הבעיות המאתגרות בהסתברות של Mosteller

מוטי בן-ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

0.2 Version

20 ביולי 2022

תוכן העניינים

מבוא

Frederick Mosteller

Frederick Mosteller (1916--2006) ייסד את המחלקה לסטטיסטיקה באוניברסיטת Harvard והיה ראש המחלקה מ-1957 ועד 1971, ויצא לגמלאות שנת 2003. ל-Mosteller התעניין בחינוך בסטטיסקיה וחיבר ספרי לימוד חלוציים כולל [10] שהידגש את הגישה ההסתברותי לסטטיסטיקה, ו-[9] שהיה אחת מספרי הלימוד הראשונים בניתוח מידע. בראיון תיאר Mosteller את ההתפתחות של גישתו להוראת הסטטיסטיקה [6].

מסמך זה

מסמך זה הוא "עיבוד" לספרו של Mosteller: **חמישים בעיות מאתגרות בהסתברות ופתרונותהן** [8]. הבעיות הפתרונות מוצגות ככל האפשר בצורה נגישה לקוראים עם ידע בסיסי בהסתברות, ובעיות רבות נגישות לתלמידי תיכון ולמורים. שכתבתי אתה בעיות והפתרונות עם חישובים מפורטים והסברים נוספים ואיורים. לעתים כללתי פתרונות נוספים.

רבות מהבעיות שונו כדי שיהיו נגישות: הבאתי גרסאות פשוטות שלהן, חילקתי לתת-בעיות והוספתי רמזים. כהעדפה אישית ניסחתי אותן מחדש בצורה מופשטת יותר מ-Mosteller ולא נתתי ולא תרגמתי יחידות כגון אינצ׳ים ומטבעות כגון דולרים.

המספור והכותרות נשארו כדי להקל על השוואה עם ספרו של Mosteller.

מחשבונים מודרניים, כולל אפליקציות לסמארטפון, מסוגלים לבצע את כל החישובים ללא קושי.

עבור רוב הבעיות נכתבו סימולציות בשפת התכנות Python.

בסעיף האחרון חזרה על מושגים בסיסיים בהסתברות לפי [11].

הבעיות סומנו כדלקמן:

- בעיות המסומנות ב-D קשות יותר.
- בעיות עבורן קיימות סימולציות סומנו ב-S.

אתם עלולים למצוא שאפילו בעיות שאינן מסומנות ב-D הן קשות. אל נא להתייאש אם לא תוכלו לפתור אותן. בכל זאת שווה לנסות לפתור את כולן כי כל התקדמות לקראת פתרון תעודד.

סימולציות

Monte Carlo simulations (על שם קזינו מופרסם במונקו) נכתבו בשפת התכנות Python 3. תכנית מחשב "מבצעת ניסוי" כגון "הטלת זוג קוביות" או "הטלת מטעה" מספר רב מאוד של פעמים ומחשב ומציג ממוצעים. השתמשתי במחוללי מספרי אקראיים הבנויים בתוך Python, `random.random()` ו-`random.randint()`, כדי לקבל תוצאות אקראיות לכל ניסוי.

כל תכנית מריצה סימולציה המורכת מ-10000 ניסויים והתוצאות מוצגות עם ארבע ספרות לאחר הנקודה העשרונית. כמעט תמיד התוצאה לא תהיה זהה לתוצאה שמתקבלת מחישוב ההסתברות או התוחלת. תוכל להריץ תכנית פעמים רבות ולבדוק את התוצאות משתנות.

ניתן להוריד את קבצי המקור ב-Python מ:

`https://github.com/motib/probability-mosteller/`

שמות הקבצים הם `N-name.py` כאשר `N` הוא מספר הבעיה ו-`name` הוא שם הבעיה (באנגלית).

שתי תוצאות מוצגות (באנגלית) עבור כל סימולציה:

- התוצאה התיאורטית שהיא **הסתברות** (Probability) או **תוחלת** (Expectation). בדרך כלל, במקום להעתיק את הערכים המחושבים התכנית מחשבת אותם מהנוסחאות.
- תוצאת הסימולציה שהיא **היחס בין מספר ההצלחות לבין מספר הניסויים** (Proportion) שהוא מקביל להסתברות, או **ממוצע ההצלחות** (Average) שהוא מקביל לתוחלת.

חשוב להבין שהסתברות ותוחלת הן מושגים תיאורטיים. **חוק המספרים הגדולים** מבטיח שהתוצאות של מספר רב של ניסויים תהינה קרובות לערכים התיאורטיים, אבל הם לא יהיו בזהות. למשל, ההסתברות לקבל 6 בהטלת קוביה הוגנת היא $1/6 \approx 0.1667$. בהרצת סימולציה של 10000 הטלות קיבלתי טווח של ערכים: $0.1684, 0.1693, 0.1687, 0.1665, 0.1656$.

בעיות ופתרונות

1. מגרת הגרביים (The sock drawer)^S

במגרה נמצאות גרביים אדומות וגרביים שחורות. אם נשלוף שתי גרביים בצורה אקראית **(עם החזרה)** ההסתברות ששתיהן אדומות היא $\frac{1}{2}$.

שאלה 1: מה המספר הקטן ביותר של גרביים שחורות שיכולות להיות במגרה? עבור מספר זה מה מספר הגרביים האדומות?

שאלה 2: מה המספר **הזוגי** הקטן ביותר של גרביים שחורות שיכולות להיות במגרה? עבור מספר זה מה מספר הגרביים האדומות?

פתרון 1

תשובה 1: יהי r מספר הגרביים האדומות במגירה ויהי b מספר הגרביים השחורות. $r \geq 2$ כי נתון שניתן לשלוף שתי גרביים אדומות, ו-$b \geq 1$ אחרת ההסתברות של שליפת שתי גרביים אדומות היה 1. נכפיל את ההסתברויות של שתי השליפות:

$$P(\text{שניים אדומים}) = \frac{r}{r+b} \cdot \frac{(r-1)}{(r-1)+b} = \frac{1}{2}\,. \tag{1}$$

נפשט ונקבל משוואה ריבועית עבור המשתנה r:

$$r^2 - r(2b+1) - (b^2 - b) = 0\,. \tag{2}$$

r, b שנייהם מספרים שלמים חיוביים ולכן הדיסקרימיננט חייב להיות ריבוע של מספר שלם:

$$(2b+1)^2 + 4(b^2 - b) = 8b^2 + 1 \tag{3}$$

הדיסקרימיננט הוא ריבוע כאשר $b = 1$ (הערך הקטן ביותר). ממשוואה 2, $r = 3$, כאשר אנו דוחים את הפתרון $r = 0$ כי $r \geq 2$. סכום מספר הגרביים הוא 4.

בדיקה: $\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$.

תשובה 2: בדקו כל מספר שלם חיובי זוגית של b כדי למצוא את המספר הקטן ביותר עבורו הדיסקרימיננט הוא ריבוע:

b	$8b^2+1$	$\sqrt{8b^2+1}$
2	33	5.74
4	129	11.36
6	**289**	**17**

עבור $b = 6$ הערך של r הוא 15 שמתקבל על ידי פתרון משוואה 2.

בדיקה: $\frac{1}{2} = \frac{15}{21} \cdot \frac{14}{20}$.

פתרון 2

תשובה 1: האם אי-שוויון זה נכון?

$$\frac{r}{r+b} \overset{?}{>} \frac{r-1}{(r-1)+b}\,. \tag{4}$$

$r \geq 2, b \geq 1$ ולכן שני המכנים חיוביים וניתן להכפיל את שני הצדדים:

$$\begin{aligned} r(r-1+b) &\overset{?}{>} (r-1)(r+b) \\ r^2 - r + rb &\overset{?}{>} r^2 - r + rb - b \\ b &\overset{?}{>} 0\,. \end{aligned}$$

$b > 1$ כך שמשווה 4 נכונה.

לפי משוואות 1, 4:

$$\left(\frac{r}{r+b}\right)^2 = \frac{r}{r+b}\cdot\frac{r}{r+b} > \frac{r}{r+b}\cdot\frac{r-1}{(r-1)+b} = \frac{1}{2}\,, \tag{5}$$

ובאופן דומה:

$$\left(\frac{r-1}{(r-1)+b}\right)^2 = \frac{r-1}{(r-1)+b}\cdot\frac{r-1}{(r-1)+b} < \frac{r}{r+b}\cdot\frac{r-1}{(r-1)+b} = \frac{1}{2}\,. \tag{6}$$

המכנה $r+b$ שונה מאפס ולכן ניתן לחשב שורש ריבועי ולפשט את משוואה 5:

$$\begin{aligned} \frac{r}{r+b} &> \sqrt{\frac{1}{2}} \\ r &> \frac{b}{\sqrt{2}-1} \\ r &> \frac{b}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \\ r &> b(\sqrt{2}+1)\,. \end{aligned}$$

באופן דומה עבור משוואה 6:

$$\begin{aligned} \frac{r-1}{(r-1)+b} &< \sqrt{\frac{1}{2}} \\ r-1 &< \frac{b}{\sqrt{2}-1} \\ r-1 &< b(\sqrt{2}+1)\,. \end{aligned}$$

משתי המשוואות נקבל:

$$r - 1 < (\sqrt{2}+1)b < r\,. \tag{7}$$

עבור $b=1$ מתקבל $2.141 < r < 3.141$ ו-3 $b=1, r=$ הוא פתרון.

תשובה 2: נבדוק מספרים זוגיים עבור b:

b	$(\sqrt{2}+1)b$	$< r <$	$(\sqrt{2}+1)b+1$	r	$P($אדומות שתי$)$
2	4.8	$< r <$	5.8	5	0.4762
4	9.7	$< r <$	10.7	10	0.4945
6	14.5	$< r <$	15.5	15	0.5000

Mosteller מעיר שקיים קשר בין בעיה זו לתורת המספרים ומביא פתרון נוסף: $b = 35, r = 85$.

Simulation

```
Expectation of both red  = 0.5000
Average of both red for (red =  3, black =  1) = 0.5053
Average of both red for (red = 15, black =  6) = 0.5013
Average of both red for (red = 85, black = 35) = 0.4961
```

הערה

בשני הפתרונות אנחנו לא מוכיחים תנאי מספיק עבור הערכים של r, b. בפתרון 1 פיתחנו תנאי הכרחי---לפי משוואה 3 הדיסקרימיננט חייב להיות מספר שלם---ומחפשים ערכים של b שעומדים בדרישה זו. בפתרון 2 התנאי ההכרחי הוא ש-r, b מספקים את האי-שוויונות במשוואה 7 ואז חיפשנו ערכים שעומדים בדרישה זו. כתבתי תכנית קצרה לחפש פתרונות בטווח $[1, 50]$. התוצאות עבור ערכים מסביב ל-35 הן:

```
32  78   90.52 0.500917
33  80   93.34 0.499368
34  83   96.17 0.501474
35  85   99.00 0.500000
36  87  101.83 0.498601
37  90  104.66 0.500562
```

כאשר הטורים הם (משמאל לימין) מספר הגרביים השחורות, מספר הגרביים האדומות, השורש של הדיסקרימיננט (משוואה 3), ההסתברות לשלוף שתי גרביים אדומות.

בעזרת תכנית מחשב מצאתי את הפתרונות הבאים עבור מספר גרביים שחורות פחות ממיליון:

שחורות	אדומות
1	3
6	15
35	85
204	493
1189	2871
6930	16731
40391	97513
235416	568345

2. נצחונות עוקבים (Successive wins)^S

תם משחקים סדרה של שלושה משחקים נגד אני יריבים ואתם מנצחים בסדרה אם אתם מנצחים שני משחקים לפחות מתוך השלושה. ההסתברות שאתם מנצחים במשחק נגד שחקן P_1 היא p_1 וההסתברות שאתם מנצחים במשחק נגד שחקן P_2 היא p_2. נתון ש-$p_1 > p2$. באיזה המתסריטים שלהן יש לכם סיכוי גדול יותר לנצח בסדרה?

- אתם משחקים נגד P_1, P_2, P_1 בסדר זה.
- אתם משחקים נגד P_2, P_1, P_2 בסדר זה.

פתרון 1

אתם מנצחים אם: (א) אתם מנצחים בשני השחקים הראשונים ומפסידים בשלישי, (ב) אתם מפסידים את המשחק הראשון ומנצחים משחק השני ובמשחק השלישי. (ג) אתם מנצחים בשלושת המשחקים.

תהיו p_{121} ו-p_{212} ההסתברויות שאתם מנצחים בסדרה בשני התסריטים:

$$\begin{aligned} p_{121} &= p_1p_2(1-p_1) + (1-p_1)p_2p_1 + p_1p_2p_1 \\ p_{212} &= p_2p_1(1-p_2) + (1-p_2)p_1p_2 + p_2p_1p_2 \,. \end{aligned}$$

קיים סיכוי גדול יותר לנצח בסדרה בתסריט הראשון אם $p_{121} > p_{212}$, כלומר, אם:

$$\begin{aligned} p_1p_2(1-p_1) + (1-p_1)p_2p_1 + p_1p_2p_1 &\overset{?}{>} p_2p_1(1-p_2) + (1-p_2)p_1p_2 + p_2p_1p_2 \\ -p_1p_2p_1 &\overset{?}{>} -p_2p_1p_2 \\ p_1 &\overset{?}{<} p_2 \,. \end{aligned}$$

נתון ש-$p_1 > p_2$ לכן כדאי לבחור את התסריט השני.

פתרון 2

הפתרון לא-איטואיטיבי. לפי האינטואיציה, כדאי לבחור לשחק שני משחקים נגד P_1 ואחד נגד P_2 כי יש סיכוי גבוה יותר לנצח משחק נגד P_1. אולם, הדרך היחידה לנצח את הסדרה היא בנצחון ב-**משחק האמצעי**, ולכן, כדאי לשחק את המשחק האמצעי נגד P_1, כי יש סיכוי גבוה יותר לנצח אותו.

סימולציה

```
For p1 = 0.6, p2 = 0.5
Proportion of P121 wins = 0.4166
Proportion of P212 wins = 0.4473
For p1 = 0.6, p2 = 0.4
Proportion of P121 wins = 0.3300
Proportion of P212 wins = 0.3869
For p1 = 0.6, p2 = 0.2
Proportion of P121 wins = 0.1625
Proportion of P212 wins = 0.2141
```

הסבר למה סכום היחסים אינו 1.

3. המושבע קל הדעת (The flippant juror)^S

ש שתי אפשרויות להגיע להכרעה: (א) פאנל של שלושה מושבעים המורכב משני מושבעים שמקבלים החלטה בלתי-תלויה עם הסתברות של p להגיע להחלטה הנכונה ומושבע שלישי שמגיע להחלטה נכונה בהסתברות של $1/2$. ההכרעה הנכונה מתקבלת לפי הצבעת רוב. (ב) ההכרעה מתקבלת על ידי מושבע יחי שיש לו הסתברות של p להגיע להחלטה נכונה. באיזו אפשרות ההסתברות הגבוהה ביותר להגיע להכרעה שנכונה? **פתרון**

הפאנל מגיע להכרעה נכונה אם שלושת המושבעים מגיעים להחלטה נכונה או אם כל שני מושבעים מגיעיה להחלטה נכונה. ההסתברות היא:

$$\overbrace{\left(p \cdot p \cdot \frac{1}{2}\right)}^{\text{שלושה נכונים}} + \overbrace{\left(p(1-p) \cdot \frac{1}{2} + (1-p)p \cdot \frac{1}{2} + p \cdot p \cdot \frac{1}{2}\right)}^{\text{שניים נכונים מתוך שלושה}} = p\,,$$

כך שאין הבדל בין שתי האפשרויות.

Simulation

```
Prediction: probabilities of (a) and (b) are equal
For p = 0.25, proportion correct of (a) = 0.5019, (b) = 0.5046
For p = 0.50, proportion correct of (a) = 0.5072, (b) = 0.4970
For p = 0.75, proportion correct of (a) = 0.5062, (b) = 0.5040
```

4. ניסיונות עד להצלחה הראשונה (Trials until first success)^S

מה התוחלת של מספר ההטלות של קוביה עד שהופיע 6? **פתרון 1**

ההסתברות שההטלה ה-i תהיה ההופעה הראשונה של 6 היא ההסתברות שבהטלות $i-1$ יופיע אחד מחמשת המספרים האחרים כפול ההסתברות שבהטלה ה-i יופיע 6. כדי לפשט את הסימון נשתמש ב-p במקום $1/6$:

$$P(i \text{ מופיע לראשונה בהטלה } 6) = (1-p)^{i-1}p\,.$$

מספר ההטלות לא חסום.

תהי $E = E(\text{הטלה ראשונה של } 6)$. אזי:

$$E = 1p(1-p)^0 + 2p(1-p)^1 + 3p(1-p)^2 + 4p(1-p)^3 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} ip(1-p)^{i-1}\,. \tag{8}$$

ללא ה- i הסכום היה ההסתברות של הטלה של 6 בסופי של דבר:

$$P(6 \text{ הטלה בסופו של דבר של}) = \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1\,. \tag{9}$$

זאת לא תוצאה מפתיעה.

ניתן לחשב את התוחלת כך:

$$\begin{array}{rcllllllll} E & = & p(1-p)^0 & + & p(1-p)^1 & + & p(1-p)^2 & + & p(1-p)^3 & + \cdots \\ & & & & p(1-p)^1 & + & p(1-p)^2 & + & p(1-p)^3 & + \cdots \\ & & & & & & p(1-p)^2 & + & p(1-p)^3 & + \cdots \\ & & & & & & & & p(1-p)^3 & + \cdots \end{array}$$

השורה הראשונה היא סכום הסדרה ההנדסית ממשוואה 9 שהוא 1. השורה השנייה היא אותה סדרה הנדסית אינסופית עם איבר ראשון $p(1-p)$ ולכן הסכום הוא:

$$\frac{p(1-p)}{1-(1-p)} = 1-p\,.$$

באופן דומה, סכום השורה השלישית הוא $(1-p)^2$ וסכום השורה ה-i הוא $(1-p)^{i-1}$. לכן התוחלת היא סכום הסידרה ההנדסית האינסופית:

$$E = 1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \cdots = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p} = 6\,.$$

פתרון 2

הכפל את משוואה 8 ב-$1-p$ והחסר את תוצאה מאותה משוואה. התוצאה היא הסדרה ההנדסית במשוואה 9:

$$\begin{array}{rcll} E & = & p(1-p)^0 & + \quad 2p(1-p)^1 + 3p(1-p)^2 + 4p(1-p)^3 + \cdots \\ E\cdot(1-p) & = & & \quad\;\; p(1-p)^1 + 2p(1-p)^2 + 3p(1-p)^3 + \cdots \\ E\cdot(1-(1-p)) & = & p & + \quad p(1-p)^1 + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + \cdots \\ & = & 1 & \\ E & = & 1/p\,. & \end{array}$$

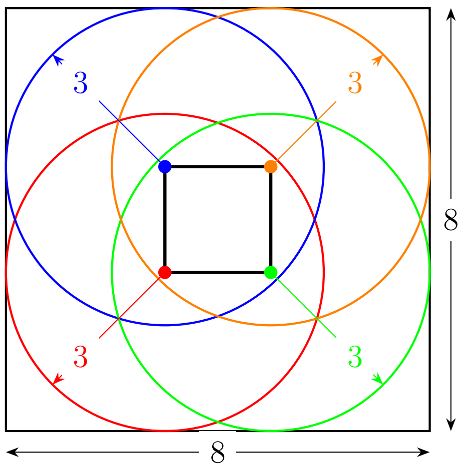
בגלל ש-$p = 1/6$, התוחלת של מספר ההטלות עד להופעה של 6 היא 6.

פתרון 3

נתייחס להטלה הראשונה בנפרד משאר ההטלות. אם בהטלה הראשונה מופיע 6 (בהסתברות p) הטלה אחת מספיקה. אחרת, אם בהטלה לא מופיע 6 (הסתברות $1-p$) אזי ההטלות הבאות מרכיבות סדרה זהה לסדרה המקורית שהתוחלת שלה היא E. לכן התוחלת היא:

$$E = 1\cdot p + (E+1)(1-p)$$
$$E = \frac{1}{p} = 6\,.$$

סימולציה



איור 1 : גבולות למטבעות שאינם חותכות את הריבוע

```
Expectation of first success = 6
Average of first success     = 6.0161
```

5. מטבע בריבוע (Coin in a square)[S]

שאלה 1: נתון ריבוע עם צלע באורך 8 ומטבע עם רדיוס 3. הטל את המטבע על הריבוע. מרכז המטבע נוחת בתוך המטבע עם התפלגות אחידה. מה ההסתברות שהמטבע נוחת כולו בתוך הריבוע?

שאלה 2: בכל הטלה אתה מרוויח 5 אם המטבע נוחת בתוך הריבוע ומפסיק 1 אם הוא נוגע בריבוע. מה תוחלת הרווח לכל הטלה?

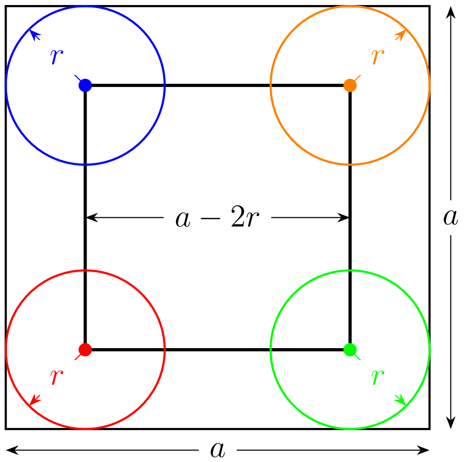
שאלה 3: פתח נוסחה להסתברות שהמטבע נוחת בתוך הריבוע אם אורך הצלע הוא a ורדיוס המטבע הוא r כאשר $r < a/4$. **פתרון**

תשובה 1: איור 1 מראה מטבע על צלע 8 וארבעה מעגלים בקוטר 3 חסומים על ידי פינות הריבוע. מרכזי המעגלים מרכיבים ריבוע פנימי עם צלע 2. כל מטבע שמרכזו מחוץ לריבוע יחתוך צלע של הריבוע החיצוני. למיקום של מרכז המטבע התפלגות אחידה ולכן ההסתברות שהמטבע נוחת כולו בתוך הריבוע הוא היחס בין השטח של הריבוע הפנימי לשטח של הריבוע החיצוני :

$$P(\text{המטבע נוחת כולו בתוך הריבוע}) = \frac{2\cdot 2}{8\cdot 8} = \frac{1}{16} = 0.0625\,.$$

תשובה 2: התוחלת שלילית :

$$E(\text{הטלה לכל הטלה}) = 5\cdot\frac{1}{16} + (-1)\cdot\frac{15}{16} = -\frac{10}{16} = -0.625\,.$$



איור 2: מטבעות בריבוע גדול

תשובה 3: איור 2 מראה ארבעה מעגלים חסומים על ידי פינות הריבוע. הצלע של הריבוע הפנימית הוא $a - 2r$ ולכן:

$$P(\text{המטבע נוחת בתוך המעגל}) = \frac{(a-2r)^2}{a^2}\,.$$

סימולציה

```
For side = 8, radius = 1:
Probability of landing within the square = 0.5625
Proportion landing within the square     = 0.5704
For side = 8, radius = 2:
Probability of landing within the square = 0.2500
Proportion landing within the square     = 0.2481
For side = 8, radius = 3:
Probability of landing within the square = 0.0625
Proportion landing within the square     = 0.0639
For side = 8, radius = 4:
Probability of landing within the square = 0.0000
Proportion landing within the square     = 0.0000
```

6. הטלת מזל (Chuck-a-luck)^{S}

חר מספר n בין 1 ל-6. הטל שלוש קוביות. אם לא מופיע n על אף קוביה אתה מפסיד 1; אם n מופיע על קוביה אחת אתה מרוויח 1; אם n מופיע על שתי קוביות אתה מרוויח 2; אם n מופיע על כל שלושת הקוביות אתה מרוויח 3. מה התוחלת של הרווח? **פתרון**

תהי $P(k)$ ההסתברות ש-n מופיע על k קוביות. אזי:

$$E(\text{רווח לכל הטלה}) = -1P(0) + 1P(1) + 2P(2) + 3P(3)\,.$$

ההטלות של שלושת הקוביה הן בלתי-תלויות ולכן כל ההסתברויות ניתנות על ידי ההתפלגות הבינומית עם $p = 1/6$, ההסתברות ש-n מופיע על קוביה:

$$\begin{aligned}
E(\text{רווח לכל הטלה}) &= -1\binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 + 1\binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \\
&\quad 2\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 + 3\binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 \\
&= \frac{1}{216}(-125 + 75 + 30 + 3) \\
&= -\frac{17}{216} \approx -0.0787\,.
\end{aligned}$$

סימולציה

```
Expectation of winnings = -0.0787
Average winnings        = -0.0724
```

7. לרפא את המהמר הכפייתי (Curing the compulsive gambler)^S

ולט roulette הוא משחק מזל שמשחקים עם גלגל בעל 38 כיסים ממוספרים: 18 אדומים, 18 שחורים ו-2 ירוקים.[1] מסובבים את הגלגל וכדור נוחת באחד הכיסים. הקזינו מזוכה אם הכדור נוחת בכיס ירוק; אחרת, את מרוויחה 36 עבור הימור של 1 על מספר הכיס (אדום או שחור) בו נוחת הכדור. את משחקת 36 סבבים של רולט ומהממרת 1 בכל סבב.

