure 16 shows a random walk of 22 steps starting at and returning to the origin.

שאלה 1: moves? 2 in origin the to returning of probability the is What

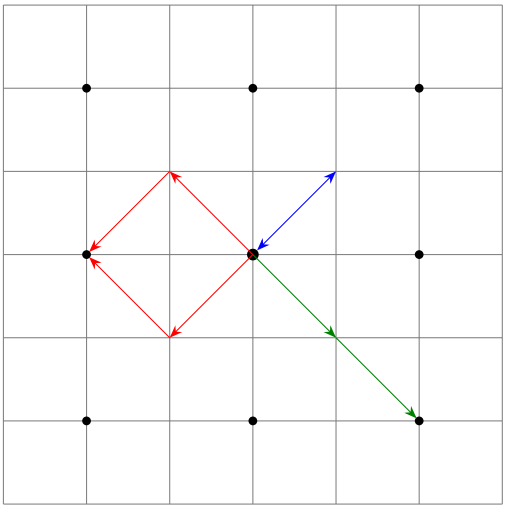
שאלה 2: origin? the to times) more or (one returns particle the that probability the is What

שאלה 3: n. large for probability the of estimate an obtain to approximation Stirling's Use

פתרון

תשובה 1: moves: two after particle the of positions possible the show 17 Figure in dots The

- same the in moves two taking by $(\pm 2, \pm 2)$ to move to how shows path green The direction. The probability is $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$.



איור 17: Two moves of the random walk

- The red path shows how to move to $(\pm 2, 0)$ or $(0, \pm 2)$. There are two possible paths for each one so the probability is $\frac{2}{16} = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$.
- The blue path shows how to move to $(\pm 1, \pm 1)$ and back to the origin. The probability is $1/16$. Since there are four paths that return to the origin the probability is $\frac{4}{16}$.

The blue paths are the only ones that return to the origin so:

$$P(\text{return to origin in two moves}) = \frac{4}{16}\,.$$

תשובה 3: The choices of direction for x and y are independent so for $2n$ moves:

$$P_{2n}(\text{return to origin}) = P_{2n}(\text{return to } x=0)\, P_{2n}(\text{return to } y=0)\,. \tag{33}$$

The particle will return to the origin if and only if for both axes the number of $+1$ moves equals the number of -1 moves. There are $\binom{2n}{n}$ ways to arrange s+1 and s−1 so:

$$P_{2n}(\text{return to } x=0) = P_{2n}(\text{return to } y=0) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{34}$$

$$P_{2n}(\text{return to origin}) = \left[\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^2 \tag{35}$$

$$P(\text{return to origin}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(\text{return to origin}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^2\,. \tag{36}$$

תשובה 3: By Stirling's approximation $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$:

$$P_{2n}(\text{return to origin}) = \left[\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^2 \\
&\approx \left(\frac{1}{2}\right)^{4n} \frac{(\sqrt{2\pi\cdot 2n})^2\,(2n/e)^{4n}}{(\sqrt{2\pi n})^4\,(n/e)^{4n}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{4n} \frac{4\pi n}{4\pi^2 n^2} \cdot \frac{(n/e)^{4n}\cdot 2^{4n}}{(n/e)^{4n}} \\
&= \frac{1}{\pi n} \\
P(\text{return to origin}) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,,
\end{aligned}
$$

which is the harmonic series that diverges. This means that with probability 1 the particle returns to the origin.

Simulation The simulation was run one million times instead of ten thousand times but still there is no certainty of returning to the origin:

```
Proportion returned to origin = 0.8700
```

52. הילוך מקרי תלת-ממדי (Three-dimensional random walk)^{D,S}

A particle is placed at the origin of a three-dimensional coordinate system. The particle moves left or right on the x-axis with probabilities $1/2$ and up or down on the y-axis with probabilities $1/2$ and in or out on the z-axis with probabilities $1/2$.

