הבעיות המאתגרות בהסתברות של Mosteller

מוטי בן-ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

גרסה 0.2

13 ביולי 2022

תוכן העניינים

מבוא

Frederick Mosteller

Frederick Mosteller ‏(1916--2006) ייסד את המחלקה לסטטיסטיקה באוניברסיטת Harvard ושירת כראש המחלקה מ-1957 ועד 1971, ויצא לגמלאות שנת 2003. ל-Mosteller היתה התעניינות עמוקה בחינוך בסטטיסקיה וחיבר ספרי לימוד חלוציים כולל [10] שהידגש את הגישה ההסתברותי לסטטיסטיקה, ו-[9] שהיה אחת מספרי הלימוד הראשונים בניתוח מידע. בראיון תיאר Mosteller את ההתפתחות של גישתו להוראת הסטטיסטיקה [6].

מסמך זה

מסמך זה הוא "עיבוד" לספרו שובה הלב של Mosteller‏: **חמישים בעיות מאתגרות בהסתברות ופתרונותהן** [8]. הבעיות הפתרונות מוצגות ככל האפשר בצורה נגישה לקוראים עם ידע בסיסי בהסתברות, ובעיות רבות נגישות לתלמידי תיכון ולמורים. שכתבתי אתה בעיות והפתרונות עם חישובים מפורטים והסברים נוספים ואיורים. לעתים כללתי פתרונות נוספים.

רבות מהבעיות שונו כדי שיהיו נגישות: הבאתי גרסאות פשוטות שלהן, חילקתי לתת-בעיות והוספתי רמזים. כהעדפה אישית ניסחתי אותן מחדש בצורה מופשטת יותר מ-Mosteller ולא נתתי ולא תרגמתי יחידות כגון אינצ׳ים ומטבעות כגון דולרים.

המספור והכותרות נשארו כדי להקל על השוואה עם ספרו של Mosteller.

מחשבונים מודרניים, כולל אפליקציות לסמארטפון, מסוגלים לבצע את כל החישובים ללא קושי.

עבור רוב הבעיות נכתבו סימולציות בשפת התכנות Python.

בסעיף האחרון חזרה על מושגים בסיסיים בהסתברות לפי [11].

הבעיות סומנו כדלקמן:

- בעיות המסומנות ב-D קשות יותר.
- בעיות עבורן קיימות סימולציות סומנו ב-S.

אתם עלולים למצוא שאפילו בעיות שאינן מסומנות ב-D הן קשות. אל נא להתייאש אם לא תוכלו לפתור אותן. בכל זאת שווה לנסות לפתור את כולן כי כל התקדמות לקראת פתרון תעודד.

סימולציות

Monte Carlo simulations (על שם קזינו מופרסם במונקו) נכתבו בשפת התכנות Python 3. תכנית מחשב "מבצעת ניסוי" כגון "הטלת זוג קוביות" או "הטלת מטעה" מספר רב מאוד של פעמים ומחשב ומציג ממוצעים. השתמשתי במחוללי מספרי אקראיים הבנויים בתוך Python‏, `random.random()` ו-`random.randint()`, כדי לקבל תוצאות אקראיות לכל ניסוי.

כל תכנית מריצה סימולציה המורכת מ-10000 ניסויים והתוצאות מוצגות עם ארבע ספרות לאחר הנקודה העשרונית. כמעט תמיד התוצאה לא תהיה זהה לתוצאה שמתקבלת מחישוב ההסתברות או התוחלת. תוכל להריץ תכנית פעמים רבות ולבדוק את התוצאות משתנות.

ניתן להוריד את קבצי המקור ב-Python מ-`https://github.com/motib/probability-mosteller`. שמות הקבצים הם `N-name.py` כאשר `N` הוא מספר הבעיה ו-`name` הוא שם הבעיה (באנגלית).

שתי תוצאות מוצגות (באנגלית) עבור כל סימולציה:

- התוצאה התיאורטית שהיא **הסתברות** (Probability) או **תוחלת** (Expectation). בדרך כלל, במקום להעתיק את הערכים המחושבים התכנית מחשבת אותם מהנוסחאות.

- תוצאת הסימולציה שהיא **היחס בין מספר ההצלחות לבין מספר הניסויים** (Proportion) שהוא מקביל להסתברות, או **ממוצע ההצלחות** (Average) שהוא מקביל לתוחלת.

חשוב להבין שהסתברות ותוחלת הן מושגים תיאורטיים. **חוק המספרים הגדולים** מבטיח שהתוצאות של מספר רב של ניסויים תהינה קרובות לערכים התיאורטיים, אבל הם לא יהיו בזהות. למשל, ההסתברות לקבל 6 בהטלת קוביה הוגנת היא $1/6 \approx 0.1667$. בהרצת סימולציה של 10000 הטלות קיבלתי טווח של ערכים: $0.1684, 0.1693, 0.1687, 0.1665, 0.1656$.

בעיות ופתרונות

1. מגרת הגרביים (The sock drawer)^S

במגרה נמצאות גרביים אדומות וגרביים שחורות. אם נשלוף שתי גרביים בצורה אקראית **(עם החזרה)** ההסתברות ששתיהן אדומות היא $\frac{1}{2}$.

שאלה 1: מה המספר הקטן ביותר של גרביים שחורות שיכולות להיות במגרה? עבור מספר זה מה מספר הגרביים האדומות?

שאלה 2: מה המספר **הזוגי** הקטן ביותר של גרביים שחורות שיכולות להיות במגרה? עבור מספר זה מה מספר הגרביים האדומות?

פתרון 1

תשובה 1: יהי r מספר הגרביים האדומות במגירה ויהי b מספר הגרביים השחורות. $r \geq 2$ כי נתון שניתן לשלוף שתי גרביים אדומות, ו-$b \geq 1$ אחרת ההסתברות של שליפת שתי גרביים אדומות היה 1. נכפיל את ההסתברויות של שתי השליפות:

$$P(\text{שניים אדומים}) = \frac{r}{r+b} \cdot \frac{(r-1)}{(r-1)+b} = \frac{1}{2}\,. \tag{1}$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית עבור המשתנה r:

$$r^2 - r(2b+1) - (b^2 - b) = 0\,. \tag{2}$$

r, b שנייהם מספרים שלמים חיוביים ולכן הדיסקרימיננט חייב להיות ריבוע של מספר שלם:

$$(2b+1)^2 + 4(b^2 - b) = 8b^2 + 1 \tag{3}$$

הדיסקרימיננט הוא ריבוע כאשר $b = 1$ (הערך הקטן ביותר). ממשוואה 2, $r = 3$, כאשר אנו דוחים את הפתרון $r = 0$ כי $r \geq 2$. סכום מספר הגרביים הוא 4.

בדיקה: $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.

תשובה 2: בדקו כל מספר שלם חיובי זוגית של b כדי למצוא את המספר הקטן ביותר עבורו הדיסקרימיננט הוא ריבוע:

b	$8b^2+1$	$\sqrt{8b^2+1}$
2	33	5.74
4	129	11.36
6	**289**	**17**

עבור $b = 6$ הערך של r הוא 15 שמתקבל על ידי פתרון משוואה 2.

בדיקה: $\frac{15}{21} \cdot \frac{14}{20} = \frac{1}{2}$.

פתרון 2

תשובה 1: האם אי-שוויון זה נכון?

$$\frac{r}{r+b} \stackrel{?}{>} \frac{r-1}{(r-1)+b}\,. \tag{4}$$

$r \geq 2, b \geq 1$ ולכן שני המכנים חיוביים וניתן להכפיל את שני הצדדים:

$$\begin{aligned} r(r-1+b) &\stackrel{?}{>} (r-1)(r+b) \\ r^2 - r + rb &\stackrel{?}{>} r^2 - r + rb - b \\ b &\stackrel{?}{>} 0\,. \end{aligned}$$

$b > 1$ כך שמשווה 4 נכונה.

לפי משוואות $1, 4$:

$$\left(\frac{r}{r+b}\right)^2 = \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r}{r+b} > \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r-1}{(r-1)+b} = \frac{1}{2}\,, \tag{5}$$

ובאופן דומה:

$$\left(\frac{r-1}{(r-1)+b}\right)^2 = \frac{r-1}{(r-1)+b} \cdot \frac{r-1}{(r-1)+b} < \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r-1}{(r-1)+b} = \frac{1}{2}\,. \tag{6}$$

המכנה $r+b$ שונה מאפס ולכן ניתן לחשב שורש ריבועי ולפשט את משוואה 5:

$$\begin{aligned} \frac{r}{r+b} &> \sqrt{\frac{1}{2}} \\ r &> \frac{b}{\sqrt{2}-1} \\ r &> \frac{b}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \\ r &> b(\sqrt{2}+1)\,. \end{aligned}$$

באופן דומה עבור משוואה 6:

$$\begin{aligned} \frac{r-1}{(r-1)+b} &< \sqrt{\frac{1}{2}} \\ r-1 &< \frac{b}{\sqrt{2}-1} \\ r-1 &< b(\sqrt{2}+1)\,. \end{aligned}$$

משתי המשוואות נקבל:

$$r - 1 < (\sqrt{2}+1)b < r\,. \tag{7}$$

עבור $b = 1$ מתקבל $2.141 < r < 3.141$ ו-3 $b = 1, r = 3$ הוא פתרון.

תשובה 2: נבדוק מספרים זוגיים עבור b:

b	$(\sqrt{2}+1)b$	$< r <$	$(\sqrt{2}+1)b+1$	r	$P($אדומות שתי$)$
2	4.8	$< r <$	5.8	5	0.4762
4	9.7	$< r <$	10.7	10	0.4945
6	14.5	$< r <$	15.5	15	0.5000

Mosteller מעיר שקיים קשר בין בעיה זו לתורת המספרים ומביא פתרון נוסף: $b = 35, r = 85$.

Simulation

```
Expectation of both red  = 0.5000
Average of both red for (red =  3, black =  1) = 0.5053
Average of both red for (red = 15, black =  6) = 0.5013
Average of both red for (red = 85, black = 35) = 0.4961
```

הערה

בשני הפתרונות אנחנו לא מוכיחים תנאי מספיק עבור הערכים של r, b. בפתרון 1 פיתחנו תנאי הכרחי---לפי משוואה 3 הדיסקרימיננט חייב להיות מספר שלם---ומחפשים ערכים של b שעומדים בדרישה זו. בפתרון 2 התנאי ההכרחי הוא ש-r, b מספקים את האי-שוויונות במשוואה 7 ואז חיפשנו ערכים שעומדים בדרישה זו. כתבתי תכנית קצרה לחפש פתרונות בטווח $[1, 50]$. התוצאות עבור ערכים מסביב ל-35 הן:

```
32  78   90.52 0.500917
33  80   93.34 0.499368
34  83   96.17 0.501474
35  85   99.00 0.500000
36  87  101.83 0.498601
37  90  104.66 0.500562
```

כאשר הטורים הם (משמאל לימין) מספר הגרביים השחורות, מספר הגרביים האדומות, השורש של הדיסקרימיננט (משוואה 3), ההסתברות לשלוף שתי גרביים אדומות.

בעזרת תכנית מחשב מצאתי את הפתרונות הבאים עבור מספר גרביים שחורות פחות ממיליון:

אדומות	שחורות
3	1
15	6
85	35
493	204
2871	1189
16731	6930
97513	40391
568345	235416

2. נצחונות עוקבים (Successive wins)^S

תם משחקים סדרה של שלושה משחקים נגד אני יריבים ואתם מנצחים בסדרה אם אתם מנצחים שני משחקים לפחות מתוך השלושה. ההסתברות שאתם מנצחים במשחק נגד שחקן P_1 היא p_1 וההסתברות שאתם מנצחים במשחק נגד שחקן P_2 היא p_2. נתון ש-$p_1 > p2$. באיזה המתסריטים שלהן יש לכם סיכוי גדול יותר לנצח בסדרה?

- אתם משחקים נגד P_1, P_2, P_1 בסדר זה.
- אתם משחקים נגד P_2, P_1, P_2 בסדר זה.

פתרון 1

אתם מנצחים אם: (א) אתם מנצחים בשני השחקים הראשונים ומפסידים בשלישי, (ב) אתם מפסידים את המשחק הראשון ומנצחים משחק השני ובמשחק השלישי. (ג) אתם מנצחים בשלושת המשחקים.

תהיו p_{121} ו-p_{212} ההסתברויות שאתם מנצחים בסדרה בשני התסריטים:

$$\begin{aligned} p_{121} &= p_1p_2(1-p_1) + (1-p_1)p_2p_1 + p_1p_2p_1 \\ p_{212} &= p_2p_1(1-p_2) + (1-p_2)p_1p_2 + p_2p_1p_2 \,. \end{aligned}$$

קיים סיכוי גדול יותר לנצח בסדרה בתסריט הראשון אם $p_{121} > p_{212}$, כלומר, אם:

$$\begin{aligned} p_1p_2(1-p_1) + (1-p_1)p_2p_1 + p_1p_2p_1 &\stackrel{?}{>} p_2p_1(1-p_2) + (1-p_2)p_1p_2 + p_2p_1p_2 \\ -p_1p_2p_1 &\stackrel{?}{>} -p_2p_1p_2 \\ p_1 &\stackrel{?}{<} p_2 \,. \end{aligned}$$

נתון ש-$p_1 > p_2$ לכן כדאי לבחור את התסריט השני.

פתרון 2

הפתרון לא-איטואיטיבי. לפי האינטואיציה, כדאי לבחור לשחק שני משחקים נגד P_1 ואחד נגד P_2 כי יש סיכוי גבוה יותר לנצח משחק נגד P_1. אולם, הדרך היחידה לנצח את הסדרה היא בנצחון ב-**משחק האמצעי**, ולכן, כדאי לשחק את המשחק האמצעי נגד P_1, כי יש סיכוי גבוה יותר לנצח אותו.

סימולציה

```
For p1 = 0.6, p2 = 0.5
Proportion of P121 wins = 0.4166
Proportion of P212 wins = 0.4473
For p1 = 0.6, p2 = 0.4
Proportion of P121 wins = 0.3300
Proportion of P212 wins = 0.3869
For p1 = 0.6, p2 = 0.2
Proportion of P121 wins = 0.1625
Proportion of P212 wins = 0.2141
```

הסבר למה סכום היחסים אינו 1.

3. המושבע קל הדעת (The flippant juror)^S

ש שתי אפשרויות להגיע להכרעה: (א) פאנל של שלושה מושבעים המורכב משני מושבעים שמקבלים החלטה בלתי-תלויה עם הסתברות של p להגיע להחלטה הנכונה ומושבע שלישי שמגיע להחלטה נכונה בהסתברות של $1/2$. ההכרעה הנכונה מתקבלת לפי הצבעת רוב. (ב) ההכרעה מתקבלת על ידי מושבע יחי שיש לו הסתברות של p להגיע להחלטה נכונה. באיזו אפשרות ההסתברות הגבוהה ביותר להגיע להכרעה שנכונה?

פתרון

הפאנל מגיע להכרעה נכונה אם שלושת המושבעים מגיעים להחלטה נכונה או אם כל שני מושבעים מגיעיה להחלטה נכונה. ההסתברות היא:

$$\overbrace{\left(p \cdot p \cdot \frac{1}{2}\right)}^{\text{שלושה נכונים}} + \overbrace{\left(p(1-p) \cdot \frac{1}{2} + (1-p)p \cdot \frac{1}{2} + p \cdot p \cdot \frac{1}{2}\right)}^{\text{שניים נכונים מתוך שלושה}} = p\,,$$

כך שאין הבדל בין שתי האפשרויות.

Simulation

```
Prediction: probabilities of (a) and (b) are equal
For p = 0.25, proportion correct of (a) = 0.5019, (b) = 0.5046
For p = 0.50, proportion correct of (a) = 0.5072, (b) = 0.4970
For p = 0.75, proportion correct of (a) = 0.5062, (b) = 0.5040
```

4. ניסיונות עד להצלחה הראשונה (Trials until first success)^S

p.four מה התוחלת של מספר ההטלות של קוביה עד שהופיע 6?

פתרון 1

ההסתברות שההטלה ה-i תהיה ההופעה הראשונה של 6 היא ההסתברות שבהטלות $i-1$ יופיע אחד מחמשת המספרים האחרים כפול ההסתברות שבהטלה ה-i יופיע 6. כדי לפשט את הסימון נשתמש ב-p במקום $1/6$:

$$P(i \text{ מופיע לראשונה בהטלה } 6) = (1-p)^{i-1}p\,.$$

מספר ההטלות לא חסום.

תהי $E = E($הטלה ראשונה של 6$)$. אזי:

$$E = 1p(1-p)^0 + 2p(1-p)^1 + 3p(1-p)^2 + 4p(1-p)^3 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} ip(1-p)^{i-1}\,. \quad (8)$$

ללא ה- i הסכום היה ההסתברות של הטלה של 6 בסופי של דבר:

$$P(6 \text{ הטלה בסופו של דבר של}) = \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1\,. \qquad (9)$$

זאת לא תוצאה מפתיעה.

ניתן לחשב את התוחלת כך:

$$\begin{array}{rcllllllll}
E & = & p(1-p)^0 & + & p(1-p)^1 & + & p(1-p)^2 & + & p(1-p)^3 & +\cdots \\
 & & & & p(1-p)^1 & + & p(1-p)^2 & + & p(1-p)^3 & +\cdots \\
 & & & & & & p(1-p)^2 & + & p(1-p)^3 & +\cdots \\
 & & & & & & & & p(1-p)^3 & +\cdots
\end{array}$$

השורה הראשונה היא סכום הסדרה ההנדסית ממשוואה 9 שהוא 1. השורה השנייה היא אותה סדרה הנדסית אינסופית עם איבר ראשון $p(1-p)$ ולכן הסכום הוא:

$$\frac{p(1-p)}{1-(1-p)} = 1-p\,.$$

באופן דומה, סכום השורה השלישית הוא $(1-p)^2$ וסכום השורה ה-i הוא $(1-p)^{i-1}$. לכן התוחלת היא סכום הסידרה ההנדסית האינסופית:

$$E = 1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \cdots = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p} = 6\,.$$

פתרון 2

הכפל את משוואה 8 ב-$1-p$ והחסר את תוצאה מאותה משוואה. התוצאה היא הסדרה ההנדסית במשוואה 9:

$$\begin{array}{rcll}
E & = & p(1-p)^0 & + \quad 2p(1-p)^1 + 3p(1-p)^2 + 4p(1-p)^3 + \cdots \\
E\cdot(1-p) & = & & \quad\;\; p(1-p)^1 + 2p(1-p)^2 + 3p(1-p)^3 + \cdots \\
E\cdot(1-(1-p)) & = & p & + \quad p(1-p)^1 + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + \cdots \\
 & = & 1 & \\
E & = & 1/p\,. &
\end{array}$$

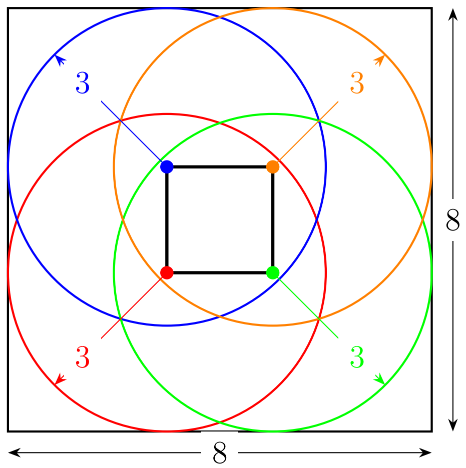
בגלל ש-$p = 1/6$, התוחלת של מספר ההטלות עד להופעה של 6 היא 6.

פתרון 3

נתייחס להטלה הראשונה בנפרד משאר ההטלות. אם בהטלה הראשונה מופיע 6 (בהסתברות p) הטלה אחת מספיקה. אחרת, אם בהטלה לא מופיע 6 (הסתברות $1-p$) אזי ההטלות הבאות מרכיבות סדרה זהה לסדרה המקורית שהתוחלת שלה היא E. לכן התוחלת היא:

$$\begin{array}{rcl}
E & = & 1\cdot p + (E+1)(1-p) \\
E & = & \dfrac{1}{p} = 6\,.
\end{array}$$

סימולציה



איור 1: גבולות למטבעות שאינם חותכות את הריבוע

```
Expectation of first success = 6
Average of first success     = 6.0161
```

5. מטבע בריבוע (Coin in a square)^S

שאלה 1: נתון ריבוע עם צלע באורך 8 ומטבע עם רדיוס 3. הטל את המטבע על הריבוע. מרכז המטבע נוחת בתוך המטבע עם התפלגות אחידה. מה ההסתברות שהמטבע נוחת כולו בתוך הריבוע?

שאלה 2: בכל הטלה אתה מרוויח 5 אם המטבע נוחת בתוך הריבוע ומפסיק 1 אם הוא נוגע בריבוע. מה תוחלת הרווח לכל הטלה?

שאלה 3: פתח נוסחה להסתברות שהמטבע נוחת בתוך הריבוע אם אורך הצלע הוא a ורדיוס המטבע הוא r כאשר $r < a/4$.

