הפתעות מתמטיות

מוטי בן־ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

גרסה 1.0

13 ביולי 2021

This book was prepared from LaTeX source files. The Cumulus Hebrew fonts were used. Mathematics (`$$`, `\[\]`, etc.) were written on separate lines to avoid difficulties with the cursor movement in Hebrew.

Source files: `https://github.com/motib/mathematics/`.

Fonts: `http://www.ma.huji.ac.il/~sameti/tex/culmusmiktex.html`

תוכן עניינים

פרק 1 הקדמה

המאמר של Godfried Toussaint [?] על "מחוגה מתמוטטת" עשה עלי רושם חזק. לעולם לא עלה על דעתי שהמחוגה המודרנית איננה אותה מחוגה שהיתה קיימת בימיו של אוקלידס. בספר זה אני מציג את המחוגה המתמוטטת ומגוון רחב של נושאים מתמטיים אחרים שהפתיעו אותי. המתמטיקה היא ברמה של חמש יחידות בבית ספר תיכון, אבל החישובים וההוכחות אינם בהכרח פשוטים ודרושה מהקורא נכונות להשקיעה ולהתמיד.

ארבעת הפרקים הראשונים עוסקים בבניות גיאומטריות. פרק **??** מביא את ההוכחה של אוקלידס שעבור כל בניה עם מחוגה קבועה, קיימת בניה שקולה עם מחוגה מתמוטטת. לאורך השנים ניתנו הוכחות שגויות רבות שמבוססות על תרשימים שאינם נכונים בכל מצב. כדי להדגיש שאין לסמוך על תרשימים, הבאתי את "ההוכחה" המפורסמת שכל משולש שווה־שוקיים.

היוונים חיפשו בניה שתחלק זווית שרירותית לשלושה חלקים שווים. רק במאה ה־19 הוכח שהבניה אינה אפשרית. למעשה, אין לבעיה שום משמעות מעשית, כי ניתן לחלק זווית לשלושה חלקים שווים עם כלים מעט יותר משוכללים מסרגל ומחוגה, כפי שמוסבר בפרק **??**.

בעיה שנייה שאיתגר את היוונים היתה ריבוע המעגל: נתון מעגל, בנה ריבוע עם שטח זהה. הבניה שקולה לבניית קטע קו באורך π. גם בניה זו הוכחה כבלתי אפשרית. פרק **??** מביא שלוש בניות של קירובים מדוייקים להפליא ל־π, אחת של Kochansky מ־1685, ושתיים של Ramanujan מ־1913.

פרקים **??**-**??** עוסקים בבעיות הקשורות בצביעת ישויות כגון גרפים. ב־1976 פורסמה הוכחה מסובכת ביותר שניתן לצבוע כל מפה (גרף מישורי) עם ארבעה צבעים. אולם, כבר במאה ה־19, הופיעה הוכחה פשוטה יחסית שניתן לצבוע גרף מישורי בששה ואף בחמישה צבעים. פרק **??** מביא את ההוכחה ביחד עם הוכחת הנוסחה של Euler הדרושה להוכחת הצביעה של גרפים.

כמה שומרים נחוצים כדי לשמור על מוזיאון? כלומר, נתון שטח במישור שתחום בקירות שרירותיים, מה מספר הנקודות הקטן ביותר שמהן ניתן לראות את כל הקירות? פרק **??** מציג את הפתרון והוכחה אלגנטית ביותר לפתרון שמבוססת על צביעת גרפים.

המתמטיקאי C. Dudley Langford צפה יום אחד בבנו שסידר קוביות צבעוניות בסדר מעניין. פרק **??** מביא משפט שלו הקובע מתי סידור זה אפשרי.

פרק **??** עוסק בפתרון משוואות ריבועיות, מאבני היסוד המוכרות ביותר בקורסי מבוא במתמטיקה, ומסביר הדרך המעט שונה של Po-Shen Loh לפתרון המשוואות.

פרק **??** מביא הוכחות למשפטים פחות מוכרים שמשתמשות באינדוקציה. המשפטים הם בנושאים: מספרי Fibonacci, מספרי Fermat ופונקציה 91 של McCarthy.

אוריגמי הוא אומנות בה האומן מייצר חפצים יפים על ידי קיפולי נייר. לקראת סוף המאה ה־20, מתמטיקאים גילו שאפשר לאפיין את הכל הקיפולים האפשריים באמצעות שבע אקסיומות. פרק **??** מפתח את המשוואות של האקסיומות ביחד עם דוגמאות נומריות.

פעולות הקיפול יכולות לבנות כל בניה שניתן לבנות עם סרגל ומחוגה. בנוסף, ניתן לבנות שורשים ממעלה שלוש. פרק **??** מביא את השיטה הגיאומטרית של Eduard Lill לבדיקת שורשים ממשיים של פולינומים, וכן את הקיפול של Margharita P. Beloch למציאת שורשים ממשיים של פולינום ממעלה שלוש.

העובדה שניתן למצוא שורשים ממעלה שלוש מאפשרת לבנות בקיפולי אוריגמי בניות שלא ניתן לבנות עם סרגל ומחוגה. בפרק **??** נביא את הבניות: חלוקת זווית לשלושה לחלקים שווים, הכפלת קוביה, ובניית מתושע (מצולע משוכלל עם תשע צלעות).

אנו מסיימים עם שלושה פרקים על בניות גיאומטריות מתקדמות. המתמטיקה בחלק זה היא עדיין ברמה של בית ספר תיכון, אבל ההוכחות מאוד ארוכות. פרק **??** מביא את המשפט המפתיע ביותר של Lorenzo Mascheroni מ־1797 ו־Georg Mohr מ־1672 שאין צורך בסרגל, וניתן להסתפק במחוגה בלבד.

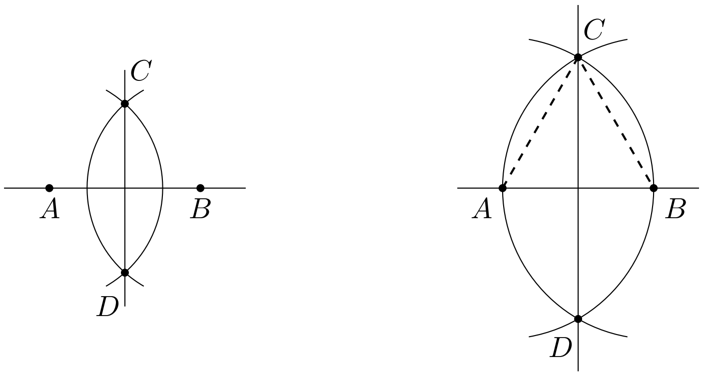
בעקבות משפט זה ניתן לשאול: האם צריך מחוגה? התשובה היא לא כי עם סרגל בלבד אפשר לבנות ערכים המתקבלים רק מחישובים לינאריים, לעומת בניות עם מחוגה שמאפשרת חישובים עם שורש ריבועי. ב־1833 Jakob Steiner הוכיח שאפשר להסתפק בסרגל בלבד, בתנאי שקיים אי־שם במישור מעגל אחד. ההוכחה נמצאת בפרק **??**.

שאלה מעניינת בגיאומטריה היא: האם שני משולשים עם אותו שטח ועם אותו היקף חייבים להיות חופפים? התשובה היא לא, אבל מציאת זוגות לא חופפים מחייבת מסע דרך הרבה טריגונומטריה, כפי שמתואר בפרק **??**. לפרק הוספתי הוכחה אלגנטית לנוסחה של Heron לשטח של משולש.

פרק 2 מחוגה מתמוטטת

2.1 מחוגה קבועה ומחוגה מתמוטטת

במחוגה מודרנית ניתן לקבע את המרחק בין שתי הרגליים, וכך להעתיק קטע קו או מעגל ממקום למקום. נקרא למחוגה זו: "מחוגה קבועה". בספרי לימוד גיאומטריה ניתן למצוא בנייה של אנך אמצעי לקטע קו על ידי בניית שני מעגלים שמרכזם על הקו, **ובלבד שהרדיוס גדול ממחצית המרחק בין המרכזים**, (תרשים שמאלי):



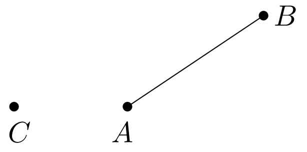
אוקלידס השתמש במחוגה "מתמוטטת" (collapsing), שרגליה מתקפלות כאשר מרימים אותן מהנייר. מחוגה המורכבת מגיר הקשור לחוט היא מחוגה מתמוטטת, כי אי־אפשר לשמור את הרדיוס כאשר מרימים אותה מהלוח. התרשים הימני למעלה מראה בנייה של אנך אמצעי באמצעות מחוגה מתמוטטת: האורך של $\overline{AB}$ שווה כמובן לאורך של $\overline{BA}$, ולכן למעגלים רדיוס זהה.

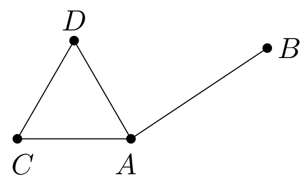
בבניה עם המחוגה המתמוטטת קל להוכיח שמתקבל משולש שווה־צלעות. האורך של $\overline{AC}$ שווה לאורכו של $\overline{AB}$, כי שניהם רדיוסים של אותו מעגל, ומאותה סיבה האורך של $\overline{BC}$ שווה לאורכו של $\overline{BA}$. מכאן ש־$\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BA} = \overline{BC}$.

הבניה של משולש שווה־צלעות היא המשפט הראשון בספר של אוקלידס. המשפט השני מראה שאפשר להעתיק קטע קו עם מחוגה מתמוטטת, ולכן המחוגה הקבועה לא מוסיפה יכולת חדשה.

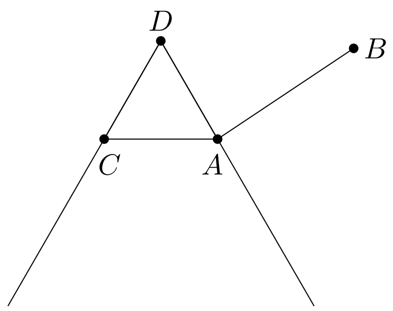
2.2 העתקת קטע קו לפי אוקלידס

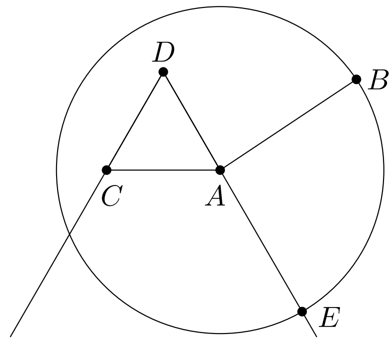
משפט: נתון קטע קו AB ונקודה C (תרשים משמאל), ניתן לבנות (עם מחוגה מתמוטטת) בנקודה C קטע קו שאורכו שווה לאורכו של AB:



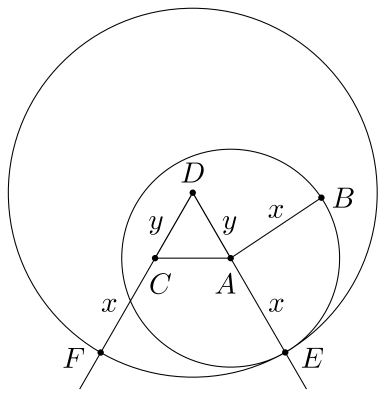


- חברו בקו את הנקודות A ו־C.
- בנו משולש שווה צלעות שבסיסו $\overline{AC}$ (אפשרי לפי המשפט הראשון של אוקלידס). סמנו את הקודקוד של המשולש ב־D (תרשים ימני למעלה).
- בנו קרן בהמשך של $\overline{DA}$ וקרן בהמשך של DC (תרשים שמאלי למטה).
- בנו מעגל שמרכזו A עם רדיוס $\overline{AB}$. סמנו E, החיתוך של המעגל עם הקרן $\overline{DE}$ (תרשים ימני).





- בנו מעגל שמרכזו D עם רדיוס $\overline{DE}$. סמנו את החיתוך של $\overline{DC}$ עם המעגל ב־F:

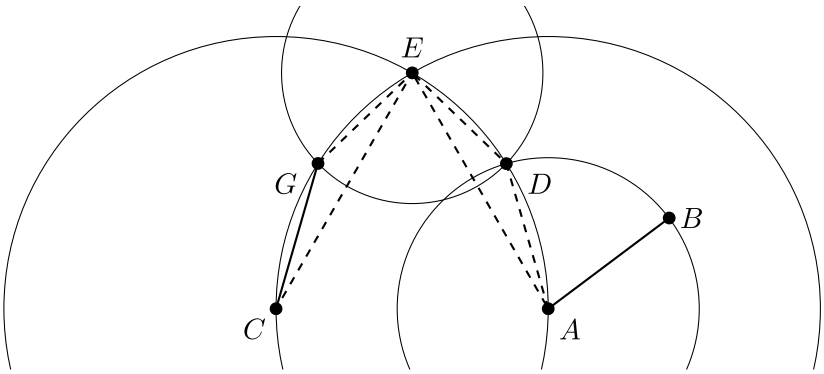


טענה: אורכו של קטע הקו $\overline{CF}$ שווה לאורכו של קטע הקו $\overline{AB}$.

הוכחה: $\overline{DC} = \overline{DA}$ כי $\triangle ACD$ שווה־צלעות. $\overline{AE} = \overline{AB}$ כי שניהם רדיוסים של המעגל שמרכזו A. $\overline{DF} = \overline{DE}$ כי שניהם רדיוסים של המעגל שמרכזו D. אורכו של $\overline{CF}$ הוא:

$$\overline{CF} = \overline{DF} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DA} = \overline{AE} = \overline{AB}\,.$$

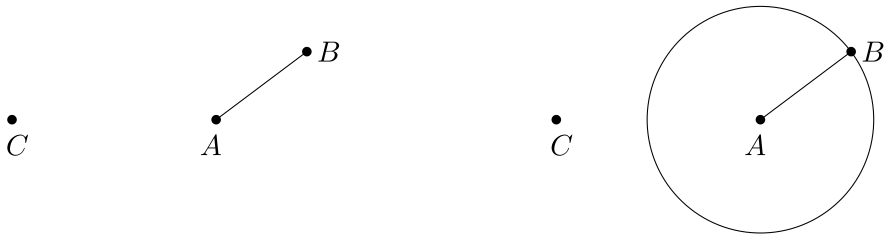
. ∎



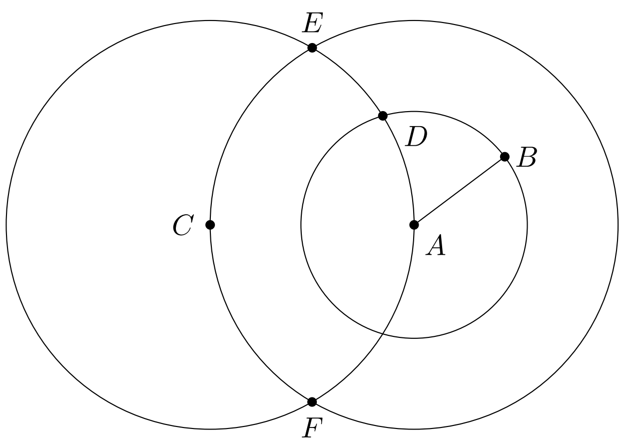
איור 2.1: משולשים חופפים

2.3 העתקה שגויה של קטע קו

- בנו מעגל שמרכזו A עם רדיוס $\overline{AB}$:



- בנו מעגל שמרכזו A עם רדיוס $\overline{AC}$ ומעגל שמרכזו C עם רדיוס $\overline{CA} = \overline{AC}$.
- סמנו את נקודות החיתוך של המעגלים ב־E,F. סמנו את נקודת החיתוך של המעגל שמרכזו C עם המעגל שמרכזו A עם רדיוס $\overline{AB}$ ב־D:



- בנו מעגל שמרכזו E עם רדיוס $\overline{ED}$. סמנו ב־G את החיתוך של המעגל עם המעגל שמרכזו A עם רדיוס $\overline{AC}$ (איור **??**).

טענה: ארכו של $\overline{CG}$ שווה לאורכו של $\overline{AB}$.

הוכחה: נניח ש־$\triangle ADE \cong \triangle CGE$. אם כן, $\overline{CG} = \overline{AD} = \overline{AB}$ כי $\overline{AD}, \overline{AB}$ הם רדיוסים של המעגל הקטן שמרכזו A. למעגל שמרכזו C אותו רדיוס כמו למעגל שמרכזו A ועובר דרך E. לכן, ניתן להתייחס אליהם כ־"אותו" מעגל.

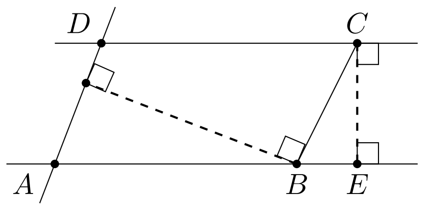
עכשיו נוכיח את החפיפה $\triangle ADE \cong \triangle CGE$. $\overline{EG} = \overline{ED}$ כי הם רדיוסים של המעגל שמרכזו E, ו־$\overline{EC} = \overline{EA}$ כי הם רדיוסים של "אותו" מעגל. $\angle GCE = \angle DAE$ כי הן זוויות היקפיות על "אותו" מיתר $\overline{EG}, \overline{ED}$. $\angle CGE = \angle ADE$ כי הן זוויות היקפיות על "אותו" מיתר $\overline{EC}, \overline{EA}$. לכן, $\angle GEC = \angle DEA$ ו־$\triangle ADE \cong \triangle CGE$ לפי צ.ז.צ. ∎

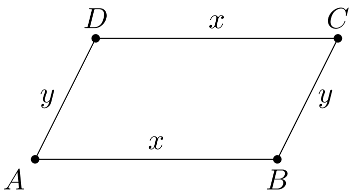
אין שום שגיאה בהוכחה! השגיאה נובעת ממקור אחר: השוויון $\overline{AB} = \overline{GC}$ מתקיים רק כאשר אורכו של $\overline{AB}$ קטן מאורכו של $\overline{AC}$. הבנייה של אוקלידס נכונה ללא קשר לאורך היחסי של הקווים ולמיקום של הנקודה C ביחס לקטע הקו $\overline{AB}$.

2.4 בניה אחרת להעתקת קטע קו

הבניה כאן להעתקת קטע קו יחסית פשוטה, אבל הוכחה מפורטת שלה מסובכת.

נתון קטע קו $\overline{AB}$ ונקודה C, נבנה את הנקודות A, B, C. ביחד עם הנקודה D נקבל מקבילית עם הנקודות הללו כקודקודים שלה. $\overline{DC}$ הוא קטע קו עם הנקודה C בקצה אחד, ו־$\overline{DC} = \overline{AB}$ (תרשים שמאלי).

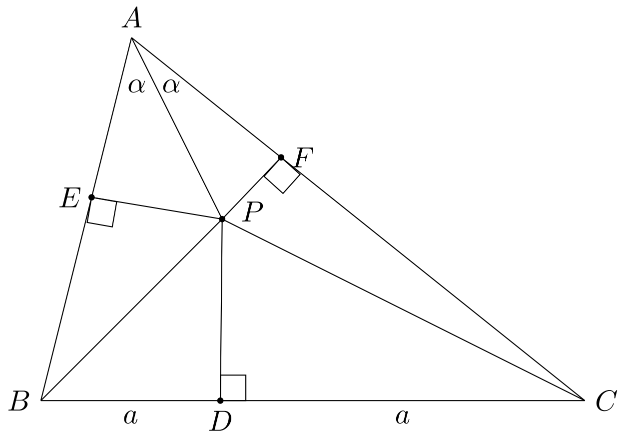




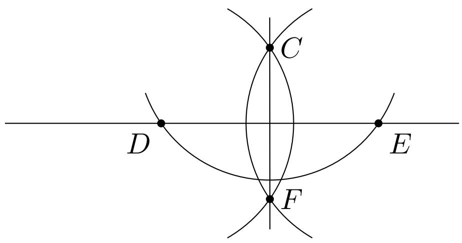
הבניה מוצגת בתרשים הימני.

- חברו את B ו־C.
- בנו אנך מ־C לקו המכיל את הקטע $\overline{AB}$. סמנו את נקודת החיתוך ב־E.
- בנו אנך לקטע $\overline{CE}$ מהנקודה C. אנך זה מקביל ל־$\overline{AB}$.
- באותה דרך בנו קו המקביל ל־$\overline{BC}$ דרך A. סמנו את נקודת החיתוך של שני הקווים ב־D.
- $\overline{AB} \| \overline{DC}$, $\overline{AD} \| \overline{BC}$ ולפי ההגדרה $ABCD$ הוא מקבילית, ולכן $\overline{AB} = \overline{CD}$.

בניה עם מחובה מתמוטטת: נראה איך לבנות אנך דרך נקודה נתונה עם מחוגה מתמוטטת. בנו מעגל שמרכזו C עם רדיוס הגדול מהמרחק של C מהקו. סמנו את נקודות החיתוך שלו עם הקו ב־D, E. בנו מעגלים שמרכזם D, E עם רדיוסים $\overline{DC} = \overline{EC}$. הקו בין נקודות החיתוך של המעגלים C, F הוא אנך לקו דרך הנקודה C.



איור 2.2: "הוכחה" שכל משולש שווה־שוקיים



2.5 אין לסמוך על תרשים

בסעיף **??** ראינו שאין לסמוך על ציור. הנה הוכחה "נכונה" **שכל** משולש שווה־שוקיים!

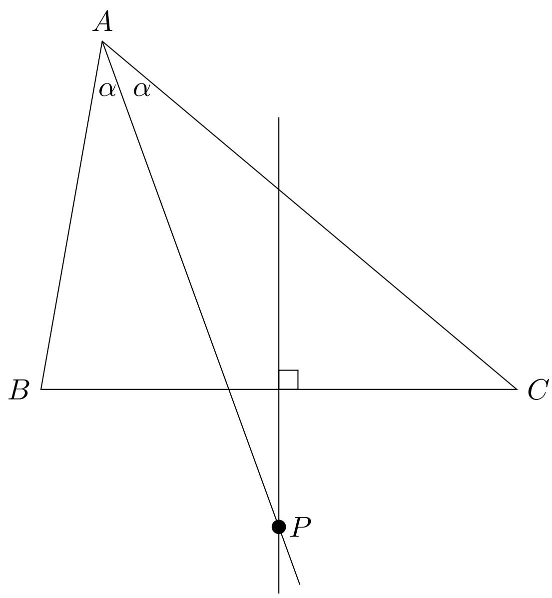
נתון משולש שרירותי $\triangle ABC$, תהי P נקודת החיתוך בין חוצה הזווית של $\angle BAC$ לבין האנך האמצעי של $\overline{BC}$ (איור **??**). סמנו ב־D, E, F את נקודות החיתוך של האנכים מ־P לצלעות $\overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$. $\triangle APE \cong \triangle APF$ כי הם משולשים ישר זווית עם זוויות שוות α וצלע $\overline{AP}$ משותף.

$\triangle DPB \cong \triangle DPC$ לפי צ.ז.צ. כי $\overline{PD}$ הוא צלע משותף, $\angle PDB = \angle PDC = 90^\circ$, ו־$\overline{BD} = \overline{DC} = a$ כי $\overline{PD}$ הוא האנך האמצעי ל־$\overline{BC}$. במשולשים ישר־זווית $\triangle EPB \cong \triangle FPC$ כי שתי לצועות שוות: $\overline{EP} = \overline{PF}$ לפי החפיפה הראשונה, ו־$\overline{PB} = \overline{PC}$ לפי החפיפה השנייה. נחבר את השוויונות ונקבל ש־$\triangle ABC$ שווה־שוקיים:

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AF} + \overline{FC} = \overline{AC}\,.$$

∎

הבעיה בהוכחה היא שתרשים אינו נכון כי הנקודה P נמצאת **מחוץ** למשולש.



מקורות

Toussaint [?] הראה שפורסמו הוכחות שגויות רבות של המשפט ודווקא אוקלידס הוא זה שנתן הוכחה נכונה! הבניה בסעיף **??** לקוחה מ־[?] ו־[?]. הבניה בסעיף **??** לקוחה מ־[?].

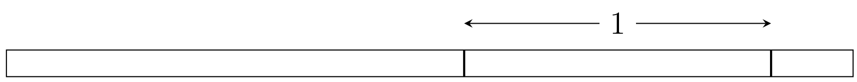
פרק 3 חלוקת זווית לשלושה חלקים

לא ניתן לחלק זווית שרירותית לשלושה חלקים שווים באמצעות סרגל ומחוגה (להלן, בקיצור, לחלק זווית לשלושה). הסיבה היא שחלוקת זווית לשלושה דורשת בניה של שורש שלישי, אבל עם וסרגל ומחוגה ניתן לבנות רק אורכים שמתקבלים מארבעת פעולות החשבון ושורש ריבועי.

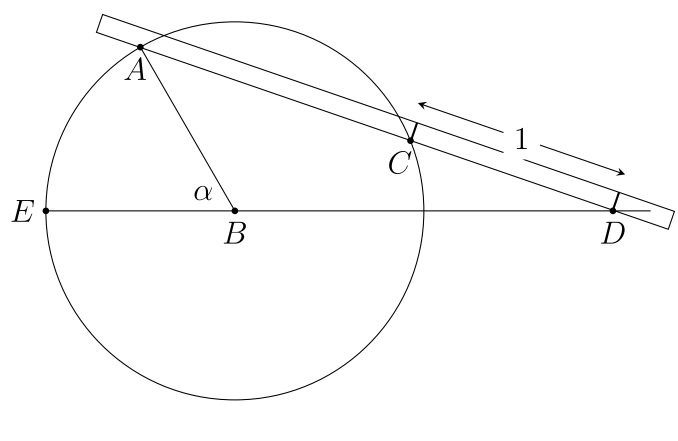
היוונים גילו שבאמצעות כלים אחרים ניתן לחלק זווית לשלושה. סעיף **??** מציג בניה של ארכימדס עם כלי פשוט הנקרא ביוונית ניאוסיס (neusis). סעיף **??** מביא בניה מסובכת יותר של היפיאס באמצעות קוודרטריקס (quadratrix). בסעיף **??** נסביר איך לרבע מעגל באמצעות קוודרטריקס.

3.1 חלוקת זווית לשלושה באמצעות ניאוסיס

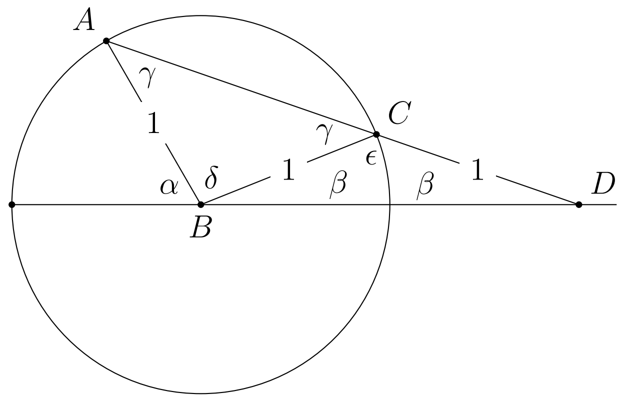
השימוש במילה "סרגל" מטעה, כי הכוונה היא למקל ישר ללא כל סימן, שהפעולה היחידה שניתן לעשות איתו היא למתוח קו ישר בין שתי נקודות. לסרגל המוכר יש סימנים המאפשרים למדוד אורכים. כדי לחלק זווית לשלושה חלקים, נשתמש ב־**ניאוסיס** שהוא מקל עם שני סימנים בלבד. נניח שהמרחק בין שני הסימנים הוא 1:



תהי α זווית שרירותית $\angle ABE$ בתוך מעגל שמרכזו B עם רדיוס 1. ניתן לבנות את המעגל על ידי קביעת המרחק שבין רגלי החוגה למרחק שבין הסימנים על הניאוסיס:



בנו קרן כהמשכו של $\overline{EB}$ מחוץ למעגל. הניחו את הניאוסיס על הנקודה A והזיזו אותו עד שהוא חותך את הקרן בנקודה D ואת המעגל בנקודה C. כוונו את הניאוסיס כך שהאורך של $\overline{CD}$ יהיה 1. ציירו את הקו $\overline{AD}$. ציירו את הקו $\overline{BC}$ וסמנו את הזוויות וקטעי הקו לפי האיור להלן:



$\overline{BA} = \overline{BC}$ לפי הבניה באמצעות הניאוסיס. $\overline{CB} = \overline{CD}$ כי שניהם רדיוסים ו־ לכן $\triangle ABC$, $\triangle BCD$ הם משולשים שווי־שוקיים. מחישוב פשוט:

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= 180^\circ - 2\beta \\
\gamma &= 180^\circ - \epsilon = 2\beta \\
\delta &= 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ - 4\beta \\
\alpha &= 180^\circ - \delta - \beta = 4\beta - \beta = 3\beta\,,
\end{aligned}
$$

מתקבל שהזווית β היא שליש מהזווית α.

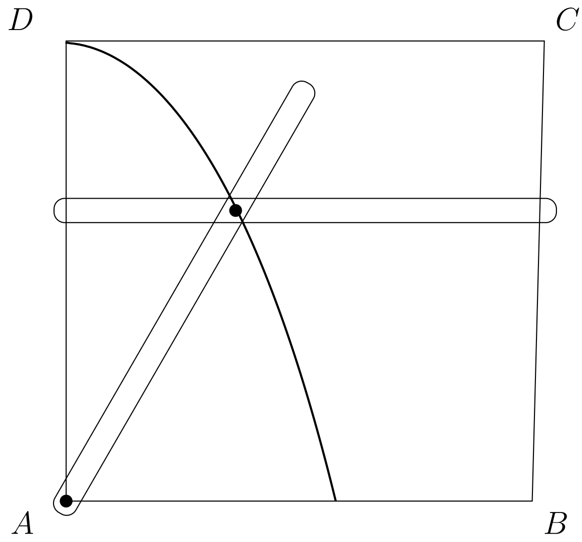
3.2 חלוקת זווית לשלושה באמצעות קוודרטריקס

איור **??** מראה **מחוגת קוודרטריקס** המורכב משני סרגלים (ללא סימנים) המחוברים במפרק המאלץ אותם לנוע ביחד. סרגל אחד נע במקביל לציר ה־x מ־$\overline{DC}$ עד $\overline{AB}$. הסרגל השני מחובר לנקודה A ומסתובב ממצב אנכי לאורך $\overline{AD}$ עד שהוא במצב אופקי לאורך $\overline{AB}$. העקומה המצוירת על ידי המפרק המחבר את שני הסרגלים נקראת **עקומת הקוודרטריקס** או פשוט **קוודרטריקס**.

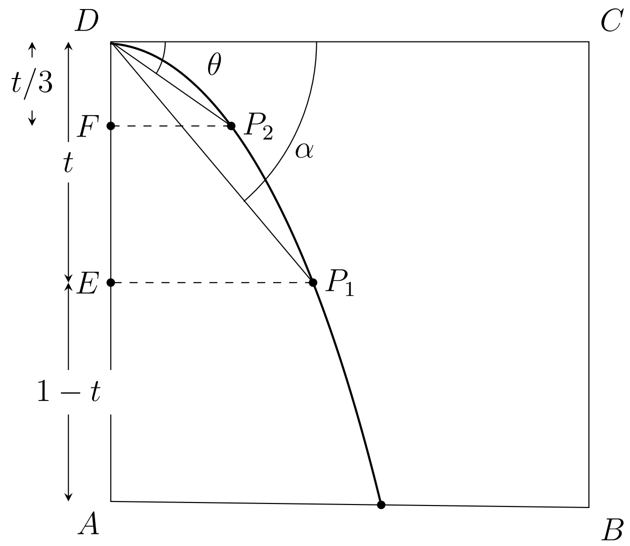
כאשר מזיזים את הסרגל האופקי במהירות אחידה, החיבור מאלץ את הסרגל השני להסתובב במהירות זוותית קבועה. למעשה זו ההגדרה של הקוודרטריקס. כאשר קואורדינטת ה־y של הסרגל האופקי יורד מ־1 ל־0, הזווית של הסרגל השני יחסית לציר ה־x יורד מ־90° ל־0°.

איור **??** מראה איך לחלוק את הזווית α לשלושה חלקים באמצעות קוודרטריקס. P_1 היא נקודת החיתוך בין הקו המגדיר את הזווית α לבין עקומת הקוודרטריקס. קואורדינטת ה־y שלה היא $1-t$, כאשר t הוא המרחק שהסרגל האופקי נע מ־$\overline{DC}$. חלקו את $\overline{DE}$ לשלושה חלקים כדי לקבל את הנקודה F. P_2 היא נקודת החיתוך בין הקו מ־F המקביל ל־$\overline{DC}$ לבין הקוודרטריקס. לפי מהירויות שוות:

$$
\begin{aligned}
\frac{\theta}{\alpha} &= \frac{t/3}{t} \\
\theta &= \alpha/3\,.
\end{aligned}
$$



איור 3.1: קוודרטריקס

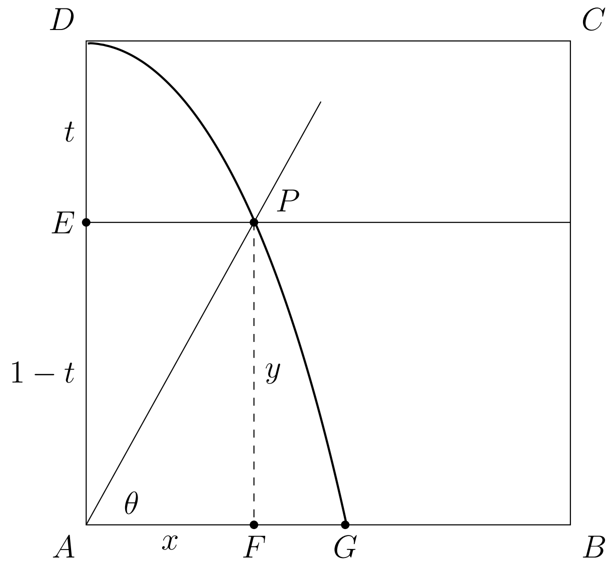


איור 3.2: חלוקת זווית לשלושה באמצעות קוודרטריקס

3.3 ריבוע מעגל באמצעות קוודרטריקס

ניתן לרבע מעגל האמצעות קוודרטריקס (איור **??**). נניח שהסרגל האופקי נע מרחק t לאורך ציר ה־y עד לנקודה E, ושהסרגל המסתובב מגדיר זווית θ עם ציר ה־x. הנקודה P היא החיתוך בין הקוודרטריקס לבין הסרגל האופקי, והנקודה F היא היטל של P על ציר ה־x. מהן הקואורדינטות של הנקודה P? ברור ש:

$$y = \overline{PF} = \overline{EA} = 1 - t\,.$$



איור 3.3: ריבוע המעגל באמצעות קוודרטריקס

על העקומה, θ יורד באותו קצב ש־t עולה:

$$\begin{aligned}\frac{1-t}{1} &= \frac{\theta}{\pi/2}\\ \theta &= \frac{\pi}{2}(1-t)\,.\end{aligned}$$

נבדוק אם זה הגיוני: כאשר $t=0$ אז $\theta=\pi/2$, וכאשר $t=1$ אז $\theta=0$. את קואורדינטת ה־x של P נקבל בטריגונומטריה:

$$\tan\theta = \frac{y}{x}\,.$$

ומכאן:

$$x = \frac{y}{\tan\theta} = y\cot\theta = y\cot\frac{\pi}{2}(1-t) = y\cot\frac{\pi}{2}y\,.$$

בדרך כלל המשוואה של עקומה היא מהצורה $y=f(x)$, אבל אפשר גם להשתמש במשוואה מהצורה $x=f(y)$. נחשב את קוארדינטת ה־x של הנקודה G, החיתוך של הקוודרטריקס עם ציר ה־x. לא ניתן להציב $y=0$ כי $\cot 0$ לא מוגדר, אבל ייתכן שיהיה לנו מזל אם נחשב את הגבול של x כאשר y שואף ל־0:

$$x = y\cot\frac{\pi}{2}y = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}y\cot\frac{\pi}{2}y\,.$$

למען הנוחיות, נחליף משתנה $z=\frac{\pi}{2}y$, ואז נחשב את הגבול:

$$\lim_{z\to0} z\cot z = \lim_{z\to0}\frac{z\cos z}{\sin z} = \lim_{z\to0}\frac{\cos z}{\frac{\sin z}{z}} = \frac{\cos 0}{1} = 1\,,$$

השתמשנו בעובדה הידועה ש־$\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}=1$.

כאשר $y \to 0$:

$$x \to \frac{2}{\pi} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\pi}{2} y \cot \frac{\pi}{2} y = \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi}\,.$$

על ידי שימוש בקוודרטריקס בנינו קטע קו $\overline{AG}$ שאורכו $x = \frac{2}{\pi}$. עם סרגל רגיל ומחוגה, קל לבנות קו באורך $\sqrt{\frac{2}{x}} = \sqrt{\pi}$, ואז לבנות ריבוע ששטחו π.

מקורות

על חלוקת זווית לשלושה חלקים ראו [?]. תיאור של הנאוסיס נמצא ב־[?] ותיאור של הקוודרטריקס נמצא ב־[?].

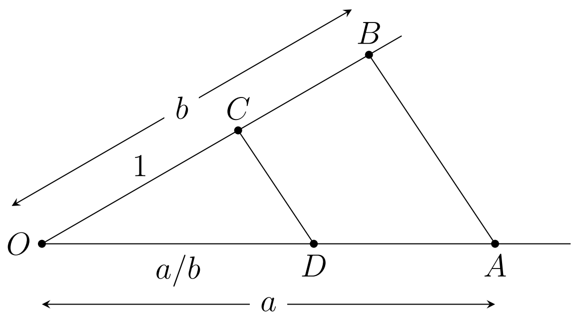
פרק 4 איך לרבע את המעגל

4.1 קירובים ל־π

כדי לרבע מעגל יש לבנות את האורך $\sqrt{\pi}$, אבל π הוא טרנסנדנטי, כלומר, הוא אינו פתרון של אף משוואה אלגברית. פרק זה מביא שלוש בניות של קירובים ל־π. הטבלה שלהלן מביא את הנוסחאות של האורכים שנבנה, ערכם המספרי, ההפרש בין ערכים הללו והערך של π, והשגיאה (במטרים) אם משתמשים בקירוב כדי לחשב את היקף כדור הארץ, כאשר נתון שהרדיוס הוא 6378 ק"מ.

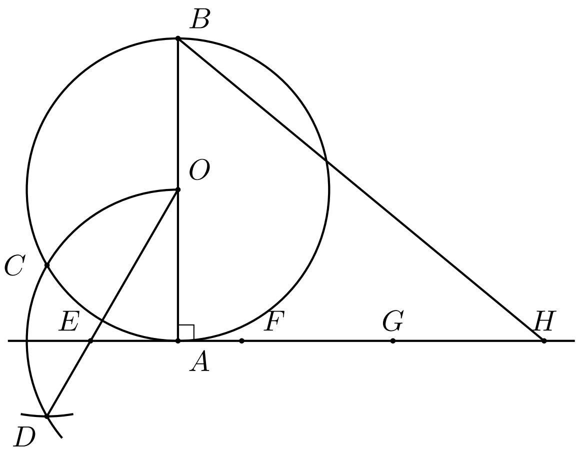
הבנייה	הנוסחה	הערך	ההפרש	השגיאה (מ)
π		3.14159265359	–	–
Kochansky	$\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$	3.14153338705	5.932×10^{-5}	756
Ramanujan 1	$\frac{355}{113}$	3.14159292035	2.667×10^{-7}	3.4
Ramanujan 2	$\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4}$	3.14159265258	1.007×10^{-9}	0.013

בבניות בפרק זה נצטרך לחלק **קטע קו** לשלושה חלקים. ניתן לבנות קטע קו בכל אורך רציונלי. נתון קטע קו באורך 1 וקטעי קו באורכים a, b, לפי משולשים דומים $1/b = \overline{OD}/a$ ולכן $\overline{OD} = a/b$.



4.2 הבניה של Kochansky

- בנו מעגל יחידה שמרכזו O, עם קוטר $\overline{AB}$ ובנו משיק למעגל ב־A.
- בנו מעגל יחידה שמרכזו A. סמנו את החיתוך עם המעגל הראשון ב־C.[1]
- בנו מעגל יחידה שמרכזו C. סמנו את החיתוך שלו עם המעגל השני ב־D.
- בנו $\overline{OD}$ וסמנו את החיתוך שלו עם המשיק ב־E.
- מ־E בנו F, G, H, כל אחת במרחק 1 מהנקודה הקודמת, כך ש־$\overline{AH} = 3 - \overline{EA}$.
- בנו $\overline{BH}$.



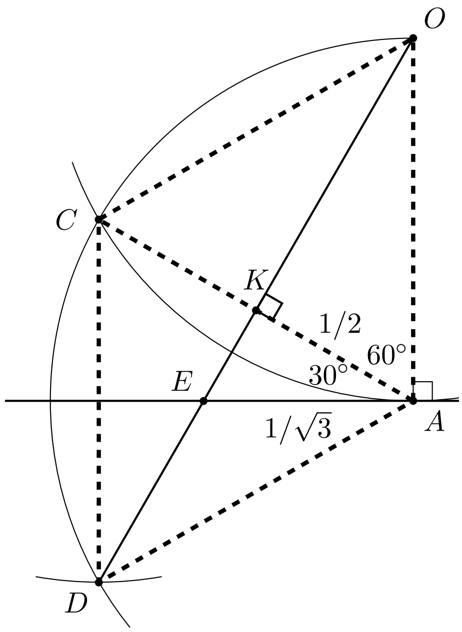
טענה: $\overline{BH} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx \pi$.

הוכחה: איור **??** מתמקד בחלק מהאיור למעלה. קטעי הקו המקווקווים נוספו. מפני שכל המעגלים הם מעגלי היחידה, קל לראות שאורך כל אחד מהקטעים המקווקווים הוא 1. מכאן ש־$AOCD$ הוא מעוין, ולכן האלכסונים שלו ניצבים זה לזה וחוצים זה את זה ב־K, כך ש־$\overline{AK} = \frac{1}{2}$.

האלכסון $\overline{AC}$ מייצר משולשים שווי־צלעות $\triangle OAC, \triangle DAC$ כך ש־$\angle OAC = 60°$. הזווית בין המשיק לרדיוס $\overline{OA}$ היא זווית ישרה ולכן $\angle KAE = 30°$. נחשב:

$$
\begin{aligned}
\frac{1/2}{\overline{EA}} &= \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\overline{EA} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\
\overline{AH} &= 3 - \overline{EA} \\
&= \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

[1]עבור המעגל השני והשלישי, האיור מראה רק את הקשת החותך את המעגל הקודם.



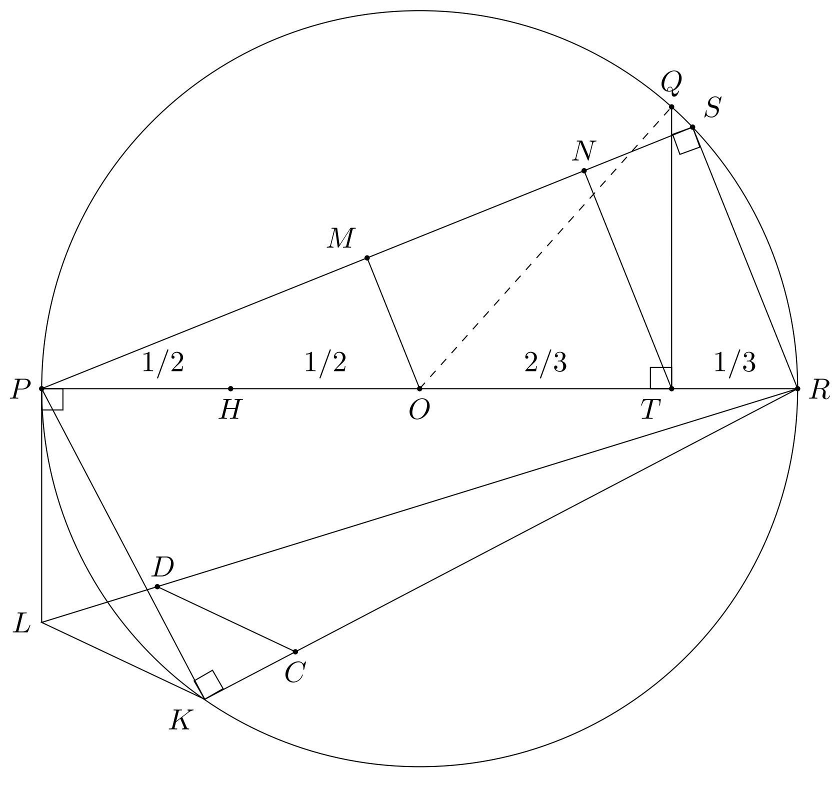
איור 4.1: הוכחת הבניה של Kochansky

נחזור לאיור הראשון. $\triangle ABH$ הוא משולש ישר־זווית, ולפי משפט פיתרוגס:

$$\begin{aligned}
\overline{BH}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 \\
&= 2^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)^2 \\
&= 4 + \frac{9 \cdot 3 - 6\sqrt{3} + 1}{3} \\
&= \frac{40}{3} - 2\sqrt{3} \\
\overline{BH} &= \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3.141533387 \approx \pi\,.
\end{aligned}$$

4.3 הבניה הראשונה של Ramanujan

- בנו מעגל יחידה שמרכזו O עם קוטר $\overline{PR}$.
- בנו נקודה H שחוצה את $\overline{PO}$ ונקודה T כך ש־$\overline{TR} = \frac{1}{3}\overline{OR} = \frac{1}{3}$.
- בנו ניצב ב־T שחותך את המעגל ב־Q.
- בנו את המיתר $\overline{RS} = \overline{QT}$.
- בנו את המיתר $\overline{PS}$.
- בנו קו מקביל ל־$\overline{RS}$ העובר דרך T, וסמנו ב־N את החיתוך שלו עם $\overline{PS}$.
- בנו קו מקביל ל־$\overline{RS}$ העובר דרך O, וסמנו ב־M את החיתוך שלו עם $\overline{PS}$.
- בנו את המיתר $\overline{PK} = \overline{PM}$.
- בנו משיק ב־P שאורכו $\overline{PL} = \overline{MN}$.
- חברו את הנקודות K, L, R.
- מצאו נקודה C כך ש־$\overline{RC} = \overline{RH}$.
- בנו קו $\overline{CD}$ המקביל ל־$\overline{KL}$ שחותך את $\overline{LR}$ ב־D.



טענה: $\overline{RD}^2 = \frac{355}{113} \approx \pi$.