שאלה 1: What is the expectation of the number of times that the particle returns to the origin?

Hint: Compute the probability and then use an indicator variable.

שאלה 2: What is the probability that the particle will return to the origin (at least once)?

Hint: Use the technique from Problem 4.

פתרון

P_{2n}, probability of returning to the origin after $2n$ steps, is given by the analogue of Equation 33:

$$P_{2n} = P_{2n}(\text{return to } x=0)\, P_{2n}(\text{return to } y=0\, P_{2n}(\text{return to } z=0)\,.$$

P_r, the probability of returning to the origin one or more times, is given by the analogue of Equation 36:

$$P_r = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^3\,.$$

[4]approximation: Stirling's From

$$
\begin{aligned}
P_{2n} &= \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^3 \\
&\approx \left(\frac{1}{2}\right)^{6n}\frac{(\sqrt{2\pi\cdot 2n})^3\,(2n/e)^{6n}}{(\sqrt{2\pi n})^6\,(n/e)^{6n}} \\
&= \frac{(4\pi n)^{3/2}}{(2\pi n)^3} = \frac{1}{(\pi n)^{3/2}} \\
P_r &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi n)^{3/2}} \approx 0.3772\,.
\end{aligned}
$$

: k step on origin the to return a for variable indicator the be I_k Let

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{if particle returns to origin on step } k \\ 0, & \text{if particle does not returns to origin on step } k\,. \end{cases} \tag{37}$$

Then:

$$E(\text{number of returns to the origin}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}\, I_{2n} = P_r \approx 0.3772\,,$$

probability. the to equal is returns of number the of expectation the so

From once. least at origin the to returns particle the that probability the be P_1 Let **:2 שאלה** the where one first the until trials of number the of expectation the that know we 4 Problem number the of expectation the Therefore, $.1/(1-P_1)$ is origin the to return not does particle can particle the because less, one is origin the to return does particle the which for trials of [5]not. does it finally until times many origin the to return

then: $,E_r = E(\text{number of returns to the origin})$ Let

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{1}{1-P_1} - 1 \\
P_1 &= \frac{E_r}{1+E_r}\,.
\end{aligned}
$$

Then: so: $E_r \approx 0.3772$ that computed we **:1 תשובה** In

$$P_1 \approx 1 - \frac{1}{1+0.3772} \approx 0.2739\,.$$

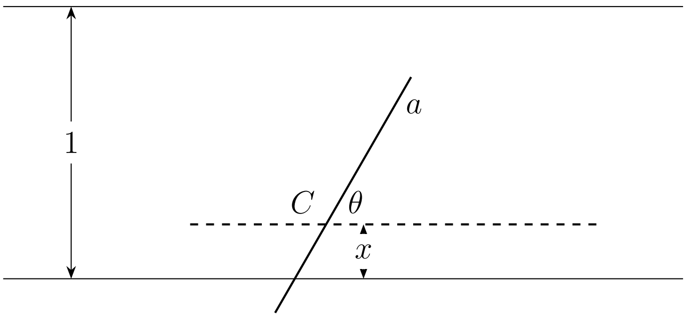
Simulation

```
0.3772 = origin reaching of Expectation
0.3630 =   origin reached times Average
0.2739 = origin reaching of Probability
0.2790 =      origin reached Proportion
```

---

obtain to terms 500 used program My .0.315 obtained and computation his in terms 18 used Mosteller[4]
.0.3772

.[5] clarification for Montgomery Aaron thank to like would I follow. to easy not is presentation Mosteller's[5]



needle Buffon׳s :18 איור

^{D,S}(Buffon's needle) Buffon המחט של .53

the Throw apart. 1 lines parallel with ruled surface a and $a \leq 1$ length of needle a onsider
[6]line? a crosses needle the that probability the is What surface. the onto needle

center the of position the ,x :(18 (Figure variables random independent two are There **Hint:**
and ,$[0,1]$ range the in distributed uniformly is which line closest the to relative needle the of
distributed uniformly is which lines parallel the to relative needle the by formed angle the ,θ
.$[0,\pi/2]$ range the in