שאלה 1: מה התוחלת של הרווח?

שאלה 2: חברך מציע להמר 20 שאחרי 36 סבבים את **תפסידי** כסף. מה התוחלת של הרווח בהתחשב ברווח או הפסד של המשחק וגם של ההימור על חברך? **פתרון**

תשובה 1: ההסתברות של ניצחון בסבב אחד היא $1/38$ ולכן:

$$\begin{aligned}
E(\text{רווח בסבב אחד}) &= 35 \cdot \frac{1}{38} + (-1) \cdot \frac{37}{38} = -\frac{2}{38} \approx -0.0526 \\
E(\text{רווח ב-36 סבבים}) &= 36 \cdot -0.05266 = -1.8947\,.
\end{aligned}$$

(הרווח נטו הוא 35 כי ה-36 שאת מקבלת כולל החזרת ה-1 של ההימור.)

תשובה 2: נבדוק את ארבעת התוצאות של 36 של משחק הרולט:

[1] ברולט אמריקאי נמצאים שני כיסים ירוקים וברולט אירופאי נמצא כיס ירוק אחד.

- אם את מפסידה בכל הסבבים ההפסד הוא 36.
- אם את זוכה בסבב אחד ומפסידה ב-36 סבבים אין רווח ואין הפסד.
- אם את זוכה בשני סבבים את מרוויחה 70 ומפסידה 34 בשאר הסבבים כך שהרווח נטו הוא 36.
- אם את זוכה ב-k עבור $2 < k \leq 36$, הרווח נטו הוא $35k - (36 - k) > 0$.

לכן את הפסידה כסף רק אם את מפסידה את כל הסבבים:

$$P(\text{מפסידה ב-36 סבבים}) = \left(\frac{37}{38}\right)^{36} \approx 0.3829\,.$$

ההסתברות לא להפסיד בכל הסבבים היא $1 - 0.3829 = 0.6171$. לכן:

$$\underbrace{-1.8947}^{\text{E של כל הסבבים}} \; + \; \underbrace{-20 \cdot 0.3829}^{\text{מפסידה בהימור}} + \underbrace{20 \cdot 0.6171}^{\text{זוכה בהימור}} \approx 2.7904\,.$$

ברור שכדאי להסכים להימור המוצע!

סימולציה

```
Expectation of winning a round = -0.0526
Average winnings for a round   = -0.0593
```

בסימוליה היתה שונות גדולה שהוקטנה כל ידי הרצת מיליון ניסויים.

8. קלפים מושלמים בברידג' Perfect bridge hand

חר באקראי 13 קלפים בחפיסה של 52 קלפים. מה ההסתברות שכולם מאותה סדרה? **פתרון 1**

בכל חפיסה יש 13 קלפים מכל סדרה כך שיש $\binom{52}{13}$ דרכים לבחור 13 מסדרה אחת, למשל, לבבות. יש רק דרך אחת לבחירת 13 לבבות כך ש:

$$P(\text{בחירת 13 לבבות}) = \frac{1}{\binom{52}{13}} = \frac{13!39!}{52!} =\approx 1.5747 \times 10^{-12}\,.$$

בחפיסה ארבע סדרות ולכן:

$$P(\text{בחירת 13 קלפים מאותה סדרה}) = 4 \cdot \frac{13!39!}{52!} \approx 6.2991 \times 10^{-12}\,.$$

פתרון 2

יש 52 דרכים לבחור את הקלף הראשון. אח״כ יש 12 דרכים לבחור את הקלף השני מאותה סדרה מתוך 51 הקלפים שנשארו, 11 דרכים לבחור את הקלף השלישי, וכו׳. מכאן:

$$P(\text{בחירת 13 קלפים מאותה סדרה}) = \frac{52}{52}\cdot\frac{12}{51}\cdot\frac{11}{50}\cdots\frac{1}{40} = \frac{12!}{51!/39!} \approx 6.2991\times 10^{-12}\,.$$

אין טעם להריץ סימולציה כי כמעט בוודאות התוצאה תהיה אפס.

9. משחק קוביות Craps^{D,S}

שחק ה-craps הוא משחק עם זוג קוביות. בהטלה הראשונה אתה זוכה אם סכום המספרים הוא 7 או 11, ואתה מפסיד אם הסכום הוא 2, 3 או 12. אם הסכום בהטלה הראשונה הוא $n = 4, 5, 6, 8, 9, 10$ (נקרא ״נקודה״ point), המשך להטיל את הקוביות עד שמופיעה הנקודה n (ניצחון) או 7 (הפסד).

שאלה 1: מה ההסתברות של האירועים בהטלה הראשונה: ניצחון, הפסד, לא ניצחון ולא הפסד?

שאלה 2: מה ההסתברות לניצחון? **פתרון 1**

תשובה 1: להסתברות של המספרים המופיעים כאשר מטילים קוביה התפלגות אחידה השווה ל-$1/6$. ההטלות של שתי קוביות בלתי תלויות ולכן ההסתברות של כל תוצאה היא $1/36$. מספר הדרכים לקבל כל אחד מהאירועים (הסכום של זוג קוביות) $2,\ldots,12$ הוא:

סכום	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
זוגות	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

בהטלה הראשונה יש 8 דרכים לקבל 7 או 11 וההסתברות היא $8/36$ לזוכה. יש 4 דרכים לקבל $2, 3, 12$ וההסתברות היא $4/36$. ההסתברות לא לזכות ולא להפסיד היא בהטלה הראשונה היא:

$$1 - \frac{8}{36} - \frac{4}{36} = \frac{24}{36}\,.$$

תשובה 2: נעיין בשני מקרים תוך התייחסות לטבלה לעיל:

- הנקודה היא 4. ההסתברות לזכות בהטלה השנייה (4) היא $3/36$ וההסתברות להפסיד (7) היא $6/36$. ההסתברות לא לזכות ולא להפסיד היא $1-(3/36)-(6/36) = 27/36$.
- הנקודה היא 8. ההסתברות לזכות בהטלה השנייה (8) היא $5/36$ וההסתברות להפסיד (7) היא $6/36$. ההסתברות לא לזכות ולא להפסיד היא $1-(5/36)-(6/36) = 25/36$.

אנו רואים שחייבים לחשב את ההסתברות לזכות בנפרד עבור כל אחת מהנקודות $4, 5, 6, 8, 9, 10$. נפתח נוסחה כללית להסתברות.

לאחר שהתקבלה **הנקודה** n בהטלה הראשונה, תהי P_n ההסתברות ההסתברות לזכייה בהטלת הנקודה n בהטלה כשלהי אחר כך, ותהי Q_n ההסתברות לא לזכות ולא להפסיד בהטלה כלשהי. תהי W_n ההסתברות לזכייה על ידי הטלת הנקודה n **בהטלה לאחר ההטלה הראשונה**. ניתן לחשב את W_n על ידי חיבור:

- ההסתברות להופעת הנקודה בהטלה השנייה.
- ההסתברות לא לזכות ולא להפסיד בהטלה השנייה כפול ההסתברות להופעת הנקודה בהטלה השלישית.
- ההסתברות לא לזכות ולא להפסיד בהטלה השנייה והשלישית כפול ההסתברות להופעת הנקודה בהטלה הרביעית,

וכך הלאה.

$$\begin{aligned} W_n &= P_n + Q_nP_n + Q_n^2P_n + Q_n^3P_n + \cdots \\ &= P_n\left(1 + Q_n^1 + Q_n^2 + Q_n^3 + \cdots\right) \\ &= P_n\left(\frac{1}{1-Q_n}\right) . \end{aligned}$$

אתה מפסיד אם בהטלה כלשהי לאחר הראשונה מופיע 7 עם הסתברות $6/36$ ולכן:

$$\begin{aligned} Q_n &= 1 - P_n - (6/36) \\ W_n &= \frac{P_n}{P_n + (6/36)} . \end{aligned}$$

W_n עבור ששת הנקודות היא:

n	4	5	6	8	9	10
P_n	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$
W_n	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{9}$

נחשב את W, ההסתברות לזכות, על ידי חיבור ההסתברות לזכות בהטלה הראשונה לסכום ההסתברויות עבור ששת הזכיות בהטלת נקודה כפול ההסתברות להופעת **אותה נקודה** בהטלה הראשונה:

$$W = \frac{8}{36} + \sum_{n\in\{4,5,6,8,9,10\}} P_nW_n \approx 0.4929 . \tag{10}$$

שסיכוי שהקזינו יזכה במשחק אחד של craps הוא רק $0.5 - 0.4949 \approx 0.5\%$ אבל חוק המספרי הגדולים מבטיח שבסופו של דבר הם יזכו ואתה תפסיד!

פתרון 2

תשובה 2: נעיין בסדרות ההטלות שלהן כאשר בכולן הנקודה היא 4.

4 8 9 9 9 8 8 8 9 8 4
4 8 9 9 9 8 8 8 9 8 7
4 9 9 9 8 8 4

המשחק מסתיים רק אם מטילים 4 (ניצחון) או מטילים 7 (הפסד), כך שהופעות של 8 או 9 לא משפיעות על התוצאה. מכאן שהסתברות לזכות היא ההסתברות המותנית שמופיע 4 אם נתון שהופיע 4 או 7. יהי f האירוע ש-4 מופיע ויהי s האירוע ש-7 מופיע. אזי:

$$P(f|f \cup s) = \frac{P(f) \cap P(f \cup s)}{P(f \cup s)} = \frac{P(f)}{P(f \cup s)} = \frac{3/36}{(3+6)/36} = \frac{3}{9}\,,$$

בדיוק התוצאה W_4 שמופיעה בטבלה לעיל. כעת ניתן להשתמש במשוואה 10 כדי לחשב את W.

השתמשנו בהסתברות בצורה סמויה בפתרון הראשון כי W_n היא ההסתברות המותנית שבהטלה הראשונה מופיעה הנקודה n.

סימולציה

```
Probability of winning = 0.4929
Proportion of wins     = 0.4948
```

13. דילמת האסיר The prisoner's dilemma[D]

שלושה אסירים A, B, C מועמדים לשחרור מוקדם. וועדת השחרורים ישחרר שניים מהם עם הסתברות שווה ל-$\{A,B\}, \{A,C\}, \{B,C\}$, כך שהסיכוי ש-$A$ ישוחרר הוא $2/3$. לאסיר A נמסר שמו של אחד האסירים האחרים שישוחרר. אם מוסרים לו ש-B מה הסיכוי ש-A ישוחרר גם כן?

[2] הוא מאמר מקיף על דילמת האסיר ועל בעיית Monty Hall הדומה. **פתרון 1**

יהיו $P(A), P(B), P(C)$ ההסתברות ש-A, B, C ישוחררו. A מעוניין בהסתברות המותנית $P(A|B)$ שהוא ישוחרר אם B ישוחרר. נדמה שהחישוב שלהלן הוא מה שאנחנו רוצים:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}\,.$$

אבל זאת לא ההסתברות הנכונה! יהי R_{AB} האירוע של-A נמסר ש-B ישוחרר. ההסתברות שיש לחשב היא $P(A|R_{AB})$:

$$P(A|R_{AB}) = \frac{P(A \cap R_{AB})}{P(R_{AB})}\,.$$

אנו מניחים שהמידע על שחרורו של B הוא אמת ולכן:

$$P(A \cap R_{AB}) = P(\{A,B\}) = \frac{1}{3}\,.$$

כעת:

$$P(R_{AB}) = P(\{A,B\}) + P(\{B,C\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\,.$$

אם התכנית היא ש-$\{B,C\}$ ישוחררו, ניתן למסור ל-A או ש-B ישוחרר או ש-C ישוחרר ולכן הגורם $1/2$. מכאן:

$$P(A|R_{AB}) = \frac{P(A \cap R_{AB})}{P(R_{AB})} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}\,,$$

כך שמסירה ל-A ש-B ישוחרר לא משנה את ההסתברות שהוא ישוחרר.

פתרון 2

ארבעת האירועים האפשריים הם:

e_1: ל-A נמסר ש-B ישוחרר ו-$\{A,B\}$ שוחררו.

e_2: ל-A נמסר ש-C ישוחרר ו-$\{A,C\}$ שוחררו.

e_3: ל-A נמסר ש-B ישוחרר ו-$\{B,C\}$ שוחררו.

e_4: ל-C נמסר ש-B ישוחרר ו-$\{B,C\}$ שוחררו.

ההסתברות של כל זוג לשחרור שווה ולכן:

$$P(e_1) = P(e_2) = P(e_3 \cup e_4) = \frac{1}{3}\,.$$

נניח שאם $\{B, C\}$ ישוחררו, בהסתברות שווה ימסרו ל-A ש-B ישוחרר או ש-C ישוחרר, ולכן $P(e_3) = P(e_4) = 1/6$. מכאן שההסתברות ש-A ישוחרר בהינתן האירוע $R_{AB} = e_1 \cup e_3$ שנמסר לו ש-B ישוחרר היא:

$$P(A|R_{AB}) = \frac{P(e_1 \cap (e_1 \cup e_3))}{P(e_1 \cup e_3)} = \frac{P(e_1)}{P(e_1 \cup e_3)} = \frac{1/3}{(1/3) + (1/6)} = \frac{2}{3}\,.$$

פתרון 3

חידה שמיוחסת ל-Abraham Lincoln שואל: "אם תקרא לזנב של כלב רגל, כמה רגליים יש לכלב?" התשובה היא שלקרוא לזנב רגל לא הופך אותו לרגל ולכן לכלב עדיין יש ארבע רגליים. ברור שאם A יודע את העתיד המחכה ל-B זה לא משנה את הסיכוי שלו לשיחרור.

14. איסוף תלושים Collecting coupons^S

תון סדרה של קופסאות ובתוך כל אחת נמצא תלוש עם אחד המספרים 1 עד 5. את שולפת תלוש אחד מכל קופסה אחת אחרי השנייה.

שאלה 1: מה התוחלת של מספר התלושים שיש לשלוף עד שתקבלי את כל חמשת המספרים?

שאלה 2: פתחי נוסחה לתוחלת ל-n מספרים.

רמז: תשתמשי בפתרון לבעיה 4 (עמוד 10) והקירוב לסכום של מספרים הורמוניים (עמוד 81). **פתרון**

תשובה 1: מה התוחלת של מספר השליפות עד שאת מקבלת מספר **שונה** מכל הקודמים? לפי בעייה 4 התוחלת היא $1/p$ כאשר p היא ההסתברות לשליפת מספר שונה. עבור השליפה הראשונה, ההסתברות היא 1 כך שהתוחלת היא גם 1. עבור השליפה השנייה ההסתברות היא $4/5$ כך שהתוחלת היא $5/4$ וכך הלאה. לכן:

$$E(\text{כל חמשת המספרים}) = \frac{5}{5} + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + \frac{5}{1} = \;\; = \frac{1370}{120} \approx 11.4167\,.$$

תשובה 2: נשמתמש באותה שיטה ובקירוב לסכום המספרים ההרומוניים (עמוד 81):

$$E(\text{כל } n \text{ המספרים}) = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots \frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right) = nH_n \approx n\left(\ln n + \frac{1}{2n} + 0.5772\right)\,.$$

עבור $n = 5$ מתקבל:

$$E(\text{כל חמשת המספרים}) = 5H_5 \approx 5(\ln 5 + \frac{1}{10} + 0.5772) \approx 11.4332\,.$$

סימולציה

```
For  5 coupons:
Expectation of draws = 11.9332
Average draws        = 11.4272
For 10 coupons:
Expectation of draws = 29.7979
Average draws        = 29.2929
For 20 coupons:
Expectation of draws = 72.4586
Average draws        = 72.2136
```

15. שורה בתיאטרון The theater row [S]

דר שמונה מספרים זוגיים ושבעה מספרים אי-זוגיים בשורה בצורה אקראית, למשל:

$$10 \quad 12 \quad 3 \quad 2 \quad 9 \quad 6 \quad 1 \quad 13 \quad 7 \quad 10 \quad 3 \quad 8 \quad 8 \quad 5 \quad 20\,,$$

שנוכל לכתוב כך:

$$E \quad E \quad O \quad E \quad O \quad E \quad O \quad O \quad O \quad E \quad O \quad E \quad E \quad O \quad E\,,$$

כי המספרים עצמם אינם חשובים.

מה התוחלת שלמספר הזוגות השכנים שהם זוג/אי-זוגי או אי-זוגי/זוגי?

בדוגמה יש 10 זוגות שכנים שהם EO או OE.

רמז: התייחס לכל זוג שכנים בנפרד. מה ההסתברות שהם שונים? **פתרון**

הטבלה שלהן מראה את עשרת הסידורים השונים עבור שלושה מספרים זוגיים ושני מספרים אי-זוגיים. מספר הזוגות השכנים השונים הוא 24 והממוצע הוא $24/10 = 2.4$.

זוגות	סידור	זוגות	סידור
3	$EEOEO$	1	$EEEOO$
4	$EOEOE$	2	$EEOOE$
1	$EOOEE$	3	$EOEEO$
2	$OEEEO$	3	$OEEOE$
1	$OOEEE$	3	$OEOEE$

נחזור לדוגמה עם 15 מספרים. תהי P_d ההסתברות שזוג נתון בסידור הוא EO או OE. אזי:

$$P_d = P(EO) + P(OE) = \frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14} + \frac{7}{15}\cdot\frac{8}{14} = 2\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14} = \frac{8}{15}\,.$$

תהי E_d התוחלת של מספר הזוגות בסידור שהם EO או OE. זוג (EO, OE) תורם 1 למספר הזוגות השונים וזוג (EE, OO) תורם 0:

$$E_d = \sum_{\text{זוגות}} 1\cdot P_d = 14\cdot\frac{8}{15} \approx 7.4667\,.$$

עבור עשרה מספרים :

$$P_d = P(EO) + P(OE) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$
$$E_d = 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5} = 2.4\,.$$

Simulation

```
For  5 places:
Expectation of different pairs = 2.4000
Average different pairs        = 2.3855
For 15 places:
Expectation of different pairs = 7.4667
Average different pairs        = 7.4566
For 27 places:
Expectation of different pairs = 13.4815
Average different pairs        = 13.4835
For 49 places:
Expectation of different pairs = 24.4898
Average different pairs        = 24.4725
```

16. האם השני בדירוג יזכה המקום שני? Will the second-best be runner-up?^{S}

שמונה שחקנים בתחרות $\{a_1, \ldots, a_8\}$ נקבעים משחקים $\{g_1, \ldots, g_8\}$ בצורה אקראית כך ששחקן a_{k_i} משחק את המשחק הראשון שלו במקום g_{k_i} (איור 3). השחקנים מדורגים כך שהטוב ביותר הוא a_1 והגרוע ביותר הוא a_8. השחקן הטוב יותר לעולם ינצח שחקן פחות. ברור ששחקן a_1 ינצח בתחרות.

שאלה 1: מה ההסתברות שהשחקן a_2 יזכה במקום השני כאשר הוא משחק נגד a_1 בגמר ומפסיד?

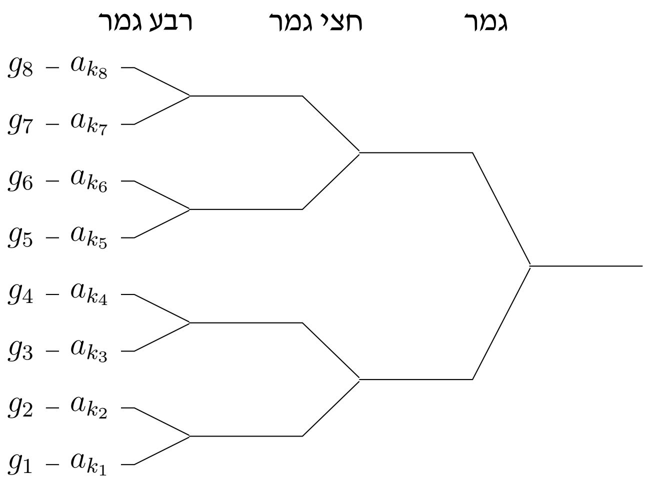
שאלה 2: עבור 2^n שחקנים, מה ההסתברות שהשחקן a_2 יזכה במקום השני כאשר הוא משחק נגד a_1 בגמר ומפסיד? **פתרון**

תשובה 1: אם a_1 משחק באחד משחקים $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ אף שחקן המשחקים במשחקים הללו לא יגיע לגמר, לכן a_2 חייב לשחק באחד מהמשחקים $\{g_5, g_6, g_7, g_8\}$. המסקנה המתבקש היא שההסתרות ש-a_2 יזכה במקום השני היא $1/2$ כי הוא חייב לשחק באחד מארבעת המשחקים $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$. אולם, a_2 חייב לשחק באחד מארבעה המשחקים מתוך שבעת המשחקים ש-a_1 לא משחק בו וההסתברות היא $4/7$.

תשובה 2: באופן דומה, מתוך $2^n - 1$ המשחקים בהם a_1 לא משחק, a_2 חייב לשחק באחד מ-2^{n-1} המשחקים במחצית הטבלה שלא כוללת את a_1. מכאן :

$$P(\text{משחקים אחד נגד השני בגמר } a_1, a_2) = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}\,.$$

סימולציה



איור 3 : טבלת משחקים לתחרות

```
For   8 players:
Probability a2 is runner-up                   = 0.5714
Proportion of games where a2 is runner-up  = 0.5707
For  32 players:
Probability a2 is runner-up                   = 0.5161
Proportion of games where a2 is runner-up  = 0.5184
For 128 players:
Probability a2 is runner-up                   = 0.5039
Proportion of games where a2 is runner-up  = 0.5060
```

17. זוג אבירים Twin knights ^{D,S}

לשמונה שחקים בתחרות $\{a_1, \ldots, a_8\}$ נקבעים משחקים $\{g_1, \ldots, g_8\}$ בצורה אקראית כך ששחקן a_{k_i} משחק את המשחק הראשון שלו במקום g_{k_i} (איור 3). לכל i, j, ההסתברות ש-a_i מנצחת במשחק נגד a_j היא $1/2$ כמו גם ההסתברות ש-a_j מנצחת את a_i.

שאלה 1: מה ההסתברות שהשחקנים a_1, a_2 משחקים משחק אחת נגד השנייה.

שאלה 2: עבור 2^n שחקנים, מה ההסתברות שהשחקנים a_1, a_2 משחקים משחק אחת נגד השנייה.
פתרון

תשובה 1: ללא הגבלת הכלליות נקבע ש-a_1 משחקת במשחק g_1. מה האפשרויות בהן a_1, a_2 ישחקו אחת נגד השנייה. בהסתברות $1/7$ נקבע ש-a_2 משחקת במשחק g_2. בהסתברות $2/7$ נקבע ש-a_2 משחקת במשחק g_3 או g_4, אבל היא לא משחקת נגד a_1 אלא אם **שתיהן** מנצחות במשחק הראשון שלהן, כך שיש להכפיל את ההסתברות ב-$1/4$. בהסתברות $4/7$ נקבע ש-a_2 משחקת במשחק g_5, g_6, g_7, g_8, אבל היא לא

משחקת נגד a_1 **שתיהן** מנצחות בשני המשחקים שלהן, כך שיש להכפיל את ההסתברות ב-$1/16$. מכאן:

$$P(a_1, a_2 \text{ play each other}) = \frac{1}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{4}\,.$$

תשובה 2: תהי P_n ההסתברות שבתחרות עם 2^n שחקנים, a_1 ו-a_2 משחקות אחת נגד השנייה. ראינו ש-$P_3 = 1/4$. מה עם P_4? באותה שיטה:

$$\begin{aligned} P_4 &= \frac{1}{15} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{15} + \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{15} + \frac{1}{64} \cdot \frac{8}{15} \\ &= \frac{1}{15}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}\,. \end{aligned}$$

השערה סבירה היא ש-$P_n = 1/2^{n-1}$.

