

# **Mathematische Überraschungen**

**Mordechai Ben-Ari**

**Übersetzung: .....**

# Vorwort

Wenn jeder die Mathematik in ihrem natürlichen Zustand kennen lernen würde, mit all den Herausforderungen, dem Spaß und den Überraschungen, die das mit sich bringt, würden wir meiner Meinung nach eine dramatische Veränderung sowohl in der Einstellung der Schüler zur Mathematik als auch in unserer Vorstellung davon, was es bedeutet, "gut in Mathe zu sein", erleben. Paul Lockhart

Ich bin wirklich hungrig nach Überraschungen, denn jede macht uns ein klein wenig, aber wesentlich schlauer.  
Tadashi Tokieda

Die Mathematik kann uns, wenn wir sie richtig angehen, viele angenehme Überraschungen bescheren. Dies wird durch eine Google-Suche nach "mathematischen Überraschungen" bestätigt, die überraschenderweise fast eine halbe Milliarde Einträge liefert. Was ist eine Überraschung? Die Ursprünge des Wortes gehen auf das Altfranzösische zurück und haben ihre Wurzeln im Lateinischen: "ur" (über) und "prendre" (ergreifen, ergreifen, ergreifen). Wörtlich bedeutet "überraschenüberholen". Als Substantiv bezeichnet Überraschung sowohl ein unerwartetes oder verwirrendes Ereignis oder einen Umstand als auch das Gefühl, das dadurch ausgelöst wird.

Betrachten wir zum Beispiel einen Auszug aus einer Vorlesung von Maxim Bruckheimer<sup>1</sup> über den Feuerbach-Kreis: "Zwei Punkte liegen auf einer und nur einer Geraden, das ist keine Überraschung. Drei Punkte liegen jedoch nicht notwendigerweise auf einer Geraden, und wenn bei einer geometrischen Untersuchung drei Punkte in eine Gerade "hineinfallen", ist das eine Überraschung, und häufig müssen wir diese Tatsache als ein zu beweisendes Theorem bezeichnen. Alle drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, liegen auf einem Kreis. Wenn jedoch vier Punkte auf demselben Kreis liegen, ist dies eine Überraschung, die als Theorem formuliert werden sollte. . . . Insofern die Anzahl der Punkte auf einer Geraden größer als 3 ist, ist der Satz umso überraschender. Ebenso ist der Satz umso überraschender, je größer die Anzahl der Punkte ist, die auf einem Kreis liegen, der größer als 4 ist. So ist die Aussage, dass es für jedes Dreieck neun zusammenhängende Punkte auf demselben Kreis gibt ... sehr überraschend. Und trotz des Ausmaßes der Überraschung ist der Beweis elegant und einfach."

---

<sup>1</sup>Maxim Bruckheimer war ein Mathematiker, der zu den Gründern der Open University UK gehörte und Dekan ihrer Fakultät für Mathematik war. Er war Leiter der Abteilung für naturwissenschaftliche Lehre am Weizmann Institute of Science.

In diesem Buch bietet Mordechai Ben-Ari eine reichhaltige Sammlung mathematischer Überraschungen, von denen die meisten weniger bekannt sind als der Feuerbach-Kreis und für die es gute Gründe gibt, sie aufzunehmen. Erstens sind die mathematischen Perlen dieses Buches, obwohl sie nicht in Lehrbüchern zu finden sind, mit nur einem High-School-Hintergrund zugänglich (und mit Geduld und Papier und Bleistift, denn Spaß gibt es nicht umsonst). Zweitens: Wenn ein mathematisches Ergebnis das in Frage stellt, was wir für selbstverständlich halten, sind wir tatsächlich überrascht (Kap. 1, 13). In ähnlicher Weise überraschen uns: die Cleverness eines Arguments (Kap. 2, 3), die Rechtfertigung der Möglichkeit einer geometrischen Konstruktion mit algebraischen Mitteln (Kap. 16), ein Beweis, der sich auf ein scheinbar nicht verwandtes Thema stützt (Kap. 4, 5), ein seltsamer Beweis durch Induktion (Kap. 6), neue Sichtweisen auf ein bekanntes Ergebnis (Kap. 7), ein scheinbar unbedeutender Satz, der zur Grundlage eines ganzen Bereichs der Mathematik wird (Kap. 8), unerwartete Inspirationsquellen (Kap. 9), reichhaltige Formalisierungen, die aus reinen Freizeitaktivitäten wie Origami entstehen (Kap. 10–12). Dies alles sind verschiedene Gründe für die Aufnahme der angenehmen, schönen und denkwürdigen mathematischen Überraschungen in dieses schöne Buch.

Bisher habe ich mich damit befasst, wie sich das Buch auf den ersten Teil der Definition von Überraschung, die kognitiv-rationalen Gründe für das Unerwartete, bezieht. Was den zweiten, den emotionalen Aspekt betrifft, so ist dieses Buch eine lebendige Umsetzung dessen, was viele Mathematiker über den Hauptgrund für die Beschäftigung mit der Mathematik behaupten: Sie ist faszinierend! Außerdem behaupten sie, dass die Mathematik sowohl unsere intellektuelle Neugier als auch unser ästhetisches Empfinden anregt und dass das Lösen eines Problems oder das Verstehen eines Konzepts eine geistige Belohnung darstellt, die uns dazu verleitet, weiter an weiteren Problemen und Konzepten zu arbeiten.

Es wurde gesagt, dass die Funktion eines Vorworts darin besteht, dem Leser zu sagen, warum er das Buch lesen sollte. Ich habe versucht, dies zu tun, aber ich glaube, dass die umfassendere Antwort von Ihnen, dem Leser, kommen wird, nachdem Sie es gelesen und erlebt haben, was die Etymologie des Wortes Überraschung nahelegt: von ihr überholt zu werden!

*Abraham Arcavi*

## Einleitung

Godfried Toussaints Artikel über den „kollabierenden Kompass“ hat einen tiefen Eindruck auf mich gemacht. Es wäre mir nie in den Sinn gekommen, dass der moderne Kompass mit einem Reibungsgelenk nicht derjenige ist, der zu Euklids Zeiten verwendet wurde. In diesem Buch präsentiere ich eine Auswahl von mathematischen Ergebnissen, die nicht nur interessant sind, sondern mich auch überrascht haben, als ich ihnen zum ersten Mal begegnete.

Die Mathematik, die für die Lektüre des Buches erforderlich ist, ist Mathematik für die Sekundarstufe, aber das bedeutet nicht, dass das Material einfach ist. Einige der Beweise sind recht lang und erfordern die Bereitschaft des Lesers, sich mit der Materie zu beschäftigen. Die Belohnung ist das Verständnis einiger der schönsten Ergebnisse der Mathematik. Das Buch ist kein Lehrbuch, denn das breite Spektrum der behandelten Themen lässt sich nicht in einen Lehrplan einordnen. Es eignet sich zur Vertiefung für Schüler der Sekundarstufe, für Seminare auf Hochschulniveau und für Mathematiklehrer.

Die Kapitel können unabhängig voneinander gelesen werden. (Eine Ausnahme ist, dass das Kapitel 10 über die Axiome des Origami eine Voraussetzung für die Kapitel 11, 12, die anderen Kapitel über Origami ist). Hinweise, die für alle Kapitel relevant sind, finden Sie unten in der Liste mit dem Titel Stil.

### Was ist eine Überraschung?

Es gab drei Kriterien für die Aufnahme eines Themas in das Buch:

- Der Satz hat mich überrascht. Besonders überraschend waren die Theoreme zur Konstruierbarkeit mit Lineal und Zirkel. Die äußerst reichhaltige Mathematik des Origami war fast schockierend: Als eine Mathematiklehrerin ein Projekt über Origami vorschlug, lehnte ich zunächst ab, weil ich bezweifelte, dass mit dieser Kunstform ernsthafte Mathematik verbunden sein könnte. Andere Themen wurden aufgenommen, weil ich zwar die Ergebnisse kannte, ihre Beweise aber durch ihre Eleganz und Zugänglichkeit überraschten, insbesondere der rein algebraische Beweis von Gauß, dass ein regelmäßiges Heptadeck konstruiert werden kann.
- Das Material kommt in Lehrbüchern für die Sekundarstufe und die Hochschule nicht vor, und ich habe diese Theoreme und Beweise nur in Lehrbüchern für Fortgeschrittene und in der Forschungsliteratur gefunden. Zu den meisten Themen gibt es Wikipedia-Artikel, aber man muss wissen, wo man suchen muss, und die Artikel sind oft sehr knapp gehalten.

- Die Theoreme und Beweise sind mit guten Kenntnissen der Sekundarschulmathematik zugänglich.

Jedes Kapitel schließt mit einem Absatz *Was ist die Überraschung?* der meine Wahl des Themas erklärt.

## Ein Überblick über den Inhalt

Kapitel 1 präsentiert Euklids Beweis, dass jede Konstruktion, die mit einem festen Zirkel möglich ist, auch mit einem kollabierenden Zirkel möglich ist. Es gibt viele Beweise, aber wie Toussaint zeigt, sind die meisten falsch, weil sie von Diagrammen abhängen, die die Geometrie nicht immer korrekt darstellen. Um zu verdeutlichen, dass man Diagrammen nicht trauen darf, stelle ich den berühmten angeblichen Beweis vor, dass jedes Dreieck gleichschenkeliges ist.

Im Laufe der Jahrhunderte versuchten Mathematiker erfolglos, einen beliebigen Winkel nur mit Hilfe eines Lineals und eines Zirkels zu Dreiteilung (in drei gleiche Teile zu zerlegen). Underwood Dudley hat eine umfassende Studie über Dreiteilung durchgeführt und dabei fehlerhafte Konstruktionen gefunden; die meisten Konstruktionen sind Annäherungen, die als genau bezeichnet werden. In Kapitel 2 werden zunächst zwei dieser Konstruktionen vorgestellt und die trigonometrischen Formeln entwickelt, die zeigen, dass es sich nur um Näherungen handelt. Um zu zeigen, dass eine Dreiteilung nur mit Lineal und Zirkel keine praktische Bedeutung hat, werden Dreiteilungen mit komplexeren Hilfsmitteln vorgestellt: Archimedes' *neusis* und Hippias' *quadratrix*. Das Kapitel endet mit dem Beweis, dass es unmöglich ist, einen beliebigen Winkel mit einem Lineal und einem Zirkel zu Dreiteilung.

Die Quadratur eines Kreises (wenn ein Kreis ein Quadrat mit demselben Flächeninhalt bildet) kann nicht mit Lineal und Zirkel durchgeführt werden, weil der Wert von  $\pi$  nicht konstruiert werden kann. In Kapitel 3 werden drei elegante Konstruktionen von Näherungen an  $\pi$  vorgestellt, eine von Kochański und zwei von Ramanujan. Das Kapitel schließt mit dem Nachweis, dass eine Quadratrix zur Quadratur eines Kreises verwendet werden kann.

Das Vier-Farben-Theorem besagt, dass es möglich ist, jede ebene Karte mit vier Farben zu färben, so dass keine Länder mit einer gemeinsamen Grenze mit der gleichen Farbe gefärbt werden. Der Beweis dieses Satzes ist äußerst kompliziert, aber der Beweis des Fünf-Farben-Satzes ist einfach und elegant, wie in Kapitel 4 gezeigt wird. In diesem Kapitel wird auch Percy Heawoods Beweis vorgestellt, dass Alfred Kempes "Beweis" des Vierfarbensatzes falsch ist.

Wie viele Wächter muss ein Kunstmuseum beschäftigen, damit alle Wände ständig von mindestens einem Wächter beobachtet werden? Der Beweis in Kapitel 5 ist ziemlich raffiniert, denn er verwendet Graphenfärbung, um ein auf den ersten Blick rein geometrisches Problem zu lösen.

Kapitel 6 stellt einige weniger bekannte Ergebnisse und ihre Beweise durch Induktion vor: Theoreme über Fibonacci- und Fermat-Zahlen, McCarthys 91-Funktion und das Josephus-Problem.

Kapitel 7 behandelt Po-Shen Lohs Methode zum Lösen quadratischer Gleichungen. Die Methode ist ein entscheidendes Element von Gauß' algebraischem Beweis, dass ein Heptadeck konstruiert werden kann (Kapitel 16). Das Kapitel enthält al-Khwarizmis geometrische Konstruktion für die Suche nach Wurzeln von quadratischen Gleichungen und eine geometrische Konstruktion, die von Cardano bei der Entwicklung der Formel für die Suche nach Wurzeln von kubischen Gleichungen verwendet wurde.

Die Ramsey-Theorie ist ein aktives Forschungsgebiet der Kombinatorik. Sie sucht nach Mustern in Teilmengen großer Mengen. In Kapitel 8 werden einfache Beispiele für Schur-Dreier, pythagoreische Dreiergruppen, Ramsey-Zahlen und das van der Waerden-Problem vorgestellt. Der Beweis des Satzes über pythagoräische Dreiergruppen wurde kürzlich mit Hilfe eines Computerprogramms auf der Grundlage der mathematischen Logik erbracht. Das Kapitel schließt mit einem Exkurs über das Wissen der alten Babylonier über die pythagoräischen Tripel.

C. Dudley Langford beobachtete seinen Sohn beim Spielen mit farbigen Blöcken und bemerkte, dass er sie in einer interessanten Reihenfolge angeordnet hatte. Kapitel 9 stellt sein Theorem über die Bedingungen vor, unter denen eine solche Folge möglich ist.

Kapitel 10 enthält die sieben Axiome des Origami, zusammen mit den detaillierten Berechnungen der analytischen Geometrie der Axiome und Charakterisierungen der Faltungen als geometrische Orte.

Kapitel 11 stellt die Methode von Eduard Lill und die von Margarita P. Beloch vorgeschlagene Origami-Faltung vor. Ich stelle die Lill-Methode als Zaubertrick vor, daher möchte ich sie hier nicht im Detail vorstellen.

Kapitel 12 zeigt, dass mit Origami Konstruktionen ausgeführt werden können, die mit Lineal und Zirkel nicht möglich sind: Dreiteilung eines Winkels, Verdopplung eines Würfels und Konstruktion eines Nonagons (ein regelmäßiges Vieleck mit neun Seiten).

Kapitel 13 stellt das Theorem von Georg Mohr und Lorenzo Mascheroni vor, dass jede Konstruktion mit Lineal und Zirkel auch mit einem Zirkel durchgeführt werden kann.

Die entsprechende Behauptung, dass nur ein Lineal ausreicht, ist falsch, weil ein Lineal keine Längen berechnen kann, die Quadratwurzeln sind. Jean-Victor Poncelet vermutete und Jakob Steiner bewies, dass ein Lineal ausreicht, wenn es irgendwo in der Ebene einen einzigen festen Kreis gibt (Kap. 14).

Wenn zwei Dreiecke denselben Umfang und dieselbe Fläche haben, müssen sie dann kongruent sein? Das scheint einleuchtend zu sein, aber es stellt sich heraus, dass das nicht stimmt, auch wenn man eine ganze Menge Algebra und Geometrie

braucht, um ein nicht kongruentes Paar zu finden, wie in Kap. 15 gezeigt wird.

Kapitel 16 präsentiert Gauß' Meisterstück: den Beweis, dass ein Heptadeck (ein regelmäßiges Polygon mit siebzehn Seiten) mit Hilfe eines Lineals und eines Zirkels konstruiert werden kann. Durch ein geschicktes Argument über die Symmetrie der Wurzeln von Polynomen erhielt er eine Formel, die nur die vier arithmetischen Operatoren und Quadratwurzeln verwendet. Gauß hat keine explizite Konstruktion eines Heptadecks angegeben, daher wird die elegante Konstruktion von James Callagy vorgestellt. Das Kapitel schließt mit Konstruktionen eines regelmäßigen Fünfecks, die auf Gauß' Methode zur Konstruktion eines Heptadecks basieren.

Um das Buch so in sich geschlossen wie möglich zu halten, werden im Anhang Beweise für Theoreme der Geometrie und Trigonometrie gesammelt, die dem Leser vielleicht nicht geläufig sind.

## Stil

- Es wird vorausgesetzt, dass der Leser über gute Kenntnisse der Sekundarschulmathematik verfügt, einschließlich:
  - Algebra: Polynome und Division von Polynomen, *monische* Polynome—diejenigen, deren Koeffizient der höchsten Potenz 1 ist, quadratische Gleichungen, Multiplikation von Ausdrücken mit Exponenten  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ .
  - Euklidische Geometrie: kongruente Dreiecke  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  und die Kriterien für Kongruenz, ähnliche Dreiecke  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  und die Verhältnisse ihrer Seiten, Kreise und ihre Inkreis- und Mittelpunktswinkel.
  - Analytische Geometrie: die kartesische Ebene, Berechnung von Längen und Steigungen von Streckenabschnitten, die Formel für einen Kreis.
  - Trigonometrie: die Funktionen sin, cos, tan und die Umrechnungen zwischen ihnen, Winkel im Einheitskreis, die trigonometrischen Funktionen von um eine Achse gespiegelten Winkeln wie  $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ .
- Zu beweisende Aussagen werden als *Theoreme* bezeichnet, ohne dass versucht wird, zwischen Theoremen, Lemmata und Korollarien zu unterscheiden.
- Wenn ein Satz auf eine Konstruktion folgt, beziehen sich die Variablen, die im Satz erscheinen, auf beschriftete Punkte, Linien und Winkel in der Abbildung, die die Konstruktion begleitet.
- Die vollständigen Namen von Mathematikern wurden ohne biografische Informationen angegeben, die leicht in Wikipedia gefunden werden können.

- Das Buch ist so geschrieben, dass es so weit wie möglich in sich geschlossen ist, aber gelegentlich hängt die Darstellung von fortgeschrittenen mathematischen Konzepten und Theoremen ab, die ohne Beweise gegeben werden. In solchen Fällen wird eine Zusammenfassung des Materials in Kästen präsentiert, die übersprungen werden können.
- Es gibt keine Übungen, aber der ambitionierte Leser wird aufgefordert, jedes Theorem zu beweisen, bevor er den Beweis liest.
- Geometrische Konstruktionen können mit Software wie Geogebra untersucht werden.
- $\overline{AB}$  wird sowohl für den Namen eines Linienabschnitts als auch für die Länge des Abschnitts verwendet.
- $\triangle ABC$  wird sowohl für den Namen eines Dreiecks als auch für den Flächeninhalt des Dreiecks verwendet.

### Danksagungen

Dieses Buch wäre nie ohne die Ermutigung von Abraham Arcavi geschrieben worden, der mich willkommen hieß, sein Terrain der mathematischen Bildung zu betreten. Er hat auch freundlicherweise das Vorwort geschrieben. Avital Elbaum Cohen und Ronit Ben-Bassat Levy waren immer bereit, mir beim (Wieder-)Erlernen der Mathematik in der Sekundarstufe zu helfen. Oriah Ben-Lulu führte mich in die Mathematik des Origami ein und arbeitete an den Beweisen mit. Ich bin Michael Woltermann dankbar für die Erlaubnis, mehrere Abschnitte seiner Neubearbeitung von Heinrich Dörrie's Buch zu verwenden. Jason Cooper, Richard Kruel, Abraham Arcavi und die anonymen Gutachter gaben hilfreiche Kommentare ab.

Ich möchte dem Team bei Springer für seine Unterstützung und Professionalität danken, insbesondere dem Herausgeber Richard Kruel.

Das Buch wird im Rahmen des Open-Access-Programms veröffentlicht, und ich möchte dem Weizmann Institute of Science für die Finanzierung der Veröffentlichung danken.

Die  $\text{\LaTeX}$ -Quelldateien für das Buch (einschließlich der TikZ-Quelle für die Diagramme) sind verfügbar unter:

<https://github.com/motib/surprises>

*Mordechai (Moti) Ben-Ari*



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Der Zusammenfallenden Zirkel</b>	<b>13</b>
1.1	Konstruktion mit Lineal und Zirkel . . . . .	14
1.2	Feste Kompass und zusammenklappbare Kompass . . . . .	14
1.3	Euklids Konstruktion zum Kopieren eines Linienabschnitts . . . . .	15
1.4	Eine fehlerhafte Konstruktion . . . . .	17
1.5	Trauen Sie keinem Diagramm . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Dreiteilung eines Winkels</b>	<b>22</b>
2.1	Ungefähre Dreiteilungen . . . . .	22
2.2	Dreiteilung mit einer Neusis . . . . .	26
2.3	Verdoppelung des Würfels mit einem Neusis . . . . .	29
2.4	Dreiteilung mit Hilfe einer Quadratrix . . . . .	30
2.5	Konstruierbare Zahlen . . . . .	31
2.6	Konstruierbare Zahlen als Wurzeln von Polynomen . . . . .	34
2.7	Die Unmöglichkeit der klassischen Konstruktionen . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Die Quadratur des Kreises</b>	<b>40</b>
3.1	Kochańskis Konstruktion . . . . .	40
3.2	Ramanujans erste Konstruktion . . . . .	42
3.3	Ramanujans zweite Konstruktion . . . . .	45
3.4	Quadrieren eines Kreises mit Hilfe einer Quadratrix . . . . .	48
<b>4</b>	<b>The Five-Color Theorem</b>	<b>51</b>
4.1	Flächige Karten und Diagramme . . . . .	51
4.2	Eulersche Formel . . . . .	54
4.3	Nicht-planare Diagramme . . . . .	55
4.4	Die Gradzahlen der Scheitelpunkte . . . . .	56
4.5	Das Sechs-Farben-Theorem . . . . .	58
4.6	Das Fünf-Farben-Theorem . . . . .	58
4.7	Kempes falscher Beweis des Vier-Farben-Satzes . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Wie man ein Museum bewacht</b>	<b>63</b>
5.1	Dreieckige Polygone färben . . . . .	64
5.2	Vom Färben von Polygonen zum Bewachen eines Museums . . . . .	65

<b>6</b>	<b>Induction</b>	<b>71</b>
6.1	Das Axiom der mathematischen Induktion . . . . .	71
6.2	Fibonacci-Zahlen . . . . .	73
6.3	Fermat-Zahlen . . . . .	76
6.4	McCarthy's 91-Funktion . . . . .	77
6.5	Das Josephus-Problem . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Solving Quadratic Equations</b>	<b>84</b>
7.1	Traditionelle Methoden zum Lösen quadratischer Gleichungen . . .	84
7.2	Die Beziehung zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten . . . .	85
7.3	Examples of Loh's Method . . . . .	87
7.4	Ableitung der traditionellen Formel . . . . .	89
7.5	Al-Khwarizmi's Geometrische Lösung quadratischer Gleichungen .	89
7.6	Cardano's Konstruktion zur Lösung kubischer Gleichungen . . . . .	90
7.7	Sie ließen sich von imaginären Zahlen nicht einschüchtern . . . . .	91
7.8	Die Lillsche Methode und der Carlyle'sche Kreis . . . . .	94
7.9	Numerische Berechnung der Wurzeln . . . . .	96
<b>8</b>	<b>Ramsey Theory</b>	<b>99</b>
8.1	Schur Tripel . . . . .	99
8.2	Pythagoräische Dreiergruppen . . . . .	101
8.3	Das Problem von Van der Waerden . . . . .	102
8.4	Ramsey's Theorem . . . . .	103
8.5	Die probabilistische Methode . . . . .	104
8.6	SAT-Auflösung . . . . .	106
8.7	Pythagorean Triples in Babylonian Mathematics . . . . .	110
<b>9</b>	<b>Langfords Problem</b>	<b>114</b>
9.1	( . . . . .	114
9.2	Für welche Werte von $N$ ist das Langfordsche Problem lösbar? . . .	115
9.3	Lösung für $L(4)$ . . . . .	119
<b>10</b>	<b>The Axioms of Origami</b>	<b>121</b>
10.1	Axiom 1 . . . . .	122
10.2	Axiom 2 . . . . .	122
10.3	Axiom 3 . . . . .	123
10.4	Axiom 4 . . . . .	125
10.5	Axiom 5 . . . . .	126
10.6	Axiom 6 . . . . .	128
10.7	Axiom 7 . . . . .	136

<b>11 Lill's Method and the Beloch Fold</b>	<b>139</b>
11.1 Ein Zaubertrick . . . . .	139
11.2 Spezifikation der Lill'schen Methode . . . . .	141
11.3 Nachweis der Lill'schen Methode . . . . .	145
11.4 Die Beloch-Falte . . . . .	146
<b>12 Geometric Constructions Using Origami</b>	<b>149</b>
12.1 Abe's Dreiteilung eines Winkels . . . . .	149
12.2 Martin's Dreiteilung eines Winkels . . . . .	150
12.3 Messer's Verdoppelung eines Würfels . . . . .	152
12.4 Beloch's Verdoppelung eines Würfels . . . . .	154
12.5 Konstruktion eines regelmäßigen Nonagons . . . . .	155
<b>13 Ein Kompass ist ausreichend</b>	<b>159</b>
13.1 Was ist eine Konstruktion nur mit einem Zirkel? . . . . .	159
13.2 Reflexion eines Punktes . . . . .	160
13.3 Konstruktion eines Kreises mit einem vorgegebenen Radius . . . . .	160
13.4 Addition und Subtraktion von Liniensegmenten . . . . .	162
13.5 Konstruktion eines Liniensegments als Verhältnis von Segmenten . . . . .	166
13.6 Konstruktion des Schnittpunkts von zwei Geraden . . . . .	167
13.7 Konstruktion des Schnittpunkts einer Linie und eines Kreises . . . . .	168
<b>14 Ein Lineal und ein Kreis sind ausreichend</b>	<b>171</b>
14.1 Was ist eine Konstruktion mit nur einem Lineal? . . . . .	171
14.2 Konstruktion einer Linie parallel zu einer gegebenen Linie . . . . .	172
14.3 Konstruktion einer Senkrechten zu einer gegebenen Linie . . . . .	175
14.4 Kopieren eines Liniensegments in eine bestimmte Richtung . . . . .	175
14.5 Konstruktion eines Liniensegments als Verhältnis von Segmenten . . . . .	177
14.6 Konstruktion einer Quadratwurzel . . . . .	177
14.7 Konstruktion des Schnittpunkts einer Linie und eines Kreises . . . . .	178
14.8 Konstruktion des Schnittpunkts von zwei Kreisen . . . . .	179
<b>15 Sind Dreiecke mit gleichen Flächen und Umfängen kongruent?</b>	<b>182</b>
15.1 Von einem Dreieck zu einer elliptischen Kurve . . . . .	182
15.2 Lösen der Gleichung für die elliptische Kurve . . . . .	185
15.3 Derivation of a Triangle From the Elliptic Curve . . . . .	186
<b>16 Konstruktion eines regelmäßigen Heptadekagons</b>	<b>189</b>
16.1 Konstruktion von regelmäßigen Polygonen . . . . .	190
16.2 Der Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	191
16.3 Die Wurzeln der Einheit . . . . .	191
16.4 Gauß' Beweis der Konstruierbarkeit eines Heptadekagons . . . . .	193

16.5	Herleitung der Gaußschen Formel . . . . .	197
16.6	Konstruktion eines Heptadekagons . . . . .	199
16.7	Konstruktion eines regelmäßigen Pentagons . . . . .	203
<b>A</b>	<b>Theorems From Geometry and Trigonometry</b>	<b>206</b>
A.1	Theoreme über Dreiecke . . . . .	206
A.2	Trigonometrische Identitäten . . . . .	209
A.3	Der Satz von der Winkelhalbierenden . . . . .	217
A.4	Ptolemäus' Theorem . . . . .	219
A.5	Cevas Theorem . . . . .	222
A.6	Der Satz des Menelaos . . . . .	223

## Kapitel 1

### Der Zusammenfallenden Zirkel

Ein moderner Kompass ist ein *fester Kompass*: der Abstand zwischen den beiden Schenkeln kann festgelegt werden, so dass es möglich ist, ein Liniensegment oder einen Kreis von einer Position zu einer anderen zu kopieren (Abb. 1.1). Euklid verwendete einen *zusammenfallenden Zirkel*, wenn ein fester Abstand nicht eingehalten werden kann (Abb. 1.2). Lehrer verwenden häufig einen Zirkel, der aus einem an einer Schnur befestigten Marker besteht, mit dem man einen Kreis auf einer Tafel konstruiert. Es ist unmöglich, eine feste Länge beizubehalten, wenn der Zirkel von der Tafel entfernt wird.

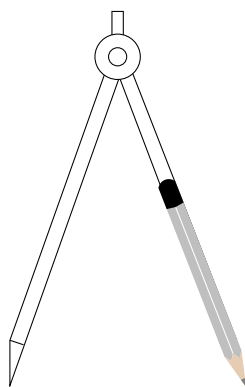


Abb. 1.1: Ein fester Kompass. Ein Schenkel hat eine Nadel, die im Mittelpunkt des Kreises platziert wird. Am anderen Schenkel ist ein Bleistift befestigt, mit dem der Kreis gezeichnet wird. Die Schenkel sind durch ein festes Scharnier verbunden, so dass der Abstand zwischen den Schenkeln (der Radius des Kreises) auch dann beibehalten wird, wenn der Zirkel vom Papier abgehoben wird.

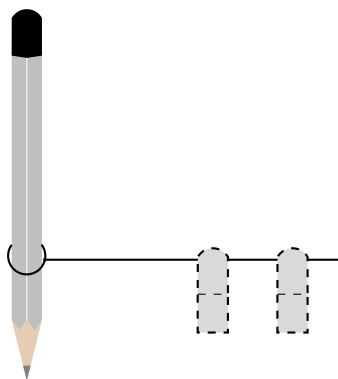


Abb. 1.2: Ein kollabierender Kompass. Der Benutzer hält ein Stück Schnur in der Mitte des Kreises. Das andere Ende der Schnur ist an einen Bleistift gebunden und wird zum Zeichnen des Kreises verwendet. Wenn der Zirkel vom Papier abgehoben wird, können die Finger (gestrichelt) leicht in eine neue Position rutschen.

This chapter begins with a discussion of the relevance of studying construction with a straightedge and compass (Sect. 1.1). Section 1.2 compares the two types of compasses in the most elementary construction: a perpendicular bisector. Section 1.3

presents Euclid's method of copying a line segment using a collapsing compass. This proves that any construction that can be done using a fixed compass can be performed using a collapsing compass. Section 1.4 shows a proof of this theorem which seems to be correct, but does not work for all configurations of lines and points. To emphasize that one must not trust diagrams, Sect. 1.5 presents a famous alleged proof that all triangles are isocles; the proof appears to be correct but it is not because the proof is based on an incorrect diagram.

## 1.1 Konstruktion mit Lineal und Zirkel

Die Konstruktion mit Lineal und Zirkel war früher das grundlegende Konzept, das in der euklidischen Geometrie gelehrt wurde. In letzter Zeit ist es in den Lehrplänen der Schulen in Ungnade gefallen. Es ist sicherlich richtig, dass das Thema, wenn überhaupt, nur wenig praktischen Nutzen hat. Wie wir in den Abschnitten 2.2, 2.3, 2.4, 3.4 zeigen, wussten die Griechen, wie man Konstruktionen, die mit Lineal und Zirkel unmöglich sind, mit nur geringfügig fortschrittlicheren Werkzeugen durchführen kann. Heute können Computer mit Hilfe numerischer Methoden Konstruktionen mit beliebiger Genauigkeit durchführen.

Dennoch glaube ich, dass es Vorteile hat, Konstruktionen zu studieren:

- Es macht mehr Spaß und ist eine größere Herausforderung, Geometrie durch Konstruktionen zu lernen, als einfach nur Theoreme und Beweise zu lesen.
- Bedeutende Durchbrüche in der Mathematik wurden durch Versuche erzielt, Konstruktionen zu finden. In Kapitel 16 wird eine Konstruktion von Gauß vorgestellt, die zur modernen abstrakten Algebra geführt hat, insbesondere zu der von Évariste Galois entwickelten Theorie.
- Es ist etwas kontraintuitiv und daher sehr interessant, dass bewiesen werden kann, dass es unmöglich ist, einige geometrische Objekte zu konstruieren.
- Traurigerweise gibt es viele Menschen, die Jahre ihres Lebens mit dem Versuch verschwenden, unmögliche Konstruktionen durchzuführen. Schülerinnen und Schüler sollten sich der Vergeblichkeit solcher Bemühungen durchaus bewusst sein.