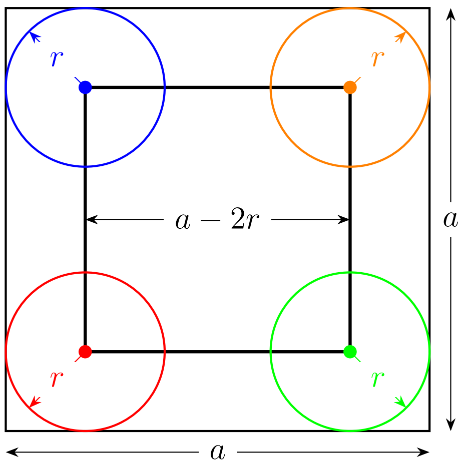
פתרון

תשובה 1: איור 1 מראה מטבע על צלע 8 וארבעה מעגלים בקוטר 3 חסומים על ידי פינות הריבוע. מרכזי המעגלים מרכיבים ריבוע פנימי עם צלע 2. כל מטבע שמרכזו מחוץ לריבוע יחתוך צלע של הריבוע החיצוני. למיקום של מרכז המטבע התפלגות אחידה ולכן ההסתברות שהמטבע נוחת כולו בתוך הריבוע הוא היחס בין השטח של הריבוע הפנימי לשטח של הריבוע החיצוני:

$$P(\text{המטבע נוחת כולו בתוך הריבוע}) = \frac{2 \cdot 2}{8 \cdot 8} = \frac{1}{16} = 0.0625\,.$$

תשובה 2: התוחלת שלילית:

$$E(\text{הטלה לכל הטלה}) = 5 \cdot \frac{1}{16} + (-1) \cdot \frac{15}{16} = -\frac{10}{16} = -0.625\,.$$



איור 2: מטבעות בריבוע גדול

תשובה 3: איור 2 מראה ארבעה מעגלים חסומים על ידי פינות הריבוע. הצלע של הריבוע הפנימית הוא $a - 2r$ ולכן:

$$P(\text{המטבע נוחת בתוך המעגל}) = \frac{(a-2r)^2}{a^2}\,.$$

סימולציה

```
For side = 8, radius = 1:
Probability of landing within the square = 0.5625
Proportion landing within the square     = 0.5704
For side = 8, radius = 2:
Probability of landing within the square = 0.2500
Proportion landing within the square     = 0.2481
For side = 8, radius = 3:
Probability of landing within the square = 0.0625
Proportion landing within the square     = 0.0639
For side = 8, radius = 4:
Probability of landing within the square = 0.0000
Proportion landing within the square     = 0.0000
```

6. הטלת מזל (Chuck-a-luck)^S

חר מספר n בין 1 ל-6. הטל שלוש קוביות. אם לא מופיע n על אף קוביה אתה מפסיד 1; אם n מופיע על קוביה אחת אתה מרוויח 1; אם n מופיע על שתי קוביות אתה מרוויח 2; אם n מופיע על כל שלושת הקוביות אתה מרוויח 3. מה התוחלת של הרווח?

פתרון

תהי $P(k)$ ההסתברות ש-n מופיע על k קוביות. אזי:

$$E(\text{רווח לכל הטלה}) = -1P(0) + 1P(1) + 2P(2) + 3P(3)\,.$$

ההטלות של שלושת הקוביה הן בלתי-תלויות ולכן כל ההסתברויות ניתנות על ידי ההתפלגות הבינומית עם $p = 1/6$, ההסתברות ש-n מופיע על קוביה:

$$\begin{aligned}
E(\text{רווח לכל הטלה}) &= -1\binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 + 1\binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \\
&\quad 2\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 + 3\binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 \\
&= \frac{1}{216}(-125 + 75 + 30 + 3) \\
&= -\frac{17}{216} \approx -0.0787\,.
\end{aligned}$$

סימולציה

```
Expectation of winnings = -0.0787
Average winnings        = -0.0724
```

7. לרפא את המהמר הכפייתי (Curing the compulsive gambler)^S

ולט roulette הוא משחק מזל שמשחקים עם גלגל בעל 38 כיסים ממוספרים: 18 אדומים, 18 שחורים ו-2 ירוקים.[1] מסובבים את הגלגל וכדור נוחת באחד הכיסים. הקזינו מנצח אם הכדור נוחת בכיס ירוק; אחרת, את מרוויחה 36 עבור הימור של 1 על מספר הכיס (אדום או שחור) בו נוחת הכדור. את משחקת 36 סבבים של רולט ומהממרת 1 בכל סבב.

שאלה 1: מה התוחלת של הרווח?

שאלה 2: חברך מציע להמר 20 שאחרי 36 סבבים את **תפסידי** כסף. מה התוחלת של הרווח בהתחשב ברווח או הפסד של המשחק וגם של ההימור על חברך?

פתרון

תשובה 1: ההסתברות של ניצחון בסבב אחד היא $1/38$ ולכן:

$$\begin{aligned}
E(\text{רווח בסבב אחד}) &= 35 \cdot \frac{1}{38} + (-1) \cdot \frac{37}{38} = -\frac{2}{38} \approx -0.0526 \\
E(\text{רווח ב-36 סבבים}) &= 36 \cdot -0.05266 = -1.8947\,.
\end{aligned}$$

(הרווח נטו הוא 35 כי ה-36 שאת מקבלת כולל החזרת ה-1 של ההימור.)

תשובה 2: נבדוק את ארבעת התוצאות של 36 של משחק הרולט:

[1] ברולט אמריקאי נמצאים שני כיסים ירוקים וברולט אירופאי נמצא כיס ירוק אחד.

- אם את מפסידה בכל הסבבים ההפסד הוא 36.
- אם את מנצחת בסבב אחד ומפסידה ב-36 סבבים אין רווח ואין הפסד.
- אם את מנצחת בשני סבבים את מרוויחה 70 ומפסידה 34 בשאר הסבבים כך שהרווח נטו הוא 36.
- אם את מנצחת ב-k עבור $2 < k \leq 36$, הרווח נטו הוא $35k - (36-k) > 0$.

לכן את הפסידה כסף רק אם את מפסידה את כל הסבבים:

$$P(\text{מפסידה ב-36 סבבים}) = \left(\frac{37}{38}\right)^{36} \approx 0.3829\,.$$

ההסתברות לא להפסיד בכל הסבבים היא $1 - 0.3829 = 0.6171$. לכן:

$$\overbrace{20 \cdot 0.6171}^{\text{מנצחת בהימור}} + \overbrace{-20 \cdot 0.3829}^{\text{מפסידה בהימור}} + \overbrace{-1.8947}^{\text{E של כל הסבבים}} \approx 2.7904\,.$$

ברור שכדאי להסכים להימור המוצע!

סימולציה

```
Expectation of winning a round = -0.0526
Average winnings for a round   = -0.0593
```

בסימוליה היתה שונות גדולה שהוקטנה כל ידי הרצת מיליון ניסויים.

8. קלפים מושלמים בברידג' Perfect bridge hand

חר באקראי 13 קלפים בחבילה של 52 קלפים. מה ההסתברות שכולם מאותה סדרה?

פתרון 1

בכל חבילה יש 13 קלפים מכל סדרה כך שיש $\binom{52}{13}$ דרכים לבחור 13 מסדרה אחת, למשל, לבבות. יש רק דרך אחת לבחירת 13 לבבות כך ש:

$$P(\text{בחירת 13 לבבות}) = \frac{1}{\binom{52}{13}} = \frac{13!39!}{52!} =\approx 1.5747 \times 10^{-12}\,.$$

בחבילה ארבע סדרות ולכן:

$$P(\text{בחירת 13 קלפים מאותה סדרה}) = 4 \cdot \frac{13!39!}{52!} \approx 6.2991 \times 10^{-12}\,.$$

פתרון 2

יש 52 דרכים לבחור את הקלף הראשון. אח"כ יש 12 דרכים לבחור את הקלף השני מאותה סדרה מתוך 51 הקלפים שנשארו, 11 דרכים לבחור את הקלף השלישי, וכו'. מכאן:

$$P(\text{בחירת 13 קלפים מאותה סדרה}) = \frac{52}{52}\cdot\frac{12}{51}\cdot\frac{11}{50}\cdots\frac{1}{40} = \frac{12!}{51!/39!} \approx 6.2991\times 10^{-12}\,.$$

אין טעם להריץ סימולציה כי כמעט בוודאות התוצאה תהיה אפס.

9. משחק קוביות Craps^{D,S}

שחק ה-craps הוא משחק עם זוג קוביות. בהטלה הראשונה אתה מנצח אם סכום המספרים הוא 7 או 11, ואתה מפסיד אם הסכום הוא 2, 3 או 12. אם הסכום בהטלה הראשונה הוא $n = 4, 5, 6, 8, 9, 10$ (נקרא "נקודה" point), המשך להטיל את הקוביות עד שמופיעה הנקודה n (ניצחון) או 7 (הפסד).

שאלה 1: מה ההסתברות של האירועים בהטלה הראשונה: ניצחון, הפסד, לא ניצחון ולא הפסד?

שאלה 2: מה ההסתברות לניצחון?

פתרון 1

תשובה 1: להסתברות של המספרים המופיעים כאשר מטילים קוביה התפלגות אחידה השווה ל-$1/6$. ההטלות של שתי קוביות בלתי תלויות ולכן ההסתברות של כל תוצאה היא $1/36$. מספר הדרכים לקבל כל אחד מהאירועים (הסכום של זוג קוביות) $2, \ldots, 12$ הוא:

סכום	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
זוגות	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

בהטלה הראשונה יש 8 דרכים לקבל 7 או 11 וההסתברות היא $8/36$ לנצח. יש 4 דרכים לקבל $2, 3, 12$ וההסתברות היא $4/36$. ההסתברות לא לנצח ולא להפסיד היא בהטלה הראשונה היא:

$$1 - \frac{8}{36} - \frac{4}{36} = \frac{24}{36}\,.$$

תשובה 2: נעיין בשני מקרים תוך התייחסות לטבלה לעיל:

- הנקודה היא 4. ההסתברות לנצח בהטלה השנייה (4) היא $3/36$ וההסתברות להפסיד (7) היא $6/36$. ההסתברות לא לנצח ולא להפסיד היא $1 - (3/36) - (6/36) = 27/36$.
- הנקודה היא 8. ההסתברות לנצח בהטלה השנייה (8) היא $5/36$ וההסתברות להפסיד (7) היא $6/36$. ההסתברות לא לנצח ולא להפסיד היא $1 - (5/36) - (6/36) = 25/36$.

אנו רואים שחייבים לחשב את ההסתברות לנצח בנפרד עבור כל אחת מהנקודות $4, 5, 6, 8, 9, 10$. נפתח נוסחה כללית להסתברות.

לאחר שהתקבל **הנקודה** n בהטלה הראשונה, תהי P_n ההסתברות ההסתברות לנצחון על ידי הטלת הנקודה n בהטלה כשלהי, ותהי Q_n ההסתברות לא לנצח ולא להפסיד בהטלה כלשהי. תהי W_n ההסתברות לנצחון על ידי הטלת הנקודה n **בהטלה לאחר ההטלה הראשונה**. ניתן לחשב את W_n על ידי חיבור:

- ההסתברות להופעת הנקודה בהטלה השנייה.
- ההסתברות לא לנצח ולא להפסיד בהטלה השנייה כפול ההסתברות להופעת הנקודה בהטלה השלישית.
- ההסתברות לא לנצח ולא להפסיד בהטלה השנייה והשלישית כפול ההסתברות להופעת הנקודה בהטלה הרביעית,

וכך הלאה.

$$\begin{aligned} W_n &= P_n + Q_n P_n + Q_n^2 P_n + Q_n^3 P_n + \cdots \\ &= P_n \left(1 + Q_n^1 + Q_n^2 + Q_n^3 + \cdots\right) \\ &= P_n \left(\frac{1}{1 - Q_n}\right) . \end{aligned}$$

אתה מפסיד אם בהטלה כלשהי לאחר הראשונה מופיע 7 עם הסתברות $6/36$ ולכן :

$$\begin{aligned} Q_n &= 1 - P_n - (6/36) \\ W_n &= \frac{P_n}{P_n + (6/36)} . \end{aligned}$$

W_n עבור ששת הנקודות היא :

n	4	5	6	8	9	10
P_n	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$
W_n	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{9}$

ניתן לחשב את W, ההסתברות לנצח, על ידי חיבור ההסתברות לנצח בהטלה הראשונה לסכום ההסתברויות עבור ששת הנצחונות בהטלת נקודה כפול ההסתברות להופעת **אותה נקודה** בהטלה הראשונה :

$$W = \frac{8}{36} + \sum_{n \in \{4,5,6,8,9,10\}} P_n W_n \approx 0.4929 . \qquad (10)$$

שסיכוי שהקזינו ינצח במשחק אחד של craps הוא רק $0.5 - 0.4949 \approx 0.5\%$ אבל חוק המספרי הגדולים מבטיח שבסופו של דבר הם ינצחו ואתה תפסיד!

פתרון 2

תשובה 2: נעיין בסדרות ההטלות שלהן כאשר בכולן הנקודה היא 4.

$$\begin{array}{cccccccccc} 4 & 8 & 9 & 9 & 9 & 8 & 8 & 8 & 9 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 9 & 9 & 9 & 8 & 8 & 8 & 9 & 8 & 7 \\ 4 & 9 & 9 & 9 & 8 & 8 & 4 \end{array}$$

המשחק מסתיים רק אם מטילים 4 (ניצחון) או מטילים 7 (הפסד), כך שהופעות של 8 או 9 לא משפיעות על התוצאה. מכאן שהסתברות לנצח היא ההסתברות המותנית שמופיע 4 אם נתון שהופיע 4 או 7. יהי f האירוע ש-4 מופיע ויהי s האירוע ש-7 מופיע. אזי:

$$P(f|f \cup s) = \frac{P(f) \cap P(f \cup s)}{P(f \cup s)} = \frac{P(f)}{P(f \cup s)} = \frac{3/36}{(3+6)/36} = \frac{3}{9}\,,$$

בדיוק התוצאה W_4 שמופיעה בטבלה לעיל. כעת ניתן להשתמש במשוואה 10 כדי לחשב את W.

השתמשנו בהסתברות בצורה סמויה בפתרון הראשון כי W_n היא ההסתברות המותנית שבהטלה הראשונה מופיעה הנקודה n.

סימולציה

```
Probability of winning = 0.4929
Proportion of wins     = 0.4948
```

13. דילמת האסיר The prisoner's dilemma[D]

שלושה אסירים A, B, C מועמדים לשחרור מוקדם. וועדת השחרורים ישחרר שניים מהם עם הסתברות שווה ל-$\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$, כך שהסיכוי ש-$A$ ישוחרר הוא $2/3$. לאסיר A נמסר שמו של אחד האסירים האחרים שישוחרר. אם מוסרים לו ש-B מה הסיכוי ש-A ישוחרר גם כן?

[2] הוא מאמר מקיף על דילמת האסיר ועל בעיית Monty Hall הדומה.

פתרון 1

יהיו $P(A), P(B), P(C)$ ההסתברות ש-A, B, C ישוחררו. A מעוניין בהסתברות המותנית $P(A|B)$ שהוא ישוחרר אם B ישוחרר. נדמה שהחישוב שלהלן הוא מה שאנחנו רוצים:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}\,.$$

אבל זאת לא ההסתברות הנכונה! יהי R_{AB} האירוע של-A נמסר ש-B ישוחרר. ההסתברות שיש לחשב היא $P(A|R_{AB})$:

$$P(A|R_{AB}) = \frac{P(A \cap R_{AB})}{P(R_{AB})}\,.$$

אנו מניחים שהמידע על שחרורו של B הוא אמת ולכן:

$$P(A \cap R_{AB}) = P(\{A, B\}) = \frac{1}{3}\,.$$

כעת:

$$P(R_{AB}) = P(\{A, B\}) + P(\{B, C\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\,.$$

אם התכנית היא ש-$\{B, C\}$ ישוחררו, ניתן למסור ל-A או ש-B ישוחרר או ש-C ישוחרר ולכן הגורם $1/2$. מכאן:

$$P(A|R_{AB}) = \frac{P(A \cap R_{AB})}{P(R_{AB})} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}\,,$$

כך שמסירה ל-A ש-B ישוחרר לא משנה את ההסתברות שהוא ישוחרר.

פתרון 2

ארבעת האירועים האפשריים הם:

e_1: ל-A נמסר ש-B ישוחרר ו-$\{A, B\}$ שוחררו.

e_2: ל-A נמסר ש-C ישוחרר ו-$\{A, C\}$ שוחררו.

e_3: ל-A נמסר ש-B ישוחרר ו-$\{B, C\}$ שוחררו.

e_4: ל-C נמסר ש-B ישוחרר ו-$\{B, C\}$ שוחררו.

ההסתברות של כל זוג לשחרור שווה ולכן:

$$P(e_1) = P(e_2) = P(e_3 \cup e_4) = \frac{1}{3}\,.$$

נניח שאם $\{B, C\}$ ישוחררו, בהסתברות שווה ימסרו ל-A ש-B ישוחרר או ש-C ישוחרר, ולכן $P(e_3) = P(e_4) = 1/6$. מכאן שההסתברות ש-A ישוחרר בהינתן האירוע $R_{AB} = e_1 \cup e_3$ שנמסר לו ש-B ישוחרר היא:

$$P(A|R_{AB}) = \frac{P(e_1 \cap (e_1 \cup e_3))}{P(e_1 \cup e_3)} = \frac{P(e_1)}{P(e_1 \cup e_3)} = \frac{1/3}{(1/3)+(1/6)} = \frac{2}{3}\,.$$

פתרון 3

חידה שמיוחסת ל-Abraham Lincoln שואל: ״אם תקרא לזנב של כלב רגל, כמה רגליים יש לכלב?״ התשובה היא שלקרוא לזנב רגל לא הופך אותו לרגל ולכן לכלב עדיין יש ארבע רגליים. ברור שאם A יודע את העתיד המחכה ל-B זה לא משנה את הסיכוי שלו לשיחרור.

14. איסוף תלושים Collecting coupons^S

תון סדרה של קופסאות ובתוך כל אחת נמצא תלוש עם אחד המספרים 1 עד 5. את שולפת תלוש אחד מכל קופסה אחת אחרי השנייה.

שאלה 1: מה התוחלת של מספר התלושים שיש לשלוף עד שתקבלי את כל חמשת המספרים?

שאלה 2: פתחי נוסחה לתוחלת ל-n מספרים.

רמז: תשתמשי בפתרון לבעיה 4 בעמוד **??** והקירוב לסכום של מספרים הורמוניים (עמוד 83).

פתרון

תשובה 1: מה התוחלת של מספר השליפות עד שאת מקבלת מספר **שונה** מכל הקודמים? לפי בעייה 4 התוחלת היא $1/p$ כאשר p היא ההסתברות לשליפת מספר שונה. עבור השליפה הראשונה, ההסתברות היא 1 כך שהתוחלת היא גם 1. עבור השליפה השנייה ההסתברות היא $4/5$ כך שהתוחלת היא $5/4$ וכך הלאה. לכן:

$$E(\text{כל חמשת המספרים}) = \frac{5}{5} + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + \frac{5}{1} = \; = \frac{1370}{120} \approx 11.4167\,.$$

תשובה 2: נשמתמש באותה שיטה ובקירוב לסכום המספרים ההרמוניים (עמוד 83):

$$E(\text{כל } n \text{ המספרים}) = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots \frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right) = nH_n \approx n\left(\ln n + \frac{1}{2n} + 0.5772\right)\,.$$

עבור $n = 5$ מתקבל:

$$E(\text{כל חמשת המספרים}) = 5H_5 \approx 5(\ln 5 + \frac{1}{10} + 0.5772) \approx 11.4332\,.$$

סימולציה

```
For  5 coupons:
Expectation of draws = 11.9332
Average draws        = 11.4272
For 10 coupons:
Expectation of draws = 29.7979
Average draws        = 29.2929
For 20 coupons:
Expectation of draws = 72.4586
Average draws        = 72.2136
```

15. שורה בתיאטרון The theater row ^{S}

דר שמונה מספרים זוגיים ושבעה מספרים אי-זוגיים בשורה בצורה אקראית, למשל:

$$10\quad 12\quad 3\quad 2\quad 9\quad 6\quad 1\quad 13\quad 7\quad 10\quad 3\quad 8\quad 8\quad 5\quad 20\,,$$

שנוכל לכתוב כך:

$$E\quad E\quad O\quad E\quad O\quad E\quad O\quad O\quad O\quad E\quad O\quad E\quad E\quad O\quad E\,,$$

כי המספרים עצמם אינם חשובים.

מה התוחלת שלמספר הזוגות השכנים שהם זוג/אי-זוגי או אי-זוגי/זוגי?

בדוגמה יש 10 זוגות שכנים שהם EO או OE.

רמז: התייחס לכל זוג שכנים בנפרד. מה ההסתברות שהם שונים?

פתרון

הטבלה שלהן מראה את עשרת הסידורים השונים עבור שלושה מספרים זוגיים ושני מספרים אי-זוגיים. מספר הזוגות השכנים השונים הוא 24 והממוצע הוא $24/10 = 2.4$.