Proof 1: באותה שיטה תוך שימוש בנוסחה לסכום של סדרה הנדסית:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \\ &= \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} \\ &= \frac{1}{2^n - 1} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\,. \end{aligned}$$

Proof 2: באינדוקציה. טענת הבסיס היא: $P_3 = 1/4 = 1/2^{3-1}$.

יש שני צעדי אינדוקציה:

מקרה 1: נקבע ש-a_1 ו-a_2 משחקות בחצאים שונים של התחרות:

$$P(a_1, a_2 \text{ משחקות בחצאים שונים}) = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}\,.$$

הן יכולות להיפגש רק במשחק הגמר ולכן כל אחת חייבת לנצח בכל $n-1$ המשחקים שלהן:

$$P(a_1, a_2 \text{ נפגשות אם משחקות בחצאים שונים}) = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^{-(n-1)}}{2^n - 1}\,. \tag{11}$$

מקרה 2: נקבע ש-a_1 ו-a_2 משחקות באותו חצי תחרות:

$$P(a_1, a_2 \text{ משחקות בחצאים שונים}) = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}\,.$$

שתי השחקניות משחקות באותו חצי ולכן הבעיה היא למצוא P_{n-1}. לפי הנחת האינדוקציה:

$$P(a_1, a_2 \text{ נפגשות אם משחקות באותו חצי}) = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{2^1 - 2^{-(n-2)}}{2^n - 1}\,. \tag{12}$$

ממשוואות 11, 12 נקבל:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{2^{-(n-1)}}{2^n-1} + \frac{2^1 - 2^{-(n-2)}}{2^n-1} \\ &= \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} \cdot \frac{2^{-(n-1)} + 2^1 - 2^{-(n-2)}}{2^n-1} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{2^0 + 2^n - 2^1}{2^n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}\,. \end{aligned}$$

סימולציה

```
For   8 players:
Probability that a1, a2 meet = 0.2500
Proportion a1, a2 meet       = 0.2475
For  32 players:
Probability that a1, a2 meet = 0.0625
Proportion a1, a2 meet       = 0.0644
For 128 players:
Probability that a1, a2 meet = 0.0156
Proportion a1, a2 meet       = 0.0137
```

18. תוצאה שווה בהטלת מטבע An even split at coin tossing [S]

1 אם אתה זורק מטבע הגון 20 פעמים, מה ההסתברות לקבל ״עץ״ בדיוק 10 פעמים?

שאלה 2: אם אתה זורק מטבע הגון 40 פעמים, מה ההסתברות לקבל ״עץ״ בדיוק 20 פעמים? **פתרון**

תשובה 1: המטבע הוגן ולכן ההסתברות מתקבלת מהמקדם הבינומי:

$$P(\text{10 ״עץ״ ב-20 הטלות}) = \binom{20}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.1762\,.$$

תשובה 2: אפשר לשער שהתוצאה תהיה זהה לשאלה הקודמת אבל:

$$P(\text{20 ״עץ״ ב-40 הטלות}) = \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 0.1254\,.$$

לפי חוק המספרים הגדולים מספר ״עץ״ ומספר ״לפי״ יהיו ״בערך״ שווים [11, Section 8.4], אבל הסיכוי נמוך מאוד שיהיו שווים בדיוק, והסיכוי לאירוע זה הופך להיות קטן יותר ככל שמספר ההטלות גדל.

סימולציה

```
Probability of 10 heads for  20 tosses = 0.1762
Proportion  of 10 heads for  20 tosses = 0.1790
Probability of 20 heads for  40 tosses = 0.1254
Proportion  of 20 heads for  40 tosses = 0.1212
Probability of 50 heads for 100 tosses = 0.0796
Proportion  of 50 heads for 100 tosses = 0.0785
```

.19 Isaac Newton **עוזר ל-** Samuel Pepys Isaac Newton helps Samuel Pepys^S

1 מה ההסתברות לקבל **לפחות** 6 **אחד** כאשר מטילים 6 קוביות.

שאלה 2: מה ההסתברות לקבל **לפחות שני** 6 כאשר מטילים 12 קוביות.

שאלה 3: פתח נוסחה להסתברות לקבל לפחות n 6 כאשר מטילים $6n$ קוביות. **פתרון**

תשובה 1: ההסתברות היא המשלים להסתברות לקבל אפס 6 ב-6 הטלות, שהיא המכפלה של לקבל מספר שונה מ-6 בכל ההטלות:

$$P(\text{אחד 6 לפחות}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.6651\,.$$

תשובה 2: ההסתברות היא המשלים להסתברות לקבל אפס או אחד 6 ב-12 הטלות:

$$P(\text{6 שני לפחות}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - \binom{12}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 0.6187\,.$$

לאירוע זה הסתברות קטנה יותר מהאירוע הקודם.

תשובה 3: ההסתברות היא המשלים להסתברות לקבל פחות מ-n 6 ב-$6n$ הטלות:

$$\begin{aligned} P(\text{לפחות } n \text{ 6}) &= 1 - \binom{6n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{6n-0} - \binom{6n}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{6n-1} - \cdots \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{n-1}\binom{6n}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{6n-i}\,. \end{aligned}$$

סימולציה

```
For   6 dice to throw  1 sixes:
Probability = 0.6651
Proportion  = 0.6566
For  12 dice to throw  2 sixes:
Probability = 0.6187
Proportion  = 0.6220
For  18 dice to throw  3 sixes:
```

```
Probability = 0.5973
Proportion  = 0.5949
For  96 dice to throw 16 sixes:
Probability = 0.5424
Proportion  = 0.5425
For 360 dice to throw 60 sixes:
Probability = 0.5219
Proportion  = 0.5250
```

20. דו-קרב משולש (The three-cornered duel)^S

A, B, C מנהלות סדרה של קרבות בזוגות. לכל אחת הסתברות קבועה לנצח ללא קשר לזהות היריבה:

$$P(A) = 0.3, \quad P(B) = 1, \quad P(C) = 0.5\,.$$

מי שנפגעת לא ממשיכה להשתתף בקרבות. יורים את היריות בסדר קבוע A, B, C. אם שתי יריבות עדיין עומדות, היורה יכולה להחליט למי היא יורה. אפשר להניח שכל אחת מקבלת החלטה מיבטיבית נגד מי לירות.

שאלה 1: מה האסטרטגיה המיטבית של A?

שאלה 2: נניח ש-A יורה את היריה הראשונה באוויר. האם זו אסטרטגיה טובה יותר?

רמז: חשב את ההסתברויות המותנות של A לנצח בתלות בהחלטתה אל מי לירות קודם B או C. **פתרון**

סימון: $Y \xrightarrow{H} X$ מסמן ש-X יורה לעבר Y ופוגע. $Y \xrightarrow{M} X$ מסמן ש-X יורה לעבר Y ומחטיא.

תשובה 1: חשב את ההסתברויות המותנות ש-A תנצח.

מקרה 1: A בוחרת לירות את היריה הראשונה לעבר C.

אם $A \xrightarrow{M} C$ (הסתברות 0.7) אזי $B \xrightarrow{H} C$ כי C היא מסוכנת יותר מ-A. כעת A יורה שוב לעבר B עם הסתברות 0.3 לפגוע, אבל אם A מחטיאה, $B \xrightarrow{H} A$ בהסתברות 1 ו-A מפסידה.

אם $A \xrightarrow{H} C$ (הסתברות 0.3) אזי $B \xrightarrow{H} A$ 1 ו-A מפסידה.

חשב את התוחלת עם הערכים 1 כאשר A מנצחת ו-0 כאשר A מפסידה:

$$E(\text{מנצחת } A | C \text{ בוחרת לירות קודם ב- } A) =$$

$$\overbrace{1 \cdot (0.7 \cdot 0.3)}^{A\xrightarrow{M}C,A\xrightarrow{H}B} + \overbrace{0 \cdot (0.7 \cdot 0.7 \cdot 1)}^{A\xrightarrow{M}C,A\xrightarrow{M}B,B\xrightarrow{H}A} + \overbrace{0 \cdot (0.3 \cdot 1)}^{A\xrightarrow{M}C,B\xrightarrow{H}A} = 0.2100\,.$$

מקרה 2: A בוחרת לירות את היריה הראשונה לעבר B.

אם $A \xrightarrow{M} B$ (הסתברות 0.7), אזי כמו במקרה הקודם $B \xrightarrow{H} C$ ול-A הזדמנות אחת נוספת לפגוע ב-B (הסתברות 0.3), אחרת $B \xrightarrow{H} A$ בהסתברות 1 ו-A מפסידה.

אם $B \xrightarrow{H} A$ (הסתברות 0.3) אזי A, C יורות לסירוגין אחת לעבר השנייה עד שאחת נפגעת. התסריטים האפשריים הם:

$$\begin{array}{ll}
(1) & C \xrightarrow{H} A \\
(2) & C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{H} C \\
(3) & C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{H} A \\
(4) & C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{H} C \\
(5) & C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{H} A \\
(6) & C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{M} C \xrightarrow{M} A \xrightarrow{H} C \\
 & \dots
\end{array}$$

ההסתברות ש-A מנצחת כי היא פוגעת ב-C בסופו של דבר היא סכום ההסתברויות של הסתריטים הזוגיים ברשימה:

$$\begin{aligned}
P(\text{מנצחת } A \mid B \text{ ב- פוגעת } A) &= (0.5 \cdot 0.3) + \\
&\quad (0.5 \cdot 0.7)(0.5 \cdot 0.3) + \\
&\quad (0.5 \cdot 0.7)(0.5 \cdot 0.7)(0.5 \cdot 0.3) + \cdots \\
&= 0.15 \sum_{i=0}^{\infty} 0.35^i = \frac{0.15}{1 - 0.35} = \frac{3}{13} \approx 0.2308\,.
\end{aligned}$$

באופן דומה, ההסתברות ש-C מנצחת היא $\frac{0.5}{1-0.35} = \frac{1}{13} \approx 0.0760$.

התוחלת היא:

$$E(\text{מנצחת } A) = E(\text{מנצחת } A \mid B \text{ מחטיאה את } A) + E(\text{מנצחת } A \mid B \text{ פוגעת ב- } A) =$$

$$\overbrace{1 \cdot (0.7 \cdot 1 \cdot 0.3)}^{A \xrightarrow{M} B,\, B \xrightarrow{H} C,\, A \xrightarrow{H} B} + \overbrace{0 \cdot (0.7 \cdot 1 \cdot 0.7 \cdot 1)}^{A \xrightarrow{M} B,\, B \xrightarrow{H} C,\, A \xrightarrow{M} B,\, B \xrightarrow{H} A} +$$

$$\overbrace{1 \cdot (0.2308)}^{A \xrightarrow{H} B,\, C \xleftrightarrow{H} * A,\, C \xrightarrow{H} A} + \overbrace{0 \cdot (0.3 \cdot (0.0769))}^{A \xrightarrow{H} B,\, C \xleftrightarrow{H} A,\, C \xrightarrow{H} A} \approx 0.2792\,,$$

שהיא גבוהה יותר מהתוחלת לנצח על ידי ירי תחילה לעבר C.

תשובה 2: אם A יורה לאוויר ולא פוגעת באף יריבה אזי $C \xrightarrow{H} B$ בהסתברות 1 ו-A יכולה לנסות לפגוע ב-B בהסתברות 0.3. התוחלת היא:

$$E(\text{מנצחת } A \mid \text{יורה באוויר } A) = 1 \cdot (0.3) + 0 \cdot (0.7) = 0.3\,,$$

שהיא גבוהה יותר מהתוחלת של שתי האסטרטגיות האחרות!

סימולציה

```
For A fires first at C:
Expectation of wins = 0.2100
Average wins        = 0.2138
```

```
For A fires first at B:
Expectation of wins = 0.2792
Average wins        = 0.2754
For A fires in the air:
Expectation of wins = 0.3000
Average wins        = 0.3000
```

21. לדגום עם או בלי החזרות? (Should you sample with or without replacement?)^{D,S}

בכד A נמצאים 2 כדורים אדומים ו-1 כדור ירוק, ובכד B נמצאים 101 כדורים אדומים ו-100 כדורים ירוקים. בחר כד אחד בצורה אקראי ושלוף שני כדורים באופן אקראי מהכד שנבחר. אתה מנצח אם אתה מזהה נכון אם כדורים נשלפו מכד A או כד B.

חשב את ההסתברויות לניצחון של כל אחד מהחוקים שלהן וקבע איזה חוק נותן את ההסתברות הגבוהה ביותר לניצחון.

שאלה 1: אתה מחזיר את הכדור הראשון לפני השליפה השנייה.

שאלה 2: אתה לא מחזיר את הכדור הראשון לפני השליפה השנייה.

שאלה 3: לאחר נשלף הכדור הראשון אתה יכול להחליט אם להחזיר אותו או לא.

רמז: כאשר מחשבים הסתברויות:

$$\frac{101}{201} \approx \frac{100}{201} \approx \frac{100}{200} \approx \frac{1}{2}\,.$$

פתרון

יש ארבע תוצאות שנסמן RR, RG, GR, GG. לכל אחד מהחוקים נחשב את ההסתברויות המתנות של ארבעת התוצאות תלוי בזהות הכד A או B שנבחר תחילה. אחר כך נכפיל את ההסתברויות ב-$1/2$ כדי לקחת בחשבון את הבחירה האקראית של הכד.

תשובה 1: שליפה עם החזרה:

$$\begin{array}{rcccl}
P(RR|A) &=& \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} &=& \frac{4}{9}\\
P(RR|B) &=& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{4}\\
\hline
P(RG|A) &=& \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} &=& \frac{2}{9}\\
P(RG|B) &=& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{4}\\
\hline
P(GR|A) &=& \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} &=& \frac{2}{9}\\
P(GR|B) &=& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{4}\\
\hline
P(GG|A) &=& \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} &=& \frac{1}{9}\\
P(GG|B) &=& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{4}
\end{array}$$

אם התוצאה היא RR ההסתברות שכד A נבחר $(4/9)$ גבוהה מהסתברות שכד B נבחר $(1/4)$; אחרת, ההסתברות ש-B נבחר גבוהה יותר. לכן:

$$P(\text{ניצחון}) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = \frac{43}{72} \approx 0.5972\,.$$

תשובה 2: שליפה ללא החזרה:

$$\begin{array}{rcccl}
P(RR|A) &=& \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{3}\\
P(RR|B) &=& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{4}\\
\hline
P(RG|A) &=& \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{3}\\
P(RG|B) &=& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{4}\\
\hline
P(GR|A) &=& \frac{1}{3}\cdot 1 &=& \frac{1}{3}\\
P(GR|B) &=& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{4}\\
\hline
P(GG|A) &=& \frac{1}{3}\cdot 0 &=& 0\\
P(GG|B) &=& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{4}
\end{array}$$

אם התוצאה היא GG ההסתברות שכד B נבחר גבוהה יותר (כמובן!) מההסתברות שכד A נבחר; אחרת, ההסתברות שכד A נבחר גבוהה יותר. לכן:

$$P(\mathrm{win}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8} = 0.6250\,,$$

שהיא גבוהה יותר מההסתברות לניצחון כאשר שליפה היא עם החזרה.

תשובה 3: ההחלטה נעשית על סמך התוצאות מהשליפה הראשונה.

אם השליפה הראשונה היא מכד A ההסתברויות חייבות להיות מותנות בהחלטה להחזיר או לא. שליפה הראשונה היא מכד B לא משפיעה על ההסתברויות בגלל הקירוב ברמז.

$$\begin{array}{lcccl}
P(RR|A,w) &=& \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} &=& \frac{4}{9}\\
P(RR|A,w/o) &=& \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{3}\\
P(RR|B) &=& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{4}\\
\hline
P(RG|A,w) &=& \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} &=& \frac{2}{9}\\
P(RG|A,w/o) &=& \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{3}\\
P(RG|B) &=& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{4}\\
\hline
P(GR|A,w) &=& \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} &=& \frac{2}{9}\\
P(GR|A,w/o) &=& \frac{1}{3}\cdot 1 &=& \frac{1}{3}\\
P(GR|B) &=& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{4}\\
\hline
P(GG|A,w) &=& \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} &=& \frac{1}{9}\\
P(GG|A,w/o) &=& \frac{1}{3}\cdot 0 &=& 0\\
P(GG|B) &=& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{4}
\end{array}$$

אם כדור אדום נשלף ראשונה אזי $\frac{1}{4} > \frac{4}{9}$ ו-$\frac{1}{4} < \frac{2}{9}$ עם החזרה, לעומת $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ ו-$\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ ללא החזרה, לכן הכדור השני יכול לעזור בזיהוי הכד רק אם השליפה נעשית **עם** החזרה: אם אדום כד A ואם ירוק כד B. נבחר שליפה עם החזרה ו:

$$P(\text{ניצחון אם אדום ראשון}) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{72}\,.$$

אם כדור ירוק נשלף ראשון אזי $\frac{1}{4} < \frac{2}{9}$ ו-$\frac{1}{4} > \frac{1}{9}$ עם החזרה, לעומת $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ ו-$\frac{1}{4} > 0$ ללא החזרה, לכן הכדור השני יכול לעזור בזיהוי הכד רק אם השליפה נעשית **בלי** החזרה ו:

$$P(\text{ניצחון אם ירוק ראשון}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{24}\,.$$

ההסתברות לניצחון היא:

$$P(\text{ניצחון}) = \frac{25}{72}+\frac{7}{24} = \frac{23}{36} \approx 0.6389\,.$$

ההסתברות הגבוהה ביותר לניצחון מתקבלת כאשר ההחלטה לשלוף עם או בלי החזרה מתקבל בהתאם לתוצאה של השליפה הראשונה.

סימולציה

```
With replacement:
Expectation of winning = 0.5972
Average wins           = 0.5976
Without replacement:
Expectation of winning = 0.6250
Average wins           = 0.6207
Decide after first draw:
Expectation of winning = 0.6389
Average wins           = 0.6379
```

22. הקלפי (The ballot box)^S

שתי מועמדות A ו-B מתמודדות בבחירות. A קיבלה a קולות ו-B קיבלה b קולות, $a > b$. הקולות נספרים אחד-אחד וסכומי הביניים $(a_i, b_i), 1 \leq i \leq a+b$ מתעדכנים לאחר ספירת כל קול. מה ההסתברות שעבור לפחות i אחד, $a_i = b_i$?

שאלה 1: פתור עבור $a=3, b=2$ על ידי הכנת רשימה (a_i, b_i) עבור $1 \leq i \leq 5$.

שאלה 2: פתור עבור כל $a > b$.

רמז 1: מה ניתן להגיד על זהות המועמדת שמובילה עד לתיקו **ראשון**?

Hint 2: מה החשיבות של הקול הראשון שנספר. **פתרון**

תשובה 1: מספר הדרכים לסדר את סכומי הביניים הוא $10 = \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$ כי המיקום הקולות עבור מועמדת אחת קובע את מיקום הקולות של המועמדת השנייה. בטבלה שלהלן רשומים הסידורים האפשריים של הקולות וסכומי הביניים כאשר התיקו הראשון מודגש:

$$\begin{array}{ccccc@{\qquad\qquad}ccccc}
(1,0) & (2,0) & (3,0) & (3,1) & (3,2) & A & A & A & B & B \\
(1,0) & (2,0) & (2,1) & (3,1) & (3,2) & A & A & B & A & B \\
(1,0) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (2,1) & (3,1) & (3,2) & A & B & A & A & B \\
(0,1) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (2,1) & (3,1) & (3,2) & B & A & A & A & B \\
(1,0) & (2,0) & (2,1) & (\mathbf{2},\mathbf{2}) & (3,2) & A & A & B & B & A \\
(1,0) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (2,1) & (2,2) & (3,2) & A & B & A & B & A \\
(0,1) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (2,1) & (2,2) & (3,2) & B & A & A & B & A \\
(1,0) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (1,2) & (2,2) & (3,2) & A & B & B & A & A \\
(0,1) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) & (1,2) & (2,2) & (3,2) & B & A & B & A & A \\
(0,1) & (0,2) & (1,2) & (\mathbf{2},\mathbf{2}) & (3,2) & B & B & A & A & A
\end{array}$$

קיימים מצבי תיקו בכל הסידורים פרט לשני הראשונים ולכן:

$$P(\text{קיים תיקו עם } (3,2) \text{ קולות}) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}\,.$$

תשובה 2: נתחיל את הפתרון עם דיון איך לגשת לפתרון של השאלה השנייה. הנה מספר סידורים עבור $(a,b)=(3,2)$ עד לקבלת **התיקו הראשון**:

A leads until tie	B leads until tie
$A \quad B$	$B \quad A$
$A \quad A \quad B \quad B$	$B \quad B \quad A \quad A$

לכל סידור בו A מובילה עד לתיקו הראשון, קיים סידור שהוא תמונת ראי בו B מובילה עד לקבלת התיקו הראשון. השיקוף מתקבל על ידי החלפת כל A ב-B ולהפך.

לפני התיקו הראשון אחת מהמועמדות חייבת להוביל. אם הקול הראשון שנספר הוא עבור B חייב להיות תיקו בהמשך הספירה כי $a>b$.

ההסתברות שהקול הראשון היא עבור B היא:

$$P(\text{קול ראשון עבור } B) = \frac{b}{a+b}\,.$$

על ידי שיקוף המיקומים של הקולות, מספר הסידורים שמובילים לתיקו שמתחילים בקול עבור A שווה למספר הסידורים שמובילים לתיקו שמתחילים בקול עבור B. לכן:

$$P(\text{קיים תיקו}) = 2\cdot\frac{b}{a+b}\,.$$

בדיקה:

$$P(\text{קיים תיקו עם } (3,2) \text{ קולות}) = 2\cdot\frac{2}{2+3} = \frac{4}{5}\,.$$

סימולציה

```
For a =  3, b =  2:
```

```
Probability of a tie = 0.8000
Proportion of ties   = 0.8118
For a = 10, b =  8:
Probability of a tie = 0.8889
Proportion of ties   = 0.8977
For a = 20, b = 18:
Probability of a tie = 0.9474
Proportion of ties   = 0.9354
```

23. תיקו בהשוואת מטבעות (Ties in matching pennies)^{D,S}

הטל זוג מטבעות הוגנות N פעמים עבור N זוג, ורשום את מספר הפעמים שהזוגיות היא זוגי (עץ-עץ או פלי-פלי) ומספר הפעמים שהזוגיות היא אי-זוגי (עץ-פלי או פלי-עץ). מה ההסתברות לקבל תיקו (לא כולל התיקו $0-0$ בהתחלה)?

שאלה 1: פתור עבור $N=4$ על ידי רישום כל התוצאות האפשריות.

שאלה 2: פתור עבור $N=6$ על ידי פיתוח נוסחה להסתברות.

שאלה 3: פתח נוסחה עבור כל N זוגי.

שאלה 4: הסבר מדוע ההסתברות למספר אי-זוגי $N+1$ שווה להסתברות של המספר הזוגי N.

רמז: השתמש בפתרון לבעיה 22. **פתרון**

תשובה 1: נסמן את ההטלות עם זוגיות זוגי ב-E וההטלות עם זוגיות אי-זוגי ב-O. בעשרה מתוך שש עשרה סידורי ההטלות יש תיקו (מודגש):

EOOO	**EOOE**	**EOEO**	**EOEE**	**EEOO**	EEOE	EEEO	EEEE
OOOO	OOOE	OOEO	**OOEE**	**OEOO**	**OEOE**	**OEEO**	**OEEE**

תשובה 2: לפי בעיה 22:

$$P(i \text{ תיקו בהטלה}) = \begin{cases} 2i/N & \text{if } i \leq N/2 \\ 2(N-i)/N & \text{if } i \geq N/2\,, \end{cases} \tag{13}$$

כי בבעיית הקלפי ראנו שהערך הנמוך יותר קובע את ההסתברות.

החישובים שלהלן די מסובכים לכן נצדיק כל חישוב לפרטים.