## 1.2 Feste Kompass und zusammenklappbare Kompass

In einigen Geometrie-Lehrbüchern wird die Konstruktion eines rechtwinkligen Winkelhalbierenden eines Linienabschnitts dargestellt, indem zwei Kreise konstruiert werden, die an den Enden des Linienabschnitts zentriert sind, so dass die Radien gleich und *größer als die halbe Länge des Abschnitts* sind (Abb. 1.3). Dies ist nur mit einem festen Zirkel möglich, da nach dem Zeichnen des Kreises in der Mitte von

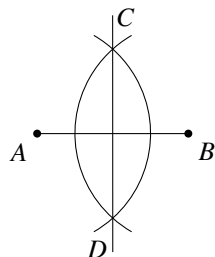


Abb. 1.3: Konstruktion einer Mittelsenkrechten mit einem festen Zirkel

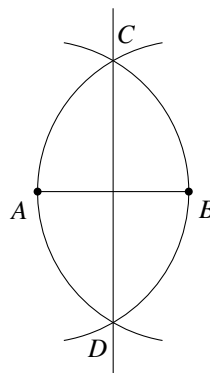


Abb. 1.4: Konstruktion einer Mittelsenkrechten mit einem festen oder einem zusammenfallenden Zirkel

A der Abstand zwischen den Schenkeln des Zirkels fest bleiben muss, um den Kreis in der Mitte von  $B$  zu zeichnen.

Abbildung 1.4 zeigt die Konstruktion einer Mittelsenkrechten entweder mit einem festen oder einem zusammenfallenden Zirkel. Es werden zwei Kreise konstruiert: einer mit Mittelpunkt  $A$  und Radius  $\overline{AB}$  und einer mit Mittelpunkt  $B$  und Radius  $\overline{BA}$ . Dies kann mit einem kollabierenden Zirkel geschehen, weil (offensichtlich)  $\overline{AB} = \overline{BA}$  ist, so dass der Zirkel sich nicht die Länge von  $\overline{AB}$  merken muss, um einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $B$  und demselben Radius zu konstruieren. Der Beweis, dass die in Abb. 1.3 konstruierte Linie eine rechtwinklige Winkelhalbierende ist, ist keineswegs elementar, da relativ fortgeschrittene Konzepte wie kongruente Dreiecke verwendet werden müssen. Der Beweis, dass die in Abb. 1.4 gezeigte Konstruktion einer rechtwinkligen Winkelhalbierenden korrekt ist, ist jedoch einfach und basiert auf der Tatsache, dass  $\triangle ABC$  ein gleichseitiges Dreieck ist. In der Tat ist dies der erste Satz in Euklids *Elemente*.  $\overline{AC} = \overline{AB}$ , da es sich um Radien desselben Kreises handelt, und in ähnlicher Weise  $\overline{BC} = \overline{BA}$ . Wir haben:  $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BA} = \overline{BC}$ .

Abbildung 1.5 zeigt, dass das Dreieck bei der Konstruktion mit festem Zirkel ein gleichschenkliges und nicht unbedingt ein gleichseitiges Dreieck ist (Abb. 1.6).

### 1.3 Euklids Konstruktion zum Kopieren eines Linienabschnitts

Der zweite Satz von Euklids *Elemente* beschreibt, wie man ein gegebenes Liniensegment  $\overline{AB}$  in ein Segment gleicher Länge kopiert, dessen einer Endpunkt ein gegebener Punkt  $C$  ist. Daher bringt ein fester Zirkel keine zusätzlichen Fähigkeiten mit sich und ein kollabierender Zirkel ist ausreichend, obwohl die Konstruktionen mit einem festen Zirkel einfacher sind.

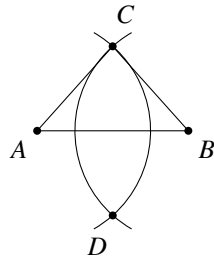


Abb. 1.5: Konstruktion eines isokratischen Dreiecks mit einem festen Zirkel

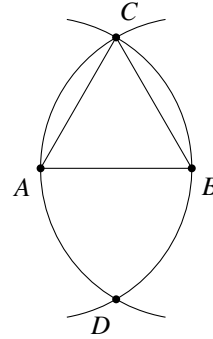


Abb. 1.6: Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks mit einem zusammenklappbaren Zirkel

**Satz 1.1.** Gegeben ein Liniensegment  $\overline{AB}$  und einen Punkt  $C$ , kann ein Liniensegment  $\overline{CC'}$ , dessen einer Endpunkt  $C$  ist, mit Hilfe eines zusammenfallenden Zirkels konstruiert werden, so dass  $\overline{AB} = \overline{CC'}$  (Abb. 1.7).

*Beweis.* Konstruieren Sie den Streckenabschnitt  $\overline{AC}$ . Konstruieren Sie das gleichseitige Dreieck  $\triangle ACD$ , dessen Basis  $\overline{AC}$  ist (Abb. 1.8). Nach dem ersten Satz von Euklid lässt sich das Dreieck mit Hilfe eines zusammenfallenden Zirkels konstruieren. Konstruiere den Strahl, der eine Verlängerung des Liniensegments von  $D$  nach  $A$  ist, und konstruiere den Strahl, der eine Verlängerung des Liniensegments von  $D$  nach  $C$  ist (Abb. 1.9). Konstruieren Sie den Kreis mit dem Mittelpunkt  $A$  und dem Radius  $\overline{AB}$  und bezeichnen Sie den Schnittpunkt des Kreises mit dem Strahl, der  $\overline{DA}$  verlängert, mit  $E$  (Abb. 1.10). Konstruiere den Kreis mit dem Mittelpunkt  $D$  und dem Radius  $\overline{DE}$  und bezeichne den Schnittpunkt des Kreises und des Strahls, der  $\overline{DC}$  verlängert, mit  $F$  (Abb. 1.11).

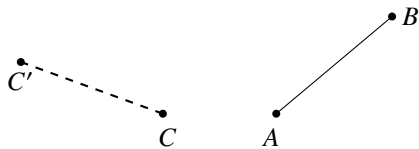


Abb. 1.7: Kopieren Sie das Liniensegment  $\overline{AB}$ . Die Ausrichtung von  $\overline{CC'}$  ist nicht wichtig.

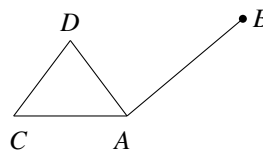


Abb. 1.8: Kopieren eines Liniensegments mit einem zusammenfallenden Zirkel



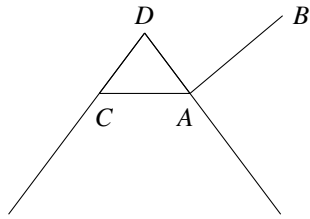


Abb. 1.9: Konstruktion von Strahlen aus  $D$

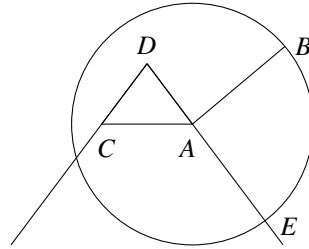


Abb. 1.10: Konstruktion eines Kreises mit Radius  $\overline{AB}$

$\overline{DC} = \overline{DA}$  because  $\triangle ACD$  is equilateral.  $\overline{AE} = \overline{AB}$  are radii of the same circle, as are  $\overline{DF} = \overline{DE}$ . Therefore:

$$\overline{CF} = \overline{DF} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DA} = \overline{AE} = \overline{AB}.$$

□

Die Angabe der Richtungen der Strahlen ist wesentlich. Der Beweis funktioniert hier für jedes Liniensegment  $\overline{AB}$  und jeden Punkt  $C$ , unabhängig von seiner Lage relativ zu  $\overline{AB}$ . Durch die Angabe der Richtungen schneidet der von den beiden Strahlen eingeschlossene “Kegel” die Kreise auch dann, wenn  $\overline{AC} > \overline{AB}$  (Fig. 1.12).

#### 1.4 Eine fehlerhafte Konstruktion zum Kopieren eines Liniensegments

*Beweis.* Konstruieren Sie drei Kreise: einen in  $A$  zentrierten mit dem Radius  $\overline{AB}$ , einen in  $A$  zentrierten mit dem Radius  $\overline{AC}$  und einen in  $C$  zentrierten mit dem Radius  $\overline{AC} = \overline{CA}$ . Bezeichne die Schnittpunkte der Kreise mit den Mittelpunkten  $A$  und  $C$  mit  $E$  bzw.  $F$  und bezeichne einen Schnittpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkt  $C$

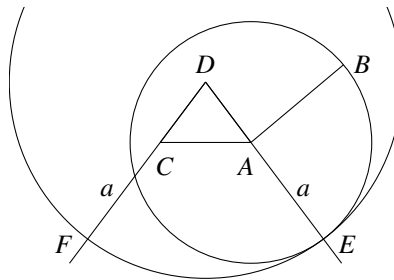


Abb. 1.11: Konstruktion von  $\overline{CF} = \overline{AB}$

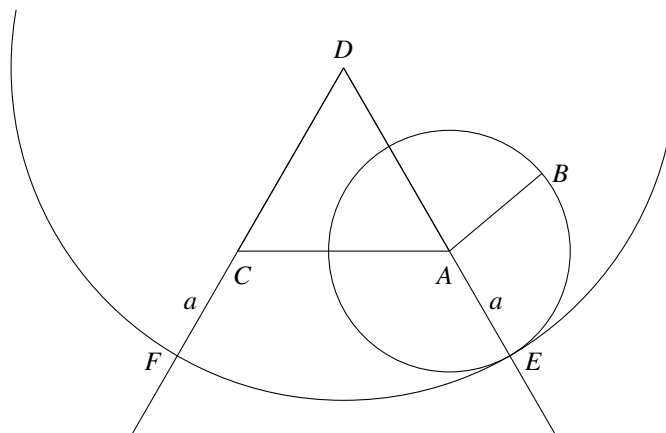


Abb. 1.12: Konstruktion für  $\overline{AC} > \overline{AB}$

und des Kreises mit dem Mittelpunkt  $A$  und dem Radius  $\overline{AB}$  mit  $D$ . Ist  $\overline{AC} > \overline{AB}$ , so ist die Konstruktion wie in Abb. 1.13 dargestellt.

Konstruieren Sie einen Kreis in der Mitte von  $E$  mit dem Radius  $\overline{ED}$ . Bezeichne den Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Kreis in der Mitte von  $A$  mit dem Radius  $\overline{AC}$  mit  $G$ . Es gibt zwei Schnittpunkte, wählen Sie also den, der näher an  $C$  liegt (Abb. 1.14).  $\overline{CD} = \overline{CE}$  sind Radien desselben Kreises wie  $\overline{AE} = \overline{AG}$ . Durch die Konstruktion sind die Radien  $\overline{CE}$  und  $\overline{AE}$  gleich. Folglich:

$$\overline{CD} = \overline{CE} = \overline{AE} = \overline{AG}.$$

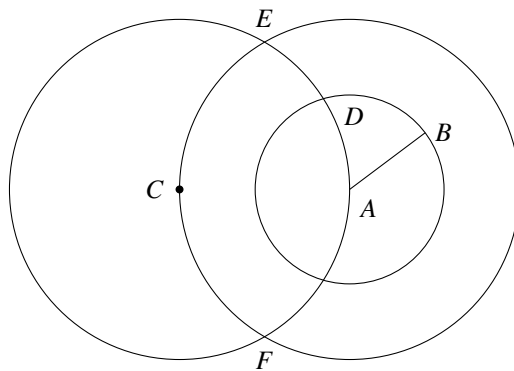


Abb. 1.13: Konstruktion zum Kopieren eines Liniensegments (1)

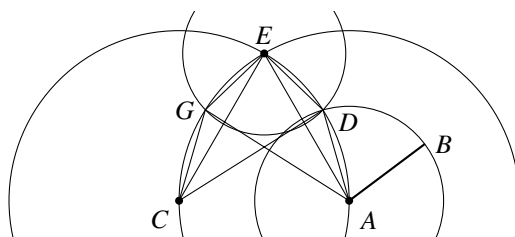


Abb. 1.14: Konstruktion zum Kopieren eines Liniensegments (2)

$\overline{EG} = \overline{ED}$  sind Radien desselben Kreises, so dass  $\triangle EAG \cong \triangle DCE$  von Seite zu Seite und  $\angle GEA = \angle DEC$ .

Seitdem:

$$\angle GEC = \angle GEA - \angle CEA = \angle DEC - \angle CEA = \angle DEA,$$

daraus folgt dass  $\triangle ADE \cong \triangle CGE$  durch Seiten-Winkel-Seiten.  $\overline{AB} = \overline{AD}$  sind Radien des kleineren Kreises mit dem Mittelpunkt A, also  $\overline{GC} = \overline{AD} = \overline{AB}$ .  $\square$

Der Beweis ist nur korrekt, wenn  $\overline{AC} > \overline{AB}$ . Abbildung 1.15 zeigt ein Diagramm, in dem  $\overline{AC} < \overline{AB}$  ist und man kann sehen, dass  $\overline{AB} \neq \overline{GC}$ .

## 1.5 Trauen Sie keinem Diagramm

**Satz 1.2** (Falsch, natürlich). *Alle Dreiecke sind gleichschenkelig.*

*Falsch.* Für ein beliebiges Dreieck  $\triangle ABC$  sei  $P$  der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von  $\angle BAC$  und der Mittelsenkrechten von  $\overline{BC}$ . Die Schnittpunkte der Höhen von  $P$  mit den Seiten  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  werden jeweils mit  $E, F$  bezeichnet (Abb. 1.16).

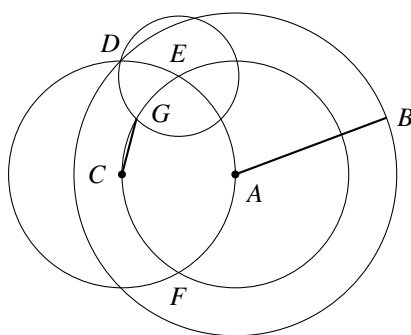


Abb. 1.15: A diagram for which the proof doesn't work

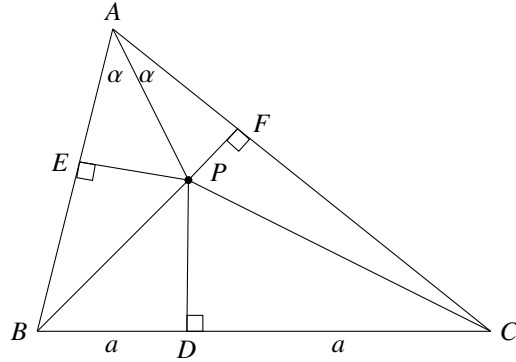


Abb. 1.16: Ein falscher Beweis dafür, dass alle Dreiecke Isözeln sind

$\triangle APE \cong \triangle APF$ , da es sich um rechtwinklige Dreiecke mit gleichen Winkeln  $\alpha$  und gemeinsamer Seite  $\overline{AP}$  handelt.  $\triangle DPB \cong \triangle DPC$ , weil sie rechtwinklige Dreiecke sind,  $\overline{PD}$  eine gemeinsame Seite ist und  $\overline{BD} = \overline{CD} = a$ .  $\triangle EPB \cong \triangle FPC$ , weil sie rechtwinklige Dreiecke sind,  $\overline{EP} = \overline{FP}$  durch die erste Kongruenz und  $\overline{PB} = \overline{PC}$  durch die zweite Kongruenz. Durch Kombination der Gleichungen ergibt sich, dass das  $\triangle ABC$  isozyklisch ist:

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AF} + \overline{FC} = \overline{AC}.$$

□

The *logic* of the proof is correct, but the diagram upon which the proof is based is not correct because point  $P$  is *outside* the triangle (Fig. 1.17).

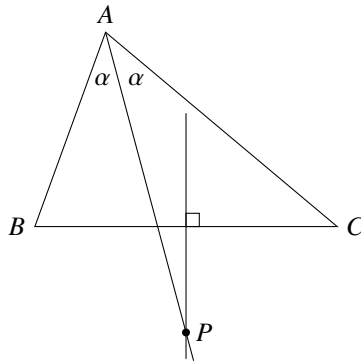


Abb. 1.17: Warum die Konstruktion nicht funktioniert

### **Was ist die Überraschung?**

Als Schülerin hielt ich es für selbstverständlich, dass ein Kompass ein Reibungsgeelenk hat, das den Abstand zwischen der Spitze und dem Bleistift beibehält, wenn er vom Papier abgehoben wird. Als der Lehrer einen Kompass benutzte, der aus einem Stück Schnur und einem Stück Kreide bestand, konnte ich mir nicht vorstellen, dass er sich von meinem Kompass unterscheidet. Der Artikel von Gotfried Toussaint war eine echte Überraschung, ebenso wie sein Nachweis, dass die Beweise nach Euklid falsch waren, weil sie auf Diagrammen beruhten, die ungerechtfertigte Annahmen machten. Ich empfehle den Artikel allen Lesern, die ihr Verständnis von Beweisen in der Mathematik vertiefen wollen.

### **Quellen**

Dieses Kapitel stützt sich auf [50]. Die fehlerhafte Konstruktion der Gleichwertigkeit der beiden Zirkel in Sect. 1.4 stammt von [37]. Eine umfassende englische Übersetzung von Euklids *Elemente* zusammen mit einem umfangreichen Kommentar [22] wurde von Thomas L. Heath, einem der führenden Experten für griechische Mathematik, verfasst.

## Kapitel 2

### Dreiteilung eines Winkels

Es ist unmöglich, einen beliebigen Winkel nur mit Lineal und Zirkel zu dreiteilen (den Winkel in drei gleiche Teile zu zerlegen). Die Dreiteilung erfordert die Konstruktion von Kubikwurzeln, aber ein Lineal und ein Zirkel können nur Längen konstruieren, die aus ganzen Zahlen, den vier arithmetischen Operatoren und Quadratwurzeln gebildet sind. Dies wurde von Pierre Wantzel im Jahr 1837 bewiesen. Dennoch versuchen unzählige Amateure weiterhin, einen Winkel zu dreiteilen. Ihre Konstruktionen sind Annäherungen, auch wenn sie davon überzeugt sind, dass die Konstruktionen korrekt sind. Abschnitt 2.1 stellt zwei solcher Konstruktionen vor, entwickelt Formeln für die Winkel und zeigt die Fehler in den Näherungen.

Die griechischen Mathematiker entdeckten, dass man Winkel dreiteilen kann, wenn man andere Instrumente zulässt. Abschnitt 2.2 erklärt eine Konstruktion von Archimedes, die ein einfaches Instrument namens *neusis* verwendet, und Abschnitt 2.3 zeigt, wie man einen Würfel mit Hilfe der *neusis* verdoppelt. Abschnitt 2.4 stellt eine Konstruktion für die Dreiteilung durch Hippias unter Verwendung eines Instruments namens *quadratrix* vor. Der Rest des Kapitels enthält einen Beweis für die Unmöglichkeit der Dreiteilung eines Winkels. Abschnitt 2.5 charakterisiert konstruierbare Zahlen, Abschnitt 2.6 setzt konstruierbare Zahlen mit Wurzeln von Polynomen in Beziehung und Abschnitt 2.7 verwendet diese Theorie, um zu zeigen, dass die Dreiteilung eines Winkels und die Verdopplung eines Würfels unmöglich sind.

#### 2.1 Ungefähre Dreiteilungen

##### 2.1.1 Erste annähernde Dreiteilung

**Konstruktion:** Sei  $\theta = \angle AOB$  ein beliebiger Winkel und nehme ohne Verlust der Allgemeinheit an, dass  $A, B$  auf einem Einheitskreis liegen, dessen Mittelpunkt  $O$  ist. Halbiere  $\angle AOB$  und sei  $C$  der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit dem Einheitskreis. Sei  $D$  der Mittelpunkt der  $\overline{OA}$  und sei  $T$  der Mittelpunkt der  $\overline{DC}$ . Bezeichne den Winkel  $\angle DOT$  mit  $\phi$  (Fig. 2.1).

**Satz 2.1.**

$$\tan \phi = \frac{2 \sin(\theta/2)}{1 + 2 \cos(\theta/2)}.$$

*Beweis.* Abbildung 2.2 ist ein Ausschnitt aus Abb. 2.1 und enthält zusätzliche Anmerkungen.

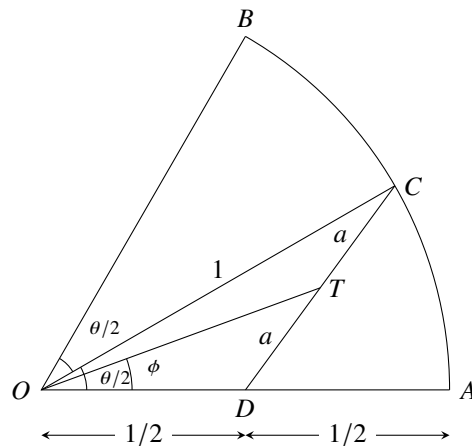


Abb. 2.1: Erste annähernde Dreiteilung (1)

Sei  $\overline{CF}$  die Senkrechte zu  $\overline{OA}$ , die  $\overline{OA}$  in  $F$  schneidet. Da  $\overline{OC} = 1$  ist, ist  $\overline{CF} = \sin(\theta/2)$  und  $\overline{OF} = \cos(\theta/2)$ . Sei  $\overline{TE}$  die Senkrechte zu  $\overline{OA}$ , die  $\overline{OA}$  in  $E$  schneidet.

$T$  ist der Mittelpunkt von  $\overline{DC}$ , also  $\overline{DT} = \overline{TC} = a$ . Aber  $\overline{FT}$  ist der Median zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, also ist  $\overline{FT} = a$  und somit ist das  $\triangle DTF$  isozyklisch. Daraus folgt, dass  $\overline{TE}$  sowohl der Median als auch die Höhe von  $\overline{DF}$  ist. Aus dem Diagramm ist das leicht zu erkennen:

$$\overline{OE} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right).$$

Berechnen Sie die Länge  $2a = \overline{CD}$  mit Hilfe des Satzes von Pythagoras in  $\triangle DCF$ :

$$(2a)^2 = \left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Die Länge  $h = \overline{TE}$  kann aus dem Satz des Pythagoras berechnet werden in

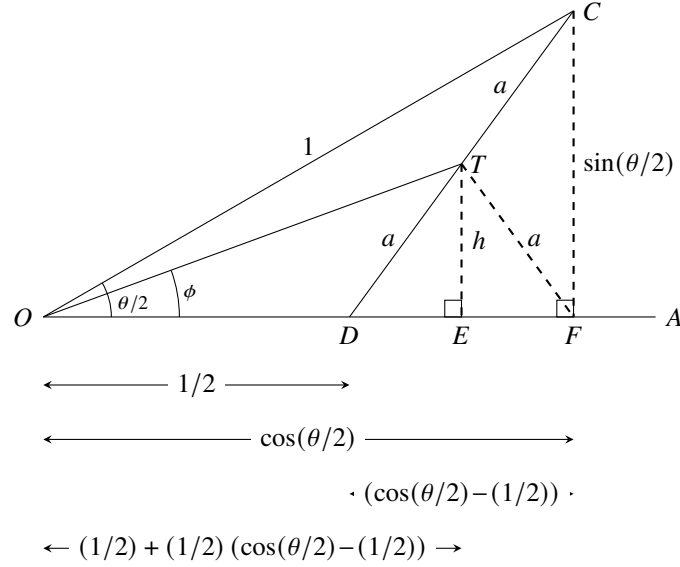


Abb. 2.2: Erste annähernde Dreiteilung (2)

$\triangle DTE$ :

$$\begin{aligned}
 a^2 &= h^2 + \left[ \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right) \right]^2 \\
 h^2 &= \frac{1}{4} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \left[ \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right) \right]^2 = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
 h &= \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\
 \tan \phi &= \frac{h}{OE} = \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{1 + 2 \cos \frac{\theta}{2}}.
 \end{aligned}$$

□

Dies ist eine Annäherung an eine Dreiteilung  $\phi = \theta/3$ . Für  $\theta = 60^\circ$ :

$$\tan^{-1} \left( \frac{2 \sin 30^\circ}{1 + 2 \cos 30^\circ} \right) = \tan^{-1} 0.366 \approx 20.1^\circ \approx 20^\circ.$$

Tabelle 2.1 zeigt die Fehler für eine Reihe von spitzen Winkeln. Der Fehler ist bei kleinen Winkeln relativ gering und steigt bei  $85^\circ$  auf 1% an.



Tab. 2.1: Fehler bei der ersten approximativen Dreiteilung

$\theta(^{\circ})$	$\theta/3(^{\circ})$	$\tan^{-1} \phi(^{\circ})$	Fehler( $^{\circ}$ )	Fehler(%)
5	1.667	1.667	0.000	0.004
10	3.333	3.334	0.000	0.014
15	5.000	5.002	0.002	0.032
20	6.667	6.670	0.004	0.057
25	8.333	8.341	0.007	0.088
30	10.000	10.013	0.013	0.128
35	11.667	11.687	0.020	0.174
40	13.333	13.364	0.030	0.228
45	15.000	15.043	0.043	0.289
50	16.667	16.726	0.060	0.358
55	18.333	18.413	0.080	0.435
60	20.000	20.104	0.104	0.520
65	21.667	21.799	0.133	0.612
70	23.333	23.500	0.166	0.713
75	25.000	25.206	0.206	0.823
80	26.667	26.918	0.251	0.941
85	28.333	28.636	0.303	1.068

### 2.1.2 Zweite annähernde Dreiteilung

**Konstruktion:** Sei  $\theta = \angle AOB$  ein beliebiger Winkel und nehme ohne Verlust der Allgemeinheit an, dass  $A, B$  auf einem Einheitskreis liegen, dessen Mittelpunkt  $O$  ist. Konstruieren Sie einen Kreis mit dem Radius  $1/3$  und dem Mittelpunkt  $O$  und lassen Sie  $D$  seinen Schnittpunkt mit  $\overline{OA}$  sein. Halbiere  $\angle AOB$  und sei  $C$  der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit dem Kreis des Radius  $1/3$ . Konstruieren Sie die Sehne  $\overline{CD}$  und die Sehnen  $\overline{AE} = \overline{ET} = \overline{CD}$ . Da gleiche Sehnen gleiche Zentralwinkel einschließen  $\angle TOE = \angle EOA = \phi$  (Fig. 2.3).

**Satz 2.2.**

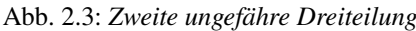
$$\cos \phi = 1 - \frac{1}{9}(1 - \cos(\theta/2)) = 1 - \frac{2}{9} \sin^2(\theta/4).$$

*Beweis.* Durch das Kosinusetz in  $\triangle DOC$ :

$$\overline{CD} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \cos(\theta/2) = \frac{2}{9}(1 - \cos(\theta/2)).$$

Durch das Kosinusetz in  $\triangle EOA$ :

$$\overline{AE} = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \phi = 2(1 - \cos \phi).$$


$$\cos \phi = 1 - \frac{1}{9}(1 - \cos(\theta/2)) .$$
$$\cos \phi = 1 - \frac{2}{9} \sin^2(\theta/4) .$$

Dies ist eine Annäherung an eine Dreiteilung  $2\phi = \theta/3$ . Für  $\theta = 60^\circ$ :

$$2 \cos^{-1} \left( 1 - \frac{1}{9}(1 - \cos 30^\circ) \right) \approx 19.8^\circ \approx 20^\circ.$$

## 2.2 Dreiteilung mit einer Neusis

Der Begriff Lineal wird anstelle von Lineal verwendet, weil ein Lineal keine Markierungen hat. Es kann nur verwendet werden, um eine gerade Linie zwischen zwei gegebenen Punkten zu konstruieren. Archimedes zeigte, dass ein *neusis*, ein Lineal

Tab. 2.2: Fehler bei der zweiten approximativen Dreiteilung

$\theta(^{\circ})$	$\theta/3(^{\circ})$	$\cos^{-1} 2\phi(^{\circ})$	Fehler( $^{\circ}$ )	Fehler(%)
5	1.667	1.667	0.000	0.007
10	3.333	3.332	0.001	0.028
15	5.000	4.997	0.003	0.063
20	6.667	6.659	0.008	0.113
25	8.333	8.319	0.015	0.176
30	10.000	9.975	0.025	0.254
35	11.667	11.626	0.040	0.346
40	13.333	13.273	0.060	0.451
45	15.000	14.914	0.086	0.571
50	16.667	16.549	0.118	0.705
55	18.333	18.177	0.156	0.853
60	20.000	19.797	0.203	1.015
65	21.667	21.408	0.258	1.192
70	23.333	23.011	0.322	1.382
75	25.000	24.603	0.397	1.586
80	26.667	26.185	0.481	1.805
85	28.333	27.756	0.577	2.038

mit zwei Markierungen, die einen festen Abstand voneinander haben, zur Dreiteilung eines Winkels verwendet werden kann (Abb. 2.4). Wir definieren den Abstand zwischen den Markierungen als 1.

**Konstruktion:** Sei  $\alpha = \angle ABE$  ein beliebiger Winkel in einem Einheitskreis mit Mittelpunkt  $B$ , wobei der Radius des Kreises gleich dem Abstand zwischen den Markierungen auf der Neusis ist. Erweitern Sie den Radius  $\overline{EB}$  über den Kreis hinaus. Legen Sie eine Kante der Neusis auf  $A$  und verschieben Sie sie, bis sie die Verlängerung von  $\overline{EB}$  bei  $D$  und den Kreis bei  $C$  schneidet, wobei Sie die Markierungen so verwenden, dass die Länge des Linienabschnitts  $\overline{CD}$  1 beträgt.<sup>1</sup> Konstruieren Sie die Linie  $\overline{AD}$ . Bezeichne  $\angle CDB = \beta$  (Fig. 2.5).

**Satz 2.3.**  $\beta = \alpha/3$ .

<sup>1</sup>Diese Operation wird *verging* genannt.



Abb. 2.4: Ein Neusis

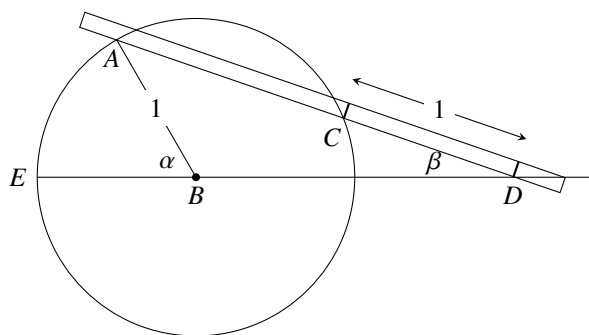


Abb. 2.5: Die Neusis-Konstruktion zur Dreiteilung eines Winkels (1)

*Beweis.* Konstruieren Sie  $\overline{BC}$  und bezeichnen Sie die Winkel und Geradenabschnitte wie in Abb. 2.6 gezeigt.  $\triangle ABC$  und  $\triangle BCD$  sind isozyklische Dreiecke:  $\overline{AB} = \overline{BC}$  sind Radien desselben Kreises und  $\overline{BC} = \overline{CD}$  durch Konstruktion mit der Neusis. Da die Summe der Winkel eines Dreiecks gleich  $180^\circ$  ist und die Summe der Zusatzwinkel ebenfalls gleich  $180^\circ$  ist, haben wir:

$$\begin{aligned}\epsilon &= 180^\circ - 2\beta \\ \gamma &= 180^\circ - \epsilon = 2\beta \\ \delta &= 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ - 4\beta \\ \alpha &= 180^\circ - \delta - \beta = 3\beta.\end{aligned}$$

□

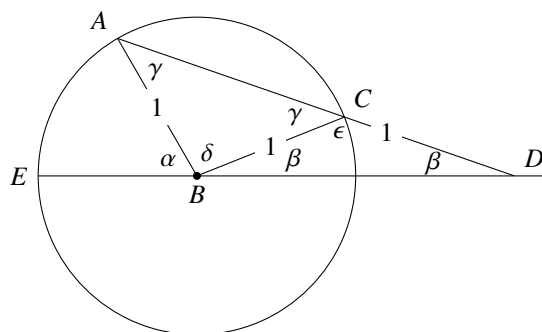


Abb. 2.6: Die Neusis-Konstruktion zur Dreiteilung eines Winkels (2)

### 2.3 Verdoppelung des Würfels mit einem Neusis

Bei einem Würfel  $C$  konstruiere einen anderen Würfel mit dem doppelten Volumen. Ist das Volumen von  $C$  gleich  $V$ , so haben seine Seiten die Länge  $\sqrt[3]{V}$ . Die Seiten eines Würfels mit dem doppelten Volumen sind  $\sqrt[3]{2V} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{V}$ , wenn wir also  $\sqrt[3]{2}$  konstruieren können, können wir den Würfel verdoppeln.

