

הבעיות המאתגרות בהסתברות של Mosteller

מוטי בן-ארי

<http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/>

גרסה 0.2

17 ביולי 2022

© Moti Ben-Ari 2022

This work is licensed under Attribution-ShareAlike 4.0 International. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>.

תוכן העניינים

4

מבוא

6

בעיות ופתרונות

- 6 1. מגרת הגרביים (The sock drawer)
- 9 2. נצחונות עוקבים (Successive wins)
- 10 3. המושבע קל הדעת (The flippant juror)
- 10 4. ניסיונות עד להצלחה הראשונה (Trials until first success)
- 12 5. מטבע בריבוע (Coin in a square)
- 13 6. הטלת מזל (Chuck-a-luck)
- 14 7. לרפא את המהמר הכפייתי (Curing the compulsive gambler)
- 15 8. קלפים מושלמים בברידיג' Perfect bridge hand
- 16 9. משחק קוביות Craps
- 19 13. דילמת האסיר The prisoner's dilemma
- 20 14. איסוף תלושים Collecting coupons
- 21 15. שורה בתיאטרון The theater row
- 22 16. האם השני בדירוג יזכה המקום שני? Will the second-best be runner-up?
- 23 17. זוג אבירים Twin knights
- 25 18. תוצאה שווה בהטלת מטבע An even split at coin tossing
- 26 19. Isaac Newton עוזר ל-Samuel Pepys Samuel Pepys helps Isaac Newton
- 27 20. דו-קרב משולש (The three-cornered duel)
- 30 21. לדגום עם או בלי החזרות? (Should you sample with or without replacement?)
- 32 22. הקלפי (The ballot box)
- 34 23. תיקו בהשוואת מטבעות (Ties in matching pennies)
- 36 25. אורכים של מיתרים אקראיים (Lengths of random chords)
- 37 26. ממהרים לדו-קרב (The hurried duelers)
- 38 27. לתפוס את הזייפן הזהיר (Catching the cautious counterfeiter)
- 40 28. לתפוס את הזייפן החמדן (Catching the greedy counterfeiter)
- 41 29. עובש בג'לטין (Moldy gelatin)
- 42 31. ימי הולדת זהים (Birthday pairings)
- 43 32. למצוא עמית ליום ההולדת (Finding your birthmate)
- 44 33. השוואת הבעיות יום הולדת זהה ועמית ליום ההולדת
- 44 (Relating the birthday pairings and the birthmate problems)

45 (Birthday holidays)	34. חופש בימי הולדת
47 (The cliff-hanger)	35. על שפת התהום
49 (Gambler's ruin)	36. המהמר פשט רגל
52 (Bold play vs. cautious play)	37. משחק נועז או משחק זהיר
53 (The clumsy chemist)	39. הכימאי המגושם
54 (The first ace)	40. האס הראשון
56 (The little end of the stick)	42. הקצה הקצר של המקל
57 (The broken bar)	43. המוט השבור
59 (Winning an unfair game)	44. לנצח במשחק לא-הוגן
60 (Average number of matches)	45. ממוצע של מספר ההתאמות
61 (Probabilities of matches)	46. הסתברויות של התאמות
62 (Choosing the largest dowry)	47. לבחור את המוהר הגדול ביותר
64 (Choosing the largest random number)	48. בחירת המספר האקראי הגדול ביותר
67 (Doubling you accuracy)	49. להכפיל את הדיוק
67 (Random quadratic equations)	50. משוואות ריבועיות אקראיות
69 (Two-dimensional random walk)	51. הילוך מקרי דו-ממדי
71 (Three-dimensional random walk)	52. הילוך מקרי תלת-ממדי
73 (Buffon's needle)	53. המחט של Buffon
		54. המחט של Buffon עם רשת אופקי ואנכי
76 (Buffon's needle with horizontal and vertical rulings)	
76 (Long needles)	55. מחטים ארוכים
78 (Molina's urns)	56. הכד של Molina

79 סקירה של הסתברות

84 מקורות

מבוא

Frederick Mosteller

Frederick Mosteller (1916--2006) ייסד את המחלקה לסטטיסטיקה באוניברסיטת Harvard ושירת כראש המחלקה מ-1957 ועד 1971, ויצא לגמלאות שנת 2003. ל-Mosteller היתה התעניינות עמוקה בחינוך בסטטיסטיקה וחיבר ספרי לימוד חלוציים כולל [10] שהידגש את הגישה ההסתברותי לסטטיסטיקה, ו-[9] שהיה אחת מספרי הלימוד הראשונים בניתוח מידע. בראיון תיאר Mosteller את ההתפתחות של גישתו להוראת הסטטיסטיקה [6].

מסמך זה

מסמך זה הוא "עיבוד" לספרו שובה הלב של Mosteller: **חמישים בעיות מאתגרות בהסתברות ופתרונות** [8]. הבעיות הפתורות מוצגות ככל האפשר בצורה נגישה לקוראים עם ידע בסיסי בהסתברות, ובעיות רבות נגישות לתלמידי תיכון ולמורים. שכתבתי אתה בעיות והפתרונות עם חישובים מפורטים והסברים נוספים ואיורים. לעתים כללתי פתרונות נוספים.

רבות מהבעיות שונן כדי שיהיו נגישות: הבאתי גרסאות פשוטות שלהן, חילקתי לתת-בעיות והוספתי רמזים. כהעדפה אישית ניסחתי אותן מחדש בצורה מופשטת יותר מ-Mosteller ולא נתתי ולא תרגמתי יחידות כגון אינצ'ים ומטבעות כגון דולרים.

המספור והכותרות נשארו כדי להקל על השוואה עם ספרו של Mosteller.

מחשבוניים מודרניים, כולל אפליקציות לסמארטפון, מסוגלים לבצע את כל החישובים ללא קושי.

עבור רוב הבעיות נכתבו סימולציות בשפת התכנות Python.

בסעיף האחרון חזרה על מושגים בסיסיים בהסתברות לפי [11].

הבעיות סומנו כדלקמן:

- בעיות המסומנות ב- D קשות יותר.

- בעיות עבורן קיימות סימולציות סומנו ב- S .

אתם עלולים למצוא שאפילו בעיות שאינן מסומנות ב- D הן קשות. אל נא להתיימש אם לא תוכלו לפתור אותן. בכל זאת שווה לנסות לפתור את כולן כי כל התקדמות לקראת פתרון תעודד.

סימולציות

Monte Carlo simulations (על שם קזינו מופרסם במונקו) נכתבו בשפת התכנות Python 3. תכנית מחשב "מבצעת ניסוי" כגון "הטלת זוג קוביות" או "הטלת מטעה" מספר רב מאוד של פעמים ומחשב ומציג ממוצעים. השתמשתי במחוללי מספרי אקראיים הבנויים בתוך Python, `random.random()`, ו-`random.randint()`, כדי לקבל תוצאות אקראיות לכל ניסוי.

כל תכנית מריצה סימולציה המורכבת מ-10000 ניסויים והתוצאות מוצגות עם ארבע ספרות לאחר הנקודה העשרונית. כמעט תמיד התוצאה לא תהיה זהה לתוצאה שמתקבלת מחישוב ההסתברות או התוחלת. תוכל להריץ תכנית פעמים רבות ולבדוק את התוצאות משתנות.

ניתן להוריד את קבצי המקור ב-Python מ:

<https://github.com/motib/probability-mosteller>

שמות הקבצים הם N-name.py כאשר N הוא מספר הבעיה ו-name הוא שם הבעיה (באנגלית).
שתי תוצאות מוצגות (באנגלית) עבור כל סימולציה:

- התוצאה התיאורטית שהיא **הסתברות** (Probability) או **תוחלת** (Expectation). בדרך כלל, במקום להעתיק את הערכים המחושבים התכנית מחשבת אותם מהנוסחאות.
- תוצאת הסימולציה שהיא **היחס בין מספר ההצלחות לבין מספר הניסויים** (Proportion) שהוא מקביל להסתברות, או **ממוצע ההצלחות** (Average) שהוא מקביל לתוחלת.

חשוב להבין שהסתברות ותוחלת הן מושגים תיאורטיים. **חוק המספרים הגדולים** מבטיח שהתוצאות של מספר רב של ניסויים תהינה קרובות לערכים התיאורטיים, אבל הם לא יהיו בזהות. למשל, ההסתברות לקבל 6 בהטלת קוביה הוגנת היא $0.1667 \approx 1/6$. בהרצת סימולציה של 10000 הטלות קיבלתי טווח של ערכים: 0.1656, 0.1665, 0.1687, 0.1693, 0.1684.

בעיות ופתרונות

1. מגרת הגרביים ^S(The sock drawer)

במגרה נמצאות גרביים אדומות וגרביים שחורות. אם נשלף שתי גרביים בצורה אקראית (עם החזרה) ההסתברות ששתיהן אדומות היא $\frac{1}{2}$.

שאלה 1: מה המספר הקטן ביותר של גרביים שחורות שיכולות להיות במגרה? עבור מספר זה מה מספר הגרביים האדומות?

שאלה 2: מה המספר הזוגי הקטן ביותר של גרביים שחורות שיכולות להיות במגרה? עבור מספר זה מה מספר הגרביים האדומות?

פתרון 1

תשובה 1: יהי r מספר הגרביים האדומות במגירה ויהי b מספר הגרביים השחורות. $r \geq 2$ כי נתון שניתן לשלוף שתי גרביים אדומות, ו- $b \geq 1$ אחרת ההסתברות של שליפת שתי גרביים אדומות היה 1. נכפיל את ההסתברויות של שתי השליפות:

$$(1) \quad P(\text{שניים אדומים}) = \frac{r}{r+b} \cdot \frac{(r-1)}{(r-1)+b} = \frac{1}{2}.$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית עבור המשתנה r :

$$(2) \quad r^2 - r(2b+1) - (b^2 - b) = 0.$$

r, b שנייהם מספרים שלמים חיוביים ולכן הדיסקרימיננט חייב להיות ריבוע של מספר שלם:

$$(3) \quad (2b+1)^2 + 4(b^2 - b) = 8b^2 + 1$$

הדיסקרימיננט הוא ריבוע כאשר $b = 1$ (הערך הקטן ביותר). ממשוואה $2, r = 3$, כאשר אנו דוחים את הפתרון $r = 0$ כי $r \geq 2$. סכום מספר הגרביים הוא 4.

$$\text{בדיקה: } \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

תשובה 2: בדקו כל מספר שלם חיובי זוגי של b כדי למצוא את המספר הקטן ביותר עבורו הדיסקרימיננט הוא ריבוע:

b	$8b^2 + 1$	$\sqrt{8b^2 + 1}$
2	33	5.74
4	129	11.36
6	289	17

עבור $b = 6$ הערך של r הוא 15 שמתקבל על ידי פתרון משוואה 2.

$$\text{בדיקה: } \frac{15}{21} \cdot \frac{14}{20} = \frac{1}{2}$$

פתרון 2

תשובה 1: האם אי-שוויון זה נכון?

$$(4) \quad \frac{r}{r+b} \stackrel{?}{>} \frac{r-1}{(r-1)+b}.$$

$r \geq 2, b \geq 1$ ולכן שני המכנים חיוביים וניתן להכפיל את שני הצדדים :

$$\begin{aligned} r(r-1+b) &\stackrel{?}{>} (r-1)(r+b) \\ r^2 - r + rb &\stackrel{?}{>} r^2 - r + rb - b \\ b &\stackrel{?}{>} 0. \end{aligned}$$

$b > 1$ כך שמשווה 4 נכונה.

לפי משוואות 1, 4 :

$$(5) \quad \left(\frac{r}{r+b}\right)^2 = \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r}{r+b} > \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r-1}{(r-1)+b} = \frac{1}{2},$$

ובאופן דומה :

$$(6) \quad \left(\frac{r-1}{(r-1)+b}\right)^2 = \frac{r-1}{(r-1)+b} \cdot \frac{r-1}{(r-1)+b} < \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r-1}{(r-1)+b} = \frac{1}{2}.$$

המכנה $r+b$ שונה מאפס ולכן ניתן לחשב שורש ריבועי ולפשט את משוואה 5 :

$$\begin{aligned} \frac{r}{r+b} &> \sqrt{\frac{1}{2}} \\ r &> \frac{b}{\sqrt{2}-1} \\ r &> \frac{b}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \\ r &> b(\sqrt{2}+1). \end{aligned}$$

באופן דומה עבור משוואה 6 :

$$\begin{aligned} \frac{r-1}{(r-1)+b} &< \sqrt{\frac{1}{2}} \\ r-1 &< \frac{b}{\sqrt{2}-1} \\ r-1 &< b(\sqrt{2}+1). \end{aligned}$$

משתי המשוואות נקבל :

$$(7) \quad r-1 < (\sqrt{2}+1)b < r.$$

עבור $b=1$ מתקבל $2.141 < r < 3.141$ ו- $r=3, b=1$ הוא פתרון.

תשובה 2: נבדוק מספרים זוגיים עבור b :

b	$(\sqrt{2} + 1)b$	$< r < (\sqrt{2} + 1)b + 1$	r	$P(\text{אדומות שתי})$
2	4.8	$< r < 5.8$	5	0.4762
4	9.7	$< r < 10.7$	10	0.4945
6	14.5	$< r < 15.5$	15	0.5000

Mosteller מעיר שקיים קשר בין בעיה זו לתורת המספרים ומביא פתרון נוסף: $b = 35, r = 85$.

Simulation

Expectation of both red = 0.5000

Average of both red for (red = 3, black = 1) = 0.5053

Average of both red for (red = 15, black = 6) = 0.5013

Average of both red for (red = 85, black = 35) = 0.4961

הערה

בשני הפתרונות אנחנו לא מוכיחים תנאי מספיק עבור הערכים של r, b . בפתרון 1 פיתחנו תנאי הכרחי--לפי משוואה 3 הדיסקרימיננט חייב להיות מספר שלם---ומחפשים ערכים של b שעומדים בדרישה זו. בפתרון 2 התנאי ההכרחי הוא ש- r, b מספקים את האי-שוויונות במשוואה 7 ואז חיפשנו ערכים שעומדים בדרישה זו. כתבתי תכנית קצרה לחפש פתרונות בטווח $[1, 50]$. התוצאות עבור ערכים מסביב ל-35 הן:

32	78	90.52	0.500917
33	80	93.34	0.499368
34	83	96.17	0.501474
35	85	99.00	0.500000
36	87	101.83	0.498601
37	90	104.66	0.500562

כאשר הטורים הם (משמאל לימין) מספר הגרביים השחורות, מספר הגרביים האדומות, השורש של הדיסקרימיננט (משוואה 3), ההסתברות לשלוף שתי גרביים אדומות.

בעזרת תכנית מחשב מצאתי את הפתרונות הבאים עבור מספר גרביים שחורות פחות ממיליון:

שחורות	אדומות
1	3
6	15
35	85
204	493
1189	2871
6930	16731
40391	97513
235416	568345

2. נצחונות עוקבים ^S(Successive wins)

תם משחקים סדרה של שלושה משחקים נגד אני יריבים ואתם מנצחים בסדרה אם אתם מנצחים שני משחקים לפחות מתוך שלושה. ההסתברות שאתם מנצחים במשחק נגד שחקן P_1 היא p_1 וההסתברות שאתם מנצחים במשחק נגד שחקן P_2 היא p_2 . נתון ש- $p_1 > p_2$. באיזה המתסריטים שלהן יש לכם סיכוי גדול יותר לנצח בסדרה?

• אתם משחקים נגד P_1, P_2, P_1 בסדר זה.

• אתם משחקים נגד P_2, P_1, P_2 בסדר זה.

פתרון 1

אתם מנצחים אם: (א) אתם מנצחים בשני השחקים הראשונים ומפסידים בשלישי, (ב) אתם מפסידים את המשחק הראשון ומנצחים משחק השני ובמשחק השלישי. (ג) אתם מנצחים בשלושת המשחקים.

תהיו p_{121} ו- p_{212} ההסתברויות שאתם מנצחים בסדרה בשני התסריטים:

$$p_{121} = p_1 p_2 (1 - p_1) + (1 - p_1) p_2 p_1 + p_1 p_2 p_1$$

$$p_{212} = p_2 p_1 (1 - p_2) + (1 - p_2) p_1 p_2 + p_2 p_1 p_2 .$$

קיים סיכוי גדול יותר לנצח בסדרה בתסריט הראשון אם $p_{121} > p_{212}$, כלומר, אם:

$$\begin{aligned} p_1 p_2 (1 - p_1) + (1 - p_1) p_2 p_1 + p_1 p_2 p_1 &\stackrel{?}{>} p_2 p_1 (1 - p_2) + (1 - p_2) p_1 p_2 + p_2 p_1 p_2 \\ -p_1 p_2 p_1 &\stackrel{?}{>} -p_2 p_1 p_2 \\ p_1 &\stackrel{?}{<} p_2 . \end{aligned}$$

נתון ש- $p_1 > p_2$ לכן כדאי לבחור את התסריט השני.

פתרון 2

הפתרון לא-איטואיטיבי. לפי האינטואיציה, כדאי לבחור לשחק שני משחקים נגד P_1 ואחד נגד P_2 כי יש סיכוי גבוה יותר לנצח משחק נגד P_1 . אולם, הדרך היחידה לנצח את הסדרה היא בנצחון ב-משחק האמצעי, ולכן, כדאי לשחק את המשחק האמצעי נגד P_1 , כי יש סיכוי גבוה יותר לנצח אותו.

סימולציה

For $p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.5$
 Proportion of P121 wins = 0.4166
 Proportion of P212 wins = 0.4473
 For $p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.4$
 Proportion of P121 wins = 0.3300
 Proportion of P212 wins = 0.3869
 For $p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.2$
 Proportion of P121 wins = 0.1625
 Proportion of P212 wins = 0.2141

הסבר למה סכום היחסים אינו 1.

3. המושבע קל הדעת ^S(The fliprant juror)

ש שתי אפשרויות להגיע להכרעה: (א) פאנל של שלושה מושבעים המורכב משני מושבעים שמקבלים החלטה בלתי-תלויה עם הסתברות של p להגיע להחלטה הנכונה ומושבע שלישי שמגיע להחלטה נכונה בהסתברות של $1/2$. ההכרעה הנכונה מתקבלת לפי הצבעת רוב. (ב) ההכרעה מתקבלת על ידי מושבע יחי שיש לו הסתברות של p להגיע להחלטה נכונה. באיזו אפשרות ההסתברות הגבוהה ביותר להגיע להכרעה שנכונה?

פתרון

הפאנל מגיע להכרעה נכונה אם שלושת המושבעים מגיעים להחלטה נכונה או אם כל שני מושבעים מגיעים להחלטה נכונה. ההסתברות היא:

$$\underbrace{\left(p \cdot p \cdot \frac{1}{2}\right)}_{\text{שלושה נכונים}} + \underbrace{\left(p(1-p) \cdot \frac{1}{2} + (1-p)p \cdot \frac{1}{2} + p \cdot p \cdot \frac{1}{2}\right)}_{\text{שניים נכונים מתוך שלושה}} = p,$$

כך שאין הבדל בין שתי האפשרויות.

Simulation

Prediction: probabilities of (a) and (b) are equal

For $p = 0.25$, proportion correct of (a) = 0.5019, (b) = 0.5046

For $p = 0.50$, proportion correct of (a) = 0.5072, (b) = 0.4970

For $p = 0.75$, proportion correct of (a) = 0.5062, (b) = 0.5040

4. ניסיונות עד להצלחה הראשונה ^S(Trials until first success)

מה התוחלת של מספר ההטלות של קוביה עד שהופיע 6?

פתרון 1

ההסתברות שההטלה ה- i תהיה ההופעה הראשונה של 6 היא ההסתברות שבהטלות $i - 1$ יופיע אחד מחמשת המספרים האחרים כפול ההסתברות שבהטלה ה- i יופיע 6. כדי לפשט את הסימון נשתמש ב- p במקום $1/6$:

$$P(i \text{ מופיע לראשונה בהטלה } 6) = (1-p)^{i-1}p.$$

מספר ההטלות לא חסום.

תהי $E = E(6 \text{ הטלה ראשונה של } 6)$. אזי:

$$(8) \quad E = 1p(1-p)^0 + 2p(1-p)^1 + 3p(1-p)^2 + 4p(1-p)^3 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} ip(1-p)^{i-1}.$$

ללא ה- i הסכום היה ההסתברות של הטלה של 6 בסופי של דבר :

$$(9) \quad P(\text{הטלה בסופו של דבר של 6}) = \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

זאת לא תוצאה מפתיעה.

ניתן לחשב את התוחלת כך :

$$\begin{aligned} E &= p(1-p)^0 + p(1-p)^1 + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + \dots \\ &\quad p(1-p)^1 + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + \dots \\ &\quad \quad p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + \dots \\ &\quad \quad \quad p(1-p)^3 + \dots \end{aligned}$$

השורה הראשונה היא סכום הסדרה ההנדסית ממשוואה 9 שהוא 1. השורה השנייה היא אותה סדרה הנדסית אינסופית עם איבר ראשון $p(1-p)$ ולכן הסכום הוא :

$$\frac{p(1-p)}{1-(1-p)} = 1-p.$$

באופן דומה, סכום השורה השלישית הוא $(1-p)^2$ וסכום השורה ה- i הוא $(1-p)^{i-1}$. לכן התוחלת היא סכום הסידרה ההנדסית האינסופית :

$$E = 1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \dots = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p} = 6.$$

פתרון 2

הכפל את משוואה 8 ב- $1-p$ והחסר את תוצאה מאותה משוואה. התוצאה היא הסדרה ההנדסית במשוואה 9 :

$$\begin{aligned} E &= p(1-p)^0 + 2p(1-p)^1 + 3p(1-p)^2 + 4p(1-p)^3 + \dots \\ E \cdot (1-p) &= p(1-p)^1 + 2p(1-p)^2 + 3p(1-p)^3 + \dots \\ E \cdot (1-(1-p)) &= p + p(1-p)^1 + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + \dots \\ &= 1 \\ E &= 1/p. \end{aligned}$$

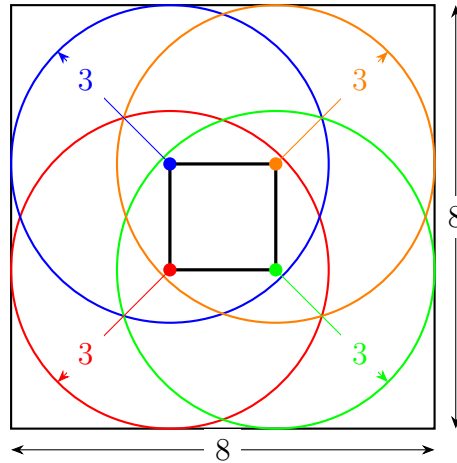
בגלל ש- $p = 1/6$, התוחלת של מספר ההטלות עד להופעה של 6 היא 6.