פתרון 1

indicator the define and line a crosses a length of needle a that probability the be $p(a)$ Let
variable:

$$I\text{crosses} = \begin{cases} 1, & \text{if needle of length } a \text{ crosses a line} \\ 0, & \text{if needle of length } a \text{ does not cross a line} \, . \end{cases}$$

Then:

$$E(I\text{crosses}) = 1 \cdot p(a) + 0 \cdot (1 - p(a)) = p(a)\,, \tag{38}$$

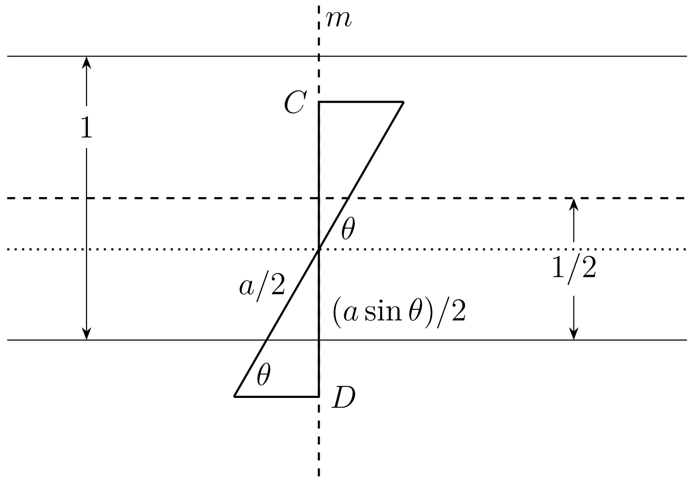
expectation. the computing by computed be can probability the and

needle the of center the through passes that lines parallel the to perpendicular line a be m Let
give to m onto needle the Project line. parallel a and needle the between angle the be θ let and
is: line a cross will needle the that probability The .$\overline{CD}$ segment line the

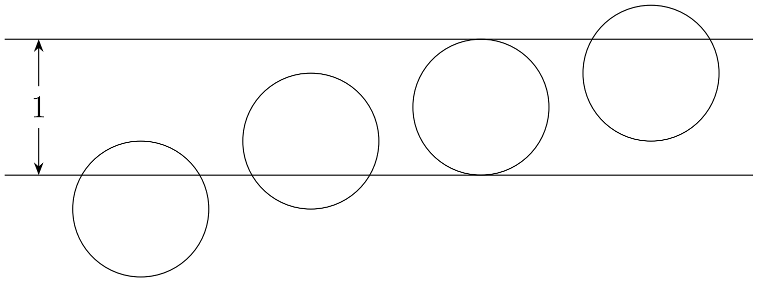
$$P(\text{needle of length } a,\ \text{angle } \theta \text{ crosses line}) = \frac{\overline{CD}/2}{1/2} = \frac{(a/2)\sin\theta}{1/2} = a\sin\theta\,. \tag{39}$$

---

[6] the ignore We .1 as lines parallel the between distance the specifying by simplified been has problem The
these of probability the since lines two touches just or line the along completely lies needle the that possibility
zero. is events



problem needle Buffon's solving for triangle Right : 19 איור



circles with needle Buffon's Solving : 20 איור

angles: possible over integrating by given is crossed lines of number the of expectation The

$$E(\text{lines crossed}) = \frac{1}{(\pi/2)-0}\int_0^{\pi/2} a\sin\theta\, d\theta = \frac{2}{\pi}\cdot a(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2a}{\pi}\,. \tag{40}$$