**Konstruktion:** Konstruieren Sie das gleichseitige Einheitsdreieck  $\triangle ABC$  und verlängern Sie  $\overline{CA}$  mit einem weiteren Einheitslinienabschnitt nach  $D$ . Konstruieren Sie Strahlen, die  $\overline{AB}$  und  $\overline{DB}$  verlängern. Legen Sie die Neusis auf den Punkt  $C$  und verschieben Sie sie, bis eine Markierung der Neusis auf dem Strahl  $\overline{AB}$  bei  $P$  und die andere Markierung auf dem Strahl  $\overline{DB}$  bei  $Q$  liegt. Bezeichne  $\overline{CQ} = x$  und  $\overline{BP} = y$  (Abb. 2.7).

**Satz 2.4.**  $x = \sqrt[3]{2}$ .

*Beweis.* Da das  $\triangle ABC$  gleichseitig ist, ist  $\cos \angle CAP = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  und nach dem Kosinussatz in  $\triangle APC$ :

$$\overline{CP}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP} \cos 60^\circ \quad (2.1a)$$

$$(x+1)^2 = 1^2 + (y+1)^2 - 2 \cdot 1 \cdot (y+1) \cdot \frac{1}{2} \quad (2.1b)$$

$$x^2 + 2x = y^2 + y. \quad (2.1c)$$

Nach dem Lehrsatz des Menelaos (Thm. A.20):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = 1.$$

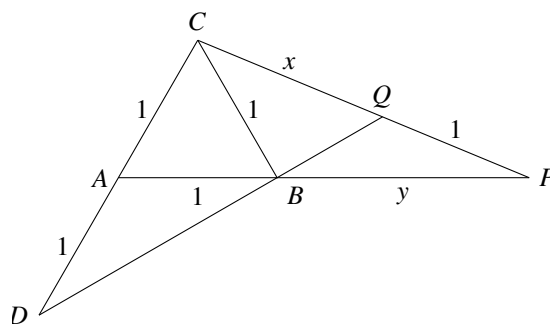


Abb. 2.7: Verdoppelung des Würfels mit einem Neusis

Deshalb:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{1} = 1 \quad (2.2a)$$

$$xy = 2. \quad (2.2b)$$

Setzt man Gleichung 2.2b in Gleichung 2.1c ein, erhält man:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x} \\ x^4 + 2x^3 &= 4 + 2x \\ x^3(x+2) &= 2(x+2) \\ x &= \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

□

## 2.4 Dreiteilung mit Hilfe einer Quadratrix

Sei  $\overline{ABCD}$  ein Quadrat. Sei  $l_1$  ein Liniensegment, das anfangs bei  $\overline{DC}$  liegt, und sei  $l_2$  ein Liniensegment, das anfangs bei  $\overline{AD}$  liegt. Bewegen Sie  $l_1$  mit einer konstanten linearen Geschwindigkeit, bis es  $\overline{AB}$  erreicht, und drehen Sie  $l_2$  mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit im Uhrzeigersinn um  $A$ , bis es ebenfalls  $\overline{AB}$  erreicht. Nehmen wir an, dass sie  $\overline{AB}$  gemeinsam erreichen. Wenn  $l_2$  beispielsweise mit  $1^\circ/\text{Sekunde}$  rotiert und die Seite des Quadrats 9 Zentimeter beträgt, muss sich  $l_1$  mit  $0,1 \text{ cm}/\text{Sekunde}$  bewegen. Die Spur ihres Schnittpunktes  $P$  nennt man eine *Quadratrixkurve* oder einfach eine *Quadratrix* (Abb. 2.8). Ihre Definition wird auf den Mathematiker Hippias zurückgeführt.

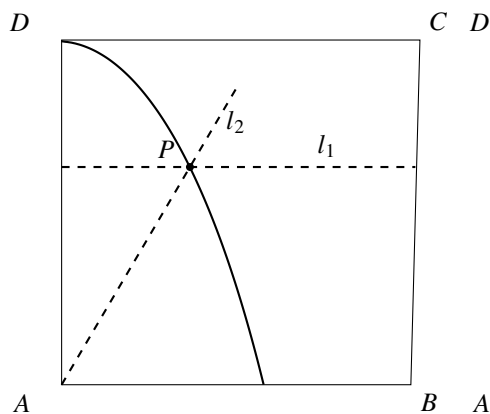


Abb. 2.8: Eine Quadratrixkurve

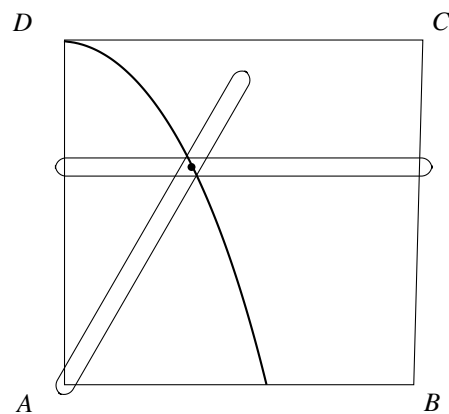


Abb. 2.9: Ein Quadratzirkel

Eine Quadratrix kann mit Hilfe eines Quadratrix-Zirkels konstruiert werden, wie in Abb. 2.9 gezeigt. Er besteht aus zwei (unmarkierten) geraden Linien, die sich wie oben beschrieben bewegen. Ein Gelenk zwingt sie dazu, sich gemeinsam zu bewegen und zeichnet die Kurve nach.

Eine Quadratrix kann zur Dreiteilung eines Winkels verwendet werden.

**Konstruktion:** Sei  $\angle CDP_1 = \alpha$  ein beliebiger Winkel, wobei  $P_1$  der Schnittpunkt der Linie, die den Winkel  $\alpha$  relativ zu  $\overline{DC}$  definiert, mit der Quadratrix ist. Konstruieren Sie eine Linie durch  $P_1$  parallel zu  $\overline{DC}$  und bezeichnen Sie ihren Schnittpunkt mit  $\overline{AD}$  als  $E$ . Bezeichne das Liniensegment  $\overline{DE}$  mit  $t$  und trisziere es (Sect. 2.5), um den Punkt  $F$  zu erhalten, der  $t/3$  von  $\overline{DC}$  entfernt ist. Sei  $P_2$  der Schnittpunkt einer zu  $\overline{DC}$  parallelen Linie von  $F$  mit der Quadratrix, und bezeichne mit  $\theta$  den Winkel zwischen  $\overline{DC}$  und  $\overline{DP_2}$  (Fig. 2.10).

**Satz 2.5.**  $\theta = \alpha/3$ .

*Beweis.*  $E$  hat die  $y$ -Koordinate  $1 - t$ , also hat  $F$  konstruktionsbedingt die  $y$ -Koordinate  $1 - (t/3)$ . Da die konstante lineare Geschwindigkeit der horizontalen Linie proportional zur konstanten Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Linie  $\theta/\alpha = (t/3)/t$  ist und  $\theta = \alpha/3$ .  $\square$

## 2.5 Konstruierbare Zahlen

Sei  $l$  ein Linienabschnitt der Länge 1.

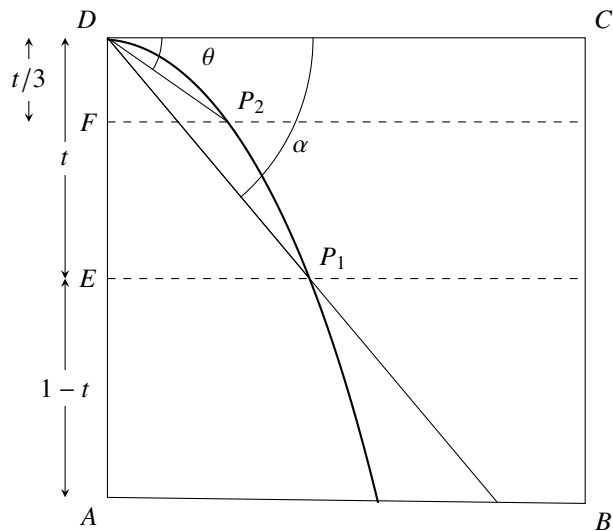


Abb. 2.10: Dreiteilung eines Winkels mit Hilfe einer Quadratrix

**Definition 2.1.** Eine Zahl  $a$  ist dann und nur dann konstruierbar, wenn ein Liniensegment der Länge  $a$  mit Lineal und Zirkel ausgehend von  $l$  konstruiert werden kann.

Konstruieren Sie für den Streckenabschnitt  $l = \overline{AB}$  eine Linie, die  $\overline{AB}$  enthält, und suchen Sie mit dem Zirkel einen Punkt  $C$  auf der Linie, der 1 von  $B$  entfernt ist. Dann hat  $\overline{AC}$  die Länge 2, so dass die Zahl 2 konstruierbar ist. Ein Liniensegment  $\overline{BD}$  der Länge 1 kann senkrecht zu  $\overline{AB}$  bei  $B$  konstruiert werden. Die Hypotenuse des Dreiecks  $\triangle ABD$  hat die Länge  $\sqrt{2}$ , also ist die Zahl  $\sqrt{2}$  konstruierbar.

**Satz 2.6.** Eine Zahl ist dann und nur dann konstruierbar, wenn sie der Wert eines Ausdrucks ist, der aus den ganzen Zahlen, den vier arithmetischen Operationen  $\{+, -, \times, /\}$  und der Operation der Quadratwurzel gebildet wird  $\sqrt{\phantom{x}}$ .

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, dass die Werte dieser Ausdrücke konstruierbar sind.

**Addition und Subtraktion:** Konstruieren Sie aus den Liniensegmenten  $\overline{PQ} = a$  und  $\overline{RS} = b$  einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $Q$  und dem Radius  $b$  (Abb. 2.11). Verlängern Sie  $\overline{PQ}$ , bis sie den Kreis in  $U$  schneidet. Dann ist  $\overline{PTQU}$  ein Liniensegment, wobei  $\overline{PT} = a - b$  und  $\overline{PU} = a + b$ .

**Multiplication:** By similar triangles in Fig. 2.12,  $(1/b) = (a/\overline{OA})$ , so  $\overline{OA} = ab$ .

**Division:** By similar triangles in Fig. 2.13,  $(1/b) = (\overline{OD}/a)$ , so  $\overline{OD} = (a/b)$ .

#### Quadratwurzeln:

Konstruieren Sie für ein Liniensegment  $\overline{BC} = a \overline{AB} = 1 + a$  und einen Halbkreis mit  $\overline{AB}$  als Durchmesser. Konstruieren Sie eine Senkrechte bei  $C$  und lassen Sie  $D$  den Schnittpunkt der Senkrechten mit dem Kreis sein (Abb. 2.14).  $\angle ADB$  ist ein rechter Winkel, weil er durch einen Durchmesser begrenzt ist. Bei ähnlichen Dreiecken ist  $(h/1) = (a/h)$ , also  $h^2 = a$  und  $h = \sqrt{a}$ .

Um die Umkehrung des Satzes zu beweisen, müssen wir bestimmen, welche

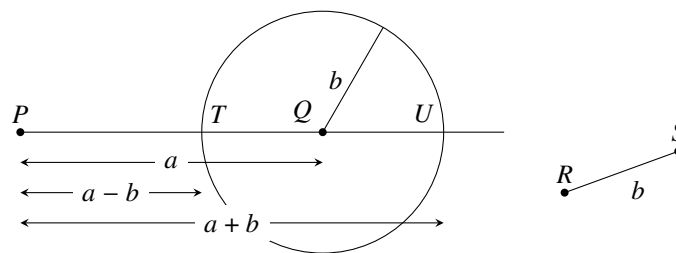


Abb. 2.11: Konstruktion von Addition und Subtraktion



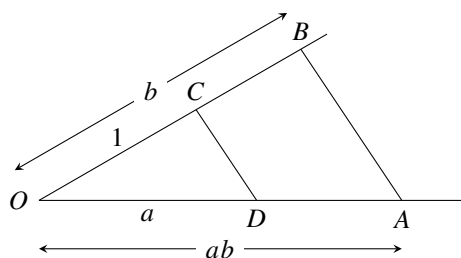


Abb. 2.12: Konstruktion der Multiplikation

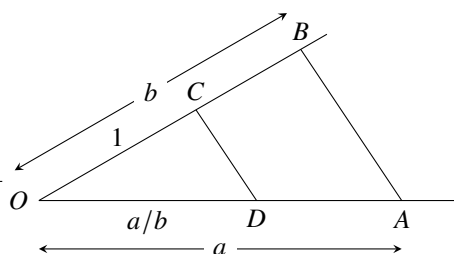


Abb. 2.13: Aufbau der Abteilung

Ausdrücke mit Lineal und Zirkel konstruiert werden können. Es gibt drei Konstruktionen:<sup>2</sup>

1. Zwei Linien schneiden sich in einem Punkt (Abb. 2.15). Die Koordinaten des Schnittpunktes lassen sich aus den Gleichungen der beiden Geraden ableiten  $y = x$  und  $y = 4x - 2$ . Der Schnittpunkt ist  $P = (2/3, 2/3)$ .
2. Eine Gerade schneidet einen Kreis in null, einem oder zwei Punkten (Abb. 2.16). Die Koordinaten der Schnittpunkte lassen sich aus den Gleichungen der Geraden  $y = x$  und des Kreises  $x^2 + y^2 = 4$  ableiten. Die Schnittpunkte sind  $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$  und  $Q = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ .
3. Zwei Kreise schneiden sich in null, einem oder zwei Punkten (Abb. 2.17). Die Koordinaten der Schnittpunkte lassen sich aus den Gleichungen der beiden Kreise  $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ ,  $(x + 1)^2 + y^2 = 4$  ableiten. Die Schnittpunkte sind  $P = (0, \sqrt{2})$ ,  $Q = (0, -\sqrt{2})$ .

<sup>2</sup>Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden diese für bestimmte Werte und nicht für die allgemeinsten Gleichungen dargestellt.

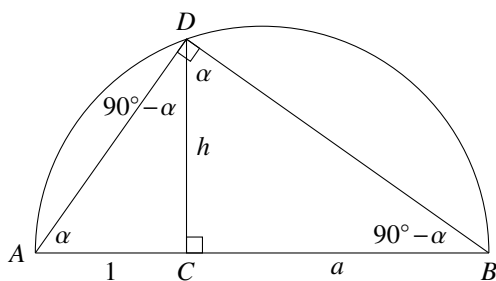


Abb. 2.14: Konstruktion einer Quadratwurzel

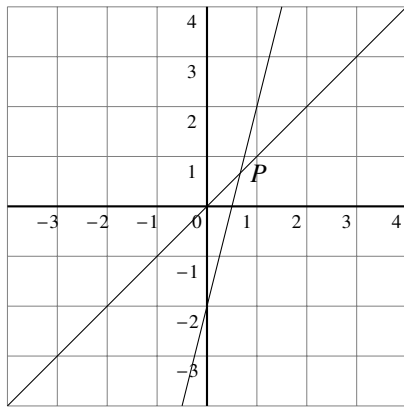


Abb. 2.15: Der Schnittpunkt von zwei Linien

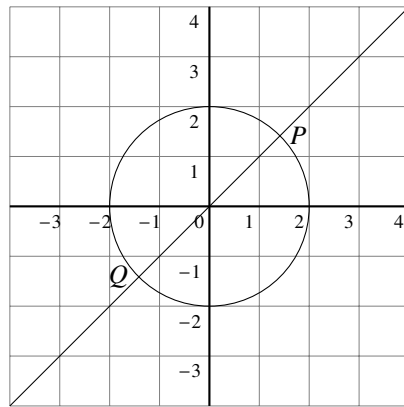


Abb. 2.16: Die Schnittpunkte einer Linie und eines Kreises

□

## 2.6 Konstruierbare Zahlen als Wurzeln von Polynomen

Um zu zeigen, dass eine Zahl nicht konstruierbar ist, müssen wir beweisen, dass sie nicht nur mit ganzen Zahlen und den Operationen  $\{+, -, \times, /, \sqrt{\cdot}\}$  ausgedrückt werden kann.

Wir werden zeigen, dass konstruierbare Zahlen die Wurzeln einer bestimmten Klasse von Polynomen sind, und dann beweisen, dass die Dreiteilung eines Winkels

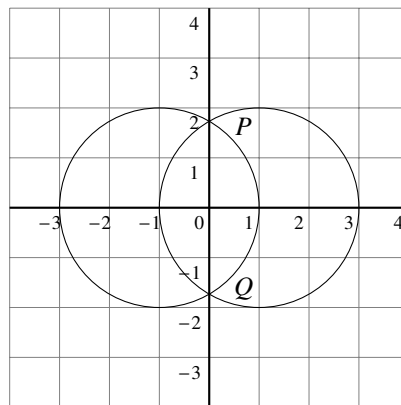


Abb. 2.17: Die Schnittpunkte von zwei Kreisen

und die Verdopplung eines Würfels die Konstruktion von Wurzeln von Polynomen erfordern, die nicht zu dieser Klasse gehören. Heute werden diese Ergebnisse mit Hilfe der Feldtheorie der abstrakten Algebra bewiesen, aber hier gebe ich einen Beweis, der elementare Mathematik verwendet. Der Beweis basiert auf der folgenden Definition.

**Definition 2.2.** Die *depth* eines Ausdrucks, der aus den ganzen Zahlen und den Operatoren  $\{+, -, \times, /, \sqrt{\cdot}\}$  aufgebaut ist, ist die maximale Verschachtelungsebene von Quadratwurzeln.

*Beispiel 2.1.* Betrachten Sie den folgenden Ausdruck:

$$\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

Die Tiefe beträgt 3, weil rechts vom Ausdruck  $\sqrt{17}$  steht, das in  $\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$  verschachtelt ist, das wiederum in  $\sqrt{17 + \dots - \dots - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$  verschachtelt ist.

**Satz 2.7.** Ein Ausdruck der Tiefe  $n$  kann ausgedrückt werden als  $a + b\sqrt{c}$ , wobei  $a, b, c$  Ausdrücke der Tiefe von höchstens  $n - 1$  sind.

*Beweis.* Einfache Berechnungen zeigen, dass die Ausdrücke  $(a_1 + b_1\sqrt{c}) \text{ op } (a_2 + b_2\sqrt{c})$  für die Operatoren  $\text{op} = \{+, -, \times\}$  zu Ausdrücken  $a + b\sqrt{c}$  der Tiefe  $n - 1$  führen. Bei der Division ist die Berechnung etwas komplizierter:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + b_1\sqrt{c}}{a_2 + b_2\sqrt{c}} &= \frac{(a_1 + b_1\sqrt{c})(a_2 - b_2\sqrt{c})}{(a_2 + b_2\sqrt{c})(a_2 - b_2\sqrt{c})} \\ &= \frac{a_1a_2 - b_1b_2c}{a_2^2 - b_2^2c} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - b_2^2c}\sqrt{c}, \end{aligned}$$

die die Form  $a + b\sqrt{c}$  hat, wobei  $a, b, c$  die Tiefe  $n - 1$  haben. Schließlich ist die Quadratwurzel aus einem Ausdruck der Tiefe  $n - 1$  ein Ausdruck der Tiefe  $n$ .  $\square$

**Satz 2.8.** Sei  $p(x)$  ein monisches kubisches Indexpolynom mit rationalen Koeffizienten:

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

und sei  $r = a + b\sqrt{c}$  eine Wurzel von  $p(x)$  von minimaler Tiefe  $n$ , wobei  $a, b, c$  (höchstens)  $n - 1$  tief sind. Dann ist  $r' = a - b\sqrt{c}$  eine Wurzel von  $p(x)$  und  $r \neq r'$ .

*Beweis.* Berechnen wir  $p(r)$ , das gleich 0 ist, da  $r$  eine Wurzel ist:

$$\begin{aligned}
(a + b\sqrt{c})^3 + a_2(a + b\sqrt{c})^2 + a_1(a + b\sqrt{c}) + a_0 &= \\
(a^3 + 3a^2b\sqrt{c} + 3ab^2c + b^3c\sqrt{c}) & \\
+ a_2(a^2 + 2ab\sqrt{c} + b^2c) + a_1(a + b\sqrt{c}) + a_0 &= \\
(a^3 + 3ab^2c + a_2a^2 + a_2b^2c + a_1a + a_0) & \\
+ (3a^2b + b^3c + 2a_2ab + a_1b)\sqrt{c} &= \\
d + e\sqrt{c} &= 0.
\end{aligned}$$

wobei  $d, e$  Ausdrücke der Tiefe  $n - 1$  sind, die aus den rationalen Koeffizienten und  $a, b, c$  gebildet werden. Dann ist  $\sqrt{c} = -d/e$ , so dass  $a + b\sqrt{c}$  als Ausdruck der Tiefe  $n - 1$  ausgedrückt werden kann, wobei die Annahme gilt, dass  $a + b\sqrt{c}$  von minimaler Tiefe  $n$  ist. Da  $\sqrt{c} \neq 0$  ist und die Tiefe  $n$  hat, muss  $d + e\sqrt{c}$  Null sein, damit  $d = e = 0$ .

Betrachten wir nun  $r' = a - b\sqrt{c}$ . Aus der obigen Berechnung ergibt sich, dass  $p(r') = d - e\sqrt{c} = 0 + 0 \cdot \sqrt{c} = 0$ , also ist auch  $r'$  eine Wurzel aus  $p$ .

Wenn  $r = r'$  ist, dann ist  $0 = r - r' = 2b\sqrt{c}$ , was nur gilt, wenn  $b = 0$  ist, so dass  $r, r'$  die Tiefe  $n - 1$  hätte, was wiederum der Annahme widerspricht.  $\square$

**Satz 2.9.** Wenn ein monisches Indexpolynom ein kubisches Polynom mit rationalen Koeffizienten ist:

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

keine rationalen Wurzeln hat, ist keine seiner Wurzeln konstruierbar.

*Beweis.* Durch den Fundamentalsatz der Algebra (Thm. 16.1) hat  $p(x)$  drei Wurzeln  $r_1, r_2, r_3$ . Sei  $r_1 = a + b\sqrt{c}$  eine Wurzel der minimalen Tiefe  $n$ . Unter der Annahme, dass es keine rationalen Wurzeln gibt, sei  $n \geq 1$ , und daher  $b \neq 0$  und  $c \neq 0$ . Nach Thm. 2.8 ist  $r_2 = a - b\sqrt{c}$  ebenfalls eine Wurzel. Führen Sie die folgende Multiplikation durch:

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 \quad (2.3a)$$

$$+ (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x + r_1r_2r_3 \quad (2.3b)$$

$$a_2 = -(r_1 + r_2 + r_3) \quad (2.3c)$$

$$r_3 = -(a_2 + r_1 + r_2). \quad (2.3d)$$

Da  $a_2$  rational ist, ist es das auch:

$$r_3 = -a_2 - (r_1 + r_2) = -a_2 - 2a,$$

was der Annahme widerspricht.  $\square$

## 2.7 Die Unmöglichkeit der klassischen Konstruktionen

**Satz 2.10.**  $\sqrt[3]{2}$  ist irrational.

*Beweis.* Nehmen wir an, dass  $\sqrt[3]{2}$  rational und gleich  $p/q$  ist, wobei  $p, q$  ganze Zahlen sind, die keine anderen gemeinsamen Faktoren als  $\pm 1$  haben. Dann:

$$\begin{aligned}(p/q)^3 &= (\sqrt[3]{2})^3 \\ p^3 &= 2q^3,\end{aligned}$$

also muss  $p$  durch 2 teilbar sein, also  $p = 2r$ . Jetzt:

$$\begin{aligned}8r^3 &= 2q^3 \\ q^3 &= 4r^3,\end{aligned}$$

$q$  ist also durch 2 teilbar, was der Annahme widerspricht, dass  $p, q$  keinen gemeinsamen Faktor haben.  $\square$

**Satz 2.11.**  $x^3 - 2$  hat keine rationalen Wurzeln, so dass es unmöglich ist, einen Würfel mit Lineal und Zirkel zu verdoppeln.

*Beweis.* Eine seiner Wurzeln ist  $\sqrt[3]{2}$ , die nach Thm. 2.10 irrational ist. Die anderen Wurzeln sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung  $x^2 + \sqrt[3]{2}x + (\sqrt[3]{2})^2$ , die man durch Division von  $x^3 - 2$  durch  $x - \sqrt[3]{2}$  erhält. Es ist leicht zu überprüfen, dass die Wurzeln nicht rational sind (tatsächlich nicht einmal real).  $\square$

**Satz 2.12.** Es ist unmöglich, einen beliebigen Winkel mit einem Lineal und einem Zirkel zu dreiteilen.

*Beweis.* Es genügt, die Unmöglichkeit für einen Winkel zu zeigen. Versuchen wir,  $60^\circ$  zu dreiteilen, um  $20^\circ$  zu erhalten.

Nach Thm. A.6:

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \\ \cos 60^\circ &= 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ.\end{aligned}$$

Bezeichne  $x = \cos 20^\circ$  und  $2x$  durch  $y$ . Da  $\cos 60^\circ = 1/2$  ist, haben wir:

$$\begin{aligned}4x^3 - 3x - \frac{1}{2} &= 0 \\ 8x^3 - 6x - 1 &= 0 \\ y^3 - 3y - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Um zu beweisen, dass das Polynom  $y^3 - 3y - 1$  keine rationalen Wurzeln hat, nehme man an, dass  $y = a/b$  eine rationale Wurzel ist, wobei  $a, b$  keinen anderen

gemeinsamen Faktor als  $\pm 1$  haben. Dann:

$$(a/b)^3 - 3(a/b) - 1 = 0 \quad (2.4a)$$

$$a^3 - 3ab^2 = b^3 \quad (2.4b)$$

$$a(a - 3b^2) = b^3 \quad (2.4c)$$

$$a^3 = b(b^2 + 3ab). \quad (2.4d)$$

Nach Gl. 2.4c muss  $b$  durch  $a$  teilbar sein, und nach Gl. 2.4d muss  $a$  durch  $b$  teilbar sein, was nur möglich ist, wenn  $a = b = \pm 1$  und  $a/b = \pm 1$ . Rein rechnerisch sind  $y = a/b = 1$  und  $y = a/b = -1$  keine Wurzeln des Polynoms.  $\square$

Ein alternativer Weg, die Unmöglichkeit der Konstruktionen zu beweisen, ist die Verwendung des folgenden Satzes, den wir ohne Beweis präsentieren.

**Satz 2.13.** *Wenn ein monisches Indexpolynom  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$  mit ganzzahligen Koeffizienten rationale Wurzeln hat, dann hat es ganzzahlige Wurzeln.*

Um zu zeigen, dass es nicht möglich ist, einen Würfel zu duplizieren, müssen wir zeigen, dass:

$$x^3 - 2 = (x - r_2)(x - r_1)(x - r_0)$$

hat keine ganzzahligen Wurzeln. Da  $r_0 r_1 r_2 = -2$  ist, müssen alle Wurzeln durch 2 geteilt werden, also sind die einzigen möglichen ganzzahligen Wurzeln  $\pm 1, \pm 2$ . Eine schnelle Berechnung zeigt, dass keine von ihnen Wurzeln sind.

Um die Unmöglichkeit der Dreiteilung eines Winkels zu zeigen, müssen wir zeigen, dass  $y^3 - 3y - 1$  keine ganzzahligen Wurzeln hat. Eine ganzzahlige Wurzel muss  $-1$  teilen, aber weder 1 noch  $-1$  sind Wurzeln.

### What Is the Surprise?

Underwood Dudley hat eine umfangreiche Studie über die, wie er sie nennt, “Cranks” durchgeführt, die Jahre ihres Lebens mit dem Versuch verschwenden, Winkel mit Lineal und Zirkel zu verdrehen. Sie machen sich nicht nur vor, daß dies möglich ist, sondern, was noch schlimmer ist, sie glauben, daß eine Lösung wichtig wäre. Natürlich hätte eine Lösung keinen praktischen Nutzen, da Werkzeuge wie die Neusis und die Quadratrix das Problem exakt lösen können. Die schiere Anzahl solcher Konstruktionen ist erstaunlich, zumal viele von ihnen clever sind und gute Näherungen erzielen. Das Berechnen der mit den Konstruktionen verbundenen Formeln ist eine hervorragende Übung in Trigonometrie.

Erstaunlich ist auch, dass die Beweise für die Unmöglichkeit dieser geometrischen Konstruktionen rein algebraisch sind, indem man die Eigenschaften der Wurzeln von Polynomen verwendet.

## Quellen

Wikipedia [51, 58, 61] ist eine gute Quelle für die Konstruktionen in diesem Kapitel. Die beiden angenäherten Dreiteilungen stammen aus [15, pp. 67–68, 95–96]. Das zweite Beispiel wird dem berühmten Philosophen Thomas Hobbes zugeschrieben. Sowohl [31, pp. 48–49] als auch [15, pp. 6–7] behandeln die Dreiteilung mit Hilfe der Quadratrix. Die Verdoppelung des Würfels mit Hilfe einer Neusis wird von [14] übernommen.

Eine rigorose Behandlung der Konstruierbarkeit findet sich in Lehrbüchern über abstrakte Algebra wie [17], das einen allgemeinen Beweis der Umkehrung von Thm 2.6 in Sect. 32 enthält. Theorem 2.13 ist Thm. 23.11 von [17]. Eine relativ zugängliche Darstellung von Wantzels Beweis findet sich in [48]. Meine Darstellung der Konstruierbarkeit stützt sich auf die Darstellungen in [11, Kap. III] und [27].

## Kapitel 3

### Die Quadratur des Kreises

Die Quadratur des Kreises, d. h. die Konstruktion eines Quadrats mit der gleichen Fläche wie ein gegebener Kreis, ist eines der drei Konstruktionsprobleme, die sich die Griechen stellten, aber nicht lösen konnten. Anders als bei der Dreiteilung des Winkels und der Verdoppelung des Würfels, wo die Unmöglichkeit aus den Eigenschaften der Wurzeln von Polynomen folgt, ergibt sich die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises aus der Transzendentalität von  $\pi$ : Es ist keine Wurzel eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten. Dies ist ein schwieriger Satz, der 1882 von Carl von Lindemann bewiesen wurde.

Annäherungen an  $\pi \approx 3.14159265359$  sind seit dem Altertum bekannt. Einige einfache, aber einigermaßen genaue Näherungen sind:

$$\frac{22}{7} \approx 3.142857, \quad \frac{333}{106} \approx 3.141509, \quad \frac{355}{113} \approx 3.141593.$$

Wir stellen drei Konstruktionen von Näherungen an  $\pi$  mit Hilfe von Lineal und Zirkel vor. Eine stammt von Adam Kochański (Sect. 3.1) und zwei von Ramanujan (Sects. 3.2, 3.3). Abschnitt 3.4, wie man den Kreis mit Hilfe der Quadratrix quadriert.

Die folgende Tabelle zeigt die Formeln für die konstruierten Längen, ihre Näherungswerte, die Differenz zwischen diesen Werten und dem Wert von  $\pi$  und den Fehler in Metern, der sich ergibt, wenn die Näherung zur Berechnung des Erdumfangs verwendet wird, wenn der Radius 6378 km beträgt.

Konstruktion	Formel	Wert	Difference	Fehler (m)
$\pi$	–	3.14159265359	–	–
Kochański	$\sqrt{\frac{40}{3}} - 2\sqrt{3}$	3.14153333871	$5.93 \times 10^{-5}$	757
Ramanujan 1	$\frac{355}{113}$	3.14159292035	$2.67 \times 10^{-7}$	3.4
Ramanujan 2	$\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4}$	3.14159265258	$1.01 \times 10^{-9}$	0.013

#### 3.1 Kochańskis Konstruktion

**Construction (Fig. 3.1):**



1. Konstruieren Sie einen Einheitskreis mit dem Mittelpunkt  $O$ , lassen Sie  $\overline{AB}$  einen Durchmesser sein und konstruieren Sie eine Tangente an den Kreis bei  $A$ .
2. Konstruiere einen Einheitskreis mit dem Mittelpunkt  $A$  und bezeichne seinen Schnittpunkt mit dem ersten Kreis als  $C$ . Konstruiere einen Einheitskreis, dessen Mittelpunkt  $C$  ist, und bezeichne seinen Schnittpunkt mit dem zweiten Kreis als  $D$ .
3. Konstruieren Sie  $\overline{OD}$  und bezeichnen Sie ihren Schnittpunkt mit der Tangente mit  $E$ .
4. Konstruieren Sie von  $E$  aus  $F, G, H$ , jeweils im Abstand 1 vom vorherigen Punkt.
5. Konstruieren Sie  $\overline{BH}$ .