פתרון 3

נתייחס להטלה הראשונה בנפרד משאר ההטלות. אם בהטלה הראשונה מופיע 6 (בהסתברות p) הטלה אחת מספיקה. אחרת, אם בהטלה לא מופיע 6 (הסתברות $1-p$) אזי ההטלות הבאות מרכיבות סדרה זהה לסדרה המקורית שהתוחלת שלה היא E . לכן התוחלת היא :

$$\begin{aligned} E &= 1 \cdot p + (E+1)(1-p) \\ E &= \frac{1}{p} = 6. \end{aligned}$$

סימולציה



איור 1 : גבולות למטבעות שאינם חותכות את הריבוע

Expectation of first success = 6
Average of first success = 6.0161

5. מטבע בריבוע S (Coin in a square)

שאלה 1: נתון ריבוע עם צלע באורך 8 ומטבע עם רדיוס 3. הטל את המטבע על הריבוע. מרכז המטבע נוחת בתוך המטבע עם התפלגות אחידה. מה ההסתברות שהמטבע נוחת כולו בתוך הריבוע?

שאלה 2: בכל הטלה אתה מרוויח 5 אם המטבע נוחת בתוך הריבוע ומפסיד 1 אם הוא נוגע בריבוע. מה תוחלת הרווח לכל הטלה?

שאלה 3: פתח נוסחה להסתברות שהמטבע נוחת בתוך הריבוע אם אורך הצלע הוא a ורדיוס המטבע הוא r כאשר $r < a/4$.

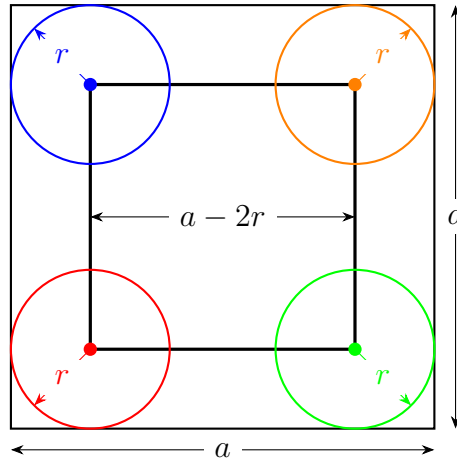
פתרון

תשובה 1: איור 1 מראה מטבע על צלע 8 וארבעה מעגלים בקוטר 3 חסומים על ידי פינות הריבוע. מרכזי המעגלים מרכיבים ריבוע פנימי עם צלע 2. כל מטבע שמרכזו מחוץ לריבוע יחתוך צלע של הריבוע החיצוני. למיקום של מרכז המטבע התפלגות אחידה ולכן ההסתברות שהמטבע נוחת כולו בתוך הריבוע הוא היחס בין השטח של הריבוע הפנימי לשטח של הריבוע החיצוני:

$$P(\text{המטבע נוחת כולו בתוך הריבוע}) = \frac{2 \cdot 2}{8 \cdot 8} = \frac{1}{16} = 0.0625.$$

תשובה 2: התוחלת שלילית:

$$E(\text{הטלה לכל הטלה}) = 5 \cdot \frac{1}{16} + (-1) \cdot \frac{15}{16} = -\frac{10}{16} = -0.625.$$



איור 2: מטבעות בריבוע גדול

תשובה 3: איור 2 מראה ארבעה מעגלים חסומים על ידי פינות הריבוע. הצלע של הריבוע הפנימית הוא $a - 2r$ ולכן:

$$P(\text{המטבע נוחת בתוך המעגל}) = \frac{(a - 2r)^2}{a^2}.$$

סימולציה

For side = 8, radius = 1:
 Probability of landing within the square = 0.5625
 Proportion landing within the square = 0.5704
 For side = 8, radius = 2:
 Probability of landing within the square = 0.2500
 Proportion landing within the square = 0.2481
 For side = 8, radius = 3:
 Probability of landing within the square = 0.0625
 Proportion landing within the square = 0.0639
 For side = 8, radius = 4:
 Probability of landing within the square = 0.0000
 Proportion landing within the square = 0.0000

6. הטלת מזל (Chuck-a-luck)^S

חר מספר n בין 1 ל-6. הטל שלוש קוביות. אם לא מופיע n על אף קוביה אתה מפסיד 1; אם n מופיע על קוביה אחת אתה מרוויח 1; אם n מופיע על שתי קוביות אתה מרוויח 2; אם n מופיע על כל שלושת הקוביות אתה מרוויח 3. מה התוחלת של הרווח?

פתרון

תהי $P(k)$ ההסתברות ש- n מופיע על k קוביות. אזי:

$$E(\text{רווח לכל הטלה}) = -1P(0) + 1P(1) + 2P(2) + 3P(3).$$

ההטלות של שלושת הקוביה הן בלתי-תלויות ולכן כל ההסתברויות ניתנות על ידי ההתפלגות הבינומית עם $p = 1/6$, ההסתברות ש- n מופיע על קוביה:

$$\begin{aligned} E(\text{רווח לכל הטלה}) &= -1 \binom{3}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 1 \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \\ &\quad 2 \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 + 3 \binom{3}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 \\ &= \frac{1}{216} (-125 + 75 + 30 + 3) \\ &= -\frac{17}{216} \approx -0.0787. \end{aligned}$$

סימולציה

Expectation of winnings = -0.0787

Average winnings = -0.0724

7. לרפא את המהמר הכפייתי ^S(Curing the compulsive gambler)

ולט roulette הוא משחק מזל שמשחקים עם גלגל בעל 38 כיסים ממוספרים: 18 אדומים, 18 שחורים ו-2 ירוקים.¹ מסובבים את הגלגל וכדור נוחת באחד הכיסים. הקזינו מנצח אם הכדור נוחת בכיס ירוק; אחרת, את מרוויחה 36 עבור הימור של 1 על מספר הכיס (אדום או שחור) בו נוחת הכדור. את משחקת 36 סבבים של רולט ומהממרת 1 בכל סבב.

שאלה 1: מה התוחלת של הרווח?

שאלה 2: חברך מציע להמר 20 שאחרי 36 סבבים את תפסיד כסף. מה התוחלת של הרווח בהתחשב ברווח או הפסד של המשחק וגם של ההימור על חברך?

פתרון

תשובה 1: ההסתברות של ניצחון בסבב אחד היא $1/38$ ולכן:

$$\begin{aligned} E(\text{רווח בסבב אחד}) &= 35 \cdot \frac{1}{38} + (-1) \cdot \frac{37}{38} = -\frac{2}{38} \approx -0.0526 \\ E(\text{רווח ב-36 סבבים}) &= 36 \cdot -0.05266 = -1.8947. \end{aligned}$$

(הרווח נטו הוא 35 כי ה-36 שאת מקבלת כולל החזרת ה-1 של ההימור.)

תשובה 2: נבדוק את ארבעת התוצאות של 36 של משחק הרולט:

¹ברולט אמריקאי נמצאים שני כיסים ירוקים וברולט אירופאי נמצא כיס ירוק אחד.

- אם את מפסידה בכל הסבבים ההפסד הוא 36.
- אם את מנצחת בסבב אחד ומפסידה ב-36 סבבים אין רווח ואין הפסד.
- אם את מנצחת בשני סבבים את מרוויחה 70 ומפסידה 34 בשאר הסבבים כך שהרווח נטו הוא 36.
- אם את מנצחת ב- k עבור $2 < k \leq 36$, הרווח נטו הוא $35k - (36 - k) > 0$.

לכן את הפסידה כסף רק אם את מפסידה את כל הסבבים :

$$P(\text{מפסידה ב-36 סבבים}) = \left(\frac{37}{38}\right)^{36} \approx 0.3829.$$

ההסתברות לא להפסיד בכל הסבבים היא $0.6171 = 1 - 0.3829$. לכן :

$$\underbrace{E \text{ של כל הסבבים}}_{-1.8947} + \underbrace{\text{מפסידה בהימור}}_{-20 \cdot 0.3829} + \underbrace{\text{מנצחת בהימור}}_{20 \cdot 0.6171} \approx 2.7904.$$

ברור שכדאי להסכים להימור המוצע!

סימולציה

Expectation of winning a round = -0.0526

Average winnings for a round = -0.0593

בסימולציה היתה שונות גדולה שהוקטנה כל ידי הרצת מיליון ניסויים.

8. קלפים מושלמים בברינג' Perfect bridge hand

חר באקראי 13 קלפים בחבילה של 52 קלפים. מה ההסתברות שכולם מאותה סדרה?

פתרון 1

בכל חבילה יש 13 קלפים מכל סדרה כך שיש $\binom{52}{13}$ דרכים לבחור 13 מסדרה אחת, למשל, לבבות. יש רק דרך אחת לבחירת 13 לבבות כך ש :

$$P(\text{בחירת 13 לבבות}) = \frac{1}{\binom{52}{13}} = \frac{13!39!}{52!} \approx 1.5747 \times 10^{-12}.$$

בחבילה ארבע סדרות ולכן :

$$P(\text{בחירת 13 קלפים מאותה סדרה}) = 4 \cdot \frac{13!39!}{52!} \approx 6.2991 \times 10^{-12}.$$

פתרון 2

יש 52 דרכים לבחור את הקלף הראשון. אח"כ יש 12 דרכים לבחור את הקלף השני מאותה סדרה מתוך 51 הקלפים שנשארו, 11 דרכים לבחור את הקלף השלישי, וכו'. מכאן:

$$P(\text{בחירת 13 קלפים מאותה סדרה}) = \frac{52}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdots \frac{1}{40} = \frac{12!}{51!/39!} \approx 6.2991 \times 10^{-12}.$$

אין טעם להריץ סימולציה כי כמעט בוודאות התוצאה תהיה אפס.

9. משחק קוביות D, S_{Craps}

שחקן ה-craps הוא משחק עם זוג קוביות. בהטלה הראשונה אתה מנצח אם סכום המספרים הוא 7 או 11, ואתה מפסיד אם הסכום הוא 2, 3 או 12. אם הסכום בהטלה הראשונה הוא 4, 5, 6, 8, 9, 10 (נקרא "נקודה" point), המשיך להטיל את הקוביות עד שמופיעה הנקודה n (ניצחון) או 7 (הפסד).

שאלה 1: מה ההסתברות של האירועים בהטלה הראשונה: ניצחון, הפסד, לא ניצחון ולא הפסד?

שאלה 2: מה ההסתברות לניצחון?

פתרון 1

תשובה 1: להסתברות של המספרים המופיעים כאשר מטילים קוביה התפלגות אחידה השווה ל-1/6. ההטלות של שתי קוביות בלתי תלויות ולכן ההסתברות של כל תוצאה היא 1/36. מספר הדרכים לקבל כל אחד מהאירועים (הסכום של זוג קוביות) 2, ..., 12 הוא:

סכום	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
זוגות	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

בהטלה הראשונה יש 8 דרכים לקבל 7 או 11 וההסתברות היא 8/36 לנצח. יש 4 דרכים לקבל 2, 3, 12 וההסתברות היא 4/36. ההסתברות לא לנצח ולא להפסיד היא בהטלה הראשונה היא:

$$1 - \frac{8}{36} - \frac{4}{36} = \frac{24}{36}.$$

תשובה 2: נעיין בשני מקרים תוך התייחסות לטבלה לעיל:

• הנקודה היא 4. ההסתברות לנצח בהטלה השנייה (4) היא 3/36 וההסתברות להפסיד (7) היא 6/36. ההסתברות לא לנצח ולא להפסיד היא $27/36 = 1 - (3/36) - (6/36)$.

• הנקודה היא 8. ההסתברות לנצח בהטלה השנייה (8) היא 5/36 וההסתברות להפסיד (7) היא 6/36. ההסתברות לא לנצח ולא להפסיד היא $25/36 = 1 - (5/36) - (6/36)$.

אנו רואים שחייבים לחשב את ההסתברות לנצח בנפרד עבור כל אחת מהנקודות 4, 5, 6, 8, 9, 10. נפתח נוסחה כללית להסתברות.

לאחר שהתקבל **הנקודה** n בהטלה הראשונה, תהי P_n ההסתברות להסתברות לנצחון על ידי הטלת הנקודה n בהטלה כשלהי, ותהי Q_n ההסתברות לא לנצח ולא להפסיד בהטלה כשלהי. תהי W_n ההסתברות לנצחון על ידי הטלת הנקודה n **בהטלה לאחר ההטלה הראשונה**. ניתן לחשב את W_n על ידי חיבור:

- ההסתברות להופעת הנקודה בהטלה השנייה.
- ההסתברות לא לנצח ולא להפסיד בהטלה השנייה כפול ההסתברות להופעת הנקודה בהטלה השלישית.
- ההסתברות לא לנצח ולא להפסיד בהטלה השנייה והשלישית כפול ההסתברות להופעת הנקודה בהטלה הרביעית,

וכך הלאה.

$$\begin{aligned} W_n &= P_n + Q_n P_n + Q_n^2 P_n + Q_n^3 P_n + \dots \\ &= P_n (1 + Q_n + Q_n^2 + Q_n^3 + \dots) \\ &= P_n \left(\frac{1}{1 - Q_n} \right). \end{aligned}$$

אתה מפסיד אם בהטלה כלשהי לאחר הראשונה מופיע 7 עם הסתברות $6/36$ ולכן :

$$\begin{aligned} Q_n &= 1 - P_n - (6/36) \\ W_n &= \frac{P_n}{P_n + (6/36)}. \end{aligned}$$

W_n עבור ששת הנקודות היא :

n	4	5	6	8	9	10
P_n	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$
W_n	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{9}$

ניתן לחשב את W , ההסתברות לנצח, על ידי חיבור ההסתברות לנצח בהטלה הראשונה לסכום ההסתברויות עבור ששת הנצחונות בהטלת נקודה כפול ההסתברות להופעת אותה נקודה בהטלה הראשונה :

$$(10) \quad W = \frac{8}{36} + \sum_{n \in \{4,5,6,8,9,10\}} P_n W_n \approx 0.4929.$$

שסיכוי שהקזינו ינצח במשחק אחד של craps הוא רק $0.5\% \approx 0.5 - 0.4949$ אבל חוק המספרי הגדולים מבטיח שבסופו של דבר הם ינצחו ואתה תפסיד!

פתרון 2

תשובה 2: נעיין בסדרות ההטלות שלהן כאשר בכולן הנקודה היא 4.

4	8	9	9	9	8	8	8	9	8	4
4	8	9	9	9	8	8	8	9	8	7
4	9	9	9	8	8	4				

המשחק מסתיים רק אם מטילים 4 (ניצחון) או מטילים 7 (הפסד), כך שהופעות של 8 או 9 לא משפיעות על התוצאה. מכאן שהסתברות לנצח היא ההסתברות המותנית שמופיע 4 אם נתון שהופיע 4 או 7. יהי f האירוע ש-4 מופיע ויהי s האירוע ש-7 מופיע. אזי:

$$P(f|f \cup s) = \frac{P(f) \cap P(f \cup s)}{P(f \cup s)} = \frac{P(f)}{P(f \cup s)} = \frac{3/36}{(3+6)/36} = \frac{3}{9},$$

בדיוק התוצאה W_4 שמופיעה בטבלה לעיל. כעת ניתן להשתמש במשוואה 10 כדי לחשב את W . השתמשנו בהסתברות בצורה סמויה בפתרון הראשון כי W_n היא ההסתברות המותנית שבהטלה הראשונה מופיעה הנקודה n .

סימולציה

Probability of winning = 0.4929

Proportion of wins = 0.4948

13. דילמת האסיר The prisoner's dilemma^D

שלושה אסירים A, B, C מועמדים לשחרור מוקדם. וועדת השחרורים ישחרר שניים מהם עם הסתברות שווה ל- $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$, כך שהסיכוי ש- A ישוחרר הוא $2/3$. לאסיר A נמסר שמו של אחד האסירים האחרים שישוחרר. אם מוסרים לו ש- B מה הסיכוי ש- A ישוחרר גם כן? [2] הוא מאמר מקיף על דילמת האסיר ועל בעיית Monty Hall הדומה.

פתרון 1

יהיו $P(A), P(B), P(C)$ ההסתברות ש- A, B, C ישוחררו. A מעוניין בהסתברות המותנית $P(A|B)$ שהוא ישוחרר אם B ישוחרר. נדמה שהחישוב שלהלן הוא מה שאנחנו רוצים:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

אבל זאת לא ההסתברות הנכונה! יהי R_{AB} האירוע של- A נמסר ש- B ישוחרר. ההסתברות שיש לחשב היא $P(A|R_{AB})$:

$$P(A|R_{AB}) = \frac{P(A \cap R_{AB})}{P(R_{AB})}.$$

אנו מניחים שהמידע על שחרורו של B הוא אמת ולכן:

$$P(A \cap R_{AB}) = P(\{A, B\}) = \frac{1}{3}.$$

כעת:

$$P(R_{AB}) = P(\{A, B\}) + P(\{B, C\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

אם התכנית היא ש- $\{B, C\}$ ישוחררו, ניתן למסור ל- A או ש- B ישוחרר או ש- C ישוחרר ולכן הגורם $1/2$. מכאן:

$$P(A|R_{AB}) = \frac{P(A \cap R_{AB})}{P(R_{AB})} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3},$$

כך שמסירה ל- A ש- B ישוחרר לא משנה את ההסתברות שהוא ישוחרר.

פתרון 2

ארבעת האירועים האפשריים הם:

e_1 : ל- A נמסר ש- B ישוחרר ו- $\{A, B\}$ שוחררו.

e_2 : ל- A נמסר ש- C ישוחרר ו- $\{A, C\}$ שוחררו.

e_3 : ל- A נמסר ש- B ישוחרר ו- $\{B, C\}$ שוחררו.

e_4 : ל- C נמסר ש- B ישוחרר ו- $\{B, C\}$ שוחררו.

ההסתברות של כל זוג לשחרור שווה ולכן :

$$P(e_1) = P(e_2) = P(e_3 \cup e_4) = \frac{1}{3}.$$

נניח שאם $\{B, C\}$ ישוחררו, בהסתברות שווה ימסרו ל- A ש- B ישוחרר או ש- C ישוחרר, ולכן $P(e_3) = 1/6$. מכאן שההסתברות ש- A ישוחרר בהינתן האירוע $R_{AB} = e_1 \cup e_3$ שנמסר לו ש- B ישוחרר היא :

$$P(A|R_{AB}) = \frac{P(e_1 \cap (e_1 \cup e_3))}{P(e_1 \cup e_3)} = \frac{P(e_1)}{P(e_1 \cup e_3)} = \frac{1/3}{(1/3) + (1/6)} = \frac{2}{3}.$$

פתרון 3

חידה שמיוחסת ל-Abraham Lincoln שואל: "אם תקרא לזנב של כלב רגל, כמה רגליים יש לכלב?" התשובה היא שלקרא לזנב רגל לא הופך אותו לרגל ולכן לכלב עדיין יש ארבע רגליים. ברור שאם A יודע את העתיד המחכה ל- B זה לא משנה את הסיכוי שלו לשיחרור.

14. איסוף תלושים Collecting coupons

תון סדרה של קופסאות ובתוך כל אחת נמצא תלוש עם אחד המספרים 1 עד 5. את שולפת תלוש אחד מכל קופסה אחת אחרי השנייה.

שאלה 1: מה התוחלת של מספר התלושים שיש לשלוף עד שתקבלי את כל חמשת המספרים?

שאלה 2: פתחי נוסחה לתוחלת ל- n מספרים.

רמז: תשתמשי בפתרון לבעיה 4 (עמוד 10) והקירוב לסכום של מספרים הורמוניים (עמוד 82).

פתרון

תשובה 1: מה התוחלת של מספר השליפות עד שאת מקבלת מספר שונה מכל הקודמים? לפי בעייה 4 התוחלת היא $1/p$ כאשר p היא ההסתברות לשליפת מספר שונה. עבור השליפה הראשונה, ההסתברות היא 1 כך שהתוחלת היא גם 1. עבור השליפה השנייה ההסתברות היא $4/5$ כך שהתוחלת היא $5/4$ וכך הלאה. לכן:

$$E(\text{כל חמשת המספרים}) = \frac{5}{5} + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + \frac{5}{1} = \frac{1370}{120} \approx 11.4167.$$

תשובה 2: נשתמש באותה שיטה ובקירוב לסכום המספרים ההרמוניים (עמוד 82):

$$E(\text{כל } n \text{ המספרים}) = n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) = nH_n \approx n \left(\ln n + \frac{1}{2n} + 0.5772 \right).$$

עבור $n = 5$ מתקבל:

$$E(\text{כל חמשת המספרים}) = 5H_5 \approx 5 \left(\ln 5 + \frac{1}{10} + 0.5772 \right) \approx 11.4332.$$

סימולציה

For 5 coupons:
 Expectation of draws = 11.9332
 Average draws = 11.4272
 For 10 coupons:
 Expectation of draws = 29.7979
 Average draws = 29.2929
 For 20 coupons:
 Expectation of draws = 72.4586
 Average draws = 72.2136

15. שורה בתיאטרון ^SThe theater row

דר שמונה מספרים זוגיים ושבעה מספרים אי-זוגיים בשורה בצורה אקראית, למשל:

10 12 3 2 9 6 1 13 7 10 3 8 8 5 20,

שנוכל לכתוב כך:

$E E O E O E O O O E O E E O E$,

כי המספרים עצמם אינם חשובים.

מה התוחלת שלמספר הזוגות השכנים שהם זוג/אי-זוגי או אי-זוגי/זוגי?

בדוגמה יש 10 זוגות שכנים שהם EO או OE .

רמז: התייחס לכל זוג שכנים בנפרד. מה ההסתברות שהם שונים?

פתרון

הטבלה שלהן מראה את עשרת הסידורים השונים עבור שלושה מספרים זוגיים ושני מספרים אי-זוגיים. מספר הזוגות השכנים השונים הוא 24 והממוצע הוא $24/10 = 2.4$.