זוגות	סידור	זוגות	סידור
3	$EEOEO$	1	$EEEOO$
4	$EOEOE$	2	$EEOOE$
1	$EOOEE$	3	$EOEEO$
2	$OEEEO$	3	$OEEOE$
1	$OOEEE$	3	$OEOEE$

נחזור לדוגמה עם 15 מספרים. תהי P_d ההסתברות שזוג נתון בסידור הוא EO או OE. אזי:

$$P_d = P(EO) + P(OE) = \frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14} + \frac{7}{15}\cdot\frac{8}{14} = 2\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14} = \frac{8}{15}\,.$$

תהי E_d התוחלת של מספר הזוגות בסידור שהם EO או OE. זוג (EO, OE) תורם 1 למספר הזוגות השונים וזוג (EE, OO) תורם 0:

$$E_d = \sum_{\text{זוגות}} 1 \cdot P_d = 14 \cdot \frac{8}{15} \approx 7.4667\,.$$

עבור עשרה מספרים:

$$\begin{aligned} P_d &= P(EO) + P(OE) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{5} \\ E_d &= 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5} = 2.4\,. \end{aligned}$$

Simulation

```
For  5 places:
Expectation of different pairs = 2.4000
Average different pairs        = 2.3855
For 15 places:
Expectation of different pairs = 7.4667
Average different pairs        = 7.4566
For 27 places:
Expectation of different pairs = 13.4815
Average different pairs        = 13.4835
For 49 places:
Expectation of different pairs = 24.4898
Average different pairs        = 24.4725
```

16. האם השני בדירוג יזכה המקום שני? Will the second-best be runner-up?^{S}

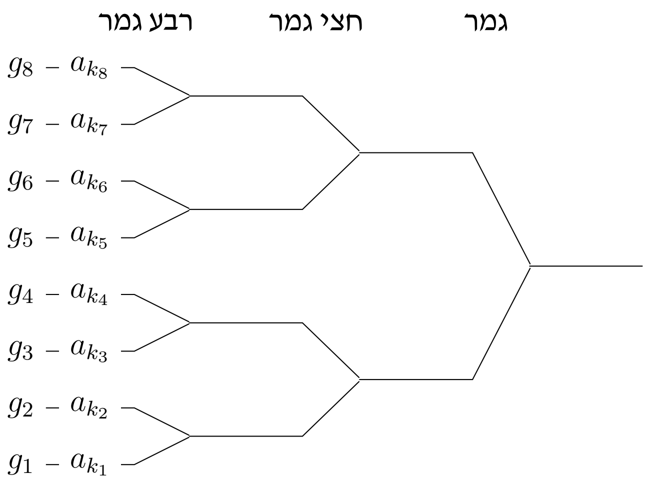
שמונה שחקים בתחרות $\{a_1, \ldots, a_8\}$ נקבעים משחקים $\{g_1, \ldots, g_8\}$ בצורה אקראית כך ששחקן a_{k_i} משחק את המשחק הראשון שלו במקום g_{k_i} (איור 3). השחקנים מדורגים כך שהטוב ביותר הוא a_1 והגרוע ביותר הוא a_8. השחקן הטוב יותר לעולם ינצח שחקן פחות. ברור ששחקן a_1 ינצח בתחרות.

שאלה 1: מה ההסתברות שהשחקן a_2 יזכה במקום השני כאשר הוא משחק נגד a_1 בגמר ומפסיד?

שאלה 2: עבור 2^n שחקנים, מה ההסתברות שהשחקן a_2 יזכה במקום השני כאשר הוא משחק נגד a_1 בגמר ומפסיד?

פתרון

תשובה 1: אם a_1 משחק באחד משחקים $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ אף שחקן המשחקים במשחקים הללו לא יגיע לגמר, לכן a_2 חייב לשחק באחד מהשחקים $\{g_5, g_6, g_7, g_8\}$. המסקנה המתבקש היא שההסתרות ש-a_2 יזכה במקום השני היא $1/2$ כי הוא חייב לשחק באחד מארבעת המשחקים $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$. אולם, a_2 חייב לשחק באחד מארבעה המשחקים מתוך שבעת המשחקים ש-a_1 לא משחק בו וההסתברות היא $4/7$.



איור 3 : טבלת משחקים לתחרות

תשובה 2: באופן דומה, מתוך $2^n - 1$ המשחקים בהם a_1 לא משחק, a_2 חייב לשחק באחד מ-2^{n-1} המשחקים במחצית הטבלה שלא כוללת את a_1. מכאן :

$$P(\text{משחקים אחד נגד השני בגמר } a_1, a_2) = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}\,.$$

סימולציה

```
For   8 players:
Probability a2 is runner-up                = 0.5714
Proportion of games where a2 is runner-up  = 0.5707
For  32 players:
Probability a2 is runner-up                = 0.5161
Proportion of games where a2 is runner-up  = 0.5184
For 128 players:
Probability a2 is runner-up                = 0.5039
Proportion of games where a2 is runner-up  = 0.5060
```

17. זוג אבירים Twin knights^{D,S}

לשמונה שחקים בתחרות $\{a_1, \ldots, a_8\}$ נקבעים משחקים $\{g_1, \ldots, g_8\}$ בצורה אקראית כך ששחקן a_{k_i} משחק את המשחק הראשון שלו במקום g_{k_i} (איור 3). לכל i, j, ההסתברות ש-a_i מנצחת במשחק נגד a_j היא $1/2$ כמו גם ההסתברות ש-a_j מנצחת את a_i.

שאלה 1: מה ההסתברות שהשחקנים a_1, a_2 משחקים משחק אחת נגד השנייה.

שאלה 2: עבור 2^n שחקנים, מה ההסתברות שהשחקנים a_1, a_2 משחקים משחק אחת נגד השנייה.

פתרון

תשובה 1: ללא הגבלת הכלליות נקבע ש-a_1 משחקת במשחק g_1. מה האפשרויות בהן a_1, a_2 ישחקו אחת נגד השנייה. בהסתברות $1/7$ נקבע ש-a_2 משחקת במשחק g_2. בהסתברות $2/7$ נקבע ש-a_2 משחקת במשחק g_3 או g_4, אבל היא לא משחקת נגד a_1 אלא אם **שתיהן** מנצחות במשחק הראשון שלהן, כך שיש להכפיל את ההסתברות ב-$1/4$. בהסתברות $4/7$ נקבע ש-a_2 משחקת במשחק g_5, g_6, g_7, g_8, אבל היא לא משחקת נגד a_1 **שתיהן** מנצחות בשני המשחקים שלהן, כך שיש להכפיל את ההסתברות ב-$1/16$. מכאן:

$$P(a_1, a_2 \text{ play each other}) = \frac{1}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{4}\,.$$

תשובה 2: תהי P_n ההסתברות שבתחרות עם 2^n שחקנים, a_1 ו-a_2 משחקות אחת נגד השנייה. ראינו ש-$P_3 = 1/4$. מה עם P_4? באותה שיטה:

$$\begin{aligned} P_4 &= \frac{1}{15} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{15} + \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{15} + \frac{1}{64} \cdot \frac{8}{15} \\ &= \frac{1}{15}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}\,. \end{aligned}$$

השערה סבירה היא ש-$P_n = 1/2^{n-1}$.

Proof 1: באותה שיטה תוך שימוש בנוסחה לסכום של סדרה הנדסית:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \\ &= \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} \\ &= \frac{1}{2^n - 1} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2^{n-1}}\,. \end{aligned}$$

Proof 2: באינדוקציה. טענת הבסיס היא: $P_3 = 1/4 = 1/2^{3-1}$.

יש שני צעדי אינדוקציה:

מקרה 1: נקבע ש-a_1 ו-a_2 משחקות בחצאים שונים של התחרות:

$$P(\text{משחקות בחצאים שונים } a_1, a_2) = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}\,.$$

הן יכולות להיפגש רק במשחק הגמר ולכן כל אחת חייבת לנצח בכל $n-1$ המשחקים שלהן:

$$P(\text{נפגשות אם משחקות בחצאים שונים } a_1, a_2) = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^{-(n-1)}}{2^n - 1}\,. \quad (11)$$

מקרה 2: נקבע ש-a_1 ו-a_2 משחקות באותו חצי תחרות:

$$P(a_1, a_2 \text{ משחקות בחצאים שונים}) = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}\,.$$

בגלל ששתי השחקניות משחקות באותו חצי הבעיה מצטמטת בדרישה למצוא P_{n-1}. לפי הנחת האינדוקציה:

$$P(\text{נפגשות אם משחקות באותו חצי } a_1, a_2) = \frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-2}} = \frac{2^1-2^{-(n-2)}}{2^n-1}\,. \tag{12}$$

ממשוואות 11, 12 נקבל:

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{2^{-(n-1)}}{2^n-1}+\frac{2^1-2^{-(n-2)}}{2^n-1}\\
&= \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}}\cdot\frac{2^{-(n-1)}+2^1-2^{-(n-2)}}{2^n-1}\\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{2^0+2^n-2^1}{2^n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}\,.
\end{aligned}$$

סימולציה

```
For   8 players:
Probability that a1, a2 meet = 0.2500
Proportion a1, a2 meet       = 0.2475
For  32 players:
Probability that a1, a2 meet = 0.0625
Proportion a1, a2 meet       = 0.0644
For 128 players:
Probability that a1, a2 meet = 0.0156
Proportion a1, a2 meet       = 0.0137
```

18. תוצאה שווה בהטלת מטבע An even split at coin tossing ^{S}

1 אם אתה זורק מטבע הגון 20 פעמים, מה ההסתברות לקבל "עץ" בדיוק 10 פעמים?

שאלה 2: אם אתה זורק מטבע הגון 40 פעמים, מה ההסתברות לקבל "עץ" בדיוק 20 פעמים?

פתרון

תשובה 1: המטבע הוגן ולכן ההסתברות מתקבלת מהמקדם הבינומי:

$$P(\text{10 "עץ" ב-20 הטלות}) = \binom{20}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\approx 0.1762\,.$$

תשובה 2: אפשר לשער שהתוצאה תהיה זהה לשאלה הקודמת אבל:

$$P(\text{20 "עץ" ב-40 הטלות}) = \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\approx 0.1254\,.$$

לפי חוק המספרים הגדולים מספר "עץ" ומספר "לפי" יהיו "בערך" שווים [11, Section 8.4], אבל הסיכוי נמוך מאוד שיהיו שווים בדיוק, והסיכוי לאירוע זה הופך להיות קטן יותר ככל שמספר ההטלות גדל.

סימולציה

```
Probability of 10 heads for  20 tosses = 0.1762
Proportion  of 10 heads for  20 tosses = 0.1790
Probability of 20 heads for  40 tosses = 0.1254
Proportion  of 20 heads for  40 tosses = 0.1212
Probability of 50 heads for 100 tosses = 0.0796
Proportion  of 50 heads for 100 tosses = 0.0785
```

19. Isaac Newton **עוזר ל-** Samuel Pepys Isaac Newton helps Samuel Pepys^S

1 מה ההסתברות לקבל **לפחות** 6 **אחד** כאשר מטילים 6 קוביות.

שאלה 2: מה ההסתברות לקבל **לפחות שני** 6 כאשר מטילים 12 קוביות.

שאלה 3: פתח נוסחה להסתברות לקבל לפחות n 6 כאשר מטילים $6n$ קוביות.

פתרון

תשובה 1: ההסתברות היא המשלים להסתברות לקבל אפס 6 ב-6 הטלות, שהיא המכפלה של לקבל מספר שונה מ-6 בכל ההטלות:

$$P(\text{לפחות 6 אחד}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.6651\,.$$

תשובה 2: ההסתברות היא המשלים להסתברות לקבל אפס או אחד 6 ב-12 הטלות:

$$P(\text{6 שני לפחות}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - \binom{12}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 0.6187\,.$$

לאירוע זה הסתברות קטנה יותר מהאירוע הקודם.

תשובה 3: ההסתברות היא המשלים להסתברות לקבל פחות מ-n 6 ב-$6n$ הטלות:

$$\begin{aligned} P(\text{6 } n \text{ לפחות}) &= 1 - \binom{6n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{6n-0} - \binom{6n}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{6n-1} - \cdots \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{n-1}\binom{6n}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{6n-i}\,. \end{aligned}$$

סימולציה

```
For   6 dice to throw  1 sixes:
Probability = 0.6651
Proportion  = 0.6566
For  12 dice to throw  2 sixes:
Probability = 0.6187
Proportion  = 0.6220
```

```
For  18 dice to throw  3 sixes:
Probability = 0.5973
Proportion  = 0.5949
For  96 dice to throw 16 sixes:
Probability = 0.5424
Proportion  = 0.5425
For 360 dice to throw 60 sixes:
Probability = 0.5219
Proportion  = 0.5250
```

20. דו-קרב משולש (The three-cornered duel)[S]

A, B, C מנהלות סדרה של קרבות בזוגות. לכל אחת הסתברות קבועה לנצח ללא קשר לזהות היריבה:

$$P(A) = 0.3, \quad P(B) = 1, \quad P(C) = 0.5\,.$$

מי שנפגעת לא ממשיכה להשתתף בקרבות. יורים את היריות בסדר קבוע A, B, C. אם שתי יריבות עדיין עומדות, היורה יכולה להחליט למי היא יורה. אפשר להניח שכל אחת מקבלת החלטה מיבטיבית נגד מי לירות.

שאלה 1: מה האסטרטגיה המיטבית של A?

שאלה 2: נניח ש-A יורה את היריה הראשונה באוויר. האם זו אסטרטגיה טובה יותר?

רמז: חשב את ההסתברויות המותנות של A לנצח בתלות בהחלטתה אל מי לירות קודם B או C.

פתרון

סימון: $X \xrightarrow{H} Y$ מסמן ש-X יורה לעבר Y ופוגע. $X \xrightarrow{M} Y$ מסמן ש-X יורה לעבר Y ומחטיא.

תשובה 1: חשב את ההסתברויות המותנות ש-A תנצח.

מקרה 1: A בוחרת לירות את הירייה הראשונה לעבר C.

אם $A \xrightarrow{M} C$ (הסתברות 0.7) אזי $B \xrightarrow{H} C$ כי C היא מסוכנת יותר מ-A. כעת A יורה שוב לעבר B עם הסתברות 0.3 לפגוע, אבל אם A מחטיאה, $B \xrightarrow{H} A$ בהסתברות 1 ו-A מפסידה.

אם $A \xrightarrow{H} C$ (הסתברות 0.3) אזי $B \xrightarrow{H} A$ 1 ו-A מפסידה.

חשב את התוחלת עם הערכים 1 כאשר A מנצחת ו-0 כאשר A מפסידה:

$$E(\text{מנצחת } A | C \text{ בוחרת לירות קודם ב- } A) =$$

$$\overbrace{1 \cdot (0.7 \cdot 0.3)}^{A \xrightarrow{M} C, A \xrightarrow{H} B} + \overbrace{0 \cdot (0.7 \cdot 0.7 \cdot 1)}^{A \xrightarrow{M} C, A \xrightarrow{M} B, B \xrightarrow{H} A} + \overbrace{0 \cdot (0.3 \cdot 1)}^{A \xrightarrow{M} C, B \xrightarrow{H} A} = 0.2100\,.$$

מקרה 2: A בוחרת לירות את הירייה הראשונה לעבר B.

אם $B \xrightarrow{M} A$ (הסתברות 0.7), אזי כמו במקרה הקודם $C \xrightarrow{H} B$ ול-A הזדמנות אחת נוספת לפגוע ב-B (הסתברות 0.3), אחרת $A \xrightarrow{H} B$ בהסתברות 1 ו-A מפסידה.

אם $B \xrightarrow{H} A$ (הסתברות 0.3) אזי A, C יורות לסירוגין אחת לעבר השנייה עד שאחת נפגעת. התסריטים האפשריים הם:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & C \xrightarrow{H} A \\
(2) & C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{H} C \\
(3) & C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{H} A \\
(4) & C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{H} C \\
(5) & C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{H} A \\
(6) & C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{H} C \\
 & \ldots
\end{array}
$$

ההסתברות ש-A מנצחת כי היא פוגעת ב-C בסופו של דבר היא סכום ההסתברויות של הסתריטים הזוגיים ברשימה:

$$
\begin{aligned}
P(\text{מנצחת } A \,|B \text{ ב- פוגעת } A) &= (0.5 \cdot 0.3) + \\
& \quad (0.5 \cdot 0.7)(0.5 \cdot 0.3) + \\
& \quad (0.5 \cdot 0.7)(0.5 \cdot 0.7)(0.5 \cdot 0.3) + \cdots \\
&= 0.15 \sum_{i=0}^{\infty} 0.35^i = \frac{0.15}{1 - 0.35} = \frac{3}{13} \approx 0.2308\,.
\end{aligned}
$$

באופן דומה, ההסתברות ש-C מנצחת היא $\frac{0.5}{1-0.35} = \frac{1}{13} \approx 0.0760$.

התוחלת היא:

$$
E(\text{מנצחת } A) = E(\text{מנצחת } A \mid B \text{ מחטיאה את } A) + E(\text{מנצחת } A \mid B \text{ פוגעת ב- } A) =
$$

$$
\overbrace{1 \cdot (0.7 \cdot 1 \cdot 0.3)}^{A \xrightarrow{M} B, B \xrightarrow{H} C, A \xrightarrow{H} B} + \overbrace{0 \cdot (0.7 \cdot 1 \cdot 0.7 \cdot 1)}^{A \xrightarrow{M} B, B \xrightarrow{H} C, A \xrightarrow{M} B, B \xrightarrow{H} A} + \overbrace{1 \cdot (0.2308)}^{A \xrightarrow{H} B, C \xleftrightarrow{H} *A, C \xrightarrow{H} A} + \overbrace{0 \cdot (0.3 \cdot (0.0769))}^{A \xrightarrow{H} B, C \xleftrightarrow{H} A, C \xrightarrow{H} A} \approx
$$

$$
0.2792\,,
$$

שהיא גבוהה יותר מהתוחלת לנצח על ידי ירי תחילה לעבר C.

תשובה 2: אם A יורה לאוויר ולא פוגעת באף יריבה אזי $C \xrightarrow{H} B$ בהסתברות 1 ו-A יכולה לנסות לפגוע ב-B בהסתברות 0.3. התוחלת היא:

$$
E(\text{מנצחת } A \mid \text{יורה באוויר } A) = 1 \cdot (0.3) + 0 \cdot (0.7) = 0.3\,,
$$

שהיא גבוהה יותר מהתוחלת של שתי האסטרטגיות האחרות!

סימולציה

```
For A fires first at C:
```

```
Expectation of wins = 0.2100
Average wins        = 0.2138
For A fires first at B:
Expectation of wins = 0.2792
Average wins        = 0.2754
For A fires in the air:
Expectation of wins = 0.3000
Average wins        = 0.3000
```

21. לדגום עם או בלי החזרות? (Should you sample with or without replacement?)^{D,S}

rn A contains 2 red balls and 1 green ball, and urn B contains 101 red balls and 100 green balls. An urn is chosen at random and two balls are randomly drawn from the selected urn. You win if you correctly identify whether the selected urn was A or B.

Which of the following rules gives you the highest probability of winning?

שאלה 1: The first ball is replaced before the second drawing.

שאלה 2: The first ball is not replaced before the second drawing.

שאלה 3: After the first ball is drawn you can decide whether it will be replaced or not.

Hint: When computing probabilities:

$$\frac{101}{201} \approx \frac{100}{201} \approx \frac{100}{200} \approx \frac{1}{2}\,.$$

פתרון

There are four outcomes which we denote by RR, RG, GR, GG. For each rule compute the conditional probabilities of the four outcomes given that urn A or urn B was selected initially. Multiply these by $1/2$ to take into account the random selection of the urn.

תשובה 1: Drawing with replacement:

$$\begin{array}{rcccl}
P(RR|A) &=& \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} &=& \frac{4}{9}\\
P(RR|B) &=& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{4}\\
\hline
P(RG|A) &=& \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} &=& \frac{2}{9}\\
P(RG|B) &=& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{4}\\
\hline
P(GR|A) &=& \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} &=& \frac{2}{9}\\
P(GR|B) &=& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{4}\\
\hline
P(GG|A) &=& \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} &=& \frac{1}{9}\\
P(GG|B) &=& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{4}
\end{array}$$

If the outcome is RR there is a higher probability that urn A was selected ($4/9$) than that urn B was selected ($1/4$); otherwise, there is a higher probability that urn B was selected:

$$P(\text{winning}) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = \frac{43}{72} \approx 0.5972\,.$$

replacement: without Drawing **:2 תשובה**

$$
\begin{array}{rcccl}
P(RR|A) & = & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{3} \\
P(RR|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4} \\
\hline
P(RG|A) & = & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{3} \\
P(RG|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4} \\
\hline
P(GR|A) & = & \frac{1}{3}\cdot 1 & = & \frac{1}{3} \\
P(GR|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4} \\
\hline
P(GG|A) & = & \frac{1}{3}\cdot 0 & = & 0 \\
P(GG|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4}
\end{array}
$$

than selected was B urn that probability higher a course!) (of is there GG is outcome the If The selected. was A urn that probability higher a is there otherwise, selected; was A urn that is: winning of probability

$$P(\text{win}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8} = 0.6250\,,$$

replacement. with sampling when winning of probability the than greater is which

draw. first the of outcome the on based is decision The **:3 תשובה**

to decision the on conditioned be must probabilities the A urn from is drawing first the If probabilities the affect not does B urn from first Drawing replacement. without or with sample hint. the in approximation the of because

$$
\begin{array}{lcccc}
P(RR|A,w) & = & \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} & = & \frac{4}{9} \\
P(RR|A,w/o) & = & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{3} \\
P(RR|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4} \\
\hline
P(RG|A,w) & = & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} & = & \frac{2}{9} \\
P(RG|A,w/o) & = & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{3} \\
P(RG|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4} \\
\hline
P(GR|A,w) & = & \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} & = & \frac{2}{9} \\
P(GR|A,w/o) & = & \frac{1}{3}\cdot 1 & = & \frac{1}{3} \\
P(GR|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4} \\
\hline
P(GG|A,w) & = & \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} & = & \frac{1}{9} \\
P(GG|A,w/o) & = & \frac{1}{3}\cdot 0 & = & 0 \\
P(GG|B) & = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} & = & \frac{1}{4}
\end{array}
$$

$\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ and $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ whereas replacement, with $\frac{2}{9} < \frac{1}{4}$ and $\frac{4}{9} > \frac{1}{4}$ then first drawn is ball red a If done is drawing the if only urn the identify help can ball second the so replacement, without replacement: with draw the Choose green. if B urn red, if A urn replacement: with

$$P(\text{winning if red first}) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{72}\,.$$

$0 < \frac{1}{4}$ and $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ whereas replacement, with $\frac{1}{9} < \frac{1}{4}$ and $\frac{2}{9} < \frac{1}{4}$ then first drawn is ball green a If done is drawing the if only urn the identify help can ball second the so replacement, without replacement: without draw the Choose green. if B urn red, if A urn replacement: without

$$P(\text{winning if green first}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{24}\,.$$

is: winning of probability total The

$$P(\text{winning}) = \frac{25}{72}+\frac{7}{24} = \frac{23}{36} \approx 0.6389\,.$$

without or with draw to decision the when obtained is winning of probability highest The draw. first the of result the on depends replacement

Simulation

```
replacement: With
```

```
0.5972 = winning of Expectation
0.5976 =             wins Average
          replacement: Without
0.6250 = winning of Expectation
0.6207 =             wins Average
         draw: first after Decide
0.6389 = winning of Expectation
0.6379 =             wins Average
```

[S](The ballot box) הקלפי .22

votes, b receives B and votes a receives A .B and A candidates two are there election an n are $(a_i, b_i), 1 \leq i \leq a+b$ totals running the and one-by-one counted are votes The .$a > b$?$a_i = b_i$,i one least at for that probability the is What counted. is vote each as updated

.$1 \leq i \leq 5$ for (a_i, b_i) listing by $a = 3, b = 2$ for Solve **:1 שאלה**

.$a > b$ all for problem the Solve **:2 שאלה**

occurs? tie first the until leads candidate which about say you can What **:1 Hint**

counted? vote first the of significance the is What **:2 Hint**

פתרון

the because ,$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$ is totals running of arrangements of number The **:1 תשובה** other the for votes the of positions the determine candidate one for votes the of positions running of and votes the of arrangements possible the lists table following The candidate. emphasized: ties first with totals

$(1,0)$	$(2,0)$	$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	A	A	A	B	B
$(1,0)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(3,2)$	A	A	B	A	B
$(1,0)$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(3,2)$	A	B	A	A	B
$(0,1)$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(3,2)$	B	A	A	A	B
$(1,0)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(\mathbf{2},\mathbf{2})$	$(3,2)$	A	A	B	B	A
$(1,0)$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,2)$	A	B	A	B	A
$(0,1)$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,2)$	B	A	A	B	A
$(1,0)$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(1,2)$	$(2,2)$	$(3,2)$	A	B	B	A	A
$(0,1)$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})$	$(1,2)$	$(2,2)$	$(3,2)$	B	A	B	A	A
$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,2)$	$(\mathbf{2},\mathbf{2})$	$(3,2)$	B	B	A	A	A

so: two first the for except arrangements the all in ties are There

$$P(\text{tie occurs with } (3,2) \text{ votes}) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}\,.$$

תשובה 2: The following discussion indicates how to approach the second question. List arrangements for A, B with $(3,2)$ votes until the first tie occurs:

A leads until tie	B leads until tie
$A \quad B$	$B \quad A$
$A \quad A \quad B \quad B$	$B \quad B \quad A \quad A$

For every arrangement where A leads until the first tie there is a mirror image arrangement where B leads until the first tie which is obtained by exchanging A's and B's.

