

Sorpresas matemáticas

Mordechai Ben-Ari

Traducción: Abraham Arcavi

© Moti Ben-Ari and Abraham Arcavi 2023

This work is licensed under Attribution-ShareAlike 4.0 International. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>.

Prólogo

Si todos estuviéramos expuestos a las matemáticas en su estado natural, con toda la diversión y las sorpresas que conllevan, creo que veríamos un cambio drástico tanto en la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas como en nuestra concepción de lo que significa ser "bueno en matemáticas".
Paul Lockhart

Estoy ávido de sorpresas, porque cada una de ellas nos hace un poco más inteligentes.
Tadashi Tokieda

Cuando se abordan adecuadamente, las matemáticas pueden depararnos muchas sorpresas agradables. Así lo confirma una búsqueda en Google de "sorpresas matemáticas" que, sorprendentemente, arroja casi 500 millones de resultados. ¿Qué es una sorpresa? Los orígenes de la palabra se remontan al francés antiguo, con raíces latinas: "sur" (sobre) y "prendre" (tomar, agarrar, apoderarse). Literalmente, sorprender es adelantar. Como sustantivo, sorpresa es tanto un acontecimiento o circunstancia imprevista o desconcertante como la emoción que provoca.

Consideremos, por ejemplo, un extracto de una conferencia de Maxim Bruckheimer¹ sobre el círculo de Feuerbach: "Dos puntos se encuentran en una y sólo una línea recta, esto no es ninguna sorpresa. Sin embargo, tres puntos no están necesariamente sobre una recta y si, durante una exploración geométrica, tres puntos 'caen en' una recta, esto es una sorpresa y frecuentemente tenemos que referirnos a este hecho como un teorema a demostrar. Tres puntos cualesquiera que no estén en una recta se encuentran en una circunferencia. Sin embargo, si cuatro puntos se encuentran en el mismo círculo, es una sorpresa que debe formularse como un teorema. . . . En la medida en que el número de puntos en una línea recta es mayor que 3, por lo que es el teorema más sorprendente. Del mismo modo, en la medida en que el número de puntos situados sobre una circunferencia es mayor que 4, el teorema es más sorprendente. Así, la afirmación de que para cualquier triángulo hay nueve puntos relacionados en el mismo círculo . . . es muy sorprendente. Además, a pesar de la magnitud de la sorpresa, su demostración es elegante y fácil".

En este libro, Mordechai Ben-Ari ofrece una rica colección de sorpresas matemáticas, la mayoría de ellas menos conocidas que el Círculo de Feuerbach y con

¹Maxim Bruckheimer fue un matemático que fue uno de los fundadores de la Open University UK y decano de su Facultad de Matemáticas. Fue Jefe del Departamento de Enseñanza de las Ciencias en el Instituto Weizmann de Ciencias.

sólidas razones para incluirlas. En primer lugar, a pesar de estar ausentes de los libros de texto, las joyas matemáticas de este libro son accesibles con sólo una formación de bachillerato (y paciencia, y papel y lápiz, ya que la diversión no sale gratis). En segundo lugar, cuando un resultado matemático desafía lo que damos por sentado, nos sorprendemos de verdad (Capítulos 1, 13). Del mismo modo, nos sorprende: la astucia de un argumento (Capítulos 2, 3), la justificación de la posibilidad de una construcción geométrica por medios algebraicos (Cap. 16), una demostración basada en un tema aparentemente no relacionado (Cap. 4, 5), una extraña demostración por inducción (Cap. 6), nuevas formas de ver un resultado bien conocido (Cap. 7), un teorema aparentemente menor que se convierte en el fundamento de todo un campo de las matemáticas (Cap. 8), fuentes inesperadas de inspiración (Cap. 9), ricas formalizaciones que surgen de actividades puramente recreativas como el origami (Cap. 10–12). Todas estas son diferentes razones para la inclusión de agradables, bellas y memorables sorpresas matemáticas en este precioso libro.

Hasta ahora he abordado la relación del libro con la primera parte de la definición de sorpresa, las razones cognitivas racionales de lo inesperado. En cuanto al segundo aspecto, el emocional, este libro es una vívida ejemplificación de lo que muchos matemáticos afirman sobre la razón principal para hacer matemáticas: ¡son fascinantes! Además, afirman que las matemáticas estimulan tanto nuestra curiosidad intelectual como nuestra sensibilidad estética, y que resolver un problema o comprender un concepto proporciona una recompensa espiritual, que nos incita a seguir trabajando en más problemas y conceptos.

Se ha dicho que la función de un prólogo es decir a los lectores por qué deben leer el libro. He intentado lograrlo, pero creo que la respuesta más completa vendrá de usted, el lector, después de leerlo y experimentar lo que sugiere la etimología de la palabra sorpresa: ¡ser sobrecogido por ella!

Abraham Arcavi

Prefacio

El artículo de Godfried Toussaint sobre la “brújula colapsable” [50] me causó una profunda impresión. Nunca se me habría ocurrido que la brújula moderna con junta de fricción no es la que se utilizaba en tiempos de Euclides. En este libro presento una selección de resultados matemáticos que no sólo son interesantes, sino que me sorprendieron cuando los encontré por primera vez.

Las matemáticas necesarias para leer el libro son las de la enseñanza secundaria, pero eso no significa que el material sea sencillo. Algunas de las pruebas son bastante largas y requieren que el lector esté dispuesto a perseverar en el estudio del material. La recompensa es la comprensión de algunos de los resultados más bellos de las matemáticas. El libro no es un libro de texto, porque el amplio abanico de temas tratados no encaja perfectamente en un programa de estudios. Es apropiado para actividades de enriquecimiento para estudiantes de secundaria, para seminarios de nivel universitario y para profesores de matemáticas.

Los capítulos pueden leerse independientemente. (Una excepción es que el capítulo 10 sobre los axiomas del origami es un requisito previo para los capítulos 11, 12, los otros capítulos sobre origami). Las notas pertinentes a todos los capítulos figuran a continuación en la lista denominada Estilo.

¿Qué es una sorpresa?

Había tres criterios para incluir un tema en el libro:

- Los teoremas me sorprendieron. Especialmente sorprendentes fueron los teoremas sobre la constructibilidad con regla y compás. Cuando una profesora de matemáticas me propuso un proyecto sobre origami, al principio lo rechacé porque dudaba de que pudiera haber matemáticas serias asociadas a esta forma de arte. Incluí otros temas porque, aunque conocía los resultados, sus demostraciones eran sorprendentes por su elegancia y accesibilidad, en particular, la demostración puramente algebraica de Gauss de que se puede construir un heptadecágono regular.
- El material no aparece en los libros de texto de secundaria y bachillerato, y sólo he encontrado estos teoremas y pruebas en libros de texto avanzados y en la literatura de investigación. Hay artículos en Wikipedia sobre la mayoría de los temas, pero hay que saber dónde buscar y los artículos suelen estar esquematizados.
- Los teoremas y las pruebas son accesibles con un buen conocimiento de las matemáticas de secundaria.

Cada capítulo concluye con un párrafo *¿Cuál es la sorpresa?* que explica mi elección del tema.

Resumen del contenido

El capítulo 1 presenta la prueba de Euclides de que cualquier construcción que sea posible con un compás fijo lo es también con un compás colapsable. Se han dado muchas pruebas, pero, como muestra Toussaint, la mayoría son incorrectas porque dependen de diagramas que no siempre representan correctamente la geometría. Para subrayar que no hay que fiarse de los diagramas, presento la famosa supuesta prueba de que todo triángulo es isósceles.

A lo largo de los siglos, los matemáticos intentaron sin éxito trisecar un ángulo arbitrario (dividirlo en tres partes iguales) utilizando únicamente una regla y un compás. Underwood Dudley realizó un estudio exhaustivo de los trisectores que encontró construcciones incorrectas; la mayoría de las construcciones son aproximaciones que se pretenden exactas. El capítulo 2 comienza presentando dos de estas construcciones y desarrollando las fórmulas trigonométricas que demuestran que sólo son aproximaciones. Para demostrar que la trisección con una regla y un compás no tiene importancia práctica, se presentan trisecciones con herramientas más complejas: El *neusis* de Arquímedes y el *cuadratrix* de Hipias. El capítulo termina con una demostración de que es imposible trisecar un ángulo arbitrario con una regla y un compás.

La cuadratura de un círculo (dado un círculo construir un cuadrado con la misma área) no se puede realizar utilizando una regla y un compás, porque el valor de π no se puede construir. El capítulo presenta tres elegantes construcciones de aproximaciones cercanas a π , una de Kochański y dos de Ramanujan. El capítulo concluye mostrando que se puede utilizar una cuadratriz para cuadrar un círculo.

El teorema de los cuatro colores afirma que es posible colorear cualquier mapa plano con cuatro colores, de forma que ningún país con un límite común esté coloreado con el mismo color. La demostración de este teorema es extremadamente complicada, pero la demostración del teorema de los cinco colores es elemental y elegante, como se muestra en el capítulo 4. El capítulo también presenta la demostración de Percy Heawood de que la "prueba" de Alfred Kempe del teorema de los cuatro colores es incorrecta.

¿Cuántos guardias debe tener un museo de arte para que todas las paredes estén bajo la observación constante de al menos un guardia? La demostración en el capítulo 5 es bastante ingeniosa, ya que utiliza la coloración de grafos para resolver lo que a primera vista parece un problema puramente geométrico.

El capítulo 6 presenta algunos resultados menos conocidos y sus pruebas por inducción: teoremas sobre los números de Fibonacci y los números de Fermat, la función 91 de McCarthy y el problema de Josefo.

El capítulo 7 analiza el método de Po-Shen Loh para resolver ecuaciones cuadráticas. El método es un elemento crítico de la prueba algebraica de Gauss de que se puede construir un heptadecágono (Capítulo 16). El capítulo incluye la construcción geométrica de al-Khwarizmi para encontrar raíces de ecuaciones cuadráticas y una construcción geométrica utilizada por Cardano en el desarrollo de la fórmula para encontrar raíces de ecuaciones cúbicas.

La teoría de Ramsey es un tema de la combinatoria que constituye un área activa de investigación. Busca patrones entre subconjuntos de grandes conjuntos. Capítulo 8 presenta ejemplos sencillos de triples de Schur, triples pitagóricos, números de Ramsey y el problema de van der Waerden. La demostración del teorema de los triples pitagóricos se ha realizado recientemente con ayuda de un programa informático basado en la lógica matemática. El capítulo concluye con una digresión sobre los conocimientos de los antiguos babilonios sobre los triples pitagóricos.

C. Dudley Langford observó a su hijo jugando con bloques de colores y se dio cuenta de que los había colocado en una secuencia interesante. En el capítulo 9 presenta su teorema sobre las condiciones para que tal secuencia sea posible.

El capítulo 10 contiene los siete axiomas del origami, junto con los cálculos detallados de la geometría analítica de los axiomas, y las caracterizaciones de los pliegues como loci geométricos.

El capítulo 11 presenta el método de Eduard Lill y el pliegue de origami propuesto por Margarita P. Beloch. Presento el método de Lill como un truco de magia, así que no lo estropearé dando detalles aquí.

El capítulo 12 muestra que el origami puede realizar construcciones que no son posibles con regla y compás: trisección de un ángulo, duplicación de un cubo y construcción de un nonágono (polígono regular de nueve lados).

El capítulo 13 presenta el teorema de Georg Mohr y Lorenzo Mascheroni de que cualquier construcción con regla y compás puede realizarse utilizando sólo un compás.

La afirmación correspondiente de que sólo es suficiente una regla es incorrecta, porque una regla no puede calcular longitudes que sean raíces cuadradas. Jean-Victor Poncelet conjeturó y Jakob Steiner demostró que una regla es suficiente, siempre que exista un único círculo fijo en algún lugar del plano (Chap. 14).

Si dos triángulos tienen el mismo perímetro y la misma área, ¿deben ser congruentes? Eso parece razonable, pero resulta que no es cierto, aunque se necesita un poco de álgebra y geometría para encontrar un par no congruente como se muestra en el Cap. 15.

El capítulo 16 presenta el tour-de-force de Gauss: una prueba de que un heptadecágono (un polígono regular con diecisiete lados) puede construirse utilizando una regla y un compás. Mediante un ingenioso argumento sobre la simetría de las raíces de los polinomios, obtuvo una fórmula que sólo utiliza los cuatro operadores aritméticos y las raíces cuadradas. Gauss no dio una construcción explícita de un

heptadecágono, por lo que se presenta la elegante construcción de James Callagy. El capítulo concluye con la construcción de un pentágono regular basado en el método de Gauss para la construcción de un heptadecágono.

Para mantener el libro lo más autocontenido posible, el Apéndice A recoge demostraciones de teoremas de geometría y trigonometría que pueden no resultar familiares al lector.

Estilo

- Se supone que el lector tiene un buen conocimiento de las matemáticas de secundaria, incluyendo:
 - Álgebra: polinomios y división de polinomios, *monic* polinomios—aquellos cuyo coeficiente de la mayor potencia es 1, ecuaciones cuadráticas, multiplicación de expresiones con exponentes $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
 - Geometría euclídea: triángulos congruentes $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ y los criterios de congruencia, triángulos semejantes $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ y las razones de sus lados, circunferencias y sus ángulos inscritos y centrales.
 - Geometría analítica: plano cartesiano, cálculo de longitudes y pendientes de segmentos de recta, fórmula de la circunferencia.
 - Trigonometría: las funciones sin, cos, tan y las conversiones entre ellas, ángulos en el círculo unidad, las funciones trigonométricas de ángulos reflejados alrededor de un eje como $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$.
- Las afirmaciones que hay que demostrar se denominan *teoremas* sin intentar distinguir entre teoremas, lemas y corolarios.
- Cuando un teorema sigue a una construcción, las variables que aparecen en el teorema se refieren a puntos, rectas y ángulos etiquetados en la figura que acompaña a la construcción.
- Se han dado los nombres completos de los matemáticos sin información biográfica que se puede encontrar fácilmente en Wikipedia.
- El libro está escrito de forma que sea lo más autocontenido posible, pero ocasionalmente la presentación depende de conceptos matemáticos avanzados y teoremas que se dan sin demostraciones. En tales casos, se presenta un resumen del material en recuadros que pueden omitirse.
- No hay ejercicios, pero se invita al lector ambicioso a demostrar cada teorema antes de leer la demostración.
- Las construcciones geométricas pueden estudiarse utilizando programas informáticos como Geogebra.

- \overline{AB} se utiliza tanto para el nombre de un segmento de recta como para la longitud del segmento.
- $\triangle ABC$ se utiliza tanto para el nombre de un triángulo como para el área del triángulo.

Agradecimientos

Este libro nunca se habría escrito sin el aliento de Abraham Arcavi, que me acogió con agrado para que me adentrara en su terreno de la educación matemática. También escribió amablemente el prólogo. Avital Elbaum Cohen y Ronit Ben-Bassat Levy siempre estuvieron dispuestas a ayudarme a (re)aprender matemáticas de secundaria. Oriah Ben-Lulu me introdujo en las matemáticas del origami y colaboró en las pruebas. Agradezco a Michael Woltermann el permiso para utilizar varias secciones de su reelaboración del libro de Heinrich D’Orrie. Jason Cooper, Richard Kruel, Abraham Arcavi y los revisores anónimos han aportado comentarios muy útiles.

Me gustaría dar las gracias al equipo de Springer por su apoyo y profesionalidad, en particular al editor Richard Kruel.

El libro se publica bajo el programa Open Access y me gustaría dar las gracias al Instituto Weizmann de Ciencias por financiar la publicación.

Los archivos fuente \LaTeX para el libro (que incluyen la fuente \TikZ para los diagramas) están disponibles en:

<https://github.com/motib/surprises>

Mordechai (Moti) Ben-Ari

Índice general

1. La brújula se hunde	13
1.1. Construcción con regla y compás	14
1.2. Brújulas fijas y brújulas abatibles	14
1.3. Construcción de Euclides para copiar un segmento de recta	15
1.4. Una construcción defectuosa para copiar un segmento de línea	17
1.5. No te fíes de un diagrama	19
2. Trisection of an Angle	22
2.1. Trisecciones aproximadas	22
2.2. Trisección con Neusis	26
2.3. Duplicar el cubo con un Neusis	28
2.4. Trisección mediante una cuadratriz	29
2.5. Números construibles	31
2.6. Números construibles como raíces de polinomios	33
2.7. Impossibility of the Classical Constructions	36
3. La cuadratura del círculo	39
3.1. Construcción de Kochański	39
3.2. Primera construcción de Ramanujan	41
3.3. Segunda construcción de Ramanujan	44
3.4. Cuadratura de un círculo con una cuadratriz	47
4. El teorema de los cinco colores	50
4.1. Mapas y gráficos planos	50
4.2. Fórmula de Euler	52
4.3. Gráficos no planos	54
4.4. Los grados de los vértices	54
4.5. El teorema de los seis colores	57
4.6. El teorema de los cinco colores	57
4.7. Demostración incorrecta del teorema de los cuatro colores de Kempe	59
5. Cómo custodiar un museo	62
5.1. Colorear polígonos triangulados	63
5.2. De colorear polígonos a vigilar un museo	64
5.3. Cualquier polígono puede triangularse	64

6. Induction	70
6.1. El axioma de la inducción matemática	70
6.2. Números de Fibonacci	72
6.3. Números de Fermat	74
6.4. La función 91 de McCarthy	76
6.5. El problema de Josefo	77
7. Resolución de ecuaciones cuadráticas	82
7.1. Métodos tradicionales para resolver ecuaciones cuadráticas	82
7.2. La relación entre las raíces y los coeficientes	83
7.3. Ejemplos del método de Loh	85
7.4. Derivación de la fórmula tradicional	87
7.5. Solución geométrica de ecuaciones cuadráticas de Al-Khwarizmi . .	87
7.6. Construcción de Cardano para resolver ecuaciones cúbicas	88
7.7. No les intimidaban los números imaginarios	90
7.8. El método de Lill y el círculo de Carlyle	92
7.9. Cálculo numérico de las raíces	93
8. Teoría de Ramsey	97
8.1. Schur triplica	97
8.2. Triples pitagóricos	99
8.3. El problema de Van der Waerden	100
8.4. Teorema de Ramsey	101
8.5. El método probabilístico	102
8.6. Resolución de SAT	103
8.7. Los triples pitagóricos en las matemáticas babilónicas	107
9. El problema de Langford	112
9.1. El problema de Langford como un problema de cobertura	112
9.2. ¿Para qué valores de N se puede resolver el problema de Langford? .	113
9.3. Solución para $L(4)$	116
10. Los axiomas del origami	119
10.1. Axioma 1	120
10.2. Axioma 2	120
10.3. Axioma 3	121
10.4. Axioma 4	123
10.5. Axioma 5	124
10.6. Axioma 6	126
10.7. Axioma 7	134

11. Lill's Method and the Beloch Fold	137
11.1. A Magic Trick	137
11.2. Especificación del método de Lill	139
11.3. Prueba del método de Lill	142
11.4. El pliegue de Beloch	143
12. Geometric Constructions Using Origami	147
12.1. Trisección de Abe de un ángulo	147
12.2. Trisección de un ángulo de Martin	148
12.3. Duplicación de un cubo de Messer	150
12.4. La duplicación de un cubo de Beloch	152
12.5. Construcción de un nonágono regular	153
13. Basta con una brújula	157
13.1. ¿Qué es una construcción con sólo un compás?	157
13.2. Reflexión de un punto	158
13.3. Construcción de un círculo de radio dado	158
13.4. Suma y resta de segmentos de línea	159
13.5. Construcción de un segmento de línea como cociente de segmentos	163
13.6. Construcción de la intersección de dos líneas	164
13.7. Construcción de la intersección de una recta y una circunferencia	167
14. Una regla y un círculo son suficientes	169
14.1. ¿Qué es una construcción sólo con regla?	169
14.2. Construcción de una recta paralela a una recta dada	170
14.3. Construcción de una perpendicular a una recta dada	173
14.4. Copiar un segmento de línea en una dirección determinada	173
14.5. Construcción de un segmento de línea como cociente de segmentos	175
14.6. Construcción de una raíz cuadrada	175
14.7. Construcción de la intersección de una recta y una circunferencia	176
14.8. Construcción de la intersección de dos circunferencias	177
15. Are Triangles with Equal Areas and Perimeters Congruent?	180
15.1. De un triángulo a una curva elíptica	180
15.2. Resolución de la ecuación de la curva elíptica	182
15.3. Derivación de un triángulo a partir de la curva elíptica	184
16. Construction of a Regular Heptadecagon	187
16.1. Construcción de polígonos regulares	187
16.2. Teorema fundamental del álgebra	188
16.3. Raíces de unidad	189
16.4. Prueba de Gauss de que un heptadecágono es construible	190

16.5. Derivación de la fórmula de Gauss	196
16.6. Construcción de un heptadecágono	196
16.7. Construction of a Regular Pentagon	200
A. Teoremas de geometría y trigonometría	203
A.1. Teoremas sobre triangles	203
A.2. Identidades trigonométricas	205
A.3. Teoremas de la bisectriz del ángulo	214
A.4. Teorema de Ptolomeo	216
A.5. Teorema de Ceva	219
A.6. Teorema de Menelao	221

Capítulo 1

La brújula se hunde

Una brújula moderna es un compás fijo: la distancia entre las dos patas puede fijarse de modo que es posible copiar un segmento de línea o un círculo de una posición a otra (Fig. 1.1). Euclides utilizó un *brújula de colapso* cuando no se puede mantener una distancia fija (Fig. 1.2). Los profesores suelen utilizar un compás colapsable consistente en un rotulador atado a una cuerda que se utiliza para construir un círculo en una pizarra. Es imposible mantener una longitud fija cuando se retira el compás de la pizarra.

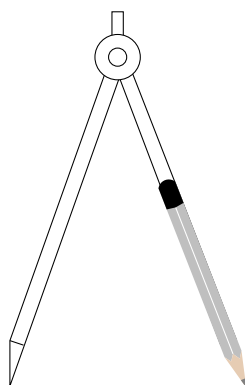


Fig. 1.1: Una brújula fija. Una pata tiene una aguja que se coloca en el centro del círculo. Un lápiz fijado a la otra pata sirve para dibujar el círculo. Las patas están unidas por una bisagra hermética, de modo que la distancia entre las patas (el radio del círculo) se mantiene incluso cuando el compás se levanta del papel.

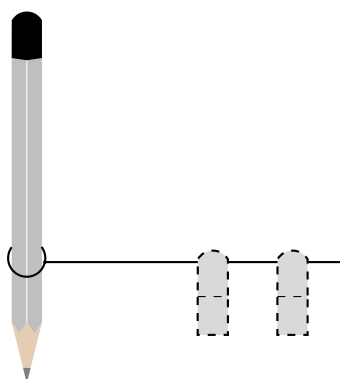


Fig. 1.2: Un compás colapsable. El usuario sujeta un trozo de cuerda en el centro del círculo. El otro extremo de la cuerda se ata a un lápiz y se utiliza para dibujar el círculo. Cuando se levanta el compás del papel, los dedos (punteados) pueden deslizarse fácilmente hasta una nueva posición.

Este capítulo comienza con una discusión sobre la relevancia de estudiar la construcción con regla y compás (Secc. 1.1). En el apartado 1.2 se comparan los dos tipos de compás en la construcción más elemental: una mediatriz. En el apartado 1.3 se presenta el método de Euclides para copiar un segmento de recta utilizando un compás de colapso. Esto demuestra que cualquier construcción que se pueda hacer usando un compás fijo se puede realizar usando un compás colapsable. La sección 1.4

muestra una prueba de este teorema que parece correcta, pero no funciona para todas las configuraciones de rectas y puntos. Para enfatizar que no hay que fiarse de los diagramas, la sección 1.5 presenta una famosa supuesta prueba de que todos los triángulos son isóceles; la prueba parece correcta, pero no lo es porque se basa en un diagrama incorrecto.

1.1 Construcción con regla y compás

La construcción con regla y compás solía ser el concepto fundamental que se enseñaba en geometría euclidiana. Recientemente, ha caído en desgracia en los programas escolares. Es cierto que el tema tiene poca o ninguna utilidad práctica. Como mostramos en las secciones 2.2, 2.3, 2.4, 3.4, los griegos sabían cómo realizar construcciones que son imposibles con una regla y un compás utilizando herramientas sólo ligeramente más avanzadas. Hoy en día, mediante métodos numéricos, los ordenadores pueden realizar construcciones con la precisión que se desee.

No obstante, creo que estudiar las construcciones tiene sus ventajas:

- Es más divertido y desafiante aprender geometría a través de construcciones que simplemente leyendo teoremas y pruebas.
- Se han logrado avances significativos en matemáticas mediante intentos de encontrar construcciones. El capítulo 16 presenta una construcción de Gauss que condujo al álgebra abstracta moderna, en particular, la teoría desarrollada por Évariste Galois.
- Es algo contraintuitivo y por lo tanto muy interesante que se pueda demostrar que es imposible construir algunos objetos geométricos.
- Lamentablemente, hay muchas personas que pierden años de su vida intentando realizar construcciones imposibles. Los estudiantes deberían ser conscientes de la inutilidad de tales esfuerzos.

1.2 Brújulas fijas y brújulas abatibles

Algunos libros de geometría presentan la construcción de una mediatriz de un segmento de recta construyendo dos circunferencias centradas en los extremos del segmento de recta de forma que los radios sean iguales y mayores que la mitad de la longitud del segmento (Fig. 1.3). Esto sólo se puede hacer con un compás fijo porque después de dibujar el círculo centrado en A , la distancia entre las patas del compás tiene que permanecer fija para dibujar el círculo centrado en B .

Figura 1.4 muestra la construcción de una mediatriz con compás fijo o con compás abatible. Se construyen dos circunferencias: una centrada en A con radio \overline{AB} y otra centrada en B con radio \overline{BA} . Esto se puede hacer con un compás de colapso

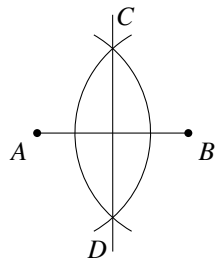


Fig. 1.3: Construcción de una mediatriz con compás fijo

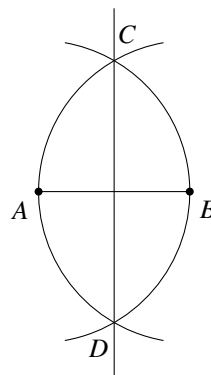


Fig. 1.4: Construcción de una mediatriz con compás fijo o de colapso

porque (obviamente) $\overline{AB} = \overline{BA}$, por lo que el compás no tiene que “recordar” la longitud de \overline{AB} para construir una circunferencia centrada en B con el mismo radio. La demostración de que la recta construida mostrada en la Fig. 1.3 es una mediatriz no es nada elemental porque hay que utilizar conceptos relativamente avanzados como triángulos congruentes. Sin embargo, la prueba de que la construcción de una mediatriz mostrada en la Fig. 1.4 es correcta es sencilla y se basa en el hecho de que $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero. De hecho, esta es la primera proposición en el *Elementos* de Euclides. $\overline{AC} = \overline{AB}$ ya que son radios del mismo círculo, análogamente, $\overline{BC} = \overline{BA}$. Tenemos: $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BA} = \overline{BC}$.

Figura 1.5 muestra que para la construcción con compás fijo, el triángulo será un triángulo isósceles, no necesariamente equilátero (Fig. 1.6).

1.3 Construcción de Euclides para copiar un segmento de recta

La segunda proposición del *Elementos* de Euclides describe cómo copiar un segmento de recta \overline{AB} dado en un segmento de la misma longitud, uno de cuyos puntos extremos es un punto C dado. Por lo tanto, un compás fijo no añade ninguna capacidad adicional y basta con un compás colapsable, aunque las construcciones son más fáciles con un compás fijo.

Teorema 1.1. *Dado un segmento de recta \overline{AB} y un punto C , se puede construir un segmento de recta $\overline{CC'}$, uno de cuyos puntos extremos es C , utilizando un compás de colapso, tal que $\overline{AB} = \overline{CC'}$ (Fig. 1.7).*

Demostración. Construir el segmento de recta \overline{AC} . Construir el triángulo equilátero $\triangle ACD$ cuya base es \overline{AC} (Fig. 1.8). Por la primera proposición de Euclides, el triángulo se puede construir utilizando un compás de colapso. Construir la semirrecta

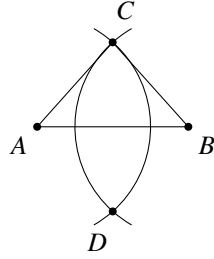


Fig. 1.5: Construcción de un triángulo isósceles con compás fijo

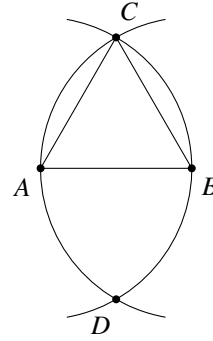


Fig. 1.6: Construcción de un triángulo equilátero con un compás de derrumbe

que es prolongación de la recta segmento de D a A , y construir la semirrecta que es prolongación de la recta segmento de D a C (Fig. 1.9). Construimos la circunferencia centrada en A con radio \overline{AB} y denotamos la intersección de la circunferencia y la semirrecta que prolonga \overline{DA} por E (Fig. 1.10). Construimos la circunferencia centrada en D con radio \overline{DE} y denotamos por F la intersección de la circunferencia y la semirrecta que prolonga \overline{DC} (Fig. 1.11).

$\overline{DC} = \overline{DA}$ porque el $\triangle ACD$ es equilátero. $\overline{AE} = \overline{AB}$ son radios del mismo círculo, al igual que $\overline{DF} = \overline{DE}$. Por lo tanto:

$$\overline{CF} = \overline{DF} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DA} = \overline{AE} = \overline{AB}.$$

□

La especificación de las direcciones de los rayos es esencial. La demostración funciona para cualquier segmento de recta \overline{AB} y cualquier punto C , independientemente de su posición respecto a \overline{AB} . Especificando las direcciones el “cono” encerrado por los dos rayos intersecará los círculos aunque $\overline{AC} > \overline{AB}$ (Fig. 1.12).

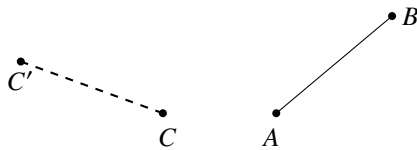


Fig. 1.7: Copiar el segmento de recta \overline{AB} . La orientación de $\overline{CC'}$ no es importante.

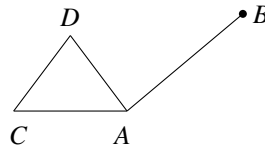


Fig. 1.8: Copiar un segmento de línea con un compás de colapso

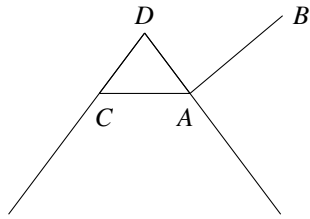


Fig. 1.9: Construcción de rayos a partir de D

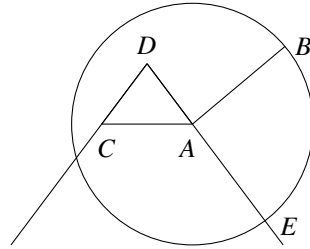


Fig. 1.10: Construir un círculo de radio AB

1.4 Una construcción defectuosa para copiar un segmento de línea

Demostración. Construir tres circunferencias: una centrada en A con radio \overline{AB} , otra centrada en A con radio \overline{AC} , y otra centrada en C con radio $\overline{AC} = \overline{CA}$. Denotamos las intersecciones de las circunferencias centradas en A y C por E y F , respectivamente, y denotamos una intersección de la circunferencia centrada en C y la circunferencia centrada en A con radio \overline{AB} por D . Si $\overline{AC} > \overline{AB}$, la construcción es como se muestra en Fig. 1.13.

Construir una circunferencia centrada en E con radio \overline{ED} . Denotemos por G la intersección de esta circunferencia con la circunferencia centrada en A de radio \overline{AC} . Hay dos intersecciones, por lo que elegir la más cercana a C (Fig. 1.14). $\overline{CD} = \overline{CE}$ son radios de la misma circunferencia que $\overline{AE} = \overline{AG}$. Por construcción los radios \overline{CE} y \overline{AE} son iguales. Por tanto:

$$\overline{CD} = \overline{CE} = \overline{AE} = \overline{AG}.$$

$\overline{EG} = \overline{ED}$ son radios del mismo círculo, por lo que $\triangle EAG \cong \triangle DCE$ por lado-lado-lado y $\angle GEA = \angle DEC$.

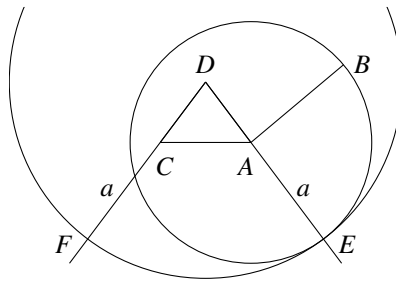


Fig. 1.11: Construcción de $\overline{CF} = \overline{AB}$

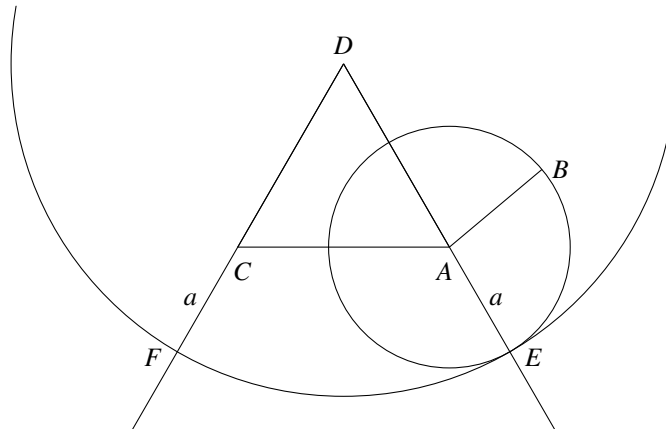


Fig. 1.12: Construcción para $\overline{AC} > \overline{AB}$

Desde entonces:

$$\angle GEC = \angle GEA - \angle CEA = \angle DEC - \angle CEA = \angle DEA,$$

resulta que $\triangle ADE \cong \triangle CGE$ por lado-ángulo-lado. $\overline{AB} = \overline{AD}$ son radios del círculo menor centrado en A, por lo que $\overline{GC} = \overline{AD} = \overline{AB}$. \square

La prueba sólo es correcta si $\overline{AC} > \overline{AB}$. Figura 1.15 muestra un diagrama donde $\overline{AC} < \overline{AB}$ y se puede ver que $\overline{AB} \neq \overline{GC}$.

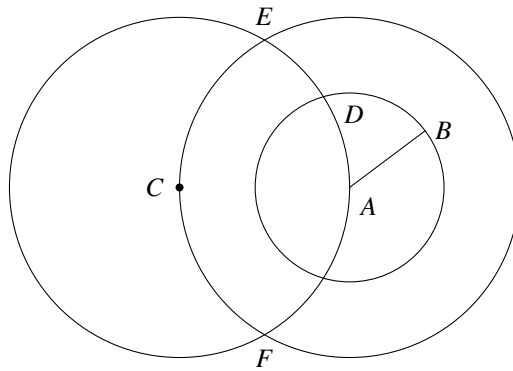


Fig. 1.13: Construction for copying a line segment (1)

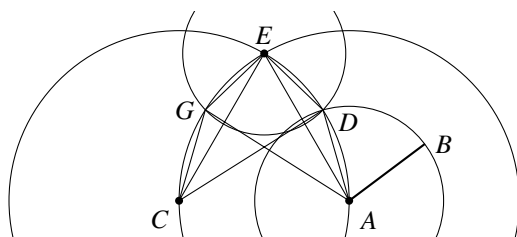


Fig. 1.14: Construcción para copiar un segmento de recta (2)

1.5 No te fíes de un diagrama

Teorema 1.2 (Incorrecto, por supuesto). *Todos los triángulos son isósceles.*

Demostración. Dado un triángulo arbitrario $\triangle ABC$, sea P la intersección de la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ y la mediatriz de \overline{BC} . Las intersecciones de las altitudes desde P a los lados \overline{AB} , \overline{AC} se denotan por E, F , respectivamente (Fig. 1.16). $\triangle APE \cong \triangle APF$ porque son triángulos rectángulos con ángulos iguales α y lado común \overline{AP} . $\triangle DPB \cong \triangle DPC$ ya que son triángulos rectángulos, \overline{PD} es un lado común y $\overline{BD} = \overline{CD} = a$. $\triangle EPB \cong \triangle FPC$ ya que son triángulos rectángulos, $\overline{EP} = \overline{PF}$ por la primera congruencia y $\overline{PB} = \overline{PC}$ por la segunda congruencia. Combinando las ecuaciones obtenemos que $\triangle ABC$ es isóceles:

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AF} + \overline{FC} = \overline{AC}.$$

□

La lógica de la prueba es correcta, pero el diagrama en el que se basa la prueba no es correcto porque el punto P está fuera del triángulo. (Fig. 1.17).

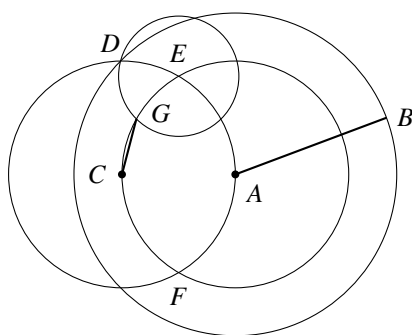


Fig. 1.15: Un diagrama para el que la prueba no funciona

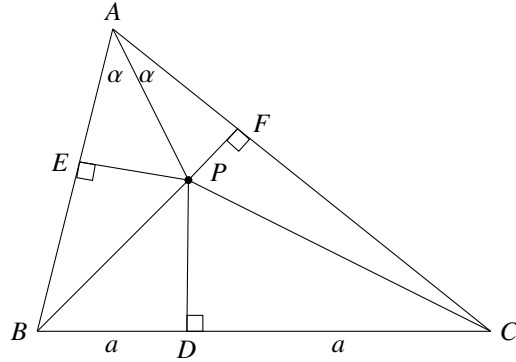


Fig. 1.16: *Una prueba incorrecta de que todos los triángulos son isóceles*

¿Cuál es la sorpresa?

De estudiante daba por sentado que un compás tiene una junta de fricción que mantiene la distancia entre la punta y el lápiz cuando se levanta del papel. Cuando el profesor utilizaba una brújula hecha con un trozo de cuerda y un trozo de tiza, nunca imaginé que se diferenciara de mi brújula. El artículo de Gotfried Toussaint fue una verdadera sorpresa, al igual que su demostración de que las pruebas posteriores a Euclides eran incorrectas porque dependían de diagramas que hacían suposiciones injustificadas. Recomendando el artículo a los lectores que deseen profundizar en el conocimiento de las pruebas en matemáticas.

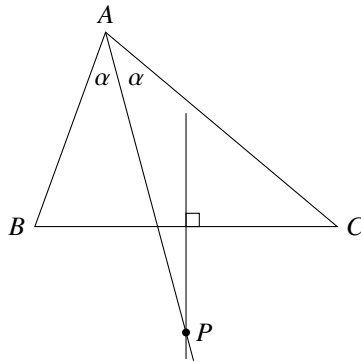


Fig. 1.17: *Por qué no funciona la construcción*

Fuentes

Este capítulo se basa en [50]. La construcción incorrecta de la equivalencia de los dos compases en Sect. 1.4 es de [37]. Thomas L. Heath, uno de los mayores expertos en matemáticas griegas, ha escrito una exhaustiva traducción al inglés de los *Elements* de Euclides junto con un extenso comentario [22].

Capítulo 2

Trisection of an Angle

Es imposible trisecar un ángulo arbitrario (dividir el ángulo en tres partes iguales) utilizando sólo una regla y un compás. La trisección requiere la construcción de raíces cúbicas, pero una regla y un compás sólo pueden construir longitudes que son expresiones construidas a partir de números enteros, los cuatro operadores aritméticos y raíces cuadradas. Esto fue demostrado por Pierre Wantzel en 1837. Sin embargo, innumerables aficionados siguen intentando trisecar un ángulo. Sus construcciones son aproximaciones aunque están convencidos de que son correctas. La sección 2.1 presenta dos construcciones de este tipo, desarrolla fórmulas para los ángulos y muestra los errores en las aproximaciones.

Los matemáticos griegos descubrieron que si se permiten otros instrumentos, los ángulos se pueden trisecar. La sección 2.2 explica una construcción de Arquímedes-utilizando un instrumento sencillo llamado *neusis* y la sección 2.3 muestra cómo doblar un cubo utilizando el *neusis*. La sección 2.4 presenta una construcción para la trisección por Hipias utilizando un instrumento llamado *cuadratriz*. El resto del capítulo contiene una prueba de la imposibilidad de trisección de un ángulo. La sección 2.5 caracteriza los números construibles, la sección 2.6 relaciona los números construibles con las raíces de los polinomios y la sección 2.7 utiliza esta teoría para demostrar que la trisección de un ángulo y la duplicación de un cubo son imposibles.

2.1 Trisecciones aproximadas

2.1.1 Primera trisección aproximada

Construcción: Sea $\theta = \angle AOB$ un ángulo arbitrario y sin pérdida de generalidad supongamos que A, B están en una circunferencia unitaria cuyo centro es O . Bisecamos $\angle AOB$ y sea C la intersección de la bisectriz con la circunferencia unitaria. Sea D el punto medio de la \overline{OA} y sea T el punto medio de la \overline{DC} . Denotemos el ángulo $\angle DOT$ por ϕ (Fig. 2.1).

Teorema 2.1.

$$\tan \phi = \frac{2 \sin(\theta/2)}{1 + 2 \cos(\theta/2)}.$$

Demostración. Figura 2.2 se extrae de Fig. 2.1 y contiene anotaciones adicionales.

Sea \overline{CF} la perpendicular a \overline{OA} que corta a \overline{OA} en F . Dado que $\overline{OC} = 1$, $\overline{CF} = \sin(\theta/2)$ y $\overline{OF} = \cos(\theta/2)$. Sea \overline{TE} la perpendicular a \overline{OA} que interseca \overline{OA} en E .

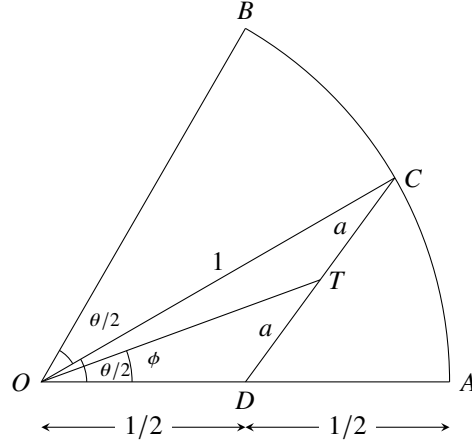


Fig. 2.1: Primera trisección aproximada (1)

T es el punto medio de \overline{DC} por lo que $\overline{DT} = \overline{TC} = a$. Pero \overline{FT} es la mediana de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, por lo que $\overline{FT} = a$ y por tanto $\triangle DTF$ es isóceles. Se deduce que \overline{TE} es tanto la mediana como la altitud de \overline{DF} . A partir del diagrama es fácil ver que:

$$\overline{OE} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right).$$

Calcular la longitud $2a = \overline{CD}$ utilizando el Teorema de Pitágoras en $\triangle DCF$:

$$(2a)^2 = \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

La longitud $h = \overline{TE}$ puede calcularse a partir del Teorema de Pitágoras en $\triangle DTE$:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + \left[\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right) \right]^2 \\ h^2 &= \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \left[\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right) \right]^2 = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ h &= \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ \tan \phi &= \frac{h}{\overline{OE}} = \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{1 + 2 \cos \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

□

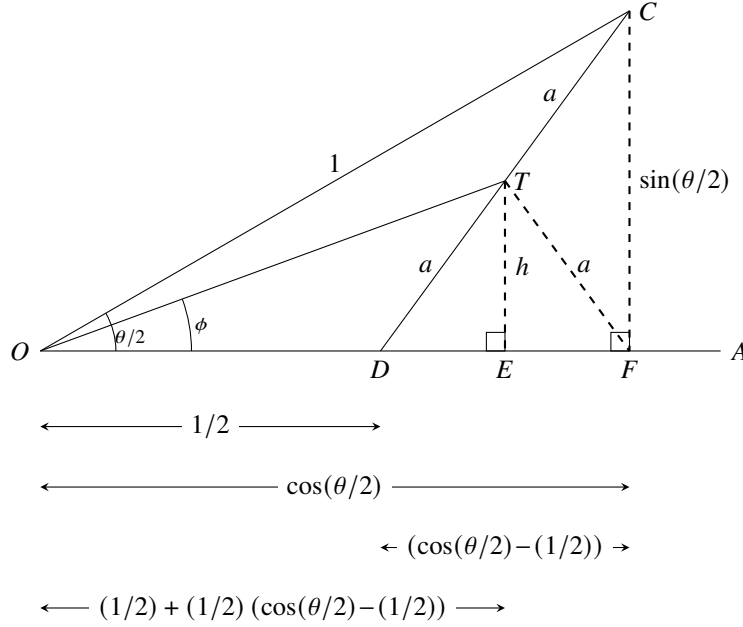


Fig. 2.2: Primera trisección aproximada (2)

Esta es una aproximación a una trisección $\phi = \theta/3$. Para $\theta = 60^\circ$:

$$\tan^{-1} \left(\frac{2 \sin 30^\circ}{1 + 2 \cos 30^\circ} \right) = \tan^{-1} 0,366 \approx 20,1^\circ \approx 20^\circ .$$

Tabla 2.1 muestra los errores para un rango de ángulos agudos. El error es relativamente pequeño para ángulos pequeños, aumentando a 1 % a 85° .

2.1.2 Segunda trisección aproximada

Construcción: Sea $\theta = \angle AOB$ un ángulo arbitrario y sin pérdida de generalidad supongamos que A, B están en una circunferencia unitaria cuyo centro es O . Construir una circunferencia de radio $1/3$ con centro O y que D sea su intersección con \overline{OA} . Bisecamos $\angle AOB$ y sea C la intersección de la bisectriz con la circunferencia de radio $1/3$. Construir la cuerda \overline{CD} y las cuerdas $\overline{AE} = \overline{ET} = \overline{CD}$. Como cuerdas iguales subtienden ángulos centrales iguales $\angle TOE = \angle EOA = \phi$ (Fig. 2.3).

Teorema 2.2.

$$\cos \phi = 1 - \frac{1}{9}(1 - \cos(\theta/2)) = 1 - \frac{2}{9} \sin^2(\theta/4) .$$

Cuadro 2.1: Errores en la primera trisección aproximada

$\theta(^{\circ})$	$\theta/3(^{\circ})$	$\tan^{-1} \phi(^{\circ})$	Error($^{\circ}$)	Error(%)
5	1,667	1,667	0,000	0,004
10	3,333	3,334	0,000	0,014
15	5,000	5,002	0,002	0,032
20	6,667	6,670	0,004	0,057
25	8,333	8,341	0,007	0,088
30	10,000	10,013	0,013	0,128
35	11,667	11,687	0,020	0,174
40	13,333	13,364	0,030	0,228
45	15,000	15,043	0,043	0,289
50	16,667	16,726	0,060	0,358
55	18,333	18,413	0,080	0,435
60	20,000	20,104	0,104	0,520
65	21,667	21,799	0,133	0,612
70	23,333	23,500	0,166	0,713
75	25,000	25,206	0,206	0,823
80	26,667	26,918	0,251	0,941
85	28,333	28,636	0,303	1,068

Demostración. Por la Ley de los Cosenos en $\triangle DOC$:

$$\overline{CD} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \cos(\theta/2) = \frac{2}{9}(1 - \cos(\theta/2)).$$

Por la Ley de los Cosenos en $\triangle EOA$:

$$\overline{AE} = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \phi = 2(1 - \cos \phi).$$

Igualando las dos expresiones para $\overline{CD} = \overline{AE}$ y simplificando obtenemos:

$$\cos \phi = 1 - \frac{1}{9}(1 - \cos(\theta/2)).$$

Como $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, y por tanto $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$, tenemos la fórmula alternativa:

$$\cos \phi = 1 - \frac{2}{9} \sin^2(\theta/4).$$

□

Esta es una aproximación a una trisección $2\phi = \theta/3$. Para $\theta = 60^{\circ}$:

$$2 \cos^{-1} \left(1 - \frac{1}{9}(1 - \cos 30^{\circ}) \right) \approx 19,8^{\circ} \approx 20^{\circ}.$$

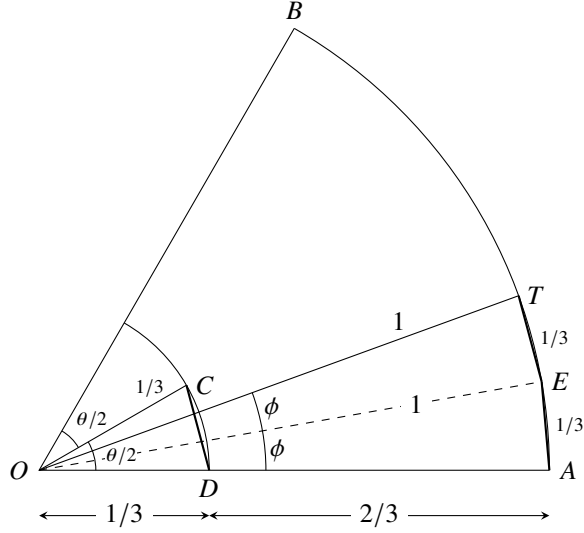


Fig. 2.3: Segunda trisección aproximada

La tabla 2.2 muestra los errores para un rango de ángulos agudos. Esta construcción es mucho menos precisa que la de la Secc. 2.1.1.

2.2 Trisección con Neusis

El término "regla" se utiliza en lugar de "regla" porque una regla no tiene marcas. Sólo puede utilizarse para construir una línea recta entre dos puntos dados. Arquímedes demostró que una regla con dos marcas a una distancia fija puede utilizarse para trisecar un ángulo (Fig. 2.4). Definimos la distancia entre las marcas como 1.

Construcción: Sea $\alpha = \angle ABE$ un ángulo arbitrario en una circunferencia unitaria con centro B , donde el radio de la circunferencia es igual a la distancia entre las marcas del neusis. Extender el radio \overline{EB} más allá del círculo. Colocar una arista de la neusis sobre A y moverla hasta que intersecte la prolongación de \overline{EB} en D y la circunferencia en C , utilizando las marcas de forma que la longitud del segmento de



Fig. 2.4: A neusis

Cuadro 2.2: Errores en la segunda trisección aproximada

$\theta(^{\circ})$	$\theta/3(^{\circ})$	$\cos^{-1} 2\phi(^{\circ})$	Error($^{\circ}$)	Error(%)
5	1,667	1,667	0,000	0,007
10	3,333	3,332	0,001	0,028
15	5,000	4,997	0,003	0,063
20	6,667	6,659	0,008	0,113
25	8,333	8,319	0,015	0,176
30	10,000	9,975	0,025	0,254
35	11,667	11,626	0,040	0,346
40	13,333	13,273	0,060	0,451
45	15,000	14,914	0,086	0,571
50	16,667	16,549	0,118	0,705
55	18,333	18,177	0,156	0,853
60	20,000	19,797	0,203	1,015
65	21,667	21,408	0,258	1,192
70	23,333	23,011	0,322	1,382
75	25,000	24,603	0,397	1,586
80	26,667	26,185	0,481	1,805
85	28,333	27,756	0,577	2,038

recta \overline{CD} sea 1.¹. Construir la recta \overline{AD} . Denotemos $\angle CDB = \beta$ (Fig. 2.5).

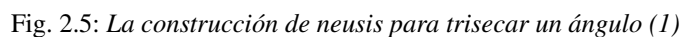
Teorema 2.3. $\beta = \alpha/3$.

Demostración. Construye \overline{BC} y denota los ángulos y segmentos de recta como se muestra en Fig. 2.6. $\triangle ABC$ y $\triangle BCD$ son triángulos isóceles: $\overline{AB} = \overline{BC}$ son radios de la misma circunferencia y $\overline{BC} = \overline{CD}$ por construcción mediante la neusis. Como la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180° y la suma de los ángulos suplementarios también es igual a 180° , tenemos:

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= 180^{\circ} - 2\beta \\
 \gamma &= 180^{\circ} - \epsilon = 2\beta \\
 \delta &= 180^{\circ} - 2\gamma = 180^{\circ} - 4\beta \\
 \alpha &= 180^{\circ} - \delta - \beta = 3\beta.
 \end{aligned}$$

□

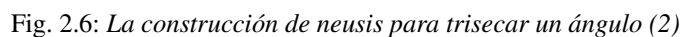
¹Esta operación se denomina *verging*.



Dado un cubo C construir otro cubo con el doble de su volumen. Si el volumen de C es V sus lados son de longitud $\sqrt[3]{V}$. Las caras de un cubo con el doble de volumen son $\sqrt[3]{2V} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{V}$, por lo que si podemos construir $\sqrt[3]{2}$ podemos duplicar el cubo.

Teorema 2.4. $x = \sqrt[3]{2}$.

Demostración. Como el triángulo ABC es equilátero, $\cos \angle CAP = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ y



por la Ley de los Cosenos en $\triangle APC$:

$$\overline{CP}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP} \cos 60^\circ \quad (2.1a)$$

$$(x+1)^2 = 1^2 + (y+1)^2 - 2 \cdot 1 \cdot (y+1) \cdot \frac{1}{2} \quad (2.1b)$$

$$x^2 + 2x = y^2 + y. \quad (2.1c)$$

Por el teorema de Menelao (Thm. A.20):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = 1.$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{1} = 1 \quad (2.2a)$$

$$xy = 2. \quad (2.2b)$$

Sustituyendo la Ec. 2.2b en la Ec. 2.1c da:

$$x^2 + 2x = \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x}$$

$$x^4 + 2x^3 = 4 + 2x$$

$$x^3(x+2) = 2(x+2)$$

$$x = \sqrt[3]{2}.$$

□

2.4 Trisección mediante una cuadratriz

Sea \overline{ABCD} un cuadrado. Sea l_1 un segmento de recta situado inicialmente en \overline{DC} y sea l_2 un segmento de recta situado inicialmente en \overline{AD} . Mover l_1 con velocidad

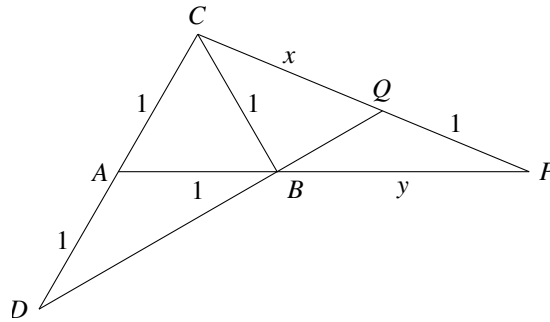


Fig. 2.7: Doblar el cubo con un neusis

lineal constante hasta alcanzar \overline{AB} y girar l_2 con velocidad angular constante en sentido horario sobre A hasta alcanzar también \overline{AB} . Supongamos que alcanzan \overline{AB} juntos. Por ejemplo, si l_2 gira a $1^\circ/\text{segundo}$ y el lado del cuadrado es de 9 centímetros, l_1 debe moverse a 0, 1 cm/segundo. La traza de su punto de intersección P se denomina *curva cuadrática* o simplemente *cuadrática* (Fig. 2.8). Su definición se atribuye al matemático Hippias.

Se puede construir una cuadratriz utilizando un compás de cuadratriz como se muestra en la Fig. 2.9. Consiste en dos rectas (no marcadas) que se mueven como se ha descrito anteriormente. Una articulación les obliga a moverse juntos y traza la curva.

Se puede utilizar una cuadratriz para trisecar un ángulo.

Construcción: Sea $\angle CDP_1 = \alpha$ un ángulo arbitrario, donde P_1 es la intersección de la recta que define el ángulo α relativo a \overline{DC} y la cuadratriz. Construir una recta que pase por P_1 paralela a \overline{DC} y denotar su intersección con \overline{AD} por E . Denotemos el segmento de recta \overline{DE} por t y trisecémoslo (Sect. 2.5) para obtener el punto F que está a $t/3$ de \overline{DC} . Sea P_2 la intersección de una recta desde F paralela a \overline{DC} y la cuadratriz, y denotemos por θ el ángulo entre \overline{DC} y $\overline{DP_2}$ (Fig. 2.10).

Teorema 2.5. $\theta = \alpha/3$.

Demostración. E tiene coordenada y $1 - t$ por lo que por construcción F tiene coordenada y $1 - (t/3)$. Puesto que la velocidad lineal constante de la línea horizontal es proporcional a la velocidad angular constante de la línea giratoria $\theta/\alpha = (t/3)/t$ y $\theta = \alpha/3$. \square

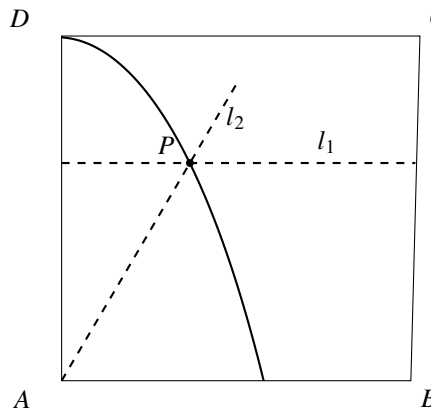


Fig. 2.8: Una curva cuadrática

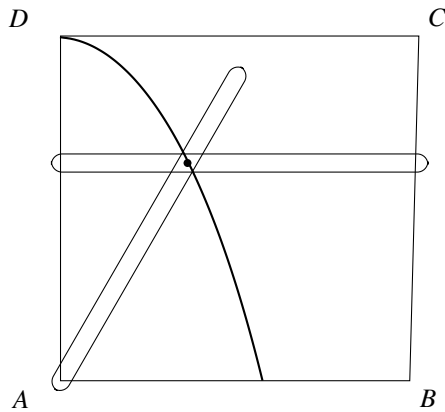


Fig. 2.9: Un compás de cuadratura

2.5 Números construibles

Sea l un segmento de recta definido de longitud 1.