סידור	זוגות	סידור	זוגות
$EEEE$	1	$EEOE$	3
$EEOE$	2	$EOEO$	4
$EOEE$	3	$EOEE$	1
OEE	3	OEE	2
$OEOE$	3	$OEEE$	1

נחזור לדוגמה עם 15 מספרים. תהי P_d ההסתברות שזוג נתון בסידור הוא EO או OE . אזי:

$$P_d = P(EO) + P(OE) = \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} + \frac{7}{15} \cdot \frac{8}{14} = 2 \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} = \frac{8}{15}.$$

תהי E_d התוחלת של מספר הזוגות בסידור שהם EO או OE . זוג (EO, OE) תורם 1 למספר הזוגות השונים וזוג (EE, OO) תורם 0:

$$E_d = \sum_{\text{זוגות}} 1 \cdot P_d = 14 \cdot \frac{8}{15} \approx 7.4667.$$

עבור עשרה מספרים:

$$P_d = P(EO) + P(OE) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

$$E_d = 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5} = 2.4.$$

Simulation

For 5 places:

Expectation of different pairs = 2.4000

Average different pairs = 2.3855

For 15 places:

Expectation of different pairs = 7.4667

Average different pairs = 7.4566

For 27 places:

Expectation of different pairs = 13.4815

Average different pairs = 13.4835

For 49 places:

Expectation of different pairs = 24.4898

Average different pairs = 24.4725

16. האם השני בדירוג יזכה המקום שני? ^SWill the second-best be runner-up?

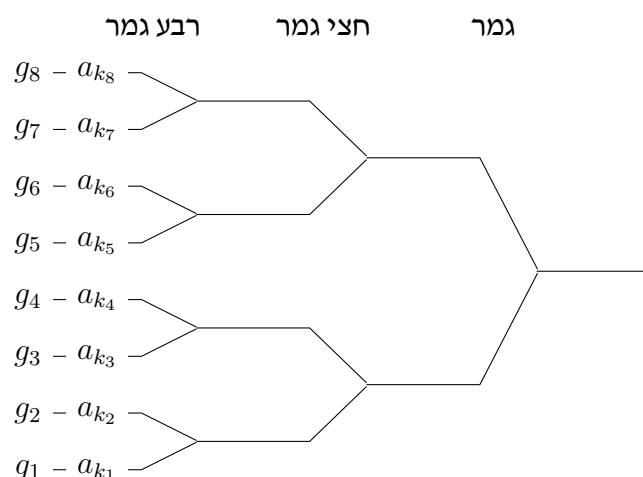
שמונה שחקים בתחרות $\{a_1, \dots, a_8\}$ נקבעים משחקים $\{g_1, \dots, g_8\}$ בצורה אקראית כך ששחקן a_{k_i} משחק את המשחק הראשון שלו במקום g_{k_i} (איור 3). השחקנים מדורגים כך שהטוב ביותר הוא a_1 והגרוע ביותר הוא a_8 . השחקן הטוב יותר לעולם ינצח שחקן פחות. ברור ששחקן a_1 ינצח בתחרות.

שאלה 1: מה ההסתברות שהשחקן a_2 יזכה במקום השני כאשר הוא משחק נגד a_1 בגמר ומפסיד?

שאלה 2: עבור 2^n שחקנים, מה ההסתברות שהשחקן a_2 יזכה במקום השני כאשר הוא משחק נגד a_1 בגמר ומפסיד?

פתרון

תשובה 1: אם a_1 משחק באחד משחקים $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ אף שחקן המשחקים במשחקים הללו לא יגיע לגמר, לכן a_2 חייב לשחק באחד מהשחקים $\{g_5, g_6, g_7, g_8\}$. המסקנה המתבקשת היא שההסתברות ש- a_2 יזכה במקום השני היא $1/2$ כי הוא חייב לשחק באחד מארבעת המשחקים $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$. אולם, a_2 חייב לשחק באחד מארבעה המשחקים מתוך שבעת המשחקים ש- a_1 לא משחק בו וההסתברות היא $4/7$.



איור 3 : טבלת משחקים לתחרות

תשובה 2: באופן דומה, מתוך $2^n - 1$ המשחקים בהם a_1 לא משחק, a_2 חייב לשחק באחד מ- 2^{n-1} המשחקים במחצית הטבלה שלא כוללת את a_1 . מכאן:

$$P(a_1, a_2 \text{ משחקים אחד נגד השני בגמר}) = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}.$$

סימולציה

For 8 players:

Probability a2 is runner-up = 0.5714

Proportion of games where a2 is runner-up = 0.5707

For 32 players:

Probability a2 is runner-up = 0.5161

Proportion of games where a2 is runner-up = 0.5184

For 128 players:

Probability a2 is runner-up = 0.5039

Proportion of games where a2 is runner-up = 0.5060

17. זוג אבירים D, S Twin knights

לשמונה שחקים בתחרות $\{a_1, \dots, a_8\}$ נקבעים משחקים $\{g_1, \dots, g_8\}$ בצורה אקראית כך ששחקן a_{k_i} משחק את המשחק הראשון שלו במקום g_{k_i} (איור 3). לכל i, j , ההסתברות ש- a_i מנצחת במשחק נגד a_j היא $1/2$ כמו גם ההסתברות ש- a_j מנצחת את a_i .

שאלה 1: מה ההסתברות שהשחקנים a_1, a_2 משחקים משחק אחד נגד השנייה.

שאלה 2: עבור 2^n שחקנים, מה ההסתברות שהשחקנים a_1, a_2 משחקים משחק אחד נגד השנייה.

פתרון

תשובה 1: ללא הגבלת הכלליות נקבע ש- a_1 משחקת במשחק g_1 . מה האפשרויות בהן a_1, a_2 ישחקו אחת נגד השנייה. בהסתברות $1/7$ נקבע ש- a_2 משחקת במשחק g_2 . בהסתברות $2/7$ נקבע ש- a_2 משחקת במשחק g_3 או g_4 , אבל היא לא משחקת נגד a_1 אלא אם **שתייהן** מנצחות במשחק הראשון שלהן, כך שיש להכפיל את ההסתברות ב- $1/4$. בהסתברות $4/7$ נקבע ש- a_2 משחקת במשחק g_5, g_6, g_7, g_8 , אבל היא לא משחקת נגד a_1 **שתייהן** מנצחות בשני המשחקים שלהן, כך שיש להכפיל את ההסתברות ב- $1/16$. מכאן:

$$P(a_1, a_2 \text{ play each other}) = \frac{1}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{4}.$$

תשובה 2: תהי P_n ההסתברות שבתחרות עם 2^n שחקנים, a_1 ו- a_2 משחקות אחת נגד השנייה. ראינו ש- $P_3 = 1/4$. מה עם P_4 ? באותה שיטה:

$$\begin{aligned} P_4 &= \frac{1}{15} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{15} + \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{15} + \frac{1}{64} \cdot \frac{8}{15} \\ &= \frac{1}{15} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

השערה סבירה היא ש- $P_n = 1/2^{n-1}$.

Proof 1: באותה שיטה תוך שימוש בנוסחה לסכום של סדרה הנדסית:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2^i} \\ &= \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} \\ &= \frac{1}{2^n - 1} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Proof 2: באינדוקציה. טענת הבסיס היא: $P_3 = 1/4 = 1/2^{3-1}$.

יש שני צעדי אינדוקציה:

מקרה 1: נקבע ש- a_1 ו- a_2 משחקות בחצאים שונים של התחרות:

$$P(a_1, a_2 \text{ משחקות בחצאים שונים}) = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}.$$

הן יכולות להיפגש רק במשחק הגמר ולכן כל אחת חייבת לנצח בכל $n - 1$ המשחקים שלהן:

$$(11) \quad P(a_1, a_2 \text{ נפגשות אם משחקות בחצאים שונים}) = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^{-(n-1)}}{2^n - 1}.$$

מקרה 2: נקבע ש- a_1 ו- a_2 משחקות באותו חצי תחרות:

$$P(a_1, a_2 \text{ משחקות בחצאים שונים}) = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}.$$

בגלל ששתי השחקניות משחקות באותו חצי הבעיה מצטמטת בדרישה למצוא P_{n-1} . לפי הנחת האינדוקציה:

$$(12) \quad P(a_1, a_2) = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{2^1 - 2^{-(n-2)}}{2^n - 1}.$$

ממשוואות 11, 12 נקבל:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{2^{-(n-1)}}{2^n - 1} + \frac{2^1 - 2^{-(n-2)}}{2^n - 1} \\ &= \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} \cdot \frac{2^{-(n-1)} + 2^1 - 2^{-(n-2)}}{2^n - 1} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{2^0 + 2^n - 2^1}{2^n - 1} = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

סימולציה

For 8 players:

Probability that a1, a2 meet = 0.2500

Proportion a1, a2 meet = 0.2475

For 32 players:

Probability that a1, a2 meet = 0.0625

Proportion a1, a2 meet = 0.0644

For 128 players:

Probability that a1, a2 meet = 0.0156

Proportion a1, a2 meet = 0.0137

18. תוצאה שווה בהטלת מטבע ^SAn even split at coin tossing

1 אם אתה זורק מטבע הגון 20 פעמים, מה ההסתברות לקבל "עץ" בדיוק 10 פעמים?

שאלה 2: אם אתה זורק מטבע הגון 40 פעמים, מה ההסתברות לקבל "עץ" בדיוק 20 פעמים?

פתרון

תשובה 1: המטבע הגון ולכן ההסתברות מתקבלת מהמקדם הבינומי:

$$P(10 \text{ "עץ" ב-20 הטלות}) = \binom{20}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.1762.$$

תשובה 2: אפשר לשער שהתוצאה תהיה זהה לשאלה הקודמת אבל:

$$P(20 \text{ "עץ" ב-40 הטלות}) = \binom{40}{20} \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 0.1254.$$

לפי חוק המספרים הגדולים מספר "עץ" ומספר "לפי" יהיו "בערך" שווים [11, Section 8.4], אבל הסיכוי נמוך מאוד שיהיו שווים בדיוק, והסיכוי לאירוע זה הופך להיות קטן יותר ככל שמספר ההטלות גדל.

סימולציה

Probability of 10 heads for 20 tosses = 0.1762
 Proportion of 10 heads for 20 tosses = 0.1790
 Probability of 20 heads for 40 tosses = 0.1254
 Proportion of 20 heads for 40 tosses = 0.1212
 Probability of 50 heads for 100 tosses = 0.0796
 Proportion of 50 heads for 100 tosses = 0.0785

19. Isaac Newton helps Samuel Pepys ^Sעוזר ל-Isaac Newton

- 1 מה ההסתברות לקבל **לפחות** 6 אחד כאשר מטילים 6 קוביות.
שאלה 2: מה ההסתברות לקבל **לפחות** שני 6 כאשר מטילים 12 קוביות.
שאלה 3: פתח נוסחה להסתברות לקבל לפחות n 6 כאשר מטילים $6n$ קוביות.

פתרון

תשובה 1: ההסתברות היא המשלים להסתברות לקבל אפס 6 ב-6 הטלות, שהיא המכפלה של לקבל מספר שונה מ-6 בכל ההטלות:

$$P(\text{לפחות 6 אחד}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.6651.$$

תשובה 2: ההסתברות היא המשלים להסתברות לקבל אפס או אחד 6 ב-12 הטלות:

$$P(6 \text{ לפחות שני}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - \binom{12}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 0.6187.$$

לאירוע זה הסתברות קטנה יותר מהאירוע הקודם.

תשובה 3: ההסתברות היא המשלים להסתברות לקבל פחות מ- n 6 ב- $6n$ הטלות:

$$\begin{aligned}
 P(6n \text{ לפחות } n) &= 1 - \binom{6n}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{6n-0} - \binom{6n}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{6n-1} - \dots \\
 &= 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{6n}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{6n-i}.
 \end{aligned}$$

סימולציה

For 6 dice to throw 1 sixes:
 Probability = 0.6651
 Proportion = 0.6566
 For 12 dice to throw 2 sixes:
 Probability = 0.6187
 Proportion = 0.6220

For 18 dice to throw 3 sixes:
 Probability = 0.5973
 Proportion = 0.5949
 For 96 dice to throw 16 sixes:
 Probability = 0.5424
 Proportion = 0.5425
 For 360 dice to throw 60 sixes:
 Probability = 0.5219
 Proportion = 0.5250

20. דו-קרב משולש (The three-cornered duel)^S

A, B, C מנהלות סדרה של קרבות בזוגות. לכל אחת הסתברות קבועה לנצח ללא קשר לזהות היריבה:

$$P(A) = 0.3, \quad P(B) = 1, \quad P(C) = 0.5.$$

מי שנפגעת לא ממשיכה להשתתף בקרבות. יורים את היריות בסדר קבוע A, B, C . אם שתי יריבות עדיין עומדות, היורה יכולה להחליט למי היא יורה. אפשר להניח שכל אחת מקבלת החלטה מיבטיבית נגד מי לירות.

שאלה 1: מה האסטרטגיה המיטבית של A ?

שאלה 2: נניח ש- A יורה את היריה הראשונה באוויר. האם זו אסטרטגיה טובה יותר?

רמז: חשב את ההסתברויות המותנות של A לנצח בתלות בהחלטתה אל מי לירות קודם B או C .

פתרון

סימון: $X \xrightarrow{H} Y$ מסמן ש- X יורה לעבר Y ופוגע. $X \xrightarrow{M} Y$ מסמן ש- X יורה לעבר Y ומחטיא.

תשובה 1: חשב את ההסתברויות המותנות ש- A תנצח.

מקרה 1: A בוחרת לירות את הירייה הראשונה לעבר C .

אם $A \xrightarrow{M} C$ (הסתברות 0.7) אזי $B \xrightarrow{H} C$ כי C היא מסוכנת יותר מ- A . כעת A יורה שוב לעבר B עם הסתברות 0.3 לפגוע, אבל אם A מחטיאה, $B \xrightarrow{H} A$ בהסתברות 1 ו- A מפסידה.

אם $A \xrightarrow{H} C$ (הסתברות 0.3) אזי $B \xrightarrow{H} A$ ו- A מפסידה.

חשב את התוחלת עם הערכים 1 כאשר A מנצחת ו-0 כאשר A מפסידה:

$$E(A \text{ בוחרת לירות קודם ב- } C | A \text{ מנצחת}) =$$

$$\underbrace{A \xrightarrow{M} C, A \xrightarrow{H} B}_{1 \cdot (0.7 \cdot 0.3)} + \underbrace{A \xrightarrow{M} C, A \xrightarrow{M} B, B \xrightarrow{H} A}_{0 \cdot (0.7 \cdot 0.7 \cdot 1)} + \underbrace{A \xrightarrow{M} C, B \xrightarrow{H} A}_{0 \cdot (0.3 \cdot 1)} = 0.2100.$$

מקרה 2: A בוחרת לירות את הירייה הראשונה לעבר B .

אם $A \xrightarrow{M} B$ (הסתברות 0.7), אזי כמו במקרה הקודם $B \xrightarrow{H} C$ ול- A הזדמנות אחת נוספת לפגוע ב- B (הסתברות 0.3), אחרת $B \xrightarrow{H} A$ בהסתברות 1 ו- A מפסידה.
אם $A \xrightarrow{H} B$ (הסתברות 0.3) אזי A, C יורות לסירוגין אחת לעבר השנייה עד שאחת נפגעת. התסריטים האפשריים הם:

- (1) $C \xrightarrow{H} A$
- (2) $C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{H} C$
- (3) $C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{H} A$
- (4) $C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{H} C$
- (5) $C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{H} A$
- (6) $C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{H} C$
- ...

ההסתברות ש- A מנצחת כי היא פוגעת ב- C בסופו של דבר היא סכום ההסתברויות של התסריטים הזוגיים ברשימה:

$$\begin{aligned} P(A \text{ מנצחת} | B \text{ פוגעת ב-} A) &= (0.5 \cdot 0.3) + \\ &\quad (0.5 \cdot 0.7)(0.5 \cdot 0.3) + \\ &\quad (0.5 \cdot 0.7)(0.5 \cdot 0.7)(0.5 \cdot 0.3) + \dots \\ &= 0.15 \sum_{i=0}^{\infty} 0.35^i = \frac{0.15}{1 - 0.35} = \frac{3}{13} \approx 0.2308. \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{0.5}{1 - 0.35} = \frac{1}{13} \approx 0.0760 \text{ היא מנצחת ש-} C \text{ בהסתברות } 0.0760$$

התוחלת היא:

$$\begin{aligned} E(A \text{ מנצחת}) &= E(A \text{ מחטיאה את } B | A \text{ מנצחת}) + E(A \text{ מנצחת} | B \text{ פוגעת ב-} A) = \\ &\quad \underbrace{A \xrightarrow{M} B, B \xrightarrow{H} C, A \xrightarrow{H} B}_{1 \cdot (0.7 \cdot 1 \cdot 0.3)} + \underbrace{A \xrightarrow{M} B, B \xrightarrow{H} C, A \xrightarrow{M} B, B \xrightarrow{H} A}_{0 \cdot (0.7 \cdot 1 \cdot 0.7 \cdot 1)} + \underbrace{A \xrightarrow{H} B, C \xrightarrow{H} A, C \xrightarrow{H} A}_{1 \cdot (0.2308)} + \underbrace{A \xrightarrow{H} B, C \xrightarrow{H} A, C \xrightarrow{H} A}_{0 \cdot (0.3 \cdot (0.0769))} \approx \\ &\quad 0.2792, \end{aligned}$$

שהיא גבוהה יותר מהתוחלת לנצח על ידי ירי תחילה לעבר C .

תשובה 2: אם A יורה לאוויר ולא פוגעת באף יריבה אזי $B \xrightarrow{H} C$ בהסתברות 1 ו- A יכולה לנסות לפגוע ב- B בהסתברות 0.3. התוחלת היא:

$$E(A \text{ מנצחת} | A \text{ יורה באוויר}) = 1 \cdot (0.3) + 0 \cdot (0.7) = 0.3,$$

שהיא גבוהה יותר מהתוחלת של שתי האסטרטגיות האחרות!

סימולציה

For A fires first at C:

Expectation of wins = 0.2100

Average wins = 0.2138

For A fires first at B:

Expectation of wins = 0.2792

Average wins = 0.2754

For A fires in the air:

Expectation of wins = 0.3000

Average wins = 0.3000

21. לדגום עם או בלי החזרות? D, S (Should you sample with or without replacement?)

בכד A נמצאים 2 כדורים אדומים ו-1 כדור ירוק, ובכד B נמצאים 101 כדורים אדומים ו-100 כדורים ירוקים. בחר כד אחד בצורה אקראית ושלף שני כדורים באופן אקראי מהכד שנבחר. אתה מנצח אם אתה מזהה נכון אם כדורים נשלפו מכד A או כד B .

חשב את ההסתברויות לניצחון של כל אחד מהחוקים שלהן וקבע איזה חוק נותן את ההסתברות הגבוהה ביותר לניצחון.

שאלה 1: אתה מחזיר את הכדור הראשון לפני השליפה השנייה.

שאלה 2: אתה לא מחזיר את הכדור הראשון לפני השליפה השנייה.

שאלה 3: לאחר נשלף הכדור הראשון אתה יכול להחליט אם להחזיר אותו או לא.

רמז: כאשר מחשבים הסתברויות:

$$\frac{101}{201} \approx \frac{100}{201} \approx \frac{100}{200} \approx \frac{1}{2}.$$

פתרון

יש ארבע תוצאות שנסמן RR, RG, GR, GG . לכל אחד מהחוקים נחשב את ההסתברויות המתנות של ארבעת התוצאות תלוי בזהות הכד A או B שנבחר תחילה. אחר כך נכפיל את ההסתברויות ב- $1/2$ כדי לקחת בחשבון את הבחירה האקראית של הכד.

תשובה 1: שליפה עם החזרה:

$$P(RR|A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P(RR|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(RG|A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P(RG|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(GR|A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P(GR|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(GG|A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(GG|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

אם התוצאה היא RR ההסתברות שכד A נבחר ($4/9$) גבוהה מהסתברות שכד B נבחר ($1/4$); אחרת, ההסתברות ש- B נבחר גבוהה יותר. לכן:

$$P(\text{ניצחון}) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{43}{72} \approx 0.5972.$$

תשובה 2: שליפה ללא החזרה:

$$P(RR|A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$P(RR|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(RG|A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$P(RG|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(GR|A) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$P(GR|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(GG|A) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$P(GG|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

אם התוצאה היא GG ההסתברות שכד B נבחר גבוהה יותר (כמובן!) מההסתברות שכד A נבחר; אחרת, ההסתברות שכד A נבחר גבוהה יותר. לכן:

$$P(\text{win}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{8} = 0.6250,$$

שהיא גבוהה יותר מההסתברות לניצחון כאשר שליפה היא עם החזרה.

תשובה 3: ההחלטה נעשית על סמך התוצאות מהשליפה הראשונה.

אם השליפה הראשונה היא מכד A ההסתברויות חייבות להיות מותנות בהחלטה להחזיר או לא. שליפה הראשונה היא מכד B לא משפיעה על ההסתברויות בגלל הקירוב ברמז.

$$P(RR|A, w) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P(RR|A, w/o) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$P(RR|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(RG|A, w) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P(RG|A, w/o) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$P(RG|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(GR|A, w) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P(GR|A, w/o) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$P(GR|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(GG|A, w) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(GG|A, w/o) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$P(GG|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

אם כדור אדום נשלף ראשונה אזי $\frac{1}{4} > \frac{4}{9} > \frac{1}{4}$ ו- $\frac{2}{9} < \frac{2}{9} < \frac{1}{4}$ עם החזרה, לעומת $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ ו- $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ ללא החזרה, לכן הכדור השני יכול לעזור בזיהוי הכד רק אם השליפה נעשית עם החזרה: אם אדום כד A ואם ירוק כד B. נבחר שליפה עם החזרה ו:

$$P(\text{ניצחון אם אדום ראשון}) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{4} \right) = \frac{25}{72}.$$

אם כדור ירוק נשלף ראשון אזי $\frac{1}{4} < \frac{2}{9} < \frac{1}{4}$ ו- $\frac{1}{9} < \frac{1}{4}$ עם החזרה, לעומת $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ ו- $0 < \frac{1}{4}$ ללא החזרה, לכן הכדור השני יכול לעזור בזיהוי הכד רק אם השליפה נעשית בלי החזרה ו:

$$P(\text{ניצחון אם ירוק ראשון}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{7}{24}.$$

ההסתברות לניצחון היא:

$$P(\text{ניצחון}) = \frac{25}{72} + \frac{7}{24} = \frac{23}{36} \approx 0.6389.$$

ההסתברות הגבוהה ביותר לניצחון מתקבלת כאשר ההחלטה לשלף עם או בלי החזרה מתקבל בהתאם לתוצאה של השליפה הראשונה.