Before the first tie one of the candidates must be leading. If the first vote counted is for B there must be a tie since $b > a$. The probability that the first vote is for b is:

$$P(\text{first vote for } B) = \frac{b}{a+b}\,.$$

By mirroring the positions of the votes, the number of sequences resulting in a tie that begin with a vote for A is the same as the number of sequences resulting in a tie that begin with a vote for B. But we just computed the latter probability so the probability of a tie is:

$$P(\text{tie occurs}) = 2 \cdot \frac{b}{a+b}\,.$$

Check:

$$P(\text{tie occurs with } (3,2) \text{ votes}) = 2 \cdot \frac{2}{2+3} = \frac{4}{5}\,.$$

Simulation

```
For a = 3, b = 2:
Probability of a tie = 0.8000
Proportion of ties   = 0.8118
For a = 10, b = 8:
Probability of a tie = 0.8889
Proportion of ties   = 0.8977
For a = 20, b = 18:
Probability of a tie = 0.9474
Proportion of ties   = 0.9354
```

23. תיקו בהשוואת מטבעות (Ties in matching pennies)[D,S]

Toss a pair of fair coins N times, N even, and keep count of how many times the parity is even (heads-heads, tails-tails) and how many times the parity is odd (heads-tails, tails-heads). What is the probability of obtaining a tie (not counting the $0-0$ tie at the start)?

שאלה 1: Solve for $N=4$ by writing out all the possible outcomes.

שאלה 2: probability. the for formula a developing by $N = 6$ for Solve

שאלה 3: $.N$ even arbitrary for formula a Develop

שאלה 4: probability the as same the is $N+1$ number odd the for probability the why Explain $.N$ number even the for

Hint: .22 Problem of solution the Use

פתרון

תשובה 1: the of out Ten $.O$ by parity odd with tosses and E by parity even with tosses Denote (emphasized): ties have tosses of arrangements sixteen

EOOO	**EOOE**	**EOEO**	**EOEE**	**EEOO**	EEOE	EEEO	EEEE
OOOO	OOOE	OOEO	**OOEE**	**OEOO**	**OEOE**	**OEEO**	**OEEE**

תשובה 2: :22 Problem By

$$P(\text{tie on toss } i) = \begin{cases} 2i/N & \text{if } i \leq N/2 \\ 2(N-i)/N & \text{if } i \geq N/2\,, \end{cases} \tag{13}$$

probability. the determines value smaller the that showed problem box ballot the since

detail. in step each justify we so complex quite are computations following The

coefficient: binomial the by given is evens i of probability The

$$P(i \text{ evens}) = \binom{N}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{N-i} = \binom{N}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^N = 2^{-N}\binom{N}{i}\,. \tag{14}$$

the times evens i obtaining of probability the of i over sum the is tie a of probability The $:N = 6$ For .(13 (Equation toss th$i$ the on tie a of probability

$$P(\text{ties}) = 2\cdot 2^{-6}\left[\frac{0}{6}\binom{6}{0} + \frac{1}{6}\binom{6}{1} + \frac{2}{6}\binom{6}{2} + \frac{3}{6}\binom{6}{3} + \frac{2}{6}\binom{6}{4} + \frac{1}{6}\binom{6}{5} + \frac{0}{6}\binom{6}{6}\right]\,. \tag{15}$$

combinations the expressing terms, zero two the deleting by 15 Equation from follows 16 Equation $:6!$ from $\frac{1}{6}$ canceling factorials, as

$$P(\text{ties}) = 2^{-5}\left[1\cdot\frac{5!}{1!5!} + 2\cdot\frac{5!}{2!4!} + 3\cdot\frac{5!}{3!3!} + 2\cdot\frac{5!}{4!2!} + 1\cdot\frac{5!}{5!1!}\right]\,. \tag{16}$$

$:i!$ from i canceling by obtained is 17 Equation

$$P(\text{ties}) = 2^{-5}\left[\frac{5!}{1!5!} + \frac{5!}{1!4!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{5!1!}\right]\,. \tag{17}$$

: $\frac{5!}{3!2!}$ subtract and add 17 Equation from 18 Equation obtain To

$$P(\text{ties}) = 2^{-5}\left[\left(\frac{5!}{1!5!}+\frac{5!}{1!4!}+\frac{5!}{2!3!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{4!1!}+\frac{5!}{5!1!}\right)-\frac{5!}{3!2!}\right]. \tag{18}$$

: 0! by 1! replacing from results 19 Equation

$$P(\text{ties}) = 2^{-5}\left[\left(\frac{5!}{0!5!}+\frac{5!}{1!4!}+\frac{5!}{2!3!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{4!1!}+\frac{5!}{5!0!}\right)-\frac{5!}{3!2!}\right]. \tag{19}$$

: 20 Equation obtain we combinations as back factorials the expressing By

$$P(\text{ties}) = 2^{-5}\left[\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}-\binom{5}{3}\right]. \tag{20}$$

theorem: binomial the from results 21 Equation Finally,

$$P(\text{ties}) = 2^{-5}\left(2^5-10\right)=\frac{11}{16}\approx 0.6875\,. \tag{21}$$

is: result The $.N$ arbitrary using but **:2 תשובה** in as calculations same the Perform **:3 תשובה**

$$P(\text{ties}) = 2^{-N+1}\left[2^{N-1}-\binom{N-1}{N/2}\right]=\left[1-\binom{N-1}{N/2}\Big/\,2^{N-1}\right].$$

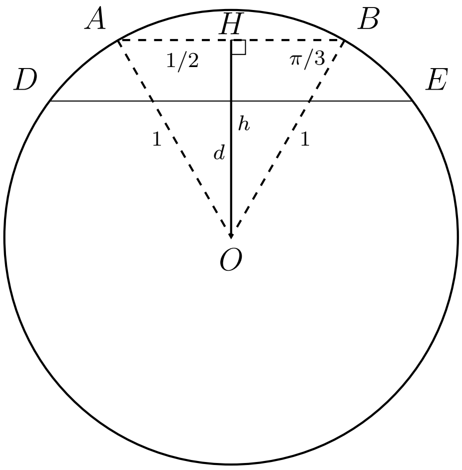
the after equal nearly are counts the if only occurs toss 'st$N+1$ the on tie first The **:4 תשובה**
toss: th$N$

$$((N/2)-1,(N/2)+1)$$
$$((N/2),(N/2))$$
$$((N/2)+1,(N/2)-1)$$

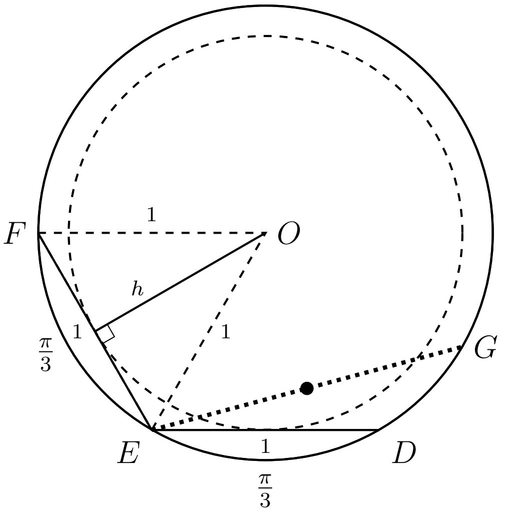
equal. be not will counts the toss final the of outcome the whatever but

Simulation

```
                 tosses: 4  For
0.6250 = ties of Probability
0.6192 =  ties of Proportion
                 tosses: 6  For
0.6875 = ties of Probability
0.6900 =  ties of Proportion
                 tosses: 7  For
0.6875 = ties of Probability
0.6811 =  ties of Proportion
                 tosses: 10 For
0.7539 = ties of Probability
0.7559 =  ties of Proportion
                 tosses: 20 For
0.8238 = ties of Probability
0.8255 =  ties of Proportion
```



איור 4(א) מרחק של מיתר מהמרכז בפילוג מ-$(0,1)$



איור 4(ב) נקודת האמצע של מיתר עם פילוג בתוך מעגל וקצות המיתר בפילוג בהיקף

25. אורכים של מיתרים אקראיים (Lengths of random chords)^{S}

is chord the of length the that probability the is What circle. unit the in chord random a elect ?1 than greater

the Solve means. chord" random a ``select what decide to have first you problem the solve To possibilities: following the of each for problem

שאלה 1: .$(0,1)$ range the in distributed uniformly is center the from chord the of distance The

שאלה 2: circle. the within distributed uniformly is chord the of midpoint The

שאלה 3: the of circumference the on distributed uniformly are chord the of endpoints The circle.

פתרון

תשובה 1: .1 length of chord a than center the to closer is it if radius the than larger is chord A .((איור 4(א) (Figure chord the to O from $\overline{OH}$ altitude the construct and 1 length of chord a be $\overline{AB}$ Let is: altitude the of length the and triangle right a is $\triangle OHB$ equilateral, is $\triangle AOB$ Since

$$h = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

distributed uniformly is d assumption by and center the from $\overline{DE}$ chord a of distance the be d Let Then: .$(0,1)$ in

$$P(\overline{DE} > 1) = P(d < h) = \frac{h}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866\,.$$

תשובה 2: A .1 length of chord a to altitude the ,h radius of circle a on point any Consider midpoint whose $\overline{EG}$ chord Any .1 is length whose $\overline{FE}$ chord a be will point this to tangent

is probability The .((ב)4 איור (Figure 1 than greater length a have will circle this within is
circles: two the of areas the of ratio the therefore

$$P(\overline{EG} > 1) = \frac{\pi \cdot h^2}{\pi \cdot 1^2} = h^2 = \frac{3}{4}\,,$$

answer. first the in computed probability the of square the be to happens which

in E) point one choose arbitrarily first chord, a of endpoints two the select To **:3 תשובה**
unless one than greater is length whose chord a determines point other Any .((ב)4 איור Figure
to $\widehat{FD}$ arc the of ratio the therefore is probability The .$\widehat{ED}$ or $\widehat{EF}$ arcs the on falls point that
circle: unit the of circumference the

$$P(\overline{EG} > 1) = \frac{(2\pi - (2\pi/3)) \cdot 1}{2\pi \cdot 1} = \frac{2}{3}\,.$$

Simulation

circumference. the on points random two choosing for is simulation The

```
Probability of long chords = 0.6667
Proportion of long chords  = 0.6627
```

^{S}(The hurried duelers) ממהרים לדו-קרב .26

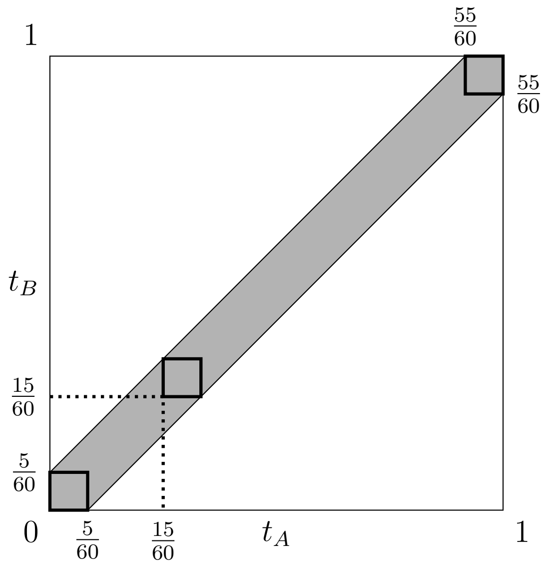
one- a within distribution uniform with time random a at point meeting a at arrive B and A
if Similarly, leaves. A minutes, 5 within arrive not does B and first arrives A If period. hour
that probability the is What leaves. B minutes, 5 within arrive not does A and first arrives B
meet? they

count cannot you is, that ,$[0, 1]$ range the in continuous is period one-hour the within Time
the compute can You probabilities. compute to seconds or minutes of number discrete a
durations. of probabilities

as arrival of time 'sB and -coordinate$x$ the the as arrival of time 'sA with graph a Draw **Hint:**
-coordinate.y the

פתרון

$t = 5/60$ before arrives B if and $t = 0$ at arrives A If first. arrives A generality of loss Without
origin. the at square small the by 5 Figure in shown is This not. do they otherwise meet, they
arrives A if example, for amount; same the by later arrive to has also B then later arrives A If
square a during place take will meeting the Therefore, .20 and 15 between arrive must B ,15 at
.$(15/60, 15/60)$ to $(0, 0)$ from 15 by square small the moving by obtained time of



B and A between meeting a ensure that Times :5 **איור**

to gray colored graph the of area the of ratio the is occur will meeting a that probability The the of area the is which complement the compute to easier is It square. large the of area the right: lower and left upper the in triangles white

$$\begin{aligned} P(A, B \text{ meet}) &= 1 - P(A, B \text{ don't meet}) \\ &= 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{55}{60} \cdot \frac{55}{60} \right) = \frac{23}{144} \approx 0.1597\,. \end{aligned}$$

Simulation

```
0.1597 =   meeting of Probability
0.1549 =   meetings of Proportion
```

^{S}(Catching the cautious counterfeiter) לתפוס זייפן זהיר .27

coin one Draw counterfeit. is box each in coin one and coins n with each boxes n are There probability the is What not. or counterfeit is it whether determine to it test and box each from real? are are drawn are that coins the all that

.$n = 10$ for Solve **:1 שאלה**

.$n = 100$ for Solve **:2 שאלה**

.n arbitrary for Solve **:3 שאלה**

infinity? to tends n as probability the of exists, it if limit, the is What **:4 שאלה**

פתרון

The draws are independent so the probability is the product of the probabilities for each draw.

תשובה 1:

$$P(\text{all real}) = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = 0.3487\,.$$

תשובה 2:

$$P(\text{all real}) = \left(\frac{99}{100}\right)^{100} = 0.3660\,.$$

תשובה 3:

$$P(\text{all real}) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\,.$$

תשובה 4:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e} \approx 0.3679\,. \qquad (22)$$

This limit can be proved using differential calculus. First we compute the limit of the natural logarithm of the lefthand side of Equation 22:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1/n}\,.$$

Taking the limit gives $\ln(1)/0 = 0/0$ but by l'Hôpital's rule we can replace it by the quotient of the derivatives:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}(-(-n^{-2}))}{-n^{-2}} = -1\\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} &= e^{-1}\,.\end{aligned}$$

Simulation

```
For 10 boxes:
Probability of all real = 0.3487
Proportion all real     = 0.3480
For 100 boxes:
Probability of all real = 0.3660
Proportion all real     = 0.3730
For 200 boxes:
Probability of all real = 0.3670
Proportion all real     = 0.3690
```

28. לתפוס את הזייפן החמדן (Catching the greedy counterfeiter)^S

coin one Draw counterfeit. are box each in coins m and coins n with each boxes n are here probability the is What not. or counterfeit is it whether determine to it test and box each from ?counterfeit are drawn are that coins the of r that $P(n, m, r)$

שאלה 1: Develop a formula for $P(n, m, r)$.

שאלה 2: Compute $P(20, 10, 2), P(20, 10, 8), P(20, 5, 2), P(20, 5, 4)$.

פתרון

תשובה 1: There are $\binom{n}{r}$ choices of boxes from which the counterfeit coins can be drawn. From the binomial distribution:

$$P(n, m, r) = \binom{n}{r} \left(\frac{m}{n}\right)^r \left(\frac{n-m}{n}\right)^{n-r} .$$

תשובה 2:

$$\begin{aligned}
P(20, 10, 2) &= \binom{20}{2} \left(\frac{10}{20}\right)^2 \left(\frac{10}{20}\right)^{18} \approx 0.0002 \\
P(20, 10, 8) &= \binom{20}{8} \left(\frac{10}{20}\right)^8 \left(\frac{10}{20}\right)^{12} \approx 0.1201 \\
P(20, 5, 2) &= \binom{20}{2} \left(\frac{5}{20}\right)^2 \left(\frac{15}{20}\right)^{18} \approx 0.0669 \\
P(20, 5, 4) &= \binom{20}{4} \left(\frac{5}{20}\right)^4 \left(\frac{15}{20}\right)^{12} \approx 0.1952 .
\end{aligned}$$

Mosteller shows that as n tends to infinity, for fixed m, r the probability is:

$$\lim_{n\to\infty} P(n, m, r) = \frac{e^{-m} m^r}{r!} . \qquad (23)$$

Simulation

```
For 10 bad coins, 2 draws:
Probability of counterfeit  = 0.0002
Proportion counterfeit      = 0.0002
For 10 bad coins, 8 draws:
Probability of counterfeit  = 0.1201
Proportion counterfeit      = 0.1181
For 5 bad coins, 2 draws:
Probability of counterfeit  = 0.0669
Proportion counterfeit      = 0.0688
For 5 bad coins, 4 draws:
Probability of counterfeit  = 0.1897
Proportion counterfeit      = 0.1905
```

^{S}(Moldy gelatin) עובש בג׳לטין .29

each in microbes r of average an are There squares. small n into divided is plate rectangular A square.

squares. n the in microbes r exactly are there that probability for formula a Develop **:1 שאלה**

.$n = 100, r = 3$ for probability the Compute **:2 שאלה**

.28 Problem the similar is problem This **Hint:**

פתרון

possibility the (Ignore microbe. a contains square single a that probability the be p Let **:1 תשובה** of number average the ,m squares.) more or two within contained partially is microbe a that contains square a that p probability the times n squares of number the is square, per microbes is squares n the in microbes r exactly are there that probability the ,$P(n,m,r)$ microbe. a distribution: binomial the by given

$$P(n,m,r) = \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^{r}\left(\frac{n-m}{n}\right)^{n-r} .$$

:2 תשובה

$$P(10,3,3) = \binom{100}{3}\left(\frac{3}{100}\right)^{3}\left(\frac{97}{100}\right)^{97} \approx 0.2275 .$$

here: applies also 23 Equation

$$\lim_{n\to\infty} P(n,3,3) = \frac{e^{-3}\cdot 3^{3}}{3!} \approx 0.2240 .$$

Simulation

```
                             squares: 20  For
0.2428 =  microbes 3  exactly of Probability
0.2436 =  microbes 3   exactly of Proportion
0.2023 =  microbes 5  exactly of Probability
0.1954 =  microbes 5   exactly of Proportion
                             squares: 100 For
0.2275 =  microbes 3  exactly of Probability
0.2247 =  microbes 3   exactly of Proportion
0.1800 =  microbes 5  exactly of Probability
0.1851 =  microbes 5   exactly of Proportion
```

31. ימי הולדת זהים (Birthday pairings)^S

distribution uniform a Assume are. birthdays their what them ask and people 23 select andomly at that probability the that Show .(29 February on born was one (no birthdays different 365 of .0.5 than greater is birthday same the have them of two least

פתרון

it that show and birthday same the have people 23 the of none that probability the Compute remaining the from birthday next the then arbitrarily, birthday first the Select .0.5 than less is on: so and days, remaining the from birthday next the then days,

$$
\begin{aligned}
P(\text{no birthday pair}) &= \overbrace{\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\;\cdots\;\cdot\frac{344}{365}\cdot\frac{343}{365}}^{23\text{ fractions}}\\
&= \frac{365!}{365^{23}\cdot 342!} \approx 0.4927\,.
\end{aligned}
$$

birthday! same the with two find to needed are people 23 than more that guess people Most using it computing worthwhile is it but probability, the compute can calculator modern A : $\ln n! \approx n\ln n - n$ approximation Stirling's

$$
\begin{aligned}
\ln P(\text{no birthday pair}) &= \ln\left(\frac{365!}{342!\cdot 365^{23}}\right) = \ln 365! - \ln 342! - 23\ln 365\\
&\approx (365\ln 365 - 365) - (342\ln 342 - 342) - 23\,\ln 365\\
&\approx -0.7404\\
P(\text{no birthday pair}) &\approx e^{-0.7404} = 0.4769\,.
\end{aligned}
$$

approximation: better following the with probability the compute to invited is reader The

$$\ln n! \approx n\ln n - n + \frac{1}{6}\left(8n^3 + 4n^2 + n + \frac{1}{30}\right) + \frac{1}{2}\ln\pi\,.$$

Simulation

```
                   people: 21 For
0.5563 = pairs no of Expectation
0.5497 =        pairs no Average
                   people: 22 For
0.5243 = pairs no of Expectation
```

```
0.5237 =        pairs no Average
                 people: 23 For
0.4927 = pairs no of Expectation
0.4933 =        pairs no Average
                 people: 24 For
0.4617 = pairs no of Expectation
0.4576 =        pairs no Average
                 people: 25 For
0.4313 = pairs no of Expectation
0.4345 =        pairs no Average
```

^{S}(Finding your birthmate) למצוא עמית ליום ההולדת .32

yours. as birthday same the with person a is birthmate our

pairing? birthday a finding from different birthmate a finding is Why

שאלה 1: How many people do you have to ask until the probability of finding your brithmate is greater than ?0.5

שאלה 2: Solve by using the approximation in Equation 22 on page 40.