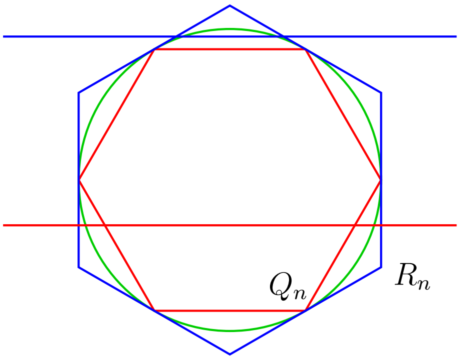
.[26 Chapter ,1] from taken is solution This **2 פתרון**

a Consider $.x$ line a by crossed lines parallel of number the of expectation the be $E(x)$ Let the onto thrown is circle the If $.\pi$ circumference and 1 diameter of C circle a into formed line is: that ,(20 (Figure lines the with intersections two exactly have will it surface

$$E(C) = 2\,. \tag{41}$$

R_n polygon regular a circumscribe and (green) c within (red) Q_n polygon regular a Inscribe any and circle the cross also must crosses Q_n that (red) line Any .(21 (Figure c around (blue) Therefore: $.R_n$ cross also must circle the crosses that (blue) line

$$E(Q_n) \le E(C) \le E(R_n)\,. \tag{42}$$



circle a approximate Polygons :21 איור

of linearity the By respectively. ,Q_n, R_n of sides the of lengths the of sums the be a_Q, a_R Let expectation:

$$E(Q_n) = \sum_{i=1}^{n} E(\text{segments of } a_Q) = a_Q E(1) \tag{43}$$

$$E(R_n) = \sum_{i=1}^{n} E(\text{segments of } a_R) = a_R E(1)\,. \tag{44}$$

so: circle the approximate polygons both $n \to \infty$ As

$$\lim_{n\to\infty} a_Q = \lim_{n\to\infty} a_R = \pi\,, \tag{45}$$

have: we 45--41 Equations From circle. the of circumference the

$$\begin{aligned}
&\lim\nolimits_{n\to\infty} E(Q_n) = E(C) = \lim\nolimits_{n\to\infty} E(R_n)\\
&E(C) = aE(1) = \pi E(1) = 2\\
&E(1) = \frac{2}{\pi}\\
&E(a) = aE(1) = \frac{2a}{\pi}\,.
\end{aligned}$$

Simulation

obtain to used be can table!) a on needles throwing actually (or simulation the $\pi = 2a/E$ Since .π of approximation an

```
                        0.2: = length For
0.1273 = crossings of Expectation
0.1308 =            crossings Average
3.0581 =     pi for value Empirical
```

```
               0.5: = length For
0.3183 = crossings of Expectation
0.3227 =        crossings Average
3.0989 =    pi for value Empirical

               1.0: = length For
0.6366 = crossings of Expectation
0.6333 =        crossings Average
3.1581 =    pi for value Empirical
```

54. המחט של Buffon עם רשת אופקי ואנכי

(Buffon's needle with horizontal and vertical rulings)

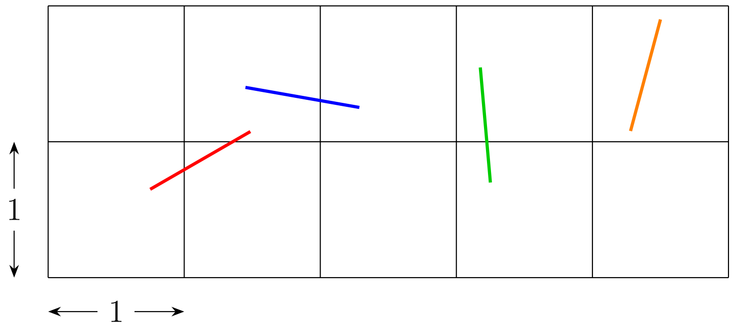
.1×1 size of squares with grid a by covered is that surface a for problem needle Buffon's Solve (orange) neither or (red) both (blue), line horizontal a (green), line vertical a cross can needle A .(22 (Figure

independent? lines vertical and horizontal the of crossings of numbers the Are **Hint:**