Definición 2.1. Un número a es *constructible* si y sólo si se puede construir un segmento de recta de longitud a con regla y compás partiendo de l .

Dado un segmento de recta $l = \overline{AB}$, construir una recta que contenga a \overline{AB} y utilizar el compás para encontrar un punto C de la recta que esté a una distancia de 1 de B . Entonces \overline{AC} tiene una longitud 2 por lo que el número 2 es construible. Se puede construir un segmento de recta \overline{BD} de longitud 1 perpendicular a \overline{AB} en B . La hipotenusa del triángulo $\triangle ABD$ es de longitud $\sqrt{2}$ por lo que el número $\sqrt{2}$ es construible.

Teorema 2.6. Un número es construible si y sólo si es el valor de una expresión construida a partir de los números enteros, las cuatro operaciones aritméticas $\{+, -, \times, /\}$ y la operación de sacar raíz cuadrada *surd*.

Demostración. Primero demostramos que los valores de estas expresiones son construibles.

Suma y resta: Dados los segmentos de recta $\overline{PQ} = a$ y $\overline{RS} = b$, construir una circunferencia centrada en Q con radio b (Fig. 2.11). Extender \overline{PQ} hasta que se cruza

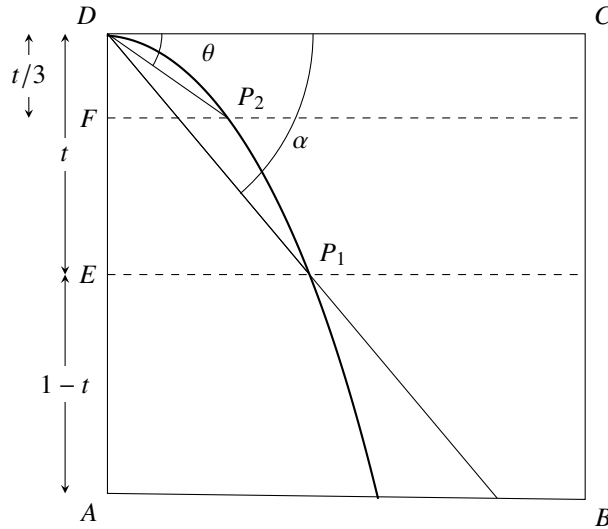


Fig. 2.10: Trisección de un ángulo mediante una cuadratriz

con el círculo en U . Entonces \overline{PTQU} es un segmento de recta, donde $\overline{PT} = a - b$ y $\overline{PU} = a + b$.

Multiplicación: Por triángulos similares en Fig. 2.12, $(1/b) = (a/\overline{OA})$, así que $\overline{OA} = ab$.

División: Por triángulos similares en Fig. 2.13, $(1/b) = (\overline{OD}/a)$, así que $\overline{OD} = (a/b)$.

Raíces cuadradas: Dado un segmento de recta $\overline{BC} = a$, construir $\overline{AB} = 1 + a$ y una semicircunferencia con \overline{AB} como diámetro. Se construye una perpendicular en C y se deja que D sea la intersección de la perpendicular y la circunferencia (Fig. 2.14). El $\angle ADB$ es un ángulo recto porque está subtendido por un diámetro. Por triángulos semejantes $(h/1) = (a/h)$, por lo que $h^2 = a$ y $h = \sqrt{a}$.

Para demostrar la inversa del teorema, necesitamos determinar qué expresiones se pueden construir con una regla y un compás. Hay tres construcciones:²

1. Dos rectas se intersecan en un punto (Fig. 2.15). Las coordenadas de la intersección pueden deducirse de las ecuaciones de las dos rectas $y = x$ y $y = 4x - 2$. El punto de intersección es $P = (2/3, 2/3)$.
2. Una recta interseca a una circunferencia en cero, uno o dos puntos (Fig. 2.16). Las coordenadas de las intersecciones pueden deducirse de las ecuaciones de la recta $y = x$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Los puntos de intersección son $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $Q = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
3. Dos circunferencias se intersecan en cero, uno o dos puntos (Fig. 2.17). Las coordenadas de las intersecciones pueden deducirse de las ecuaciones de las dos circunferencias $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, $(x + 1)^2 + y^2 = 4$. Los puntos de intersección son $P = (0, \sqrt{2})$, $Q = (0, -\sqrt{2})$.

□

²Para mayor claridad se ilustran para valores específicos en lugar de las ecuaciones más generales.

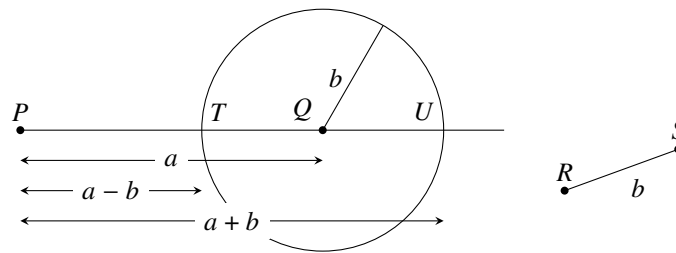


Fig. 2.11: Construcción de sumas y restas

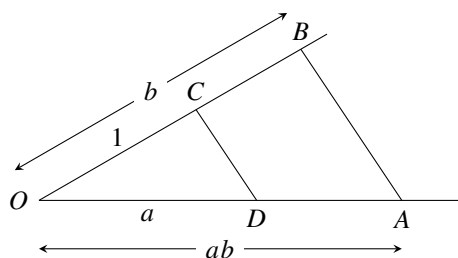


Fig. 2.12: Construcción de la multiplicación

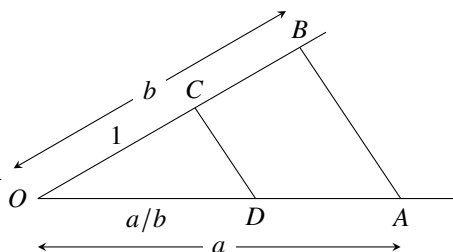


Fig. 2.13: Construcción de la división

2.6 Números construibles como raíces de polinomios

Para demostrar que un número no es construible, tenemos que demostrar que no se puede expresar utilizando sólo números enteros y las operaciones $+$, $-$, \times , $/$, $\sqrt{}$.

Demostraremos que los números construibles son las raíces de una cierta clase de polinomios y luego demostraremos que la trisección de un ángulo y la duplicación de un cubo requieren la construcción de raíces de polinomios que no están en esta clase. Hoy en día estos resultados se demuestran utilizando la teoría de campos del álgebra abstracta, pero aquí doy una demostración que utiliza matemáticas elementales. La demostración se basa en la siguiente definición.

Definición 2.2. El *profundidad* de una expresión construida a partir de los enteros y los operadores $\{+, -, \times, /, \sqrt{}\}$ es el máximo nivel de anidamiento de raíces cuadradas.

Ejemplo 2.1. Considera la siguiente expresión:

$$\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

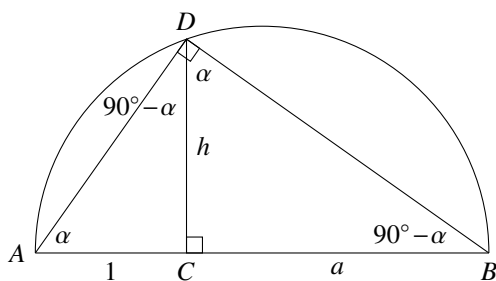


Fig. 2.14: Construcción de una raíz cuadrada

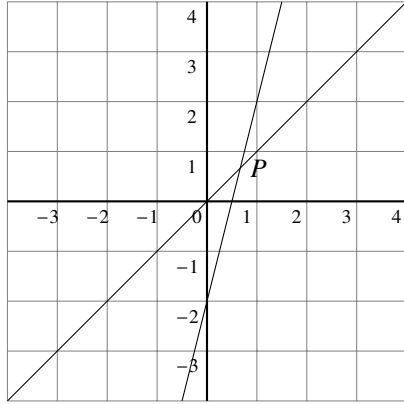


Fig. 2.15: El punto de intersección de dos líneas

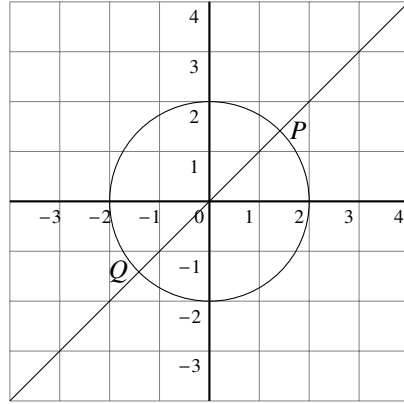


Fig. 2.16: Los puntos de intersección de una recta y un círculo

La profundidad es 3 porque a la derecha de la expresión tenemos $\sqrt{17}$ que está anidado dentro de $\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$, que a su vez está anidado dentro de $\sqrt{17 + \dots - \dots - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$.

Teorema 2.7. Una expresión de profundidad n puede expresarse como $a + b\sqrt{c}$ donde a, b, c son expresiones de profundidad como máximo $n - 1$.

Demostración. Cálculos sencillos muestran que las expresiones $(a_1 + b_1\sqrt{c})$, op $(a_2 + b_2\sqrt{c})$ para los operadores $op = \{+, -, \times\}$ resultan en expresiones $a + b\sqrt{c}$ de

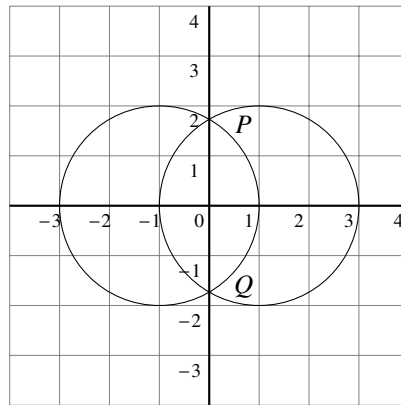


Fig. 2.17: Los puntos de intersección de dos círculos

profundidad $n - 1$. Para la división el cálculo es un poco más complicado:

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + b_1\sqrt{c}}{a_2 + b_2\sqrt{c}} &= \frac{(a_1 + b_1\sqrt{c})(a_2 - b_2\sqrt{c})}{(a_2 + b_2\sqrt{c})(a_2 - b_2\sqrt{c})} \\ &= \frac{a_1a_2 - b_1b_2c}{a_2^2 - b_2^2c} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - b_2^2c}\sqrt{c},\end{aligned}$$

que es de la forma $a + b\sqrt{c}$ donde a, b, c son de profundidad $n - 1$. Por último, la raíz cuadrada de una expresión de profundidad $n - 1$ es una expresión de profundidad n . \square

Teorema 2.8. *Sea $p(x)$ un polinomio cúbico monicónico con coeficientes racionales:*

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

y sea $r = a + b\sqrt{c}$ una raíz de $p(x)$ de profundidad mínima n , donde a, b, c son de profundidad (como máximo) $n - 1$. Entonces $r' = a - b\sqrt{c}$ es una raíz de $p(x)$ y $r \neq r'$.

Demostración. Calculemos $p(r)$ que es igual a 0 ya que r es una raíz:

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{c})^3 + a_2(a + b\sqrt{c})^2 + a_1(a + b\sqrt{c}) + a_0 &= \\ (a^3 + 3a^2b\sqrt{c} + 3ab^2c + b^3c\sqrt{c}) &+ \\ + a_2(a^2 + 2ab\sqrt{c} + b^2c) + a_1(a + b\sqrt{c}) + a_0 &= \\ (a^3 + 3ab^2c + a_2a^2 + a_2b^2c + a_1a + a_0) &+ \\ + (3a^2b + b^3c + 2a_2ab + a_1b)\sqrt{c} &= \\ d + e\sqrt{c} &= 0.\end{aligned}$$

donde d, e son expresiones de profundidad $n - 1$ formadas a partir de los coeficientes racionales y a, b, c . Entonces $\sqrt{c} = -d/e$, por lo que $a + b\sqrt{c}$ se puede expresar como una expresión de profundidad $n - 1$, contrayendo la suposición de que $a + b\sqrt{c}$ es de profundidad mínima n . Como $\sqrt{c} \neq 0$ y es de profundidad n , para que $d + e\sqrt{c}$ sea cero debe ser que $d = e = 0$.

Consideremos ahora $r' = a - b\sqrt{c}$. Examinando el cálculo anterior vemos que $p(r') = d - e\sqrt{c} = 0 + 0 \cdot \sqrt{c} = 0$, por lo que r' también es una raíz de p .

Si $r = r'$ entonces $0 = r - r' = 2b\sqrt{c}$, lo cual es cierto sólo si $b = 0$ por lo que r, r' sería de profundidad $n - 1$, contradiciendo de nuevo la suposición. \square

Teorema 2.9. *Si un monic polinomio cúbico con coeficientes racionales:*

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

has no rational roots then none of its roots is constructible.

Demostración. Por el Teorema Fundamental del Álgebra (Thm. 16.1) $p(x)$ tiene tres raíces r_1, r_2, r_3 . Sea $r_1 = a + b\sqrt{c}$ una raíz de profundidad mínima n . Por la suposición de que no hay raíces racionales, $n \geq 1$, y por tanto $b \neq 0$ y $c \neq 0$. Por Thm. 2.8, $r_2 = a - b\sqrt{c}$ también es una raíz. Realizar la siguiente multiplicación:

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 \quad (2.3a)$$

$$+ (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x + r_1r_2r_3 \quad (2.3b)$$

$$a_2 = -(r_1 + r_2 + r_3) \quad (2.3c)$$

$$r_3 = -(a_2 + r_1 + r_2). \quad (2.3d)$$

Como a_2 es racional también lo es:

$$r_3 = -a_2 - (r_1 + r_2) = -a_2 - 2a,$$

contradiendo la suposición. □

2.7 Impossibility of the Classical Constructions

Teorema 2.10. $\sqrt[3]{2}$ es irracional.

Demostración. Supongamos que $\sqrt[3]{2}$ es racional e igual a p/q donde p, q son enteros sin factores comunes distintos de ± 1 . Entonces:

$$\begin{aligned} (p/q)^3 &= (\sqrt[3]{2})^3 \\ p^3 &= 2q^3, \end{aligned}$$

por lo que p debe ser divisible por 2, digamos $p = 2r$. Ahora:

$$\begin{aligned} 8r^3 &= 2q^3 \\ q^3 &= 4r^3, \end{aligned}$$

por lo que q es divisible por 2, contradiciendo la suposición de que p, q no tienen factor común. □

Teorema 2.11. $x^3 - 2$ no tiene raíces racionales por lo que es imposible doblar un cubo con una regla y un compás.

Demostración. Una de sus raíces es $\sqrt[3]{2}$ que por Thm. 2.10 es irracional. Las otras raíces son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + \sqrt[3]{2}x + (\sqrt[3]{2})^2$ que se obtiene dividiendo $x^3 - 2$ entre $x - \sqrt[3]{2}$. Es fácil comprobar que sus raíces no son racionales (de hecho, ni siquiera reales). □

Teorema 2.12. Es imposible trisecar un ángulo arbitrario con una regla y un compás.

Demostración. Basta con demostrar la imposibilidad para un ángulo. Intentemos trisecar 60° para obtener 20° . Por Thm. A.6:

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ \cos 60^\circ &= 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ.\end{aligned}$$

Denotemos $x = \cos 20^\circ$ y $2x$ por y . Como $\cos 60^\circ = 1/2$ tenemos:

$$\begin{aligned}4x^3 - 3x - \frac{1}{2} &= 0 \\ 8x^3 - 6x - 1 &= 0 \\ y^3 - 3y - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Para demostrar que el polinomio $y^3 - 3y - 1$ no tiene raíces racionales supongamos que $y = a/b$ es una raíz racional con a, b que no tienen ningún factor común distinto de ± 1 . Entonces:

$$(a/b)^3 - 3(a/b) - 1 = 0 \quad (2.4a)$$

$$a^3 - 3ab^2 = b^3 \quad (2.4b)$$

$$a(a - 3b^2) = b^3 \quad (2.4c)$$

$$a^3 = b(b^2 + 3ab). \quad (2.4d)$$

Por la Ec. 2.4c, b debe ser divisible por a , y por la Ec. 2.4d, a debe ser divisible por b , lo que sólo es posible si $a = b = \pm 1$ y $a/b = \pm 1$. Por cálculo, $y = a/b = 1$ y $y = a/b = -1$ no son raíces del polinomio. \square

Una forma alternativa de demostrar la imposibilidad de las construcciones es utilizar el siguiente teorema que presentamos sin pruebas.

Teorema 2.13. *Si un polinomio monicónico $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ con coeficientes enteros tiene raíces racionales entonces tiene raíces enteras.*

Para demostrar la imposibilidad de duplicar un cubo necesitamos demostrar que:

$$x^3 - 2 = (x - r_2)(x - r_1)(x - r_0)$$

no tiene raíces enteras. Como $r_0 r_1 r_2 = -2$, todas las raíces deben dividir a 2, así que las únicas raíces enteras posibles son $\pm 1, \pm 2$. Un cálculo rápido muestra que ninguna de ellas es raíz.

Para demostrar la imposibilidad de trisecar un ángulo hay que demostrar que $y^3 - 3y - 1$ no tiene raíces enteras. Una raíz entera debe dividir a -1 pero ni 1 ni -1 son raíces.

¿Cuál es la sorpresa?

Underwood Dudley ha realizado un extenso estudio de lo que él llama "gruñones", que malgastan años de su vida intentando trisecar ángulos con una regla y un compás. No sólo se engañan a sí mismos pensando que esto es posible, sino que, lo que es peor, piensan que una solución sería importante. Por supuesto, una solución no tendría ninguna utilidad práctica, ya que herramientas como el neusis y la cuadratriz pueden resolver el problema con exactitud. El número de construcciones de este tipo es sorprendente, sobre todo porque muchas de ellas son ingeniosas y consiguen buenas aproximaciones. Calcular las fórmulas asociadas a las construcciones es un excelente ejercicio de trigonometría.

También es sorprendente que las pruebas de la imposibilidad de estas construcciones geométricas sean puramente algebraicas, utilizando propiedades de raíces de polinomios.

Fuentes

Wikipedia [51, 58, 62] es una buena fuente para las construcciones de este capítulo. Las dos trisecciones aproximadas proceden de [15, pp. 67–68, 95–96]. El segundo ejemplo se atribuye al famoso filósofo Thomas Hobbes. Tanto [31, pp. 48–49] como [15, pp. 6–7] discuten la trisección usando la cuadratriz. La duplicación del cubo usando un neusis está tomada de [14].

Un tratamiento riguroso de la constructibilidad se puede encontrar en los libros de texto sobre álgebra abstracta como [17], que contiene una prueba general de la inversa de Thm 2.6 en Sect. 32. Teorema 2.13 es Thm. 23.11 de [17]. Una presentación relativamente accesible de la prueba de Wantzel se puede encontrar en [48]. Mi presentación de la constructibilidad se basa en las presentaciones en [11, Cap. III] y [27].

Capítulo 3

La cuadratura del círculo

La cuadratura del círculo, la construcción de un cuadrado con la misma área que un círculo dado, es uno de los tres problemas de construcción que los griegos se plantearon y no pudieron resolver. A diferencia de la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, en las que la imposibilidad se deriva de las propiedades de las raíces de los polinomios, la imposibilidad de cuadrar el círculo se deriva de la trascendentalidad de π : no es la raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales. Este es un teorema difícil que fue demostrado en 1882 por Carl von Lindemann.

Aproximaciones a $\pi \approx 3,14159265359$ se han conocido desde la antigüedad. Algunas aproximaciones sencillas pero razonablemente exactas son:

$$\frac{22}{7} \approx 3,142857, \quad \frac{333}{106} \approx 3,141509, \quad \frac{355}{113} \approx 3,141593.$$

Presentamos tres construcciones mediante regla y compás de aproximaciones a π . Una es por Adam Kochański (Sección. 3.1) y dos son de Ramanujan (Secciones. 3.2, 3.3). Sección 3.4 cómo cuadrar el círculo utilizando la cuadratriz.

La siguiente tabla muestra las fórmulas de las longitudes que se construyen, sus valores aproximados, la diferencia entre estos valores y el valor de π y el error en metros que resulta si se utiliza la aproximación para calcular la circunferencia de la tierra dado que su radio es de 6378 km.

Construcción	Fórmula	Valor	Diferencia	Error (m)
π	—	3,14159265359	—	—
Kochański	$\sqrt{\frac{40}{3}} - 2\sqrt{3}$	3,14153333871	$5,93 \times 10^{-5}$	757
Ramanujan 1	$\frac{355}{113}$	3,14159292035	$2,67 \times 10^{-7}$	3,4
Ramanujan 2	$\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4}$	3,14159265258	$1,01 \times 10^{-9}$	0,013

3.1 Construcción de Kochański

Construcción (Fig. 3.1):

1. Construir una circunferencia unitaria centrada en O , que \overline{AB} sea un diámetro y construir una tangente a la circunferencia en A .
2. Construir una circunferencia unitaria centrada en A y denotar su intersección con la primera circunferencia por C . Construir una circunferencia unitaria centrada en C y denotar su intersección con la segunda circunferencia por D .
3. Construir \overline{OD} y denotar su intersección con la tangente por E .
4. A partir de E construir F, G, H , cada uno a distancia 1 del punto anterior.
5. Construir \overline{BH} .

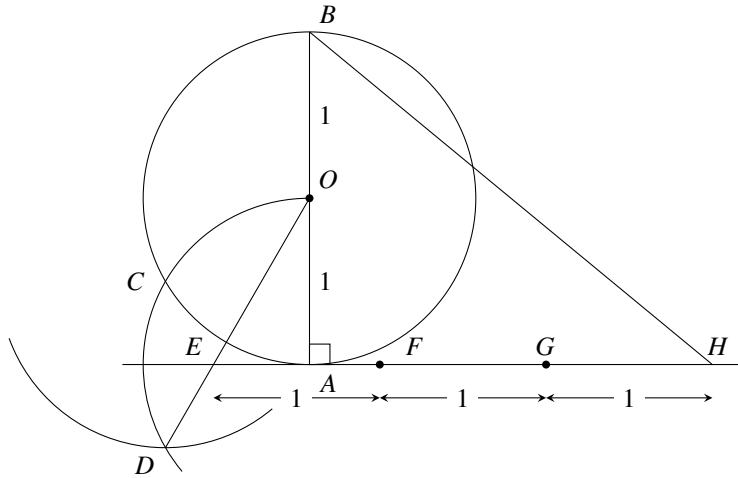
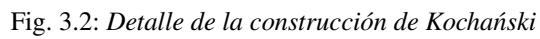


Fig. 3.1: La aproximación de Kochański a π

Teorema 3.1. $\overline{BH} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx \pi$.

Demostración. La figura 3.2 es un extracto ampliado de la figura 3.1, donde se han añadido segmentos de línea discontinua. Como todos los círculos son círculos unitarios, las longitudes de las líneas discontinuas son 1. Se deduce que \overline{AOCD} es un rombo por lo que sus diagonales son perpendiculares y se bisecan entre sí en el punto marcado con K . $\overline{AK} = 1/2$.

La diagonal \overline{AC} forma dos triángulos equiláteros $\triangle OAC, \triangle DAC$ por lo que $\angle OAC = 60^\circ$. Como la tangente forma un ángulo recto con el radio \overline{OA} , $\angle KAE =$


$$\begin{aligned}\frac{1/2}{\overline{EA}} &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \overline{EA} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \overline{AH} &= 3 - \overline{EA} = \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\overline{BH}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= 4 + \frac{27 - 6\sqrt{3} + 1}{3} = \frac{40}{3} - 2\sqrt{3} \\ \overline{BH} &= \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3,141533387 \approx \pi.\end{aligned}$$

1. Construir una circunferencia unitaria centrada en O y que \overline{PR} sea un diámetro.

2. Construir el punto H que biseca \overline{PO} y el punto T que triseca \overline{RO} (Thm. 2.6).
3. Construir la perpendicular a T que corta a la circunferencia en Q .
4. Construir las cuerdas $\overline{RS} = \overline{QT}$ y \overline{PS} .
5. Construir una recta paralela a \overline{RS} desde T que corte a \overline{PS} en N .
6. Construir una recta paralela a \overline{RS} desde O que corte a \overline{PS} en M .
7. Construir la cuerda $\overline{PK} = \overline{PM}$.
8. Construir la tangente a P de longitud $\overline{PL} = \overline{MN}$.
9. Conectar los puntos K, L, R .
10. Encontrar el punto C tal que \overline{RC} sea igual a \overline{RH} .
11. Construir \overline{CD} paralela a \overline{KL} que corte a \overline{LR} en D .

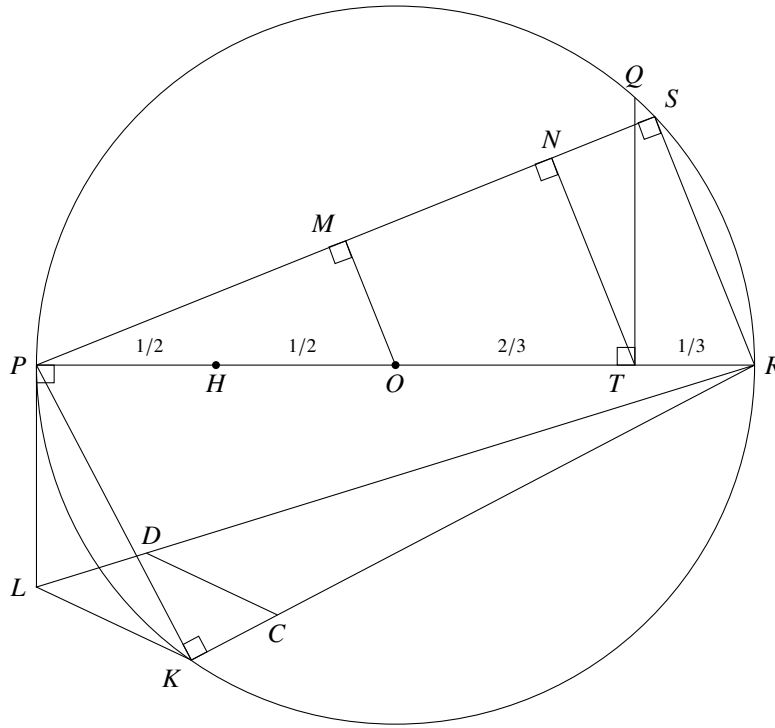


Fig. 3.3: Primera construcción de Ramanujan

Teorema 3.2. $\overline{RD}^2 = \frac{355}{113} \approx \pi$.

Demostración. $\overline{RS} = \overline{QT}$ por construcción y por el Teorema de Pitágoras para $\triangle QOT$:

$$\overline{RS} = \overline{QT} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$\angle PSR$ está subtendido por un diámetro por lo que $\triangle PSR$ es un triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{PS} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{31}}{3}.$$

Por construcción $\overline{MO} \parallel \overline{RS}$ entonces $\triangle MPO \sim \triangle SPR$ y:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PM}}{\overline{PO}} &= \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} \\ \frac{\overline{PM}}{1} &= \frac{\sqrt{31}/3}{2} \\ \overline{PM} &= \frac{\sqrt{31}}{6}. \end{aligned}$$

Por construcción $\overline{NT} \parallel \overline{RS}$ entonces $\triangle NPT \sim \triangle SPR$ y:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PN}}{\overline{PT}} &= \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} \\ \frac{\overline{PN}}{5/3} &= \frac{\sqrt{31}/3}{2} \\ \overline{PN} &= \frac{5\sqrt{31}}{18} \\ \overline{MN} &= \overline{PN} - \overline{PM} = \sqrt{31} \left(\frac{5}{18} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\sqrt{31}}{9}. \end{aligned}$$

$\triangle PKR$ es un triángulo rectángulo porque $\angle PKR$ está subtendido por un diámetro. Por construcción $\overline{PK} = \overline{PM}$ y por el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{RK} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{31}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{113}}{6}.$$

$\triangle LPR$ es un triángulo rectángulo porque \overline{PL} es una tangente por lo que $\angle LPR$ es un ángulo recto. $\overline{PL} = \overline{MN}$ por construcción y por el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{RL} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{31}}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{355}}{9}.$$

Por construcción $\overline{RC} = \overline{RH} = 3/2$ y $\overline{CD} \parallel \overline{LK}$. Por triángulos semejantes:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{RD}}{\overline{RC}} &= \frac{\overline{RL}}{\overline{RK}} \\ \frac{\overline{RD}}{3/2} &= \frac{\sqrt{355}/9}{\sqrt{113}/6} \\ \overline{RD} &= \sqrt{\frac{355}{113}} \\ \overline{RD}^2 &= \frac{355}{113} \approx 3,14159292035 \approx \pi.\end{aligned}$$

En la Fig. 3.4 los segmentos de línea se etiquetan con sus longitudes.

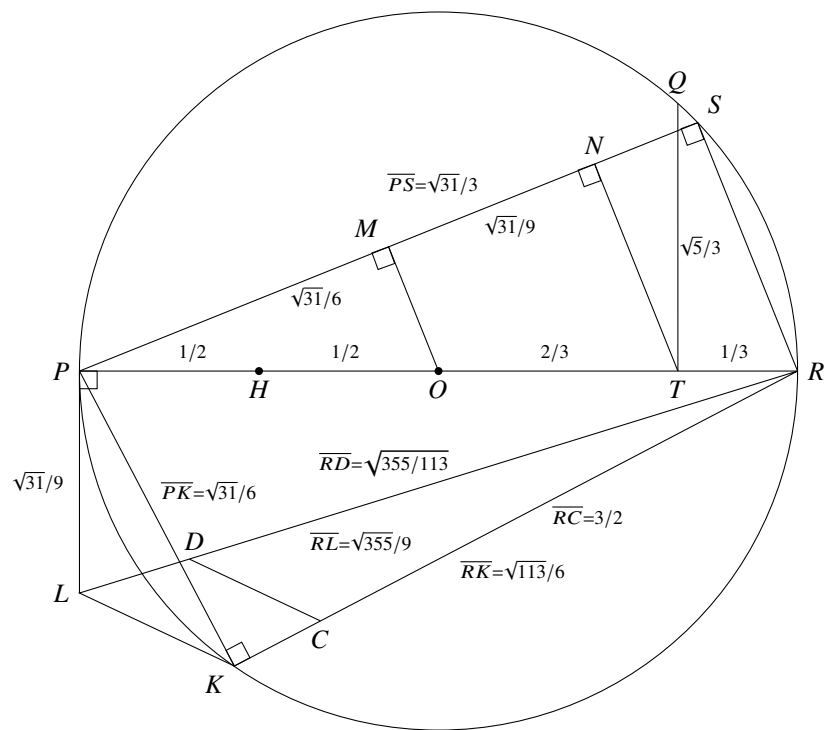


Fig. 3.4: *Primera construcción de Ramanujan con segmentos de recta etiquetados*

3.3 Segunda construcción de Ramanujan

Construcción (Fig. 3.5):

1. Construir una circunferencia unitaria centrada en O de diámetro \overline{AB} y que C sea la intersección de la perpendicular a \overline{AB} en O con la circunferencia.
2. Trisecar el segmento de recta \overline{AO} tal que $\overline{AT} = 1/3$ y $\overline{TO} = 2/3$ (Thm. 2.6).
3. Construir \overline{BC} y encontrar puntos M, N tales que $\overline{CM} = \overline{MN} = \overline{AT} = 1/3$.
4. Construir \overline{AM} , \overline{AN} y que P sea el punto sobre \overline{AN} tal que $\overline{AP} = \overline{AM}$.
5. A partir de P construir una recta paralela a \overline{MN} que corte a \overline{AM} en Q .
6. Construir \overline{OQ} y a partir de T construir una recta paralela a \overline{OQ} que corte a \overline{AM} en R .
7. Construir \overline{AS} tangente a A tal que $\overline{AS} = \overline{AR}$.
8. Construir \overline{SO} .

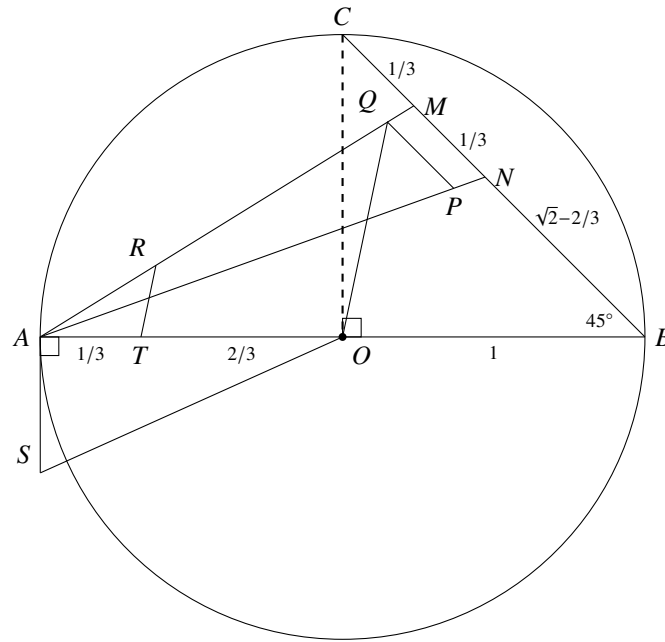


Fig. 3.5: Segunda construcción de Ramanujan

Teorema 3.3. $3\sqrt{SO} = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} \approx \pi.$

Demostración. $\triangle COB$ es un triángulo rectángulo así que por el Teorema de Pitágoras $\overline{CB} = \sqrt{2}$ y:

$$\overline{NB} = \sqrt{2} - 2/3.$$

$\triangle COB$ es isoceloes por lo que $\angle NBA = \angle MBA = 45^\circ$. Por la Ley de los Cosenos:

$$\begin{aligned}\overline{AN}^2 &= \overline{BA}^2 + \overline{BN}^2 - 2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BN} \cdot \cos \angle NBA \\ &= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{22}{9} \\ \overline{AN} &= \sqrt{\frac{22}{9}}.\end{aligned}$$

De nuevo por la Ley de los Cosenos:

$$\begin{aligned}\overline{AM}^2 &= \overline{BA}^2 + \overline{BM}^2 - 2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BM} \cdot \cos \angle MBA \\ &= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{19}{9} \\ \overline{AM} &= \sqrt{\frac{19}{9}}.\end{aligned}$$

Por construcción $\overline{QP} \parallel \overline{MN}$ entonces $\triangle MAN \sim \triangle QAP$, y por construcción $\overline{AP} = \overline{AM}$:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AQ}}{\overline{AM}} &= \frac{\overline{AP}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} \\ \overline{AQ} &= \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AN}} = \frac{19/9}{\sqrt{22/9}} = \frac{19}{3\sqrt{22}}.\end{aligned}$$

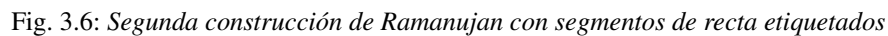
Por construcción $\overline{TR} \parallel \overline{OQ}$ entonces $\triangle RAT \sim \triangle QAO$ y:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}} &= \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} \\ \overline{AR} &= \overline{AQ} \cdot \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} = \frac{19}{3\sqrt{22}} \cdot \frac{1/3}{1} = \frac{19}{9\sqrt{22}}.\end{aligned}$$

Por construcción $\overline{AS} = \overline{AR}$ y $\triangle OAS$ es un triángulo rectángulo porque \overline{AS} es una tangente. Por el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}\overline{SO} &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{19}{9\sqrt{22}}\right)^2} \\ 3\sqrt{\overline{SO}} &= 3 \left(1^2 + \frac{19^2}{9^2 \cdot 22}\right)^{1/4} = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} \approx 3,14159265258 \approx \pi.\end{aligned}$$

En la Fig. 3.6 los segmentos de línea están etiquetados con sus longitudes. \square



La cuadratriz se describe en la Secc.

Sea F la proyección de P sobre el eje x y sea G la posición de la unión cuando ambas rectas alcanzan el eje x , es decir, G es la intersección de la curva cuadratriz y el eje x (Fig. 3.7).

Demostración. Sea $y = \overline{PF} = \overline{EA} = 1 - t$. Puesto que en una cuadratriz θ disminuye al mismo ritmo que t aumenta:

$$\begin{aligned}\frac{1-t}{1} &= \frac{\theta}{\pi/2} \\ \theta &= \frac{\pi}{2}(1-t).\end{aligned}$$

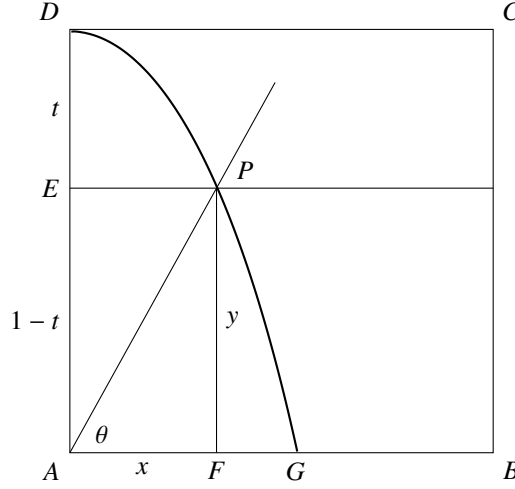


Fig. 3.7: Cuadratura del círculo con una cuadratriz

Sea $x = \overline{AF} = \overline{EP}$. Entonces $\tan \theta = y/x$ entonces:

$$x = \frac{y}{\tan \theta} = y \cot \theta = y \cot \frac{\pi}{2}(1-t) = y \cot \frac{\pi}{2}y. \quad (3.1)$$

Normalmente expresamos una función como $y = f(x)$ pero también se puede expresar como $x = f(y)$.

Para obtener $x = \overline{AG}$ no podemos simplemente enchufar $y = 0$ en la Ec. 3.1, porque $\cot 0$ no está definido, así que vamos a calcular el límite de x a medida que y va a 0. En primer lugar realizar la sustitución $z = (\pi/2)y$ para obtener:

$$x = y \cot \frac{\pi}{2}y = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2}y \cot \frac{\pi}{2}y \right) = \frac{2}{\pi} (z \cot z),$$

y luego tomar el límite:

$$\lim_{z \rightarrow 0} x = \frac{2}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} (z \cot z) = \frac{2}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z \cos z}{\sin z} \right) = \frac{2}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\cos z}{(\sin z)/z} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{\cos 0}{1} = \frac{2}{\pi},$$

donde hemos utilizado $\lim_{z \rightarrow 0} (\sin z/z) = 1$ (Thm. A.12). \square

¿Cuál es la sorpresa?

Es sorprendente que se puedan construir aproximaciones tan exactas a π . Por supuesto, uno no puede dejar de asombrarse ante las ingeniosas construcciones de Ramanujan.

Fuentes

La construcción de Kochański aparece en [7]. Las construcciones de Ramanujan están en [38, 39]. La cuadratura del círculo usando la cuadratriz está en [31, pp. 48–49] y [62].

Capítulo 4

El teorema de los cinco colores

Los mapas utilizan colores para distinguir una región de otra, asegurándose de que las regiones adyacentes estén coloreadas con colores diferentes. En 1852, Francis Guthrie observó que un mapa de los condados de Inglaterra podía colorearse con sólo cuatro colores. La afirmación de que cuatro países bastan para colorear cualquier mapa plano se denomina teorema de los cuatro colores y no fue demostrada hasta 1976 por Kenneth AppelindexAppel, Kenneth y Wolfgang HakenindexHaken, Wolfgang. Utilizaron sofisticados argumentos matemáticos para demostrar que si existe un contraejemplo (un mapa que necesite más de cuatro colores), tiene que estar asociado a una de las 1834 configuraciones. A continuación, utilizaron un ordenador para comprobar estas configuraciones.

Mientras que el teorema de los cuatro colores es extremadamente difícil de demostrar, las pruebas de los teoremas de los cinco y seis colores son relativamente sencillas (Secciones 4.5, 4.6). En el camino hacia la demostración de estos teoremas, definimos mapas y grafos planares (Secc. 4.1), demostramos la fórmula de Euler (Secc. 4.2) y mostramos que un grafo planar debe tener vértices cuyo grado sea menor o igual que cinco. En la Sec. se utiliza la fórmula de Euler para demostrar que dos grafos no son planares.

En 1879 Alfred B. KempeindexKempe, Alfred B. publicó una prueba del teorema de los cuatro colores, pero en 1890 Percy J. HeawoodindexHeawood, Percy J. demostró que la prueba es incorrecta. En la sección 4.7 presentamos la prueba errónea de Kempe y la demostración de Heawood de que no es correcta.

4.1 Mapas y gráficos planos

Definición 4.1. Un *mapa plano* es un conjunto de regiones en el plano separadas por fronteras. Un *coloring* de un mapa es una asignación de un color a cada región de tal manera que las regiones que comparten un límite se asignan diferentes colores.

La figura 4.1 muestra una coloración a cinco de un mapa planar con diez regiones. La figura 4.2 muestra una coloración de cuatro del mismo mapa.

Definición 4.2. Un *grafo* es un conjunto de *vértices* V y un conjunto de *aristas* E , tal que cada arista es incidente con exactamente dos vértices.

Un *grafo plano* es un grafo en el que ninguna arista se cruza con otra. En un grafo plano, las zonas delimitadas por un conjunto de aristas se llaman *caras*.

Una *coloración* de un grafo plano es una asignación de colores a los vértices de tal manera que no hay dos vértices del mismo color conectados por una arista.

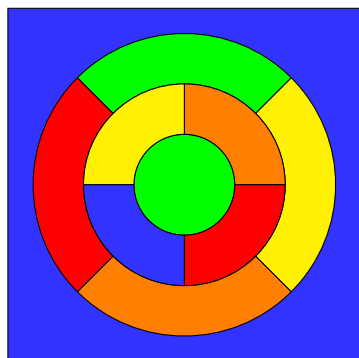


Fig. 4.1: *Cinco colores de un mapa plano*

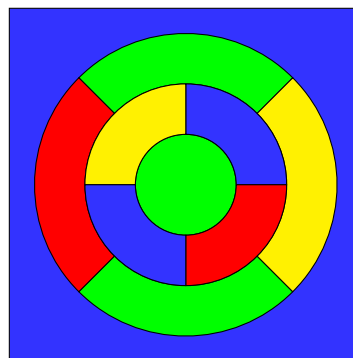


Fig. 4.2: *Cuatricromía de un mapa plano*

Los mapas planos y los grafos planos son duales y es conveniente investigar los problemas de coloración en grafos en lugar de en mapas.

Teorema 4.1. *Dado un mapa plano, se puede construir un grafo plano tal que para cada coloración de las regiones del mapa exista una coloración de los vértices del grafo, y a la inversa.*

Demostración. Construye un vértice para cada región y construye una arista entre dos vértices si y sólo si las regiones correspondientes comparten un límite. \square

Ejemplo 4.1. La figura 4.3 muestra el mapa planar de la Fig. 4.2 y los vértices asociados a las regiones. La figura 4.4 muestra el grafo plano que corresponde al mapa.

Podemos limitar aún más nuestros grafos a aquellos cuyas caras son triangulares.

Definición 4.3. Un grafo es *triangular* si todas sus caras están delimitadas por tres aristas. Un grafo puede ser *triangulado* si se pueden añadir aristas de forma que el grafo sea triangular. También decimos que existe una *triangulación* del grafo.

Ejemplo 4.2. Las caras del gráfico plano de la Fig. 4.4 son triangulares ya que cada una está delimitada por tres aristas. Las aristas son curvas por lo que las caras no son triángulos, que son polígonos cuyos tres bordes son segmentos de línea recta.

Teorema de Fáry establece que cualquier grafo plano triangular puede transformarse en un grafo plano equivalente cuyas aristas sean segmentos de recta. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, las pruebas se pueden restringir a grafos planos cuyas caras son triángulos.

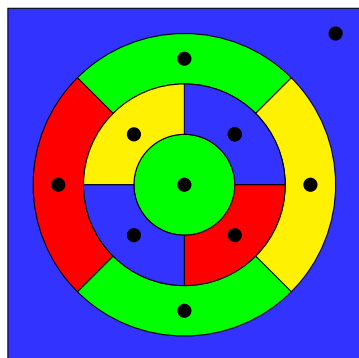


Fig. 4.3: Asociar los vértices a las regiones de un mapa plano

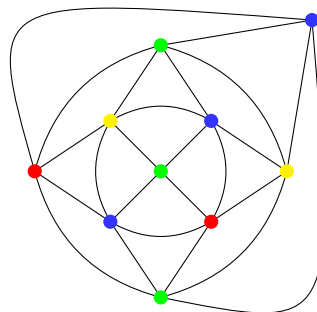


Fig. 4.4: El grafo plano que corresponde al mapa plano

Ejemplo 4.3. Fig. 4.5 (izquierda) muestra que un cuadrado puede ser bicolor, pero si está triangulado (centro), son necesarios cuatro colores. Nuestro objetivo es demostrar que los grafos pueden ser de color n para algún n . Si el grafo triangulado está coloreado con n , también lo está el grafo original, porque eliminar las aristas sobrantes no invalida la coloración (derecha).

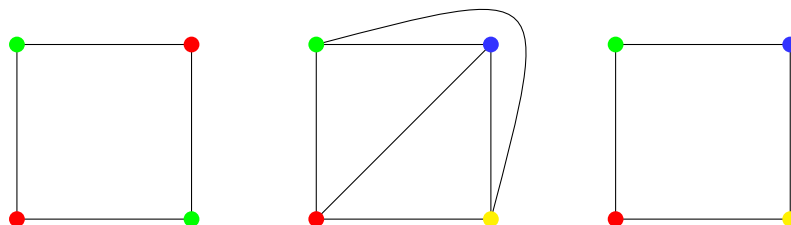


Fig. 4.5: Colorear un grafo triangulado

4.2 Fórmula de Euler

Teorema 4.2. Sea G un grafo plano conexo con V vértices, E aristas y F caras. Entonces $V - E + F = 2$.

Demostración. Por inducción sobre el número de aristas. Si el número de aristas en el grafo es cero, sólo hay un único vértice y una única cara, por lo que $1 - 0 + 1 = 2$. En caso contrario, hay al menos una arista e y conecta dos vértices v_1, v_2 . Eliminar la arista e .

Caso 1: El grafo se desconecta (Fig. 4.6). Fusionar v_1 con v_2 (Fig. 4.7). El grafo resultante G' es un grafo plano conexo y tiene menos aristas que G , por lo que por la hipótesis de inducción $(V - 1) - (E - 1) + F = 2$ ya que el número de vértices también se reduce en uno. Simplificando, obtenemos $V - E + F = 2$ para G .

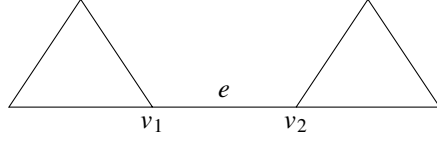


Fig. 4.6: *Eliminar una arista desconecta el grafo*

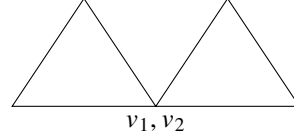


Fig. 4.7: *Fusión de dos vértices*

caso 2: El gráfico sigue siendo conectado (Fig. 4.8). G' tiene menos aristas que G (Fig. 4.9), así que por la hipótesis de inducción $V - (E - 1) + (F - 1) = 2$ ya que al eliminar la arista se unen dos caras en una. Simplificando, obtenemos $V - E + F = 2$ para G . \square

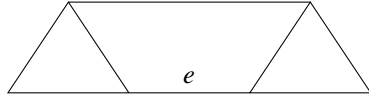


Fig. 4.8: *Eliminar una arista no desconecta el grafo*



Fig. 4.9: *El grafo sigue conectado y tiene menos aristas*

Teorema 4.3. Sea G un grafo plano triangulado conexo con E aristas y V vértices. Entonces $E = 3V - 6$.

Demostración. Cada cara está limitada por tres aristas, por lo que $E = 3F/2$, donde hemos dividido por 2 porque cada arista se ha contado dos veces, una por cada cara que limita. Por la fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} E &= V + F - 2 \\ &= V + 2E/3 - 2 \\ &= 3V - 6. \end{aligned}$$

\square

Ejemplo 4.4. El grafo plano de la Fig. 4.4 tiene 10 vértices y $3 \cdot 10 - 6 = 24$ aristas.

Teorema 4.4. Sea G un grafo plano conexo. Entonces $E \leq 3V - 6$.



Fig. 4.10: *Menos bordes que el límite superior*

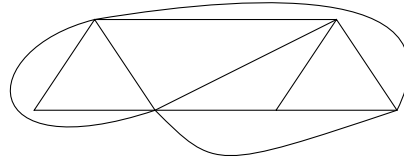


Fig. 4.11: *En un grafo triangulado el número de aristas es máximo*

Demostración. Triangular G para obtener G' . $E' = 3V' - 6$ por Thm. 4.3. Ahora quitar aristas de G' para obtener G . El número de vértices no cambia por lo que $E \leq 3V - 6$. \square

Ejemplo 4.5. El grafo de la Fig. 4.10 tiene 8 aristas y 6 vértices y $8 < 3 \cdot 6 - 6 = 12$. La figura 4.11 muestra un grafo triangulado con 6 vértices y $3 \cdot 6 - 6 = 12$ aristas.

4.3 Gráficos no planos

Vamos a tomar un pequeño desvío para mostrar cómo Thms. 4.2 y 4.4 se puede utilizar para demostrar que ciertos gráficos no son planos.

Teorema 4.5. K_5 , el grafo completo de cinco vértices, no es plano (Fig. 4.12).

Demostración. Para K_5 , $V = 5$ y $E = 10$. Por Thm. 4.4 el número de aristas debe ser menor o igual a $3 \cdot 5 - 6 = 9$ por lo que el grafo no es planar. \square

Teorema 4.6. $K_{3,3}$, el grafo bipartito con tres vértices en cada lado, no es plano (Fig. 4.14).

Demostración. $V = 6$ y $E = 9$. Por Thm 4.2 si $K_{3,3}$ es plano, $F = E - V + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$. Pero cada cara está limitada por cuatro aristas (Fig. 4.15), por lo que $E = 4F/2 = 10 \neq 9$. \square

En 1930 Kazimierz Kuratowski demostró la inversa de estos teoremas: si un grafo no es plano, contiene (en cierto sentido) K_5 o $K_{3,3}$.

4.4 Los grados de los vértices

Definición 4.4. $d(v)$, el *grado* del vértice v , es el número de aristas incidentes con v .

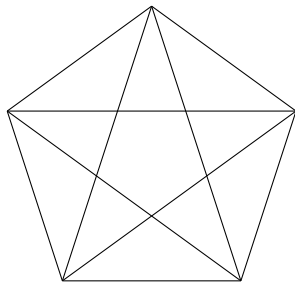


Fig. 4.12: K_5 no es plana

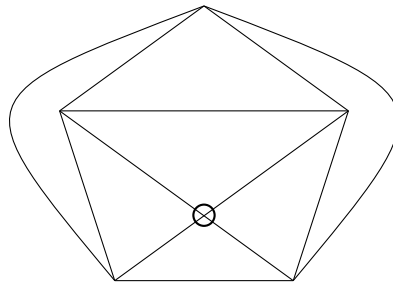


Fig. 4.13: Un intento fallido de dibujar K_5 como plano

Ejemplo 4.6. El grafo de la Fig. 4.4 contiene 8 vértices correspondientes a los dos anillos y cada vértice es de grado 5. El vértice correspondiente a la cara exterior es de grado 4 al igual que el vértice correspondiente a la cara interior. Por tanto:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 5 \cdot 8 + 4 \cdot 2 = 48.$$

Para obtener el número total de aristas divide 48 entre 2 porque cada arista se ha contado dos veces, una por cada uno de los vértices con los que incide.

Generalizando el argumento obtenemos:

Teorema 4.7. Sea d_i para i en $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ el número de vértices de grado i en un grafo plano conexo G con V vértices y E aristas, donde k es el mayor grado de

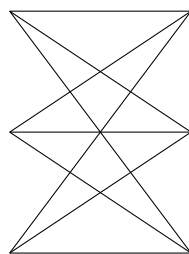


Fig. 4.14: $K_{3,3}$ no es plana

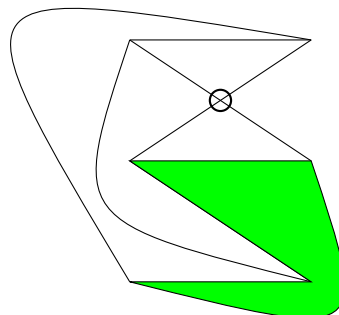


Fig. 4.15: Un intento fallido de dibujar $K_{3,3}$ como plano

un vértice en V . Entonces:

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{i=1}^k i \cdot d_i = 2E .$$

Teorema 4.8. Sea G un grafo plano conexo con E aristas y V vértices, y sea d_i para i en $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ el número de vértices de grado i , donde k es el mayor grado de un vértice en V . Entonces debe haber un vértice v en V tal que $d(v) \leq 5$.

Demostración.

(1) Si hay d_1 vértices de grado 1, d_2 vértices de grado 2, \dots , d_k vértices de grado k , entonces $V = \sum_{i=1}^k d_i$. De Thms. 4.4 y 4.7:

$$\sum_{i=1}^k i \cdot d_i = 2E \leq 2(3V - 6) = 6V - 12 = 6 \sum_{i=1}^k d_i - 12 .$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k i \cdot d_i &\leq 6 \sum_{i=1}^k d_i - 12 \\ \sum_{i=1}^k (6 - i) d_i &\geq 12 . \end{aligned}$$

Como $12 > 0$ y todos d_i son positivos, para al menos un i , $6 - i > 0$ y para ese i , $i < 6$. \square

Demostración.

(2) Calculemos el grado medio de los vértices, que es la suma de los grados dividida por el número de vértices:

$$d_{avg} = \frac{\sum_{i=1}^k i \cdot d_i}{V} .$$

Pero la suma de los grados es el doble del número de aristas que por Thm. 4.4 da:

$$d_{avg} = \frac{2E}{V} \leq \frac{6V - 12}{V} = 6 - \frac{6}{V} < 6 .$$

Si la media es menor que seis debe haber un vértice de grado menor que seis. \square

Ejemplo 4.7. En Fig. 4.4 la suma de los grados es $8 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 48$. Hay 10 vértices por lo que el grado medio es $48/10 = 4,8$ y debe haber un vértice de grado 4 o menos.

4.5 El teorema de los seis colores

Teorema 4.9. *Cualquier grafo plano G puede ser de seis colores.*

Demostración. Por inducción sobre el número de vértices. Si G tiene seis vértices o menos, basta con seis colores. Para el paso inductivo, por Thm. 4.8 G tiene un vértice v con grado 5 o menos. Se elimina el vértice v para obtener el grafo G' . Por la hipótesis de inducción G' puede ser de seis colores, pero v tiene a lo sumo 5 vecinos y a lo sumo 5 colores se utilizan para colorearlos (Fig. 4.16), por lo que v se puede colorear utilizando el sexto color (Fig. 4.17). \square

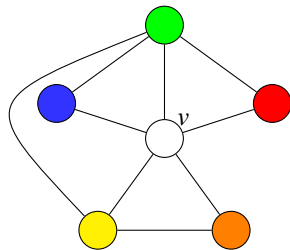


Fig. 4.16: Para colorear los vecinos de v bastan cinco colores

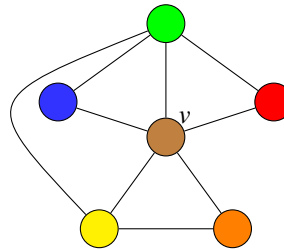


Fig. 4.17: Colorea v con el sexto color

4.6 El teorema de los cinco colores

Definición 4.5. Sea G un grafo planar coloreado. Una cadena (*Kempe*) G' es un subgrafo maximal, bicolor y conexo de G .

Teorema 4.10. *Cualquier grafo plano G puede ser de cinco colores.*

Demostración. Por inducción sobre el número de vértices. Si G cinco vértices o menos, cinco colores son suficientes. Para el paso inductivo, por Thm. 4.8 G tiene un vértice v con grado 5 o menos. Eliminar v para obtener G' . Por la hipótesis de inducción, G' puede ser de cinco colores. En G , si el grado de v es menor que 5, o si v_1, \dots, v_5 , los vecinos de v , están coloreados con cuatro colores o menos, v se puede colorear con el quinto color. De lo contrario, v_1, \dots, v_5 se colorean con diferentes colores en G' (Fig. 4.18, arriba).

Consideremos el vértice v_1 que es de color azul y el vértice v_3 que es de color rojo. Si v_1, v_3 no están conectados por un camino azul-rojo (digamos si la arista $\overline{v_6 v_7}$ no existiera), podemos intercambiar los colores a lo largo del camino de v_1 a v_6 y colorear v de azul. De lo contrario, considere la cadena azul-rojo que contiene v_1, v_3 . Sumando v y las aristas $\overline{v v_1}, \overline{v v_3}$ obtenemos un camino cerrado P (línea doble) que divide el plano en una región “interior” y otra “exterior” (Fig 4.18, centro).