פתרון

birthday a find for success a considered is which birthday same the have could people Many yours. as same the is birthday that unless birthmate a finding for not but pairing,

תשובה 1: Find the smallest number of people for which the probability that none of theme are birthmates is less than .0.5 The probability that the first person you ask is not a birthmate is $364/365$, but that is also the probability that the second, third, … , person is not a birthmate. The solution is the smallest k such that:

$$P(\text{not a birthmate}) = \left(\frac{364}{365}\right)^k < \frac{1}{2}\,,$$

which is $k = 253$:

$$\left(\frac{364}{365}\right)^{253} \approx 0.4995\,.$$

תשובה 2: Equation 22 is:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\,,$$

which can be used to approximate the probability:

$$\begin{aligned}P(\text{not a birthmate}) &= \left(\frac{365-1}{365}\right)^k = \left[\left(\frac{364}{365}\right)^{365}\right]^{k/365}\\ &\approx e^{-k/365}\\ e^{-253/365} &\approx 0.5000\,.\end{aligned}$$

Simulation

```
                    people: 251 For
0.5023 = match no of Probability
0.5120 =     match no Proportion
                    people: 252 For
0.5009 = match no of Probability
0.5055 =     match no Proportion
                    people: 253 For
0.4995 = match no of Probability
0.4984 =     match no Proportion
                    people: 254 For
0.4982 = match no of Probability
0.4987 =     match no Proportion
                    people: 255 For
0.4968 = match no of Probability
0.5078 =     match no Proportion
```

33. השוואת הבעיות יום הולדת זהה ועמית ליום ההולדת

(Relating the birthday pairings and the birthmate problems)

let and (31 (Problem pair birthday a are r of out people two that probability the be $P_{\text{pair}}(r)$ et for r Given .(32 (Problem birthmates are n of out people two that probability the be $P_{\text{mate}}(n)$?$P_{\text{pair}}(r) \approx P_{\text{mate}}(n)$ does n what

פתרון 1

.[7] on based is solution The

have: we 31 Problem to solution the from complement, the for $P_{\text{no pair}}(r)$ notation the Using

$$
\begin{aligned}
P_{\text{no pair}}(r) &= \frac{365}{365} \cdot \frac{365-1}{365} \cdot \frac{365-2}{365} \cdot \cdots \cdot \frac{365-(r-1)}{365} \\
&= 1\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1-\frac{r-1}{365}\right) \\
&\approx 1-\frac{1}{365}-\frac{2}{365}-\cdots-\frac{r-1}{365} \\
&= 1-\frac{1+2+3+\cdots+(r-1)}{365} \\
&= 1-\frac{r(r-1)/2}{365},
\end{aligned}
$$

greater $1/365$ of powers deleting from results equation third the in approximation the where result. the affect significantly to small too are they because one than

the from approximation, same the and complement the for $P_{\text{no mate}}(n)$ notation the Using have: we 32 Problem to solution

$$
\begin{aligned}
P_{\text{no mate}}(n) &= \overbrace{\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{1}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{365}\right)}^{n} \\
&\approx 1-\overbrace{\frac{1}{365}-\frac{1}{365}\cdots-\frac{1}{365}}^{n} \\
&\approx 1-\frac{n}{365}
\end{aligned}
$$

when: $P_{\text{no pair}}(r) \approx P_{\text{no mate}}(n)$ Therefore

$$
n=\frac{r(r-1)}{2}\,.
$$

$.n=(23\cdot 22)/2=253$ $,r=23$ For

פתרון 2

solution: intuitive following the gives [322 p. ,7] Mosteller

> people r for that observes one problems, birthmate and birthday the comparing In birthdays; like for opportunities or pairs $r(r-1)/2$ are there problem, birthday the in n only are there problem, birthmate the in questioned are people n if whereas, birthmates. more or one find to me for opportunities

$.n \approx r(r-1)/2$ that concludes he this From

arbitrary an choose problem birthday the For follows. as understood be can reasoning This are: There birthday. that have r of out people two if ask and date

$$
\binom{r}{2}=\frac{r!}{2!(r-2)!}=\frac{r(r-1)}{2}
$$

people n the of Any given. is birthday own your problem birthmate the For so. doing of ways $.P_{\text{pair}}(r) \approx P_{\text{mate}}(n)$ that such n the have we two the equating By birthday. same the have can

result. this check and 32 ,31 Problems for simulations the run can You

^{D,S}(Birthday holidays) חופש בימי הולדת .34

holidays. other no are There birthday. a has workers its of one whenever closed is factory

שאלה 1: How many workers should be employed in order to maximize the number of work-days in a year?

שאלה 2: What is the expectation of the ratio of the maximum work-days to 365^2, the number of possible work-days if each one of 365 workers worked every day?

Hint: Prove that there must be a maximum by considering extreme cases. Then develop a formula for the expectation of the number of work-days for a single day.

פתרון

תשובה 1: At one extreme if there is only one worker there are 364 work-days. If there are two workers there are $363 + 363 = 726$ workers days (ignoring the very small possibility that both workers have the same birthday). At the other extreme if there are one million workers the number of work-days will almost certainly be zero. Since the number of work-days rises initially and then returns to zero, there must be a maximum in between.

To simplify the notation we will denote the number of days in a year by N and the number of workers by n.

For any given day the probability that it is a work-day is the probability that each worker has a birthday on some other day:

$$P(\text{a given day is a work-day}) = \overbrace{\frac{N-1}{N} \cdot \cdots \cdot \frac{N-1}{N}}^{n} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n .$$

Denote $\left(1 - \frac{1}{N}\right)$ by p.

The expectation of the number of work-days for a given day is:

$$E(\text{work-days for a given day}) = n \cdot p^n + 0 \cdot (1 - p^n) = np^n .$$

All the days in the year have this same expectation, so we just multiply by N to get the expectation for a year:

$$E(\text{work-days for a year}) = Nnp^n . \qquad (24)$$

To find the maximum we take the derivative of Equation 24 with respect to n and use $(p^n)' = p^n \ln p$ which can be proved using the chain rule:

$$(p^n)' = ((e^{\ln p})^n)' = (e^{n \ln p})' = e^{n \ln p}(n \ln p)' = (e^{\ln p})^n \ln p = p^n \ln p .$$

The derivative of Equation 24 is therefore:

$$(Nnp^n)' = N(p^n + n(p^n)') = N(p^n + np^n \ln p) ,$$

when: 0 is which

$$n = -\frac{1}{\ln p}\,.$$

at achieved is maximum the integer positive a is n Since $.n = 364.5$ gives this $N = 365$ For work-days: of number the of expectation same the give which $n = 365$ or $n = 364$

$$\begin{aligned} E(\text{work-days for a year}) &= Nnp^n \\ &= 365 \cdot 364 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{364} \\ &= 365 \cdot 364 \cdot \frac{365}{365}\left(\frac{364}{365}\right)^{364} \\ &= 365 \cdot 365 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{365} \\ &= 48944\,. \end{aligned}$$

is: ratio the of expectation The **תשובה 2:**

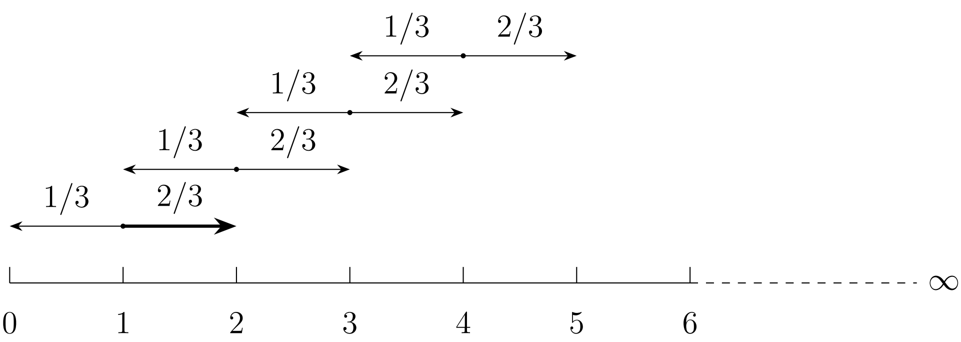
$$E(\text{max work-days/possible work-days}) = \frac{365 \cdot 365 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{365}}{365 \cdot 365} = \left(\frac{364}{365}\right)^{365} \approx 0.3674\,.$$

:22 Equation By

$$\lim_{n\to\infty} E(\text{max work-days/possible work-days}) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{e}\,.$$

Simulation

```
                           people 100 For
 27742 =    -dayswork Expectation
 27743 =          days work Average
0.2082 = 365**2 / -dayswork Ratio
                           people 250 For
 45958 =    -dayswork Expectation
 45939 =          days work Average
0.3450 = 365**2 / -dayswork Ratio
                           people 364 For
 48944 =    -dayswork Expectation
 48936 =          days work Average
0.3674 = 365**2 / -dayswork Ratio
                           people 365 For
 48944 =    -dayswork Expectation
 48917 =          days work Average
0.3674 = 365**2 / -dayswork Ratio
```



איור 6: Can the particle return to 0 (infinite line)?

35. על שפת התהום (The cliff-hanger)^S

particle is initially placed on the x-axis at position 1. At any position on the x-axis it can move right with probability $2/3$ and left with probability $1/3$ (Figure 6).

שאלה 1: What is the probability that the particle will eventually be at position 0?

שאלה 2: If the probability of moving right is p and the probability of moving left is $1-p$, what is the probability that the particle will eventually be at position 0? Analyze the result for various values of p.

Hint: Use conditional probabilities after the first move.

פתרון

It is just as easy to compute the probabilty for arbitrary p as it is for $p=2/3$.

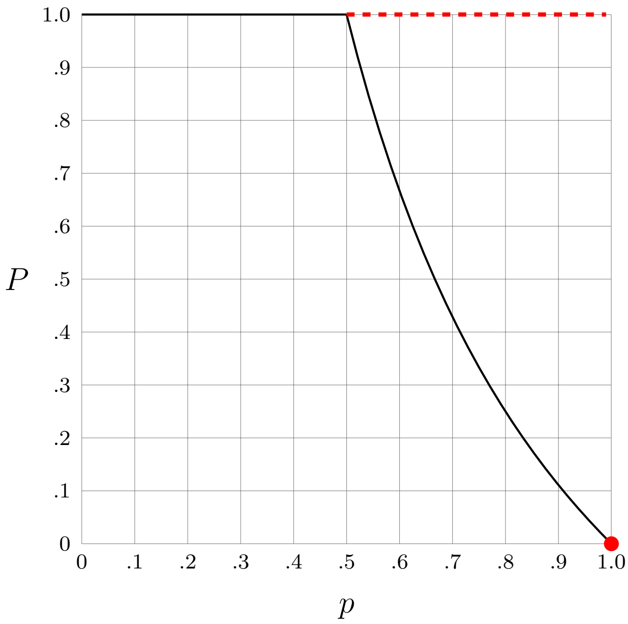
תשובה 1,2: Let us try to compute the probability directly. Denote a move left by L and a move right by R. The particle can reach 0 directly by moving L with probability $\frac{1}{3}$, or by moving RLL with probability $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$, or by moving $RRLLL$ with probability $\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3$, ... This seems to be a straightforward geometric progression, but it ignores possibilities such as $RLRLL$.

Compute the probability that the particle reaches 0 from 1 conditioned on the first step:

$$\begin{aligned}
P(\text{reaches } 0 \text{ from } 1) &= P(\text{reaches } 0 \text{ from } 1|\text{first move left}) + \\
&\quad P(\text{reaches } 0 \text{ from } 1|\text{first move right}) \\
&= (1-p)\cdot 1 + pP(\text{reaches } 1 \text{ from } 2)P(\text{reaches } 0 \text{ from } 1)\,.
\end{aligned}$$

But the probability of reaching 1 from 2 is exactly the same as the probability of reaching 0 from 1. Abbreviating $P(\text{reaches } 0 \text{ from } 1)$ as P we have:

$$\begin{aligned}
P &= (1-p) + pP^2 \\
pP^2 - P + (1-p) &= 0
\end{aligned}$$



$p \in [0,1]$ for $P = \min(p/(1-p), 1)$ of Graph :7 איור

$$P = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p}$$
$$P = 1,\ (1-p)/p\,.$$

particle the that certain is it and solution only the is $P = 1$ so ,$(1-p)/p \geq 1$ then $p \leq 1/2$ If .0 reach will

.0 to return cannot it right the to moves always particle the if since $P = 0$ then $p = 1$ If

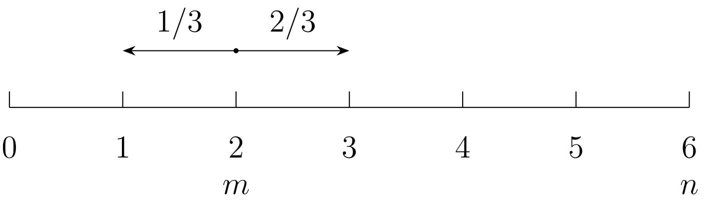
suddenly cannot P Then .p on depend not does P is, that ,$1/2 < p < 1$ for $P = 1$ Suppose .$(1,0)$ at dot red the and line red dashed the 7 Figure in : 1 approaches p as 0 to 1 from ``jump'' [2].$P = (1-p)/p < 1$ is solution only the $p > 1/2$ for Therefore,

one because result surprising a is This .$p = 1/2, P = 1$ for and $p = 2/3, P = 1/2$ For were moves the of direction the if 0 to return always would particle the that expect not would heads of (probability coin unfair very a have to have You coin! fair a flipping by determined not. or 0 to returning or chances the even to ($2/3$ is

Simulation

```
0.2500: = probability For
1.0000 = 0 reaching of Probability
1.0000 =       0 reaching Proportion
0.5000: = probability For
```

proof. a give not does but continuity by follows this that writes Mosteller[2]



line)? (finite 0 to return particle the Can : 8 איור

```
1.0000 = 0 reaching of Probability
0.9612 =     0 reaching Proportion
         0.6667: = probability For
0.5000 = 0 reaching of Probability
0.5043 =     0 reaching Proportion
         0.7500: = probability For
0.3333 = 0 reaching of Probability
0.3316 =     0 reaching Proportion
         0.8000: = probability For
0.2500 = 0 reaching of Probability
0.2502 =     0 reaching Proportion
```

^{D,S}(Gambler's ruin) המהמר פשט רגל .36

can it -axis$x$ the on position any At .$m \geq 1$ position at -axis$x$ the on placed initially is particle .$1-p$ probability with left and $p > 1/2$ probability with right move

?0 position at be eventually will particle the that probability the is What **שאלה 1:**

What moving. stops its n position or 0 position reaches particle the If .$n > m$ Let **שאלה 2:** that probability the is What ?0 position at be eventually will particle the that probability the is ?n position at be eventually will particle the

casino a against betting money of amount finite a with player a represents is 35 Problem **Note:** money. his all loses player the that probabiliy the for asks problem The money. unlimited with starts who player one represents problem This money. of out runs never casino the course Of the for asks problem The .$n-m$ with starts who player second a against betting m with player. other the to money her all loses players the of one that probabilities

פתרון

4m]. Example ,2 Chapter ,11] on based is solution The

assumption), by here true is (which $p > 1/2$ for that showed 35 Problem to solution The **תשובה 1:** Notation: .$r = (1-p)/p$ is 0 position reaching its of probability the 1 position at is particle a if

actual the on depend not does claim the Since .j from i reaching of probability the be $P(i,j)$ let
is: m position from 0 reaching particle a of probability the particle, the of position

$$P(0,m) = P(m-1,m)P(m-2,m-1)\cdots P(1,2)P(0,1) = r^m\,. \tag{25}$$

probability: conditional using it compute and $P_i = P(n,i)$ Let **תשובה 2:**

$$\begin{aligned}
P_i &= pP_{i+1} + (1-p)P_{i-1} \\
pP_{i+1} &= 1\cdot P_i - (1-p)P_{i-1} \\
pP_{i+1} &= (p+(1-p))P_i - (1-p)P_{i-1} \\
p(P_{i+1}-P_i) &= (1-p)(P_i - P_{i-1}) \\
P_{i+1}-P_i &= r(P_i - P_{i-1})\,.
\end{aligned}$$

Therefore: move. not does it 0 at is particle the if since $P_0 = 0$

$$\begin{aligned}
P_2 - P_1 &= r(P_1 - P_0) = rP_1 \\
P_3 - P_2 &= r(P_2 - P_1) = r^2P_1 \\
\cdots &= \cdots \\
P_i - P_{i-1} &= r(P_{i-1} - P_{i-2}) = r^{i-1}P_1\,.
\end{aligned}$$

equations: the add we when cancel sides lefthand the on terms the of Most

$$\begin{aligned}
P_i - P_1 &= P_1\sum_{j=2}^{i} r^{j-1} \\
&= P_1 + P_1\sum_{j=2}^{i} r^{j-1} - P_1 \\
P_i &= P_1\sum_{j=0}^{i-1} r^j = P_1\left(\frac{1-r^i}{1-r}\right)\,.
\end{aligned}$$

:$P_n = 1$ so n at already is it then n at is particle the If

$$\begin{aligned}
1 &= P_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) \\
P_1 &= \left(\frac{1-r}{1-r^n}\right)\,,
\end{aligned}$$

:($1-p$ and p exchanging argument symmetrical a (using therefore and

$$P(n,i) = \left(\frac{1-r^i}{1-r^n}\right) \tag{26}$$

$$P(0,i) = \left(\frac{1-(1/r)^{n-i}}{1-(1/r)^n}\right)\,. \tag{27}$$

players the of one that meaning 1 is 27 ,26 Eqs. of sum the that show to reader the to it leave We lose. will one and win certainly will

$:m = 1, n = 3, p = 2/3$ For

$$
\begin{aligned}
P(0,1) &= \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}\right) = \frac{4}{7} \\
P(3,1) &= \left(\frac{1-2^2}{1-2^3}\right) = \frac{3}{7}\,.
\end{aligned}
$$

Simulation

```
                                   0.6667: = probability For
,0.5005)(0.4995 = 1 from ,10)(0 reaching of Probability
,0.4944)(0.5056 = 1 from ,10)(0     reaching Proportion
,0.9384)(0.0616 = 4 from ,10)(0 reaching of Probability
,0.9357)(0.0643 = 4 from ,10)(0     reaching Proportion
,0.9853)(0.0147 = 6 from ,10)(0 reaching of Probability
,0.9877)(0.0123 = 6 from ,10)(0     reaching Proportion

                                   0.7500: = probability For
,0.6667)(0.3333 = 1 from ,10)(0 reaching of Probability
,0.6605)(0.3395 = 1 from ,10)(0     reaching Proportion
,0.9877)(0.0123 = 4 from ,10)(0 reaching of Probability
,0.9885)(0.0115 = 4 from ,10)(0     reaching Proportion
,0.9986)(0.0014 = 6 from ,10)(0 reaching of Probability
,0.9985)(0.0015 = 6 from ,10)(0     reaching Proportion
```

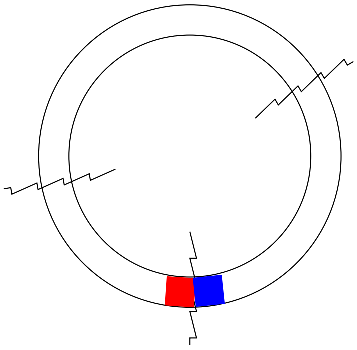
of probability his greater the and has player left the that money of amount the greater The winning. of probability his higher the bet, each winning

^{S}(Bold play vs. cautious play) משחק נועז או משחק זהיר .37

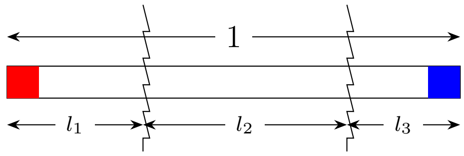
probability The number. even an with pocket a into fall will ball the that bet can you roulette n the where numbers green 2 and numbers odd 18 numbers, even 18 are there since $18/38$ is wins. casino

better? is strategies following the of Which

1. round. one in 20 betting play: Bold
2. .20 lose or win you until round per 1 play: Cautious