הוכחה: לפי משפט פיתגורס ב־$\triangle QOT$:

$$\overline{QT} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}\,.$$

לפי הבניה $\overline{QT} = \overline{RS}$ ולפי משפט פיתגורס ב־$\triangle PSR$:

$$\overline{PS} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{31}}{3}\,.$$

לפי הבניה $\overline{MO} \| \overline{RS}$ כך ש־$\triangle MPO \sim \triangle SPR$ ולכן:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{PM}}{\overline{PO}} &= \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}}\\
\frac{\overline{PM}}{1} &= \frac{\sqrt{31}/3}{2}\\
\overline{PM} &= \frac{\sqrt{31}}{6}\,.
\end{aligned}$$

לפי הבניה $\overline{NT} \| \overline{RS}$ כך ש־$\triangle NPT \sim \triangle SPR$ ולכן:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{PN}}{\overline{PT}} &= \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}}\\
\frac{\overline{PN}}{5/3} &= \frac{\sqrt{31}/3}{2}\\
\overline{PN} &= \frac{5\sqrt{31}}{18}\\
\overline{MN} &= \overline{PN} - \overline{PM}\\
&= \sqrt{31}\left(\frac{5}{18} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{31}}{9}\,.
\end{aligned}$$

$\triangle PKR$ הוא משולש ישר־זווית כי הוא נשען על קוטר. לפי הבניה $\overline{PK} = \overline{PM}$ ולכן לפי משפט פיתגורס:

$$\overline{RK} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{31}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{113}}{6}\,.$$

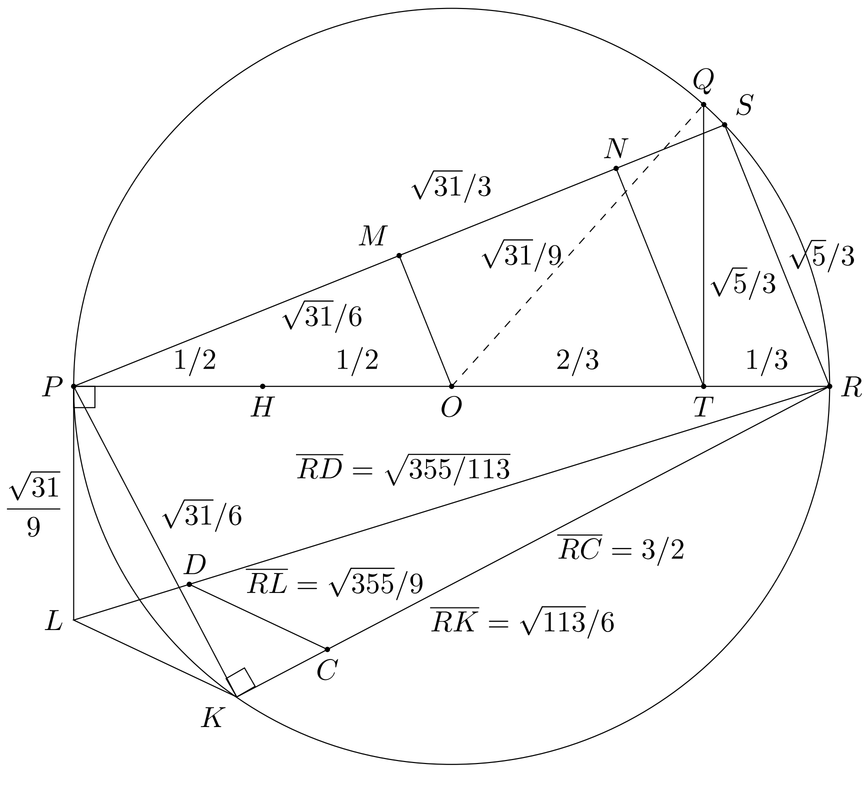
$\triangle PLR$ הוא משולש ישר־זווית כי $\overline{PL}$ הוא משיק. לפי הבניה $\overline{PL} = \overline{MN}$ ולכן לפי משפט פיתגורס:

$$\overline{RL} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{31}}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{355}}{9}\,.$$

לפי הבניה $\overline{RC}=\overline{RH}=\frac{3}{2}$. $\overline{CD}$ מקביל ל־$\overline{LK}$, ולכן $\triangle LRK \sim \triangle DRC$ ו:

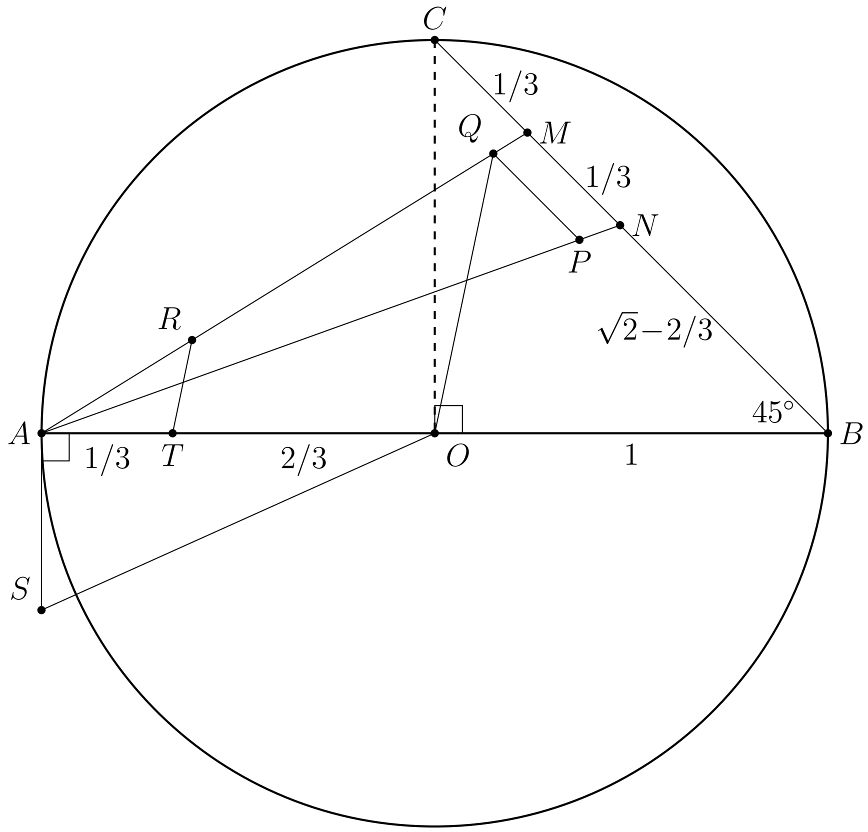
$$\begin{aligned}
\frac{\overline{RD}}{\overline{RC}} &= \frac{\overline{RL}}{\overline{RK}}\\
\frac{\overline{RD}}{3/2} &= \frac{\sqrt{355}/9}{\sqrt{113}/6}\\
\overline{RD} &= \sqrt{\frac{355}{113}}\,.
\end{aligned}$$

באיור שלהלן אורכי קטעי הקו מסומנים:



4.4 הבניה השנייה של Ramanujan

- בנו מעגל יחידה שמרכזו O עם קוטר $\overline{AB}$, וסמנו ב־C את החיתוך של הניצב ב־O עם המעגל.
- בנו את הנקודה T כך ש־$\overline{AT} = 1/3$ ו־$\overline{TO} = 2/3$.
- בנו $\overline{BC}$ ומצאו נקודות M, N כך ש־$\overline{CM} = \overline{MN} = \overline{AT} = 1/3$.
- בנו $\overline{AM}$ ו־$\overline{AN}$ וסמנו ב־P את הנקודה על $\overline{AN}$ כך ש־$\overline{AP} = \overline{AM}$.
- בנו קו המקביל ל־$\overline{MN}$ שעובר דרך P, וסמנו ב־Q את נקודת החיתוך שלו עם $\overline{AM}$.
- בנו $\overline{OQ}$ ובנו קו המקביל ל־$\overline{OQ}$ שעובר דרך T, וסמנו ב־R את נקודת החיתוך שלו עם $\overline{AM}$.
- בנו משיק $\overline{AS}$ כך ש־$\overline{AS} = \overline{AR}$.
- בנו $\overline{SO}$.



טענה: $3\sqrt{\overline{SO}} = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} \approx \pi$.

הוכחה: $\triangle COB$ הוא משולש ישר־זווית ו־$\overline{OB} = \overline{OC} = 1$. לפי משפט פיתגורס $\overline{CB} = \sqrt{2}$ ו־$\overline{NB} = \sqrt{2} - 2/3$. $\triangle COB$ הוא המשולש שווה־שוקיים ולכן $\angle NBA = \angle MBA = 45°$. נשתמש במשפט הקוסינוסים על $\triangle NBA$ כדי לחשב את $\overline{AN}$:

$$\begin{aligned}
\overline{AN}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BN}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BN} \cdot \cos \angle NBA \\
&= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= 4 + 2 - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{9} - 4 + \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{22}{9} \\
\overline{AN} &= \sqrt{\frac{22}{9}} \,.
\end{aligned}$$

באופן דומה, נשתמש במשפט הקוסינוסים על $\triangle MBA$ כדי לחשב את $\overline{AM}$:

$$\begin{aligned}
\overline{AM}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BM}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BM} \cdot \cos \angle MBA \\
&= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= 4 + 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{9} - 4 + \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{19}{9} \\
\overline{AM} &= \sqrt{\frac{19}{9}} \,.
\end{aligned}$$

לפי הבנייה $\overline{QP} \parallel \overline{MN}$ כך ש־$\triangle QAP \sim \triangle MAN$, ולפי הבניה $\overline{AP} = \overline{AM}$, ולכן:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AQ}}{\overline{AM}} &= \frac{\overline{AP}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} \\
\overline{AQ} &= \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AN}} = \frac{19/9}{\sqrt{22/9}} = \frac{19}{3\sqrt{22}} \,.
\end{aligned}$$

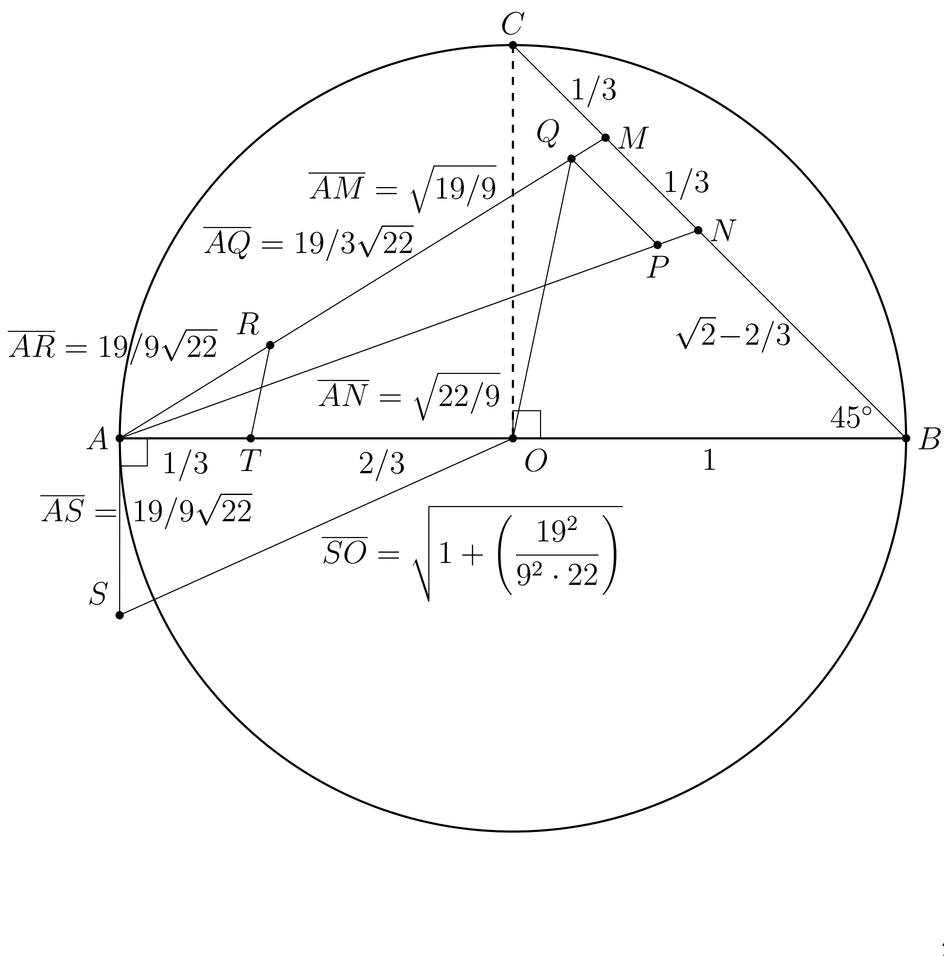
לפי הבנייה $\overline{OQ} \parallel \overline{TR}$ ולכן $\triangle QAO \sim \triangle RAT$ כך ש:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}} &= \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} \\
\overline{AR} &= \overline{AQ} \cdot \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} \\
&= \frac{19}{3\sqrt{22}} \cdot \frac{1/3}{1} = \frac{19}{9\sqrt{22}} \,.
\end{aligned}$$

לפי הבנייה $\overline{AS}=\overline{AR}$ ו־$\triangle OAS$ הוא משולש ישר־זווית כי $\overline{AS}$ הוא משיק. לפי משפט פיתגורס:

$$\begin{aligned}
\overline{SO} &= \sqrt{1^2+\left(\frac{19}{9\sqrt{22}}\right)^2}\\
3\sqrt{\overline{SO}} &= 3\left(1+\frac{19^2}{9^2\cdot 22}\right)^{\frac{1}{4}}\\
&= \left(3^4+\frac{3^4\cdot 19^2}{9^2\cdot 22}\right)^{\frac{1}{4}}\\
&= \left(9^2+\frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\approx 3.14159265262 \approx \pi\,.
\end{aligned}$$

באיור שלהן אורכי קטעי הקו מסומנים:



מקורות

הבניה של Kochansky לקוחה מ־[?], והבניות של Ramanujan לקוחות מ־[?, ?].

פרק 5 משפט חמשת הצבעים

5.1 מפות מישוריות וגרפים מישוריים

משפט 5.1

ניתן לצבוע מפה מישורית עם ארבעה צבעים כך ששני שטחים שכנים צבועים בצבע שונה.

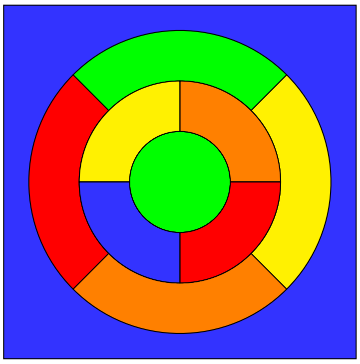
הוכחת משפט זה קשה ביותר; כאן נוכיח משפט הרבה יותר קל, משפט חמשת הצבעים שהוכח במאה התשע־עשרה.

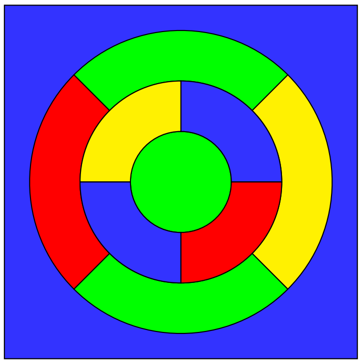
משפט 5.2

ניתן לצבוע מפה מישורית עם חמישה צבעים כך ששני שטחים שכנים צבועים בצבעים שונים.

הגדרה: מפה מישורית היא אוסף של שטחים במישור עם גבולות משותפים. **צביעה** של מפה היא השמה של צבעים לשטחים כך שכל זוג שטחים שיש להם גבולות משותפים צבועים בצבעים שונים.[1]

האיור שלהלן מראה שתי צביעות שונות למפה מישורית עם עשרה שטחים: משמאל חמישה צבעים ומימין עם ארבעה צבעים.





הגדרה: גרף הוא קבוצה של **צמתים** V וקבוצה של **קשתות** E, כך שכל קשת מחבר בדיוק שני צמתים. **גרף מישורי** הוא גרף בו שתי קשתות לא חותכות אחת את השניה. בגרף מישורי קטע מהמישור התחום על ידי קבוצה של קשתות נקרא **שטח**. **צביעה** של גרף מישורי היא השמה של צבעים לצמתים כך ששני צמתים המחוברים על ידי קשת צבועים בצבעים שונים.

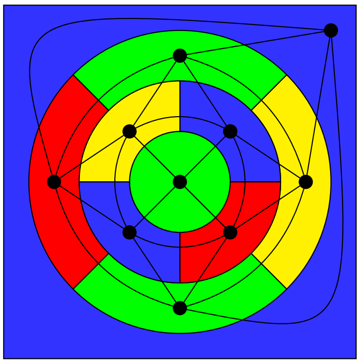
מפות וגרפים דואליים ונוח יותר לטפל בבעיות צביעה בגרפים ולא במפות.

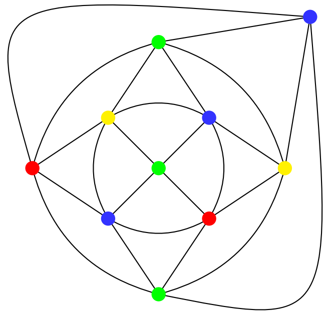
[1]שטחים שאין להם גבול משותף יכולים להיחשב כשייכים "לאותה ארץ", למשל, אלסקה היא חלק מארה"ב. בבעיה המתימטית, נתייחס אליהם כשטחים שונים שניתן לצבוע באותו צבע או בצבעים שונים.

משפט 5.3
נתונה מפה מישורית, ניתן לבנות גרף מישורי כך שעבור כל צביעה של שטחים במפה קיימת צביעה של הצמתים בגרף, ולהיפך.

הוכחה: בנו צומת עבור כל שטח במפה ובנו קשת בין שני צמתים אם ורק אם קיים גבול בין שני השטחים. ∎

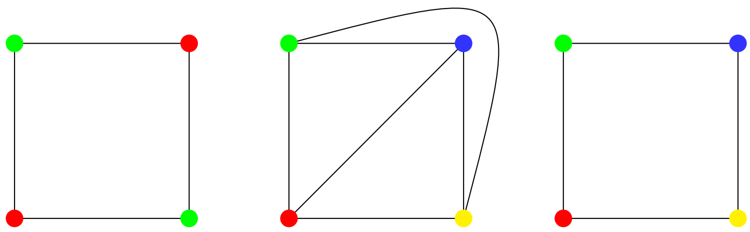
האיור שלהן מראה את הגרף המישורי שניתן לבנות מהמפה המישורית שהבאנו לעיל:





ניתן להגביל את עצמנו לגרפים שהשטחים שלהם **משולשים**.[2]

האיור השמאלי שלהלן מראה צביעת ריבוע עם שני צבעים, אבל אם **מתלתים** (triangulate) אותו (איור מרכזי), חייבים להשתמש בארבעה צבעים. היעד הוא להוכיח **שכל** גרף ניתן לצבוע בחמישה צבעים, כך שאם הדבר אפשרי בגרף המשולשי, הוא אפשרי גם בגרף המקורי, כי מחיקת הקשתות הנוספות לא מקלקלת את הצביעה (איור ימני).



5.2 הנוסחה של Euler

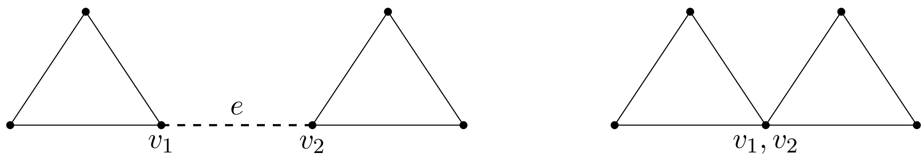
משפט 5.4 (Euler)
יהי G גרף מישורי מקושר עם V צמתים, E קשתות ו־F שטחים. אזי $V - E + F = 2$.

הוכחה: באינדוקציה על מספר הקשתות. אם מספר הקשתות בגרף מישורי מקושר הוא אפס, קיים רק צומת אחד ושטח אחד כך ש־$1 - 0 + 1 = 2$.

[2] השטחים הם לא בהכרח **משולשים** כי הקשתות יכולות להיות עקומות. לפי משפט Fáry, כל גרף מישורי משולשי ניתן להפוך לגרף מישורי שקול עם קשתות ישרות.

יהי G גרף מישורי מקושר עם V צמתים, E קשתות ו־F שטחים, ומחק קשת e המחבר את הצמתים v_1, v_2.

מקרה 1: הגרף מפסיק להיות מקושר (איור שמאלי). זהה את v_1 עם v_2 (איור ימני). ל־G', הגרף הנוצר, פחות קשתות מ־G, הוא גרף מישורי מקושר, ולכן לפי הנחת האינדוקציה, $(V-1)-(E-1)+F=2$ כי יש גם צומת אחד פחות. נפשט ונקבל $V-E+F=2$ עבור G.



מקרה 2: הגרף נשאר מקושר. לגרף הנוצר G' פחות קשתות מ־G, ולכן לפי הנחת האינדוקציה, $V-(E-1)+(F-1)=2$ כי מחיקת קשת אחת מאחדת שני שטחים לאחד. נפשט ונקבל $V-E+F=2$ עבור G. ∎

משפט 5.5

יהי G גרף מישורי מקושר ומתולת. אזי $E=3V-6$.

למשל, בגרף המישורי בסעיף ?? יש 10 צמתים ו־$24 = 3\cdot 10 - 6$ קשתות.

הוכחה: כל שטח חסום על ידי שלוש קשתות, כך ש־$E=3F/2$ כי כל קשת נספר פעמיים, פעם אחת לכל שטח שהיא חוסמת. לפי נוסחת Euler:

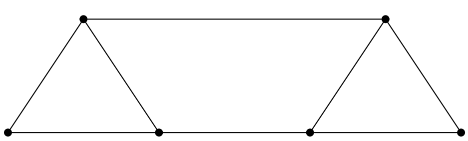
$$\begin{aligned} E &= V+F-2 \\ E &= V+2E/3-2 \\ E &= 3V-6\,. \end{aligned}$$

∎

משפט 5.6

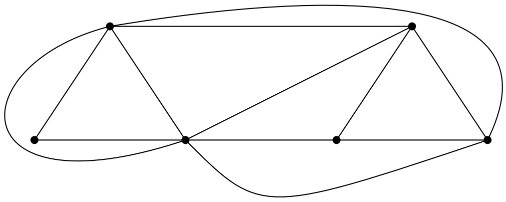
יהי G גרף מישורי מקושר. אזי $E \le 3V-6$.

עבור הגרף באיור שלהלן, $E = 8 \le 3\cdot 6 - 6 = 12$.



הוכחה: תלתו את G כדי לקבל G'. ב־G', $E = 3V - 6$ לפי משפט ??. כעת, מחק קשתות מ־G' כדי לקבל את G. מספר הצמתים לא משתנה כך ש־$E \leq 3V - 6$. ∎

הנה הגרף המתולת שעבורו $E = 3 \cdot 6 - 6 = 12$.

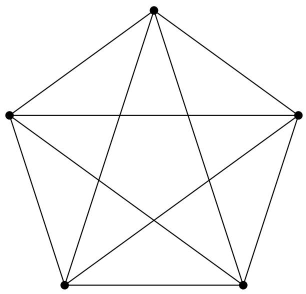


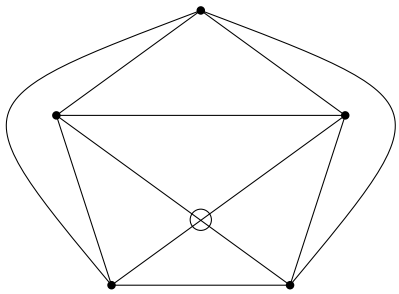
5.3 גרפים שאינם מישוריים

נסטה מעט מהסיפור כדי להראות איך ניתן להשתמש במשפטים ?? ו־?? כדי להוכיח שגרפים מסויימים אינם מישוריים.

משפט 5.7

K_5, הגרף השלם עם חמישה צמתים אינו מישורי.

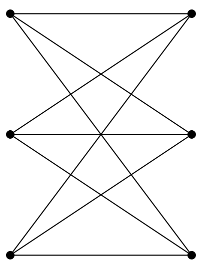


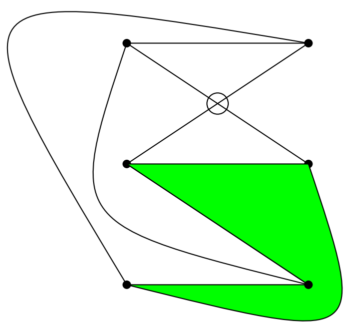


הוכחה: עבור K_5, $V = 5$ ו־$E = 10$. אבל $10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$. ∎

משפט 5.8

$K_{3,3}$, הגרף הדו־אזורי עם שלושה צמתים בכל איזור (איור שמאלי), אינו מישורי.





הוכחה: $V = 6$ ו־$E = 9$. לפי משפט ?? , $F = E - V + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$. אבל כל שטח תחום על ידי ארבע קשתות (איור ימני), ולכן $E = 4F/2 = (4 \cdot 5)/2 \neq 9$. ∎

5.4 המעלה של הצמתים

הגדרה: $d(v)$, **המעלה** של צומת v, היא מספר הקשתות הנפגשות ב־v. עבור הגרף בסעיף ?? , קיימים 8 צמתים בתוך הטבעות, כל אחד ממעלה 5. המעלה של השטח החיצוני ושל המעגל הפנימי הוא 4. לכן:

$$\sum_{v\in V} d(v) = 5\cdot 8 + 4\cdot 2 = 48\,.$$

נקבל את מספר הקשתות בגרף על ידי חלוקת סכום המעלות ב־2, כי כל קשת נספרה פעמיים, פעם אחת עבור כל צומת שהיא נוגעת בו. הכללת הטיעונים הללו מוכיחה:

משפט 5.9

יהי $d_i, i = 1,2,3,\ldots,k$ מספרי הצמתים ממעלה i בגרף מישורי מקושר עם V צמתים ו־E קשתות, כאשר k הוא המעלה הגבוהה ביותר של צומת ב־V. אזי:

$$\sum_{v\in V} d(v) = \sum_{i=1}^{k} i\cdot d_i = 2E\,.$$

משפט 5.10

יהי G גרף מישורי מקושר עם E קשתות ו־V צמתים, ויהי $d_i, i = 1,\ldots,k$ מספרי הצמתים ממעלה i, כאשר k הוא המעלה הגבוהה ביותר של צומת ב־V. אזי חייב להיות צומת v ב־V כך ש־$d(v) \leq 5$.

הוכחה 1: ברור שאם יש d_1 צמתים ממעלה 1, d_2 צמתים ממעלה 2, $\ldots$, d_k צמתים ממעלה k, אזי $V = \sum_{i=1}^{k} d_i$. מהמשפטים ?? ו־?? נקבל:

$$\sum_{i=1}^{k} i\cdot d_i = 2E \leq 2(3V-6) = 6V - 12 = 6\sum_{i=1}^{k} d_i - 12\,.$$

מכאן ש:

$$\sum_{i=1}^{k} i\cdot d_i \leq 6\sum_{i=1}^{k} d_i - 12\,,$$

ו:

$$\sum_{i=1}^{k}(6-i)d_i \geq 12\,.$$

בגלל ש־$12 > 0$, ל־i אחד לפחות, $6-i>0$ ועבור i זה, $i < 6$. ∎

הוכחה 2: נחשב את **הממוצע** של המעלות של הצמתים שהוא סכום המעלות לחלק למספר הצמתים:

$$d_{\text{avg}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} i\cdot d_i}{V}\,.$$

אבל סכום המעלות הוא פעמיים מספר הקשתות, ולפי משפט ?? נקבל:

$$d_{\text{avg}} = \frac{2E}{V} \leq \frac{6V-12}{V} = 6 - \frac{6}{V} < 6\,.$$

אם **הממוצע** של המעלות הוא פחות משש, חייב להיות צומת אחד לפחות ממעלה פחות משש. ∎

עבור הגרף בסעיף ?? , סכום המעלות הוא $8\cdot 5+2\cdot 4=48$. יש 10 צמתים, כך שממוצע המעלות שלו הוא $\frac{48}{10}=4.8$ וחייב להיות צומת ממעלה 4 או פחות.

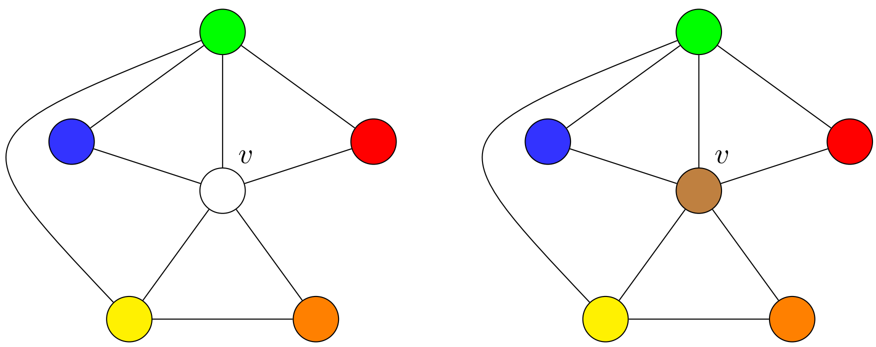
5.5 משפט ששת הצבעים

משפט 5.11

כל גרף מישורי ניתן לצביעה בששה צבעים.

הוכחה: באינדוקציה על מספר הצמתים ב־G. אם לגרף ששה צמתים או פחות, ברור שניתן לצבוע את הגרף בששה צבעים.

יהי G גרף מישורי. לפי משפט ?? קיים צומת v ממעלה חמש או פחות. מחק צומת v כדי לקבל את הגרף G'. לפי הנחת האינדוקציה, ניתן לצבוע את G' עם ששה צבעים, אבל ל־v חמישה שכנים לכל היותר שצבועים בחמישה צבעים לכל היותר, כך שנשאר צבע ששי שניתן לצבוע בו את v. ∎



5.6 משפט חמשת הצבעים

הגדרה: יהי G גרף מישורי מקושר צבוע. G' הוא **שרשרת** אם ורק אם G' הוא תת־גרף מקסימלי של G הצבוע בשני צבעים.[3]

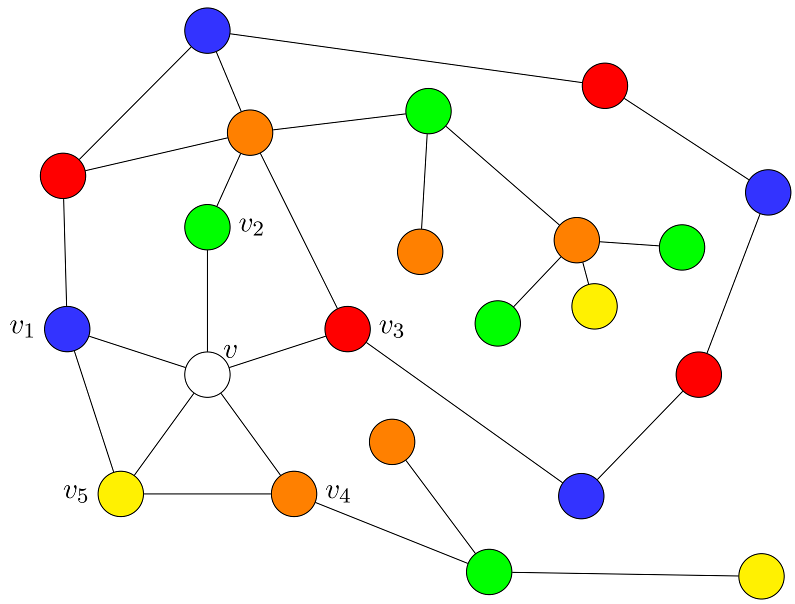
משפט 5.12

כל גרף מישורי G ניתן לצבוע בחמישה צבעים.

הוכחה: באינדקציה על מספר הצמתים. נכונות המשפט ברורה עבור גרף מישורי עם חמישה צמתים או פחות.

[3] השרשרת נקראת גם **שרשרת Kempe** כי היא הוגדרה על ידי Alfred Kempe בהוכחה השגויה שלו למשפט ארבעת הצבעים. ראו סעיף ??.

יהי G גרף מישורי. לפי משפט ?? קיים צומת v ממעלה חמש או פחות. מחק את הצומת v כדי לקבל את הגרף G'. לפי הנחת האינדוקציה, ניתן לצבוע את G' עם חמישה צבעים או פחות:



ב־G, אם המעלה של v היא פחות מחמש, או אם $v_1, \ldots, v_5$, השכנים של v, צבועים עם ארבעה צבעים או פחות, ניתן לצבוע את v עם הצבע החמישי. אחרת, הצמתים $v_1, \ldots, v_5$ צבועים בצבעים שונים ב־G' כמו באיור.

הצומת v_1 צבוע בכחול והצומת v_3 צבוע באדום, ויש שרשרת הכחול־אדום המכילה אותם. על ידי הוספת הצומת v והקשתות $\overline{vv_1}, \overline{vv_3}$ לשרשרת, נקבל מסלול סגור P (המסומן בקו כפול) שמחלק את המישור לשטח "פנימי" ולשטח "חיצוני" (איור **??**).

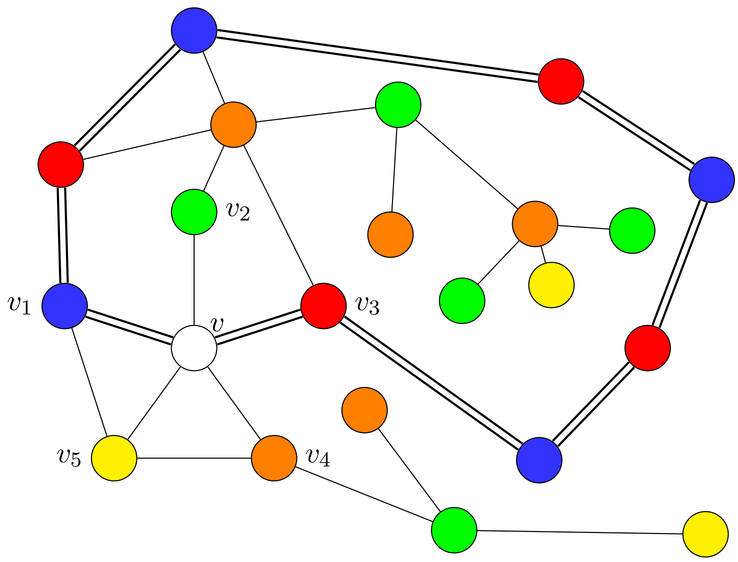
כעת נתבונן בצומת v_2 הצבוע ירוק ובצומת v_4 הצבוע כתום. הצמתים הללו **אינם** יכולים להיות בשרשרת ירוק־כתום אחת, כי v_2 נמצא **בתוך** P ו־v_4 נמצא **מחוץ** ל־P, ולכן כל מסלול המחבר אותם חייב לחתוך את P, הסותר את ההנחה שהגרף מישורי.[4] באיור **??** אפשר לראות שתי שרשראות ירוק־כתום המכילות את v_2 ו־v_4 שאינן מחוברות (מסומנות בקו מקווקו כפול).

נחליף ביניהם את שני הצבעים בשרשרת המכילה את v_2 (איור **??**). עדיין ניתן לצבוע את G' עם חמישה צבעים. v_2 ו־v_4 שניהם צבועים בכתום, וניתן לצבוע את v בירוק כדי לקבל צביעה של G עם חמישה צבעים. ∎

5.7 ההוכחה השגויה של Kempe

משפט ארבעת הצבעים הוצג כהשערה ב־1852. ב־1879 Alfred B. Kempe פרסם הוכחה, אבל ב־1890, Percy J. Heawood מצא בה שגיאה. העבודה של Kempe חשובה כי: (1)

[4] טענה זו נובעת מה־*Jordan curve theorem*, שהוא ברור באופן אינטואיטיבי, אבל קשה מאוד להוכיח.



איור 5.1: מסלול מחלק את המישור לחלק פנימי ולחלק חיצוני

ההוכחה נכונה עבור חמישה צבעים, ו־(2) בהוכחה שלו הוא המציא את הרעיונות הבסיסיים ששימשו את Appel ו־Haken בהוכחה הנכונה שלהם שפורסמה ב־1976.

"הוכחה": רוב ההוכחה זהה להוכחה של משפט חמשת הצבעים. המקרה החדש הוא צומת v עם חמישה שכנים שלפי ההנחה האינדוקטיבית ניתן לצבוע אותם **בארבעה** צבעים לאחר מחיקת הצומת v.

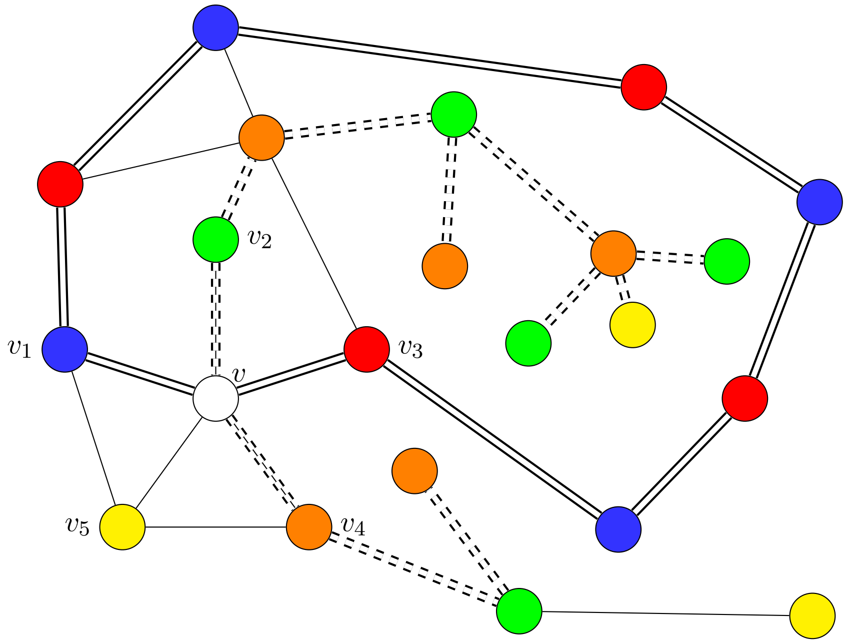
בגרף השמאלי של איור **??** קיימים שני צמתים v_2, v_5 הצבועים בכחול. נתבונן עכשיו בשרשרת הכחול־ירוק המכילה את v_2 ובשרשרת הכחול־צהוב המכילה את v_5. השרשרת הכחול־ירוק נמצאת מתוך המסלול הסגור המוגדר על ידי השרשרת האדום־צהוב שמכילה את v_1, v_3 (מסומן בקו כפול), והשרשרת הכחול־צהוב נמצאת בתוך המסלול הסגור המוגדר על ידי השרשרת האדום־ירוק המכילה את v_1, v_4 (מסומן בקו כפול מקווקוו).

נחליף את הצבעים בשרשרת הכחול־ירוק ובשרשרת הכחול־צהוב (איור ימני). השכנים של v צבועים בשלושה צבעים (אדום, ירוק צהוב) וניתן לצבוע את v בכחול. ∎

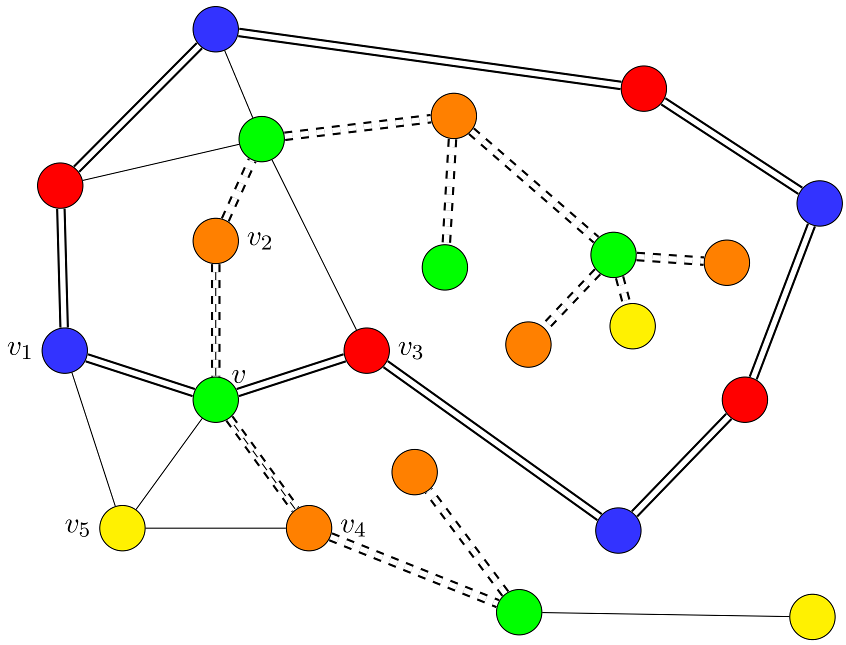
Heawood שם לב שלמסלולים הסגורים, המוגדרים על ידי השרשראות האדום־צהוב והאדום־ירוק, ייתכן שיש צמתים אדומים משותפים (v_1 והצומת האדום מתחת ל־v_4 בגרף השמאלי של איור **??**). כאשר מחליפים צבעים בשרשראות הכחול־ירוק והכחול־צהוב, יש אפשרות שיהיו צמתים צבועים בכחול הקשורים בקשת (איור ימני), כך שהצביעה כבר לא חוקית.

מקורות

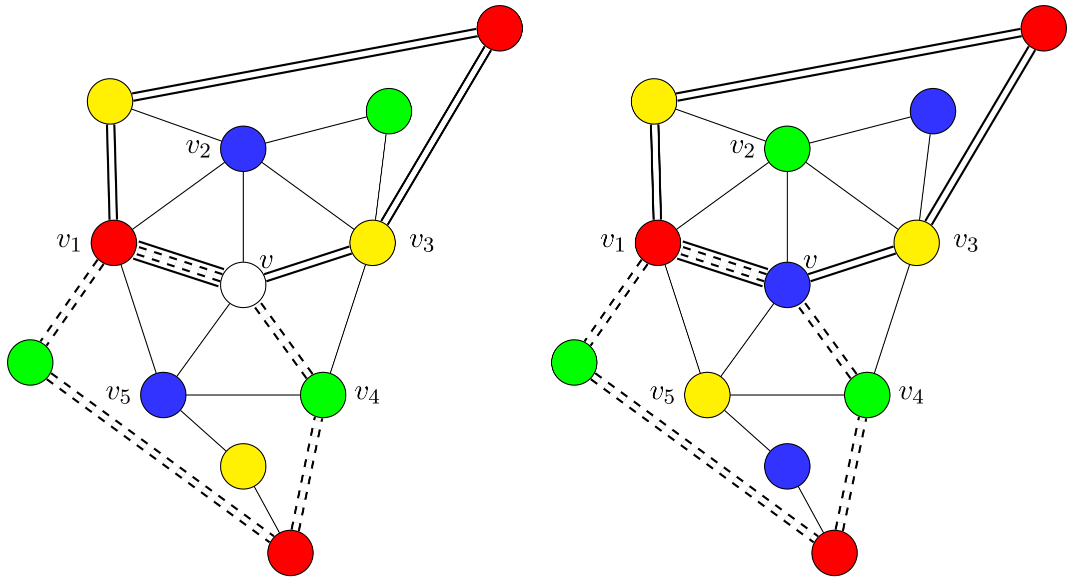
על משפט ארבעת הצבעים ראו [?], [?]. ההוכחה של משפט חמשת הצבעים לקוחה מ־[?], [?]. [?] מביא הוכחות רבות לנוסחת Euler. השגיאה בהוכחה של Kempe מתוארת ב־[?].



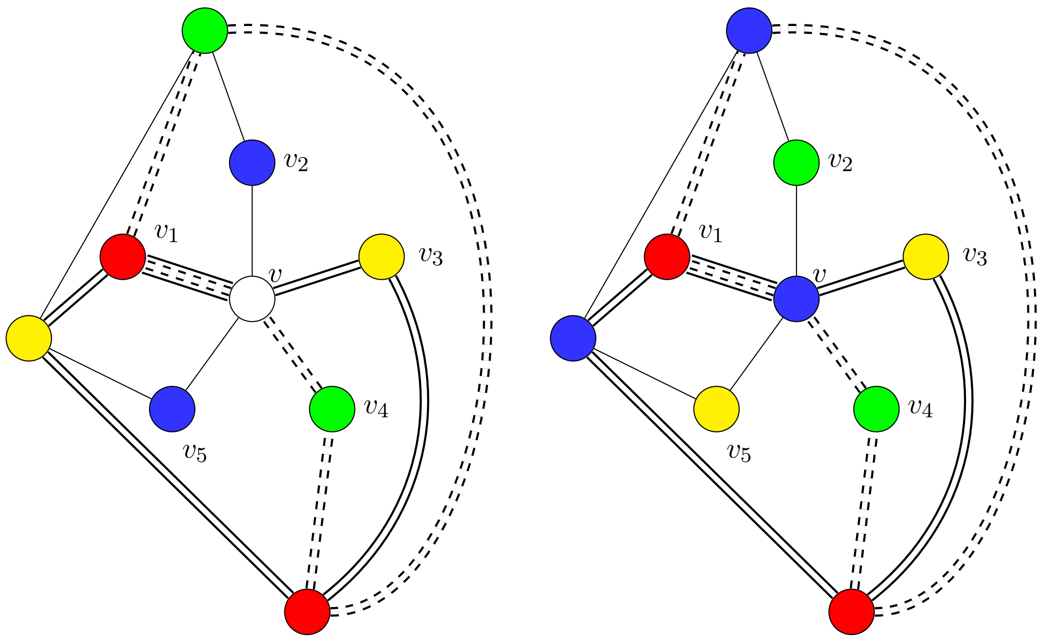
איור 5.2: שרשראות לא מחוברות



איור 5.3: החלפת צבעים בשרשרת אחת



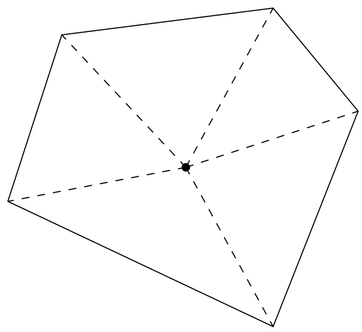
איור 5.4: ההוכחה המוטעת של Kempe



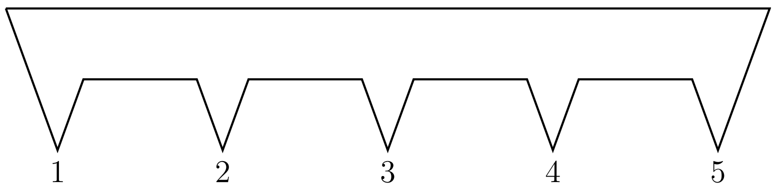
איור 5.5: השגיאה בהוכחה ש־Heawood מצא

פרק 6 איך לשמור על מוזיאון

ב־1973 Victor Klee שאל כמה שומרים נחוצים כדי לראות את כל הקירות של מוזיאון על מנת לוודא שלא גונבים את הציורים. אם הקירות של המוזיאון מהווים מצולע משוכלל או אפילו מצולע קמור, אפשר להסתפק בשומר אחד:

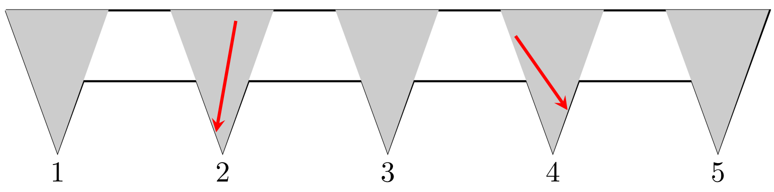


מה עם מוזיאון עם קירות בצורה של מסור:

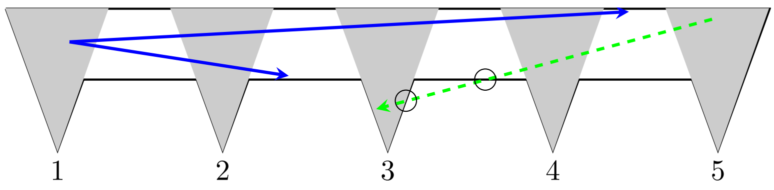


וודא על ידי ספירה שיש 15 קירות.