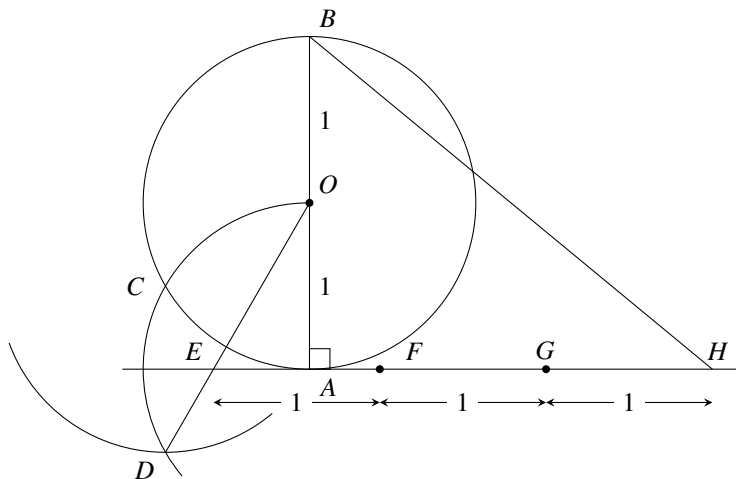


Abb. 3.1: Kochański's Annäherung an  $\pi$

**Satz 3.1.**  $\overline{BH} = \sqrt{\frac{40}{3}} - 2\sqrt{3} \approx \pi$ .

*Beweis.* Abbildung 3.2 ist ein vergrößerter Ausschnitt aus Abb. 3.1, dem gestrichelte Liniensegmente hinzugefügt wurden. Da es sich bei allen Kreisen um Einheitskreise handelt, sind die Längen der gestrichelten Linien 1. Daraus folgt, dass  $\overline{AOCD}$  eine Raute ist, so dass ihre Diagonalen senkrecht zueinander stehen und sich an dem mit  $K$  bezeichneten Punkt halbieren.  $\overline{AK} = 1/2$ .

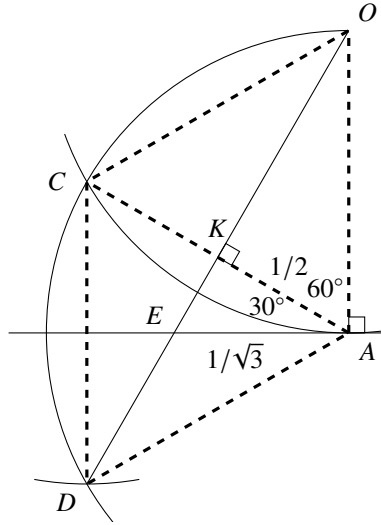


Abb. 3.2: Detail aus Kochańskis Konstruktion

Die Diagonale  $\overline{AC}$  bildet zwei gleichseitige Dreiecke  $\triangle OAC$ ,  $\triangle DAC$ , also  $\angle OAC = 60^\circ$ . Da die Tangente einen rechten Winkel mit dem Radius  $\overline{OA}$  bildet, ist  $\angle KAE = 30^\circ$ . Jetzt:

$$\begin{aligned} \frac{1/2}{\overline{EA}} &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \overline{EA} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \overline{AH} &= 3 - \overline{EA} = \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$\triangle ABH$  ist ein rechtwinkliges Dreieck und  $\overline{AH} = 3 - \overline{EA}$ , also nach dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} \overline{BH}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= 4 + \frac{27 - 6\sqrt{3} + 1}{3} = \frac{40}{3} - 2\sqrt{3} \\ \overline{BH} &= \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3.141533387 \approx \pi. \end{aligned}$$

□

### 3.2 Ramanujans erste Konstruktion

**Konstruktion (Fig. 3.3):**

1. Konstruieren Sie einen Einheitskreis mit dem Mittelpunkt  $O$ , und sei  $\overline{PR}$  ein Durchmesser.
2. Konstruieren Sie den Punkt  $H$ , der die  $\overline{PO}$  halbiert und den Punkt  $T$ , der die  $\overline{RO}$  dreiteilt (Thm. 2.6).
3. Konstruieren Sie die Senkrechte in  $T$ , die den Kreis in  $Q$  schneidet.
4. Konstruieren Sie die Sehnen  $\overline{RS} = \overline{QT}$  und  $\overline{PS}$ .
5. Konstruieren Sie eine zu  $\overline{RS}$  parallele Linie von  $T$ , die  $\overline{PS}$  in  $N$  schneidet.
6. Konstruieren Sie eine Parallele zu  $\overline{RS}$  von  $O$  aus, die  $\overline{PS}$  in  $M$  schneidet.
7. Konstruieren Sie die Sehne  $\overline{PK} = \overline{PM}$ .
8. Konstruieren Sie die Tangente an  $P$  der Länge  $\overline{PL} = \overline{MN}$ .
9. Verbinden Sie die Punkte  $K, L, R$ .
10. Finde den Punkt  $C$  so, dass  $\overline{RC}$  gleich  $\overline{RH}$  ist.
11. Konstruieren Sie  $\overline{CD}$  parallel zu  $\overline{KL}$ , die  $\overline{LR}$  in  $D$  schneidet.

**Satz 3.2.**  $\overline{RD}^2 = \frac{355}{113} \approx \pi$ .

*Beweis.*  $\overline{RS} = \overline{QT}$  durch Konstruktion und durch den Satz des Pythagoras für  $\triangle QOT$ :

$$\overline{RS} = \overline{QT} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$\angle PSR$  wird durch einen Durchmesser begrenzt, also ist  $\triangle PSR$  ein rechtwinkliges Dreieck. Durch den Satz des Pythagoras:

$$\overline{PS} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{31}}{3}.$$

Durch die Konstruktion  $\overline{MO} \parallel \overline{RS}$  also  $\triangle MPO \sim \triangle SPR$  und:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PM}}{\overline{PO}} &= \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} \\ \frac{\overline{PM}}{1} &= \frac{\sqrt{31}/3}{2} \\ \overline{PM} &= \frac{\sqrt{31}}{6}. \end{aligned}$$

By construction  $\overline{NT} \parallel \overline{RS}$  so  $\triangle NPT \sim \triangle SPR$  and:

$$\frac{\overline{PN}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}}$$

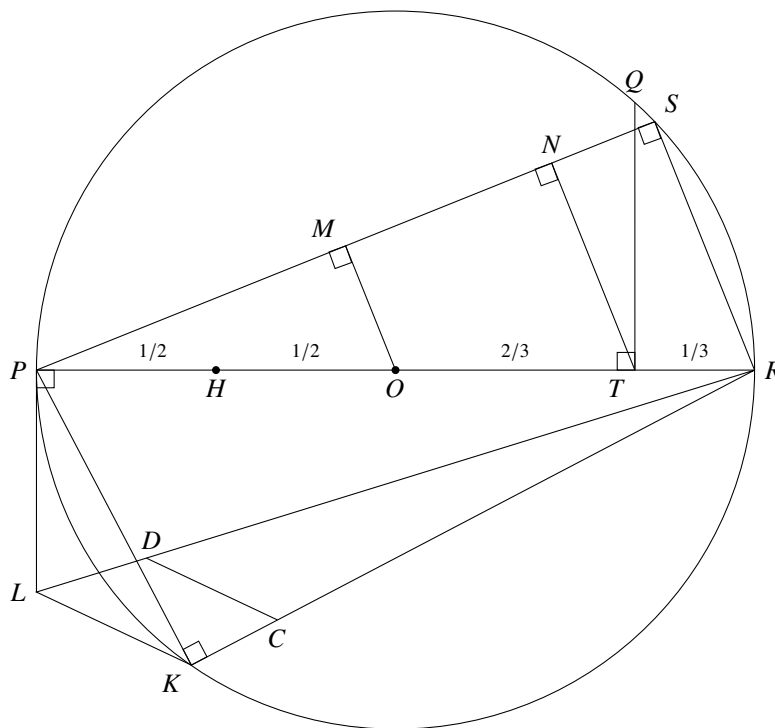
$$\frac{\overline{PN}}{5/3} = \frac{\sqrt{31}/3}{2}$$

$$\overline{PN} = \frac{5\sqrt{31}}{18}$$

$$\overline{MN} = \overline{PN} - \overline{PM} = \sqrt{31} \left( \frac{5}{18} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\sqrt{31}}{9}.$$

$\triangle PKR$  ist ein rechtwinkliges Dreieck, weil  $\angle PKR$  durch einen Durchmesser begrenzt ist. Durch die Konstruktion  $\overline{PK} = \overline{PM}$  und durch den Satz des Pythagoras:

$$\overline{RK} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{31}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{113}}{6}.$$

Abb. 3.3: *Ramanujans erste Konstruktion*

$\triangle LPR$  ist ein rechtwinkliges Dreieck, weil  $\overline{PL}$  eine Tangente ist, also ist  $\angle LPR$  ein rechter Winkel.  $\overline{PL} = \overline{MN}$  durch Konstruktion und durch den Satz des Pythagoras:

$$\overline{RL} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{31}}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{355}}{9}.$$

Nach Konstruktion  $\overline{RC} = \overline{RH} = 3/2$  und  $\overline{CD} \parallel \overline{LK}$ . Durch ähnliche Dreiecke:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{RD}}{\overline{RC}} &= \frac{\overline{RL}}{\overline{RK}} \\ \frac{\overline{RD}}{3/2} &= \frac{\sqrt{355}/9}{\sqrt{113}/6} \\ \overline{RD} &= \sqrt{\frac{355}{113}} \\ \overline{RD}^2 &= \frac{355}{113} \approx 3.14159292035 \approx \pi.\end{aligned}$$

In Abb. 3.4 sind die Liniensegmente mit ihren Längen beschriftet. □

### 3.3 Ramanujans zweite Konstruktion

**Konstruktion (Fig. 3.5):**

1. Konstruiere einen Einheitskreis mit Mittelpunkt  $O$  und Durchmesser  $\overline{AB}$  und sei  $C$  der Schnittpunkt der Senkrechten auf  $\overline{AB}$  in  $O$  mit dem Kreis.
2. Dreiteilen Sie den Streckenabschnitt  $\overline{AO}$  so, dass  $\overline{AT} = 1/3$  und  $\overline{TO} = 2/3$  (Thm. 2.6).
3. Konstruieren Sie  $\overline{BC}$  und finden Sie Punkte  $M, N$ , so dass  $\overline{CM} = \overline{MN} = \overline{AT} = 1/3$ .
4. Konstruieren Sie  $\overline{AM}$ ,  $\overline{AN}$  und lassen Sie  $P$  den Punkt auf  $\overline{AN}$  sein, so dass  $\overline{AP} = \overline{AM}$ .
5. Konstruieren Sie von  $P$  aus eine zu  $\overline{MN}$  parallele Linie, die  $\overline{AM}$  in  $Q$  schneidet.
6. Konstruieren Sie  $\overline{OQ}$  und dann von  $T$  aus eine Linie parallel zu  $\overline{OQ}$ , die  $\overline{AM}$  in  $R$  schneidet.
7. Konstruieren Sie  $\overline{AS}$  tangential an  $A$ , so dass  $\overline{AS} = \overline{AR}$ .
8. Konstruieren Sie  $\overline{SO}$ .

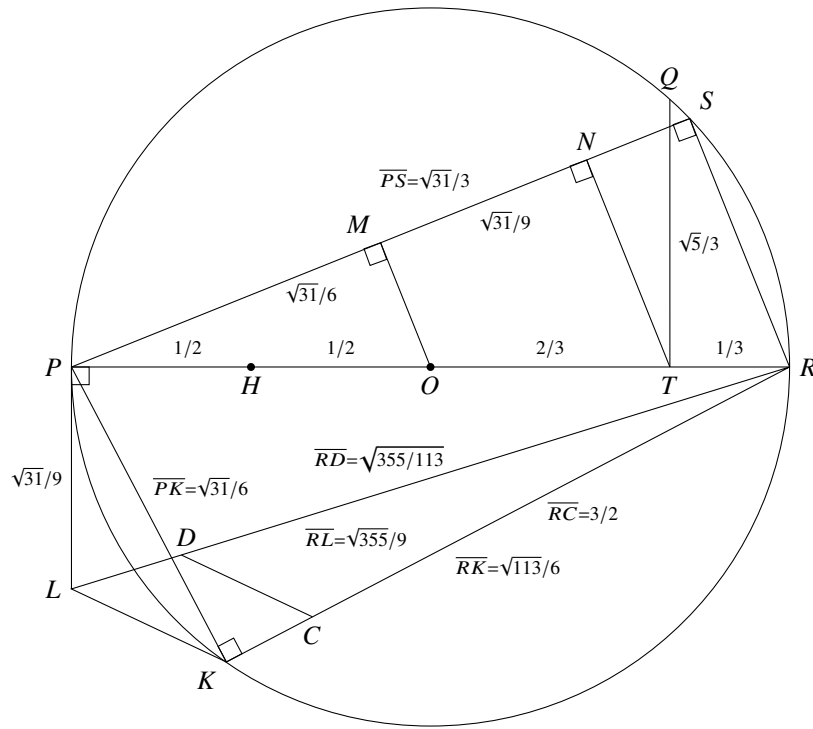


Abb. 3.4: Ramanujans erste Konstruktion mit beschrifteten Liniensegmenten

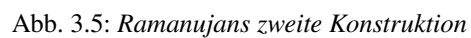
**Satz 3.3.**  $3\sqrt{SO} = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} \approx \pi.$

*Beweis.*  $\triangle COB$  ist ein rechtwinkliges Dreieck, also nach dem Satz des Pythagoras  $\overline{CB} = \sqrt{2}$  und:

$$\overline{NB} = \sqrt{2} - 2/3.$$

$\triangle COB$  ist isozyklisch, also  $\angle NBA = \angle MBA = 45^\circ$ . Nach dem Kosinusetz:

$$\begin{aligned} \overline{AN}^2 &= \overline{BA}^2 + \overline{BN}^2 - 2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BN} \cdot \cos \angle NBA \\ &= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{22}{9} \\ \overline{AN} &= \sqrt{\frac{22}{9}}. \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}\overline{AM}^2 &= \overline{BA}^2 + \overline{BM}^2 - 2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BM} \cdot \cos \angle MBA \\ &= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{19}{9} \\ \overline{AM} &= \sqrt{\frac{19}{9}}.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\frac{\overline{AQ}}{\overline{AM}} &= \frac{\overline{AP}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} \\ \overline{AQ} &= \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AN}} = \frac{19/9}{\sqrt{22/9}} = \frac{19}{3\sqrt{22}}.\end{aligned}$$

Durch Konstruktion  $\overline{TR} \parallel \overline{OQ}$  also  $\triangle RAT \sim \triangle QAO$  und:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}} &= \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} \\ \overline{AR} &= \overline{AQ} \cdot \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} = \frac{19}{3\sqrt{22}} \cdot \frac{1/3}{1} = \frac{19}{9\sqrt{22}}.\end{aligned}$$

Nach der Konstruktion ist  $\overline{AS} = \overline{AR}$  und  $\triangle OAS$  ein rechtwinkliges Dreieck, weil  $\overline{AS}$  eine Tangente ist. Durch den Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned}\overline{SO} &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{19}{9\sqrt{22}}\right)^2} \\ 3\sqrt{\overline{SO}} &= 3\left(1^2 + \frac{19^2}{9^2 \cdot 22}\right)^{1/4} = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} \approx 3.14159265258 \approx \pi.\end{aligned}$$

In Abb. 3.6 sind die Liniensegmente mit ihren Längen beschriftet.

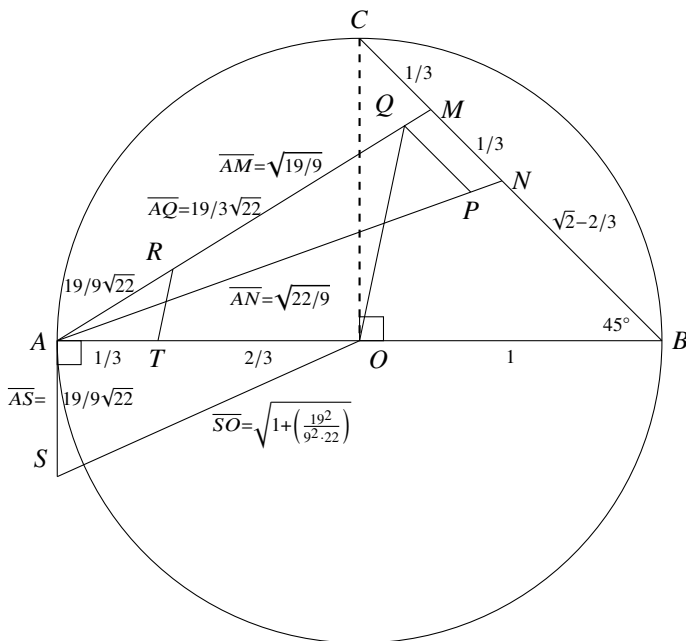


Abb. 3.6: Ramanujans zweite Konstruktion mit beschrifteten Liniensegmenten

### 3.4 Quadrieren eines Kreises mit Hilfe einer Quadratrix

Die Quadratrix wird in Abschnitt 2.4 beschrieben.



Sei  $t = \overline{DE}$  die Strecke, die das horizontale Lineal auf der  $y$ -Achse zurückgelegt hat, und sei  $\theta$  der entsprechende Winkel zwischen dem rotierenden Lineal und der  $x$ -Achse. Sei  $P$  die Position des Verbindungspunktes der beiden Lineale. Die Ortskurve von  $P$  sei die Quadratrixkurve.

$F$  sei die Projektion von  $P$  auf die  $x$ -Achse und  $G$  sei die Position der Verbindungsstelle, wenn beide Lineale die  $x$ -Achse erreichen, d.h.  $G$  ist der Schnittpunkt der Quadratrixkurve mit der  $x$ -Achse (Abb. 3.7).

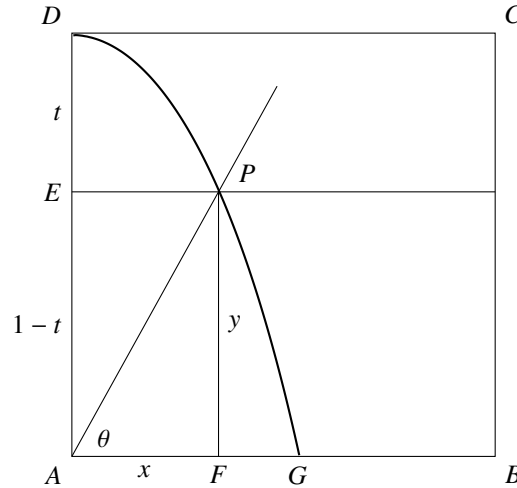


Abb. 3.7: Quadratur des Kreises mit einer Quadratrix

**Satz 3.4.**  $\overline{AG} = 2/\pi$ .

*Beweis.* Es sei  $y = \overline{PF} = \overline{EA} = 1 - t$ . Da auf einer Quadratrix  $\theta$  in dem Maße abnimmt, wie  $t$  zunimmt:

$$\frac{1-t}{1} = \frac{\theta}{\pi/2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}(1-t).$$

Lassen Sie  $x = \overline{AF} = \overline{EP}$ . Dann  $\tan \theta = y/x$  also:

$$x = \frac{y}{\tan \theta} = y \cot \theta = y \cot \frac{\pi}{2}(1-t) = y \cot \frac{\pi}{2}y. \quad (3.1)$$

Normalerweise drücken wir eine Funktion als  $y = f(x)$  aus, aber sie kann auch als  $x = f(y)$  ausgedrückt werden.

Um  $x = \overline{AG}$  zu erhalten, können wir nicht einfach  $y = 0$  in Gl. 3.1 einsetzen, da  $\cot 0$  nicht definiert ist, also wollen wir den Grenzwert von  $x$  berechnen, wenn  $y$  gegen 0 geht. Führen Sie zunächst die Substitution  $z = (\pi/2)y$  durch, um zu erhalten:

$$x = y \cot \frac{\pi}{2} y = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} y \cot \frac{\pi}{2} y \right) = \frac{2}{\pi} (z \cot z),$$

und nehmen Sie dann das Limit:

$$\lim_{z \rightarrow 0} x = \frac{2}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} (z \cot z) = \frac{2}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{z \cos z}{\sin z} \right) = \frac{2}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{\cos z}{(\sin z)/z} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{\cos 0}{1} = \frac{2}{\pi},$$

wo wir verwendet haben  $\lim_{z \rightarrow 0} (\sin z/z) = 1$  (Thm. A.12). □

### Was ist die Überraschung?

Es ist überraschend, dass so genaue Näherungen an  $\pi$  konstruiert werden können. Natürlich kann man nicht umhin, über Ramanujans clevere Konstruktionen zu staunen.

### Quellen

Kochańskis Konstruktion erscheint in [7]. Ramanujans Konstruktionen stammen aus [38, 39]. Die Quadratur des Kreises mit Hilfe der Quadratrix stammt aus [31, pp. 48–49] und [61].

## Kapitel 4

### The Five-Color Theorem

Karten verwenden Farben, um eine Region von einer anderen zu unterscheiden, indem sie dafür sorgen, dass benachbarte Regionen mit unterschiedlichen Farben eingefärbt werden. Im Jahr 1852 stellte Francis Guthrie fest, dass eine Karte der Grafschaften Englands mit nur vier Farben eingefärbt werden konnte. Die Behauptung, dass vier Länder ausreichen, um eine beliebige ebene Karte einzufärben, wird als *Vier-Farben-Theorem* bezeichnet und wurde erst 1976 von Kenneth Appel und Wolfgang Haken bewiesen. Sie wendeten ausgeklügelte mathematische Argumente an, um zu zeigen, dass, wenn es ein Gegenbeispiel gibt (eine Karte, die mehr als vier Farben benötigt), diese mit einer von 1834 Konfigurationen verbunden sein muss. Anschließend überprüften sie diese Konfigurationen mit einem Computer.

Während das Vier-Farben-Theorem extrem schwierig zu beweisen ist, sind die Beweise für das Fünf- und Sechs-Farben-Theorem relativ einfach (Abschnitte 4.5, 4.6). Auf dem Weg zum Beweis dieser Theoreme definieren wir planare Karten und Graphen (Sect. 4.1), beweisen die Eulersche Formel (Sect. 4.2) und zeigen, dass ein planarer Graph Scheitelpunkte haben muss, deren Grad kleiner oder gleich fünf ist. In Sect. 4.3 wird die Eulersche Formel verwendet, um zu zeigen, dass zwei Graphen nicht planar sind.

1879 veröffentlichte Alfred B. Kempe einen Beweis des Vier-Farben-Satzes, aber 1890 zeigte Percy J. Heawood, dass der Beweis falsch ist. In Sect. 4.7 präsentieren wir Kemptes fehlerhaften Beweis und Heawoods Beweis, dass er nicht korrekt ist.

#### 4.1 Flächige Karten und Diagramme

**Definition 4.1.** Eine *planar map* ist eine Menge von Regionen in der Ebene, die durch Grenzen getrennt sind. Eine *coloring* einer Karte ist eine Zuweisung einer Farbe zu jeder Region, so dass Regionen, die eine Grenze teilen, unterschiedliche Farben zugewiesen werden.

Abbildung 4.1 zeigt eine fünffarbige Darstellung einer ebenen Karte mit zehn Regionen. Abbildung 4.2 zeigt eine vierfarbige Darstellung der gleichen Karte.

**Definition 4.2.** Ein *Graph* ist eine Menge von *Scheitelpunkten*  $V$  und eine Menge von *Kanten*  $E$ , so dass jede Kante mit genau zwei Scheitelpunkten verbunden ist.

Ein *planarer Graph* ist ein Graph, bei dem sich keine Kanten kreuzen. In einem planaren Graphen werden die von einer Menge von Kanten eingeschlossenen Bereiche *Flächen* genannt.

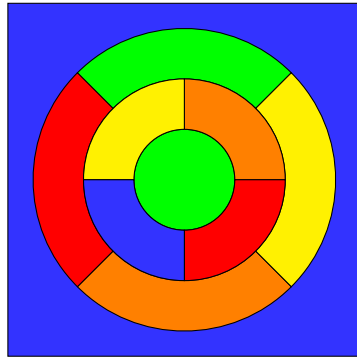


Abb. 4.1: Fünffarbigkeit einer planaren Karte

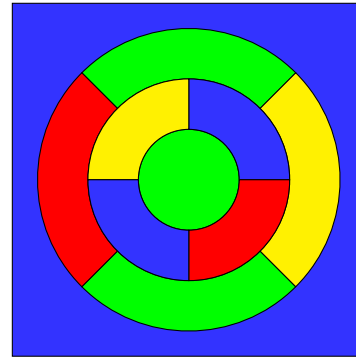


Abb. 4.2: Vierfarbigkeit einer planaren Karte

Eine *Farbgebung* eines planaren Graphen ist eine Zuordnung von Farben zu Knoten, so dass keine zwei Knoten der gleichen Farbe durch eine Kante verbunden sind.

Planare Karten und planare Graphen sind dual und es ist bequem, Färbungsprobleme in Graphen statt in Karten zu untersuchen.

**Satz 4.1.** *Bei einer planaren Karte kann ein planarer Graph so konstruiert werden, dass es für jede Färbung der Regionen der Karte eine Färbung der Scheitelpunkte des Graphen gibt, und umgekehrt.*

*Beweis.* Konstruieren Sie einen Knoten für jede Region und konstruieren Sie eine Kante zwischen zwei Knoten, wenn und nur wenn die entsprechenden Regionen eine gemeinsame Grenze haben.  $\square$

*Beispiel 4.1.* Abbildung 4.3 zeigt die planare Karte aus Abb. 4.2 und die mit den Regionen verbundenen Scheitelpunkte. Abbildung 4.4 zeigt den planaren Graphen, der der Karte entspricht.

Wir können unsere Graphen weiter auf diejenigen beschränken, deren Flächen dreieckig sind.

**Definition 4.3.** Ein Graph ist *dreieckig*, wenn alle seine Flächen durch drei Kanten begrenzt sind. Ein Graph kann *trianguliert* werden, wenn Kanten hinzugefügt werden können, so dass der Graph dreieckig ist. Wir sagen auch, dass es eine *Triangulation* des Graphen gibt.

*Beispiel 4.2.* Die Flächen des ebenen Graphen in Abb. 4.4 sind dreieckig, da jede Fläche von drei Kanten begrenzt wird. Da die Kanten gekrümmt sind, handelt es sich bei den Flächen nicht um Dreiecke, sondern um Polygone, deren drei Kanten gerade Liniensegmente sind.

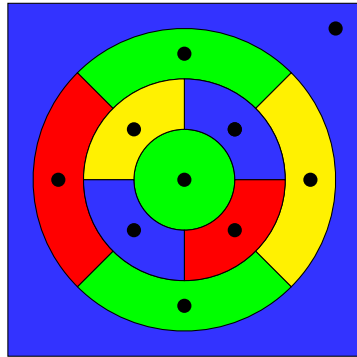


Abb. 4.3: Associating vertices with the regions of a planar map

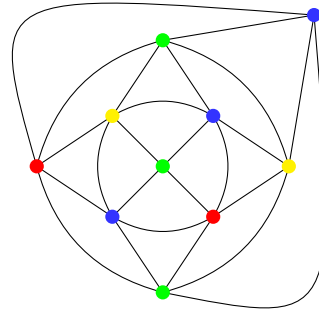


Abb. 4.4: Der planare Graph, der der planaren Karte entspricht

**Fáry's Theorem** besagt, dass jeder dreieckige flächige Graph in einen äquivalenten flächigen Graph umgewandelt werden kann, dessen Kanten gerade Liniensegmente sind. Daher können die Beweise ohne Verlust an Allgemeinheit auf planare Graphen beschränkt werden, deren Flächen Dreiecke sind.

*Beispiel 4.3.* Abb. 4.5 (links) zeigt, dass ein Quadrat zweifarbig sein kann, aber wenn es trianguliert ist (Mitte), sind vier Farben notwendig. Unser Ziel ist es zu beweisen, dass *all* Graphen  $n$ -farbig sein können für einige  $n$ . Wenn der triangulierte Graph  $n$ -farbig ist, dann ist es auch der ursprüngliche Graph, weil das Löschen der zusätzlichen Kanten die Färbung nicht ungültig macht (rechts).

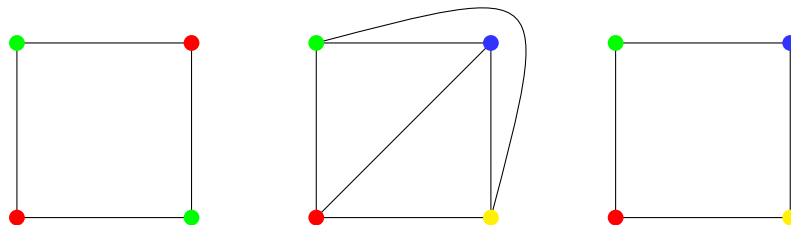


Abb. 4.5: Färben eines triangulierten Graphen

## 4.2 Eulersche Formel

**Satz 4.2.** Sei  $G$  ein zusammenhängender planarer Graph mit  $V$  Scheitelpunkten,  $E$  Kanten und  $F$  Flächen. Dann sei  $V - E + F = 2$ .

*Beweis.* Durch Induktion über die Anzahl der Kanten. Ist die Anzahl der Kanten im Graphen Null, so gibt es nur einen einzigen Scheitelpunkt und eine einzige Fläche, also  $1 - 0 + 1 = 2$ . Andernfalls gibt es mindestens eine Kante  $e$  und sie verbindet zwei Scheitelpunkte  $v_1, v_2$ . Löschen Sie die Kante  $e$ .

*Fall 1:* Der Graph wird unzusammenhängend (Abb. 4.6). Verschmelze  $v_1$  mit  $v_2$  (Abb. 4.7). Der resultierende Graph  $G'$  ist ein planarer zusammenhängender Graph und hat weniger Kanten als  $G$ , so dass nach der Induktionshypothese  $(V - 1) - (E - 1) + F = 2$ , da auch die Anzahl der Scheitelpunkte um eins reduziert ist. Vereinfachend erhalten wir  $V - E + F = 2$  für  $G$ .

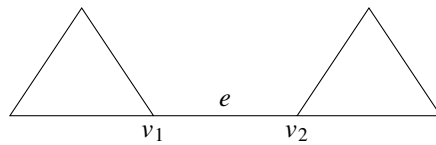


Abb. 4.6: Das Entfernen einer Kante unterbricht die Verbindung des Graphen

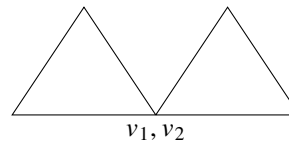


Abb. 4.7: Verschmelzen von zwei Eckpunkten

*Fall 2:* Der Graph bleibt verbunden (Abb. 4.8).  $G'$  hat weniger Kanten als  $G$  (Abb. 4.9), so dass nach der Induktionshypothese  $V - (E - 1) + (F - 1) = 2$ , da das Entfernen der Kante zwei Flächen zu einer verbindet. Vereinfachend erhalten wir  $V - E + F = 2$  für  $G$ .  $\square$

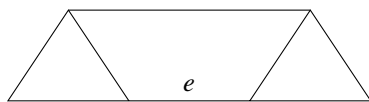


Abb. 4.8: Removing an edge does not disconnect the graph



Abb. 4.9: Der Graph bleibt zusammenhängend und hat weniger Kanten

**Satz 4.3.** Sei  $G$  ein zusammenhängender, triangulierter, planarer Graph mit  $E$  Kanten und  $V$  Scheitelpunkten. Dann sei  $E = 3V - 6$ .

*Beweis.* Jede Fläche wird von drei Kanten begrenzt, also  $E = 3F/2$ , wobei wir durch 2 teilen, weil jede Kante zweimal gezählt wurde, einmal für jede Fläche, die



Abb. 4.10: Weniger Kanten als die Obergrenze

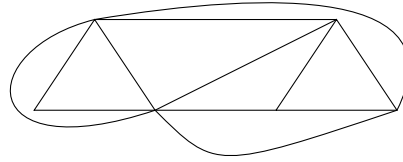


Abb. 4.11: In einem triangulierten Graphen ist die Anzahl der Kanten maximal

sie begrenzt. Nach der Eulerschen Formel:

$$\begin{aligned} E &= V + F - 2 \\ &= V + 2E/3 - 2 \\ &= 3V - 6. \end{aligned}$$

□

*Beispiel 4.4.* Der planare Graph in Abb. 4.4 hat 10 Eckpunkte und  $3 \cdot 10 - 6 = 24$  Kanten.