איור 9(ב) חלוקת טבעת לשלושה חלקים



איור 9(א) חלוקת מקל לשלושה חלקים

.36 Problem of results the Use **Hint:**

פתרון

.$18/38 \approx 0.4737$ is play bold with winning of probability The

:(26 (Equation $r = \frac{20}{38}/\frac{18}{38} = \frac{20}{18}$ with $P(40, 20)$ is play cautious with winning of probability The

$$P(\text{reaches } 40 \text{ from } 20) = \left(\frac{1-(20/18)^{20}}{1-(20/18)^{40}}\right) \approx 0.1084\,.$$

play. cautious to preferable is play bold Clearly,

rounds more in betting that is result this for explanation intuitive the that writes Mosteller wins. casino the that $2/38$ of probability the to player the exposes

Simulation

```
0.4737 =      wins bold of Probability
0.4677 =          wins bold Proportion
0.1084 = wins cautious of Probability
0.1094 =      wins cautious Proportion
```

39. הכימאי המגושש (The clumsy chemist)^S

other the and red colored end one with 1 length of rods glass of number large a have You a with pieces three into break each they floor the on them drop you When blue. colored expectation the is What .((איור 9(א (Figure pieces the of length the of distribution uniform blue? colored is end whose piece the of length the of

break also that rings glass (unmarked) given are you that suppose rods straight of Instead **Hint:** .((איור 9(ב (Figure pieces three into

פתרון 1

a

	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
	8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	
	7	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	
a	6	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	
	5	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	
	4	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	
y	3	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	a
	2	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	
	1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

x a

$(0,1) \times (0,1)$ on breaks of Distribution :1 טבלה

However, piece. center the from different are pieces end the because symmetric not are rods The expectation with uniform be must pieces three all of distributions the so symmetric is ring the rods the of that as same the now is problem the breaks, of one coloring and choosing By .$1/3$ also is rod the in breaks the of expectation the Therefore same. the remain distributions the so .$1/3$

פתרון 2

.[4] from solution elegant an is Here

which places two in broken is rod The .$(0,1)$ segment line the represents rod the that Assume compute us Let .$X, Y \in (0,1)$ variables random independent uniform two as represented are .$P(|X-Y|>a)$ probability the

is point decimal the and $x, y \in \{0.0, 0.1, 0.2, \ldots, 0.9\}$ where ,(x,y) points shows 1 Table omitted. The values that appear in the table are $|X-Y|$. In the table, for $a=0.6$ the points in the upper left and lower right corners of $[0,1] \times [0,1]$: $(0,6)$--$(6,9)$ above, and $(6,0)$-- $(9,6)$ and below, are those outcomes that define $P(|X-Y|>a)$. The area of one corner is $\frac{1}{2}(1-a)(1-a)$, so:

$$P(|X-Y|>a) = 2 \cdot \frac{1}{2}(1-a)(1-a) = (1-a)^2 .$$

.$P(|X-Y|>0.6) = (0.4)^2 = 0.16$,$a=0.6$ For

gives: complement the Taking

$$P(|X-Y|<a) = 1-(1-a)^2 .$$

probability The $.(0,1)$ interval the for (CPD) distribution probability cumulative the is This
CDP: the differentiating by obtained be can (CDF) function density

$$P(|X-Y|=a)=\frac{d}{da}P(|X-Y|<a)=\frac{d}{da}(1-(1-a)^2)=2(1-a)\,.$$

value: the by multiplied function density probability the of integral the is expectation The

$$E(|X-Y|)=\int_0^1 a\cdot 2(1-a)\,da=2\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\,.$$

Simulation

```
0.3333 = piece right of length of Expectation
0.3359 =        piece right of length Average
```

^{S}(The first ace) האס הראשון .40

of expectation the is What appears. ace an until cards of deck well-shuffled a from cards eal
dealt? be must that cards of number the

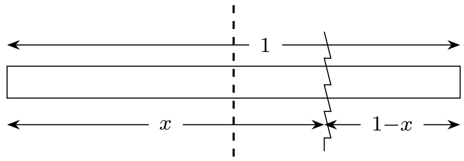
Hint: line. a in out laid be to aces the without cards of deck the Consider

פתרון

The ``pieces.'' $5$ into aces $4$ the by ``broken'' is which 48 length of ``rod'' a form cards The
$.48/5=9.6$ is piece a of length the of expectation the and applies 39 Problem of solution

Simulation

```
9.6000 = ace first of Expectation
9.5805 =        ace first Average
```



pieces two into stick a Breaking : 10 איור

^{S}(The little end of the stick) הקצה הקצר של המקל .42

each. pieces two into broken are 1 length of each rods glass of number large

piece? smaller the of length the of expectation the is What **:1 שאלה**

larger the to piece smaller the of length the of ratio the of expectation the is What **:2 שאלה** piece?

פתרון

probability the is as $1/2$ is rod a of half left the on is break the that probability The **:1 תשובה** the since and break the as side same the on is piece smaller The half. right the on is it that and end the between halfway is position its of expectation the place, random a at occurs break Therefore: middle. the

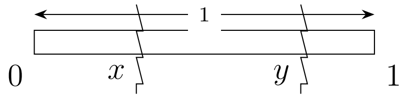
$$E(\text{length of smaller piece}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,.$$

rod the of half right the in occurred break the that assume generality of loss Without **:2 תשובה** the of length the and $(1-x)/x$ is piece larger the to piece smaller the of ratio The .(10 (Figure is: ratio the of expectation The .$(1/2, 1)$ in distributed uniformly is x piece larger

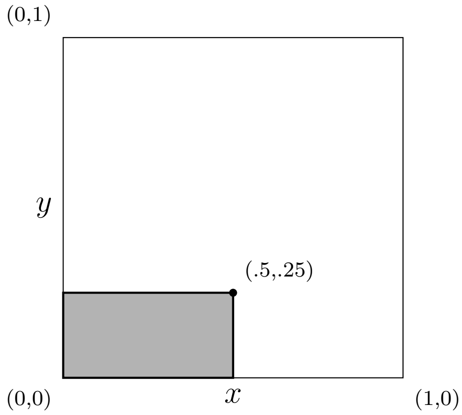
$$\begin{aligned}
E(\text{ratio}) &= \left(\frac{1}{1-(1/2)}\right)\int_{1/2}^{1}\frac{1-x}{x}\,dx \\
&= 2\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{x}-1\right)dx \\
&= 2\left(\ln|x|-x\right)\Big|_{1/2}^{1} = 2\ln 2 - 1 \approx 0.3863\,.
\end{aligned}$$

Simulation

```
0.2500 = smaller of length of Expectation
0.2490 =         smaller of length Average
0.3863 =    smaller/larger of Expectation
0.3845 =           smaller/larger Average
```



איור 11(א) חלוקת מקל לשני חלקים



איור 11(ב) יצוג האורכים במעגל היחידה

43. המוט השבור (The broken bar)[S]

A large number of glass rods of length 1 are broken in two places (Figure איור 11(א)).

שאלה 1: What is the expectaton of the length of the shortest bar?

שאלה 2: What is the expectaton of the length of the longest bar?

Hint: x, y are selected independently in a uniform distribution from $(0, 1)$. Each pair (x, y) can be represented as a point in the unit square $(0, 1) \times (0, 1)$ (Figure איור 11(ב)). What is the probability that $(x, y) < (.5, .25)$?

Hint: For **שאלה 1:** assume that left piece is the shortest one and for **שאלה 2:** assume that the left piece is the longest one.

פתרון

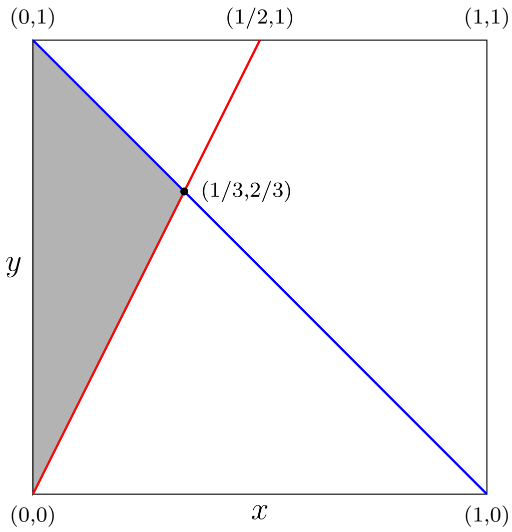
תשובה 1: Without loss of generality assume that the left piece of length x is the shortest. Then $x < y - x$ and $x < 1 - y$, from which we have $2x < y$ and $x + y < 1$.

Figure איור 12(א) shows the lines $y = 2x$ (red) and $y = 1 - x$ (blue). For the inequalities to be true, (x, y) must be in the shaded region left of the two lines. The point of intersection $(1/2, 2/3)$ can be computed by solving the two equations.

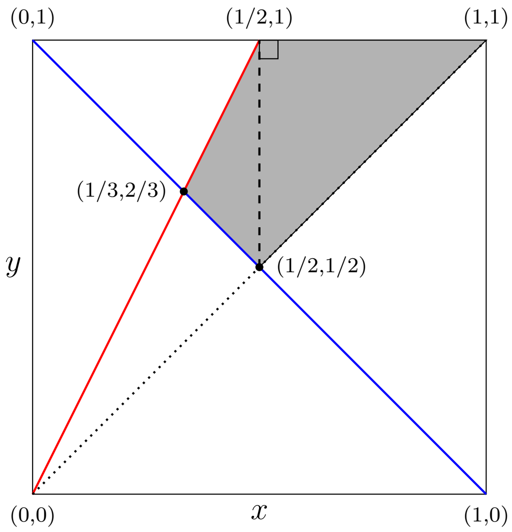
While the values of (x, y) are in the range $(0, 1) \times (0, 1)$, the expectation is computed over the subset of $(0, 1) \times (0, 1)$ denoted by the shaded region of the unit square. Therefore, the expectation must be divided by the area of the shaded region, which is $\frac{1}{2}(\frac{1}{3} \cdot 1) = \frac{1}{6}$.

The expectation of the value of x is:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{1/6} \int_0^{1/3} x[(1-x) - 2x]\, dx \\ &= \int_0^{1/3} (6x - 18x^2)\, dx \\ &= (3x^2 - 6x^3)\Big|_0^{1/3} = \frac{2}{18} \approx 0.1111\,. \end{aligned}$$



איור 12(א) שטח מוצלל עבור המקל הקצר ביותר



איור 12(ב) שטח מוצלל עבור המקל הארוך ביותר

תשובה 2: For the left piece to be the longest, $x > y - x$ and $x > 1 - y$, so (x, y) must lie to the right of $y = 2x$ (red) and to the right of $y = 1 - x$ (blue) (Figure איור 12(ב)). Furthermore, by the assumption that x is to the left of y, (x, y) must lie to the left of $y = x$ (dotted).

For convenience we divide the shaded region into two triangles (dashed line) and compute the expectations separately. The area of the shaded region is the sum of the areas of the triangles $1/24 + 1/8 = 1/6$. Then:

$$
\begin{aligned}
E(x \text{ in left triangle}) &= 6\int_{1/3}^{1/2} x[2x-(1-x)]\,dx \\
&= \int_{1/3}^{1/2} \left(18x^2-6x\right)\,dx \\
&= \left.(6x^3-3x^2)\right|_{1/3}^{1/2} = \frac{1}{9} \\
E(x \text{ in right triangle}) &= 6\int_{1/2}^{1} x[1-x]\,dx \\
&= \int_{1/2}^{1} (6x-6x^2)\,dx \\
&= \left.\left(3x^2-2x^3\right)\right|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2} \\
E(x) &= \frac{1}{9}+\frac{1}{2} = \frac{11}{18} \approx 0.6111\,.
\end{aligned}
$$

The expectation of the length of the middle-sized piece is $1-\frac{2}{18}-\frac{11}{18}=\frac{5}{18}\approx 0.2778$.

Simulation

```
Expectations: shortest = 0.1111, middle = 0.2778, longest = 0.6111
Averages:     shortest = 0.1115, middle = 0.2783, longest = 0.6102
```

.44 לנצח במשחק לא-הוגן (Winning an unfair game)^{D,S}

even an coin a Toss $.1/3 < p < 1/2$ is heads of probability whose coin unfair an given are ou heads. are tosses the of half than more only and if win You $.N = 2n$ times of number

שאלה 1: formula a develop and game the winning of P_N probability the for formula a Develop occurring. tie a of T_N probability the for

שאלה 2: winning. of probability highest the gives that N the for formula a Develop

Hint: $.P_N \geq P_{N+2}$ and $P_{N-2} \leq P_N$ then winning of probability highest the gives tosses N If

פתרון

תשובה 1: $i \in \{n+1, n+2, \ldots, 2n-1, 2n = N\}$ in appear to needs head game the win To distribution: binomial the From tosses.

$$\begin{aligned} P_N &= \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{2n}{i} p^i (1-p)^{2n-i} \\ T_N &= \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n . \end{aligned}$$

תשובה 2: have: must we winning of probability highest the give to $N = 2n$ For

$$P_{2n-2} \leq P_{2n} \quad \text{and} \quad P_{2n} \geq P_{2n+2} .$$

?$P_{2n-2} \neq P_{2n}$ is When

Case 1: After toss $2n-2$ heads has appeared n times and tails $n-2$ times (so you would have won if you stop here), but tails appears in the next two tosses. You now have n heads and n tails, and therefore lose the game. The probability is:

$$\binom{2n-2}{n} p^n (1-p)^{n-2} (1-p)^2 .$$

Case 2: After toss $2n-2$ heads has appeared $n-1$ times and tails $n-1$ times (so you would have lost if you stop here), but heads appears in the next two tosses. You now have $n+1$ heads and $n-1$ tails and therefore win the game. The probability is:

$$\binom{2n-2}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{n-1} p^2 .$$

For $P_{2n-2} \leq P_{2n}$ to hold P_{2n-2} cannot increase while P_{2n} remains the same (Case 1), although P_{2n} can become greater than P_{2n-2} (Case 2). Therefore:

$$\binom{2n-2}{n} p^n (1-p)^{n-2} (1-p)^2 \quad \leq \quad \binom{2n-2}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{n-1} p^2$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}(1-p) &\leq \frac{1}{n-1}p \\
(n-1)(1-p) &\leq np \\
n &\leq \frac{1-p}{1-2p} \\
2n &\leq \frac{1}{1-2p}+1\,.
\end{aligned}
$$

that: true be must it hold to $P_{2n} \geq P_{2n+2}$ for Similarly,

$$
\begin{aligned}
\binom{2n}{n+1}p^{n+1}(1-p)^{n-1}(1-p)^2 &\geq \binom{2n}{n}p^n(1-p)^n p^2 \\
\frac{1}{n+1}(1-p) &\geq \frac{1}{n}p \\
n(1-p) &\geq (n+1)p \\
n &\geq \frac{p}{1-2p} \\
2n &\geq \frac{1}{1-2p}-1\,.
\end{aligned}
$$

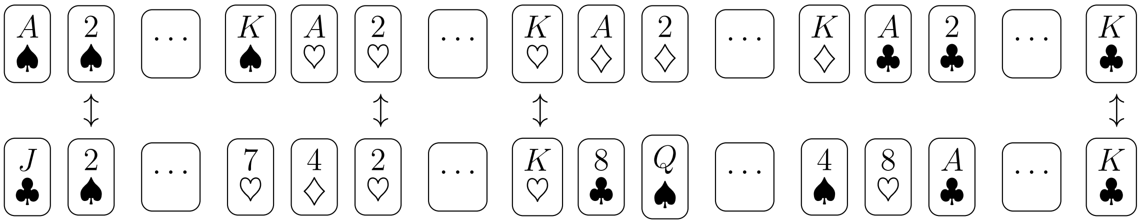
nearest the is winning for probability highest the gives that $N = 2n$ for value the Therefore, then odd is $1/(1-2p)$ if that show to reader the to leave We $.1/(1-2p)$ to integer even $.P_{2n} = P_{2n+2}$

Simulation

```
0.3700 =              probability For
     4 =  played be to games Optimal
0.1372 =   won average ,games 2  For
0.1445 =   won average ,games 4  For
0.1431 =   won average ,games 6  For

0.4000 =              probability For
     6 =  played be to games Optimal
0.1820 =   won average ,games 4  For
0.1845 =   won average ,games 6  For
0.1680 =   won average ,games 8  For

0.4500 =              probability For
    10 =  played be to games Optimal
0.2671 =   won average ,games 8  For
0.2646 =   won average ,games 10 For
0.2640 =   won average ,games 12 For
```



cards of decks two Matching :13 איור

45. ממוצע של מספר ההתאמות (Average number of matches)[S]

in row a in deck second a out lay then and order standard the in row a in cards of deck a out ay matches of number the of expectation the is What .(13 (Figure first the below order random a it? below card the with row first the in card a of

פתרון

with matched being of probability same the has card each because uniform is distribution The Therefore: it. above card the

$$E(\text{number of matches}) = 52 \cdot \frac{1}{52} = 1\,.$$

```
1.00 = matches of Expectation
1.01 =     matches of Average
```

46. הסתברויות של התאמות (Probabilities of matches)[S]

row a in deck second a out lay then and order standard the in row a in cards n of deck a out Lay probability the ,$P(n, r)$ for formula a Develop .(13 (Figure first the below order random a in that Assume below? card the with row first the in card a of matches r exactly be will there that .$0 \le k \le n$ all for given is $P(k, 0)$

פתרון

difference. major a is there but 28 Problem to related be to seems problem this glance first At not. are they here whereas independent, are coins counterfeit of boxes the from drawings The probability the ,(1/n probability (with card first the on occurs match first the if example, For .$1/(n-1)$ is matches card second the that

is: match cards r given any that probability The

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{n+r-1}\,. \tag{28}$$

probability the ,$P(n-r,0)$ by multiplied be must 28 Equation matches r exactly obtain To choosing of ways $\binom{n}{r}$ are there Finally, cards. $n-r$ remaining the in matches no are there that Therefore: matches. r the

$$
\begin{aligned}
P(n,r) &= \binom{n}{r}\frac{1}{n(n-1)(n+r-1)}P(n-r,0) \\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{1}{n!/(n-r)!}P(n-r,0) \\
&= \frac{1}{r!}P(n-r,0)\,,
\end{aligned}
$$

given. is $P(k,0)$ since problem the solves which

:$P(n,r)$ for limit a and formula closed a develops Mosteller

$$
P(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} \tag{29}
$$

$$
\lim_{n-r\to\infty} P(n,k) \approx \frac{1}{k!}e^{-1}\,. \tag{30}
$$

Simulation

.30 Equation from computed probability the and cards $n=52$ for run was simulation The

```
0.3679 = matches 1 of Probability
0.3710 =     matches 1 Proportion
0.1839 = matches 2 of Probability
0.1828 =     matches 2 Proportion
0.0613 = matches 3 of Probability
0.0569 =     matches 3 Proportion
0.0153 = matches 4 of Probability
0.0168 =     matches 4 Proportion
```

47. לבחור את המוהר הגדול ביותר (Choosing the largest dowry)^{D,S}

each of face the on written integer positive a is There down. face cards n of sequence a lace and one-by-one over cards the Turn distribution. their to as knowledge no have you but card number. largest the is it that declare can you card each over turning After numbers. the at look of sequence the let example, For lose. you otherwise game, the win you correct are you If card. third the choose you if only win You .$(47, 23, 55, 4)$ be cards

the select and cards $r-1$ first the reject r fixed some for strategy: following the Consider cards. $r-1$ the all than greater is number whose card first

שאלה 1: For $n = 4$ and $r = 3$ check all permutations to determine how many games you will win.

שאלה 2: Develop a formula for the probability of a win for arbitrary n, r.

שאלה 3: Find an approximation for the probability when $n, r \to \infty$.

Hint: Given r where must the largest number m and the numbers less or equal to m be?

פתרון

תשובה 1: To simplify notation we write the rank of the numbers $1, 2, 3, 4$, although the actual numbers are not known, say they are $4, 23, 47, 55$. If you uncover cards $1, 2, 3$ $(4, 23, 47)$ you do not know whether to accept 47 or to reject it and select the last card.

There are 24 permutations of the four numbers. By the strategy you select either the third card or the fourth card, so you lose if the permutation has 4 in the first position. What about the permutation $(1, 2, 3, 4)$? You ignore $1, 2$ and select 3 since it greater than $1, 2$ but this is not the largest card so you lose. What about the permutation $(1, 3, 2, 4)$? Again, $1, 3$ are ignored by the strategy, but 2 is also rejected because it is not larger than $1, 3$. Now you select 4 and win. Carry out this reasoning for all the permutations and check that permutations with boxed 4s are wins:

1 2	3 4	1 2	$\boxed{4}$ 3	1 3	2 $\boxed{4}$	1 3	$\boxed{4}$ 2	1 4	2 3	1 4	3 2
2 1	3 4	2 1	$\boxed{4}$ 3	2 3	1 $\boxed{4}$	2 3	$\boxed{4}$ 1	2 4	1 3	2 4	3 1
3 1	2 $\boxed{4}$	3 1	$\boxed{4}$ 2	3 2	1 $\boxed{4}$	3 2	$\boxed{4}$ 1	3 4	2 1	3 4	2 1
4 1	2 3	4 1	3 2	4 2	1 3	4 2	3 1	4 3	1 2	4 3	2 1

The probability of winning is $10/24$.