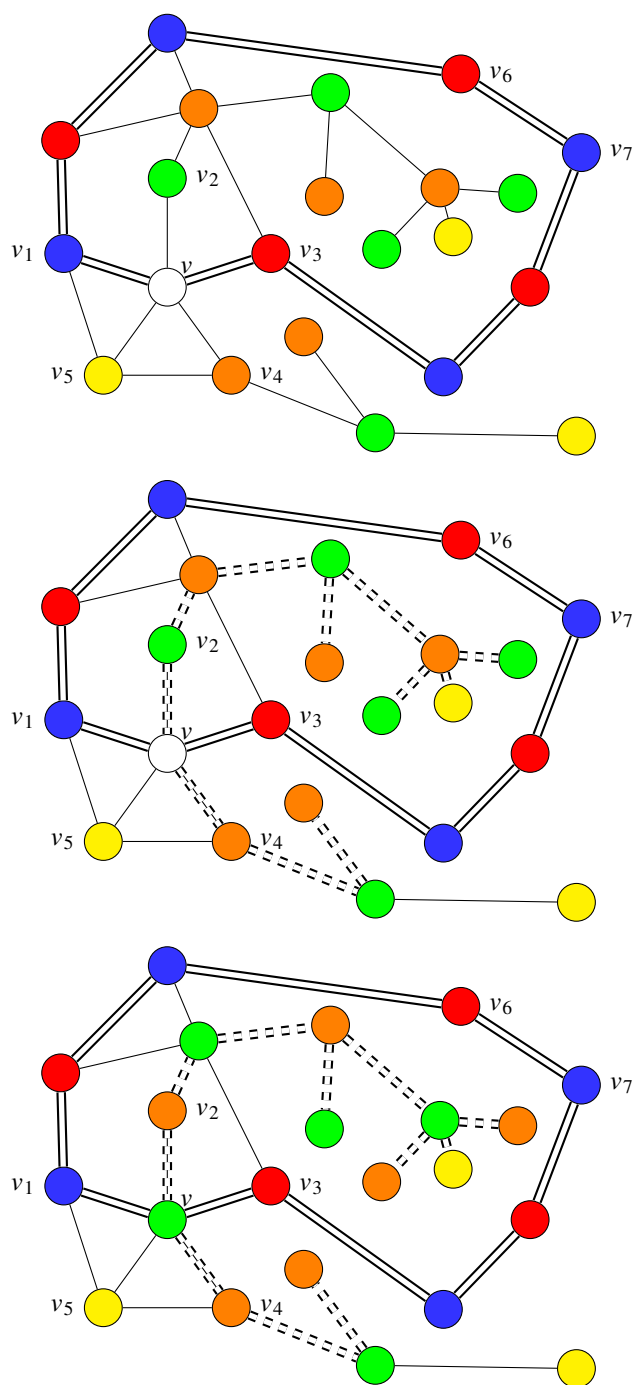


Fig. 4.18: Demostración del teorema de los cinco colores

Considere v_2 que es de color verde y v_4 que es de color naranja. Estos vértices no pueden estar contenidos en una sola cadena verde-naranja, porque v_2 está dentro de P y v_4 está fuera de P , por lo que cualquier camino que los conecte debe cruzar P , contradiciendo la suposición de que el grafo es plano. Por lo tanto, deben estar contenidas en dos cadenas verde-naranja (doble línea discontinua, en la Fig. 4.18, centro). Intercambiar los colores en la cadena que contiene v_2 y luego v puede ser de color verde para obtener un cinco-coloración de G (Fig. 4.18, abajo). \square

La afirmación de que un camino continuo desde el interior de una curva continua cerrada P al exterior de P debe intersectar a P es el Teorema de la Curva de Jordan. El teorema es intuitivamente obvio, pero difícil de demostrar.

4.7 Demostración incorrecta del teorema de los cuatro colores de Kempe

Teorema 4.11. *Any planar graph G can be four-colored.*

Demostración. (Incorrect) El caso base de la inducción y la mayor parte de la demostración es el mismo que el del teorema de los cinco colores. El nuevo caso que hay que considerar es un vértice v con cinco vecinos que, por la hipótesis inductiva, se puede colorear con cuatro colores después de quitar v .

En la Fig. 4.19 hay dos vértices v_2, v_5 coloreados de azul. Consideremos la cadena azul-verde que contiene v_2 y la cadena azul-amarilla que contiene v_5 . La cadena azul-verde está contenida dentro de la trayectoria cerrada definida por la cadena rojo-amarilla que contiene v_1, v_3 (línea doble) y la cadena azul-amarilla está contenida dentro de la trayectoria cerrada definida por la cadena rojo-verde que contiene v_1, v_4 (línea doble discontinua).

Intercambiar los colores de la cadena azul-verde y la cadena azul-amarillo (Fig. 4.20). El resultado es que los vecinos de v se colorean con los tres colores rojo, verde y amarillo, dejando libre el azul para colorear v . \square

Heawood observó que los caminos cerrados definidos por la cadena rojo-amarillo y la cadena rojo-verde pueden compartir vértices rojos (v_1, v_8 en Fig. 4.21). Cuando se intercambian los colores en las cadenas azul-verde y azul-amarillo, es posible que los vértices azules v_6, v_7 estén conectados (Fig. 4.22) y la coloración ya no es correcta.

¿Cuál es la sorpresa?

El teorema de los cuatro colores es famoso porque es muy fácil de enunciar pero extremadamente difícil de demostrar. Por lo tanto, es sorprendente que la

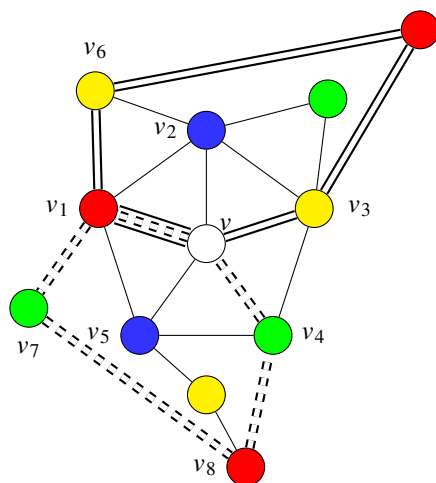


Fig. 4.19: Cadenas Kempe azul-verde y azul-amarillo

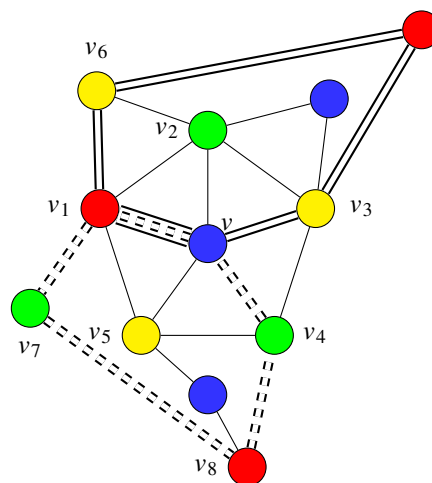


Fig. 4.20: Intercambia los colores de las dos cadenas Kempe

demostración del teorema de los cinco colores sea elemental. La parte inteligente de la prueba es Thm. 4.8 (un grafo plano debe tener un vértice de como máximo grado 5), que es un teorema que no tiene nada que ver con la coloración. En su lugar, resulta simplemente de contar vértices y aristas.

Fuentes

Para el teorema de los cuatro colores, véase [49, 54]. La demostración del teorema de los cinco colores se basa en [1, 53]. [16] presenta numerosas pruebas de la fórmula de Euler. La prueba incorrecta de Kempe del teorema de los cuatro colores se describe en [46].

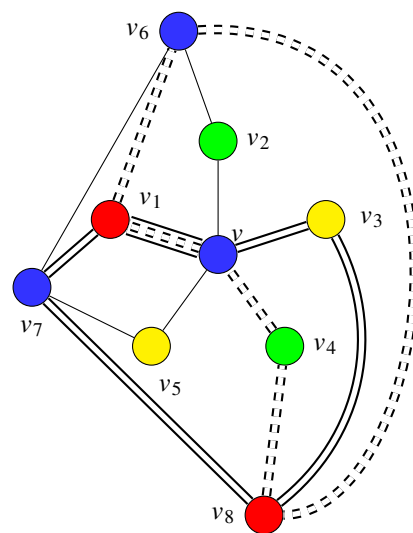
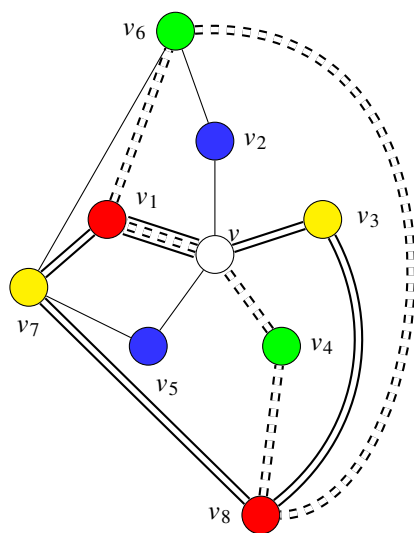


Fig. 4.21: Las cadenas rojo-amarillo y rojo-verde comparten vértices rojos Fig. 4.22: El intercambio de colores hace que los vértices azules se conecten

Capítulo 5

Cómo custodiar un museo

En 1973 Victor Klee se preguntó cuántos vigilantes son necesarios para observar todas las paredes de un museo. Si las paredes forman un polígono regular o incluso un polígono convexo, basta con un guardia (Fig. 5.1).

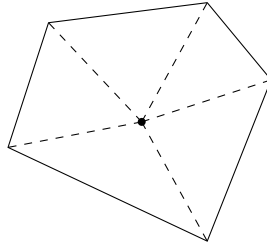


Fig. 5.1: *Un museo cuyas paredes forman un polígono convexo*

Consideremos ahora un museo con paredes en forma de diente de sierra (Fig. 5.2). Verificar contando que el museo tiene 15 paredes. Cada "diente" define un triángulo que está sombreado en gris en la Fig. 5.3. Un guardia situado en cualquier lugar dentro de uno de los triángulos puede observar todas las paredes que limitan ese triángulo (flechas rojas).

Si al menos uno de los guardias se coloca cerca de la pared superior que abarca todo el museo, podrá observar todas las paredes horizontales (flechas azules en la Fig. 5.4). Así pues, bastan $5 = 15/3$ guardias para observar todas las paredes del museo. Como los triángulos no se solapan, un vigilante de un triángulo no podrá observar todas las paredes de otro triángulo (flecha verde), por lo que se necesitan 5 vigilantes.

El ejemplo de la Fig. 5.2 puede generalizarse a $n/3$ dientes con n paredes, por lo que concluimos que *al menos* $n/3$ guardas son necesarios. Queremos demostrar que

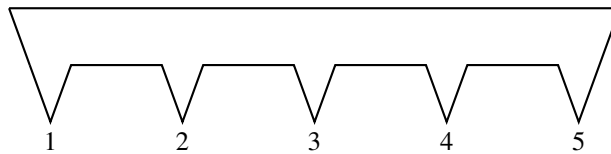


Fig. 5.2: *Un museo cuyas paredes no forman un polígono convexo*

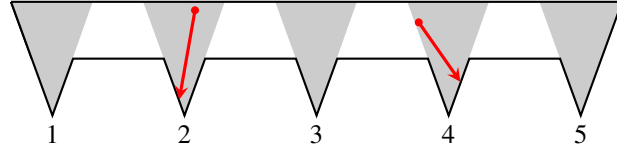


Fig. 5.3: Visibilidad dentro de cada “diente”

$n/3$ guardianes son suficientes para vigilar cualquier museo.

La sección 5.1 demuestra que cualquier polígono triangulado puede ser tricolor. Esto se utiliza en la sección 5.2 para demostrar el teorema de que $n/3$ guardias son suficientes. Sección 5.3 completa la prueba demostrando que cualquier polígono puede ser triangulado.

5.1 Colorear polígonos triangulados

Definición 5.1. Una *diagonal* a de polígono es una arista que une dos vértices y que no es una de las aristas (exteriores) del polígono.

Definición 5.2. Un polígono puede ser *triangulado* si se pueden construir diagonales no intersecantes de forma que el interior del polígono esté cubierto por triángulos.

Teorema 5.1. *Cualquier polígono puede triangularse.*

Aplazamos la prueba de Thm. 5.1.

Definición 5.3. Un vértice de un polígono es *convexo* si su ángulo interior es menor que 180° ; un vértice es *cóncavo* si su ángulo interior es mayor que 180° .

En la Fig. 5.5 el vértice 1 es convexo y el vértice 2 es cóncavo.

Definición 5.4. Un polígono con vértices V puede ser *tricolor* si existe un mapa:

$$c : V \mapsto \{red, blue, green\},$$

tal que ninguna arista tenga dos vértices con el mismo color.

Teorema 5.2. *Un polígono triangulado puede ser tricolor.*

Demostración. Por inducción sobre el número de vértices. Un triángulo puede ser tricolor. Un polígono triangulado con $n > 3$ vértices debe tener una diagonal. Elegir una diagonal arbitraria \overline{AB} (Fig. 5.6) y dividir el polígono a lo largo de esta diagonal en dos polígonos más pequeños (Fig. 5.7). Por inducción, cada uno de estos polígonos más pequeños puede ser de tres colores (Fig. 5.8).

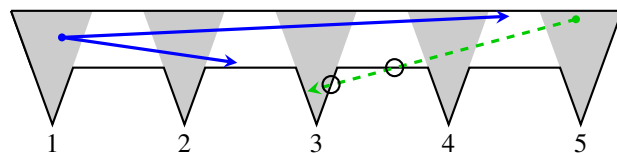


Fig. 5.4: Visibilidad de las paredes del museo

Como los colores asignados son arbitrarios, si se asignan colores diferentes a A, B en los dos polígonos, podemos renombrar los colores en uno de ellos para que los colores de A, B sean los mismos en ambos polígonos. Por ejemplo, en la Fig. 5.9 cambiar *rojo* y *verde* en el polígono inferior. Pegar los dos polígonos juntos para recuperar el polígono original con n vértices. Será de tres colores (Fig. 5.10). \square

5.2 De colorear polígonos a vigilar un museo

Teorema 5.3. *Un museo con n paredes puede estar vigilado por $n/3$ guardias.*

Demostración. Por Thm. 5.1 el polígono puede ser triangulado y por Thm. 5.2 el polígono puede ser tricolor. Los tres vértices de cada triángulo en la triangulación deben ser coloreados por colores diferentes con el fin de satisfacer la condición de ser de tres colores. Dado que el polígono es de tres colores, al menos un color, por ejemplo rojo, puede aparecer como máximo $n/3$ veces, y cada triángulo debe tener un vértice de color rojo. Coloca un guardia en cada vértice rojo; puede observar todas las paredes de los triángulos a los que pertenece el vértice. Como los triángulos de la triangulación incluyen todas las aristas del polígono, bastan $n/3$ guardias para observar todas las paredes del museo. \square

Si n no es divisible por 3 el número de vigilantes necesarios es $\lfloor n/3 \rfloor$, el mayor número entero menor o igual que $n/3$. Por ejemplo, 4 guardias son suficientes para museos con paredes de 12, 13, 14 ya que $\lfloor 12/3 \rfloor = \lfloor 13/3 \rfloor = \lfloor 14/3 \rfloor = 4$. Para simplificar, ignoramos esta complicación.

5.3 Cualquier polígono puede triangularse

Teorema 5.4. *La suma de los ángulos interiores de un polígono con n vértices es:*

$$180^\circ(n - 2).$$

Demostración. Considere un polígono convexo y denotar su *ángulos exteriores* por θ_i (Fig. 5.11). Al pasar de una línea discontinua en secuencia a la siguiente línea

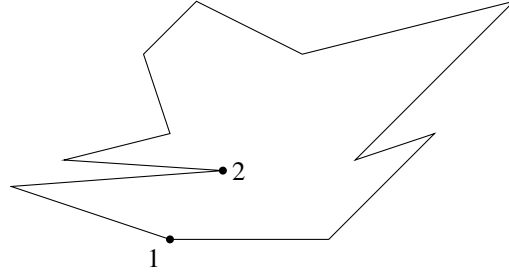


Fig. 5.5: Un polígono con un vértice convexo (1) y un vértice cóncavo (2)

discontinua, se completa una rotación alrededor de un círculo así:

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = 360^\circ.$$

Para cada ángulo exterior θ_i denotemos su correspondiente ángulo interior por ϕ_i . Entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \theta_i &= \sum_{i=1}^n (180^\circ - \phi_i) = 360^\circ \\ \sum_{i=1}^n \phi_i &= n \cdot 180^\circ - 360^\circ = 180^\circ (n - 2). \end{aligned}$$

Si existe un vértice cóncavo (B en la Fig. 5.12), existe un triángulo formado por las dos aristas incidentes con el vértice cóncavo y la recta \overline{AC} que une los otros dos vértices. Sumando los ángulos del triángulo obtenemos:

$$\begin{aligned} (180^\circ - \alpha) + (360^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) &= 180^\circ \\ \alpha + \beta + \gamma &= 3 \cdot 180^\circ. \end{aligned}$$

La suma de los ángulos interiores aumenta en $\alpha + \beta + \gamma$ mientras que el número de vértices aumenta en tres conservando la ecuación del teorema:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \phi_i + (\alpha + \beta + \gamma) &= 180^\circ (n - 2) + 3 \cdot 180^\circ \\ &= 180^\circ ((n + 3) - 2). \end{aligned}$$

□

Teorema 5.5. En un polígono debe haber al menos tres vértices convexos.

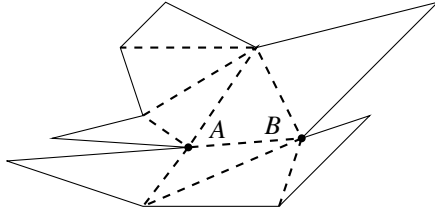


Fig. 5.6: Una diagonal arbitraria en un polígono

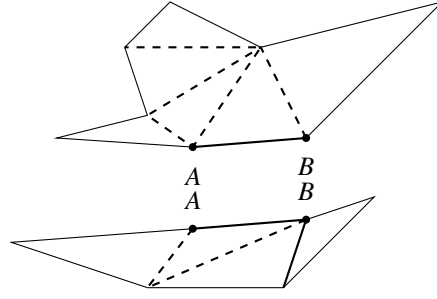


Fig. 5.7: Dividir el polígono

Demostración. Sea k el número de vértices cóncavos donde el ángulo interior de cada uno es $180^\circ + \epsilon_i$, $\epsilon_i > 0$. La suma de los ángulos interiores de los vértices cóncavos es ciertamente menor o igual que la suma de los ángulos interiores de todos los vértices:

$$\begin{aligned} k \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^k \epsilon_i &\leq 180^\circ(n-2) \\ (k+2) \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^k \epsilon_i &\leq n \cdot 180^\circ \\ (k+2) \cdot 180^\circ &< n \cdot 180^\circ \\ k &< n-2. \end{aligned}$$

De ello se deduce que debe haber al menos tres vértices que sean convexos, no cóncavos. \square

Ahora podemos demostrar el Teorema refthm.tri.

Demostración. Por inducción en el número de vértices. Para $n = 3$ no hay nada que demostrar. Si $n > 3$, por Thm. 5.5 debe haber un vértice C convexo. Etiquetar sus vértices adyacentes por B, D . Si \overline{BD} está contenida en el polígono (Fig. 5.13), es una diagonal y el polígono se puede dividir en $\triangle BCD$ y otro polígono \overline{ABDE} con \overline{BD} como arista y que es más pequeño que el polígono original (Fig. 5.13). Por la hipótesis inductiva, el polígono se puede triangular y luego pegar de nuevo a $\triangle BCD$, triangulando el polígono original.

Si \overline{BD} no está contenido en el polígono, debe haber vértice cóncavo F que es más cercano a C (Fig. 5.14). \overline{CF} es una diagonal y divide el polígono en dos polígonos más pequeños \overline{CFED} y \overline{CFAB} . Por la hipótesis inductiva estos pueden ser triangulados y pegados juntos. \square

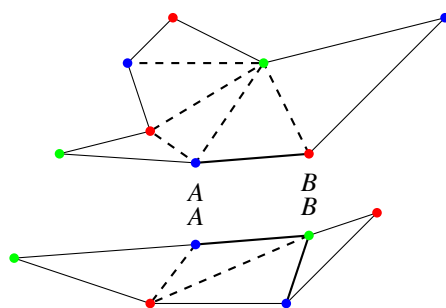


Fig. 5.8: Tricolor de los dos polígonos más pequeños

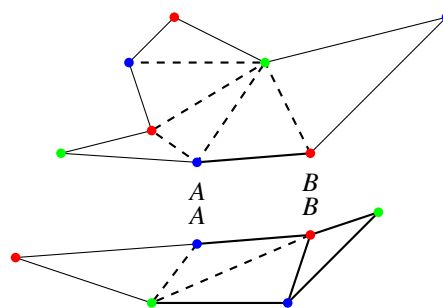


Fig. 5.9: Cambia los colores de un polígono para que coincidan con los del otro

¿Cuál es la sorpresa?

El teorema del museo es sorprendente porque lo que parece un teorema de geometría se demuestra con bastante elegancia apelando a la coloración de un gráfico.

Fuentes

Este capítulo está basado en [1, Cap. 39].

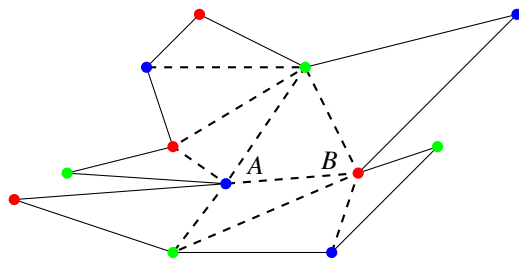


Fig. 5.10: *Vuelve a pegar los dos polígonos más pequeños*

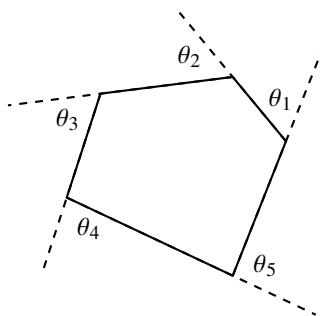


Fig. 5.11: *Los ángulos exteriores de un polígono convexo*

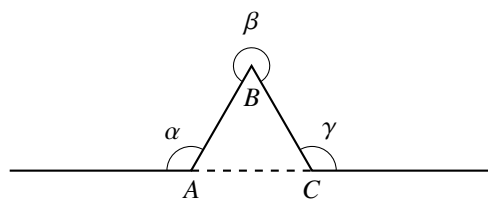


Fig. 5.12: *Un vértice cóncavo*

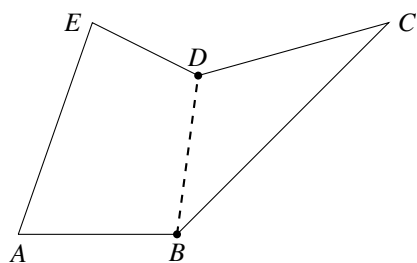


Fig. 5.13: Triangulación en la que una diagonal está contenida en el polígono

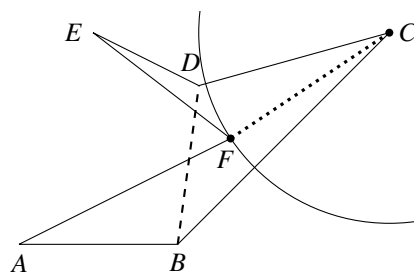


Fig. 5.14: Triangulación en la que una diagonal no está contenida en el polígono

Capítulo 6

Induction

El axioma de la inducción matemática se utiliza ampliamente como método de demostración en matemáticas. Este capítulo presenta demostraciones inductivas de resultados que pueden no ser conocidos por el lector. Comenzamos con una breve revisión de la inducción matemática (Secc. 6.1). La sección 6.2 demuestra resultados sobre los conocidos números de Fibonacci, mientras que la sección 6.3 demuestra resultados sobre los números de Fermat. La sección 6.4 presenta la función 91 descubierta por John McCarthy; la prueba es por inducción sobre una secuencia inusual: números enteros en un orden inverso. La prueba de la fórmula para el problema de Josephus (Sect. 6.5) también es inusual debido a la doble inducción en dos partes diferentes de una expresión.

6.1 El axioma de la inducción matemática

La inducción matemática es el método principal para demostrar que las afirmaciones son verdaderas para un conjunto ilimitado de números. Consideremos:

$$1 = 1, \quad 1 + 2 = 3, \quad 1 + 2 + 3 = 6, \quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Podríamos darnos cuenta:

$$1 = (1 \cdot 2)/2, \quad 3 = (2 \cdot 3)/2, \quad 6 = (3 \cdot 4)/2, \quad 10 = (4 \cdot 5)/2,$$

y luego conjeturar que para *todos* enteros $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si se tiene suficiente paciencia, comprobar esta fórmula para cualquier valor específico de n es fácil, pero ¿cómo se puede demostrar para *todos* del número infinito de enteros positivos? Aquí es donde entra en juego la inducción matemática.

Axioma 6.1. Sea $P(n)$ una propiedad (como una ecuación, una fórmula o un teorema), donde n es un número entero positivo. Supongamos que se puede:

- *Caso base:* Demostrar que $P(1)$ es cierto.
- *Paso inductivo:* Para m arbitrarios, demostrar que $P(m+1)$ es cierto siempre que se suponga que $P(m)$ es cierto.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq 1$. La suposición de que $P(m)$ es cierta para m arbitrarios se denomina *hipótesis inductiva*.

He aquí un ejemplo sencillo de demostración por inducción matemática.

Teorema 6.1. Para $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Demostración. El caso base es trivial:

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

La hipótesis inductiva es que la siguiente ecuación es cierta para m :

$$\sum_{i=1}^m i = \frac{m(m+1)}{2}.$$

El paso inductivo es demostrar la ecuación para $m+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m+1} i &= \sum_{i=1}^m i + (m+1) \\ &= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}. \end{aligned}$$

Por el principio de inducción matemática, para cualquier $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

La hipótesis inductiva puede ser confusa porque parece que estamos suponiendo lo que intentamos demostrar. El razonamiento *no* es circular porque suponemos la verdad de una propiedad para algo *pequeño* y luego usamos la suposición para demostrar la propiedad para algo más *grande*.

La inducción matemática es un axioma, por lo que no se puede demostrar la inducción. Sólo tienes que aceptar la inducción como aceptas otros axiomas de las matemáticas como $x+0=x$. Por supuesto, eres libre de rechazar la inducción matemática, pero entonces tendrás que rechazar gran parte de las matemáticas modernas.

La inducción matemática es una regla de inferencia que es uno de los *axiomas de Peano* para formalizar los números naturales. El *axioma de ordenación bien* puede utilizarse para demostrar el axioma de inducción y, a la inversa, el axioma de inducción puede utilizarse para demostrar el axioma de ordenación bien. Sin embargo, el axioma de inducción no puede demostrarse a partir de los otros axiomas de Peano, más elementales.

6.2 Números de Fibonacci

Los números de Fibonacci son el ejemplo clásico de definición recursiva:

$$\begin{aligned}f_1 &= 1 \\f_2 &= 1 \\f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \text{ for } n \geq 3.\end{aligned}$$

Los doce primeros números de Fibonacci son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.$$

Teorema 6.2. *Cada cuarto número de Fibonacci es divisible por 3.*

Ejemplo 6.1. $f_4 = 3 = 3 \cdot 1$, $f_8 = 21 = 3 \cdot 7$, $f_{12} = 144 = 3 \cdot 48$.

Demostración. Caso base: $f_4 = 3$ es divisible por 3. La hipótesis inductiva es que f_{4n} es divisible por 3. El paso inductivo es:

$$\begin{aligned}f_{4(n+1)} &= f_{4n+4} \\&= f_{4n+3} + f_{4n+2} \\&= (f_{4n+2} + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\&= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\&= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + (f_{4n+1} + f_{4n}) \\&= 3f_{4n+1} + 2f_{4n}.\end{aligned}$$

$3f_{4n+1}$ es divisible por 3 y, por la hipótesis inductiva, f_{4n} es divisible por 3. Por lo tanto, $f_{4(n+1)}$ es divisible por 3. \square

Teorema 6.3. $f_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

Demostración. Casos base: $f_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$ and $f_2 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$. El paso inductivo es:

$$\begin{aligned}f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\&< \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \\&= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4} + 1\right) \\&< \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 \\&= \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1},\end{aligned}$$

desde entonces:

$$\left(\frac{7}{4} + 1\right) = \frac{11}{4} = \frac{44}{16} < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2.$$

□

Teorema 6.4 (Fórmula de Binet).

$$f_n = \frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\sqrt{5}}, \text{ where } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \bar{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Demostración. Primero demostramos que $\phi^2 = \phi + 1$:

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + 1 \\ &= \phi + 1. \end{aligned}$$

Del mismo modo, podemos demostrar que $\bar{\phi}^2 = \bar{\phi} + 1$.

El caso base de la fórmula de Binet es:

$$\frac{\phi^1 - \bar{\phi}^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = f_1.$$

Supongamos la hipótesis inductiva para todo $k \leq n$. El paso inductivo es:

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} - \bar{\phi}^{n+1} &= \phi^2 \phi^{n-1} - \bar{\phi}^2 \bar{\phi}^{n-1} \\ &= (\phi + 1)\phi^{n-1} - (\bar{\phi} + 1)\bar{\phi}^{n-1} \\ &= (\phi^n - \bar{\phi}^n) + (\phi^{n-1} - \bar{\phi}^{n-1}) \\ &= \sqrt{5}f_n + \sqrt{5}f_{n-1} \\ \frac{\phi^{n+1} - \bar{\phi}^{n+1}}{\sqrt{5}} &= f_n + f_{n-1} = f_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Teorema 6.5.

$$f_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots.$$

Demostración. Demostremos primero la regla de Pascal:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\
&= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

También utilizaremos la igualdad $\binom{k}{0} = \frac{k!}{0!(k-0)!} = 1$ para cualquier $k \geq 1$.

Ahora podemos demostrar el teorema. El caso base es:

$$f_1 = \binom{1}{0} = \frac{1!}{0!(1-0)!} = 1.$$

El paso inductivo es:

$$\begin{aligned}
f_n = f_{n-1} + f_{n-2} &= \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \cdots \\
&\quad \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} + \cdots \\
&= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots \\
&= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots.
\end{aligned}$$

□

6.3 Números de Fermat

Definición 6.1. Los enteros $F_n = 2^{2^n} + 1$ para $n \geq 0$ se llaman *números de Fermat*.

Los cinco primeros números de Fermat son primos:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537.$$

El matemático del siglo XVII Pierre de Fermat afirmó que todos los números de Fermat son primos, pero casi cien años después Leonhard Euler demostró que:

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417.$$

Los números de Fermat se vuelven extremadamente grandes a medida que n aumenta. Se sabe que los números de Fermat no son primos para $5 \leq n \leq 32$, pero la factorización de algunos de esos números aún no se conoce.

Teorema 6.6. Para $n \geq 2$, el último dígito de F_n es 7.

Demostración. El caso base es $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$. La hipótesis inductiva es $F_n = 10k_n + 7$ para algún $k_n \geq 1$. El paso inductivo es:

$$\begin{aligned}
 F_{n+1} &= 2^{2^{n+1}} + 1 = 2^{2^n \cdot 2^1} + 1 = \left(2^{2^n}\right)^2 + 1 \\
 &= \left(\left(2^{2^n} + 1\right) - 1\right)^2 + 1 = (F_n - 1)^2 + 1 \\
 &= (10k_n + 7 - 1)^2 + 1 = (10k_n + 6)^2 + 1 \\
 &= 100k_n^2 + 120k_n + 36 + 1 \\
 &= 10(10k_n^2 + 12k_n + 3) + 6 + 1 \\
 &= 10k_{n+1} + 7, \quad \text{for some } k_{n+1} \geq 1.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 6.7. Para $n \geq 1$, $F_n = \prod_{k=0}^{n-1} F_k + 2$.

Demostración. El caso base es:

$$F_1 = \prod_{k=0}^0 F_k + 2 = F_0 + 2 = 3 + 2 = 5.$$

El paso inductivo es:

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=0}^n F_k &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\right) F_n \\
 &= (F_n - 2)F_n \\
 &= (2^{2^n} + 1 - 2)(2^{2^n} + 1) \\
 &= \left(2^{2^n}\right)^2 - 1 = \left(2^{2^{n+1}} + 1\right) - 2 \\
 &= F_{n+1} - 2 \\
 F_{n+1} &= \prod_{k=0}^n F_k + 2.
 \end{aligned}$$

□

6.4 La función 91 de McCarthy

Solemos asociar la inducción con pruebas de propiedades definidas en el conjunto de los números enteros positivos. Aquí traemos una prueba inductiva basada en una extraña ordenación en la que los números mayores son menores que los menores. La inducción funciona porque la única propiedad requerida del conjunto es que esté ordenado bajo algún operador relacional.

Consideremos la siguiente función recursiva definida sobre los números enteros:

$$f(x) = \text{si } x > 100 \text{ entonces } x - 10 \text{ si no } f(f(x + 11)) .$$

Para números superiores a 100 el resultado de aplicar la función es trivial:

$$f(101) = 91, \quad f(102) = 92, \quad f(103) = 93, \quad f(104) = 94, \quad \dots .$$

¿Qué pasa con los números menores o iguales que 100? Calculemos $f(x)$ para algunos números, donde el cálculo en cada línea utiliza los resultados de las líneas anteriores:

$$\begin{aligned} f(100) &= f(f(100 + 11)) = f(f(111)) = f(101) = 91 \\ f(99) &= f(f(99 + 11)) = f(f(110)) = f(100) = 91 \\ f(98) &= f(f(98 + 11)) = f(f(109)) = f(99) = 91 \\ &\dots \\ f(91) &= f(f(91 + 11)) = f(f(102)) = f(92) \\ &\quad = f(f(103)) = f(93) = \dots = f(98) = 91 \\ f(90) &= f(f(90 + 11)) = f(f(101)) = f(91) = 91 \\ f(89) &= f(f(89 + 11)) = f(f(100)) = f(91) = 91 . \end{aligned}$$

Definir la función g como:

$$g(x) = \text{if } x > 100 \text{ then } x - 10 \text{ else } 91 .$$

Teorema 6.8. *Para todos x , $f(x) = g(x)$.*

Demostración. La prueba es por inducción sobre el conjunto de enteros $S = \{x \mid x \leq 101\}$ utilizando el operador relacional $<$ definido por:

$$y < x \text{ if and only if } x < y ,$$

donde en el lado derecho $<$ es el operador relacional habitual sobre los números enteros. Esta definición da como resultado la siguiente ordenación:

$$101 < 100 < 99 < 98 < 97 < \dots .$$

Hay tres casos en la prueba. Utilizamos los resultados de los cálculos anteriores.

Caso 1: $x > 100$. Esto es trivial por las definiciones de f y g .

Caso 2: $90 \leq x \leq 100$. El caso base de la inducción es:

$$f(100) = 91 = g(100),$$

ya que hemos demostrado que $f(100) = 91$ y por definición $g(100) = 91$.

El supuesto inductivo es $f(y) = g(y)$ para $y < x$ y el paso inductivo es:

$$f(x) = f(f(x+11)) \quad (6.1a)$$

$$= f(x+11-10) = f(x+1) \quad (6.1b)$$

$$= g(x+1) \quad (6.1c)$$

$$= 91 \quad (6.1d)$$

$$= g(x). \quad (6.1e)$$

La ecuación 6.1a se cumple por definición de f ya que $x \leq 100$. La igualdad de la Ec. 6.1a y la Ec. 6.1b se cumple por definición de f , ya que $x \geq 90$ por lo que $x+11 > 100$. La igualdad de la Ec. 6.1b y la Ec. 6.1c se sigue por la hipótesis inductiva $x \leq 100$, por lo que $x+1 \leq 101$ lo que implica que $x+1 \in S$ y $x+1 < x$. La igualdad de la Ec. 6.1c, Ec. 6.1d y Ec. 6.1e se sigue por definición de g y $x+1 \leq 101$, por lo que $x \leq 100$.

Caso 3: $x < 90$. El caso base es: $f(89) = f(f(100)) = f(91) = 91 = g(89)$ por definición de g ya que $89 < 100$.

El supuesto inductivo es $f(y) = g(y)$ para $y < x$ y el paso inductivo es:

$$f(x) = f(f(x+11)) \quad (6.2a)$$

$$= f(g(x+11)) \quad (6.2b)$$

$$= f(91) \quad (6.2c)$$

$$= 91 \quad (6.2d)$$

$$= g(x). \quad (6.2e)$$

La ecuación 6.2a se cumple por definición de f y $x < 90 \leq 100$. La igualdad de la Ec. 6.2a y la Ec. 6.2b se sigue de la hipótesis inductiva $x < 90$, por lo que $x+11 < 101$, lo que implica que $x+11 \in S$ y $x+11 < x$. La igualdad de la Ec. 6.2b y la Ec. 6.2c se sigue por definición de g y $x+11 < 101$. Por último, ya hemos demostrado que $f(91) = 91$ y $g(x) = 91$ para $x < 90$ por definición. \square

6.5 El problema de Josefo

Josefo era el comandante de la ciudad de Yodfat durante la rebelión judía contra los romanos. La abrumadora fuerza del ejército romano acabó aplastando la resistencia de la ciudad y Josefo se refugió en una cueva con algunos de sus hombres.

Prefirieron suicidarse antes que ser asesinados o capturados por los romanos. Según el relato de Josefo, se las arregló para salvarse, se convirtió en observador de los romanos y más tarde escribió una historia de la rebelión. Presentamos el problema como un problema matemático abstracto.

Definición 6.2 (El problema de Josefo). Considere los números $1, \dots, n+1$ dispuestos en un círculo. Suprima cada número q alrededor del círculo $q, 2q, 3q, \dots$ (donde el cálculo se realiza modulo $n+1$) hasta que sólo quede un número m . $J(n+1, q) = m$ es el *número de Josefo* para $n+1$ y q .

Ejemplo 6.2. Sea $n+1 = 41$ y $q = 3$. Ordena los números en un círculo:

→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	↓
↑	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	←	

La primera ronda de supresiones conduce a:

→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	↓
↑	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	←	

Una vez eliminados los números suprimidos, se puede escribir como:

1 2 4 5 7 8 10 11 13 14 16 17 19 20 22 23 25 26 28 29 31 32 34 35 37 38

La segunda ronda de supresiones (a partir de la última supresión de 39) conduce a:

~~1~~ 2 4 ~~5~~ 7 8 ~~10~~ 11 13 ~~14~~ 16 17 ~~19~~ 20 22 ~~23~~ 25 26 ~~28~~ 29 31 ~~32~~ 34 35 ~~37~~ 38

Seguimos borrando uno de cada tres números hasta que sólo quede uno:

2 4 ~~7~~ 8 11 ~~13~~ 16 17 ~~20~~ 22 25 ~~26~~ 29 31 ~~34~~ 35 38 ~~40~~
2 4 ~~8~~ 11 16 ~~17~~ 22 25 ~~29~~ 31 35 ~~38~~
2 4 ~~11~~ 16 22 ~~25~~ 31 35
~~2~~ 4 16 ~~22~~ 31 35
~~4~~ 16 31 ~~35~~
~~16~~ 31
31

Se deduce que $J(41, 3) = 31$.

Se invita al lector a realizar el cálculo para eliminar uno de cada siete números de un círculo de 40 números con el fin de verificar que el último número es 30.

Teorema 6.9. $J(n+1, q) = (J(n, q) + q) \pmod{n+1}$.

Demostración. El primer número eliminado en la primera ronda es el número q y los números que quedan después de la eliminación son los números n :

$1 \quad 2 \quad \dots \quad q-1 \quad q+1 \quad \dots \quad n \quad n+1 \quad (\text{mód } n+1).$

El conteo para encontrar la siguiente eliminación comienza con $q + 1$. Mapeando $1, \dots, n$ en esta secuencia obtenemos:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & \dots & n - q & n + 1 - q & n + 2 - q & \dots & n - 1 & n & (\text{mód } n+1) \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
 q + 1 & q + 2 & \dots & n & n + 1 & 1 & \dots & q - 2 & q - 1 & (\text{mód } n+1) .
 \end{array}$$

Recuerda que los cálculos son módulo $n + 1$:

$$\begin{aligned}
 (n + 2 - q) + q &= (n + 1) + 1 = 1 \quad (\text{mód } n + 1) \\
 (n) + q &= (n + 1) - 1 + q = q - 1 \quad (\text{mód } n + 1) .
 \end{aligned}$$

Este es el problema de Josefo para n números, excepto que los números están desplazados por q . Se deduce que:

$$J(n + 1, q) = (J(n, q) + q) \quad (\text{mód } n + 1) .$$

□

Teorema 6.10. Para $n \geq 1$ existen números $a \geq 0, 0 \leq t < 2^a$, tales que $n = 2^a + t$.

Demostración. Esto se puede demostrar a partir de la aplicación repetida del algoritmo de división con divisores $2^0, 2^1, 2^2, 2^4, \dots$, pero es fácil de ver a partir de la representación binaria de n . Para algunos a y $b_{a-1}, b_{a-2}, \dots, b_1, b_0$, donde para todo i , $b_i = 0$ o $b_i = 1$, n se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
 n &= 2^a + b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0 \\
 n &= 2^a + (b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0) \\
 n &= 2^a + t, \quad \text{where } t \leq 2^a - 1 .
 \end{aligned}$$

□

Ahora probamos que existe una forma cerrada simple para $J(n, 2)$.

Teorema 6.11. For $n = 2^a + t, a \geq 0, 0 \leq t < 2^a, J(n, 2) = 2t + 1$.

Demostración. Por Thm. 6.10, n puede expresarse como se indica en el teorema. La demostración de que $J(n, 2) = 2t + 1$ se hace por doble inducción, primero sobre a y luego sobre t .

Primera inducción:

Caso base. Supongamos que $t = 0$ de modo que $n = 2^a$. Sea $a = 1$ de modo que haya dos números en el círculo 1, 2. Como $q = 2$, el segundo número se borrará, por lo que el número que queda es 1 y $J(2^1, 2) = 1$.

La hipótesis inductiva es que $J(2^a, 2) = 1$. ¿Cuál es $J(2^{a+1}, 2)$? En la primera ronda se eliminan todos los números pares:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots \quad 2^{a+1} - 1 \quad 2^{a+1} .$$

Ahora quedan 2^a números:

$$1 \quad 3 \quad \dots \quad 2^{a+1} - 1.$$

Por la hipótesis inductiva $J(2^{a+1}, 2) = J(2^a, 2) = 1$ así que por inducción $J(n, 2) = 1$ siempre que $n = 2^a + 0$.

Segunda inducción:

Hemos demostrado $J(2^a + 0, 2) = 2 \cdot 0 + 1$, el caso base de la segunda inducción.

La hipótesis inductiva es $J(2^a + t, 2) = 2t + 1$. Por Thm. 6.9:

$$J(2^a + (t + 1), 2) = J(2^a + t, 2) + 2 = 2t + 1 + 2 = 2(t + 1) + 1.$$

□

Los teoremas 6.10 y 6.11 dan un algoritmo sencillo para calcular $J(n, 2)$. De la prueba de Thm. 6.10:

$$n = 2^a + t = 2^a + (b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0),$$

so $t = b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0$. Simplemente multiplicamos por

$$2$$

(desplazamos un dígito a la izquierda) y sumamos

$$1$$

. Por ejemplo, como $n = 41 = 2^5 + 2^3 + 2^0 = 101001$, resulta que $J(41, 2) = 2t + 1$, y en notación binaria:

$$41 = 101001$$

$$9 = 01001$$

$$2t + 1 = 10011 = 16 + 2 + 1 = 19.$$

El lector puede comprobar el resultado borrando uno de cada dos números de un círculo $1, \dots, 41$.

Existe una forma cerrada para $J(n, 3)$ pero es bastante complicada.

¿Cuál es la sorpresa?

La inducción es quizá la técnica de demostración más importante de las matemáticas modernas. Aunque los números de Fibonacci son muy conocidos y los de Fermat también son fáciles de entender, me sorprendió encontrar tantas fórmulas que no conocía (como Thms. 6.2 y 6.3) que se pueden demostrar por inducción. La función 91 de McCarthy se descubrió en el contexto de la informática, aunque es un resultado puramente matemático. Lo sorprendente no es la función en sí, sino la extraña inducción utilizada para demostrarla donde $98 < 97$. La sorpresa del problema Josephus es la prueba inductiva bidireccional.

Fuentes

Para una presentación completa de la inducción, véase [21]. La prueba de la función 91 de McCarthy es de [30] donde se atribuye a Rod M. Burstall. La presentación del problema de Josefo se basa en [21, Capítulo 17], que también discute los antecedentes históricos. Ese capítulo contiene otros problemas interesantes con pruebas inductivas, como los niños embarrados, la moneda falsa y los peniques en una caja. Se puede encontrar material adicional sobre el problema de Josefo en [44, 57].

Capítulo 7

Resolución de ecuaciones cuadráticas

Poh-Shen Loh Loh, Poh-Shen propuso un método para resolver ecuaciones cuadráticas que se basa en una relación entre los coeficientes del polinomio cuadrático y sus raíces. Sección 7.1 revisa los métodos tradicionales para resolver ecuaciones cuadráticas. La sección 7.2 intenta convencer al lector de que el método de Loh tiene sentido y luego explica cómo calcular las raíces. En la sección 7.3 se realiza el cálculo para dos polinomios cuadráticos y un cálculo similar para un polinomio cuártico. La sección 7.4 deriva la fórmula tradicional para las raíces a partir de las fórmulas de Loh.

La introducción del álgebra y de la notación algebraica moderna es relativamente reciente. Anteriormente, los matemáticos utilizaban la geometría casi exclusivamente, por lo que es interesante observar la construcción geométrica de al-Khwarizmi de la fórmula para las raíces de ecuaciones cuadráticas (Secc. 7.5). La sección 7.6 muestra una ingeniosa construcción geométrica utilizada por Cardano en el desarrollo de la fórmula para las raíces de ecuaciones cúbicas.

La sección 7.8 presenta otros métodos geométricos para hallar las raíces de ecuaciones cuadráticas.¹ El capítulo concluye con la sección 7.9, que trata del cálculo numérico de las raíces de ecuaciones cuadráticas.

7.1 Métodos tradicionales para resolver ecuaciones cuadráticas

Todo estudiante de matemáticas memoriza la fórmula para obtener las raíces de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Por ahora trabajaremos con polinomios monicónicos, $x^2 + bx + c = 0$, cuyas raíces son:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (7.1)$$

Otro método para resolver ecuaciones cuadráticas consiste en factorizar los polinomios más o menos por ensayo y error. A veces es fácil obtener las raíces mediante factorización:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3). \quad (7.2)$$

¹El capítulo 11 es un prerrequisito para una comprensión completa de estos métodos.

Es mucho más difícil factorizar $x^2 - 2x - 24$ porque hay muchos pares posibles de raíces que hay que considerar:

$$(\pm 1, \mp 24), (\pm 2, \mp 12), (\pm 3, \mp 8), (\pm 4, \mp 6).$$

7.2 La relación entre las raíces y los coeficientes

Teorema 7.1. Si r_1, r_2 son las raíces de $x^2 + bx + c$ entonces:

$$(x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = x^2 + bx + c.$$

Por lo tanto, aunque no conozcamos los valores de las raíces, sí sabemos que:

$$r_1 + r_2 = -b, \quad r_1 r_2 = c. \quad (7.3)$$

En realidad no hay nada que demostrar porque el resultado surge del cálculo.

Consideremos algunos valores de $-b, r_1, r_2$ y sea m_{12} la media de r_1, r_2 :

$-b$	r_1	r_2	m_{12}
33	12	21	$16\frac{1}{2}$
33	8	25	$16\frac{1}{2}$
33	1	32	$16\frac{1}{2}$
$-b$	r_1	r_2	m_{12}
-4	-16	12	-2
-4	-4	0	-2
-4	-3	-1	-2

Para cualquier ecuación cuadrática la media de las dos raíces es constante:

$$m_{1,2} = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{(-b - r_2) + r_2}{2} = -\frac{b}{2}.$$

Sea s un número cualquiera. Entonces:

$$-b = -b + s + (-s) = \left(\frac{-b}{2} + s\right) + \left(\frac{-b}{2} - s\right) = r_1 + r_2.$$

Si una raíz está a distancia s de la media, la otra raíz está a distancia $-s$ de la media.

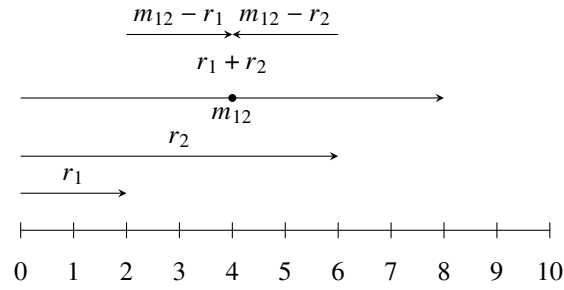


Fig. 7.1: Relación entre las raíces $r_1, r_2 = 2, 6$ y su media $m_{12} = 4$

Para $r_1, r_2 = 2, 6$, donde $m_{12} = 4, s = 2$, tenemos:

$-b$	r_1	r_2	m_{12}	$m_{12}-r_1$	$m_{12}-r_2$
33	12	21	$16\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$
33	8	25	$16\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{2}$
33	1	32	$16\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{2}$
-4	-16	12	-2	14	-14
-4	-4	0	-2	2	-2
-4	-3	-1	-2	1	-1

La figura 7.1 visualiza esta relación. Si utilizamos otros valores $r_1, r_2 = 3, 5$ para los que $r_1 + r_2 = 8$ entonces $m_{12} = 4$ permanece igual mientras que s se convierte en 1 (Fig. 7.2).

El desplazamiento s parece ser arbitrario en:

$$r_1 = \left(\frac{-b}{2} + s \right), \quad r_2 = \left(\frac{-b}{2} - s \right),$$

pero hay una restricción adicional $r_1 r_2 = c$, donde c es el término constante del polinomio. Multiplicando las dos expresiones que hemos obtenido para r_1, r_2 , podemos determinar s y luego r_1, r_2 :

$$c = \left(\frac{-b}{2} + s \right) \left(\frac{-b}{2} - s \right) = \frac{b^2}{4} - s^2$$

$$s = \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

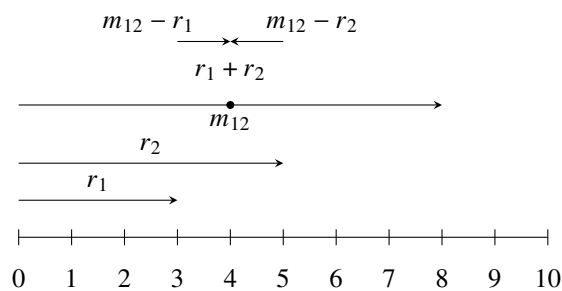


Fig. 7.2: Relación entre las raíces $r_1, r_2 = 3, 5$ y su media $m_{12} = 4$

7.3 Ejemplos del método de Loh

Ejemplo 7.1. Consideremos el polinomio $x^2 - 2x - 24$ donde $b = -2, c = -24$:

$$\begin{aligned} c &= \left(-\frac{(-2)}{2} + s \right) \left(-\frac{(-2)}{2} - s \right) \\ -24 &= (1 + s)(1 - s) \\ s &= 5 \\ r_1 &= 1 + 5 = 6 \\ r_2 &= 1 - 5 = -4. \end{aligned}$$

Controle: $(x - 6)(x - (-4)) = x^2 - 2x - 24$.

Ejemplo 7.2. Busquemos las raíces de $x^2 - 83x - 2310$:

$$\begin{aligned} -2310 &= \left(\frac{83}{2} + s \right) \left(\frac{83}{2} - s \right) \\ s^2 &= \frac{6889}{4} + 2310 = \frac{16129}{4} \\ s &= \frac{127}{2} \\ r_1 &= \frac{83}{2} - \frac{127}{2} = -22 \\ r_2 &= \frac{83}{2} + \frac{127}{2} = 105. \end{aligned}$$

Controle: $(x + 22)(x - 105) = x^2 - 83x - 2310$.

Compara este cálculo con el cálculo mediante la fórmula tradicional:

$$\begin{aligned}\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} &= \frac{-(-83) \pm \sqrt{(-83)^2 - 4 \cdot (-2310)}}{2} \\ &= \frac{83 \pm \sqrt{16129}}{2} = \frac{83 \pm 127}{2} \\ r_1 &= \frac{83 - 127}{2} = -22 \\ r_2 &= \frac{83 + 127}{2} = 105.\end{aligned}$$

Ejemplo 7.3. Teorema 7.1 puede generalizarse a polinomios de grados superiores. He aquí un ejemplo interesante para una *ecuación cuártica* $x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0$. Al igual que con las ecuaciones cuadráticas, existen fórmulas para resolver ecuaciones cúbicas y cuárticas (aunque no ecuaciones de potencias superiores), pero las fórmulas son bastante complicadas.

¿Este polinomio de grado cuatro se factoriza en dos polinomios cuadráticos con coeficientes enteros? Si es así, los coeficientes de los términos x en los factores cuadráticos deben ser *igual y de signos opuestos* ya que el coeficiente del término x^3 en el polinomio cuártico es cero. Por lo tanto, la forma de los factores cuadráticos es:

$$f(x) = (x^2 - nx + k_1)(x^2 + nx + k_2).$$

Realizando la multiplicación se obtiene:

$$\begin{aligned}f(x) = & x^4 & +nx^3 & +k_2x^2 \\ & -nx^3 & -n^2x^2 & -nk_2x \\ & & +k_1x^2 & +nk_1x & +k_1k_2.\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes se obtienen tres ecuaciones en las tres incógnitas n, k_1, k_2 da:

$$\begin{aligned}(k_1 + k_2) - n^2 &= -10 \\ n(k_1 - k_2) &= -1 \\ k_1k_2 &= 20.\end{aligned}$$

Como buscamos factores con coeficientes enteros, de las dos últimas ecuaciones se deduce que:

$$n = 1, k_1 = 4, k_2 = 5 \quad \text{or} \quad n = 1, k_1 = -5, k_2 = -4.$$

Sólo $n = 1, k_1 = -5, k_2 = -4$ satisfacen la primera ecuación para el coeficiente de x^2 :

$$f(x) = (x^2 - x - 5)(x^2 + x - 4).$$

Resolviendo estas ecuaciones cuadráticas se obtienen cuatro soluciones de la ecuación cuártica:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

7.4 Derivación de la fórmula tradicional

Para un polinomio mónico arbitrario $x^2 + bx + c$, las fórmulas de Loh son:

$$\begin{aligned} c = r_1 r_2 &= \left(\frac{-b}{2} + s \right) \left(\frac{-b}{2} - s \right) = \left(\frac{b^2}{4} - s^2 \right) \\ s &= \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} \right) - c} \\ r_{1,2} &= \frac{-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} \right) - c} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \end{aligned}$$

la fórmula tradicional para obtener las raíces de un polinomio cuadrático mónico. Si el polinomio no es mónico se divide por a , se sustituye en la ecuación y se simplifica:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ r_{1,2} &= \frac{-(b/a) \pm \sqrt{(b/a)^2 - 4(c/a)}}{2} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

7.5 Solución geométrica de ecuaciones cuadráticas de Al-Khwarizmi

Escribamos un polinomio cuadrático monicónico como $x^2 + bx - c$. Las raíces se pueden encontrar *completando el cuadrado*:

$$\begin{aligned} x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 &= c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ x &= -\frac{b}{2} \pm \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}. \end{aligned}$$

Ésta es la fórmula familiar para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática, excepto que $4c$ tiene el signo opuesto ya que el coeficiente del término constante era $-c$.

La fórmula de completar el cuadrado fue desarrollada en el siglo 8 por Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi en un contexto geométrico. Dada la ecuación $x^2 + bx = c$, supongamos que existe un cuadrado cuyo lado es x de modo que su área es x^2 . Al área x^2 se le añade bx sumando cuatro rectángulos de área $bx/4$ cuyos lados son $b/4$ y x (Fig. 7.3). Ahora completa el diagrama a un cuadrado añadiendo los cuatro cuadraditos de área $(b/4)^2$ (Fig. 7.4).

No podemos construir el diagrama en la Fig. 7.3 porque no sabemos lo que x es, pero el área del cuadrado más grande en la Fig. 7.4 es:

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = c + \frac{b^2}{4},$$

que sí conocemos ya que nos dan los coeficientes b, c . Construyendo el diagrama y borrando los cuadraditos cuyos lados son $(b/4)$ —otra cantidad conocida—obtenemos el segmento de recta de longitud x .

Ejemplo 7.4. Sea $x^2 + 12x = 64$. Entonces $c + (b^2/4) = 64 + 36 = 100$. Es fácil construir un cuadrado de área 100 ya que cada lado tiene longitud 10. Ahora resta $(b/4) + (b/4) = 6$, los lados de los cuadrados más pequeños, para obtener $x = 10 - 6 = 4$.