סימולציה

With replacement:

Expectation of winning = 0.5972

Average wins = 0.5976

Without replacement:

Expectation of winning = 0.6250

Average wins = 0.6207

Decide after first draw:

Expectation of winning = 0.6389

Average wins = 0.6379

22. הקלפי (The ballot box)^S

שתי מועמדות A ו-B מתמודדות בבחירות. A קיבלה a קולות ו-B קיבלה b קולות, $a > b$. הקולות נספרים אחד-אחד וסכומי הביניים $(a_i, b_i), 1 \leq i \leq a+b$ מתעדכנים לאחר ספירת כל קול. מה ההסתברות שעבור לפחות i אחד, $a_i = b_i$?

שאלה 1: פתור עבור $a = 3, b = 2$ על ידי הכנת רשימה (a_i, b_i) עבור $1 \leq i \leq 5$.

שאלה 2: פתור עבור כל $a > b$.

רמז 1: מה ניתן להגיד על זהות המועמדת שמובילה עד לתיקו ראשון?

Hint 2: מה החשיבות של הקול הראשון שנספר.

פתרון

תשובה 1: מספר הדרכים לסדר את סכומי הביניים הוא $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$ כי המיקום הקולות עבור מועמדת אחת קובע את מיקום הקולות של המועמדת השנייה. בטבלה שלהלן רשומים הסידורים האפשריים של הקולות וסכומי הביניים כאשר התיקו הראשון מודגש:

(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)	A	A	A	B	B
(1, 0)	(2, 0)	(2, 1)	(3, 1)	(3, 2)	A	A	B	A	B
(1, 0)	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(3, 2)	A	B	A	A	B
(0, 1)	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(3, 2)	B	A	A	A	B
(1, 0)	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(3, 2)	A	A	B	B	A
(1, 0)	(1, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(3, 2)	A	B	A	B	A
(0, 1)	(1, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(3, 2)	B	A	A	B	A
(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	A	B	B	A	A
(0, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	B	A	B	A	A
(0, 1)	(0, 2)	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	B	B	A	A	A

קיימים מצבי תיקו בכל הסידורים פרט לשני הראשונים ולכן:

$$P(\text{קיים תיקו עם } (3, 2) \text{ קולות}) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

תשובה 2: נתחיל את הפתרון עם דיון איך לגשת לפתרון של השאלה השנייה. הנה מספר סידורים עבור $(a, b) = (3, 2)$ עד לקבלת התיקו הראשון:

A leads until tie				B leads until tie			
A	B			B	A		
A	A	B	B	B	B	A	A

לכל סידור בו A מובילה עד לתיקו הראשון, קיים סידור שהוא תמונת ראי בו B מובילה עד לקבלת התיקו הראשון. השיקוף מתקבל על ידי החלפת כל A ב-B ולהפך.

לפני התיקו הראשון אחת מהמועמדות חייבת להוביל. אם הקול הראשון שנספר הוא עבור B חייב להיות תיקו בהמשך הספירה כי $a > b$.

ההסתברות שהקול הראשון היא עבור B היא:

$$P(\text{קול ראשון עבור B}) = \frac{b}{a+b}.$$

על ידי שיקוף המיקומים של הקולות, מספר הסידורים שמובילים לתיקו שמתחילים בקול עבור A שווה למספר הסידורים שמובילים לתיקו שמתחילים בקול עבור B. לכן:

$$P(\text{קיים תיקו}) = 2 \cdot \frac{b}{a+b}.$$

בדיקה:

$$P(\text{קיים תיקו עם } (3, 2) \text{ קולות}) = 2 \cdot \frac{2}{2+3} = \frac{4}{5}.$$

סימולציה

For a = 3, b = 2:
 Probability of a tie = 0.8000
 Proportion of ties = 0.8118
 For a = 10, b = 8:
 Probability of a tie = 0.8889
 Proportion of ties = 0.8977
 For a = 20, b = 18:
 Probability of a tie = 0.9474
 Proportion of ties = 0.9354

23. תיקו בהשוואת מטבעות D, S (Ties in matching pennies)

הטל זוג מטבעות הוגנות N פעמים עבור N זוג, ורשום את מספר הפעמים שהזוגיות היא זוגי (עץ-עץ או פלי-פלי) ומספר ההפעמים שהזוגיות היא אי-זוגי (עץ-פלי או פלי-עץ). מה ההסתברות לקבל תיקו (לא כולל התיקו 0 – 0 בהתחלה)?

שאלה 1: פתור עבור $N = 4$ על ידי רישום כל התוצאות האפשריות.

שאלה 2: פתור עבור $N = 6$ על ידי פיתוח נוסחה להסתברות.

שאלה 3: פתח נוסחה עבור כל N זוגי.

שאלה 4: הסבר מדוע ההסתברות למספר אי-זוגי $N + 1$ שווה להסתברות של המספר הזוגי N .

רמז: השתמש בפתרון לבעיה 22.

פתרון

תשובה 1: נסמן את ההטלות עם זוגיות זוגי ב- E וההטלות עם זוגיות אי-זוגי ב- O . בעשרה מתוך שש עשרה סידורי ההטלות יש תיקו (מודגש):

EOOO EOOE EOEO EOEE EEOO EEOE EEEO EEEE
OOOO OOOE OOEO OOOE OEEO OEEO OEEO OEEE

תשובה 2: לפי בעיה 22:

$$(13) \quad P(i \text{ תיקו בהטלה}) = \begin{cases} 2i/N & \text{if } i \leq N/2 \\ 2(N-i)/N & \text{if } i \geq N/2, \end{cases}$$

כי בבעיית הקלפי הראנו שהערך הנמוך יותר קובע את ההסתברות.

החישובים שלהלן די מסובכים לכן נצדיק כל חישוב לפרטים.

ההסתברות ל- i זוגיים ניתן על ידי ההתפלגות הבינומית:

$$(14) \quad P(i \text{ זוגיים}) = \binom{N}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{N-i} = \binom{N}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^N = 2^{-N} \binom{N}{i}.$$

ההסתברות לתיקו היא הסכום מעל i של ההסתברות לקבל i זוגיים כפול ההסתברות לתיקו בהטלה ה- i (משוואה 13). For $N = 6$:

$$(15) P(\text{ties}) = 2 \cdot 2^{-6} \left[\frac{0}{6} \binom{6}{0} + \frac{1}{6} \binom{6}{1} + \frac{2}{6} \binom{6}{2} + \frac{3}{6} \binom{6}{3} + \frac{2}{6} \binom{6}{4} + \frac{1}{6} \binom{6}{5} + \frac{0}{6} \binom{6}{6} \right].$$

משוואה 16 נובעת ממשוואה 15 על ידי השמטת שני הגורמים שהם אפס, כתיבת ה- $???$ combination עם עצרת, צימצום $1/6$ מ- $6!$:

$$(16) P(\text{ties}) = 2^{-5} \left[1 \cdot \frac{5!}{1!5!} + 2 \cdot \frac{5!}{2!4!} + 3 \cdot \frac{5!}{3!3!} + 2 \cdot \frac{5!}{4!2!} + 1 \cdot \frac{5!}{5!1!} \right].$$

משוואה 17 מתקבלת מצימצום i מ- $5!$:

$$(17) P(\text{ties}) = 2^{-5} \left[\frac{5!}{1!5!} + \frac{5!}{1!4!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{5!1!} \right].$$

כדי לקבל משוואה 18 ממשוואה 17 חבר וחסר $\frac{5!}{3!2!}$:

$$(18) P(\text{ties}) = 2^{-5} \left[\left(\frac{5!}{1!5!} + \frac{5!}{1!4!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{5!1!} \right) - \frac{5!}{3!2!} \right].$$

משוואה 19 מתקבלת על ידי הצבת $0!$ במקום $1!$:

$$(19) P(\text{ties}) = 2^{-5} \left[\left(\frac{5!}{0!5!} + \frac{5!}{1!4!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{5!0!} \right) - \frac{5!}{3!2!} \right].$$

נבטא בחזרה את הביטוי עם עצרת ל combinations ונקבל את המשוואה 20 :

$$(20) P(\text{ties}) = 2^{-5} \left[\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} - \binom{5}{3} \right].$$

לבסוף, מהוואה 21 מתקבלת ממשפט הבינום :

$$(21) P(\text{ties}) = 2^{-5} (2^5 - 10) = \frac{11}{16} \approx 0.6875.$$

תשובה 3: חשב את אותם חישובים כמו בתשובה 2: עם N שרירותי. התוצאה היא :

$$P(\text{ties}) = 2^{-N+1} \left[2^{N-1} - \binom{N-1}{N/2} \right] = \left[1 - \binom{N-1}{N/2} / 2^{N-1} \right].$$

תשובה 4: התיקו הראשון בהטלה ה- $N+1$ מתרחש רק עם הספירה כמעט זהות לאחר ההטלה ה- N :

$$\begin{aligned} & ((N/2) - 1, (N/2) + 1) \\ & ((N/2), (N/2)) \\ & ((N/2) + 1, (N/2) - 1) \end{aligned}$$

אבל ללא תלות התוצאת ההטלה הסופית הספירות לא יהיו שוות.

סימולציה

For 4 tosses:
 Probability of ties = 0.6250
 Proportion of ties = 0.6192
 For 6 tosses:
 Probability of ties = 0.6875
 Proportion of ties = 0.6900
 For 7 tosses:
 Probability of ties = 0.6875
 Proportion of ties = 0.6811
 For 10 tosses:
 Probability of ties = 0.7539
 Proportion of ties = 0.7559
 For 20 tosses:
 Probability of ties = 0.8238
 Proportion of ties = 0.8255

25. אורכים של מיתרים אקראיים ^S(Lengths of random chords)

בחר מיתר אקראי במעגל היחידה. מה ההסתברות שאורכו של המיתר גדול מ-1?
 כדי לפתור את הבעיה עליך בלהחליט איך "לבחור" מיתר אקראי. פתור את הבעיה עבור כל אחת מהאפשרויות שלהלן:

שאלה 1: התפלגות אחידה של מרחק המיתר מהמרכז המעגל.

שאלה 2: התפלגות אחידה של הנקודה האמצעית של המיתר בתוך המעגל.

שאלה 3: התפלגות נקודות הקצה של המיתר על היקף המעגל.

פתרון

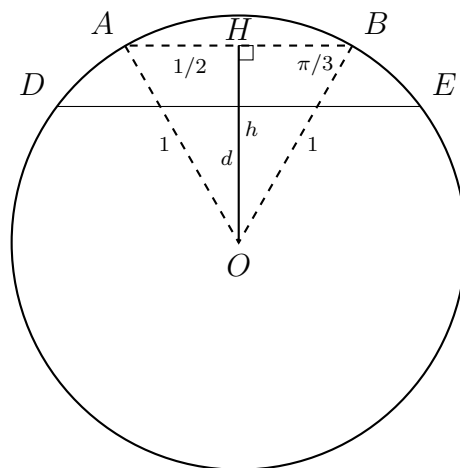
תשובה 1: מיתר ארוך יותר מהרדיוס אם הוא קרוב יותר למרכז ממיתר באורך 1. יהי \overline{AB} מיתר באורך 1 ובנה גובה \overline{OH} מהמרכז O אל המיתר (איור איור 4)). בגלל $\triangle AOB$ שווי-צלעות, $\triangle OHB$ הוא משולש ישר-זווית ואורכו של הגובה הוא:

$$h = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

יהי d המרחק של המיתר \overline{DE} מהמרכז. לפי ההנחה ההתפלגות של d אחידה ב- $(0, 1)$ ולכן:

$$P(\overline{DE} > 1) = P(d < h) = \frac{h}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866.$$

תשובה 2: בנה מעגל עם מרכז O ורדיוס h כאשר h הוא אורכו של גובה לגובה ממיתר באורך 1. משיק לכל נקודה על המעגל יהיה המיתר \overline{FE} שאורכו 1. אורכו של כל מיתר \overline{EG} שנקודת האמצע שלו נמצאת



איור 4(א) מרחק של מיתר מהמרכז בפילוג מ- $(0, 1)$

$$P(\overline{EG} > 1) = \frac{\pi \cdot h^2}{\pi \cdot 1^2} = h^2 = \frac{3}{4}.$$

תשובה 3: בנקודה שרירותית על ההיקף של מעגל היחידה (E באיור איור 4(ב)). כל נקודה אחרת על ההיקף (כגון G באיור) מגדירה מיתר שאורכו גדול באחד אלא אם הנקודה שנבחרה נופל על הקשתות \widehat{EF} או \widehat{ED} . לכן ההסתברות היא היחס בין הקשת \widehat{FD} להיקף המעגל:

$$P(\overline{EG} > 1) = \frac{(2\pi - (2\pi/3)) \cdot 1}{2\pi \cdot 1} = \frac{2}{3}.$$

סימולציה הסימולציה היא עבור בחירת שתי נקודות על ההיקף.

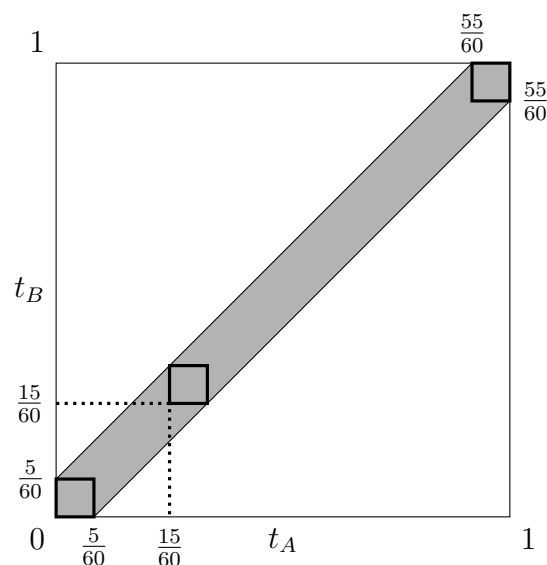
Proportion of long chords = 0.6627

26. ממהרים לדו-קרב (The hurried duelers)^S

A ו- B מגיעים לנקודת מפגש בזמן אקראי עם התלפוגות אחידה בתוך פרק זמן של שעה. אם A מגיע קודם ו- B לא מגיע במשך 5 דקות, A עוזב. באופן דומה אם B מגיע קודם ו- A לא מגיע במשך 5 דקות, B עוזב. מה ההסתברות שהם יפגשו?

בפרק הזמן של שעה הזמן הוא **רציף** בתחום $[0, 1]$, כלומר, אי-אפשר **לספור** מספר בדיד של דקות או שניות כדי לחשב הסתברויות. כן ניתן לחשב הסתברויות של **פרקי זמן**.

רמז: צייר גרף כאשר ציר ה- x הוא זמן הגעתו של A וציר ה- y הוא זמן הגעתו של B .



איור 5 : זמנים המבטיחים מפגש בין A ל-B

פתרון

ללא הגבלת הכלליות הנח ש-A מגיע קודם. אם A מגיע ב- $t_A = 0$ ואם B מגיע לפני $t_B = 5/60$ הם נפגשים, אחרת אין הם נפגשים. מצב זה מוצג באיור 5 על ידי ריבוע קטן בראשית הצירים. אם A מגיע יותר מאוחר אזי גם B חייב להגיע באותו איחור; למשל, אם A מגיע ב- $t_A = 15$, B חייב להגיע בין $t_B = 15$ ו- $t_B = 20$. לכן הפגישה תתקיים בריבוע המתקבל על ידי הזזת הריבוע ב-15 מ- $(0, 0)$ ל- $(15/60, 15/60)$.

ההסתברות לפגישה היא היחס בין השטח האפור בגרף לשטח הריבוע הגדול. קל יותר לחשב את המשלים שהוא היחס בין שטח המשולשים הלבנים לשטח הריבוע הגדול:

$$\begin{aligned} P(A, B \text{ לא נפגשים}) &= 1 - P(A, B \text{ נפגשים}) \\ &= 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{55}{60} \cdot \frac{55}{60} \right) = \frac{23}{144} \approx 0.1597. \end{aligned}$$

סימולציה

Probability of meeting = 0.1597

Proportion of meetings = 0.1549

27. לתפוס את הזייפן הזהיר (Catching the cautious counterfeiter)^S

נתון n קופסאות ובכל אחת n מטבעות כאשר מטבע אחד בכל קופסה מזויף. שלוף מטבע אחד מכל קופסה ובדוק אם הוא מזויף או אמיתי. מה ההסתברות שכל המטבעות שנשלפות מזויפים?

שאלה 1: פתור עבור $n = 10$.

שאלה 2: פתור עבור $n = 100$.

שאלה 3: פתור עבור n שרירותי.

שאלה 4: פתח נוסחה עבור ההסתברות כאשר n שואב לאיסוף.

פתרון

השליפות בלתי תלויות ולכן ההסתברות היא מכפלת ההסתברות של כל שליפה.

תשובה 1:

$$P(\text{כל המטבעות אמיתיים}) = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = 0.3487.$$

תשובה 2:

$$P(\text{כל המטבעות אמיתיים}) = \left(\frac{99}{100}\right)^{100} = 0.3660.$$

תשובה 3:

$$P(\text{כל המטבעות אמיתיים}) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

תשובה 4:

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

ניתן להוכיח את הגבול בעזרת חשבון דיפרנציאלי. תחילה ניתן לחשב את הגבול של הלוגריתם של הצד השמולי של משוואה 22:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1/n}.$$

אם נחשב את הגבול נקבל $0/0 = \ln 1/0$ אבל לפי חוק l'Hôpital נוכל להחליף את הביטוי בחילוק הנגזרות:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} (-(-n^{-2}))}{-n^{-2}} = -1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= e^{-1} \approx 0.3679. \end{aligned}$$

סימולציה

For 10 boxes:

Probability of all real = 0.3487

Proportion all real = 0.3480

For 100 boxes:

Probability of all real = 0.3660

Proportion all real = 0.3730

For 200 boxes:

Probability of all real = 0.3670

Proportion all real = 0.3690

28. לתפוס את הזייפן החמדן^S (Catching the greedy counterfeiter)

נתון n קופסאות ובכל אחת n מטבעות מהם m מזוייפים. שלוף מטבע אחת מכל קופסה ובדוק אם הוא מזויף או אמיתי. מה ההסתברות $P(n, m, r)$ ש- r מתוך המטבעות הם מזוייפים?

שאלה 1: פתח נוסחה עבור $P(n, m, r)$.

שאלה 2: חשב $P(20, 10, 2)$, $P(20, 10, 8)$, $P(20, 5, 2)$, $P(20, 5, 4)$.

פתרון

תשובה 1: יש $\binom{n}{r}$ אוספים של קופסאות מהן המטבעות המזוייפים נשלפו. מההתפלגות הבינומית:

$$P(n, m, r) = \binom{n}{r} \left(\frac{m}{n}\right)^r \left(\frac{n-m}{n}\right)^{n-r}.$$

תשובה 2:

$$P(20, 10, 2) = \binom{20}{2} \left(\frac{10}{20}\right)^2 \left(\frac{10}{20}\right)^{18} \approx 0.0002$$

$$P(20, 10, 8) = \binom{20}{8} \left(\frac{10}{20}\right)^8 \left(\frac{10}{20}\right)^{12} \approx 0.1201$$

$$P(20, 5, 2) = \binom{20}{2} \left(\frac{5}{20}\right)^2 \left(\frac{15}{20}\right)^{18} \approx 0.0669$$

$$P(20, 5, 4) = \binom{20}{4} \left(\frac{5}{20}\right)^4 \left(\frac{15}{20}\right)^{16} \approx 0.1952.$$

Mosteller מראה שעבור m, r נתונים, כאשר n שואף לאינסוף:

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(n, m, r) = \frac{e^{-m} m^r}{r!}.$$

סימולציה

For 10 bad coins, 2 draws:
 Probability of counterfeit = 0.0002
 Proportion counterfeit = 0.0002
 For 10 bad coins, 8 draws:
 Probability of counterfeit = 0.1201
 Proportion counterfeit = 0.1181
 For 5 bad coins, 2 draws:
 Probability of counterfeit = 0.0669
 Proportion counterfeit = 0.0688
 For 5 bad coins, 4 draws:
 Probability of counterfeit = 0.1897
 Proportion counterfeit = 0.1905

29. עובש בג'לטין (Moldy gelatin)^S

נתון לוח מלבני שמחולק ל- n משבצות ריבועיות קטנות. בכל משבצת יש r חיידקים בממוצע.

שאלה 1: פתח נוסחה להסתברות שיש בדיוק r חיידקים ב- n המשבצות.

שאלה 2: חשב את ההסתברות עבור $r = 3$, $n = 100$.

רמז: בעיה זו דומה לבעיה 28.

פתרון

תשובה 1: תהי p ההסתברות שבמשבצת אחת נמצא חיידק. (ניתן להתעלם מהאפשרות חידק את מוכל באופן חלקי בשתי משבצות או יותר.) m , המספר הממוצע של חיידקים במשבצת, היא מספר המשבצות n כפול ההסתברות p שחידק נמצא במשבצת. $P(n, m, r)$, ההסתברות שיש בדיוק r חיידקים ב- n משבצות ניתנת על ידי ההתפלגות הבינומית:

$$P(n, m, r) = \binom{n}{r} \left(\frac{m}{n}\right)^r \left(\frac{n-m}{n}\right)^{n-r}.$$

תשובה 2:

$$P(100, 3, 3) = \binom{100}{3} \left(\frac{3}{100}\right)^3 \left(\frac{97}{100}\right)^{97} \approx 0.2275.$$

משוואה 23 מתאים גם כאן ולכן:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, 3, 3) = \frac{e^{-3} \cdot 3^3}{3!} \approx 0.2240.$$

סימולציה

For 20 squares:

Probability of exactly 3 microbes = 0.2428

Proportion of exactly 3 microbes = 0.2436

Probability of exactly 5 microbes = 0.2023

Proportion of exactly 5 microbes = 0.1954

For 100 squares:

Probability of exactly 3 microbes = 0.2275

Proportion of exactly 3 microbes = 0.2247

Probability of exactly 5 microbes = 0.1800

Proportion of exactly 5 microbes = 0.1851

31. ימי הולדת זהים ^S(Birthday pairings)

בחר באקראי 23 אנשים ושאל כל אחד ליום ההולדת שלו. הנח התפלגות אחידה של 365 ימי ההולדת השונים (אף אחד לא נולד ב-29 לפברואר). הראה שההסתברות שלפחות שניים מהם יהיו יום הולדת זהה היא גדולה מ-0.5.