**Satz 4.4.** Sei  $G$  ein zusammenhängender planarer Graph. Dann sei  $E \leq 3V - 6$ .

*Beweis.* Triangulieren Sie  $G$ , um  $G'$  zu erhalten.  $E' = 3V' - 6$  nach Thm. 4.3. Entfernen Sie nun Kanten aus  $G'$ , um  $G$  zu erhalten. Die Anzahl der Scheitelpunkte ändert sich nicht, so dass  $E' = 3V - 6$  ist. □

*Beispiel 4.5.* Der Graph in Abb. 4.10 hat 8 Kanten und 6 Scheitelpunkte und  $8 < 3 \cdot 6 - 6 = 12$ . Abbildung 4.11 zeigt einen triangulierten Graphen mit 6 Scheitelpunkten und  $3 \cdot 6 - 6 = 12$  Kanten.

### 4.3 Nicht-planare Diagramme

Lassen Sie uns einen kurzen Umweg machen, um zu zeigen, wie Thms. 4.2 und 4.4 verwendet werden können, um zu beweisen, dass bestimmte Graphen nicht planar sind.

**Satz 4.5.**  $K_5$ , der vollständige Graph mit fünf Scheitelpunkten, ist nicht planar (Fig. 4.12).

*Beweis.* Für  $K_5$ ,  $V = 5$  und  $E = 10$ . Nach Thm. 4.4 muss die Anzahl der Kanten kleiner oder gleich  $3 \cdot 5 - 6 = 9$  sein, also ist der Graph nicht planar. □

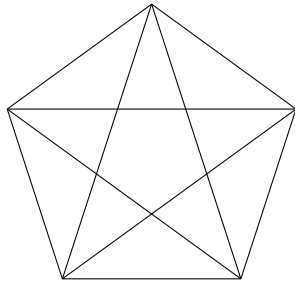


Abb. 4.12:  $K_5$  nicht planar ist

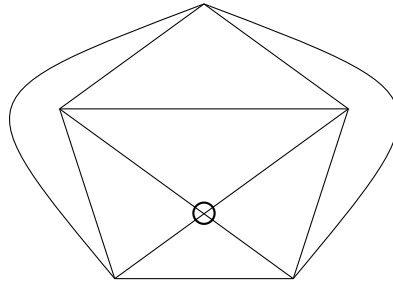


Abb. 4.13: Ein gescheiterter Versuch,  $K_5$  als planar zu zeichnen

**Satz 4.6.**  $K_{3,3}$ , der zweistufige Graph mit drei Eckpunkten auf jeder Seite, ist nicht planar (Abb. 4.14).

*Beweis.*  $V = 6$  und  $E = 9$ . Nach Thm 4.2 ist, wenn  $K_{3,3}$  planar ist,  $F = E - V + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ . Aber jede Fläche wird durch vier Kanten begrenzt (Abb. 4.15), also  $E = 4F/2 = 10 \neq 9$ .  $\square$

Im Jahr 1930 bewies Kazimierz Kuratowski eine Umkehrung dieser Theoreme: Wenn ein Graph nicht planar ist, enthält er (in einem bestimmten Sinne)  $K_5$  oder  $K_{3,3}$ .

#### 4.4 Die Gradzahlen der Scheitelpunkte

**Definition 4.4.**  $d(v)$ , der *Grad* des Scheitelpunkts  $v$ , ist die Anzahl der Kanten, die mit  $v$ .

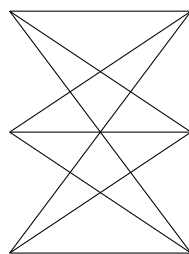


Abb. 4.14:  $K_{3,3}$  nicht planar ist

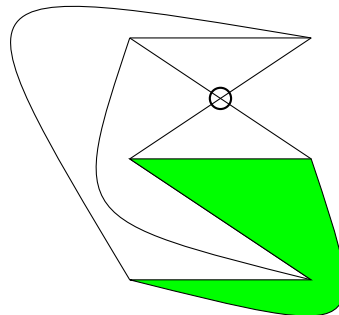


Abb. 4.15: Ein gescheiterter Versuch,  $K_{3,3}$  als planar zu zeichnen



*Beispiel 4.6.* Der Graph in Abb. 4.4 enthält 8 Scheitelpunkte, die den beiden Ringen entsprechen, und jeder Scheitelpunkt hat den Grad 5. Der Scheitelpunkt, der der äußeren Fläche entspricht, hat den Grad 4, ebenso der Scheitelpunkt, der der inneren Fläche entspricht. Daher

$$\sum_{v \in V} d(v) = 5 \cdot 8 + 4 \cdot 2 = 48.$$

Um die Gesamtzahl der Kanten zu erhalten, muss man 48 durch 2 teilen, da jede Kante zweimal gezählt wurde, einmal für jeden der Eckpunkte, mit denen sie verbunden ist.

Wenn wir das Argument verallgemeinern, erhalten wir:

**Satz 4.7.** Sei  $d_i$  für  $i$  in  $\{1, 2, 3, \dots, k\}$  die Anzahl der Scheitelpunkte vom Grad  $i$  in einem zusammenhängenden planaren Graphen  $G$  mit  $V$  Scheitelpunkten und  $E$  Kanten, wobei  $k$  der höchste Grad eines Scheitelpunktes in  $V$  ist. Dann:

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{i=1}^k i \cdot d_i = 2E.$$

**Satz 4.8.** Sei  $G$  ein zusammenhängender planarer Graph mit  $E$  Kanten und  $V$  Scheitelpunkten, und sei  $d_i$  für  $i$  in  $\{1, 2, 3, \dots, k\}$  die Anzahl der Scheitelpunkte vom Grad  $i$ , wobei  $k$  der höchste Grad eines Scheitelpunktes in  $V$  ist. Dann muss es einen Scheitelpunkt  $v$  in  $V$  geben, so dass  $d(v) \leq 5$  ist.

1. Wenn es  $d_1$  Scheitelpunkte vom Grad 1,  $d_2$  Scheitelpunkte vom Grad 2,  $\dots$ ,  $d_k$  Scheitelpunkte vom Grad  $k$  gibt, dann  $V = \sum_{i=1}^k d_i$ . Aus Thms. 4.4 und 4.7:

$$\sum_{i=1}^k i \cdot d_i = 2E \leq 2(3V - 6) = 6V - 12 = 6 \sum_{i=1}^k d_i - 12.$$

Deshalb:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k i \cdot d_i &\leq 6 \sum_{i=1}^k d_i - 12 \\ \sum_{i=1}^k (6 - i) d_i &\geq 12. \end{aligned}$$

Da  $12 > 0$  und alle  $d_i$  positiv sind, ist für mindestens ein  $i$ ,  $6 - i > 0$  und für dieses  $i$ ,  $i < 6$ . □

2. Berechnen wir den *durchschnittlichen* Grad der Scheitelpunkte, der die Summe der Grade geteilt durch die Anzahl der Scheitelpunkte ist:

$$d_{\text{avg}} = \frac{\sum_{i=1}^k i \cdot d_i}{V}.$$

Aber die Summe der Grade ist das Doppelte der Anzahl der Kanten, was nach Thm. 4.4 ergibt:

$$d_{avg} = \frac{2E}{V} \leq \frac{6V - 12}{V} = 6 - \frac{6}{V} < 6.$$

Wenn der Durchschnitt kleiner als sechs ist, muss es einen Scheitelpunkt vom Grad kleiner als sechs geben.  $\square$

*Beispiel 4.7.* In Abb. 4.4 ist die Summe der Grade  $8 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 48$ . Es gibt 10 Scheitelpunkte, also ist der durchschnittliche Grad  $48/10 = 4.8$  und es muss einen Scheitelpunkt mit dem Grad 4 oder weniger geben.

#### 4.5 Das Sechs-Farben-Theorem

**Satz 4.9.** *Jeder planare Graph  $G$  kann sechsfarbig sein.*

*Beweis.* Durch Induktion auf die Anzahl der Scheitelpunkte. Wenn  $G$  sechs Scheitelpunkte oder weniger hat, genügen sechs Farben. Für den Induktionsschritt hat  $G$  nach Thm. 4.8 einen Scheitelpunkt  $v$  mit Grad 5 oder weniger. Löschen Sie den Knoten  $v$ , um den Graphen  $G'$  zu erhalten. Nach der Induktionshypothese kann  $G'$  sechsfarbig sein, aber  $v$  hat höchstens 5 Nachbarn und es werden höchstens 5 Farben verwendet, um sie zu färben (Abb. 4.16), also kann  $v$  mit der sechsten Farbe gefärbt werden (Abb. 4.17).  $\square$

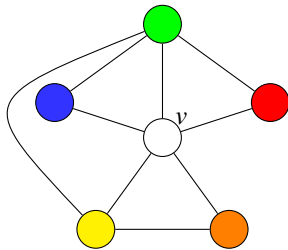


Abb. 4.16: Fünf Farben reichen aus, um die Nachbarn von  $v$

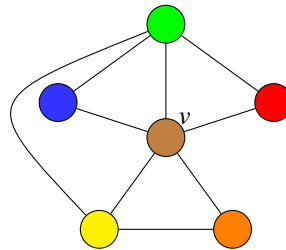


Abb. 4.17: Färbe  $v$  mit der sechsten Farbe

#### 4.6 Das Fünf-Farben-Theorem

**Definition 4.5.** Sei  $G$  ein farbiger planarer Graph. Eine (Kempe)-Kette  $G'$  ist ein maximaler, zweifarbiger, zusammenhängender Untergraph von  $G$ .

**Satz 4.10.** *Jeder planare Graph  $G$  kann fünffarbig sein.*

*Beweis.* Durch Induktion auf die Anzahl der Scheitelpunkte. Wenn  $G$  fünf Scheitelpunkte oder weniger hat, genügen fünf Farben. Für den Induktionsschritt hat  $G$  nach Thm. 4.8 einen Scheitelpunkt  $v$  mit Grad 5 oder weniger. Löschen Sie  $v$ , um  $G'$  zu erhalten. Nach der Induktionshypothese kann  $G'$  fünf farbig sein. In  $G$  kann  $v$  mit der fünften Farbe gefärbt werden, wenn der Grad von  $v$  kleiner als 5 ist, oder wenn  $v_1, \dots, v_5$ , die Nachbarn von  $v$ , mit vier oder weniger Farben gefärbt sind. Andernfalls werden  $v_1, \dots, v_5$  in  $G'$  mit verschiedenen Farben gefärbt (Abb. 4.18, oben).

Betrachten wir den blau gefärbten Scheitelpunkt  $v_1$  und den rot gefärbten Scheitelpunkt  $v_3$ . Wenn  $v_1, v_3$  nicht durch einen blau-roten Pfad verbunden sind (z.B. wenn die Kante  $\overline{v_6 v_7}$  nicht existiert), können wir die Farben entlang des Pfades von  $v_1$  nach  $v_6$  vertauschen und  $v$  blau färben. Andernfalls betrachten wir die blau-rote Kette, die  $v_1, v_3$  enthält. Durch Addition von  $v$  und den Kanten  $\overline{v v_1}, \overline{v v_3}$  erhalten wir einen geschlossenen Pfad  $P$  (Doppellinie), der die Ebene in einen “inneren” Bereich und einen “äußeren” Bereich teilt (Abb. 4.18, Mitte)

Betrachten Sie  $v_2$ , das grün gefärbt ist, und  $v_4$ , das orange gefärbt ist. Diese Scheitelpunkte können nicht in einer einzigen grün-orangen Kette enthalten sein, weil  $v_2$  innerhalb von  $P$  und  $v_4$  außerhalb von  $P$  liegt, so dass jeder Pfad, der sie verbindet,  $P$  durchqueren muss, was der Annahme widerspricht, dass der Graph planar ist. Daher müssen sie in zwei *unverbundenen* grün-orangen Ketten enthalten sein (doppelt gestrichelte Linie, in Abb. 4.18, Mitte). Vertauscht man die Farben der Kette, die  $v_2$  enthält, so kann  $v$  grün gefärbt werden und man erhält eine Fünffärbung von  $G$  (Abb. 4.18, unten).  $\square$

Die Aussage, dass ein kontinuierlicher Pfad von der *innen* einer geschlossenen kontinuierlichen Kurve  $P$  zur *außen* von  $P$  schneiden muss, ist der **Jordan Curve Theorem**. Der Satz ist intuitiv offensichtlich, aber schwer zu beweisen.

#### 4.7 Kempes falscher Beweis des Vier-Farben-Satzes

**Satz 4.11.** *Jeder planare Graph  $G$  kann vierfarbig sein.*

*Falsch.* Der Grundfall der Induktion und der größte Teil des Beweises ist derselbe wie der des Fünf-Farben-Satzes. Der neue Fall, der betrachtet werden muss, ist ein Scheitelpunkt  $v$  mit fünf Nachbarn, der nach der Induktionshypothese mit vier Farben gefärbt werden kann, nachdem  $v$  entfernt wurde.

In Abb. 4.19 gibt es zwei blau gefärbte Knoten  $v_2, v_5$ . Betrachten Sie die blau-grüne Kette mit  $v_2$  und die blau-gelbe Kette mit  $v_5$ . Die blau-grüne Kette ist in dem geschlossenen Pfad enthalten, der durch die rot-gelbe Kette, die  $v_1, v_3$  enthält,

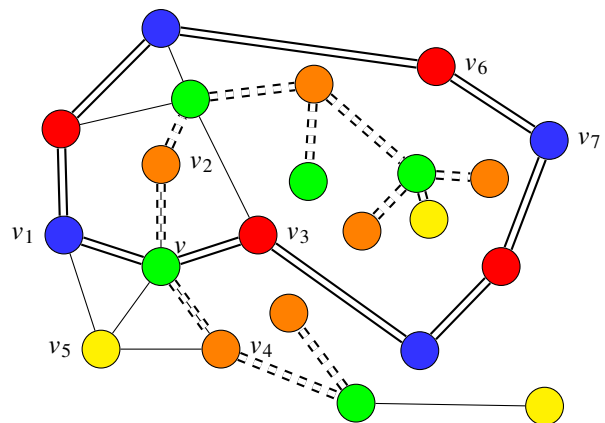
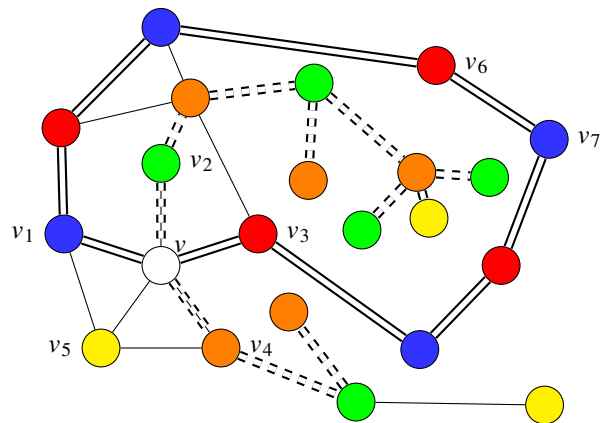
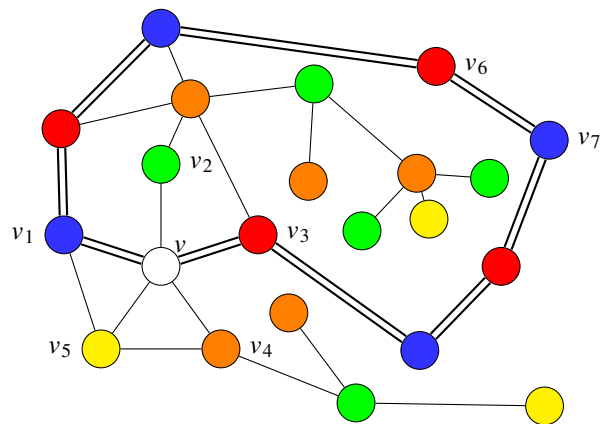


Abb. 4.18: Beweis des Fünf-Farben-Satzes

definiert ist (doppelte Linie), und die blau-gelbe Kette ist in dem geschlossenen Pfad enthalten, der durch die rot-grüne Kette, die  $v_1, v_4$  enthält, definiert ist (doppelt gestrichelte Linie).

Tauschen Sie die Farben der blau-grünen Kette und der blau-gelben Kette (Abb. 4.20). Das Ergebnis ist, dass die Nachbarn von  $v$  mit den drei Farben Rot, Grün und Gelb eingefärbt werden, so dass Blau als Farbe für  $v$  frei bleibt.  $\square$

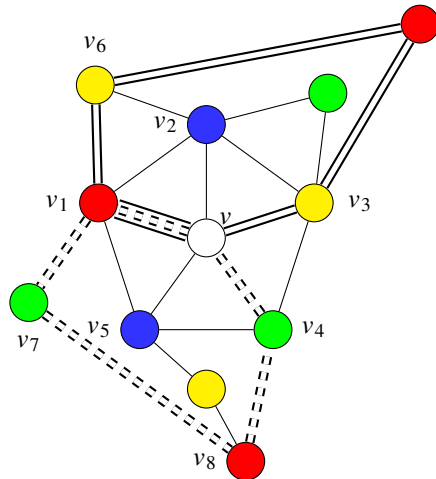


Abb. 4.19: Blaugrüne und blau-gelbe Kempe-Ketten

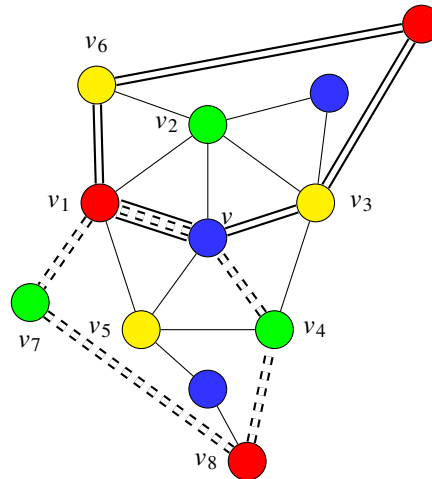


Abb. 4.20: Tauschen Sie die Farben der beiden Kempe-Ketten

Heawood stellte fest, dass die geschlossenen Pfade, die durch die rot-gelbe Kette und die rot-grüne Kette definiert sind, rote Scheitelpunkte teilen können ( $v_1, v_8$  in Abb. 4.21). Wenn die Farben in den blau-grünen und blau-gelben Ketten ausgetauscht werden, ist es möglich, dass die blauen Knoten  $v_6, v_7$  verbunden sind (Abb. 4.22) und die Färbung nicht mehr korrekt ist.

### Was ist die Überraschung?

Der Vierfarbensatz ist berühmt-berüchtigt, weil er so einfach zu formulieren, aber extrem schwierig zu beweisen ist. Daher ist es überraschend, dass der Beweis des Fünf-Farben-Satzes elementar ist. Der clevere Teil des Beweises ist Thm. 4.8 (ein planarer Graph muss einen Knoten von höchstens Grad 5 haben), ein Satz, der nichts mit Färbung zu tun hat. Stattdessen ergibt er sich einfach aus dem Zählen von Knoten und Kanten.

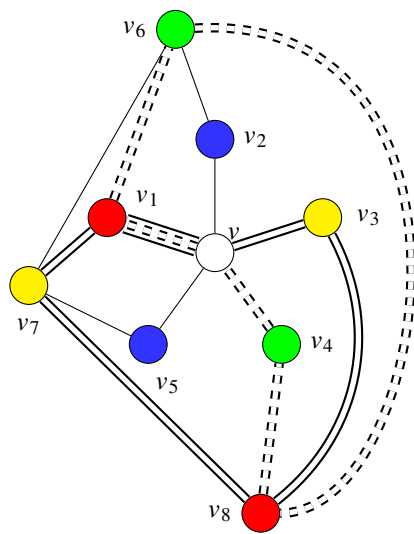


Abb. 4.21: Rot-gelbe und rot-grüne Ketten teilen sich rote Scheitelpunkte

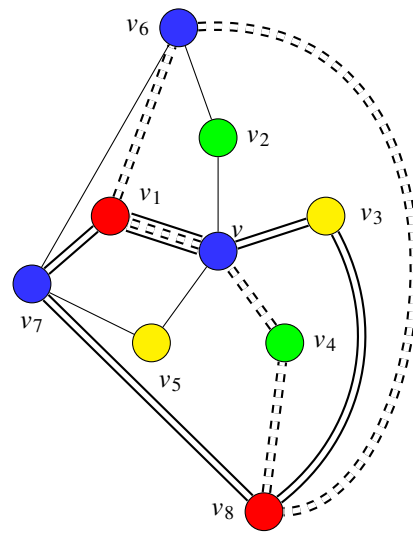


Abb. 4.22: Durch den Austausch der Farben werden die blauen Eckpunkte miteinander verbunden

## Quellen

Für den Vierfarbensatz siehe [49, 54]. Der Beweis des Fünf-Farben-Satzes basiert auf [1, 53]. [16] enthält zahlreiche Beweise für die Eulersche Formel. Kempes fehlerhafter Beweis des Vierfarbensatzes ist in [46] beschrieben.

## Kapitel 5

### Wie man ein Museum bewacht

1973 stellte Victor Klee die Frage, wie viele Wächter nötig sind, um alle Wände eines Museums zu überwachen. Wenn die Wände ein regelmäßiges Polygon oder sogar ein konvexes Polygon bilden, ist ein Wächter ausreichend (Abb. 5.1).

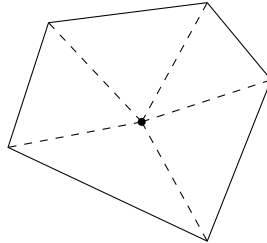


Abb. 5.1: Ein Museum, dessen Wände ein konvexes Vieleck bilden

Betrachten wir nun ein Museum mit sägezahnförmigen Wänden (Abb. 5.2). Überprüfen Sie durch Zählen, dass das Museum 15 Wände hat. Jeder “Zahn” definiert ein Dreieck, das in Abb. 5.3 grau schattiert ist. Ein Wächter, der sich an einer beliebigen Stelle innerhalb eines der Dreiecke befindet, kann alle Wände beobachten, die dieses Dreieck begrenzen (rote Pfeile).

Wenn mindestens eine der Wachen in der Nähe der obersten Wand platziert ist, die das gesamte Museum überspannt, kann sie alle horizontalen Wände beobachten (blaue Pfeile in Abb. 5.4). Es genügen also  $5 = 15/3$  Wächter, um alle Wände des Museums zu beobachten. Da sich die Dreiecke nicht überschneiden, kann eine Wache in einem Dreieck nicht alle Wände eines anderen Dreiecks beobachten (grüner Pfeil), so dass 5 Wachen notwendig sind.

Das Beispiel in Abb. 5.2 kann auf  $n/3$  Zähne mit  $n$  Wänden verallgemeinert werden, so dass wir schließen, dass *mindestens*  $n/3$  Wächter notwendig sind. Wir wollen

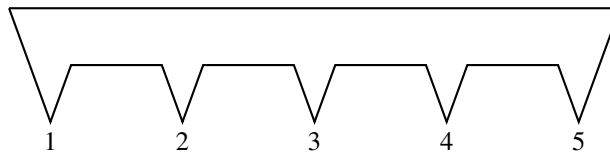


Abb. 5.2: Ein Museum, dessen Wände kein konvexes Vieleck bilden

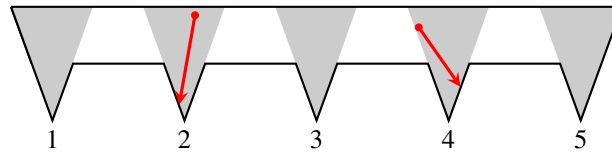


Abb. 5.3: Sichtbarkeit innerhalb jedes "Zahns"

beweisen, dass  $n/3$  Wächter ausreichen, um ein beliebiges Museum zu bewachen.

Abschnitt 5.1 beweist, dass jedes triangulierte Polygon dreifarbig sein kann. Dies wird in Abschnitt 5.2 verwendet, um den Satz zu beweisen, dass  $n/3$  Wächter ausreichend sind. Abschnitt 5.2.1 vervollständigt den Beweis, indem er zeigt, dass jedes Polygon trianguliert werden kann.

## 5.1 Dreieckige Polygone färben

**Definition 5.1.** Eine *diagonal*  $a$  des Polygons ist eine Kante, die zwei Scheitelpunkte verbindet und nicht zu den (äußeren) Kanten des Polygons gehört.

**Definition 5.2.** Ein Polygon ist dreieckig, wenn nicht schneidende Diagonalen so konstruiert werden können, dass das Innere des Polygons von Dreiecken bedeckt ist.

**Satz 5.1.** Jedes beliebige Polygon kann trianguliert werden.

Wir stellen den Beweis von Thm. 5.1 zurück.

**Definition 5.3.** Ein Eckpunkt eines Polygons ist *konvex*, wenn sein Innenwinkel kleiner als  $180^\circ$  ist; ein Eckpunkt ist *konkav*, wenn sein Innenwinkel größer als  $180^\circ$  ist.

In Abb. 5.5 ist der Scheitelpunkt 1 konvex und der Scheitelpunkt 2 ist konkav.

**Definition 5.4.** Ein Polygon mit Scheitelpunkten  $V$  kann *dreifarbig* sein, wenn es eine Karte gibt:

$$c : V \mapsto \{\text{red}, \text{blue}, \text{green}\},$$

so dass keine Kante zwei Scheitelpunkte hat, denen die gleiche Farbe zugewiesen ist.

**Satz 5.2.** Ein dreieckiges Polygon kann dreifarbig sein.

*Beweis.* Durch Induktion auf die Anzahl der Scheitelpunkte. Ein Dreieck kann dreifarbig sein. Ein dreieckiges Polygon mit  $n > 3$  Scheitelpunkten muss eine Diagonale haben. Wähle eine beliebige Diagonale  $\overline{AB}$  (Abb. 5.6) und teile das Polygon entlang



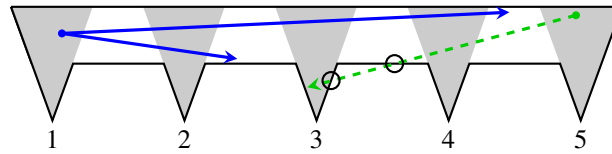


Abb. 5.4: Sichtbarkeit der Wände des Museums

dieser Diagonale in zwei kleinere Polygone (Abb. 5.7). Durch Induktion kann jedes dieser kleineren Polygone dreifarbig sein (Abb. 5.8).

Da die zugewiesenen Farben willkürlich sind, können wir, wenn  $A, B$  in den beiden Polygonen unterschiedliche Farben zugewiesen werden, die Farben in einem der beiden Polygone umbenennen, so dass die Farben von  $A, B$  in beiden Polygonen gleich sind. In Abb. 5.9 tauschen Sie zum Beispiel *rot* und *grün* im unteren Polygon aus. Fügen Sie die beiden Polygone zusammen, um das ursprüngliche Polygon mit  $n$  Scheitelpunkten zu erhalten. Es wird dreifarbig sein (Abb. 5.10).  $\square$

## 5.2 Vom Färben von Polygonen zum Bewachen eines Museums

**Satz 5.3.** *Ein Museum mit  $n$  Wänden kann von  $n/3$  Wächtern bewacht werden.*

*Beweis.* Durch Thm. 5.1 kann das Polygon trianguliert werden und durch Thm. 5.2 kann das Polygon dreifarbig sein. Alle drei Eckpunkte jedes Dreiecks in der Triangulation müssen mit *unterschiedlichen* Farben gefärbt sein, um die Bedingung der Dreifarbigkeit zu erfüllen. Da das Polygon dreifarbig ist, kann mindestens eine Farbe, z.B. Rot, höchstens  $n/3$  mal vorkommen, und jedes Dreieck muss einen rot gefärbten Scheitelpunkt haben. Stationiere eine Wache an jedem roten Scheitelpunkt; sie kann alle Wände des Dreiecks beobachten, zu dem der Scheitelpunkt gehört. Da die Dreiecke der Triangulation alle Kanten des Polygons umfassen, reichen  $n/3$  Wächter aus, um alle Wände des Museums zu beobachten.  $\square$

Wenn  $n$  nicht durch 3 teilbar ist, ist die Anzahl der benötigten Wächter  $\lfloor n/3 \rfloor$ , die größte ganze Zahl kleiner oder gleich  $n/3$ . Für Museen mit 12, 13, 14 Wänden reichen beispielsweise 4 Wachen aus, da  $\lfloor 12/3 \rfloor = \lfloor 13/3 \rfloor = \lfloor 14/3 \rfloor = 4$ . Der Einfachheit halber ignorieren wir diese Komplikation.

### 5.2.1 Beliebige Polygone können trianguliert werden

**Satz 5.4.** *Die Summe der Innenwinkel eines Polygons mit  $n$  Scheitelpunkten ist:*

$$180^\circ (n - 2) .$$

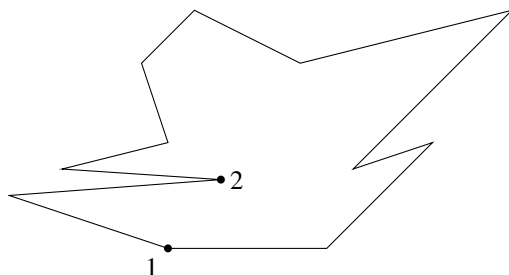


Abb. 5.5: Ein Polygon mit einem konvexen Scheitelpunkt (1) und einem konkaven Scheitelpunkt (2)

*Beweis.* Man betrachte ein konvexes Polygon und bezeichne seine *Außenwinkel* mit  $\theta_i$  (Abb. 5.11). Wenn man sich von einer gestrichelten Linie zur nächsten bewegt, vollzieht man eine Drehung um einen Kreis, so:

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = 360^\circ.$$

Für jeden Außenwinkel  $\theta_i$  bezeichne man den entsprechenden Innenwinkel mit  $\phi_i$ . Dann:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \theta_i &= \sum_{i=1}^n (180^\circ - \phi_i) = 360^\circ \\ \sum_{i=1}^n \phi_i &= n \cdot 180^\circ - 360^\circ = 180^\circ (n - 2). \end{aligned}$$

Wenn es einen konkaven Scheitelpunkt gibt ( $B$  in Abb. 5.12), gibt es ein Dreieck, das von den beiden Kanten, die auf den konkaven Scheitelpunkt treffen, und der Linie  $\overline{AC}$ , die die beiden anderen Scheitelpunkte verbindet, gebildet wird. Summiert man die Winkel des Dreiecks, so erhält man:

$$\begin{aligned} (180^\circ - \alpha) + (360^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) &= 180^\circ \\ \alpha + \beta + \gamma &= 3 \cdot 180^\circ. \end{aligned}$$

Die Summe der Innenwinkel nimmt um  $\alpha + \beta + \gamma$  zu, während die Anzahl der Scheitelpunkte um drei zunimmt, so dass die Gleichung im Theorem erhalten bleibt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \phi_i + (\alpha + \beta + \gamma) &= 180^\circ (n - 2) + 3 \cdot 180^\circ \\ &= 180^\circ ((n + 3) - 2). \end{aligned}$$

□

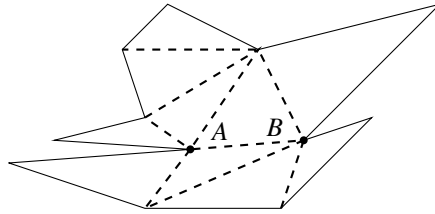


Abb. 5.6: Eine beliebige Diagonale in einem Polygon

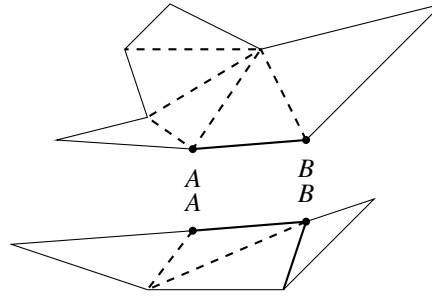


Abb. 5.7: Teilen Sie das Polygon

**Satz 5.5.** Ein Polygon muss mindestens drei konvexe Scheitelpunkte haben.

*Beweis.* Sei  $k$  die Anzahl der konkaven Scheitelpunkte, deren Innenwinkel  $180^\circ + \epsilon_i$  ist,  $\epsilon_i > 0$ . Die Summe der Innenwinkel der *konkaven* Scheitelpunkte ist sicher kleiner oder gleich der Summe der Innenwinkel von *allen* Scheitelpunkten:

$$\begin{aligned} k \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^k \epsilon_i &\leq 180^\circ(n-2) \\ (k+2) \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^k \epsilon_i &\leq n \cdot 180^\circ \\ (k+2) \cdot 180^\circ &< n \cdot 180^\circ \\ k &< n-2. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass es mindestens drei Scheitelpunkte geben muss, die konvex und nicht konkav sind.  $\square$

*Theorem 5.1.* Durch Induktion auf die Anzahl der Scheitelpunkte. Für  $n = 3$  gibt es nichts zu beweisen. Wenn  $n > 3$ , muss es nach Thm. 5.5 einen konvexen Scheitelpunkt  $C$  geben. Beschrifte seine benachbarten Scheitelpunkte mit  $B, D$ . Wenn  $\overline{BD}$  im Polygon enthalten ist (Abb. 5.13), ist sie eine Diagonale und das Polygon kann in ein  $\triangle BCD$  und ein weiteres Polygon  $\overline{ABDE}$  mit  $\overline{BD}$  als Kante zerlegt werden, das kleiner als das ursprüngliche Polygon ist (Abb. 5.13). Durch die induktive Hypothese kann das Polygon trianguliert und dann wieder in das  $\triangle BCD$  eingefügt werden, wodurch das ursprüngliche Polygon trianguliert wird.