ההסתברות ל-i זוגיים ניתן על ידי ההתפלגות הבינומית:

$$P(i \text{ זוגיים}) = \binom{N}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-i} = \binom{N}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{N} = 2^{-N}\binom{N}{i}. \tag{14}$$

ההסתברות לתיקו היא הסכום מעל i של ההסתברות לקבל i זוגיים כפול ההסתברות לתיקו בהטלה ה-i (משוואה 13). For $N=6$:

$$P(\text{ties}) = 2\cdot 2^{-6}\left[\frac{0}{6}\binom{6}{0}+\frac{1}{6}\binom{6}{1}+\frac{2}{6}\binom{6}{2}+\frac{3}{6}\binom{6}{3}+\frac{2}{6}\binom{6}{4}+\frac{1}{6}\binom{6}{5}+\frac{0}{6}\binom{6}{6}\right]. \tag{15}$$

משוואה 16 נובעת ממשוואה 15 על ידי השמטת שני הגורמים שהם אפס, כתיבת ה combination??? עם עצרת, צימצום $1/6$ מ-$6!$:

$$P(\text{ties}) = 2^{-5}\left[1\cdot\frac{5!}{1!5!} + 2\cdot\frac{5!}{2!4!} + 3\cdot\frac{5!}{3!3!} + 2\cdot\frac{5!}{4!2!} + 1\cdot\frac{5!}{5!1!}\right]. \tag{16}$$

משוואה 17 מתקבלת מצימצום i מ-$i!$:

$$P(\text{ties}) = 2^{-5}\left[\frac{5!}{1!5!} + \frac{5!}{1!4!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{5!1!}\right]. \tag{17}$$

כדי לקבל משוואה 18 ממשוואה 17 חבר וחסר $\frac{5!}{3!2!}$:

$$P(\text{ties}) = 2^{-5}\left[\left(\frac{5!}{1!5!} + \frac{5!}{1!4!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{5!1!}\right) - \frac{5!}{3!2!}\right]. \tag{18}$$

משוואה 19 מתקבלת על ידי הצבת $0!$ במקום $1!$:

$$P(\text{ties}) = 2^{-5}\left[\left(\frac{5!}{0!5!} + \frac{5!}{1!4!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{5!0!}\right) - \frac{5!}{3!2!}\right]. \tag{19}$$

נבטא בחזרה את הביטוי עם עצרת ל combinations ונקבל את המשוואה 20:

$$P(\text{ties}) = 2^{-5}\left[\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} - \binom{5}{3}\right]. \tag{20}$$

לבסוף, מהוואה 21 מתקבלת ממשפט הבינום:

$$P(\text{ties}) = 2^{-5}\left(2^5 - 10\right) = \frac{11}{16} \approx 0.6875\,. \tag{21}$$

תשובה 3: חשב את אותם חישובים כמו ב**תשובה 2:** עם N שרירותי. התוצאה היא:

$$P(\text{ties}) = 2^{-N+1}\left[2^{N-1} - \binom{N-1}{N/2}\right] = \left[1 - \binom{N-1}{N/2}\Big/\,2^{N-1}\right].$$

תשובה 4: התיקו הראשון בהטלה ה-$N+1$ מתרחש רק עם הספירה כמעט זהות לאחר ההטלה ה-N:

$$\begin{array}{l}((N/2)-1,(N/2)+1)\\((N/2),(N/2))\\((N/2)+1,(N/2)-1)\end{array}$$

אבל ללא תלות התוצאת ההטלה הסופית הספירות לא יהיו שוות.

סימולציה

```
For  4 tosses:
Probability of ties = 0.6250
Proportion of ties  = 0.6192
```

```
For  6 tosses:
Probability of ties = 0.6875
Proportion of ties  = 0.6900
For  7 tosses:
Probability of ties = 0.6875
Proportion of ties  = 0.6811
For 10 tosses:
Probability of ties = 0.7539
Proportion of ties  = 0.7559
For 20 tosses:
Probability of ties = 0.8238
Proportion of ties  = 0.8255
```

25. אורכים של מיתרים אקראיים (Lengths of random chords)[S]

בחר מיתר אקראי במעגל היחידה. מה ההסתברות שאורכו של המיתר גדול מ-1?

כדי לפתור את הבעיה עליך להחליט איך לבחור מיתר אקראי. פתור את הבעיה עבור מהאפשרויות שלהלן:

שאלה 1: התפלגות אחידה של מרחק המיתר מהמרכז המעגל.

שאלה 2: התפלגות אחידה של הנקודה האמצעית של המיתר בתוך המעגל.

שאלה 3: התפלגות נקודות הקצה של המיתר על היקף המעגל. **פתרון**

תשובה 1: מיתר ארוך יותר מהרדיוס אם הוא קרוב יותר למרכז ממיתר באורך 1. יהי $\overline{AB}$ מיתר באורך 1 ובנה גובה $\overline{OH}$ מהמרכז O אל המיתר (איור איור 4(א)). בגלל $\triangle AOB$ שווי-צלעות, $\triangle OHB$ הוא משולש ישר-זווית ואורכו של הגובה הוא:

$$h = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

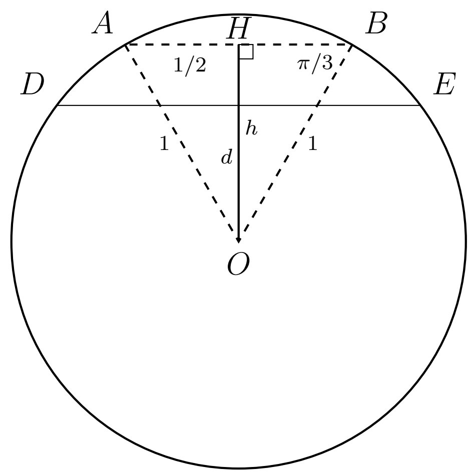
יהי d המרחק של המיתר $\overline{DE}$ מהמרכז. לפי ההנחה ההתפלגות של d אחידה ב-$(0,1)$ ולכן:

$$P(\overline{DE} > 1) = P(d < h) = \frac{h}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866\,.$$

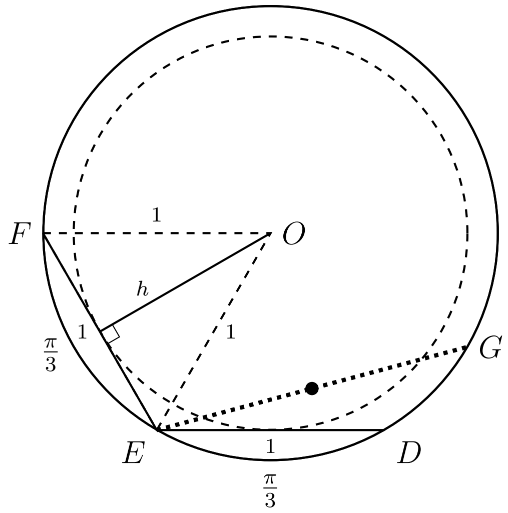
תשובה 2: בנה מעגל עם מרכז O ורדיוס h כאשר h הוא אורכו של גובה לגובה למיתר באורך 1. משיק לכל נקודה על המעגל יהיה המיתר $\overline{FE}$ שאורכו 1. אורכו של כל מיתר $\overline{EG}$ שנקודת האמצע שלו נמצאת בתוך המעגל יהיה גדול מ-1 (איור איור 4(ב)). לכן ההסתברות שאורכו של מיתר גדול מ-1 היא היחס בין השטחים של שני המעגלים:

$$P(\overline{EG} > 1) = \frac{\pi\cdot h^2}{\pi\cdot 1^2} = h^2 = \frac{3}{4}\,.$$

הסתברות זו היא הריבוע של ההסתברות שחישבנו בשאלה הקודמת.



איור 4(א) מרחק של מיתר מהמרכז בפילוג מ-$(0,1)$



איור 4(ב) נקודת האמצע של מיתר עם פילוג בתוך מעגל וקצות המיתר בפילוג בהיקף

תשובה 3: בנקודה שרירותית על ההיקף של מעגל היחידה (E באיור איור 4(ב)). כל נקודה אחרת על ההיקף (כגון G באיור) מגדירה מיתר שאורכו גדול באחד אלא אם הנקודה שנבחרה נופל על הקשתות $\widehat{EF}$ או $\widehat{ED}$. לכן ההסתברות היא היחס בין הקשת $\widehat{FD}$ להיקף המעגל:

$$P(\overline{EG} > 1) = \frac{(2\pi - (2\pi/3)) \cdot 1}{2\pi \cdot 1} = \frac{2}{3}\,.$$

סימולציה הסימולציה היא עבור בחירת שתי נקודות על ההיקף.

```
Probability of long chords = 0.6667
Proportion of long chords  = 0.6627
```

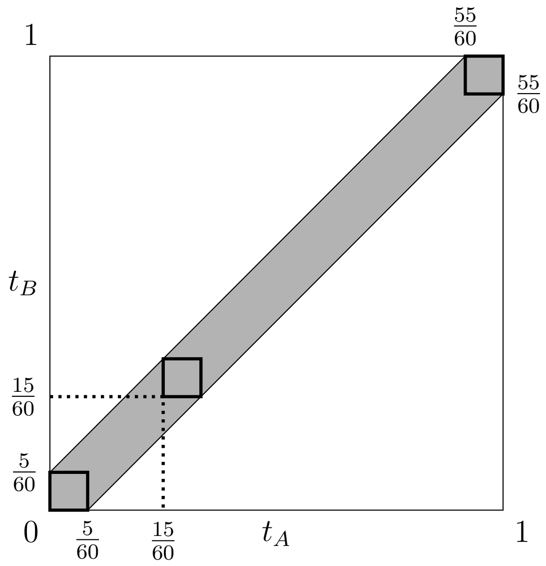
26. ממהרים לדו-קרב (The hurried duelers)^S

A ו-B מגיעים לנקודת מפגש בזמן אקראי עם התלפגות אחידה בתוך פרק זמן של שעה. אם A מגיע קודם ו-B לא מגיע במשך 5 דקות, A עוזב. באופן דומה אם B מגיע קודם ו-A לא מגיע במשך 5 דקות, B עוזה. מה ההסתברות שהם יפגשו?

בפרק הזמן של שעה הזמן הוא **רציף** בתחום $[0,1]$, כלומר, אי-אפשר **לספור** מספר בדיד של דקות או שניות כדי לחשב הסתברויות. כן ניתן לחשב הסתברויות של **פרקי זמן**.

רמז: צייר גרף כאשר ציר ה-x הוא זמן הגעתו של A וציר ה-y הוא זמן הגעתו של B.   **פתרון**

ללא הגבלת הכלליות הנח ש-A מגיע קודם. אם A מגיע ב-$t_A = 0$ ואם B מגיע לפני $t_B = 5/60$ הם נפגשים, אחרת אין הם נפגשים. מצב זה מוצג באיור 5 על ידי ריבוע קטן בראשית הצירים. אם A מגיע יותר מאוחר אזי גם B חייב להגיע באותו איחור; למשל, אם A מגיע ב-$t_A = 15$, B חייב להגיע



איור 5: זמנים המבטיחים מפגש בין A ל-B

בין $t_B = 15$ ו-$t_B = 20$. לכן הפגישה תתקיים בריבוע המתקבל על ידי הזזת הריבוע ב-15 מ-$(0,0)$ ל-$(15/60, 15/60)$.

ההסתברות לפגישה היא היחס בין השטח האפור בגרף לשטח הריבוע הגדול. קל יותר לחשב את המשלים שהוא היחס בין שטח המשולשים הלבנים לשטח הריבוע הגדול:

$$\begin{aligned} P(\text{נפגשים } A, B) &= 1 - P(\text{לא נפגשים } A, B) \\ &= 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{55}{60} \cdot \frac{55}{60}\right) = \frac{23}{144} \approx 0.1597\,. \end{aligned}$$

סימולציה

```
Probability of meeting    = 0.1597
Proportion of meetings    = 0.1549
```

27. לתפוס את הזייפן הזהיר (Catching the cautious counterfeiter)^S

נתון n קופסאות ובכל אחת n מטבעות כאשר מטבע אחד בכל קופסה מזויף. שלוף מטבע אחד מכל קופסה ובדוק אם הוא מזויף או אמיתי. מה ההסתברות שכל המטבעות שנשלפות מזויפים?

שאלה 1: פתור עבור $n = 10$.

שאלה 2: פתור עבור $n = 100$.

שאלה 3: פתור עבור n שרירותי.

שאלה 4: פתח נוסחה עבור ההסתברות כאשר n שואב לאיסוף. **פתרון**

השליפות בלתי תלויות ולכן ההסתברות היא מכפלת ההסתברות של כל שליפה.

תשובה 1:

$$P(\text{כל המטבעות אמיתיים}) = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = 0.3487\,.$$

תשובה 2:

$$P(\text{כל המטבעות אמיתיים}) = \left(\frac{99}{100}\right)^{100} = 0.3660\,.$$

תשובה 3:

$$P(\text{כל המטבעות אמיתיים}) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\,.$$

תשובה 4:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\,. \tag{22}$$

ניתן להוכיח את הגבול בעזרת חשבון דיפרנציאלי. תחילה ניתן לחשב את הגבול של הלוגריתם של הצד השמולי של משוואה 22:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1/n}\,.$$

אם נחשב את הגבול נקבל $(ln\ 1)/0 = 0/0$ אבל לפי חוק l'Hôpital נוכל להחליף את הביטוי בחילוק הנגזרות:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}(-(-n^{-2}))}{-n^{-2}} = -1$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \approx 0.3679\,.$$

סימולציה

```
For  10 boxes:
Probability of all real = 0.3487
Proportion all real     = 0.3480
For 100 boxes:
Probability of all real = 0.3660
Proportion all real     = 0.3730
For 200 boxes:
Probability of all real = 0.3670
Proportion all real     = 0.3690
```

28. לתפוס את הזייפן החמדן (Catching the greedy counterfeiter)^S

נתון n קופסאות ובכל אחת n מטבעות מהם m מזוייפים. שלוף מטבע אחת מכל קופסה ובדוק אם הוא מזויף או אמיתי. מה ההסתברות $P(n,m,r)$ ש-r מתוך המטבעות הם מזוייפים?

שאלה 1: פתח נוסחה עבור $P(n,m,r)$.

שאלה 2: חשב $P(20,10,2), P(20,10,8), P(20,5,2), P(20,5,4)$. **פתרון**

תשובה 1: יש $\binom{n}{r}$ אוספים של קופסאות מהן המטבעות המזוייפים נשלפו. מההתפלגות הבינומית:

$$P(n,m,r) = \binom{n}{r} \left(\frac{m}{n}\right)^r \left(\frac{n-m}{n}\right)^{n-r} .$$

תשובה 2:

$$\begin{aligned}
P(20,10,2) &= \binom{20}{2} \left(\frac{10}{20}\right)^2 \left(\frac{10}{20}\right)^{18} \approx 0.0002 \\
P(20,10,8) &= \binom{20}{8} \left(\frac{10}{20}\right)^8 \left(\frac{10}{20}\right)^{12} \approx 0.1201 \\
P(20,5,2) &= \binom{20}{2} \left(\frac{5}{20}\right)^2 \left(\frac{15}{20}\right)^{18} \approx 0.0669 \\
P(20,5,4) &= \binom{20}{4} \left(\frac{5}{20}\right)^4 \left(\frac{15}{20}\right)^{12} \approx 0.1952 .
\end{aligned}$$

Mosteller מראה שעבור m, r נתונים, כאשר n שואף לאינסוף:

$$\lim_{n\to\infty} P(n,m,r) = \frac{e^{-m} m^r}{r!} . \tag{23}$$

סימולציה

```
For 10 bad coins,  2 draws:
Probability of counterfeit  = 0.0002
Proportion counterfeit      = 0.0002
For 10 bad coins,  8 draws:
Probability of counterfeit  = 0.1201
Proportion counterfeit      = 0.1181
For  5 bad coins,  2 draws:
Probability of counterfeit  = 0.0669
Proportion counterfeit      = 0.0688
For  5 bad coins,  4 draws:
Probability of counterfeit  = 0.1897
Proportion counterfeit      = 0.1905
```

29. עובש בג׳לטין (Moldy gelatin)^S

נתון לוח מלבני שמחולק ל-n משבצות ריבועיות קטנות. בכל משבצת יש r חיידקים בממוצע.

שאלה 1: פתח נוסחה להסתברות שיש בדיוק r חיידקים ב-n המשבצות.

שאלה 2: חשב את ההסתברות עבור $n = 100, r = 3$.

רמז: בעיה זו דומה לבעיה 28.

פתרון

תשובה 1: תהי p ההסתברות שבמשבצת אחת נמצא חידק. (ניתן להתעלם מהאפשרות חידק את מוכל באופן חלקי בשתי משבצות או יותר.) m, המספר הממוצע של חיידקים במשבצת, היא מספר המשבצות n כפול ההסברות p שחידק נמצא במשבצת. $P(n, m, r)$, ההסתברות שיש בדיוק r חיידקים ב-n משבצות ניתנת על ידי ההתפלגות הבינומית:

$$P(n,m,r) = \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^r\left(\frac{n-m}{n}\right)^{n-r}\,.$$

תשובה 2:

$$P(10,3,3) = \binom{100}{3}\left(\frac{3}{100}\right)^3\left(\frac{97}{100}\right)^{97} \approx 0.2275\,.$$

משוואה 23 מתאים גם כאן ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} P(n,3,3) = \frac{e^{-3}\cdot 3^3}{3!} \approx 0.2240\,.$$

סימולציה

```
For  20 squares:
Probability of exactly  3 microbes  = 0.2428
Proportion of exactly   3 microbes  = 0.2436
Probability of exactly  5 microbes  = 0.2023
Proportion of exactly   5 microbes  = 0.1954
For 100 squares:
Probability of exactly  3 microbes  = 0.2275
Proportion of exactly   3 microbes  = 0.2247
Probability of exactly  5 microbes  = 0.1800
Proportion of exactly   5 microbes  = 0.1851
```

31. ימי הולדת זהים (Birthday pairings)^S

בחר באקראי 23 אנשים ושאל כל אחד ליום ההולדת שלו. הנח התפלגות אחידה של 365 ימי ההולדת השונים (אף אחד לא נולד ב-29 לפברואר). הראה שההסתברות שלפחות שניים מהם יהיו יום הולדת זהה היא גדולה מ-0.5. **פתרון**

נחשב את ההסתברות ש-**אף אחד** מה-23 אין ימי הולדת זהים ונראה שהיא פחות מ-0.5. בחר יום הולדת ראשון בצורה אקראית, את יום ההולדת הבא בחר מתוך שאר הימים, את יום ההולדת הבא בחר מתוך שאר הימים, כך הלאה:

$$\begin{aligned} P(\text{אין זוג עם ימי הולדת זהים}) &= \overbrace{\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\;\cdots\;\cdot\frac{344}{365}\cdot\frac{343}{365}}^{23\text{ fractions}} \\ &= \frac{365!}{365^{23}\cdot 342!} \approx 0.4927\,. \end{aligned}$$

רוב האנשים מנחשים שצריכים יותר מ-23 כדי למוצא שניים עם ימי הולדת זהים.

מחשבון מודרני מסוגל לחשב את ההסתברות, אבל שווה לחשבה באמצעות הקירוב של Stirling שהוא $\ln n! \approx n\ln n - n$:

$$\begin{aligned} \ln P(\text{אין זוג עם ימי הולדת זהים}) &= \ln\left(\frac{365!}{342!\cdot 365^{23}}\right) = \ln 365! - \ln 342! - 23\ln 365 \\ &\approx (365\ln 365 - 365) - (342\ln 342 - 342) - 23\ \ln 365 \\ &\approx -0.7404 \\ P(\text{אין זוג עם ימי הולדת זהים}) &\approx e^{-0.7404} = 0.4769\,. \end{aligned}$$

הקורא מוזמן לחשב את ההסתברות עם הקירוב המדוייק יותר:

$$\ln n! \approx n\ln n - n + \frac{1}{6}\left(8n^3 + 4n^2 + n + \frac{1}{30}\right) + \frac{1}{2}\ln\pi\,.$$

סימולציה

```
For 21 people:
Expectation of no pairs = 0.5563
Average no pairs        = 0.5497
For 22 people:
Expectation of no pairs = 0.5243
Average no pairs        = 0.5237
For 23 people:
```

```
Expectation of no pairs = 0.4927
Average no pairs        = 0.4933
For 24 people:
Expectation of no pairs = 0.4617
Average no pairs        = 0.4576
For 25 people:
Expectation of no pairs = 0.4313
Average no pairs        = 0.4345
```

32. למצוא עמית ליום ההולדת (Finding your birthmate)^S

עמית יום הולדת, בקיצור עמית, הוא אדם עם ביום הולדת זהה לשלך.

מדוע מציאת עמית היא בעיה שונה ממציאת זוג עם ימי הולדת זהים?

שאלה 1: כמה אנשים עליך לשאול כדי שההסתברות למציאת עמית גבוהה מ-0.5?

שאלה 2: פתור את הבעיה על ידי שימוש במשוואה 22 (עמוד 39). **פתרון**

להרבה אנשים יכול להיות יום הולדת זהה שנחשב כהצלחה במציאת זוג, אבל לא הצלחה במציאת עמית אלא אם יום ההולדת שלו זהה לשלך.

תשובה 1: מצא את המספר הקטן של אנשים כך ההסתברות שאף אחד מהם הוא עמית היא פחות מ-0.5. ההסתברות שהאדם הראשון שאתה שואל אינו עמית היא $364/365$, אבל זאת גם ההסתברות שהשני, השלילי, ..., אינו עמית. הפתרון הוא ה-k הקטן ביותר כך ש:

$$P(\text{לא נמצא עמית}) = \left(\frac{364}{365}\right)^k < \frac{1}{2}\,,$$

$k = 253$ is which:

$$\left(\frac{364}{365}\right)^{253} \approx 0.4995\,.$$

תשובה 2: משוואה 22 היא:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\,,$$

וניתן להשתמש בה לחשב את ההסתברות:

$$\begin{aligned}
P(\text{לא נמצא עמית}) &= \left(\frac{365-1}{365}\right)^k = \left[\left(\frac{364}{365}\right)^{365}\right]^{k/365}\\
&\approx e^{-k/365}\\
e^{-253/365} &\approx 0.5000\,.
\end{aligned}$$

סימולציה

```
For 251 people:
Probability of no match = 0.5023
Proportion no match     = 0.5120
For 252 people:
Probability of no match = 0.5009
Proportion no match     = 0.5055
For 253 people:
Probability of no match = 0.4995
Proportion no match     = 0.4984
For 254 people:
Probability of no match = 0.4982
Proportion no match     = 0.4987
For 255 people:
Probability of no match = 0.4968
Proportion no match     = 0.5078
```

33. השוואת הבעיות יום הולדת זהה ועמית ליום ההולדת

(Relating the birthday pairings and the birthmate problems)

סמן ב-$P_{\text{זוג}}(r)$ את ההסתברות שמתוך r אנשים לשניים יש יום הולדת זהה (בעיה 31), וב-$P_{\text{עמית}}(n)$ את ההסתברות שמתוך n אנשים לפחות אחד הוא עימית שלך (בעיה 32). נתון r עבור איזה n, $P_{\text{זוג}}(r) \approx P_{\text{עמית}}(n)$? **פתרון 1**

הפתרון מבוסס על [7].

סמן ב-$P_{\text{זוג}}(r)$ את המשלים ל-$P_{\text{אין זוג}}(r)$. מהפתרון לבעיית 31 מתקבל:

$$\begin{aligned}
P_{\text{אין זוג}}(r) &= \frac{365}{365} \cdot \frac{365-1}{365} \cdot \frac{365-2}{365} \cdot \cdots \cdot \frac{365-(r-1)}{365} \\
&= 1\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1-\frac{r-1}{365}\right) \\
&\approx 1-\frac{1}{365}-\frac{2}{365}-\cdots-\frac{r-1}{365} \\
&= 1-\frac{1+2+3+\cdots+(r-1)}{365} \\
&= 1-\frac{r(r-1)/2}{365},
\end{aligned}$$

כאשר הקירוב במשוואה השלישית מתקבל מהשמטת חזקות של $1/365$ גדולות מאחת כי הן קטנות מדי להשפיע באופן מהותי על התוצאה.

נסמן ב-$P_{\text{אין עמית}}(n)$ את המשלים ל-$P_{\text{עמית}}(n)$ ונשתמש באותו קירוב. מהפתרון לבעיה 32 נקבל:

$$\begin{aligned}P_{\text{אין עמית}}(n) &= \overbrace{\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{1}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{365}\right)}^{n}\\ &\approx 1-\overbrace{\frac{1}{365}-\frac{1}{365}\cdots-\frac{1}{365}}^{n}\\ &\approx 1-\frac{n}{365}\end{aligned}$$

לכן $P_{\text{אין עמית}}(n) \approx P_{\text{אין זוג}}(r)$ כאשר:

$$n=\frac{r(r-1)}{2}\,.$$

עבור $r=23$, $n=(23\cdot 22)/2=253$.