7.6 Construcción de Cardano para resolver ecuaciones cúbicas

La fórmula para las raíces de las ecuaciones cúbicas fue publicada por primera vez en el siglo XVI por Gerolamo Cardano. No desarrollaremos aquí la fórmula, pero es interesante que la idea central se base en una construcción geométrica similar a la de al-Khwarizmi. La construcción se puede obtener de forma muy sencilla utilizando

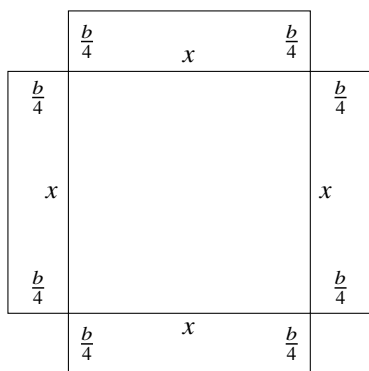


Fig. 7.3: La zona es $x^2 + 4(b/4)x = x^2 + bx$

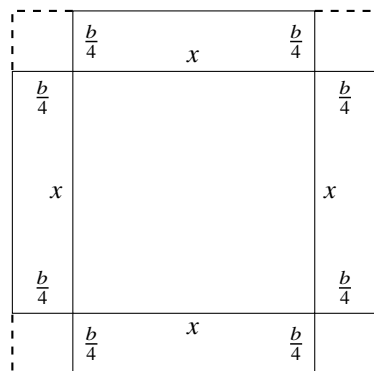


Fig. 7.4: La zona es $x^2 + 4(b/4)x + 4(b/4)^2 = x^2 + bx + (b^2/4)$

el álgebra. Por multiplicación:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a^3 + b^3) + 3ab(a + b). \quad (7.4)$$

Geoméricamente, partimos de un cubo cuyo lado es $a + b$ de modo que su volumen es $(a + b)^3$. El cubo se descompone en cinco piezas. Los dos primeros son cubos cuyas caras son a y b con volúmenes a^3 (azul) y b^3 (rojo), respectivamente (Fig. 7.5).

Las otras tres partes son cajas (el término técnico es *cuboide*) cada una con un lado de longitud $a + b$ que coincide con un lado del cubo, un lado de longitud a y un lado de longitud b , de modo que el volumen de cada una de las tres cajas es $ab(a + b)$. En la Fig. 7.6, hay una caja en el lado izquierdo del cubo (azul), una en la parte posterior del cubo (rojo) y una en la parte superior del cubo (verde). Combinando los cinco sólidos de Fig. 7.5 y Fig. 7.6 obtenemos la Ec. 7.4.

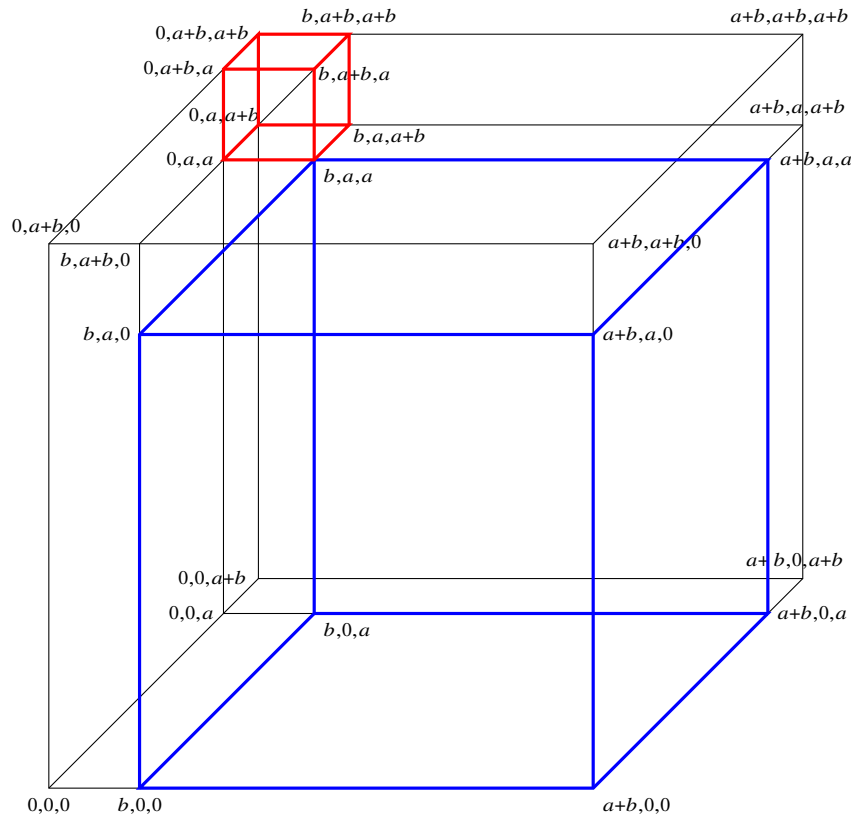


Fig. 7.5: $(a + b)^3 = (a^3 + b^3) + \dots$

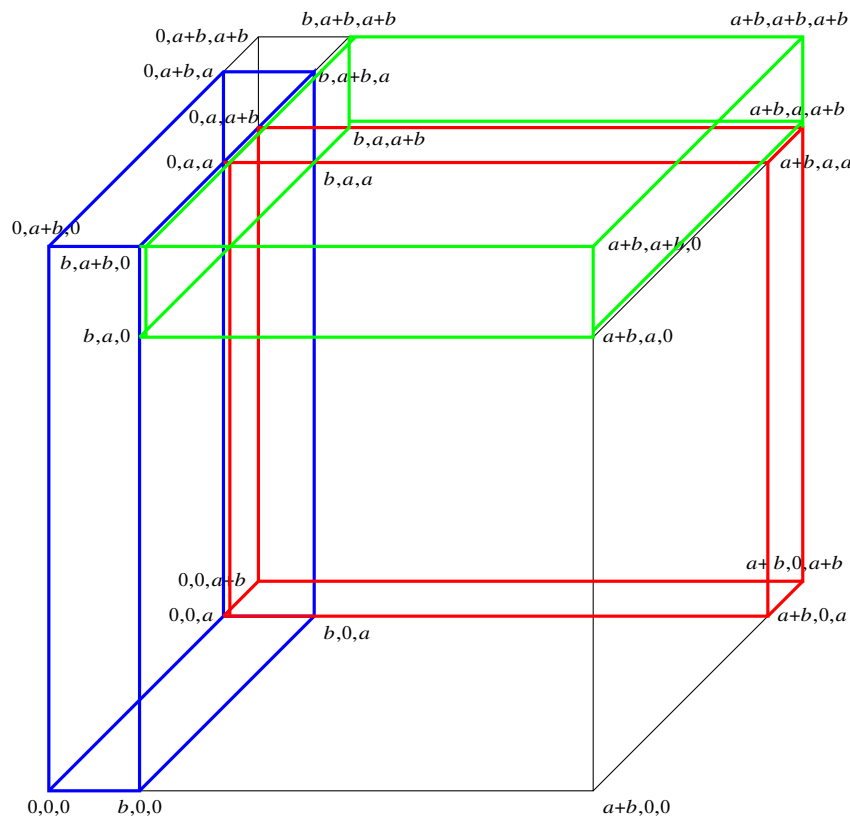


Fig. 7.6: $(a + b)^3 = \dots + 3ab(a + b)$

7.7 No les intimidaban los números imaginarios

La historia de las matemáticas muestra una progresión de conceptos que inicialmente se consideraron sin sentido, pero que finalmente se comprendieron, aceptaron y demostraron su utilidad. Obviamente, como los números cuentan cosas, -1 , un número negativo, no tiene sentido. Obviamente, puesto que los números son cocientes de números enteros (números racionales), $\sqrt{2}$, que puede demostrarse fácilmente que es irracional, no tiene sentido. Obviamente, $\sqrt{-1}$, la raíz cuadrada de un número negativo, no tiene sentido, ya que no hay ningún número —entero, racional o real— cuyo cuadrado sea -1 .

La comprensión completa de las raíces cuadradas de los números negativos, hasta hoy llamados *números imaginarios* aunque no son menos reales que los números reales, no se alcanzó hasta el siglo XIX. Por eso sorprende que, ya en el siglo XVI, Geralamo Cardano y Rafael Bombelli se negaran a dejarse intimidar por el concepto

y dieran los primeros pequeños pasos hacia la comprensión de estos números.

Consideremos la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 10x + 40 = 0. \quad (7.5)$$

Según la conocida fórmula (Ec. 7.1):

$$r_1, r_2 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 160}}{2} = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

Bueno, no sabemos nada acerca de las raíces cuadradas de los números negativos y no sabemos cuáles son estos valores, pero como Cardano sabemos por Thm 7.1 que:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= (5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) = 10 = -b \\ r_1 r_2 &= (5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - 5\sqrt{-15} + 5\sqrt{-15} - (-15) = 40 = c. \end{aligned}$$

que se corresponden con los coeficientes de la ecuación cuadrática Ec. 7.5. Es bastante intuitivo que $\sqrt{-15} + (-\sqrt{-15}) = 0$ aunque no sepamos nada de $\sqrt{-15}$, y, del mismo modo, es bastante intuitivo que $\sqrt{-15} \cdot -(\sqrt{-15}) = -(-15) = 15$ aunque no sepamos qué es $\sqrt{-15}$.

Consideremos ahora la ecuación cúbica:

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \quad (7.6)$$

No es difícil observar que 4 es una raíz, pero ¿cómo se puede calcular? La fórmula de Cardano da la raíz:

$$r = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}, \quad (7.7)$$

una fórmula bastante complicada que no tiene ninguna relación evidente con 4.

Bombelli realizó valientemente el siguiente cálculo (véase la Ec. 7.4):

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 8 + 3 \cdot 4\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(-1) + (-1\sqrt{-1}) = 2 + 11\sqrt{-1} \\ (2 - \sqrt{-1})^3 &= 8 - 3 \cdot 4\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(-1) - (-1\sqrt{-1}) = 2 - 11\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

y por la Ec. 7.7:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \\ &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} \\ &= (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4. \end{aligned}$$

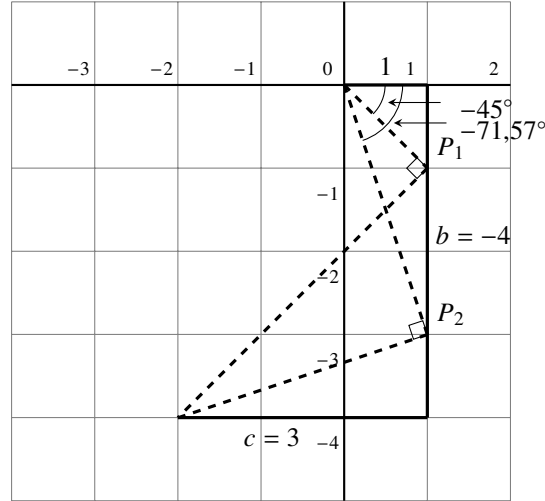


Fig. 7.7: Método de Lill en $x^2 - 4x + 3$

7.8 El método de Lill y el círculo de Carlyle

El método de Lill se puede aplicar para resolver ecuaciones cuadráticas.² Como ejemplo usamos la Ec. 7.2 que da las raíces de una ecuación cuadrática obtenida por factorización:

$$x^2 + bx + c = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$$

Aplicando el método de Lill se obtienen las trayectorias mostradas en la Fig. 7.7.

Comprueba que los ángulos son correctos:

$$-\tan(-45^\circ) = -1, \quad -\tan(-71,57^\circ) \approx -3.$$

Para las ecuaciones cuadráticas podemos encontrar los puntos P_1, P_2 como las intersecciones de la recta que representa el coeficiente b y el círculo cuyo diámetro es la recta que une el punto inicial y el punto final de las trayectorias (Fig. 7.8). Para que un punto de la recta b sea una raíz, la reflexión de la recta debe ser 90° y, por tanto, el ángulo inscrito es subtendido por un diámetro.

Esto también se puede comprobar por cálculo. El centro del círculo es el punto medio del diámetro $(-1, -2)$. La longitud del diámetro es:

$$\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20},$$

por lo que el cuadrado de la longitud del radio es $\left(\sqrt{20}/2\right)^2 = 5$. Necesitamos la

²Esta sección asume que has leído sobre el método de Lill en Chap. 11.

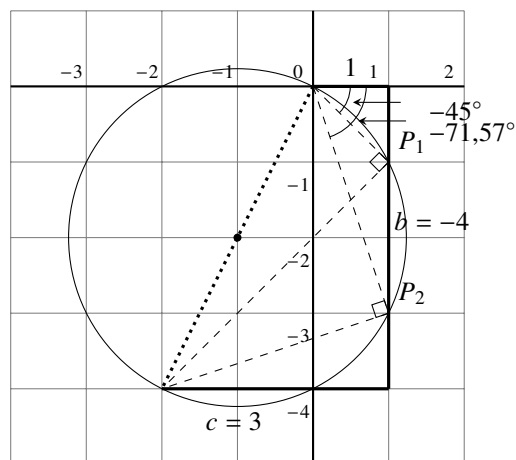


Fig. 7.8: Construir un círculo para encontrar las raíces

intersección de esta circunferencia con la recta $x = 1$:

$$\begin{aligned}(x - (-1))^2 + (y - (-2))^2 &= r^2 \\(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) &= 5 \\y^2 + 4y + 3 &= 0 \\y &= -1, -3.\end{aligned}$$

Un método similar para resolver ecuaciones cuadráticas es el círculo de Carlyle, que es anterior al método de Lill. Dada una ecuación cuadrática $x^2 - bx + c$ (nótese el signo menos en el término lineal), construir puntos en $(0, 1)$ y (b, c) . Construye una circunferencia cuyo diámetro sea la recta que une los dos puntos (Fig. 7.9). Sus intersecciones (si las hay) con el eje x son las raíces de la ecuación.

En el caso general, el centro del círculo es $(b/2, (c - (-1))/2)$ y la longitud del diámetro es $\sqrt{b^2 + (c - 1)^2}$, por lo que la ecuación del círculo es:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c + 1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + (c - 1)^2}{4}.$$

Para el ejemplo, sustituyendo $b = 4, c = 3$ y $y = 0$, vemos que $x = 1$ y $x = 3$ son las raíces de la ecuación cuadrática.

7.9 Cálculo numérico de las raíces

Los alumnos aprenden cálculo simbólico de raíces, derivadas, etc. Hoy en día, la mayoría de los cálculos se realizan por ordenador, por lo que el cálculo simbólico

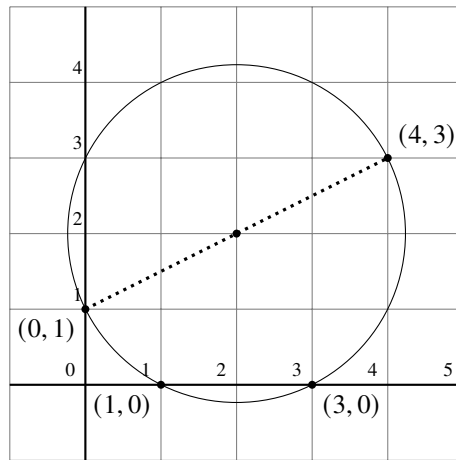


Fig. 7.9: Círculo Carlyle para $x^2 - 4x + 3$

es menos importante. El *análisis numérico* es la rama de las matemáticas y la informática que desarrolla métodos de cálculo precisos y eficaces. El principal reto es hacer frente a la finitud de los valores almacenados en la memoria del ordenador. El cálculo:

$$0,12 \times 0,14 = 0,0168$$

es fácil de hacer, pero:

$$0,123456789 \times 0,123456789$$

necesita dieciocho dígitos para ser representado con precisión y esto no puede hacerse en una palabra de memoria que almacena dieciséis dígitos. Este error se denomina error de redondeo.

Un problema aún más grave se encuentra cuando se realiza *aritmética de punto flotante*. Claramente:

$$(0,12 \times 10^{-10}) \times (0,14 \times 10^{-8})$$

no se calcularía escribiendo todos los dígitos cero. En su lugar, multiplicamos las mantisas y sumamos los exponentes para obtener $0,0168 \times 10^{-18}$, que se normaliza a $0,168 \times 10^{-19}$ para que el dígito más significativo aparezca después del punto decimal, asegurando la máxima precisión dado el tamaño fijo de la mantisa. Si el exponente máximo que se puede representar es -16 el resultado simplemente no se puede ni almacenar. Este error se denomina desbordamiento de punto flotante.

La fórmula para encontrar las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c$ es:

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (7.8)$$

Consider what happens if $b = 1000$ and $c = 4$. The roots are:

$$r_1, r_2 = \frac{-1000 \pm \sqrt{1000000 - 16}}{2}.$$

Dependiendo de la precisión de la aritmética, es posible que una de las raíces esté tan cerca de cero que el valor almacenado sea cero. Evaluar la ecuación cuadrática da el sorprendente resultado $0^2 + b \cdot 0 + 4 = 4 = 0$.

¿Podemos hacerlo mejor? Por la Ec. 7.3:

$$r_1 + r_2 = -b, \quad r_1 r_2 = c.$$

Si r_2 es mucho menor que r_1 , escrito $r_2 \ll r_1$, entonces $r_1 \approx -b$ y $r_2 \approx c/b$. En la tabla 7.1, calculada por un programa informático, se comparan los valores de las raíces calculados por estas fórmulas con los valores obtenidos de la fórmula tradicional Ec. 7.8. El valor de c se fija en 4 y se muestran las raíces para valores crecientes de b .

Inicialmente, los valores reales calculados mediante la fórmula tradicional para r_2 son más exactos ($r_2 - r_{2v}$ es negativo), pero a partir de $b = 100000$, el cálculo basado en la Ec. 7.3 es más exacto. Tales son las sorpresas del análisis numérico.

Cuadro 7.1: *Dos cálculos de las raíces de una ecuación cuadrática. r_1, r_2 son las raíces calculadas por la Ec. 7.8. r_{1v}, r_{2v} son las raíces calculadas mediante la Ec. 7.3. Los errores son $r_i - r_{iv}$. Los valores se truncan a cuatro decimales. Los números en coma flotante se escriben $-4e-5$ en lugar de 4×10^{-5} porque los programas de ordenador se escriben normalmente como secuencias lineales de caracteres.*

b	r_1	r_{1v}	Error ₁	r_2	r_{2v}	Error ₂
100	-99,9599	-100	0,0400	-0,04001	-0,04	-1,6012e-05
1000	-999,9959	-1000	0,0040	-0,0040	-0,004	-1,6000e-08
10000	-9999,9996	-10000	0,0004	-0,0004	-0,0004	-1,6270e-11
100000	-99999,9999	-100000	3,9999e-5	-3,9999e-5	-4e-5	1,0104e-12
1000000	-999999,9999	-1000000	4,0000e-6	-3,9999e-6	-4e-6	2,7749e-11
10000000	-10000000,0	-10000000	3,9860e-7	-3,9953e-7	-4e-7	4,6261e-10

¿Cuál es la sorpresa?

El enfoque de Poh-Shen Loh proporciona una nueva forma de ver la relación entre los coeficientes y las raíces que no se ve simplemente memorizando la fór-

mula tradicional. Lo sorprendente es que esta relación es fundamental en la prueba algebraica de Gauss de la constructibilidad de un heptadecágono regular (Cap. 16).

Con el dominio moderno de los métodos algebraicos en geometría, es importante recordar que antes ocurría lo contrario. Como demuestran las construcciones de Al-Khwarizmi y Cardano, los métodos geométricos se utilizaban para obtener resultados en álgebra. Lill y Carlyle desarrollaron métodos geométricos para resolver ecuaciones cuadráticas. Las consideraciones sobre el cálculo numérico en los ordenadores sorprenderán a los alumnos que no lo hayan experimentado antes.

Fuentes

El método de Poh-Shen Loh procede de [28, 29]. La construcción de Al-Khwarizmi se encuentra en [6, Cap. 1] y [32]. La construcción de Cardano se encuentra en [6, Cap. 1]. Para la colorida historia del desarrollo de la fórmula de Cardano, véase [52]. Los primeros intentos de calcular con números imaginarios están en [6, Cap. 2]. El método de Lill y el círculo de Carlyle se pueden encontrar en [61] junto con una discusión del cálculo numérico de las raíces.

Capítulo 8

Teoría de Ramsey

La teoría de Ramsey es una rama de la combinatoria que plantea preguntas del tipo ¿Qué tamaño debe tener un conjunto para que, si se divide en subconjuntos, al menos uno de ellos tenga una determinada propiedad? Los resultados de la teoría de Ramsey son difíciles de demostrar y quedan muchos problemas abiertos. En este capítulo presentamos casos sencillos de cuatro problemas para dar una idea de este fascinante tema: Triples de Schur (Secc. 8.1)—triplos de enteros tales que $a + b = c$, triples pitagóricos (Secc. 8.2)—triplos de enteros tales que $a^2 + b^2 = c^2$, problema de van der Waarden (Secc. El problema de van der Waarden (Sección 8.3) que se refiere a secuencias de números, y el teorema de Ramsey (Sección 8.4) sobre grafos coloreados. La sección 8.5 muestra cómo se puede utilizar el método probabilístico en combinatoria para desarrollar una cota inferior para los números de Ramsey.

El problema de los triples pitagóricos se ha resuelto recientemente con ayuda de ordenadores, utilizando un método relativamente nuevo llamado resolución SAT. Para los lectores familiarizados con la lógica proposicional, la sección 8.6 ofrece una visión general de cómo se hace.

La sección 8.7 describe los triples pitagóricos tal y como los conocían los babilonios hace cuatro mil años.

Terminología: *Monocromático* significa del mismo color.

8.1 Schur triplica

Definición 8.1. Dada *any* descomposición del conjunto de enteros positivos:

$$S(n) = \{1, \dots, n\}$$

en dos subconjuntos disjuntos S_1, S_2 , ¿existen $\{a, b, c\} \subseteq S_1$ o $\{a, b, c\} \subseteq S_2$ (o ambos) tales que $a! < b < c$ y $a + b = c$? Si es así, el conjunto a, b, c se llama un triple de Schur.

Ejemplo 8.1. Para $n = 8$, en la descomposición:

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4\}, S_2 = \{5, 6, 7, 8\}, \quad (8.1)$$

el conjunto S_1 incluye el triple de Schur $\{1, 2, 3\}$. Sin embargo, la descomposición:

$$S'_1 = \{1, 2, 4, 8\}, S'_2 = \{3, 5, 6, 7\}, \quad (8.2)$$

no contiene ningún triple de Schur, como se puede comprobar enumerando todos los triples de cada subconjunto.

Teorema 8.1. *En all descomposiciones de $S(9) = \{1, \dots, 9\}$ en dos subconjuntos disjuntos, al menos un subconjunto contiene un triple de Schur.*

Por supuesto, podríamos comprobar las $2^9 = 512$ descomposiciones de $S(9)$ en dos subconjuntos disjuntos, pero vamos a tratar de llegar a una prueba más sucinta.

Demostración. Intentamos construir una descomposición que no contenga un triple de Schur y demostramos que las restricciones del problema lo hacen imposible. Se empieza colocando 1 y 3 en el subconjunto S_1 . 2 deben colocarse en S_2 porque $1 + 2 = 3$ y estamos intentando construir una descomposición que no contenga un triple de Schur. Análogamente, 4 deben colocarse en S_2 porque $1 + 3 = 4$. Continuando, 6 se coloca en S_1 porque $2 + 4 = 6$ y 7 se coloca en S_2 porque $1 + 6 = 7$. Sin embargo, $3 + 6 = 9$ y $2 + 7 = 9$, por lo que 9 debe aparecer tanto en S_1 como en S_2 , una contradicción. La secuencia de inferencias se muestra en la siguiente tabla:

S_1	S_2
1, 3	
1, 3	2
1, 3	2, 4
1, 3, 6	2, 4
1, 3, 6	2, 4, 7
1, 3, 6, 9	2, 4, 7
1, 3, 6, 9	2, 4, 7, 9

Retrocediendo, buscamos una descomposición en la que 1, 3 estén en subconjuntos distintos. Si colocamos 5 en S_2 , una secuencia de inferencias conduce de nuevo a una contradicción porque 9 debe aparecer en ambos subconjuntos. El lector debe justificar cada una de las inferencias que se muestran en la siguiente tabla:

S_1	S_2
1	3
1	3, 5
1, 2	3, 5
1, 2, 8	3, 5
1, 2, 8	3, 5, 7
1, 2, 8	3, 5, 7, 9
1, 2, 8	3, 5, 6, 7, 9
1, 2, 8, 9	3, 5, 6, 7, 9

Retrocediendo de nuevo, tratamos de colocar 5 en S_1 , pero eso también conduce a

una contradicción, como se muestra en la siguiente tabla:

S_1	S_2
1	3
1, 5	3
1, 5	3, 4
1, 5	3, 4, 6
1, 2, 5	3, 4, 6
1, 2, 5	3, 4, 6, 7
1, 2, 5, 7	3, 4, 6, 7

De ello se deduce que no existe ninguna descomposición que no incluya un triple de Schur. \square

Issai Schur demostró el siguiente teorema:

Teorema 8.2 (Schur). *Para cada $k \geq 2$ existe un n mínimo tal que en cualquier descomposición disjunta de $S(n)$ en k subconjuntos, al menos uno de los subconjuntos debe contener un triple de Schur.*

8.2 Triples pitagóricos

Definición 8.2. Dada *any* descomposición del conjunto de enteros positivos:

$$S(n) = \{1, \dots, n\}$$

en dos subconjuntos disjuntos S_1, S_2 , ¿existen $\{a, b, c\} \subseteq S_1$ o $\{a, b, c\} \subseteq S_2$ (o ambos) tal que $a < b < c$ y $a^2 + b^2 = c^2$? Si es así, a, b, c se llama un *triple pitagórico*.

Ejemplo 8.2. Para $n = 10$, en la descomposición en números pares e impares:

$$S_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad S_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$

no hay triples pitagóricos en S_1 pero $\{6, 8, 10\}$ en S_2 es un triple pitagórico ya que $6^2 + 8^2 = 10^2$.

Marijn J.H. Heule y Oliver Kullmann demostraron los siguientes teoremas. Su método de demostración se discute en la sección 8.6.

Teorema 8.3. *Para todo $n \leq 7824$, existe alguna descomposición de $S(n)$ en dos subconjuntos disjuntos tal que ambos subconjuntos no contienen un triple pitagórico.*

Teorema 8.4. *Para todo $n \geq 7825$, en todas las descomposiciones de $S(n)$ en dos subconjuntos disjuntos al menos un subconjunto contiene un triple pitagórico.*

Es imposible comprobar todas las descomposiciones 2^{7825} de $S(7825)$. Si pudiéramos comprobar una descomposición cada microsegundo, 2^{7825} microsegundos; aproximadamente 10^{600} años, mientras que la edad estimada del universo es sólo de unos 10^{10} años.

8.3 El problema de Van der Waerden

Considere las secuencias de ocho puntos de colores en la Fig. 8.1. En la secuencia superior hay puntos rojos en las posiciones (1, 2, 3) y puntos azules en las posiciones (4, 5, 6). En cada caso, las posiciones forman una progresión aritmética. Del mismo modo, en la secuencia del medio, los puntos rojos en las posiciones (1, 3, 5) forman una progresión aritmética. Sin embargo, en la secuencia inferior no hay ningún conjunto de tres puntos monocromáticos cuyas posiciones formen una progresión aritmética. Los triples de puntos rojos están en las posiciones (1, 2, 5), (1, 2, 6), (2, 5, 6), ninguna de las cuales forma progresiones aritméticas, y lo mismo para los puntos azules.

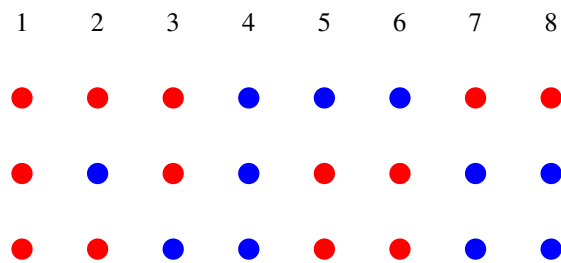


Fig. 8.1: *Problema de van der Waerden para ocho puntos de color*

Con nueve puntos *cualquier* coloración *debe* contener una secuencia de tres puntos monocromáticos que formen una progresión aritmética. Por ejemplo, añadamos un punto rojo o un punto azul al final de la secuencia inferior de la Fig. 8.1 para obtener las secuencias de la Fig. 8.2. En la secuencia superior hay puntos rojos en las posiciones (1, 5, 9), una progresión aritmética, y en la secuencia inferior hay puntos azules en las posiciones (7, 8, 9), también una progresión aritmética.

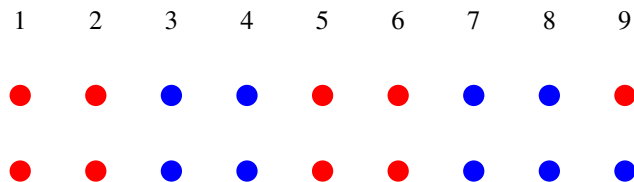


Fig. 8.2: *Problema de van der Waerden para nueve puntos de color*

Bartel L. van der Waerden planteó el siguiente problema: Para cualquier número entero positivo k , ¿cuál es el menor número n tal que *cualquier* secuencia de n puntos coloreados *debe* contener una secuencia de k puntos monocromáticos que formen una progresión aritmética? Para $k = 3$, $n = 9$, como se ha demostrado anteriormente

para una descomposición. El siguiente resultado es más difícil de demostrar: para $k = 4, n = 35$.

8.4 Teorema de Ramsey

Colorear las aristas de K_5 , el grafo completo en 5 vértices, con dos colores como se muestra en la Fig. 8.3. No hay subgrafos monocromáticos K_3 (triángulos) en el gráfico. La figura 8.4 muestra una coloración de K_6 y es fácil ver que hay triángulos monocromáticos $\triangle ACE$ y $\triangle BDF$. En esta sección demostramos un caso sencillo de un teorema de Frank P. RamseyindexRamsey, Frank P. sobre la existencia de subconjuntos con cierta propiedad.

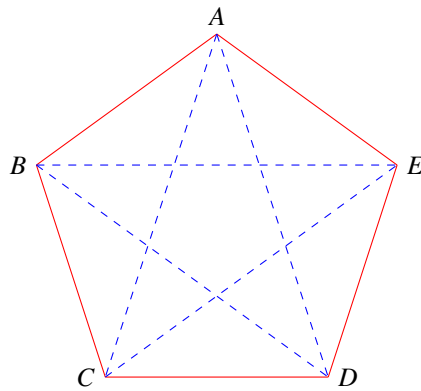


Fig. 8.3: Una coloración de K_5 con dos colores

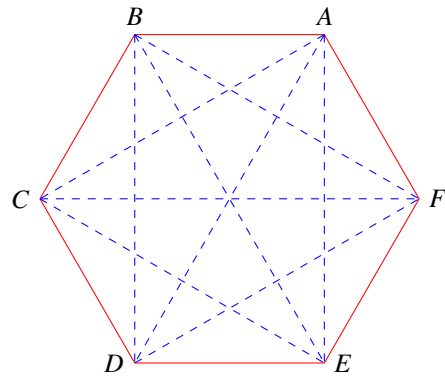


Fig. 8.4: Una coloración de K_6 con dos colores

Definición 8.3. Cuadrado $R(k)$, el número de Ramsey para k , es el menor número n tal que en cualquier coloración de K_n , el grafo completo de n vértices, con dos colores hay un subgrafo completo monocromático K_k .

Teorema 8.5 (Ramsey). $R(3) = 6$.

Demostración. La figura 8.3 muestra que $R(3) > 5$. Para demostrar que $R(3) \leq 6$, considere cualquier vértice v en K_6 . v está conectado con otros cinco vértices, y cuando las aristas se colorean con dos colores debe haber al menos tres aristas monocromáticas incidentes con v .

En la Fig. 8.5, $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AE}$ están coloreadas de rojo. Dado que el gráfico es completo todos los vértices están conectados, por lo que si cualquiera de las aristas $\overline{BC}, \overline{BE}, \overline{CE}$ es de color rojo, digamos \overline{BE} , se forma un triángulo rojo $\triangle ABE$. De lo contrario, las tres aristas de estos bordes son de color azul y forman un triángulo azul (Fig. 8.6). \square

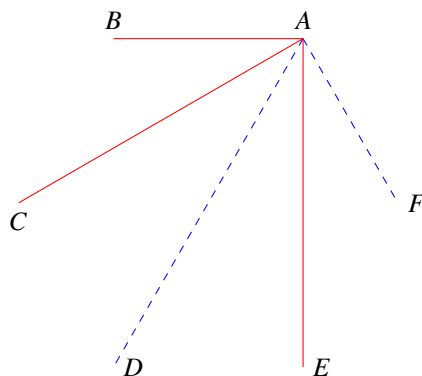


Fig. 8.5: Un vértice de K_6

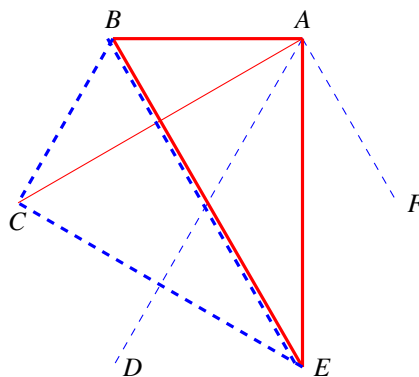


Fig. 8.6: Triángulos monocromáticos en K_6

El teorema se puede generalizar a cualquier número de colores, así como a coloraciones en las que los tamaños de los subgrafos no son iguales. $R(r, b, g)$ es el grafo completo más pequeño tal que en cualquier coloración con tres colores debe haber subgrafos completos con r aristas rojas, b aristas azules y g aristas verdes.

8.5 El método probabilístico

Los únicos números de Ramsey no triviales conocidos son $R(3) = 6$ y $R(4) = 18$. En 1947, Paul Erdős desarrolló el *método probabilístico* y lo utilizó para mostrar los límites inferior y superior de $R(k)$. Las investigaciones posteriores han mejorado ambos límites, pero sigue siendo un área de investigación importante, ya que los límites no son estrictos. Por ejemplo, se ha demostrado que $43 \leq R(5) \leq 48$ y $798 \leq R(10) \leq 23556$. En esta sección se utiliza la probabilidad elemental para obtener una cota inferior de $R(k)$.

Para demostrar que existe un elemento de un conjunto S que tiene la propiedad A , demostrar que la probabilidad de que un elemento *aleatorio* de S tenga la propiedad A es mayor que cero. Es importante entender que el método es *no constructivo*: sólo prueba que existe tal elemento pero no lo construye. Aunque por Thm. 8.5 sabemos que $R(3) = 6$, utilicemos el método probabilístico para obtener una cota inferior para $R(3)$.

Teorema 8.6 (Erdős). $R(3) > 4$.

Demostración. Dada una coloración *aleatoria* de K_n por los dos colores rojo y azul, consideremos un subgrafo arbitrario K_3 , es decir, un triángulo arbitrario con $\binom{3}{2} = 3$ lados. La probabilidad de que todos los lados sean de color rojo es 2^{-3} , al igual que la probabilidad de que todos los lados sean de color azul, por lo que la probabilidad

de que el triángulo sea monocromático es $2^{-3} + 2^{-3} = 2^{-2} = 1/4$. El número de triángulos en K_n es $\binom{n}{3}$, por lo que $P(n, 3)$, la probabilidad de que *algún* triángulo contenido en una coloración aleatoria de K_n sea monocromático, es:

$$P(n, 3) = \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{4}.$$

Si $P(n, 3) < 1$ entonces su complemento $\bar{P}(n, 3) = 1 - P > 0$, es decir, la probabilidad de que una coloración aleatoria de K_n *no* contenga un triángulo monocromático es mayor que cero, por lo que debe existir al menos uno.

La siguiente tabla muestra $\bar{P}(n, 3)$ para varios valores de n , y si el valor de $\bar{P}(n, 3)$ prueba que existe una coloración sin triángulo monocromático:

n	$\bar{P}(n, 3)$	Exists
3	3/4	yes
4	5/6	yes
5	-3/7	–

□

A primera vista el resultado es extraño porque Fig. 8.3 muestra que existe una coloración de K_5 sin coloración monocromática. Sin embargo, el criterio probabilístico es suficiente pero no necesario; es una cota inferior, lo que significa que $R(n) > 4$ lo cual es cierto porque Thm. 8.5 demostró que $R(n) = 6$.

La misma demostración funciona para k arbitrarios, por lo que la probabilidad de la existencia de una coloración de K_n sin grafo completo monocromático K_k es:

$$P(n, k) = \binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Para $k = 4$:

$$\begin{aligned}\bar{P}(n, 4) &= 1 - \binom{n}{4} \cdot 2^{-5} = \left(32 - \binom{n}{4}\right) / 32 \\ \bar{P}(6, 4) &= (32 - 15)/32 = 17/32 \\ \bar{P}(7, 4) &= (32 - 35)/32 = -3/32.\end{aligned}$$

De ello se deduce que $R(4) > 6$ que es mucho menor que el valor conocido $R(4) = 18$.

8.6 Resolución de SAT

La resolución SAT es un método de resolución de problemas que consiste en codificar un problema como una fórmula en lógica proposicional y, a continuación,

utilizar un programa informático para comprobar el valor de verdad de la fórmula. Los avances en algoritmos e implementaciones han hecho de la resolución SAT un método viable para resolver problemas. Damos una visión general de la resolución SAT y explicamos cómo se puede utilizar para resolver los problemas matemáticos descritos en este capítulo. Se supone que el lector tiene un conocimiento elemental de la lógica proposicional tal y como se resume en Def. 8.4.

8.6.1 Lógica proposicional y el problema SAT

Definición 8.4.

- Una *fórmula* está compuesta de *fórmulas atómicas* o *átomos* conectados por los operadores proposicionales \vee (disyunción, “o”), \wedge (conjunción, “y”), \neg (negación, “no”).
- Una fórmula recibe un *interpretación* mediante una asignación de T o F a cada átomo. La evaluación de una fórmula en una interpretación da como resultado su valor verdadero T o F .
- Una fórmula es *satisfiable* si y sólo si existe una interpretación que hace que su valor de verdad T . En caso contrario, la fórmula es insatisfiable.
- Una fórmula está en *forma normal conjuntiva (CNF)* si y sólo si se compone de una conjunción de subfórmulas cada una de las cuales es una disyunción de *literales* (átomos o negaciones de átomos).

La siguiente fórmula está en CNF:

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r).$$

El problema SAT consiste en decidir si una fórmula dada en CNF es satisfacible o no. Un solucionador SAT es un programa informático que puede resolver el problema SAT. La mayoría de los solucionadores SAT se basan en el algoritmo DPLL que se remonta a la década de 1960, pero los desarrollos recientes han hecho mejoras muy significativas en el algoritmo. Las implementaciones altamente optimizadas de estos algoritmos han hecho de los solucionadores SAT una herramienta importante para resolver problemas en muchos campos, incluidas las matemáticas.

8.6.2 Schur triplica

Codifiquemos el problema de triples de Schur $S(8)$ como una fórmula en CNF. La fórmula será satisfacible si y sólo si existe una descomposición de un conjunto S en subconjuntos disjuntos S_1, S_2 tal que ni S_1 ni S_2 contengan un triple de Schur. Existe un átomo p_i para cada uno de los números $1 \leq i \leq 8$. El significado

pretendido de una interpretación para la fórmula es que asigna T a p_i si i está en el primer subconjunto S_1 y asigna F a p_i si i está en el segundo subconjunto S_2 . Para demostrar que en todas las descomposiciones ninguno de los subconjuntos contiene un triple de Schur, la interpretación debe garantizar que para cada posible triple de Schur al menos un átomo tiene asignado T y un átomo tiene asignado F .

Por ejemplo, $\{2, 4, 6\}$ es un triple de Schur, por lo que al menos uno de los tres enteros debe estar en S_1 y al menos uno de ellos debe estar en S_2 . Por lo tanto, $p_2 \vee p_4 \vee p_6$ debe ser cierto y también $\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6$ debe ser cierto. Hay 12 posibles triples Schur por lo que la fórmula CNF es:

$$\begin{aligned}
 & (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_3 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_5 \vee p_6) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_6 \vee p_7) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_7 \vee p_8) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_7 \vee \neg p_8) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_3 \vee p_5) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_4 \vee p_6) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_5 \vee p_7) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_5 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_6 \vee p_8) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_6 \vee \neg p_8) \wedge \\
 & (p_3 \vee p_4 \vee p_7) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_3 \vee p_5 \vee p_8) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8) .
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Cuando a un solucionador SAT se le da esta fórmula, responde que la fórmula es satisfactible bajo cualquiera de las interpretaciones:

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
F	F	T	F	T	T	T	F
T	T	F	T	F	F	F	T

Una interpretación corresponde a la descomposición de la Ec: $S_1 = \{1, 2, 4, 8\}$, $S_2 = \{3, 5, 6, 7\}$, mientras que la otra corresponde a la descomposición simétrica $S_1 = \{3, 5, 6, 7\}$, $S_2 = \{1, 2, 4, 8\}$.

Para $S(9)$, se añaden cuatro pares de subfórmulas para las posibles triplas adicionales:

$$\begin{aligned}
 & (p_1 \vee p_8 \vee p_9) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_8 \vee \neg p_9) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_7 \vee p_9) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_7 \vee \neg p_9) \wedge \\
 & (p_3 \vee p_6 \vee p_9) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_6 \vee \neg p_9) \wedge \\
 & (p_4 \vee p_5 \vee p_9) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_9) .
 \end{aligned}$$

Cuando el solucionador SAT se le da esta fórmula, responde que la fórmula es insatisfactible, lo que significa que *no* descomposición tiene *no* Schur triple. Quitando el doble negativo, esto afirma que en *cada* descomposición de $S(9)$ existe un triple de Schur.

8.6.3 Triples pitagóricos

HeuleindexHeule, Marijn J.H. y KullmannindexKullman, Oliver resolvieron el problema de los triples pitagóricos utilizando un solucionador SAT altamente optimizado. Había una diferencia significativa en la eficiencia entre encontrar una descomposición que no tenga triples pitagóricos (sólo se necesita una descomposición), y demostrar que todas las descomposiciones tienen un triple pitagórico (hay que comprobarlas todas). Demostrar que para todas las $S(n)$, $1 \leq n \leq 7824$, hay una descomposición sin triples llevó sólo un minuto de tiempo de cálculo, mientras que demostrar que cada descomposición de $S(7825)$ tiene un triple llevó unos dos días de tiempo de cálculo para un ordenador con 800 *cores* (procesadores) trabajando en paralelo, en total 40,000 horas de tiempo de cálculo.

El uso de ordenadores en matemáticas plantea naturalmente la pregunta: ¿Podemos fiarnos de una prueba generada por un ordenador? Por supuesto, incluso las pruebas matemáticas “ordinarias” pueden ser incorrectas (Sect. 4.7), pero nuestra experiencia con los frecuentes fallos informáticos, así como la opacidad de los grandes programas informáticos, nos hace más sensibles a los errores potenciales en las pruebas generadas por ordenador.

Una forma de aumentar la confianza en la corrección de una prueba generada por ordenador es utilizar dos o más programas, escritos independientemente por dos o más investigadores. Si los múltiples programas están escritos en diferentes lenguajes de programación y para diferentes ordenadores y sistemas operativos, se reduce la posibilidad de un error en el hardware y el software del ordenador.

El solucionador SAT de Heule y Kullmann escribió un registro de los pasos de la prueba para que pudiera examinarse su corrección. El registro era tan grande, 200 terabytes de dólares, que era imposible examinarlo directamente. Para ponerlo en perspectiva, 200 terabytes son 200,000 gigabytes, mientras que tu ordenador puede tener una memoria interna de 16 gigabytes y un disco de estado sólido de 128 gigabytes. En su lugar, escribieron un pequeño programa para verificar la exactitud de los datos del registro. Para asegurarse de que este programa era correcto, escribieron una demostración formal utilizando el asistente de demostración Coq, que apoya y comprueba el trabajo de los matemáticos sin automatizar totalmente el proceso de demostración.

8.6.4 Visión general del algoritmo DPLL

El primer algoritmo que se aprende para resolver SAT son las *tablas de verdad*. Dada una fórmula A en lógica proposicional con n átomos diferentes, hay 2^n interpretaciones ya que a cada átomo se le puede asignar independientemente T o F . Para cada interpretación es sencillo calcular el valor de verdad de A utilizando la definición de los operadores proposicionales. Sin embargo, comprobar 2^n interpretaciones es muy ineficiente incluso para n moderadamente grandes.

El algoritmo DPLL funciona asignando incrementalmente T o F a un átomo y luego intentando evaluar la fórmula. Por ejemplo, dado $A = p \wedge q \wedge \neg r$, si p se asigna F entonces A se evalúa a F , independientemente de las asignaciones a q y r , y no hay necesidad de realizar más evaluaciones. Del mismo modo, $A = p \vee q \vee \neg r$ se evalúa a T si p se asigna T , independientemente de las asignaciones a q y r .

La eficiencia de DPLL proviene de la propagación unitaria. Considere parte de la fórmula para Schur triples:

$$\begin{aligned} & (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge \\ & (p_1 \vee p_3 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge \\ & \dots \\ & (p_3 \vee p_4 \vee p_7) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge \\ & (p_3 \vee p_5 \vee p_8) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8). \end{aligned} \tag{8.4}$$

Supongamos que hemos asignado F a p_1, p_2 . La primera subfórmula se reduce a la fórmula unitaria formada por el único átomo p_3 . Si queremos que se cumpla la fórmula, debemos asignar T a p_3 y a todas las subfórmulas:

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3), (p_1 \vee p_3 \vee p_4), (p_3 \vee p_4 \vee p_7), (p_3 \vee p_5 \vee p_8),$$

se evalúan inmediatamente a T .

Como $\neg p_3$ se evalúa a F , cada subfórmula que contenga $\neg p_3$ sólo puede satisfacerse si a algún otro literal de la subfórmula se le asigna T . En $\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8$, a p_5 o p_8 se le debe asignar F para que $\neg p_5$ o $\neg p_8$ se evalúe como T .

Este análisis muestra que una vez p_1, p_2 se han asignado F , la fórmula de la Ec. 8.4 es satisfacible si y sólo si $(\neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_8)$ es satisfacible. Al realizar la propagación de p_3 en todas las subfórmulas de la Ec. 8.3, la fórmula se reduce a:

$$\begin{aligned} & (p_4 \vee p_5) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_7) \wedge \\ & (p_6 \vee p_7) \wedge (p_6 \vee p_8) \wedge (p_7 \vee p_8) \wedge \\ & (\neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_8). \end{aligned}$$

Una asignación más de F a p_4 resulta en una interpretación satisfactoria que hemos encontrado después de sólo tres asignaciones arbitrarias.

8.7 Los triples pitagóricos en las matemáticas babilónicas

Esta sección es una digresión de la teoría de Ramsey; se incluye para dar una idea de la rica teoría de los triples pitagóricos y para demostrar la profundidad de los conocimientos matemáticos en el mundo antiguo. Los triples pitagóricos eran conocidos en las matemáticas babilónicas desde al menos el año 1800 a.C.

Definición 8.5. Un triple pitagórico primitivo es un conjunto de tres enteros positivos a, b, c tales que $a^2 + b^2 = c^2$ y a, b, c no tienen ningún factor común mayor que 1.

Ejemplo 8.3. $\{3, 4, 5\}$ es un triple pitagórico primitivo pero $\{6, 8, 10\}$ es un triple pitagórico que no es primitivo ya que 2 es un factor común.

Una tablilla cuneiforme llamada *Plimpton 322* es uno de los primeros ejemplos de matemáticas babilónicas. Enumera quince triples pitagóricos primitivos dando a y c . La tabla 8.1 muestra cuatro de estos triples, junto con los valores calculados de b y otros valores que se discutirán más adelante. Los historiadores de las matemáticas han propuesto varias explicaciones sobre cómo se encontraron estos triples. Una explicación es que se utilizó la *fórmula de Euclides* para obtener los triples a partir de un par de números generadores.

Teorema 8.7 (Euclid). $\{a, b, c\}$ es triple pitagórico primitivo si y sólo si existen dos enteros positivos u, v , llamados números generadores, tales que:

1. $u > v$
2. no son los dos impares
3. no tienen un factor común mayor que 1
4. se dan las siguientes relaciones entre $\{a, b, c\}$ y u, v :

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2.$$

Demostración. Por cálculo se deduce inmediatamente que si a, b, c se puede expresar como se requiere en el punto 4 forman un triple pitagórico:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 \\ &= u^4 - 2(uv)^2 + v^4 + 4(uv)^2 \\ &= u^4 + 2(uv)^2 + v^4 \\ &= u^2 + v^2 = c^2. \end{aligned}$$

La prueba de la otra dirección es más complicada y se omite. □

Cuadro 8.1: Triples babilónicos de la tablilla *Plimpton 322*.

a	a_{factores}	b	b_{factores}	c	u	u_{factores}	v	v_{factores}
119	$7 \cdot 17$	120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	169	12	$2^2 \cdot 3$	5	5
4601	$43 \cdot 107$	4800	$2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$	6649	75	$3 \cdot 5^2$	32	2^5
12709	$71 \cdot 179$	13500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3$	18541	125	5^3	54	$2 \cdot 3^3$
65	$5 \cdot 13$	72	$2^3 \cdot 3^2$	97	9	3^2	4	2^2

Si es cierto que los babilonios utilizaban la fórmula de Euclides, la pregunta sigue en pie: ¿Cómo descubrieron los números generadores u, v ?

Cada fila de la Tabla 8.1 muestra $a_{factores}$ y $b_{factores}$, las factorizaciones de a y b , respectivamente, mostrando que no tienen factores comunes. Se invita al lector a comprobar que c no tiene factor común con a, b por lo que las triplas son primitivas. También se muestran los números generadores u, v y $u_{factores}, v_{factores}$. No sólo no tienen ningún factor común como requiere Thm. 8.7, sino que los únicos factores mayores que 1 en u y v son potencias de 2, 3, 5.

Definición 8.6. Un *triple babilónico* es un triple pitagórico primitivo tal que los únicos factores primos de u, v son 2, 3, 5.

La razón por la que los babilonios se limitaban a estos factores es que utilizaban el sistema numérico *sexagesimal* o de base $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ cuyos factores primos son 2, 3 y 5.

Para los lectores que no estén familiarizados con los sistemas numéricos no decimales, he aquí un breve resumen del concepto. El “número” 12345 es una abreviatura del número:

$$(1 \times 10^4) + (2 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (5 \times 10^0) .$$

Este sistema numérico se denomina sistema numérico *decimal* o de base 10. Hay diez dígitos 0, 1, 2, ..., 8, 9 para los coeficientes de las potencias, y las potencias están representadas por los lugares de los coeficientes con potencias que aumentan de derecha a izquierda.

El número también podría representarse en el sistema numérico binario o de base 2 mediante:

$$12345 = 8192 + 4096 + 32 + 16 + 8 + 1 = 2^{13} + 2^{12} + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0 = 11000000111001 .$$

La notación binaria utiliza dos dígitos 0, 1 para los coeficientes y las potencias de dos se indican mediante los lugares de los coeficientes.

Otro sistema numérico popular es el *hexadecimal* o sistema numérico de base 16 que se utiliza en informática. Para este sistema numérico necesitamos 16 “dígitos” y la convención es utilizar 0, 1, 2, ..., 8, 9, A, B, C, D, E, F.

El sistema numérico de base 60 no es tan desconocido como puede parecer, porque representamos el tiempo, las coordenadas geográficas y los ángulos en ese sistema. Nos sentimos cómodos realizando cálculos como (1hora40 minutos) más (1hora30 minutos) igual a (3horas10 minutos).

La tabla 8.2 muestra los valores de a, c que aparecen en la tabla en notación de base 60 donde $\langle d \rangle$ representa el d 'th “digit” para $0 \leq d < 60$. El lector puede comprobar que estos valores coinciden con los valores decimales indicados en la

Cuadro 8.2: Triples babilónicos en base 60

<i>a</i>	<i>c</i>
$\langle 1 \rangle \langle 59 \rangle$	$\langle 2 \rangle \langle 49 \rangle$
$\langle 1 \rangle \langle 16 \rangle \langle 41 \rangle$	$\langle 1 \rangle \langle 50 \rangle \langle 49 \rangle$
$\langle 3 \rangle \langle 31 \rangle \langle 49 \rangle$	$\langle 5 \rangle \langle 09 \rangle \langle 01 \rangle$
$\langle 1 \rangle \langle 05 \rangle$	$\langle 1 \rangle \langle 37 \rangle$

Tabla ref.t.babylonian, por ejemplo:

$$\begin{aligned} (3 \times 60^2) + (31 \times 60^1) + (49 \times 60^0) &= 12709 \\ (5 \times 60^2) + (9 \times 60^1) + (1 \times 60^0) &= 18541 \end{aligned}$$

Los babilonios no tenían símbolos distintos de 60 para los dígitos. En su lugar, utilizaban un sistema híbrido en el que los coeficientes se representaban con dos símbolos: uno para el coeficiente de las decenas y otro para el coeficiente de las unidades, y los lugares de los coeficientes indicaban las potencias de 60. Utilizando ♡ para el coeficiente de las decenas y ♦ para el coeficiente de las unidades, el número decimal $(38 \text{ veces } 60) + (16 \text{ veces } 60^0) = 2296$ se representaría como:

$$\begin{array}{ccccc} & & \diamond \diamond \diamond \diamond & & \diamond \diamond \\ \heartsuit \heartsuit \heartsuit & \diamond \diamond \diamond \diamond & & \heartsuit & \diamond \diamond \diamond \diamond . \end{array}$$

¿Cuál es la sorpresa?

El teorema de Frank P. Ramsey parecía un resultado menor en combinatoria. Sorprendentemente, el teorema fue la base de un campo de las matemáticas totalmente nuevo y desafiante, con muchos problemas abiertos. La naturaleza de la teoría de Ramsey también es sorprendente: si un conjunto es lo bastante grande, existen regularidades en sus subconjuntos.

Me introduje en la teoría de Ramsey gracias al artículo de Marijn J. H. Heule y Oliver Kullmann sobre los triples pitagóricos, cuya demostración guarda cierta similitud con la demostración del teorema de los cuatro colores: el uso de recursos informáticos masivos que sólo tiene éxito tras los avances teóricos. De ahí el título de su artículo: *La ciencia de la fuerza bruta*.

Los problemas en combinatoria piden valores numéricos específicos, por ejemplo, $R(n)$ debe ser un número entero positivo específico. Es sorprendente que los métodos probabilísticos hayan resultado tan fructíferos para obtener resultados en este campo.

Tendemos a pensar que los seres humanos son hoy más inteligentes que hace miles de años. Puede ser una sorpresa descubrir que hace cuatro mil años las ma-

temáticas babilónicas eran lo suficientemente avanzadas como para descubrir que $\{12709, 13500, 18541\}$ es un triple pitagórico.

Fuentes

Para una visión general de la teoría de Ramsey, véase [9], mientras que una presentación avanzada puede encontrarse en [20]. La sección sobre el método probabilístico se basa en [43, Ejemplo 4o] y [9, Capítulo 4]. Una base de datos de los números de Ramsey se puede encontrar en [34].

El método de demostración del teorema de los triples pitagóricos se explica en detalle en [23]. Véase [4] para una introducción a la lógica y a la resolución SAT. El archivo de mi solucionador SAT para la educación [5] contiene fórmulas para triples de Schur, gráficos de Ramsey y el problema de van der Waerden.

Sección 8.7 se basa en [60], [42]. El sistema numérico sexagesimal se describe en [63].

Capítulo 9

El problema de Langford

C. Dudley Langford se dio cuenta de que su hijo había ordenado los bloques de colores como se muestra en la Fig. 9.1. Hay un bloque entre los bloques rojos, dos bloques entre los bloques azules y tres bloques entre los bloques verdes.

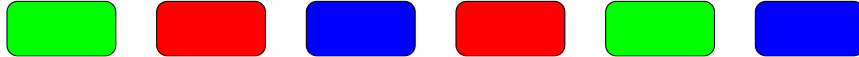


Fig. 9.1: Disposición de los bloques para el problema de Langford

Definición 9.1 (Problema de Langford $L(n)$). Dado el multiconjunto ¹ de números enteros positivos:

$$\{1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n\},$$

¿pueden ordenarse en una secuencia tal que para $1 \leq i \leq n$ haya i números entre las dos ocurrencias de i ?

Figura 9.1 muestra que 312132 es una solución para $L(3)$.

Sección 9.1 replantea el problema de Langford utilizando un formalismo matemático que facilita la resolución del problema. La sección 9.2 caracteriza los valores de n para los que $L(n)$ es resoluble y presenta dos pruebas del teorema. La primera, relativamente sencilla, utiliza la técnica del doble recuento: contar el mismo valor de dos formas distintas e igualar las fórmulas resultantes. La segunda prueba es una inducción inteligente, pero la "contabilidad" que implica requiere una cuidadosa atención a los detalles. Sección 9.3 resuelve la solución para $L(4)$.

9.1 El problema de Langford como un problema de cobertura

El problema de Langford se puede plantear utilizando una matriz. Para $L(3)$ hay seis columnas, una para cada posición en la que se pueden colocar los seis números. Hay una fila para cada posible colocación de uno de los números, es decir, las dos ocurrencias de k deben tener k números entre ellos. Hay cuatro colocaciones posibles de 1, tres de 2 y dos de 3:

¹Un *multiconjunto* o *bolsa* es como un conjunto excepto que puede haber más de una ocurrencia de un elemento.

	1	2	3	4	5	6
1	1		1			
2		1		1		
3			1		1	
4				1		1
5	2			2		
6		2			2	
7			2			2
8	3				3	
9		3				3

Para resolver el problema tenemos que seleccionar una fila para los 1 de la secuencia, una fila para los 2 y una fila para los 3, de tal forma que si apilamos estas filas unas sobre otras, ninguna columna contenga más de un número.

No es necesario considerar la fila 9 debido a la simetría: empezar por la fila 9 sólo da la inversa de la secuencia obtenida al empezar por la fila 8.