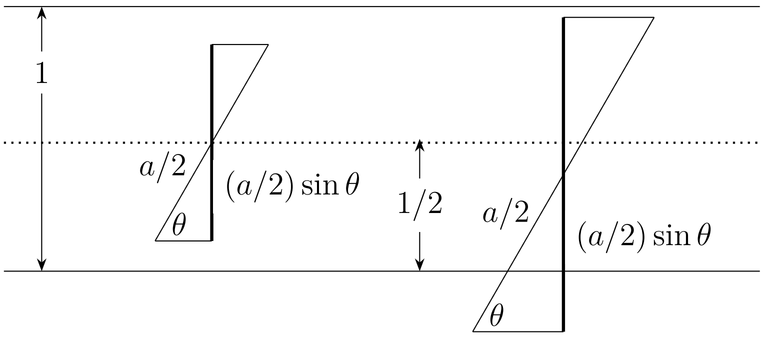
פתרון

expectation and independent are lines vertical and horizontal the of crossings of numbers The so: linear is

$$
\begin{aligned}
E(\text{lines crossed by } a) &= E(\text{vertical lines crossed by } a + \text{horizontal lines crossed by } a)\\
&= E(\text{vertical lines crossed by } a) + E(\text{horizontal lines crossed by } a)\\
&= \frac{2a}{\pi} + \frac{2a}{\pi} = \frac{4a}{\pi}\,.
\end{aligned}
$$



crossings vertical and horizonal with needle Buffon's :22 איור



איור 23: Long needles

55. מחטים ארוכים (Long needles)^{D,S}

Let the length of the needle in Buffon's problem be $a > 1$.

שאלה 1: What is the expectation of the number of crossings?

שאלה 2: What is the probability that there is at least one crossing?

Hint: For what angles θ is the probability a crossing 1?

פתרון

תשובה 1: Break the needle into pieces of lengths $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $a_i < 1$, such that $\sum_{i=1}^{n} a_i =$ a. By the linearity of expectation and the solution of Problem 53:

$$E(a) = \sum_{i=1}^{n} E(a_i) = \frac{2a}{\pi}\,.$$

תשובה 2: This solution is based on [12] and [1, Chapter 26].

By Equation 39 the probability that a needle will cross a line is $a\sin\theta$ if $a\sin\theta \leq 1$, that is, if $0 \leq \theta \leq \sin^{-1}(1/a)$. However, if $a\sin\theta > 1$ then the probability is 1 (Figure 23). Let us generalize Equation 40 for arbitrary $a > 0$. The integral is divided into two, one for $\theta < \sin^{-1}(1/a)$) and one for $\theta > \sin^{-1}(1/a)$):

$$\begin{aligned} E(a) &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\sin^{-1}(1/a)} a\sin\theta\, d\theta + \int_{\sin^{-1}(1/a)}^{\pi/2} 1\, d\theta\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(a(-\cos\theta)\big|_0^{\sin^{-1}(1/a)} + \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1/a)\right)\right) \\ &= 1 + \frac{2}{\pi}\left(a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}\right) - \sin^{-1}(1/a)\right)\,. \end{aligned}$$

Simulation

```
For length = 1.5:
Expectation of crossings = 0.7786
Average crossings        = 0.7780
For length = 2.0:
Expectation of crossings = 0.8372
Average crossings        = 0.8383
For length = 3.0:
Expectation of crossings = 0.8929
Average crossings        = 0.8897
```

56. הכד של Molina (Molina's urns)

et U_1, U_2 be two urns containing m balls each. U_1 has w_1 white balls and b_1 blacks while U_2 has w_2 white balls and b_2 blacks. n balls are drawn with replacement from each urn. Find w_1, b_1, w_2, b_2 such that:

$$p(\text{balls drawn from } U_1 \text{ are all white}) = p(\text{balls drawn from } U_2 \text{ are all white or all black})\,.$$

שאלה 1: Find values of w_1, b_1, w_2, b_2 for $n = 2$.