פתרון

נחשב את ההסתברות ש-**אף אחד** מה-23 אין ימי הולדת זהים ונראה שהיא פחות מ-0.5. בחר יום הולדת ראשון בצורה אקראית, את יום ההולדת הבא בחר מתוך שאר הימים, את יום ההולדת הבא בחר מתוך שאר הימים, כך הלאה:

$$P(\text{זהים הולדת ימי עם זוג אין}) = \overbrace{\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{344}{365} \cdot \frac{343}{365}}^{23 \text{ fractions}}$$

$$= \frac{365!}{365^{23} \cdot 342!} \approx 0.4927.$$

רוב האנשים מנחשים שצריכים יותר מ-23 כדי למוצא שניים עם ימי הולדת זהים. מחשבון מודרני מסוגל לחשב את ההסתברות, אבל שווה לחשבה באמצעות הקירוב של Stirling שהוא $\ln n! \approx n \ln n - n$:

$$\begin{aligned} \ln P(\text{זהים הולדת ימי עם זוג אין}) &= \ln \left(\frac{365!}{342! \cdot 365^{23}} \right) = \ln 365! - \ln 342! - 23 \ln 365 \\ &\approx (365 \ln 365 - 365) - (342 \ln 342 - 342) - 23 \ln 365 \\ &\approx -0.7404 \end{aligned}$$

$$P(\text{זהים הולדת ימי עם זוג אין}) \approx e^{-0.7404} = 0.4769.$$

הקורא מוזמן לחשב את ההסתברות עם הקירוב המדויק יותר:

$$\ln n! \approx n \ln n - n + \frac{1}{6} \left(8n^3 + 4n^2 + n + \frac{1}{30} \right) + \frac{1}{2} \ln \pi.$$

סימולציה

For 21 people:

Expectation of no pairs = 0.5563

Average no pairs = 0.5497

For 22 people:

Expectation of no pairs = 0.5243

Average no pairs = 0.5237

For 23 people:

Expectation of no pairs = 0.4927

Average no pairs = 0.4933

For 24 people:

Expectation of no pairs = 0.4617

Average no pairs = 0.4576

For 25 people:

Expectation of no pairs = 0.4313

Average no pairs = 0.4345

32. למצוא עמית ליום ההולדת (Finding your birthmate)^S

עמית יום הולדת, בקיצור עמית, הוא אדם עם ביום הולדת זהה לשלך.

מדוע מציאת עמית היא בעיה שונה ממצאת זוג עם ימי הולדת זהים?

שאלה 1: כמה אנשים עליך לשאול כדי שהסתברות למציאת עמית גבוהה מ-0.5?

שאלה 2: פתור את הבעיה על ידי שימוש במשוואה 22 (עמוד 39).

פתרון

להרבה אנשים יכול להיות יום הולדת זהה שנחשב כהצלחה במציאת זוג, אבל לא הצלחה במציאת עמית אלא אם יום ההולדת שלו זהה לשלך.

תשובה 1: מצא את המספר הקטן של אנשים כך שהסתברות שאף אחד מהם הוא עמית היא פחות מ-0.5. ההסתברות שהאדם הראשון שאתה שואל אינו עמית היא $364/365$, אבל זאת גם ההסתברות שהשני, השלישי, ..., אינו עמית. הפתרון הוא ה- k הקטן ביותר כך ש:

$$P(\text{עמית נמצא לא}) = \left(\frac{364}{365}\right)^k < \frac{1}{2},$$

which is $k = 253$:

$$\left(\frac{364}{365}\right)^{253} \approx 0.4995.$$

תשובה 2: משוואה 22 היא:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e},$$

וניתן להשתמש בה לחשב את ההסתברות:

$$\begin{aligned} P(\text{עמית נמצא לא}) &= \left(\frac{365-1}{365}\right)^k = \left[\left(\frac{364}{365}\right)^{365}\right]^{k/365} \\ &\approx e^{-k/365} \\ e^{-253/365} &\approx 0.5000. \end{aligned}$$

סימולציה

For 251 people:
 Probability of no match = 0.5023
 Proportion no match = 0.5120
 For 252 people:
 Probability of no match = 0.5009
 Proportion no match = 0.5055
 For 253 people:
 Probability of no match = 0.4995
 Proportion no match = 0.4984
 For 254 people:
 Probability of no match = 0.4982
 Proportion no match = 0.4987
 For 255 people:
 Probability of no match = 0.4968
 Proportion no match = 0.5078

33. השוואת הבעיות יום הולדת זהה ועמית ליום ההולדת (Relating the birthday pairings and the birthmate problems)

תהי $P_{\text{זוג}}(r)$ ההסתברות שמתוך r אנשים לשניים יש יום הולדת זהה (בעיה 31), ותהי $P_{\text{עמית}}(n)$ ההסתברות שמתוך n אנשים לפחות אחד הוא עימית שלך (בעיה 32). נתון r עבור איזה n , $P_{\text{זוג}}(r) \approx P_{\text{עמית}}(n)$?

פתרון 1

הפתרון מבוסס על [7].

סמן ב- $P_{\text{זוג}}(r)$ את המשלים ל- $P_{\text{זוג אין}}(r)$. מהפתרון לבעיית 31 מתקבל:

$$\begin{aligned} P_{\text{זוג אין}}(r) &= \frac{365}{365} \cdot \frac{365-1}{365} \cdot \frac{365-2}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365-(r-1)}{365} \\ &= 1 \left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{r-1}{365}\right) \\ &\approx 1 - \frac{1}{365} - \frac{2}{365} - \dots - \frac{r-1}{365} \\ &= 1 - \frac{1+2+3+\dots+(r-1)}{365} \\ &= 1 - \frac{r(r-1)/2}{365}, \end{aligned}$$

כאשר הקירוב במשוואה השלישית מתקבל מהשמטת חזקות של $1/365$ גדולות מאחת כי הן קטנות מדי להשפיע באופן מהותי על התוצאה.

נסמן ב- $P_{\text{אין עמית}}(n)$ את המשלים ל- $P_{\text{עמית}}(n)$ ונשתמש באותו קירוב. מהפתרון לבעיה 32 נקבל:

$$\begin{aligned} P_{\text{אין עמית}}(n) &= \overbrace{\left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{365}\right)}^n \\ &\approx 1 - \overbrace{\frac{1}{365} + \frac{1}{365} + \cdots + \frac{1}{365}}^n \\ &\approx 1 - \frac{n}{365} \end{aligned}$$

לכן $P_{\text{אין עמית}}(n) \approx P_{\text{אין זוג}}(r)$ כאשר:

$$n = \frac{r(r-1)}{2}.$$

עבור $r = 23$, $n = (23 \cdot 22)/2 = 253$.

פתרון 2

Mosteller [7, p. 322] מביא את הפתרון האיטואיטיבי שלהלן:

כאשר משווים בין בעיית הזוג ובעיית העמית, אנו שמים לב שעבור r אנשים בבעיית הזוג, קיימים $r(r-1)/2$ זוגות או **הזדמנויות** לידי הולדת זהים; לעומת זאת, אם שואלים n בבעיית העמית, קיימות רק n הזדמנויות כדי שאמצא עמית אחד או יותר.

מכאן הוא מסיק ש- $n \approx r(r-1)/2$.

ניתן להבין את הטיעון כך: בבעיית הזוג, בחר תאריך שרירותי ושאל אם לשניים מתוך r **תאריך זה** הוא יום ההולדת שלהם. יש

$$\binom{r}{2} = \frac{r!}{2!(r-2)!} = \frac{r(r-1)}{2}$$

דרכים שזה אפשרי. עבור בעיית העמית, יום ההולדת שלך נתון. יש אפשרות שלכל אחד מתוך n אנשים יש את אותו יום הולדת. על ידי השוואת שני ביוטיים נקבל n עבורו $P_{\text{אין עמית}}(n) \approx P_{\text{אין זוג}}(r)$.
תוכל להריץ את הסימולציות לבעיות 31, 32 ולבדוק תוצאה זו.

34. חופש בימי הולדת (D, S Birthday holidays)

בית חרושת נסגר בכל יום שהוא יום הולדת של אחד העובדים. אין חופשות נוספות.

שאלה 1: כמה עובדים כדי להעסיק כדי לקבל את מספר ימי-העבודה המקסימליים בשנה אחת?

שאלה 2: מה התוחלת של היחס בין מספר ימי-העבודה המקסימליים לבין 365^2 , מספר ימי-העבודה עם כל אחד מ-365 העובדים עובדים כל יום?

רמז: הוכח שחייב להיות מקסימום על ידי בדיקת מקרי הקצה. אחר כך פתח נוסחה של התוחלת של ימי-העבודה ביום אחד.

פתרון

תשובה 1: בקצה אחד אם יש רק עובד אחד, יהיו 364 ימי-עבודה. אם יש שני עובדים מספר ימי-העבודה הוא $363 + 363 = 726$ (כאשר נתעלם המאפשרות הזניחה שלשניהם אותו יום הולדת). בקצה השני אם יש מיליון עובדים, מספר ימי-העבודה יהיה אפס כמעט בוודאות. אם מספר ימי-העבודה עולה ואחר כך חוזר לאפס, חייב להיות מקסימום בין הקצבות.

כדי לפשט את הסימונים, נסמן את המספר הימים בשנה ב- N ומספר העובדים ב- n .
לכל יום נתון ההסתברות שהוא יום-עבודה היא ההסתברות שלכל עובד יום הולדת בתאריך אחר:

$$P(\text{יום נתון הוא יום עבודה}) = \overbrace{\frac{N-1}{N} \cdot \dots \cdot \frac{N-1}{N}}^n = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

סמן ב- p את $\left(1 - \frac{1}{N}\right)$. אזי:

$$E(\text{ימי-עבודה ליום נתון}) = n \cdot p^n + 0 \cdot (1 - p^n) = np^n.$$

לכל ימי השנה אותה תוחלת כך שרק נותר להכפיל ב- N כדי לקבל את התוחלת לשנה:

$$(24) \quad E(\text{ימי-עבודה לשנה}) = Nnp^n.$$

כדי למצוא את המקסימום נגזור את משוואה 24 ביחס ל- n ונשמתש ב- $p^n \ln p = (p^n)'$ ניתן להוכיח בעזרת כלל השרשרת:

$$(p^n)' = ((e^{\ln p})^n)' = (e^{n \ln p})' = e^{n \ln p} (n \ln p)' = (e^{\ln p})^n \ln p = p^n \ln p.$$

הנגזרת של משוואה 24

היא:

$$(Nnp^n)' = N(p^n + n(p^n)') = N(p^n + np^n \ln p),$$

שהיא 0 כאשר:

$$n = -\frac{1}{\ln p}.$$

עבור $N = 365$ מתקבל $n = 364.5$ אבל n הוא מספר שלם ולכן המקסימום מתקבל ב- $n = 364$ או $n = 365$ שנותנים אותו תוחלת של ימי-עבודה:

$$\begin{aligned} E(\text{ימי-עבודה לשנה}) &= Nnp^n \\ &= 365 \cdot 364 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{364} \\ &= 365 \cdot 364 \cdot \frac{365}{365} \left(\frac{364}{365}\right)^{364} \\ &= 365 \cdot 365 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{365} \\ &= 48944. \end{aligned}$$

תשובה 2: התוחלת של היחס היא :

$$E(\text{ימי-עבודה אפשריים/ימי-עבודה מקסימליים}) = \frac{365 \cdot 365 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{365}}{365 \cdot 365} = \left(\frac{364}{365}\right)^{365} \approx 0.3674.$$

לפי משוואה 22 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\text{ימי-עבודה אפשריים/ימי-עבודה מקסימליים}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{e}.$$

סימולציה

For 100 people

Expectation work-days = 27742

Average work days = 27743

Ratio work-days / 365**2 = 0.2082

For 250 people

Expectation work-days = 45958

Average work days = 45939

Ratio work-days / 365**2 = 0.3450

For 364 people

Expectation work-days = 48944

Average work days = 48936

Ratio work-days / 365**2 = 0.3674

For 365 people

Expectation work-days = 48944

Average work days = 48917

Ratio work-days / 365**2 = 0.3674

35. על שפת התהום (The cliff-hanger)

לקיק מוצב על ציר ה- x במקום 1. בכל מקום על ציר ה- x הוא יכול לצעוד צעד ימינה עם הסתברות $2/3$ וצעד שמאלה עם הסתברות $1/3$ (איור 6).

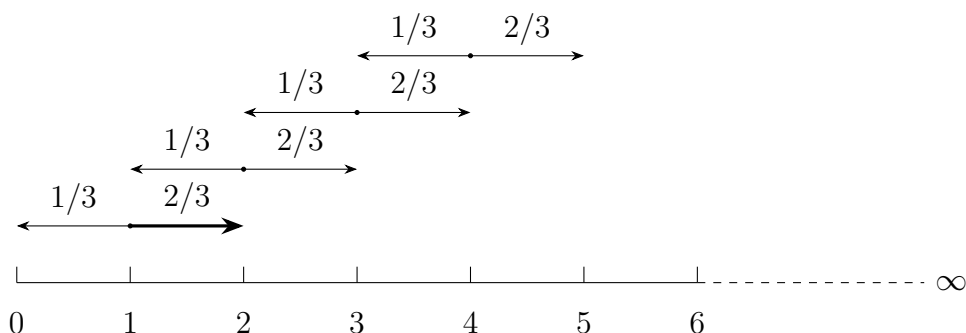
שאלה 1: מה ההסתברות שהחלקיק יגיע למקום 0 בסופו של דבר?

שאלה 2: אם ההסתברות של צעד ימינה היא p וההסתברות של צעד שמאלה היא $1-p$, מה ההסתברות שהחלקיק יגיע למקום 0 בסופו של דבר? נתח את האפשרויות לערכים שונים של p .

רמז: השתמש בהסתברויות מותנות לאחר הצעד הראשון.

פתרון

ניתן את הפרתונות של שתי השאלות ביחד כי חישוב ההסתברות ל- p לא קשה יותר מחישוב ל- $2/3$. $p =$



איור 6: האם חלקיק יכול להגיע ל-0 (הציר אינסופי לימין)

תשובה 1,2: ננסה לחשב את ההסתברות בצורה ישירה. נסמן צעד שמאלה ב- L וצעד ימינה ב- R . החלקיק יכול להגיע ל-0 ישירות על ידי צעד L עם הסתברות $\frac{1}{3}$, או על ידי צעד RLL עם הסתברות $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$, או על ידי צעד $RRLLL$ עם הסתברות $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3$, החישוב נראה כמו סידרה הנדסית פשוטה אבל הוא מתעלם האפשרויות כגון $RLRLL$.

נחשב את ההסתברות שהחלקיק מגיעה ל-0 מ-1 בתלות בצעד הראשון:

$$\begin{aligned} P(\text{מגיע ל-0 מ-1}) &= P(\text{צעד ראשון שמאלה} | \text{מגיע ל-0 מ-1}) + \\ &\quad P(\text{צעד ראשון ימינה} | \text{מגיע ל-0 מ-1}) \\ &= (1-p) \cdot 1 + pP(\text{מגיע ל-1 מ-2} | \text{מגיע ל-0 מ-1}). \end{aligned}$$

אבל ההסתברות להגיע ל-1 מ-2 היא בדיוק ההסתברות להגיע ל-0 מ-1. נסמן ב- P את $P(\text{מגיע ל-0 מ-1})$ ונקבל:

$$\begin{aligned} P &= (1-p) + pP^2 \\ pP^2 - P + (1-p) &= 0 \\ P &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p} \\ P &= 1, (1-p)/p. \end{aligned}$$

אם $p \leq 1/2$ אזי $(1-p)/p \geq 1$, כך ש- $P = 1$ הוא הפתרון היחיד ובטוח שהחלקיק יגיע ל-0.

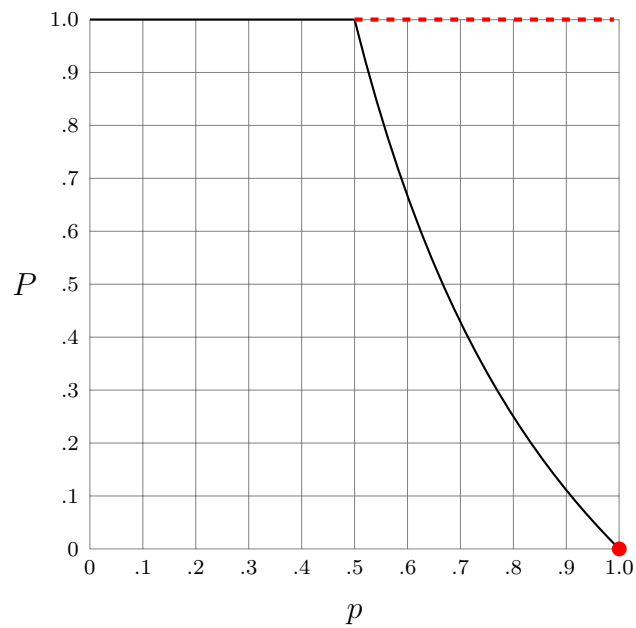
אם $p = 1$ אזי $P = 0$ כי אם החלקיק תמיד צועד ימינה הוא לא יכול לחזור ל-0.

נניח ש- $P = 1$ עבור $1/2 < p < 1$, כלומר, P לא תלוי ב- p . אבל P לא יכול "לקפוץ" פתאום מ-1 ל-0 כאשר p שואף ל-1: באיור 7 הקו האדום המקווקו והנקודה האדומה ב- $(1, 0)$. לכן, עבור $p > 1/2$ הפתרון היחיד הוא $P = (1-p)/p < 1$.

עבור $p = 1/2$, $P = 1$ ועבור $p = 2/3$, $P = 1/2$. זאת תוצאה מפתיעה כי לא היינו מצפים שהחלקיק יחזור תמיד ל-0 אם כיוון הצעד נקבע על ידי הטלת מטבע הוגן! אנו זקוקים למטבע ממש לא-הוגן (הסתברות של "עץ" שווה ל- $2/3$) כדי להשוות את הסיכויים לחזור ל-0 או לא.

סימולציה

Mosteller² כותב שזה נובע מרציפות אבל הוא לא מספק הוכחה.



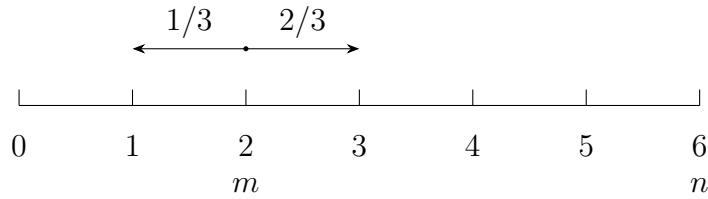
איור 7: הגרף של $P = \min(p/(1-p), 1)$ עבור $p \in [0, 1]$

For probability = 0.2500:
 Probability of reaching 0 = 1.0000
 Proportion reaching 0 = 1.0000
 For probability = 0.5000:
 Probability of reaching 0 = 1.0000
 Proportion reaching 0 = 0.9612
 For probability = 0.6667:
 Probability of reaching 0 = 0.5000
 Proportion reaching 0 = 0.5043
 For probability = 0.7500:
 Probability of reaching 0 = 0.3333
 Proportion reaching 0 = 0.3316
 For probability = 0.8000:
 Probability of reaching 0 = 0.2500
 Proportion reaching 0 = 0.2502

36. המהמר פשט רגל D, S (Gambler's ruin)

לקיק מוצב על ציר ה- x במקום $m \geq 1$. בכל מקום על ציר ה- x הוא יכול לצעוד צעד ימינה עם הסתברות $p > 1/2$ וצעד שמאלה עם הסתברות $1 - p$.

שאלה 1: מה ההסתברות שהחלקיק יגיע למקום 0 בסופו של דבר?



איור 8: האם החלקיק יכול לחזור ל-0 (ציר סופי)?

שאלה 2: יהי $n > m$. אם החלקיק מגיע למקום 0 או למקום n הוא מפסיק לצעוד (איור 8). מה ההסתברות שהחלקיק יגיע למקום 0? מה ההסתברות שהחלקיק יגיע למקום n בסופו של דבר?

הערה: בעיה 35 מייצגת מהמר המשחק עם כמות סופית של כסף נגד קזינו עם כמות בלתי מוגבלת של כסף. הבעיה מבקשת את ההסתברות שהמהמר יפסיד את כל כספו. בעיה זו מייצגת מהמר אחד עם m שמשחק נגד מהמר שני עם $n - m$. הבעיה מבקשת את ההסתברויות שאחד מהם מפסיד את כל כספו לשני.

פתרון

הפתרון מבוסס על [11, Chapter 2, Example 4m].

תשובה 1: הבה נתון לבעיה 35 ראינו שעבור $p > 1/2$ (כאן ההנחה נתונה), אם חלקיק נמצא במקום 1 ההסתברות שלו להגיע ל-0 היא $r = (1 - p)/p$. סימון: תהי $P(i, j)$ ההסתברות להגיע מ- i מ- j . בגלל שההסתברות של חלקיק להגיע ממקום אחד לשני לא תלוי במקום האבסולוטי:

$$(25) \quad P(0, m) = P(m - 1, m)P(m - 2, m - 1) \cdots P(1, 2)P(0, 1) = r^m.$$

תשובה 2: תהי $P_i = P(n, i)$ וחשב אותה תוך שימוש בהסתברות מותנית:

$$\begin{aligned} P_i &= pP_{i+1} + (1 - p)P_{i-1} \\ pP_{i+1} &= 1 \cdot P_i - (1 - p)P_{i-1} \\ pP_{i+1} &= (p + (1 - p))P_i - (1 - p)P_{i-1} \\ p(P_{i+1} - P_i) &= (1 - p)(P_i - P_{i-1}) \\ P_{i+1} - P_i &= r(P_i - P_{i-1}). \end{aligned}$$

$P_0 = 0$ כי אם החלקיק נמצא ב-0 הוא מפסיק לצעוד. לכן:

$$\begin{aligned} P_2 - P_1 &= r(P_1 - P_0) = rP_1 \\ P_3 - P_2 &= r(P_2 - P_1) = r^2P_1 \\ &\vdots \\ P_i - P_{i-1} &= r(P_{i-1} - P_{i-2}) = r^{i-1}P_1. \end{aligned}$$

רוב הגורמים בצד השמאלי מצטמצמים כאשר מחברים את המשוואות :

$$\begin{aligned} P_i - P_1 &= P_1 \sum_{j=2}^i r^{j-1} \\ &= P_1 + P_1 \sum_{j=2}^i r^{j-1} - P_1 \\ P_i &= P_1 \sum_{j=0}^{i-1} r^j = P_1 \left(\frac{1-r^i}{1-r} \right). \end{aligned}$$

אם חלקיק נמצא ב- n הוא כבר נמצא ב- n כך ש- $P_n = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= P_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right) \\ P_1 &= \left(\frac{1-r}{1-r^n} \right), \end{aligned}$$

ולכן (בהוכחה סימטרית שמחליפה p ו- $1-p$) :

$$(26) \quad P(n, i) = \left(\frac{1-r^i}{1-r^n} \right)$$

$$(27) \quad P(0, i) = \left(\frac{1-(1/r)^{n-i}}{1-(1/r)^n} \right).$$

הקורא מוזמן להראות שהסכום של משוואות 26, 27 הוא 1 כלומר שמובטח שאחד המהמרים ינצח והשני יפסיד.