La fila 8 es la única que contiene 3's por lo que debe ser elegida y la secuencia es $3_ _ _ 3_$. Ya no se puede utilizar ninguna fila con números en las columnas 1 y 5, porque sólo se puede colocar un número en cada posición. Denotemos las filas permitidas y prohibidas por:

$$\bar{1}, 2, \bar{3}, 4, \bar{5}, \bar{6}, 7, 8.$$

La fila 7 es la única fila restante que contiene 2, por lo que debe elegirse y la secuencia es 3_2_32 . La eliminación de las filas que ya no se puede utilizar da:

$$\bar{1}, 2, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, 7, 8.$$

Eligiendo la única fila que queda, la fila 2, se obtiene la solución 312132:

	1	2	3	4	5	6
2		1		1		
7			2			2
8	3				3	

El análisis ha demostrado que ésta es la única solución, salvo la solución simétrica obtenida empezando por la fila 9.

9.2 ¿Para qué valores de N se puede resolver el problema de Langford?

Teorema 9.1. $L(n)$ tiene solución si y sólo si $n = 4k$ o $n = 4k + 3$.

Demostramos el sentido directo del teorema. La prueba 1 muestra que si $L(n)$ tiene solución entonces $n = 4k$ o $n = 4k + 3$. La prueba 2 muestra el contrapositivo: si $n = 4k + 1$ o $n = 4k + 2$ entonces $L(n)$ no tiene solución.

Demostración.

(1) Si la primera ocurrencia del número k está en la posición i_k , la segunda ocurrencia está en la posición $i_k + k + 1$. Por ejemplo, en 312132, la solución para $L(3)$, eligiendo $k = 2$ se obtiene $i_k = 3$ y $i_k + k + 1 = 3 + 2 + 1 = 6$.

S_n , la suma de las posiciones de todos los números, es:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n i_k + \sum_{k=1}^n (i_k + k + 1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n i_k + \sum_{k=1}^n (k + 1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n i_k + \frac{n(n+3)}{2}. \end{aligned}$$

Pero S_n es simplemente $1 + 2 + 3 + \dots + 2n$, así que:

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{2n(2n+1)}{2}.$$

Iguando las dos fórmulas para S_n se obtiene:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n i_k + \frac{n(n+3)}{2} &= \frac{2n(2n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^n i_k &= \frac{1}{2} \left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+3)}{2} \right) \\ &= \frac{3n^2 - n}{4}. \end{aligned}$$

El lado izquierdo es un entero ya que es la suma de enteros (las posiciones), por lo que el lado derecho también debe ser un entero. ¿Cuándo es $3n^3 - n$ divisible por 4? Al factorizar $3n^2 - n$ se obtiene $n(3n - 1)$.

Si n es múltiplo de 4, el producto es divisible por 4.

¿Cuándo $3n - 1$ es divisible por 4? Cualquier número entero n se puede expresar como $n = 4i + j$ para $j = 0, 1, 2, 3$. Si $3n - 1$ es divisible por 4, entonces también lo es $3(4i + j) - 1 = 12i + 3j - 1$. $12i$ es divisible por 4. Para $j = \{0, 1, 2, 3\}$, $3j - 1 = \{-1, 2, 5, 8\}$ es divisible por 4 si y sólo si $j = 3$, es decir, $n = 4i + 3$. \square

Para introducir la idea de la segunda prueba, considere cómo podría ser una solución para $n = 4$. En las tablas siguientes las posiciones de las apariciones de 4 son 1 y 6, y las posiciones de las apariciones de 2 son 5 y 8. En ambos casos, una posición es impar y la otra par. En ambos casos, una posición es impar y la otra par.

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
*					*		

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
				*			*

Sea $k = 2m$ un número *par*. Si i es la posición de la primera ocurrencia de k , entonces la posición de la segunda ocurrencia es $i + k + 1$. La suma de las posiciones es:

$$i + (i + k + 1) = 2i + 2m + 1 = 2(i + m) + 1,$$

que es un número impar. Para que la suma de dos números sea impar, uno debe ser impar y el otro par.

Comprobemos ahora las posiciones de los números impares. Las posiciones de las apariciones de 1 son 2 y 4, ambos números pares, y las posiciones de las apariciones de 3 son 3 y 7, ambos números impares.

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
	*		*				

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
		*				*	

Sea $k = 2m + 1$ un número *impar*. La suma de las posiciones es:

$$i + (i + k + 1) = 2i + 2m + 1 + 1 = 2(i + m + 1),$$

que es un número par. Para que la suma de dos números sea par, ambos deben ser impares o ambos pares.

Las posiciones $1, 2, \dots, 2n - 1, 2n$ contienen igual número de posiciones pares e impares. Las dos apariciones de un número en una fila “cubren” dos posiciones. Cuando el conjunto de filas cubre todas las posiciones, deben cubrir igual número de posiciones pares e impares. Definimos la *paridad* de un conjunto de filas como la diferencia entre el número de posiciones pares e impares cubiertas. Inicialmente, la paridad es cero, y si el problema tiene una solución, el conjunto de filas en la solución también tiene paridad cero.

Cuando se colocan dos ocurrencias de un número par, cubren una posición par y una impar, por lo que la paridad sigue siendo la misma:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
-1					+1		

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
				-1			+1

Cuando se colocan dos ocurrencias de un número impar, la paridad se convierte en $+2$ o -2 , por lo que debemos ser capaces de asociar este par con un par de ocurrencias de *otro* número impar que se coloquen en posiciones que equilibren la paridad:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
	+1		+1				

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
		-1				-1	

Hemos demostrado que puede haber una solución al problema de Langford si y sólo si ¡hay un número par de números impares en $\{1, \dots, n\}$! El teorema afirma que si esto es cierto entonces o $n = 4k$ o $n = 4k - 1$, y si no entonces o $n = 4k - 2$ o $4k - 3$.

Demostración.

(2) La prueba es por inducción. Hay cuatro casos base:

- $n = 4k - 3 = 1$. En $\{1\}$ hay un número impar de números impares y no hay solución.
- $n = 4k - 2 = 2$. En $\{1, 2\}$ hay un número impar de números impares y no hay solución.
- $n = 4k - 1 = 3$. En $\{1, 2, 3\}$ hay un número par de números impares y hemos visto que hay solución.
- $n = 4k - 0$. En $\{1, 2, 3, 4\}$ hay un número par de números impares y Sect. 9.3 da una solución.

La hipótesis inductiva es que el teorema es cierto para $\{1, \dots, 4k - j\}$, $k \geq 1$, $0 \leq j \leq 3$, y demostraremos que es cierto para $n = 4(k + 1) - j$.

- Añadir $4k + 1 = 4(k + 1) - 3$ a $\{1, \dots, 4k\}$. Por la hipótesis inductiva para $4k = 4k - 0$ hay un número par de impares. $4(k + 1) - 3$ es impar por lo que ahora hay un número impar de números impares y no hay solución.
- Añadir $4k + 2 = 4(k + 1) - 2$ a $\{1, \dots, 4k + 1\}$. Por la hipótesis inductiva para $4k + 1 = 4(k + 1) - 3$ hay un número impar de números impares. $4(k + 1) - 2$ es par por lo que sigue habiendo un número impar de números impares y no hay solución.
- Añadir $4k + 3 = 4(k + 1) - 1$ a $\{1, \dots, 4k + 2\}$. Por la hipótesis inductiva para $4k + 2 = 4(k + 1) - 2$ hay un número impar de números impares. $4(k + 1) - 1$ es impar por lo que hay un número par de números impares y es probable que exista una solución.
- Añadir $4k + 4 = 4(k + 1) - 0$ a $\{1, 2, \dots, 4k + 3\}$. Por la hipótesis inductiva para $4k + 3 = 4(k + 1) - 1$ hay un número par de impares. $4(k + 1) - 0$ es par por lo que hay un número par de números impares y es probable que exista una solución.

□

9.3 Solución para $L(4)$

Aquí está la matriz para $L(4)$. Intenta encontrar la solución tú mismo.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1		1					
2		1		1				
3			1		1			
4				1		1		
5					1		1	
6						1		1
7	2			2				
8		2			2			
9			2			2		
10				2			2	
11					2			2
12	3				3			
13		3				3		
14			3				3	
15				3				3
16	4					4		
17		4					4	
18			4					4

Por simetría, la fila 18 puede eliminarse.

Elige la fila 16 y la secuencia es 4₁₁₁₁₁4₁₁₁. Cualquier fila con un elemento en la posición 1 o en la posición 6 ya no puede formar parte de la solución.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Elige la fila 14 y la secuencia es 4₁3₁₁₁43₁.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Elige la fila 8. La secuencia es 423₁243₁.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Todas las opciones de 1 han sido eliminadas, así que debemos retroceder.

En lugar de la fila 8 elija la fila 11 y la secuencia será 4₁3₁2432.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Elige la fila 2 y tendremos una solución 41312432.

Sigue retrocediendo para ver si hay otra solución.

En lugar de la fila 14 elija la fila 15 y la secuencia será 4₁₁₁3₁4₁3.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Se debe elegir la fila 8 y la secuencia es 42₁324₁3.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Todas las opciones de 1 han sido eliminadas, así que de nuevo retrocedemos.

En lugar de la fila 16 elija la fila 17 y la secuencia será ₁4₁₁₁₁₁4₁.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Elija la fila 15 y la secuencia será $\square 4 \square 3 \square \square 43$.

1, ~~2~~, 3, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~7~~, 8, 9, ~~10~~, ~~11~~, ~~12~~, ~~13~~, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17

Se debe elegir la fila 9 y la secuencia es $\square 423 \square 243$.

1, ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~7~~, 8, 9, ~~10~~, ~~11~~, ~~12~~, ~~13~~, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17

Todas las opciones de 1 han sido eliminadas. Podemos retroceder una última vez.

En lugar de la fila 15 elija la fila 12 y la secuencia será $34 \square \square 3 \square 4$.

~~1~~, ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~7~~, 8, 9, ~~10~~, ~~11~~, 12, ~~13~~, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17

De nuevo, se han eliminado todas las opciones de 1.

Por lo tanto, la única solución es 41312432.

Cuál es la sorpresa?

La fuente de inspiración de un teorema matemático puede ser sorprendente. Langford observó un patrón en los bloques de colores de su hijo que dio lugar al interesante Thm. 9.1. Los estudiantes también deben ser introducidos al hecho de que un teorema puede tener muchas pruebas completamente diferentes.

Fuentes

Este capítulo se basa en [35]. [12] muestra cómo encontrar una solución para $n = 4k$ y $n = 4k + 3$.

Capítulo 10

Los axiomas del origami

El origami, arte del plegado de papel, se desarrolló hace varios siglos en Japón y hoy cuenta con seguidores en todo el mundo. A finales del siglo XX se desarrolló la teoría matemática del origami. Su fundamento es un conjunto de siete axiomas, los *axiomas Huzita-Hatori*, llamados así por Humiaki Huzita, quien formalizó los primeros seis axiomas, y Koshiro Hatori, quien encontró el séptimo. Jacques Justin publicó los siete axiomas varios años antes que Huzita y Hatori, y Margherita P. Beloch formuló el sexto axioma en 1936. No obstante, los axiomas se conocen como axiomas de Huzita-Hatori.

En una secuencia de tres capítulos exploraremos las matemáticas del origami. En este capítulo se presentan los axiomas, en el capítulo 11 se relaciona el origami con las raíces de los polinomios y en el capítulo 12 se muestra que las construcciones con origami pueden resolver problemas que son imposibles utilizando una regla y un compás.

Este capítulo contiene una sección para cada uno de los siete axiomas. Tras el enunciado de un axioma y un diagrama del pliegue que especifica, se desarrollan las ecuaciones del pliegue y los puntos de intersección mediante geometría analítica. Un pliegue también puede definirse como un "lugar geométrico", el conjunto de todos los puntos que satisfacen alguna propiedad. El término pliegue proviene de la operación de origami de doblar un trozo de papel, pero aquí se utiliza para referirse a la línea geométrica que se crearía al doblar el papel.

Los pliegues dan lugar a *reflexiones*. Dado un punto p , su reflexión alrededor de un pliegue l da como resultado un punto p' tal que l es la mediatriz del segmento de recta $\overline{pp'}$ (Fig. 10.1).

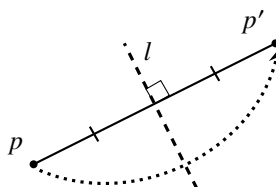


Fig. 10.1: El pliegue es la mediatriz de la recta que une un punto y su reflexión

10.1 Axioma 1

Axioma 10.1. Dados dos puntos distintos $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, existe un único pliegue l que pasa por ambos (Fig. 10.2).

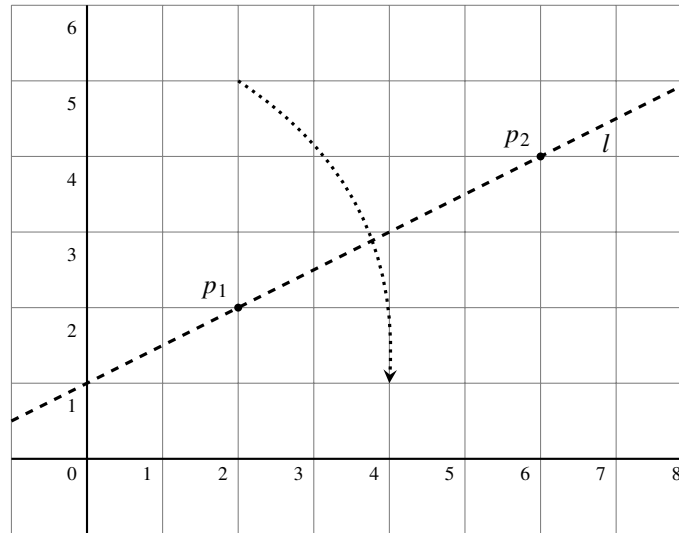


Fig. 10.2: Axioma 1

Derivación de la ecuación del pliegue: La ecuación del pliegue l se obtiene a partir de las coordenadas de p_1 y p_2 . La pendiente es el cociente de las diferencias de las coordenadas y el intercepto se obtiene de p_1 :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad (10.1)$$

Ejemplo 10.1. Sea $p_1 = (2, 2)$, $p_2 = (6, 4)$. La ecuación de l es:

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{4 - 2}{6 - 2}(x - 2) \\ y &= \frac{1}{2}x + 1. \end{aligned}$$

10.2 Axioma 2

Axioma 10.2. Dados dos puntos distintos $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, existe un pliegue único l que sitúa p_1 en p_2 (Fig. 10.3).

El pliegue es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de p_1 y p_2 .

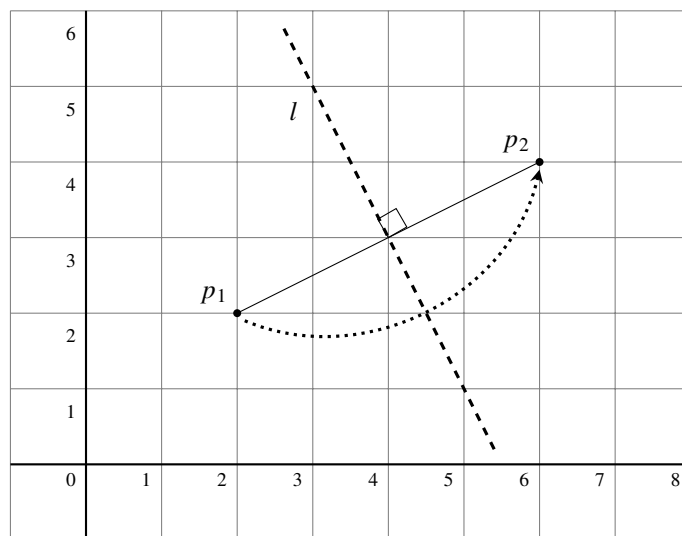


Fig. 10.3: *Axioma 2*

Derivación de la ecuación del pliegue: El pliegue l es la mediatriz de $\overline{p_1p_2}$. Su pendiente es el recíproco negativo de la pendiente de la recta que une p_1 y p_2 . l pasa por el punto medio entre los puntos:

$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right). \quad (10.2)$$

Ejemplo 10.2. Sea $p_1 = (2, 2)$, $p_2 = (6, 4)$. La ecuación de l es:

$$\begin{aligned} y - \left(\frac{2+4}{2} \right) &= -\frac{6-2}{4-2} \left(x - \left(\frac{2+6}{2} \right) \right) \\ y &= -2x + 11. \end{aligned}$$

10.3 Axioma 3

Axioma 10.3. Dadas dos rectas l_1, l_2 , existe un pliegue l que coloca l_1 sobre l_2 (Fig. 10.4).

El pliegue es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de l_1 y l_2 , donde la distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento de recta que pasa por el punto y es perpendicular a la recta. Utilizando triángulos congruentes es fácil demostrar que el pliegue es bisectriz del ángulo formado por l_1 y l_2 .

Derivación de la ecuación del pliegue:

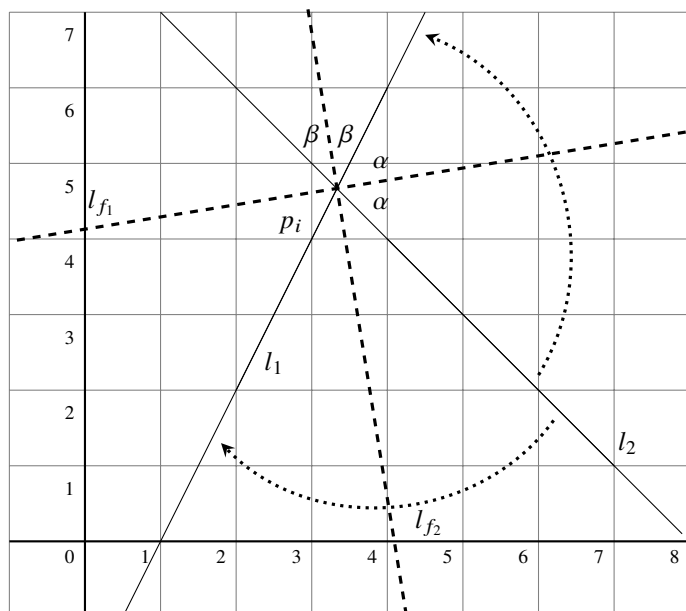


Fig. 10.4: Axioma 3

l_1, l_2 son paralelas: Sea l_1 $y = mx + b_1$ y sea l_2 $y = mx + b_2$. El pliegue es la recta paralela a l_1 y l_2 que está a mitad de camino entre ellas:

$$y = mx + \frac{b_1 + b_2}{2}.$$

l_1, l_2 intersectar: Sea l_1 $y = m_1x + b_1$ y sea l_2 $y = m_2x + b_2$. $p_i = (x_i, y_i)$, el punto de intersección de las dos rectas, es:

$$\begin{aligned} m_1x_i + b_1 &= m_2x_i + b_2 \\ x_i &= \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \\ y_i &= m_1x_i + b_1. \end{aligned}$$

Ejemplo 10.3. Sea l_1 $y = 2x - 2$ y sea l_2 $y = -x + 8$. Entonces $p_i = (x_i, y_i)$ es:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{8 - (-2)}{2 - (-1)} = \frac{10}{3} \approx 3,33 \\ y_i &= 2 \cdot \frac{10}{3} - 2 = \frac{14}{3} \approx 4,67. \end{aligned}$$

El pliegue es la bisectriz del ángulo formado por l_1 y l_2 en su punto de intersección. Hay dos pliegues posibles ya que hay dos pares de ángulos verticales. Hay que

determinar las pendientes de las bisectrices de los ángulos. Si el ángulo de la recta l_1 respecto al eje x es θ_1 y el ángulo de la recta l_2 respecto al eje x es θ_2 , entonces el pliegue es la recta que forma un ángulo de $\theta_b = (\theta_1 + \theta_2)/2$ respecto al eje x .

Sea $m_1 = \tan \theta_1, m_2 = \tan \theta_2$. Por Thm. A.9, m_s , la pendiente de la recta que hace un ángulo de $\theta_1 + \theta_2$ respecto del eje x , es:

$$m_s = \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}.$$

Por Thm. A.10, m_b , la pendiente de la bisectriz del ángulo, es:

$$m_b = \tan \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2(\theta_1 + \theta_2)}}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + m_s^2}}{m_s}.$$

Ejemplo 10.4. Para $y = 2x - 2$ y $y = -x + 8$, la pendiente de la bisectriz del ángulo es:

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{2 + (-1)}{1 - (2 \cdot -1)} = \frac{1}{3} \\ m_b &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + (1/3)^2}}{1/3} = -3 \pm \sqrt{10} \approx -6,16, 0,162. \end{aligned}$$

Derivemos la ecuación del pliegue l_{f_1} con la pendiente positiva. Del Ejemplo 10.3, las coordenadas de la intersección de las dos rectas son $(10/3, 14/3)$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{14}{3} &= (-3 + \sqrt{10}) \cdot \frac{10}{3} + b_i \\ b_i &= \frac{44 - 10\sqrt{10}}{3} \\ y &= (-3 + \sqrt{10})x + \frac{44 - 10\sqrt{10}}{3} \approx 0,162x + 4,13. \end{aligned}$$

10.4 Axioma 4

Axioma 10.4. Dado un punto p_1 y una recta l_1 , existe un único pliegue l perpendicular a l_1 que pasa por el punto p_1 (Fig. 10.5).

El pliegue es el lugar geométrico de todos los puntos de la recta perpendicular a l_1 que pasa por p_1 .

Derivación de la ecuación del pliegue: Sea l_1 $y = m_1x + b_1$ y sea $p_1 = (x_1, y_1)$. l es perpendicular a l_1 por lo que su pendiente es $-(1/m_1)$. Como pasa por p_1 podemos

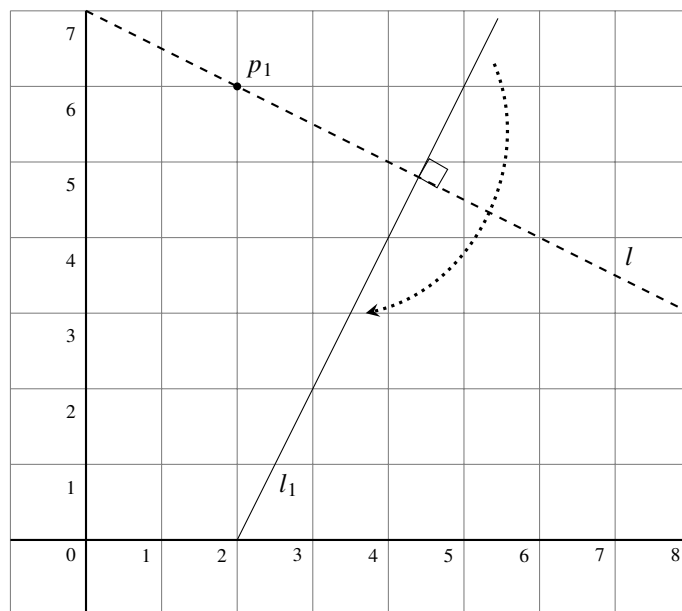


Fig. 10.5: Axioma 4

calcular el intercepto b y escribir su ecuación:

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{m}x_1 + b \\ b &= \frac{(my_1 + x_1)}{m} \\ y &= -\frac{1}{m}x + \frac{(my_1 + x_1)}{m}. \end{aligned}$$

Ejemplo 10.5. Sea $p_1 = (2, 6)$ y $l_1: y = 2x - 4$. La ecuación del pliegue l es:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{2 \cdot 6 + 2}{2} = -\frac{1}{2}x + 7.$$

10.5 Axioma 5

Axioma 10.5. Dados dos puntos p_1, p_2 y una recta l_1 , existe un pliegue l que sitúa p_1 en l_1 y pasa por p_2 (Fig. 10.6).

Como el pliegue pasa por p_2 y p_2 está en la mediatriz de $\overline{p_1 p'_1}$, el lugar geométrico de la reflexión de p_1 es la circunferencia centrada en p_2 de radio $\overline{p_1 p_2}$. El pliegue se construye de modo que la reflexión p'_1 esté sobre la recta dada l_1 .

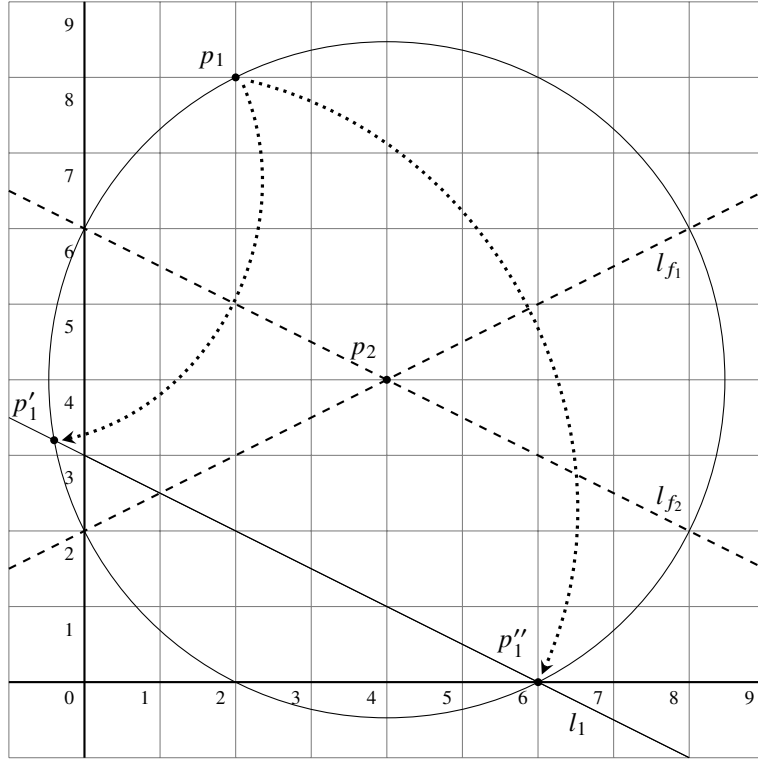


Fig. 10.6: *Axioma 5*

Derivación de las ecuaciones de los pliegues: Sea l_1 y $y = m_1x + b_1$ y sean $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$. La ecuación de la circunferencia centrada en p_2 con radio $\overline{p_1p_2}$ es:

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2, \quad \text{where} \\ r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Sustituyendo la ecuación de l_1 en la ecuación del círculo se obtiene:

$$(x - x_2)^2 + ((m_1x + b_1) - y_2)^2 = r^2 \\ (x - x_2)^2 + (m_1x + (b_1 - y_2))^2 = r^2,$$

y obtenemos una ecuación cuadrática para las coordenadas x de las posibles intersecciones:

$$x^2(1 + m_1^2) + 2(-x_2 + m_1(b - y_2))x + (x_2^2 + (b_1^2 - 2b_1y_2 + y_2^2) - r^2) = 0. \quad (10.3)$$

Como una ecuación cuadrática tiene a lo sumo dos soluciones, para un par dado de puntos y una recta puede haber cero, uno o dos pliegues. A partir de las soluciones x'_1, x''_1 podemos calcular y'_1, y''_1 de $y = m_1x + b_1$. Los puntos reflejados son $p'_1 = (x'_1, y'_1)$, $p''_1 = (x''_1, y''_1)$.

Ejemplo 10.6. Sea $p_1 = (2, 8)$, $p_2 = (4, 4)$ y sea l_1 $y = -\frac{1}{2}x + 3$. La ecuación de la circunferencia es $(x-4)^2 + (y-4)^2 = (4-2)^2 + (4-8)^2 = 20$. Sustituye la ecuación de la recta en la ecuación de la circunferencia para obtener una ecuación cuadrática de las coordenadas x de las intersecciones (o utiliza Ec. 10.3):

$$\begin{aligned}(x-4)^2 + \left(\left(-\frac{1}{2}x + 3\right) - 4\right)^2 &= 20 \\(x-4)^2 + (-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 - 20 &= 0 \\5x^2 - 28x - 12 &= 0 \\(5x+2)(x-6) &= 0.\end{aligned}$$

Los dos puntos de intersección son:

$$p'_1 = (-2/5, 16/5) = (-0,4, 3,2), \quad p''_1 = (6, 0).$$

Los pliegues serán las bisectrices perpendiculares de $\overline{p_1 p'_1}$ y $\overline{p_1 p''_1}$.

Ejemplo 10.7. Para $p_1 = (2, 8)$ y $p'_1 = (-2/5, 16/5)$ la ecuación de l_{f_1} es:

$$\begin{aligned}y - \frac{8 + (16/5)}{2} &= -\frac{(-2/5) - 2}{(16/5) - 8} \left(x - \frac{2 + (-2/5)}{2}\right) \\y &= -\frac{1}{2}x + 6.\end{aligned}$$

Ejemplo 10.8. Para $p_1 = (2, 8)$ y $p''_1 = (6, 0)$ la ecuación de l_{f_2} es:

$$\begin{aligned}y - \frac{8+0}{2} &= -\frac{6-2}{0-8} \left(x - \frac{2+6}{2}\right) \\y &= \frac{1}{2}x + 2.\end{aligned}$$

10.6 Axioma 6

Axioma 10.6. Dados dos puntos p_1, p_2 y dos rectas l_1, l_2 , existe un pliegue l que sitúa p_1 en l_1 y sitúa p_2 en l_2 (Fig. 10.7).

Un pliegue que sitúa p_i sobre l_i es una recta l_f tal que la distancia de p_i a l_f es igual a la distancia de su reflexión p'_i a l_f . El lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto p_i y una recta l_i es una *parábola*. A p_i se le llama *foco* de

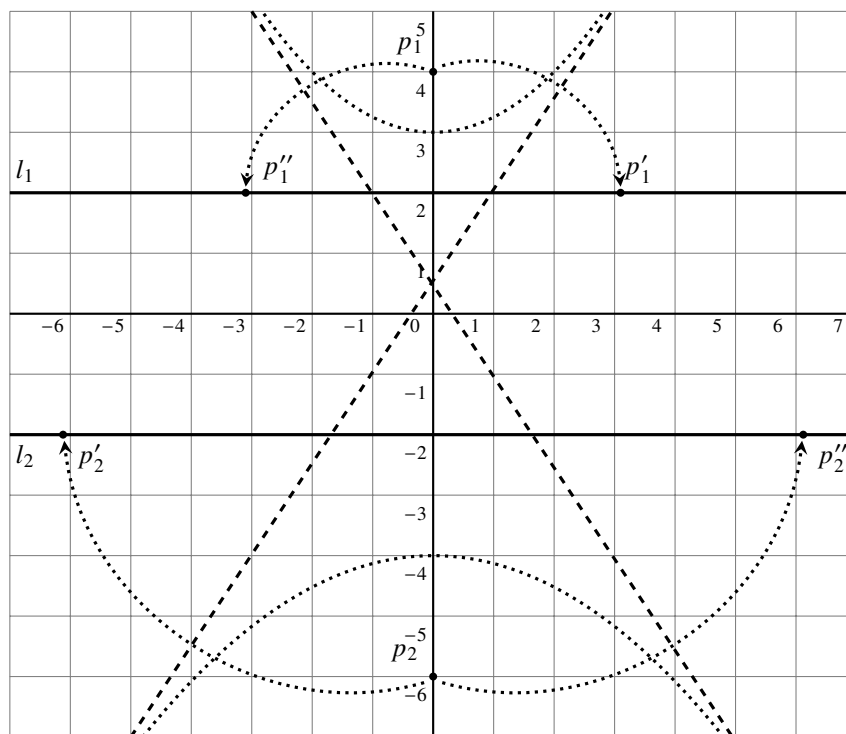


Fig. 10.7: *Axioma 6*

una parábola y a l_1 *directriz* de una parábola. Un pliegue es cualquier recta tangente a la parábola (Sect. 10.6.3).

Para que un pliegue sitúe simultáneamente p_1 en l_1 y p_2 en l_2 , debe ser una tangente común a las dos parábolas. Puede haber cero, una, dos o tres tangentes comunes (Figs. 10.8, 10.9, 10.10, 10.11).

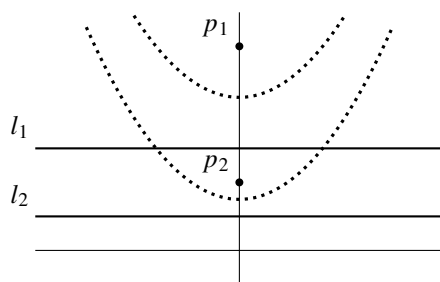


Fig. 10.8: *No common tangents*

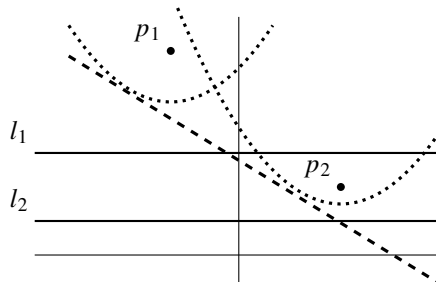


Fig. 10.9: *Una tangente común*

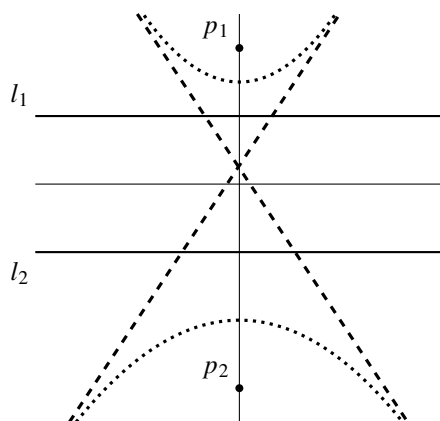


Fig. 10.10: *Dos tangentes comunes*

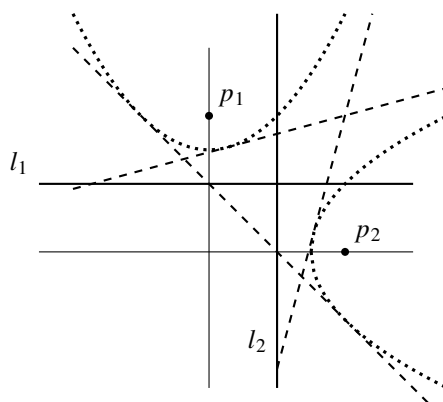


Fig. 10.11: *Tres tangentes comunes*

La fórmula para una parábola arbitraria es bastante compleja, por lo que limitamos la presentación a las parábolas cuyo eje de simetría es el eje x o y .

10.6.1 Derivación de la ecuación de un pliegue

Sea $(0, f)$ el foco de una parábola con directriz $y = d$. Definir $p = f - d$, la longitud con signo del segmento de recta entre el foco y la directriz.¹ Si el vértice de la parábola está en el eje x la ecuación de la parábola es $y = x^2/2p$. Para mover la parábola arriba o abajo del eje y de forma que su vértice esté en $(0, h)$, se añade h a la ecuación de la parábola (Fig. 10.12):

$$y = \frac{x^2}{2p} + h.$$

Definir $a = 2ph$ para que la ecuación de la parábola sea:

$$y = \frac{x^2}{2p} + \frac{a}{2p} \quad (10.4a)$$

$$x^2 - 2py + a = 0. \quad (10.4b)$$

La ecuación de la parábola de la Fig. 10.12 es $x^2 - 12y + 12 = 0$.

Sustituir la ecuación de una línea *arbitraria* $y = mx + b$ en la Ec. 10.4b para obtener una ecuación de los puntos de intersección de la recta y la parábola:

$$\begin{aligned} x^2 - 2p(mx + b) + a &= 0 \\ x^2 + (-2mp)x + (-2pb + a) &= 0. \end{aligned}$$

¹Hemos estado utilizando la notación p_i para los puntos; el uso de p aquí puede ser confuso, pero es la notación estándar. El nombre formal de p es la mitad del *latus rectum*.

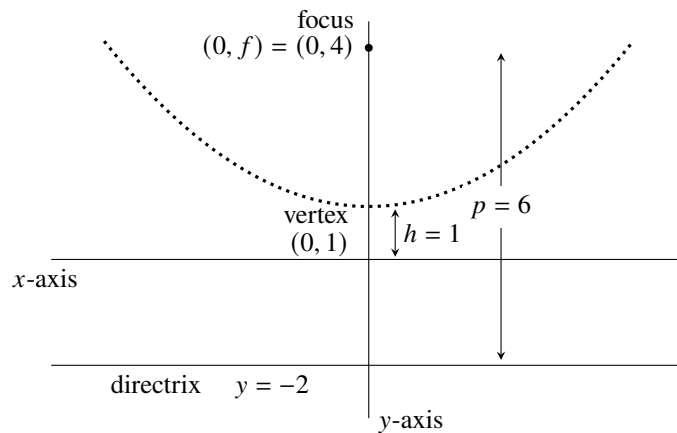


Fig. 10.12: Los elementos de la definición de una parábola

La recta será tangente a la parábola si y sólo si esta ecuación cuadrática tiene *exactamente una solución* si y sólo si su discriminante es cero:

$$(-2mp)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2pb + a) = 0 \quad (10.5a)$$

$$m^2 p^2 + 2pb - a = 0. \quad (10.5b)$$

Se trata de una ecuación con variables m, b para las tangentes a la parábola. Para obtener las tangentes comunes a ambas parábolas debemos resolver simultáneamente las ecuaciones de las dos parábolas.

Ejemplo 10.9.

Parábola 1: Foco $(0, 4)$, directriz $y = 2$, vértice $(0, 3)$.

$p = 2$, $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. La ecuación de la parábola es:

$$x^2 - 4y + 12 = 0.$$

Sustituyendo p y a en la Ec. 10.5b y simplificando da:

$$m^2 + b - 3 = 0.$$

Parábola 2: Foco $(0, -4)$, directriz $y = -2$, vértice $(0, -3)$.

$p = -2$, $a = 2 \cdot -2 \cdot -3 = 12$. La ecuación de la parábola es:

$$x^2 + 4y + 12 = 0.$$

Sustituyendo p y a en la Ec. 10.5b y simplificando da:

$$m^2 - b - 3 = 0.$$

Las soluciones de las dos ecuaciones:

$$m^2 + b - 3 = 0$$

$$m^2 - b - 3 = 0$$

son $m = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1,73$ y $b = 0$. Hay dos tangentes comunes:

$$y = \sqrt{3}x, \quad y = -\sqrt{3}x.$$

Ejemplo 10.10.

Parábola 1: Sin cambios.

Parábola 2: Focus $(0, -6)$, directrix $y = -2$, vertex $(0, -4)$.

$p = -4$, $a = 2 \cdot -4 \cdot -4 = 32$. La ecuación de la parábola es:

$$x^2 + 8y + 32 = 0.$$

Sustituyendo p y a en la Ec. 10.5b y simplificando da:

$$2m^2 - b - 4 = 0.$$

Las soluciones de las dos ecuaciones:

$$m^2 + b - 3 = 0$$

$$2m^2 - b - 4 = 0$$

son $m = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \approx \pm 1,53$ y $b = \frac{2}{3}$. Hay dos tangentes comunes:

$$y = \sqrt{\frac{7}{3}}x + \frac{2}{3}, \quad y = -\sqrt{\frac{7}{3}}x + \frac{2}{3}.$$

Ejemplo 10.11.

Definamos ahora una parábola cuyo eje de simetría es el eje x .

Parábola 1: Sin cambios.

Parábola 2: Foco $(4, 0)$, directrix $x = 2$, vértice $(3, 0)$.

$p = 2$, $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. La ecuación de la parábola es:

$$y^2 - 4x + 12 = 0. \quad (10.6)$$

Esta es una ecuación con x y y^2 en lugar de x^2 e y , por lo que la Ec. 10.5b no se puede utilizar y debemos realizar la derivación de nuevo.

Sustituir la ecuación de una recta en Eq. 10.6:

$$(mx + b)^2 - 4x + 12 = 0$$

$$m^2x^2 + (2mb - 4)x + (b^2 + 12) = 0.$$

Establece el discriminante igual a cero y simplifica:

$$\begin{aligned}(2mb - 4)^2 - 4m^2(b^2 + 12) &= 0 \\ -3m^2 - mb + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Si intentamos resolver las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}m^2 + b - 3 &= 0 \\ -3m^2 - mb + 1 &= 0,\end{aligned}$$

obtenemos una ecuación *cúbica* con variable m :

$$m^3 - 3m^2 - 3m + 1 = 0. \quad (10.7)$$

Como una ecuación cúbica tiene como mínimo una y como máximo tres soluciones reales, puede haber una, dos o tres tangentes comunes.

La fórmula para resolver ecuaciones cúbicas generales es bastante complicada, así que he utilizado una calculadora de Internet y he obtenido las tres soluciones:

$$m = 3,73, m = -1, m = 0,27.$$

A partir de la forma de la Ec. 10.7 podríamos suponer que $m = 1$ o $m = -1$ es una solución:

$$\begin{aligned}1^3 - 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 &= -4 \\ (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Dividir Ec. 10.7 por $m - (-1) = m + 1$ para obtener la ecuación cuadrática $m^2 - 4m + 1$ cuyas raíces son las otras dos soluciones de la ecuación cúbica $m = 2 \pm \sqrt{3} \approx 3,73, 0,27$.

10.6.2 Derivación de las ecuaciones de las reflexiones

Derivamos la posición de la reflexión $p'_1 = (x'_1, y'_1)$ de $p_1 = (x_1, y_1)$ alrededor de una recta tangente l_t cuya ecuación es $y = m_t x + b_t$. Primero, hallar la recta l_p de ecuación $y = m_p x + b_p$ que es perpendicular a l_t y pasa por p_1 :

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{m_t}x + b_p \\ y_1 &= -\frac{1}{m_t}x_1 + b_p \\ y &= \frac{-x}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t}\right).\end{aligned}$$

A continuación hallamos la intersección $p_t = (x_t, y_t)$ de l_t y l_p :

$$\begin{aligned} m_t x_t + b_t &= \frac{-x_t}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t} \right) \\ x_t &= \frac{\left(y_1 + \frac{x_1}{m_t} - b_t \right)}{\left(m_t + \frac{1}{m_t} \right)} \\ y_t &= m_t x_t + b_t . \end{aligned}$$

p_t es el punto medio entre p_1 y p'_1 :

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{x_1 + x'_1}{2}, & x'_1 &= 2x_t - x_1, \\ y_t &= \frac{y_1 + y'_1}{2}, & y'_1 &= 2y_t - y_1. \end{aligned}$$

Ejemplo 10.12. Sea l_t y $y = \sqrt{3}x + 0$ y sea $p_1 = (0, 4)$:

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\left(4 + \frac{0}{\sqrt{3}} - 0 \right)}{\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)} = \sqrt{3} \\ y_t &= \sqrt{3}\sqrt{3} + 0 = 3 \\ x'_1 &= 2x_t - x_1 = 2\sqrt{3} \approx 3,46 \\ y'_1 &= 2y_t - y_1 = 2. \end{aligned}$$

10.6.3 Tangentes a una parábola

Queremos demostrar que los pliegues del axioma 6 son tangentes a las parábolas. La figura 10.13 muestra cinco puntos $p_i, i = 1, \dots, 5$, cada punto p_i a una distancia a_i tanto del foco como de la directriz. Se trazan rectas perpendiculares desde p_i a la directriz y se denotan las intersecciones de estas rectas con la directriz por p'_i . Por Axioma 2 existen pliegues l_i que pasan por p_i y sitúan p en la directriz. Los puntos p'_i son las reflexiones de p alrededor de los pliegues. La figura muestra el pliegue l_1 que atraviesa p_1 y la reflexión p'_1 .

Teorema 10.1. *Los pliegues del axioma 6 son las tangentes a las parábolas que son los loci de los puntos equidistantes a los puntos p_1, p_2 y l_1, l_2 , respectivamente.*

Demostración. En la Fig. 10.14, el foco es p y la directriz es d . p' es un punto de la directriz y l es el pliegue que refleja p en p' . Sea s la intersección de $\overline{pp'}$ y l . Entonces $\overline{ps} = \overline{p's} = a$ y $l \perp \overline{pp'}$ ya que l es la mediatriz de $\overline{pp'}$.

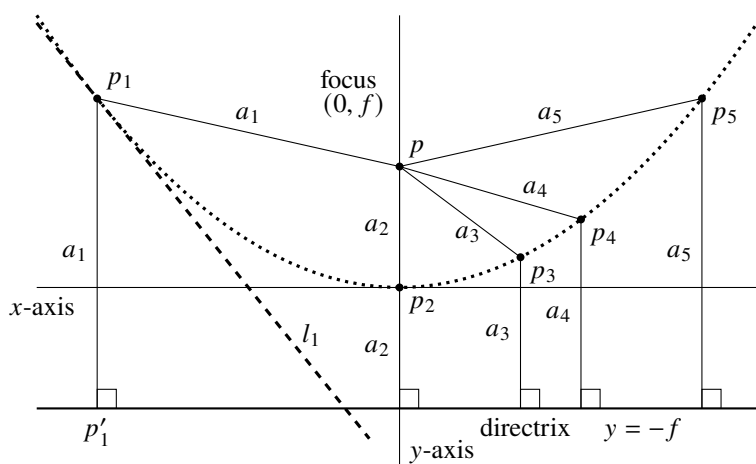


Fig. 10.13: *La tangente como lugar geométrico*

Sea r la intersección de la recta perpendicular a d que pasa por p' y el pliegue l . Entonces $\triangle psr \cong \triangle p'sr$ por lado-ángulo-lado. Se deduce que $\overline{pr} = \overline{p'r} = b$ por lo que r es un punto de la parábola. Elegimos un punto p'' sobre la directriz que sea distinto de p' y suponemos que el pliegue l también refleja p sobre p'' . Sea q la intersección de la perpendicular a d que pasa por p'' y el pliegue l . $\triangle psq \cong \triangle p'sq$ por lo que $\overline{pq} = \overline{p'q} = c$. Denotemos $\overline{qp''} = e$. Si q es un punto de la parábola entonces $e = \overline{qp''} = \overline{qp} = c$, pero c es la hipotenusa del triángulo rectángulo $\triangle qp''p'$ y no es posible que la hipotenusa sea igual a uno de los otros lados del triángulo

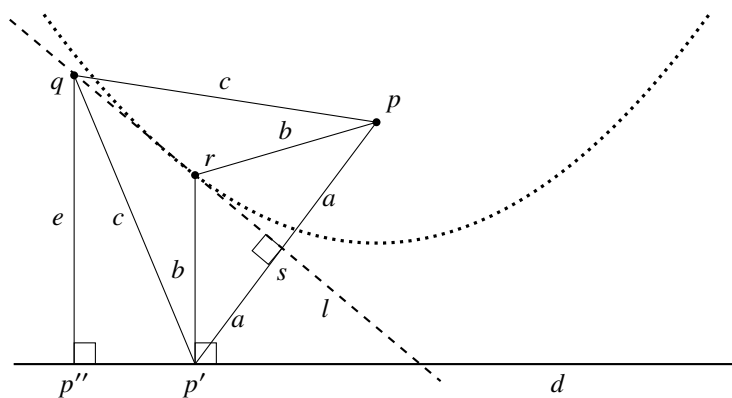


Fig. 10.14: *La prueba de que el pliegue es una tangente*

rectángulo. Por lo tanto el pliegue l sólo tiene una intersección con la parábola y debe ser una tangente. \square

10.7 Axioma 7

Axioma 10.7. Dado un punto p_1 y dos rectas l_1 y l_2 , existe un pliegue l que sitúa p_1 sobre l_1 y es perpendicular a l_2 (Fig. 10.15).

El pliegue es el lugar geométrico de todos los puntos de la recta perpendicular a l_2 y equidistante de p_1 y p'_1 , la reflexión de p_1 sobre l_1 .

Derivación de la ecuación del pliegue: Sea $p_1 = (x_1, y_1)$, sea l_1 $y = m_1x + b_1$ y sea l_2 $y = m_2x + b_2$. Sea l_p la recta que contiene a $\overline{p_1p'_1}$. Como $l \perp l_2$, $l_p \perp l$, resulta que $l_p \parallel l_2$ y la ecuación de l_p es $y = m_2x + b_p$.

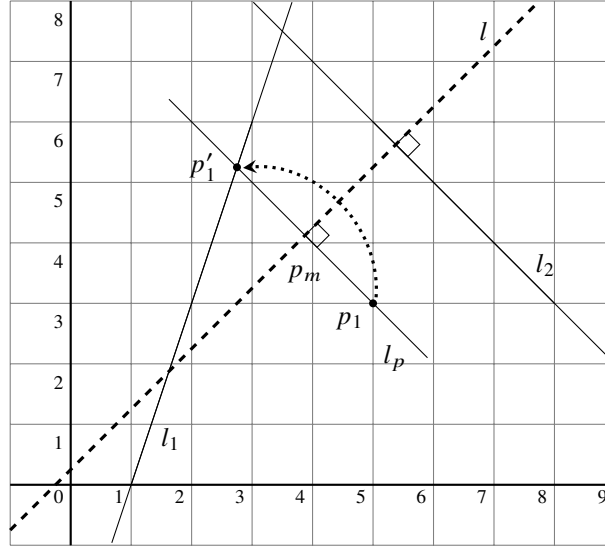


Fig. 10.15: Axioma 7

l_p pasa por p_1 por lo que $y_1 = m_2x_1 + b_p$ y su ecuación es $y = m_2x + (y_1 - m_2x_1)$. La reflexión $p'_1 = (x'_1, y'_1)$ es la intersección de l_1 y l_p :

$$\begin{aligned} m_1x'_1 + b_1 &= m_2x'_1 + (y_1 - m_2x_1) \\ x'_1 &= \frac{y_1 - m_2x_1 - b_1}{m_1 - m_2} \\ y'_1 &= m_1x'_1 + b_1. \end{aligned}$$

La ecuación del punto medio $p_m = (x_m, y_m)$ de l_p es:

$$(x_m, y_m) = \left(\frac{x_1 + x'_1}{2}, \frac{y_1 + y'_1}{2} \right).$$

$l \perp l_2$ y pasa por p_m por lo que su ecuación es:

$$y = -\frac{1}{m_2}x + b_m,$$

donde b_m puede calcularse a partir de $y = -\frac{1}{m_2}x + b_m$:

$$b_m = y_m + \frac{x_m}{m_2}.$$

La ecuación del pliegue l es por tanto:

$$y = -\frac{1}{m_2}x + \left(y_m + \frac{x_m}{m_2} \right).$$

Ejemplo 10.13. Sea $p_1 = (5, 3)$, l_1 $y = 3x - 3$ y l_2 $y = -x + 11$. Entonces:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{3 - (-1) \cdot 5 - (-3)}{3 - (-1)} = \frac{11}{4} \\ y'_1 &= 3 \cdot \frac{11}{4} + (-3) = \frac{21}{4} \\ p_m &= \left(\frac{5 + \frac{11}{4}}{2}, \frac{3 + \frac{21}{4}}{2} \right) = \left(\frac{31}{8}, \frac{33}{8} \right). \end{aligned}$$

La ecuación del pliegue l es:

$$y = -\frac{1}{-1} \cdot x + \left(\frac{33}{8} + \frac{\frac{31}{8}}{-1} \right) = x + \frac{1}{4}.$$

¿Cuál es la sorpresa?

El origami, el arte de plegar papel, se practica desde hace cientos de años, por lo que sorprende que la formalización matemática se remonte sólo al siglo XX. Sorprende aún más que exista una axiomatización del plegado de papel. Las matemáticas del origami son una excelente manera de aprender geometría analítica, propiedades de las parábolas y el concepto de lugar geométrico.

Fuentes

Los axiomas del origami se presentan en [56]. Lang [26] ofrece descripciones de construcciones de origami. [31, Cap. 10] contiene la teoría detallada de las matemáticas del origami, incluyendo la prueba de que dos parábolas pueden tener cero, una, dos o tres tangentes comunes. La prueba de Thm. 10.1 me fue mostrada por Oriah Ben-Lulu. He encontrado que el software geométrico como Geogebra es útil para entender la relación entre la geometría y el álgebra de los axiomas.

Una presentación clara de las ecuaciones cúbicas se puede encontrar en [6, Capítulos 1, 2].

Capítulo 11

Lill's Method and the Beloch Fold

11.1 A Magic Trick

Construir una trayectoria formada por cuatro segmentos de recta $\{a_3 = 1, a_2 = 6, a_1 = 11, a_0 = 6\}$, partiendo del origen en la dirección positiva del eje x y girando 90° en sentido contrario a las agujas del reloj entre segmento y segmento. Construir una segunda trayectoria de la siguiente forma: construir una recta desde el origen con un ángulo de $63,4^\circ$ y marcar su intersección con a_2 por P . Girar a la izquierda 90° , construir una recta y marcar su intersección con a_1 con Q . Girar de nuevo 90° a la izquierda, construir una recta y señalar que interseca el final del primer camino en $(-10, 0)$. (Fig. 11.1).

Calcular la negación de la tangente del ángulo al inicio del segundo camino: $-\tan 63,4^\circ = -2$. Sustituye este valor en el polinomio cuyos coeficientes son las

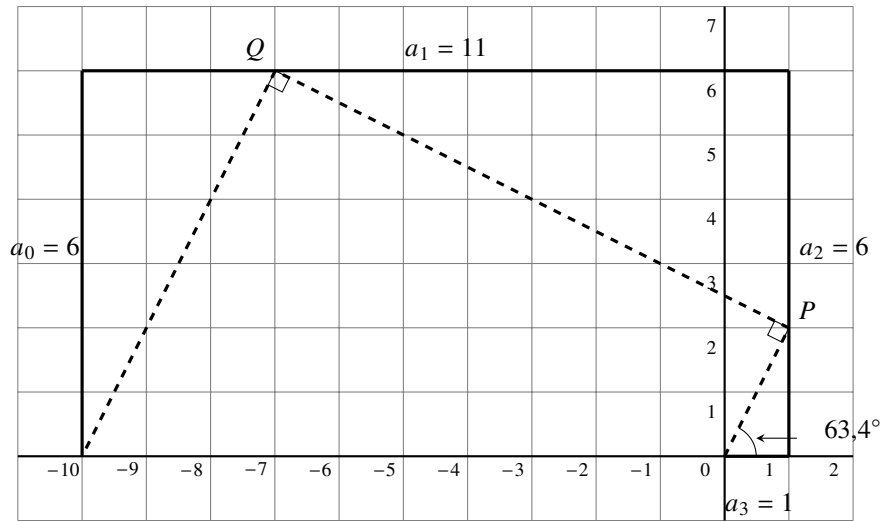


Fig. 11.1: *Un truco de magia*

longitudes de los segmentos del primer camino:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\ p(-\tan 63,4^\circ) &= (-2)^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6 = 0. \end{aligned}$$

¡Hemos encontrado una raíz del polinomio cúbico $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$!

Continuemos con el ejemplo. El polinomio $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ tiene tres raíces $-1, -2, -3$. Calcula el arco tangente de la negación de las raíces:

$$\alpha = -\tan^{-1}(-1) = 45^\circ, \quad \beta = -\tan^{-1}(-2) \approx 63,4^\circ, \quad \gamma = -\tan^{-1}(-3) \approx 71,6^\circ.$$

Para cada ángulo la segunda trayectoria interseca el final de la primera trayectoria (Fig. 11.2).

El valor $-\tan 56,3 \approx -1,5$ no es una raíz de la ecuación. Fig. 11.3 muestra el resultado de la aplicación del método para este ángulo. El segundo camino no se cruza con el segmento de línea para el coeficiente a_0 en $(-10, 0)$.

Este ejemplo muestra un método descubierto por Eduard Lill en 1867 para hallar gráficamente las raíces reales de cualquier polinomio. En realidad no estamos encontrando las raíces, sino verificando que un valor dado es una raíz.

La sección 11.2 presenta una especificación formal del método de Lill (limitado a polinomios cúbicos) y da ejemplos de cómo funciona en casos especiales. Una prueba de la corrección del método de Lill se da en Sect. 11.3. La sección 11.4

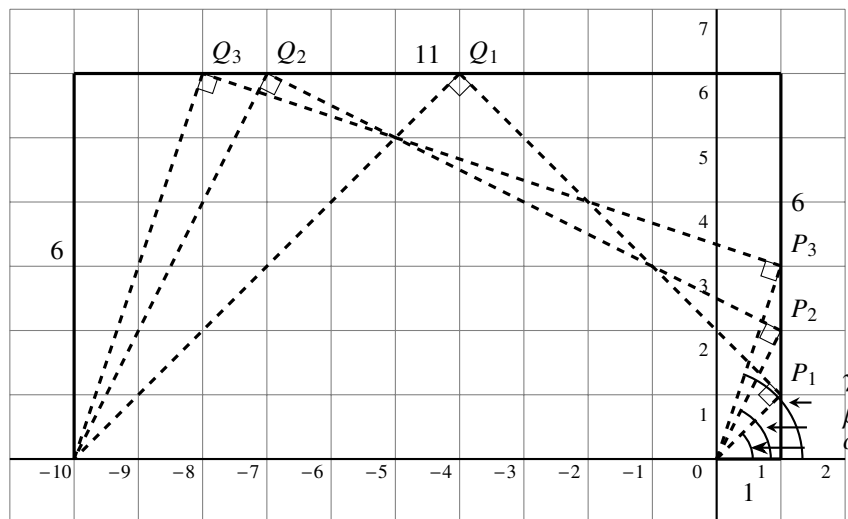


Fig. 11.2: Método de Lill para las tres raíces del polinomio

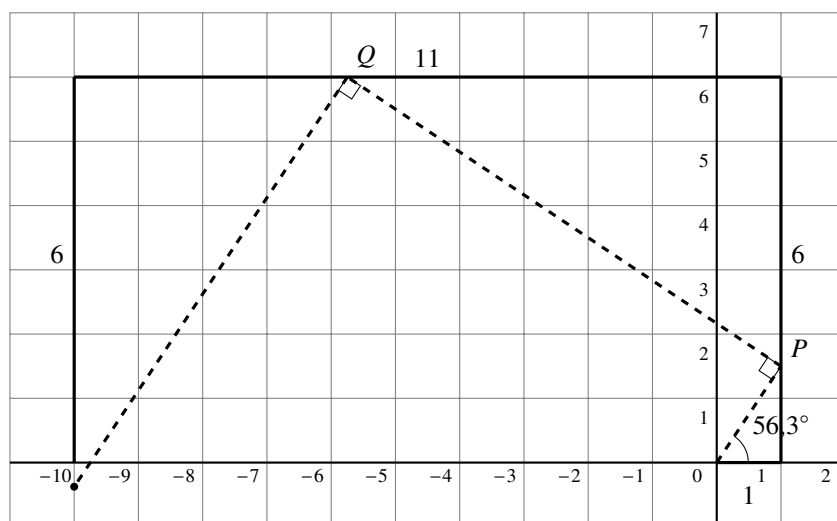


Fig. 11.3: *Un camino que no conduce a una raíz*

muestra cómo se puede implementar el método utilizando el axioma de origami 6. Esto se llama el pliegue de Beloch y precedió a la formalización de los axiomas de origami durante muchos años.