פתרון 2

Mosteller [7, p. 322] מביא את הפתרון האיטואיטיבי שלהלן:

> כאשר משווים בין בעיית הזוג ובעיית העמית, אנו שמים לב שעבור r אנשים בבעיית הזוג, קיימים $r(r-1)/2$ זוגות או **הזדמנויות** לידי הולדת זהים; לעומת זאת, אם שואלים n בבעיית העמית, קיימות רק n הזדמנויות כדי שאמצא עמית אחד או יותר.

מכאן הוא מסיק ש-$n \approx r(r-1)/2$.

ניתן להבין את הטיעון כך: בבעיית הזוג, בחר תאריך שרירותי ושאל אם לשניים מתוך r **תאריך זה** הוא יום ההולדת שלהם. יש

$$\binom{r}{2}=\frac{r!}{2!(r-2)!}=\frac{r(r-1)}{2}$$

דרכים שזה אפשרי. עבור בעיית העמית, יום ההולדת שלך נתון. יש אפשרות שלכל אחד מתוך n אנשים יש את אותו יום הולדת. על ידי השוואת שני ביטויים נקבל n עבורו $P_{\text{עמית}}(n) \approx P_{\text{זוג}}(r)$.

תוכל להריץ את הסימולציות לבעיות $31, 32$ ולבדוק תוצאה זו.

34. חופש בימי הולדת (Birthday holidays)^{D,S}

בית חרושת נסגר בכל יום שהוא יום הולדת של אחד העובדים. אין חופשות נוספות.

שאלה 1: כמה עובדים כדי להעסיק כדי לקבל את מספר ימי-העבודה המקסימליים בשנה אחת?

שאלה 2: מה התוחלת של היחס בין מספר ימי-העבודה המקסימליים לבין 365^2, מספר ימי-העבודה עם כל אחד מ-365 העובדים עובדים כל יום?

רמז: הוכח שחייב להיות מקסימום על ידי בדיקת מקרי הקצה. אחר כך פתח נוסחה של התוחלת של ימי-העבודה ביום אחד. **פתרון**

תשובה 1: בקצה אחד אם יש רק עובד אחד, יהיו 364 ימי-עבודה. אם יש שני עובדים מספר ימי-העבודה הוא $726 = 363 + 363$ (כאשר נתעלם המאפשרות הזניחה שלשניהם אותו יום הולדת). בקצה השני אם יש מיליון עובדים, מספר ימי-העבודה יהיה אפס כמעט בוודאות. אם מספר ימי-העבודה עולה ואחר כך חוזר לאפס, חייב להיות מקסימום בין הקצבות.

כדי לפשט את הסימונים, נסמן את המספר הימים בשנה ב-N ומספר העובדים ב-n.

לכל יום נתון ההסתברות שהוא יום-עבודה היא ההסתברות שלכל עובד יום הולדת בתאריך אחר:

$$P(\text{יום נתון הוא יום עבודה}) = \overbrace{\frac{N-1}{N} \cdot \; \cdots \; \cdot \frac{N-1}{N}}^{n} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n .$$

סמן ב-p את $\left(1 - \frac{1}{N}\right)$. אזי:

$$E(\text{ימי-עבודה ליום נתון}) = n \cdot p^n + 0 \cdot (1 - p^n) = np^n .$$

לכל ימי השנה אותה תוחלת כך שרק נותר להכפיל ב-N כדי לקבל את התוחלת לשנה:

$$E(\text{ימי-עבודה לשנה}) = Nnp^n . \tag{24}$$

כדי למצוא את המקסימום נגזור את משוואה 24 ביחס ל-n ונשמתש ב-$(p^n)' = p^n \ln p$ ניתן להוכיח בעזרת כלל השרשרת:

$$(p^n)' = ((e^{\ln p})^n)' = (e^{n \ln p})' = e^{n \ln p}(n \ln p)' = (e^{\ln p})^n \ln p = p^n \ln p .$$

הנגזרת של משוואה 24

היא:

$$(Nnp^n)' = N(p^n + n(p^n)') = N(p^n + np^n \ln p) ,$$

שהיא 0 כאשר:

$$n = -\frac{1}{\ln p} .$$

עבור $N = 365$ מתקבל $n = 364.5$ אבל n הוא מספר שלם ולכן המקסימום מתקבל ב-$n = 364$ או $n = 365$ שנותנים אותו תוחלת של ימי-עבודה:

$$\begin{aligned}
E(\text{ימי-עבודה לשנה}) &= Nnp^n \\
&= 365 \cdot 364 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{364} \\
&= 365 \cdot 364 \cdot \frac{365}{365} \left(\frac{364}{365}\right)^{364} \\
&= 365 \cdot 365 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{365} \\
&= 48944 .
\end{aligned}$$

תשובה 2: התוחלת של היחס היא:

$$E(\text{ימי-עבודה אפשריים/ימי-עבודה מקסימליים}) = \frac{365 \cdot 365 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{365}}{365 \cdot 365} = \left(\frac{364}{365}\right)^{365} \approx 0.3674 .$$

לפי משוואה 22:

$$\lim_{n\to\infty} E(\text{ימי-עבודה אפשריים/ימי-עבודה מקסימליים}) = \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{e}\,.$$

סימולציה

```
For 100 people
Expectation work-days    =  27742
Average work days        =  27743
Ratio work-days / 365**2 = 0.2082
For 250 people
Expectation work-days    =  45958
Average work days        =  45939
Ratio work-days / 365**2 = 0.3450
For 364 people
Expectation work-days    =  48944
Average work days        =  48936
Ratio work-days / 365**2 = 0.3674
For 365 people
Expectation work-days    =  48944
Average work days        =  48917
Ratio work-days / 365**2 = 0.3674
```

35. על שפת התהום (The cliff-hanger)^S

לקיק מוצב על ציר ה-x במקום 1. בכל מקום על ציר ה-x הוא יכול לצעוד צעד ימינה עם הסתברות $2/3$ וצעד שמאלה עם הסתברות $1/3$ (איור 6).

שאלה 1: מה ההסתברות שהחלקיק יגיע למקום 0 בסופו של דבר?

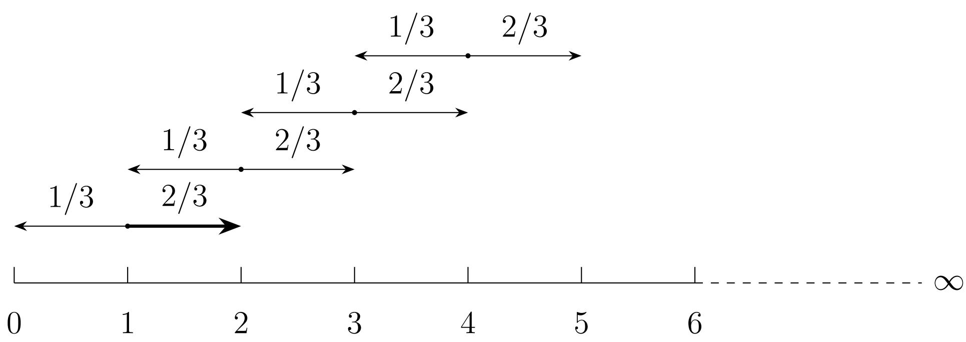
שאלה 2: אם ההסתברות של צעד ימינה היא p וההסתברות של צעד שמאלה היא $1-p$, מה ההסתברות שהחלקיק יגיע למקום 0 בסופו של דבר? נתח את האפשרויות לערכים שונים של p.

רמז: השתמש בהסתרויות מותנות לאחר הצעד הראשון.

פתרון

ניתן את הפרתונות של שתי השאלות ביחד כי חישוב ההסתברות ל-p לא קשה יותר מחישוב ל-$p = 2/3$.

תשובה 1,2: ננסה לחשב את ההסתברות בצורה ישירה. נסמן צעד שמאלה ב-L וצעד ימינה ב-R. החלקיק יכול להגיע ל-0 ישירות על ידי צעד L עם הסתברות $\frac{1}{3}$, או על ידי צעד RLL עם הסתברות $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$, או על ידי צעד $RRLLL$ עם הסתברות $\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3$, ... החישוב נראה כמו סידרה הנדסית פשוטה אבל הוא מתעלם האפשרויות כגון $RLRLL$.



איור 6: ?האם חלקיק יכול להגיע ל-0 (הציר אינסופי לימין)

נחשב את ההתסתברות שהחלקיק מגיעה ל-0 מ-1 בתלות בצעד הראשון:

$$\begin{aligned} P(\text{מגיע ל-0 מ-1}) &= P(\text{מגיע ל-0 מ-1}|\text{צעד ראשון שמאלה}) + \\ &\quad P(\text{מגיע ל-0 מ-1}|\text{צעד ראשון ימינה}) \\ &= (1-p)\cdot 1 + pP(\text{מגיע ל-1 מ-2})P(\text{מגיע ל-0 מ-1})\,. \end{aligned}$$

אבל ההסתברות להגיע ל-1 מ-2 היא בדיוק ההסתברות להגיע ל-0 מ-1. נסמן ב-P את $P(\text{מגיע ל-0 מ-1})$ ונקבל:

$$\begin{aligned} P &= (1-p) + pP^2 \\ pP^2 - P + (1-p) &= 0 \\ P &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p} \\ P &= 1,\ (1-p)/p\,. \end{aligned}$$

אם $p \le 1/2$ אזי $(1-p)/p \ge 1$, כך ש-$P=1$ הוא הפתרון היחיד ובטוח שהחלקיק יגיע ל-0.

אם $p=1$ אזי $P=0$ כי אם החלקיק תמיד צועד ימינה הוא לא יכול להחזור ל-0.

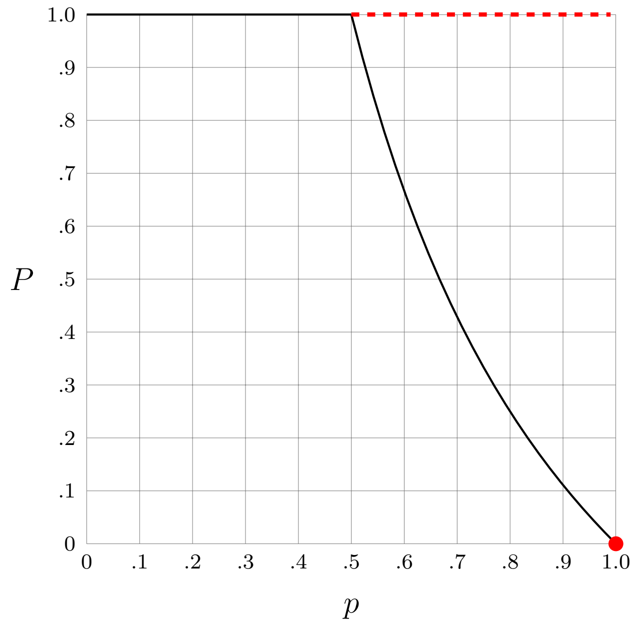
נניח ש-$P=1$ עבור $1/2<p<1$, כלומר, P **לא תלוי ב-**p. אבל P לא יכול "לקפוץ" פתאום מ-1 ל-0 כאשר p שואף ל-1: באיור 7 הקו האדום המקווקוו והנקודה האדומה ב-$(1,0)$. לכן, עבור $p>1/2$ הפתרון היחיד הוא $P=(1-p)/p<1$.[2]

עבור $P=1/2$,$p=2/3$ ועבור $P=1$,$p=1/2$. זאת תוצאה מפתיעה כי לא היינו מצפים שהחלקיק יחזור תמיד ל-0 אם כיוון הצעד נקבע על ידי הטלת מטבע הוגן! אנו זקוקים למטבע ממש לא-הוגן (הסתברות של "עץ" שווה ל-$2/3$) כדי להשוות את הסיכויים לחזור ל-0 או לא.

סימולציה

```
For probability = 0.2500:
Probability of reaching 0 = 1.0000
```

[2] Mosteller כותב שזה נובע מרציפות אבל הוא לא מספק הוכחה.



איור 7: הגרף של $P=\min(p/(1-p),1)$ עבור $p\in[0,1]$

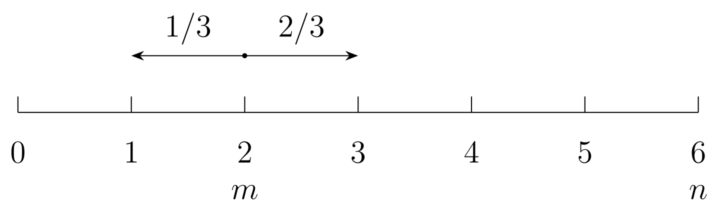
```
Proportion reaching 0      = 1.0000
For probability = 0.5000:
Probability of reaching 0 = 1.0000
Proportion reaching 0      = 0.9612
For probability = 0.6667:
Probability of reaching 0 = 0.5000
Proportion reaching 0      = 0.5043
For probability = 0.7500:
Probability of reaching 0 = 0.3333
Proportion reaching 0      = 0.3316
For probability = 0.8000:
Probability of reaching 0 = 0.2500
Proportion reaching 0      = 0.2502
```

36. המהמר פשט רגל (Gambler's ruin)^{D,S}

לקיק מוצב על ציר ה-x במקום $m\geq 1$. בכל מקום על ציר ה-x הוא יכול לצעוד צעד ימינה עם הסתברות $p>1/2$ וצעד שמאלה עם הסתברות $1-p$.

שאלה 1: מה ההסתברות שהחלקיק יגיע למקום 0 בסופו של דבר?

שאלה 2: יהי $m>n$. אם החלקיק מגיע למקום 0 או למקום n הוא מפסיק לצעוד (איור 8). מה ההסתברות שהחלקיק יגיע למקום 0? מה ההסתברות שהחלקיק יגיע למקום n בסופו של דבר?



איור 8: האם החלקיק יכול לחזור ל-0 (ציר סופי)?

הערה: בעיה 35 מייצגת מהמר המשחק עם כמות סופית של כסף נגד קזינו עם כמות בלתי מוגבלת של כסף. הבעיה מבקשת את ההסתברות שהמהמר יפסיד את כל כספו. בעיה זו מייצגת מהמר אחד עם m שמשחק נגד מהמר שני עם $n-m$. הבעיה מבקשת את ההסתברויות ש**אחד** מהם מפסיד את כל כספו לשני. **פתרון**

הפתרון מבוסס על [11, Chapter 2, Example 4m].

תשובה 1: הבפתרון לבעיה 35 ראינו שעבור $p > 1/2$ (כאן ההנחה נתונה), אם חלקיק נמצא במקום 1 ההסתברות שלו להגיע ל-0 היא $r = (1-p)/p$. סימון: תהי $P(i,j)$ ההסתברות להגיע מ-i מ-j. בגלל שההסתברות של חלקיק להגיע ממקום אחד לשני לא תלוי במקום האבסולוטי:

$$P(0,m) = P(m-1,m)P(m-2,m-1)\cdots P(1,2)P(0,1) = r^m\,. \tag{25}$$

תשובה 2: תהי $P_i = P(n,i)$ וחשב אותה תוך שימוש בהסתברות מותנית:

$$\begin{aligned}
P_i &= pP_{i+1} + (1-p)P_{i-1}\\
pP_{i+1} &= 1\cdot P_i - (1-p)P_{i-1}\\
pP_{i+1} &= (p+(1-p))P_i - (1-p)P_{i-1}\\
p(P_{i+1}-P_i) &= (1-p)(P_i - P_{i-1})\\
P_{i+1}-P_i &= r(P_i - P_{i-1})\,.
\end{aligned}$$

$P_0 = 0$ כי אם החלקיק נמצא ב-0 הוא מפסיק לצעוד. לכן:

$$\begin{aligned}
P_2 - P_1 &= r(P_1 - P_0) = rP_1\\
P_3 - P_2 &= r(P_2 - P_1) = r^2P_1\\
\cdots &= \cdots\\
P_i - P_{i-1} &= r(P_{i-1} - P_{i-2}) = r^{i-1}P_1\,.
\end{aligned}$$

רוב הגורמים בצד השמאלי מצטמצמים כאשר מחברים את המשוואות:

$$P_i - P_1 = P_1\sum_{j=2}^{i} r^{j-1}$$

$$= P_1 + P_1 \sum_{j=2}^{i} r^{j-1} - P_1$$

$$P_i = P_1 \sum_{j=0}^{i-1} r^j = P_1 \left(\frac{1-r^i}{1-r} \right) .$$

אם חלקיק נמצא ב-n הוא כבר נמצא ב-n כך ש-$P_n = 1$:

$$1 = P_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right)$$

$$P_1 = \left(\frac{1-r}{1-r^n} \right) ,$$

ולכן (בהוכחה סימטרית שמחליפה p ו-$1-p$):

$$P(n,i) = \left(\frac{1-r^i}{1-r^n} \right) \tag{26}$$

$$P(0,i) = \left(\frac{1-(1/r)^{n-i}}{1-(1/r)^n} \right) . \tag{27}$$

הקורא מוזמן להראות שהסכום של משוואות 26, 27 הוא 1 כלומר שמובטח שאחד המהמרים יזכה והשני יפסיד.

עבור $m = 1, n = 3, p = 2/3$:

$$P(0,1) = \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3} \right) = \frac{4}{7}$$

$$P(3,1) = \left(\frac{1-2^2}{1-2^3} \right) = \frac{3}{7} .$$

סימולציה

```
For probability = 0.6667:
Probability of reaching (0,10) from 1 = (0.4995,0.5005)
Proportion reaching     (0,10) from 1 = (0.5056,0.4944)
Probability of reaching (0,10) from 4 = (0.0616,0.9384)
Proportion reaching     (0,10) from 4 = (0.0643,0.9357)
Probability of reaching (0,10) from 6 = (0.0147,0.9853)
Proportion reaching     (0,10) from 6 = (0.0123,0.9877)

For probability = 0.7500:
Probability of reaching (0,10) from 1 = (0.3333,0.6667)
Proportion reaching     (0,10) from 1 = (0.3395,0.6605)
Probability of reaching (0,10) from 4 = (0.0123,0.9877)
Proportion reaching     (0,10) from 4 = (0.0115,0.9885)
Probability of reaching (0,10) from 6 = (0.0014,0.9986)
Proportion reaching     (0,10) from 6 = (0.0015,0.9985)
```

ככל שלמהמר בצד שמאל יש יותר והסתברות גבוהה היותר לזכות בכל צעד, כך ההסתברות שלו לזכות גדלה.

37. משחק נועז או משחק זהיר (Bold play vs. cautious play)^S

רולט ניתן להמר שהכדור יפול בכיס המסומן במספר זוגי. ההסתברות היא $18/38$ כי יש 18 מספרים זוגיים, 18 מספרים אי-זוגיים ו-2 מספרים ירוקים עליהם הקזינו זוכה.

איזו מהאסטרגיות שלהלן עדיפה?

1. משחק נועז: להמר 20 בסיבוב אחד.
2. משחק זהיר: להמר 1 בכל סיבוב עד שאתה זוכה או מפסיד 20.

רמז: השתמש בתוצאות של בעיה 36. **פתרון**

ההסתברות לזכיה עם משחק נועז היא $18/38 \approx 0.4737$.

ההסתברות לזכיה עם משחק זהיר היא (משוואה 26):

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{20}{38}\Big/\frac{18}{38} = \frac{20}{18} \\
P(40,20) &= \frac{1-(20/18)^{20}}{1-(20/18)^{40}} \approx 0.1084\,.
\end{aligned}
$$

ברור שמשחק נועז עדיף על משחק זהיר.

Mosteller מביא הסבר איטואטיבי: הימור בסיבובים רבים חושף את המהמר לאפשרות שהקזינו מצנח בהסתברות $2/38$.

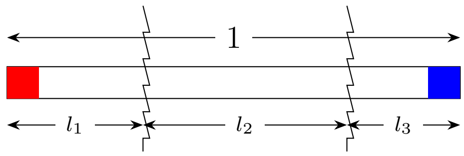
סימולציה

```
Probability of bold wins     = 0.4737
Proportion bold wins         = 0.4677
Probability of cautious wins = 0.1084
Proportion cautious wins     = 0.1094
```

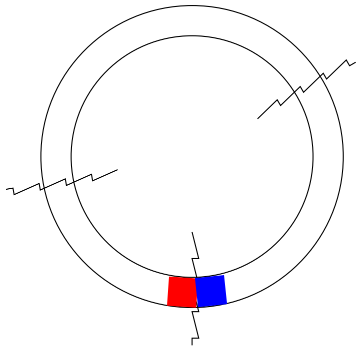
39. הכימאי המגושם (The clumsy chemist)^S

נתון מספר רב של מקלות מזכוכית באורך 1. קצה אחד צבוע באדום ושני בכחול. כאשר זורקים אותם על הרצפה, הם נשברים לשלושה חלקים עם התפלגות אחידה של האורכים (איור 9(א)). מה התוחלת של אורכו של החלק בקצה הכחול?

רמז: במקום מקלות ישרים הנח שקבלת טבעות זכוכית ללא סימנים שגם הם נשברים לשלושה החלקים (איור 9(ב)).



איור 9(א) חלוקת מקל לשלושה חלקים



איור 9(ב) חלוקת טבעת לשלושה חלקים

פתרון 1

אין סימטריה במלקות כי הקצות שונים מהחלק האמצני. אולם הטבעת סימטרית ולכן ההתפלגויות של שלושת החלקים יהיו אחידות עם תוחלת $1/3$. על ידי צביעת אחת מנקודות השבירה כפי שמופיע באיור 9(ב), הבעיה הופכת להיות זהה לבעיית המקל כך שההתפלגויות זהות. לכן התוחלת של אורכי החלקים היא גם $1/3$.

פתרון 2

הפתרון אלגנטי שלהלן מבוסס על [4].

נניח שהמקל מייצג את קטע הקו $(0,1)$. המקל נשבר בשני מקומות שניתן לייצג בני משתנים אקראיים בלתי-תלויים עם התפלגות אחידה $X, Y \in (0,1)$. נחשב את ההסתברות $P(|X-Y|>a)$.

טבלה 1 מראה נקודות (x,y) כאשר $x, y \in \{0.0, 0.1, 0.2, \ldots, 0.9\}$ והנקודה העשרונית הושמטה. הערכים בטבלה הם $|X-Y|$. עבור $a=0.6$ הערכים למעלה משמאל מ-$(0,6)$--$(6,9)$, והערכים למטה ומימין מ-$(6,0)$--$(9,6)$, הם התוצאות שמגדירות את $P(|X-Y|>a)$:

$$P(|X-Y|>a) = 2 \cdot \frac{1}{2}(1-a)(1-a) = (1-a)^2 \,.$$

עבור $a=0.6$, $P(|X-Y|>0.6) = (0.4)^2 = 0.16$.

המשלים הוא:

$$P(|X-Y|<a) = 1-(1-a)^2 \,.$$

הסתברות זו היא ההתפלגות ההסתברות המצטברת cumulative probability distribution (CPD) בקטע $(0,1)$. ניתן לקבל את פונצקית הסתברות הצפיפות probability density function (PDF) על ידי גזירת ה-CDP:

$$P(|X-Y|=a) = \frac{d}{da}P(|X-Y|<a) = \frac{d}{da}(1-(1-a)^2) = 2(1-a)\,.$$

התוחלת היא האינטגרל ה-PDF כפול הערך:

$$E(|X-Y|) = \int_0^1 a \cdot 2(1-a)\,da = 2\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

סימולציה

a

	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
	8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	
	7	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	
a	6	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	
	5	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	
	4	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	
y	3	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	a
	2	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	
	1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

x a

טבלה 1: התפלגות נקודות השבירה ב-$(0,1) \times (0,1)$

```
Expectation of length of right piece = 0.3333
Average length of right piece        = 0.3359
```

40. האס הראשון (The first ace)^S

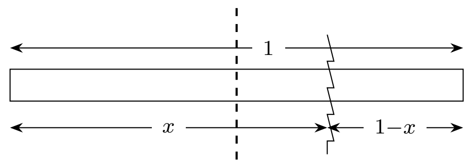
לק קלפים מחפיסה מעורבת היטב עד שמופיע אס. מה התוחלת של מספר הקלפים שיש לחלק?

רמז: חשוב על חפיסת קלפים ללא האסים מסודרת בשורה. **פתרון** הקלפים הם כמו ״מקל״ באורך 48

״שנשבר״ על ידי 4 ל-5 חלקים. הפתרון של בעיה 39 מתאים גם כאן והתוחלת של חלק היא $48/5 = 9.6$.