עבור $m = 1, n = 3, p = 2/3$:

$$\begin{aligned} P(0, 1) &= \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3} \right) = \frac{4}{7} \\ P(3, 1) &= \left(\frac{1 - 2^2}{1 - 2^3} \right) = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

סימולציה

For probability = 0.6667:

Probability of reaching (0,10) from 1 = (0.4995,0.5005)
 Proportion reaching (0,10) from 1 = (0.5056,0.4944)
 Probability of reaching (0,10) from 4 = (0.0616,0.9384)
 Proportion reaching (0,10) from 4 = (0.0643,0.9357)
 Probability of reaching (0,10) from 6 = (0.0147,0.9853)
 Proportion reaching (0,10) from 6 = (0.0123,0.9877)

For probability = 0.7500:

Probability of reaching (0,10) from 1 = (0.3333,0.6667)
 Proportion reaching (0,10) from 1 = (0.3395,0.6605)
 Probability of reaching (0,10) from 4 = (0.0123,0.9877)
 Proportion reaching (0,10) from 4 = (0.0115,0.9885)
 Probability of reaching (0,10) from 6 = (0.0014,0.9986)
 Proportion reaching (0,10) from 6 = (0.0015,0.9985)

ככל שלמהמר בצד שמאל יש יותר והסתברות גבוהה היותר לנצח בכל צעד, כך ההסתברות שלו לנצח גדלה.

37. משחק נועז או משחק זהיר (Bold play vs. cautious play)^S

רולט ניתן להמר שהכדור יפול בכיס המסומן במספר זוגי. ההסתברות היא $18/38$ כי יש 18 מספרים זוגיים, 18 מספרים אי-זוגיים ו-2 מספרים ירוקים עליהם הקזינו מנצח. איזו מהאסטרטגיות שלהלן עדיפה?

1. משחק נועז : להמר 20 בסיבוב אחד.

2. משחק זהיר : להמר 1 בכל סיבוב עד שאתה מנצח או מפסיד 20.

רמז: השתמש בתוצאות של בעיה 36.

פתרון

ההסתברות לנצח עם משחק נועז היא $18/38 \approx 0.4737$.
 ההסתברות לנצח עם משחק זהיר היא (משוואה 26):

$$r = \frac{20}{38} / \frac{18}{38} = \frac{20}{18}$$

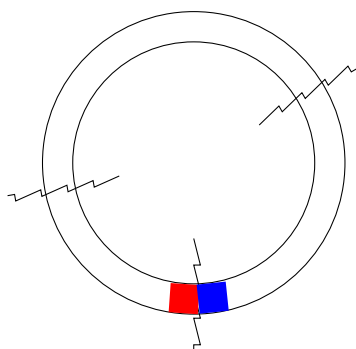
$$P(40, 20) = \frac{1 - (20/18)^{20}}{1 - (20/18)^{40}} \approx 0.1084.$$

ברור שמשחק נועז עדיף על משחק זהיר.

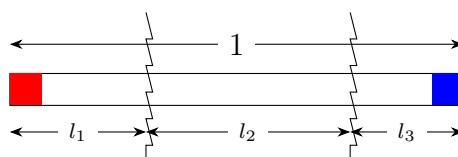
Mosteller כותב שהסבר איטואטיבי לתוצאה זו היא שהימור בסיבובים רבים חושף את המהמר לאפשרות שהקזינו מנצח בהסתברות $2/38$.

סימולציה

Probability of bold wins = 0.4737
 Proportion bold wins = 0.4677
 Probability of cautious wins = 0.1084
 Proportion cautious wins = 0.1094



איור 9(ב) חלוקת טבעת לשלושה חלקים



איור 9(א) חלוקת מקל לשלושה חלקים

39. הכימאי המגושם (The clumsy chemist)^S

נתון מספר רב של מקלות מזכוכית באורך 1. קצה אחד צבוע באדום ושני בכחול. כאשר זורקים אותם על הרצפה, הם נשברים לשלושה חלקים עם התפלגות אחידה של האורכים (איור 9(א)). מה התוחלת של אורכו של החלק בקצה הכחול?

רמז: במקום מקלות ישרים הנח שקבלת טבעות זכוכית ללא סימנים שגם הם נשברים לשלושה החלקים (איור 9(ב)).

פתרון 1

אין סימטריה במלקות כי הקצות שונים מהחלק האמצעי. אולם הטבעת סימטרית ולכן ההתפלגויות של שלושת החלקים יהיו אחידות עם תוחלת $1/3$. על ידי צביעת אחת מנקודות השבירה כפי שמופיע באיור 9(ב), הבעיה הופכת להיות זהה לבעיית המקל כך שההתפלגויות זהות. לכן התוחלת של אורכי החלקים היא גם $1/3$.

פתרון 2

הפתרון אלגנטי שלהלן מבוסס על [4].

נניח שהמקל מייצג את קטע הקו $(0, 1)$. המקל נשבר בשני מקומות שניתן לייצג בני משתנים אקראיים בלתי-תלויים עם התפלגות אחידה $X, Y \in (0, 1)$. נחשב את ההסתברות $P(|X - Y| > a)$.

טבלה 1 מראה נקודות (x, y) כאשר $x, y \in \{0.0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ והנקודה העשירונית הושמטה. הערכים בטבלה הם $|X - Y|$. עבור $a = 0.6$ הערכים למעלה משמאל מ- $(0, 6)$ -- $(6, 9)$, והערכים למטה ומימין מ- $(6, 0)$ -- $(9, 6)$, הם התוצאות שמגדירות את $P(|X - Y| > a)$:

$$P(|X - Y| > a) = 2 \cdot \frac{1}{2}(1 - a)(1 - a) = (1 - a)^2.$$

$$P(|X - Y| > 0.6) = (0.4)^2 = 0.16, a = 0.6 \text{ עבור}$$

המשלים הוא:

$$P(|X - Y| < a) = 1 - (1 - a)^2.$$

		a									
	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1
	7	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2
a	6	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3
	5	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4
	4	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
y	3	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
	2	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
	1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		x					a				

טבלה 1: התפלגות נקודות השבירה ב- $(0, 1) \times (0, 1)$

הסתברות זו היא ההתפלגות ההסתברות המצטברת (CPD) cumulative probability distribution בקטע $(0, 1)$. ניתן לקבל את פונקציית ההסתברות הצפיפות (PDF) probability density function על ידי גזירת ה-CDF:

$$P(|X - Y| = a) = \frac{d}{da} P(|X - Y| < a) = \frac{d}{da} (1 - (1 - a)^2) = 2(1 - a).$$

התוחלת היא האינטגרל ה-PDF כפול הערך:

$$E(|X - Y|) = \int_0^1 a \cdot 2(1 - a) da = 2 \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

סימולציה

Expectation of length of right piece = 0.3333

Average length of right piece = 0.3359

40. האס הראשון (The first ace)^S

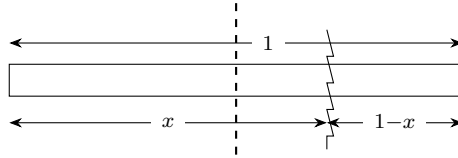
לק קלפים מחבילה מעורבת היטב עד שמופיע אס. מה התוחלת של מספר הקלפים שיש לחלק?
רמז: חשוב על חבילה קלפים ללא האסים מסודרת בשורה.

פתרון הקלפים הם כמו "מקל" באורך 48 "שנשבר" על ידי 4 ל-5 חלקים. הפתרון של בעיה 39 מתאים

גם כאן והתוחלת של חלק היא $48/5 = 9.6$.

סימולציה

Expectation of first ace = 9.6000
Average first ace = 9.5805



איור 10 : Breaking a stick into two pieces

42. הקצה הקצר של המקל (The little end of the stick) S

each. pieces two into broken are 1 length of each rods glass of number large

שאלה 1: What is the expectation of the length of the smaller piece?

שאלה 2: What is the expectation of the ratio of the length of the smaller piece to the larger piece?

פתרון

תשובה 1: The probability that the break occurs on the left half of the rod is $1/2$ as it is the same side as the break and since the break occurs at a random place, the expectation of its position is halfway between the end and the middle. Therefore: middle. the

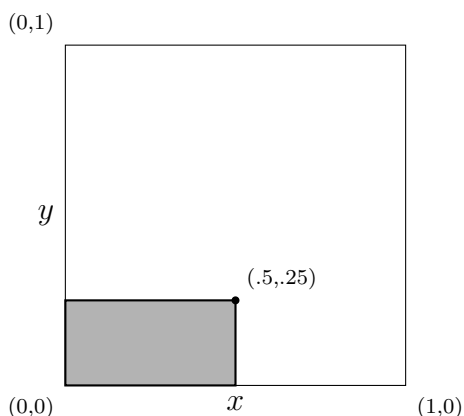
$$E(\text{length of smaller piece}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

תשובה 2: Without loss of generality that the break occurred in the right half of the rod (Figure 10). The ratio of the smaller piece to the larger piece is $(1-x)/x$ and the expectation of this ratio is: $(1/2, 1)$ distributed uniformly.

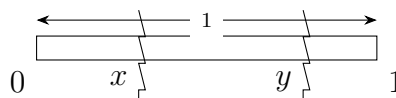
$$\begin{aligned} E(\text{ratio}) &= \left(\frac{1}{1 - (1/2)} \right) \int_{1/2}^1 \frac{1-x}{x} dx \\ &= 2 \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) dx \\ &= 2 (\ln |x| - x) \Big|_{1/2}^1 = 2 \ln 2 - 1 \approx 0.3863. \end{aligned}$$

Simulation

0.2500 = Expectation of length of smaller
0.2490 = Average of length of smaller
0.3863 = Expectation of larger/smaller
0.3845 = Average of larger/smaller



איור 11(ב) יצוג האורכים במעגל היחידה



איור 11(א) חלוקת מקל לשני חלקים

43. המוט השבור (The broken bar)^S

A large number of rods of length 1 are broken in two places (Figure 11(a)).

שאלה 1: What is the expectation of the length of the shortest bar?

שאלה 2: What is the expectation of the length of the longest bar?

Hint: Each (x, y) pair is independently selected from a uniform distribution on $(0, 1) \times (0, 1)$. Figure 11(b) represents a point (x, y) in the unit square $(0, 1) \times (0, 1)$. What is the probability that $(x, y) < (.5, .25)$?

Hint: For **שאלה 1:** assume that the left piece is the shortest and for **שאלה 2:** assume the left piece is the longest.

פתרון

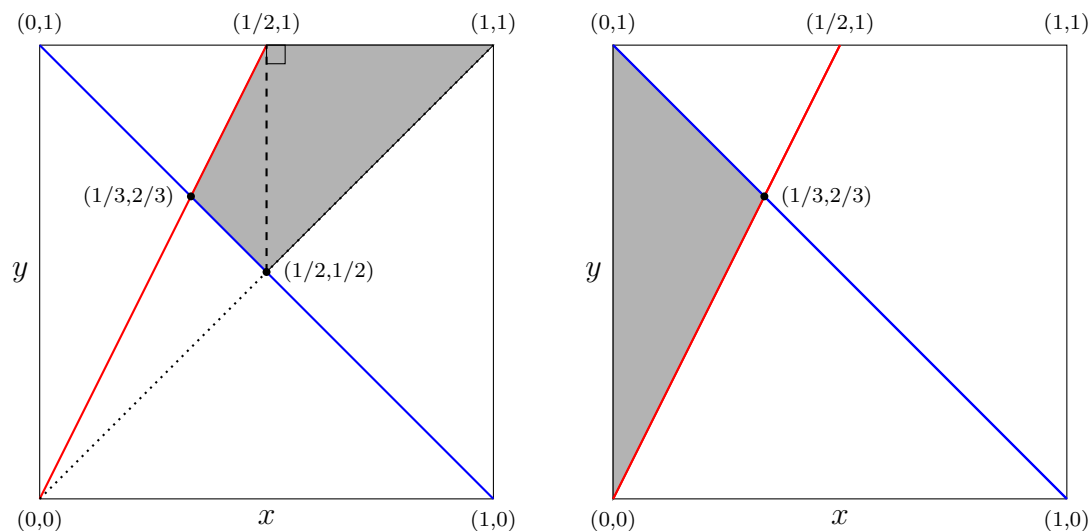
תשובה 1: Without loss of generality, assume that the left piece of length x is the shortest. Then we have from $x < 1 - y$ and $x < y - 2x$ and $x + y < 1$ and $2x < y$ have we which from

Figure 12(a) shows the lines $y = 2x$ (red) and $y = 1 - x$ (blue). For the inequalities the For (blue). $y = 1 - x$ and (red) $y = 2x$ lines the shows (a)12 Figure intersection of point The lines. two the of left region shaded the in be must (x, y) true, be to equations. two the solving by computed be can $(1/2, 2/3)$

While the values of (x, y) are in the range $(0, 1) \times (0, 1)$, the expectation is computed over the subset of $(0, 1) \times (0, 1)$ denoted by the shaded region of the unit square. Therefore, the expectation must be divided by the area of the shaded region, which is $\frac{1}{2}(\frac{1}{3} \cdot 1) = \frac{1}{6}$.

The expectation of the value of x is:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{1/6} \int_0^{1/3} x[(1-x) - 2x] dx \\ &= \int_0^{1/3} (6x - 18x^2) dx \\ &= (3x^2 - 6x^3) \Big|_0^{1/3} = \frac{2}{18} \approx 0.1111. \end{aligned}$$



איור 12 (ב) שטח מוצלל עבור המקל הארוך ביותר

איור 12 (א) שטח מוצלל עבור המקל הקצר ביותר

תשובה 2: For the piece left the longest, the be to piece left the For (x, y) so $x > 1 - y$ and $x > y - x$ longest, the be to piece left the For Furthermore, $y = 1 - x$ of right the to and (red) $y = 2x$ of right the (dotted). $y = x$ of left the to lie must (x, y) , y of left the to is x that assumption the by the compute and line) (dashed triangles two into region shaded the divide we convenience For triangles the of areas the of sum the is region shaded the of area The separately. expectations Then: $.1/24 + 1/8 = 1/6$

$$\begin{aligned} E(x \text{ in left triangle}) &= 6 \int_{1/3}^{1/2} x[2x - (1 - x)] dx \\ &= \int_{1/3}^{1/2} (18x^2 - 6x) dx \\ &= (6x^3 - 3x^2) \Big|_{1/3}^{1/2} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(x \text{ in right triangle}) &= 6 \int_{1/2}^1 x[1 - x] dx \\ &= \int_{1/2}^1 (6x - 6x^2) dx \\ &= (3x^2 - 2x^3) \Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$E(x) = \frac{1}{9} + \frac{1}{2} = \frac{11}{18} \approx 0.6111.$$

The expectation of the length of the middle-sized piece is $1 - \frac{2}{18} - \frac{11}{18} = \frac{5}{18} \approx 0.2778$.

Simulation

Expectations: $0.6111 = \text{longest}$, $0.2778 = \text{middle}$, $0.1111 = \text{shortest}$
Averages: $0.6102 = \text{longest}$, $0.2783 = \text{middle}$, $0.1115 = \text{shortest}$

44. לנצח במשחק לא-הוגן (Winning an unfair game) D, S

even an coin a Toss $.1/3 < p < 1/2$ is heads of probability whose coin unfair an given are ou
 heads. are tosses the of half than more only and if win You $N = 2n$ times of number
 formula a develop and game the winning of P_N probability the for formula a Develop :1
 occurring. tie a of T_N probability the for
 winning. of probability highest the gives that N the for formula a Develop :2
 . $P_N \geq P_{N+2}$ and $P_{N-2} \leq P_N$ then winning of probability highest the gives tosses N If **Hint:**

פתרון

תשובה 1: To win the game needs head appear in $i \in \{n+1, n+2, \dots, 2n-1, 2n = N\}$ in appear to needs head game the win To
 distribution: binomial the From tosses.

$$P_N = \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{2n}{i} p^i (1-p)^{2n-i}$$

$$T_N = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

תשובה 2: For $N = 2n$ we must give to $N = 2n$ the highest probability of winning:

$$P_{2n-2} \leq P_{2n} \quad \text{and} \quad P_{2n} \geq P_{2n+2}.$$

When is $P_{2n-2} \neq P_{2n}$?

Case 1: After $2n-2$ tosses has appeared n heads and $n-2$ tails (so you would have
 n heads and n tails now You tosses. two next the in appears tails but here), stop you if won
 is: probability The game. the lose therefore and tails,

$$\binom{2n-2}{n} p^n (1-p)^{n-2} (1-p)^2.$$

Case 2: After $2n-2$ tosses has appeared $n-1$ tails and $n-1$ heads (so you would have
 heads $n+1$ have now You tosses. two next the in appears heads but here), stop you if lost have
 is: probability The game. the win therefore and tails $n-1$ and

$$\binom{2n-2}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{n-1} p^2.$$

For $P_{2n-2} \leq P_{2n}$ to hold P_{2n} cannot increase while P_{2n} remains the same (Case 1), although
 Therefore: (Case 2) P_{2n-2} can become greater than P_{2n} .

$$\binom{2n-2}{n} p^n (1-p)^{n-2} (1-p)^2 \leq \binom{2n-2}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{n-1} p^2$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}(1-p) &\leq \frac{1}{n-1}p \\
(n-1)(1-p) &\leq np \\
n &\leq \frac{1-p}{1-2p} \\
2n &\leq \frac{1}{1-2p} + 1.
\end{aligned}$$

that: true be must it hold to $P_{2n} \geq P_{2n+2}$ for Similarly,

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n+1} p^{n+1} (1-p)^{n-1} (1-p)^2 &\geq \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n p^2 \\
\frac{1}{n+1} (1-p) &\geq \frac{1}{n} p \\
n(1-p) &\geq (n+1)p \\
n &\geq \frac{p}{1-2p} \\
2n &\geq \frac{1}{1-2p} - 1.
\end{aligned}$$

nearest the is winning for probability highest the gives that $N = 2n$ for value the Therefore, then odd is $1/(1-2p)$ if that show to reader the to leave We $.1/(1-2p)$ to integer even

$$.P_{2n} = P_{2n+2}$$

Simulation

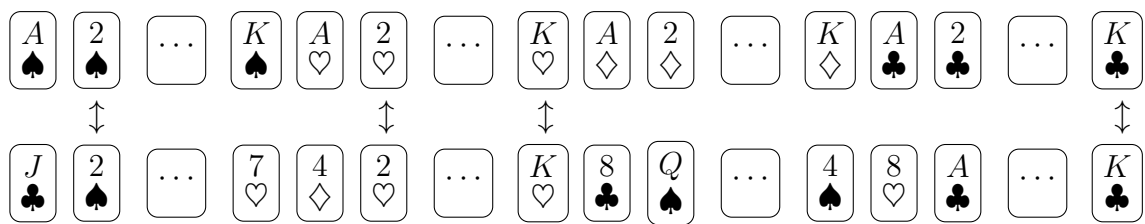
```

0.3700 =                probability For
      4 =  played be to games Optimal
0.1372 =   won average ,games 2   For
0.1445 =   won average ,games 4   For
0.1431 =   won average ,games 6   For

0.4000 =                probability For
      6 =  played be to games Optimal
0.1820 =   won average ,games 4   For
0.1845 =   won average ,games 6   For
0.1680 =   won average ,games 8   For

0.4500 =                probability For
     10 =  played be to games Optimal
0.2671 =   won average ,games 8   For
0.2646 =   won average ,games 10  For
0.2640 =   won average ,games 12  For

```



איור 13 : Matching of two decks of cards

45. ממוצע של מספר ההתאמות ^S(Average number of matches)

in row a in deck second a out lay then and order standard the in row a in cards of deck a out ay matches of number the of expectation the is What .(13 (Figure first the below order random a it? below card the with row first the in card a of

פתרון

with matched being of probability same the has card each because uniform is distribution The Therefore: it. above card the

$$E(\text{number of matches}) = 52 \cdot \frac{1}{52} = 1.$$

1.00 = matches of Expectation
1.01 = matches of Average

46. הסתברויות של התאמות ^S(Probabilities of matches)

row a in deck second a out lay then and order standard the in row a in cards n of deck a out Lay probability the , $P(n, r)$ for formula a Develop .(13 (Figure first the below order random a in that Assume below? card the with row first the in card a of matches r exactly be will there that $0 \leq k \leq n$ all for given is $P(k, 0)$

פתרון

difference. major a is there but 28 Problem to related be to seems problem this glance first At not. are they here whereas independent, are coins counterfeit of boxes the from drawings The probability the , $1/n$ probability (with card first the on occurs match first the if example, For $1/(n-1)$ is matches card second the that is: match cards r given any that probability The

$$(28) \quad \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdots \frac{1}{n+r-1}.$$

probability the , $P(n - r, 0)$ by multiplied be must 28 Equation matches r exactly obtain To
choosing of ways $\binom{n}{r}$ are there Finally, cards. $n - r$ remaining the in matches no are there that
Therefore: matches. r the

$$\begin{aligned} P(n, r) &= \binom{n}{r} \frac{1}{n(n-1)(n+r-1)} P(n-r, 0) \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{1}{n!/(n-r)!} P(n-r, 0) \\ &= \frac{1}{r!} P(n-r, 0), \end{aligned}$$

given. is $P(k, 0)$ since problem the solves which
: $P(n, r)$ for limit a and formula closed a develops Mosteller

$$(29) \quad P(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$(30) \quad \lim_{n-r \rightarrow \infty} P(n, k) \approx \frac{1}{k!} e^{-1}.$$

Simulation

.30 Equation from computed probability the and cards $n = 52$ for run was simulation The

0.3679 = matches 1 of Probability
0.3710 = matches 1 Proportion
0.1839 = matches 2 of Probability
0.1828 = matches 2 Proportion
0.0613 = matches 3 of Probability
0.0569 = matches 3 Proportion
0.0153 = matches 4 of Probability
0.0168 = matches 4 Proportion