כל "שן" של המסור מגדירה משולש (מסומן באפור). שומרת הניצבת במקום כלשהו בתוך אחד המשולשים יכולה לראות את כל הקירות של אותו משולש:



אם השומרת ניצבת בקירבת הקיר העליון היא יכולה לראות את כל הקירות האופקיים (חצים כחולים). ברור שחמש שומרות מספיקות כדי לשמור על כל הקירות. אם המשולשים לא חופפים, שומרת במשולש אחד לא יכולה לראות את כל הקירות של משולש אחר (חץ ירוק), לכן חייבים להעסיק חמש שומרות נחוצות.

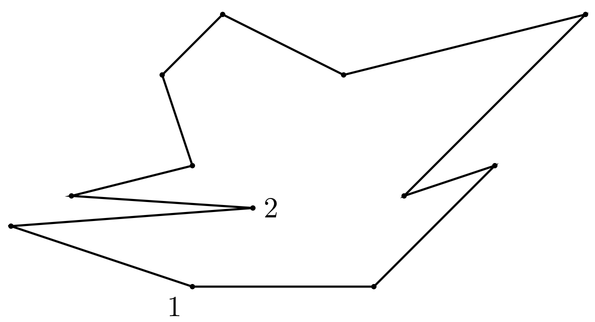


משפט 6.1
$\frac{n}{3}$ שומרות מספיקות ונחוצות כדי לשמור על כל מוזיאון עם n קירות.[1]

ניתן להכליל את הדוגמה כדי להראות ש־$\frac{n}{3}$ שומרות נחוצות. שאר הפרק מוקדש להוכחה ש־$\frac{n}{3}$ מספיקות עבור כל מוזיאון.

הגדרה: קודקוד במצולע הוא **קמור** אם הזווית הפנימית פחות מ־180°. קודקוד במצולע הוא **קעור** אם הזווית הפנימית גדולה מ־180°.

במצולע באיור להלן, קודקוד 1 קמור וקודקוד 2 קעור.



הגדרה: ניתן **לתלת** (triangulate) מצולע אם ניתן לצייר **אלכסונים**, קטעי קו שאינם נחתכים המחברים קודקודים והנמצאים בתוך המצולע לכל אורכם, כך שהשטח הפנימי של המצולע מכוסה על ידי משולשים זרים אחד מהשני.

משפט 6.2
ניתן לתלת כל מצולע.

אנו דוחים את ההוכחה של משפט **??** לשלב מאוחר יותר. **הגדרה:** ניתן **לצבוע מצולע בשלושה צבעים** אם קיים מיפוי

$$c : V \mapsto \{\text{אדום, כחול, ירוק}\}$$

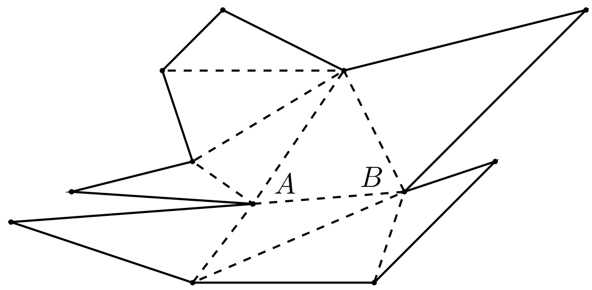
כך ששני הקודקודים של צלע מקבלים צבעים שונים.

משפט 6.3
ניתן לצבוע מצולע מתולת בשלושה צבעים.

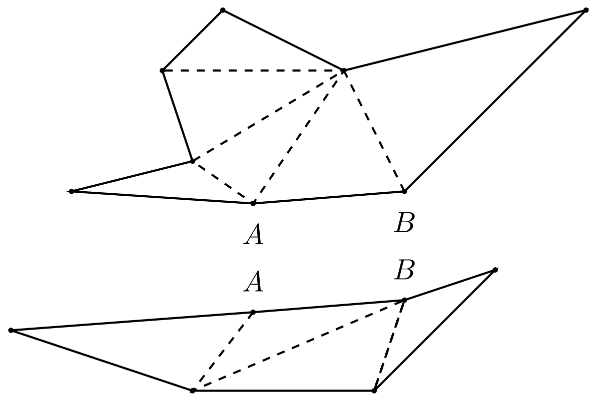
הוכחה: באינדוקציה על מספר הקודקודים. ברור שניתן לצבוע משולש בשלושה צבעים. ניתן מצולע עם $n > 3$ קודקודים. חייבים לצייר לפחות אלכסון אחד כדי לתלת את המצולע. בחר אלכסון שרירותי $\overline{AB}$:

---

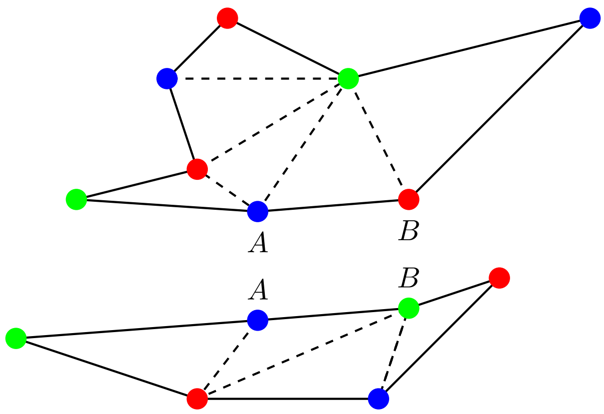
[1] אם n לא מתחלק ב־3 מספר השומרות הנחוצות הוא $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. למשל, 4 שומרות מספיקות כדי לשמור על מוזיאונים עם $12, 13, 14$ קירות כי $4 = \left\lfloor \frac{12}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{13}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{14}{3} \right\rfloor$. לשם הפשטות נתעלם מסיבוך זה.



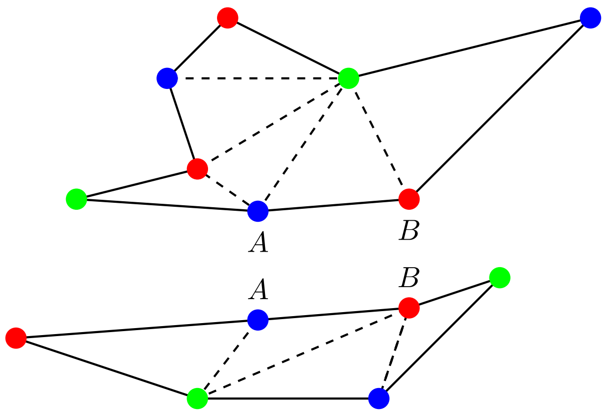
וחלק את המצולע לאורך אלכסון זה לשני מצולעים קטנים יותר:



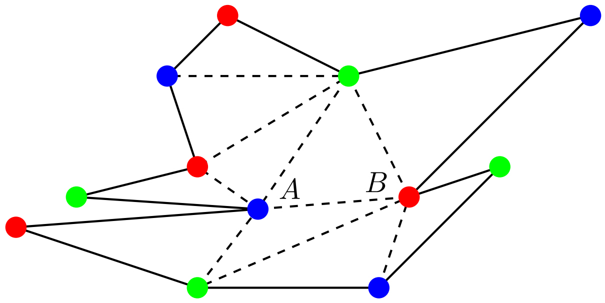
לפי הנחת האינדוקציה, ניתן לצבוע כל אחד מהמצולעים הללו בשלושה צבעים:



השיוך של צבעים לקודקודים הוא שרירותי, כך שאם הקודקודים A, B מקבלים צבעים שונים בשני המצולעים, ניתן לשנות את הצבעים באחד מהם כך שהצבעים של A, B זהים בשני המצולעים. נחליף את הצבעים **אדום** ו־**ירוק** במצולע התחתון:



כעת ניתן להדביק את שני המצולעים ביחד כדי לשחזר את המצולע המקורי עם n קודקודים. המצולע יהיה צבוע בשלושה צבעים. ∎



הוכחה של משפט ??: לפי משפט **??** ניתן לתלת את המצולע ולפי משפט **??** ניתן לצבוע את המצולע בשלושה צבעים. שלושת הקודקודים של כל משולש יהיו צבועים בצבעים שונים, כך שכל צבע מופיע באחד הקודקודים של כל משולש. אם צובעים n קודקודים בשלושה צבעים, צבע אחד לפחות (נניח אדום) מופיע לכל היותר $\frac{n}{3}$ פעמים, ובכל משולש חייב להיות קודקוד צבוע אדום.

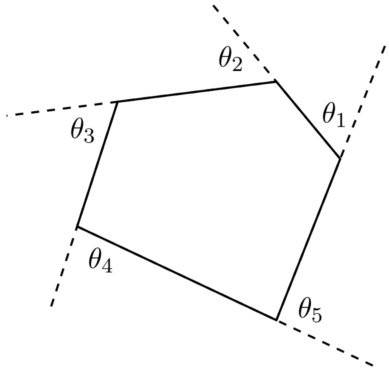
אם נציב שומרת בקודקוד אדום, היא יכולה לראות את הקירות של אותו משולש. כל המשולשים של תילות המצולע כוללים את כל הצלעות של המצולע, ולכן $\frac{n}{3}$ שומרות מספיקות כדי לראות את כל הקירות של המוזיאון. ∎

כעת נוכיח את משפט **??** שניתן לתלת כל מצולע.

משפט 6.4

סכום הזוויות הפנימיות של מצולע עם n צלעות הוא $180^\circ(n-2)$.

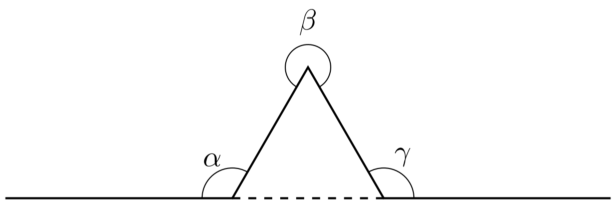
הוכחה: תחילה נוכיח עבור מצולעים קמורים. נסמן את **הזוויות החיצוניות** ב־θ_i:



אם נסכם את הזוויות החיצוניות נקבל $\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 360^\circ$. ניתן לראות את הסיכום באיור על ידי "סיבוב" הקווים המקווקווים מאחד לשני לפי הסדר $\theta_1,\ldots,\theta_5$. עבור כל זוית חיצונית θ_i נסמן את הזוית הפנימית של אותו קודקוד ב־ϕ_i. נחשב:

$$\begin{aligned}\sum_1^n \theta_i &= \sum_1^n (180^\circ - \phi_i) = 360^\circ \\ \sum_1^n \phi_i &= n\cdot 180^\circ - 360^\circ = 180^\circ(n-2)\,.\end{aligned}$$

נבדוק מה קורה אם נוסיף קודקוד קעור:



קיים משולש המורכב משתי הצלעות שנוגעות בקודקוד הקעור והצלע המסומן בקו מקווקו. נסכם את הזוויות של המשולש:

$$\begin{aligned}(180^\circ-\alpha)+(360^\circ-\beta)+(180^\circ-\gamma) &= 180^\circ \\ \alpha+\beta+\gamma &= 3\cdot 180^\circ\,.\end{aligned}$$

סכום הזוויות הפנימיות גדל ב־$\alpha+\beta+\gamma$ ומספר הקודקודים גדל בשלוש:

$$\begin{aligned}\sum_1^n \phi_i + (\alpha+\beta+\gamma) &= 180^\circ(n-2)+3\cdot 180^\circ \\ &= 180^\circ((n+3)-2)\,.\end{aligned}$$

■

משפט 6.5

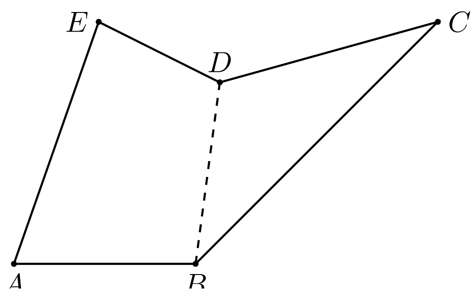
חייב להיות לפחות שלושה קודקודים קמורים במצולע.

הוכחה: נסמן ב־k את מספר הקודקודים הקעורים, כאשר הזווית הפנימית של כל אחד הוא $180° + \epsilon_i$, $\epsilon_i > 0$. סכום הזוויות הפנימיות של הקודקודים **הקעורים** הוא בוודאי פחות או שווה לסכום **כל** הזוויות הפנימיות:

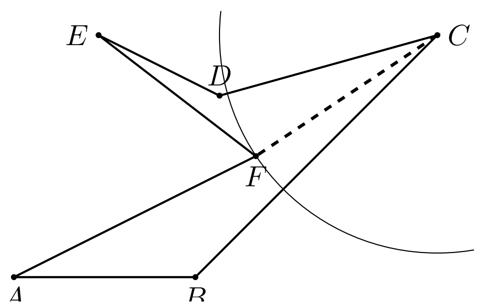
$$\begin{aligned} k \cdot 180° + \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i &\leq 180°(n-2) \\ k \cdot 180° &< 180°(n-2) \\ k &< n-2\,. \end{aligned}$$

מכאן שיש לא רק קודקוד אחד, אבל לפחות שלושה קודקודים שאינם קעורים. ∎

הוכחה של משפט ??: באינדוקציה על מספר הקודקודים. עבור $n = 3$ אין מה להוכיח. נניח ש־$n > 3$. לפי משפט **??**, חייב להיות קודקוד קמור C. סמנו את הקודקודים השכנים שלו B, D. אם $\overline{BD}$ נמצא כולו בתוך המצולע אז הוא אלכסון וניתן לחלק את המצולע למשולש $\triangle BCD$ ולמצולע קטן יותר כאשר $\overline{BD}$ הוא צלע.



לפי הנחת האינדוקציה, ניתן לתלת את המצולע ואז להדביק אותו למשולש $\triangle BCD$ ולקבל תילות של המצולע המקורי. אחרת, חייב להיות קודקוד קעור F הקרוב ביותר ל־C, ולכן $\overline{CF}$ הוא אלכסון המחלק את המצולע לשני מצולעים קטנים יותר. לפי הנחת האינדוקציה ניתן לתלת אותם ולהדביק אותם אחד לשני.

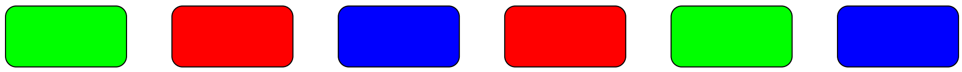


מקורות

פרק זה מבוסס על פרק 39 ב־[**?**].

פרק 7 הבעיה של Langford

המתמטיקאי C. Dudley Langford שם לב שבנו סידר קוביות צבעוניות לפי הסדר:



קוביה אחת נמצאת בין שתי הקוביות האדומות, שתי קוביות בין הקוביות הכחולות, ושלוש קוביות בין הקוביות הירוקות. ניתן לנסח את הבעיה כך: נתון שק[1] של מספרים $\{1,1,2,2,3,3\}$, האם אפשר לסדר אותם בסדרה כך שלכל $1 \leq i \leq 3$, i מספרים נמצאים בין שני המופעים של i?

הבעיה של Langford $L(n)$: נתון שק של מספרים $\{1,1,2,2,3,3,\ldots,n,n\}$, האם ניתן לסדר אותם כך שלכל $1 \leq i \leq n$, i מספרים נמצאים בין שני המופעים של i?

מהאיור לעיל אנו רואים שעבור $n = 3$ הפתרון הוא 312132.

7.1 הבעיה של Langford כבעיית כיסוי

ניתן להציג את הבעיה של Langford באמצעות טבלה. עבור $L(3)$ יש 6 עמודות, אחת לכל מקום בסדרה. השורות מציגות את כל האפשרויות לסדר את שני המופעים של המספרים. קל לראות שיש ארבעה זוגות של מקומות אפשריים עבור 1, שלושה עבור 2 ושניים עבור 3:

	1	2	3	4	5	6
1	1		1			
2		1		1		
3			1		1	
4				1		1
5	2			2		
6		2			2	
7			2			2
8	3				3	
9		3				3

כדי לפתור את הבעיה, עלינו לבחור שורה אחת עבור המופעים של 1, שורה אחת עבור המופעים של 2 ושורה אחת עבור המופעים של 3, כך שאם הנמקם את השורות אחת מעל לשניה, בכל עמודה יש רק מספר אחד:

[1]שק הוא קבוצה בה איבר יכול להופיע מספר פעמים.

	1	2	3	4	5	6
2		1		1		
7			2			2
8	3				3	

שורה 9 אינה נחוצה בגלל סימטריה: סדרה המתחילה עם השורה 9 זהה לסדרה מתקבלת מהפיכת הסדר של סדרה המתקבלת כאשר מתחילים עם שורה 8.

שורה 8 היא היחידה המכילה את המספר 3 כך שחובה לבחור אותה, והסדרה המתקבלת היא 3␣␣␣3␣. אי אפשר להשתמש בכל שורה שיש לה מספרים בעמודות 1 ו־ 5, כי מותר רק מספר אחד בכל מקום. נסמן את השורות שניתן לבחור ושלא ניתן לבחור כך: $\not1, 2, \not3, 4, \not5, \not6, 7, 8$.

שורה 7 היא השורה האפשרית היחידה עבור 2 כך שחובה לבחור בה והתוצאה היא 3␣2␣32. נעדכן את רשימת השורות ונקבל: $\not1, 2, \not3, \not4, \not5, \not6, 7, 8$.

כעת, ניתן לבחור רק שורה 2 ומתקבל הפתרון 312132.

טבלה **??** היא הטבלה עבור $L(4)$. הפתרון הוא 41312432.

7.2 עבור איזה ערכים של n ניתן לפתור את הבעיה

משפט 7.1

ניתן למצוא פתרון ל־$L(n)$ אם ורק אם $n = 4k$ או $n = 4k - 1$.

נוכיח רק שאם $n = 4k - 2$ או $n = 4k - 3$ אין פתרון לבעיה.

הוכחה 1

אם המופע הראשון של המספר k נמצא במקום i_k, המופע השני נמצא במקום i_k+k+1. לכן, S_n, סכום המקומות של כל המספרים, הוא:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} i_k + \sum_{k=1}^{n} (i_k + k + 1) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} i_k + \sum_{k=1}^{n} (k+1) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} i_k + \frac{n(n+3)}{2} \,. \end{aligned}$$

אבל S_n הוא פשוט $1 + 2 + 3 + \cdots + 2n$ ולפי הנוסחה לסיכום סדרת מספרים:

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{2n(2n+1)}{2} \,.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1		1					
2		1		1				
3			1		1			
4				1		1		
5					1		1	
6						1		1
7	2			2				
8		2			2			
9			2			2		
10				2			2	
11					2			2
12	3				3			
13		3				3		
14			3				3	
15				3				3
16	4					4		
17		4					4	
18			4					4

טבלה 7.1: הבעיה של Langford $L(4)$

נשווה את שני הביטויים עבור S_n:

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{n} i_k + \frac{n(n+3)}{2} &= \frac{2n(2n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^{n} i_k &= \frac{1}{2}\left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+3)}{2}\right) \\ &= \frac{3n^2-n}{4}. \end{aligned}$$

הצד השמאלי חייב להיות מספר שלם כי הוא סכום של מספרים שלמים. לכן, הצד הימני חייב גם הוא להיות מספר שלם, כלומר, $3n^2-n=n(3n-1)$ חייב להתחלק ב־4.

- אפשרות אחת היא ש־n בעצמו מתחלק ב־4.
- מתי $3n-1$ מתחלק ב־4? ניתן להציג את n כ־$n=4i+j$ עבור $j=0,1,2,3$. אם $3n-1$ מתחלק ב־4, גם $3(4i+j)-1=12i+3j-1$ מתחלק ב־4. $12i$ מתחלק ב־4, וקל לראות ש־$3j-1$ מתחלק ב־4 (עבור $j=0,1,2,3$) רק אם $j=3$. מכאן ש־$3n-1$ מתחלק ב־4 רק עבור $n=4i+3=4(i+1)-1=4k-1$.

∎

הוכחה 2

נעיין בפתרון עבור $n=4$ ונבדוק תחילה את מקומות המופעים של המספרים הזוגיים:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
				*			*

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
*					*		

מקומות המופעים של 4 הם 1 ו־6, ומקומות המופעים של 2 הם 5 ו־8. ניקח מספר **זוגי** $k=2m$. מקום המופע הראשון שלו הוא i ומקום המופע השני שלו הוא $i+k+1$. סכום המקומות הוא:

$$i+(i+k+1)=2i+2m+1=2(i+m)+1$$

שהוא מספר אי־זוגי. סכום של שני מספרים הוא אי־זוגיים אם ורק אם אחד זוגי והשני אי־זוגי.

נבדוק עכשיו את מקומות המופעים של המספרים האי־זוגיים:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
		*				*	

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
	*		*				

מקומות המופעים של 1 הם 2 ו־4, ומקומות המופעים של 3 הם 3 ו־7. ניקח מספר **אי־זוגי**, $k=2m+1$. מקום המופע הראשון שלו הוא i ומקום המופע השני שלו הוא $i+k+1$. סכום המקומות הוא:

$$i+(i+k+1)=2i+2m+1+1=2(i+m+1)\,,$$

שהוא מספר זוגי. סכום של שני מספרים הוא זוגי אם ורק אם שניהם זוגיים או שניהם אי־זוגיים.

ברור שרשימת המקומות של המספרים בסדרה, $1,2,\ldots,2n-1,2n$, מכילה מספר שווה של מקומות זוגיים ומקומות אי־זוגיים. כאשר מציבים את שני המופעים של מספר בסדרה, הם "תופסים" שני מקומות. כאשר מסיימים להציב את כל המספרים בפתרון, חייבים להיות מספר שווה של מקומות זוגיים ואי־זוגיים "שנתפסו".

זוגיות היא ההפרש בין מספר המקומות הזוגיים שנתפסו לבין מספר המקומות האי־זוגיים שנתפסו. תחילה הזוגיות היא אפס, ואם יש פתרון זוגיות שלו גם כן אפס. אנו נמצא את התנאים על n כך שהזוגיות לא תתאפס. עבור ערכים אלה אין פתרון.

כאשר ממקמים את שני המופעים של מספר זוגי, הם תופסים מקום אחד זוגי (מסומן $+1$) ומקום אחר אי־זוגי (מסומן -1), וסכום הזוגיות הוא אפס.

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
				-1			$+1$

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
-1					$+1$		

כאשר ממקמים את שני המופעים של מספר אי־זוגי, הם תופסים שני מקומות זוגיים (מסומן $+1$) או שני מקומות אי־זוגיים (מסומן -1), וסכום הזוגיות היא ± 2.

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
		-1				-1	

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
	$+1$		$+1$				

כדי שהזוגיות תתאפס **חייב להיות מספר זוגי של מספרים אי־זוגיים ב־**$\{1,\ldots,n\}$! נוכיח שאם $n = 4k, 4k-1$ יש מספר זוגי של אי־זוגיים (וכנראה שיש פתרון), ואם $n = 4k-2, 4k-3$ יש מספר אי־זוגי של אי־זוגיים (ואין פתרון).

ההוכחה באינדוקציה. עבור $k = 1$:

- $n = 4k - 3 = 1$. ב־$\{1\}$ יש מספר אי־זוגי של אי־זוגיים (וברור שאין פתרון).
- $n = 4k - 2 = 2$. ב־$\{1, 2\}$ יש מספר אי־זוגי של אי־זוגיים (וברור שאין פתרון).
- $n = 4k - 1 = 3$. ב־$\{1, 2, 3\}$ יש מספר זוגי של אי־זוגיים (וראינו שיש פתרון).
- $n = 4k - 0 = 4$. ב־$\{1, 2, 3, 4\}$ יש מספר זוגי של אי־זוגיים (וראינו שיש פתרון).

נניח שהטענה נכונה עבור $n = 4k - j, k \geq 1, 0 \leq j \leq 3$, ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n = 4(k+1) - j, k \geq 1, 0 \leq j \leq 3$.

- נוסיף לשק את המספר הבא אחרי $4k$ שהוא $4k + 1 = 4(k+1) - 3$. לפי הנחת האינדוקציה עבור $n = 4k - 0$ יש מספר זוגי של אי־זוגיים. $4(k+1) - 3$ הוא אי־זוגי ולכן יש עכשיו מספר אי־זוגי של אי־זוגיים (אין פתרון).
- נוסיף לשק את המספר הבא אחרי $4k + 1$ שהוא $4k + 2 = 4(k+1) - 2$. הוכחנו שעבור $n = 4k + 1$ יש מספר אי־זוגי של אי־זוגיים. $4(k+1) - 2$ הוא זוגי ולכן עדיין יש מספר אי־זוגי של אי־זוגיים (אין פתרון).
- נוסיף לשק את המספר הבא אחרי $4k + 2$ שהוא $4k + 3 = 4(k+1) - 1$. הוכחנו שעבור $n = 4k + 2$ יש מספר אי־זוגי של אי־זוגיים. $4(k+1) - 1$ הוא אי־זוגי ולכן עכשיו יש מספר זוגי של אי־זוגיים (כנראה שיש פתרון).
- נוסיף לשק את המספר הבא אחרי $4k + 3$ שהוא $4k + 4 = 4(k+1) - 0$. הוכחנו שעבור $n = 4k + 3$ יש מספר זוגי של אי־זוגיים. $4(k+1) - 0$ הוא זוגי ולכן עדיין יש מספר זוגי של אי־זוגיים (כנראה שיש פתרון).

מקורות

פרק זה מבוסס על [?]. Davies מראה איך למצוא פתרון כאשר הזוגיות היא אפס.

פרק 8 פתרון משוואות ריבועיות

פרק זה מציג את השיטה לפתרון משוואות ריבועיות של Po-Shen Loh.

8.1 השיטות המסורתיות לפתרון משוואות ריבועיות

כל תלמיד לומד את הנוסחה למצוא את השורשים של משוואה ריבועית $ax^2+bx+c=0$:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,.$$

נגביל את עצמנו למשוואות שהמקדם הראשון הוא אחד, כי תמיד אפשר לחלק ב־a. השורשים של $x^2+bx+c=0$ הם:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4c}}{2}\,.$$

שיטה נוספת היא לפרק את הפולינום הריבועי. לעתים קל לפרק את הפולינום:

$$\begin{aligned}
x^2-4x+3 &= (x-r_1)(x-r_2)=0\\
&= (x-1)(x-3)=0\\
x_1, x_2 &= 1, 3\,.
\end{aligned}$$

קשה הרבה יותר לפרק את הפולינום:

$$x^2-2x-24=(x-r_1)(x-r_2)=0\,.$$

השורשים האפשריים הם:

$$(\pm 1, \mp 24)\,, (\pm 2, \mp 12)\,, (\pm 3, \mp 8)\,, (\pm 4, \mp 6)\,.$$

ברור שהסימנים של r_1, r_2 שונים כי המכפלה שלילית -24, אבל עדיין יש לבדוק שמונה אפשרויות.

8.2 חישוב השורשים

אם r_1, r_2 **הם השורשים של** x^2+bx+c, אזי:[1]

$$(x-r_1)(x-r_2)=x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2=x^2+bx+c\,.$$

אפילו אם אין אנו יודעים את ערכי השורשים, אנו כן יודעים ש:

$$r_1+r_2=-b\,, \qquad r_1r_2=c\,.$$

[1] Loh מדגיש את ההבדל בין שיטתו לבין פירוק. בפירוק, אני **מניחים** שקיימים שני שורשים. ההנחה נכונה לפי המשפט הבסיסי של אלגברה, אבל זה משפט "כבד" עבור המשימה הפשוטה של מציאת שורשים של משוואה ריבועית. לפי שיטתו, אנחנו רק אומרים: **אם השורשים קיימים**.

נסתכל על מספר ערכים עבור $-b, r_1, r_2$ ונסמן ב־m_{12} את הממוצע של r_1, r_2:

$-b$	r_1	r_2	m_{12}
33	12	21	$16\frac{1}{2}$
33	8	25	$16\frac{1}{2}$
33	1	32	$16\frac{1}{2}$
-4	-16	12	-2
-4	-4	0	-2
-4	-3	-1	-2

עבור כל משוואה ריבועית, הממוצע של שני השורשים קבוע:

$$\frac{r_1+r_2}{2} = \frac{(-b-r_2)+r_2}{2} = \frac{-b}{2} + \frac{-r_2+r_2}{2} = -\frac{b}{2}\,.$$

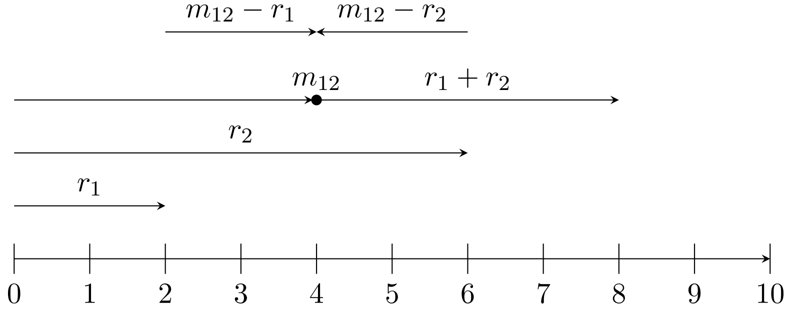
יהי s מספר כלשהו, אזי:

$$-b = -b + s + (-s) = \left(\frac{-b}{2} + s\right) + \left(\frac{-b}{2} - s\right) = r_1 + r_2\,.$$

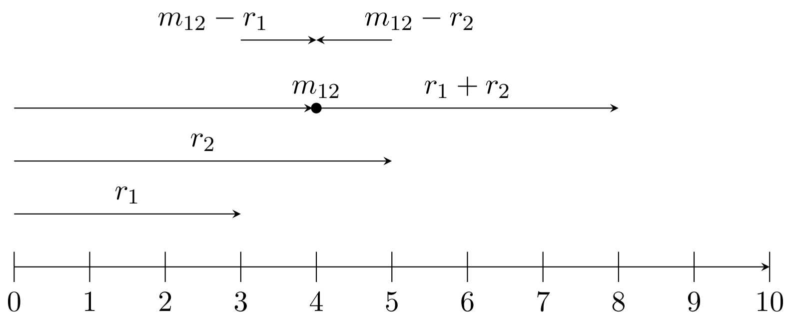
אם שורש אחד נמצא במרחק s מהממוצע, השורש השני נמצא במרחק $-s$ מהממוצע:

$-b$	r_1	r_2	m_{12}	$m_{12}-r_1$	$m_{12}-r_2$
33	12	21	$16\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$
33	8	25	$16\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{2}$
33	1	32	$16\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{2}$
-4	-16	12	-2	14	-14
-4	-4	0	-2	2	-2
-4	-3	-1	-2	1	-1

התרשים שלהלן מראה את היחסים הללו עבור $r_1, r_2 = 2, 6$, כאשר $m_{12} = 4, s = 2$:



אם נבחר ערכים אחרים $r_1, r_2 = 3, 5$ עבורם $r_1 + r_2 = 8$, $m_{12} = 4$ נשאר ללא שינוי, אבל $s = 1$ משתנה:



לכאורה ההפרש s שרירותי ב:

$$r_1 = \left(\frac{-b}{2} + s\right), \quad r_2 = \left(\frac{-b}{2} - s\right),$$

אבל קיים אילוץ נוסף $r_1 r_2 = c$ כאשר c הוא הקבוע בפולינום. אם נכפיל את שני ביטויים במצאנו עבור r_1, r_2, נוכל לחשב את s ואחר כך את r_1, r_2.

$$c = \left(-\frac{b}{2} + s\right)\left(-\frac{b}{2} - s\right).$$

8.3 דוגמאות

נשמתש בשיטה על הפולינום $x^2 - 2x - 24$, כאשר $b = -2, c = -24$:

$$\begin{aligned}
c &= \left(-\frac{b}{2} + s\right)\left(-\frac{b}{2} - s\right) \\
-24 &= (1 + s)(1 - s) \\
s^2 &= 25 \\
s &= 5 \\
r_1 &= 1 + 5 = 6 \\
r_2 &= 1 - 5 = -4.
\end{aligned}$$

נבדוק:

$$(x - 6)(x - (-4)) = x^2 - 6x - (-4)x + (6 \cdot -4) = x^2 - 2x - 24.$$

כדוגמה נוספת נמצא את השורשים של $x^2 - 83x - 2310$:

$$c = \left(-\frac{b}{2} + s\right)\left(-\frac{b}{2} - s\right)$$

$$
\begin{aligned}
-2310 &= \left(\frac{83}{2}+s\right)\left(\frac{83}{2}-s\right) \\
s^2 &= \frac{6889}{4}+2310=\frac{16129}{4} \\
s &= \frac{127}{2} \\
r_1 &= \frac{83}{2}-\frac{127}{2}=-22 \\
r_2 &= \frac{83}{2}+\frac{127}{2}=105\,.
\end{aligned}
$$

נבדוק:

$$(x+22)(x-105)=x^2+22x-105x+(22\cdot-105)=x^2-83x-2310\,.$$

נשווה את החישוב עם החישוב המשתמש בנוסחה:

$$
\begin{aligned}
\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2} &= \frac{-(-83)\pm\sqrt{(-83)^2-4\cdot(-2310)}}{2} \\
&= \frac{83\pm\sqrt{6889+9240}}{2}=\frac{83\pm\sqrt{16129}}{2} \\
&= \frac{83\pm 127}{2} \\
r_1 &= \frac{83-127}{2}=-22 \\
r_2 &= \frac{83+127}{2}=105\,.
\end{aligned}
$$

למרות שהחישוב בשיטה של Loh דומה לחישוב עם הנוסחה, יש לה יתרון כי ניתן לקבל את החישוב מיידית מהממוצע ומהמכפלה של השורשים. בסעיף הבא נראה שקל לקבל את הנוסחה המסורתית משיטה זו.

8.4 הנוסחה המסורתית

עם מקדמים שרירותיים הנוסחאות לפי השיטה של Loh הן:

$$
\begin{aligned}
c=r_1,r_2 &= \left(\frac{-b}{2}+s\right)\left(\frac{-b}{2}-s\right) \\
&= \left(\frac{b^2}{4}-s^2\right) \\
s &= \sqrt{\left(\frac{b^2}{4}\right)-c} \\
r_1,r_2 &= \frac{-b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}\right)-c}
\end{aligned}
$$

$$
r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2},
$$

הנוסחה המסורתית לקבלת השורשים של פולינום עם מקדם אחד עבור x^2.

עבור פולינום עם $a \neq 1$, חלקו את המקדמים ב־a, הציבו במשוואה ופשטו:

$$
\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\
r_1, r_2 &= \frac{-(b/a) \pm \sqrt{(b/a)^2 - 4(c/a)}}{2} \\
&= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}
$$

8.5 פולינומים עם שורשים דמיוניים

נבדוק את שיטה עבור $x^2 - 2x + 76$:

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{b^2}{4} - c = \frac{4}{4} - 76 = -75 \\
s &= \sqrt{-75} = \sqrt{-1 \cdot 25 \cdot 3} = i\,5\sqrt{3} \\
r_1, r_2 &= 1 \pm i\,5\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

נבדוק:

$$
\begin{aligned}
&(x - (1 + i\,5\sqrt{3}))\,(x - (1 - i\,5\sqrt{3})) &= \\
&x^2 \,-\, (1 + i\,5\sqrt{3})x \,-\, (1 - i\,5\sqrt{3})x \,+\, (1^2 - (i\,5\sqrt{3})^2) &= \\
&x^2 - 2x + 76\,.
\end{aligned}
$$

מקורות

הפרק מבוסס על [?, ?].

פרק 9 הוכחות מעניינות באינדוקציה

פרק זה מביא הוכחות באינדוקציה למספר משפטים בעיקר מתורת המספרים שאולי אינם מוכרים לרבים מהקוראים.

9.1 מספרי Fibonacci

מספרי פיבונצ'י מוגדרים ברקורסיה:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3 \text{ עבור}. \end{aligned}$$

שנים עשר מספרי פיבונצ'י הראשונים הם: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$.

משפט 9.1

כל מספר פיבונצ'י רביעי מתחלק ב־3.

דוגמאות: $f_4 = 3 = 3 \cdot 1,\ f_8 = 21 = 3 \cdot 7,\ f_{12} = 144 = 3 \cdot 48$.

הוכחה: טענת הבסיס מתקבלת באופן מיידי כי $f_4 = 3$ מתחלק ב־3. הנחת האינדוקציה היא ש־f_{4n} מתחלק ב־3. הצעד האינדוקטיבי הוא:

$$\begin{aligned} f_{4(n+1)} &= f_{4n+4} \\ &= f_{4n+3} + f_{4n+2} \\ &= (f_{4n+2} + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\ &= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\ &= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + (f_{4n+1} + f_{4n}) \\ &= 3f_{4n+1} + 2f_{4n}\,. \end{aligned}$$

$3f_{4n+1}$ מתחלק ב־3 ולפי הנחת האינדוקציה גם f_{4n}, ולכן $f_{4(n+1)}$ מתחלק ב־3. ∎

משפט 9.2

$f_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

הוכחה: טענות הבסיס: $f_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$ ו־$f_2 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$.

הצעד האינדוקטיבי:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^n + f_{n-1} \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4}+1\right) \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

בגלל ש־

$$\left(\frac{7}{4}+1\right) = \frac{11}{4} = \frac{44}{16} < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2 .$$

■

משפט 9.3 (Binet)

$$f_n = \frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\sqrt{5}}, \qquad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \;\; \bar{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} .$$

הוכחה: נוכיח קודם ש־$\phi^2 = \phi + 1$:

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} \\ &= \frac{2}{4} + \frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{4}{4} \\ &= \frac{1+2\sqrt{5}}{2} + 1 \\ &= \phi + 1 . \end{aligned}$$

באופן דומה אפשר להוכיח ש: $\bar{\phi}^2 = \bar{\phi} + 1$.

כעת נוכיח את המשפט. טענת הבסיס:

$$\frac{\phi^1 - \bar{\phi}^1}{\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})/2 - (1-\sqrt{5})/2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 .$$

הצעד האינדוקטיבי:

$$\begin{aligned}\phi^n - \bar{\phi}^n &= \phi^2\,\phi^{n-2} - \bar{\phi}^2\,\bar{\phi}^{n-2} \\ &= (\phi+1)\,\phi^{n-2} - (\bar{\phi}+1)\,\bar{\phi}^{n-2} \\ &= (\phi^{n-1} - \bar{\phi}^{n-1}) + (\phi^{n-2} - \bar{\phi}^{n-2}) \\ &= \sqrt{5}f_{n-1} + \sqrt{5}f_{n-2}\,,\end{aligned}$$

לכן:

$$\frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\sqrt{5}} = f_{n-1} + f_{n-2} = f_n\,.$$

משפט 9.4

$$f_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots.$$

כדי להוכיח את המשפט, נוכיח תחילה משפט עזר:

משפט 9.5 (Pascal)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\ &= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\ &= \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

עכשיו אפשר להוכיח את משפט **??**. טענת הבסיס:

$$f_1 = 1 = \binom{1}{0} = \frac{1!}{0!(1-0)!}\,.$$

הצעד האינדוקטיבי:

$$f_{n-1} + f_{n-2} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \cdots$$

$$
\begin{aligned}
& \binom{n-2}{0}+\binom{n-3}{1}+\binom{n-4}{2}+\cdots \\
= & \binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-3}{3}+\cdots \\
= & \binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-3}{3}+\cdots .
\end{aligned}
$$

השוויון האחרון משתמש בעובדה ש:

$$\binom{k}{0}=\frac{k!}{0!(k-0)!}=1\,.$$

9.2 מספרי Fermat

הגדרה: מספר פרמה הוא מספר שערכו $2^{2^n}+1$ עבור $n\geq 0$.

חמשת מספרי פרמה הראשונים הם:

n	0	1	2	3	4
$2^{2^n}+1$	3	5	17	257	65537

כל המספרים הללו ראשוניים ו־Pierre de Fermat שיער שכל מספרי פרמה הם ראשוניים. כעבור כמאה שנים Leonhard Euler הראה ש:

$$2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297=641\times 6700417\,.$$

ידוע שמספרי פרמה אינם ראשוניים עבור $5\leq n\leq 32$, אבל הפירוק לגורמים של חלק מהמספרים הללו עדיין לא ידוע. הנה שני משפטים מעניינים על מספרי פרמה:

משפט 9.6 עבור כל $n\geq 2$, הספרה האחרונה של F_n היא 7.

הוכחה: טענת הבסיס: $F_2=2^{2^2}+1=17$.

הצעד האינדוקטיבי: נניח ש־$F_n=10k_n+7$ עבור $k\geq 1$. אזי:

$$
\begin{aligned}
F_{n+1} &= 2^{2^{n+1}}+1=\left(2^{2^n}\right)^2+1 \\
&= \left(\left(2^{2^n}+1\right)-1\right)^2+1 \\
&= \left(2^{2^n}+1\right)^2-2\cdot\left(2^{2^n}+1\right)+1+1 \\
&= (10k_n+7)^2-2(10k_n+7)+2 \\
&= 100k_n^2+120k_n+37 \\
&= 10(10k_n^2+12k_n+3)+7 \\
&= 10k_{n+1}+7\,.
\end{aligned}
$$

משפט 9.7 עבור כל $n \geq 1$, $F_n = \prod_{k=0}^{n-1} F_k + 2$.

הוכחה: טענת הבסיס:

$$5 = F_1 = \prod_{k=0}^{0} F_k + 2 = F_0 + 2 = 3 + 2\,.$$

הצעד האינדוקטיבי:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n} F_k &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\right) F_n \\
&= (F_n - 2)F_n \\
&= F_n^2 - 2F_n \\
&= \left(2^{2^n} + 1\right)^2 - 2 \cdot \left(2^{2^n} + 1\right) \\
&= 2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^{n+1}} + 1) - 2 \\
&= F_{n+1} - 2 \\
F_{n+1} &= \prod_{k=0}^{n} F_k + 2\,.
\end{aligned}$$

9.3 פונקציה 91 של McCarthy

בסעיף זה נוכיח באינדוקציה תכונה מוזרה של פונקציה רקורסיבית המוגדרת עבור כל המספרים השלמים. ממציא הפונקציה הוא John McCarthy. הגדרתה היא:

$$f(x) = \text{if } \; x > 100 \; \text{ then } \; x - 10 \; \text{ else } \; f(f(x+11))\,.$$

אם x גדול מ־100, ערכה של הפונקציה היא $x - 10$. אחרת, חשב את $f(x+11)$. אחר כך, נחשב את הפונקציה עבור התוצאה שהתקבלה.

עבור מספרים גדולים מ־100, חישוב הפונקציה פשוטה ביותר:

$$f(101) = 91, \quad f(102) = 92, \quad f(103) = 93, \quad f(104) = 94\,.$$

נחשב את ערך הפונקציה עבור קומץ מספרים פחות או שווים ל־100:

$$\begin{aligned}
f(100) &= f(f(100+11)) = f(f(111)) = f(101) = 91 \\
f(99) &= f(f(99+11)) = f(f(110)) = f(100) = 91 \\
f(91) &= f(f(91+11)) = f(f(102)) = f(92) = f(f(103)) = f(93) = \cdots = 91 \\
f(89) &= f(f(89+11)) = f(f(100)) = f(f(111)) = f(101) = 91\,.
\end{aligned}$$

משפט 9.8
הפונקציה $f(x)$ שקולה ל:

$$g(x) = \text{if } \ x > 100 \ \text{ then } \ x - 10 \ \text{ else } \ 91\,.$$

הוכחה: ההוכחה באינדוקציה מעל קבוצת המספרים:

$$S = \{x \,|\, x \leq 101\}$$

היחס "פחות מ" $\prec$ מוגדר כך:

$$x \prec y \ \text{ iff } \ y < x\,,$$

בצד הימני $<$ הוא היחס הרגיל מעל למספרים שלמים. סדר המספרים לפי $\prec$ הוא:

$$101 \prec 100 \prec 99 \prec 98 \prec 97 \prec \cdots\,.$$

נוכיח את המשפט באינדוקציה על הקבוצה S עם האופרטור $\prec$.

מקרה 1 $x > 100$. ההוכחה מיידית מההגדרות של f ו־g.

מקרה 2 $90 \leq x \leq 100$.

טענת הבסיס:

$$f(100) = f(f(100 + 11)) = f(f(111)) = f(101) = 91 = g(100)\,,$$

הנחת האינדוקציה היא $f(y) = g(y)$ עבור $x \prec y$.

הצעד האינדוקטיבי:

$$f(x) = f(f(x + 11)) \tag{9.1}$$
$$= f(x + 11 - 10) = f(x + 1) \tag{9.2}$$
$$= g(x + 1) \tag{9.3}$$
$$= 91 \tag{9.4}$$
$$= g(x)\,. \tag{9.5}$$

משוואה **??** נכונה מההגדרה של f כי $x \leq 100$. השוויון בין משוואה **??** לבין משוואה **??** נכון מההגדרה של f במקרה זה כי $x \geq 90$ ולכן $x + 11 > 100$. השוויון בין משוואה **??** ומשוואה **??** נובע מהנחת האינדוקציה:

$$x \leq 100 \Rightarrow x + 1 \leq 101 \Rightarrow x + 1 \in S \Rightarrow x + 1 \prec x\,.$$

השוויון בין המשוואות **??**, **??**, **??** נכון מההגדרה של g ו־$x + 1 \leq 101$.

מקרה 3 $x < 90$.

טענת הבסיס:

$$f(89) = f(f(100)) = f(f(f(111))) = f(f(101)) = f(91) = 91 = g(89)\,,$$

לפי ההגדרה של g כי $00 \leq 89$.

הנחת האינדוקציה היא $f(y) = g(y)$ עבור $x \prec y$.

הצעד האינדוקטיבי:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(f(x+11)) && (9.6)\\ &= f(g(x+11)) && (9.7)\\ &= f(91) && (9.8)\\ &= 91 && (9.9)\\ &= g(x)\,. && (9.10) \end{aligned}$$

משוואה **??** נכונה לפי ההגדרה של f ו־$100 \leq 90 < x$. השוויון בין המשוואות **??** ו־**??** נובע מהנחת האינדוקציה:

$$x < 90 \Rightarrow x + 11 < 101 \Rightarrow x + 11 \in S \Rightarrow x + 11 \prec x\,.$$

השוויון בין המשוואות **??** ו־**??** נכון לפי ההגדרה של g ו־$101 < x + 11$. לבסוף, כבר הוכחנו ש־$f(91) = 91$ ולפי ההגדרה $g(x) = 91$ עבור $x < 90$.