שאלה 2: Explain why the problem cannot be solved for $n \geq 3$.

פתרון

תשובה 1: The equation that must be solved is:

$$\left(\frac{w_1}{m}\right)^2 = \left(\frac{w_2}{m}\right)^2 + \left(\frac{b_2}{m}\right)^2$$
$$w_1^2 = w_2^2 + b_2^2\,.$$

One solution is $w_1 = 10, b_1 = 4, w_2 = 6, b_2 = 8$.

תשובה 2: By Fermat's Last Theorem, proved in 1995 by Andrew Wiles, there are no solutions to $w_1^n = w_2^n + b_2^n$ for $n \geq 3$.

סקירה על הסתברות

the using given is concept each of example An probability. of concepts reviews section This dice. six-sided fair throwing of activity

a has that action an being intention the concept, primitive undefined an is This **Experiment** [7]experiment. an is die a Throwing trial. a called also is experiment An result. possible

.4 is outcome one die a throw you If experiment. an of result The **Outcome**

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ set The experiment. an of outcomes possible all of set The **space Sample** die. a throwing of outcomes the of space sample the is

die a of event the is $e = \{2, 4, 6\} \subseteq S$ subset The space. sample the of subset A **Event** number. even an showing

sample the be T Let numbers. (real) to space sample a from function A **variable Random** dice: two throwing of space

$$T = \{(a, b) | a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}\,.$$

the gives which $X : T \mapsto \{2, 3, \ldots, 11, 12\}$ function the as X variable random the Define dice: two the on numbers the of sum

$$X((a, b)) = a + b\,. \tag{46}$$

normal their on take concepts these sets are events Since **complement intersection, Union,** Then: .$e_2 = \{1, 2, 3\}$ and $e_1 = \{2, 4, 6\}$ Let meaning. set-theoretical

$$e_1 \cup E_2 = \{1, 2, 3, 4, 6\} \quad e_1 \cap e_2 = \{2\} \quad \overline{e_1} = S \setminus e_1 = \{1, 3, 5\}\,.$$

space. sample the in outcomes three first the among numbers even of set the is intersection The space. sample the in outcomes odd of set the is complement The

the is intersection their if exclusive mutually are events more or Two **exclusive Mutually** is, that ,$e_1 \cap e_2 = \emptyset$ since exclusive mutually are $e_2 = \{1, 3, 5\}$ and $e_1 = \{2, 4, 6\}$ set. empty odd. and even both are which outcomes no are there

let and event an be e Let event. an of frequency relative limiting the is Probability **Probability** probability the ,$P(e)$ Then event. the of repetitions n in occurs e that times of number the be n_e is: ,e event the of

$$P(e) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_e}{n}\,.$$

The exists. limit the that know actually don't we because definition good very a not is This without probability define to want we but event'' an of ``repetitions on depends also definition events. of sequence specific a to reference

---

[7] dice. noun plural familiar more the of singular the is Die

theory, this develop won't we but axioms, three of set a on based is theory probability Modern fundamental: be to seen clearly are axioms the of two though

$$P(e) \geq 0$$
$$P(S) = 1\,.$$

outcome the and occur, doesn't it or probability non-zero some with occurs either event Any outcomes. possible the all definition by is space

frequency relative as probability of concept intuitive our that ensure numbers large of laws The times. many repeated is event an when happens what to similar very is

equally (are probability equal have space sample the in outcomes all If **distributed Uniformly** the and finite is S If distributed. uniformly be to said is probability the occur), to likely then: distributed uniformly is probability

$$P(e) = \frac{|e|}{|S|}\,.$$

distributed, uniformly is outcomes the of probability the die fair a throw you if example, For :$e = \{2, 4, 6\}$ for so