47. לבחור את המוהר הגדול ביותר D, S (Choosing the largest dowry)

each of face the on written integer positive a is There down. face cards n of sequence a lace
and one-by-one over cards the Turn distribution. their to as knowledge no have you but card
number. largest the is it that declare can you card each over turning After numbers. the at look
of sequence the let example, For lose. you otherwise game, the win you correct are you If
card. third the choose you if only win You .(47, 23, 55, 4) be cards
the select and cards $r - 1$ first the reject r fixed some for strategy: following the Consider
cards. $r - 1$ the all than greater is number whose card first

will you games many how determine to permutations all check $r = 3$ and $n = 4$ For **שאלה 1**: win.

n, r arbitrary for win a of probability the for formula a Develop **שאלה 2**:

$n, r \rightarrow \infty$ when probability the for approximation an Find **שאלה 3**:

be? m to equal or less numbers the and m number largest the must where r Given **Hint**:

פתרון

actual the although ,1, 2, 3, 4 numbers the of rank the write we notation simplify To **תשובה 1**: you (4, 23, 47) 1, 2, 3 cards uncover you If .4, 23, 47, 55 are they say known, not are numbers card. last the select and it reject to or 47 accept to whether know not do

card third the either select you strategy the By numbers. four the of permutations 24 are There the about What position. first the in 4 has permutation the if lose you so card, fourth the or not is this but 1, 2 than greater it since 3 select and 1, 2 ignore You ! (1, 2, 3, 4) permutation ignored are 1, 3 Again, ! (1, 3, 2, 4) permutation the about What lose. you so card largest the and 4 select you Now .1, 3 than larger not is it because rejected also is 2 but strategy, the by boxed with permutations that check and permutations the all for reasoning this out Carry win. wins: are s4

1 2	3 4	1 2	4 3	1 3	2 4	1 3	4 2	1 4	2 3	1 4	3 2
2 1	3 4	2 1	4 3	2 3	1 4	2 3	4 1	2 4	1 3	2 4	3 1
3 1	2 4	3 1	4 2	3 2	1 4	3 2	4 1	3 4	2 1	3 4	2 1
4 1	2 3	4 1	3 2	4 2	1 3	4 2	3 1	4 3	1 2	4 3	2 1

.10/24 is winning of probability The

in Therefore, lose. you 1, ..., $r - 1$ positions of the one in is number largest the If **תשובה 2**: $r \leq m \leq n$ for position th m the in be must number largest the win to order

$$1 \quad 2 \quad \dots \quad r-2 \quad r-1 \quad \overbrace{r \quad r+1 \quad \dots \quad m-1}^{\text{largest number must be here}} \quad m \quad m+1 \quad \dots \quad n .$$

the all if only m position choose will You cards. $r - 1$ first the reject you strategy the By the words, other In .(1, ..., r) in numbers the all than less are $(r, \dots, m - 1)$ in numbers second the in not is , m until up sequence the ,(1, ..., $m - 1$) sequence entire the in card largest is: probability The .(1, ..., $r - 1$) part first the in but $(r, \dots, m - 1)$ sequence the of part

$$P(\text{largest card in } (1, \dots, m - 1) \text{ is in } (1, \dots, r - 1)) = \frac{r - 1}{m - 1} .$$

: $1/n$ is m at is card largest the that probability the Since

$$(31) \quad P(\text{win}) = \sum_{m=r}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{r - 1}{m - 1} = \frac{r - 1}{n} \sum_{m=r}^n \frac{1}{m - 1} .$$

$$.P(\text{win}) = 5/12 = 10/24, n = 4, r = 3 \text{ For}$$

first the choosing when winning of probability the but $r = 1$ for defined not is 31 Equation example. the in shown as winning of probability higher a have will r larger A $.1/n$ is number

as: 31 Equation Rewrite **תשובה 3:**

$$(32) \quad P(\text{win}) = \frac{r-1}{n} \left(\sum_{m=2}^n \frac{1}{m-1} - \sum_{m=2}^{r-1} \frac{1}{m-1} \right).$$

by: approximated be can 32 Equation n, r large For

$$P(\text{win}) = \frac{r}{n} (\ln n - \ln r) = \frac{r}{n} \ln \frac{n}{r} = -\frac{r}{n} \ln \frac{r}{n}.$$

derivatives: taking by maximum the find and $x = r/n$ Denote

$$(-x \ln x)' = -x \cdot \frac{1}{x} + (-1) \ln x = 0$$

$$\ln x = -1$$

$$x = 1/e.$$

$.r \approx n/e$ choose winning of probability that maximize To

: $100/e$ near r of values and cards 100 with run was simulation The **Simulation**

36:	= r before cards Reject
0.3674	= wins of Probability
0.3641	= wins Proportion
37:	= r before cards Reject
0.3678	= wins of Probability
0.3759	= wins Proportion
38:	= r before cards Reject
0.3679	= wins of Probability
0.3548	= wins Proportion
30:	= r before cards Reject
0.3590	= wins of Probability
0.3601	= wins Proportion

48. בחירת המספר האקראי הגדול ביותר (D, S) (Choosing the largest random number)

uniform with number real a is card each of face the On down. face cards n of sequence a Place After numbers. the at look and one-by-one over cards the Turn $.0.0 \leq x < 1.0$ in distribution win you correct are you If number. largest the is it that declare can you card each over turning lose. you otherwise game, the

cards $r - 1$ first the reject you that such r value a upon decide : **37 Problem of strategy the Use**
 cards. $r - 1$ first the in value largest the than larger is that card first the select then and
 card the reject to decide you which below value the is value, indifference the , **Definition:**
 card. the select to decide you which above and

winning. of probability the compute and $n = 1$ for d Compute : **שאלה 1:**

winning. of probability the compute and $n = 2$ for d Compute : **שאלה 1:**

winning! of probability the compute to try not Do . $n = 3$ for d Compute : **שאלה 3:**

first the uncovering so 100, 50, 20 or 100, 200, 300 be could values the **37 Problem In Note:**
 distribution the since problem, this In numbers. other the about information no gives number
 larger, being of 0.8 probability has number second the ,0.2 is number first the if uniform, is
 larger. being of 0.2 of probability a has number second the 0.8 is number first the if and

פתרון

cards. three the of values the be v_1, v_2, v_3 Let

There cards. other no are there since card first the select to but choice no have You : **תשובה 1:**
 $P(\text{win}) = 1$ number ``largest'' the is v_1 Since value. indifference no is

card second the that probability the is which $P(\text{win}) = v_1$ card first the select you If : **תשובה 2:**
 that probability the is which , $P(\text{win}) = 1 - v_1$ card, first the reject you If value. smaller a has
 $v_1 > 0.5$ if and $1 - v_1 > 0.5$ because card second the select $v_1 < 0.5$ if Therefore, $v_2 > v_1$
 $d = 0.5$ that follows It $1 - v_1 < 0.5$ because card first the select

winning: of probability the for formula the is Here

$$P(\text{win with two cards}) = p(\text{win} | v_1 < 0.5) p(v_1 < 0.5) + p(\text{win} | v_1 > 0.5) p(v_1 > 0.5).$$

By $p(\text{win} | v_1 < 0.5)$ about What distribution. uniform by immediate is $p(v_1 < 0.5) = 0.5$
 uniformly is v_1 Since $v_1 < v_2 < 0.5$ if win also you but , $0.5 < v_2 < 1$ if win you strategy the
 : $(0, 0.5)$ in distributed

$$p(\text{win} | v_1 < 0.5) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

gives: together this Putting $v_1 > 0.5$ for holds computation similar A

$$P(\text{win with two cards}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

תשובה 3:

smaller be must cards third and second the because $P(\text{win}) = v_1^2$ card first the select you If
 first. the than

: $v_2 > v_1$ because second the select and card first the reject you If

$$.v_3 < v_1 \text{ and } v_2 > v_1 \text{ if } P(\text{win}) = (1 - v_1)v_1 \cdot$$

$$.v_3 > v_1 \text{ and } v_2 < v_1 \text{ if } P(\text{win}) = v_1(1 - v_1) \bullet$$

order: the on depends winning since , $v_3 > v_1$ and $v_2 > v_1$ if $P(\text{win}) = \frac{1}{2}(1 - v_1)^2 \bullet$
loses. (0.55, 0.65, 0.75) and wins (0.55, 0.75, 0.65)

first the selecting by winning of probability the that such value the is d value indifference The
card: first the rejecting by winning of probability the equals card

$$d^2 = 2d(1 - d) + \frac{1}{2}(1 - d)^2$$

$$5d^2 - 2d - 1 = 0$$

$$d = \frac{1 + \sqrt{6}}{5} \approx 0.6899.$$

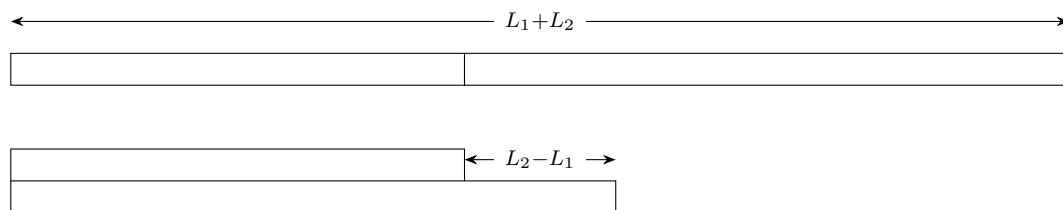
: $n = 3$ for that show [55 page ,3] Mosteller and Gilbert

$$P(\text{win}) = \frac{1}{3} + \frac{d}{2} + \frac{d^2}{1} - \frac{3d^3}{2} \approx 0.6617.$$

Simulation:

cards: 3 For

0.6000	= value Indifference
0.6693	= win of Probability
0.6628	= wins of Proportion
0.6899	= value Indifference
0.6617	= win of Probability
0.6711	= wins of Proportion
0.7200	= value Indifference
0.6519	= win of Probability
0.6473	= wins of Proportion



איור 14 : Measuring the lengths of two rods

49. להכפיל את הדיוק (Doubling your accuracy)

is error possible whose instrument measuring a and $L_1 < L_2$ lengths of rods two given are ou
can rods two the of lengths The σ^2 variance and 0 mean with distribution normal a by given
method? accurate more a there Is separately. one each measuring by measured be

פתרון

and side-by-side rods the place then and $L_s = L_1 + L_2$ measure and end-to-end rods the Place
: L_1, L_2 Compute .(14 Figure $L_d = L_2 - L_1$ measure

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(L_s - L_d) &= \frac{1}{2}((L_1 + L_2) - (L_2 - L_1)) = L_1 \\ \frac{1}{2}(L_s + L_d) &= \frac{1}{2}((L_1 + L_2) + (L_2 - L_1)) = L_2.\end{aligned}$$

are: results the in errors the so e_s, e_d are measurements the in errors The

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}((L_s + e_s) - (L_d + e_d)) &= L_1 + \frac{1}{2}(e_s - e_d) \\ \frac{1}{2}((L_s + e_s) + (L_d + e_d)) &= L_2 + \frac{1}{2}(e_s + e_d).\end{aligned}$$

measurements these of errors the of mean the ,0 is instrument measurement the of mean the Since
value: previous its half to reduced is variance The zero. also is

$$\begin{aligned}\text{Var}\left(\frac{1}{2}(e_s - e_d)\right) &= \frac{1}{4}(\sigma^2 + (-1)^2\sigma^2) = \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \text{Var}\left(\frac{1}{2}(e_s + e_d)\right) &= \frac{1}{4}(\sigma^2 + \sigma^2) = \frac{1}{2}\sigma^2.\end{aligned}$$

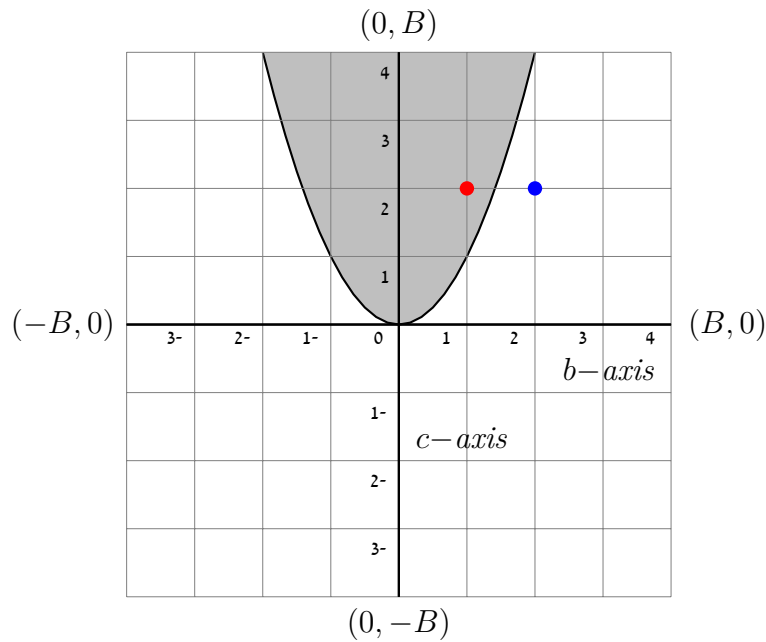
50. משוואות ריבועיות אקראיות (Random quadratic equations)

$B \geq 1$ for $[-B, B] \times [-B, B]$ on defined $x^2 + 2bx + c = 0$ equation quadratic the Consider

real? are roots the that probability the is What :1

real? are roots the that probability the is what $B \rightarrow \infty$ As :2

zero. is covariance the so independent are measurements the that fact the use We³



איור 15: For (b, c) in the area shaded the roots of $c = b^2$ are complex

פתרון

תשובה 1: The roots will be real if the discriminant is non-negative $4b^2 - 4c \geq 0$. Figure 15 shows a plot of the parabola $c = b^2$ where the area within is shaded. For example, $(b, c) = (1, 2)$ has complex roots (red dot), while $(b, c) = (2, 2)$ has real roots (blue dot).

The shaded area can be computed by integration:

$$\int_{-\sqrt{B}}^{\sqrt{B}} (B - b^2) db = Bb - \frac{b^3}{3} \Big|_{-\sqrt{B}}^{\sqrt{B}} = \left(B^{3/2} - \frac{B^{3/2}}{3} \right) - \left(-B^{3/2} + \frac{B^{3/2}}{3} \right) = \frac{4}{3} B^{3/2}.$$

The total area of the range $[-B, B] \times [-B, B]$ is $4B^2$ so:

$$P(\text{complex roots}) = \frac{\frac{4}{3} B^{3/2}}{4B^2} = \frac{1}{3\sqrt{B}}$$

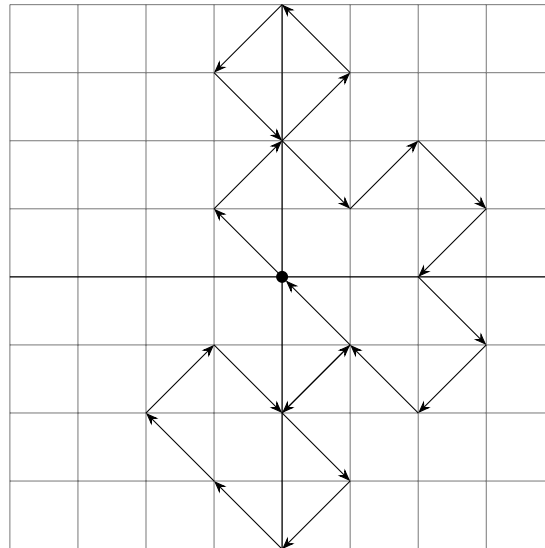
$$P(\text{real roots}) = 1 - \frac{1}{3\sqrt{B}}.$$

תשובה 2:

$$\lim_{B \rightarrow \infty} P(\text{real roots}) = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{B}} \right) = 1.$$

Simulation

For $B =$ 4:



איור 16 : walk random Two-dimensional

0.8333 = roots real of Probability
 0.8271 = roots real Proportion
 16: = B For
 0.9167 = roots real of Probability
 0.9205 = roots real Proportion
 64: = B For
 0.9583 = roots real of Probability
 0.9582 = roots real Proportion

51. הילוך מקרי דו-ממדי (Two-dimensional random walk)^S

moves particle The system. coordinate two-dimensional a of origin the at placed is particle
 probabilities with -axis y the down or up and $1/2$ probabilities with -axis x the on right or left
 origin. the to returning and at starting steps 22 of walk random a shows 16 Figure .1/2

moves? 2 in origin the to returning of probability the is What :1

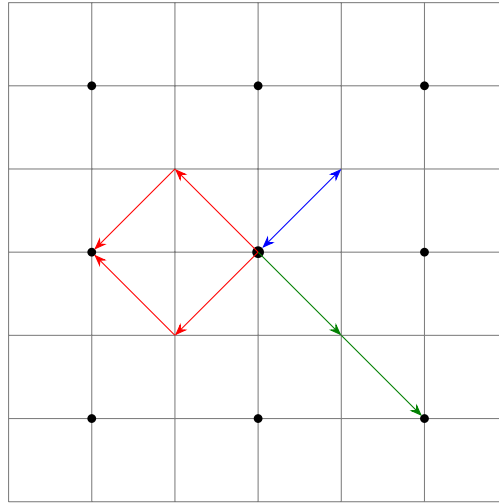
origin? the to times) more or (one returns particle the that probability the is What :2

. n large for probability the of estimate an obtain to approximation Stirling's Use :3

פתרון

moves: two after particle the of positions possible the show 17 Figure in dots The :1

same the in moves two taking by $(\pm 2, \pm 2)$ to move to how shows path green The •
 $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ is probability The direction.



איור 17 : Two moves of the random walk

• The red path shows how to move to $(0, \pm 2)$ or $(\pm 2, 0)$. There are two possible paths for each
 probability $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ is the probability so one each

• The blue path shows how to move to $(\pm 1, \pm 1)$ to back to the origin. The probability
 is $\frac{1}{16}$ since there are four paths that return to the origin the probability is $\frac{4}{16}$.

The blue paths are the only ones that return to the origin so:

$$P(\text{return to origin in two moves}) = \frac{4}{16}.$$

תשובה 3: The choices of direction for x and y are independent for $2n$ moves:

$$(33) \quad P_{2n}(\text{return to origin}) = P_{2n}(\text{return to } x = 0) P_{2n}(\text{return to } y = 0).$$

The particle will return to the origin if and only if for both axes the number of moves is equal to $s-1$ and $s+1$ are arranged to ways $\binom{2n}{n}$ There are -1 of number the

$$(34) \quad P_{2n}(\text{return to } x = 0) = P_{2n}(\text{return to } y = 0) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$(35) \quad P_{2n}(\text{return to origin}) = \left[\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right]^2$$

$$(36) \quad P(\text{return to origin}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(\text{return to origin}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right]^2.$$

תשובה 3: By Stirling's approximation $n! \approx \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$

$$P_{2n}(\text{return to origin}) = \left[\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right]^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right]^2 \\
&\approx \left(\frac{1}{2}\right)^{4n} \frac{(\sqrt{2\pi \cdot 2n})^2 (2n/e)^{4n}}{(\sqrt{2\pi n})^4 (n/e)^{4n}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{4n} \frac{4\pi n}{4\pi^2 n^2} \cdot \frac{(n/e)^{4n} \cdot 2^{4n}}{(n/e)^{4n}} \\
&= \frac{1}{\pi n} \\
P(\text{return to origin}) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

particle the 1 probability with that means This diverges. that series harmonic the is which
origin. the to returns
still but times thousand ten of instead times million one run was simulation The **Simulation**
origin: the to returning of certainty no is there

0.8700 = origin to returned Proportion

52. הילוך מקרי תלת-ממדי (Three-dimensional random walk) D, S

moves particle The system. coordinate three-dimensional a of origin the at placed is particle
probabilities with -axis y the down or up and $1/2$ probabilities with -axis x the on right or left
 $1/2$ probabilities with -axis z the on out or in and $1/2$

origin? the to returns particle the that times of number the of expectation the is What **שאלה 1:**

variable. indicator an use then and probability the Compute **Hint:**

once)? least (at origin the to return will particle the that probability the is What **שאלה 2:**

.4 Problem from technique the Use **Hint:**

פתרון

:33 Equation of analogue the by given is steps, $2n$ after origin the to returning of probability, P_{2n}

$$P_{2n} = P_{2n}(\text{return to } x = 0) P_{2n}(\text{return to } y = 0) P_{2n}(\text{return to } z = 0).$$

of analogue the by given is times, more or one origin the to returning of probability the, P_r

:36 Equation

$$P_r = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \right]^3.$$

⁴approximation: Stirling's From

$$\begin{aligned}
 P_{2n} &= \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \right]^3 \\
 &\approx \left(\frac{1}{2} \right)^{6n} \frac{(\sqrt{2\pi \cdot 2n})^3 (2n/e)^{6n}}{(\sqrt{2\pi n})^6 (n/e)^{6n}} \\
 &= \frac{(4\pi n)^{3/2}}{(2\pi n)^3} = \frac{1}{(\pi n)^{3/2}} \\
 P_r &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^{3/2}} \approx 0.3772.
 \end{aligned}$$

: k step on origin the to return a for variable indicator the be I_k Let

$$(37) \quad I_k = \begin{cases} 1, & \text{if particle returns to origin on step } k \\ 0, & \text{if particle does not returns to origin on step } k. \end{cases}$$

Then:

$$E(\text{number of returns to the origin}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n} I_{2n} = P_r \approx 0.3772,$$

probability. the to equal is returns of number the of expectation the so

From once. least at origin the to returns particle the that probability the be P_1 Let **שאלה 2**: the where one first the until trials of number the of expectation the that know we **4 Problem** number the of expectation the Therefore, $1/(1 - P_1)$ is origin the to return not does particle can particle the because less, one is origin the to return does particle the which for trials of ⁵not. does it finally until times many origin the to return

then: $E_r = E(\text{number of returns to the origin})$ Let

$$\begin{aligned}
 E_r &= \frac{1}{1 - P_1} - 1 \\
 P_1 &= \frac{E_r}{1 + E_r}.
 \end{aligned}$$

Then: so: $E_r \approx 0.3772$ that computed we **תשובה 1**: In

$$P_1 \approx 1 - \frac{1}{1 + 0.3772} \approx 0.2739.$$

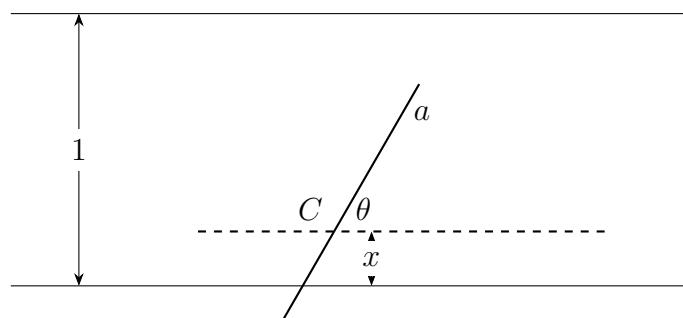
Simulation

0.3772 = origin reaching of Expectation
 0.3630 = origin reached times Average
 0.2739 = origin reaching of Probability
 0.2790 = origin reached Proportion

obtain to terms 500 used program My .0315 obtained and computation his in terms 18 used Mosteller⁴