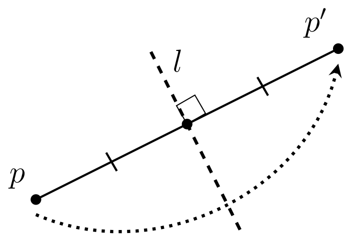
מקורות

לדיון נרחב על הוכחה באינדוקציה ראו [?]. הספר הארוך של Gunderson [?] מוקדש כולו לאינדוקציה. ההוכחה למשפט **??** לקוחה מ־[?]. ההוכחה של הפונקציה של McCarthy מבוססת על [?] ומיוחסת ל־Rod M. Burstall.

פרק 10 האקסיומות של אוריגמי

10.1 הגדרות

פעולות **הקיפול** מניח נקודות על נקודות או קווים, או קווים על קווים, כך שתנאים מסויימים מתקיימים. המונח קיפול בא מהפעולה באוריגמי של קיפול דף נייר, אבל כאן נשתמש בו עבור הקו הגיאומטרי שנוצר על ידי קיפול הדף. לפי ההגדרה, כתוצאה מקיפול נוצרים **שיקופים**. נתונה נקודה p, השיקוף שלה סביב הקיפול l, הוא נקודה p', כך ש־l הוא האנך האמצעי של קטע הקו $\overline{pp'}$:



10.2 אקסיומה 1

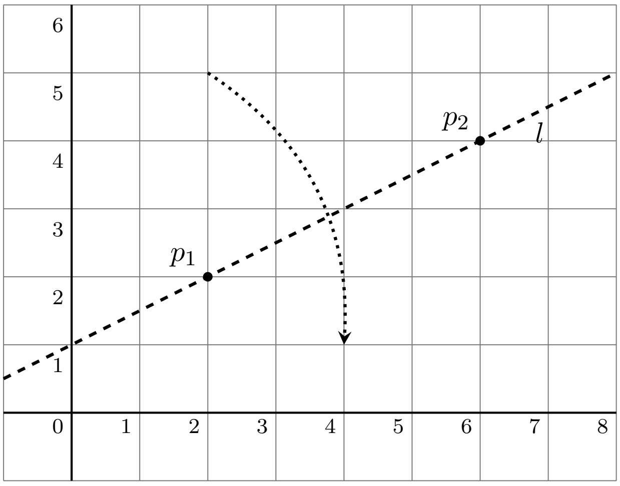
אקסיומה: נתונות שתי נקודות שונות $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, קיים קיפול יחיד l העובר דרך שתיהן (איור **??**).

פיתוח משוואת הקיפול: השיפוע של הקיפול הוא המנה של הפרשי הקואורינטות של p_1, p_2, ונקדות החיתוך עם ציר ה־y מתקבלת מ־p_1:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\,.$$

דוגמה: נתונות הנקודות $p_1 = (2, 2), p_2 = (6, 4)$, המשוואה של l היא:

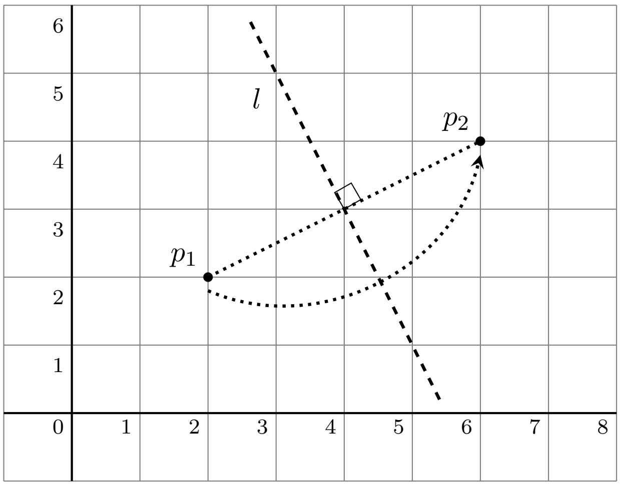
$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{4-2}{6-2}(x-2) \\ y &= \frac{1}{2}x + 1\,. \end{aligned}$$



איור 10.1: אקסיומה 1

10.3 אקסיומה 2

אקסיומה: נתונות שתי נקודות שונות $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, קיים קיפול יחיד l המניח את p_1 על p_2:



פיתוח משוואת הקיפול: השיפוע של הקיפול l הוא ההופכי השלילי של השיפוע של הקו המחבר את p_1 ו־p_2. l עובר דרך נקודת האמצע בין שתי הנוקדות:

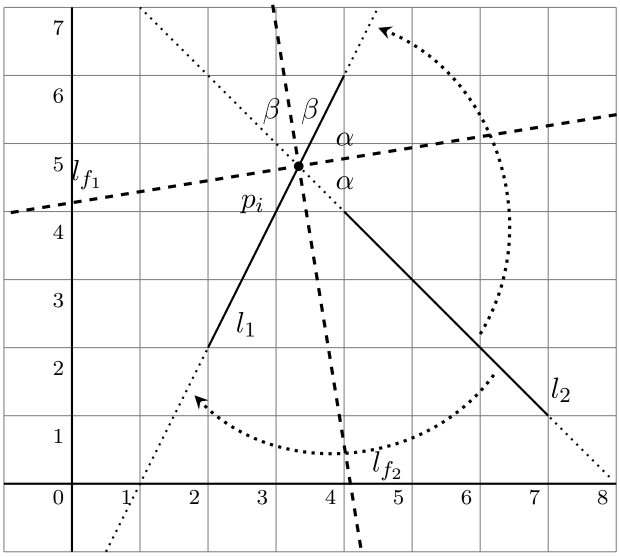
$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right). \qquad (10.1)$$

דוגמה: נתונות הנקודות $p_1 = (2, 2), p_2 = (6, 4)$. המשוואה של l היא:

$$\begin{aligned} y - \left(\frac{2+4}{2}\right) &= -\frac{6-2}{4-2}\left(x - \left(\frac{2+6}{2}\right)\right) \\ y &= -2x + 11\,. \end{aligned}$$

10.4 אקסיומה 3

אקסיומה: נתונים שני קווים l_1 ו־l_2, קיים קיפול l המניח את l_1 על l_2.



פיתוח משוואת הקיפול עבור קווים מקבילים: אם הקווים מקבילים, l_1 הוא $y = mx+b_1$ ו־l_2 הוא $y = mx + b_2$. הקיפול הוא הקו המקביל ל־l_1, l_2 וחצי המרחק ביניהם:

$$y = mx + \frac{b_1 + b_2}{2}\,.$$

פיתוח משוואת הקיפול עבור קווים נחתכים: אם הקווים נחתכים, l_1 הוא $y = m_1x+b_1$ ו־l_2 הוא $y = m_2x + b_2$. נקודת החיתוך שלהם, $p_i = (x_i, y_i)$, היא:

$$\begin{aligned} m_1x_i + b_2 &= m_2x_i + b_2 \\ x_i &= \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \\ y_i &= m_1x_i + b_1\,. \end{aligned}$$

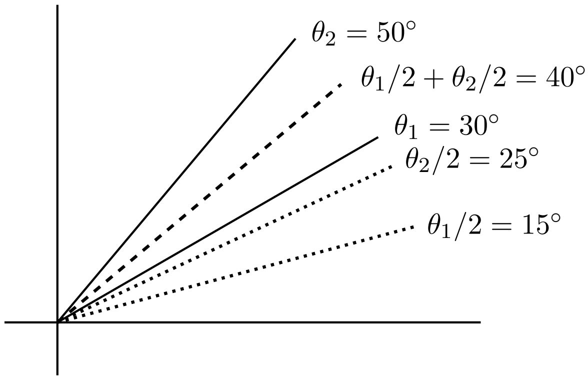
דוגמה: נתון הקו l_1 שהמשוואה שלו הוא $y = 2x - 2$, והקו l_2 שהמשוואה שלו הוא $y = -x + 8$. נקודת החיתוך שלהם היא:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{8-(-2)}{2-(-1)} = \frac{10}{3} \approx 3.33 \\ y_i &= 2 \cdot \frac{10}{3} - 2 = \frac{14}{3} \approx 4.67\,. \end{aligned}$$

פיתוח משוואת השיפוע של חוצה הזווית: שני קווים יוצרים שני זוגות של זוויות קודקודיות. הקיפולים הם חוצי הזווית שלהן. אם הזווית של l_1 יחסית לציר ה־x היא θ_1 והזווית של l_2 יחסית לציר ה־x היא θ_2, אזי קיפול הוא הקו היוצר זווית של:

$$\theta_b = \theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

יחסית לציר ה־x:



$\tan\theta_1 = m_1$ ו־$\tan\theta_2 = m_2$ נתונים ו־m_b, השיפוע של חוצה הזווית, הוא:

$$m_b = \tan\theta_b = \tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\,.$$

פיתוח המשוואה מחייב שימוש בשוויונות הטריגונומטריות:

$$\begin{aligned}\tan(\phi_1+\phi_2) &= \frac{\tan\phi_1+\tan\phi_2}{1-\tan\phi_1\tan\phi_2}\\ \tan\frac{\phi}{2} &= \frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2\phi}}{\tan\phi}\,.\end{aligned}$$

תחילה נמצא את m_s, השיפוע של $\theta_1+\theta_2$:

$$m_s = \tan(\theta_1+\theta_2) = \frac{m_1+m_2}{1-m_1m_2}\,.$$

אחר כך נמצא את m_b, השיפוע של חוצה הזווית:

$$\begin{aligned}m_b &= \tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\\ &= \frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2(\theta_1+\theta_2)}}{\tan(\theta_1+\theta_2)}\\ &= \frac{-1\pm\sqrt{1+m_s^2}}{m_s}\,.\end{aligned}$$

דוגמה: נתונים הקווים $y = 2x - 2$ ו־$y = -x + 8$, השיפוע של חוצה הזווית הוא:

$$\begin{aligned}m_s &= \frac{2+(-1)}{1-(2\cdot -1)} = \frac{1}{3}\\ m_b &= \frac{-1\pm\sqrt{1+(1/3)^2}}{1/3} = -3\pm\sqrt{10} \approx -6.16,\ 0.162\,.\end{aligned}$$

פיתוח משוואת הקיפול: נפתח את המשוואה של l_{f_1} עם השיפוע החיובי $-3+\sqrt{10}$. חישבנו לעיל את הקואורדינטות של נקודת החיתוך של הקווים $m_i = \left(\frac{10}{3}, \frac{14}{3}\right)$. נקודת החיתוך של l_{f_1} עם ציר ה־y היא:

$$\begin{aligned}
\frac{14}{3} &= (-3+\sqrt{10}) \cdot \frac{10}{3} + b \\
b &= \frac{44 - 10\sqrt{10}}{3} \\
y &= (-3+\sqrt{10})x + \frac{44 - 10\sqrt{10}}{3} \approx 0.162x + 4.13\,.
\end{aligned}$$

10.5 הוכחת הזהיות הטריגונומטריות

$$\begin{aligned}
\tan(\phi_1+\phi_2) &= \frac{\sin(\phi_1+\phi_2)}{\cos(\phi_1+\phi_2)} \\
&= \frac{\sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\sin\phi_2}{\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2} \\
&= \frac{\sin\phi_1 + \cos\phi_1\tan\phi_2}{\cos\phi_1 - \sin\phi_1\tan\phi_2} \\
&= \frac{\tan\phi_1 + \tan\phi_2}{1 - \tan\phi_1\tan\phi_2}\,.
\end{aligned}$$

נשמתש משוואה זו עם $\phi = (\phi/2) + (\phi/2)$:

$$\tan\phi = \frac{\tan(\phi/2) + \tan(\phi/2)}{1 - \tan^2(\phi/2)}\,,$$

ונקבל משוואה ריבועית במשתנה $\tan(\phi/2)$:

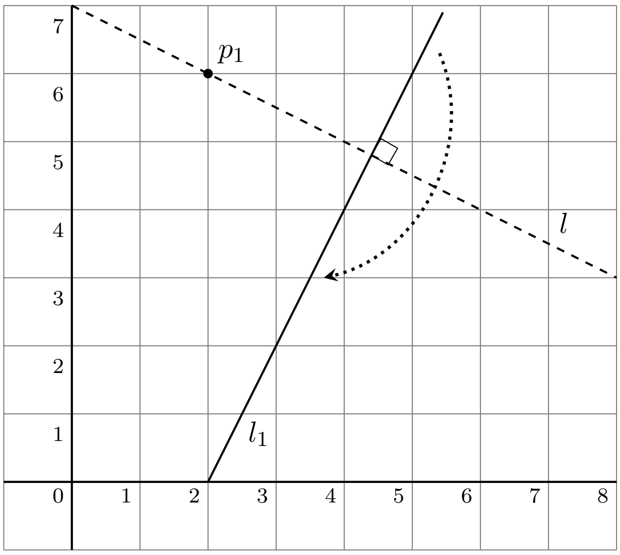
$$\tan\phi\,(\tan(\phi/2))^2 \; + \; 2\,(\tan(\phi/2)) \; - \; \tan\phi = 0\,.$$

הפתרונות שלה הם:

$$\tan(\phi/2) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\tan^2\phi}}{\tan\phi}\,.$$

10.6 אקסיומה 4

אקסיומה: נתונים נקודה $p_1 = (x_1, x_2)$ וקו l_1, קיים קיפול יחיד l הניצב ל־l_1 שעובר דרך p_1. (איור)



פיתוח משוואת הקיפול: המשוואה של הקו l_1 היא $y = m_1x + b_1$. l ניצב ל־l_1 לכן השיפוע שלו הוא $-\frac{1}{m_1}$. הקו עובר דרך p_1 ונוכל לחשב את המשוואה שלו:

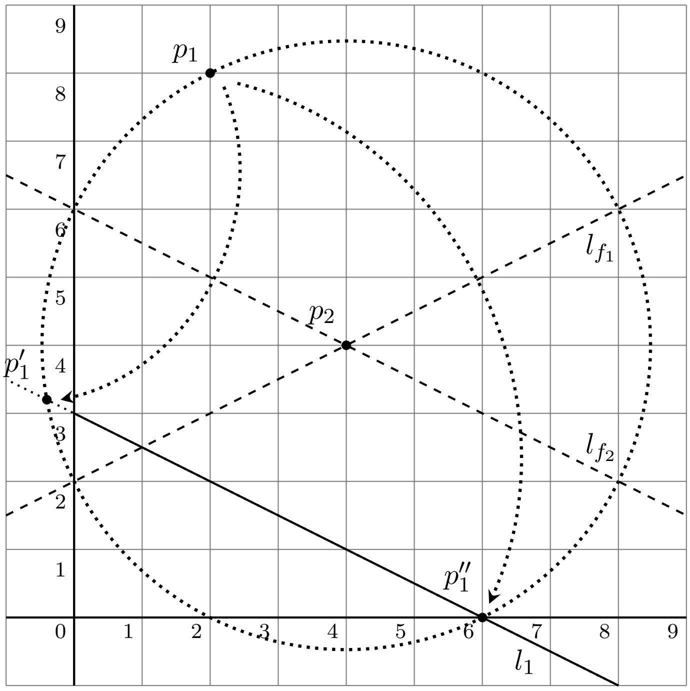
$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{m}x_1 + b \\ b &= \frac{(my_1 + x_1)}{m} \\ y &= -\frac{1}{m}x + \frac{(my_1 + x_1)}{m}\,. \end{aligned}$$

דוגמה: נתונה הנקודה $p_1 = (2,6)$ ונתון הקו l_1 שהמשוואה שלו הוא $y = 2x - 4$. המשוואה של הקיפול l היא:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{2 \cdot 6 + 2}{2} = -\frac{1}{2}x + 7\,.$$

10.7 אקסיומה 5

אקסיומה: נתונות נקודות $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$ ונתון קו l_1, קיים קיפול l המניח את p_1 מעל l_1 והעובר דרך p_2.



עבור זוג נקודות נתון וקו נתון, יכולים להיות אפס, אחד או שני קיפולים.

פיתוח משוואות עבור השיקופים: נסמן ב־l את הקיפול העובר דרך p_2, ונסמן ב־p'_1 את השיקוף של p_1 מסביב ל־l. האורך של $\overline{p_1p_2}$ שווה לאורך של $\overline{p_2p_1}'$. המקום הגיאומטרי של נקודות הנמצאות במרחק $\overline{p_1p_2}$ מ־p_2 הוא המעגל שמרכזו p_2 והרדיוס שלו הוא $\overline{p_1p_2}$. נקודות החיתוך של מעגל זה עם הקו l_1 הן המקומות האפשריים עבור p'_1. המשוואה של הקו l_1 היא $y = m_1x + b_1$. המשוואה של המעגל שמרכזו p_2 עם רדיוס $\overline{p_1p_2}$ היא:

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2 .$$

נציב את המשוואה של הקו לתוך המשוואה של המעגל:

$$\begin{aligned}(x - x_2)^2 + ((m_1x + b_1) - y_2)^2 &= r^2\\ (x - x_2)^2 + (m_1x + (b_1 - y_2))^2 &= r^2 ,\end{aligned}$$

ונקבל משוואה ריבועית עבור קואורדינטות ה־x של נקודות החיתוך האפשריות:

$$x^2(1 + m_1^2) + 2(-x_2 + m_1(b - y_2))x + (x_2^2 + (b_1 - y_2)^2 - r^2) = 0 . \tag{10.2}$$

למשוואה ריבועית יש לכל היותר שני פתרונות x'_1, x''_1, ונחשב את y'_1, y''_1 מ־$y = m_1x+b_1$. נקודות השיקוף הן $p'_1 = (x'_1, y'_1), p''_1 = (x''_1, y''_1)$.

דוגמה: נתונות הנקודות $p_1 = (2,8)$, $p_2 = 4,4)$, ונתון הקו l_1 שהמשוואה שלו היא $y = -\frac{1}{2}x + 3$. משוואת המעגל היא:

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 = r^2 = (4-2)^2 + (4-8)^2 = 20\,.$$

נציב את המשוואה של הקו לתוך המשוואה של המעגל ונפשט כדי לקבל משוואה ריבועית עבור קואורדינטות ה־x של נקודות החיתוך (או השתמשו במשוואה **??**).

$$\begin{aligned}
(x-4)^2 + \left(\left(-\frac{1}{2}x+3\right)-4\right)^2 &= 20\\
\frac{5}{4}x^2 - 7x - 3 &= 0\\
5x^2 - 28x - 12 &= 0\\
(5x+2)(x-6) &= 0\,.
\end{aligned}$$

שתי נקודות חיתוך הן:

$$p_1' = \left(-\frac{2}{5}, \frac{16}{5}\right) = (-0.4, 3.2)\,, \quad p_1'' = (6,0)\,.$$

פיתוח המשוואות של הקיפולים: הקיפולים יהיו האנכים האמצעיים של $\overline{p_1p_1'}$ ו־$\overline{p_1p_1''}$. המשוואה של אנך אמצעי נתונה על ידי משוואה **??**, שנעתיק כאן עבור p_1':

$$y - \frac{y_1+y_1'}{2} = -\frac{x_1'-x_1}{y_1'-y_1}\left(x - \frac{x_1+x_1'}{2}\right)\,. \tag{10.3}$$

דוגמה: נתונות הנקודות $p_1 = (2,8)$, $p_1' = \left(-\frac{2}{5}, \frac{16}{5}\right)$, משוואת הקיפול של l_{f_1} היא:

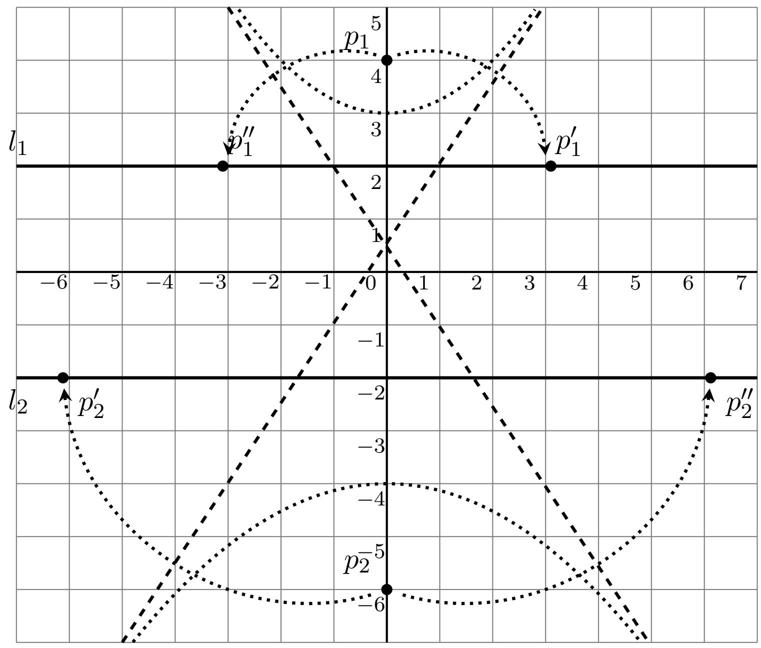
$$\begin{aligned}
y - \frac{8+(16/5)}{2} &= -\frac{(-2/5)-2}{(16/5)-8}\left(x - \frac{2+(-2/5)}{2}\right)\\
y &= -\frac{1}{2}x + 6\,.
\end{aligned}$$

נתונות הנקודות עבור $p_1 = (2,8)$, $p_1'' = (6,0)$, משוואת הקיפול של l_{f_2} היא:

$$\begin{aligned}
y - \frac{8+0}{2} &= -\frac{6-2}{0-8}\left(x - \frac{2+6}{2}\right)\\
y &= \frac{1}{2}x + 2\,.
\end{aligned}$$

10.8 אקסיומה 6

אקסיומה: נתונות שתי נקודות p_1 ו־p_2 ונתונים שני קווים l_1 ו־l_2, קיים קיפול l המניח את p_1 על ל־l_1 ו־p_2 על ל־l_2.



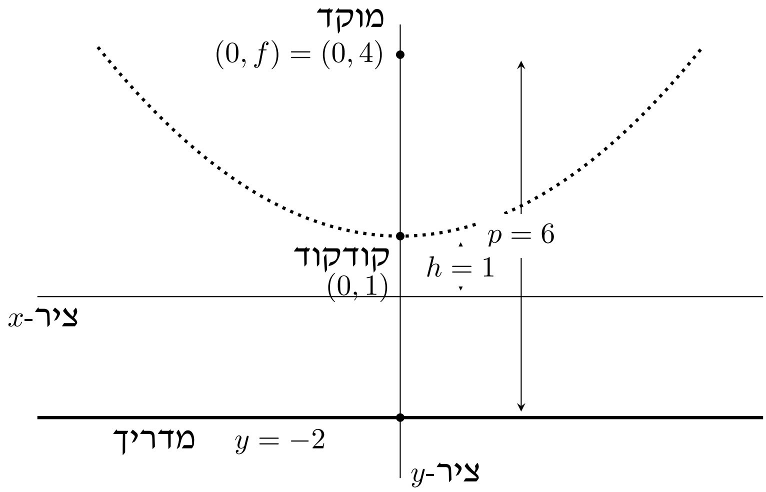
עבור נקודות נתונות וקווים נתונים יכולים להיות אפס, אחד, שניים או שלושה קיפולים.

קיפול המניח את p_i על l_i הוא קו שמרחקו ל־p_i שווה למרחקו ל־l_i. המקום הגיאומטרי של נקודות שהן במרחק שווה מנקודה p_i ומקו l_i הוא פרבולה עם מוקד (focus) p_i ומדריך (directrix) l_i. קיפול הוא קו המשיק לפרבולה (סעיף **??**). כדי שהקיפול יניח בו־זמנית את p_1 על ל־l_1 ו־p_2 על ל־l_2, הוא חייב להיות משיק משותף לשתי הפרבולות.

המשוואה עבור פרבולה שרירותית מסובכת ולכן נגביל את הדיון לפרבולה שציר ה־y הוא ציר הסמטריה. נביא גם דוגמה עם פרבולה שציר הסמטריה שלה הוא ציר ה־x.

10.8.1 פיתוח הנקודה של הקיפול

התיאור שלהלן מתייחס לאיור **??**. הנקודה $(0, f)$ היא מוקד של פרבולה עם מדריך $y = d$. נגדיר $p = f - d$, האורך ($\pm$) של קטע הקו בין המוקד למדריך. אם הקודקוד (vertex) נמצא על ציר ה־x, המשוואה של הפרבולה היא $y = \dfrac{x^2}{2p}$. כדי להזיז את הפרבולה על ציר ה־y, כך שהקודקוד שלה היא $(0, h)$, יש להוסיף h למשוואת הפרבולה: $y = \dfrac{x^2}{2p} + h$. נגדיר $a = 2ph$ כך שמשוואת הפרבולה היא:



איור 10.2: הגדרת הפרבולה: מוקד, מדריך, קודקוד

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{2p} + \frac{a}{2p} \\ x^2 - 2py + a &= 0\,. \end{aligned}$$

עבור הפרבולה באיור **??** המשוואה היא:

$$\begin{aligned} x^2 - 2\cdot 6\,y + 2\cdot 6\cdot 1 &= 0 \\ x^2 - 12y + 12 &= 0\,. \end{aligned}$$

נציב את המשוואה של קו **שרירותי** $y = mx + b$ במשוואה עבור הפרבולה ונקבל משוואה עבור נקודות החיתוך של הקו והפרבולה:

$$\begin{aligned} x^2 - 2p(mx+b) + a &= 0 \\ x^2 + (-2mp)x + (-2pb + a) &= 0\,. \end{aligned}$$

הקו יהיה משיק לפרבולה אם ורק אם למשוואה ריבועית זו קיים **בדיוק** פתרון אחד אם ורק אם הדיסקרימיננטה (discriminant) היא אפס:

$$(-2mp)^2 \;-\; 4\cdot 1\cdot(-2pb + a) = 0 \tag{10.4}$$

$$m^2p^2 + 2pb - a = 0\,. \tag{10.5}$$

משוואה זו עם המשתנה m היא המשוואה ריבועית עבור השיפועים של המשיקים לפרבולה. קיימים אינסוף משיקים כי עבור כל m, קיים b שגורם למשיק לזוז למעלה או למטה.[1] כדי למצוא את המשיקים המשותפים לשתי הפרבולות, יש לפתור את המשוואות של שתי הפרבולות, משוואות עם שני משתנים m ו־b.

[1]פרט כמובן עבור קו המקביל לציר הסמטריה.

10.8.2 דוגמאות לאקסיומה 6

פרבולה 1: מוקד $(0,4)$, מדריך $y=2$, קודקוד $(0,3)$.

$p=4-2=2$, $a=2\cdot 2\cdot 3=12$. משוואת הפרבולה היא:

$$x^2-2\cdot 2y+12=0\,.$$

נציב לתוך משוואה **??** ונפשט:

$$m^2+b-3=0\,.$$

פרבולה 2: מוקד $(0,-4)$, מדריך $y=-2$, קודקוד $(0,-3)$.

$p=-4-(-2)=-2$, $a=2\cdot -2\cdot -3=12$. משוואת הפרבולה היא:

$$x^2-2\cdot(-2)y+12=0\,.$$

נציב לתוך משווארה **??** ופשט:

$$m^2-b-3=0\,.$$

הפתרונות של שתי המשוואות:

$$\begin{aligned}m^2+b-3&=0\\ m^2-b-3&=0\,,\end{aligned}$$

הם $m=\pm\sqrt{3}\approx\pm 1.73$ ו־$b=0$. המשיקים המשותפים שהם הקיפולים הם:

$$y=\sqrt{3}x\,,\quad y=-\sqrt{3}x\,.$$

פרבולה 1: ללא שינוי, המשוואה היא:

$$m^2+b-3=0\,.$$

פרבולה 2: מוקד $(0,-6)$, מדריך $y=-2$, קודקוד $(0,-4)$.

$p=-6-(-2)=-4$, $a=2\cdot -4\cdot -4=32$. משוואת הפרבולה היא:

$$x^2-2\cdot(-4)y+32=0\,.$$

נציב לתוך משווארה **??** ונפשט:

$$2m^2-b-4=0\,.$$

הפתרונות של שתי המשוואות:

$$\begin{aligned}m^2+b-3&=0\\ 2m^2-b-4&=0\,,\end{aligned}$$

הם $m=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}\approx\pm 1.53$ ו־$b=\frac{2}{3}$. יש שני משיקים משותפים שהם קיפולים:

$$y=\sqrt{\frac{7}{3}}x+\frac{2}{3}\,,\quad y=-\sqrt{\frac{7}{3}}x+\frac{2}{3}\,.$$

פרבולה 1: ללא שינוי, המשוואה היא:

$$m^2+b-3=0\,.$$

פרבולה 2: פרבולה שציר הסמטריה שלה הוא ציר ה־x. מוקד $(4,0)$, מדריך $x=2$, קודקוד $(3,0)$. $p=4-2=2$, $a=2\cdot 2\cdot 3=12$. משוואת הפרבולה היא:

$$y^2-4x+12=0\,.$$

שימו לב שזו משוואה עם x ו־y^2 במקום x^2 ו־y, כך שלא ניתן להשתמש במשוואה **??** ונצטרך לפתח את משוואות מחדש.

נציב את המשוואה של הקו:

$$\begin{aligned}(mx+b)^2-4x+12 &= 0\\ m^2x^2+(2mb-4)x+(b^2+12) &= 0\end{aligned}$$

נשווה את הדיסקרימיננטה לאפס ונפשט:

$$\begin{aligned}(2mb-4)^2\;-\;4m^2(b^2+12) &= 0\\ -3m^2-mb+1 &= 0\,.\end{aligned}$$

אם ננסה לפתור את שתי המשוואות:

$$\begin{aligned}m^2+b-3 &= 0\\ -3m^2-mb+1 &= 0\,,\end{aligned}$$

נקבל משוואה **ממעלה שלוש** במשתנה m:

$$m^3-3m^2-3m+1=0\,. \tag{10.6}$$

למשוואה ממעלה שלוש יש לפחות פתרון ממשי אחד ולכל היותר שלושה פתרונות ממשיים, לכן יכול להיות אחד, שניים או שלושה משיקים משותפים. הנוסחה למציאת פתרונות למשוואה ממעלה שלוש די מסובכת, לכן השתמשתי במחשבון באינטרנט וקיבלתי שלושה פתרונות:

$$m=3.73\,,\;m=-1\,,\;m=0.27\,.$$

אם נבחר $m=0.27$, $b=3-m^2=2.93$, משוואת הקיפול היא:

$$y=0.27x+2.93\,.$$

מהצורה של המשוואה **??**, נוכל לנחש ש־1 או -1 הוא פתרון:

$$\begin{aligned} 1^3 - 3\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 1 &= -4 \\ (-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 - 3\cdot(-1) + 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

נחלק את המשוואה **??** ב־$m-(-1) = m+1$ ונקבל משוואה ריבועית $m^2 - 4m + 1$ ששורשיה הם $2 \pm \sqrt{3} \approx 3.73, 0.27$.

10.8.3 פיתוח המשוואות של השיקופים

נחשב את $p'_1 = (x'_1, y'_1)$, השיקוף של $p_1 = (x_1, y_1)$ מסביב למשיק l_t שהמשוואה שלה היא $y = m_t x + b_t$. (החישוב דומה עבור כל משיק ועבור p_2.) נמצא את הקו l_p עם המשוואה $y = m_p x + b_p$ שניצב ל־l_t ועובר דרך p_1:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{m_t}x + b_p \\ y_1 &= -\frac{1}{m_t}x_1 + b_p \\ y &= \frac{-x}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t}\right)\,. \end{aligned}$$

כעת נמצא את נקודת החיתוך $p_t = (x_t, y_t)$ של l_t ו־l_p:

$$\begin{aligned} m_t x_t + b_t &= \frac{-x_t}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t}\right) \\ x_t &= \frac{m_t(y_1 - b_t) + x_1}{m_t^2 + 1} \\ y_t &= m_t x_t + b_t\,. \end{aligned}$$

ניתן למצוא את השיקוף p'_1 כי נקודת החיתוך p_t היא נקודת האמצע בין p_1 לבין p'_1:

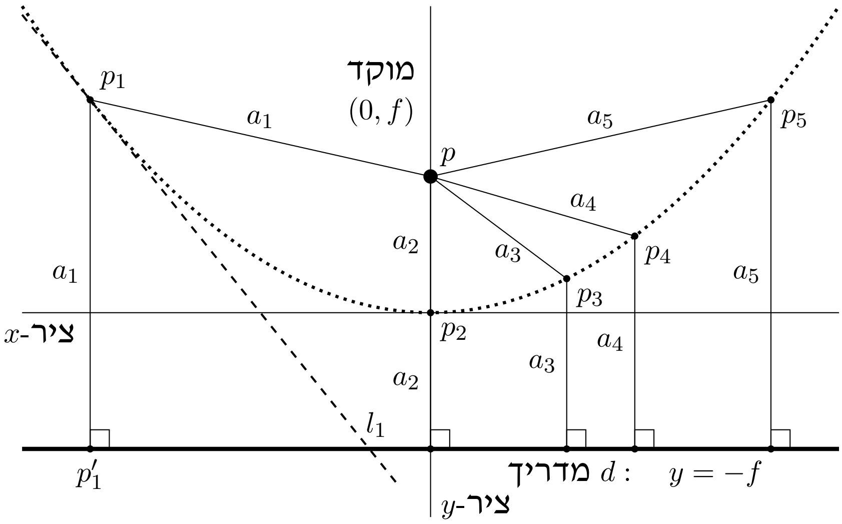
$$\begin{aligned} x_t &= \frac{x_1 + x'_1}{2}\,, \quad y_t = \frac{y_1 + y'_1}{2} \\ x'_1 &= 2x_t - x_1\,, \quad y'_1 = 2y_t - y_1\,. \end{aligned}$$

דוגמה: נתון $p_1 = (0,4)$ ו־l_1 עם המשוואה $y = \sqrt{3}x$:

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\sqrt{3}(4-0)+0}{(\sqrt{3})^2+1} = \sqrt{3} \\ y_t &= \sqrt{3}\sqrt{3} + 0 = 3 \\ x'_1 &= 2x_t - x_1 = 2\sqrt{3} - 0 = 2\sqrt{3} \approx 3.46 \\ y'_1 &= 2y_t - y_1 = 2\cdot 3 - 4 = 2\,. \end{aligned}$$

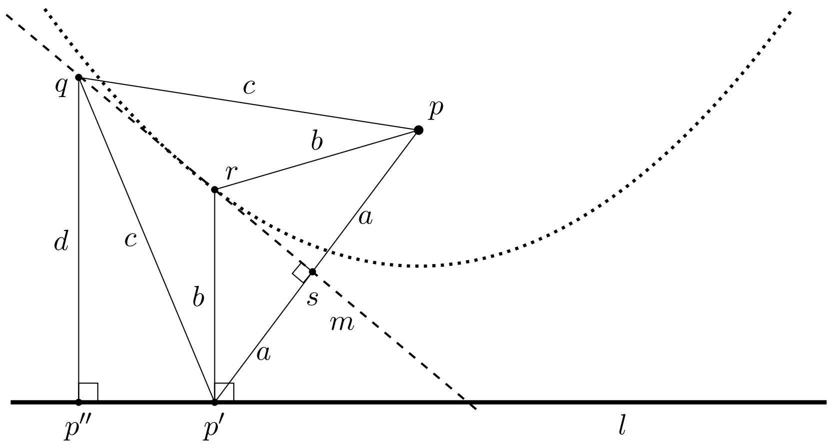
10.8.4 משיקים לפרבולה

באיור שלהלן בחרנו חמש נקודות p_i, $i = 1, \ldots, 5$ על הפרבולה. כל נקודה p_i היא במרחק a_i גם מהמוקד וגם מהמדריך. נוריד ניצב למדריך מ־p_i, ונסמן ב־p'_i את נקודת החיתוך של הניצב עם המדריך. נשתמש באקסיומה 2 ונבנה את הקו l_i דרך p_i שמשקף את p על p'_i. האיור מראה את הקיפול l_1 דרך p_1.



משפט 10.1 הקיפולים הם משיקים לפרבולה.

הוכחה:[2] באיור שלהלן המוקד הוא p, המדריך הוא l, p' היא נקודה על המדריך, ו־m הוא הקיפול המשקף את p על p'. לפי ההגדרה, m הוא האנך האמצעי של הקו $\overline{pp'}$. תהי s נקודת החיתוך של $\overline{pp'}$ ו־m. אזי $\overline{ps} = \overline{p's} = a$ ו־$\overline{pp'} \perp m$.

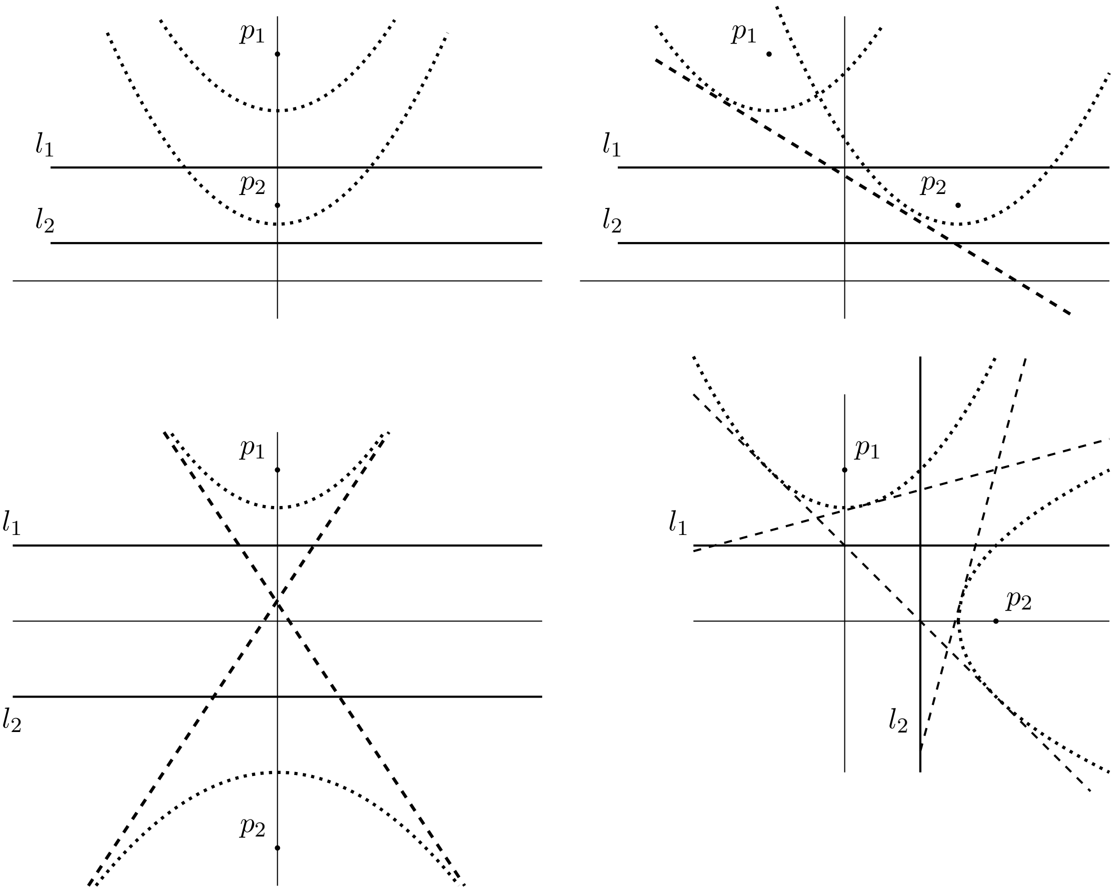


תהי r נקודת החיתוך של הניצב ל־l דרך p' והקיפול m. אזי $\triangle psr \cong \triangle p'sr$ לפי צלע־זווית־צלע, כי $\overline{ps} = \overline{p's}$, $\angle psr = \angle p'sr = 90^\circ$ ו־$\overline{rs}$ הוא צלע משותפת. מכאן ש־$\overline{pr} = \overline{p'r} = b$ ולכן r נמצאת על הפרבולה.

[2]אני מודה לאוריה בן־לולו שהראתה לי הוכחה זו.

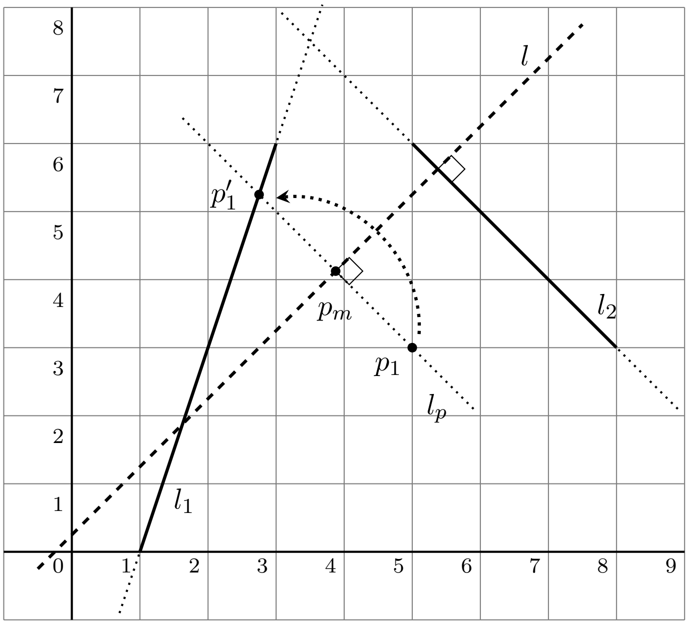
בחרו נקודה p'' על המדריך שהיא שונה מ־p'. נניח שהקיפול m גם משקף את p על p''. תהי q החיתוך של הניצב ל־l דרך p'' והקיפול m. כמו בהוכחה לעיל, נוכל להוכיח ש־$c = \overline{pq} = \overline{p'q}$. נסמן $\overline{qp''} = d$. אם q נמצאת על הפרבולה, אזי $c = \overline{qp} = \overline{qp''} = d$. אבל c הוא היתר של המשולש ישר־זווית $\triangle qp''p'$ ולא ייתכן שהיתר שווה לאחת הצלעות של המשולש. הוכחנו שלקיפול m נקודת חיתוך אחת עם בפרבולה, ולכן הקיפול הוא משיק. ∎

האיור שלהלן מראה את ארבעת האפשרויות של משיקים לפרבולה.



10.9 אקסיומה 7

אקסיומה: נתונה נקודה $p_1 = (x_1, y_1)$, ונתונים קווים l_1, l_2, קיים קיפול l הניצב ל־l_2 שהמניח את p_1 על ל־l_1.



פיתוח משוואת הקיפול: המשוואות של l_1 ו־l_2 הן $y = m_1x+b_1$ ו־$y = m_2x+b_2$. הקיפול l ניצב ל־l_2, וגם ל־l_p הניצב ל־l, ולכן $l_p \| l_2$. l_p עובר דרך p_1. נחשב:

$$
\begin{aligned}
y &= m_2x + b_p \\
y_1 &= m_2x_1 + b_p \\
y &= m_2x + (y_1 - m_2x_1)\,.
\end{aligned}
$$

$p_1' = (x_1', y_1')$, השיקוף של p_1 מסביב לקיפול l, היא נקודת החיתוך של l_1 ו־l_p:

$$
\begin{aligned}
m_1x_1' + b_1 &= m_2x_1' + (y_1 - m_2x_1) \\
x_1' &= \frac{y_1 - m_2x_1 - b_1}{m_1 - m_2} \\
y_1' &= m_1x_i' + b_1\,.
\end{aligned}
$$

$p_m = (x_m, y_m)$, נקודת האמצע של l_p, נמצאת על הקיפול l:

$$(x_m, y_m) = \left(\frac{x_1 + x_1'}{2}, \frac{y_1 + y_1'}{2}\right)\,.$$

הקיפול l הוא האנך האמצעי של $\overline{p_1p_1'}$, וכדי לחשב את המשוואה שלו, תחילה נחשב את p_m, נקודת האמצע של $\overline{p_1p_1'}$:

$$y_m = -\frac{1}{m_2}x_m + b_m$$

$$b_m = y_m + \frac{x_m}{m_2} \,.$$

המשוואה של הקיפול l היא:

$$y = -\frac{1}{m_2}x + \left(y_m + \frac{x_m}{m_2}\right) \,.$$

דוגמה: נתונה הנקודה $p_1 = (5,3)$, נתון הקו l_1 שהמשוואה שלו היא $y = 3x - 3$, ונתון הקו l_2 שהמשוואה שלו היא $y = -x + 11$.

$$\begin{aligned}
x_1' &= \frac{3-(-1)\cdot 5-(-3)}{3-(-1)} = \frac{11}{4} \\
y_1' &= 3\cdot\frac{11}{4} + (-3) = \frac{21}{4} \\
p_m &= \left(\frac{5+\frac{11}{4}}{2}, \frac{3+\frac{21}{4}}{2}\right) = \left(\frac{31}{8}, \frac{33}{8}\right) \,.
\end{aligned}$$

משוואת הקיפול היא:

$$y = -\frac{1}{-1}\cdot x + \left(\frac{33}{8} + \frac{\frac{31}{8}}{-1}\right) = x + \frac{1}{4} \,.$$

מקורות

תיאור האקסיומות של אוריגמי ניתן למצוא ב־[?], [?]. [?] מביא קשת נרחב של בניות עם אוריגמי. הגדרות פורמליות מופיעות בפרק 10 של [?].

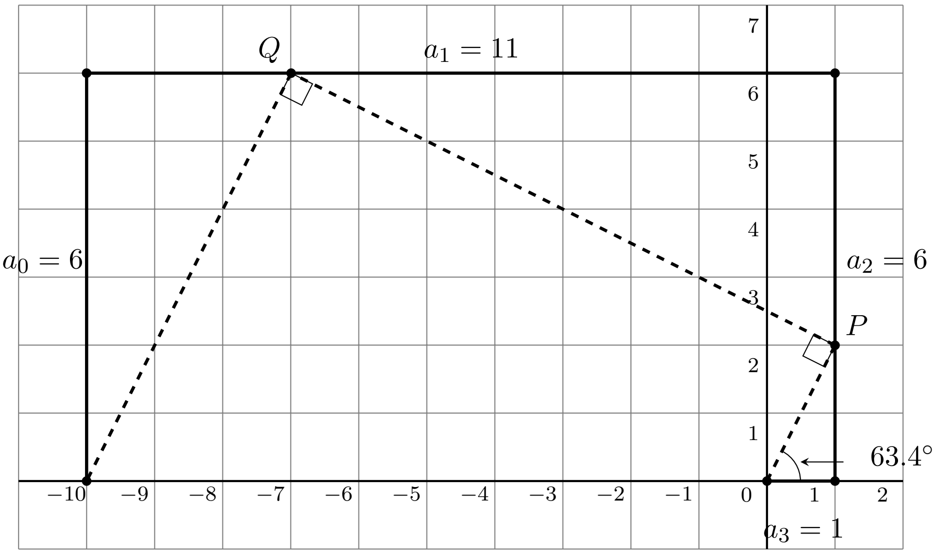
פרק 11 השיטה של Lill והקיפול של Beloch

11.1 קסם

עקבו אחר הבניה באיור שלהלן. בנו מסלול עם ארבעה קטעי קו באורכים הנתונים:

$$\{a_3 = 1, a_2 = 6, a_1 = 11, a_0 6\}\,.$$

הבניה מתחילה ממרכז מערכת הצירים בכיוון החיובי של ציר ה־x תוך סיבוב של 90° בין הקטעים. בנו מסלול שני המתחיל עם קטע קו שיוצא ממרכז הצירים בזוויות 63.4° יחסית לציר ה־x, וסמנו ב־P את נקודת החיתוך שלו עם a_2. פנו שמאלה 90° ובנו קטע קו כאשר Q היא נקודת החיתוך שלו עם a_1. פנו שמאלה 90° פעם נוספת, בנו קו, ושימו לב שהוא חותך את קצה המסלול הראשון הנמצא ב־$(-10, 0)$.