$$P(e) = \frac{|e|}{|S|} = \frac{|\{2,4,6\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \frac{1}{2}\,.$$

e_1 that probability conditional the ,$P(e_1|e_2)$ events. be e_1, e_2 Let **probability Conditional** by: given is occurs, e_2 that given occurs

$$P(e_1|e_2) = \frac{P(e_1 \cap e_2)}{P(e_2)}\,.$$

let and 3 to equal or than less number a shows die a that event the be $e_1 = \{1, 2, 3\}$ Let Then: number. even an shows die the that event the be $e_2 = \{2, 4, 6\}$

$$P(e_2|e_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(e_1)} = \frac{P(\{2\})}{P(\{2,4,6\})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}\,.$$

one only thrown, is 3 to equal or than less number a that know you if since sense makes This number. even an is outcomes three the of out

product the is intersection their of probability the if independent are events Two **Independence** probabilities: individual their of

$$P(e_1 \cap e_2) = P(e_1)\, P(e_2)\,.$$

probability: conditional of terms In

$$P(e_1|e_2) = \frac{P(e_1) \cap P(e_2)}{P(e_2)} = \frac{P(e_1)\, P(e_2)}{P(e_2)} = P(e_1)\,.$$

as information no you gives it e_2 of probability the know you if ,e_1, e_2 events independent For
of all of probability the so independent are die fair a of throws Three .e_1 of probability the to
.$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ is number even an showing them

Then: values. of set a be $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ Let **Average**

$$Average(S) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} .$$

set. the of element an be not may average the but values of set a over computed is average An
per children of number average the children, 3426 and town a in families 1000 are there If
and times six die a throw you If children. 3.426 has family no clearly although 3.426 is family
is: average The .$\{2, 2, 4, 4, 5, 6\}$ numbers the receive

$$\frac{2+2+4+4+5+6}{6} = \frac{23}{6} \approx 3.8 ,$$

set. the in not value a again,

outcome each of probability the of sum the is variable random a of expectation The **Expectation**
same the has outcome each die fair a For outcome. that for variable random of value the times
probability:

$$E(\text{value of a die}) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5 .$$

numbers the maps that (46 (Equation X function the by defined variable random the Consider
,$1/36$ is pair each of probability The numbers. the of sum the to dice of pair a in appearing
The outcome. same the to belong they sum same the have $(5, 2)$ and $(2, 5)$ pairs the since but
each obtaining of ways of number the that and $\{2, \ldots, 12\}$ are variable random the of values
is: one

Sum	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pairs	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

probability the by weighted variable random the of values the of average the is expectation The
outcome: each of

$$E(\text{sum of two dice}) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \cdots + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7 .$$

is: expectation the $\{e_1, \ldots, e_n\}$ events of set arbitrary an For

$$E = \sum_{i=1}^{n} e_i P(e_i) .$$

$E(ae_1 + be_2) = aE(e_1) + bE(e_2)$ function linear a is Expectation **expectation of Linearity**
expression: linear arbitrary an for and

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(e_i) .$$

.[4.9 Section ,11] see proof a For

indicator an ,I_e Define .$P(e)$ is probability whose event an be e Let **variable Indicator** 3b]: Example ,4 Chapter ,11] follows as ,e for variable

$$I_e = \begin{cases} 1, & \text{if } e \text{ occurs} \\ 0, & \text{if } e \text{ does not occur}\,. \end{cases}$$

.$E(I_e) = 1 \cdot P(e) + 0 \cdot (1 - P(e)) = P(e)$ Then

formulas Mathematical

of sequence a that probability the then p is e event an of probability the If **theorem Binomial** :coefficient binomial the by given is e events k exactly in results trials independent n

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,.$$

:theorem binomial the By

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}\,.$$

occur. must outcomes the of one since expected, as ,$(p + (1-p))^n = 1$ is the $p, 1-p$ For