סימולציה

```
Expectation of first ace = 9.6000
Average first ace        = 9.5805
```



איור 10 : שבירת מקל לשני חלקים

42. הקצה הקצר של המקל (The little end of the stick)^S

אתה שובר מספר גדול של מקלות זכוכית באורך 1 לשני חלקים. למקום השבירה התפלגות אחידה לאורך המקל.

שאלה 1: מה התוחלת של אורכו של החלק **הקטן** יותר?

שאלה 2: מה התוחלת של היחס בין אורכו של החלק הקטן לאורכו של החלק הגדול? **פתרון**

תשובה 1: ההסתברות שנקודת השבירה היא בצד השמאלי של המקל היא $1/2$ שהיא גם ההסתברות שהנקודה בצד ימין. החלק הקטן יותר נמצא באותו צד שבו נמצאת נקודת השבירה. התוחלת של נדוקת השבירה היא באמצע בין קצה המקל לבין אמצע המקל:

$$E(\text{אורך הקטן יותר}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,.$$

תשובה 2: ללא הגבלת הכלליות הנח שנקודת השבירה נמצאת בצד הימני של המקל (איור 10). היחס בין החלק הקטן והחלק הגדול הוא $(1-x)/x$ ואורכו של החלק הגדול מתפלג אחיד בתוך $(1/2,1)$. לכן:

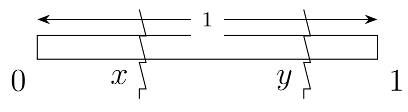
$$\begin{aligned} E(\text{יחס גדול יותר / קטן יותר}) &= \left(\frac{1}{1-(1/2)}\right)\int_{1/2}^{1}\frac{1-x}{x}\,dx \\ &= 2\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{x}-1\right)\,dx \\ &= 2\,(\ln|x|-x)\big|_{1/2}^{1} = 2\ln 2 - 1 \approx 0.3863\,. \end{aligned}$$

סימולציה

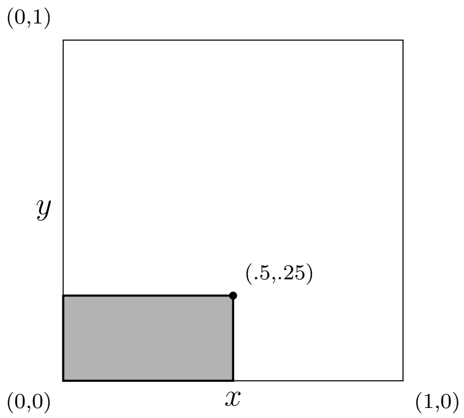
```
Expectation of length of smaller = 0.2500
Average length of smaller        = 0.2490
Expectation of smaller/larger    = 0.3863
Average smaller/larger           = 0.3845
```

43. המקל השבור (The broken bar)^{D,S}

אתה שובר מספר רב של מקלות זכוכית באורך 1 בשתי נדוקות שבירה (איור איור 11(א)).



איור 11(א) חלוקת מקל לשני חלקים



איור 11(ב) יצוג האורכים במעגל היחידה

שאלה 1: מה התוחלת של אורכו של החלק הקצר ביותר?

שאלה 2: מה התוחלת של אורכו של החלק הארוך ביותר?

רמז: x, y הם משתנים אקראים בלתי-תלויים בהתפלגות אחידה בתוך $(0,1)$. ניתן להציג כל זוג (x,y) כנקודה בריבוע $(0,1)\times(0,1)$ (איור איור 11(ב)). מה ההסתברות ש-$(x,y)<(.5,.25)$?

Hint: עבור **שאלה 1:** הנח שהחלק השמאלי הוא הקצר ביותר ועבור **שאלה 2:** הנח שהחלק השמאלי הוא בארוך ביותר. **פתרון**

תשובה 1: ללא הגבלת הכלליות הנח שהחלק השמאלי שאורכו x הוא החלק הקצר ביותר. מכאן ש-$x<y-x$ ו-$x<1-y$ שניתן לפשט ולקבל $2x<y$ ו-$x+y<1$.

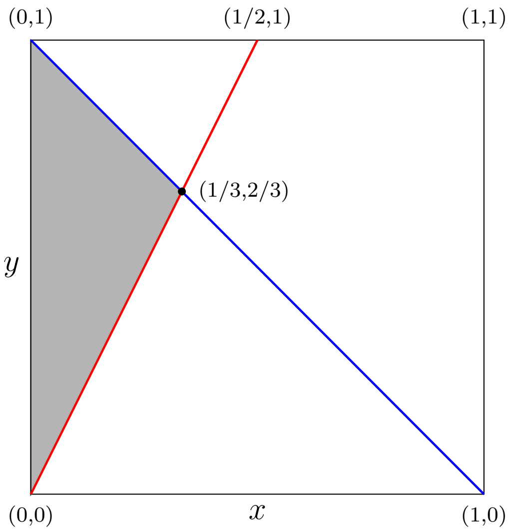
איור איור 12(א) מראה את הקווים $y=2x$ (אדום) ו-$y=1-x$ (כחול). כדי לאמת את אי-השוויונות, (x,y) חייבת להיות באיזור באפור לשמאל לשני הקווים. ניתן לחשב את נקודת החיתוך $(1/2,2/3)$ על ידי פתרון שתי המשוואות.

הערכים של (x,y) נמצאים בריבוע $(0,1)\times(0,1)$, ולכן יש לחשב את התוחלת מעל לתת-קבוצה האפורה של הריבוע על ידי חילוק האינטגרל בשטח של האיזור האפור $\frac{1}{2}(\frac{1}{3}\cdot 1)=\frac{1}{6}$:

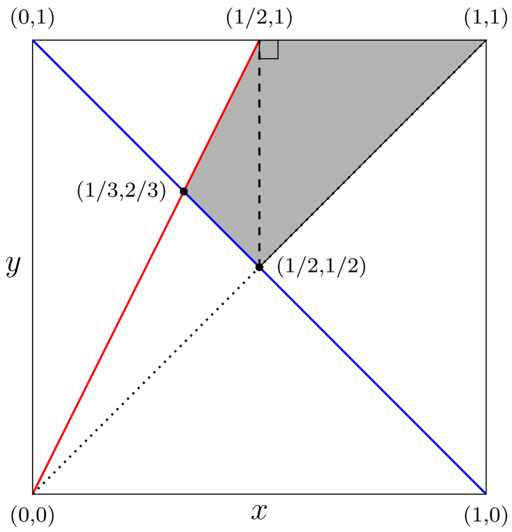
$$\begin{aligned}E(x) &= \frac{1}{1/6}\int_0^{1/3} x[(1-x)-2x]\,dx\\ &= \int_0^{1/3}(6x-18x^2)\,dx\\ &= (3x^2-6x^3)\Big|_0^{1/3} = \frac{2}{18}\approx 0.1111\,.\end{aligned}$$

תשובה 2: כדי שהחלק השמאלי יהיה הארוך ביותר $x>y-x$ ו-$x>1-y$, ולכן (x,y) חייבת להיות לימינו של $y=2x$ (אדום) ולימינו של $y=1-x$ (כחול) (איור איור 12(ב)). בנוסף, לפי הנחה ש-x נמצא לשמאלו של y, (x,y) חייבת להיות לשמאלו של $y=x$ (מנוקד).

כדי להקל על החישוב נחלק את האיזור האפור לשני משולשים (מקווקו) ונחשב את התוחלת בנפרד



איור 12(א) איזור אפור עבור המקל הקצר ביותר



איור 12(ב) איזור אפור עבור המקל הארוך ביותר

בשניהם. השטח של האיזור האפור מתקבל כסכום השטחים של המשולשים $1/24+1/8=1/6$. מכאן:

$$\begin{aligned}
E(\text{במשולש השמאלי } x) &= 6\int_{1/3}^{1/2} x[2x-(1-x)]\,dx\\
&= \int_{1/3}^{1/2}\left(18x^2-6x\right)\,dx\\
&= \left(6x^3-3x^2\right)\Big|_{1/3}^{1/2} = \frac{1}{9}\\
E(\text{במשולש הימני } x) &= 6\int_{1/2}^{1} x[1-x]\,dx\\
&= \int_{1/2}^{1}(6x-6x^2)\,dx\\
&= \left(3x^2-2x^3\right)\Big|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}\\
E(x) &= \frac{1}{9}+\frac{1}{2} = \frac{11}{18} \approx 0.6111\,.
\end{aligned}$$

התוחלת של אורכו של החלק הבינוני היא $1-\frac{2}{18}-\frac{11}{18}=\frac{5}{18}\approx 0.2778$.

סימולציה

```
Expectations: shortest = 0.1111, middle = 0.2778, longest = 0.6111
Averages:     shortest = 0.1115, middle = 0.2783, longest = 0.6102
```

44. לנצח במשחק לא-הוגן (Winning an unfair game)^{D,S}

נתון מטבע לא-הוגנת שההסתברות לעץ היא $1/3<p<1/2$. הטל את המטבע מספר זוגי של פעמים $N=2n$. אתה מנצח אם ורק אם **ביותר** ממחצית ההטלות מופיע עץ.

שאלה 1: פתח נוסחה עבור ההסתברות לנצח P_N ונוסחה עבור ההסתברות לתיקו T_N.

שאלה 2: פתח נוסחה עבור ה-N עבורו יש את ההסתברות הגבוהה ביותר לנצח.

רמז: אם ההסתברות הגבוהה ביותר לנצח היא ב-N הטלות אזי $P_{N-2} \leq P_N$ ו-$P_N \geq P_{N+2}$. **פתרון**

תשובה 1: כדי לנצח, עץ חייב להופיע ב-$i \in \{n+1, n+2, \ldots, 2n-1, 2n = N\}$ הטלות. מההתפלגות הבינומית:

$$\begin{aligned} P_N &= \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{2n}{i} p^i (1-p)^{2n-i} \\ T_N &= \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \,. \end{aligned}$$

תשובה 2: כדי שההסתברות הגבוהה ביותר תהיהעבור $N = 2n$ חייב להתקיים:

$$P_{2n-2} \leq P_{2n} \quad \text{ו-} \quad P_{2n} \geq P_{2n+2} \,.$$

מתי $P_{2n-2} \neq P_{2n}$?

מקרה 1: לאחר הטלה $2n-2$, עץ הופיע n פעמים ופלי $n-2$ פעמים (כך שהיית זוכה אם היית עוצר כאן), אבל פלי מופיע בשתי ההטלות הבאות. עכשיו יש n עץ ו-n פלי ולכן אתה מפסיד. ההסתברות היא:

$$\binom{2n-2}{n} p^n (1-p)^{n-2} (1-p)^2 \,.$$

מקרה 2**:** לאחר הטלה $2n-2$, עץ הופיע $n-1$ פעמים ופלי $n-1$ פעמים (כך שהיית מפסיד אם היית עוצר כאן), אבל עץ מופיע בשתי ההטלות הבאות. עכשיו יש $n+1$ עץ ו-$n-1$ פלי ולכן אתה מנצח. ההסתברות היא:

$$\binom{2n-2}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{n-1} p^2 \,.$$

כדי לאמת את $P_{2n-2} \leq P_{2n}$, P_{2n-2} לא יכול לגדול כאשר P_{2n} נשאר ללא שינוי (מקרה 1), אבל P_{2n} יכול לגבול עד שהיא גבוהה מ-P_{2n-2} (מקרה 2). לכן:

$$\begin{aligned} \binom{2n-2}{n} p^n (1-p)^{n-2} (1-p)^2 &\leq \binom{2n-2}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{n-1} p^2 \\ \frac{1}{n}(1-p) &\leq \frac{1}{n-1} p \\ (n-1)(1-p) &\leq np \\ n &\leq \frac{1-p}{1-2p} \\ 2n &\leq \frac{1}{1-2p} + 1 \,. \end{aligned}$$

באופן דומה, כדי לאמת את $P_{2n} \geq P_{2n+2}$ חייב להיול ש :

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n+1} p^{n+1}(1-p)^{n-1}(1-p)^2 &\geq \binom{2n}{n} p^n(1-p)^n p^2 \\
\frac{1}{n+1}(1-p) &\geq \frac{1}{n}p \\
n(1-p) &\geq (n+1)p \\
n &\geq \frac{p}{1-2p} \\
2n &\geq \frac{1}{1-2p} - 1\,.
\end{aligned}$$

לכן, ערך עבור $N = 2n$ שעבורו מתקבל ההסתברות הגבוהה ביותר הוא המספר השלם הזוגי הקרוב ביותר ל-$1/(1-2p)$. הקורא מוזמן להראות שאם $1/(1-2p)$ אי-זוגי אזי $P_{2n} = P_{2n+2}$.

סימולציה

```
For probability             = 0.3700
Optimal games to be played  = 4
For  2 games, average won   = 0.1372
For  4 games, average won   = 0.1445
For  6 games, average won   = 0.1431

For probability             = 0.4000
Optimal games to be played  = 6
For  4 games, average won   = 0.1820
For  6 games, average won   = 0.1845
For  8 games, average won   = 0.1680

For probability             = 0.4500
Optimal games to be played  = 10
For  8 games, average won   = 0.2671
For 10 games, average won   = 0.2646
For 12 games, average won   = 0.2640
```

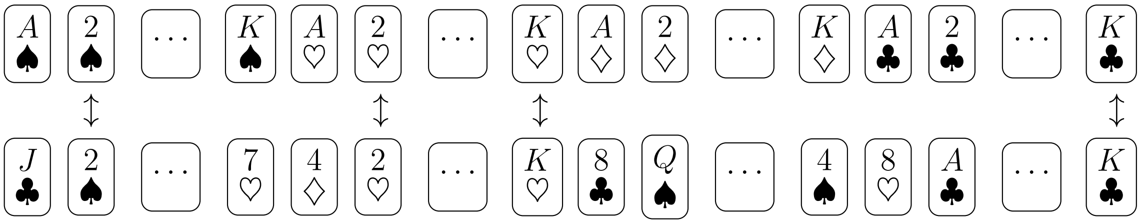
45. ממוצע של מספר ההתאמות (Average number of matches)^S

דר חפיסת קלפים בשורה בסדר הסטנדרטי ואז סדר חפיסה שניה שורה בסדר אקראי מתחת לשורה הראשונה (איור 13). מה התוחלת של מספר ההתאמות של קלף בשורה הראשונה עם קלף בשורה מתחתיו?

פתרון

ההתפלגות אחידה כי לכל קלף בשורה השניה אותה המסתברות להתאים לקלף מעליו. לכן :

$$E(\text{מספר ההתאמות}) = 52 \cdot \frac{1}{52} = 1\,.$$



איור 13: התאמת שתי חפיסות קלפים

```
Expectation of matches = 1.00
Average of matches     = 1.01
```

46. הסתברויות של התאמות (Probabilities of matches)^S

סדר חפיסת קלפים בשורה בסדר הסטנדרטי ואז סדר חפיסה שניה שורה בסדר אקראי מתחת לשורה הראשונה (איור 13). פתח נוסחה עבור $P(n,r)$, ההסתברות שיהיו בדיוק r התאמות של קלף בשורה הראשונה עם קלף בשורה מתחתיו? הנח ש-$P(k,0)$ נתון עבור $0 \le k \le n$. **פתרון**

במבט ראשון נראה שבעיה זו דומה לבעיה 28 אבל קיים הבדל מהותי. השליפות המקופסאות הן בלתי-תלויות אבל כאן ההתאמות תלויות אחת בשניה. למשל, אם יש התאמה בקלף הראשון (בהסתברות $1/n$), ההסתברות של התאמה בקלף השני היא $1/(n-1)$.

ההסתברות שקבוצה **נתונה** של r קלפים מתאימות היא:

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n+r-1}\,. \tag{28}$$

כדי לקבל בדיוק r התאמות, יש להכפיל משוואה 28 ב-$P(n-r,0)$, ההסתברות שאין בכלל התאמות בשאר $n-r$ הקלפים. לבסוף, יש $\binom{n}{r}$ דרכים לבחור r התאמות, ולכן:

$$\begin{aligned} P(n,r) &= \binom{n}{r}\frac{1}{n(n-1)(n+r-1)}P(n-r,0)\\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{1}{n!/(n-r)!}P(n-r,0)\\ &= \frac{1}{r!}P(n-r,0)\,. \end{aligned}$$

נוסחה זו פותרת את הבעיה כי $P(k,0)$ נתונה.

Mosteller מפתח נוסחה סגורה וגבול עבור $P(n,r)$:

$$P(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} \tag{29}$$

$$\lim_{n-r\to\infty} P(n,k) \approx \frac{1}{k!}e^{-1}\,. \tag{30}$$

סימולציה

הרצתי את הסימולציה עבור $n = 52$ קלפים וחישבתי את ההסתברות ממשוואה 30.

```
Probability of 1 matches = 0.3679
Proportion 1 matches     = 0.3710
Probability of 2 matches = 0.1839
Proportion 2 matches     = 0.1828
Probability of 3 matches = 0.0613
Proportion 3 matches     = 0.0569
Probability of 4 matches = 0.0153
Proportion 4 matches     = 0.0168
```

47. לבחור את הנדוניה הגדול ביותר (Choosing the largest dowry)^{D,S}

הנח סידרה של n קלפים עם הפנים למטה. על פניו של כל קלף נמצא מספר שלם חיובי אבל אין מידע על ההתלפגות שלהם. הפוך את הקלפים אחד-אחד ועיין במספרים. לאחר חשיפת כל אחד מהקלפים, אתה יכול להכריז שמספר זה הוא הגדול ביותר בסידרה. אם אתה צודק אתה מנצח, אחרת אתה מפסיד. למשל, אם הסדרה היא $(47, 23, 55, 4)$, אתה מנצח רק אם אתה בוחר שת הקלף השלישי.

הנה אסטרטגיה: ל-r קבוע, וותר על $r - 1$ הקלפים הראשונים ובחר את הקלף הראשון שמספרו גדול מכל $r - 1$ הקלפים.

שאלה 1: עבור $n = 4$ ו-$r = 3$ בדוק את כל התמורות ומצא בכמה מהם את מנצח.

שאלה 2: פתח נוסחה עבור ההסתברות לניצחון עבור n, r שרירותיים.

שאלה 3: מצא קירוב להסתברות כאשר $n, r \to \infty$.

רמז: נתון r באיזה מקומות יכול להופיע המספר הגדול ביותר m ובאיזה מקומות המספרים שהם פחות או שווים ל-m?

פתרון

תשובה 1: כדי לפשט את הסימון נכתוב את דירוג מספרים כ-$1, 2, 3, 4$ למרות שהערכים אמיתיים של המספרים לא ידועים, ולמשל יכולים להיות $4, 23, 47, 55$. אם אתה חושף קלפים $1, 2, 3$ (שהם בעצם $4, 23, 47$), אינך יודע אם לבחור 47 או לחכות ובחור את הקלף האחרון.

יש 24 תמורות של ארבעה מספרים. לפי האסטרטגיה אתה מוותר על שני הקלפים הראשונים ובוחר או את הקלף השלישי או את הקלף הרביעי, כך שאתה מפסיד אם 4 נמצא במקום הראשון של התמורה. מה עם התמורה $(1, 2, 3, 4)$? אתה מוותר על $1, 2$ ובוחר 3 בגלל שהוא גובהה יותר מ-$1, 2$ אבל אתה מפסיד כי זה לא המספר הגדולה ביותר. מה עם התמורה $(1, 3, 2, 4)$? שוב, לפי האסטרטגיה אתה מוותר על $1, 3$, אבל מוותר גם על 2 כי הוא **לא** גדול יותר מ-$1, 3$. כעת אתה בוחר 4 ומנצח. נסח טיעונים דומים לכל

התמורות ובדוק שכל התמורות עם 4 במסגרת הן נצחונות:

1 2	3 4	1 2	$\boxed{4}$ 3	1 3	2 $\boxed{4}$	1 3	$\boxed{4}$ 2	1 4	2 3	1 4	3 2
2 1	3 4	2 1	$\boxed{4}$ 3	2 3	1 $\boxed{4}$	2 3	$\boxed{4}$ 1	2 4	1 3	2 4	3 1
3 1	2 $\boxed{4}$	3 1	$\boxed{4}$ 2	3 2	1 $\boxed{4}$	3 2	$\boxed{4}$ 1	3 4	2 1	3 4	2 1
4 1	2 3	4 1	3 2	4 2	1 3	4 2	3 1	4 3	1 2	4 3	2 1

ההסתברות לנצח היא $10/24$.

תשובה 2: אתה מפסיד אם המספר הגדול ביותר נמצא באחד המקומות $1,\ldots,r-1$. לכן כדי לנצח מספר הגדול ביותר חייב להיות במקום m כאשר $r \leq m \leq n$:

$$1 \quad 2 \quad \cdots \quad r-2 \quad r-1 \quad \overbrace{r \quad r+1 \quad \cdots \quad m-1 \quad m \quad m+1 \quad \cdots \quad n}^{\text{מספר גדול ביותר חייב להיות כאן}}\,.$$

לפי האסטרטגיה אתה מוותר על $r-1$ הקלפים הראשונים. אתה תבחר מקום m אם ורק אם **כל** במספרים ב-$(r,\ldots,m-1)$ קטנים מ**כל** המספרים ב-$(1,\ldots,r)$. במילים אחרות, המספר הגדול ביותר בסידרה $(1,\ldots,m-1)$ הוא **לא** בחלק השני של הסידרה $(r,\ldots m-1)$ אלא בחלק הראשון $(1,\ldots,r-1)$. ההסתברות היא:

$$P(\text{המספר הגדול ביותר ב-}(1,\ldots,m-1)\text{ נמצא ב-}(1,\ldots,r-1)) = \frac{r-1}{m-1}\,.$$

ההסתברות שהמספר הגדול ביותר נמצא ב-m הוא $1/n$ ולכן:

$$P(\text{ניצחון}) = \sum_{m=r}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{r-1}{m-1} = \frac{r-1}{n}\sum_{m=r}^{n}\frac{1}{m-1}\,. \tag{31}$$

עבור $r=3$, $n=4$, $P(\text{ניצחון}) = 5/12 = 10/24$.

משוואה 31 לא מוגדרת עבור $r=1$ אבל ההסתברות לנצח כאשר אתה בוחר את המספר הראשון הוא $1/n$. לערך גבוהה ביותר של r יש הסתברות גבוהה יותר כפי שראינו בדוגמה.

תשובה 3: נכתוב משוואה 31 כך:

$$P(\text{ניצחון}) = \frac{r-1}{n}\left(\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m-1} - \sum_{m=2}^{r-1}\frac{1}{m-1}\right)\,. \tag{32}$$

עבור n,r גדולים, ניתן למצוא קירוב למשוואה 32 כך:

$$P(\text{ניצחון}) = \frac{r}{n}(\ln n - \ln r) = \frac{r}{n}\ln\frac{n}{r} = -\frac{r}{n}\ln\frac{r}{n}\,.$$

נסמן $x = r/n$ ונמצא את המקסימום מהנגזרת:

$$\begin{aligned}
(-x\ln x)' &= -x\cdot\frac{1}{x} + (-1)\ln x = 0\\
\ln x &= -1\\
x &= 1/e\,.
\end{aligned}$$

כדי למקסם את ההסתברות לנצח בחר $r \approx n/e$.

סימולציה

הרצתי את הסימולציה עם 100 קלפים וערכי r קרובים ל-$100/e$:

```
Reject cards before r = 36:
Probability of wins   = 0.3674
Proportion wins       = 0.3641
Reject cards before r = 37:
Probability of wins   = 0.3678
Proportion wins       = 0.3759
Reject cards before r = 38:
Probability of wins   = 0.3679
Proportion wins       = 0.3548
Reject cards before r = 30:
Probability of wins   = 0.3590
Proportion wins       = 0.3601
```

48. בחירת המספר האקראי הגדול ביותר (Choosing the largest random number)^{D,S}

הנח סידרה של n קלפים עם הפנים למטה. על פניו של כל קלף נמצא מספר ממשי עם התפלגות אחידה ב-$0.0 \leq x < 1.0$. הפוך את הקלפים אחד-אחד ועיין במספרים. לאחר חשיפת כל אחד מהקלפים, אתה יכול להכריז שמספר זה הוא הגדול ביותר בסידרה. אם אתה צודק אתה מנצח, אחרת אתה מפסיד.

השתמש באסטרטגיה של בעיה 37: החלט על ערך r כך שאתה מוותר על $r-1$ הקלפים הראשונים ובוחר את הקלף הראשון שגדול מהמספר הגדול ביותר ב-$r-1$ קלפים הראשונים.