11.2 Especificación del método de Lill

11.2.1 El método de Lill como algoritmo

- Empezar con un polinomio cúbico arbitrario $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.
- Construir el primer camino:
 - Para cada coeficiente a_3, a_2, a_1, a_0 (en ese orden) construye un segmento de recta de esa longitud, partiendo del origen $O = (0, 0)$ en la dirección positiva del eje x . Gira 90° en sentido contrario a las agujas del reloj entre cada segmento.
- Construir el segundo camino:
 - Construir una recta desde O formando un ángulo de θ con el eje x positivo que intersecte a a_2 en el punto P .
 - Girar $\pm 90^\circ$ y construir una recta desde P que corte a a_1 en Q .
 - Girar $\pm 90^\circ$ y construir una recta desde Q que intersecte a a_0 en R .

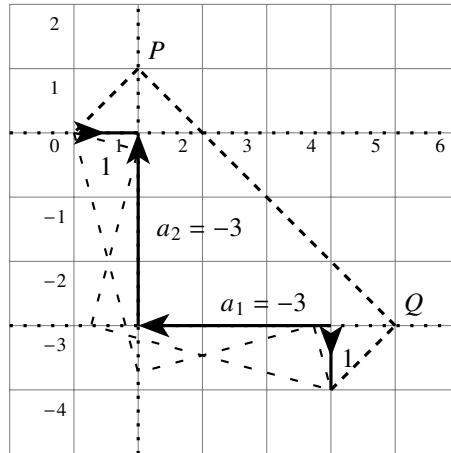


Fig. 11.4: Método de Lill con raíces negativas

- Si R es el punto final del primer camino entonces $-\tan \theta$ es una raíz de $p(x)$.
- Casos especiales:
 - Al construir los segmentos de línea de la primera trayectoria, si un coeficiente es negativo, construir el segmento de línea *hacia atrás*.
 - Al construir los segmentos de línea de la primera trayectoria, si un coeficiente es cero, no construir un segmento de línea, sino continuar con la siguiente $\pm 90^\circ$ vuelta.
- Notes:
 - La frase *intersects a_i* significa *intersects the line segment a_i or any extension of a_i* .
 - Al construir el segundo camino elegir a la izquierda o a la derecha por 90° para que haya una intersección con el siguiente segmento de la primera ruta o su extensión.

11.2.2 Coeficientes negativos

Vamos a demostrar el método de Lill en el polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ con coeficientes negativos (Sect. 10.6). Comience por construir un segmento de longitud 1 a la derecha. A continuación, girar 90° hacia arriba, pero como el coeficiente es negativo, construir un segmento de longitud 3 hacia abajo, es decir, en dirección

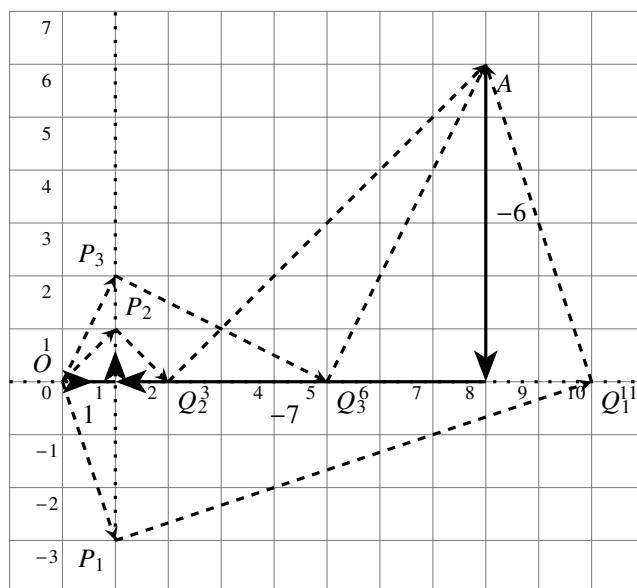


Fig. 11.5: Método de Lill con polinomios de coeficientes nulos

opuesta a la flecha. Tras girar 90° hacia la izquierda, el coeficiente vuelve a ser negativo, así que construye un segmento de longitud 3 hacia la derecha. Por último, gire hacia abajo y construir un segmento de longitud 1 (Fig. 11.4, las líneas de trazos sueltos será discutido en Sect. 11.2.4).

Comience el segundo camino con una línea en 45° con el eje x positivo. Se cruza con la extensión del segmento de línea para a_2 en $(1, 1)$. Girando -90° (hacia la derecha), la recta interseca la prolongación de la recta segmento por a_1 en $(5, -3)$. Girando de nuevo -90° , la recta interseca al final de la primera trayectoria en $(4, -4)$. Como $-\tan 45^\circ = -1$, hemos encontrado una raíz del polinomio:

$$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 6 = 0.$$

11.2.3 Coeficientes cero

a_2 , el coeficiente del término x^2 del polinomio $x^3 - 7x - 6 = 0$, es cero. Construir un segmento de recta de longitud 0, es decir, no construir una recta, pero sí hacer el giro $\pm 90^\circ$ como indica la flecha que apunta hacia arriba en $(1, 0)$ en la Fig. 11.5. Gira de nuevo y construye un segmento de recta de longitud -7 , es decir, de longitud 7 hacia atrás, hasta $(8, 0)$. Por último, gire una vez más y construir un segmento de línea de longitud -6 a $(8, 6)$.

Las segundas trayectorias con los siguientes ángulos intersecan el final de la

primera trayectoria:

$$-\tan^{-1}(-1) = 45^\circ, \quad -\tan^{-1}(-2) \approx 63,4^\circ, \quad -\tan^{-1} 3 \approx -71,6^\circ.$$

Concluimos que hay tres raíces reales $\{-1, -2, 3\}$. Compruébalo:

$$(x+1)(x+2)(x-3) = (x^2+3x+2)(x-3) = x^3-7x-6.$$

11.2.4 Raíces no enteras

Figura 11.6 muestra el método de Lill para $p(x) = x^3 - 2x + 1$. La primera trayectoria va de $(0,0)$ a $(1,0)$ y luego gira hacia arriba. El coeficiente de x^2 es cero por lo que no se construye ningún segmento de recta y el camino gira a la izquierda. El siguiente segmento de recta es de longitud -2 por lo que va hacia atrás desde $(1,0)$ hasta $(3,0)$. Finalmente, el camino gira hacia abajo y se construye un segmento de recta de longitud 1 desde $(3,0)$ hasta $(3,-1)$.

Es fácil ver que si el segundo camino comienza en un ángulo de 45° se cruzará con el primer camino en $(3,-1)$. Por lo tanto, $-\tan^{-1}(-45)^\circ = 1$ es una raíz. Si dividimos $p(x)$ entre $x-1$, obtenemos el polinomio cuadrático x^2+x-1 cuyas raíces son:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx 0,62, -1,62.$$

Hay dos segundas trayectorias adicionales: una que empieza en $-\tan^{-1} 0,62 \approx -31,8^\circ$, y otra que empieza en $-\tan^{-1}(-1,62) \approx 58,3^\circ$.

El polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ (Sect. 11.2.2) tiene raíces $2 \pm \sqrt{3} \approx 3,73, 0,27$. Los ángulos correspondientes son $-\tan^{-1} 3,73 \approx -75^\circ$ y $-\tan^{-1} 0,27 \approx -15^\circ$ como muestran las líneas discontinuas de la Fig. 11.4.

11.2.5 La raíz cúbica de dos

Para doblar un cubo, calcula $\sqrt[3]{2}$, una raíz del polinomio cúbico $x^3 - 2$. En la construcción del primer camino, gira dos veces a la izquierda sin construir ningún segmento de recta, porque a_2 y a_1 son ambos cero. Luego se vuelve a girar a la izquierda (para mirar hacia abajo) y se construye hacia atrás (hacia arriba) porque $a_0 = -2$ es negativo. El primer segmento de la segunda trayectoria se construye con un ángulo de $-\tan^{-1} \sqrt[3]{2} \approx -51,6^\circ$ (Fig. 11.7).

11.3 Prueba del método de Lill

La demostración es para polinomios cúbicos monicónicos $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Si el polinomio no es mónico, se divide por a_3 y el polinomio resultante tiene las mismas raíces. En la Fig. 11.8 los segmentos de recta del primer camino están etiquetados con los coeficientes y con $b_2, b_1, a_2 - b_2, a_1 - b_1$. En un triángulo

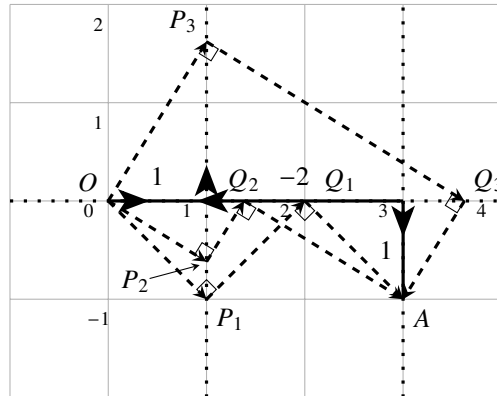


Fig. 11.6: Método de Lill con raíces no enteras

rectángulo si un ángulo agudo es θ el otro ángulo es $90^\circ - \theta$. Por tanto, el ángulo sobre P y el ángulo a la izquierda de Q son iguales a θ . He aquí las fórmulas de $\tan \theta$ calculadas a partir de los tres triángulos:

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{b_2}{1} = b_2 \\ \tan \theta &= \frac{b_1}{a_2 - b_2} = \frac{b_1}{a_2 - \tan \theta} \\ \tan \theta &= \frac{a_0}{a_1 - b_1} = \frac{a_0}{a_1 - \tan \theta(a_2 - \tan \theta)}.\end{aligned}$$

Simplifica la última ecuación, multiplica por -1 y absorbe -1 en las potencias:

$$\begin{aligned}(\tan \theta)^3 - a_2(\tan \theta)^2 + a_1(\tan \theta) - a_0 &= 0 \\ (-\tan \theta)^3 + a_2(-\tan \theta)^2 + a_1(-\tan \theta) + a_0 &= 0.\end{aligned}$$

Se deduce que $-\tan \theta$ es una raíz real de $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

11.4 El pliegue de Beloch

Margharita P. Beloch descubrió una notable conexión entre el plegado y el método de Lill: una aplicación de la operación más tarde conocida como axioma del origami 6 genera una raíz real de un polinomio cúbico. La operación se denomina a menudo "pliegue de belloch".

Consideremos el polinomio $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ (Sect. 11.1). Recordemos que un pliegue es la mediatriz del segmento de recta entre un punto cualquiera y su reflexión alrededor del pliegue. Queremos que \overline{RS} en Fig. 11.9 sea la mediatriz de $\overline{QQ'}$ y $\overline{PP'}$, donde Q' , P' son las reflexiones de Q , P alrededor de \overline{RS} , respectivamente.

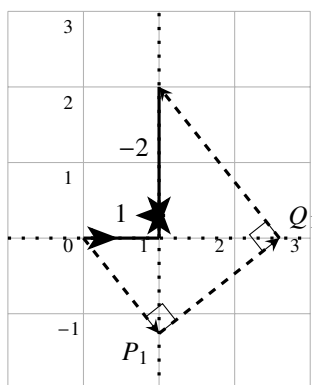


Fig. 11.7: La raíz cúbica de dos

Construir una recta a'_2 paralela a a_2 a la misma distancia de a_2 que a_2 de P , y construir una recta a'_1 paralela a a_1 a la misma distancia de a_1 que a_1 de Q . Aplicar el axioma 6 para situar simultáneamente P en P' sobre a'_2 y para situar Q en Q' sobre a'_1 . El pliegue \overline{RS} es la mediatriz de las rectas $\overline{PP'}$ y $\overline{QQ'}$ por lo que los ángulos en R y S son ambos ángulos rectos como exige el método de Lill.

La figura 11.10 muestra el pliegue de Beloch para el polinomio $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ (Secc. 11.2.2). a_2 es el segmento de recta vertical de longitud 3 cuya ecuación es $x = 1$, y su recta paralela es a'_2 cuya ecuación es $x = 2$, porque P está a una distancia de 1 de a_2 . a_1 es el segmento de recta horizontal de longitud 3 cuya ecuación es $y = -3$, y su recta paralela es a'_1 cuya ecuación es $y = -2$ porque Q está a una distancia de 1 de a_1 . El pliegue \overline{RS} es la mediatriz tanto de $\overline{PP'}$ como de $\overline{QQ'}$, y la recta \overline{PRSQ} es la misma que la segunda trayectoria de la Fig. 11.4.

¿Cuál es la sorpresa?

Ejecutar el método de Lill como un truco de magia nunca deja de sorprender. Puede realizarse durante una conferencia utilizando un programa de gráficos como GeoGebra. También sorprende que el método de Lill, publicado en 1867, y el pliegue de Beloch, publicado en 1936, precedieran en muchos años a la axiomatización del origami.

Fuentes

Este capítulo se basa en [8, 24, 40].

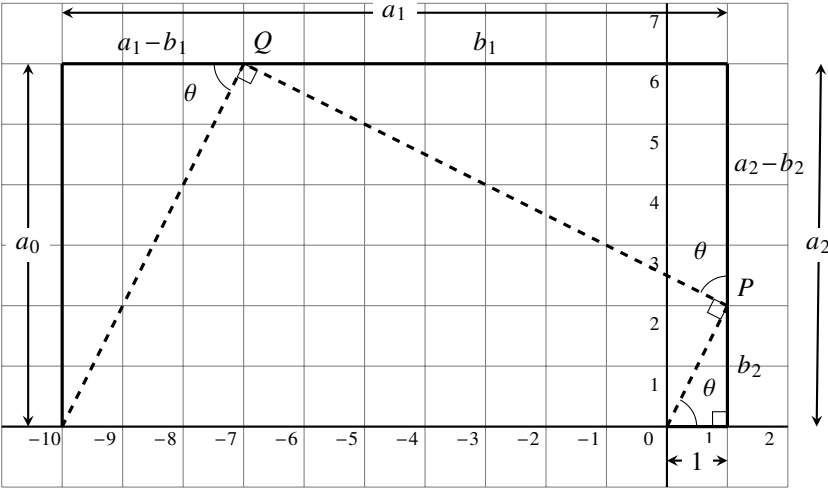


Fig. 11.8: Prueba del método de Lill

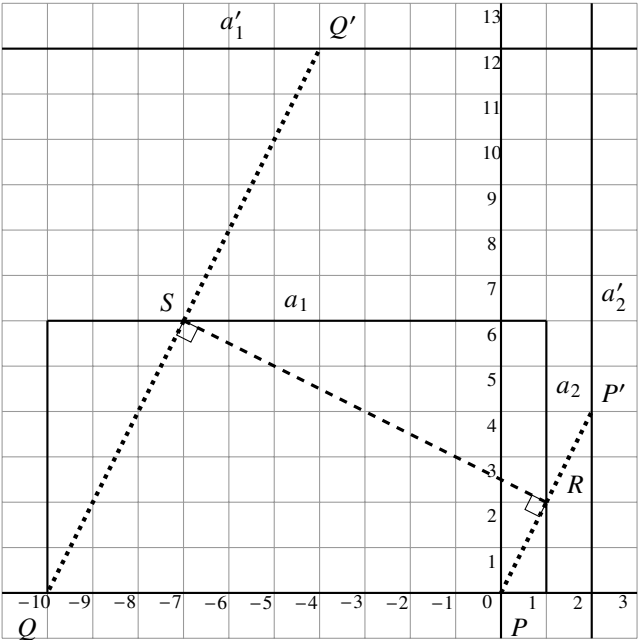


Fig. 11.9: El pliegue de Beloch para encontrar una raíz de $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

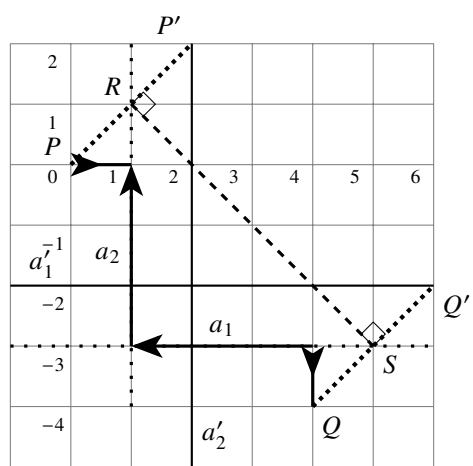


Fig. 11.10: El pliegue de Beloch para encontrar una raíz de $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$

Capítulo 12

Geometric Constructions Using Origami

Este capítulo muestra que las construcciones con origami son más poderosas que las construcciones con regla y compás. Damos dos construcciones para trisecionar un ángulo, una por Hisashi Abe (Secc. 12.1) y la otra por George E. Martin (Sect. 12.2), dos construcciones para duplicar un cubo, una de Peter Messer (Sect. 12.3) y la otra de Marghareta P. Beloch (Sect. 12.4), y la construcción de un nonágono, un polinomio regular de nueve lados (Sect. 12.5).

12.1 Trisección de Abe de un ángulo

Construcción: Dado un ángulo agudo $\angle PQR$, construir p , la perpendicular a \overline{QR} en Q . Construir q , la perpendicular a p que corta a \overline{PQ} en el punto A , y construir r , la perpendicular a p en B que está a mitad de camino entre Q y A . Utilizando el axioma 6 construir el pliegue l que sitúa A en A' sobre \overline{PQ} y Q en Q' sobre r . Sea B' el reflejo de B alrededor de l . Construir rectas que pasen por $\overline{QB'}$ y $\overline{QQ'}$ (Fig. 12.1).

Teorema 12.1. $\angle PQB' = \angle B'QQ' = \angle Q'QR = \angle PQR/3$.

Demostración.

(1) A', B', Q' son reflexiones en torno a la recta l de los puntos A, B, Q sobre la recta \overline{DQ} , por lo que están sobre la recta $\overline{DQ'}$ reflejada. Por construcción $\overline{AB} = \overline{BQ}$, $\angle ABQ' = \angle QBQ' = 90^\circ$ y $\overline{BQ'}$ es un lado común, por lo que $\triangle ABQ' \cong \triangle QBQ'$ por lado-ángulo-lado. Por lo tanto, $\angle AQQ' = \angle QAQ' = \alpha$ por lo que $\triangle AQQ'$ es isóceles (Fig. 12.2).

Por reflexión $\triangle AQQ' \cong \triangle A'QQ'$, por lo que $\triangle A'QQ'$ es también un triángulo isóceles. $\overline{QB'}$, el reflejo de \overline{QB} , es la mediatriz de un triángulo isóceles, por lo que $\angle A'QB' = \angle Q'QB' = \angle QQ'B = \alpha$. Alternando los ángulos interiores, $\angle Q'QR = \angle QQ'B = \alpha$. En conjunto tenemos:

$$\angle PQB' = \angle A'QB' = \angle B'QQ' = \angle Q'QR = \alpha.$$

□

Demostración.

(2) Como l es un pliegue es la mediatriz de $\overline{QQ'}$. Denotemos la intersección de l con $\overline{QQ'}$ por U y su intersección con $\overline{QB'}$ por V (Fig. 12.2). Por tanto, $\triangle VUQ \cong \triangle VUQ'$ por lado-ángulo-lado ya que \overline{VU} es un lado común, los ángulos en U son ángulos

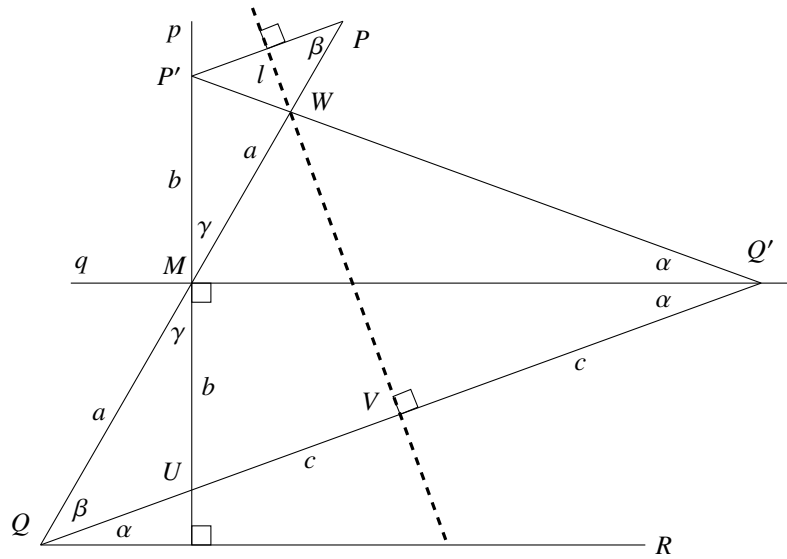


Fig. 12.3: Trisección de Martin de un ángulo

12.3 Duplicación de un cubo de Messer

Un cubo de volumen V tiene lados de longitud $\sqrt[3]{V}$. Un cubo con el doble de volumen tiene caras de longitud $\sqrt[3]{2V} = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{V}$, por lo que si podemos construir $\sqrt[3]{2}$ podemos multiplicar por la longitud dada $\sqrt[3]{V}$ para duplicar el cubo.

Construcción: Divide el lado de un cuadrado unitario en tercios de la siguiente manera: Dobra el cuadrado por la mitad para localizar los puntos $I = (0, 1/2)$ y $J = (1, 1/2)$. A continuación se construyen las rectas \overline{AC} y \overline{BJ} (Fig. 12.4). El punto de intersección $K = (2/3, 1/3)$ se obtiene resolviendo las dos ecuaciones $y = 1 - x$ y $y = x/2$.

Construimos \overline{EF} , la perpendicular a \overline{AB} que pasa por K , y construimos la reflexión \overline{GH} de \overline{BC} alrededor de \overline{EF} . Ahora el lado del cuadrado se ha dividido en tercios.

Utilizando el axioma 6 situar C en C' de \overline{AB} y F en F' de \overline{GH} . Denotemos por L el punto de intersección del pliegue con \overline{BC} y por b la longitud de \overline{BL} . Renombrar la longitud del lado del cuadrado por $a + 1$ donde $a = \overline{AC'}$. La longitud de \overline{LC} es $(a + 1) - b$. (Fig. 12.5).

Teorema 12.3. $\overline{AC'} = \sqrt[3]{2}$.

Demostración. Al realizar el pliegue el segmento de recta \overline{LC} se refleja en el seg-

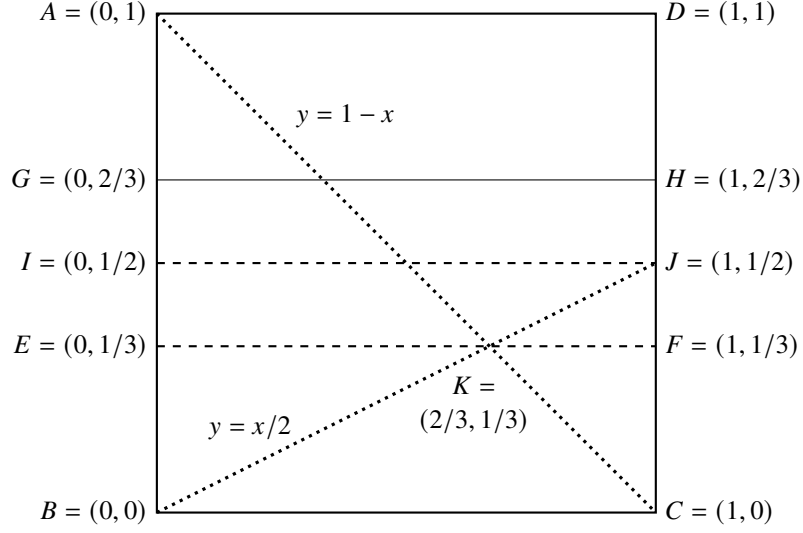


Fig. 12.4: Dividir una longitud en tercios

mento de recta $\overline{LC'}$ y \overline{CF} se pliega en el segmento de recta $\overline{C'F'}$. Por lo tanto:

$$\overline{GC'} = a - \frac{a+1}{3} = \frac{2a-1}{3}. \quad (12.1)$$

Como $\angle FCL$ es un ángulo recto, también lo es $\angle F'C'L$.

$\triangle C'BL$ es un triángulo rectángulo así que por el Teorema de Pitágoras:

$$1^2 + b^2 = ((a+1) - b)^2 \quad (12.2a)$$

$$b = \frac{a^2 + 2a}{2(a+1)}. \quad (12.2b)$$

$\angle GC'F' + \angle F'C'L + \angle LC'B = 180^\circ$ ya que forman la recta \overline{GB} . Denotemos $\angle GC'F'$ por α . Entonces:

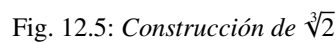
$$\angle LC'B = 180^\circ - \angle F'C'L - \angle GC'F' = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha,$$

que denotamos por α' . Los triángulos $\triangle C'BL$, $\triangle F'GC'$ son triángulos rectángulos por lo que $\angle C'LB = \alpha$ y $\angle C'F'G = \alpha'$. Por lo tanto, $\triangle C'BL \sim \triangle F'GC'$ y:

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{C'L}} = \frac{\overline{GC'}}{\overline{C'F'}}.$$

Usando la Ec. 12.1 tenemos:

$$\frac{b}{(a+1) - b} = \frac{\frac{2a-1}{3}}{\frac{a+1}{3}}.$$


$$\frac{\frac{a^2 + 2a}{2(a + 1)}}{(a + 1) - \frac{a^2 + 2a}{2(a + 1)}} = \frac{2a - 1}{a + 1}.$$

9

Dado que el pliegue de Beloch (Axioma 6) puede resolver ecuaciones cúbicas, es razonable conjeturar que puede utilizarse para doblar un cubo. Aquí damos una construcción directa que utiliza el pliegue.

Teorema 12.4. $\overline{OY} = \sqrt[3]{2}$.

Teorema 12.4. $\overline{OY} = \sqrt[3]{2}$.

Demostración. El pliegue es la mediatriz de $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ por lo que $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$. Por ángulos interiores alternos $\angle YAO = \angle BXO = \alpha$. El etiquetado de los otros ángulos en la figura se sigue de las propiedades de los triángulos rectángulos.

$\triangle AOY \sim \triangle YOX \sim \triangle XOB$ y $\overline{OA} = 1$, $\overline{OB} = 2$ se dan así:

$$\frac{\overline{OY}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OX}}$$

$$\frac{\overline{OY}}{1} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{2}{\overline{OX}}.$$

De la primera y segunda relaciones tenemos $\overline{OX} = \overline{OY}^2$ y de la primera y tercera relaciones tenemos $\overline{OY} \overline{OX} = 2$. Sustituyendo por \overline{OX} se obtiene $\overline{OY}^3 = 2$ y $\overline{OY} = \sqrt[3]{2}$. \square

12.5 Construcción de un nonágono regular

Se construye un nonágono (polígono regular de nueve lados) derivando la ecuación cúbica de su ángulo central y resolviendo la ecuación mediante el método de

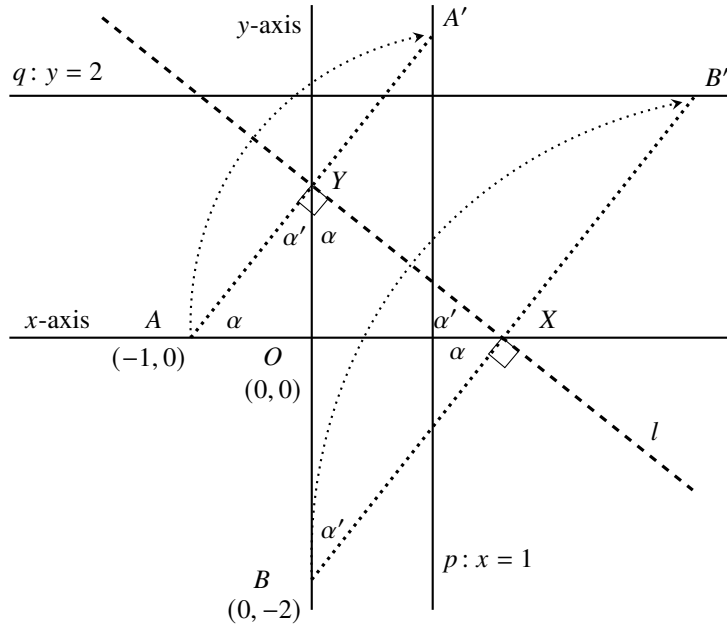
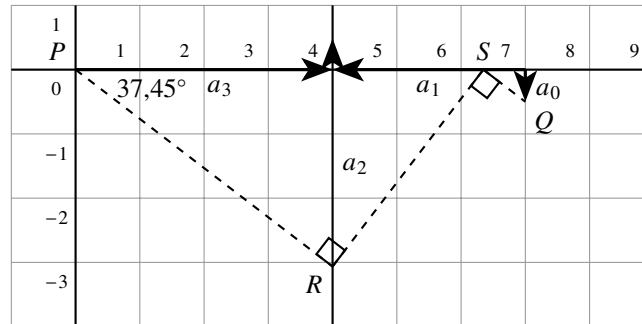


Fig. 12.6: La duplicación del cubo de Beloch

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta .$$

Sea $x = \cos 40^\circ$. Entonces para el nonágono la ecuación es $4x^3 - 3x + (1/2) = 0$ ya que $\cos 3 \cdot 40^\circ = \cos 120^\circ = -(1/2)$. La figura 12.7 muestra las trayectorias para la ecuación construida según el método de Lill.



La segunda trayectoria parte de P con un ángulo aproximado de $-37,45^\circ$. Giros de 90° en R y luego de -90° en S hacen que la trayectoria intersecte a la primera en su punto final Q . Por tanto, $x = -\tan(-37,45^\circ) \approx 0,766$ es una raíz de

$$4x^3 - 3x + (1/2)$$

Por el método de Lill $-\tan(-37, 45^\circ) \approx 0,766$ y por tanto $\cos \theta \approx 0,766$ es una raíz de la ecuación del ángulo central θ . Terminamos la construcción del nonágono construyendo $\cos^{-1} 0,766 \approx 40^\circ$.

El triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con $\angle CAB \approx 37,45^\circ$ y $\overline{AB} = 1$ tiene lado opuesto $\overline{BC} \approx 0,766$ por definición de tangente (Fig. 12.9). Doblar \overline{CB} sobre la \overline{AB} de modo que el reflejo de C sea D y $\overline{DB} = 0,766$. Extender \overline{DB} y construir E de modo que $\overline{DE} = 1$. Doblar \overline{DE} para reflejar E en F en la extensión de \overline{BC} (Fig. 12.10).

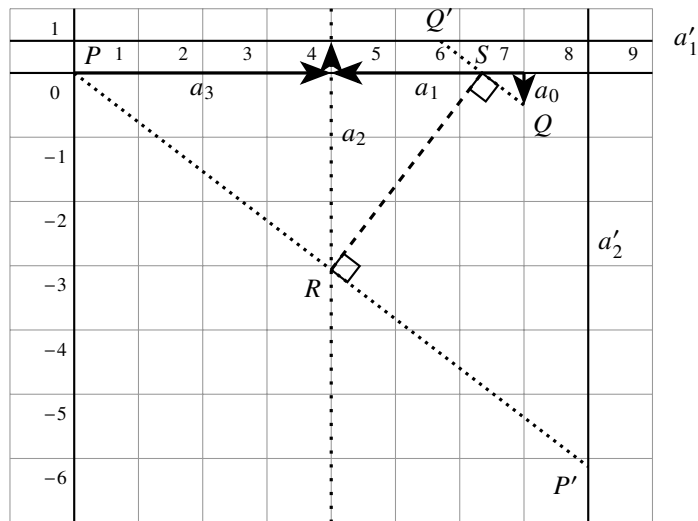


Fig. 12.8: El pliegue de Beloch para resolver la ecuación del nonágono

Entonces:

$$\angle BDF = \cos^{-1} \frac{0,766}{1} \approx 40^\circ.$$

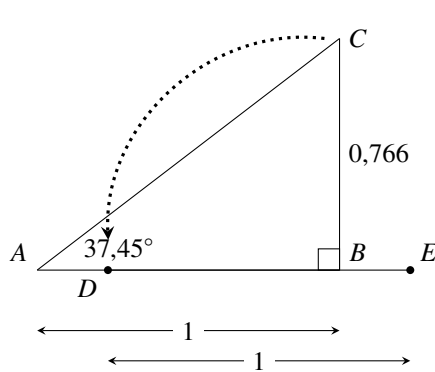


Fig. 12.9: La tangente que es la solución de la ecuación del nonágono

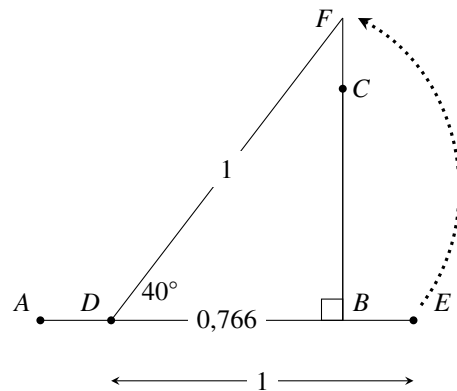


Fig. 12.10: El coseno del ángulo central del nonágono

¿Cuál es la sorpresa?

Vimos en los capítulos 2 y 3 que herramientas como el neusis pueden realizar construcciones que no se pueden hacer con una regla y un compás. Es sorprendente que la trisección de un ángulo y la duplicación de un cubo puedan construirse utilizando sólo papel plegado. Roger C. Alperin ha desarrollado una jerarquía de cuatro métodos de construcción cada uno más potente que el anterior.

Fuentes

Este capítulo se basa en [2, 26, 31, 36].

Capítulo 13

Basta con una brújula

En 1797 Lorenzo Mascheroni indexMascheroni, Lorenzo demostró que cualquier construcción realizada con regla y compás puede realizarse sólo con compás. Más tarde se supo que este teorema ya había sido demostrado por Georg MohrindexMohr, Georg en 1672.. Después de explicar en Sect. 13.1 lo que se entiende por la realización de una construcción con sólo un compás, la prueba se presenta en etapas a partir de cuatro construcciones auxiliares: la reflexión de un punto (Sect. 13.2), construcción de un círculo con un radio dado (Secc. 13.3), suma y resta de segmentos de recta (Secc. 13.4) y construcción de un segmento de recta como cociente de segmentos (Secc. 13.5). La sección 13.6 muestra cómo encontrar la intersección de dos líneas y la sección 13.7 muestra cómo encontrar la intersección de una línea y un círculo.

13.1 ¿Qué es una construcción con sólo un compás?

Figura 13.1 muestra la construcción de un triángulo equilátero utilizando una regla y un compás. ¿Cómo podemos construir un triángulo sin los segmentos de recta \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC} ? Un segmento de recta está definido por dos puntos, por lo que basta con construir estos puntos para obtener una construcción equivalente a la realizada con regla (Fig. 13.2). No es necesario *ver* realmente los segmentos de recta. Habrá líneas en las figuras de este capítulo, pero se utilizan sólo para entender la construcción y la prueba de su exactitud. Es importante convencerse de que la construcción en sí utiliza sólo un compás.

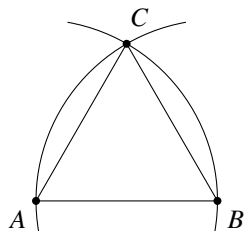


Fig. 13.1: *Construcción de un triángulo equilátero con regla y compás*

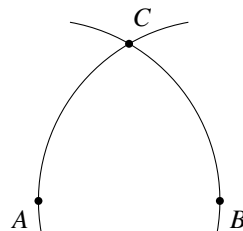


Fig. 13.2: *Construcción de un triángulo equilátero con sólo un compás*

Una construcción con regla y compás es una secuencia de tres operaciones:

- Encontrar el punto de intersección de dos rectas.

- Hallar el punto de intersección de dos rectas.
- Hallar el punto o puntos de intersección de una recta y una circunferencia.
- Hallar el punto o puntos de intersección de dos circunferencias.

La tercera operación se puede hacer sólo con un compás. Tenemos que demostrar que las dos primeras operaciones se pueden hacer sólo con un compás.

Notation:

- $c(O, A)$: la circunferencia con centro O que pasa por el punto A .
- $c(O, A)$: la circunferencia con centro O que pasa por el punto A .
- $c(O, r)$: la circunferencia con centro O y radio r .
- $c(O, \overline{AB})$: la circunferencia con centro O y radio la longitud del segmento de recta \overline{AB} .

13.2 Reflexión de un punto

Definición 13.1. Un punto C' es un *reflejo* del punto C alrededor de un segmento de recta \overline{AB} si y sólo si \overline{AB} (o la recta que contiene a \overline{AB}) es la mediatriz del segmento de recta $\overline{CC'}$.

Teorema 13.1. Dada una recta \overline{AB} y un punto C que no está en \overline{AB} , es posible construir C' , la reflexión de C alrededor de \overline{AB} .

Demostración. Construir una circunferencia centrada en A que pase por C y una circunferencia centrada en B que pase por C . La otra intersección de las dos circunferencias es el punto C' que es la reflexión de C (Fig. 13.3). $\triangle ABC \cong \triangle ABC'$ por lado-lado ya que $\overline{AC}, \overline{AC'}$ son radios de la misma circunferencia, al igual que $\overline{BC}, \overline{BC'}$ y \overline{AB} es un lado común. Por tanto, $\angle CAB = \angle C'AB$ por lo que \overline{AB} es el ángulo bisectriz del $\angle CAC'$. Pero $\triangle CAC'$ es un triángulo isósceles y el ángulo bisectriz \overline{AB} es también la mediatriz de $\overline{CC'}$, la base de $\triangle CAC'$. Por definición C' es la reflexión de C alrededor de \overline{AB} . \square

13.3 Construcción de un círculo de radio dado

Teorema 13.2. Dados los puntos A, B, C es posible construir $c(A, \overline{BC})$, la circunferencia centrada en A con radio \overline{BC} .

Demostración. Construimos $c(A, B)$ y $c(B, A)$ y dejamos que X, Y sean sus puntos de intersección (Fig. 13.4). A es el reflejo de B alrededor de \overline{XY} ya que $\triangle YAX \cong$

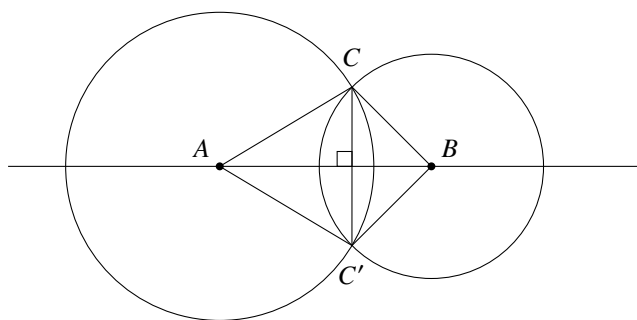


Fig. 13.3: Construcción de un reflejo

$\triangle YBX$ por lado-lateral. Por Thm. 13.1 construimos C' , el reflejo de C alrededor de \overline{XY} y luego construimos $c(A, \overline{AC'})$ (Fig. 13.5).

\overline{XY} es la mediatriz de $\overline{CC'}$ y \overline{AB} . Denotemos la intersección de \overline{XY} y \overline{AB} por D y la intersección de \overline{XY} y $\overline{CC'}$ por E . Entonces $\overline{C'E} = \overline{EC}$, $\overline{AD} = \overline{DB}$ y $\angle DEC = \angle DEC'$ es un ángulo recto, por lo que $\triangle DEC \cong \triangle DEC'$ por lado-ángulo-lado. Por tanto, $\overline{DC} = \overline{DC'}$ y $\angle ADC' = \angle BDC$ (son complementarios de $\angle EDC' = \angle EDC$). Se deduce que $\triangle ADC' \cong \triangle BDC$ por lado-ángulo-lado por lo que $\overline{AC'} = \overline{BC}$. \square

13.4 Suma y resta de segmentos de línea

Teorema 13.3. Dado un segmento de recta \overline{PQ} de longitud a y un segmento de recta \overline{RS} de longitud b , es posible construir segmentos de recta $\overline{QT}, \overline{QU}$ tales que

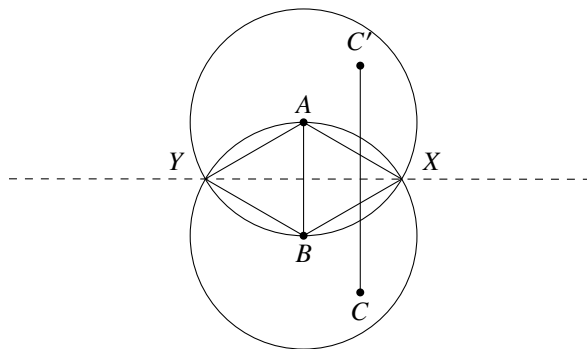


Fig. 13.4: Construcción de un círculo de radio determinado (1)

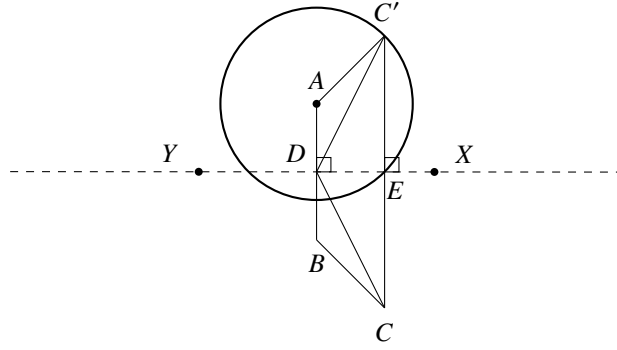


Fig. 13.5: Construcción de un círculo de radio determinado (2)

\overline{PTQU} es un segmento de recta, la longitud de \overline{PT} es $a - b$ y la longitud de \overline{PU} es $a + b$ (Fig. 13.6).

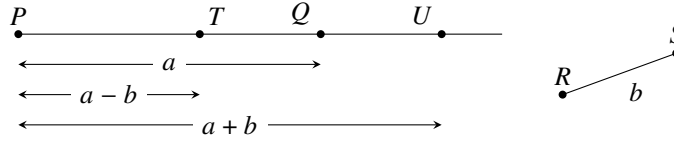


Fig. 13.6: Suma y resta de segmentos de recta

La prueba es bastante larga y se presentará como una secuencia de construcciones.

Teorema 13.4. *Se puede construir un trapecio isóceles.*

Demostración. Sea H un punto cualquiera sobre $c(Q, b)$. Construir H' su reflexión en torno a \overline{PQ} . Denotemos la longitud de $\overline{HH'}$ por h (Fig. 13.7).

Construir las circunferencias $c(H, b)$, $c(Q, h)$. Sea K un punto de intersección de las circunferencias y construyamos K' la reflexión de K en torno a \overline{PQ} (Fig. 13.8). La recta que contiene \overline{PQ} es la mediatriz de $\overline{HH'}$ y $\overline{KK'}$ por lo que $\overline{HH'} \parallel \overline{KK'}$. $\overline{KH} = b$ ya que es el radio de la circunferencia centrada en H , y K', H' son reflexiones de K, H . $\triangle QQH' \cong \triangle QQ'H'$ por lado-lateral y $\triangle KQH \cong \triangle K'QH'$ por lado-lateral, por lo que $\overline{K'H'} = \overline{KH} = b$. Resulta que $\overline{KHH'K'}$ es un trapecio isósceles cuyas bases son $\overline{HH'} = h$, $\overline{KK'} = 2h$ (Fig. 13.9). Denotemos por d la longitud de las diagonales $\overline{K'H} = \overline{KH'}$. \square

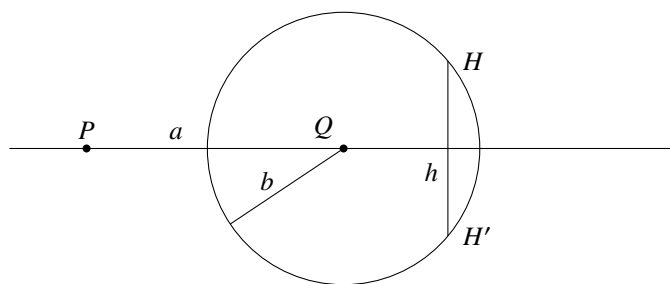


Fig. 13.7: Construcción de un trapezio isocelos (1)

Teorema 13.5. *Un trapezio isocelos puede estar circunscrito por un círculo.*

Demostración. El teorema se deduce inmediatamente de Thms. A.15 y A.16. \square

Teorema 13.6. *Para d, b, h mostrados en Fig. 13.9, $d^2 = b^2 + 2h^2$.*

Demostración. El teorema se deduce del teorema de Ptolomeo (Thm. A.18) que dice que en un cuadrilátero circunscrito por una circunferencia el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos. \square

Ahora se puede dar la prueba de Thm. 13.3.

Demostración. Sea X el punto de la recta \overline{PQ} que prolonga \overline{PQ} por b . (Eventualmente construiremos X .) Definir $x = \overline{K'X}$. En Thm. 13.6:

$$d^2 = b^2 + 2h^2 = (x^2 - h^2) + 2h^2 = x^2 + h^2.$$

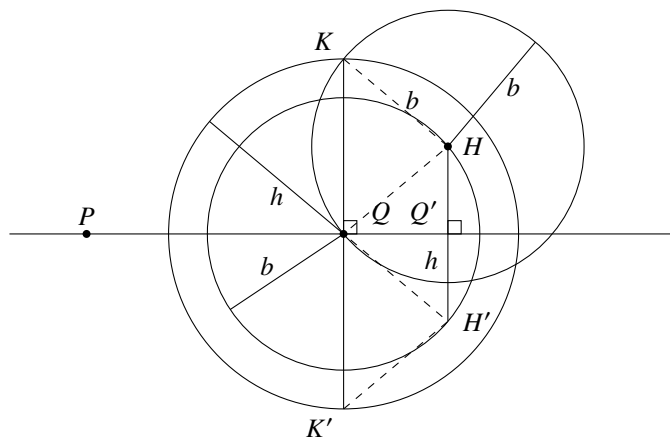


Fig. 13.8: Construcción de un trapezio isocelos (2)

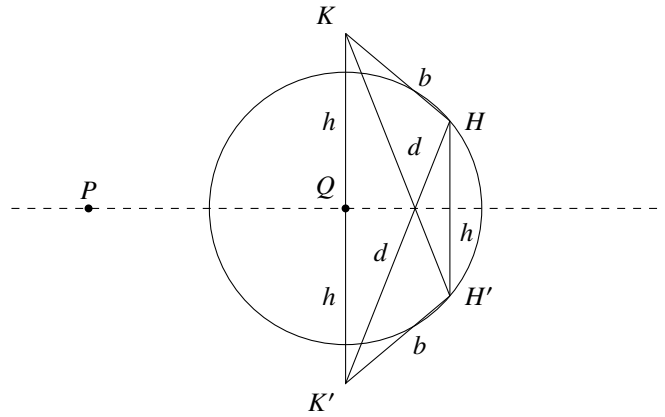


Fig. 13.9: Construcción de un trapezio isocelos (3)

Dado que $\triangle QK'X$ es un triángulo rectángulo $x^2 = b^2 + h^2$ (Fig. 13.10).

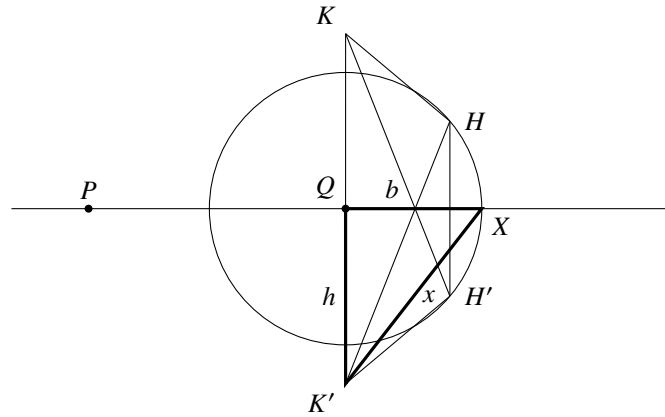


Fig. 13.10: Aplicación del teorema de Ptolomeo

Construir S como la intersección de $c(K, d)$, $c(K', d)$ (Fig. 13.11). El $\triangle QSK'$ es un triángulo rectángulo por lo que por el Teorema de Pitágoras $\overline{QS}^2 = d^2 - h^2 = x^2$ y $\overline{QS} = x$.

Construir X como la intersección de $c(K, x)$, $c(K', x)$ (Fig. 13.12). Como la longitud de \overline{QX} es $\sqrt{x^2 - h^2} = b$ la longitud de \overline{PX} es $a + b$ y la longitud de $\overline{PX'}$ es $a - b$. \square

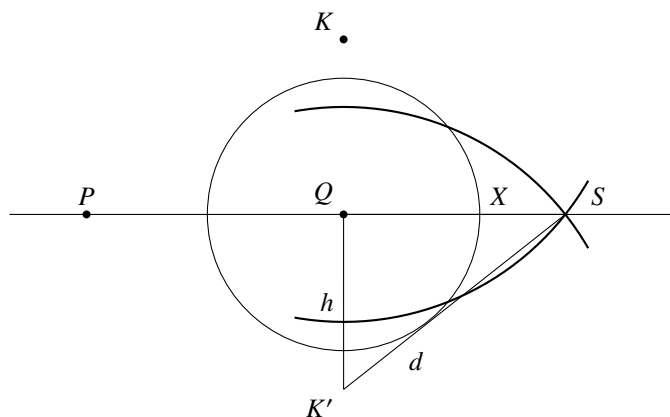


Fig. 13.11: Construcción del punto para sumar y restar (1)

13.5 Construcción de un segmento de línea como cociente de segmentos

Teorema 13.7. *Dados segmentos de recta de longitud n, m, s , es posible construir un segmento de recta de longitud:*

$$x = \frac{n}{m} s .$$

Demostración. Construir dos circunferencias concéntricas $c_1 = c(Z, m)$ y $c_2 =$

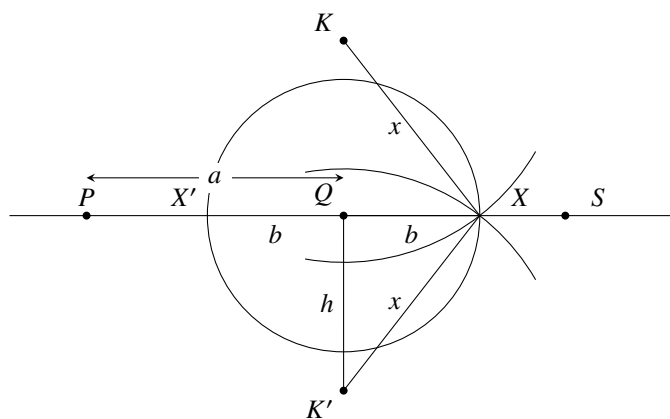


Fig. 13.12: Construcción del punto para sumar y restar (2)

$c(Z, n)$,¹ y elegir un punto arbitrario A en c_1 . Por Thm. 13.2 construir una cuerda \overline{AB} de longitud s sobre c_1 (Fig. 13.13). Si \overline{AB} interseca c_2 , por Thm. 13.3 multiplicar m, n por un número k para que la cuerda no interseca el círculo. Tenga en cuenta que esto no cambia el valor que estamos tratando de construir desde $x = \frac{kn}{km} s = \frac{n}{m} s$.

Elegir un punto H en c_2 y denotar la longitud de \overline{AH} por w . Construir K sobre c_2 tal que la longitud de \overline{BK} sea w (Fig. 13.14). De $\triangle AHZ \cong \triangle BZK$ por lado-lado ya que $\overline{ZA} = \overline{ZB} = m$ son los radios del mismo círculo, como lo son $\overline{ZH} = \overline{ZK} = n$, y $\overline{AH} = \overline{BK} = w$ por construcción (Fig. 13.15). Del $\triangle AHZ \cong \triangle BZK$ se deduce $\angle AZH = \angle BZK$ y entonces $\angle AZB = \angle HZK$. Es difícil ver esta igualdad desde el diagrama, pero Fig. 13.16 debería aclarar la relación entre los ángulos.

$\triangle ZAB \sim \triangle ZHK$ ya que ambos son triángulos isósceles y hemos demostrado que tienen el mismo ángulo vértice. Rótulo \overline{HK} por x . Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} &= \frac{n}{x} \\ x &= \frac{n}{m} s. \end{aligned}$$

□

13.6 Construcción de la intersección de dos líneas

Teorema 13.8. Dadas dos rectas que contienen los segmentos de recta $\overline{AB}, \overline{CD}$, es posible construir su intersección S .

Demostración. Sean C', D' las reflexiones de C, D alrededor de \overline{AB} . Hay dos casos dependiendo de si C, D se encuentran en el mismo lado de \overline{AB} o en lados diferentes.

¹Suponemos que $m > n$; si no, cambiar la notación.

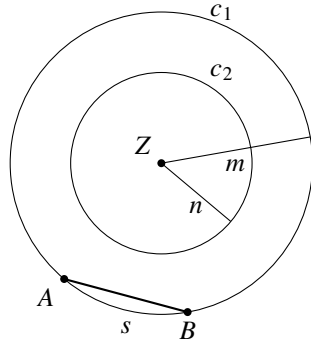


Fig. 13.13: Construcción de $x = \frac{n}{m} s$, paso 1

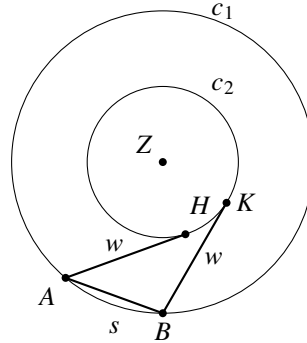


Fig. 13.14: Construcción de $x = \frac{n}{m} s$, paso 2

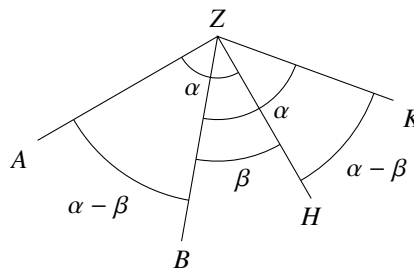
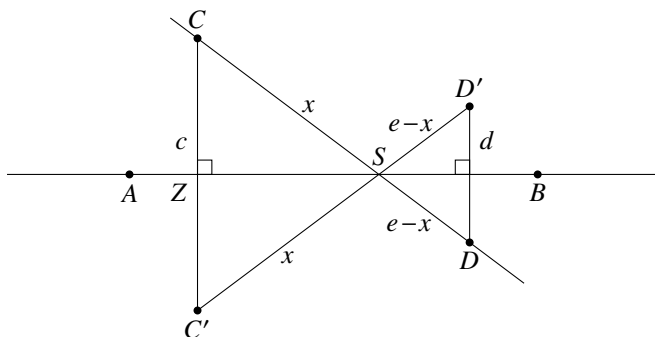


Fig. 13.15: Construcción de $x = \frac{n}{m}s$,
paso 3

Caso 1: C, D están en lados distintos de \overline{AB} . S está en \overline{AB} porque $\triangle CZS \cong \triangle C'ZS$ por lado-ángulo-lado: $\overline{CZ} = \overline{C'Z}$, $\angle CZS = \angle C'ZS = 90^\circ$ y \overline{ZS} es un lado común. Por tanto $\overline{C'S} = \overline{CS}$ y análogamente $\overline{D'S} = \overline{DS}$. $\triangle CSC' \sim \triangle DSD'$ son semejantes por lo que $\frac{x}{e-x} = \frac{c}{d}$ y resolviendo la ecuación se obtiene $x = \frac{c}{c+d}e$.



Caso 2: C, D están en el mismo lado de \overline{AB} . El $\triangle CSC' \sim \triangle DSD'$ da $\frac{x}{x-e} = \frac{c}{d}$ y resolviendo la ecuación se obtiene $x = \frac{c}{c-d}e$.

Construir las circunferencias $c(C', d)$, $c(\overline{D}, e)$ y denotar su intersección por H (Fig. 13.19). La suma de los segmentos de recta $\overline{CC'}$, $\overline{C'H}$ es $c+d$. Hay que demostrar que H está en la prolongación de $\overline{CC'}$ para que \overline{CH} sea un segmento de recta de

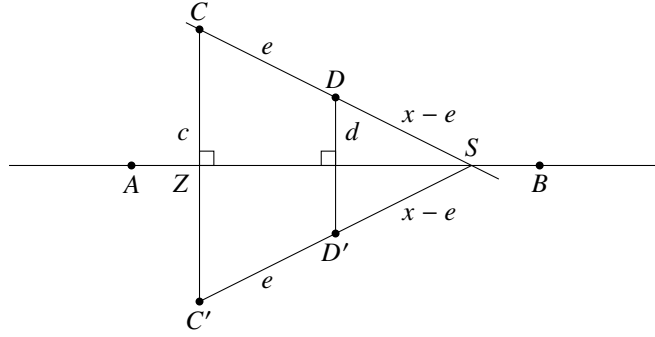


Fig. 13.18: Construcción de la intersección de dos líneas (2)

longitud $c + d$. $\overline{CH} = c - d$ en el caso de que D esté en el mismo lado de \overline{AB} que C (no se muestra en el diagrama).