Wenn  $\overline{BD}$  nicht im Polygon enthalten ist, muss es einen konkaven Scheitelpunkt  $F$  geben, der  $C$  am nächsten liegt (Abb. 5.14).  $\overline{CF}$  ist eine Diagonale und zerlegt das Polygon in zwei kleinere Polygone  $\overline{CFED}$  und  $\overline{CFAB}$ . Durch die Induktionshypothese können diese trianguliert und zusammengeklebt werden.  $\square$

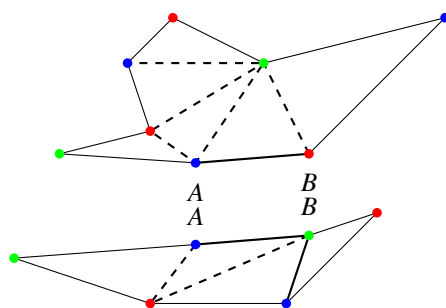


Abb. 5.8: Dreifarbige Darstellung der beiden kleineren Polygone

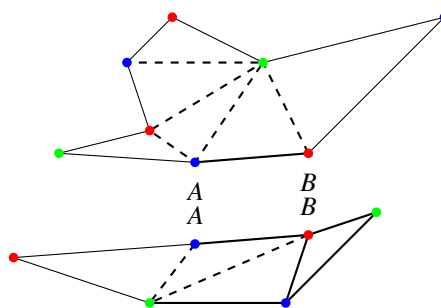


Abb. 5.9: Tauschen Sie die Farben eines Polygons aus, um sie an das andere anzupassen.

### Was ist die Überraschung?

Das Museumstheorem ist überraschend, denn was wie ein Theorem in der Geometrie aussieht, wird recht elegant durch einen Appell zur Färbung eines Graphen bewiesen.

### Quellen

Dieses Kapitel basiert auf [1, Chap. 39].

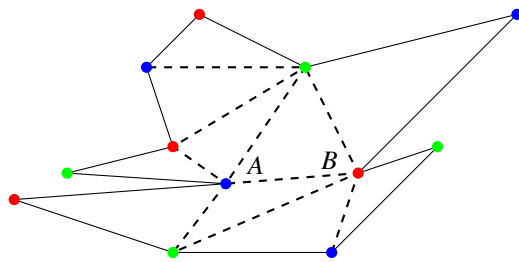


Abb. 5.10: Fügen Sie die beiden kleineren Polygone wieder zusammen

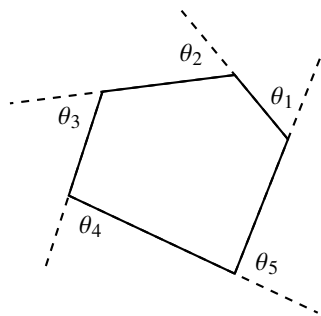


Abb. 5.11: Die Außenwinkel eines konvexen Polygons

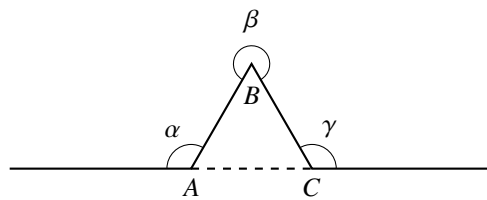


Abb. 5.12: Ein konkaver Scheitelpunkt

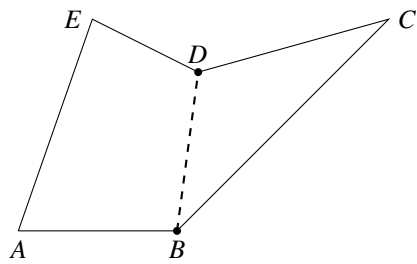


Abb. 5.13: Triangulation, bei der eine Diagonale im Polygon enthalten ist

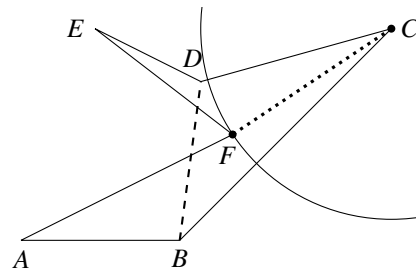


Abb. 5.14: Triangulation, bei der eine Diagonale nicht im Polygon enthalten ist

## Kapitel 6

### Induction

Das Axiom der mathematischen Induktion wird in der Mathematik häufig als Beweismethode verwendet. In diesem Kapitel werden induktive Beweise von Ergebnissen vorgestellt, die dem Leser vielleicht nicht bekannt sind. Wir beginnen mit einem kurzen Überblick über die mathematische Induktion (Abschnitt 6.1). Abschnitt 6.2 beweist Ergebnisse über die bekannten Fibonacci-Zahlen, während Sect. 6.3 Ergebnisse über Fermat-Zahlen beweist. Abschnitt 6.4 stellt die von John McCarthy entdeckte 91-Funktion vor; der Beweis erfolgt durch Induktion auf eine ungewöhnliche Folge: ganze Zahlen in einer umgekehrten Reihenfolge. Der Beweis der Formel für das Josephus-Problem (Sect. 6.5) ist wegen der doppelten Induktion auf zwei verschiedene Teile eines Ausdrucks ebenfalls ungewöhnlich.

#### 6.1 Das Axiom der mathematischen Induktion

Die mathematische Induktion ist die wichtigste Methode, um zu beweisen, dass Aussagen für eine unbeschränkte Menge von Zahlen wahr sind. Betrachten Sie:

$$1 = 1, \quad 1 + 2 = 3, \quad 1 + 2 + 3 = 6, \quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Wir könnten feststellen, dass:

$$1 = (1 \cdot 2)/2, \quad 3 = (2 \cdot 3)/2, \quad 6 = (3 \cdot 4)/2, \quad 10 = (4 \cdot 5)/2,$$

und vermuten dann, dass für *all* ganze Zahlen  $n \geq 1$ :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Wenn man genug Geduld hat, ist es einfach, diese Formel für einen bestimmten Wert von  $n$  zu überprüfen, aber wie kann man sie für *all* der unendlichen Anzahl von positiven ganzen Zahlen beweisen? An dieser Stelle kommt die mathematische Induktion ins Spiel.

**Axiom 6.1.** Sei  $P(n)$  eine Eigenschaft (wie eine Gleichung, eine Formel oder ein Theorem), wobei  $n$  eine positive ganze Zahl ist. Nehmen Sie an, dass Sie das können:

- *Basisfall*: Beweisen Sie, dass  $P(1)$  wahr ist.
- *Induktiver Schritt*: Beweisen Sie für beliebige  $m$ , dass  $P(m+1)$  wahr ist, sofern Sie annehmen, dass  $P(m)$  wahr ist.

Dann ist  $P(n)$  wahr für alle  $n \geq 1$ . Die Annahme, dass  $P(m)$  für beliebige  $m$  wahr ist, nennt man die *induktive Hypothese*.

Hier ist ein einfaches Beispiel für einen Beweis durch mathematische Induktion.

**Satz 6.1.** Für  $n \geq 1$ :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*Beweis.* Der Basisfall ist trivial:

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Die Induktionshypothese lautet, dass die folgende Gleichung für  $m$  wahr ist:

$$\sum_{i=1}^m i = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Der induktive Schritt besteht darin, die Gleichung für  $m+1$  zu beweisen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m+1} i &= \sum_{i=1}^m i + (m+1) \\ &= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}. \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der mathematischen Induktion, für jedes  $n \geq 1$ :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Die induktive Hypothese kann verwirrend sein, weil es scheint, dass wir das, was wir zu beweisen versuchen, annehmen. Die Argumentation ist nicht zirkulär, weil wir die Wahrheit einer Eigenschaft für etwas Kleines annehmen und dann die Annahme verwenden, um die Eigenschaft für etwas Größeres zu beweisen.

Da die mathematische Induktion ein Axiom ist, kann es nicht darum gehen, die Induktion zu beweisen. Man muss die Induktion einfach akzeptieren, wie man auch andere Axiome der Mathematik akzeptiert, z. B.  $x+0=x$ . Es steht Ihnen natürlich frei, die mathematische Induktion abzulehnen, aber dann müssten Sie auch einen Großteil der modernen Mathematik ablehnen.



Die mathematische Induktion ist eine Schlussregel, die zu den *Peano-Axiomen* zur Formalisierung der natürlichen Zahlen gehört. Das *Wohlordnungsaxiom* kann verwendet werden, um das Induktionsaxiom zu beweisen, und umgekehrt kann das Induktionsaxiom verwendet werden, um das Wohlordnungsaxiom zu beweisen. Das Induktionsaxiom kann jedoch nicht aus den anderen, elementarerer Peano-Axiomen bewiesen werden.

## 6.2 Fibonacci-Zahlen

Die Fibonacci-Zahlen sind das klassische Beispiel für eine rekursive Definition:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \text{ for } n \geq 3. \end{aligned}$$

Die ersten zwölf Fibonacci-Zahlen sind:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.$$

**Satz 6.2.** *Jede vierte Fibonacci-Zahl ist durch 3 teilbar.*

*Beispiel 6.1.*  $f_4 = 3 = 3 \cdot 1$ ,  $f_8 = 21 = 3 \cdot 7$ ,  $f_{12} = 144 = 3 \cdot 48$ .

*Beweis.* Basisfall:  $f_4 = 3$  ist durch 3 teilbar. Die induktive Hypothese ist, dass  $f_{4n}$  durch 3 teilbar ist. Der induktive Schritt ist:

$$\begin{aligned} f_{4(n+1)} &= f_{4n+4} \\ &= f_{4n+3} + f_{4n+2} \\ &= (f_{4n+2} + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\ &= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\ &= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + (f_{4n+1} + f_{4n}) \\ &= 3f_{4n+1} + 2f_{4n}. \end{aligned}$$

$3f_{4n+1}$  ist durch 3 teilbar und nach der Induktionshypothese ist  $f_{4n}$  durch 3 teilbar. Daher ist  $f_{4(n+1)}$  durch 3 teilbar. □

**Satz 6.3.**  $f_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ .

*Beweis.* Basisfälle:  $f_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$  and  $f_2 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$ . Der induktive Schritt ist:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4} + 1\right) \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

seit:

$$\left(\frac{7}{4} + 1\right) = \frac{11}{4} = \frac{44}{16} < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2.$$

□

**Satz 6.4** (Binet's formula).

$$f_n = \frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\sqrt{5}}, \text{ where } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \bar{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass  $\phi^2 = \phi + 1$ :

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + 1 \\ &= \phi + 1. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise können wir zeigen, dass  $\bar{\phi}^2 = \bar{\phi} + 1$ .

Der Basisfall für Binets Formel ist:

$$\frac{\phi^1 - \bar{\phi}^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = f_1.$$

Nehmen Sie die induktive Hypothese für alle  $k \leq n$  an. Der induktive Schritt ist:

$$\begin{aligned}
 \phi^{n+1} - \bar{\phi}^{n+1} &= \phi^2 \phi^{n-1} - \bar{\phi}^2 \bar{\phi}^{n-1} \\
 &= (\phi + 1)\phi^{n-1} - (\bar{\phi} + 1)\bar{\phi}^{n-1} \\
 &= (\phi^n - \bar{\phi}^n) + (\phi^{n-1} - \bar{\phi}^{n-1}) \\
 &= \sqrt{5}f_n + \sqrt{5}f_{n-1} \\
 \frac{\phi^{n+1} - \bar{\phi}^{n+1}}{\sqrt{5}} &= f_n + f_{n-1} = f_{n+1} .
 \end{aligned}$$

□

**Satz 6.5.**

$$f_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots .$$

*Beweis.* Wir wollen zunächst die Pascalsche Regel beweisen:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} .$$

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\
 &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
 &= \binom{n+1}{k+1} .
 \end{aligned}$$

Wir werden auch die Gleichheit  $\binom{k}{0} = \frac{k!}{0!(k-0)!} = 1$  für jedes  $k \geq 1$  verwenden.

Wir können nun das Theorem beweisen. Der Basisfall ist:

$$f_1 = \binom{1}{0} = \frac{1!}{0!(1-0)!} = 1 .$$

The inductive step is:

$$\begin{aligned}
 f_n = f_{n-1} + f_{n-2} &= \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \cdots \\
 &\quad \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} + \cdots \\
 &= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots \\
 &= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots .
 \end{aligned}$$

□

### 6.3 Fermat-Zahlen

**Definition 6.1.** Die ganzen Zahlen  $F_n = 2^{2^n} + 1$  für  $n \geq 0$  werden *Fermat-Zahlen* genannt.

Die ersten fünf Fermat-Zahlen sind Primzahlen:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537 .$$

Jahrhundert behauptete der Mathematiker Pierre de Fermat, dass alle Fermat-Zahlen Primzahlen sind, aber fast hundert Jahre später zeigte Leonhard Euler, dass:

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417 .$$

Die Fermat-Zahlen werden extrem groß, wenn  $n$  zunimmt. Es ist bekannt, dass die Fermat-Zahlen für  $5 \leq n \leq 32$  nicht prim sind, aber die Faktorisierung einiger dieser Zahlen ist noch nicht bekannt.

**Satz 6.6.** For  $n \geq 2$ , the last digit of  $F_n$  is 7.

*Beweis.* The base case is  $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$ . The inductive hypothesis is  $F_n = 10k_n + 7$  for some  $k_n \geq 1$ . The inductive step is:

$$\begin{aligned}
 F_{n+1} &= 2^{2^{n+1}} + 1 = 2^{2^n \cdot 2^1} + 1 = \left(2^{2^n}\right)^2 + 1 \\
 &= \left(\left(2^{2^n} + 1\right) - 1\right)^2 + 1 = (F_n - 1)^2 + 1 \\
 &= (10k_n + 7 - 1)^2 + 1 = (10k_n + 6)^2 + 1 \\
 &= 100k_n^2 + 120k_n + 36 + 1 \\
 &= 10(10k_n^2 + 12k_n + 3) + 6 + 1 \\
 &= 10k_{n+1} + 7, \quad \text{für einige } k_{n+1} \geq 1 .
 \end{aligned}$$

□

**Satz 6.7.** For  $n \geq 1$ ,  $F_n = \prod_{k=0}^{n-1} F_k + 2$ .

*Beweis.* Der Basisfall ist:

$$F_1 = \prod_{k=0}^0 F_k + 2 = F_0 + 2 = 3 + 2 = 5.$$

Der induktive Schritt ist:

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n F_k &= \left( \prod_{k=0}^{n-1} F_k \right) F_n \\ &= (F_n - 2) F_n \\ &= (2^{2^n} + 1 - 2) (2^{2^n} + 1) \\ &= (2^{2^n})^2 - 1 = (2^{2^{n+1}} + 1) - 2 \\ &= F_{n+1} - 2 \\ F_{n+1} &= \prod_{k=0}^n F_k + 2. \end{aligned}$$

□

## 6.4 McCarthy's 91-Funktion

Normalerweise assoziieren wir Induktion mit Beweisen von Eigenschaften, die auf der Menge der positiven ganzen Zahlen definiert sind. Hier bringen wir einen induktiven Beweis, der auf einer merkwürdigen Ordnung basiert, bei der größere Zahlen kleiner sind als kleinere Zahlen. Die Induktion funktioniert, weil die einzige Eigenschaft, die die Menge haben muss, darin besteht, dass sie unter einem relationalen Operator geordnet ist.

Betrachten Sie die folgende rekursive Funktion, die auf den ganzen Zahlen definiert ist:

$$f(x) = \text{if } x > 100 \text{ then } x - 10 \text{ else } f(f(x + 11)).$$

Für Zahlen größer als 100 ist das Ergebnis der Anwendung der Funktion trivial:

$$f(101) = 91, \quad f(102) = 92, \quad f(103) = 93, \quad f(104) = 94, \quad \dots$$

Was ist mit Zahlen, die kleiner oder gleich 100 sind? Berechnen wir  $f(x)$  für einige Zahlen, wobei die Berechnung in jeder Zeile die Ergebnisse der vorherigen Zeilen

verwendet:

$$\begin{aligned}
 f(100) &= f(f(100 + 11)) = f(f(111)) = f(101) = 91 \\
 f(99) &= f(f(99 + 11)) = f(f(110)) = f(100) = 91 \\
 f(98) &= f(f(98 + 11)) = f(f(109)) = f(99) = 91 \\
 &\dots \\
 f(91) &= f(f(91 + 11)) = f(f(102)) = f(92) \\
 &\quad = f(f(103)) = f(93) = \dots = f(98) = 91 \\
 f(90) &= f(f(90 + 11)) = f(f(101)) = f(91) = 91 \\
 f(89) &= f(f(89 + 11)) = f(f(100)) = f(91) = 91 .
 \end{aligned}$$

Definieren Sie die Funktion  $g$  als:

$$g(x) = \text{if } x > 100 \text{ then } x - 10 \text{ else } 91 .$$

**Satz 6.8.** Für alle  $x$ ,  $f(x) = g(x)$ .

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Menge der ganzen Zahlen  $S = \{x \mid x \leq 101\}$  unter Verwendung des relationalen Operators  $<$ , der durch definiert ist:

$$y < x \text{ if and only if } x < y ,$$

wobei auf der rechten Seite  $<$  der übliche relationale Operator auf den ganzen Zahlen ist. Aus dieser Definition ergibt sich die folgende Reihenfolge:

$$101 < 100 < 99 < 98 < 97 < \dots .$$

Es gibt drei Fälle für den Beweis. Wir verwenden die Ergebnisse der obigen Berechnungen.

*Fall 1:*  $x > 100$ . Dies ist trivial durch die Definitionen von  $f$  und  $g$ .

*Fall 2:*  $90 \leq x \leq 100$ . Der Basisfall der Induktion ist:

$$f(100) = 91 = g(100) ,$$

da wir gezeigt haben, dass  $f(100) = 91$  und per Definition  $g(100) = 91$ .

Die induktive Annahme ist  $f(y) = g(y)$  für  $y < x$  und der induktive Schritt ist:

$$f(x) = f(f(x + 11)) \tag{6.1a}$$

$$= f(x + 11 - 10) = f(x + 1) \tag{6.1b}$$

$$= g(x + 1) \tag{6.1c}$$

$$= 91 \tag{6.1d}$$

$$= g(x) . \tag{6.1e}$$

Gleichung 6.1a gilt durch die Definition von  $f$ , da  $x \leq 100$ . Die Gleichheit von Gl. 6.1a und Gl. 6.1b gilt durch die Definition von  $f$ , weil  $x \geq 90$ , also  $x + 11 > 100$ . Die Gleichheit von Gl. 6.1b und Gl. 6.1c folgt durch die Induktionshypothese  $x \leq 100$ , also  $x + 1 \leq 101$ , was impliziert, dass  $x + 1 \in S$  und  $x + 1 < x$  ist. Die Gleichheit von Gl. 6.1c, Gl. 6.1d und Gl. 6.1e folgt aus der Definition von  $g$  und  $x + 1 \leq 101$ , also  $x \leq 100$ .

*Fall 3:*  $x < 90$ . Der Basisfall ist:  $f(89) = f(f(100)) = f(91) = 91 = g(89)$  durch Definition von  $g$ , da  $89 < 100$ .

Die induktive Annahme ist  $f(y) = g(y)$  für  $y < x$  und der induktive Schritt ist:

$$f(x) = f(f(x + 11)) \quad (6.2a)$$

$$= f(g(x + 11)) \quad (6.2b)$$

$$= f(91) \quad (6.2c)$$

$$= 91 \quad (6.2d)$$

$$= g(x). \quad (6.2e)$$

Gleichung 6.2a gilt durch die Definition von  $f$  und  $x < 90 \leq 100$ . Die Gleichheit von Gleichung 6.2a und Gleichung 6.2b folgt aus der Induktionshypothese  $x < 90$ , also  $x + 11 < 101$ , was impliziert, dass  $x + 11 \in S$  und  $x + 11 < x$  ist. Die Gleichheit von Gl. 6.2b und Gl. 6.2c folgt aus der Definition von  $g$  und  $x + 11 < 101$ . Schließlich haben wir bereits gezeigt, dass  $f(91) = 91$  und  $g(x) = 91$  für  $x < 90$  per Definition gelten.  $\square$

## 6.5 Das Josephus-Problem

Josephus war der Kommandant der Stadt Jodfat während des jüdischen Aufstands gegen die Römer. Die überwältigende Stärke der römischen Armee brach schließlich den Widerstand der Stadt und Josephus flüchtete sich mit einigen seiner Männer in eine Höhle. Sie zogen es vor, Selbstmord zu begehen, als von den Römern getötet oder gefangen genommen zu werden. Nach dem Bericht von Josephus arrangierte er seine Rettung, wurde Beobachter bei den Römern und schrieb später eine Geschichte des Aufstandes. Wir stellen das Problem als ein abstraktes mathematisches Problem dar.

**Definition 6.2** (Josephus-Problem). Betrachte die Zahlen  $1, \dots, n+1$ , die in einem Kreis angeordnet sind. Lösche jede  $q$ -te Zahl, die den Kreis  $q, 2q, 3q, \dots$  umrundet (wobei die Berechnung modulo  $n+1$  durchgeführt wird), bis nur noch eine Zahl  $m$  übrig bleibt.  $J(n+1, q) = m$  ist die *Josephuszahl* für  $n+1$  und  $q$ .

Beispiel 6.2. Sei  $n + 1 = 41$  und sei  $q = 3$ . Ordnen Sie die Zahlen in einem Kreis an:

```

→   1   2   3   4   5   6   7   8   9  10  11  12  13  14
      ↑
    41
    40
    39
    38
    37
    36
    35 34 33 32 31 30 29 28 27 26 25 24 23 22
  
```

Die erste Runde von Streichungen führt zu:

```

→   1   2  3  4   5  6  7   8  9  10  11  12  13  14
      ↑
    41
    40
    39
    38
    37
    36
    35 34 33 32 31 30 29 28 27 26 25 24 23 22
  
```

Nach Entfernen der gestrichenen Zahlen kann dies wie folgt geschrieben werden:

```

  1   2   4   5   7   8  10  11  13  14  16  17  19  20
41  40  38  37  35  34  32  31  29  28  26  25  23  22
  
```

Die zweite Runde von Streichungen (beginnend mit der letzten Streichung von 39) führt zu:

```

1  2   4   5  7   8  10  11  13  14  16  17  19  20
41 40  38  37 35  34  32 31  29  28 26  25  23  22
  
```

Wir fahren fort, jede dritte Zahl zu löschen, bis nur noch eine übrig bleibt:

```

  2   4   7   8  11  13  16  17  20  22  25  26  29  31  34  35  38  40
  2   4   8  11  16  17  22  25  29  31  35  38
  2   4  11  16  22  25  31  35
  2   4  16  22  31  35
4  16  31  35
16  31
  31
  
```

Daraus folgt, dass  $J(41, 3) = 31$ .

Der Leser wird aufgefordert, die Berechnung für das Löschen jeder siebten Zahl aus einem Kreis von 40 Zahlen durchzuführen, um zu überprüfen, dass die letzte Zahl 30 ist.



**Satz 6.9.**  $J(n+1, q) = (J(n, q) + q) \pmod{n+1}$ .

*Beweis.* Die erste Zahl, die in der ersten Runde gelöscht wird, ist die  $q$ -te Zahl, und die Zahlen, die nach der Löschung übrig bleiben, sind die  $n$ -Zahlen:

$$1 \quad 2 \quad \dots \quad q-1 \quad q+1 \quad \dots \quad n \quad n+1 \pmod{n+1}.$$

Die Zählung, um die nächste Löschung zu finden, beginnt mit  $q+1$ . Wenn wir  $1, \dots, n$  in diese Folge einfügen, erhalten wir  $\pmod{n+1}$ :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \dots & n-q & n+1-q & n+2-q & \dots & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ q+1 & q+2 & \dots & n & n+1 & 1 & \dots & q-2 & q-1. \end{array}$$

Denken Sie daran, dass die Berechnungen modulo  $n+1$  sind  $\pmod{n+1}$ :

$$\begin{aligned} (n+2-q) + q &= (n+1) + 1 = 1 \\ (n) + q &= (n+1) - 1 + q = q-1. \end{aligned}$$

Es handelt sich um das Josephus-Problem für  $n$  Zahlen, nur dass die Zahlen um  $q$  versetzt sind. Daraus folgt, dass:

$$J(n+1, q) = (J(n, q) + q) \pmod{n+1}.$$

□

**Satz 6.10.** Für  $n \geq 1$  gibt es Zahlen  $a \geq 0, 0 \leq t < 2^a$ , so dass  $n = 2^a + t$ .

*Beweis.* Dies kann durch wiederholte Anwendung des Divisionsalgorithmus mit den Teilern  $2^0, 2^1, 2^2, 2^4, \dots$  bewiesen werden, aber es ist auch leicht aus der binären Darstellung von  $n$  zu erkennen. Für einige  $a$  und  $b_{a-1}, b_{a-2}, \dots, b_1, b_0$ , wobei für alle  $i$ ,  $b_i = 0$  oder  $b_i = 1$ ,  $n$  ausgedrückt werden kann als:

$$\begin{aligned} n &= 2^a + b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0 \\ n &= 2^a + (b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0) \\ n &= 2^a + t, \quad \text{where } t \leq 2^a - 1. \end{aligned}$$

□

Wir beweisen nun, dass es eine einfache geschlossene Form für  $J(n, 2)$  gibt.

**Satz 6.11.** Für  $n = 2^a + t$ ,  $a \geq 0, 0 \leq t < 2^a$ ,  $J(n, 2) = 2t + 1$ .

*Beweis.* Nach Thm. 6.10 kann  $n$  wie im Satz angegeben ausgedrückt werden. Der Beweis, dass  $J(n, 2) = 2t + 1$  ist, erfolgt durch eine doppelte Induktion, zuerst auf  $a$  und dann auf  $t$ .

*Erste Induktion:*

Basisfall. Nehmen wir an, dass  $t = 0$  ist, so dass  $n = 2^a$ . Es sei  $a = 1$ , so dass es zwei Zahlen im Kreis 1, 2 gibt. Da  $q = 2$ , wird die zweite Zahl gestrichen, so dass die verbleibende Zahl 1 ist und  $J(2^1, 2) = 1$ .

Die Induktionshypothese lautet, dass  $J(2^a, 2) = 1$ . Wie lautet  $J(2^{a+1}, 2)$ ? In der ersten Runde werden alle geraden Zahlen gestrichen:

$$1 \quad \cancel{2} \quad 3 \quad \cancel{4} \quad \dots \quad 2^{a+1}-1 \quad \cancel{2^{a+1}}.$$

Es sind nun  $2^a$  Zahlen übrig:

$$1 \quad 3 \quad \dots \quad 2^{a+1}-1.$$

Durch die Induktionshypothese  $J(2^{a+1}, 2) = J(2^a, 2) = 1$  also durch Induktion  $J(n, 2) = 1$  immer  $n = 2^a + 0$ .

*Zweite Induktion:*

Wir haben  $J(2^a + 0, 2) = 2 \cdot 0 + 1$  bewiesen, den Basisfall der zweiten Induktion.

Die Induktionshypothese ist  $J(2^a + t, 2) = 2t + 1$ . Nach Thm. 6.9:

$$J(2^a + (t + 1), 2) = J(2^a + t, 2) + 2 = 2t + 1 + 2 = 2(t + 1) + 1.$$

□

Die Theoreme 6.10 und 6.11 geben einen einfachen Algorithmus zur Berechnung von  $J(n, 2)$ . Aus dem Beweis von Thm. 6.10:

$$n = 2^a + t = 2^a + (b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0),$$

so  $t = b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0$ . Wir multiplizieren einfach mit 2 (Verschiebung nach links um eine Stelle) und addieren 1. Da zum Beispiel  $n = 41 = 2^5 + 2^3 + 2^0 = 101001$ , folgt daraus, dass  $J(41, 2) = 2t + 1$ , und in binärer Schreibweise:

$$\begin{array}{rcl} 41 & = & 101001 \\ 9 & = & 01001 \\ 2t + 1 & = & 10011 = 16 + 2 + 1 = 19. \end{array}$$

Der Leser kann das Ergebnis überprüfen, indem er jede zweite Zahl in einem Kreis 1, ..., 41 löscht.

Es gibt eine geschlossene Form für  $J(n, 3)$ , aber sie ist recht kompliziert.

**Was ist die Überraschung?**

Die Induktion ist vielleicht die wichtigste Beweistechnik in der modernen Mathematik. Während die Fibonacci-Zahlen sehr bekannt sind und auch die Fermat-Zahlen

leicht zu verstehen sind, war ich überrascht, so viele Formeln zu finden, die ich nicht kannte (wie Thms. 6.2 und 6.3) und die durch Induktion bewiesen werden können. Die 91-Funktion von McCarthy wurde im Kontext der Informatik entdeckt, obwohl sie ein rein mathematisches Ergebnis ist. Das Überraschende ist nicht die Funktion selbst, sondern die merkwürdige Induktion, mit der sie bewiesen wird, nämlich  $98 < 97$ . Das Überraschende am Josephus-Problem ist der bidirektionale induktive Beweis.

## Quellen

Für eine umfassende Darstellung der Induktion siehe [21]. Der Beweis der McCarthy'schen 91-Funktion stammt aus [30], wo er Rod M. Burstall zugeschrieben wird. Die Darstellung des Josephus-Problems stützt sich auf [21, Chapter 17], in dem auch der historische Hintergrund erörtert wird. Dieses Kapitel enthält weitere interessante Probleme mit induktiven Beweisen, wie z. B. die schlammigen Kinder, die gefälschte Münze und die Pfennige in einer Schachtel. Zusätzliches Material zum Josephus-Problem findet sich in [44, 57].

## Kapitel 7

### Solving Quadratic Equations

Poh-Shen Loh schlug eine Methode zum Lösen quadratischer Gleichungen vor, die auf einer Beziehung zwischen den Koeffizienten des quadratischen Polynoms und seinen Wurzeln beruht. Abschnitt 7.1 gibt einen Überblick über die traditionellen Methoden zum Lösen quadratischer Gleichungen. Abschnitt 7.2 versucht, den Leser davon zu überzeugen, dass die Loh-Methode sinnvoll ist, und erklärt dann, wie man die Wurzeln berechnet. In Abschnitt 7.3 wird die Berechnung für zwei quadratische Polynome und eine ähnliche Berechnung für ein quartisches Polynom durchgeführt. In Abschnitt 7.4 wird die traditionelle Formel für die Wurzeln aus den Loh'schen Formeln abgeleitet.

Die Einführung der Algebra und der modernen algebraischen Notation ist relativ neu. Zuvor benutzten die Mathematiker fast ausschließlich die Geometrie, so dass es interessant ist, al-Khwarizmi's geometrische Konstruktion der Formel für die Wurzeln quadratischer Gleichungen zu betrachten (Sect. 7.5). Abschnitt 7.6 zeigt eine geschickte geometrische Konstruktion, die Cardano bei der Entwicklung der Formel für die Wurzeln kubischer Gleichungen verwendet hat.

Abschnitt 7.8 stellt andere geometrische Methoden zum Auffinden der Wurzeln quadratischer Gleichungen vor.<sup>1</sup> Das Kapitel schließt mit dem Abschnitt 7.9 ab, der die numerische Berechnung der Wurzeln quadratischer Gleichungen behandelt.