:$0 < r < 1$ For **series geometric a of Sum**

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}, \qquad \sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}\,.$$

is: series harmonic the n integer positive For **series harmonic a of Sum**

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \ln n + \frac{1}{2n} + \gamma\,,$$

diverges: series the infinity approaches n As constant. Euler's is $\gamma \approx 0.5772$ where

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty\,,$$

unbounded. is $\ln n$ because

use to convenient is It difficult. very is n large for $n!$ Computing **approximation Stirling's** :approximation Stirling's of formulas the of one

$$\begin{aligned} n! &\approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \\ \ln(n!) &\approx n \ln n - n \\ \ln(n!) &\approx n \ln n - n + \frac{1}{6}\left(8n^3 + 4n^2 + n + \frac{1}{30}\right) + \frac{1}{2}\ln \pi\,. \end{aligned}$$

distribution probability Continuous

do they but distributions, probability continuous learned have not may student beginning A review we background, appropriate the with readers For book. the in often very appear not concepts. basic the

function density probability A variables. random continuous over defined be can Probabilities defining: thus function, the of value the to x outcome an maps $f(x) : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ (PDF)

$$P(x) = f(x)\,.$$

of probability zero has number real individual each that is terminology this for reason The points. of neighborhoods to probabilities assign to is interpretation proper the so occurring,

integrating by obtained is $[-\infty, a]$ interval the for (CPD) distribution probability cumulative The PDF: the

$$P(x < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx\,.$$

.$P(a) = 0$ since $P(x \le a)$ also is this course Of

and: ,x all for $P(x) \ge 0$ PDF, a for probabilities, Like

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1\,.$$

a if example, For used. be must constant normalization a 1 to evaluate not does integral the If then: $[a, b]$ range the in distributed uniformly is PDF

$$P(a \le x \le b) = \int_{a}^{b} 1\,dx = (b-a)\,,$$

define: must we therefore and

$$P(a \le x \le b) = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} 1\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot (b-a) = 1\,.$$

: x by multiplied $f(x)$ PDF the integrating by obtained be can expectation The

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx\,.$$

CPD: the differentiating by obtained be can PDF The

$$P(x < a) = \frac{d}{da} CDP(x < a)\,.$$

מקורות

[1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. Proofs from THE BOOK (Fifth Edition). Springer, .2014

[2] Matthew Carlton. Pedigrees, prizes, and prisoners: The misuse of conditional probability. Journal of Statistics Education, ,(2)13 .2005 `https://doi.org/10.1080/10691898.2005.11910554`.

[3] John P. Gilbert and Frederick Mosteller. Recognizing the maximum of a sequence. Journal of the American Statistical Association, ,73--35:(313)61 .1966

[4] Markus C. Mayer. Average distance between random points on a line segment. Mathematics Stack Exchange. `https://math.stackexchange.com/q/1540015`.

[5] Aaron Montgomery. Mosteller's solutions to random-walk problems. Mathematics Stack Exchange. URL: https://math.stackexchange.com/q/4460054.

[6] David S. Moore. A generation of statistics education: An interview with Frederick Mosteller. Journal of Statistics Education, ,(1)1 .1993 `https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/10691898.1993.11910453`.

[7] Frederick Mosteller. Understanding the birthday problem. The Mathematics Teacher, ,325--322:(5)55 .1962

[8] Frederick Mosteller. Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions. Dover, .1965

[9] Frederick Mosteller, Stephen E. Fienberg, and Robert E. K. Rourke. Beginning Statistics with Data Analysis. Addison-Wesley, .1983

[10] Frederick Mosteller, Robert E. K. Rourke, and George B. Thomas Jr. Probability With Statistical Applications. Addison-Wesley, .1961

[11] Sheldon Ross. A First Course in Probability (Tenth Edition). Pearson, .2019

[12] Wikipedia. Buffon's needle problem.