H es la intersección de $c(C', d)$, $c(D, e)$ por lo que $\overline{DH} = e$, $\overline{C'H} = d$. Por construcción $\overline{C'D'} = e$, $\overline{D'D} = d$ por lo que el cuadrilátero $\overline{C'D'DH}$ es un paralelogramo.

Por construcción $\overline{DD'} \parallel \overline{CC'}$ entonces $\overline{C'H} \parallel \overline{DD'}$ y por tanto $\overline{C'H} \parallel \overline{CC'}$. Como uno de sus extremos es C' debe estar en la recta que contiene a $\overline{CC'}$. Por Thm. 13.3, a partir de las longitudes c, d, e se puede construir un segmento de recta de longitud $c + d$ y por Thm. 13.7 se puede construir un segmento de recta de longitud

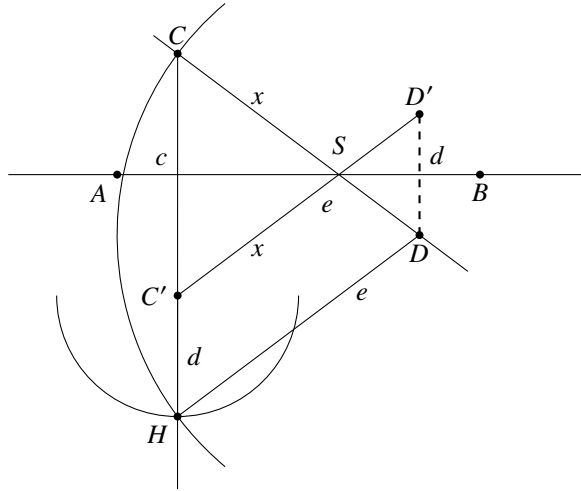


Fig. 13.19: Construcción de la intersección de dos líneas (3)

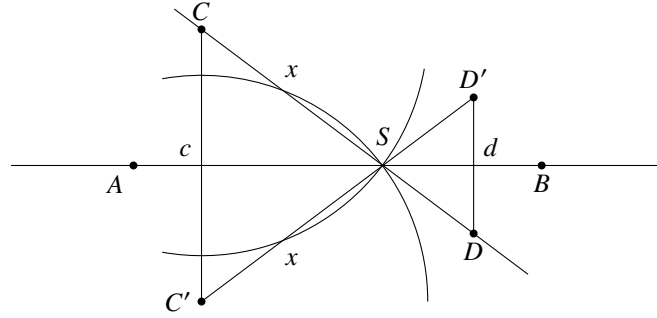


Fig. 13.20: Construcción de la intersección de dos líneas (4)

$x = \frac{c}{c+d}e$. S , la intersección de $c(C', x)$ y $c(C, x)$, es también la intersección de \overline{AB} , \overline{CD} (Fig. 13.20). \square

13.7 Construcción de la intersección de una recta y una circunferencia

Teorema 13.9. *Dada una circunferencia $k = C(M, r)$ y una recta l es posible construir las intersecciones de k y l .*

Demostración. Construir M' , ser la reflexión de M alrededor de l y construir la circunferencia $k' = c(M', r)$. Como $\triangle MYM' \cong \triangle MXM'$, X, Y , los puntos de intersección de k, k' , son los puntos de intersección de l y k . (Fig. 13.21).

Esta construcción no puede hacerse si M está sobre la recta l . En ese caso se elige un punto arbitrario A sobre l que esté a una distancia mayor que r de M . Usando Thm 13.3 acortar y alargar \overline{AM} en r . X, Y , los puntos extremos de estos segmentos, son las intersecciones de k y l (Fig. 13.22). \square

¿Cuál es la sorpresa?

Cuando se aprende a construir con regla y compás, es obvio que ambas herramientas son necesarias. Por lo tanto, fue toda una sorpresa descubrir que un compás es suficiente. La demostración es bastante larga, así que no vamos a dejar la regla en casa, pero el teorema demuestra que no debemos suponer que no existen alternativas a conceptos matemáticos bien conocidos.

Fuentes

Este capítulo se basa en el problema 33 de [13] reelaborado por Michael Woltermann [14]. Una prueba adicional se puede encontrar en [25].

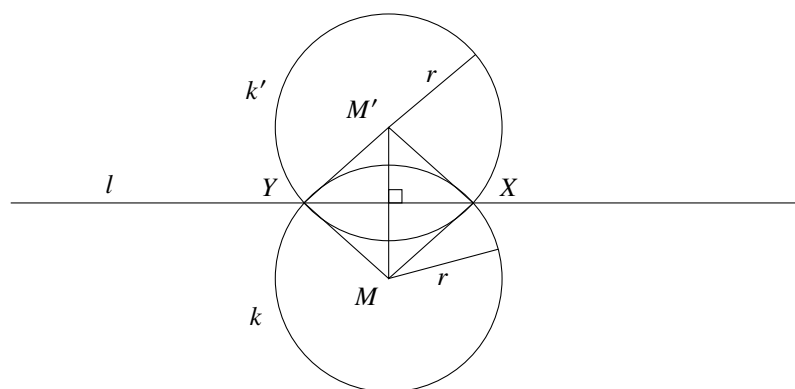


Fig. 13.21: Construcción de la intersección de una recta y una circunferencia (1)

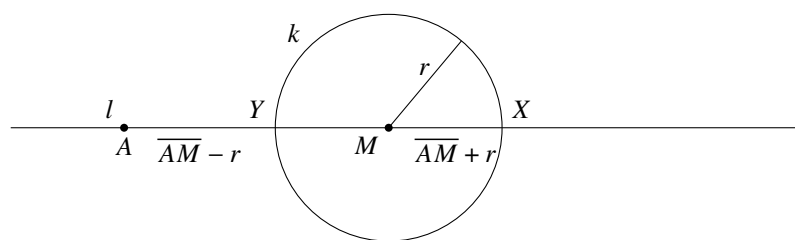


Fig. 13.22: Construcción de la intersección de una recta y una circunferencia (2)

Capítulo 14

Una regla y un círculo son suficientes

¿Se pueden hacer todas las construcciones con regla y compás sólo con regla? La respuesta es no porque las rectas se definen por ecuaciones lineales y no pueden representar círculos que se definen por ecuaciones cuadráticas. En 1822 Jean-Victor Poncelet indexPoncelet, Jean-Victor conjeturó que una regla es suficiente siempre que exista una circunferencia en el plano. Esto fue demostrado en 1833 por Jakob Steiner.

Después de explicar en la Secc. 14.1 lo que significa realizar una construcción con sólo una regla y un círculo, la prueba se presenta en etapas a partir de cinco construcciones auxiliares: la construcción de una línea paralela a una línea dada (Secc. 14.2), construcción de una perpendicular a una recta dada (Secc. 14.3), copia de un segmento de recta en una dirección dada (Secc. 14.4), construcción de un segmento de recta como razón de segmentos (Secc. 14.5) y construcción de una raíz cuadrada (Secc. 14.6). La sección 14.7 muestra cómo encontrar la(s) intersección(es) de una recta con un círculo y la sección 14.8 muestra cómo encontrar la(s) intersección(es) de dos círculos.

14.1 ¿Qué es una construcción sólo con regla?

Una construcción utilizando una regla y un compás es una secuencia de tres operaciones:

- Encontrar el punto de intersección de una recta con un compás.
- Hallar el punto de intersección de dos rectas.
- Hallar el/los punto/s de intersección de una recta y una circunferencia.
- Hallar el punto o puntos de intersección de dos circunferencias.

La primera operación sólo se puede realizar con una regla.

Una circunferencia está definida por un punto O , su *centro*, y por un *radio* r , un segmento de recta de longitud r uno de cuyos extremos es el centro. Si podemos construir los puntos etiquetados X y Y en la Fig. 14.1 podemos afirmar que hemos construido con éxito los puntos de intersección de un círculo dado con una recta dada. Del mismo modo, la construcción de X, Y en la Fig. 14.2 es la construcción de los puntos de intersección de dos círculos dados. Los círculos dibujados con líneas discontinuas en un diagrama no aparecen realmente en una construcción; sólo se utilizan para ayudar a entender la construcción.

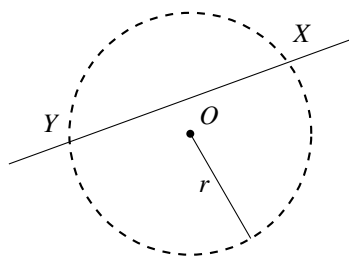


Fig. 14.1: X, Y son los puntos de intersección de una recta y una circunferencia

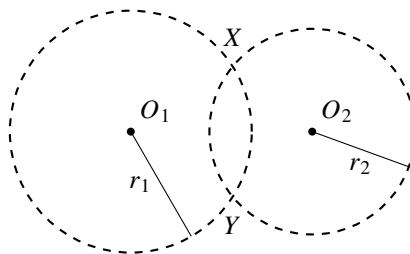


Fig. 14.2: X, Y son los puntos de intersección de dos circunferencias

El único círculo dado utilizado en las construcciones, llamado *círculo fijo*, puede aparecer en cualquier parte del plano y puede tener un radio arbitrario.

14.2 Construcción de una recta paralela a una recta dada

Teorema 14.1. Dada una recta l definida por dos puntos A, B y un punto P que no está en la recta, es posible construir una recta que pase por P y sea paralela a \overline{AB} .

Demostración. Hay dos casos para la prueba.

Caso 1: \overline{AB} es un segmento de recta dirigida si se da el punto medio M de \overline{AB} . Construir una semirrecta que prolongue \overline{AP} y elegir un punto S cualquiera de la semirrecta más allá de P . Construir las rectas $\overline{BP}, \overline{SM}, \overline{SB}$. La intersección de \overline{BP} y \overline{SM} se denota O . Construir una semirrecta que extienda \overline{AO} y denotar por Q la intersección de la semirrecta \overline{AO} con \overline{SB} (Fig. 14.3).

Afirmamos que $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$.

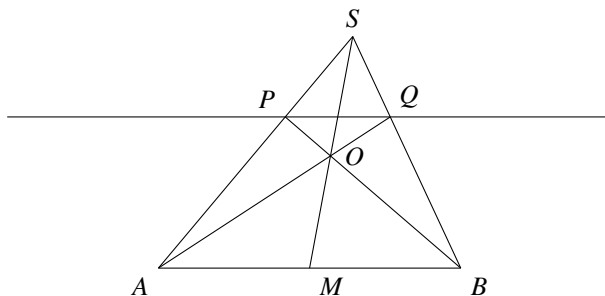


Fig. 14.3: Construcción de una recta paralela en el caso de una recta dirigida

La prueba utiliza el teorema de Ceva.

Teorema de Ceva (Thm. A.19): Si los segmentos de recta desde los vértices de un triángulo a las aristas opuestas se cruzan en un punto O (como en la Fig. 14.3), las longitudes de los segmentos satisfacen:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = 1.$$

En la Fig. 14.3 M es el punto medio de \overline{AB} por lo que $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = 1$ y la ecuación se convierte en:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{SP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}}, \quad (14.1)$$

ya que el orden de los puntos extremos de un segmento de recta no es importante.

Afirmamos que $\triangle ABS \sim \triangle PQS$:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BS}}{\overline{QS}} &= \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + \frac{\overline{QS}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + 1 \\ \frac{\overline{AS}}{\overline{PS}} &= \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + \frac{\overline{PS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + 1. \end{aligned}$$

Utilizando la Ec. 14.1:

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + 1 = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + 1 = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + \frac{\overline{PS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{PS}},$$

y resulta que $\triangle ABS \sim \triangle PQS$ y por lo tanto $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$.

Caso 2: \overline{AB} no es necesariamente un segmento de recta dirigido. La circunferencia fija c tiene centro O y radio r . P es el punto no situado sobre la recta por el que hay que construir una recta paralela a l (Fig. 14.4).

Elegir M , un punto cualquiera de l , y construir una semirrecta que extienda \overline{MO} y que corte a la circunferencia en U, V . \overline{UV} es un segmento de recta dirigida porque O , el centro del círculo, biseca el diámetro \overline{UV} . Elegir un punto A en l y utilizar la construcción de un segmento rectilíneo dirigido (Caso 1) para construir una recta que pase por A paralela a \overline{UV} y que corte a la circunferencia en X, Y (Fig. 14.5).

Construir un diámetro desde X hasta O que corte al otro lado de la circunferencia en X' , y construir análogamente el diámetro $\overline{YY'}$. Construimos la semirrecta desde X' pasando por Y' y denotamos por B su intersección con l . Afirmamos que M es la bisectriz de \overline{AB} de modo que \overline{AB} es un segmento de recta dirigida y por tanto se puede construir una recta que pase por P paralela a l (Fig. 14.6).

$\overline{OX}, \overline{OX'}, \overline{OY}, \overline{OY'}$ son todos radios del círculo y $\angle XOY = \angle X'OY'$ ya que son ángulos verticales, por lo que $\triangle XOY \cong \triangle X'OY'$ por lado-ángulo-lado. Definir¹ l'

¹definir, no construir, porque estamos en medio de la prueba de que tal recta se puede construir.

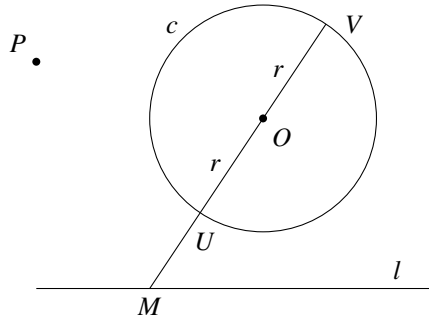


Fig. 14.4: Construcción de una línea dirigida

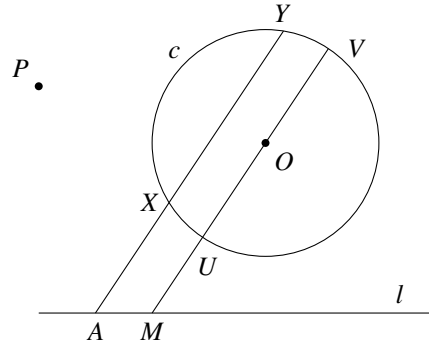


Fig. 14.5: Construcción de una línea paralela a la línea dirigida

como una recta que pasa por O paralela a l y que interseca a \overline{XY} en Z y a $\overline{X'Y'}$ en Z' . $\angle XOZ = \angle X'OZ'$ son ángulos verticales, $\angle ZXO = \angle Z'X'O$ son ángulos interiores alternos y $\overline{XO} = \overline{X'O'}$ son radios, por lo que $\triangle XOZ \cong \triangle X'OZ'$ por ángulo-lado-ángulo y $\overline{ZO} = \overline{OZ'}$. Por tanto, \overline{AMOZ} y $\overline{BMOZ'}$ son paralelogramos y $\overline{AM} = \overline{ZO} = \overline{OZ'} = \overline{MB}$. \square

Teorema 14.2. Dado un segmento de recta \overline{AB} y un punto P que no está en la recta, es posible construir un segmento de recta \overline{PQ} que sea paralelo a \overline{AB} y cuya longitud sea igual a la longitud de \overline{AB} , es decir, es posible copiar \overline{AB} paralelo a sí mismo con P como uno de sus puntos extremos.

Demostración. We have proved that it is possible to construct a line m through P parallel to \overline{AB} and a line n through B parallel to \overline{AP} . The quadrilateral \overline{ABQP} is

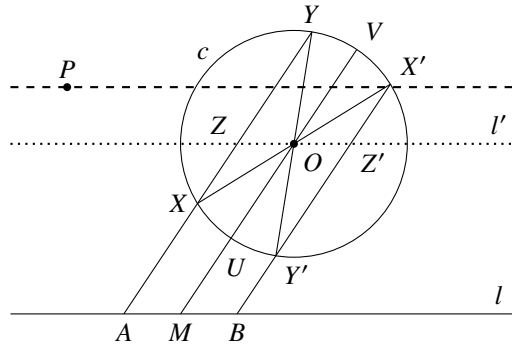


Fig. 14.6: Prueba de que l' es paralelo a l

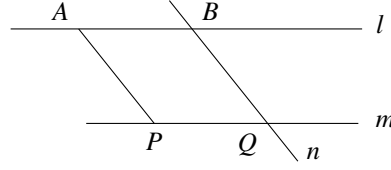


Fig. 14.7: Construcción de una copia de una línea paralela a una línea existente

a parallelogram so opposite sides are equal $\overline{AB} = \overline{PQ}$ (Fig. 14.7). \square

14.3 Construcción de una perpendicular a una recta dada

Teorema 14.3. *Dado un segmento de recta l y un punto P que no está en l , es posible construir una perpendicular a l que pase por P .*

Demostración. Por Thm. 14.1 construir una recta l' paralela a l que corte a la circunferencia fija en U, V . Construir el diámetro $\overline{OUU'}$ y la cuerda $\overline{VU'}$ (Fig. 14.8). El $\angle UVU'$ es un ángulo recto porque está subtendido por un diámetro. Por tanto $\overline{VU'}$ es perpendicular a \overline{UV} y l . De nuevo por Thm. 14.1 construimos la paralela a $\overline{VU'}$ a través de P . \square

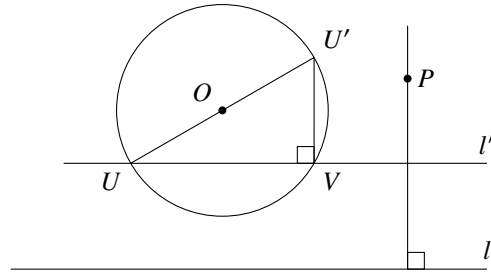


Fig. 14.8: Construcción de una línea perpendicular

14.4 Copiar un segmento de línea en una dirección determinada

Teorema 14.4. *Es posible construir una copia de un segmento de recta dado en la dirección de otra recta.*

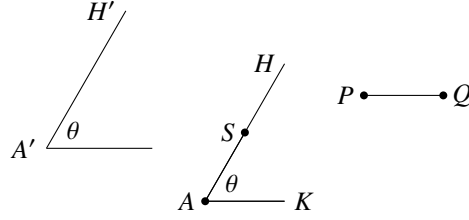


Fig. 14.9: Copiar un segmento de línea en una dirección determinada

El significado de “dirección” es que la línea definida por dos puntos A', H' tiene un ángulo θ relativo a algún eje y el objetivo es construir $\overline{AS} = \overline{PQ}$ tal que \overline{AS} tenga el mismo ángulo θ relativo a ese eje (Fig. 14.9).

Demostración. Por Thm. 14.2 es posible construir un segmento de recta \overline{AH} tal que $\overline{AH} \parallel \overline{A'H'}$, y construir un segmento de recta \overline{AK} tal que $\overline{AK} \parallel \overline{PQ}$ y $\overline{AK} = \overline{PQ}$. $\angle HAK = \theta$ por lo que queda por encontrar un punto S en \overline{AH} de modo que $\overline{AS} = \overline{PQ}$.

Construir dos radios $\overline{OU}, \overline{OV}$ de la circunferencia fija que sean paralelos a $\overline{AH}, \overline{AK}$, respectivamente, y construir una semirrecta que pase por K paralela a \overline{UV} . Denotemos su intersección con \overline{AH} por S (Fig. 14.10). Por construcción, $\overline{AH} \parallel \overline{OU}$ y $\overline{AK} \parallel \overline{OV}$, por lo que $\angle SAK = \angle HAK = \angle UOV = \theta$. Si $\overline{SK} \parallel \overline{UV}$ y $\triangle SAK \sim \triangle UOV$ por ángulo-ángulo-ángulo, $\triangle UOV$ es isósceles porque $\overline{OU}, \overline{OV}$ son radios de la misma circunferencia. Por lo tanto, $\triangle SAK$ es isósceles y $\overline{AS} = \overline{AK} = \overline{PQ}$. \square

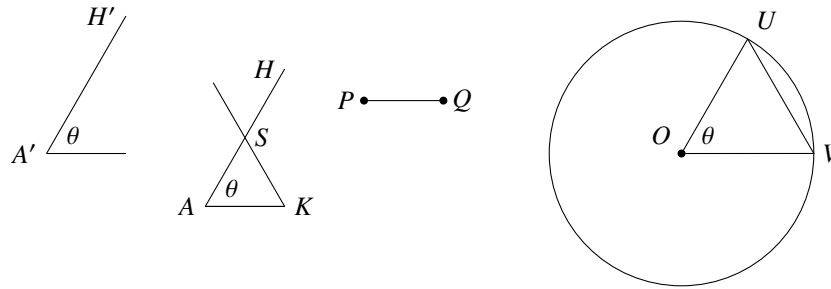


Fig. 14.10: Utilizar el círculo fijo para copiar el segmento de línea

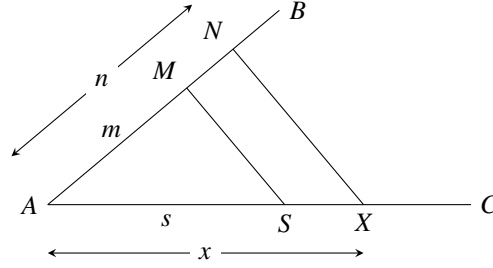


Fig. 14.11: Triángulos semejantes para construir la relación de longitudes

14.5 Construcción de un segmento de línea como cociente de segmentos

Teorema 14.5. *Dados segmentos de recta de longitudes n, m, s , es posible construir un segmento de recta de longitud:*

$$x = \frac{n}{m} s.$$

Demostración. Elegir puntos A, B, C que no estén en la misma recta y construir rayos $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Por Thm. 14.4 se pueden construir puntos M, N, S tales que $\overline{AM} = m$, $\overline{AN} = n$, $\overline{AS} = s$. Por Thm. 14.1 construir una recta que pase por N paralela a \overline{MS} que corte a \overline{AC} en X y etiquetar \overline{AX} por x (Fig. 14.11). $\triangle MAS \sim \triangle NAX$ por ángulo-ángulo-ángulo así $\frac{m}{n} = \frac{s}{x}$ y $x = \frac{n}{m}s$. \square

14.6 Construcción de una raíz cuadrada

Teorema 14.6. *Dados segmentos de recta de longitudes a, b , es posible construir un segmento de recta de longitud \sqrt{ab} .*

Demostración. Queremos expresar $x = \sqrt{ab}$ como $x = \frac{n}{m}s$ para usar Thm. 14.5.

- Para n utilizamos d , el diámetro del círculo fijo.
- Para m utilizamos $t = a + b$ que se puede construir a partir de a, b mediante Thm. 14.4.
- Definimos $s = \sqrt{hk}$ donde h, k se definen como expresiones sobre las longitudes a, b, t, d .

Definir $h = \frac{d}{t}a$ y $k = \frac{d}{t}b$ y luego calcular:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{th}{d} \frac{tk}{d}} = \sqrt{\left(\frac{t}{d}\right)^2 hk} = \frac{t}{d} \sqrt{hk} = \frac{t}{d} s \\ h + k &= \frac{d}{t}a + \frac{d}{t}b = \frac{d(a+b)}{t} = \frac{dt}{t} = d. \end{aligned}$$

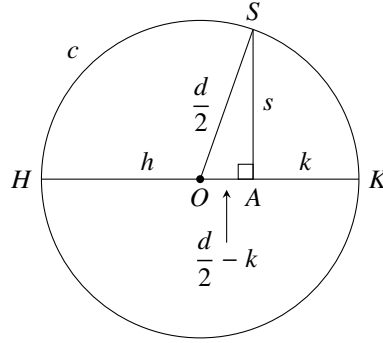


Fig. 14.12: Construcción de una raíz cuadrada

Por Thm. 14.4 construir $\overline{HA} = h$ en un diámetro \overline{HK} del círculo fijo. De $h + k = d$ tenemos $\overline{AK} = k$ (Fig. 14.12). Por Thm. 14.3 construimos una perpendicular a \overline{HK} en A y denotamos la intersección de esta recta con la circunferencia por S . $\overline{OS} = \overline{OK} = d/2$ y $\overline{OA} = (d/2) - k$.

Por el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} s^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - k\right)^2 \\ &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2\frac{dk}{2} - k^2 \\ &= k(d - k) = kh \\ s &= \sqrt{hk}. \end{aligned}$$

Ahora $x = \frac{t}{d}s$ se puede construir por Thm. 14.5. □

14.7 Construcción de la intersección de una recta y una circunferencia

Teorema 14.7. Dada una recta l y una circunferencia $c(O, r)$, es posible construir sus puntos de intersección (Fig. 14.13).

Demostración. Por Thm. 14.3 es posible construir una perpendicular desde el centro del círculo O a la recta l . La intersección de l con la perpendicular se denota por M . \overline{OM} biseca la cuerda \overline{XY} , donde X, Y son las intersecciones de la recta con la circunferencia (Fig. 14.14). Definir $\overline{XY} = 2s$ y $\overline{OM} = t$. Tenga en cuenta que s, X, Y son sólo definiciones no se han construido entidades.

Por el Teorema de Pitágoras $s^2 = r^2 - t^2 = (r+t)(r-t)$. Por Thm. 14.4 es posible construir segmentos de recta de longitud t a partir de O en las dos direcciones \overline{OR} y \overline{RO} . El resultado son dos segmentos de recta de longitud $r + t, r - t$.

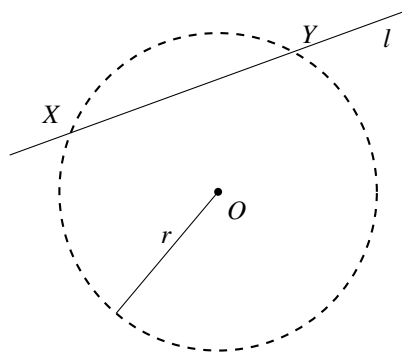


Fig. 14.13: Construcción de los puntos de intersección de una recta y una circunferencia (1)

Por Thm. 14.6 se puede construir un segmento de recta de longitud $s = \sqrt{(r+t)(r-t)}$, y por Thm. 14.4 se pueden construir segmentos de línea de longitud s desde M a lo largo de l en ambas direcciones. Sus otros extremos son los puntos de intersección de l y c . \square

14.8 Construcción de la intersección de dos circunferencias

Teorema 14.8. Dadas dos circunferencias $c(O_1, r_1), c(O_2, r_2)$, es posible construir sus puntos de intersección.

Demostración. Construye $\overline{O_1O_2}$ y marca su longitud t (Fig. 14.15). Etiquetar por A ser el punto de intersección de $\overline{O_1O_2}$ y \overline{XY} , y etiquetar $q = \overline{O_1A}$, $x = \overline{XA}$

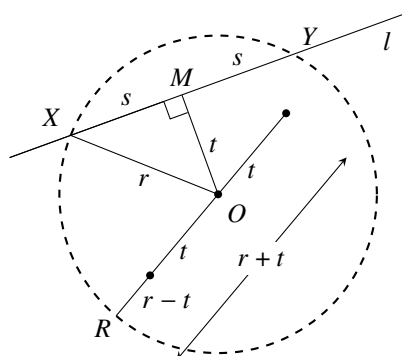


Fig. 14.14: Construcción de los puntos de intersección de una recta y una circunferencia (2)

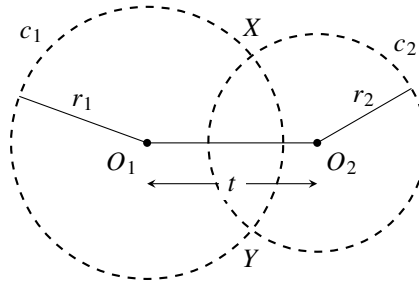


Fig. 14.15: Construcción de la intersección de dos circunferencias (1)

(Fig. 14.16). A aún no se ha construido, pero si q, x se construyen entonces por Thm. 14.4 se puede construir el punto A a la longitud q de O_1 en la dirección $\overline{O_1O_2}$.

Una vez construido A , por Thm. 14.3 se puede construir una perpendicular a $\overline{O_1O_2}$ en A , y por Thm. 14.4 es posible construir segmentos de recta de longitud x desde A en ambas direcciones a lo largo de la perpendicular. Sus otros puntos extremos son los puntos de intersección de las circunferencias.

Construcción de la longitud q : Definir $d = \sqrt{r_1^2 + t^2}$, la hipotenusa de un triángulo rectángulo, que se puede construir a partir de las longitudes conocidas r_1, t . Obsérvese que $\triangle O_1XO_2$ no es necesariamente un triángulo rectángulo; el triángulo rectángulo puede construirse en cualquier parte del plano. En el triángulo rectángulo $\triangle XAO_1$, $\cos \angle XO_1A = q/r_1$. Por la Ley de los Cosenos para $\triangle XO_1O_2$:

$$\begin{aligned} r_2^2 &= t^2 + r_1^2 - 2r_1t \cos \angle XO_1O_2 \\ &= t^2 + r_1^2 - 2tq \\ 2tq &= (t^2 + r_1^2) - r_2^2 = d^2 - r_2^2 \\ q &= \frac{(d + r_2)(d - r_2)}{2t}. \end{aligned}$$

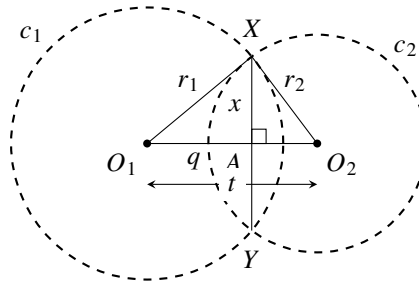


Fig. 14.16: Construcción de la intersección de dos circunferencias (2)

Por Thm. 14.4 estas longitudes se pueden construir y por Thm. 14.5 q se puede construir a partir de $d + r_2, d - r_2, 2t$.

Construcción de la longitud x : Por el Teorema de Pitágoras:

$$x = \sqrt{r_1^2 - q^2} = \sqrt{(r_1 + q)(r_1 - q)}.$$

Por Thm. 14.4, $h = r_1 + q, k = r_1 - q$ puede construirse, al igual que $x = \sqrt{hk}$ by Thm. 14.6. □

¿Cuál es la sorpresa?

El compás es necesario porque una regla sólo puede calcular las raíces de ecuaciones lineales y no valores como $\sqrt{2}$, la hipotenusa de un triángulo rectángulo isóceles con lados de longitud 1. Sin embargo, es sorprendente que la existencia de una sola circunferencia, independientemente de la posición de su centro y de la longitud de su radio, sea suficiente para realizar cualquier construcción que sea posible con una regla y un compás.

Fuentes

Este capítulo se basa en el problema 34 de [13] reelaborado por Michael Woltermann [14].

Capítulo 15

Are Triangles with Equal Areas and Perimeters Congruent?

¿Son congruentes dos triángulos con la misma área y el mismo perímetro? No necesariamente: los triángulos con lados $(17, 25, 28)$ y $(20, 21, 29)$ tienen ambos perímetro 70 y área 210 pero no son congruentes (Fig. 15.1).¹ Este capítulo muestra que dado un triángulo de lados racionales es posible construir un triángulo no congruente, también de lados racionales, que tenga la misma área y el mismo perímetro. Llevamos a cabo la derivación utilizando un ejemplo, mostrando que el triángulo de lados $(3, 4, 5)$ y el triángulo de lados $\left(\frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15}\right)$ tienen ambos perímetro 12 y área 6.

15.1 De un triángulo a una curva elíptica

Las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo se intersectan en un punto llamado *éncentro* del triángulo. El éncentro es el centro de una circunferencia inscrita en el triángulo (Fig. 15.2).

Deja caer altitudes desde el centro O a los lados. Las altitudes tienen longitud r , el radio de la circunferencia inscrita. Las altitudes y las bisectrices de los ángulos crean tres pares de triángulos rectángulos congruentes:

$$\triangle AOB' \cong \triangle AOC', \quad \triangle BOA' \cong \triangle BOC', \quad \triangle COA' \cong \triangle COB'.$$

¹Las áreas se calcularon mediante la fórmula de Herón (Thm. A.3) y los ángulos mediante la ley de los cosenos (Thm. A.8).

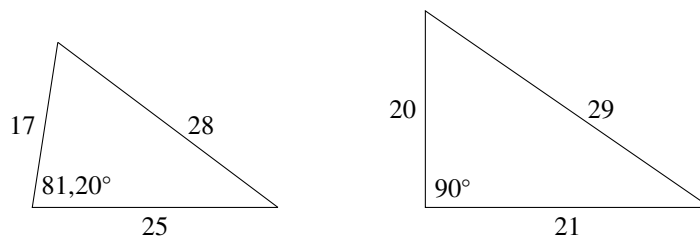


Fig. 15.1: Triángulos no congruentes con la misma área y el mismo perímetro

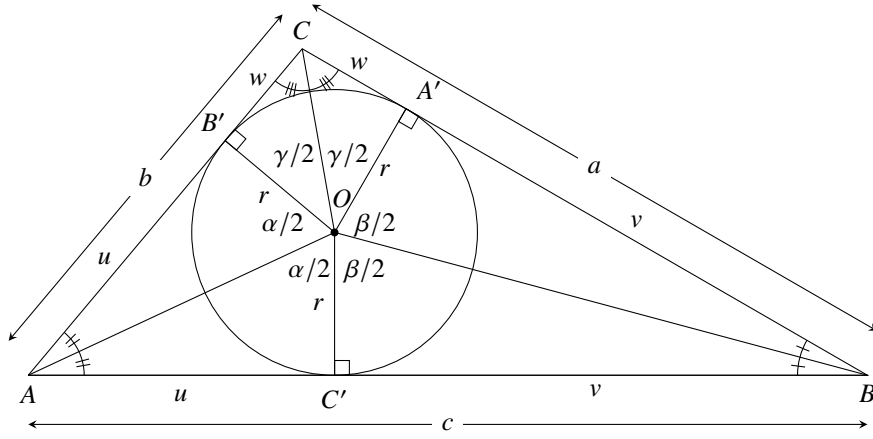


Fig. 15.2: Un círculo inscrito en un triángulo

Las altitudes dividen los lados a, b, c en segmentos u, v, w . El área del $\triangle ABC$ es la suma de las áreas del $\triangle BOC, \triangle AOB, \triangle AOC$:

$$A = \frac{1}{2}(w+v)r + \frac{1}{2}(v+u)r + \frac{1}{2}(u+w)r \quad (15.1a)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2(u+v+w)r \quad (15.1b)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)r \quad (15.1c)$$

$$= sr, \quad (15.1d)$$

donde s es el *semiperímetro*, la mitad del perímetro del triángulo $\triangle ABC$. Las longitudes de u, v, w se pueden expresar utilizando el radio de la circunferencia y los ángulos centrales $\alpha/2, \beta/2, \gamma/2$:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{u}{r}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{v}{r}, \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{w}{r}. \quad (15.2)$$

El semiperímetro puede expresarse ahora en términos de las tangentes:

$$s = u + v + w = r \tan \frac{\alpha}{2} + r \tan \frac{\beta}{2} + r \tan \frac{\gamma}{2} = r \left(\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \right),$$

y por Eq. 15.1d el área es:

$$A = sr = r^2 \left(\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \right). \quad (15.3)$$

A partir de $r = A/s$, la Ec. 15.3 puede escribirse como:

$$\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{A}{r^2} = \frac{A}{(A/s)^2} = \frac{s^2}{A}. \quad (15.4)$$

Ya que la suma de los ángulos α, β, γ es 360° :

$$\gamma/2 = 360^\circ/2 - (\alpha/2 + \beta/2) \quad (15.5a)$$

$$\tan \gamma/2 = \tan(180^\circ - (\alpha/2 + \beta/2)) \quad (15.5b)$$

$$= -\tan(\alpha/2 + \beta/2) \quad (15.5c)$$

$$= \frac{\tan \alpha/2 + \tan \beta/2}{\tan \alpha/2 \tan \beta/2 - 1}, \quad (15.5d)$$

utilizando la fórmula de la tangente de la suma de dos ángulos (Thm. A.9).

Simplifiquemos la notación definiendo variables para las tangentes:

$$x = \tan \frac{\alpha}{2}, \quad y = \tan \frac{\beta}{2}, \quad z = \tan \frac{\gamma}{2}. \quad (15.6)$$

Por la Ec. 15.5d podemos expresar $z = \tan \gamma/2$ en términos de x, y :

$$z = \frac{x + y}{xy - 1}. \quad (15.7)$$

Con esta notación, la Ec. 15.4 se convierte en:

$$x + y + \frac{x + y}{xy - 1} = \frac{s^2}{A}. \quad (15.8)$$

Dados valores fijos de A y s ¿existen múltiples soluciones de Eq. 15.8?

Para el triángulo rectángulo (3, 4, 5):

$$\frac{s^2}{A} = \frac{\left(\frac{1}{2}(3 + 4 + 5)\right)^2}{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6^2}{6} = 6. \quad (15.9)$$

Si hay otra solución Ec. 15.8 con $s^2/A = 6$, se puede escribir como:

$$x + y + \frac{x + y}{xy - 1} = 6 \quad (15.10a)$$

$$x^2y + xy^2 - 6xy + 6 = 0. \quad (15.10b)$$

Esta es una ecuación para una *curva elíptica*.

15.2 Resolución de la ecuación de la curva elíptica

Una porción de la gráfica de la Ec. 15.10b se muestra Fig. 15.3. Cualquier punto de la curva cerrada en el primer cuadrante es una solución de la ecuación porque

las longitudes de los lados del triángulo deben ser positivas. A, B, D corresponden al triángulo $(3, 4, 5)$ como se muestra a continuación. Para encontrar soluciones racionales adicionales se utiliza el método de las dos secantes.

Construir una secante a través de los puntos $A = (2, 3), B = (1, 2)$. Corta la curva en $C = (-1, 5, -0, 5)$, pero no da solución porque los valores son negativos. Construir una segunda secante desde C hasta $D = (3, 2)$. La intersección con la curva en $E \approx (1, 5, 1, 2)$ da una nueva solución cuyas coordenadas se calcularán a continuación.

La ecuación de la recta (roja) que pasa por A, B es $y = x + 1$. En Eq. 15.10b:

$$\begin{aligned}x^2(x+1) + x(x+1)^2 - 6x(x+1) + 6 &= 0 \\2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 &= 0.\end{aligned}$$

De A, B conocemos dos raíces $x = 2, x = 1$ por lo que podemos factorizar el polinomio cúbico:

$$(x-2)(x-1)(ax+b) = 0,$$

donde la tercera raíz es desconocida. Multiplicamos los factores y concluimos que $a = 2, b = 3$ ya que $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = ax^3 + \dots + 2b$. El tercer factor es $2x + 3$ lo que da la tercera raíz $x = -\frac{3}{2}$ e $y = x + 1 = -\frac{1}{2}$. Este es el punto $C = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ de la gráfica.

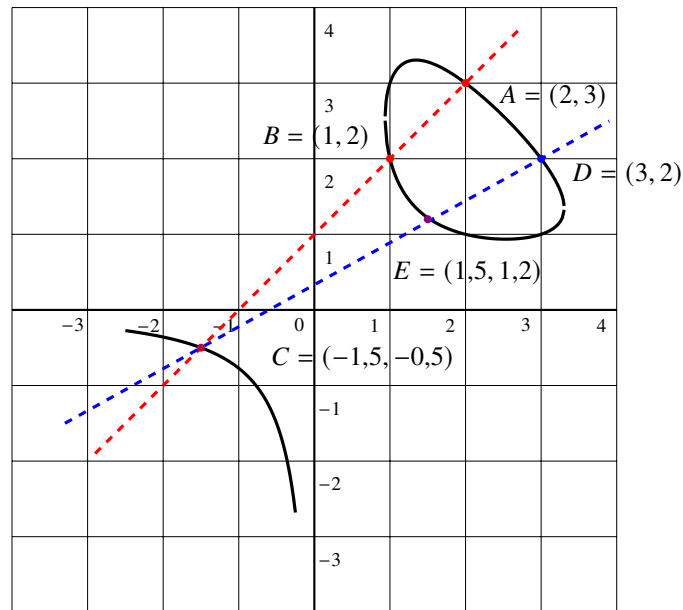


Fig. 15.3: El método de las dos secantes

La ecuación de la recta (azul) que pasa por C, D es:

$$y = \frac{5}{9}x + \frac{1}{3}. \quad (15.11)$$

Sustituir por y en la Ec. 15.10b:

$$\begin{aligned} x^2 \left(\frac{5}{9}x + \frac{1}{3} \right) + x \left(\frac{5}{9}x + \frac{1}{3} \right)^2 - 6x \left(\frac{5}{9}x + \frac{1}{3} \right) + 6 &= 0 \\ \frac{70}{81}x^3 - \frac{71}{27}x^2 - \frac{17}{9}x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

De C, D sabemos dos raíces $x = 3, x = -\frac{3}{2}$ por lo que podemos factorizar el polinomio cúbico:

$$(x - 3) \left(x + \frac{3}{2} \right) (ax + b) = 0.$$

Igualando los coeficientes del término cúbico y los términos constantes se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{70}{81}x - \frac{4}{3} &= 0 \\ x &= \frac{54}{35} \approx 1,543, \end{aligned}$$

y y se puede calcular a partir de la Ec. 15.11:

$$y = \frac{25}{21} \approx 1,190.$$

Las coordenadas de E son:

$$\left(\frac{54}{35}, \frac{25}{21} \right) = (1,543, 1,190),$$

que se acercan a las aproximaciones $(1, 5, 1, 2)$ obtenidas del gráfico.

Por último, calcula z a partir de la Ec. 15.7:

$$z = \frac{x + y}{xy - 1} = \left(\frac{54}{35} + \frac{25}{21} \right) / \left(\frac{54}{35} \frac{25}{21} - 1 \right) = \frac{2009}{615} = \frac{49}{15}.$$

15.3 Derivación de un triángulo a partir de la curva elíptica

Usando las Ecs. 15.2, 15.6, a, b, c , los lados del triángulo $\triangle ABC$, se pueden calcular a partir de x, y, z y $r = A/s = 6/6 = 1$:

$$\begin{aligned} a &= w + v = r(z + y) = (z + y) \\ b &= u + w = r(x + z) = (x + z) \\ c &= u + v = r(x + y) = (x + y). \end{aligned}$$

Para la solución A de la curva elíptica los lados del triángulo son:

$$\begin{aligned}a &= z + y = 1 + 3 = 4 \\b &= x + z = 2 + 1 = 3 \\c &= x + y = 2 + 3 = 5.\end{aligned}$$

Para la solución E de la curva elíptica los lados del triángulo son:

$$\begin{aligned}a &= z + y = \frac{49}{15} + \frac{25}{21} = \frac{156}{35} \\b &= x + z = \frac{54}{35} + \frac{49}{15} = \frac{101}{21} \\c &= x + y = \frac{54}{35} + \frac{25}{21} = \frac{41}{15}.\end{aligned}$$

Comprobemos este resultado. El semiperímetro es:

$$s = \frac{1}{2} \left(\frac{156}{35} + \frac{101}{21} + \frac{41}{15} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{468 + 505 + 287}{105} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1260}{105} \right) = 6,$$

y el área puede calcularse mediante la fórmula de Heron (Thm. A.3):

$$A = \sqrt{6 \left(6 - \frac{156}{35} \right) \left(6 - \frac{101}{21} \right) \left(6 - \frac{41}{15} \right)} = \sqrt{36} = 6.$$

¿Es $\left(\frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15} \right) \cong (3, 4, 5)$? Para simplificar el cálculo vamos a utilizar las aproximaciones decimales $(4, 48, 4, 81, 2, 73)$. Entonces:

$$\sqrt{4,48^2 + 2,73^2} = 5,25 \neq 4,81,$$

por lo que no es un triángulo rectángulo y no es congruente con $(3, 4, 5)$.

La ley de los cosenos se puede utilizar para calcular los ángulos del triángulo como se muestra en Fig. 15.4.

¿Cuál es la sorpresa?

¿Son congruentes los triángulos que tienen la misma área y el mismo perímetro? Mi primera impresión fue decir “sí” porque no es fácil encontrar contraejemplos. Lo sorprendente es que dado un triángulo arbitrario de lados racionales, es posible construir un triángulo no congruente de lados racionales que tenga la misma área y perímetro, aunque el resultado puede ser extraño como en el caso de los triángulos $(3, 4, 5)$ y $\left(\frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15} \right)$.

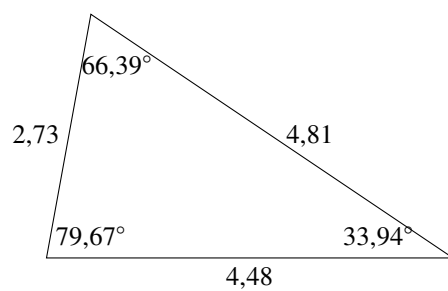


Fig. 15.4: *El triángulo con el mismo perímetro y área que (3, 4, 5)*

Fuentes

Este capítulo se basa en [33]. En [3] se demuestra que dado un triángulo isóceles hay triángulos no congruentes con la misma área y perímetro, pero la prueba no incluye una construcción explícita.

Capítulo 16

Construction of a Regular Heptadecagon

Los únicos polígonos regulares que los griegos sabían construir con regla y compás eran el triángulo, el cuadrado, el pentágono y el polígono regular de 15 lados. Dado un polígono regular de n lados, se puede construir un polígono de $2n$ lados circunscribiendo el polígono con un círculo y bisecando el ángulo central (Fig. 16.1). No se hicieron más progresos hasta 1796, cuando Carl Friedrich Gauss se despertó una mañana, justo antes de cumplir 19 años, y mediante "pensamiento concentrado" descubrió cómo construir un *heptadecágono* regular, un polígono regular con 17 lados. Este logro le inspiró para convertirse en matemático.

En la sección 16.1 se analiza la relación entre el lado de un polígono inscrito en una circunferencia y el ángulo central que subtiende. En la sección 16.2 se expone sin pruebas el Teorema Fundamental del Álgebra. Sección 16.3 presenta las raíces de la unidad, las raíces del polinomio $x^n - 1$, que son fundamentales para la demostración de Gauss. Las secciones 16.4 y 16.5 presentan la prueba de Gauss que se basa en simetrías de raíces de polinomios. Gauss derivó una fórmula que demuestra que el heptadecágono es construible, pero no se dio una construcción geométrica hasta casi un siglo después. La sección Construcción ofrece una elegante construcción de James J. Callagy. La sección 16.7 muestra cómo las construcciones de un pentágono regular se pueden derivar utilizando tanto la geometría como la trigonometría.

Parte del material es más sencillo si se presenta utilizando números complejos. Este material se establece en las cajas que se pueden saltar.

16.1 Construcción de polígonos regulares

La construcción del heptadecágono regular condujo al teorema de Gauss-Wantzel, que afirma que un polígono regular con n lados se puede construir con una regla y

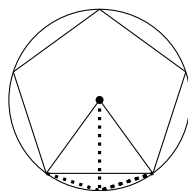


Fig. 16.1: Construcción de un polígono regular de 10 lados a partir de un pentágono regular

un compás si y sólo si n es el producto de una potencia de 2 y cero o más números de Fermat que sean primos. números de Fermat $2^{2^k} + 1$ que son primos. Los números primos de Fermat conocidos son:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537.$$

Un polígono regular con 257 lados fue construido por Magnus Georg Paucker en 1822 y por Friedrich Julius Richelot en 1832. En 1894 Johann Gustav Hermes afirmó haber construido un polígono regular con 65537 lados.

Para construir un polígono regular basta con construir un segmento de recta de longitud $\cos \theta$, donde θ es el ángulo central subtendido por una cuerda que es un lado del polígono inscrito en un círculo unitario. Dado el segmento de recta $\overline{OB} = \cos \theta$, construir una perpendicular en B y señalar su intersección con la circunferencia unitaria por C . Entonces:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \overline{OB} \\ \theta &= \cos^{-1}(\overline{OB}). \end{aligned}$$

La cuerda \overline{AC} es un lado del polígono regular (Fig. 16.2).

Dado un segmento de recta definido con longitud 1, las longitudes que son construibles son las que se pueden obtener a partir de segmentos de recta de longitud conocida mediante las operaciones $\{+, -, \times, /, \sqrt{\cdot}\}$ (Sect. 2.5). Gauss demostró que $\cos(360^\circ/17)$, el coseno del ángulo central de un heptadecágono, es construible ya que se puede expresar utilizando sólo estas operaciones:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\ &\quad \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \end{aligned}$$

16.2 Teorema fundamental del álgebra

El siguiente teorema se utilizará sin demostración.

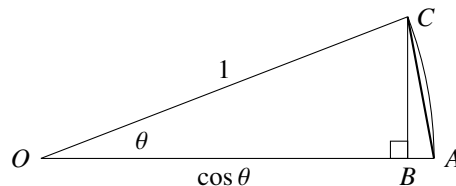


Fig. 16.2: El coseno del ángulo central de un polígono regular

Teorema 16.1. *Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces.*

El enunciado del teorema se ha simplificado porque todo lo que necesitaremos saber es que n raíces *existen*.

El Teorema Fundamental del Álgebra afirma que todo polinomio no constante de grado n en una sola variable con *complex* coeficientes tiene exactamente n *complex* raíces. Si hay varias raíces con el mismo valor, se cuentan todas: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x - 2)$ tiene dos raíces ambas iguales a 2. El polinomio $x^2 + 1$ con coeficientes enteros tiene dos raíces complejas $\pm\sqrt{-1}$. Curiosamente, aunque el teorema se refiere a entidades algebraicas finitas -polinomios de grado n con n raíces- se necesitan métodos de análisis, normalmente análisis complejo, para demostrar el teorema.

16.3 Raíces de unidad

Por el Teorema Fundamental del Álgebra (Thm. 16.1) el polinomio $x^n - 1$ tiene n raíces para cualquier entero $n > 1$. Una raíz es $x = 1$ por lo que hay $n - 1$ otras raíces. Denotemos una de estas raíces por r . Desde $r^n = 1$ se llama un *n -ésima raíz de la unidad*. ¿Y r^2 ?

$$(r^2)^n = (r^n)^2 = 1^2 = 1.$$

Se deduce que los números n :

$$1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}$$

son *n -ésimas raíces de la unidad*.

Let $r = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Por la fórmula de Moivre:

$$\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right]^n = \cos\left(\frac{2n\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2n\pi}{n}\right) = 1.$$

Teorema 16.2. *Sea n un número primo y sea r una raíz n -ésima de la unidad. Entonces:*

$$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$$

son distintos por lo que son all la n -ésima raíces de la unidad.

Demostración. Supongamos que las potencias no son distintas de modo que $r^i = r^j$ para algún $0 \leq i < j \leq n-1$. Entonces $r^j/r^i = r^{j-i} = 1$ por lo que existe al menos un entero positivo i' menor que n tal que $r^{i'} = 1$. Sea m el menor de dichos enteros positivos. Por el algoritmo de división de enteros $n = ml + k$ para algún $0 < l < n$ y $0 \leq k < m$. De:

$$1 = r^n = r^{ml+k} = (r^m)^l \cdot r^k = 1^l \cdot r^k = r^k,$$

tenemos $0 \leq k < m$ y $r^k = 1$. Dado que m se definió como el menor entero positivo $k = 0$ y $n = ml$ no es primo. \square

Teorema 16.3. Sean $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ las raíces de un polinomio de grado n -ésimo $f(x)$. Entonces:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-1})(x - a_n). \quad (16.1)$$

Demostración. Si a_i es una raíz de $f(x)$ por definición $f(a_i) = 0$ pero:

$$\begin{aligned} f(a_i) &= (a_i - a_1)(a_i - a_2) \cdots (a_i - a_{n-1})(a_i - a_n) \\ &= \cdots (a_i - a_i) \cdots = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $f(x) = (x - a_i)g_i(x)$ para algún $g_i(x)$ y por inducción esto vale para todas las raíces. \square

A partir de la Ec. 16.1 es fácil ver que el coeficiente de x^{n-1} es:

$$-(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n).$$

Dado que el coeficiente de x^{n-1} en $x^n - 1$ para $n \geq 2$ es cero, tenemos:

$$\begin{aligned} -(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}) &= 0 \\ r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} &= -1. \end{aligned}$$

Para el heptadecágono esto es:

$$\begin{aligned} r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + r^7 + r^8 + \\ r^9 + r^{10} + r^{11} + r^{12} + r^{13} + r^{14} + r^{15} + r^{16} = -1. \end{aligned} \quad (16.2)$$

16.4 Prueba de Gauss de que un heptadecágono es construible

Lo que Gauss entendió es que no es necesario trabajar con las raíces en su orden natural r, r^2, \dots, r^{16} . Los $3^0, 3^1, 3^2, \dots$ potencias de r dan todas las raíces pero en un orden diferente:

$$\begin{aligned} r^1, r^{1 \cdot 3=3}, r^{3 \cdot 3=9}, r^{9 \cdot 3=27=10}, r^{10 \cdot 3=30=13}, r^{13 \cdot 3=39=5}, r^{5 \cdot 3=15}, r^{15 \cdot 3=45=11}, \\ r^{11 \cdot 3=33=16}, r^{16 \cdot 3=48=14}, r^{14 \cdot 3=42=8}, r^{8 \cdot 3=24=7}, r^{7 \cdot 3=21=4}, r^{4 \cdot 3=12}, r^{12 \cdot 3=36=2}, r^{2 \cdot 3=6}, \end{aligned}$$

donde las raíces han sido reducidas modulo 17:

$$r^{17m+k} = (r^{17})^m \cdot r^k = 1^m \cdot r^k = r^k .$$

Comprueba que la lista contiene todas las raíces (excepto 1) exactamente una vez:

$$r^1, r^3, r^9, r^{10}, r^{13}, r^5, r^{15}, r^{11}, r^{16}, r^{14}, r^8, r^7, r^4, r^{12}, r^2, r^6 . \quad (16.3)$$

Dado un polinomio cuadrático monicónico cuyas raíces son a, b :

$$y^2 + py + q = (y - a)(y - b) = 0 ,$$

podemos calcular los coeficientes p, q a partir de las raíces (Cap. 7):

$$p = -(a + b) , \quad q = ab .$$

Por lo tanto, *dado* $a + b$ y ab podemos escribir la ecuación cuadrática de la que a, b son las raíces.

Sea a_0 la suma de las raíces en las posiciones impares de la Ec. 16.3:

$$a_0 = r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2 ,$$

y sea a_1 la suma de las raíces en las posiciones pares de la Ec. 16.3:

$$a_1 = r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6 .$$

Para obtener a_0, a_1 como raíces de una ecuación cuadrática primero se calcula su suma y se utiliza la Ec. 16.2:

$$a_0 + a_1 = r + r^2 + \dots + r^{16} = -1 .$$

Ahora tenemos que trabajar mucho para calcular su producto. La figura muestra el cálculo donde los valores de $r^i r^j = r^{i+j}$ se escriben después de reducir los exponentes modulo 17. Compruebe que cada raíz se produce exactamente cuatro veces para que - de nuevo utilizando Ec. 16.2 - el valor del producto es -4 .

Como $a_0 + a_1 = -1$ y $a_0 a_1 = -4$, a_1, a_2 son las raíces de la ecuación cuadrática $y^2 + y - 4 = 0$ y se pueden calcular mediante la fórmula simple de las raíces de una ecuación cuadrática:

$$a_{0,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} .$$

Ahora bien, sean b_0, b_1, b_2, b_3 las sumas de cada cuarta raíz a partir de r^1, r^3, r^9, r^{10} , respectivamente:

$$\begin{aligned} b_0 &= r^1 + r^{13} + r^{16} + r^4 \\ b_1 &= r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12} \\ b_2 &= r^9 + r^{15} + r^8 + r^2 \\ b_3 &= r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 a_1 &= (r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2) \times \\
&\quad (r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6) \\
&= \begin{aligned}
&r_1^4 + r_1^{11} + r_1^6 + r_1^{12} + r_1^{15} + r_1^8 + r_1^{13} + r_1^7 + \\
&r_2^{12} + r_1^2 + r_1^{14} + r_1^3 + r_2^6 + r_1^{16} + r_2^4 + r_2^{15} + \\
&r_2^{16} + r_3^6 + r_1^1 + r_2^7 + r_1^{10} + r_2^3 + r_2^8 + r_2^2 + \\
&r_2^1 + r_3^8 + r_3^3 + r_1^9 + r_3^{12} + r_1^5 + r_2^{10} + r_3^4 + \\
&r_3^2 + r_2^9 + r_4^4 + r_3^{10} + r_2^{13} + r_4^6 + r_2^{11} + r_2^5 + \\
&r_3^{11} + r_3^1 + r_3^{13} + r_4^2 + r_3^5 + r_3^{15} + r_4^3 + r_2^{14} + \\
&r_3^7 + r_3^{14} + r_3^9 + r_4^{15} + r_4^1 + r_4^{11} + r_3^{16} + r_4^{10} + \\
&r_4^5 + r_4^{12} + r_4^7 + r_4^{13} + r_4^{16} + r_4^9 + r_4^{14} + r_4^8
\end{aligned} \\
&= -4.
\end{aligned}$$

Fig. 16.3: Cálculo de $a_0 a_1$; debajo de cada raíz está el número de apariciones de la raíz hasta el momento

Comprueba que $b_0 + b_2 = a_0$, $b_1 + b_3 = a_1$ y calcula los productos correspondientes:

$$\begin{aligned}
b_0 b_2 &= (r + r^{13} + r^{16} + r^4) \times (r^9 + r^{15} + r^8 + r^2) \\
&= (r^{10} + r^{16} + r^9 + r^3) + (r^5 + r^{11} + r^4 + r^{15}) + \\
&\quad (r^8 + r^{14} + r^7 + r^1) + (r^{13} + r^2 + r^{12} + r^6) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 b_3 &= (r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12}) \times (r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6) \\
&= (r^{13} + r^{14} + r^{10} + r^9) + (r^{15} + r^{16} + r^{12} + r^{11}) + \\
&\quad (r^7 + r^8 + r^4 + r^3) + (r^5 + r^6 + r^2 + r^1) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{\frac{(-1 + \sqrt{17})}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-1 + \sqrt{17})}{2}\right)^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{(-1 + \sqrt{17})^2 + 16}}{4} \\
&= \frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \\
b_1 &= \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{\frac{(-1 - \sqrt{17})}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-1 - \sqrt{17})}{2}\right)^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{(-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{(-1 - \sqrt{17})^2 + 16}}{4} \\
&= \frac{(-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}.
\end{aligned}$$

Fig. 16.4: Cálculo de b_0 y b_1

Para resumir estos cálculos:

$$\begin{aligned}
b_0 + b_2 &= a_0 \\
b_0 b_2 &= -1 \\
b_1 + b_3 &= a_1 \\
b_1 b_3 &= -1,
\end{aligned}$$

por lo que b_0, b_2 son las soluciones de $y^2 - a_0 y - 1 = 0$, y b_1, b_3 son las soluciones de $y^2 - a_1 y - 1 = 0$. Utilizando los valores calculados anteriormente para a_0, a_1 podemos calcular las raíces b_0, b_1 (Fig. 16.4).