#### 7.1 Traditionelle Methoden zum Lösen quadratischer Gleichungen

Jeder Mathematikstudent kennt die Formel für die Ermittlung der Wurzeln einer quadratischen Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  auswendig:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Für den Moment arbeiten wir mit monischen Polynomen,  $x^2 + bx + c = 0$ , deren Wurzeln sind:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (7.1)$$

Eine andere Methode, quadratische Gleichungen zu lösen, besteht darin, die Polynome mehr oder weniger durch Versuch und Irrtum zu faktorisieren. Manchmal ist

---

<sup>1</sup>Kapitel 11 ist eine Voraussetzung für das vollständige Verständnis dieser Methoden.

es einfach, die Wurzeln durch Faktorisierung zu erhalten:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3). \quad (7.2)$$

Es ist viel schwieriger,  $x^2 - 2x - 24$  zu faktorisieren, weil es viele mögliche Wurzel-paare gibt, die berücksichtigt werden müssen:

$$(\pm 1, \mp 24), (\pm 2, \mp 12), (\pm 3, \mp 8), (\pm 4, \mp 6).$$

## 7.2 Die Beziehung zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten

**Satz 7.1.** Wenn  $r_1, r_2$  die Wurzeln von  $x^2 + bx + c$  sind, dann:

$$(x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = x^2 + bx + c.$$

Auch wenn wir die Werte der Wurzeln nicht kennen, so wissen wir doch, dass:

$$r_1 + r_2 = -b, \quad r_1 r_2 = c. \quad (7.3)$$

Es gibt eigentlich nichts zu beweisen, denn das Ergebnis ergibt sich aus der Berechnung.

Betrachte einige Werte von  $-b, r_1, r_2$  und sei  $m_{12}$  der Durchschnitt von  $r_1, r_2$ :

$-b$	$r_1$	$r_2$	$m_{12}$
33	12	21	$16\frac{1}{2}$
33	8	25	$16\frac{1}{2}$
33	1	32	$16\frac{1}{2}$
$-b$	$r_1$	$r_2$	$m_{12}$
-4	-16	12	-2
-4	-4	0	-2
-4	-3	-1	-2

Bei jeder quadratischen Gleichung ist der Durchschnitt der beiden Wurzeln konstant:

$$m_{1,2} = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{(-b - r_2) + r_2}{2} = -\frac{b}{2}.$$

Sei  $s$  eine beliebige Zahl. Dann:

$$-b = -b + s + (-s) = \left(\frac{-b}{2} + s\right) + \left(\frac{-b}{2} - s\right) = r_1 + r_2.$$

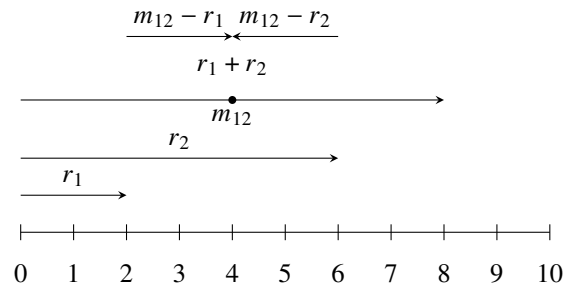


Abb. 7.1: Beziehung zwischen den Wurzeln  $r_1, r_2 = 2, 6$  und ihrem Durchschnitt  $m_{12} = 4$

Wenn eine Wurzel im Abstand  $s$  vom Durchschnitt liegt, liegt die andere Wurzel im Abstand  $-s$  vom Durchschnitt. Für  $r_1, r_2 = 2, 6$ , mit  $m_{12} = 4$ ,  $s = 2$ , haben wir:

$-b$	$r_1$	$r_2$	$m_{12}$	$m_{12}-r_1$	$m_{12}-r_2$
33	12	21	$16\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$
33	8	25	$16\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{2}$
33	1	32	$16\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{2}$
-4	-16	12	-2	14	-14
-4	-4	0	-2	2	-2
-4	-3	-1	-2	1	-1

Abbildung 7.1 veranschaulicht diese Beziehung. If we use other values  $r_1, r_2 = 3, 5$  for which  $r_1 + r_2 = 8$  then  $m_{12} = 4$  bleibt gleich, während  $s$  zu 1 wird (Abb. 7.2).

Der Versatz  $s$  scheint in willkürlich zu sein:

$$r_1 = \left( \frac{-b}{2} + s \right), \quad r_2 = \left( \frac{-b}{2} - s \right),$$

aber es gibt eine zusätzliche Bedingung  $r_1 r_2 = c$ , wobei  $c$  der konstante Term des Polynoms ist. Durch Multiplikation der beiden Ausdrücke, die wir für  $r_1, r_2$  abgeleitet haben, können wir  $s$  und dann  $r_1, r_2$  bestimmen:

$$c = \left( -\frac{b}{2} + s \right) \left( -\frac{b}{2} - s \right) = \frac{b^2}{4} - s^2$$

$$s = \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

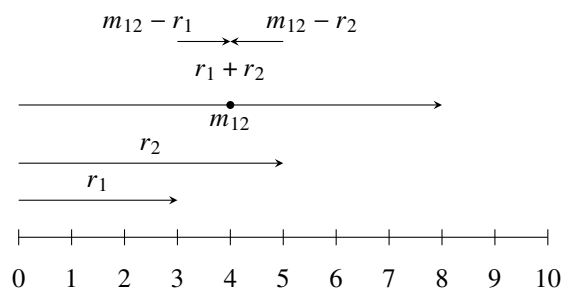


Abb. 7.2: Relation between the roots  $r_1, r_2 = 3, 5$  and their average  $m_{12} = 4$

### 7.3 Examples of Loh's Method

*Beispiel 7.1.* Betrachten Sie das Polynom  $x^2 - 2x - 24$  mit  $b = -2, c = -24$ :

$$\begin{aligned} c &= \left(-\frac{(-2)}{2} + s\right) \left(-\frac{(-2)}{2} - s\right) \\ -24 &= (1 + s)(1 - s) \\ s &= 5 \\ r_1 &= 1 + 5 = 6 \\ r_2 &= 1 - 5 = -4. \end{aligned}$$

Siehe:  $(x - 6)(x - (-4)) = x^2 - 2x - 24$ .

*Beispiel 7.2.* Finden wir die Wurzeln von  $x^2 - 83x - 2310$ :

$$\begin{aligned} -2310 &= \left(\frac{83}{2} + s\right) \left(\frac{83}{2} - s\right) \\ s^2 &= \frac{6889}{4} + 2310 = \frac{16129}{4} \\ s &= \frac{127}{2} \\ r_1 &= \frac{83}{2} - \frac{127}{2} = -22 \\ r_2 &= \frac{83}{2} + \frac{127}{2} = 105. \end{aligned}$$

Siehe:  $(x + 22)(x - 105) = x^2 - 83x - 2310$ .

Vergleichen Sie diese Berechnung mit der Berechnung nach der traditionellen

Formel:

$$\begin{aligned}\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} &= \frac{-(-83) \pm \sqrt{(-83)^2 - 4 \cdot (-2310)}}{2} \\ &= \frac{83 \pm \sqrt{16129}}{2} = \frac{83 \pm 127}{2} \\ r_1 &= \frac{83 - 127}{2} = -22 \\ r_2 &= \frac{83 + 127}{2} = 105.\end{aligned}$$

*Beispiel 7.3.* Theorem 7.1 kann auf Polynome höheren Grades verallgemeinert werden. Hier ist ein interessantes Beispiel für eine *quartische Gleichung*  $x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0$ . Wie für quadratische Gleichungen gibt es auch für kubische und quartische Gleichungen (allerdings nicht für Gleichungen höherer Potenzen) Formeln zum Lösen, aber die Formeln sind recht kompliziert.

Kann dieses Polynom vierten Grades in zwei quadratische Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten zerlegt werden? Wenn dies der Fall ist, müssen die Koeffizienten der  $x$ -Terme in den quadratischen Faktoren *gleich und mit entgegengesetzten Vorzeichen* sein, da der Koeffizient des  $x^3$ -Terms im quartischen Polynom Null ist. Daher lautet die Form der quadratischen Faktoren:

$$f(x) = (x^2 - nx + k_1)(x^2 + nx + k_2).$$

Die Durchführung der Multiplikation ergibt:

$$\begin{aligned}f(x) = & x^4 & +nx^3 & +k_2x^2 \\ & -nx^3 & -n^2x^2 & -nk_2x \\ & & +k_1x^2 & +nk_1x & +k_1k_2.\end{aligned}$$

Die Gleichsetzung der Koeffizienten ergibt drei Gleichungen in den drei Unbekannten  $n, k_1, k_2$  ergibt:

$$\begin{aligned}(k_1 + k_2) - n^2 &= -10 \\ n(k_1 - k_2) &= -1 \\ k_1k_2 &= 20.\end{aligned}$$

Da wir nach Faktoren mit ganzzahligen Koeffizienten suchen, ergibt sich aus den letzten beiden Gleichungen, dass:

$$n = 1, k_1 = 4, k_2 = 5 \quad \text{or} \quad n = 1, k_1 = -5, k_2 = -4.$$

Nur  $n = 1, k_1 = -5, k_2 = -4$  erfüllen die erste Gleichung für den Koeffizienten von  $x^2$ :

$$f(x) = (x^2 - x - 5)(x^2 + x - 4).$$



Die Lösung dieser quadratischen Gleichungen ergibt vier Lösungen der quartischen Gleichung:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

#### 7.4 Ableitung der traditionellen Formel

Für ein beliebiges monisches Polynom  $x^2 + bx + c$  lauten die Lohschen Formeln:

$$\begin{aligned} c = r_1 r_2 &= \left( \frac{-b}{2} + s \right) \left( \frac{-b}{2} - s \right) = \left( \frac{b^2}{4} - s^2 \right) \\ s &= \sqrt{\left( \frac{b^2}{4} \right) - c} \\ r_{1,2} &= \frac{-b}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{b^2}{4} \right) - c} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \end{aligned}$$

die traditionelle Formel zur Ermittlung der Wurzeln eines monischen Indexpolynoms eines quadratischen Polynoms. Wenn das Polynom nicht monisch ist, teilt man es durch  $a$ , setzt die Gleichung ein und vereinfacht sie:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ r_{1,2} &= \frac{-(b/a) \pm \sqrt{(b/a)^2 - 4(c/a)}}{2} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

#### 7.5 Al-Khwarizmi's Geometrische Lösung quadratischer Gleichungen

Schreiben wir ein monisches Monisches Polynom quadratisches Polynom als  $x^2 + bx - c$ . Die Wurzeln können durch Vervollständigung des Quadrats gefunden werden:

$$\begin{aligned} x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 &= c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ x &= -\frac{b}{2} \pm \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}. \end{aligned}$$

Dies ist die bekannte Formel für die Suche nach den Wurzeln einer quadratischen Gleichung, mit dem Unterschied, dass  $4c$  das entgegengesetzte Vorzeichen hat, da der Koeffizient des konstanten Terms  $-c$  war.

Die Vervollständigung des Quadrats wurde im 8. Jahrhundert von Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi in einem geometrischen Kontext entwickelt. Bei der Gleichung  $x^2 + bx = c$  wird angenommen, dass es ein Quadrat gibt, das die Seitenlänge  $x$  ist, so dass sein Flächeninhalt  $x^2$  ist. Zum Flächeninhalt  $x^2$  addiert man  $bx$ , indem man vier Rechtecke mit dem Flächeninhalt  $bx/4$  anfügt, deren Seiten  $b/4$  und  $x$  sind (Abb. 7.3). Vervollständigen Sie nun das Diagramm zu einem Quadrat, indem Sie die vier kleinen Quadrate mit der Fläche  $(b/4)^2$  hinzufügen (Abb. 7.4).

Wir können das Diagramm in Abb. 7.3 nicht konstruieren, weil wir nicht wissen, was  $x$  ist, aber die Fläche des größeren Quadrats in Abb. 7.4 ist:

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = c + \frac{b^2}{4},$$

was wir wissen, da uns die Koeffizienten  $b, c$  gegeben sind. Durch die Konstruktion des Diagramms und das Löschen der kleinen Quadrate, deren Seiten  $(b/4)$  sind – eine weitere bekannte Größe –, erhalten wir den Linienabschnitt der Länge  $x$ .

*Beispiel 7.4.* Es sei  $x^2 + 12x = 64$ . Dann sei  $c + (b^2/4) = 64 + 36 = 100$ . Es ist leicht, ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 100 zu konstruieren, denn jede Seite hat die Länge 10. Nun subtrahiert man  $(b/4) + (b/4) = 6$ , die Seiten der kleineren Quadrate, und erhält  $x = 10 - 6 = 4$ .

## 7.6 Cardano's Konstruktion zur Lösung kubischer Gleichungen

Die Formel für die Wurzeln von kubischen Gleichungen wurde erstmals im 16. Jahrhundert von Gerolamo Cardano veröffentlicht. Wir werden die Formel hier nicht weiterentwickeln, aber es ist interessant, dass die zentrale Idee auf einer geometrischen Konstruktion beruht, die der von al-Khwarizmi ähnelt. Die Konstruktion lässt

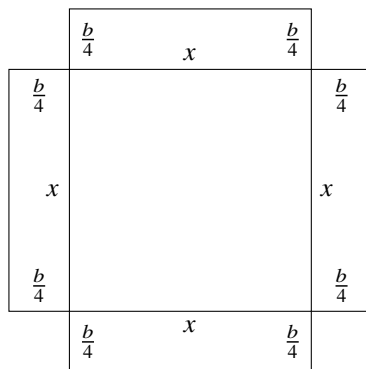


Abb. 7.3: Das Gebiet ist  $x^2 + 4(b/4)x = x^2 + bx$

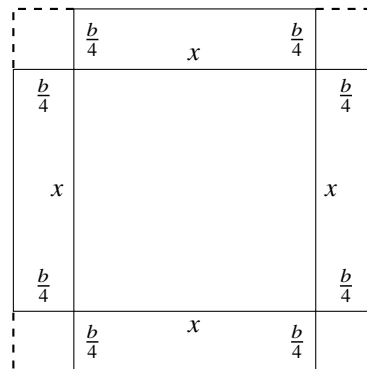


Abb. 7.4: Das Gebiet ist  $x^2 + 4(b/4)x + 4(b/4)^2 = x^2 + bx + (b^2/4)$

sich mit Hilfe der Algebra sehr einfach ermitteln. Durch Multiplikation:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a^3 + b^3) + 3ab(a + b). \quad (7.4)$$

Geometrisch gehen wir von einem Würfel aus, dessen Seitenlänge  $a + b$  beträgt, so dass sein Volumen  $(a + b)^3$  ist. Der Würfel wird in fünf Teile zerlegt. Die ersten beiden sind Würfel mit den Seitenflächen  $a$  und  $b$  und den Volumina  $a^3$  (blau) bzw.  $b^3$  (rot) (Abb. 7.5).

Die anderen drei Teile sind Kästchen (der Fachbegriff lautet *cuboid*), von denen jedes eine Seite der Länge  $a + b$  hat, die mit einer Seite des Würfels zusammenfällt, eine Seite der Länge  $a$  und eine Seite der Länge  $b$ , so dass das Volumen jedes der drei Kästchen  $ab(a + b)$  beträgt. In Abb. 7.6 befindet sich ein Kasten an der linken Seite des Würfels (blau), einer an der Rückseite des Würfels (rot) und einer an der Oberseite des Würfels (grün). Kombiniert man die fünf Körper in Abb. 7.5 und Abb. 7.6, erhält man Gl. 7.4.

## 7.7 Sie ließen sich von imaginären Zahlen nicht einschüchtern

Die Geschichte der Mathematik zeigt eine Reihe von Konzepten, die zunächst als bedeutungslos galten, aber schließlich verstanden und akzeptiert wurden und sich als nützlich erwiesen. Offensichtlich, da Zahlen Dinge zählen, ist  $-1$ , eine negative Zahl, bedeutungslos. Da Zahlen Verhältnisse von ganzen Zahlen (rationalen Zahlen) sind, ist  $\sqrt{2}$ , das sich leicht als irrational erweisen lässt, offensichtlich bedeutungslos. Offensichtlich ist  $\sqrt{-1}$ , die Quadratwurzel einer negativen Zahl, bedeutungslos, da es keine Zahl - weder eine ganze noch eine rationale oder reelle - gibt, deren Quadrat  $-1$  ist.

Ein vollständiges Verständnis der Quadratwurzeln negativer Zahlen, die bis heute als imaginäre Zahlen bezeichnet werden, obwohl sie nicht weniger real sind als reelle Zahlen, wurde erst im neunzehnten Jahrhundert erreicht. Daher ist es erstaunlich, dass sich Geralamo Cardano und Rafael Bombelli bereits im 16. Jahrhundert nicht von dem Konzept einschüchtern ließen und die ersten kleinen Schritte zum Verständnis dieser Zahlen unternahmen.

Betrachten wir die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 10x + 40 = 0. \quad (7.5)$$

Nach der bekannten Formel (Gl. 7.1):

$$r_1, r_2 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 160}}{2} = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

Nun, wir wissen nichts über die Quadratwurzeln negativer Zahlen und wir wissen nicht, was diese Werte sind, aber wie Cardano wissen wir durch Thm 7.1, dass:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= (5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) = 10 = -b \\ r_1 r_2 &= (5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - 5\sqrt{-15} + 5\sqrt{-15} - (-15) = 40 = c. \end{aligned}$$

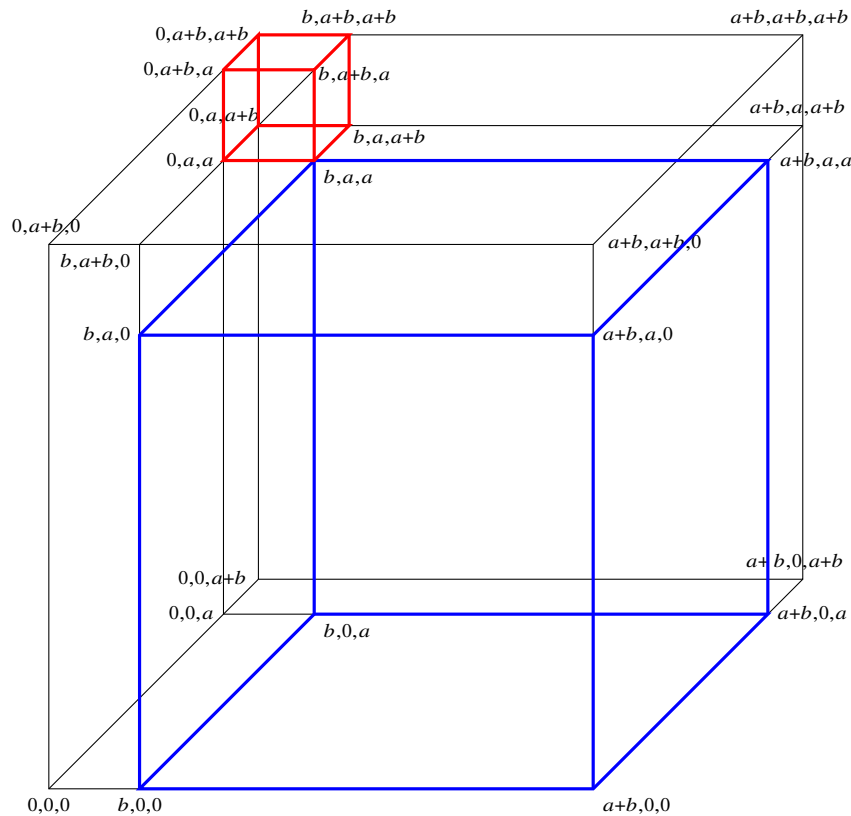


Abb. 7.5:  $(a+b)^3 = (a^3 + b^3) + \dots$

die mit den Koeffizienten der quadratischen Gleichung Gl. 7.5 übereinstimmen. Es ist ziemlich intuitiv, dass  $\sqrt{-15} + (-\sqrt{-15}) = 0$ , auch wenn wir nichts über  $\sqrt{-15}$  wissen, und ebenso ist es ziemlich intuitiv, dass  $\sqrt{-15} \cdot -(\sqrt{-15}) = -(-15) = 15$ , auch wenn wir nicht wissen, was  $\sqrt{-15}$  ist.

Betrachten wir nun die kubische Gleichung:

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \quad (7.6)$$

Es ist nicht schwer zu erkennen, dass 4 eine Wurzel ist, aber wie kann man sie berechnen? Mit der Cardano-Formel erhält man die Wurzel:

$$r = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}, \quad (7.7)$$

eine recht komplizierte Formel, die keinen offensichtlichen Bezug zu 4 hat.

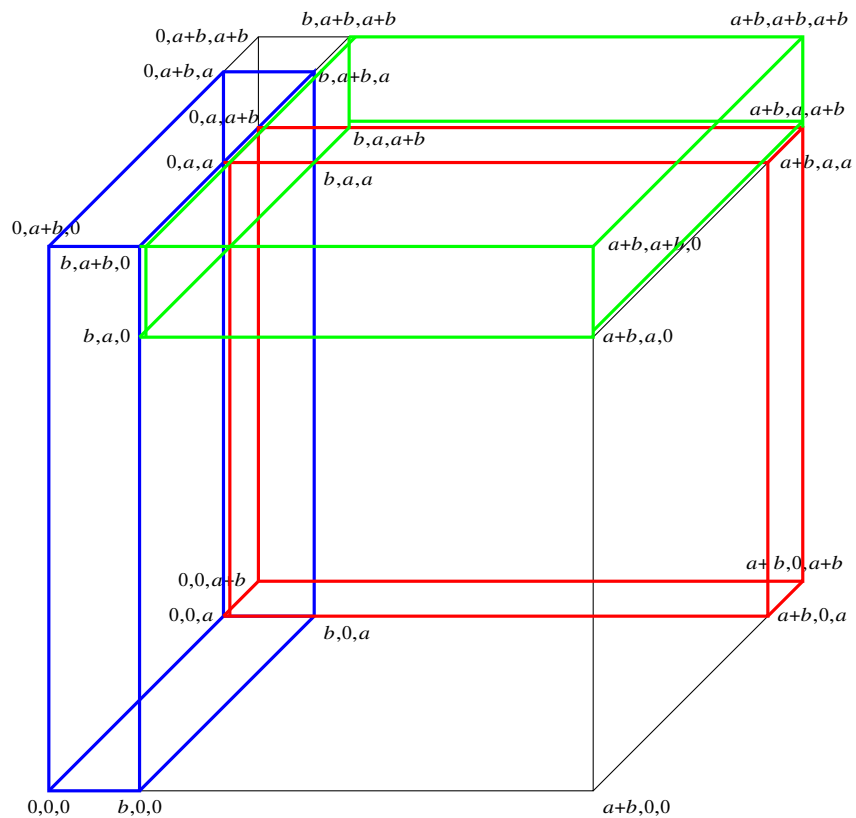


Abb. 7.6:  $(a+b)^3 = \dots + 3ab(a+b)$

Bombelli hat mutig die folgende Berechnung durchgeführt (siehe Gl. 7.4):

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 8 + 3 \cdot 4\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(-1) + (-1\sqrt{-1}) = 2 + 11\sqrt{-1} \\ (2 - \sqrt{-1})^3 &= 8 - 3 \cdot 4\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(-1) - (-1\sqrt{-1}) = 2 - 11\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

und durch Gl. 7.7:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \\ &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} \\ &= (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4. \end{aligned}$$

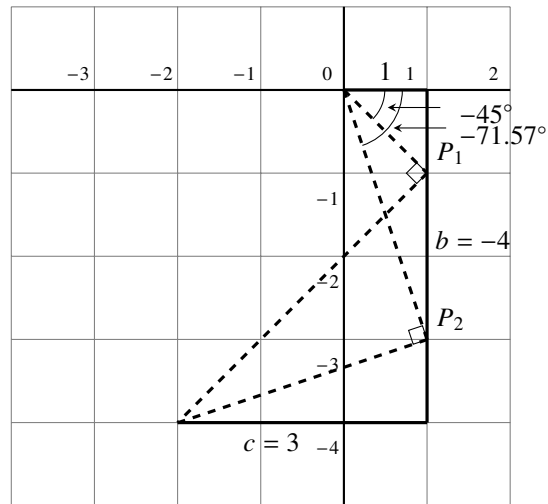


Abb. 7.7: Lills Methode auf  $x^2 - 4x + 3$

## 7.8 Die Lillsche Methode und der Carlyle'sche Kreis

Die Lill-Methode kann zur Lösung quadratischer Gleichungen verwendet werden. FußnoteDieser Abschnitt setzt voraus, dass Sie die Lill-Methode in Kap. 11. gelesen haben. Als Beispiel dient die Gleichung 7.2, die die Wurzeln einer quadratischen Gleichung durch Faktorisierung angibt:

$$x^2 + bx + c = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$$

Die Anwendung der Lill'schen Methode führt zu den in Abb. 7.7 dargestellten Pfaden.

Prüfen Sie, ob die Winkel korrekt sind:

$$-\tan(-45^\circ) = -1, \quad -\tan(-71.57^\circ) \approx -3.$$

Für quadratische Gleichungen können wir die Punkte  $P_1, P_2$  als Schnittpunkte der Linie, die den Koeffizienten  $b$  darstellt, und des Kreises finden, dessen Durchmesser die Verbindungslinie zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt der Wege ist (Abb. 7.8). Damit ein Punkt auf der Geraden  $b$  eine Wurzel ist, muss die Spiegelung der Geraden  $90^\circ$  sein, und daher wird der eingeschriebene Winkel durch einen Durchmesser begrenzt.

Dies kann auch rechnerisch überprüft werden. Der Mittelpunkt des Kreises ist der Mittelpunkt des Durchmessers  $(-1, -2)$ . Die Länge des Durchmessers ist:

$$\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20},$$

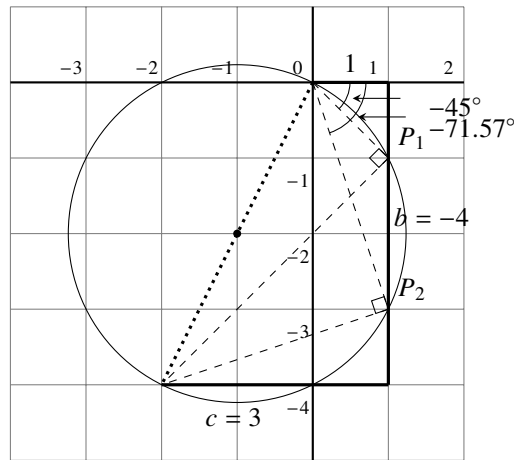


Abb. 7.8: Konstruktion eines Kreises zur Ermittlung der Wurzeln

Das Quadrat der Länge des Radius ist also  $\left(\sqrt{20/2}\right)^2 = 5$ . Wir brauchen den Schnittpunkt dieses Kreises mit der Linie  $x = 1$ :

$$\begin{aligned}(x - (-1))^2 + (y - (-2))^2 &= r^2 \\(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) &= 5 \\y^2 + 4y + 3 &= 0 \\y &= -1, -3.\end{aligned}$$

Eine ähnliche Methode zum Lösen quadratischer Gleichungen ist der Carlyle-Kreis, der der Lill-Methode vorausgeht. Bei einer quadratischen Gleichung  $x^2 - bx + c$  (beachten Sie das Minuszeichen des linearen Terms) konstruieren Sie die Punkte  $(0, 1)$  und  $(b, c)$ . Konstruieren Sie einen Kreis, dessen Durchmesser die Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten ist (Abb. 7.9). Seine Schnittpunkte (falls vorhanden) mit der  $x$ -Achse sind die Wurzeln der Gleichung.

Im allgemeinen Fall ist der Mittelpunkt des Kreises  $(b/2, (c - (-1))/2)$  und die Länge des Durchmessers  $\sqrt{b^2 + (c - 1)^2}$ , so dass die Gleichung des Kreises lautet:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + (c-1)^2}{4}.$$

Wenn man im Beispiel  $b = 4, c = 3$  und  $y = 0$  einsetzt, sieht man, dass  $x = 1$  und  $x = 3$  die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind.

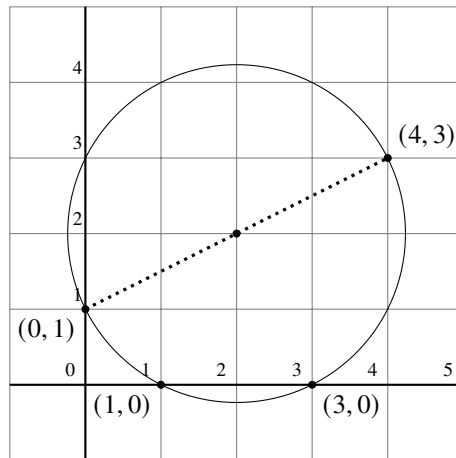


Abb. 7.9: Carlyle-Kreis für  $x^2 - 4x + 3$

## 7.9 Numerische Berechnung der Wurzeln

Die Schüler lernen die symbolische Berechnung von Wurzeln, Ableitungen und so weiter. Heutzutage werden die meisten Berechnungen von Computern durchgeführt, so dass symbolische Berechnungen weniger wichtig sind. Die *numerische Analyse* ist der Zweig der Mathematik und Informatik, der genaue und effiziente Berechnungsmethoden entwickelt. Die größte Herausforderung besteht darin, mit der Endlichkeit der im Speicher des Computers gespeicherten Werte umzugehen. Die Berechnung:

$$0.12 \times 0.14 = 0.0168$$

ist leicht zu machen, aber:

$$0.123456789 \times 0.123456789$$

braucht achtzehn Ziffern, um genau dargestellt zu werden, und das kann nicht in einem Speicherwort geschehen, das sechzehn Ziffern speichert. Dieser Fehler wird als *Abrundungsfehler* bezeichnet.

Ein noch schwerwiegenderes Problem tritt auf, wenn eine Fließkommaarithmetik durchgeführt wird. Das ist klar:

$$(0,12 \times 10^{-10}) \times (0,14 \times 10^{-8})$$

würde nicht durch Ausschreiben aller Nullstellen berechnet werden. Stattdessen werden die Mantissen multipliziert und die Exponenten addiert, um  $0,0168 \times 10^{-18}$  zu erhalten, das auf  $0,168 \times 10^{-19}$  normiert wird, so dass die höchstwertige Ziffer



nach dem Dezimalpunkt erscheint, was angesichts der festen Größe der Mantisse eine maximale Genauigkeit gewährleistet. Wenn der maximal darstellbare Exponent  $-16$  beträgt, kann das Ergebnis gar nicht gespeichert werden. Dieser Fehler wird als *Gleitkomma-Unterlauf* bezeichnet.

Die Formel für die Suche nach den Wurzeln der quadratischen Gleichung  $x^2 + bx + c$  lautet:

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (7.8)$$

Überlegen Sie, was passiert, wenn  $b = 1000$  und  $c = 4$ . Die Wurzeln sind:

$$r_1, r_2 = \frac{-1000 \pm \sqrt{1000000 - 16}}{2}.$$

Je nach Rechengenauigkeit ist es möglich, dass eine der Wurzeln so nahe an Null liegt, dass der gespeicherte Wert Null ist. Die Auswertung der quadratischen Gleichung ergibt das überraschende Ergebnis  $0^2 + b \cdot 0 + 4 = 4 \neq 0$ .

Können wir es besser machen? Mit Gleichung 7.3:

$$r_1 + r_2 = -b, \quad r_1 r_2 = c.$$

Wenn  $r_2$  viel kleiner ist als  $r_1$ , also  $r_2 \ll r_1$ , dann ist  $r_1 \approx -b$  und  $r_2 \approx c/b$ . Die von einem Computerprogramm berechnete Tabelle 7.1 vergleicht die Werte der mit diesen Formeln berechneten Wurzeln mit den Werten, die sich aus der traditionellen Formel Eq. 7.8 ergeben. Der Wert von  $c$  ist auf 4 festgelegt und die Wurzeln für steigende Werte von  $b$  werden gezeigt.

Zunächst sind die wahren Werte, die mit der traditionellen Formel für  $r_2$  berechnet werden, genauer ( $r_2 - r_{2v}$  ist negativ), aber ab  $b = 100000$  ist die Berechnung auf der Grundlage von Eq. 7.3 genauer. Das sind die Überraschungen der numerischen Analyse.

### Was ist die Überraschung?

Der Ansatz von Poh-Shen Loh bietet eine neue Sichtweise auf die Beziehung zwischen den Koeffizienten und den Wurzeln, die man nicht sieht, wenn man sich nur die traditionelle Formel merkt. Überraschend ist, dass diese Beziehung in Gauß' algebraischem Beweis für die Konstruierbarkeit eines regelmäßigen Heptadecks (Kap. 16) von grundlegender Bedeutung ist.