הגדרה: d, **ערך שווה-נפש**, הוא הערך שמתחתיו אתה מוותר על הקלף ומעליו את לבחור את הקלף.

שאלה 1: חשב את d עבור $n=1$ וחשב את ההסתברות לנצח.

שאלה 2: חשב את d עבור $n=2$ וחשב את ההסתברות לנצח.

שאלה 3: חשב את d עבור $n=3$. אל תנסה לחשב את ההסתברות לנצח!

הערה: בבעיה 37 בערכים יכולים להיות $100, 200, 300$ או $100, 50, 20$ כך שחשיפת המספר הראשון לא מספק שום מידע על המספרים האחרים. בבעיה זו, ההתפלגות אחידה, ולכן אם המספר הראשון הוא 0.2, ההסתברות שהמספר השני יהיה גדול יותר היא 0.8 ואם המספר הראשון הוא 0.8 ההסתברות שהמספר השני יהיה גדול יותר היא 0.2.

פתרון

יהי v_1, v_2, v_3 המספרים על שלושת הכרטיסים.

תשובה 1: אין ברירה אלא לבחור את הקלף הראשון כי אין קלפים אחרים. לכן אין ערך שווה-נפש. v_1 הוא המספר "הגדול ביותר", $P(\text{ניצחון}) = 1$.

תשובה 2: אם אתה בוחר את הקלף הראשון $P(\text{ניצחון}) = v_1$ שהיא ההסתברות שהמספר על הקלף השני קטן יותר. אם אתה מוותר על הקלף הראשון, $P(\text{ניצחון}) = 1 - v_1$ שהיא ההסתברות ש-$v_1 < v_2$.
לכן, אם $v_1 < 0.5$ בחר את הקלף השני כי $1 - v_1 > 0.5$ ואם $v_1 > 0.5$ בחר את הקלף הראשון. מכאן ש-$d = 0.5$.

הנה הנוסחה לחישוב ההסתברות לנצח:

$$P(\text{ניצחון}) = p(\text{ניצחון} \,|\, v_1 < 0.5)\, p(v_1 < 0.5) + p(\text{ניצחון} \,|\, v_1 > 0.5)\, p(v_1 > 0.5)\,.$$

$p(v_1 < 0.5) = 0.5$ נובע מההתפלגות האחידה. מה עם $p(\text{ניצחון} \,|\, v_1 < 0.5)$? לפי האסטרטגיה אתה מנצח אם $0.5 < v_2 < 1$ אבל גם אם $v_1 < v_2 < 0.5$. ההתפלגות של v_1 היא אחידה ב-$(0, 0.5)$ ולכן:

$$p(\text{ניצחון} \,|\, v_1 < 0.5) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\,.$$

ניתן לעשות חישוב דומה עבור $v_1 > 0.5$. נרכיב את כל החישובים הללו ביחד וקבל:

$$P(\text{ניצחון}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\,.$$

תשובה 3: אם אתה בוחר את הקלף הראשון, $P(\text{ניצחון}) = v_1^2$ כי הקלף השני והשלישי חייבים להיות קטנים מהראשון.

אם אתה מוותר על הקלף הראשון ובוחר את השני כי $v_1 < v_2$ אזי:

- $P(\text{ניצחון}) = (1 - v_1)v_1$ אם $v_2 > v_1$ ו-$v_3 < v_1$.
- $P(\text{ניצחון}) = v_1(1 - v_1)$ אם $v_2 < v_1$ ו-$v_3 > v_1$.
- $P(\text{ניצחון}) = \frac{1}{2}(1 - v_1)^2$ אם $v_2 > v_1$ ו-$v_3 > v_1$, כי ניצחון תלוי בסדר:
  אם הוא $(0.55, 0.75, 0.65)$ אתה מנצח ואם הוא $(0.55, 0.65, 0.75)$ אתה מפסיד.

הערך שווה-נפש d הוא ערך עבורו ההסתברות לנצח על ידי בחירת הקלף הראשון שווה להסתברות לנצח על ידי ויתור על הקלף הראשון:

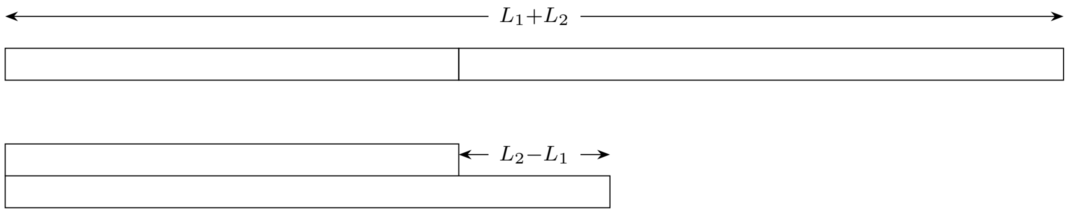
$$\begin{aligned} d^2 &= 2d(1-d) + \frac{1}{2}(1-d)^2 \\ 5d^2 - 2d - 1 &= 0 \\ d &= \frac{1+\sqrt{6}}{5} \approx 0.6899\,. \end{aligned}$$

Gilbert&Mosteller [3, page 55] מראים שעבור $n = 3$:

$$P(\text{ניצחון}) = \frac{1}{3} + \frac{d}{2} + \frac{d^2}{1} - \frac{3d^3}{2} \approx 0.6617\,.$$

סימולציה

```
For  3 cards:
Indifference value = 0.6000
Probability of win = 0.6693
Proportion of wins = 0.6628
Indifference value = 0.6899
Probability of win = 0.6617
Proportion of wins = 0.6711
Indifference value = 0.7200
Probability of win = 0.6519
Proportion of wins = 0.6473
```



איור 14 : מדידת האורכים של שני מקלות

49. להכפיל את הדיוק (Doubling your accuracy)

נתון שני מקלות באורכים $L_1 < L_2$ ומכשיר למדידת מרחק ששגיאת המדידה שלו ניתן על ידי התפלגות נורמלית עם ממוצע 0 ושונות σ^2. ניתן למדוד את אורכי המקלות על ידי מדידת כל מקל בנפרד. האם יש דרך מדוייקת יותר? **פתרון**

הנח את המקלות קצה לקצה ומדד $L_s = L_1 + L_2$, ואחר כך הנח את המקלות צד לצד ומדד $L_d = L_2 - L_1$ (איור 14). חשב L_1, L_2 :

$$\frac{1}{2}(L_s - L_d) = \frac{1}{2}((L_1 + L_2) - (L_2 - L_1)) = L_1$$
$$\frac{1}{2}(L_s + L_d) = \frac{1}{2}((L_1 + L_2) + (L_2 - L_1)) = L_2 \,.$$

השגיאות במדידות הן e_s, e_d כך שהשגיאות התוצאות הן :

$$\frac{1}{2}((L_s + e_s) - (L_d + e_d)) = L_1 + \frac{1}{2}(e_s - e_d)$$
$$\frac{1}{2}((L_s + e_s) + (L_d + e_d)) = L_2 + \frac{1}{2}(e_s + e_d) \,.$$

ממוצע של השגיאות במכשיר הוא 0 ולכן הממוצע של שתי המדידות גם כן 0. השונות יורדת למחצית ערכה הקודמת :[3]

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{2}\left(e_s - e_d\right)\right) = \frac{1}{4}(\sigma^2 + (-1)^2\sigma^2) = \frac{1}{2}\sigma^2$$
$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{2}(e_s + e_d)\right) = \frac{1}{4}(\sigma^2 + \sigma^2) = \frac{1}{2}\sigma^2 \,.$$

50. משוואות ריבועיות אקראיות (Random quadratic equations)^S

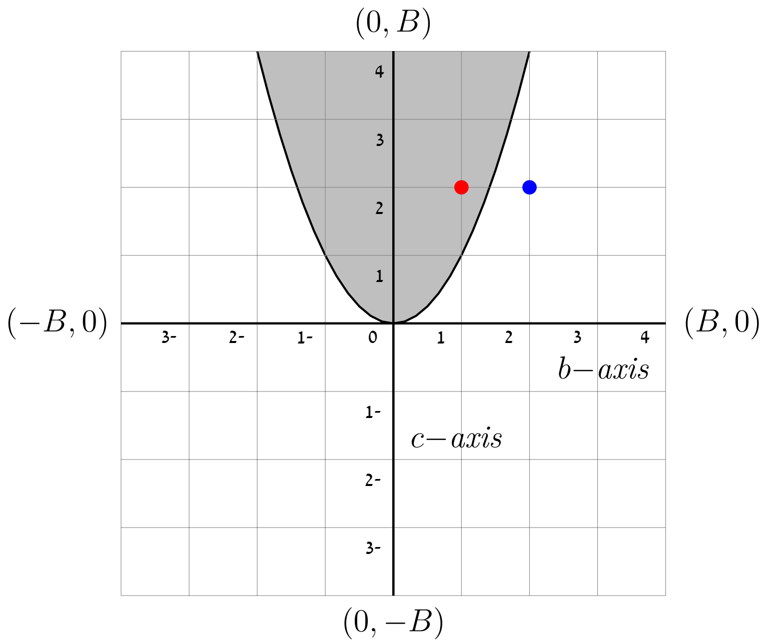
תהי $x^2 + 2bx + c = 0$ משוואה ריבועית המוגדרת מעל $[-B, B] \times [-B, B]$ עבור $B \geq 1$.

שאלה 1: מה ההסתברות שהשורשים ממשיים?

שאלה 2: כאשר $B \to \infty$ מה ההסתברות שהשורשים ממשיים? **פתרון**

תשובה 1: השורשים יהיו ממשיים אם הדיסקרימיננט $4b^2 - 4c \geq 0$ לא-שלילי. איור 15 מראה גרף של הפרבולה $c = b^2$ כאשר השורשים המרוכבים נמצא בשטח האפור. למשל, עבור $(b, c) = (1, 2)$, ל-$x^2 + 2x + 2$ שורשים מרוכבים (נקודה אדומה) ועבור $(b, c) = (2, 2)$ ל-$x^2 + 4x + 2$ שורשים ממשיים (נקודה כחולה).

[3] המדידות בלתי-תלויות ולכן הקווריאנס הוא 0.



איור 15 : עבור (b,c) בשטח האפור השורשים של $c=b^2$ מרוכבים

נחשב את השטח האפור על ידי אינטגרציה :

$$\int_{-\sqrt{B}}^{\sqrt{B}} (B-b^2)\,db = Bb - \frac{b^3}{3}\bigg|_{-\sqrt{B}}^{\sqrt{B}} = \left(B^{3/2} - \frac{B^{3/2}}{3}\right) - \left(-B^{3/2} + \frac{B^{3/2}}{3}\right) = \frac{4}{3}B^{3/2}\,.$$

השטח הכולל של $[-B,B]\times[-B,B]$ הוא $4B^2$ ולכן :

$$P(\text{שורשים מרוכבים}) = \frac{\frac{4}{3}B^{3/2}}{4B^2} = \frac{1}{3\sqrt{B}}$$

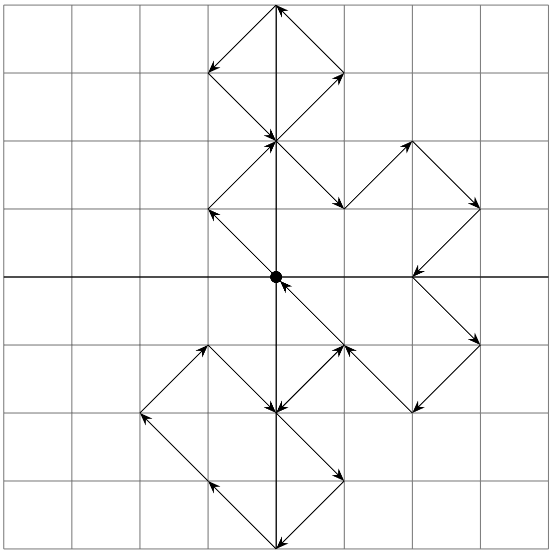
$$P(\text{שורשים ממשיים}) = 1 - \frac{1}{3\sqrt{B}}\,.$$

תשובה 2:

$$\lim_{B\to\infty} P(\text{שורשים ממשיים}) = \lim_{B\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3\sqrt{B}}\right) = 1\,.$$

סימולציה

```
For B =  4:
Probability of real roots = 0.8333
Proportion real roots     = 0.8271
For B = 16:
Probability of real roots = 0.9167
Proportion real roots     = 0.9205
For B = 64:
```



איור 16 : הילוך מקרי דו-ממדי

```
Probability of real roots = 0.9583
Proportion real roots     = 0.9582
```

51. הילוך מקרי דו-ממדי (Two-dimensional random walk)^S

חלקיק נמצא במרכז של מערכת צירים דו-ממדית. החלקיק צועד ימינה או שמאלה על ציר ה-x עם הסתברות $1/2$ לכל כיוון **ובו-זמנית** צועד למעלה או למטה על ציר ה-y עם הסתברות $1/2$ לכל כיוון. איור 16 מראה הילוך מקרי של 22 צעדים שמתחיל ונגמר במרכז.

שאלה 1: מה ההסתברות שהחלקיק חוזר למרכז ב-2 צעדים?

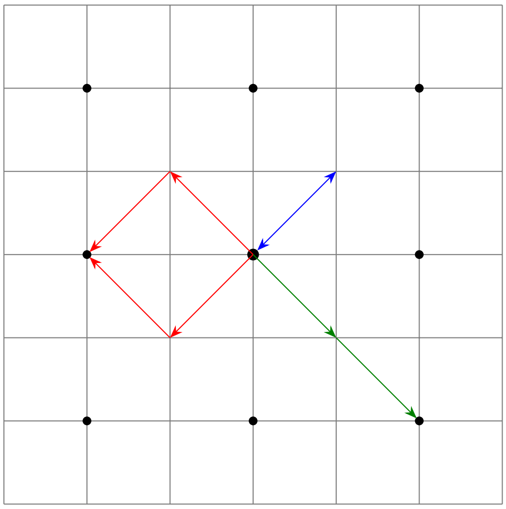
שאלה 2: פתח נוסחה עבור ההתסתברות שהחלקיק חוזר למרכז (פעם אחת או יותר).

שאלה 3: השתמש בקירוב של Stirling כדי לקבל הערכה של ההסתברות עבור n גדול.

פתרון

תשובה 1: הנקודות באיור 17 מראות את המקומות האפשריים בהם החלקיק יכול להיות לאחר שני צעדים:

- המסלול הירוק מראה איך להגיע ל-$(\pm 2, \pm 2)$ על ידי שני צעדים באותו כיוון. ההסתברות היא $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$.
- המסלול האדום מראה איך להגיע ל-$(\pm 2, 0)$ או ל-$(0, \pm 2)$. יש שני מסלולים אפשריים לכל נקודה ולכן ההסתברות היא $2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{2}{16}$.



איור 17: שני צעדים בהילוך מקרי

- המסלול הכחול מראה איך להגיע ל-$(\pm 1, \pm 1)$ ולחזור למרכז. ההסתברות היא $1/16$. יש ארבעה מסלולים שחוזרים למרכז ולכן ההסתברות היא $\frac{4}{16}$.

רק המסלולים הכחולים חוזרים למרכז ולכן:

$$P(\text{חזרה למרכז בשני צעדים}) = \frac{4}{16}\,.$$

תשובה 3: בחירת הכיוון בשני מצירים היא בלתי-תלויה כך שעבור $2n$ צעדים:

$$P_{2n}(\text{חזרה למרכז}) = P_{2n}(x=0\text{-חזרה ל}) \, P_{2n}(y=0\text{-חזרה ל})\,. \tag{33}$$

החלקיק יחזור למרכז אם ורק אם בשני הצירים מספר הצעדים $+1$ שווה המספר צעדים -1. יש $\binom{2n}{n}$ דרכים לסדר $+1$ ו--1 ולכן:

$$P_{2n}(x=0\text{-חזרה ל}) = P_{2n}(y=0\text{-חזרה ל}) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{34}$$

$$P_{2n}(\text{חזרה למרכז}) = \left[\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^2 \tag{35}$$

$$P(\text{חזרה למרכז}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(\text{חזרה למרכז}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^2\,. \tag{36}$$

תשובה 3: לפי הקירוב של Stirling $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$:

$$\begin{aligned} P_{2n}(\text{חזרה למרכז}) &= \left[\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^2 \\ &= \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\approx \left(\frac{1}{2}\right)^{4n} \frac{(\sqrt{2\pi\cdot 2n})^2\,(2n/e)^{4n}}{(\sqrt{2\pi n})^4\,(n/e)^{4n}}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{4n} \frac{4\pi n}{4\pi^2 n^2}\cdot\frac{(n/e)^{4n}\cdot 2^{4n}}{(n/e)^{4n}}\\
&= \frac{1}{\pi n}\\
P(\text{חזרה למרכז}) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,,
\end{aligned}
$$

שהיא **סידרה הרמונית** שמתבדרת, כלומר, עם הסתברות 1 החלקיק חוזר למרכז!

סימולציה הרצתי את הסימולציה מיליון פעמים במקום עשרת אלפים פעמים אבל התוצאה לא מראה שהחלקיק מגיע למרכז בוואדות.

```
Proportion returned to origin       = 0.8700
```

52. הילוך מקרי תלת-ממדי (Three-dimensional random walk)^{D,S}

לקיק נמצא במרכז של מערכת צירים תלת-ממדית. החלקיק צועד ימינה או שמאלה על ציר ה-x עם הסתברות $1/2$ לכל כיוון **ובו-זמנית** צועד למעלה או למטה על ציר ה-y עם הסתברות $1/2$ לכל כיוון. **ובו-זמנית** צועד פנימה או החוצה על ציר ה-z עם הסתברות $1/2$ לכל כיוון.

שאלה 1: מה **התוחלת** של מספר הפעמים שהחלקיק חוזר למרכז?

רמז: חשב את ההסתברות ואחר כך תשתמש במשתנה מסמן (indicator variable).

שאלה 2: מה ההסתברות שהחלקיק יחזור למרכז לפחות פעם אחת?

רמז: תשתמש בשיטה של בעיה 4. **פתרון**

P_{2n}, ההסתברות לחזור למרכז לאחר $2n$ נתון על ידי הכללת משוואה 33 לשלושה ממדים:

$$P_{2n} = P_{2n}(x=0\text{-חוזר ל}) \, P_{2n}(y=0\text{-חוזר ל}) \, P_{2n}(z=0\text{-חוזר ל})\,.$$

P_r, ההסתברות לחזור למרכז לפחות פעם אחת ניתנת על ידי הכללה לשלושה ממדים של משוואה 36:

$$P_r = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^3 .$$

מהקירוב של Stirling[4]:

$$P_{2n} = \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^3$$

[4] Mosteller השתמש ב-18 איברים בחישוב שלו וקיבל 0.315. התכנית שלי השתמש ב-500 איברים וקיבלתי 0.3772.

$$\approx \left(\frac{1}{2}\right)^{6n} \frac{(\sqrt{2\pi \cdot 2n})^3\,(2n/e)^{6n}}{(\sqrt{2\pi n})^6\,(n/e)^{6n}}$$
$$= \frac{(4\pi n)^{3/2}}{(2\pi n)^3} = \frac{1}{(\pi n)^{3/2}}$$
$$P_r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^{3/2}} \approx 0.3772\,.$$

יהי I_k משתנה מסמן עבור חזרה למרכז בצעד k:

$$I_k = \begin{cases} 1, & k \text{ אם החלקיק חוזר למרכז בצעד} \\ 0, & k \text{ אם החלקיק לא חוזר למרכז בצעד}\,. \end{cases} \tag{37}$$

אזי:

$$E(\text{מספר החזרות למרכז}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}\, I_{2n} = P_r \approx 0.3772\,,$$

ולכן התוחלת למספר החזרות למרכז שווה להסתברות.

שאלה 2: תהי P_1 ההסתברות שהחלקיק חוזר למרכז **לפחות פעם אחת**. מבעיה 4 אנו יודעים שהתוחלת של מספר בניסויים עד מראשון בו החלקיק **לא** חוזר למרכז היא $1/(1-P_1)$. לכן, התוחלת של מספר הניסויים עד שהחליק כן חוזר למרכז היא אחד פחות, כי החלקיק יכול לחזור למרכז מספר רב של פעמים עד שהוא לא חוזר.[5]

תהי $E_r = E(\text{מספר החזרות למרכז})$. אזי:

$$E_r = \frac{1}{1-P_1} - 1$$
$$P_1 = \frac{E_r}{1+E_r}\,.$$

ב-**תשובה 1** חישבנו ש-$E_r \approx 0.3772$ ולכן:

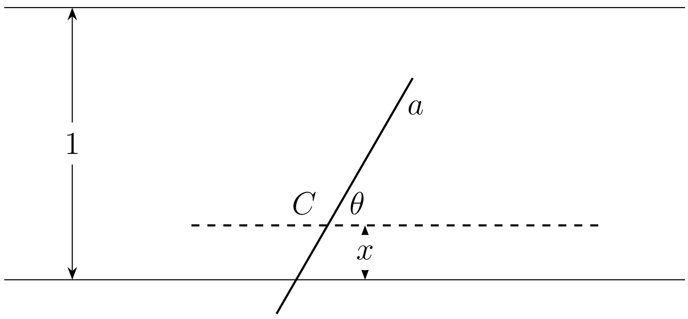
$$P_1 \approx 1 - \frac{1}{1+0.3772} \approx 0.2739\,.$$

סימולציה

```
Expectation of reaching origin = 0.3772
Average times reached origin   = 0.3630
Probability of reaching origin = 0.2739
Proportion reached origin      = 0.2790
```

53. המחט של Buffon (Buffon's needle)^{D,S}

[5] קשה לעקוב אחר הצגת הדברים של Mosteller. ברצוני להודית ל-Aaron Montgomery שהבהיר לי את הפתרון [5].



איור 18 : המחט של Buffon

נתון משטח עם קווים מקבילים במרחק 1 אחד מהשני. קח מחט באורך $a \leq 1$ וזרוק אותו על המשטח. מה ההסתברות שהמחט חוצה קו?[6]

רמז: יש שני משתנים אקראיים (איור 18) : x, המקום של מרכז המחט ביחס לקו הקרוב ביותר עם התפלגות אחידה בטווח $[0, 1/2]$, ו-θ, הזווית שבין המחט לבין הקווים המקבילים עם התפלגות אחידה בטווח $[0, \pi/2]$.

פתרון 1

תהי $p(a)$ ההסתברות שמחט באורך a חוצה קו והגדר משתנה מסמן :

$$I_{\text{חוצה קו}} = \begin{cases} 1, & \text{מחט באורך } a \text{ חוצה קו} \\ 0, & \text{מחט באורך } a \text{ חוצה לא קו} \, . \end{cases}$$

אזי :

$$E(I_{\text{חוצה קו}}) = 1 \cdot p(a) + 0 \cdot (1 - p(a)) = p(a)\,, \tag{38}$$

וניתן לחשב את ההסתברות על ידי חישוב התוחלת.

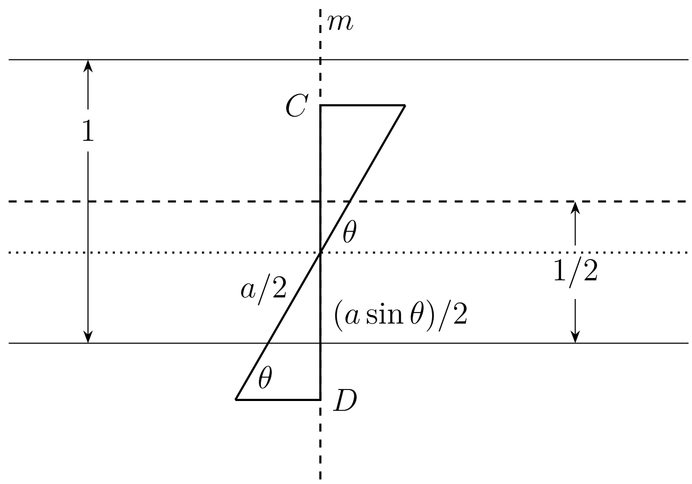
יהי m אנח לקווים המקבילים שעובר דרך מרכז המחט ותהי θ הזווית בין המחט לבין אחד מהקווים המקבילים. הטל את המחט על m כדי לקבל את הקטע הקו $\overline{CD}$ (איור 19). ההסתברות שהמחט חוצה קו היא :

$$P(\text{מחט באורך } a \text{ וזווית } \theta \text{ חוצה קו}) = \frac{(a/2)\sin\theta}{1/2} = a\sin\theta\,. \tag{39}$$

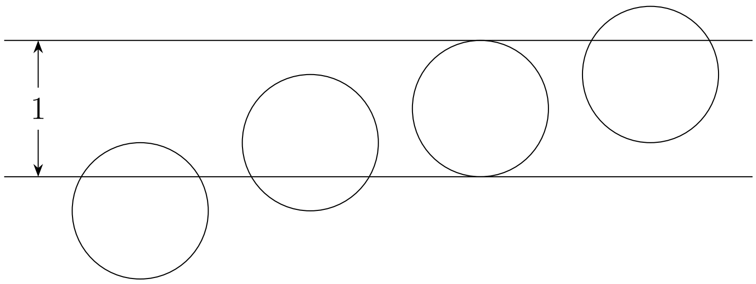
התוחלת של מספר הקווים שהמחט חוצה מתקבלת על ידי אינטגרציה מעל לזוויות האפשריות :

$$E(\text{lines crossed}) = \frac{1}{(\pi/2) - 0}\int_0^{\pi/2} a\sin\theta\, d\theta = \frac{2}{\pi}\cdot a(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2a}{\pi}\,. \tag{40}$$

פתרון 2 הפתרון מבוסס על [1, Chapter 26].