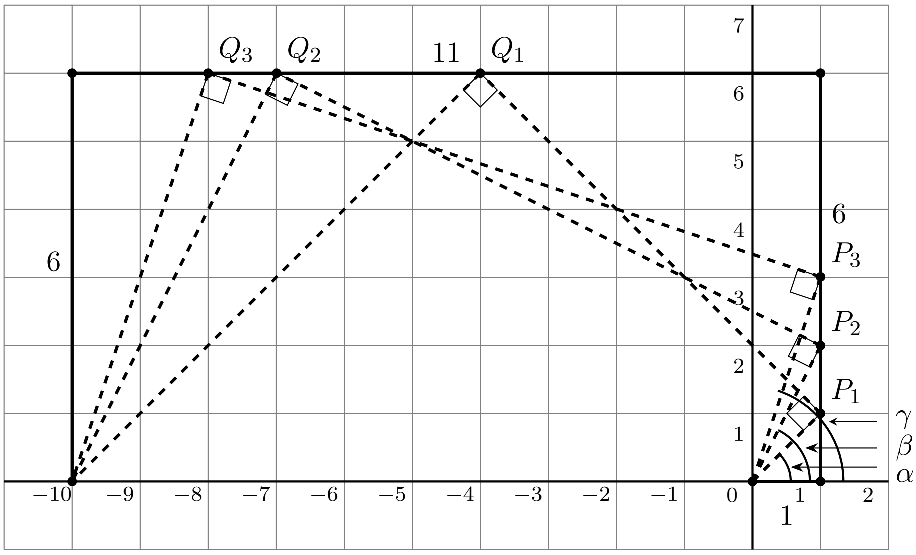
נחשב $-\tan 63.4^\circ = -2$ ונציב ערך זה בפולינום שהמקדמים שלו הם אורכי הקטעים במסלול הראשון:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\ p(-\tan 63.4^\circ) &= (-2)^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6 \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

בשעה טובה! מצאנו שורש של $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, פולינום ממעלה שלוש.

לפולינום $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ שלושה שורשים $-1, -2, -3$. מחישוב השלילה של הטנגס שלהם מתקבל:

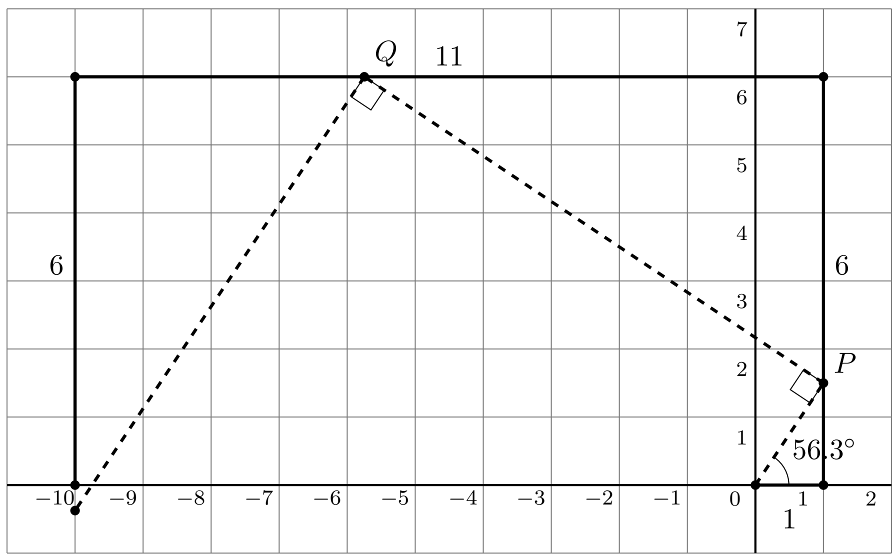
$$\alpha = -\tan^{-1} -1 = 45^\circ, \quad \beta = -\tan^{-1} -2 = 63.4^\circ, \quad \gamma = -\tan^{-1} -3 = 71.6^\circ\,.$$



איור 11.1: שלושה מסלולים עבור שלושה שורשים

באיור **??** רואים שעבור כל אחת מהזוויות, המסלול השני חותך את הקצה של המסלול הראשון.

באיור שלהלן אנו רואים שעבור זווית אחרת, נגיד 56.3°, שעבורה $-\tan 56.3 = -1.5$ אינו שורש, המסלול השני חותך את המשך קטע הקו עבור המקדם a_0, אבל לא ב־$(-10, 0)$, הקצה של המסלול הראשון.



דוגמה זו מדגימה שיטה גרפית שבודקת אם ערך נתון הוא שורש של פולינום. את השיטה גילה Eduard Lill ב־1867. נראה בהמשך שלשיטה של Lill קשר הדוק עם אוריגמי.

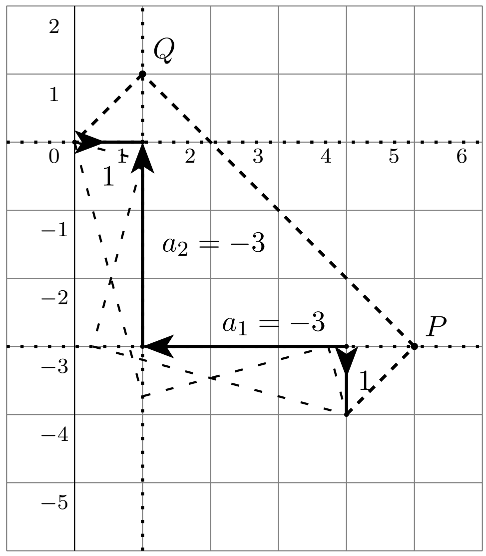
11.2 הצגת השיטה של Lill

כדי להבין את השיטה מומלץ לעיין בדוגמאות בסעיפים הבאים.

- נתון פולינום שרירותי $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.
- בנו את המסלול הראשון: לכל מקדם a_3, a_2, a_1, a_0 (בסדר זה) בנו קטע קו המתחיל במרכז הצירים $O = (0, 0)$ בכיוון החיובי של ציר ה־x. פנו $90°$ נגד השעון בין הקטעים.
- בנה את המסלול השני כך:
  - סמנו ב־a_i את קטע הקו שאורכו a_i.
  - בנו קו מ־O בזווית θ יחסית לכיוון החיובי של ציר ה־x. סמנו ב־P את הנקודה בה חותך הקו את a_2.
  - פנו $\pm 90°$, בנו קו מ־P וסמנו ב־Q את הנקודת החיתוך של הקו עם a_1.
  - פנו $\pm 90°$, בנו קו מ־Q וסמנו ב־R את נקודת החיתוך של הקו עם a_0.
  - אם R היא נקודת הקצה של המסלול הראשון, $p(-\tan\theta) = 0$ ו־$-\tan\theta$ הוא שורש של $p(x)$.
- מקרים מיוחדים:
  - בבניית המסלול הראשון, אם מקדם הוא שלילי, בנו את קטע הקו **בכיוון ההפוך**.
  - בבניית המסלול הראשון, אם מקדם הוא אפס, אין לבנות קטע הקו, אבל כן מבצעים את הפנייה הבאה של $\pm 90°$.
- הערות:
  - "נקודת החיתוך של קו עם a_i": מותר שהחיתוך יהיה עם הקו המכיל את a_i ולא רק עם קטע הקו a_i עצמו.
  - כאשר בונים את המסלול השני, בחר לפנות ימינה או שמאלה ב־$90°$ כך שלמסלול השני תהיה נקודת חיתוך עם קטעי הקו של המסלול הראשון (או של קווים המכילים את קטעי הקו).

11.3 מקדמים שליליים

לפולינום $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ בסעיף **??** מקדמים שליליים. נפעיל את השיטה של Lill עבור פולינום זה (איור **??**). נתחיל בבניית קטע קו באורך 1 לכיוון החיובי של ציר ה־x. אחר כך נפנה שמאלה $90°$ (עם הפנים למעלה). המקדם שלילי ולכן נבנה קטע קו באורך -3, זאת אומרת קטע קו באורך 3 **למטה**, הפוך מהכיוון שאנו פונים אליו.



איור 11.2: מסלול עבור פולינום עם מקדמים שליליים

לאחר פנייה נוספת 90° לשמאל, המקדם שוב שלילי כך שנבנה קו באורך 3 לאחור, לכיוון ימין. לבסוף, נפנה עם הפנים למטה ונבנה קטע קו באורך 1.

המסלול השני מתחיל עם קו בזווית 45° יחסית לציר ה־x. נקודת החיתוך של הקו עם הקו המכיל את קטע ההקו a_2 היא $(1,1)$. נפנה שוב -90° (לכיוון ימין), נבנה קו שנקודת החיתוך שלה עם הקו המכיל את קטע הקו a_1 היא $(5,-3)$. נפנה שוב -90°, נבנה קו שנקודת החיתוך שלו היא בנוקדת הקצה של המסלול הראשון ב־$(4,-4)$.

$-\tan 45^\circ = -1$, ולכן שורש ממשי של הפולינום הוא -1:

$$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 6 = 0\,.$$

באיור שני מסלולים נוספים עבור שורשים אחרים של הפולינום (**??**).

11.4 מקדמים שהם אפס

a_2, המקדם של x^2 ב־$x^3 - 7x - 6 = 0$, הוא אפס. עבור מקדם אפס, אנו "בונים" קטע קו באורך 0, כלומר, אנחנו לא מציירים קו, אבל כן פונים $\pm 90^\circ$ לפני ואחרי ש"בונים" אותו, כפי שניתן לראות באיור **??**. חץ הפונה למעלה בנקודה $(1,0)$. קיימים שלושה מסלולים החותכים את קצה המסלול הראשון. הם מתחילים עם הזוויות:

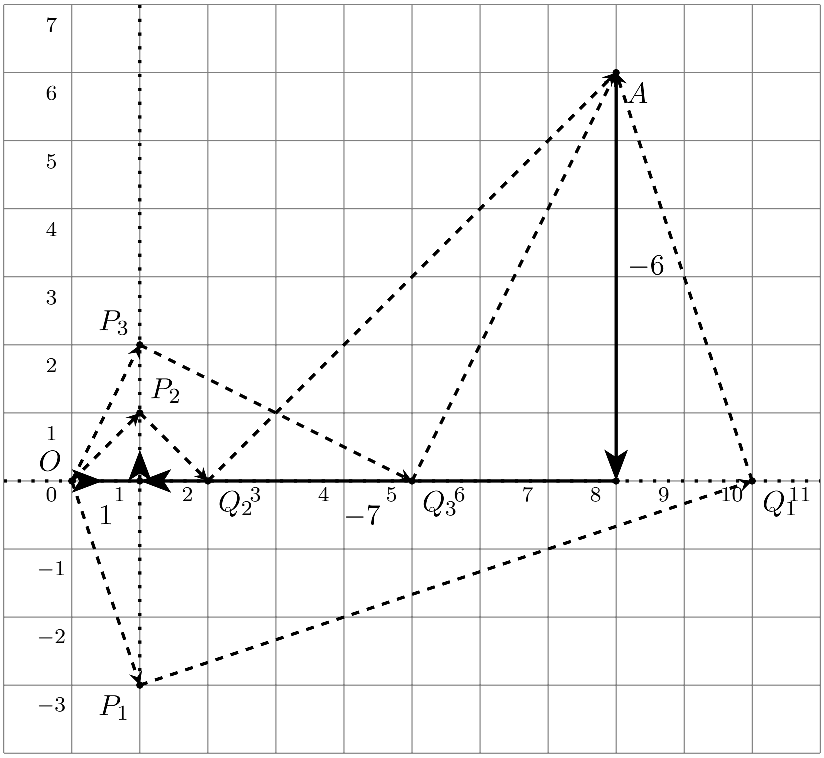
$$\alpha = 45^\circ, \quad \beta = 63.4^\circ, \quad \gamma = -71.6^\circ\,.$$

מכאן אפשר להסיק שיש שלושה שורשים ממשיים:

$$-\tan 45^\circ = -1, \quad -\tan 63.4^\circ = -2, \quad -\tan(-71.6^\circ) = 3\,.$$

בדיקה:

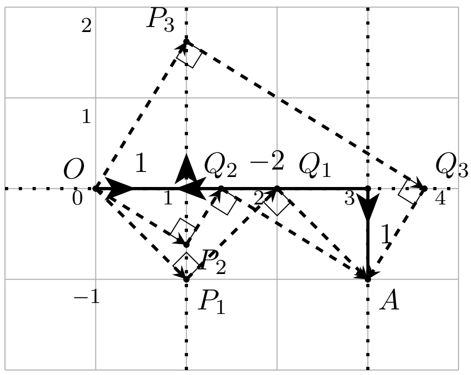
$$(x+1)(x+2)(x-3) = (x^2+3x+2)(x-3) = x^3 - 7x - 6\,.$$



איור 11.3: מסלול עבור פולינום עם מקדם שהוא אפס

11.5 שורשים שאינם מספרים שלמים

נבדוק את הפולינום $p(x) = x^3 - 2x + 1$:



הקטע הראשון של המסלול הראשון עובר מ־$(0,0)$ ל־$(1,0)$ ואז פונה למעלה. המקדם של x^2 הוא אפס כך שלא נצייר קטע קו ונפנה שמאלה. המקדם הבא הוא -2 כך שהקטע הבא נבנה לאחור מ־$(1,0)$ ל־$(3,0)$. לבסוף, המסלול פונה למטה וקו באורך 1 נבנה מ־$(3,0)$ ל־$(3,-1)$. קל לראות ש־1 הוא שורש של $p(x)$. $-\tan^{-1} -45^\circ = 1$, ולכן קיים מסלול $\overline{OP_1Q_1A}$.

אם נחלק את $p(x)$ ב־$x-1$, נקבל פולינום ריבועי x^2+x-1 ששורשיו הם:

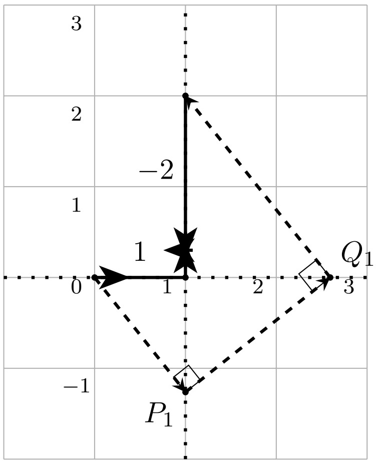
$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx 0.62,\ -1.62\,.$$

לכן קיימים שני מסלולים נוספים: אחד שמתחיל בזווית -31.8° כי $-\tan^{-1} 0.62 =$ -31.8°, ואחד שמתחיל בזווית 58.3° כי $-\tan^{-1} 1.62 = 58.3^\circ$.

באופן דומה, לפולינום בסעיף **??** שני שורשים $2 \pm \sqrt{3} \approx 3.73, 0.27$. הזוויות הן -75° ו־-15°, כי $-\tan(-75^\circ) \approx 3.73$ ו־$-\tan(-15^\circ) \approx 0.27$.

11.6 השורש ממעלה שלוש של שניים

כדי להכפיל קוביה עלינו למצוא $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$, שורש של הפולינום ממעלה שלוש $x^3 - 2$:



בבנייה של המסלול הראשון, אנו פונים פעמיים שמאלה בלי לבנות קטעי קו, כי המקדמים a_2 ו־a_1 שניהם אפס. אז פונים שוב שמאלה (לכיוון למטה) ובונים קו לאחור כי $a_0 = -2$ שלילי. הקטע הראשון של המסלול השני נבנה בזווית של -51.6° ו־$-\tan(-51.6^\circ) \approx 1.26 \approx \sqrt[3]{2}$.

11.7 ההוכחה של השיטה של Lill

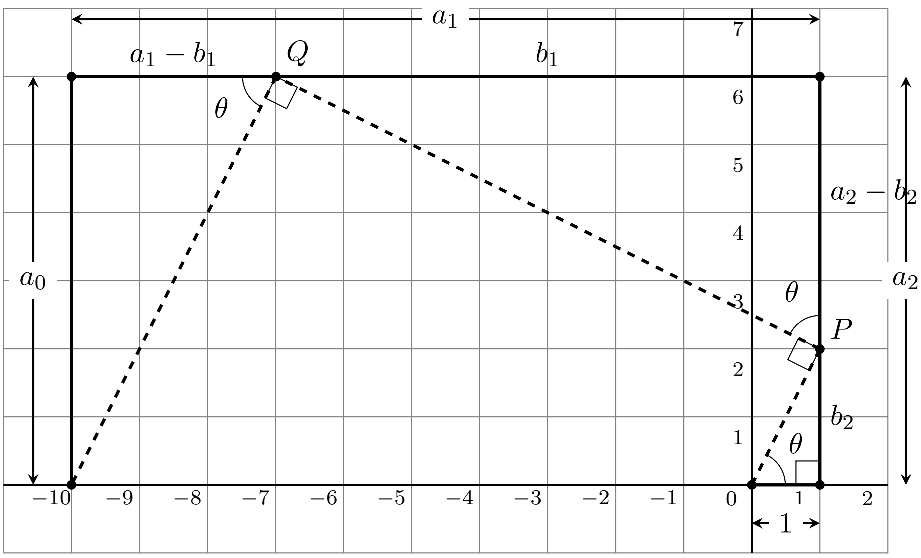
נגביל את הדיון לפולינומים שהמקדם הראשי שלהם הוא אחד (איור **??**):[1]

$$p(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\,.$$

סכום הזוויות של משולש הוא 180°, ולכן אם זווית חדה אחת של משולש ישר־זווית היא θ, השנייה היא $90^\circ - \theta$. מכאן שהזווית מעל ל־P והזווית משמאל ל־Q שוות ל־θ. כעת נרשום סדרת משוואות עבור $\tan\theta$:

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{b_2}{1} = b_2 \\
\tan\theta &= \frac{b_1}{a_2 - b_2} = \frac{b_1}{a_2 - \tan\theta} \\
b_1 &= \tan\theta(a_2 - \tan\theta)
\end{aligned}$$

[1] אחרת, אפשר לחלק ב־a_3 ולפולינום המתקבל אותם שורשים.



איור 11.4: הוכחה של השיטה של Lill

$$\tan\theta = \frac{a_0}{a_1 - b_1} = \frac{a_0}{a_1 - \tan\theta(a_2 - \tan\theta)}\,.$$

נפשט את המשוואה האחרונה ונקבל:

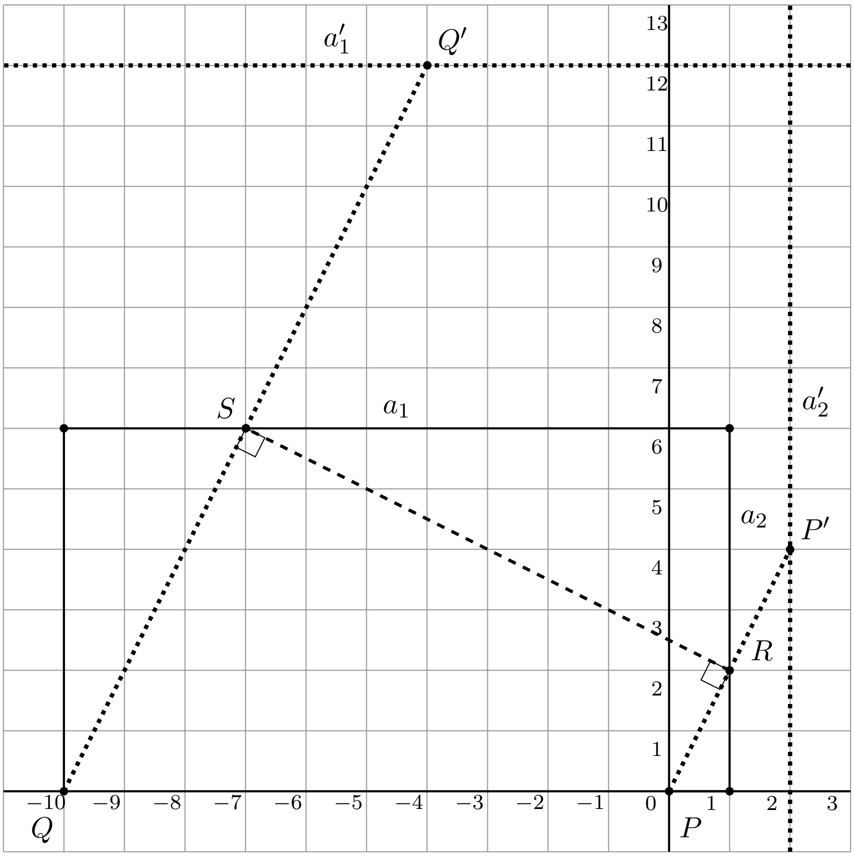
$$\begin{aligned}
(\tan\theta)^3 - a_2(\tan\theta)^2 + a_1(\tan\theta) - a_0 &= 0 \\
-(\tan\theta)^3 + a_2(\tan\theta)^2 - a_1(\tan\theta) + a_0 &= 0 \\
(-\tan\theta)^3 + a_2(-\tan\theta)^2 + a_1(-\tan\theta) + a_0 &= 0\,.
\end{aligned}$$

נסיק ש־$-\tan\theta$ הוא שורש ממשי של $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

11.8 הקיפול של Beloch

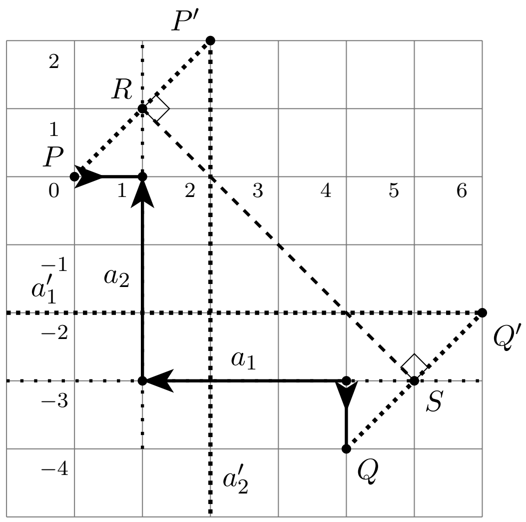
Margharita P. Beloch גילתה קשר מרתק בין אוריגמי והשיטה של Lill למציאת שורשים של פולינומים ממעלה שלוש. היא מצאה שהפעלה אחת בלבד של אקסיומה 6 מאפשרת מציאת שורש ממשי של כל פולינום ממעלה שלוש. לכבודה, לעתים מכנים את הפעולה של האקסיומה "הקיפול של Beloch".

נדגים את השיטה על הפולינום $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ מסעיף **??**. הקיפול $\overline{RS}$ יהיה אנך אמצעי גם ל־$\overline{QQ'}$ וגם ל־$\overline{PP'}$ (איור **??**), כאשר P', Q' הם השיקופים של P, Q. לפי השיטה של Lill, הנקודה R תהיה על הקו a_2 והנקודה S תהיה על הקו a_1. נבנה קו a_2' מקביל ל־a_2 ובאותו מרחק מ־a_2 כמו המרחק של a_2 מ־P, ונבנה את הקו a_1' מקביל ל־a_1 ובאותו מרחק מ־a_1 כמו המרחק של a_1 מ־Q. נפעיל את אקסיומה 6 כדי להניח בו־זמנית את P ב־P' על a_2' ואת Q ב־Q' על a_1'. הקיפול $\overline{RS}$ הוא האנך האמצעי של הקווים $\overline{PP'}$ ו־$\overline{QQ'}$, ולכן הזוויות ב־R וב־S הן ישרות כפי שמתחייב.



איור **11.5**: הקיפול של Beloch עבור $x^3+6x^2+11x+6$

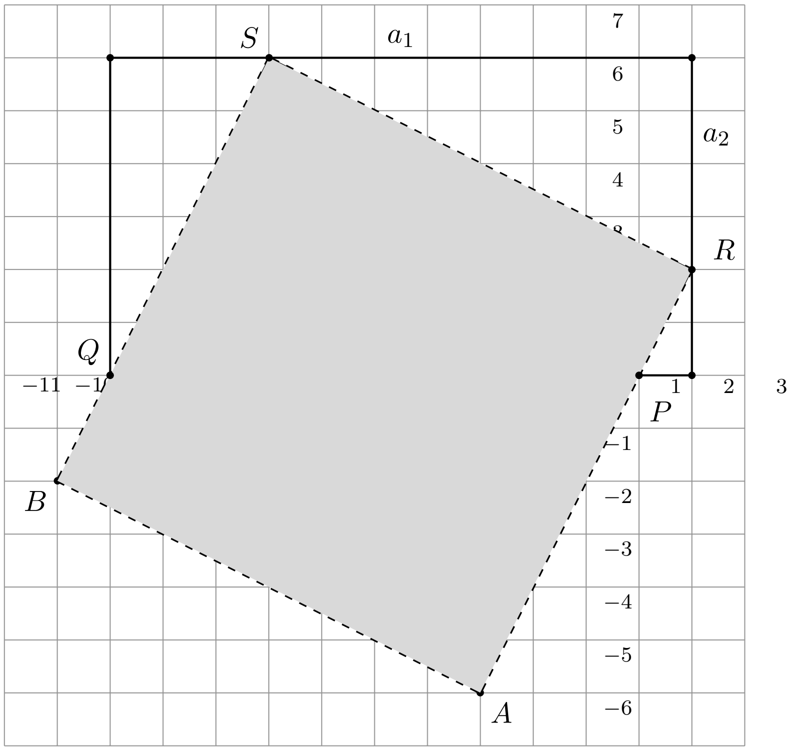
ננסה את הקיפול של Beloch על הפולינום x^3-3x^2-3x+1 מסעיף **??**.



a_2 הוא קטע מהקו האנכי $x=1$, והקו המקביל לו הוא a'_2 הקו $x=2$. a_1 הוא קטע מהקו האופקי $y=-3$, והקו המקביל לו הוא a'_1 הקו $y=-2$. RS הוא האנך האמצעי גם של $\overline{PP'}$ וגם של $\overline{QQ'}$. המסלול $\overline{PRSQ}$ זהה למסלול בסעיף **??**.

11.9 הריבוע של Beloch

ניתן להציג את הבנייה בסעיף הקודם לפי הריבוע של Beloch:



נתונות שתי נקודות P, Q ושני קווים a_2, a_1, בנו ריבוע $\overline{ARSB}$ כך ש:

- צלע אחד הוא $\overline{RS}$ כאשר R נמצאת על a_2 ו־S נמצאת על a_1;
- P נמצאת על $\overline{RA}$ ו־Q נמצאת על $\overline{SB}$.

האיור מדגים את הריבוע של Beloch עבור $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. האורך של RS הוא $\sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8.94$.

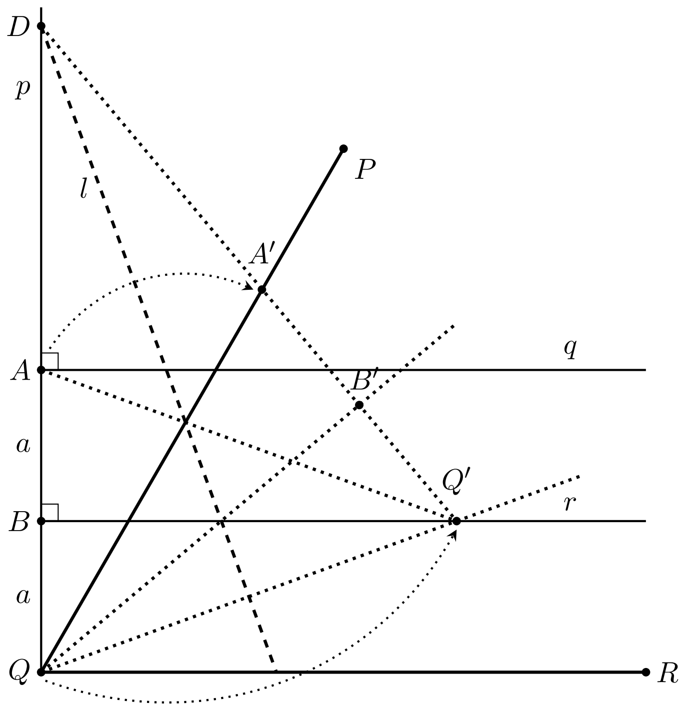
מקורות

פרק זה מבוסס על [?, ?, ?].

פרק 12 בניות גיאומטריות באוריגמי

12.1 הבניה של Abe לחלוקת זווית לשלושה חלקים

נתונה זווית חדה $\angle PQR$, בנו את הקו p ניצב ל־$\overline{QR}$ ב־Q והקו q ניצב ל־p ב־A כך שהוא חותך את $\overline{PQ}$. בנו את הקו r, האנך האמצעי של $\overline{AQ}$ שחותך אותו בנקודה B. לפי אקסיומה 6 בנו קיפול l המניח את A על $\overline{PQ}$ בנקודה A' ומניח את Q על r בנקודה Q'. סמנו ב־B' את השיקוף של B מסביב ל־l. בנו את הקווים $\overline{QB'}$ ו־$\overline{QQ'}$.



טיעון: $\angle PQB' = \angle B'QQ' = \angle Q'QR = \frac{1}{3}\angle PQR$.

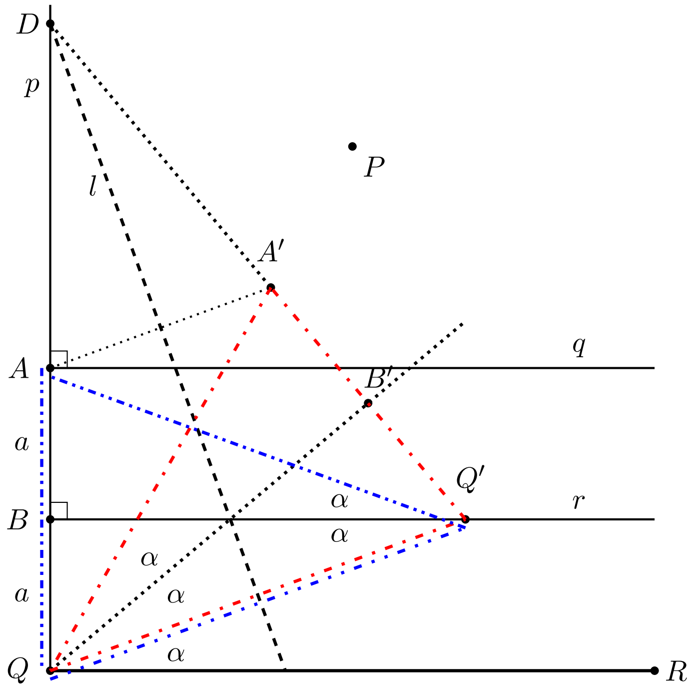
הוכחה ראשונה

הנקודות A', B', Q' הן שיקופים סביב אותו קו l של הנקודות A, B, Q הנמצאות על קו אחד $\overline{DQ}$, ולכן גם הן נמצאות על קטע קו אחד $\overline{DQ'}$. לפי הבניה, $\overline{AB} = \overline{BQ}$, $\angle ABQ' = \angle QBQ' = 90^\circ$, $\overline{BQ'}$ הוא צלע משותף, ולכן $\triangle ABQ' \cong \triangle QBQ'$ לפי צלע־זווית־צלע. מכאן ש־$\angle AQ'B = \angle QQ'B = \alpha$ כי $\overline{Q'B}$ הוא האנך האמצעי של המשולש שווי־שוקיים $\triangle AQ'Q$ (איור **??**).

$\triangle A'QQ'$ הוא השיקוף של $\triangle AQ'Q$ ולכן $\triangle A'QQ' \cong \triangle AQ'Q$. מכאן שגם $\triangle A'QQ'$ הוא משולש שווה־שוקיים. $\overline{QB'}$ הוא השיקוף של $\overline{Q'B}$ כך ש־$\angle A'QB' = \angle Q'QB' = \alpha$.

לפי זוויות מתחלפות $\angle Q'QR = \angle QQ'B = \alpha$. ביחד:

$$\angle A'QB' = \angle Q'QB' = \angle Q'QR = \alpha\,.$$

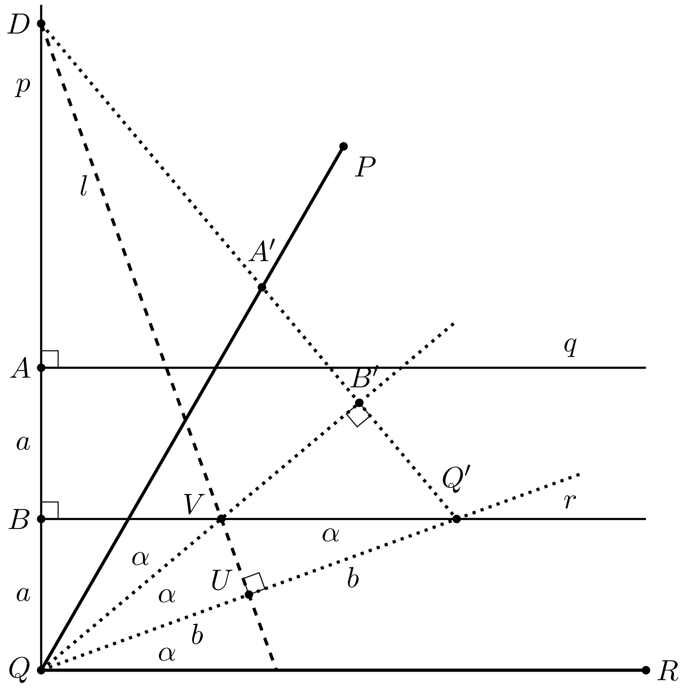


איור 12.1: הוכחה ראשונה

הוכחה שנייה

ראו איור **??**. הקו l הוא קיפול ולכן הוא האנך האמצעי של $\overline{QQ'}$. סמנו ב־U את נקודת החיתוך של l עם $\overline{QQ'}$, וסמנו ב־V את נקודת החיתוך שלו עם $\overline{QB'}$. $\triangle VUQ \cong \triangle VUQ'$ לפי צלע־זווית־צלע כי $\overline{VU}$ הוא צלע משותף, הזוויות ב־U הן זוויות ישרות, ו־$\overline{QU} = \overline{Q'U} = b$. מכאן ש־$\angle VQU = \angle VQ'U = \alpha$ ו־$\angle Q'QR = \angle VQ'U = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות.

כמו בהוכחה הראשונה, A', B', Q' הן כולן שיקופים סביב l, לכן הן כולן נמצאות על קטע קו אחד $\overline{DQ'}$, ו־$\overline{A'B'} = \overline{AB} = \overline{BQ} = \overline{B'Q'} = a$. מכאן ש־$\triangle A'B'Q \cong \triangle Q'B'Q$ ו־$\angle A'QB' = \angle Q'QB' = \alpha$.



איור 12.2: הוכחה שנייה

12.2 הבניה של Martin לחלוקת זווית לשלושה חלקים

ראו איור **??**. נתונה זווית חדה $\angle PQR$ תהי M נקודת האמצע של $\overline{PQ}$. בנו p ניצב ל־$\overline{QR}$ העובר דרך M ובנו q ניצב ל־p העובר דרך M. q מקביל ל־$\overline{QR}$. לפי אקסיומה 6 בנו קיפול l המניח את P ב־P' על p, ומניח את Q ב־Q' על q. ייתכן שקיים מספר קיפולים מתאימים; בחרו את הקיפול החותך את $\overline{PM}$. בנו את קטעי הקו $\overline{PP'}$ ו־$\overline{QQ'}$. סמנו ב־U את נקודת החיתוך של $\overline{QQ'}$ עם p, וסמנו ב־V את נקודת החיתוך שלו עם l. סמנו ב־W את החיתוכים של $\overline{PQ}$ ו־$\overline{P'Q'}$ עם l.[1]

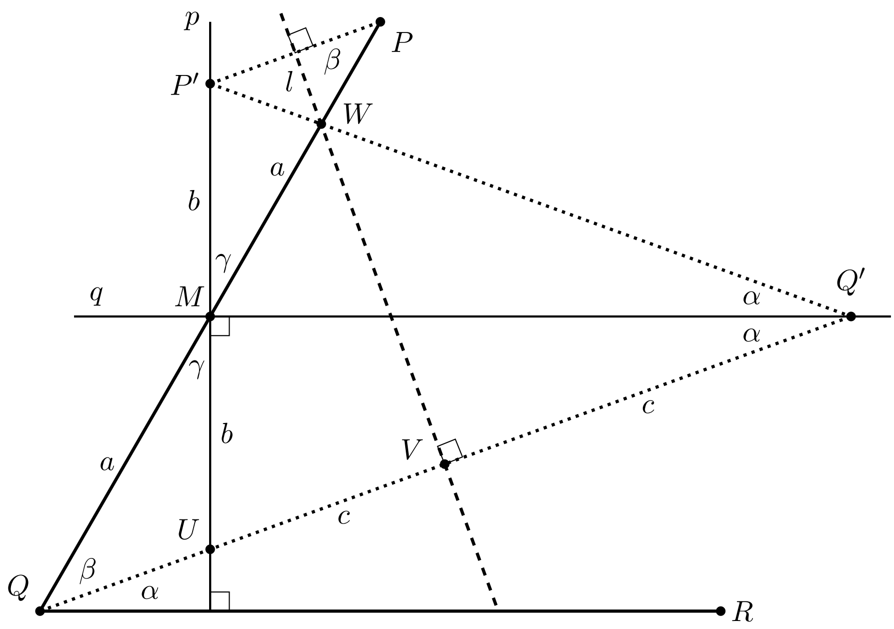
$\triangle QMU \cong \triangle PMP'$ לפי זווית־צלע־זווית: $\angle P'PM = \angle UQM = \beta$ לפי זוויות מתחלפות, $\overline{QM} = \overline{MP} = a$ כי M היא נקודת האמצע של $\overline{PQ}$, $\angle QMU = \angle PMP'$ הן זוויות קודקודיות. מכאן ש־$\overline{P'M} = \overline{MU} = b$.

$\triangle P'MQ' \cong \triangle UMQ'$ לפי צלע־זווית־צלע: הראנו ש־$\overline{P'M} = \overline{MU} = b$, הזוויות ב־$M$ הן זוויות ישרות, $\overline{MQ'}$ הוא צלע משותף. הגובה של המשולש שווה־שוקיים $\triangle P'Q'U$ הוא חוצה הזווית $\angle P'Q'U$ ולכן $\angle P'Q'M = \angle UQ'M = \alpha$.

$\triangle QWV \cong \triangle Q'WV$ לפי צלע־זווית־צלע: $\overline{QV} = \overline{VQ'} = c$ והזוויות ב־V ישרות כי הקיפול הוא האנך אמצעי של $\overline{QQ'}$, $\overline{VW}$ הוא צלע משותף. מכאן ש:

$$\begin{aligned} \angle WQV &= \beta = \angle WQ'V = 2\alpha \\ \angle PQR &= \beta + \alpha = 3\alpha\,, \end{aligned}$$

[1] לא ברור מאליו ש־$\overline{PQ}$ ו־$\overline{P'Q'}$ חותכים את l באותה נקודה. $\triangle PP'W \sim \triangle QQ'W$ כך שהגבהים מחלקים את הזוויות $\angle PWP', \angle QWQ'$ בצורה דומה וחייבים להיות על אותו קו.



איור 12.3: בניה של Martin

12.3 הבניה של Messer להכפלת קוביה

לקוביה בנפח V צלעות באורך $\sqrt[3]{V}$. נפח קוביה שנפחה פי שניים הוא $2V$, כך שיש לבנות קטע קו שאורכו $\sqrt[3]{2V} = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{V}$. אם נוכל לבנות קטע קו באורך $\sqrt[3]{2}$, נוכל להכפיל באורך הנתון $\sqrt[3]{V}$ כדי להכפיל את נפח הקוביה.

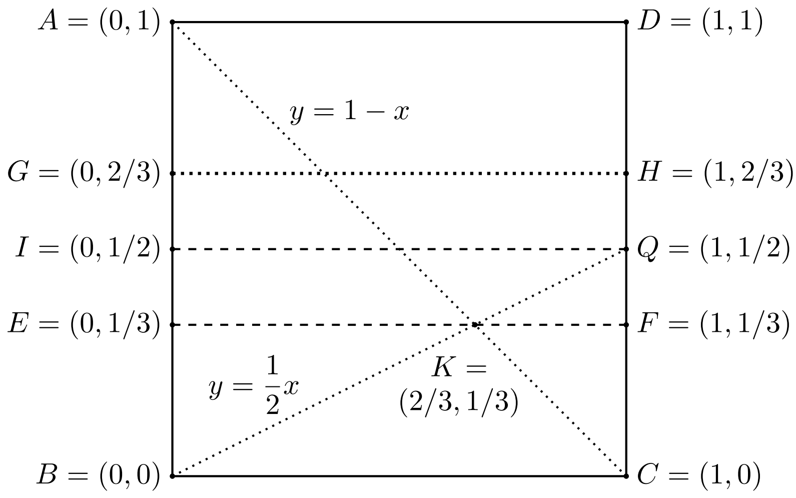
קחו דף נייר שהוא ריבוע וקפלו לחצי כדי למצוא את הנקודת $I = (0, 1/2)$, $Q = (1, 1/2)$ (איור **??**). בנו את קטעי הקו $\overline{AC}$ ו־$\overline{BQ}$. אפשר לחשב את הקואורדינטות של נקודה החיתוך $K = (2/3, 1/3)$ על ידי פתרון המשוואות של הקטעים הללו:

$$\begin{aligned} y &= 1 - x \\ y &= \frac{1}{2}x\,. \end{aligned}$$

בנו את הקו $\overline{EF}$ ניצב ל־$\overline{AB}$ כך שהוא עובר דרך K, ובנו את $\overline{GH}$, השיקוף של $\overline{BC}$ סביב $\overline{EF}$. נסמן צלע של הריבוע $a + 1$ ונוכיח ש־$a = \sqrt[3]{2}$ (איור **??**)

נשמתש באקסיומה 6 כדי להניח את C ב־C' על $\overline{AB}$, ולהניח את F ב־F' על $\overline{GH}$. סמנו את נקודת החיתוך של הקיפול עם $\overline{BC}$ ב־Q, וסמנו את אורכו של $\overline{BQ}$ ב־b. האורך של קטע הקו $\overline{QC}$ הוא $(a + 1) - b$.

לאחר ביצוע הקיפול, קטע הקו $\overline{QC'}$ הוא שיקוף של קטע הקו $\overline{QC}$ מאותו אורך, וקטע הקו $\overline{C'F'}$ הוא שיקוף של קטע הקו $\overline{CF}$ באותו אורך. מסימוני האורכים על $\overline{AB}$ אפשר

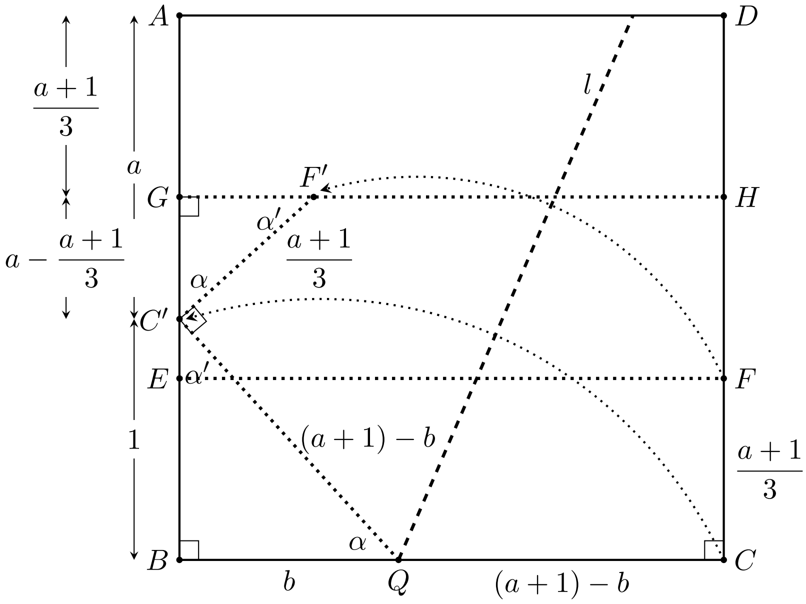


איור 12.4: בניית קטע קו באורך $1/3$

לראות שאורכו של $\overline{GC'}$ הוא:

$$a-\frac{a+1}{3}=\frac{2a-1}{3}\,. \tag{12.1}$$

לבסוף, $\angle FCQ$ היא זווית ישרה, לכן גם השיקוף $\angle F'C'Q$ הוא זווית ישרה.