תשובה 2: If the largest number is in one of the positions $1, \ldots, r-1$ you lose. Therefore, in order to win the largest number must be in the mth position for $r \leq m \leq n$:

$$1 \quad 2 \quad \cdots \quad r-2 \quad r-1 \quad \overbrace{r \quad r+1 \quad \cdots \quad m-1 \quad m \quad m+1 \quad \cdots \quad n}^{\text{largest number must be here}}.$$

By the strategy you reject the first $r-1$ cards. You will choose position m only if all the numbers in $(r, \ldots, m-1)$ are less than all the numbers in $(1, \ldots, r)$. In other words, the largest card in the entire sequence $(1, \ldots, m-1)$, the sequence up until m, is not in the second part of the sequence $(r, \ldots m-1)$ but in the first part $(1, \ldots, r-1)$. The probability is:

$$P(\text{largest card in } (1, \ldots, m-1) \text{ is in } (1, \ldots, r-1)) = \frac{r-1}{m-1}.$$

Since the probability that the largest card is at m is $1/n$:

$$P(\text{win}) = \sum_{m=r}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{r-1}{m-1} = \frac{r-1}{n} \sum_{m=r}^{n} \frac{1}{m-1}. \tag{31}$$

$.P(\text{win}) = 5/12 = 10/24$,$n = 4, r = 3$ For

first the choosing when winning of probability the but $r = 1$ for defined not is 31 Equation example. the in shown as winning of probability higher a have will r larger A .$1/n$ is number

תשובה 3: Rewrite Equation 31 as:

$$P(\text{win}) = \frac{r-1}{n}\left(\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m-1} - \sum_{m=2}^{r-1}\frac{1}{m-1}\right). \tag{32}$$

by: approximated be can 32 Equation n, r large For

$$P(\text{win}) = \frac{r}{n}(\ln n - \ln r) = \frac{r}{n}\ln\frac{n}{r} = -\frac{r}{n}\ln\frac{r}{n}.$$

derivatives: taking by maximum the find and $x = r/n$ Denote

$$\begin{aligned}
(-x\ln x)' &= -x\cdot\frac{1}{x} + (-1)\ln x = 0\\
\ln x &= -1\\
x &= 1/e\,.
\end{aligned}$$

.$r \approx n/e$ choose winning of probability that maximize To

: $100/e$ near r of values and cards 100 with run was simulation The **Simulation**

```
   36: = r before cards Reject
0.3674 =   wins of Probability
0.3641 =        wins Proportion
   37: = r before cards Reject
0.3678 =   wins of Probability
0.3759 =        wins Proportion
   38: = r before cards Reject
0.3679 =   wins of Probability
0.3548 =        wins Proportion
   30: = r before cards Reject
0.3590 =   wins of Probability
0.3601 =        wins Proportion
```

48. בחירת המספר האקראי הגדול ביותר (Choosing the largest random number)^{D,S}

uniform with number real a is card each of face the On down. face cards n of sequence a Place After numbers. the at look and one-by-one over cards the Turn .$0.0 \le x < 1.0$ in distribution win you correct are you If number. largest the is it that declare can you card each over turning lose. you otherwise game, the

cards $r-1$ first the reject you that such r value a upon decide : 37 Problem of strategy the Use
cards. $r-1$ first the in value largest the than larger is that card first the select then and

card the reject to decide you which below value the is value, indifference the ,d **Definition:**
card. the select to decide you which above and

winning. of probability the compute and $n=1$ for d Compute **שאלה 1:**

winning. of probability the compute and $n=2$ for d Compute **שאלה 1:**

winning! of probability the compute to try not Do .$n=3$ for d Compute **שאלה 3:**

first the uncovering so $100, 50, 20$ or $100, 200, 300$ be could values the 37 Problem In **Note:**
number gives no information about the other numbers. In this problem, since the distribution ...

פתרון

cards. three the of values the be v_1, v_2, v_3 Let

There cards. other no are there since card first the select to but choice no have You **תשובה 1:**
.$P(win)=1$ number ``largest'' the is v_1 Since value. indifference no is

card second the that probability the is which $P(\text{win})=v_1$ card first the select you If **תשובה 2:**
that probability the is which ,$P(\text{win})=1-v_1$ card, first the reject you If value. smaller a has
$v_1>0.5$ if and $1-v_1>0.5$ because card second the select $v_1<0.5$ if Therefore, .$v_2>v_1$
.$d=0.5$ that follows It .$1-v_1<0.5$ because card first the select

winning: of probability the for formula the is Here

$$P(\text{win with two cards}) = p(\text{win}\,|\,v_1<0.5)\,p(v_1<0.5)+p(\text{win}\,|\,v_1>0.5)\,p(v_1>0.5)\,.$$

By ?$p(\text{win}\,|\,v_1<0.5)$ about What distribution. uniform by immediate is $p(v_1<0.5)=0.5$
uniformly is v_1 Since .$v_1<v_2<0.5$ if win also you but ,$0.5<v_2<1$ if win you strategy the
:$(0, 0.5)$ in distributed

$$p(\text{win}\,|\,v_1<0.5)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\,.$$

gives: together this Putting .$v_1>0.5$ for holds computation similar A

$$P(\text{win with two cards}) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\,.$$

תשובה 3:

smaller be must cards third and second the because $P(\text{win})=v_1^2$ card first the select you If
first. the than

:$v_2>v_1$ because second the select and card first the reject you If

- .$v_3<v_1$ and $v_2>v_1$ if $P(\text{win})=(1-v_1)v_1$

$.v_3 > v_1$ and $v_2 < v_1$ if $P(\text{win}) = v_1(1 - v_1)$ •

order: the on depends winning since $,v_3 > v_1$ and $v_2 > v_1$ if $P(\text{win}) = \frac{1}{2}(1 - v_1)^2$ •
loses. $(0.55, 0.65, 0.75)$ and wins $(0.55, 0.75, 0.65)$

first the selecting by winning of probability the that such value the is d value indifference The card: first the rejecting by winning of probability the equals card

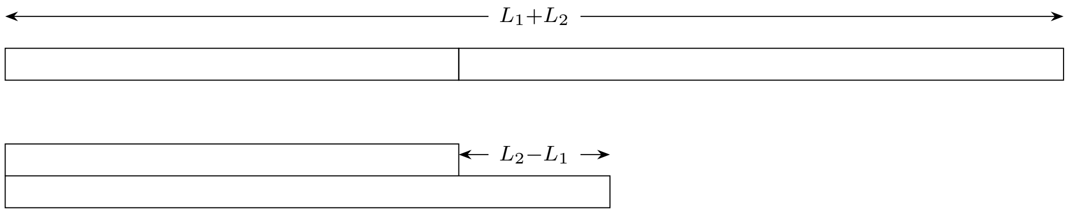
$$\begin{aligned} d^2 &= 2d(1-d) + \frac{1}{2}(1-d)^2 \\ 5d^2 - 2d - 1 &= 0 \\ d &= \frac{1+\sqrt{6}}{5} \approx 0.6899\,. \end{aligned}$$

$:n = 3$ for that show [55 page ,3] Mosteller and Gilbert

$$P(\text{win}) = \frac{1}{3} + \frac{d}{2} + \frac{d^2}{1} - \frac{3d^3}{2} \approx 0.6617\,.$$

Simulation:

```
                       cards: 3  For
0.6000 = value Indifference
0.6693 = win of Probability
0.6628 = wins of Proportion
0.6899 = value Indifference
0.6617 = win of Probability
0.6711 = wins of Proportion
0.7200 = value Indifference
0.6519 = win of Probability
0.6473 = wins of Proportion
```



rods two of lengths the Measuring : 14 איור

49. להכפיל את הדיוק (Doubling you accuracy)

is error possible whose instrument measuring a and $L_1 < L_2$ lengths of rods two given are ou can rods two the of lengths The .σ^2 variance and 0 mean with distribution normal a by given method? accurate more a there Is separately. one each measuring by measured be

פתרון

and side-by-side rods the place then and $L_s = L_1 + L_2$ measure and end-to-end rods the Place :L_1, L_2 Compute .(14 (Figure $L_d = L_2 - L_1$ measure

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(L_s - L_d) = \tfrac{1}{2}((L_1 + L_2) - (L_2 - L_1)) &= L_1 \\ \tfrac{1}{2}(L_s + L_d) = \tfrac{1}{2}((L_1 + L_2) + (L_2 - L_1)) &= L_2\,. \end{aligned}$$

are: results the in errors the so e_s, e_d are measurements the in errors The

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}((L_s + e_s) - (L_d + e_d)) &= L_1 + \tfrac{1}{2}(e_s - e_d) \\ \tfrac{1}{2}((L_s + e_s) + (L_d + e_d)) &= L_2 + \tfrac{1}{2}(e_s + e_d)\,. \end{aligned}$$

measurements these of errors the of mean the ,0 is instrument measurement the of mean the Since [3]value: previous its half to reduced is variance The zero. also is

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left(\tfrac{1}{2}\left(e_s - e_d\right)\right) &= \tfrac{1}{4}(\sigma^2 + (-1)^2\sigma^2) = \tfrac{1}{2}\sigma^2 \\ \mathrm{Var}\left(\tfrac{1}{2}(e_s + e_d)\right) &= \tfrac{1}{4}(\sigma^2 + \sigma^2) = \tfrac{1}{2}\sigma^2\,. \end{aligned}$$

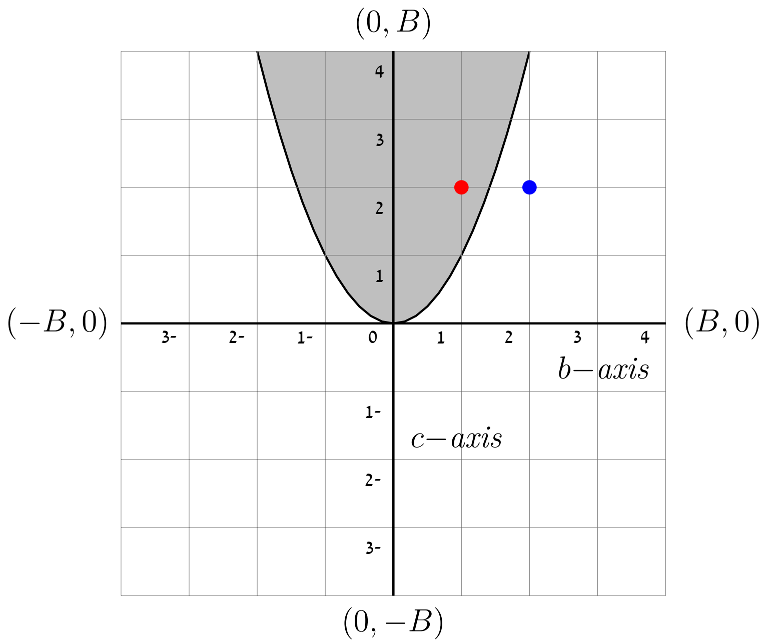
50. משוואות ריבועיות אקראיות (Random quadratic equations)^S

.$B \geq 1$ for $[-B, B] \times [-B, B]$ on defined $x^2 + 2bx + c = 0$ equation quadratic the Consider

שאלה 1: real? are roots the that probability the is What

שאלה 2: real? are roots the that probability the is what $B \to \infty$ As

zero. is covariance the so independent are measurements the that fact the use We[3]



complex are $c = b^2$ of roots the area shaded the in (b, c) For **:15 איור**

פתרון

תשובה 1: The roots will be real if the discriminant is non-negative $4b^2 - 4c \geq 0$. Figure 15 shows a plot of the parabola $c = b^2$ where the complex roots are within the shaded area. For example, $(b, c) = (1, 2)$, $x^2 + 2x + 2$ has complex roots (red dot) while for $(b, c) = (2, 2)$, $x^2 + 4x + 2$ has real roots (blue dot).

integration: by computed be can area shaded The

$$\int_{-\sqrt{B}}^{\sqrt{B}} (B - b^2)\, db = Bb - \frac{b^3}{3}\bigg|_{-\sqrt{B}}^{\sqrt{B}} = \left(B^{3/2} - \frac{B^{3/2}}{3}\right) - \left(-B^{3/2} + \frac{B^{3/2}}{3}\right) = \frac{4}{3}B^{3/2}\,.$$

so: $4B^2$ is $[-B, B] \times [-B, B]$ range the of area total The

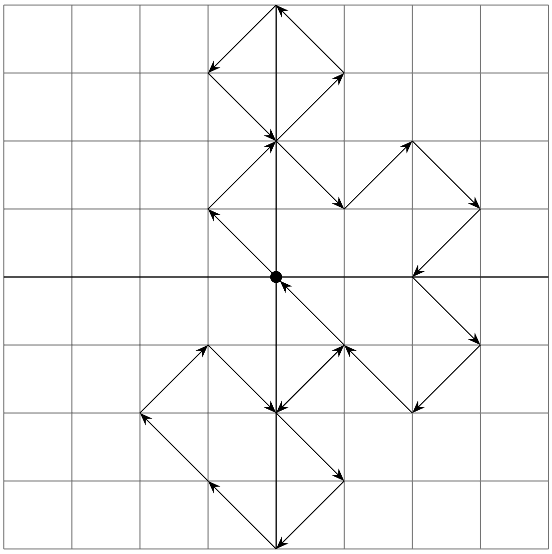
$$\begin{aligned} P(\text{complex roots}) &= \frac{\frac{4}{3}B^{3/2}}{4B^2} = \frac{1}{3\sqrt{B}} \\ P(\text{real roots}) &= 1 - \frac{1}{3\sqrt{B}}\,. \end{aligned}$$

תשובה 2:

$$\lim_{B \to \infty} P(\text{real roots}) = \lim_{B \to \infty} \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{B}}\right) = 1\,.$$

Simulation

`4: = B For`



איור 16: walk random Two-dimensional

```
0.8333 = roots real of Probability
0.8271 =     roots real Proportion
                          16: = B For
0.9167 = roots real of Probability
0.9205 =     roots real Proportion
                          64: = B For
0.9583 = roots real of Probability
0.9582 =     roots real Proportion
```

51. הילוך מקרי דו-ממדי (Two-dimensional random walk)^S

moves particle The system. coordinate two-dimensional a of origin the at placed is particle probabilities with -axis$y$ the down or up and $1/2$ probabilities with -axis$x$ the on right or left origin. the to returning and at starting steps 22 of walk random a shows 16 Figure .$1/2$

שאלה 1: moves? 2 in origin the to returning of probability the is What

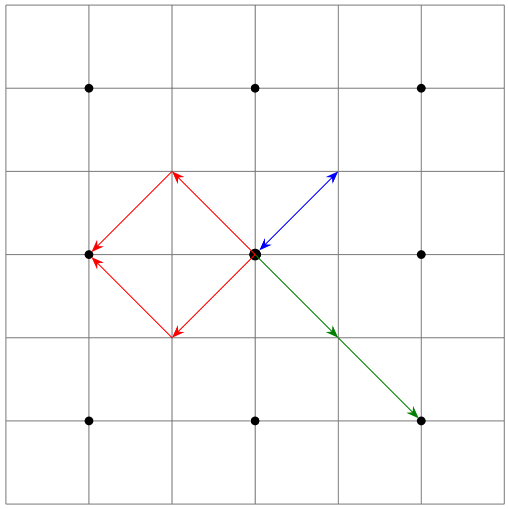
שאלה 2: origin? the to times) more or (one returns particle the that probability the is What

שאלה 3: .n large for probability the of estimate an obtain to approximation Stirling's Use

פתרון

תשובה 1: moves: two after particle the of positions possible the show 17 Figure in dots The

- same the in moves two taking by $(\pm 2, \pm 2)$ to move to how shows path green The .$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ is probability The direction.



איור 17: Two moves of the random walk

- The red path shows how to move to $(\pm 2, 0)$ or $(0, \pm 2)$. There are two possible paths for each one so the probability is $\frac{2}{16} = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$.
- The blue path shows how to move to $(\pm 1, \pm 1)$ and back to the origin. The probability is $1/16$. Since there are four paths that return to the origin the probability is $\frac{4}{16}$.

The blue paths are the only ones that return to the origin so:

$$P(\text{return to origin in two moves}) = \frac{4}{16}\,.$$

תשובה 3: The choices of direction for x and y are independent so for $2n$ moves:

$$P_{2n}(\text{return to origin}) = P_{2n}(\text{return to } x=0)\, P_{2n}(\text{return to } y=0)\,. \tag{33}$$

The particle will return to the origin if and only if for both axes the number of $+1$ moves equals the number of -1 moves. There are $\binom{2n}{n}$ ways to arrange $+1$s and -1s so:

$$P_{2n}(\text{return to } x=0) = P_{2n}(\text{return to } y=0) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{34}$$

$$P_{2n}(\text{return to origin}) = \left[\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^2 \tag{35}$$

$$P(\text{return to origin}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(\text{return to origin}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^2\,. \tag{36}$$

תשובה 3: By Stirling's approximation $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$:

$$P_{2n}(\text{return to origin}) = \left[\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^2 \\
&\approx \left(\frac{1}{2}\right)^{4n}\frac{(\sqrt{2\pi\cdot 2n})^2\,(2n/e)^{4n}}{(\sqrt{2\pi n})^4\,(n/e)^{4n}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{4n}\frac{4\pi n}{4\pi^2 n^2}\cdot\frac{(n/e)^{4n}\cdot 2^{4n}}{(n/e)^{4n}} \\
&= \frac{1}{\pi n} \\
P(\text{return to origin}) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,,
\end{aligned}
$$

which is the harmonic series that diverges. This means that with probability 1 the particle returns to the origin.

Simulation The simulation was run one million times instead of ten thousand times but still there is no certainty of returning to the origin:

```
Proportion returned to origin      = 0.8700
```

52. הילוך מקרי תלת-ממדי (Three-dimensional random walk)^{D,S}

A particle is placed at the origin of a three-dimensional coordinate system. The particle moves left or right on the x-axis with probabilities $1/2$ and up or down on the y-axis with probabilities $1/2$ and in or out on the z-axis with probabilities $1/2$.

שאלה 1: What is the expectation of the number of times that the particle returns to the origin?

Hint: Compute the probability and then use an indicator variable.

שאלה 2: What is the probability that the particle will return to the origin (at least once)?

Hint: Use the technique from Problem 4.

פתרון

P_{2n}, probability of returning to the origin after $2n$ steps, is given by the analogue of Equation 33:

$$P_{2n} = P_{2n}(\text{return to } x=0)\,P_{2n}(\text{return to } y=0\,P_{2n}(\text{return to } z=0)\,.$$

P_r, the probability of returning to the origin one or more times, is given by the analogue of Equation 36:

$$P_r = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^3\,.$$

[4]approximation: Stirling's From

$$
\begin{aligned}
P_{2n} &= \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^3 \\
&\approx \left(\frac{1}{2}\right)^{6n}\frac{(\sqrt{2\pi\cdot 2n})^3\,(2n/e)^{6n}}{(\sqrt{2\pi n})^6\,(n/e)^{6n}} \\
&= \frac{(4\pi n)^{3/2}}{(2\pi n)^3} = \frac{1}{(\pi n)^{3/2}} \\
P_r &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi n)^{3/2}} \approx 0.3772\,.
\end{aligned}
$$

: k step on origin the to return a for variable indicator the be I_k Let

$$
I_k = \begin{cases} 1, & \text{if particle returns to origin on step } k \\ 0, & \text{if particle does not returns to origin on step } k\,. \end{cases} \tag{37}
$$

Then:

$$
E(\text{number of returns to the origin}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}\, I_{2n} = P_r \approx 0.3772\,,
$$

probability. the to equal is returns of number the of expectation the so

From once. least at origin the to returns particle the that probability the be P_1 Let **שאלה 2:** the where one first the until trials of number the of expectation the that know we 4 Problem number the of expectation the Therefore, $.1/(1-P_1)$ is origin the to return not does particle can particle the because less, one is origin the to return does particle the which for trials of [5]not. does it finally until times many origin the to return

then: $,E_r = E(\text{number of returns to the origin})$ Let

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{1}{1-P_1} - 1 \\
P_1 &= \frac{E_r}{1+E_r}\,.
\end{aligned}
$$

Then: so: $E_r \approx 0.3772$ that computed we **תשובה 1:** In

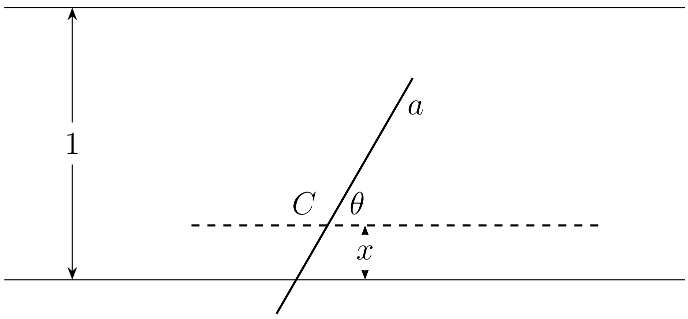
$$
P_1 \approx 1 - \frac{1}{1+0.3772} \approx 0.2739\,.
$$

Simulation

```
0.3772 = origin reaching of Expectation
0.3630 =   origin reached times Average
0.2739 = origin reaching of Probability
0.2790 =      origin reached Proportion
```

obtain to terms 500 used program My .0.315 obtained and computation his in terms 18 used Mosteller[4] .0.3772

.[5] clarification for Montgomery Aaron thank to like would I follow. to easy not is presentation Mosteller's[5]



needle Buffon's : איור 18

53. המחט של Buffon (Buffon's needle)^{D,S}

the Throw apart. 1 lines parallel with ruled surface a and $a \leq 1$ length of needle a onsider [6]line? a crosses needle the that probability the is What surface. the onto needle

center the of position the ,x :(18 (Figure variables random independent two are There **Hint:** and ,$[0,1]$ range the in distributed uniformly is which line closest the to relative needle the of distributed uniformly is which lines parallel the to relative needle the by formed angle the ,θ .$[0,\pi/2]$ range the in

פתרון 1

indicator the define and line a crosses a length of needle a that probability the be $p(a)$ Let variable:

$$I\text{crosses} = \begin{cases} 1, & \text{if needle of length } a \text{ crosses a line} \\ 0, & \text{if needle of length } a \text{ does not cross a line}\,. \end{cases}$$