Por último, sean c_0, c_4 las sumas de cada raíz octava a partir de r^1, r^{13} :

$$\begin{aligned}
 c_0 &= r^1 + r^{16} \\
 c_4 &= r^{13} + r^4 \\
 c_0 + c_4 &= r^1 + r^{16} + r^{13} + r^4 = b_0 \\
 c_0 c_4 &= (r^1 + r^{16}) \cdot (r^{13} + r^4) \\
 &= r^{14} + r^5 + r^{12} + r^3 = b_1,
 \end{aligned}$$

por lo que c_0, c_4 son las raíces de $y^2 - b_0 y + b_1 = 0$. Como $\cos(360^\circ/17) = c_0/2$ (Fig. 16.5) basta calcular la raíz $c_0 = r^1 + r^{16}$ (Fig. 16.6).

El coseno del ángulo central de un heptadecágono es construible con regla y compás ya que se compone sólo de números racionales y de las operaciones $\{+, -, \times, /, \sqrt{\cdot}\}$:

$$\cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) = \frac{c_0}{2} \quad (16.4)$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \quad (16.5)$$

$$\frac{1}{16}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \quad (16.6)$$

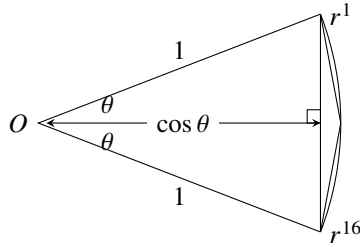


Fig. 16.5: El coseno del ángulo central calculado a partir de r_1, r_{16}

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4b_1}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} + \\
&\quad \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \right)^2 - 4 \left(\frac{(-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4} \right)} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{17} + \frac{1}{8} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8} \sqrt{\left((-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right)^2 - 16 \left((-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right)} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{17} + \frac{1}{8} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8} \sqrt{(-1 + \sqrt{17})^2 + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + (34 - 2\sqrt{17}) -} \\
&\quad \left((-16 - 16\sqrt{17}) + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right) \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{17} + \frac{1}{8} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8} \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}
\end{aligned}$$

Fig. 16.6: Cálculo de c_0

$$\begin{aligned}
r_1 + r_{16} &= \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{2 \cdot 16\pi}{17}\right) + i \sin\left(\frac{2 \cdot 16\pi}{17}\right) \\
&= \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{-2\pi}{17}\right) + i \sin\left(\frac{-2\pi}{17}\right) \\
&= 2 \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right).
\end{aligned}$$

16.5 Derivación de la fórmula de Gauss

La fórmula anterior para $\cos(360^\circ/17)$ no es la dada por Gauss. Aquí está una derivación de la fórmula de Gauss:

Simplifiquemos $2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$:

$$\begin{aligned} 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} &= -2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &\quad + 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &= 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &\quad - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &= 2(1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}. \end{aligned}$$

Recordaremos el término $-4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$ por ahora y simplificaremos el primer término elevándolo al cuadrado y luego sacando la raíz cuadrada:

$$\begin{aligned} 2(1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} &= 2\sqrt{\left[(1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right]^2} \\ &= 2\sqrt{(18 + 2\sqrt{17})(34 - 2\sqrt{17})} \\ &= 2\sqrt{(18 \cdot 34 - 4 \cdot 17) + \sqrt{17}(2 \cdot 34 - 2 \cdot 18)} \\ &= 2 \cdot 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}. \end{aligned}$$

Sustituyendo los términos se obtiene la fórmula de Gauss:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &\quad + \frac{1}{16}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 8\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \\ &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &\quad + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \end{aligned}$$

16.6 Construcción de un heptadecágono

Construir una circunferencia unitaria centrada en O con diámetros perpendiculares \overline{QP} y \overline{SR} (Fig. 16.7). Construir A de modo que $\overline{OA} = (1/4)\overline{OR}$.

By Pythagoras's Theorem:

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OP}^2} = \sqrt{(1/4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}/4.$$

Sea B la intersección de la bisectriz interna del $\angle OAP$ y el segmento de recta \overline{OP} y sea C la intersección de la bisectriz externa del $\angle OAP$ y el segmento de recta \overline{QO} . Por el teorema de la bisectriz interna del ángulo (Thm. A.13):

$$\begin{aligned}\frac{\overline{OB}}{\overline{BP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}} \\ \frac{\overline{OB}}{1 - \overline{OB}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4} \\ \overline{OB} &= \frac{1}{1 + \sqrt{17}} = \frac{1}{1 + \sqrt{17}} \cdot \frac{1 - \sqrt{17}}{1 - \sqrt{17}} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{17}}{16},\end{aligned}$$

y por el teorema de la bisectriz externa del ángulo (Thm. A.14):

$$\begin{aligned}\frac{\overline{OC}}{\overline{CP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}} \\ \frac{\overline{OC}}{1 + \overline{OC}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4} \\ \overline{OC} &= \frac{1}{-1 + \sqrt{17}} = \frac{1}{-1 + \sqrt{17}} \cdot \frac{1 + \sqrt{17}}{1 + \sqrt{17}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{17}}{16}.\end{aligned}$$

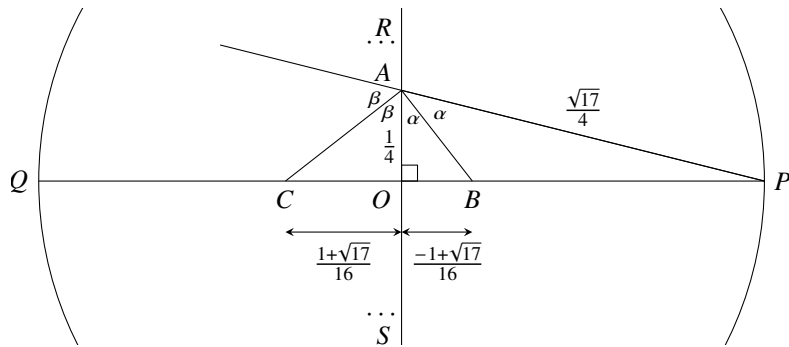


Fig. 16.7: Construcción de un heptadecágono (1)

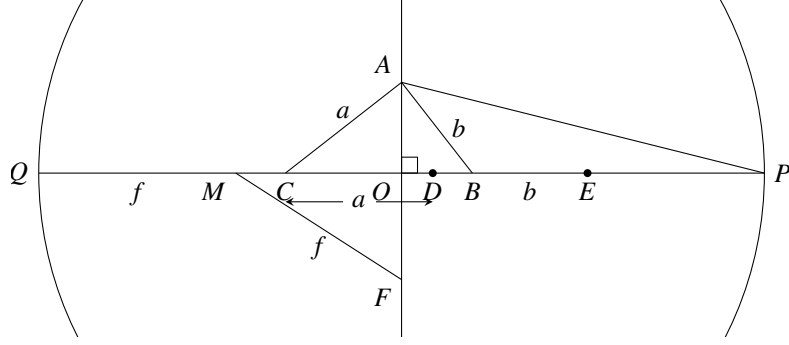


Fig. 16.8: Construcción de un heptadecágono (2)

Construir D sobre \overline{OP} tal que $\overline{CD} = \overline{CA} = a$ (Fig. 16.8). Por el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
 \overline{CD} = \overline{CA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{16}\right)^2} = \frac{1}{16} \sqrt{16 + 1 + 17 + 2\sqrt{17}} \\
 &= \frac{1}{16} \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}.
 \end{aligned}$$

Construir E en \overline{OP} tal que $\overline{BE} = \overline{BA} = b$; de nuevo por el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
 \overline{BE} = \overline{BA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{16}\right)^2} = \frac{1}{16} \sqrt{16 + 1 + 17 - 2\sqrt{17}} \\
 &= \frac{1}{16} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}.
 \end{aligned}$$

Construir M como punto medio de \overline{QD} y construir F en \overline{OS} tal que $\overline{MF} = \overline{MQ} = f$:

$$\begin{aligned}
 \overline{MF} = \overline{MQ} &= \frac{1}{2} \overline{QD} = \frac{1}{2} (\overline{QC} + \overline{CD}) = \frac{1}{2} ((1 - \overline{OC}) + \overline{CD}) \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{16}\right) + \frac{\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{16} \right] \\
 &= \frac{1}{32} \left(15 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right).
 \end{aligned}$$

Nótese que $\overline{MO} = 1 - \overline{MQ} = 1 - \overline{MF}$.

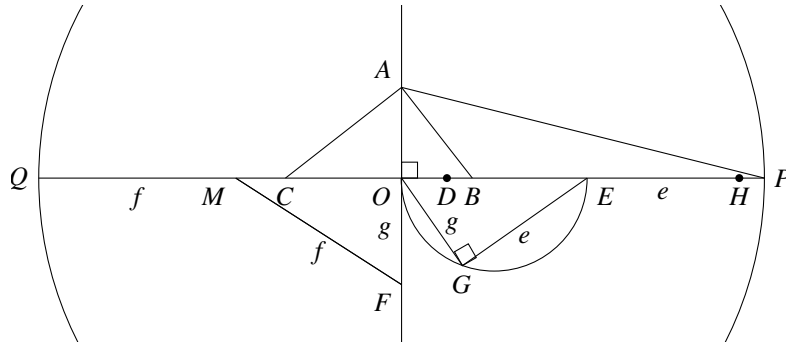


Fig. 16.9: Construcción de un heptadecágono (3)

Construir una semicircunferencia cuyo diámetro sea \overline{OE} . Construir una cuerda $\overline{OG} = \overline{OF} = g$ (Fig. 16.9). Mediante Pythagoras's Theorem:

$$\begin{aligned}
 \overline{OG} = \overline{OF} &= \sqrt{\overline{MF}^2 - \overline{MO}^2} = \sqrt{\overline{MF}^2 - (1 - \overline{MF})^2} \\
 &= \sqrt{2\overline{MF} - 1} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{16} \left(15 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right) - 1} \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.
 \end{aligned}$$

$\angle OGE$ es un ángulo recto, ya que es subtendida por un diámetro del círculo. Construir H sobre \overline{OP} tal que $\overline{EH} = \overline{EG} = e$; de nuevo por el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
 \overline{EH} = \overline{EG} &= \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{OG}^2} = \sqrt{(\overline{OB} + \overline{BE})^2 - \overline{OG}^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{16} \right)^2 - \frac{1}{16} \left(-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right)} \\
 &= \frac{1}{16} \sqrt{\left((18 - 2\sqrt{17}) + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + (34 - 2\sqrt{17}) \right)} \\
 &\quad + \left(16 + 16\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right) \\
 &= \frac{1}{16} \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2(1 - \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}.
 \end{aligned}$$

Compute \overline{OE} :

$$\begin{aligned}\overline{OE} = \overline{OB} + \overline{BE} &= \frac{-1 + \sqrt{17}}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &= \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right).\end{aligned}$$

Finalmente, $\overline{OH} = \overline{OE} + \overline{EH}$ que es la fórmula de Gauss para $\cos(360^\circ/17)$.

16.7 Construction of a Regular Pentagon

Las quintas raíces complejas de la unidad son:

$$1 + i \cdot 0, \quad \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \pm i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{-\sqrt{5} - 1}{4} \pm i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

16.7.1 Trigonometría

El ángulo central de un pentágono regular es $360^\circ/5 = 72^\circ$. Calculemos $\cos 36^\circ$ utilizando las identidades trigonométricas para 2θ y $\theta/2$ (Thms. A.2.1, A.7):

$$\begin{aligned}0 = \cos 90^\circ &= \cos(72^\circ + 18^\circ) = \cos 2 \cdot 36^\circ \cos 36^\circ/2 - \sin 2 \cdot 36^\circ \sin 36^\circ/2 \\ &= (2 \cos^2 36^\circ - 1) \sqrt{\frac{1 + \cos 36^\circ}{2}} - 2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \sqrt{\frac{1 - \cos 36^\circ}{2}}.\end{aligned}$$

Ahora sólo hay un ángulo en la fórmula; sea $x = \cos 36^\circ$. Entonces:

$$\begin{aligned}(2x^2 - 1) \sqrt{\frac{1+x}{2}} &= 2\sqrt{1-x^2} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{2}} \\ (2x^2 - 1) \sqrt{1+x} &= 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x} \cdot x \cdot \sqrt{1-x} \\ 2x^2 - 1 &= 2x(1-x) \\ 4x^2 - 2x - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática se obtiene un valor construible:

$$\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

16.7.2 Geometría

Sea \overline{ABCDE} un pentágono regular (Fig. 16.10). Por definición todos los lados y todos los ángulos interiores son iguales. Es fácil demostrar por triángulos congruen-

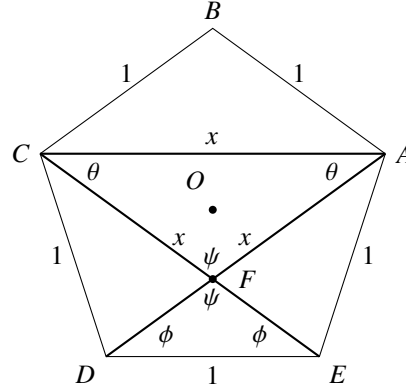


Fig. 16.10: Construcción de un pentágono regular (1)

tes que todas las diagonales son iguales. Sea la longitud de los lados 1 y la de las diagonales x .

$\triangle ACE \cong \triangle CAD$ por lado-lado por lo que $\angle ACE = \angle CAD = \theta$. $\triangle AED \cong \triangle CDE$ por lado-lado por lo que $\angle ADE = \angle CED = \phi$. $\angle AFC = \angle EFD = \psi$ son ángulos verticales. En ambos triángulos la suma de los ángulos es 180° por lo que $\psi + 2\theta = \psi + 2\phi$ y $\theta = \phi$. Por alternancia de ángulos interiores concluimos que $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$.

Construir una recta que pase por E paralela a \overline{DC} y sea F su intersección con \overline{AC} (Fig. 16.11). $CDEF$ es un rombo por lo que $\overline{EF} = \overline{CD} = \overline{AE} = 1$. $\triangle ACE$ es un triángulo isósceles con ángulos de base α . $\triangle AEF$ también es isósceles y $\angle AFE = \angle FAE = \alpha$ por lo que $\triangle ACE \sim \triangle AEF$. Tomando cocientes de los lados da:

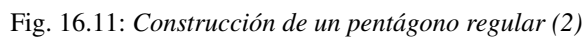
$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}.$$

El resultado es una ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$ cuya raíz positiva es construible:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

¿Cuál es la sorpresa?

Resulta sorprendente que transcurrieran dos milenios desde los trabajos de los griegos sobre la construcción hasta el descubrimiento por Gauss de la constructibilidad del heptadecágono regular. También es sorprendente que el problema se resolviera no utilizando la geometría, sino inventando nuevos métodos algebraicos que tuvieron una gran influencia en las matemáticas.



Este capítulo se basa en [6]. El trabajo original de Gauss está disponible en una traducción al inglés [18]. La ecuación 16.5–16.6 aparece en [41]; el autor asigna un ejercicio para transformarla en la fórmula de Gauss tal como aparece en [18, p. 458] y [6, p. 68].

La construcción del heptadecágono está tomada de [10] mientras que otras construcciones se pueden encontrar en [55]. La construcción trigonométrica del pentágono regular está tomada de [59]. La construcción geométrica del pentágono regular se obtuvo resolviendo los ejercicios 2.3.3 y 2.3.4 en [47].

Apéndice A

Teoremas de geometría y trigonometría

Este apéndice presenta teoremas de geometría y trigonometría que pueden no ser familiares para el lector, así como teoremas que pueden ser familiares pero cuyas pruebas no lo son. La sección A.1 presenta tres fórmulas para calcular el área de un triangle. La sección A.2 demuestra las identidades trigonométricas. Aunque las fórmulas y las identidades son en su mayoría familiares, los estudiantes a menudo aprenden estas identidades de memoria o las buscan sin ver nunca una demostración. Las siguientes secciones contienen demostraciones de teoremas avanzados de geometría: Secc. A.3—los teoremas de la bisectriz de ángulos, Secc. A.4—el teorema de Tolomeo que relaciona los lados y las diagonales de un cuadrilátero circunscrito por una circunferencia, Secc. refa.ceva—Teorema de Ceva que relaciona los tres segmentos de línea de un triangle, y Sección A.6—Teorema de Menelao sobre los segmentos de una transversal en un triangle.

A.1 Teoremas sobre triangles

A.1.1 Cálculo del área de un triangle

La fórmula estándar para calcular el área de un triangle a partir de la base y la altura es bien conocida. Se puede demostrar utilizando varios métodos geométricos.

Teorema A.1. *El área del triangle $\triangle ABC$ viene dada por:*

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bh, \quad (\text{A.1})$$

donde b , la base, es uno de los lados del triangle, y h , la altura, es la longitud de la altitud a b desde el vértice opuesto (Fig. A.1).

Demostración. Figura A.2 muestra que “cortando” el triangle por la mitad de la altura, podemos “mover” los triangles sombreados para formar un rectangle de la misma área que el triangle. La base del rectangle es b y su altura $h/2$. \square

Teorema A.2. *El área del triangle $\triangle ABC$ viene dada por:*

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin \theta. \quad (\text{A.2})$$

Demostración. De Thm. A.1 usando $h = c \sin \theta$. \square

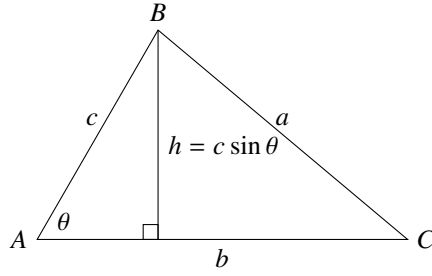


Fig. A.1: Cálculo del área de un triángulo a partir de la base y la altura

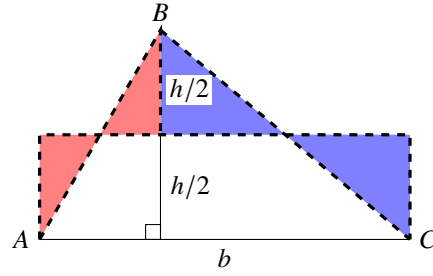


Fig. A.2: Computation of the area of a triangle from the base and the height

Teorema A.3 (Heron). El área del triangle $\triangle ABC$ viene dada por:

$$\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

donde s , el semi-perímetro del triangle, es igual a $\frac{1}{2}(a+b+c)$.

Demostración. El radio de una circunferencia y una tangente que corta al radio son perpendiculares. Además, las longitudes de los segmentos de línea de dos tangentes desde el mismo punto al círculo son iguales. Por lo tanto (Fig. A.3):¹

$$\triangle AOB' \cong \triangle AOC', \quad \triangle BOA' \cong \triangle BOC', \quad \triangle COA' \cong \triangle COB'.$$

El área $\triangle ABC$ es la suma de los seis triángulos anteriores. Como la altura de los seis triángulos es r , el radio de la circunferencia inscrita, obtenemos:

$$\Delta ABC = \Delta AOB' + \Delta AOC' + \Delta BOA' + \Delta BOC' + \Delta COA' + \Delta COB' \quad (\text{A.3a})$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}r(u+u+v+v+w+w) \quad (\text{A.3b})$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}r(a+b+c) \quad (\text{A.3c})$$

$$\Delta ABC = rs. \quad (\text{A.3d})$$

Definamos ahora los lados en función de las tangentes de los ángulos centrales:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{u}{r}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{v}{r}, \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{w}{r}.$$

A partir de estas definiciones y $s = \frac{1}{2}(2u+2v+2w)$ obtenemos:

$$s = u+v+w = r \left(\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \right).$$

¹Esto demuestra que el *incentro* el centro de la circunferencia inscrita, es la intersección común de las tres bisectrices de los ángulos.

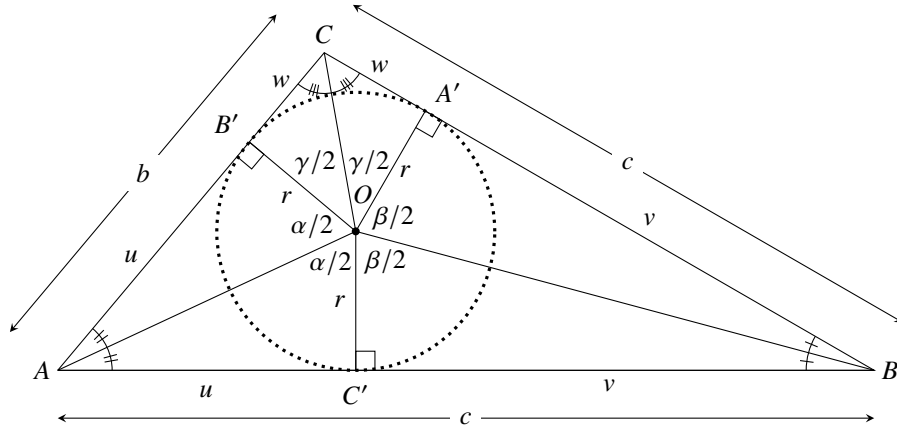


Fig. A.3: Triangle con un círculo inscrito

Desde $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = 360^\circ$ y así $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$, por Thm. A.11:

$$\begin{aligned} s &= r \left(\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} \right) \\ &= r \left(\frac{u}{r} \frac{v}{r} \frac{w}{r} \right) = \frac{1}{r^2} (u v w) \\ r &= \sqrt{\frac{u v w}{s}}. \end{aligned}$$

Por Eq. A.3d:

$$\triangle ABC = rs = s \sqrt{\frac{u v w}{s}} = \sqrt{s u v w}.$$

La fórmula de Heron se deduce de $u = s - a$, $v = s - b$, $w = s - c$. □

A.2 Identidades trigonométricas

A.2.1 El seno y el coseno de la suma y la diferencia de dos angles

Teorema A.4.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Demostraremos la primera fórmula; las demás fórmulas pueden obtenerse utilizando los valores del seno y coseno para $-\alpha$ y $90^\circ - \alpha$.

Dado un triangle rectangle $\triangle ABC$ con angle agudo α y un triangle rectangle $\triangle ACD$ con angle agudo β , podemos unirlos para obtener figuras geométricas con angle $\alpha + \beta$ (Fig. A.4). El diagrama de la izquierda es el más utilizado en las demostraciones de las identidades. Aquí damos dos pruebas basadas en los diagramas central y derecho.

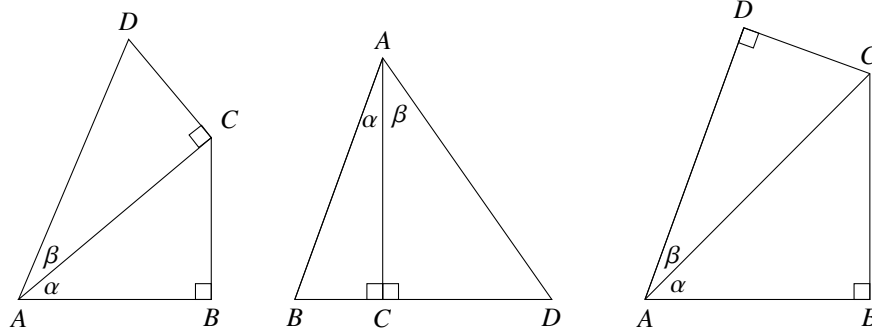


Fig. A.4: Diagramas para demostrar la identidad del seno de sumas de angles

Demostración.

(1) Calculemos el área del $\triangle ABD$ de dos formas distintas: (1) utilizando la Ec. A.2 sobre el $\triangle ABD$, y (2) utilizando la ecuación por separado sobre el $\triangle ABC$ y el $\triangle ADC$ (Fig. A.5). h también se calcula dos veces utilizando la definición de las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned}\triangle ABD &= \frac{1}{2}bc \sin(\alpha + \beta) \\ \triangle ABD &= \triangle ABC + \triangle ADC \\ &= \frac{1}{2}ch \sin \alpha + \frac{1}{2}bh \sin \beta \\ &= \frac{1}{2}c(b \cos \beta) \sin \alpha + \frac{1}{2}b(c \cos \alpha) \sin \beta.\end{aligned}$$

Igualando las dos fórmulas para $\triangle ABD$ y cancelando $\frac{1}{2}bc$, obtenemos:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

□

La segunda prueba utiliza el siguiente teorema:

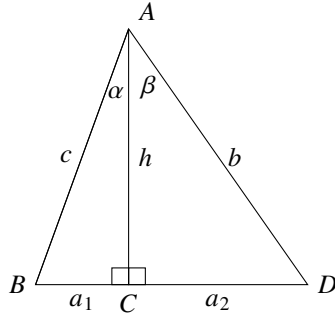


Fig. A.5: Cálculo del área de un triangle de dos maneras

Teorema A.5. En un círculo de diámetro 1 la longitud de una cuerda que subtiende un angle inscrito es igual al seno del angle (Fig. A.6).

Demostración. Sea \overline{AB} un diámetro y $\angle BAC = \alpha$. Sea D cualquier otro punto de la circunferencia que forme un triangle $\triangle BDC$, uno de cuyos lados es la cuerda \overline{BC} . Como cuerdas iguales subtienden angles inscritos iguales $\angle BDC = \alpha$. En el triangle rectangle $\triangle ABC$:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{1} = \overline{BC}.$$

□

Demostración.

(2) Esta prueba se basa en el diagrama de la derecha de la Fig. A.4 reproducido en la Fig. A.7, donde el cuadrilátero \overline{ABCD} ha sido inscrito en una circunferencia. Por Thm. A.15 un cuadrilátero puede ser circunscrito por un círculo si y sólo si la suma de cada par de angles opuestos es 180° . $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$ ya que ambos angles

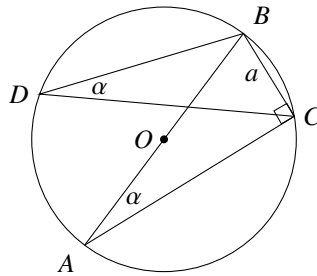


Fig. A.6: Todos los angles inscritos subtendidos por una cuerda son iguales

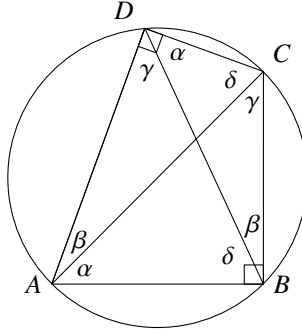


Fig. A.7: Un cuadrilátero circunscrito por un círculo

son rectos. Por Thm. 5.4 la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360° , por lo que $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$.

Sea el diámetro de la circunferencia 1 (si no, multiplica todo por la longitud del diámetro). Entonces los lados del cuadrilátero son:

$$\overline{BC} = \sin \alpha, \quad \overline{CD} = \sin \beta, \quad \overline{AB} = \sin \gamma, \quad \overline{DA} = \sin \delta,$$

y sus diagonales son:

$$\overline{BD} = \sin(\alpha + \beta), \quad \overline{CA} = \sin(\alpha + \gamma).$$

Por el Teorema de Ptolomeo (Thm. A.18) el producto de las diagonales de un cuadrilátero circunscrito por una circunferencia es igual a la suma de los productos de los lados opuestos del cuadrilátero. Como $\angle ADC$ y $\angle ABC$ son ángulos rectos tenemos:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \gamma) &= \sin \alpha \sin \delta + \sin \beta \sin \gamma \\ \sin(\alpha + \beta) \sin(90^\circ) &= \sin \alpha \sin(90^\circ - \beta) + \sin \beta \sin(90^\circ - \alpha) \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

□

A.2.2 Coseno de un angle triple

Teorema A.6.

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

Demostración. La prueba utiliza las fórmulas en Thm. A.4 y la fórmula $\sin^2 \alpha +$

$\cos^2 \alpha = 1$:

$$\begin{aligned}
 \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) \\
 &= \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha \\
 &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - (2 \sin \alpha \cos \alpha) \sin \alpha \\
 &= \cos^3 \alpha - \cos \alpha \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\
 &= \cos^3 \alpha - \cos \alpha + \cos^3 \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha \\
 &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha .
 \end{aligned}$$

□

A.2.3 El seno y el coseno de un semiangulo

Teorema A.7. Si α es un ángulo en un triángulo entonces:²

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\
 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} .
 \end{aligned}$$

Demostración. La prueba utiliza las fórmulas Thm. A.4 y la fórmula $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
 &= 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 \\
 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\
 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{1 + \cos \alpha}{2} \\
 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} .
 \end{aligned}$$

□

A.2.4 La ley de los cosenos

Teorema A.8 (Law of cosines). En un triángulo $\triangle ABC$ de lados a, b, c (Fig. A.8):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle ACB .$$

²La fórmula general es más compleja porque las raíces cuadradas pueden ser positivas o negativas dependiendo del cuadrante en el que se encuentre $\alpha/2$. Para un triángulo $0 < \alpha < 180^\circ$, entonces $0 < \alpha/2 < 90^\circ$ está en el primer cuadrante y tanto el seno como el coseno son positivos.

Demostración.

(1) Dejar caer una altura desde C hasta \overline{AB} y utilizar la definición de coseno y el Teorema de Pitágoras:

$$c = x + (c - x) = a \cos \beta + b \cos \alpha \quad (\text{A.4a})$$

$$c^2 = ac \cos \beta + bc \cos \alpha. \quad (\text{A.4b})$$

Del mismo modo, baje las altitudes de A a \overline{BC} y de B a \overline{AC} para obtener:

$$a^2 = ca \cos \beta + ba \cos \gamma \quad (\text{A.5a})$$

$$b^2 = cb \cos \alpha + ab \cos \gamma. \quad (\text{A.5b})$$

Sumando las Ecs. A.5a y A.5b y restando la Ec. A.4b se obtiene:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - c^2 &= ca \cos \beta + ba \cos \gamma \\ &\quad + cb \cos \alpha + ab \cos \gamma \\ &\quad - ac \cos \beta - bc \cos \alpha \\ &= 2ab \cos \gamma \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

□

Demostración.

(2) La segunda prueba utiliza el teorema de Ptolomeo (Thm. A.18).³

El triangle $\triangle ABC$ puede circunscribirse en una circunferencia. Construir otro triangle $\triangle ABC'$ congruente con $\triangle ABC$ e inscrito en la misma circunferencia (Fig. A.9). Esto se puede hacer mediante la construcción de un angle de \overline{AB} igual

³La sección A.4 utiliza la Ley de los Cosenos para demostrar el teorema de Ptolomeo! La primera prueba de la Ley de los Cosenos evita este razonamiento circular. Además, hay pruebas del teorema de Ptolomeo que no utilizan la Ley de los Cosenos.

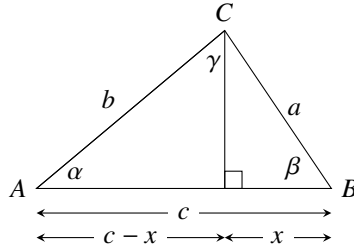


Fig. A.8: Prueba 1 de la ley de los cosenos

a $\angle CAB$ que se cruza con el círculo en C' y luego construir la línea $\overline{C'A}$. Como los ángulos subtendidos por la misma cuerda son iguales $\angle AC'B = \angle BCA$, entonces también $\angle CBA = \angle C'AB$ y así $\triangle ABC' \cong \triangle BAC$ por angle-lado-angle con el lado común \overline{AB} .

Caen perpendiculares de C a D y de C' a D' sobre \overline{AB} de modo que $x = a \cos \beta$. Por el teorema de Ptolomeo para el cuadrilátero $ABCC'$:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c(c - 2x) \\ &= a^2 + c(c - 2a \cos \beta) \\ &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta. \end{aligned}$$

□

A.2.5 La tangente de la suma de dos ángulos

Teorema A.9.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

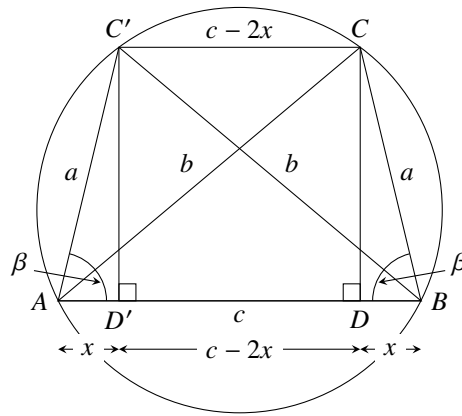


Fig. A.9: *Prueba 2 de la ley de los cosenos*

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\
 &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\
 &= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta}{\cos \alpha - \sin \alpha \tan \beta} \\
 &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} .
 \end{aligned}$$

□

A.2.6 La tangente de un semiángulo

Teorema A.10.

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha} .$$

Demostración. Deducimos y resolvemos una ecuación cuadrática en $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
 \tan \alpha &= \frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\
 \tan \alpha \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tan \alpha &= 0 \\
 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha} .
 \end{aligned}$$

□

A.2.7 El producto de tres tangentes

Teorema A.11. *If $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ then:*

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma .$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \tan \gamma &= \tan(180^\circ - (\alpha + \beta)) \\
 &= -\tan(\alpha + \beta) \\
 &= -\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\
 \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma &= \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma .
 \end{aligned}$$

□

A.2.8 El límite de $\sin \alpha / \alpha$

Teorema A.12.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 .$$

Demostración. Al examinar los polígonos regulares inscritos en un círculo (Fig. A.10), vemos que cuantos más lados tiene un polígono, más se acerca su perímetro a la circunferencia del círculo. La circunferencia del círculo dividida por el número de lados es la longitud de un arco con los mismos puntos extremos que el lado correspondiente, ya que en un polígono regular todos los lados tienen la misma longitud. Dado que la relación entre la circunferencia del círculo y el perímetro de un polígono inscrito se aproxima a 1 a medida que aumenta el número de lados, también lo hace la relación entre la longitud de un arco y la cuerda correspondiente. Esto se demuestra con los siguientes ejemplos numéricos:

Angle	Arc length	Chord length	Ratio
80	1,396	1,286	1,090
60	1,047	1,000	1,047
40	0,698	0,684	1,006
5	0,087	0,087	1,000

Dado que $a = b = 1$ la longitud de la cuerda c que subtiende a α puede calcularse a partir de la Ley de los Cosenos (Fig. A.11):

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \\ c &= \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} c &= \sqrt{2 - 2 \cdot 1} = 0 . \end{aligned}$$

En referencia a Fig. A.12:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2 \sin \alpha}{2\alpha} .$$

Es la relación entre la longitud de la cuerda \overline{PQ} y la longitud del arco \widehat{PQ} . Pero hemos visto que esta relación converge a 1 como el ángulo subtendido 2α tiende a

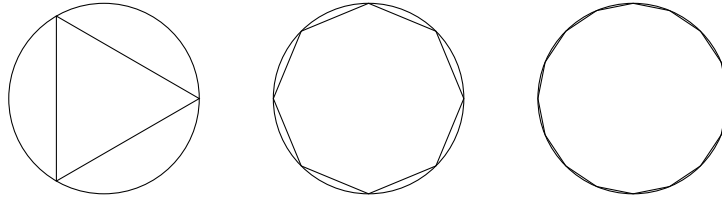


Fig. A.10: Polígonos regulares con lados de 3, 8 y 16 inscritos en un círculo

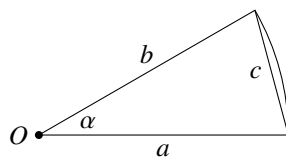


Fig. A.11: La longitud de una cuerda correspondiente a un arco de tamaño α

0, así:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 .$$

□

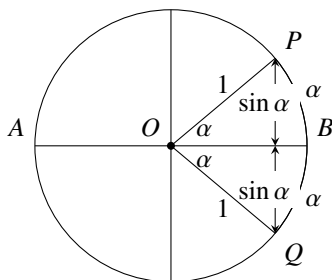


Fig. A.12: Relación entre $\sin x$ y x

A.3 Teoremas de la bisectriz del ángulo

Teorema A.13. En $\triangle ABC$ que la bisectriz del ángulo de $\angle BAC$ intersecan \overline{BC} en D (Fig. A.13). Entonces:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} .$$

Demostración. Demostramos el teorema calculando las áreas de dos triángulos utilizando tanto la base y la altura (Ec. A.1), como la base, el ángulo y el lado

(Ec. A.2):

$$\begin{aligned}
 \triangle ABD &= \frac{1}{2} \overline{BD} h = \frac{1}{2} \overline{AB} \overline{AD} \sin \alpha \\
 \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{AD} \sin \alpha}{h} \\
 \triangle ACD &= \frac{1}{2} \overline{CD} h = \frac{1}{2} \overline{AC} \overline{AD} \sin \alpha \\
 \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{AD} \sin \alpha}{h} \\
 \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.
 \end{aligned}$$

□

También existe un teorema de la bisectriz del ángulo para la *bisectriz externa*:

Teorema A.14. In $\triangle ABC$ sea \overline{AE} la bisectriz del ángulo suplementario al ángulo $\triangle BAC$ (Fig. A.14) y que la bisectriz intersecte a \overline{BC} en E (Fig. A.13). Entonces:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

Demostración. Dado que \overline{AC} es una línea recta $\angle EAC = 180^\circ - \alpha$.

$$\begin{aligned}
 \triangle ABE &= \frac{1}{2} \overline{BE} h = \frac{1}{2} \overline{AE} \overline{AB} \sin \alpha \\
 \triangle ACE &= \frac{1}{2} \overline{CE} h = \frac{1}{2} \overline{AE} \overline{AC} \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \overline{AE} \overline{AC} \sin \alpha \\
 \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{AE} \sin \alpha}{h} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} \\
 \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.
 \end{aligned}$$

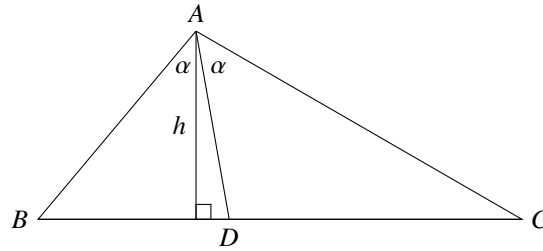


Fig. A.13: Teorema de la bisectriz interna del ángulo

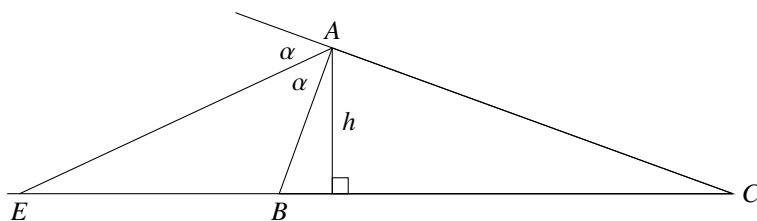


Fig. A.14: Teorema de la bisectriz del ángulo exterior

□

A.4 Teorema de Ptolomeo

A.4.1 Trapecio circunscrito por una circunferencia

Antes de demostrar el teorema de Ptolomeo, demostraremos teoremas sobre cuadriláteros y trapecios.

Teorema A.15. *Un cuadrilátero puede ser circunscrito por una circunferencia si y sólo si los ángulos opuestos son suplementarios (suma a 180°).*

Los libros de texto de geometría ofrecen una prueba sencilla de la dirección de avance, pero es difícil encontrar una prueba de la inversa, por lo que aquí se ofrecen ambas pruebas.

Demostración.

(Dirección de avance) Un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco que lo subtiende por lo que $\angle DAB$ es la mitad del arco \widehat{DCB} y $\angle DCB$ es la mitad del arco \widehat{DAB} (Fig. A.15). Los dos arcos forman toda la circunferencia del círculo por lo que su suma es 360° . Por lo tanto, $\angle DAB + \angle DCB = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$, y análogamente $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$. □

Demostración.

(Dirección inversa) Cualquier triángulo puede ser circunscrito por una circunferencia. Circunscribamos $\triangle DAB$ por una circunferencia y supongamos que C' es un punto tal que $\angle DAB + \angle DC'B = 180^\circ$, pero C' está *not* en la circunferencia del círculo. Sin pérdida de generalidad, que C' esté dentro de la circunferencia (Fig. A.16).

Construir una semirrecta que prolongue $\overline{DC'}$ y que C sea su intersección con la circunferencia. Entonces \overline{ABCD} está circunscrita por una circunferencia:

$$\begin{aligned}\angle DAB + \angle DCB &= 180^\circ = \angle DAB + \angle DC'B \\ \angle DCB &= \angle DC'B,\end{aligned}$$

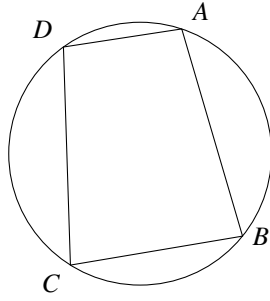


Fig. A.15: Un cuadrilátero circunscrito por un círculo

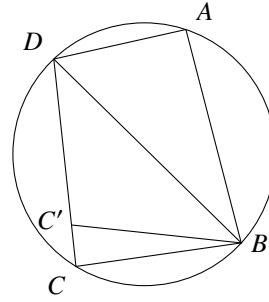


Fig. A.16: El cuarto vértice debe estar en la circunferencia

lo cual es imposible si C está en el círculo y C' está dentro del círculo. \square

Teorema A.16. *Los ángulos opuestos de un trapecio isósceles son suplementarios.*

Demostración. Construir la recta $\overline{AB'}$ paralela a \overline{CD} (Fig. A.17). $\overline{AB'CD}$ es un paralelogramo y $\triangle ABB'$ es un triángulo isósceles, por lo que $\angle C = \angle ABB' = \angle AB'B = \angle B$. Análogamente, $\angle A = \angle D$. Como la suma de los ángulos internos de cualquier cuadrilátero es igual a 360° :

$$\begin{aligned}\angle A + \angle B + \angle C + \angle D &= 360^\circ \\ 2\angle A + 2\angle C &= 360^\circ \\ \angle A + \angle C &= 180^\circ,\end{aligned}$$

and similarly $\angle B + \angle D = 180^\circ$. \square

Teorema A.17. *Un trapecio isocetes puede ser circunscrito por un círculo.*

La prueba es inmediata por Thms. A.15, A.16.

A.4.2 Demostración del teorema de Ptolomeo

Teorema A.18 (Ptolomeo). *Dado un cuadrilátero circunscrito por una circunferencia, la siguiente fórmula relaciona las longitudes de las diagonales y las longitudes de los lados (Fig. A.18).*

$$ef = ac + bd.$$

Demostración. Por la Ley de los Cosenos para los cuatro triángulos $\triangle ABC$, $\triangle ADC$,

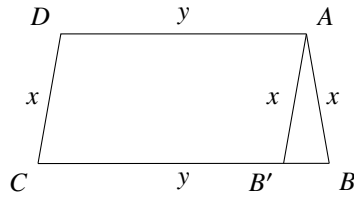


Fig. A.17: *Un trapezio isocelos*

$\triangle DAB, \triangle DCB$:

$$\begin{aligned} e^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle B \\ e^2 &= c^2 + d^2 - 2cd \cos \angle D \\ f^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cos \angle A \\ f^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle C . \end{aligned}$$

$\angle C = 180^\circ - \angle A$ y $\angle D = 180^\circ - \angle B$ porque son ángulos opuestos de un cuadrilátero circunscrito por una circunferencia, por lo que $\cos \angle D = -\cos \angle B$ y $\cos \angle C = -\cos \angle A$. Eliminar el término coseno de las ecuaciones anteriores para obtener:

$$\begin{aligned} e^2(cd + ab) &= abc^2 + abd^2 + a^2cd + b^2cd \\ e^2 &= \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{(ab + cd)} \\ f^2 &= \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{(ad + bc)} . \end{aligned}$$

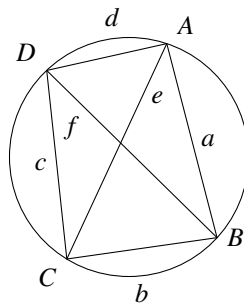


Fig. A.18: *Teorema de Ptolomeo*

Multiplícala las dos ecuaciones y simplifica para obtener el teorema de Ptolomeo:

$$\begin{aligned} e^2 \cdot f^2 &= (ac + bd)^2 \\ ef &= (ac + bd). \end{aligned}$$

□

A.5 Teorema de Ceva

Teorema A.19 (Ceva). *Dados segmentos de recta desde los vértices de un triángulo hasta las aristas opuestas que se cruzan en un punto, las longitudes de los segmentos satisfacen (Fig. A.19):*

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = 1.$$

Demostración. Si las altitudes de dos triángulos son iguales, sus áreas son proporcionales a las bases. En ambos diagramas de la Fig. A.20, las altitudes de los triángulos grises son iguales, por lo que:

$$\frac{\triangle BQO}{\triangle SQO} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}, \quad \frac{\triangle BQA}{\triangle SQA} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}.$$

Restando las áreas de los triángulos indicados, obtenemos la proporción entre los triángulos grises mostrados en la Fig. A.21:

$$\frac{\triangle BOA}{\triangle SOA} = \frac{\triangle BQA - \triangle BQO}{\triangle SQA - \triangle SQO} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}.$$

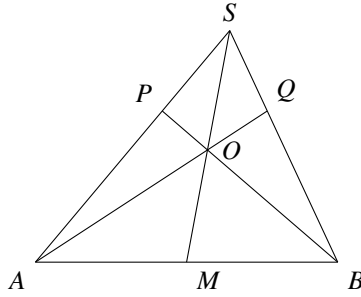


Fig. A.19: Teorema de Ceva

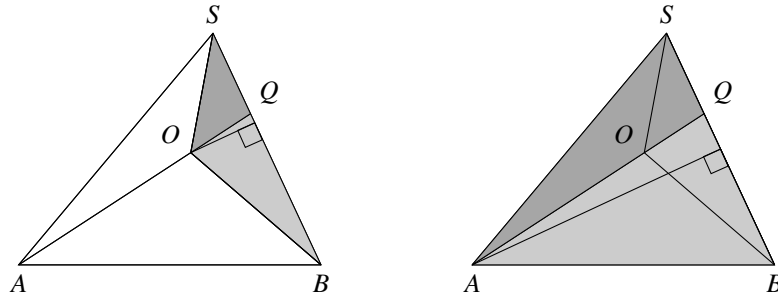


Fig. A.20: Triángulos en el teorema de Ceva

Esto puede parecer extraño al principio, así que lo explicaremos utilizando una notación más sencilla:

$$\begin{aligned}\frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \\ \frac{e}{f} &= \frac{a}{b} \\ c - e &= \frac{ad}{b} - \frac{af}{b} = \frac{a}{b}(d - f) \\ \frac{c - e}{d - f} &= \frac{a}{b}.\end{aligned}$$

Del mismo modo, podemos demostrar:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} &= \frac{\triangle AOS}{\triangle BOS} \\ \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} &= \frac{\triangle SOB}{\triangle AOB},\end{aligned}$$

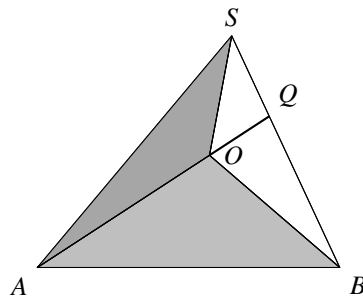


Fig. A.21: Restar áreas en el teorema de Ceva

Así que:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = \frac{\triangle AOS}{\triangle BOS} \cdot \frac{\triangle BOA}{\triangle SOA} \cdot \frac{\triangle SOB}{\triangle AOB} = 1,$$

ya que el orden de los vértices en un triángulo no hace ninguna diferencia. \square

A.6 Teorema de Menelao

Teorema A.20 (Menelaus). *Sea $\triangle ABC$ un triángulo y \overline{DBQ} una línea transversal que corta las tres aristas del triángulo o sus prolongaciones (Fig. A.22). Entonces:*⁴

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = 1. \quad (\text{A.6})$$

Demostración. Trazar una recta que pase por C paralela a \overline{AB} y prolongar \overline{DQ} hasta que corte a la paralela en K . Del $\triangle ADB \sim \triangle CDK$ se deduce que:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{AB}}.$$

Del $\triangle BQP \sim \triangle KQC$ se deduce que:

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{BP}}.$$

Eliminando \overline{CK} se obtiene $\overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{PQ} = \overline{QC} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{AD}$ que puede reordenarse para obtener Ec. A.6. \square

⁴En función de la configuración del triángulo y de la recta transversal, el resultado de la multiplicación puede ser más o menos uno.

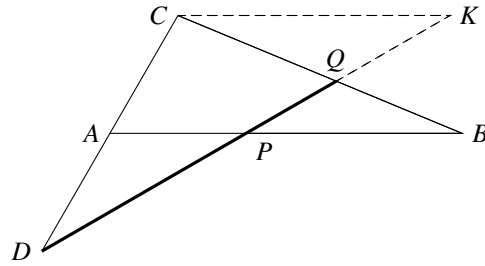


Fig. A.22: Teorema de Menelao

Fuentes

El apéndice se basa principalmente en [19]. El teorema de Ceva y el teorema de Menelao pueden demostrarse entre sí [45].

Bibliografía

- [1] Aigner, M., Ziegler, G.M.: Proofs from THE BOOK (Fifth Edition). Springer (2014)
- [2] Alperin, R.C.: A mathematical theory of origami constructions and numbers. *New York Journal of Mathematics* **6**, 119–133 (2000)
- [3] Barabash, M.: A non-visual counterexample in elementary geometry. *The College Mathematics Journal* **36**(5) (2005)
- [4] Ben-Ari, M.: Mathematical Logic for Computer Science (Third Edition). Springer (2012)
- [5] Ben-Ari, M.: LearnSAT: A SAT solver for education. *Journal of Open Source Software* **3**(24), 639 (2018). <https://doi.org/10.21105/joss.00639>
- [6] Bewersdorff, J.: Galois Theory for Beginners: A Historical Perspective. American Mathematical Society (2006)
- [7] Bold, B.: Famous Problems of Mathematics: A History of Constructions with Straight Edge and Compass. Van Nostrand (1969)
- [8] Bradford, P.V.: Visualizing solutions to n-th degree algebraic equations using right-angle geometric paths. Archived May 2, 2010 at the Wayback Machine. <https://web.archive.org/web/20100502013959/http://www.concentric.net/~pvb/ALG/rightpaths.html> (2010)
- [9] Butler IV, L.: Ramsey theory. <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2016/Barton.pdf> (2016)
- [10] Callagy, J.J.: The central angle of the regular 17-gon. *The Mathematical Gazette* **67**(442), 290–292 (1983). <https://www.jstor.org/stable/3617271>
- [11] Courant, R., Robbins, H.: What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods (Second Edition). Oxford University Press (1996). Revised by Ian Stewart
- [12] Davies, R.: On Langford’s problem (II). *The Mathematical Gazette* **43**, 253–5 (1959)
- [13] Dörrie, H.: 100 Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution. Dover (1965)

- [14] Dörrie, H.: 100 problems of elementary mathematics: Their history and solution. Reworked by Michael Woltermann. Archived 21 February 2020 at the Wayback Machine. <https://web.archive.org/web/20191223032114/http://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/DorrieContents.htm> (2010)
- [15] Dudley, U.: A Budget of Trisections. Springer (1987)
- [16] Eppstein, D.: Twenty proofs of Euler's formula: $V - E + F = 2$. <https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/> (n.d.)
- [17] Fraleigh, J.B.: A First Course in Abstract Algebra (Seventh Edition). Addison-Wesley (2003)
- [18] Gauss, K.F.: Disquisitiones Arithmeticae. Yale University Press (2006). Editors: Todd W. Bressi and Paul Groth
- [19] Gelfand, I., Saul, M.: Trigonometry. Springer (2001)
- [20] Graham, R., Butler, S.: Rudiments of Ramsey Theory (Second Edition). American Mathematical Society (2015)
- [21] Gunderson, D.S.: Handbook of Mathematical Induction: Theory and Applications. Mathematical Association of America (2010)
- [22] Heath, T.L.: The Thirteen Books of Euclid's Elements. Dover (1956)
- [23] Heule, M.J.H., Kullmann, O.: The science of brute force. Communications of the ACM **60**(8), 70–79 (2017)
- [24] Hull, T.C.: Solving cubics with creases: The work of Beloch and Lill. American Mathematical Monthly **118**(4), 307–315 (2011)
- [25] Hungerbühler, N.: A short elementary proof of the Mohr-Mascheroni theorem. American Mathematical Monthly **101**(8), 784–787 (1994)
- [26] Lang, R.J.: Origami and geometric constructions. http://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf (1996–2015)
- [27] Laugwitz, D.: Eine elementare Methode für Unmöglichkeitbeweise bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Elemente der Mathematik **17**, 54–58 (1962)
- [28] Loh, P.S.: A different way to solve quadratic equations. <https://www.poshenloh.com/quadratic/> (2019)
- [29] Loh, P.S.: A simple proof of the quadratic formula. <https://arxiv.org/abs/1910.06709> (2019)

- [30] Manna, Z.: Mathematical Theory of Computing. McGraw-Hill (1974)
- [31] Martin, G.E.: Geometric Constructions. Springer (1998)
- [32] Mastin, L.: Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi: Muslim Mathematician. https://www.storyofmathematics.com/islamic_alkhwarizmi.html (2020)
- [33] McCallum, W.: A tale of two triangles: Heron triangles and elliptic curves. <http://blog.kleinproject.org/?p=4> (2012)
- [34] McKay, B.D.: Ramsey theory. <http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/ramsey.html> (nd)
- [35] Miller, J.: Langford's problem, remixed. <http://dialectrix.com/langford.html> (2014)
- [36] Newton, L.: The power of origami. <https://plus.maths.org/content/power-origami>
- [37] Peil, T.: The rusty compass theorem. Archived 20/07/2020 at the Wayback Machine. <https://web.archive.org/web/20200720195718/http://web.mnstate.edu/peil/geometry/C2EuclidNonEuclid/1Compass.htm> (2006)
- [38] Ramanujan: Squaring the circle. Journal of the Indian Mathematical Society **V**, 138 (1913). <http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram05.pdf>
- [39] Ramanujan: Modular equations and approximations to π . The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics **XLV**, 350–372 (1914). <http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram06.pdf>
- [40] Riaz, M.: Geometric solutions of algebraic equations. American Mathematical Monthly **69**(7), 654–658 (1962)
- [41] Rike, T.: Fermat numbers and the heptadecagon. <https://mathcircle.berkeley.edu/sites/default/files/BMC6/ps0506/Heptadecagon.pdf> (2005)
- [42] Robson, E.: Words and pictures: New light on Plimpton 322. American Mathematical Monthly **109**(2), 105–120 (2002)
- [43] Ross, S.: A First Course in Probability (Tenth Edition). Pearson (2019)
- [44] Schumer, P.: The Josephus problem: Once more around. Mathematics Magazine **75**(1), 12–17 (2002)

- [45] Silvester, J.R.: Ceva = (Menelaus)². The Mathematical Gazette **84**(500), 268–271 (2000)
- [46] Sipka, T.: Alfred Bray Kempe’s “Proof” of the four-color theorem. Math Horizons **10**(2), 21–26 (2002). <http://www.jstor.org/stable/25678395>
- [47] Stillwell, J.: Mathematics and Its History (Third Edition). Springer (2010)
- [48] Suzuki, J.: A brief history of impossibility. Mathematics Magazine **81**(1), 27–38 (2008)
- [49] Thomas, R.: An update on the four-color theorem. Notices of the AMS **45**(7), 848–859 (1998). <http://www.ams.org/notices/199807/thomas.pdf>
- [50] Toussaint, G.: A new look at Euclid’s second proposition. The Mathematical Intelligencer **15**(3), 12–23 (1993)
- [51] Wikipedia: Angle trisection
- [52] Wikipedia: Cubic equation
- [53] Wikipedia: Five color theorem
- [54] Wikipedia: Four color theorem
- [55] Wikipedia: Heptadecagon
- [56] Wikipedia: Huzita–Hatori axioms
- [57] Wikipedia: Josephus problem
- [58] Wikipedia: Neusis construction
- [59] Wikipedia: Pentagon
- [60] Wikipedia: Plimpton 322
- [61] Wikipedia: Quadratic equation
- [62] Wikipedia: Quadratrix of Hippias
- [63] Wikipedia: Sexagesimal