איור 12.5: הכלפת קוביה

$\triangle C'BQ$ הוא משולש ישר־זווית ולפי משפט פיתגורס:

$$\begin{aligned} 1^2+b^2 &= ((a+1)-b)^2 \\ b &= \frac{a^2+2a}{2(a+1)}\,. \end{aligned}$$

$\angle GC'F' + \angle F'C'Q + \angle QC'B = 180^\circ$ כי הם מרכיבים את הקו $\overline{GB}$. נסמן $\alpha = \angle GC'F'$:

$$\angle QC'B = 180^\circ - \angle F'C'Q - \angle GC'F' = 90^\circ - \alpha\,.$$

נסמן $\alpha' = 90^\circ - \alpha$. $\triangle C'BQ$, $\triangle F'GC'$ הם משולשים ישר־זווית, ולכן $\angle C'QB = \alpha$ ו־$\angle C'F'G = \alpha'$. מכאן שהמשולשים דומים וממשוואה **??** מתקבלת:

$$\frac{b}{(a+1)-b} = \frac{\frac{2a-1}{3}}{\frac{a+1}{3}}\,.$$

נציב עבור b:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{a^2+2a}{2(a+1)}}{(a+1)-\frac{a^2+2a}{2(a+1)}} &= \frac{2a-1}{a+1}\\
\frac{a^2+2a}{a^2+2a+2} &= \frac{2a-1}{a+1}\,.
\end{aligned}$$

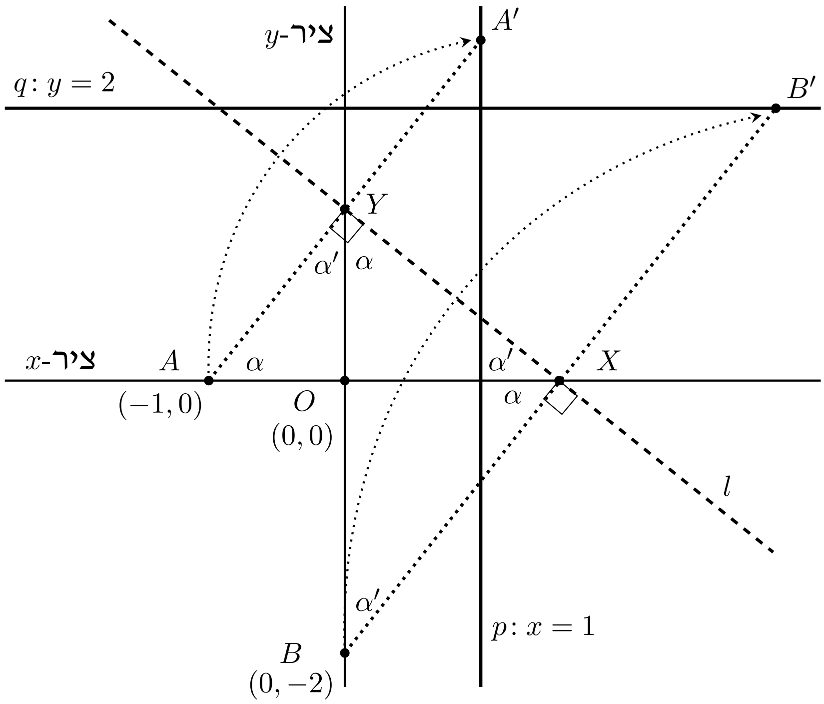
נפשט ונקבל $a^3 = 2$ ו־$a = \sqrt[3]{2}$.

12.4 הבניה של Beloch להכפלת קוביה

הבניה מוצגת באיור **??**. נסמן את הנקודה $(-1,0)$ ב־A ואת הנקודה $(0,-2)$ ב־B. נסמן ב־p את הקו $x = 1$ וב־q את הקו $y = 2$. לפי אקסיומה 6 ניתן לבנות קיפול l המניח את A ב־A' על p, והמניח את B ב־B' על q. נסמן ב־Y את נקודת החיתוך של הקיפול עם ציר ה־y, ונסמן ב־X את נקודת החיתוך של הקיפול עם ציר ה־x.

הקיפול הוא האנך האמצעי של $\overline{AA'}$ ו־$\overline{BB'}$, ולכן $\overline{AA'}\|\overline{BB'}$. לפי זוויות מתחלפות $\angle XAY = \angle AXB = \alpha$. לפי משולשים ישר־זווית, מתקבלים סימוני הזוויות האחרות, ו־$\triangle AOY \sim \triangle YOX \sim \triangle XOB$. ידוע אורכם של קטעי הקו $\overline{OA} = 1$, $\overline{OB} = 2$, ולכן:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{OY}}{\overline{OA}} &= \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OX}}\\
\frac{\overline{OY}}{1} &= \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{2}{\overline{OX}}\\
\overline{OY}^2 &= \overline{OX}\\
\overline{OY}\,\overline{OX} &= 2\\
\overline{OY}^3 &= 2\\
\overline{OY} &= \sqrt[3]{2}\,.
\end{aligned}$$



איור 12.6: הכפלת קוביה לפי Beloch

12.5 בניית מתושע

ניתן לבנות באמצעות סרגל ומחוגה מצולע משוכלל שמספר צלעותיו הוא:

$$n = 2^k \cdot F_1 \cdot \cdots \cdot F_m\,,$$

כאשר ה־F_i (אם הם קיימים) הם מספרי Fermat ראשוניים שונים $F_m = 2^{2^m}+1$. חמישה מספרי Fermat ראשוניים ידועים: $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$.[2] לכן לא ניתן לבנות **מתושע**, מצולע משוכלל עם תשע צלעות.

באמצעות קיפולי אוריגמי ניתן לבנות מצולעים משוכללים עם:

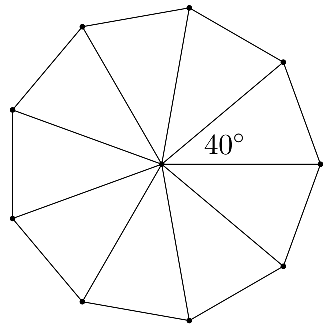
$$n = 2^i \cdot 3^j \cdot p_1 \cdot \cdots \cdot p_m,$$

צלעות כאשר ה־p_i (אם הם קיימים) הם מספרים ראשוניים שונים מהצורה $2^k \cdot 3^l + 1$. כאן נבנה מתושע תוך שימוש בשיטה של Lill והקיפול של Beloch.

12.5.1 המשוואה ממעלה שלוש עבור מתושע

ניתן לבנות מצולע משוכלל עם n צלעות על ידי בניית הזווית המרכזית $360°/n$. עבור מתושע הזווית המרכזית היא $360°/9 = 40°$:

[2]בגיל 19 Gauss בנה מצולע משוכלל עם 17 צלעות (ראו פרק **??**), והישג זה שיכנע אותו להיות מתמטיקאי. מצולע משוכלל עם 257 צלעות נבנה על ידי Magnus Georg Paucker ב־1822 ועל ידי Friedrich Julius Richelot ב־1832. Johann Gustav Hermes טען בשנת 1894 שהוא בנה מצולע משוכלל עם 65537 צלעות. כתב היד שלו שמור באוניברסיטת Göttingen.



הזווית 40° היא שליש מ־120° שניתנת לבניה על ידי הצמדת זווית של 30° לזווית של 90°, שתיהן זוויות שקל לבנות אותן. ראינו שניתן לחלק זווית לשלושה חלקים שווים באוריגמי, ולכן ניתן לבנות 40° באוריגמי. כאן נביא בניה המבוססת על מציאת שורש של פולינום ממעלה שלוש.

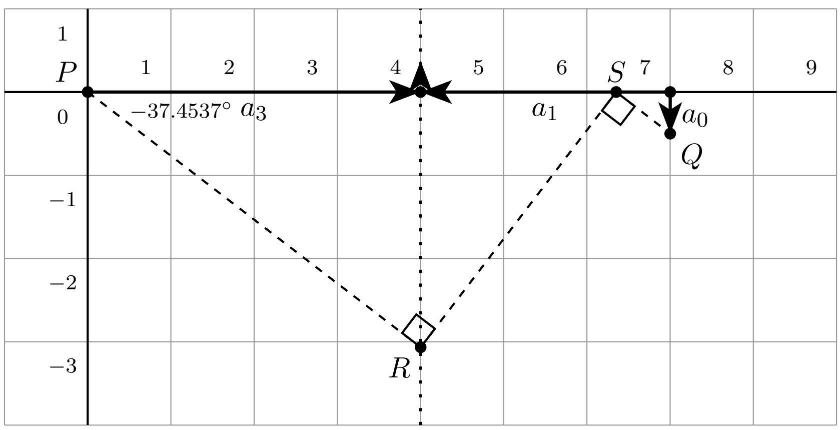
על ידי שימוש בזהויות טריגונומטריות נקבל משוואה המקשרת את הקוסינוס של זווית לקוסינוס של שליש מהזווית:

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos(2\theta+\theta)\\
&= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta\\
&= (\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta\\
&= \cos\theta(\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)) - (2(1-\cos^2\theta))\\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\,.
\end{aligned}$$

אם נתון $a=\cos 3\theta$ ונצליח לפתור את המשוואה ממעלה שלוש $4x^3-3x-a=0$, נקבל בניה של קטע קו באורך הקוסינוס של הזווית המרכזית של המצולע. בהמשך נראה איך ניתן לבנות את המצולע עצמו.

עבור מתושע המשוואה היא $4x^3-3x+\frac{1}{2}=0$ כי $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

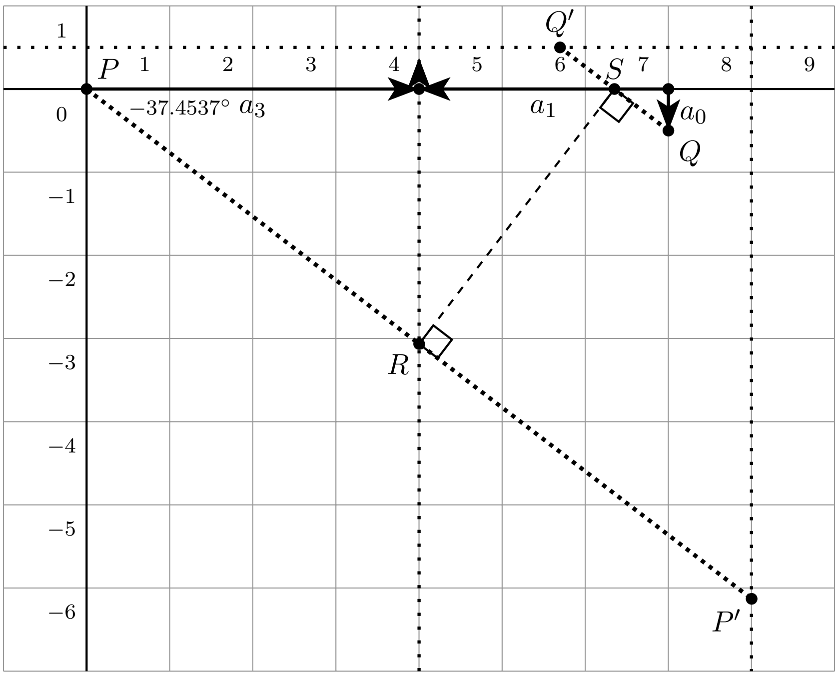
נבנה מסלולים עבור המשוואה לפי השיטה של Lill:



המסלול השני מתחיל מ־P בזווית -37.4537°, ולכן $x = -\tan(-37.4537)^\circ = 0.766044$ הוא שורש של $4x^3 - 3x + \frac{1}{2}$.

12.5.2 פתרון המשוואה על ידי הקיפול של Beloch

ניתן למצוא את השורש באמצעות הקיפול של Beloch (איור **??**). נמתח קו מקביל ל־a_2[3] באותו מרחק 4 מ־a_2 כמו המרחק מ־a_2 ל־P. באופן דומה, נמתח קו מקביל ל־a_1 באותו מרחק $\frac{1}{2}$ מ־a_1 כמו המרחק מ־a_1 ל־Q. $\overline{RS}$, הקיפול של Beloch, מניח בו־זמנית את P ב־P' על הקו המקביל ל־a_2, ואת Q ב־Q' על הקו המקביל ל־a_1. הקיפול בונה את הזווית $\angle SPR = -37.4537^\circ$.



איור 12.7: בנית מתושע באמצעות הקיפול של Beloch

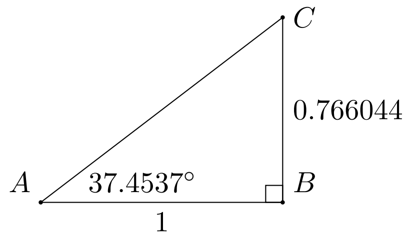
12.5.3 בניית הזווית המרכזית של המתושע

$\cos\theta = 0.766044$ הוא שורש של המשוואה. כדי לבנות את הזווית המרכזית אנו צריכים לבנות את $\cos^{-1} 0.766044 = 40^\circ$. נבנה קטע קו באורך 1 וקטע קו הניצב לו באורך 0.766044. מהשלמת הבניה למשולש ישר־זווית מתקבלת הזווית 37.4537°, כי:

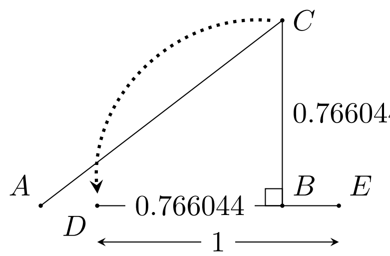
$$\tan 37.4537^\circ = \frac{0.766044}{1} .$$

---

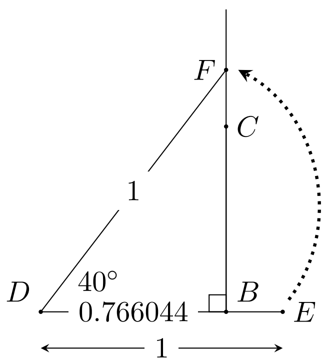
[3] בגלל ש־$a_2 = 0$ הקו נמתח מקביל לקו שהיינו מציירים אם a_2 היה שונה מאפס.



נקפל את הצלע $\overline{CB}$ מעל $\overline{AB}$ ונסמן את המקום עליו מונח הנקודה C ב־D. נעתיק את קטע הקו $\overline{AB}$ ימינה (ללא סיבוב) כך שהנקודה A מונחת על D, ונסמן את המקום עליו מונחת הנקודה B ב־E:



נקפל את $\overline{DE}$ מעל להמשך של $\overline{CB}$ כך שהנקודה E מונחת על הקו בנקודה F:



נקבל:

$$\angle BDF = \cos^{-1} \frac{0.766044}{1} = 40^\circ \, .$$

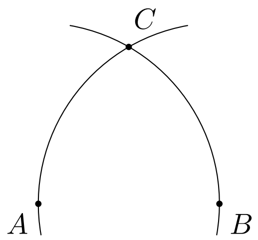
מקודות

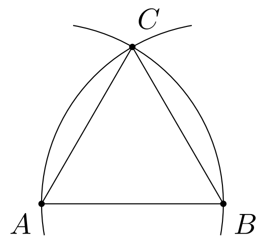
פרק זה מבוסס על [?, ?, ?, ?].

פרק 13 אפשר להסתפק במחוגה ללא סרגל

בשנת 1797 Lorenzo Mascheroni הוכיח שכל בניה גיאומטרית באמצעות סרגל ומחוגה ניתנת לבניה עם מחוגה בלבד. במאה העשרים התגלה שהמשפט הוכח בשנת 1672 על ידי Georg Mohr. המשפט נקרא היום משפט Mohr-Mascheroni.

מה המשמעות של בניה גיאומטרית באמצעות מחוגה בלבד ללא סרגל? האיור הימני שלהלן מראה את הבניה הרגילה של משולש שווה צלעות עם סרגל ומחוגה. איך אפשר לבנות משולש ללא קטעי הקווים $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$? למעשה, אין כל צורך **לראות** את הקווים. קו מוגדר על ידי שתי נקודות, ומספיק שבנו את הנקודות A, B, C כדי לקבל בניה שקולה לבניה עם סרגל (איור שמאלי).





באיורים נצייר בכל זאת קווים, אולם הקווים משמשים אך ורק להבנת הבניה ולהוכחת נכונותה. חשוב להשתכנע שהבניה עצמה משתמשת רק במחוגה.

כל צעד בבניה באמצעות סרגל ומחוגה הוא אחת משלושת הפעולות הבאות:

- מציאת נקודת החיתוך של שני קווים.
- מציאת נקודות החיתוך בין קו ומעגל.
- מציאת נקודות החיתוך בין שני מעגלים.

ברור שניתן לבצע את הפעולה השלישית רק עם מחוגה. עלינו להראות שעבור שתי הפעולות הראשונות ניתן למצוא בניה שקולה שמשתמשת רק במחוגה.

נשתמש בסימונים:

- $C(O, A)$: המעגל שמרכזו O העובר דרך הנקודה A.
- $C(O, r)$: המעגל שמרכזו O עם רדיוס r.
- $C(O, \overline{AB})$: המעגל שמרכזו O עם רדיוס שהוא אורך קטע הקו $\overline{AB}$.

תחילה נביא בניות עזר נחוצות (סעיף **??**), ואחר כך נראה את הבניות למציאת נקודות החיתוך של שני קווים (סעיף **??**) ושל קו ומעגל (סעיף **??**).

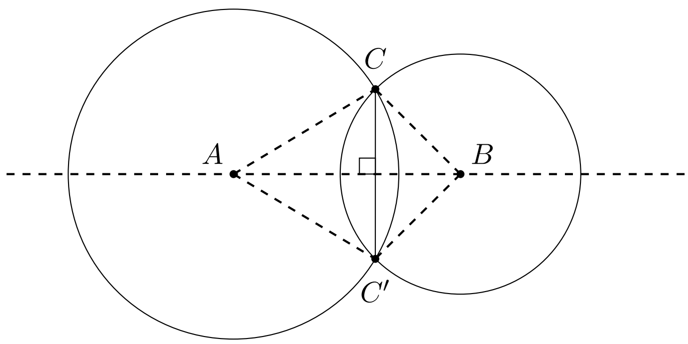
13.1 בניות עזר

13.1.1 בניית שיקוף

הגדרה 13.1
הנקודה C' היא **שיקוף** של הנקודה C מסביב לקטע הקו $\overline{AB}$, אם $\overline{AB}$ (או הקו המכיל אותו) הוא האנך האמצעי של $\overline{CC'}$.

משפט 13.1
נתון קטע קו $\overline{AB}$ ונקודה C שלא נמצאת על $\overline{AB}$. ניתן לבנות נקודה C' שהיא השיקוף של C מסביב ל־$\overline{AB}$.

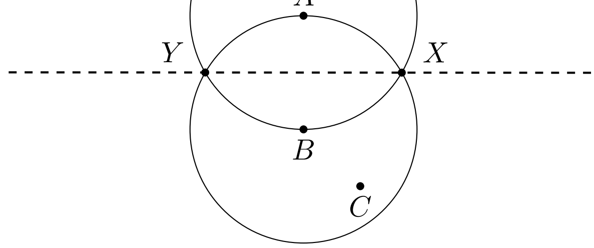
הוכחה: בנו מעגל שמרכזו A העובר דרך C ומעגל שמרכזו B העובר דרך C. נקודות החיתוך של שני המעגלים הן הנקודה C והנקודה C' שהיא השיקוף של C.



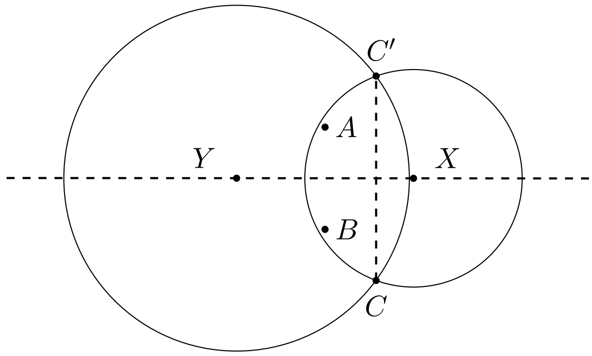
$\triangle ABC \cong \triangle ABC'$ חופפים לפי צלע־צלע־צלע: $\overline{AC}, \overline{AC'}$ הם רדיוסים של אותו מעגל כמו גם $\overline{BC}, \overline{BC'}$, ו־$\overline{AB}$ הוא צלע משותף. מכאן ש־$\angle CAB = \angle C'AB$, ולכן $\overline{AB}$ הוא חוצה הזווית של $\angle CAC'$. $\triangle CAC'$ שווה־שוקיים, וחוצה הזווית $\overline{AB}$ הוא גם האנך האמצעי של בסיס המשולש $\overline{CC'}$. מכאן ש־C' היא השיקוף של C מסביב ל־$\overline{AB}$. ∎

13.1.2 בניית מעגל עם רדיוס נתון

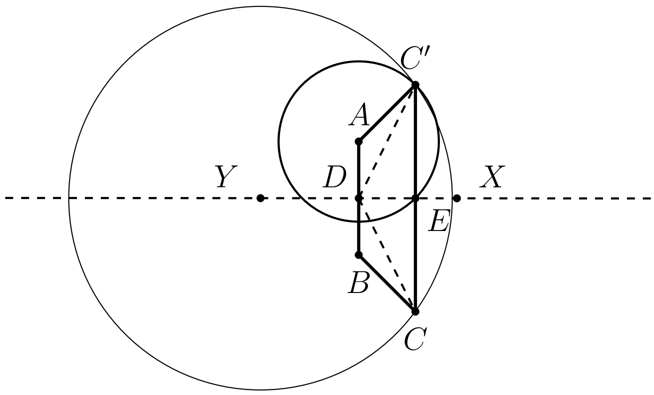
משפט 13.2
נתונות הנקודות A, B, C. ניתן לבנות את המעגל $c(A, \overline{BC})$.
בנו את המעגלים $c(A, B)$, $c(B, A)$ וסמנו את נקודות החיתוך X, Y.



בנו את C', השיקוף של C מסביב לקו $\overline{XY}$ (משפט **??**).



המעגל $c(A, C')$ הוא המעגל המבוקש.

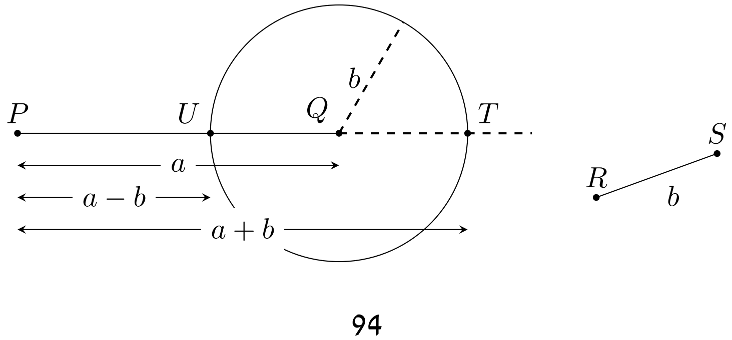


הוכחה: הנקודה A היא השיקוף של B סביב $\overline{XY}$ (כי $\triangle YAX \cong \triangle YBX$), ו־$C'$ היא השיקוף של C סביב $\overline{XY}$. לפי ההגדרה, $\overline{XY}$ הוא האנך האמצעי לקטעי הקו $\overline{AB}, \overline{CC'}$, ולכן $\overline{C'E} = \overline{EC}$, $\overline{AD} = \overline{DB}$, ו־$\angle DEC = \angle DEC' = 90°$. מכאן ש־$\triangle DEC \cong \triangle DEC'$ לפי צלע־זווית־צלע. $\overline{DC} = \overline{DC'}$ ו־$\angle ADC' = \angle BDC$ הן זוויות משלימות ל־$\angle EDC', \angle EDC$. $\triangle ADC' \cong \triangle BDC$ לפי צלע־זווית־צלע, כך ש־$\overline{AC'} = \overline{BC}$. ∎

13.1.3 חיבור וחיסור קטעי קו

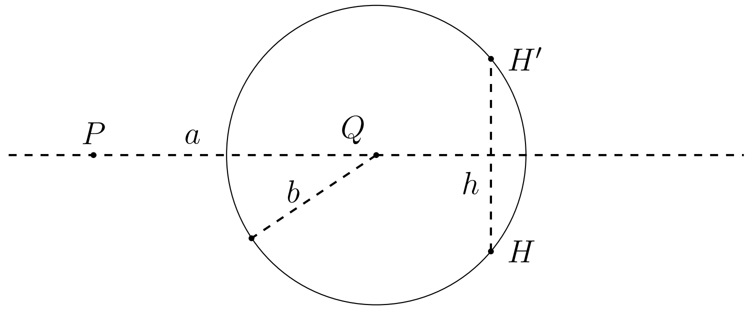
משפט 13.3

נתון קטע קו $\overline{PQ}$ באורך a וקטע קו $\overline{RS}$ באורך b. ניתן לבנות קטע קו $\overline{PUQT}$ כאשר האורך של $\overline{PU}$ הוא $a - b$ והאורך של $\overline{PT}$ הוא $a + b$.

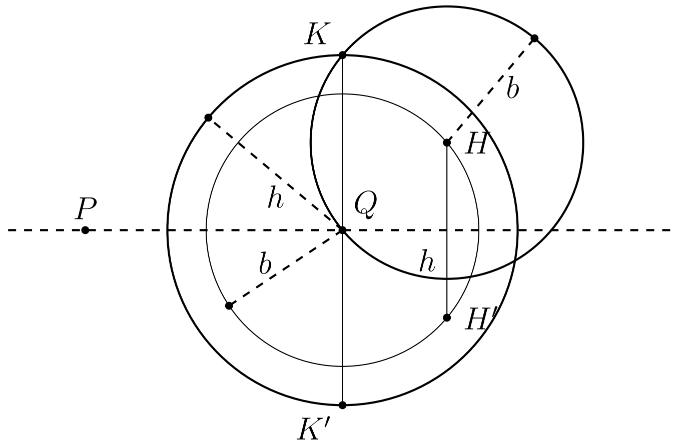


בניית טרפז שווה־שוקיים

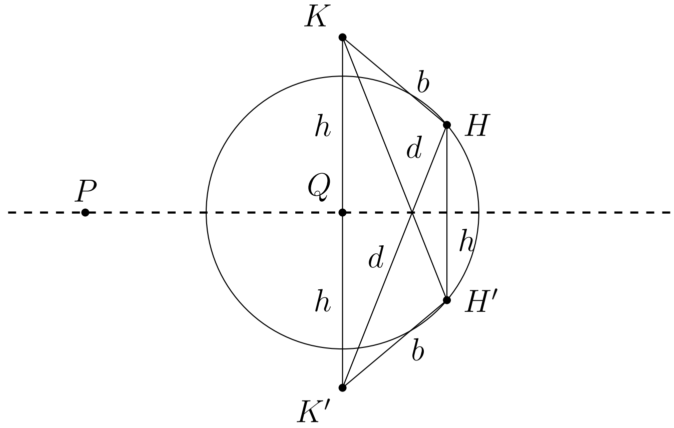
בחרו H, נקודה כלשהי על $c(Q,b)$, ובנו את H', השיקוף שלה סביב $\overline{PQ}$. סמנו ב־h האורך של $\overline{HH'}$.



בנו את המעגלים $c(Q,h)$, $c(H,b)$. K היא נקודת חיתוך בין המעגלים, ו־K' היא השיקוף של K מסביב ל־$\overline{PQ}$.



$\overline{PQ}$ הוא האנך האמצעי של $\overline{HH'}$ ו־$\overline{KK'}$, לכן $\overline{HH'}\|\overline{KK'}$. $\overline{KH}=\overline{K'H'}=b$ כי K נמצאת על $c(H,b)$. K',H' הן שיקופים של K,H, ולכן $KHH'K'$ הוא טרפז שווה־שוקיים עם בסיסים $\overline{KK'}=2h$, $\overline{HH'}=h$. סמנו ב־d את אורך האלכסונים $\overline{K'H}=\overline{KH'}$.

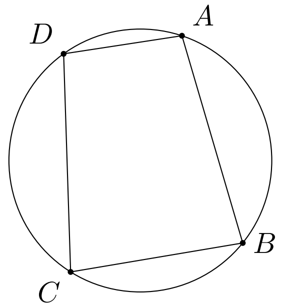


חסימת טרפז במעגל

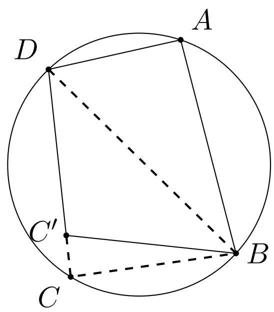
משפט 13.4
הזוויות הנגדיות של מרובע צמודות אם ורק אם ניתן לחסום אותו במעגל.

בספרי גיאומטריה ניתן למצוא הוכחה לכיוון: אם ניתן לחסום מרובע במעגל, הזוויות הנגדיות צמודות. אביא כאן את ההוכחות של שני הכיוונים.

הוכחה של הכיוון: אם ניתן לחסום מרובע במעגל, הזוויות הנגדיות צמודות: נשתמש במשפט: מידתה של זווית היקפית שנשענת על קשת היא מחצית מידתה של הקשת. $\angle DAB$ היא מחצית מהקשת DCB ו־$\angle DCB$ היא מחצית מהקשת DAB. חיבור שתי הקשתות נותן את כל היקף המעגל. מכאן ש־$\angle DAB + \angle DCB = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.
באופן דומה, $\angle ADC + \angle ABC = 180°$. ∎



הוכחה של הכיוון: ניתן לחסום מרובע במעגל אם הזוויות הנגדיות צמודות: ניתן לחסום כל משולש במעגל. בנו מעגל החוסם את $\triangle DAB$ ונניח ש־C' היא נקודה כך ש־$\angle DAB + \angle DC'B = 180°$, אבל C' אינה על היקף מעגל. ללא הגבלת הכללית, נניח ש־C' נמצאת בתוך המעגל:

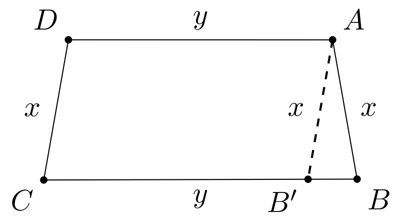


בנו קרן היוצאת מ־$\overline{DC'}$ שחותכת את המעגל ב־C. $ABCD$ חסום על ידי מעגל ולכן:

$$\begin{aligned}\angle DAB + \angle DCB &= 180° \\ \angle DAB + \angle DCB &= \angle DAB + \angle DC'B \\ \angle DCB &= \angle DC'B\,,\end{aligned}$$

מצב שאינו אפשרי אם C נמצאת על המעגל ו־C' נמצאת בתוך המעגל. ∎

משפט 13.5
בטרפז שווה־שוקיים הזוויות הנגדיות צמודות, ולכן ניתן לחסום אותו במעגל.



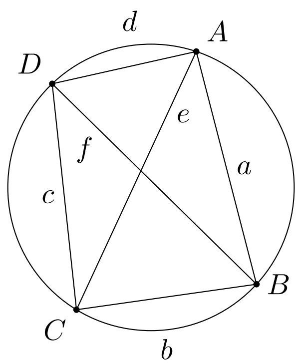
הוכחה: בנו קטע קו $\overline{AB'}$ מקביל ל־$\overline{CD}$. המרובע $AB'CD$ הוא מקבילית והמשולש $\triangle ABB'$ שווה־שוקיים, כך ש־$\angle ABC = \angle ABB' = \angle AB'B = \angle DCB$. באופן דומה, $\angle BAD = \angle CDA$. הסכום של הזוויות הפנימיות של מרובע שווה ל־360°:

$$\begin{aligned}\angle ABC + \angle DCB + \angle BAD + \angle CDA &= 360^\circ\\ 2\angle ABC + 2\angle CDA &= 360^\circ\\ \angle ABC + \angle CDA &= 180^\circ\,,\end{aligned}$$

ובאופן דומה $\angle DCB + \angle BAD = 180^\circ$. ∎

משפט תלמי

משפט 13.6 (Ptolemy)
נתון מרובע חסום על ידי מעגל. סמנו ב־e, f את האלכסונים וב־a, b, c, d את הצלעות, אזי $ef = ac + bd$.



הוכחה: ממשפט הקוסינוסים עבור $\triangle ABC, \triangle ADC, \triangle DAB, \triangle DCB$ מתקבלות המשוואות:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle ABC \tag{13.1}$$
$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\angle ADC \tag{13.2}$$
$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\angle DAB \tag{13.3}$$
$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle DCB\,. \tag{13.4}$$

לפי משפט **??**:

$$\begin{aligned}\angle DCB &= 180^\circ - \angle DAB\\ \angle ADC &= 180^\circ - \angle ABC\\ \cos\angle DCB &= -\cos\angle DAB\\ \cos\angle ADC &= -\cos\angle ABC\,.\end{aligned}$$

נכפיל את המשוואה **??** ב־cd ואת המשוואה **??** ב־ab. כאשר נחבר את שתי המשוואות הקוסינוסים מתאפסים. באופן דומה אפשר לאפס את הקוסינוסים במשוואות **??**, **??**. נפשט ונקבל:

$$\begin{aligned}e^2 &= \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)}\\ f^2 &= \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}\,.\end{aligned}$$

נכפיל את שתי המשוואות ונפשט כדי לקבל את משפט תלמי:

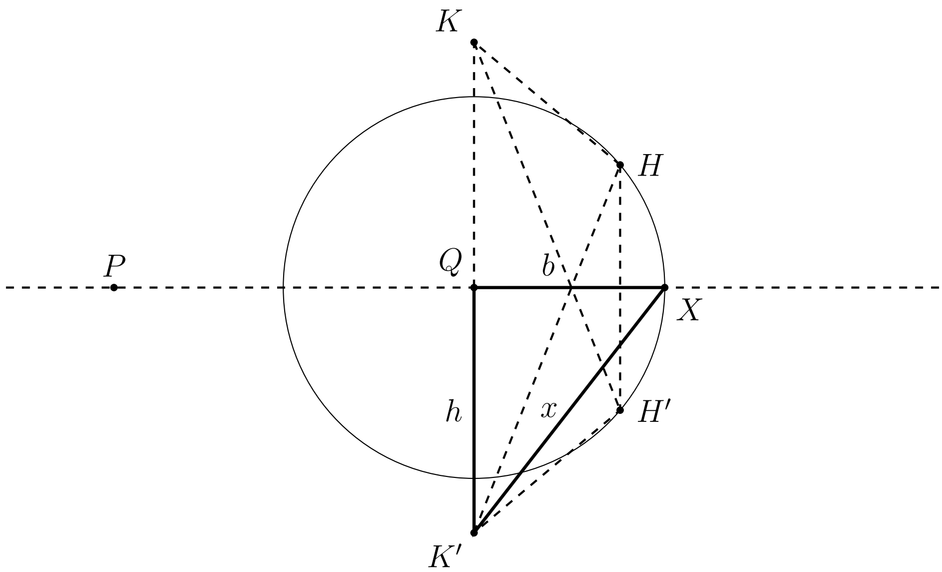
$$\begin{aligned}e^2\cdot f^2 &= (ac+bd)^2\\ ef &= (ac+bd)\,.\end{aligned}$$

■

הפעלת משפט תלמי על הטרפז

עבור הטרפז בעמוד ?? אורך האלכסונים הוא d, אורך השוקיים הוא b, ואורכי הבסיסים הם h ו־$2h$. ממשפט תלמי: $d\cdot d = b\cdot b + h\cdot 2h$ או $d^2 = b^2 + 2h^2$.

תהי X נקודה על הקו $\overline{PQ}$ המאריך את $\overline{PQ}$ ב־b:

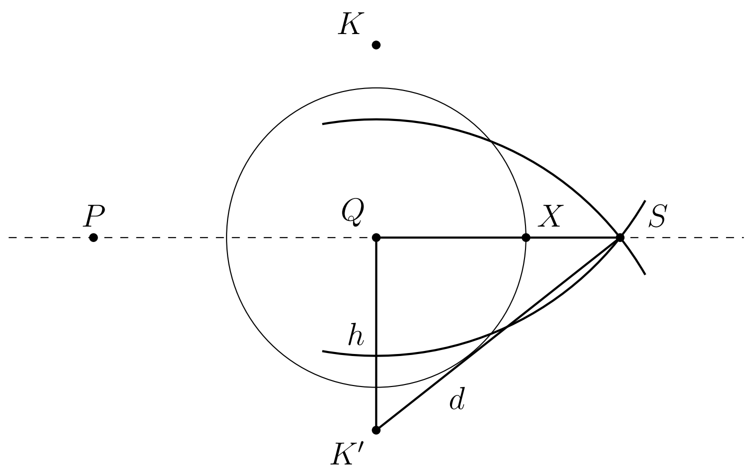


בהמשך נבנה את נקודה X ובינתיים נניח שהיא קיימת. נגדיר $x = \overline{K'X}$. $\triangle QK'X$ הוא משולש ישר־זווית ולפי משפט פיתגורס $x^2 = b^2 + h^2$. לפי המשפט של תלמי:

$$\begin{aligned} d^2 &= b^2 + 2h^2 \\ &= (x^2 - h^2) + 2h^2 \\ &= x^2 + h^2 \,. \end{aligned}$$

אל תחפשו משולשישר־זווית עם הצלעות הללו באיור. אנחנו טוענים שניתן לבנות משולש עם צלעות x, h, d.

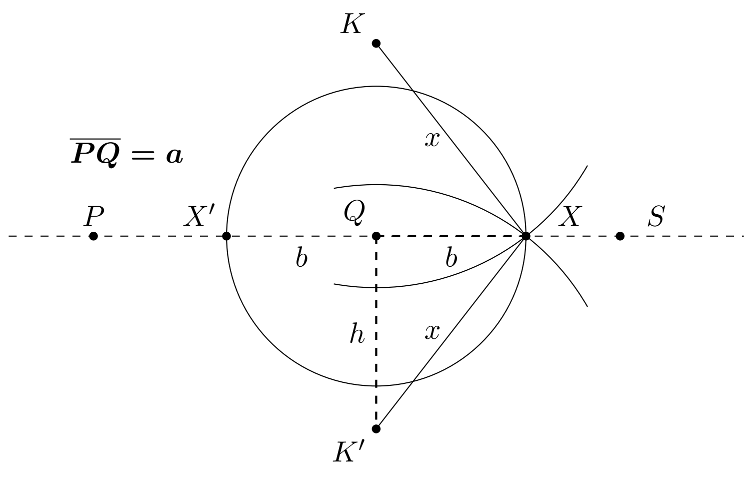
בנו את הנקודה S כנקודת החיתוך של המעגלים $c(K, d)$ ו־$c(K', d)$:



מתקבל משולש ישר־זווית $\triangle QSK'$. לפי משפט פיתגורס $QS^2 + h^2 = d^2$, ולכן:

$$QS^2 = d^2 - h^2 = x^2 \,,$$

ו־$QS = x$. בנו את הנקודה X כנקודות החיתוך בין המעגלים $c(K, x)$ ו־$c(K', x)$:



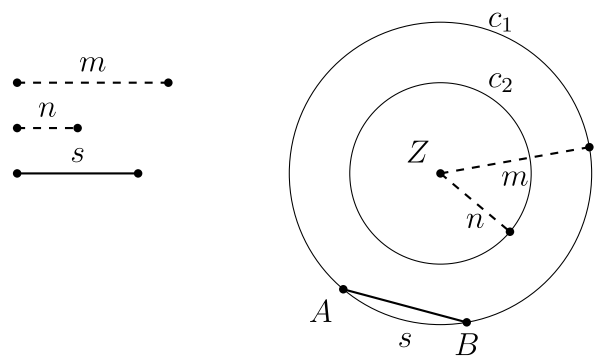
הוכחנו את משפט **??**: $\overline{PX} = a + b, \overline{PX'} = a - b$, כי $\overline{QX} = \sqrt{x^2 - h^2} = b$. ∎

13.1.4 בניית קטע קו משלושה קטעי קו אחרים

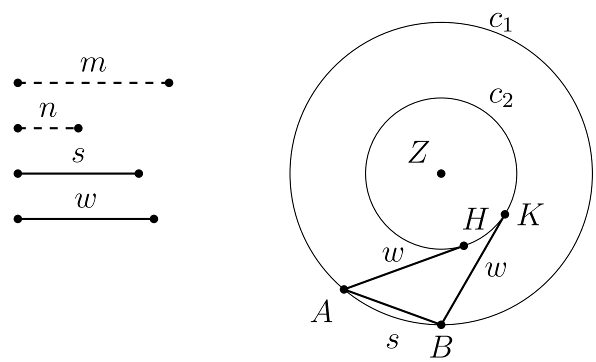
משפט 13.7
נתונים שלושה קטעי קו באורכים n, m, s, ניתן לבנות קטע קו שאורכו $x = \frac{n}{m}s$.

בנו שני מעגלים עם מרכז משותף: $c_1 = c(Z, m), c_2 = c(Z, n)$. נניח ש־$m > n$, אחרת נחליף את הסימונים של m, n.

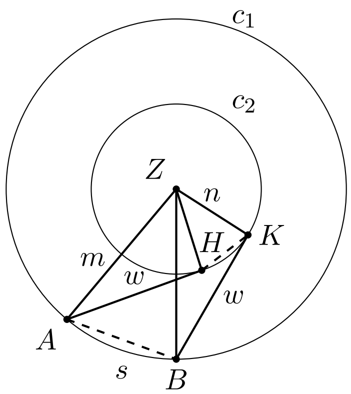
בחרו נקודה A כלשהי על המעגל c_1 ובנו (לפי משפט **??**) מיתר $\overline{AB}$ ב־c_1 שאורכו s. נניח שהמיתר אינו חותך את c_2. אם לא, נשתמש בבניה של סעיף **??** כדי להכפיל את m, n במספר שלם k עד שהמיתר לא חותך את c_2. הכפלת הערכים אינה משנה את הערך שאנחנו בונים $x = \frac{kn}{km}s = \frac{n}{m}s$.



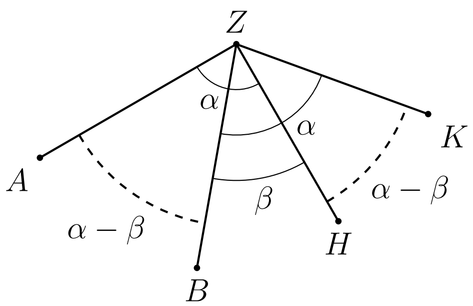
בחרו נקודה H כלשהי על המעגל c_2, וסמנו את אורך הקטע $\overline{AH}$ ב־w. בנו נקודה K על c_2 כך שאורך הקטע $\overline{BK}$ גם הוא w.



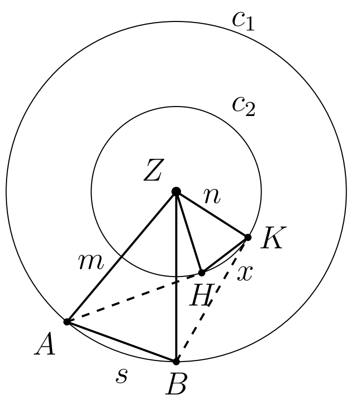
$\triangle AHZ \cong \triangle BZK$ לפי צלע־צלע־צלע: $\overline{ZA} = \overline{ZB} = m$ הם רדיוסים של אותו מעגל c_1, $\overline{ZH} = \overline{ZK} = n$ הם רדיוסים של אותו מעגל c_2, ו־$\overline{AH} = \overline{BK} = w$ לפי הבניה.



מ־$\triangle AZH \cong \triangle BZK$ נובע $\angle AZB = \angle HZK$. קשה לראות את השוויונות הללו באיור, אבל האיור שלהלן מבהיר את היחסים בין הזוויות. נגדיר $\alpha = \angle AZH = \angle BZK$ ו־$\beta = \angle BZH$, וקל לראות ש־$\angle AZB = \angle HZK = \alpha - \beta$.



$\triangle AZB \sim \triangle HZK$ כי הראנו ששני המשולשים הם שווי־שוקיים עם זוויות קודקוד שוות.



סמנו את קטע הקו $\overline{HK}$ ב־x, ונקבל:

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} &= \frac{n}{x} \\ x &= \frac{n}{m} s\,. \end{aligned}$$

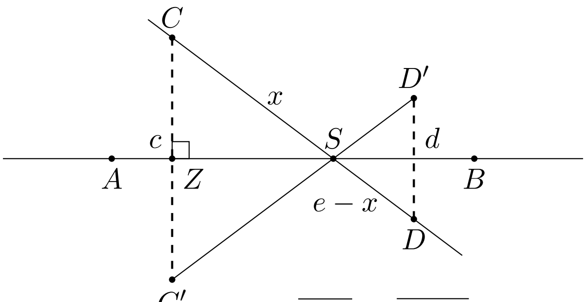
∎

13.2 מציאת נקודת החיתוך של שני קווים

משפט 13.8
נתונים שני קווים המכילים את קטעי הקו $\overline{AB},\overline{CD}$. ניתן לבנות את נקודת החיתוך שלהם.

הוכחה: בנו את C', השיקוף של C מסביב ל־$\overline{AB}$, ו־D' השיקוף של D מסביב ל־$\overline{AB}$. יש שני מקרים תלוי אם C,D נמצאים בשני הצדדים של $\overline{AB}$ או באותו צד.

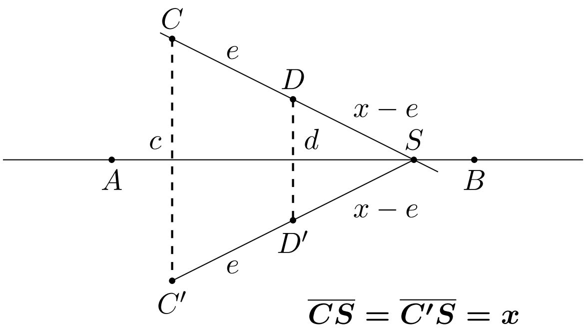
מקרה 1: נקודת החיתוך S נמצאת על הקו $\overline{AB}$ כי $\triangle CZS \cong \triangle C'ZS$ לפי צלע־זווית־צלע: $\overline{CZ}=\overline{C'Z}$, $\angle CZS = \angle C'ZS = 90^\circ$ ו־$\overline{ZS}$ צלע משותף. מכאן ש־$\overline{CS}=\overline{C'S}$, ובאופן דומה $\overline{D'S}=\overline{DS}$.



$\boldsymbol{\overline{CD}=\overline{C'D'}=e}$

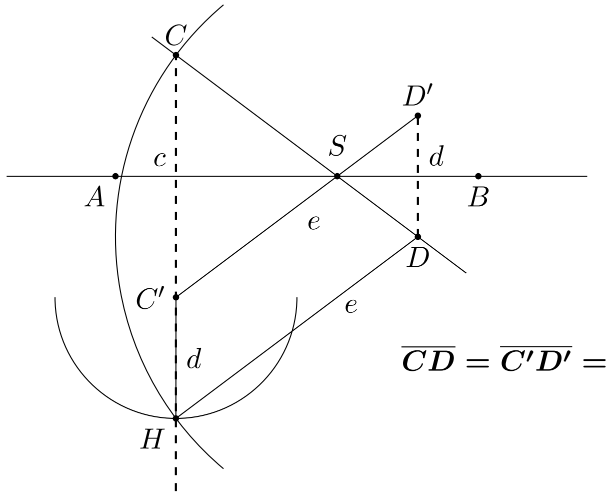
סמנו $x=\overline{CS}, c=\overline{CC'}, d=\overline{DD'}, e=\overline{CD}$. $\triangle CSC' \sim \triangle DSD'$ ולכן $\frac{c}{d}=\frac{x}{e-x}$. נפתור את המשוואה עבור x ונקבל $x=\frac{c}{c+d}e$.

מקרה 2: $\triangle CSC' \sim \triangle DSD'$, ולכן $\frac{c}{d}=\frac{x}{x-e}$ ו־$x=\frac{c}{c-d}e$.