איור 19: משולש ישר-זווית לפתרון בעיית המחט של Buffon



איור 20: הפתרון של בעיית המחט של Buffon על מעגלים

תהי $E(x)$ התוחלת שמ מספר הקווים המקבילים שקו באורך x חוצה. עיין עכשיו בקו שמסובבים למעגל C **בקוטר** 1 והיקף π. אם תזרוק את המעגל על המשטח, הוא יחצה קו **בדיוק** פעמיים (איור 20), ולכן:

$$E(C) = 2\,. \tag{41}$$

בנה מצולע משוכלל Q_n חסום על ידי c (אדום), ובנה מצולע משוכלל R_n שחוסם את c (כחול) (איור 21).
כל קו ש-Q_n חוצה (אדום) חייב לחצות את המעגל וכל קו שחוצה את המעגל (כחול) חייב לחצות את R_n.
לכן:

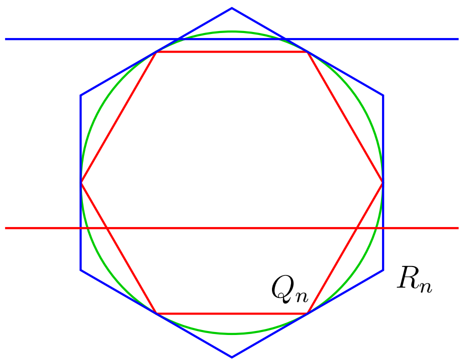
$$E(Q_n) \leq E(C) \leq E(R_n)\,. \tag{42}$$

יהי a_Q, a_R סכומי באורכים של צלעות של Q_n, R_n, בהתאמה. לפי הליניאריות של התוחלת:

$$E(Q_n) = \sum_{i=1}^{n} E(a_Q \text{ צלעות של}) = a_Q E(1) \tag{43}$$

$$E(R_n) = \sum_{i=1}^{n} E(a_R \text{ צלעות של}) = a_R E(1)\,. \tag{44}$$

[6] כדי להקל על החישובים אנו מניחים שהמרחק בין הקווים הוא 1. ניתן להתעלם מאפשרות שהמחט שוכב כולו לאורך אחד הקווים וכן את האפשרות שהוא נודע בשני קווים כי ההתסברות של אירועים אלה היא אפס.



איור 21: מצולעים כקירובים למעדל

כאשר $n \to \infty$ שני המצולעים הם קירובים למעגל ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} a_Q = \lim_{n\to\infty} a_R = \pi \,, \tag{45}$$

ההיקף של המעגל. ממשוואות 41--45 מתקבל:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} E(Q_n) = E(C) = \lim_{n\to\infty} E(R_n)\\
&E(C) = aE(1) = \pi E(1) = 2\\
&E(1) = \frac{2}{\pi}\\
&E(a) = aE(1) = \frac{2a}{\pi}\,.
\end{aligned}$$

סימולציה

$\pi = 2a/E$ ולכן ניתן לחשב קירוב לערכו על ידי הרצת סימולציה או זריקת מחטים על שולחן!

```
For length = 0.2:
Expectation of crossings = 0.1273
Average crossings        = 0.1308
Empirical value for pi   = 3.0581

For length = 0.5:
Expectation of crossings = 0.3183
Average crossings        = 0.3227
Empirical value for pi   = 3.0989

For length = 1.0:
Expectation of crossings = 0.6366
Average crossings        = 0.6333
Empirical value for pi   = 3.1581
```

54. המחט של Buffon עם רשת אופקי ואנכי
(Buffon's needle with horizontal and vertical rulings)

פתור את בעיית המחט של Buffon עבור משטח עם רשת אופקי ואנכי כאשר גודל המשבצות הוא 1×1. מחט יכול לחצות קו אנכי (ירוק), קו אופקי (כחול), שניהם (אדום) או אף אחד (כתום) (איור 22).

רמז: האם מספר הקווים האופקים והאכנים שהמחט חוצה בלתי-תלויים?

פתרון

מספר הקווים האופקים והאכנים שהמחט חוצה אכן בלתי-תלויים, ולפי הליניאריות של התוחלת:

$$\begin{aligned} E(\text{קווים שמחט באורך } a \text{ חוצה}) &= E(\text{קווים אנכים שמחט באורך } a \text{ חוצה} + \\ &\quad \text{קווים אופקים שמחט באורך a חוצה}) \\ &\quad E(\text{קווים אנכים שמחט באורך } a \text{ חוצה}) + \\ &\quad E(\text{קווים אופקים שמחט באורך a חוצה}) \\ &= \frac{2a}{\pi} + \frac{2a}{\pi} = \frac{4a}{\pi} \,. \end{aligned}$$

55. מחטים ארוכים (Long needles)^{D,S}

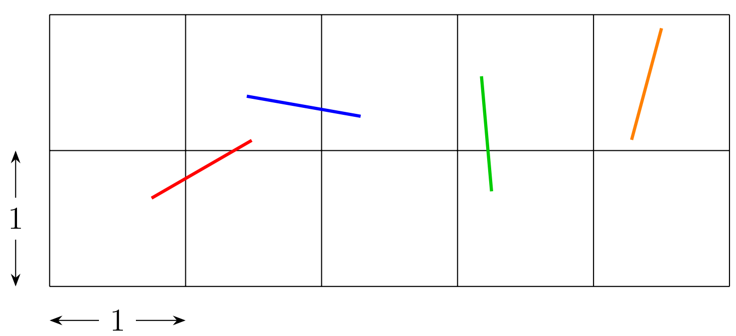
יהי $a > 1$ אורכו של המחט בבעייתו של Buffon.

שאלה 1: מה התוחלת של **מספר הקווים** שמחט חוצה?

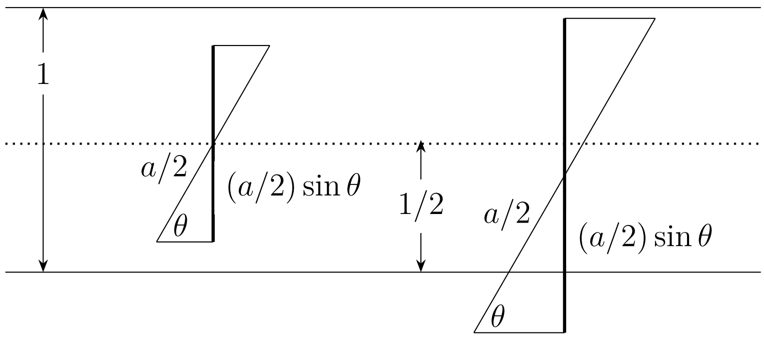
שאלה 2: מה ההסתברות שהמחט חוצה **לפחות** קו אחד?

רמז: עבור איזו זוויות θ ההסתברות של חציית קו היא 1?

פתרון



איור 22: בעיית המחט של Buffon עבור משטח עם רשת אופקי ואנכי



איור 23 : מחטים ארוכים

תשובה 1: שבור את המחט לחלקים באורים $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $a_i < 1$, כך ש-$a = \sum_{i=1}^{n} a_i$. לפי הליניאריות של התוחלת והפתרון של בעיה 53 :

$$E(a) = \sum_{i=1}^{n} E(a_i) = \frac{2a}{\pi} \,.$$

תשובה 2: הפתרון מבוסס על [12] ו-[1, Chapter 26].

לפי משוואה 39 ההסתברות שהמחט יחצה קו היא $a\sin\theta$ **אם** $a\sin\theta \leq 1$, כלומר, אם $0 \leq \theta \leq \sin^{-1}(1/a)$. אבל, אם $a\sin\theta > 1$ ההסתברות היא 1 **(איור 23)**. נכליל את משוואה 40 עבור $a > 0$ שרירותי. האינטגרל מוחשב בשני חלקים, אחד עבור $(\theta < \sin^{-1}(1/a))$ ואחר עבור $(\theta > \sin^{-1}(1/a))$:

$$\begin{aligned}
E(a) &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\sin^{-1}(1/a)} a\sin\theta \, d\theta + \int_{\sin^{-1}(1/a)}^{\pi/2} 1 \, d\theta\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(a(-\cos\theta)\Big|_0^{\sin^{-1}(1/a)} + \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1/a)\right)\right) \\
&= 1 + \frac{2}{\pi}\left(a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}\right) - \sin^{-1}(1/a)\right) \,.
\end{aligned}$$

סימולציה

```
For length = 1.5:
Expectation of crossings = 0.7786
Average crossings        = 0.7780
For length = 2.0:
Expectation of crossings = 0.8372
Average crossings        = 0.8383
For length = 3.0:
Expectation of crossings = 0.8929
Average crossings        = 0.8897
```

56. הכד של Molina (Molina's urns)

שני כדים U_1, U_2 מכילים m כדורים כל אחד. ב-U_1 נמצאים w_1 כדורים לבנים ו-b_1 כדורים שחורים, וב-U_2 נמצאים w_2 כדורים לבנים ו-b_2 כדורים שחורים. מכל כד שלוף n כדורים **עם החזרה**.

שאלה 1: עבור ערכים שונים של $n > 1$ מצא w_1, b_1, w_2, b_2 כך ש:

$$P(\text{כל כדורים שנשלפו מ-}U_1\text{ לבנים}) = P(\text{כל כדורים שנשלפו מ-}U_2\text{ לבנים או שחורים})\,.$$

פתרון

תשובה 1: עבור $n = 2$ המשוואה שיש לפתור היא:

$$\left(\frac{w_1}{m}\right)^2 = \left(\frac{w_2}{m}\right)^2 + \left(\frac{b_2}{m}\right)^2$$
$$w_1^2 = w_2^2 + b_2^2\,.$$

פתרון אחד הוא $w_1 = 10, b_1 = 4, w_2 = 6, b_2 = 8$.

תשובה 2: לפי המשפט האחרון של Fermat, שהוכח ב-1995 על ידי Andrew Wiles, אין פתרונות ל-$w_1^n = w_2^n + b_2^n$ עבור $n \geq 3$.

סקירה על הסתברות

סעיף זה סוקר מושגים בהתסבתרות. אביא דוגמה של כל מושג עבור הטלת קוביה הוגנת עם שישה משטחים.

ניסוי (experiment) מושג לא מוגדר כאשר הכוונה היא לפעולה שיש לה תוצאות אפשריות. מונח אחר היא ??trial הטלת קוביה היא ניסוי.

תוצאה (outcome) התוצאה של ניסוי. אם אתה מטיל קוביה אחת, תוצאה אפשרית היא 4.

מרחב מדגם (sample space) קבוצת כל התוצאות האפשריות של ניסוי. הקבוצה $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ היא מרחב המדגם של הטלת קוביה.

אירוע (event) תת-קבוצה של מרחב מדגם. תת-הקבוצה $e = \{2, 4, 6\} \subseteq S$ היא האירוע של הופעת מספר זוגי בהטלת קוביה.

משתנה אקראי (random variable) פונקציה ממרחב המדגם למספרים (ממשיים). יהי T מרחב המדגם של הטלת זוג קוביות:

$$T = \{(a, b)|a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} .$$

הגדר משתנה אקראי X כפונקציה $X : T \mapsto \{2, 3, \ldots, 11, 12\}$ שממפה תוצאות של הטלת זוג קוביות לסכום המספרים על הקוביות:

$$X((a, b)) = a + b . \tag{46}$$

איחוד, חיתוך, משלים (union, intersection, complement) אירועים הם קבוצות ולכן למושגים הללו יש את המשמעות הרגילה בתורת הקבוצות. יהי $e_1 = \{2, 4, 6\}$ ו-$e_2 = \{1, 2, 3\}$. אזי:

$$e_1 \cup e_2 = \{1, 2, 3, 4, 6\} \quad e_1 \cap e_2 = \{2\} \quad \overline{e_1} = S \setminus e_1 = \{1, 3, 5\} .$$

החיתוך הוא קבוצת המספרים הזוגיים מתוך שלושת האיברים הראשונים במרחב המדגם. המשלים הוא קבוצת המספרים האי-זוגיים מתוך מרחב המדגם.

זרים (mutually exclusive) שני אירועים או יותר זרים אם החיתוך שלהם הוא הקבוצה הריקה. $e_1 = \{2, 4, 6\}$ ו-$e_2 = \{1, 3, 5\}$ זרים כי $e_1 \cap e_2 = \emptyset$, כלומר, אין תוצאות שהן מספרים שהם גם זוגיים וגם אי-זוגיים.

הסתברות (probability) הסתברות היא הגבול של התדירות היחסית של אירוע. יהי e אירוע ויהי n_e מספר הפעמים שהאירוע e מתרחש ב-n חזרות על הניסוי. $P(e)$, ההסתברות של האירוע e, היא:

$$P(e) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_e}{n} .$$

הגדרה זו היא בעייתית כי אנחנו לאממש יודעים שהגבול קיים. ההגדרה מוגדרת על "חזרות על הניסוי" אולם אנו רוצים להגדיר הסתברות ללא קשר לסדרה מסויימת של ניסויים.

הסתברות מודרנית מבוסס על קבוצה של שלוש אקסיומות. לא נפתח את התיאוריה, אולם החשיבות של שתיים מהאקסיומות ברורה:

$$P(e) \geq 0$$
$$P(S) = 1 .$$

אירוע מתרחשת עם התסתברות כלשהי או שהיא לא מתרחשת, ומרחב המדגם הוא לפי ההגדרה כל התוצאות האפשריות.

חוק המספרים הגדולים מבטיח שהתפיסה האינטואיטיבית שלנו שהתסברות היא תדירות יחסית דומה מאוד למה שקורה כאשר ניסוי מתבצע פעמים רבות.

התפלגות אחידה (uniformly distributed) אם הסתברות של כל התוצאת במרחב שוות, להסתברות התפלגות אחידה. אם S היא קבוצה סופית ולהסתברות שלה התפלגות אחידה אזי:

$$P(e) = \frac{|e|}{|S|}\,.$$

אם אתה מטיל קוביה **הוגנת** ההסתברות של התוצאות מתפלגת אחידה ולכן עבור $e = \{2,4,6\}$:

$$P(e) = \frac{|e|}{|S|} = \frac{|\{2,4,6\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \frac{1}{2}\,.$$

הסתברות מותנית (conditional probability) יהי e_1, e_2 אירועים. $P(e_1|e_2)$, ההסתברות המותנית ש-e_1 מתרחש אם נתון ש-e_2 מתרחש, נתונה על ידי:

$$P(e_1|e_2) = \frac{P(e_1 \cap e_2)}{P(e_2)}\,.$$

יהי $e_1 = \{1,2,3\}$ האירוע שקוביה מראה מספר פחות או שווה ל-3 ויהי $e_2 = \{2,4,6\}$ האירוע שהקוביה מראה מספר זוגי. אזי:

$$P(e_2|e_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(e_1)} = \frac{P(\{2\})}{P(\{2,4,6\})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}\,.$$

זה מתקבל על דעת כי אם אתה יודע שמספר הוא פחות או שווה ל-3, רק אחת משלושת התוצאה היא מספר זוגי.

בלתי-תלוי (independence) שני אירועים בלתי-תלויים אם ההסתברות של החיתוך שלהם היא המכפלה של ההסתברויות הנפרדות:

$$P(e_1 \cap e_2) = P(e_1)\,P(e_2)\,.$$

במונחים של הסבתרות מותנית:

$$P(e_1|e_2) = \frac{P(e_1) \cap P(e_2)}{P(e_2)} = \frac{P(e_1)\,P(e_2)}{P(e_2)} = P(e_1)\,.$$

עבור אירועים בלתי-תלויים e_1, e_2, ידיעה של ההסתברות של e_2 לא מספק מידע על ההסתברות של e_1.
שלוש הטלות של קוביה הוגנת בלתי-תלויות ולכן ההסתברות שכולם מראות מספר זוגי היא $\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$.

ממוצע (average) תהי $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ קבוצה של ערכים. אזי:

$$Average(S) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\,.$$

ממוצע מחושב מעל לקבוצה של ערכים אבל הממוצע לא חייב להיות איבר בקבוצה. אם יש 1000 בעיירה ולהם 3426 ילדים, הממוצע של מספר הילדים למשפחה היא 3.426 למרות שברור שאין משפחה עם 3.426 ילדים. אם אתה מטיל קוביה שש פעמים ומקבל את המספרים $\{2,2,4,4,5,6\}$ הממוצע הוא:

$$\frac{2+2+4+4+5+6}{6} = \frac{23}{6} \approx 3.8\,,$$

שוב, לא איבר בקבוצה.

תוחלת (expectation) התוחלת של משתנה אקראי היא סכום ההסתברויות של כל תוצאה כפול הערך של משתנה עבור אותה תוצאה. עבור קוביה הוגנת לכל תוצאה יש הסתברות זהה ולכן:

$$E(\text{ערך קוביה}) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5\,.$$

השתנה האקראי X ממשוואה 46 ממפה את המספרים המופיעים על זוג קוביות לסכום המספרים. ההסתברות של כל זוג היא $1/36$, אבל לזוגות $(2,5)$ ו-$(5,2)$ אותו סכום ולכן הם שייכים לאותה תוצאה. הערכים של המשתנה האקראי הם $\{2,\ldots,12\}$ ומספר הדרכים לקבל כל אחד הם:

סכום	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
זוגות	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

התוחלת היא הממוצע של ערכי המשתנה האקראי כפול **המשקל** שהוא ההסתברות של כל תוצאה:

$$E(\text{סכום זוג קוביות}) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \cdots + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7\,.$$

עבור קבוצה שרירותית של אירועים $\{e_1,\ldots,e_n\}$ התוחלת היא:

$$E = \sum_{i=1}^{n} e_i P(e_i)\,.$$

ליניאריות של התוחלת (linearity of expectation) התוחלת היא פונקציה ליניארית $E(ae_1+be_2) = aE(e_1)+bE(e_2)$ ועבור ביטויים ליניאריים שרירותיים:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(e_i)\,.$$

הוכחה אפשר למצוא ב-[11, Section 4.9].

משתנה מסמן (indicator variable) יהי e אירוע שההסתברות שלה היא $P(e)$. הגדר I_e, משתנה מסמן עבור e, כך [11, Chapter 4, Example 3b]:

$$I_e = \begin{cases} 1, & \text{אם } e \text{ מתרחש} \\ 0, & \text{אם } e \text{ לא מתרחש}\,. \end{cases}$$

מכאן $E(I_e) = 1 \cdot P(e) + 0 \cdot (1-P(e)) = P(e)$.

נוסחאות מתמטיות

משפט הבינום (binomial theorem) אם p היא ההסתברות של אירוע e אזי ההסתברות שהתוצאה של סדרה של n ניסויים בלתי-תלויים היא **בדיוק** k אירועים e ניתנת על ידי **המקדם הבינומי (binomial coefficient)**:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,.$$

לפי משפט הבינום:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}\,.$$

עבור $p, 1-p$ המשוואה היא $(p+(1-p))^n = 1$, כפי שאפשר לצפות כי אחת התוצאות חייבת להתרחש.

סכום סדרה הנדסית (sum of a geometric series) עבור $0 < r < 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}\,, \qquad \sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}\,.$$

סכום סדרה הרמונית (sum of a harmonic series) עבור n מספר שלם חיובי, הסדרה ההרמונית היא:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \ln n + \frac{1}{2n} + \gamma\,,$$

כאשר $\gamma \approx 0.5772$ הוא **הקבוע של Euler (Euler's constant)**. כאשר n שואף לאינסוף הסדרה מתבדרת:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty\,,$$

כי $\ln n$ אינו חסום.

הקירוב של Stirling (Stirling's approximation) קשה מאוד לחשב $n!$ עבור n גדול. נוח להשתמש באחת הנוסחאות של הקירוב של Stirling:

$$\begin{aligned}
n! &\approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \\
\ln(n!) &\approx n\ln n - n \\
\ln(n!) &\approx n\ln n - n + \frac{1}{6}\left(8n^3 + 4n^2 + n + \frac{1}{30}\right) + \frac{1}{2}\ln\pi\,.
\end{aligned}$$

התפלגות הסתברותית רציפה(Continuous probability distribution)

התפלגויות הסתברות רציפות לא מופיעות לעתים קרובות בספר אבל עבור קוראים עם הרקע המתאים אנו סורקים את המושגים הבסיסיים.

ניתן להגדיר הסתברויות מעל למשתנים אקראים רציפים. **פונקציית הסתברות צפיפות (probability density function (PDF))** $f(x) : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ ממפה תוצאה x לערך של הפונקציה וכך להגדיר:

$$P(x) = f(x)\,.$$

הסיבות למונח זו היא שההסתברות של ההופעה של כל מספר ממשי **אחד** היא אפס, ולכן הדרך הנכונה היא לתת הסתברויות לסביבות של נקודות.

התפלגות הסתברות מצטברת (cumulative probability distribution (CPD)) עבור הסביבה $[-\infty, a]$ מתקבל על ידי אינטגרציה של ה-PDF:

$$P(x < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx\,.$$

זו גם $P(x \leq a)$ כי $P(a) = 0$.
כמו כל הסתברות, $P(x) \geq 0$ לכל x ו-

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1\,.$$

אם ערכו של האיטגרל אינו 1 חייבים להשתמש **בקבוע נירמול (normalization constant)**. אם PDF מתפלגת אחידה בסביבה $[a, b]$ אזי:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} 1\,dx = (b - a)\,,$$

ולכן חייבים להגדיר:

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} 1\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot(b - a) = 1\,.$$

ניתן לחשב את התוחלת על ידי אינטגרציה של ה-PDF $f(x)$ כפול x:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx\,.$$

ניתן לקבל את ה-PDF על ידי גזירה של ה-CPD:

$$P(x < a) = \frac{d}{da}CDP(x < a)\,.$$

מקורות

[1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. Proofs from THE BOOK (Fifth Edition). Springer, .2014

[2] Matthew Carlton. Pedigrees, prizes, and prisoners: The misuse of conditional probability. Journal of Statistics Education, ,(2)13 .2005 https://doi.org/10.1080/10691898.2005.11910554.

[3] John P. Gilbert and Frederick Mosteller. Recognizing the maximum of a sequence. Journal of the American Statistical Association, ,73--35:(313)61 .1966

[4] Markus C. Mayer. Average distance between random points on a line segment. Mathematics Stack Exchange. https://math.stackexchange.com/q/1540015.

[5] Aaron Montgomery. Mosteller's solutions to random-walk problems. Mathematics Stack Exchange. URL: https://math.stackexchange.com/q/4460054.

[6] David S. Moore. A generation of statistics education: An interview with Frederick Mosteller. Journal of Statistics Education, ,(1)1 .1993 https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/10691898.1993.11910453.

[7] Frederick Mosteller. Understanding the birthday problem. The Mathematics Teacher, ,325--322:(5)55 .1962

[8] Frederick Mosteller. Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions. Dover, .1965

[9] Frederick Mosteller, Stephen E. Fienberg, and Robert E. K. Rourke. Beginning Statistics with Data Analysis. Addison-Wesley, .1983

[10] Frederick Mosteller, Robert E. K. Rourke, and George B. Thomas Jr. Probability With Statistical Applications. Addison-Wesley, .1961

[11] Sheldon Ross. A First Course in Probability (Tenth Edition). Pearson, .2019

[12] Wikipedia. Buffon's needle problem.