Then:

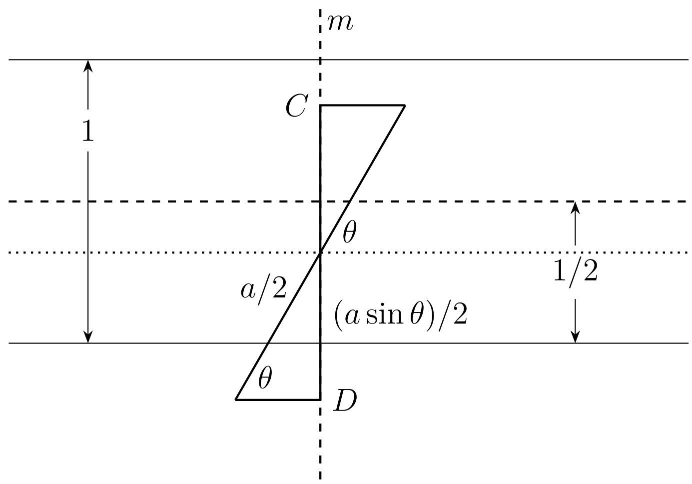
$$E(I\text{crosses}) = 1 \cdot p(a) + 0 \cdot (1 - p(a)) = p(a)\,, \tag{38}$$

expectation. the computing by computed be can probability the and

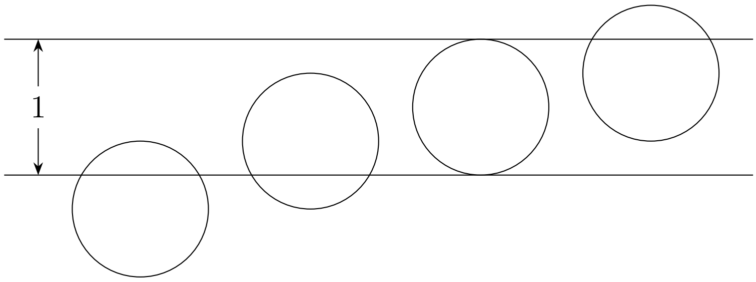
needle the of center the through passes that lines parallel the to perpendicular line a be m Let give to m onto needle the Project line. parallel a and needle the between angle the be θ let and is: line a cross will needle the that probability The .$\overline{CD}$ segment line the

$$P(\text{needle of length } a,\ \text{angle } \theta \text{ crosses line}) = \frac{\overline{CD}/2}{1/2} = \frac{(a/2)\sin\theta}{1/2} = a\sin\theta\,. \tag{39}$$

the ignore We .1 as lines parallel the between distance the specifying by simplified been has problem The[6] these of probability the since lines two touches just or line the along completely lies needle the that possibility zero. is events



problem needle Buffon's solving for triangle Right :19 איור



circles with needle Buffon's Solving :20 איור

angles: possible over integrating by given is crossed lines of number the of expectation The

$$E(\text{lines crossed}) = \frac{1}{(\pi/2)-0}\int_0^{\pi/2} a\sin\theta\, d\theta = \frac{2}{\pi}\cdot a(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2a}{\pi}\,. \tag{40}$$

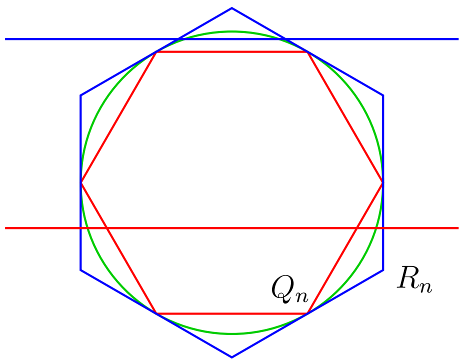
.[26 Chapter ,1] from taken is solution This **2 פתרון**

a Consider $.x$ line a by crossed lines parallel of number the of expectation the be $E(x)$ Let the onto thrown is circle the If $.\pi$ circumference and 1 diameter of C circle a into formed line is: that ,(20 (Figure lines the with intersections two exactly have will it surface

$$E(C) = 2\,. \tag{41}$$

R_n polygon regular a circumscribe and (green) c within (red) Q_n polygon regular a Inscribe any and circle the cross also must crosses Q_n that (red) line Any .(21 (Figure c around (blue) Therefore: $.R_n$ cross also must circle the crosses that (blue) line

$$E(Q_n) \le E(C) \le E(R_n)\,. \tag{42}$$



circle a approximate Polygons : 21 איור

of linearity the By respectively. ,Q_n, R_n of sides the of lengths the of sums the be a_Q, a_R Let expectation:

$$E(Q_n) = \sum_{i=1}^{n} E(\text{segments of } a_Q) = a_Q E(1) \tag{43}$$

$$E(R_n) = \sum_{i=1}^{n} E(\text{segments of } a_R) = a_R E(1)\,. \tag{44}$$

so: circle the approximate polygons both $n \to \infty$ As

$$\lim_{n\to\infty} a_Q = \lim_{n\to\infty} a_R = \pi\,, \tag{45}$$

have: we 45--41 Equations From circle. the of circumference the

$$\lim_{n\to\infty} E(Q_n) = E(C) = \lim_{n\to\infty} E(R_n)$$

$$E(C) = aE(1) = \pi E(1) = 2$$

$$E(1) = \frac{2}{\pi}$$

$$E(a) = aE(1) = \frac{2a}{\pi}\,.$$

Simulation

obtain to used be can table!) a on needles throwing actually (or simulation the $\pi = 2a/E$ Since .π of approximation an

```
                  0.2: = length For
0.1273 = crossings of Expectation
0.1308 =            crossings Average
3.0581 =    pi for value Empirical
```

```
For length = 0.5:
Expectation of crossings = 0.3183
Average crossings        = 0.3227
Empirical value for pi   = 3.0989

For length = 1.0:
Expectation of crossings = 0.6366
Average crossings        = 0.6333
Empirical value for pi   = 3.1581
```

54. המחט של Buffon עם רשת אופקי ואנכי

(Buffon's needle with horizontal and vertical rulings)

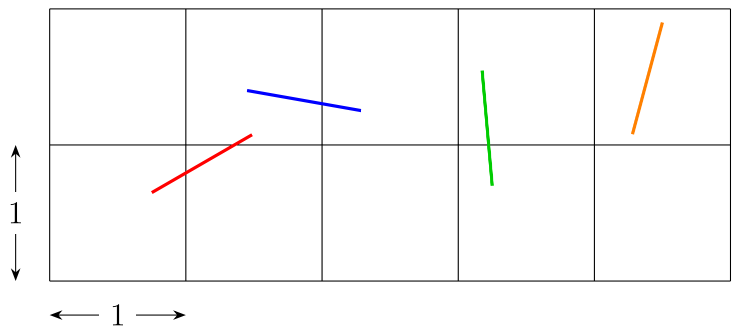
Solve Buffon's needle problem for a surface that is covered by a grid with squares of size 1×1. A needle can cross a vertical line (green), a horizontal line (blue), both (red) or neither (orange) (Figure 22).

Hint: Are the numbers of crossings of the horizontal and vertical lines independent?

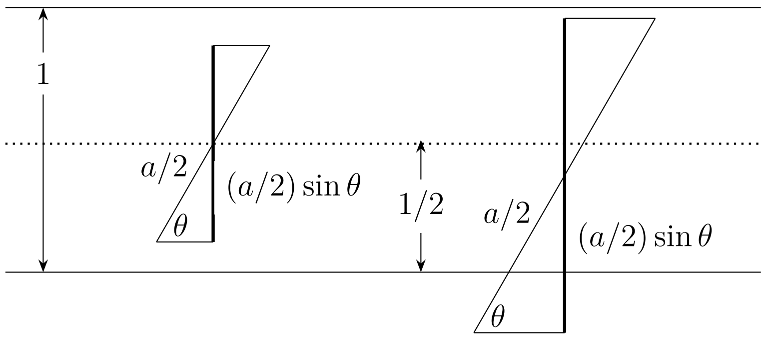
פתרון

The numbers of crossings of the horizontal and vertical lines are independent and expectation is linear so:

$$\begin{aligned} E(\text{lines crossed by } a) &= E(\text{vertical lines crossed by } a + \text{horizontal lines crossed by } a) \\ &= E(\text{vertical lines crossed by } a) + E(\text{horizontal lines crossed by } a) \\ &= \frac{2a}{\pi} + \frac{2a}{\pi} = \frac{4a}{\pi} . \end{aligned}$$



איור 22: Buffon's needle with horizonal and vertical crossings



איור 23: Long needles

55. מחטים ארוכים (Long needles)^{D,S}

Let the length of the needle in Buffon's problem be $a > 1$.

שאלה 1: What is the expectation of the number of crossings?

שאלה 2: What is the probability that there is at least one crossing?

Hint: For what angles θ is the probability a crossing 1?

פתרון

תשובה 1: Break the needle into pieces of lengths $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $a_i < 1$, such that $\sum_{i=1}^{n} a_i = a$. By the linearity of expectation and the solution of Problem 53:

$$E(a) = \sum_{i=1}^{n} E(a_i) = \frac{2a}{\pi} .$$

תשובה 2: This solution is based on [12] and [1, Chapter 26].

By Equation 39 the probability that a needle will cross a line is $a\sin\theta$ if $a\sin\theta \le 1$, that is, if $0 \le \theta \le \sin^{-1}(1/a)$. However, if $a\sin\theta > 1$ then the probability is 1 (Figure 23). Let us generalize Equation 40 for arbitrary $a > 0$. The integral is divided into two, one for $\theta < \sin^{-1}(1/a)$) and one for $\theta > \sin^{-1}(1/a)$):

$$\begin{aligned}
E(a) &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\sin^{-1}(1/a)} a\sin\theta\, d\theta + \int_{\sin^{-1}(1/a)}^{\pi/2} 1\, d\theta\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(a(-\cos\theta)\Big|_0^{\sin^{-1}(1/a)} + \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1/a)\right)\right) \\
&= 1 + \frac{2}{\pi}\left(a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}\right) - \sin^{-1}(1/a)\right) .
\end{aligned}$$

Simulation

```
                   1.5: = length For
0.7786 = crossings of Expectation
0.7780 =         crossings Average
                   2.0: = length For
0.8372 = crossings of Expectation
0.8383 =         crossings Average
                   3.0: = length For
0.8929 = crossings of Expectation
0.8897 =         crossings Average
```

(Molina's urns) Molina הכד של .56

U_2 while blacks b_1 and balls white w_1 has U_1 each. balls m containing urns two be U_1, U_2 et Find urn. each from replacement with drawn are balls n blacks. b_2 and balls white w_2 has that: such w_1, b_1, w_2, b_2

$$p(\text{balls drawn from } U_1 \text{ are all white}) = p(\text{balls drawn from } U_2 \text{ are all white or all black})\,.$$

שאלה 1: $.n = 2$ for w_1, b_1, w_2, b_2 of values Find

שאלה 2: $.n \geq 3$ for solved be cannot problem the why Explain

פתרון

תשובה 1: is: solved be must that equation The

$$\begin{aligned}\left(\frac{w_1}{m}\right)^2 &= \left(\frac{w_2}{m}\right)^2 + \left(\frac{b_2}{m}\right)^2\\ w_1^2 &= w_2^2 + b_2^2\,.\end{aligned}$$

$.w_1 = 10, b_1 = 4, w_2 = 6, b_2 = 8$ is solution One

תשובה 2: solutions no are there Wiles, Andrew by 1995 in proved Theorem, Last Fermat's By $.n \geq 3$ for $w_1^n = w_2^n + b_2^n$ to

סקירה על הסתברות

the using given is concept each of example An probability. of concepts reviews section This dice. six-sided fair throwing of activity

a has that action an being intention the concept, primitive undefined an is This **Experiment** [7]experiment. an is die a Throwing trial. a called also is experiment An result. possible

.4 is outcome one die a throw you If experiment. an of result The **Outcome**

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ set The experiment. an of outcomes possible all of set The **space Sample** die. a throwing of outcomes the of space sample the is

die a of event the is $e = \{2, 4, 6\} \subseteq S$ subset The space. sample the of subset A **Event** number. even an showing

sample the be T Let numbers. (real) to space sample a from function A **variable Random** dice: two throwing of space

$$T = \{(a, b)|a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} .$$

the gives which $X : T \mapsto \{2, 3, \ldots, 11, 12\}$ function the as X variable random the Define dice: two the on numbers the of sum

$$X((a, b)) = a + b . \tag{46}$$

normal their on take concepts these sets are events Since **complement intersection, Union,** Then: .$e_2 = \{1, 2, 3\}$ and $e_1 = \{2, 4, 6\}$ Let meaning. set-theoretical

$$e_1 \cup E_2 = \{1, 2, 3, 4, 6\} \quad e_1 \cap e_2 = \{2\} \quad \overline{e_1} = S \setminus e_1 = \{1, 3, 5\} .$$

space. sample the in outcomes three first the among numbers even of set the is intersection The space. sample the in outcomes odd of set the is complement The

the is intersection their if exclusive mutually are events more or Two **exclusive Mutually** is, that ,$e_1 \cap e_2 = \emptyset$ since exclusive mutually are $e_2 = \{1, 3, 5\}$ and $e_1 = \{2, 4, 6\}$ set. empty there are no outcomes which are both even and odd.

let and event an be e Let event. an of frequency relative limiting the is Probability **Probability** probability the ,$P(e)$ Then event. the of repetitions n in occurs e that times of number the be n_e is: ,e event the of

$$P(e) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_e}{n} .$$

The exists. limit the that know actually don't we because definition good very a not is This without probability define to want we but event'' an of ``repetitions on depends also definition events. of sequence specific a to reference

---

dice. noun plural familiar more the of singular the is Die[7]

Modern probability theory is based on a set of three axioms, but we won't develop this theory, though two of the axioms are clearly seen to be fundamental:

$$\begin{aligned} P(e) &\geq 0 \\ P(S) &= 1\,. \end{aligned}$$

Any event either occurs with some non-zero probability or it doesn't occur, and the outcome space is by definition all the possible outcomes.

The laws of large numbers ensure that our intuitive concept of probability as relative frequency is very similar to what happens when an event is repeated many times.

Uniformly distributed If all outcomes in the sample space have equal probability (are equally likely to occur), the probability is said to be uniformly distributed. If S is finite and the probability is uniformly distributed then:

$$P(e) = \frac{|e|}{|S|}\,.$$

For example, if you throw a fair die the probability of the outcomes is uniformly distributed, so for $e = \{2,4,6\}$:

$$P(e) = \frac{|e|}{|S|} = \frac{|\{2,4,6\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \frac{1}{2}\,.$$

Conditional probability Let e_1, e_2 be events. $P(e_1|e_2)$, the conditional probability that e_1 occurs given that e_2 occurs, is given by:

$$P(e_1|e_2) = \frac{P(e_1 \cap e_2)}{P(e_2)}\,.$$

Let $e_1 = \{1,2,3\}$ be the event that a die shows a number less than or equal to 3 and let $e_2 = \{2,4,6\}$ be the event that the die shows an even number. Then:

$$P(e_2|e_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(e_1)} = \frac{P(\{2\})}{P(\{2,4,6\})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}\,.$$

This makes sense since if you know that a number less than or equal to 3 is thrown, only one out of the three outcomes is an even number.

Independence Two events are independent if the probability of their intersection is the product of their individual probabilities:

$$P(e_1 \cap e_2) = P(e_1)\,P(e_2)\,.$$

In terms of conditional probability:

$$P(e_1|e_2) = \frac{P(e_1) \cap P(e_2)}{P(e_2)} = \frac{P(e_1)\,P(e_2)}{P(e_2)} = P(e_1)\,.$$

as information no you gives it e_2 of probability the know you if ,e_1, e_2 events independent For of all of probability the so independent are die fair a of throws Three .e_1 of probability the to .$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ is number even an showing them

Then: values. of set a be $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ Let **Average**

$$Average(S) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\,.$$

set. the of element an be not may average the but values of set a over computed is average An per children of number average the children, 3426 and town a in families 1000 are there If and times six die a throw you If children. 3.426 has family no clearly although 3.426 is family is: average The .$\{2, 2, 4, 4, 5, 6\}$ numbers the receive

$$\frac{2+2+4+4+5+6}{6} = \frac{23}{6} \approx 3.8\,,$$

set. the in not value a again,

outcome each of probability the of sum the is variable random a of expectation The **Expectation** same the has outcome each die fair a For outcome. that for variable random of value the times probability:

$$E(\text{value of a die}) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5\,.$$

numbers the maps that (46 (Equation X function the by defined variable random the Consider ,$1/36$ is pair each of probability The numbers. the of sum the to dice of pair a in appearing The outcome. same the to belong they sum same the have $(5, 2)$ and $(2, 5)$ pairs the since but each obtaining of ways of number the that and $\{2, \ldots, 12\}$ are variable random the of values is: one

Sum	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pairs	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

probability the by weighted variable random the of values the of average the is expectation The outcome: each of

$$E(\text{sum of two dice}) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \cdots + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7\,.$$

is: expectation the $\{e_1, \ldots, e_n\}$ events of set arbitrary an For

$$E = \sum_{i=1}^{n} e_i P(e_i)\,.$$

$E(ae_1 + be_2) = aE(e_1) + bE(e_2)$ function linear a is Expectation **expectation of Linearity** expression: linear arbitrary an for and

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(e_i)\,.$$

For a proof see [11, Section 4.9].

Indicator variable Let e be an event whose probability is $P(e)$. Define I_e, an indicator variable for e, as follows [11, Chapter 4, Example 3b]:

$$I_e = \begin{cases} 1, & \text{if } e \text{ occurs} \\ 0, & \text{if } e \text{ does not occur}\,. \end{cases}$$

Then $E(I_e) = 1 \cdot P(e) + 0 \cdot (1 - P(e)) = P(e)$.

Mathematical formulas

Binomial theorem If the probability of an event e is p then the probability that a sequence of n independent trials results in exactly k events e is given by the binomial coefficient:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,.$$

By the binomial theorem:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}\,.$$

For $p, 1-p$ the is $(p + (1-p))^n = 1$, as expected, since one of the outcomes must occur.

Sum of a geometric series For $0 < r < 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}, \qquad \sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}\,.$$

Sum of a harmonic series For positive integer n the harmonic series is:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \ln n + \frac{1}{2n} + \gamma\,,$$

where $\gamma \approx 0.5772$ is Euler's constant. As n approaches infinity the series diverges:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty\,,$$

because $\ln n$ is unbounded.

Stirling's approximation Computing $n!$ for large n is very difficult. It is convenient to use one of the formulas of Stirling's approximation:

$$\begin{aligned} n! &\approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \\ \ln(n!) &\approx n \ln n - n \\ \ln(n!) &\approx n \ln n - n + \frac{1}{6}\left(8n^3 + 4n^2 + n + \frac{1}{30}\right) + \frac{1}{2}\ln \pi\,. \end{aligned}$$

distribution probability Continuous

do they but distributions, probability continuous learned have not may student beginning A
review we background, appropriate the with readers For book. the in often very appear not
concepts. basic the

function density probability A variables. random continuous over defined be can Probabilities
defining: thus function, the of value the to x outcome an maps $f(x) : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ (PDF)

$$P(x) = f(x)\,.$$

of probability zero has number real individual each that is terminology this for reason The
points. of neighborhoods to probabilities assign to is interpretation proper the so occurring,

integrating by obtained is $[-\infty, a]$ interval the for (CPD) distribution probability cumulative The
PDF: the

$$P(x < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx\,.$$

.$P(a) = 0$ since $P(x \leq a)$ also is this course Of

and: ,x all for $P(x) \geq 0$ PDF, a for probabilities, Like

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1\,.$$

a if example, For used. be must constant normalization a 1 to evaluate not does integral the If
then: $[a, b]$ range the in distributed uniformly is PDF

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} 1\,dx = (b - a)\,,$$

define: must we therefore and

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} 1\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot(b - a) = 1\,.$$

:x by multiplied $f(x)$ PDF the integrating by obtained be can expectation The

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx\,.$$

CPD: the differentiating by obtained be can PDF The

$$P(x < a) = \frac{d}{da} CDP(x < a)\,.$$

מקורות

[1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. Proofs from THE BOOK (Fifth Edition). Springer, 2014.

[2] Matthew Carlton. Pedigrees, prizes, and prisoners: The misuse of conditional probability. Journal of Statistics Education, 13(2), 2005. https://doi.org/10.1080/10691898.2005.11910554.

[3] John P. Gilbert and Frederick Mosteller. Recognizing the maximum of a sequence. Journal of the American Statistical Association, 61(313):35--73, 1966.

[4] Markus C. Mayer. Average distance between random points on a line segment. Mathematics Stack Exchange. https://math.stackexchange.com/q/1540015.

[5] Aaron Montgomery. Mosteller's solutions to random-walk problems. Mathematics Stack Exchange. URL: https://math.stackexchange.com/q/4460054.

[6] David S. Moore. A generation of statistics education: An interview with Frederick Mosteller. Journal of Statistics Education, 1(1), 1993. https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/10691898.1993.11910453.

[7] Frederick Mosteller. Understanding the birthday problem. The Mathematics Teacher, 55(5):322--325, 1962.

[8] Frederick Mosteller. Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions. Dover, 1965.

[9] Frederick Mosteller, Stephen E. Fienberg, and Robert E. K. Rourke. Beginning Statistics with Data Analysis. Addison-Wesley, 1983.

[10] Frederick Mosteller, Robert E. K. Rourke, and George B. Thomas Jr. Probability With Statistical Applications. Addison-Wesley, 1961.

[11] Sheldon Ross. A First Course in Probability (Tenth Edition). Pearson, 2019.

[12] Wikipedia. Buffon's needle problem.