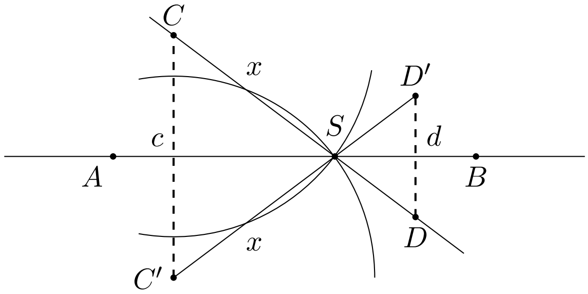
$\boldsymbol{\overline{CS}=\overline{C'S}=x}$

בנו את המעגלים $c(C',d)$, $c(D,e)$, וסמנו את נקודת החיתוך שלהם ב־H. סכום האורכים של $\overline{CC'},\overline{C'H}$ הוא $c+d$. אם H נמצאת בהמשך הקו של $\overline{CC'}$, אז האורך של $\overline{CH}$ הוא $c+d$. במקרה ש־C,D נמצאות על אותו צד של $\overline{AB}$, $\overline{CH}=c-d$.



$$\overline{\boldsymbol{CD}} = \overline{\boldsymbol{C'D'}} = \overline{\boldsymbol{DH}} = \boldsymbol{e}$$

H היא החיתוך של $c(C',d), c(D,e)$, ולכן $\overline{C'H} = d, \overline{DH} = e$, אבל $\overline{C'D'} = e, \overline{DD'} = e$, ולכן המרובע $C'D'DH$ הוא מקבילית. לפי הבניה, קטע הקו $\overline{DD'}$ מקביל ל-$\overline{CC'}$, ולכן $\overline{C'H}$, שמקביל ל-$\overline{DD'}$ במקבילית, מקביל גם ל-$\overline{CC'}$:



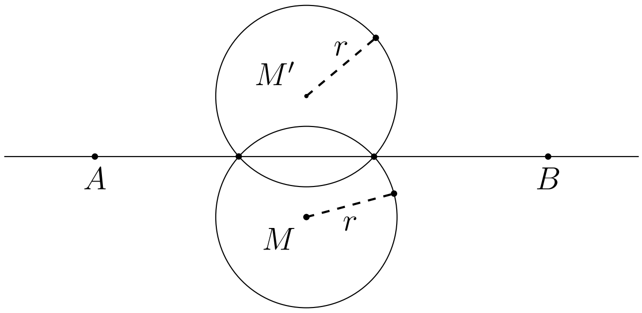
$$\overline{\boldsymbol{CD}} = \overline{\boldsymbol{C'D'}} = \overline{\boldsymbol{DH}} = \boldsymbol{e}$$

אחת מנקודות הקצה של הקטע היא C' והקטע חייב להיות על ההמשך של הקטע $\overline{CC'}$. האורכים c, d, e נתונים ולפי משפט **??** ניתן לבנות קטע באורך $c+d$, ולפי משפט **??** ניתן לבנות קטע באורך $x = \dfrac{c}{c+d}e$. S היא נקודת החיתוך של המעגלים $c(C,x)$ ו-$c(C',x)$.

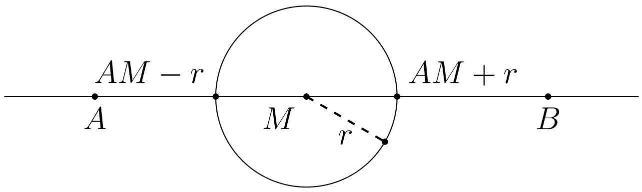
13.3 מציאת נקודת החיתוך של קו עם מעגל

משפט 13.9 נתון מעגל $k = C(M,r)$ וקו $\overline{AB}$. ניתן לבנות את נקודות החיתוך שלהם.

בנו את M', השיקוף של M מסביב ל-$\overline{AB}$, והמעגל $k' = c(M',r)$. נקודות החיתוך של המעגלים k, k' הן נקודות החיתוך של הקו $\overline{AB}$ והמעגל k.



בניה זו אינה אפשרית אם מרכז המעגל M נמצא על הקו $\overline{AB}$. במקרה זה, יש להאריך ולקצר את הקטע $\overline{AM}$ באורך r לפי משפט **??**. נקודות הקצה של הקטעים הללו הן נקודות החיתוך של k עם $\overline{AB}$.



מקודות

בפרק זה מבוסס על בעיה מספר 33 ב־[?] ועל העיבוד שלה על ידי Michael Woltermann [?].ברצוני להודות לו על הרשות להתשמש בעבודתו. הוכחות נוספות למשפט ניתן למוצא ב־[?], [?].

פרק 14 אפשר להסתפק בסרגל ביחד עם מעגל אחד

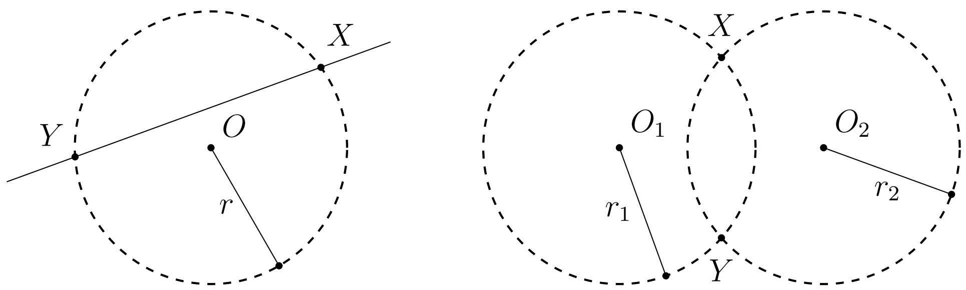
האם כל בניה עם סרגל ומחוגה ניתנת לבניה עם סרגל בלבד? התשובה היא שלילית. ב־1822 Jean-Victor Poncelet שיער שכן ניתן להסתפק בסרגל בלבד בתנאי שקיים במישור מעגל אחד. המשפט הוכח ב־1833 על ידי Jakob Steiner.

כל צעד בבניה עם סרגל ומחוגה הוא אחת משלושת הפעולות הללו:

- מציאת נקודת החיתוך של שני קווים.
- מציאת נקודות החיתוך של קו עם מעגל.
- מציאת נקודות החיתוך של שני מעגלים.

ברור שניתן לבצע את הפעולה הראשונה עם סרגל בלבד. עלינו להראות שעבור שתי הפעולות האחרות ניתן למוצא בניה שקולה שמשתמשת רק בסרגל עם מעגל אחד.

מה המשמעות של בניה עם סרגל בלבד? מעגל מוגדר על ידי נקודה O, שהיא מרכז המעגל, וקטע קו באורך r, הרדיוס, שאחת מהנקודות הקצה שלו היא O. אם נצליח לבנות את הנקודות X,Y המסומנות באיור שלהלן, נוכל לטעון שהצלחנו לבנות את נקודות החיתוך של מעגל נתון עם קו נתון ושל שני מעגלים נתונים. בהמשך, המעגל הנתון יצוייר בקו רגיל והמעגלים שמשמשים רק להדגמת הבניה יצויירו מקווקווים.



תחילה נביא חמש בניות עזר נחוצות (סעיפים ??-??), ואחר כך נראה איך למצוא את נקודות החיתוך של קו עם מעגל (סעיף ??) ושל שני מעגלים (סעיף ??).

14.1 בניית קו המקביל לקו נתון

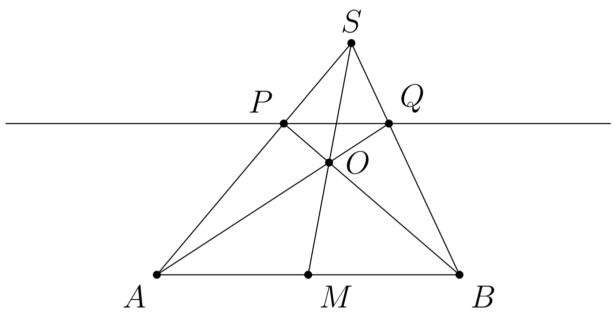
משפט 14.1

נתון קו l העובר דרך שתי נקודות A, B, ונתונה נקודה P (שאיננה על הקו), ניתן לבנות קו דרך P המקביל ל־$\overline{AB}$.

הוכחה: נפריד את הבניה לשני מקרים:

1. "קו מכוון": נתונה גם הנקודה M שהיא נקודת האמצע של קטע הקו $\overline{AB}$.
2. כל קו אחר.

מקרה ראשון: בנו קרן הממשיכה את $\overline{AP}$, ובחרו S, נקודה כלשהי על הקרן מעבר ל־P. בנו את הקווים $\overline{SB}$, $\overline{SM}$, $\overline{BP}$. סמנו ב־O את נקודת החיתוך של $\overline{BP}$ עם $\overline{SM}$. בנו קרן הממשיכה את $\overline{AO}$ וסמנו ב־Q את החיתוך של הקרן עם $\overline{SB}$.



טענה: $\overline{PQ} \| \overline{AB}$.

להוכחת הטענה נשתמש במשפט Ceva שנוכיח בהמשך.

משפט 14.2 (Ceva)

נתונים שלושה קטעי קו מקודקודי משולש לצלעות הנגדיות שנפגשים בנקודה M (כמו באיור לעיל, אבל M לא בהכרח חוצה את הצלע). קטעי הצלעות מקיימים את היחס:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = 1 \,.$$

הוכחה של הטענה: בבניה למעלה M חוצה את $\overline{AB}$ ולכן $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = 1$. מכאן ש:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{SP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} \,. \tag{14.1}$$

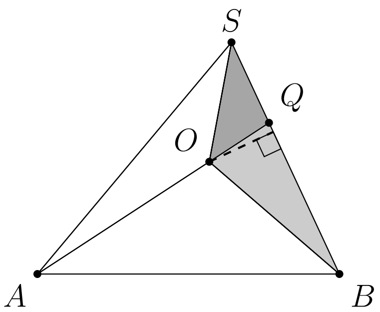
נוכיח ש־$\triangle ABS \sim \triangle PQS$, ולכן $\overline{PQ} \| \overline{AB}$ כי $\angle ABS = \angle PQS$.

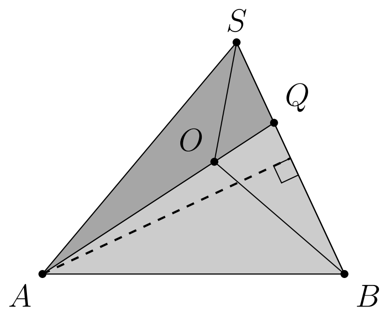
הוכחה שהמשולשים דומים:

$$\begin{aligned}
\overline{BS} &= \overline{BQ}+\overline{QS}\\
\frac{\overline{BS}}{\overline{QS}} &= \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}+\frac{\overline{QS}}{\overline{QS}}=\frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}+1\\
\overline{AS} &= \overline{AP}+\overline{PS}\\
\frac{\overline{AS}}{\overline{PS}} &= \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}}+\frac{\overline{PS}}{\overline{PS}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{PS}}+1\\
\frac{\overline{BS}}{\overline{QS}}=\frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}+1 &= \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}}+1=\frac{\overline{AS}}{\overline{PS}},
\end{aligned}$$

כאשר המשוואה האחרונה מתקבלת ממשפט **??**. ∎

הוכחה של משפט Ceva:



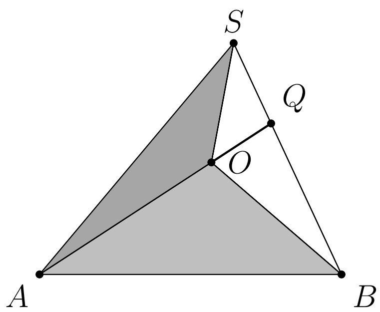


אם הגבהים של שני משולשים שווים, יחס השטחים שווה ליחס הבסיסים. הגבהים של המשולשים $\triangle BQO, \triangle SQO$ שווים, כמו גם $\triangle BQA, \triangle SQA$. לכן:[1]

$$\frac{\triangle BQO}{\triangle SQO} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \tag{14.2}$$

$$\frac{\triangle BQA}{\triangle SQA} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}\,. \tag{14.3}$$

על ידי חיסור נקבל יחס בין המשולשים המסומנים באפור:



[1]נשתמש בשם המשולש כקיצור לשטחו.

$$\frac{\triangle BQA - \triangle BQO}{\triangle SQA - \triangle SQO} = \frac{\triangle BOA}{\triangle SOA} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}\,.$$

נסביר את החישוב תוך שימוש בסימונים פשוטים יותר:

$$a = \overline{BQ},\, b = \overline{QS},\, c = \triangle BQA,\, d = \triangle SQA,\, e = \triangle BQO,\, f = \triangle SQO\,.$$

מהמשוואות **??**, **??**:

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \qquad (14.4)$$

$$\frac{e}{f} = \frac{a}{b}\,. \qquad (14.5)$$

מחישוב פשוט:

$$\begin{aligned} c - e &= \frac{ad}{b} - \frac{af}{b} = \frac{a}{b}(d-f) \\ \frac{c-e}{d-f} &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

מתקבלת המשוואה **??**.

באופן דומה ניתן להוכיח:

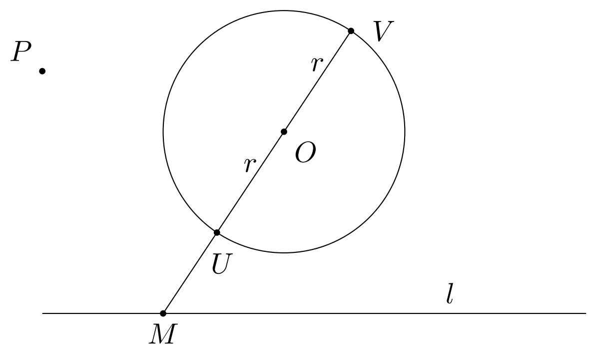
$$\frac{AM}{MB} = \frac{\triangle AOS}{\triangle BOS}\,, \qquad \frac{SP}{PA} = \frac{\triangle SOB}{\triangle AOB}\,,$$

ומכאן:

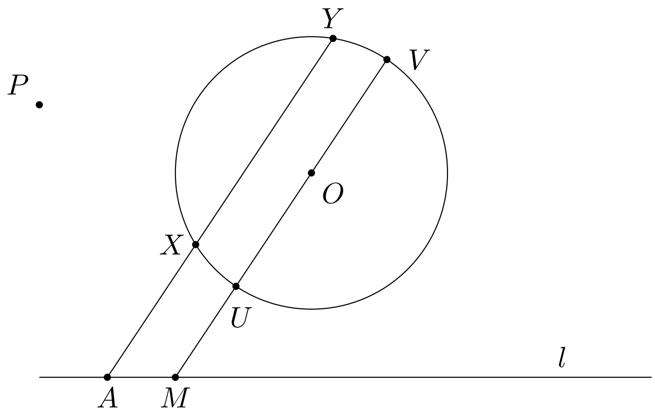
$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BQ}{QS} \cdot \frac{SP}{PA} = \frac{\triangle AOS}{\triangle BOS}\frac{\triangle BOA}{\triangle SOA}\frac{\triangle SOB}{\triangle AOB} = 1\,,$$

כי סדר הקודקודים לא משנה $\triangle AOS = \triangle SOA, \triangle BOA = \triangle AOB, \triangle SOB = \triangle BOS$. ∎

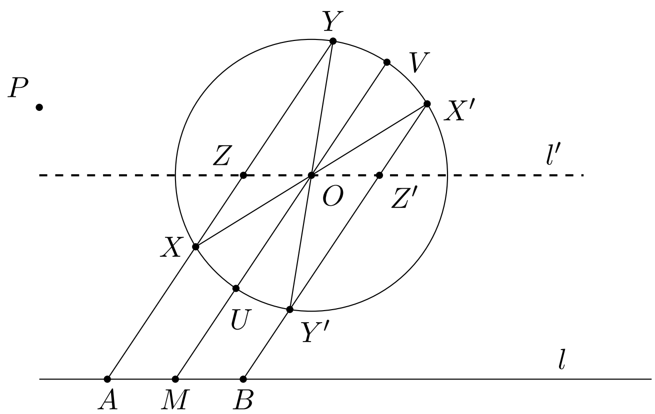
מקרה שני: נתון הקו l ונתונה הנקודה P שאיננה נמצאת על הקו. סמנו את המרכז של המעגל הקבוע ב־O והרדיוס שלו ב־r. בחרו נקודה M על הקו l ובנו קרן דרך $\overline{MO}$ שחותך את המעגל הקבוע ב־U, V.



קו זה הוא **קו מכוון** כי O, מרכז המעגל, חוצה את הקוטר $\overline{UV}$. בחרו נקודה שנייה A על l. לפי הבניה של המקרה הראשון, ניתן לבנות קו המקביל ל־$\overline{UV}$ דרך A. יש לבחור את A כך שהקו המקביל חותך את המעגל בשתי נקודות שנסמן X,Y.



בנו קוטר $\overline{XX'}$ וקוטר $\overline{YY'}$. בנו קרן מ־X' עבור דרך Y' וסמנו ב־B את נקודת החיתוך שלה עם l.



טענה: l הוא **קו מכוון**.

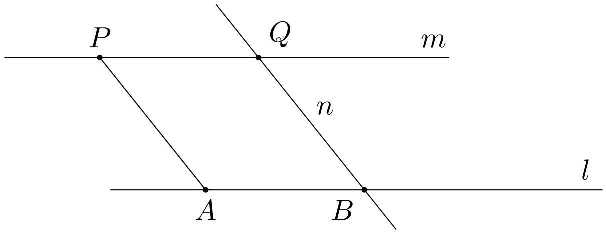
הוכחה: $\overline{OX},\overline{OX'},\overline{OY},\overline{OY'}$ הם כולם רדיוסים של המעגל, ו־$\angle XOY = \angle X'OY'$ כי הן זוויות קודקודיות. לכן, $\triangle XOY \cong \triangle X'OY'$ לפי צלע־זווית־צלע. נגדיר (לא נבנה!) קו $l' \| l$ שחותך את $\overline{XY}$ ב־Z ושחותך את X',Y' ב־Z'. $\angle XOZ = \angle X'OZ'$ כי הן זוויות קודקודיות, ולכן $\triangle XOZ \cong \triangle X'OZ'$ לפי זווית־צלע־זווית. מכאן ש־$\overline{ZO} = \overline{OZ'}$. $AMOZ$ ו־$BMOZ'$ מקביליות ולכן $\overline{AM} = \overline{ZO} = \overline{OZ'} = \overline{MB}$ ו־M חוצה את $\overline{AB}$. ∎

לפי הבניה של המקרה הראשון ניתן לבנות את הקו l' דרך P שמקביל ל־l. ∎

משפט **??** אומר שניתן לבנות **קו** דרך P המקביל ל־$\overline{AB}$. למעשה גם אפשר לבנות **קטע קו** המקביל ל־$\overline{AB}$ שאורכו שווה לאורך של $\overline{AB}$.

מסקנה: ניתן להעתיק קטע קו מקביל לעצמו כך שקצה אחד יהיה נקודה כלשהי.

הוכחה: בנו קו דרך P המקביל ל־$\overline{AB}$, חברו את P ו־A, ובנו קו n דרך B המקביל ל־$\overline{AP}$. $ABQP$ הוא מקבילית ו־$\overline{PQ} = \overline{AB}$.

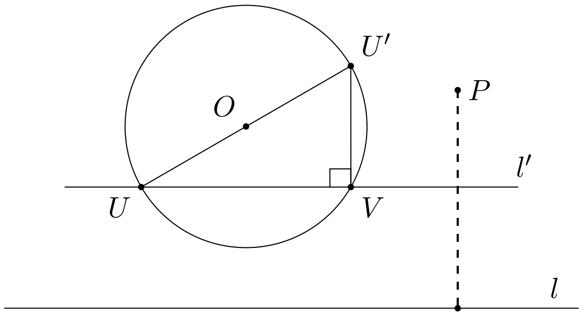


14.2 בניית אנך לקו נתון

משפט 14.3

נתון קו l ונקודה P (שאיננה על הקו) ניתן לבנות אנך ל־l דרך P.

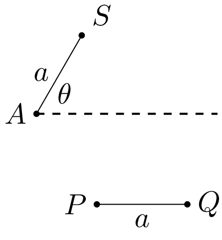
הוכחה: בנו לפי משפט **??** קו $l' \| l$ החותך את המעגל הקבוע ב־U, V. בנו את הקוטר $\overline{UOU'}$ והמיתר $\overline{U'V}$. $\angle UVU'$ היא זווית ישרה כי היא נשענת על קוטר. מכאן ש־$l' \perp \overline{U'V}$. בנו קו מקביל ל־$\overline{U'V}$ דרך P לפי משפט **??**. ∎



14.3 העתקת קטע קו נתון בכיוון נתון

משפט 14.4

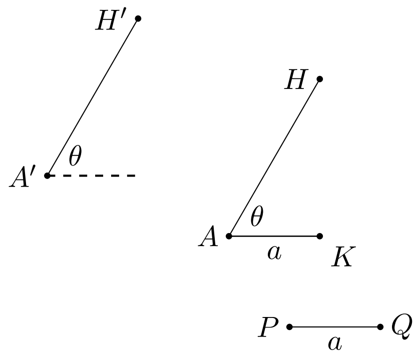
נתון נקודה A, קטע קו $\overline{PQ}$ וזווית θ, ניתן לבנות קטע קו $\overline{AS} = \overline{PQ}$ בכיוון θ.



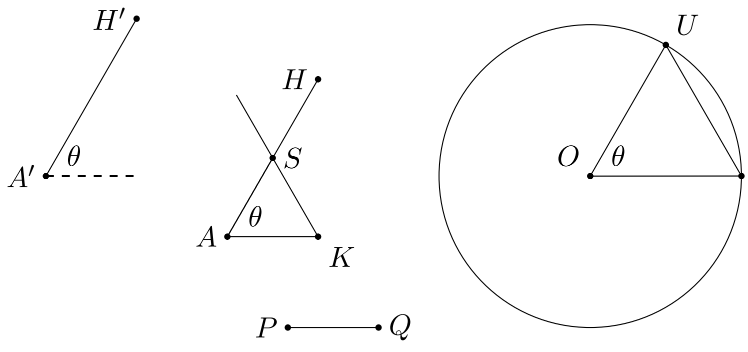
המשמעות של "בכיוון θ" היא שהזווית בין $\overline{AS}$ לקו המקביל ל־$\overline{PQ}$ דרך A היא θ.

בסוף סעיף **??** הראינו שאפשר להעתיק קטע קו מקביל לעצמו. כאן המטרה היא להעתיק את קטע הקו $\overline{PQ}$ ל־$\overline{AS}$, כך ש־$\overline{AS}$ יהיה באותה זווית θ יחסית לאותו ציר. באיור $\overline{PQ}$ נמצא על ציר ה־x אבל אין לזה חשיבות.

הוכחה: נניח שהזווית הנתונה θ היא הזווית בין קטע הקו $\overline{A'H'}$ לקו מקביל ל־$\overline{PQ}$ המכיל את A'. לפי משפט **??** ניתן לבנות קטע קו $\overline{AH}$ כך ש־$\overline{AH}\|\overline{A'H'}$, וקטע קו $\overline{AK}$ כך ש־$\overline{AK}\|\overline{PQ}$ ו־$\overline{AK}=\overline{PQ}=a$.



כעת יש למצוא נקודה S על $\overline{AH}$ כך ש־$\overline{AS}=\overline{AK}$. במעגל הקבוע בנו שני רדיוסים $\overline{OU}$ ו־$\overline{OV}$ מקבילים ל־$\overline{AH}$ ו־$\overline{AK}$, בהתאמה, ובנו קרן דרך K המקבילה ל־$\overline{UV}$. סמנו את נקודת החיתוך של הקו עם $\overline{AH}$ ב־S. לפי הבניה $\overline{AH}\|\overline{OU}$ ו־$\overline{AK}\|\overline{OV}$, ולכן $\angle SAK=\angle UOV=\theta$. $\overline{SK}\|\overline{UV}$, ו־$\triangle SAK\sim\triangle UOV$ לפי זווית־זווית־זווית. $\triangle UOV$ הוא שווה־שוקיים כי $\overline{OU}$, $\overline{OV}$ הם רדיוסים של אותו מעגל. מכאן ש־$\triangle SAK$ הוא שווה־שוקיים ו־$\overline{AS}=\overline{AK}=\overline{PQ}$. ∎

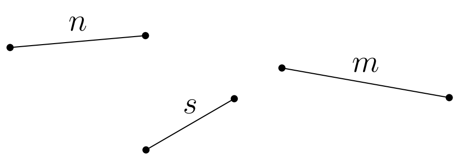


14.4 בניית קטע קו יחסית לשלושה קטעי קו

משפט 14.5

נתונים שלושה קטעי קו באורכים n,m,s, ניתן לבנות קטע קו באורך $x=\dfrac{n}{m}s$.

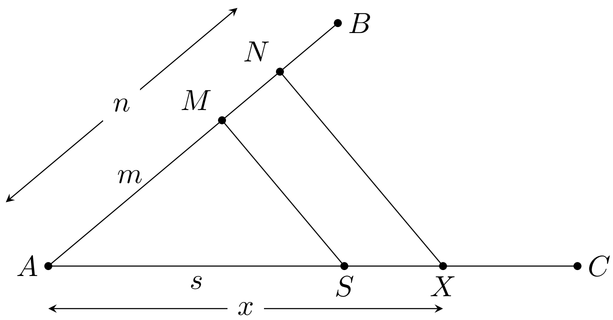
קטעי הקו הנתונים נמצאים במקומות שרירותיים במישור:



בחרו נקודה A במישור ובנו שני קטעי קו $\overline{AB}, \overline{AC}$. לפי משפט **??** ניתן לבנות M, N, S כך ש־$\overline{AM} = m, \overline{AN} = n, \overline{AS} = s$. בנו דרך N קו המקביל ל־$\overline{MS}$ שחותך את $\overline{AC}$ ב־X, וסמנו את אורכו של ב־x. $\triangle MAS \sim \triangle NAX$ לפי זווית־זווית־זווית, ולכן:

$$\frac{m}{n} = \frac{s}{x}, \qquad x = \frac{n}{m} s \,.$$

∎



14.5 בניית שורש ריבועי

משפט 14.6

נתון קטעי קו באורכים a, b, ניתן לבנות קטע קו שאורכו $\sqrt{ab}$.

הוכחה: אם נבטא את $x = \sqrt{ab}$ בצורה $x = \frac{n}{m} s$ נוכל להשתמש במשפט **??**.

עבור n נשתמש ב־d, הקוטר של המעגל הקבוע.

עבור m נשתמש ב־$t = a + b$ שניתן לבנות מ־a, b לפי משפט **??**.

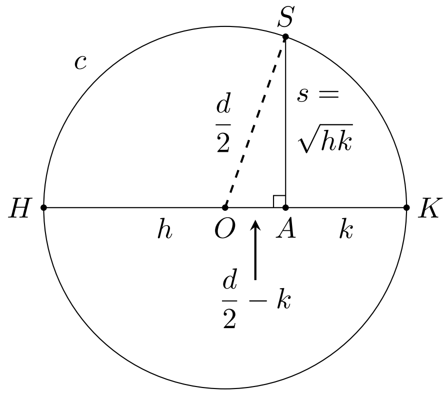
נבנה את $s = \sqrt{hk}$ כאשר $h = \frac{d}{t} a$, $k = \frac{d}{t} b$, ונחשב:

$$x = \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{th}{d}\frac{tk}{d}} = \sqrt{\left(\frac{t}{d}\right)^2 hk} = \frac{t}{d}\sqrt{hk} = \frac{t}{d} s \,.$$

נחשב גם:

$$h + k = \frac{d}{t} a + \frac{d}{t} b = \frac{d(a+b)}{t} = \frac{dt}{t} = d \,.$$

לפי משפט **??** בנו $\overline{HA} = h$ על הקוטר $\overline{HK}$ של המעגל הקבוע. מ־$h + k = d$ אפשר להסיק ש־$\overline{AK} = k$:



לפי משפט **??** ניתן לבנות דרך A אנך ל־$\overline{HK}$. סמנו ב־S את החיתוך שלו עם המעגל הקבוע. $\overline{OS}=\overline{OK}=\frac{d}{2}$ הם רדיוסים של המעגל, ו־$\overline{OA}=\frac{d}{2}-k$. לפי משפט פיתגורס:

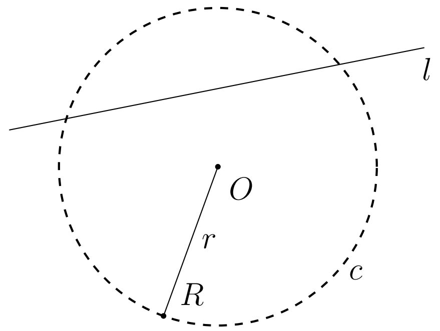
$$\begin{aligned} s^2 = \overline{SA}^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - k\right)^2 \\ &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2\frac{dk}{2} - k^2 \\ &= k(d-k) = kh \\ s &= \sqrt{hk}\,. \end{aligned}$$

כעת ניתן לבנות $x = \frac{t}{d}s$ לפי משפט **??**.

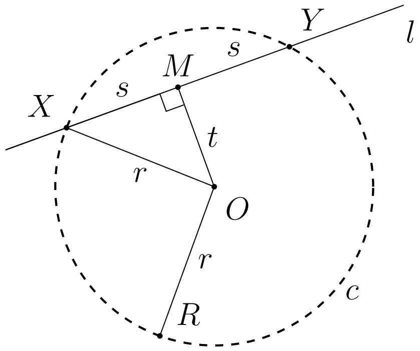
14.6 בניית נקודות חיתוך של קו עם מעגל

משפט 14.7

נתון קו l ומעגל c שמרכזו O ורדיוס r. ניתן לבנות את נקודות החיתוך של l עם c.



לפי משפט **??** ניתן לבנות אנך ממרכז המעגל O לקו l. סמנו ב־M את נקודת החיתוך של l עם האנך. M חוצה של המיתר $\overline{XY}$, כאשר X, Y הן נקודות החיתוך של הקו עם המעגל. סמנו ב־$2s$ את אורך המיתר. שימו לב שבאיור s, X, Y הם רק הגדרות וטרם בנינו את נקודות החיתוך.



$\triangle OMX$ הוא מעגל ישר־זווית ולכן $s^2 = r^2 - t^2 = (r+t)(r-t)$. r נתון כרדיוס המעגל ו־t הוגדר כאורך של $\overline{OM}$. לפי משפט **??** ניתן לבנות קטעי קו באורך r מהנקודה O בשני הכיוונים $\overline{MO}$ ו־$\overline{OM}$. התוצאה היא שני קטעי קו שאורכם $r+t, r-t$.

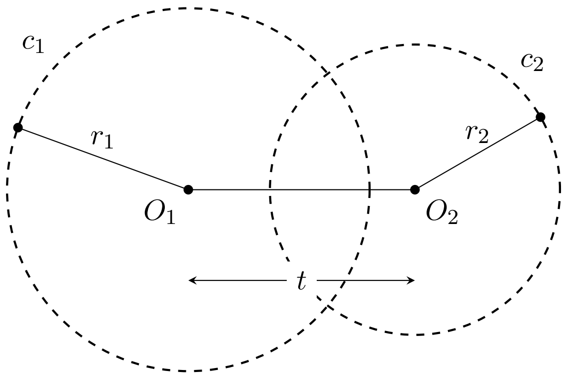
לפי משפט **??** ניתן לבנות קטע קו באורך $s = \sqrt{(r+t)(r-t)}$. שוב לפי משפט **??**, ניתן לבנות קטעי קו באורך s על הקו הנתון l מהנקודה M בשני הכיוונים. הקצה השני של כל אחד מקטעי הקו האלה הוא נקודת חיתוך של l עם המעגל. ∎

14.7 בניית נקודות החיתוך של שני מעגלים

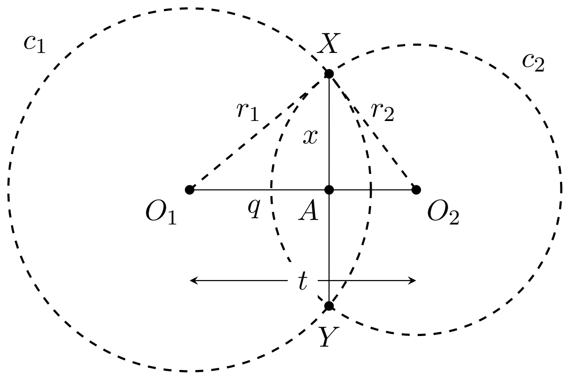
משפט 14.8

נתונים שני מעגלים עם מרכזים O_1, O_2 ורדיוסים r_1, r_2. ניתן לבנות את נקודות החיתוך שלהם X, Y.

הוכחה: בנו את קטע הקו $\overline{O_1O_2}$ המחבר את שני המרכזים. סמנו את אורכו ב־t.



סמנו ב־A את נקודת החיתוך של $\overline{O_1O_2}$ עם $\overline{XY}$, וסמנו את $q = \overline{O_1A}, x = \overline{XA}$. טרם בנינו את הנקודה A, אבל אם נצליח לבנות את האורכים q, x, לפי משפט **??** נוכל לבנות את A באורך q מהנקודה O_1 לכיוון $\overline{O_1O_2}$. לפי משפט **??** ניתן לבנות את האנך ל־$\overline{O_1O_2}$ בנקודה A, ושוב לפי משפט **??** ניתן לבנות קטעי קו באורך x מהנקודה A בשני הכיוונים לאורך האנך. X, Y, הקצות של קטעי הקו, הם נקודות החיתוך של שני המעגלים.



$t = \overline{O_1O_2}$
$q = \overline{O_1A}$
$x = \overline{XA}$

בניית האורך q**:** בנו $d = \sqrt{r_1^2 + t^2}$, אורך היתר של משולש ישר־זווית מהאורכים הידועים r_1, t: על קו כלשהי במישור בנו קטע קו $\overline{RS}$ באורך r_1, אחר כך בנו אנך ל־$\overline{RS}$ דרך R, ולבסוף בנו קטע קו $\overline{RT}$ באורך t מ־R על האנך.

לפי משפט הקוסינוסים ב־$\triangle O_1O_2X$:

$$\begin{aligned}
r_2^2 &= t^2 + r_1^2 - 2r_1 t \cos \angle XO_1O_2 \\
\frac{q}{r_1} &= \cos \angle O_1O_2X \\
r_2^2 &= t^2 + r_1^2 - 2tq \\
2tq &= (r_1^2 + t^2) - r_2^2 \\
q &= \frac{(d+r_2)(d-r_2)}{2t}\,.
\end{aligned}$$

לפי משפט **??** ניתן לבנות את האורכים האלה, ולפי משפט **??** ניתן לבנות את q מהביטויים $d + r_2, d - r_2, 2t$.

בניית האורך x**:** $\triangle AO_1X$ הוא משולש ישר־זווית ולכן:

$$x^2 = r_1^2 - q^2 = \sqrt{(r_1+q)(r_1-q)}\,.$$

לפי משפט **??** ניתן לבנות $h = r_1 + q$ ו־$k = r_1 - q$, ולפי משפט **??** ניתן לבנות $x = \sqrt{hk}$.

מקורות

הפרק מבוסס על בעיה 34 ב־[?] שעובדה על ידי Michael Woltermann [?]. ברצוני להודות לו על הרשות להתשמש בעבודתו.

פרק 15 האם משולשים עם אותו שטח ואותו היקף חופפים?

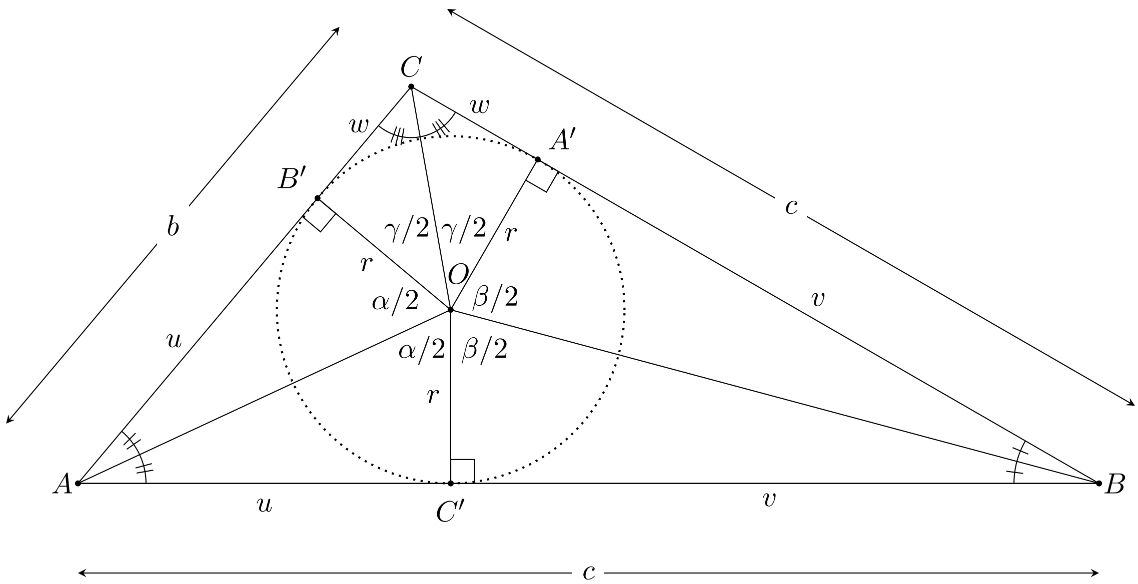
האם משולשים עם אותו שטח ואותו היקף חופפים? לא בהכרח: לשני המשולשים הלא־חופפים עם הצלעות $(17, 25, 28)$ ו־$(20, 21, 27)$ היקף 70 ושטח 210. פרק זה מראה שנתון משולש עם אורכי צלעות רציונליים, ניתן לבנות משולש לא־חופף עם אורכי צלעות רציונליים, ועם אותו היקף ושטח. בסוף הפרק הבאתי הוכחה אלגנטית לנוסחה של הרון לשטח של משולש.

15.1 ממשולשים לעקומות

נתון משולש עם קודקודים A, B, C וצלעות a, b, c, חוצי הזוויות נפגשים בקודה אחת O שהוא המרכז של מעגל החסום על ידי המשולש (איור **??**).[1] OA', OB', OC' הם הגבהים של המשולש. באיור סומנו גם זוגות של זוויות מרכזיות $\alpha/2, \beta/2, \gamma/2$. השוויון של הזוויות נובע ממשולשים ישר־זווית חופפים:

$$\triangle AOB' \cong \triangle AOC', \quad \triangle BOA' \cong \triangle BOC', \quad \triangle COA' \cong \triangle COB'\,.$$

החפיפת המשולשים מתקבל גם שוויון בין קטעי הקו u, v, w המחברים את הצלעות עם נקודת ההשקה שלהן עם המעגל.



איור 15.1: מעגל חסום המוגדר על ידי חיתוך חוצי הזווית משולש

[1] במעגל חסום וצלעות משיקים למעגל והעובדה שהם חוצי הזוויות נובעת מהתכונות של משיקים.

השטח $S_{\triangle ABC}$ הוא סכום השטחים של $\triangle AOC, \triangle BOC, \triangle AOB$:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(w+v)r + \frac{1}{2}(v+u)r + \frac{1}{2}(u+w)r \tag{15.1}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2(u+v+w)r = rs\,, \tag{15.2}$$

כאשר s הוא מחצית ההיקף:

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(2u+2v+2w) = u+v+w\,.$$

נבטא את u, v, w באמצעות פונקציות טריגונומטריות של זוויות המעגל והרדיוס r:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{u}{r} \tag{15.3}$$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{v}{r} \tag{15.4}$$

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{w}{r}\,. \tag{15.5}$$

נסכם ונקבל ביטוי של s כתלות של הזוויות והרדיוס:

$$s = u+v+w = r\tan\frac{\alpha}{2} + r\tan\frac{\beta}{2} + r\tan\frac{\gamma}{2} = r\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\right)\,,$$

ולפי המשוואה **??** $S_{\triangle ABC} = rs$:

$$S_{\triangle ABC} = r \cdot r\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\right) \tag{15.6}$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{r^2} = \tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} \tag{15.7}$$

$$\frac{s^2}{S_{\triangle ABC}} = \tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\,. \tag{15.8}$$

סכום הזוויות α, β, γ הוא 2π, ולכן:

$$\tan\gamma/2 = \tan(\pi - (\alpha/2 + \beta/2)) \tag{15.9}$$

$$\tan\gamma/2 = -\tan(\alpha/2 + \beta/2) \tag{15.10}$$

$$\tan\gamma/2 = \frac{\tan\alpha/2 + \tan\beta/2}{\tan\alpha/2\,\tan\beta/2 - 1}\,. \tag{15.11}$$

השתמשנו בזהות טריגונומטרית שהוכחה בסעיף **??**.

נפשט את הסימון על ידי הגדרת נעלמים עבור הטנגנסים:

$$x = \tan\frac{\alpha}{2}, \quad y = \tan\frac{\beta}{2}, \quad z = \tan\frac{\gamma}{2}\,.$$

עם סימון זה משוואה **??** היא:

$$z = \frac{x+y}{xy-1}\,. \tag{15.12}$$

ומשוואה **??** היא:

$$x + y + \frac{x+y}{xy-1} = \frac{s^2}{S_{\triangle ABC}}\,. \tag{15.13}$$

האם קיימים פתרונות שונים למשוואה **??**? עבור משולש ישר־הזווית $(3,4,5)$:

$$x + y + \frac{x+y}{xy-1} = \frac{6^2}{6} = 6 \tag{15.14}$$

$$x^2y + xy^2 - 6xy + 6 = 0\,. \tag{15.15}$$

בסעיף הבא נחפש פתרונות נוספים למשוואה זו.

15.2 פתרון המשוואה לעקומה

העקומה באיור **??** היא של ציור חלקי של המשוואה **??**. כל נקודה בעקומה ברביע הראשון היא פתרון, כי אורכי הצלעות חייבים להיות חיוביים. A, B, D מתאימות למשולש $(3,4,5)$ כפי שנראה בהמשך. כדי למצוא פתרונות רציונליים נוספים, נשתמש ב־**שיטת שני סקנסים** (**method of two secants**).

ציירו סקנס דרך הנקודות $A = (2,3)$ ו־$B = (1,2)$. הוא חותך את העקומה ב־$C = (-1.5, -0.5)$. נקודה זו אינה פתרון כי הקואורדינטות שליליים. אם נצייר סקנס שני מ־C ל־$D = (3,2)$, החיתוך שלו עם העקומה ב־E כן מהווה פתרון נוסף.[2]

המשוואה של הקו (האדום) דרך A, B היא $y = x + 1$. נציב עבור y במשוואה **??**:

$$x^2(x+1) + x(x+1)^2 - 6x(x+1) + 6 = 0,$$

ונפשט:

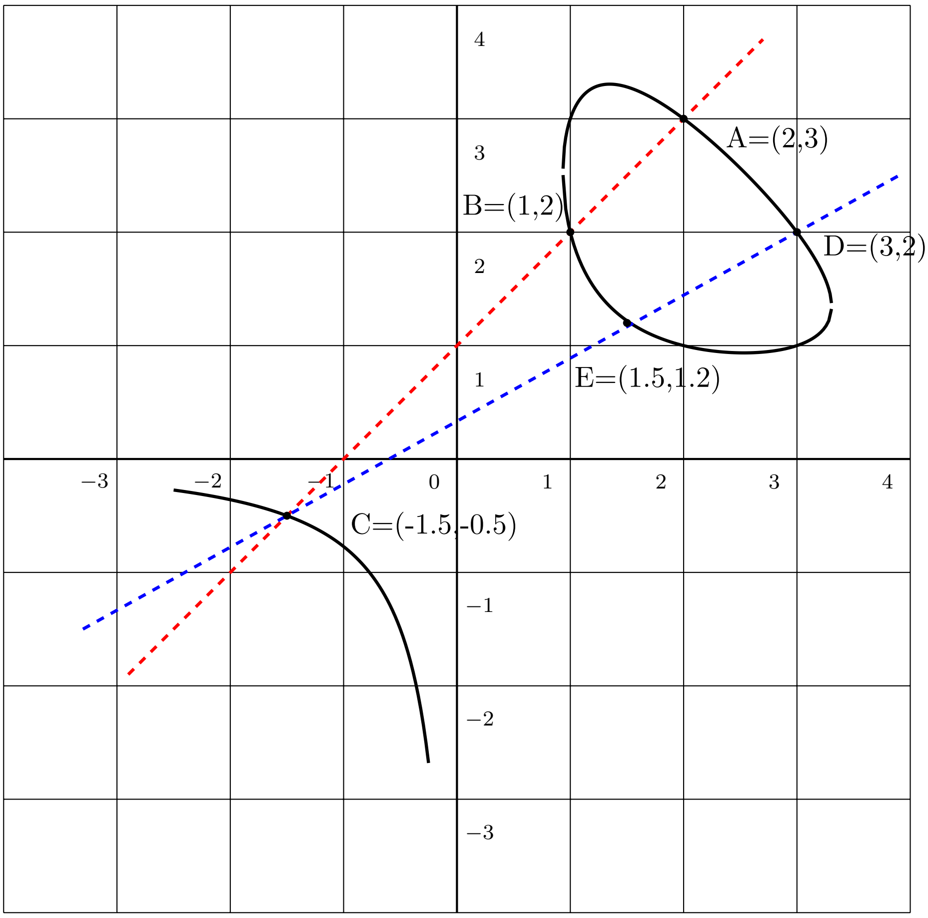
$$2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 0\,.$$

מהנקודות A, B אנו יודעים שני שורשים $x = 2, x = 1$, כך שאפשר לפרק את הפולינום מדרגה שלוש כך:

$$(x-2)(x-1)(ax+b) = 0\,,$$

כאשר רק השורש השלישי לא ידוע. נכפיל את הגורמים ונראה מיד שהמקדם של הגורם מדרגה שלוש x^3, חייב להיות 2, ו־$2b$, הקבוע, חייב להיות 6. לכן, הגורם השלישי הוא $2x + 3$ ומכאן שהשורש השלישי הוא $x = -\frac{3}{2}$. נחשב $y = x + 1 = -\frac{1}{2}$. הקואורדינטות של הנקודה C הן $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

[2] $(1.5, 1.2)$ הוא קירוב. בהמשך נחשב את הקואורדינטות המדוייקות.



איור 15.2: שיטת שני הסקנטים

המשוואה של הסקנס שני דרך D, C (כחול מקווקוו) היא:

$$y = \frac{5}{9}x + \frac{1}{3}\,. \tag{15.16}$$

נציב עבור y במשוואה **??**:

$$x^2\left(\frac{5}{9}x+\frac{1}{3}\right)+x\left(\frac{5}{9}x+\frac{1}{3}\right)^2-6x\left(\frac{5}{9}x+\frac{1}{3}\right)+6=0\,,$$

ונפשט:

$$\frac{70}{81}x^3-\frac{71}{27}x^2-\frac{17}{9}x+6=0\,.$$

שוב יש לנו שני שורשים $x=3, x=-\frac{3}{2}$, וניתן לפרק את הפולינום מדרגה שלוש:

$$(x-3)\left(x+\frac{3}{2}\right)(ax+b)=0\,.$$

נשווה את המקדם של x^3 ונשווה את הקובע ונקבל:

$$\frac{70}{81}x-\frac{4}{3}=0\,,$$

ולכן:

$$x = \frac{81}{70} \cdot \frac{4}{3} = \frac{27 \cdot 4}{70} = \frac{54}{35} \approx 1.543\,.$$

נחשב את y ממשוואה **??** ונקבל:

$$y = \frac{25}{21} \approx 1.190\,.$$

הערכים הללו קרובים למה שקראנו מאיור **??**: $(1.5, 1.2)$.