.0.3772

[5] clarification for Montgomery Aaron thank to like would I follow. to easy not is presentation Mostellers⁵



איור 18 : needle Buffon's

53. המחט של Buffon (Buffon's needle) D, S

the Throw apart. 1 lines parallel with ruled surface a and $a \leq 1$ length of needle a onsider
⁶line? a crosses needle the that probability the is What surface. the onto needle
 center the of position the , x : (18 (Figure variables random independent two are There **Hint:**
 and , $[0, 1]$ range the in distributed uniformly is which line closest the to relative needle the of
 distributed uniformly is which lines parallel the to relative needle the by formed angle the , θ
 in $[0, \pi/2]$ range the in

פתרון 1

indicator the define and line a crosses a length of needle a that probability the be $p(a)$ Let
 variable:

$$I_{\text{crosses}} = \begin{cases} 1, & \text{if needle of length } a \text{ crosses a line} \\ 0, & \text{if needle of length } a \text{ does not cross a line.} \end{cases}$$

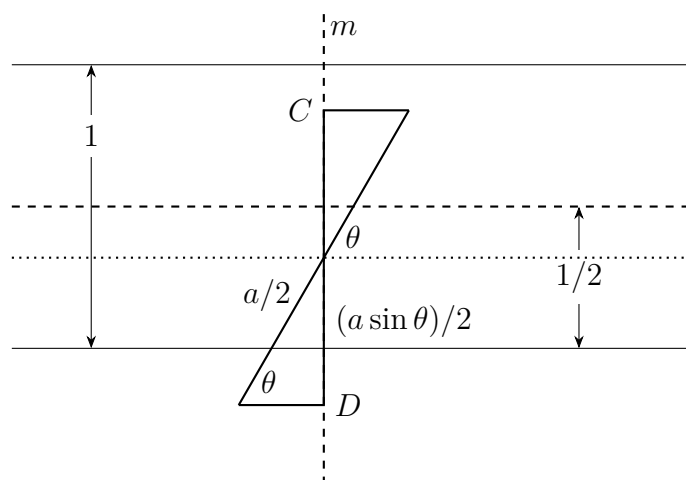
Then:

$$(38) \quad E(I_{\text{crosses}}) = 1 \cdot p(a) + 0 \cdot (1 - p(a)) = p(a),$$

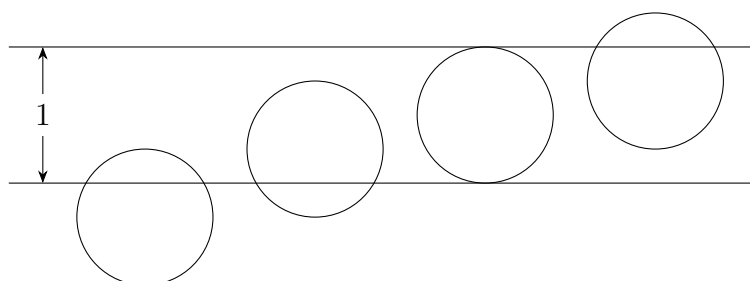
expectation. the computing by computed be can probability the and
 needle the of center the through passes that lines parallel the to perpendicular line a be m Let
 give to m onto needle the Project line. parallel a and needle the between angle the be θ let and
 is: line a cross will needle the that probability The \overline{CD} segment line the

$$(39) \quad P(\text{needle of length } a, \text{ angle } \theta \text{ crosses line}) = \frac{\overline{CD}/2}{1/2} = \frac{(a/2) \sin \theta}{1/2} = a \sin \theta.$$

the ignore We .1 as lines parallel the between distance the specifying by simplified been has problem The⁶
 these of probability the since lines two touches just or line the along completely lies needle the that possibility
 zero. is events



איור 19 : Right triangle solving Buffon's problem



איור 20 : Solving Buffon's with circles

The expectation of the number of lines crossed is given by integrating over possible angles:

$$(40) \quad E(\text{lines crossed}) = \frac{1}{(\pi/2) - 0} \int_0^{\pi/2} a \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi} \cdot a(-\cos \theta) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2a}{\pi}.$$

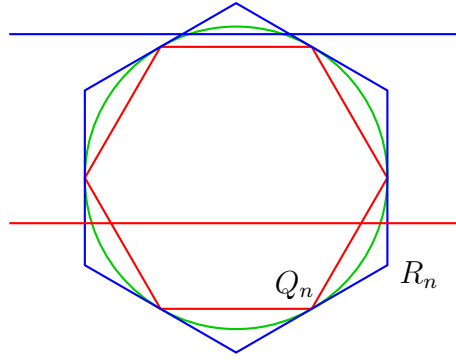
פתרון 2 This solution is taken from [1, Chapter 26].

Let $E(x)$ be the expectation of the number of lines crossed by a line of length x . Consider a circle of diameter 1 and circumference π . If the circle is thrown onto the lines, it will intersect exactly two lines (Figure 20), that is:

$$(41) \quad E(C) = 2.$$

Inscribe a regular polygon Q_n (red) within a regular polygon R_n (green) circumscribed around a circle C (blue). Any line that crosses Q_n must also cross C , and any line that crosses C must also cross R_n . Therefore:

$$(42) \quad E(Q_n) \leq E(C) \leq E(R_n).$$



circle a approximate Polygons : איור 21

of linearity the By respectively. , Q_n , R_n of sides the of lengths the of sums the be a_Q , a_R Let expectation:

$$(43) \quad E(Q_n) = \sum_{i=1}^n E(\text{segments of } a_Q) = a_Q E(1)$$

$$(44) \quad E(R_n) = \sum_{i=1}^n E(\text{segments of } a_R) = a_R E(1) .$$

so: circle the approximate polygons both $n \rightarrow \infty$ As

$$(45) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_Q = \lim_{n \rightarrow \infty} a_R = \pi ,$$

have: we 45--41 Equations From circle. the of circumference the

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(Q_n) = E(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(R_n)$$

$$E(C) = aE(1) = \pi E(1) = 2$$

$$E(1) = \frac{2}{\pi}$$

$$E(a) = aE(1) = \frac{2a}{\pi} .$$

Simulation

obtain to used be can table!) a on needles throwing actually (or simulation the $\pi = 2a/E$ Since
. π of approximation an

0.2:	= length For
0.1273	= crossings of Expectation
0.1308	= crossings Average
3.0581	= pi for value Empirical

0.5: = length For
 0.3183 = crossings of Expectation
 0.3227 = crossings Average
 3.0989 = pi for value Empirical

1.0: = length For
 0.6366 = crossings of Expectation
 0.6333 = crossings Average
 3.1581 = pi for value Empirical

54. המחט של Buffon עם רשת אופקי ואנכי (Buffon's needle with horizontal and vertical rulings)

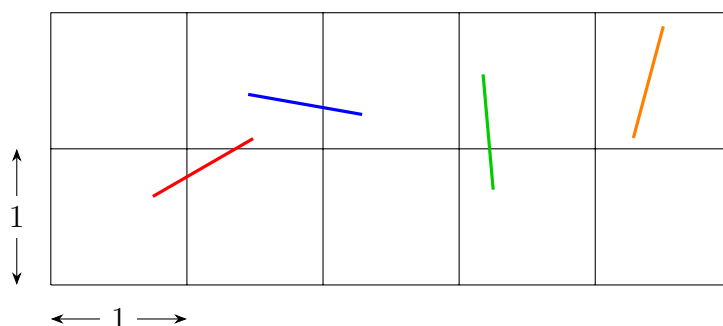
.1 × 1 size of squares with grid a by covered is that surface a for problem needle Buffon's Solve
 (orange) neither or (red) both (blue), line horizontal a (green), line vertical a cross can needle A
 .22 (Figure)

independent? lines vertical and horizontal the of crossings of numbers the Are **Hint:**

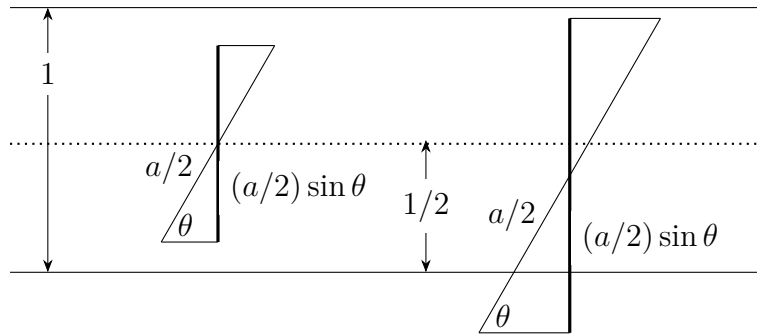
פתרון

expectation and independent are lines vertical and horizontal the of crossings of numbers The
 so: linear is

$$\begin{aligned} E(\text{lines crossed by } a) &= E(\text{vertical lines crossed by } a + \text{horizontal lines crossed by } a) \\ &= E(\text{vertical lines crossed by } a) + E(\text{horizontal lines crossed by } a) \\ &= \frac{2a}{\pi} + \frac{2a}{\pi} = \frac{4a}{\pi} . \end{aligned}$$



איור 22 : crossings vertical and horizontal with needle Buffon's



איור 23 : Long needles

55. מחטים ארוכים (Long needles) D, S

Let the length of the needle in Buffon's problem be $a > 1$.

שאלה 1: What is the expectation of the number of crossings?

שאלה 2: What is the probability that there is at least one crossing?

Hint: For what angles θ is the probability of crossing 1?

פתרון

תשובה 1: Break the needle into pieces of lengths $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ such that $a_i < 1$. By the linearity of expectation and the solution of Problem 53:

$$E(a) = \sum_{i=1}^n E(a_i) = \frac{2a}{\pi}.$$

תשובה 2: This solution is based on [12] and [1, Chapter 26].

By Equation 39 the probability that a needle of length a will cross a line is $a \sin \theta \leq 1$ if $0 \leq \theta \leq \sin^{-1}(1/a)$. However, if $a \sin \theta > 1$ then the probability is 1. Let us generalize Equation 40 for arbitrary $a > 0$. The integral is divided into two parts, one for $\theta < \sin^{-1}(1/a)$ and one for $\theta > \sin^{-1}(1/a)$:

$$\begin{aligned} E(a) &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\sin^{-1}(1/a)} a \sin \theta \, d\theta + \int_{\sin^{-1}(1/a)}^{\pi/2} 1 \, d\theta \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(a(-\cos \theta) \Big|_0^{\sin^{-1}(1/a)} + \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1/a) \right) \right) \\ &= 1 + \frac{2}{\pi} \left(a \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \right) - \sin^{-1}(1/a) \right). \end{aligned}$$

Simulation

1.5: = length For
 0.7786 = crossings of Expectation
 0.7780 = crossings Average
 2.0: = length For
 0.8372 = crossings of Expectation
 0.8383 = crossings Average
 3.0: = length For
 0.8929 = crossings of Expectation
 0.8897 = crossings Average

56. הכר של Molina (Molina's urns)

U_2 while blacks b_1 and balls white w_1 has U_1 each. balls m containing urns two be U_1, U_2 et
 Find urn. each from replacement with drawn are balls n blacks. b_2 and balls white w_2 has
 that: such w_1, b_1, w_2, b_2

$p(\text{balls drawn from } U_1 \text{ are all white}) = p(\text{balls drawn from } U_2 \text{ are all white or all black})$.

שאלה 1: Find values of w_1, b_1, w_2, b_2 for $n = 2$.

שאלה 2: Explain why the problem cannot be solved for $n \geq 3$.

פתרון

תשובה 1: The equation that must be solved is:

$$\left(\frac{w_1}{m}\right)^2 = \left(\frac{w_2}{m}\right)^2 + \left(\frac{b_2}{m}\right)^2$$

$$w_1^2 = w_2^2 + b_2^2.$$

One solution is $w_1 = 10, b_1 = 4, w_2 = 6, b_2 = 8$.

תשובה 2: By Fermat's Last Theorem, proved in 1995 by Andrew Wiles, there are no solutions for $w_1^n = w_2^n + b_2^n$ to $n \geq 3$.

סקירה על הסתברות

the using given is concept each of example An probability. of concepts reviews section This
 dice. six-sided fair throwing of activity
 a has that action an being intention the concept, primitive undefined an is This **Experiment**
 7experiment. an is die a Throwing trial. a called also is experiment An result. possible
 .4 is outcome one die a throw you If experiment. an of result The **Outcome**
 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ set The experiment. an of outcomes possible all of set The **space Sample**
 die. a throwing of outcomes the of space sample the is
 die a of event the is $e = \{2, 4, 6\} \subseteq S$ subset The space. sample the of subset A **Event**
 number. even an showing
 sample the be T Let numbers. (real) to space sample a from function A **variable Random**
 dice: two throwing of space

$$T = \{(a, b) | a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

the gives which $X : T \mapsto \{2, 3, \dots, 11, 12\}$ function the as X variable random the Define
 dice: two the on numbers the of sum

$$(46) \quad X((a, b)) = a + b.$$

normal their on take concepts these sets are events Since **complement intersection, Union**,
 Then: $e_2 = \{1, 2, 3\}$ and $e_1 = \{2, 4, 6\}$ Let meaning. set-theoretical

$$e_1 \cup e_2 = \{1, 2, 3, 4, 6\} \quad e_1 \cap e_2 = \{2\} \quad \bar{e}_1 = S \setminus e_1 = \{1, 3, 5\}.$$

space. sample the in outcomes three first the among numbers even of set the is intersection The
 space. sample the in outcomes odd of set the is complement The

the is intersection their if exclusive mutually are events more or Two **exclusive Mutually**
 is, that $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ since exclusive mutually are $e_2 = \{1, 3, 5\}$ and $e_1 = \{2, 4, 6\}$ set. empty
 odd. and even both are which outcomes no are there

let and event an be e Let event. an of frequency relative limiting the is Probability **Probability**
 probability the, $P(e)$ Then event. the of repetitions n in occurs e that times of number the be n_e
 is: e event the of

$$P(e) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_e}{n}.$$

The exists. limit the that know actually don't we because definition good very a not is This
 without probability define to want we but event'' an of ``repetitions on depends also definition
 events. of sequence specific a to reference

dice. noun plural familiar more the of singular the is Die⁷

theory, this develop won't we but axioms, three of set a on based is theory probability Modern
fundamental: be to seen clearly are axioms the of two though

$$P(e) \geq 0$$

$$P(S) = 1 .$$

outcome the and occur, doesn't it or probability non-zero some with occurs either event Any
outcomes. possible the all definition by is space
frequency relative as probability of concept intuitive our that ensure numbers large of laws The
times. many repeated is event an when happens what to similar very is
equally (are probability equal have space sample the in outcomes all If **distributed Uniformly**
the and finite is S If distributed. uniformly be to said is probability the occur), to likely
then: distributed uniformly is probability

$$P(e) = \frac{|e|}{|S|} .$$

distributed, uniformly is outcomes the of probability the die fair a throw you if example, For
: $e = \{2, 4, 6\}$ for so

$$P(e) = \frac{|e|}{|S|} = \frac{|\{2, 4, 6\}|}{|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}|} = \frac{1}{2} .$$

e_1 that probability conditional the , $P(e_1|e_2)$ events. be e_1, e_2 Let **probability Conditional**
by: given is occurs, e_2 that given occurs

$$P(e_1|e_2) = \frac{P(e_1 \cap e_2)}{P(e_2)} .$$

let and 3 to equal or than less number a shows die a that event the be $e_1 = \{1, 2, 3\}$ Let
Then: number. even an shows die the that event the be $e_2 = \{2, 4, 6\}$

$$P(e_2|e_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(e_1)} = \frac{P(\{2\})}{P(\{2, 4, 6\})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} .$$

one only thrown, is 3 to equal or than less number a that know you if since sense makes This
number. even an is outcomes three the of out
product the is intersection their of probability the if independent are events Two **Independence**
probabilities: individual their of

$$P(e_1 \cap e_2) = P(e_1) P(e_2) .$$

probability: conditional of terms In

$$P(e_1|e_2) = \frac{P(e_1) \cap P(e_2)}{P(e_2)} = \frac{P(e_1) P(e_2)}{P(e_2)} = P(e_1) .$$

as information no you gives it e_2 of probability the know you if e_1, e_2 events independent For
of all of probability the so independent are die fair a of throws Three e_1 of probability the to
 $\cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ is number even an showing them

Then: values. of set a be $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ Let **Average**

$$\text{Average}(S) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}.$$

set. the of element an be not may average the but values of set a over computed is average An
per children of number average the children, 3426 and town a in families 1000 are there If
and times six die a throw you If children. 3.426 has family no clearly although 3.426 is family
is: average The $\{2, 2, 4, 4, 5, 6\}$ numbers the receive

$$\frac{2 + 2 + 4 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{23}{6} \approx 3.8,$$

set. the in not value a again,

outcome each of probability the of sum the is variable random a of expectation The **Expectation**
same the has outcome each die fair a For outcome. that for variable random of value the times
probability:

$$E(\text{value of a die}) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5.$$

numbers the maps that (46 (Equation X function the by defined variable random the Consider
 $1/36$ is pair each of probability The numbers. the of sum the to dice of pair a in appearing
The outcome. same the to belong they sum same the have $(5, 2)$ and $(2, 5)$ pairs the since but
each obtaining of ways of number the that and $\{2, \dots, 12\}$ are variable random the of values
is: one

Sum	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pairs	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

probability the by weighted variable random the of values the of average the is expectation The
outcome: each of

$$E(\text{sum of two dice}) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \dots + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7.$$

is: expectation the $\{e_1, \dots, e_n\}$ events of set arbitrary an For

$$E = \sum_{i=1}^n e_i P(e_i).$$

$E(ae_1 + be_2) = aE(e_1) + bE(e_2)$ function linear a is Expectation **expectation of Linearity**
expression: linear arbitrary an for and

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(e_i).$$

[4.9 Section ,11] see proof a For

indicator an I_e Define $P(e)$ is probability whose event an be e Let **variable Indicator**
3b]: Example ,4 Chapter ,11] follows as e for variable

$$I_e = \begin{cases} 1, & \text{if } e \text{ occurs} \\ 0, & \text{if } e \text{ does not occur.} \end{cases}$$

$E(I_e) = 1 \cdot P(e) + 0 \cdot (1 - P(e)) = P(e)$ Then

formulas Mathematical

of sequence a that probability the then p is e event an of probability the If **theorem Binomial**
: coefficient binomial the by given is e events k exactly in results trials independent n

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

: theorem binomial the By

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

occur. must outcomes the of one since expected, as $(p + (1-p))^n = 1$ is the $p, 1-p$ For

: $0 < r < 1$ For **series geometric a of Sum**

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}.$$

is: series harmonic the n integer positive For **series harmonic a of Sum**

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \ln n + \frac{1}{2n} + \gamma,$$

diverges: series the infinity approaches n As constant. Euler's is $\gamma \approx 0.5772$ where

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty,$$

unbounded. is $\ln n$ because

use to convenient is It difficult. very is n large for $n!$ Computing **approximation Stirling's**
: approximation Stirling's of formulas the of one

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\ln(n!) \approx n \ln n - n$$

$$\ln(n!) \approx n \ln n - n + \frac{1}{6} \left(8n^3 + 4n^2 + n + \frac{1}{30}\right) + \frac{1}{2} \ln \pi.$$

distribution probability Continuous

do they but distributions, probability continuous learned have not may student beginning A review we background, appropriate the with readers For book. the in often very appear not concepts. basic the

function density probability A variables. random continuous over defined be can Probabilities defining: thus function, the of value the to x outcome an maps $f(x) : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ (PDF)

$$P(x) = f(x) .$$

of probability zero has number real individual each that is terminology this for reason The points. of neighborhoods to probabilities assign to is interpretation proper the so occurring, integrating by obtained is $[-\infty, a]$ interval the for (CPD) distribution probability cumulative The PDF: the

$$P(x < a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx .$$

$P(a) = 0$ since $P(x \leq a)$ also is this course Of and: , x all for $P(x) \geq 0$ PDF, a for probabilities, Like

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 .$$

a if example, For used. be must constant normalization a 1 to evaluate not does integral the If then: $[a, b]$ range the in distributed uniformly is PDF

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b 1 dx = (b - a) ,$$

define: must we therefore and

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{1}{b - a} \int_a^b 1 dx = \frac{1}{b - a} \cdot (b - a) = 1 .$$

: x by multiplied $f(x)$ PDF the integrating by obtained be can expectation The

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx .$$

CPD: the differentiating by obtained be can PDF The

$$P(x < a) = \frac{d}{da} CDP(x < a) .$$

- [1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. Proofs from THE BOOK (Fifth Edition). Springer, .2014
- [2] Matthew Carlton. Pedigrees, prizes, and prisoners: The misuse of conditional probability. Journal of Statistics Education, ,(2)13 .2005 <https://doi.org/10.1080/10691898.2005.11910554>.
- [3] John P. Gilbert and Frederick Mosteller. Recognizing the maximum of a sequence. Journal of the American Statistical Association, ,73--35: (313)61 .1966
- [4] Markus C. Mayer. Average distance between random points on a line segment. Mathematics Stack Exchange. <https://math.stackexchange.com/q/1540015>.
- [5] Aaron Montgomery. Mosteller's solutions to random-walk problems. Mathematics Stack Exchange. URL: <https://math.stackexchange.com/q/4460054>.
- [6] David S. Moore. A generation of statistics education: An interview with Frederick Mosteller. Journal of Statistics Education, ,(1)1 .1993 <https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/10691898.1993.11910453>.
- [7] Frederick Mosteller. Understanding the birthday problem. The Mathematics Teacher, ,325--322: (5)55 .1962
- [8] Frederick Mosteller. Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions. Dover, .1965
- [9] Frederick Mosteller, Stephen E. Fienberg, and Robert E. K. Rourke. Beginning Statistics with Data Analysis. Addison-Wesley, .1983
- [10] Frederick Mosteller, Robert E. K. Rourke, and George B. Thomas Jr. Probability With Statistical Applications. Addison-Wesley, .1961
- [11] Sheldon Ross. A First Course in Probability (Tenth Edition). Pearson, .2019
- [12] Wikipedia. Buffon's needle problem.