לבסוף, נחשב את z ממשוואה **??**:

$$z = \frac{x+y}{xy-1} = \left(\frac{54}{35} + \frac{25}{21}\right) \Big/ \left(\frac{54}{35} \cdot \frac{25}{21} - 1\right) = \frac{2009}{615} = \frac{49}{15}\,.$$

15.3 מפתורונות לעקומה למשולשים

מ־x, y, z, a, b, c, ניתן לחשב את אורכי הצלעות של המשולש $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned} a &= w + v = r(z+y) = (z+y) \\ b &= u + w = r(x+z) = (x+z) \\ c &= u + v = r(x+y) = (x+y)\,, \end{aligned}$$

כי $r = \frac{A}{s} = \frac{6}{6} = 1$.

עבור הפתרון $A = (2,3)$ של העקומה ערכו של z הוא:

$$z = \frac{x+y}{xy-1} = \frac{2+3}{2 \cdot 3 - 1} = 1\,,$$

והצלעות של המשולש הן:

$$\begin{aligned} a &= z + y = 1 + 3 = 4 \\ b &= x + z = 2 + 1 = 3 \\ c &= x + y = 2 + 3 = 5\,. \end{aligned}$$

המשולש ישר־זווית עם $s = A = 6$. חישוב הצלעות המתאימים ל־B ו־D נותן את אותו משולש. עבור E:

$$\begin{aligned} a &= z + y = \frac{49}{15} + \frac{25}{21} = \frac{243 + 125}{105} = \frac{156}{35} \\ b &= x + z = \frac{54}{35} + \frac{49}{15} = \frac{810 + 1715}{525} = \frac{101}{21} \\ c &= x + y = \frac{54}{35} + \frac{25}{21} = \frac{1134 + 875}{735} = \frac{41}{15}\,, \end{aligned}$$

נבדוק את התוצאה. מחצית ההיקף היא:

$$s = \frac{1}{2}\left(\frac{156}{35}+\frac{101}{21}+\frac{41}{15}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{468+505+287}{105}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1260}{105}\right) = 6\,.$$

נחשב את השטח באמצעות הנוסחה של הרון $S_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle ABC} &= \sqrt{6\left(6-\frac{156}{35}\right)\left(6-\frac{101}{21}\right)\left(6-\frac{41}{15}\right)} \\
&= \sqrt{6\cdot\frac{54}{35}\cdot\frac{25}{21}\cdot\frac{49}{15}} \\
&= \sqrt{\frac{396900}{11025}} = \sqrt{36} = 6\,.
\end{aligned}$$

קשה להאמין שהיינו "מנחשים" שלמשולש:

$$\left(\frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15}\right)$$

אותו היקף ושטח כמו $(3,4,5)$!

15.4 הוכחה של הנוסחה של הרון (Heron)

משפט 15.1

נתון משולש עם צלעות A,B,C באורכים a,b,c, בהתאמה, $S_{\triangle ABC}$, שטח המשולש, הוא:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,$$

כאשר s הוא מחצית ההיקף: $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

טענה: אם ϕ,θ,ψ הן זוויות של משולש כך ש־$\phi+\theta+\psi=\pi$, אזי:

$$\tan\phi + \tan\theta + \tan\psi = \tan\phi\tan\theta\tan\psi\,. \tag{15.17}$$

הוכחת הטענה: חישוב מהזהות הטריגונומטרית בסעיף **??**: נותן:

$$\begin{aligned}
\tan\psi &= \tan(\pi-(\phi+\theta)) = -\tan(\phi+\theta) \\
&= \frac{\tan\phi+\tan\theta}{\tan\phi\tan\theta-1} \\
\tan\phi\tan\theta\tan\psi &= \tan\phi+\tan\theta+\tan\psi\,.
\end{aligned}$$

∎

הוכחה של הנוסחה של הרון: ממשוואות **??-??**:

$$
\begin{aligned}
S_{\triangle ABC} &= r^2\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\right)\\
&= r^2\left(\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}\right)\\
&= r^2\left(\frac{u}{r}\frac{v}{r}\frac{w}{r}\right)\\
&= \frac{1}{r}\cdot u\,v\,w = \frac{s}{S_{\triangle ABC}}\,u\,v\,w\\
S^2_{\triangle ABC} &= s\,u\,v\,w\,.
\end{aligned}
$$

$s=u+v+w$ ולכן:

$$
\begin{aligned}
s-a &= (u+v+w)-(w+v)=u\\
s-b &= (u+v+w)-(u+w)=v\\
s-c &= (u+v+w)-(u+v)=w\,,
\end{aligned}
$$

ואנו מקבלים את הנוסחה של הרון:

$$
\begin{aligned}
S^2_{\triangle ABC} &= s\,u\,v\,w = s(s-a)(s-b)(s-c)\\
S_{\triangle ABC} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.
\end{aligned}
$$

∎

מקורות

פרק זה מבוסס על [?]. ברבש [?] מראה שאם נתון משולש שווה־צלעות, קיימים משולשים לא חופפים עם אותו היקף ואותו שטח, אולם ההוכחה שלה לא כוללת בנייה. המשוואה **??** היא **עקומה אליפטית** נושא שנחקר לעומק על ידי מתמטיקאים.

פרק 16 בניית מצולע משוכלל עם 17 צלעות

פרק זה מציג את החישוב של Gauss שהראה שניתן לבנות באמצעות סרגל ומחוגה **heptadecagon**, מצולע משוכלל עם 17 צלעות. נציג גם בניה של המצולע ובנוסף בניות של משולש משוכלל ומחומש משוכלל.

16.1 בניה של מצולעים משוכללים

16.1.1 היסטוריה

היוונים ידעו לבנות מצולעים משוכללים מסויימים עם סרגל ומחוגה: משולש, ריבוע, מחומש ומצולע משוכלל עם 15 צלעות. כמובן, בהינתן מצולע משוכלל עם n צלעות, קל לבנות מצולע עם $2n$ צלעות על ידי בניית חוצי הצלעות.

לא הייתה התקדמות במשך אלפיים שנה עד שבשנת 1796, קצת לפני יום הולדתו ה־19, Carl Friedrich Gauss התעורר בוקר אחד ולאחר "מחשבה מרוכזת" מצא דרך לבנות מצולע משוכלל עם 17 צלעות. הישג זה עודד אותו להיות מתמטיקאי.

הבניה של מצולע משוכלל עם 17 צלעות היתה אבן דרך למשפט Gauss-Wantzel: מצולע משוכלל עם n צלעות ניתן לבנות עם סרגל ומחוגה אם ורק אם n הוא מכפלה של חזקה של 2 ואפס או יותר מספרי Fermat ראשונים **שונים** $2^{2^k}+1$. מספרי Fermat הראשונים הידועים הם:[1]

$$F_0 = 3,\ F_1 = 5,\ F_2 = 17,\ F_3 = 257,\ F_4 = 65537\,.$$

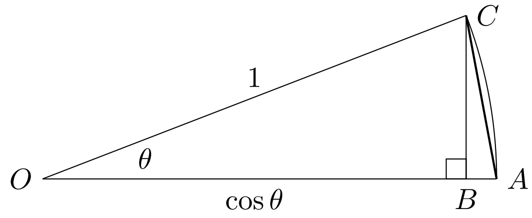
מצולע משוכלל עם 257 צלעות נבנה לראשונה על ידי Magnus Georg Paucker ב־1822 ועל ידי Friedrich Julius Richelot ב־1832. ב־1894 Johann Gustav Hermes טען שבנה מצולע משוכלל עם 65537 צלעות. כתב היד שלו נשמר באוניברסיטת Göttigen.

נתון קטע קו שאורכו מוגדר כ־1, האורכים שניתנים לבנייה הם אלה שניתן לקבל מאורכים קיימים תוך שימוש בפעולות $\{+,-,\times,/,\sqrt{}\}$.

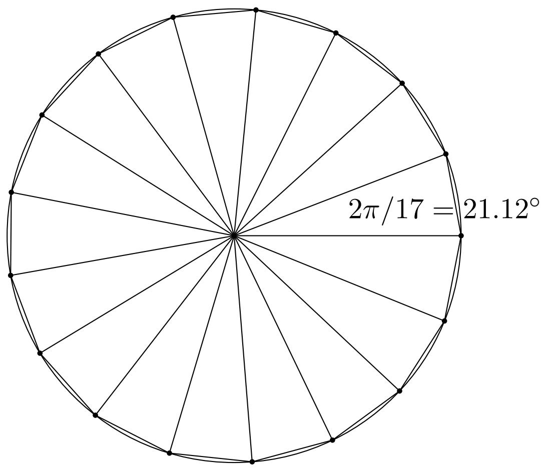
16.1.2 הקוסינוס של הזווית המרכזית

כדי לבנות מצולע משוכלל מספיק לבנות קטע קו באורך $\cos\theta$, כאשר θ היא הזווית המרכזית במעגל היחידה עליה נשען המיתר שהוא צלע של המצולע. נתון קטע הקו $\overline{OB}=\cos\theta$, בנו אנך ב־B וסמנו את החיתוך שלו עם מעגל היחידה ב־C. אזי $\overline{OC}=1$ ו־$\overline{OB}=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OC}}=\cos\theta$. המיתר $\overline{AC}$ הוא צלע של המצולע.

[1] הוכח שעבור $5 \le k \le 32$ מספרי Fermat אינם ראשוניים.



הזווית המרכזית של מצולע משוכלל עם 17 צלעות היא $\frac{2\pi}{17}$ רדיאנים או $\frac{360^\circ}{17} \approx 21.12^\circ$.



Gauss הראה ש:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) &= -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\\ &\quad \frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\,.\end{aligned}$$

ערך זה ניתן לחשב תוך שימוש בפעולות $\{+,-,\times,/,\sqrt{}\}$ ולכן ניתן לבנות את המצולע.

16.2 שורשי היחידה

נשתמש במשפט שלהלן ללא הוכחה:

משפט 16.1 (המשפט הבסיסי של אלגברה)
לכל פולינום ממעלה n (עם מקדמים מרוכבים) יש בדיוק n שורשים (מרוכבים).

נתבונן במשוואה $x^n-1=0$ עבור כל מספר שלם $n>1$. שורש אחד הוא $x=1$. לפי משפט **??** קיימים $n-1$ שורשים נוספים. נסמן שורש אחד מתוכם ב־r כך ש־$r^n=1$. r נקרא **שורש של היחידה** (**root of unity**).

נתבונן כעת ב־r^2. אנו רואים ש:

$$(r^2)^n=(r^n)^2=1^2=1\,.$$

חישוב דומה עבור כל חזקה של r מראה שכל החזקות הם שורשי היחידה:

$$1, r, r^2, \ldots, r^{n-2}, r^{n-1}.$$

משפט 16.2
יהי n ראשוני ו־r שורש היחידה מסדר n. אזי $\{1, r, r^2, \ldots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$ שונים זה מזה ולכן הם מהווים את **כל** שורשי היחידה מסדר n.

הוכחה: נניח ש־$r^i = r^j$ עבור מספרים כלשהם $1 \leq i < j \leq n$. $1 = r^{j-i} = r^j/r^i$, כלומר, קיים מספר m, $m < n$, כך ש־$r^m = 1$. נניח ש־m הוא המספר הקטן ביותר עם תכונה זו. לפי חילוק של שלמים עם שארית, $n = ml + k$ עבור $0 < l < n$, $0 \leq k < m$:

$$1 = r^n = r^{ml+k} = (r^m)^l \cdot r^k = 1^l \cdot r^k = r^k,$$

ולכן $0 \leq k < m$ ו־$r^k = 1$, סתירה להנחה ש־m הוא המספר הקטן ביותר המקיים את התנאי. מכאן ש־$k = 0$ ו־$n = ml$, כך ש־n אינו ראשוני. ∎

נשתמש במשפט שלהלן ללא הוכחה:

משפט 16.3
יהיו $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ השורשים של פולינום $f(x)$ מסדר n. אזי:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-1})(x - a_n).$$

מהנוסחה של Vieté (עמוד 82 של [?]) מתקבלים המקדמים של הפולינום כביטויים עם השורשים. עבור x^{n-1} המקדם הוא:

$$-(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n).$$

בפולינום $x^n - 1$, ברור שהמקדם של x^{n-1} הוא אפס ולכן:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} = 0.$$

נשמתמש בעובדה זו בצורה:

$$r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} = -1.$$

עבור מצולע משוכלל עם 17 צלעות המשוואה היא:

$$r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + r^7 + r^8 + r^9 + r^{10} + r^{11} + r^{12} + r^{13} + r^{14} + r^{15} + r^{16} = -1,$$

16.3 ההוכחה של Gauss שקיימת בניה של המצולע

אין חובה לעבוד עם השורשים בסדר הטבעי שלהם $r, r^2, \ldots, r^{16}$. החזקות של r^3 נותנות אם כל השורשים אבל בסדר שונה. עבור $k < 17$, $r^{17m+k} = (r^{17})^m \cdot r^k = 1^m \cdot r^k = r^k$, ולכן רשמנו את החזקות כשאריות לאחר חלוקה ב־17.

$$r^1,\ r^{1\cdot 3=3},\ r^{3\cdot 3=9},\ r^{9\cdot 3=27=10},\ r^{10\cdot 3=30=13},\ r^{13\cdot 3=39=5},\ r^{5\cdot 3=15},\ r^{15\cdot 3=45=11},$$
$$r^{11\cdot 3=33=16},\ r^{16\cdot 3=48=14},\ r^{14\cdot 3=42=8},\ r^{8\cdot 3=24=7},\ r^{7\cdot 3=21=4},\ r^{4\cdot 3=12},\ r^{12\cdot 3=36=2},\ r^{2\cdot 3=6}.$$

חשוב שתבדקו שהרשימה כוללת את כל 16 השורשים בדיוק פעם אחת.

המטרה של Gauss היתה למצוא את ערך השורש r על ידי פתרון של משוואות ריבועיות, כך שניתן לבנות אותו עם סרגל ומחוגה. נתבונן במשוואה הריבועית:

$$x^2 + px + q = 0\,,$$

ונניח שהשורשים שלה הם: a, b. אזי:

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab\,.$$

לכן $p = -(a+b)$ ו־$q = ab$.

אם **נתונים** $a+b$ ו־ab, נוכל לרשום את המשוואה הריבועית עבורה הם השורשים.[2]

יהי a_0 החיבור של השורשים במקומות האי־זוגיים ברשימה לעיל:

$$a_0 = r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2\,,$$

ויהי a_1 הסכום של השורשים במקומות הזוגיים ברשימה:

$$a_1 = r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6\,.$$

כדי לקבל את a_0, a_1 כשורשים של משוואה ריבועית, תחילה נחשב את הסכום שלהם:

$$a_0 + a_1 = r + r^2 + \cdots + r^{16} = -1\,.$$

כדי למצוא את המשוואה הריבועית עלינו לחשב את $a_0 a_1$. החישוב מעט מסורבל ומוצג באיור **??**. הערכים של $r^i r^j$ רשומים לאחר חישוב $r^{(i+j) \bmod 17}$. מתחת לכל שורש נמצא מספר המופעים שלו עד כה; בדקו שכל שורש מופיע בדיוק ארבע פעמיים כך שערכה של המכפלה הוא -4.

מ־$a_0+a_1=-1$ ו־$a_0, a_1=-4$, אנו יודעים ש־a_0, a_1 הם השורשים של המשוואה:

$$x^2 + x - 4 = 0\,.$$

[2] ראו פרק **??** המציג שיטה למציאת שורשים של משוואה ריבועית המבוססת על הרעיון הזה.

$$
\begin{aligned}
a_0a_1 &= (r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2)\cdot \\
&\quad (r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6) \\
&= \underset{1}{r^4} + \underset{1}{r^{11}} + \underset{1}{r^6} + \underset{1}{r^{12}} + \underset{1}{r^{15}} + \underset{1}{r^8} + \underset{1}{r^{13}} + \underset{1}{r^7} + \\
&\quad \underset{2}{r^{12}} + \underset{1}{r^2} + \underset{1}{r^{14}} + \underset{1}{r^3} + \underset{2}{r^6} + \underset{1}{r^{16}} + \underset{2}{r^4} + \underset{2}{r^{15}} + \\
&\quad \underset{2}{r^{16}} + \underset{3}{r^6} + \underset{1}{r^1} + \underset{2}{r^7} + \underset{1}{r^{10}} + \underset{2}{r^3} + \underset{2}{r^8} + \underset{2}{r^2} + \\
&\quad \underset{2}{r^1} + \underset{3}{r^8} + \underset{3}{r^3} + \underset{1}{r^9} + \underset{3}{r^{12}} + \underset{1}{r^5} + \underset{2}{r^{10}} + \underset{3}{r^4} + \\
&\quad \underset{3}{r^2} + \underset{2}{r^9} + \underset{4}{r^4} + \underset{3}{r^{10}} + \underset{2}{r^{13}} + \underset{4}{r^6} + \underset{2}{r^{11}} + \underset{2}{r^5} + \\
&\quad \underset{3}{r^{11}} + \underset{3}{r^1} + \underset{3}{r^{13}} + \underset{4}{r^2} + \underset{2}{r^5} + \underset{3}{r^{15}} + \underset{4}{r^3} + \underset{2}{r^{14}} + \\
&\quad \underset{3}{r^7} + \underset{3}{r^{14}} + \underset{3}{r^9} + \underset{4}{r^{15}} + \underset{4}{r^1} + \underset{4}{r^{11}} + \underset{3}{r^{16}} + \underset{4}{r^{10}} + \\
&\quad \underset{4}{r^5} + \underset{4}{r^{12}} + \underset{4}{r^7} + \underset{4}{r^{13}} + \underset{4}{r^{16}} + \underset{4}{r^9} + \underset{4}{r^{14}} + \underset{4}{r^8} \\
&= -4\,.
\end{aligned}
$$

איור 16.1: החישוב של a_0a_1

השורשים הם:

$$a_{0,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}\,.$$

יהי b_0, b_1, b_2, b_3 הסכום של כל שורש רביעי החל מ־r^1, r^3, r^9, r^{10}, בהתאמה:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= r^1 + r^{13} + r^{16} + r^4 \\
b_1 &= r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12} \\
b_2 &= r^9 + r^{15} + r^8 + r^2 \\
b_3 &= r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6\,.
\end{aligned}
$$

בדקו ש־$b_0 + b_2 = a_0, b_1 + b_3 = a_1$ (איורים **??**, **??**).

נסכם את החישובים:

$$
\begin{aligned}
b_0 + b_2 &= a_0 \\
b_0b_2 &= -1 \\
b_1 + b_3 &= a_1 \\
b_1b_3 &= -1\,.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} b_0b_2 &= (r + r^{13} + r^{16} + r^4) \times \\ &\quad (r^9 + r^{15} + r^8 + r^2) \\ &= r^{10} + r^{16} + r^9 + r^3 + \\ &\quad r^5 + r^{11} + r^4 + r^{15} + \\ &\quad r^8 + r^{14} + r^7 + r^1 \ + \\ &\quad r^{13} + r^2 + r^{12} + r^6 \\ &= -1\,. \end{aligned}$$

איור 16.2: החישוב של b_0b_2

$$\begin{aligned} b_1b_3 &= (r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12}) \times \\ &\quad (r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6) \\ &= r^{13} + r^{14} + r^{10} + r^9 + \\ &\quad r^{15} + r^{16} + r^{12} + r^{11} + \\ &\quad r^7 + r^8 + r^4 + r^3 \qquad + \\ &\quad r^5 + r^6 + r^2 + r^1 \\ &= -1\,. \end{aligned}$$

איור 16.3: החישוב של b_1b_3

b_0, b_2 הם השורשים של:

$$x^2 - a_0x - 1 = 0\,,$$

ו־b_1, b_3 הם השורשים של:

$$x^2 - a_1x - 1 = 0\,.$$

מהנוסחה לפתרון משוואות ריבועיות ומהערכים שחישבנו קודם עבור a_0, a_1, מתקבלים השורשים b_0, b_1 (איור **??**, **??**). לבסוף יהי c_0, c_4 הסכום של כל שורש שמיני החל מ־r^1, r^{13}, בהתאמה:[3]

$$\begin{aligned} c_0 &= r^1 + r^{16} \\ c_4 &= r^{13} + r^4 \\ c_0 + c_4 &= r^1 + r^{16} + r^{13} + r^4 = b_0 \\ c_0c_4 &= (r^1 + r^{16}) \cdot (r^{13} + r^4) \\ &= r^{14} + r^5 + r^{12} + r^3 = b_1\,. \end{aligned}$$

[3] יש סכומים נוספים אבל שני אלה יספיקו

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \frac{a_0+\sqrt{a_0^2+4}}{2}\\
&= \frac{\dfrac{(-1+\sqrt{17})}{2}+\sqrt{\left[\dfrac{(-1+\sqrt{17})}{2}\right]^2+4}}{2}\\
&= \frac{(-1+\sqrt{17})+\sqrt{\left[-1+\sqrt{17}\right]^2+16}}{4}\\
&= \frac{(-1+\sqrt{17})+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\,,
\end{aligned}
$$

איור 16.4: החישוב של b_0

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{a_1+\sqrt{a_1^2+4}}{2}\\
&= \frac{\dfrac{(-1-\sqrt{17})}{2}+\sqrt{\left[\dfrac{(-1-\sqrt{17})}{2}\right]^2+4}}{2}\\
&= \frac{(-1-\sqrt{17})+\sqrt{\left[-1-\sqrt{17}\right]^2+16}}{4}\\
&= \frac{(-1-\sqrt{17})+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}\,.
\end{aligned}
$$

איור 16.5: החישוב של b_1

c_0, c_4 הם השורשים של:

$$y^2-b_0y+b_1=0\,.$$

נראה שמספיק לחשב את השורש $c_0=r^1+r^{16}$ (איור **??**).

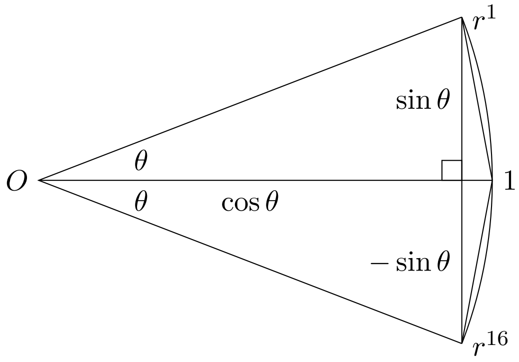
$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{b_0+\sqrt{b_0^2-4b_1}}{2} \\
&= \frac{\frac{(-1+\sqrt{17})+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}}{2} + \\
&\quad \frac{\sqrt{\left[\frac{(-1+\sqrt{17})+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\right]^2-4\left[\frac{(-1-\sqrt{17})+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}\right]}}{2} \\
&= -\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+ \\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{\left[(-1+\sqrt{17})+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right]^2-16\left[(-1-\sqrt{17})+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right]} \\
&= -\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+ \\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{(-1+\sqrt{17})^2+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}+(34-2\sqrt{17})-} \\
&\quad \overline{\left[(-16-16\sqrt{17})+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right]} \\
&= -\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+ \\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{68+12\sqrt{17}+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}
\end{aligned}
$$

איור 16.6: החישוב של c_0

סיימנו כי:

$$c_0 = r_1 + r_{16} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)\,.$$

קואורדינטות ה־y של r_1, r_{16} שוות עם סימנים הפוכים ולכן הסכום שלהם אפס. קואורדינטות ה־x נספרות פעמיים:



הוכחנו שניתן לבנות קטע קו באורך הקוסינוס של הזווית המרכזית של מצולע משוכלל עם 17 צלעות, כי הוא מורכב רק ממספרים רציונליים והפעולות $\{+,-,\times,/,\sqrt{}\}$:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) \quad = \quad & -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\\ & \frac{1}{16}\sqrt{68+12\sqrt{17}+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\end{aligned}$$

16.4 השורשים כמספרים מרוכבים

נסכם את הייצוג של השורשים של $x^{17}-1$ כמספרים מרוכבים.[4]

השורש r של x^n-1 הוא

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\,,$$

כי לפי נוסחאת de Moivre:

$$\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^n = \cos\left(\frac{2\cdot n\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\cdot n\pi}{n}\right)=1\,,$$

[4] מספרים מרוכבים עומדים במרכז החקר של השורשים של פולינומים. קוראים שלא מכירים את הנושא יכולים לדלג על סעיף זה.

הקשר בין c_0 לבין הקוסינוס של הזווית המרכזית של המצולע מתקבל בקלות:

$$\begin{aligned}
c_0 &= r_1 + r_{16} \\
&= \left[\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right)\right] + \left[\cos\left(\frac{2\cdot 16\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 16\pi}{17}\right)\right] \\
&= \left[\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{-2\pi}{17}\right)\right] + i\left[\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \sin\left(\frac{-2\pi}{17}\right)\right] \\
&= 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i\cdot 0 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right).
\end{aligned}$$

16.5 פיתוח הנוסחה של Gauss

הנוסחה שקיבלנו עבור $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ איננה הנוסחה שניתנה על ידי Gauss עצמו (ראו עמוד 458 של [?] ועמוד 68 של [?]). את הנוסחה שקיבלתי מצאתי רק ב־[?] ביחד עם תרגיל להמיר אותה לנוסחה של Gauss. סעיף זה פותר את התרגיל.

נפשט את הביטוי $2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}$:

$$\begin{aligned}
2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} &= -2\sqrt{34-2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
&\quad 4\sqrt{34-2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34-2\sqrt{17}} \\
&= 2\sqrt{34-2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
&\quad -4\sqrt{34-2\sqrt{17}} \\
&= 2(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34-2\sqrt{17}}.
\end{aligned}$$

נזכור את הביטוי $-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}$ ונפשט את הביטוי הראשון. נרבע אותו ואז נוציא שורש הריבועי:

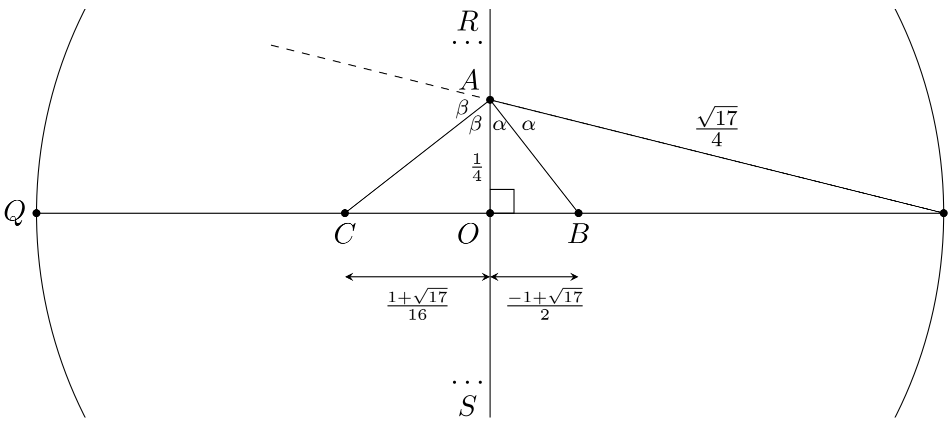
$$\begin{aligned}
2(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} &= 2\sqrt{\left[(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right]^2} \\
&= 2\sqrt{(18+2\sqrt{17})(34-2\sqrt{17})} \\
&= 2\sqrt{(18\cdot 34 - 4\cdot 17) + \sqrt{17}(2\cdot 34 - 2\cdot 18)} \\
&= 2\cdot 4\sqrt{34+2\sqrt{17}}.
\end{aligned}$$

נציב את הביטויים ונקבל את הנוסחה של Gauss:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) &= -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+ \\
&\quad \frac{1}{16}\sqrt{68+12\sqrt{17}+2\cdot 4\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}} \\
&= -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+ \\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}
\end{aligned}$$

16.6 בניה עם סרגל ומחוגה

בנו מעגל יחידה שמרכזו O, עם קוטרים ניצבים $\overline{PQ}, \overline{RS}$.



בנו נקודה A כך ש־$\overline{OA} = \frac{1}{4}\overline{OR}$. לפי משפט פיתגורס, $\overline{AP} = \sqrt{(1/4)^2+1^2} = \sqrt{17}/4$.

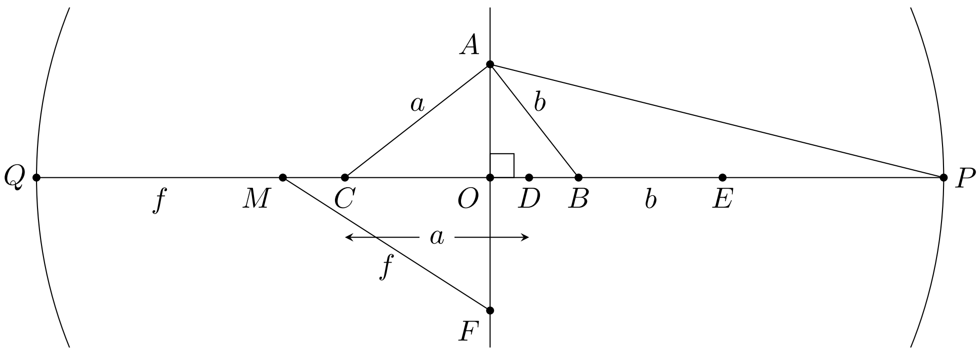
יהי B נקודת החיתוך של $\angle OAP$ עם ציר ה־x, ויהי C נקודת החיתוך של הזווית המשלימה ל־$\angle OAP$ עם ציר ה־x. לפי משפט חוצה הזווית [?]:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{OB}}{\overline{BP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}} \\
\frac{\overline{OB}}{1-\overline{OB}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4} \\
\overline{OB} &= \frac{1}{1+\sqrt{17}} = \frac{1}{1+\sqrt{17}}\cdot\frac{1-\sqrt{17}}{1-\sqrt{17}} \\
&= \frac{-1+\sqrt{17}}{16},
\end{aligned}$$

ו:

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{OC}}{\overline{CP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}}\\
\frac{\overline{OC}}{1+\overline{OC}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4}\\
\overline{OC} &= \frac{1}{-1+\sqrt{17}} = \frac{1}{-1+\sqrt{17}}\cdot\frac{1+\sqrt{17}}{1+\sqrt{17}}\\
&= \frac{1+\sqrt{17}}{16}\,.
\end{aligned}
$$

בנו D על $\overline{OP}$ כך ש-$\overline{CD}=\overline{CA}$:



$$
\begin{aligned}
\overline{CD}=\overline{CA} &= \sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OC}^2}\\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{17}}{16}\right)^2}\\
&= \frac{1}{16}\sqrt{34+2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}
$$

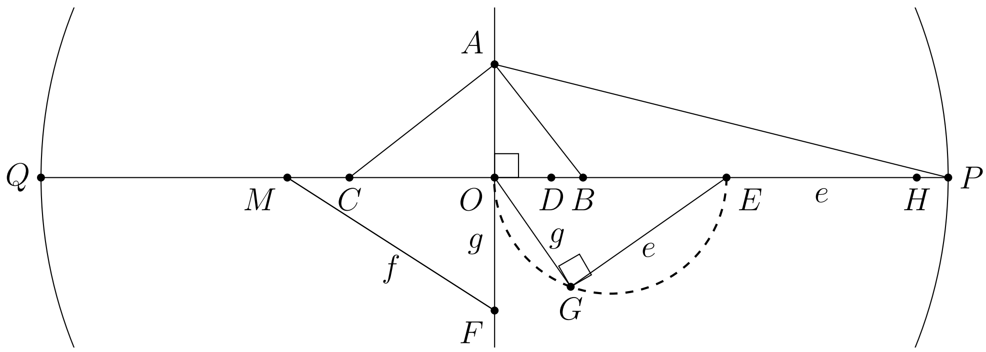
בנו E על $\overline{OP}$ כך ש-$\overline{BE}=\overline{BA}$:

$$
\begin{aligned}
\overline{BE}=\overline{BA} &= \sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2}\\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{17}}{16}\right)^2}\\
&= \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}
$$

בנו M, נקודת האמצע של $\overline{QD}$ ובנו F על $\overline{OS}$ כך ש־$\overline{MF}=\overline{MQ}$:

$$\begin{aligned}
\overline{MF}=\overline{MQ} &= \frac{1}{2}\overline{QD}=\frac{1}{2}(\overline{QC}+\overline{CD})=\frac{1}{2}((1-\overline{OC})+\overline{CD}) \\
&= \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1+\sqrt{17}}{16}\right)+\frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{16}\right] \\
&= \frac{1}{32}\left(15-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right).
\end{aligned}$$

בנו מעגל שקוטרו $\overline{OE}$. בנו מיתר $\overline{OG}=\overline{OF}$. שימו לב ש־$\overline{MO}=1-\overline{MQ}=1-\overline{MF}$:



$$\begin{aligned}
\overline{OG}=\overline{OF} &= \sqrt{\overline{MF}^2-\overline{MO}^2}=\sqrt{\overline{MF}^2-(1-\overline{MF})^2} \\
&= \sqrt{2\overline{MF}-1} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\left(15-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)-1} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}.
\end{aligned}$$

$\overline{OE}$ הוא קוטר של המעגל כך ש־$\angle OGE=90^\circ$. בנו H על $\overline{OP}$ כך ש־$\overline{EH}=\overline{EG}$:

$$\begin{aligned}
\overline{EH}=\overline{EG} &= \sqrt{\overline{OE}^2-\overline{OG}^2}=\sqrt{(\overline{OB}+\overline{BE})^2-\overline{OG}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{16}+\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}\right)^2-\frac{1}{16}\left(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)} \\
&= \frac{1}{16}\sqrt{\left((18-2\sqrt{17})+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}+(34-2\sqrt{17})\right)+} \\
&\qquad \overline{\left(16+16\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)} \\
&= \frac{1}{16}\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}}.
\end{aligned}$$

נחשב את $\overline{OE}$:

$$\begin{aligned}\overline{OE}=\overline{OB}+\overline{BE} &= \frac{-1+\sqrt{17}}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}\\ &= \frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right).\end{aligned}$$

לבסוף, $\overline{OH}=\overline{OE}+\overline{EH}$ שהוא $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ כפי שמופיע באיור **??**.

16.7 בניית משולש שווה־צלעות

בניה בטריגונומטריה: הזווית המרכזית היא $360°/3 = 120°$ וניתן לחשב את הקוסינוס מהנוסחה של הקוסינוס של הסכום של שתי זוויות:

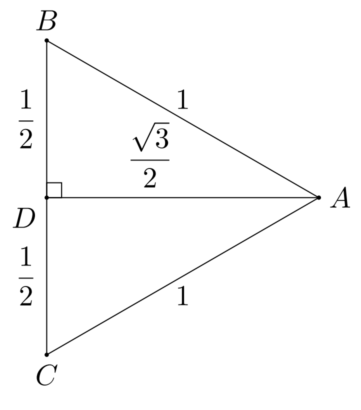
$$\cos 120° = \cos(90° + 30°) = \cos 90° \cos 30° - \sin 90° \sin 30° = 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

ערך זה ניתן לבניה.

בניה בגיאומטריה: נתבונן במשולש שווה־צלעות ABC שאורך צלעותיו 1. יהי $\overline{AD}$ הגובה מ־A ל־$\overline{BC}$. $\overline{AB}=\overline{AC}$ ולכן קטע הקו חוצה את $\overline{BC}$. מכאן ש:

$$\overline{AD}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ ניתנים לבנייה ולכן גם משולש שווה־צלעות.



16.8 בניית מחומש משוכלל

בניה בטריגונומטריה: הזווית המרכזית היא $72^\circ = 360^\circ/5$. נחשב $\cos 36^\circ$ תוך שימוש בזהויות הטריגונומטריות עבור 2θ ו־$\theta/2$:

$$\begin{aligned} 0 = \cos 90^\circ &= \cos(72^\circ + 18^\circ) \\ &= (2\cos^2 36^\circ - 1)\sqrt{\frac{1+\cos 36^\circ}{2}} - \\ &\qquad 2\sin 36^\circ \cos 36^\circ \sqrt{\frac{1-\cos 36^\circ}{2}}\,. \end{aligned}$$

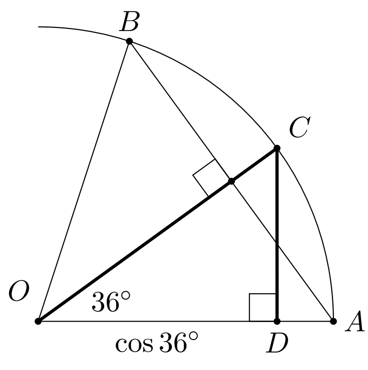
נסמן $x = \cos 36^\circ$ ונחשב:

$$\begin{aligned} (2x^2-1)\sqrt{\frac{1+x}{2}} &= 2\sqrt{1-x^2}\cdot x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{2}} \\ (2x^2-1)\sqrt{1+x} &= 2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}\cdot x\cdot\sqrt{1-x} \\ 4x^2-2x-1 &= 0\,. \end{aligned}$$

מהפתרון למשוואה הריבועית מתקבל ערך שניתן לבניה:

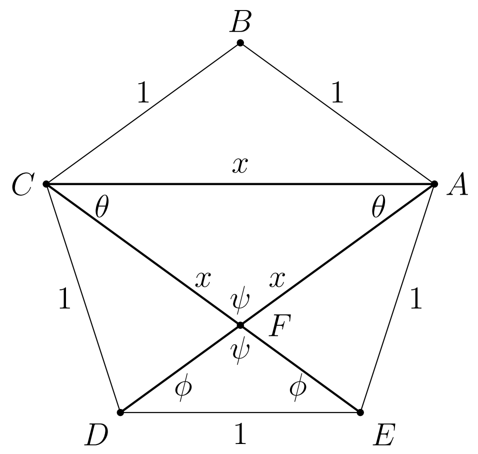
$$\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\,.$$

האיור שלהלן מראה שניתן לבנות מחומש משוכלל מ־$\cos 36^\circ$. מ־D במרחק $\cos 36^\circ$ מ־O בנו אנך ל־$\overline{OA}$ החותך את מעגל היחידה ב־C. בנו $\overline{OC}$. בנו אנך מ־A ל־$\overline{OC}$. החיתוך שלו עם מעגל היחידה ב־B מגדיר את $\overline{AB}$, הצלע של המחומש החסום על ידי המעגל.



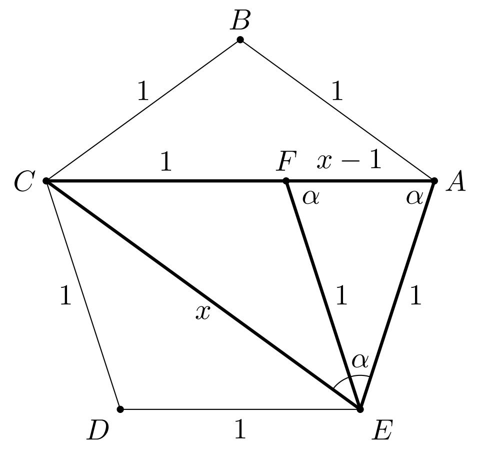
בניה בגיאומטריה:

יהי $ABCDE$ מחומש משוכלל. כל הצלעות וכל הזוויות הפנימיות שוות. גם כל האלכסונים שווים. למשל, $\triangle ABC \cong \triangle AED$ לפי צלע־זווית־צלע, כך ש־$\overline{AC} = \overline{AD}$. נסמן את אורכי הצלעות ב־1 ואורכי האלכסונים ב־x.



$\triangle ACE \cong \triangle CAD$ לפי צלע־צלע־צלע כך ש־$\angle ACE = \angle CAD = \theta$. $\triangle AED \cong \triangle CDE$ לפי צלע־צלע־צלע כך ש־$\angle ADE = \angle CED = \phi$. $\angle AFC = \angle DFE = \psi$ הן זוויות קודקודיות. $\psi + 2\theta = 180°$ וגם $\psi + 2\phi = 180°$, ולכן $\theta = \phi$. לפי זוויות מתחלפות $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$.

בנו קו דרך E המקביל ל־$\overline{DC}$ ותהי F נקודת החיתוך שלו עם $\overline{AC}$.



$\triangle ACE$ הוא משולש שווה־שוקיים עם זוויות בסיס α. $\triangle AEF$ הוא גם משולש שווה־שוקיים ולכן $\angle AFE = \angle FAE = \alpha$. מכאן ש־$\triangle ACE \sim \triangle AEF$:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}\,.$$

נכפיל ונקבל את המשוואה הריבועית:

$$x^2 - x - 1 = 0\,,$$

שהשורש החיובי שלה הוא:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,$$

ניתן לבנות.

מקורות

הפרק מבוסס על [?]. אפשר גם לעיין בתרגום של ספרו של Gauss [?]. הבניה של המצולע לקוחה מ־[?]. ניתן למצוא בניות אחרות ב־[?]. הבניה הטריגונומטרית של מחומש משוכלל לקוחה מ־[?]. הבניה הגיאומטרית של מחומש משוכלל מתקבלת מהפתרונות של התרגילים 2.3.3–2.3.4 בעמוד 28 של [?].

Bibliography

[1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK (Fifth Edition)*. Springer, 2014.

[2] Roger C. Alperin. A mathematical theory of origami constructions and numbers. *New York Journal of Mathematics*, 6:119–133, 2000.

[3] Marita Barabash. A non-visual counterexample in elementary geometry. *The College Mathematics Journal*, 36(5), 2005.

[4] Moti Ben-Ari. The many guises of induction. `https://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/mathematics`, 2021. English and Hebrew.

[5] Jörg Bewersdorff. *Galois Theory for Beginners: A Historical Perspective*. American Mathematical Society, 2006.

[6] Benjamin Bold. *Famous Problems of Mathematics: A History of Constructions with Straight Edge and Compass*. Van Nostrand, 1969.

[7] Phillips Verner Bradford. Visualizing solutions to n-th degree algebraic equations using right-angle geometric paths. Archived May 2, 2010, at the Wayback Machine, `https://web.archive.org/web/20100502013959/http://www.concentric.net/~pvb/ALG/rightpaths.html`, 2010.

[8] James J. Callagy. The central angle of the regular 17-gon. *The Mathematical Gazette*, 67(442):290–292, 1983. `https://wwww.jstor.org/stable/3617271`.

[9] Heinrich Dörrie. *100 Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*. Dover, 1965.

[10] Heinrich Dörrie. 100 problems of elementary mathematics: Their history and solution. Newly reworked by Michael Woltermann. `http://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/DorrieContents.htm`, 2010.

[11] David Eppstein. Twenty proofs of Euler's formula: $V - E + F = 2$. `https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/`.

[12] Karl Friedrich Gauss. *Disquisitiones Arithmeticae*. Yale University Press, 2006. Editors: Todd W. Bressi and Paul Groth.

[13] David S. Gunderson. *Handbook of Mathematical Induction: Theory and Applications*. Mathematical Association of America, 2010.

[14] Thomas C. Hull. Solving cubics with creases: The work of Beloch and Lill. *American Mathematical Monthly*, 118(4):307–315, 2011.

[15] Norbert Hungerbühler. A short elementary proof of the Mohr-Mascheroni theorem. *American Mathematical Monthly*, 101(8):784–787, 1994.

[16] Robert J. Lang. Origami and geometric constructions. `http://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf`, 1996-–2015. Accessed 26/02/2020.

[17] Hwa Young Lee. Origami-constructible numbers. Master's thesis, University of Georgia, 2017.

[18] Po-Shen Loh. A different way to solve quadratic equations. `https://www.poshenloh.com/quadratic/`, 2019.

[19] Po-Shen Loh. A simple proof of the quadratic formula. `https://arxiv.org/abs/1910.06709`, 2019.

[20] Zohar Manna. *Mathematical Theory of Computing*. McGraw-Hill, 1974.

[21] George E. Martin. *Geometric Constructions*. Springer, 1998.

[22] William McCallum. A tale of two triangles: Heron triangles and elliptic curves. `http://blog.kleinproject.org/?p=4`, 2012.

[23] J.E. Miller. Langford's problem, remixed. `http://dialectrix.com/langford.html`, 2014.

[24] Liz Newton. The power of origami. `https://plus.maths.org/content/power-origami`. Accessed 26/02/2020.

[25] Timothy Peil. The rusty compass theorem. `http://web.mnstate.edu/peil/geometry/C2EuclidNonEuclid/1Compass.htm`.

[26] Ramanujan. Squaring the circle. *Journal of the Indian Mathematical Society*, page 13, 1913. `http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram05.pdf`.

[27] Ramanujan. Modular equations and approximations to π. *Quarterly Journal Mathematics*, XLV:350–372, 1914.

[28] M. Riaz. Geometric solutions of algebraic equations. *American Mathematical Monthly*, 69(7):654–658, 1962.

[29] Tom Rike. Fermat numbers and the heptadecagon. `https://mathcircle.berkeley.edu/sites/default/files/BMC6/ps0506/Heptadecagon.pdf`, 2005.

[30] Timothy Sipka. Alfred Bray Kempe's "Proof" of the four-color theorem. *Math Horizons*, 10(2):21–26, 2002. `http://www.jstor.org/stable/25678395`.

[31] John Stillwell. *Mathematics and Its History (Third Edition)*. Springer, 2010.

[32] Moshe Stopel and Clara Ziskind, editors. *Geometric Constructions: Classical, Challenging and Computer Problems*. Sha-anan, 2015. (in Hebrew).

[33] Robin Thomas. An update on the four-color theorem. *Notices of the AMS*, 45(7):848–859, 1998. http://www.ams.org/notices/199807/thomas.pdf.

[34] Godfried Toussaint. A new look at Euclid's second proposition. *The Mathematical Intelligencer*, 15(3):12–23, 1993.

[35] Edward C. Wallace and Stephen F. West. *Roads to Geometry (Third Edition)*. Pearson, 2003.

[36] Wikipedia contributors. Angle bisector theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Angle_bisector_theorem&oldid=984147660, 2020.

[37] Wikipedia contributors. Five color theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Five_color_theorem&oldid=985970799, 2020.

[38] Wikipedia contributors. Heptadecagon — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Heptadecagon&oldid=975964212, 2020.

[39] Wikipedia contributors. Huzita–Hatori axioms — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Huzita%E2%80%93Hatori_axioms&oldid=934987320, 2020.

[40] Wikipedia contributors. Neusis construction — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Neusis_construction&oldid=997404224, 2020.

[41] Wikipedia contributors. Pentagon — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pentagon&oldid=983136827, 2020.

[42] Wikipedia contributors. Angle trisection — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Angle_trisection&oldid=1018496251, 2021.

[43] Wikipedia contributors. Four color theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Four_color_theorem&oldid=1014419511, 2021.

[44] Wikipedia contributors. Quadratrix of hippias — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quadratrix_of_Hippias&oldid=1009478839, 2021.