Angesichts der modernen Dominanz algebraischer Methoden in der Geometrie ist es wichtig, sich daran zu erinnern, dass das Gegenteil einst galt. Wie die Konstruktionen von Al-Khwarizmi und Cardano zeigen, wurden geometrische Methoden verwendet, um Ergebnisse in der Algebra zu erhalten. Lill und Carlyle entwickelten beide geometrische Methoden zur Lösung quadratischer Gleichungen. Die Überlegungen zur numerischen Berechnung auf Computern werden die Schüler überraschen, die noch keine Erfahrung damit haben.

Tab. 7.1: Zwei Berechnungen der Wurzeln einer quadratischen Gleichung.  $r_1, r_2$  sind die durch Gl. 7.8 berechneten Wurzeln.  $r_{1v}, r_{2v}$  sind die mit Gl. 7.3 berechneten Wurzeln. Die Fehler sind  $r_i - r_{iv}$ . Die Werte werden auf vier Dezimalstellen abgeschnitten. Fließkommazahlen werden mit  $-4e-5$  anstelle von  $4 \times 10^{-5}$  geschrieben, weil Computerprogramme normalerweise als lineare Folgen von Zeichen geschrieben werden.

$b$	$r_1$	$r_{1v}$	Error <sub>1</sub>	$r_2$	$r_{2v}$	Error <sub>2</sub>
100	-99.9599	-100	0.0400	-0.04001	-0.04	-1.6012e-05
1000	-999.9959	-1000	0.0040	-0.0040	-0.004	-1.6000e-08
10000	-9999.9996	-10000	0.0004	-0.0004	-0.0004	-1.6270e-11
100000	-99999.9999	-100000	3.9999e-5	-3.9999e-5	-4e-5	1.0104e-12
1000000	-999999.9999	-1000000	4.0000e-6	-3.9999e-6	-4e-6	2.7749e-11
10000000	-10000000.0	-10000000	3.9860e-7	-3.9953e-7	-4e-7	4.6261e-10

## Quellen

Die Methode von Poh-Shen Loh stammt aus [28, 29]. Al-Khwarizmis Konstruktion stammt aus [6, Chapter 1] und [32]. Cardanos Konstruktion ist in [6, Kap. 1] zu finden. Für die bunte Geschichte der Entwicklung der Cardano-Formel siehe [52]. Die frühen Versuche, mit imaginären Zahlen zu rechnen, finden sich in [6, Chapter 2]. Lills Methode und Carlyles Kreis sind in [61] zusammen mit einer Diskussion der numerischen Berechnung der Wurzeln zu finden.

## Kapitel 8

### Ramsey Theory

Die Ramsey-Theorie ist ein Teilgebiet der Kombinatorik, das Fragen der folgenden Art stellt: Wie groß muss eine Menge sein, damit, wenn sie in Teilmengen unterteilt wird, mindestens eine Teilmenge eine bestimmte Eigenschaft hat? Die Ergebnisse der Ramsey-Theorie sind schwer zu beweisen, und es bleiben viele Probleme offen. In diesem Kapitel stellen wir einfache Fälle von vier Problemen vor, um einen Eindruck von diesem faszinierenden Thema zu vermitteln: Schur-Dreier (Sect. 8.1)—Dreier von ganzen Zahlen, so dass  $a + b = c$ , Pythagoras-Dreier (Sect. 8.2)—Dreier von ganzen Zahlen, so dass  $a^2 + b^2 = c^2$ , van der Waarden's Problem (Sect. 8.3), das Zahlenfolgen betrifft, und Ramsey's Theorem (Sect. 8.4) über die Färbung von Graphen. Abschnitt 8.5 zeigt, wie die probabilistische Methode in der Kombinatorik verwendet werden kann, um eine untere Schranke für Ramsey-Zahlen zu entwickeln.

Das Problem der pythagoräischen Tripel wurde kürzlich mit Hilfe von Computern gelöst, und zwar mit einer relativ neuen Methode, dem so genannten SAT-Solving. Für Leser, die mit der Aussagenlogik vertraut sind, gibt Abschnitt 8.6 einen Überblick darüber, wie dies geschieht.

Abschnitt 8.7 beschreibt die pythagoreischen Tripel, wie sie den Babyloniern vor viertausend Jahren bekannt waren.

Terminologie: *monochromatisch* bedeutet *mit der gleichen Farbe*.

#### 8.1 Schur Tripel

**Definition 8.1.** Gegeben ist eine *beliebige* Zerlegung der Menge der positiven ganzen Zahlen:

$$S(n) = \{1, \dots, n\}$$

in zwei disjunkte Teilmengen  $S_1, S_2$ , gibt es  $\{a, b, c\} \subseteq S_1$  oder  $\{a, b, c\} \subseteq S_2$  (oder beide), so dass  $a < b < c$  und  $a + b = c$ ? Wenn ja, heißt die Menge  $\{a, b, c\}$  ein *Schur-Tripel*.

*Beispiel 8.1.* Für  $n = 8$ , in der Zersetzung:

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4\}, S_2 = \{5, 6, 7, 8\}, \quad (8.1)$$

die Menge  $S_1$  enthält das Schur-Tripel  $\{1, 2, 3\}$ . Allerdings ist die Zerlegung:

$$S'_1 = \{1, 2, 4, 8\}, S'_2 = \{3, 5, 6, 7\}, \quad (8.2)$$

enthält kein Schur-Tripel, wie man durch Aufzählung aller Tripel in jeder Teilmenge überprüfen kann.

**Satz 8.1.** *In alle Zerlegungen von  $S(9) = \{1, \dots, 9\}$  in zwei disjunkte Teilmengen, enthält mindestens eine Teilmenge ein Schur-Tripel.*

Natürlich könnten wir die  $2^9 = 512$  Zerlegungen von  $S(9)$  in zwei disjunkte Teilmengen überprüfen, aber wir wollen versuchen, einen prägnanteren Beweis zu finden.

*Beweis.* Wir versuchen, eine Zerlegung zu konstruieren, die kein Schur-Tripel enthält, und zeigen, dass dies aufgrund der Nebenbedingungen des Problems unmöglich ist. Wir beginnen damit, 1 und 3 in die Teilmenge  $S_1$  zu legen. 2 muss in  $S_2$  liegen, weil  $1 + 2 = 3$  und wir versuchen, eine Zerlegung zu konstruieren, die kein Schur-Tripel enthält. Ähnlich muss 4 in  $S_2$  liegen, weil  $1 + 3 = 4$ . Weiter, 6 kommt in  $S_1$ , weil  $2 + 4 = 6$  und 7 kommt in  $S_2$ , weil  $1 + 6 = 7$ . Aber  $3 + 6 = 9$  und  $2 + 7 = 9$ , also muss 9 sowohl in  $S_1$  als auch in  $S_2$  vorkommen, ein Widerspruch. Die Reihenfolge der Schlussfolgerungen ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

$S_1$	$S_2$
1, 3	
1, 3	2
1, 3	2, 4
1, 3, 6	2, 4
1, 3, 6	2, 4, 7
1, 3, 6, 9	2, 4, 7
1, 3, 6, 9	2, 4, 7, 9

Zurückverfolgend suchen wir nach einer Zerlegung, bei der 1, 3 in verschiedenen Teilmengen liegen. Wenn wir 5 in  $S_2$  unterbringen, führt eine Folge von Schlussfolgerungen wieder zu einem Widerspruch, weil 9 in beiden Teilmengen vorkommen muss. Der Leser soll jede der in der folgenden Tabelle aufgeführten Schlüsse begründen:

$S_1$	$S_2$
1	3
1	3, 5
1, 2	3, 5
1, 2, 8	3, 5
1, 2, 8	3, 5, 7
1, 2, 8	3, 5, 7, 9
1, 2, 8	3, 5, 6, 7, 9
1, 2, 8, 9	3, 5, 6, 7, 9

Wir gehen wieder zurück und versuchen, 5 in  $S_1$  zu platzieren, aber auch das führt zu einem Widerspruch, wie die folgende Tabelle zeigt:

$S_1$	$S_2$
1	3
1, 5	3
1, 5	3, 4
1, 5	3, 4, 6
1, 2, 5	3, 4, 6
1, 2, 5	3, 4, 6, 7
1, 2, 5, 7	3, 4, 6, 7

Daraus folgt, dass es keine Zerlegung gibt, die nicht ein Schur-Tripel enthält.  $\square$

Issai Schur bewies das folgende Theorem:

**Satz 8.2** (Schur). *Für jedes  $k \geq 2$  gibt es ein kleinstes  $n$ , so dass in jeder disjunkten Zerlegung von  $S(n)$  in  $k$  Teilmengen mindestens eine der Teilmengen ein Schur-Tripel enthalten muss.*

## 8.2 Pythagoräische Dreiergruppen

**Definition 8.2.** Gegebene *beliebige* Zerlegung der Menge der positiven ganzen Zahlen:

$$S(n) = \{1, \dots, n\}$$

in zwei disjunkte Teilmengen  $S_1, S_2$ , gibt es  $\{a, b, c\} \subseteq S_1$  oder  $\{a, b, c\} \subseteq S_2$  (oder beide), so dass  $a < b < c$  und  $a^2 + b^2 = c^2$ ? Wenn ja, wird  $\{a, b, c\}$  ein *Pythagoreisches Tripel* genannt.

*Beispiel 8.2.* Für  $n = 10$ , bei der Zerlegung in gerade und ungerade Zahlen:

$$S_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}, S_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$

es gibt keine pythagoreischen Tripel in  $S_1$ , aber  $\{6, 8, 10\}$  in  $S_2$  ist ein pythagoreisches Tripel, da  $6^2 + 8^2 = 10^2$ .

Marijn J.H. Heule und Oliver Kullmann bewiesen die folgenden Theoreme. Ihre Beweismethode wird in Abschnitt 8.6 diskutiert.

**Satz 8.3.** *Für alle  $n \leq 7824$  gibt es eine Zerlegung von  $S(n)$  in zwei disjunkte Teilmengen, so dass beide Teilmengen kein pythagoreisches Tripel enthalten.*

**Satz 8.4.** *Für alle  $n \leq 7824$  gibt es irgendeine Zerlegung von  $S(n)$  in zwei disjunkte Teilmengen, so dass beide Teilmengen kein pythagoreisches Tripel enthalten.*

Es ist unmöglich, alle  $2^{7825}$ -Zerlegungen von  $S(7825)$  zu prüfen. Wenn wir jede Mikrosekunde eine Zerlegung prüfen könnten, ergäbe das  $2^{7825}$  microseconds  $\approx 10^{600}$  years, während das geschätzte Alter des Universums nur etwa  $10^{10}$  Jahre beträgt.

### 8.3 Das Problem von Van der Waerden

Betrachten Sie die Sequenzen von acht farbigen Punkten in Abb. 8.1. In der oberen Folge befinden sich rote Punkte an den Positionen (1, 2, 3) und blaue Punkte an den Positionen (4, 5, 6). In jedem Fall bilden die Positionen eine arithmetische Progression. Auch in der mittleren Folge bilden die roten Punkte an den Positionen (1, 3, 5) eine arithmetische Folge. In der unteren Folge gibt es jedoch keine Menge von drei einfarbigen Punkten, deren Positionen eine arithmetische Folge bilden. Dreiergruppen roter Punkte befinden sich an den Positionen (1, 2, 5), (1, 2, 6), (2, 5, 6), von denen keine eine arithmetische Progression bildet, und ähnliches gilt für die blauen Punkte.

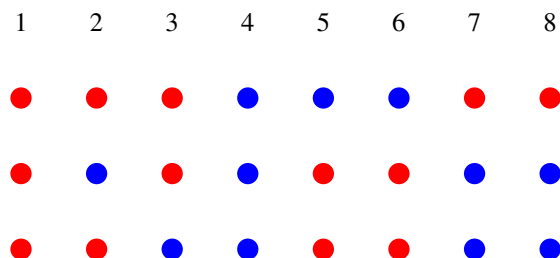


Abb. 8.1: van der Waerden's Problem für acht farbige Punkte

Bei neun Punkten muss jede Färbung eine Folge von drei monochromen Punkten enthalten, die eine arithmetische Progression bilden. Fügen wir zum Beispiel einen roten oder einen blauen Punkt am Ende der unteren Folge in Abb. 8.1 hinzu, so erhalten wir die Folgen in Abb. 8.2. In der oberen Folge gibt es rote Punkte an den Positionen (1, 5, 9), eine arithmetische Progression, und in der unteren Folge gibt es blaue Punkte an den Positionen (7, 8, 9), ebenfalls eine arithmetische Progression. Bartel L. van der Waerden stellte das folgende Problem: Für jede positive ganze Zahl  $k$ , was ist die kleinste Zahl  $n$ , so dass *jede* Folge von  $n$  farbigen Punkten *muss* eine Folge von  $k$  monochromatischen Punkten enthalten, die eine arithmetische Progression bilden? Für  $k = 3$ ,  $n = 9$ , wie oben für eine Zerlegung gezeigt. Das nächste Ergebnis ist schwieriger zu zeigen: für  $k = 4$ ,  $n = 35$ .

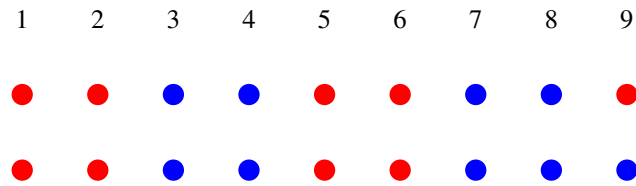


Abb. 8.2: van der Waerden's Problem für neun farbige Punkte

#### 8.4 Ramsey's Theorem

Färben Sie die Kanten von  $K_5$ , dem vollständigen Graphen mit 5 Scheitelpunkten, mit zwei Farben wie in Abb. 8.3 gezeigt. Es gibt keine einfarbigen Untergraphen  $K_3$  (Dreiecke) in dem Graphen. Abbildung 8.4 zeigt eine Färbung von  $K_6$  und es ist leicht zu sehen, dass es monochromatische Dreiecke  $\triangle ACE$  und  $\triangle BDF$  gibt. In diesem Abschnitt beweisen wir einen einfachen Fall eines Theorems von Frank P. Ramsey über die Existenz von Teilmengen mit einer bestimmten Eigenschaft.

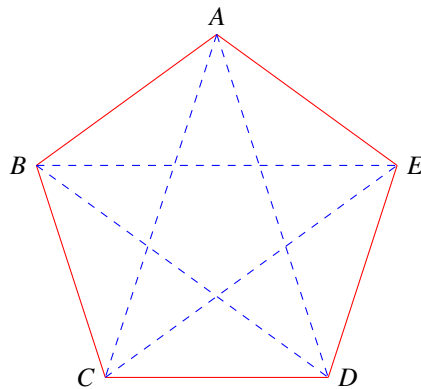


Abb. 8.3: Eine Färbung von  $K_5$  mit zwei Farben

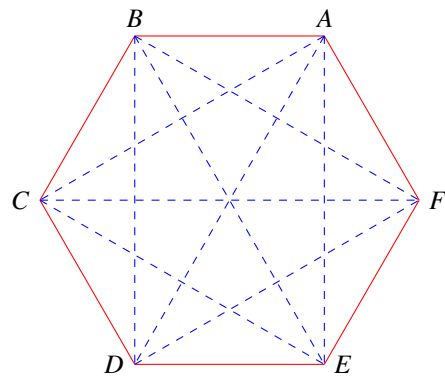


Abb. 8.4: Eine Färbung  $K_6$  mit zwei Farben

**Definition 8.3.**  $R(k)$ , die Ramsey-Zahl für  $k$ , ist die kleinste Zahl  $n$ , so dass in jeder Färbung von  $K_n$ , dem vollständigen Graphen auf  $n$  Scheitelpunkten, mit zwei Farben ein monochromatischer vollständiger Teilgraph  $K_k$  existiert.

**Satz 8.5** (Ramsey).  $R(3) = 6$ .

*Beweis.* Abbildung 8.3 zeigt, dass  $R(3) > 5$ . Um zu zeigen, dass  $R(3) \leq 6$  ist, betrachtet man einen beliebigen Knoten  $v$  in  $K_6$ .  $v$  ist mit fünf anderen Knoten

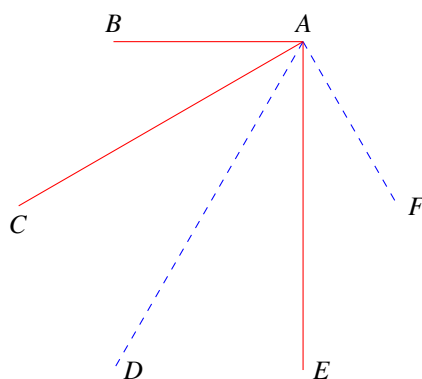


Abb. 8.5: Ein Scheitelpunkt von  $K_6$

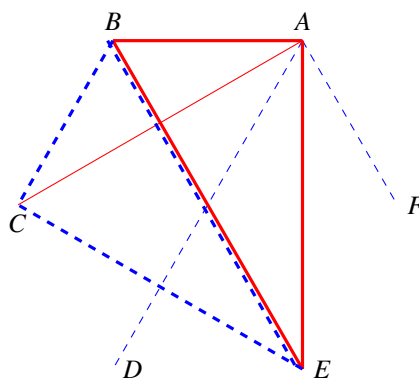


Abb. 8.6: Monochromatische Dreiecke in  $K_6$

verbunden, und wenn die Kanten mit zwei Farben gefärbt sind, muss es mindestens drei einfarbige Kanten geben, die mit  $v$  verbunden sind.

In Abb. 8.5 sind  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AE}$  rot gefärbt. Da der Graph vollständig ist, sind alle Eckpunkte miteinander verbunden. Wenn also eine der Kanten  $\overline{BC}$ ,  $\overline{BE}$ ,  $\overline{CE}$  rot gefärbt ist, sagen wir  $\overline{BE}$ , wird ein rotes Dreieck  $\triangle ABE$  gebildet. Andernfalls sind alle drei Kanten dieser Kanten blau gefärbt und sie bilden ein blaues Dreieck (Abb. 8.6).  $\square$

Das Theorem kann auf eine beliebige Anzahl von Farben verallgemeinert werden, sowie auf Färbungen, bei denen die Größen der Untergraphen nicht gleich sind.  $R(r, b, g)$  ist der kleinste vollständige Graph, der so beschaffen ist, dass in jeder Färbung mit drei Farben vollständige Teilgraphen mit  $r$  roten Kanten,  $b$  blauen Kanten und  $g$  grünen Kanten existieren müssen.

## 8.5 Die probabilistische Methode

Die einzigen bekannten nicht-trivialen Ramsey-Zahlen sind  $R(3) = 6$  und  $R(4) = 18$ . 1947 entwickelte Paul Erdős die *probabilistische Methode* und verwendete sie, um untere und obere Schranken für  $R(k)$  zu zeigen. Spätere Forschungen haben beide Schranken verbessert, aber dies ist immer noch ein wichtiges Forschungsgebiet, da die Schranken nicht eng sind. Es wurde zum Beispiel bewiesen, dass  $43 \leq R(5) \leq 48$  und  $798 \leq R(10) \leq 23556$ . In diesem Abschnitt wird die Elementarwahrscheinlichkeit verwendet, um eine untere Schranke für  $R(k)$  zu erhalten.

Um zu zeigen, dass es ein Element einer Menge  $S$  gibt, das die Eigenschaft  $A$  besitzt, muss man beweisen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein *zufälliges* Element von  $S$  die Eigenschaft  $A$  besitzt, größer als Null ist. Es ist wichtig zu verstehen, dass



die Methode *nicht-konstruktiv* ist: Sie beweist nur, dass ein solches Element existiert, konstruiert es aber nicht. Obwohl wir aus Thm. 8.5 wissen, dass  $R(3) = 6$  ist, wollen wir die probabilistische Methode verwenden, um eine untere Schranke für  $R(3)$  zu erhalten.

**Satz 8.6** (Erdős).  $R(3) > 4$ .

*Beweis.* Betrachten Sie bei einer *zufälligen* Färbung von  $K_n$  durch die beiden Farben Rot und Blau einen beliebigen Untergraphen  $K_3$ , d.h. ein beliebiges Dreieck mit  $\binom{3}{2} = 3$  Seiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Seiten rot gefärbt sind, ist  $2^{-3}$ , ebenso die Wahrscheinlichkeit, dass alle Seiten blau gefärbt sind, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Dreieck einfarbig ist,  $2^{-3} + 2^{-3} = 2^{-2} = 1/4$ . Die Anzahl der Dreiecke in  $K_n$  ist  $\binom{n}{3}$ , also ist  $P(n, 3)$ , die Wahrscheinlichkeit, dass *irgendein* Dreieck, das in einer zufälligen Färbung von  $K_n$  enthalten ist, einfarbig ist, gleich:

$$P(n, 3) = \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{4}.$$

Wenn  $P(n, 3) < 1$ , dann ist sein Komplement  $\bar{P}(n, 3) = 1 - P > 0$ , d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Färbung von  $K_n$  kein monochromatisches Dreieck enthält, ist größer als Null, also muss mindestens eines existieren.

Die folgende Tabelle zeigt  $\bar{P}(n, 3)$  für verschiedene Werte von  $n$ , und ob der Wert von  $\bar{P}(n, 3)$  beweist, dass es eine Färbung ohne einfarbiges Dreieck gibt:

$n$	$\bar{P}(n, 3)$	Exists
3	3/4	yes
4	5/6	yes
5	-3/7	-

□

Auf den ersten Blick ist das Ergebnis seltsam, denn Abb. 8.3 zeigt, dass es eine Färbung von  $K_5$  ohne monochromatische Färbung gibt. Das probabilistische Kriterium ist jedoch hinreichend, aber nicht notwendig; es ist eine untere Schranke, was bedeutet, dass  $R(n) > 4$  ist, was wahr ist, weil Thm. 8.5 gezeigt hat, dass  $R(n) = 6$ .

Der gleiche Beweis funktioniert für beliebige  $k$ , so dass die Wahrscheinlichkeit für die Existenz einer Färbung von  $K_n$  ohne monochromatischen vollständigen Graphen  $K_k$  ist:

$$P(n, k) = \binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}.$$

For  $k = 4$ :

$$\begin{aligned}\overline{P}(n, 4) &= 1 - \binom{n}{4} \cdot 2^{-5} = \left(32 - \binom{n}{4}\right) / 32 \\ \overline{P}(6, 4) &= (32 - 15) / 32 = 17/32 \\ \overline{P}(7, 4) &= (32 - 35) / 32 = -3/32.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $R(4) > 6$  ist, was viel weniger ist als der bekannte Wert  $R(4) = 18$ .

## 8.6 SAT-Auflösung

SAT-Solving ist eine Methode zur Lösung von Problemen, bei der ein Problem als Formel in der Aussagenlogik kodiert und dann mit einem Computerprogramm auf den Wahrheitswert der Formel überprüft wird. Fortschritte bei den Algorithmen und Implementierungen haben das SAT-Solving zu einem praktikablen Ansatz für die Problemlösung gemacht. Wir geben einen Überblick über das SAT-Solving und erklären, wie es zur Lösung der in diesem Kapitel beschriebenen mathematischen Probleme verwendet werden kann. Es wird vorausgesetzt, dass der Leser über elementare Kenntnisse der Aussagenlogik verfügt, wie sie in Def. 8.4. zusammengefasst sind.

### 8.6.1 Propositionale Logik und das SAT-Problem

#### Definition 8.4.

- Eine *Formel* besteht aus *atomaren Formeln* oder *Atomen*, die durch die propositionalen Operatoren  $\vee$  (Disjunktion, “oder”),  $\wedge$  (Konjunktion, “und”),  $\neg$  (Negation, “nicht”) verbunden sind.
- Eine Formel erhält eine *Interpretation* durch eine Zuordnung von  $T$  oder  $F$  zu jedem Atom. Die Auswertung einer Formel in einer Interpretation ergibt ihren *Wahrheitswert*  $T$  oder  $F$ .
- Eine Formel ist *satisfiable*, wenn und nur wenn es eine Interpretation gibt, die ihren Wahrheitswert  $T$  ergibt. Andernfalls ist die Formel *unbefriedigend*.
- Eine Formel ist dann und nur dann in *conjunctive normal form (CNF)*, wenn sie aus einer Konjunktion von Teilformeln besteht, von denen jede eine Disjunktion von *literals* (Atomen oder Negationen von Atomen) ist.

Die folgende Formel ist in CNF:

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r).$$

Das *SAT-Problem* besteht darin, zu entscheiden, ob eine gegebene Formel in CNF erfüllbar ist oder nicht. Ein *SAT solver* ist ein Computerprogramm, das das SAT-Problem lösen kann. Die meisten SAT-Solver basieren auf dem DPLL-Algorithmus, der auf die 1960er Jahre zurückgeht, aber durch neuere Entwicklungen wurde der Algorithmus erheblich verbessert. Hochgradig optimierte Implementierungen dieser Algorithmen haben SAT-Solver zu einem wichtigen Werkzeug für die Lösung von Problemen in vielen Bereichen einschließlich der Mathematik gemacht.

## 8.6.2 Schur-Tripel

Index Schur-Tripel

Wir kodieren das Schur-Tripel-Problem  $S(8)$  als eine Formel in CNF. Die Formel ist dann und nur dann erfüllbar, wenn es eine Zerlegung der Menge  $S$  in disjunkte Teilmengen  $S_1, S_2$  gibt, so dass weder  $S_1$  noch  $S_2$  ein Schur-Tripel enthält. Für jede der Zahlen  $1 \leq i \leq 8$  gibt es ein Atom  $p_i$ . Die beabsichtigte Bedeutung einer Interpretation für die Formel ist, dass sie  $p_i$   $T$  zuordnet, wenn  $i$  in der ersten Teilmenge  $S_1$  liegt, und sie ordnet  $p_i$   $F$  zu, wenn  $i$  in der zweiten Teilmenge  $S_2$  liegt. Um zu zeigen, dass in allen Zerlegungen keine Teilmenge ein Schur-Tripel enthält, muss die Interpretation sicherstellen, dass für jedes mögliche Schur-Tripel mindestens ein Atom mit  $T$  und ein Atom mit  $F$  belegt ist.

Zum Beispiel ist  $\{2, 4, 6\}$  ein Schur-Tripel, so dass mindestens eine der drei ganzen Zahlen in  $S_1$  und mindestens eine von ihnen in  $S_2$  liegen muss. Daher muss  $p_2 \vee p_4 \vee p_6$  wahr sein und auch  $\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6$  muss wahr sein. Es gibt 12 mögliche Schur-Tripel, also lautet die CNF-Formel:

$$\begin{aligned}
 & (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_3 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_5 \vee p_6) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_6 \vee p_7) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_7 \vee p_8) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_7 \vee \neg p_8) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_3 \vee p_5) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_4 \vee p_6) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_5 \vee p_7) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_5 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_6 \vee p_8) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_6 \vee \neg p_8) \wedge \\
 & (p_3 \vee p_4 \vee p_7) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_3 \vee p_5 \vee p_8) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8) .
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Wenn ein SAT-Solver diese Formel erhält, antwortet er, dass die Formel unter jeder der Interpretationen erfüllbar ist:

$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$
$F$	$F$	$T$	$F$	$T$	$T$	$T$	$F$
$T$	$T$	$F$	$T$	$F$	$F$	$F$	$T$

Eine Interpretation entspricht der Zerlegung in Gl. 8.2:  $S_1 = \{1, 2, 4, 8\}$ ,  $S_2 = \{3, 5, 6, 7\}$ , während die andere der symmetrischen Zerlegung  $S_1 = \{3, 5, 6, 7\}$ ,  $S_2 = \{1, 2, 4, 8\}$  entspricht.

Für  $S(9)$  werden vier Paare von Teilformeln für die zusätzlichen möglichen Dreiergruppen hinzugefügt:

$$\begin{aligned} & (p_1 \vee p_8 \vee p_9) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_8 \vee \neg p_9) \wedge \\ & (p_2 \vee p_7 \vee p_9) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_7 \vee \neg p_9) \wedge \\ & (p_3 \vee p_6 \vee p_9) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_6 \vee \neg p_9) \wedge \\ & (p_4 \vee p_5 \vee p_9) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_9) . \end{aligned}$$

Wenn der SAT-Solver diese Formel erhält, antwortet er, dass die Formel nicht erfüllbar ist, was bedeutet, dass die *no*-Zerlegung ein *no* Schur-Dreifach. Entfernt man die doppelte Verneinung, bedeutet dies, dass in *jeder* Zerlegung von  $S(9)$  ein Schur-Tripel existiert.

### 8.6.3 Pythagoräische Dreiergruppen

Heule und Kullmann lösten das Problem der pythagoräischen Tripel mit Hilfe eines hochoptimierten SAT-Lösers. Es gab einen signifikanten Unterschied in der Effizienz zwischen dem Auffinden einer Zerlegung, die keine pythagoräischen Tripel hat (man braucht nur eine Zerlegung), und dem Nachweis, dass alle Zerlegungen ein pythagoräisches Tripel haben (man muss sie alle überprüfen). Um zu zeigen, dass es für alle  $S(n)$ ,  $1 \leq n \leq 7824$ , eine Zerlegung ohne Tripel gibt, brauchte man nur eine Minute Rechenzeit, während der Nachweis, dass jede Zerlegung von  $S(7825)$  ein Tripel hat, etwa zwei Tage Rechenzeit für einen Computer mit 800 parallel arbeitenden *cores* (Prozessoren), insgesamt 40.000 Stunden Rechenzeit, erforderte.

Der Einsatz von Computern in der Mathematik wirft natürlich die Frage auf: Können wir einem von einem Computer erzeugten Beweis vertrauen? Natürlich können auch “gewöhnliche” mathematische Beweise fehlerhaft sein (Sect. 4.7), aber unsere Erfahrung mit häufigen Computerfehlern sowie die Undurchsichtigkeit großer Computerprogramme machen uns empfindlicher für mögliche Fehler in computergenerierten Beweisen.

Eine Möglichkeit, das Vertrauen in die Korrektheit eines computergenerierten Beweises zu erhöhen, besteht darin, zwei oder mehr Programme zu verwenden, die unabhängig voneinander von zwei oder mehr Forschern geschrieben wurden. Wenn die verschiedenen Programme in unterschiedlichen Programmiersprachen und für unterschiedliche Computer und Betriebssysteme geschrieben sind, verringert dies die Möglichkeit eines Fehlers in der Computerhardware und -software.

Der SAT-Solver von Heule und Kullmann schrieb ein Protokoll der Beweisschritte, so dass diese auf ihre Korrektheit hin überprüft werden konnten. Das Protokoll war so umfangreich, 200 Terabytes, dass es unmöglich war, es direkt zu untersuchen. Zum Vergleich: 200 Terabyte sind 200.000 Gigabyte, während Ihr Computer

vielleicht einen internen Speicher von 16 Gigabyte und eine Festplatte von 128 Gigabyte hat. Stattdessen haben sie ein kleines Programm geschrieben, um die Korrektheit der Daten im Protokoll zu überprüfen. Um sicherzustellen, dass dieses Programm korrekt war, schrieben sie einen formalen Beweis unter Verwendung des Coq-Beweisassistenten, der die Arbeit von Mathematikern unterstützt und überprüft, ohne den Beweisprozess vollständig zu automatisieren.

#### 8.6.4 Ein Überblick über den DPLL-Algorithmus

Der erste Algorithmus, den man zum Lösen von SAT lernt, ist *Wahrheitstabellen*. Bei einer Formel  $A$  in Aussagenlogik mit  $n$  verschiedenen Atomen gibt es  $2^n$  Interpretationen, da jedem Atom unabhängig  $T$  oder  $F$  zugeordnet werden kann. Für jede Interpretation ist es einfach, den Wahrheitswert von  $A$  mit Hilfe der Definition der Aussagenoperatoren zu berechnen. Die Überprüfung von  $2^n$  Interpretationen ist jedoch selbst für mäßig große  $n$  sehr ineffizient.

Der DPLL-Algorithmus arbeitet, indem er schrittweise  $T$  oder  $F$  einem Atom zuordnet und dann versucht, die Formel auszuwerten. Wenn zum Beispiel  $A = p \wedge q \wedge \neg r$  gegeben ist und  $p$   $F$  zugewiesen wird, dann wird  $A$  zu  $F$  ausgewertet, unabhängig von den Zuweisungen zu  $q$  und  $r$ , und es besteht keine Notwendigkeit, weitere Auswertungen durchzuführen. Analog dazu wird  $A = p \vee q \vee \neg r$  zu  $T$  ausgewertet, wenn  $p$   $T$  zugewiesen wird, unabhängig von den Zuweisungen an  $q$  und  $r$ .

Die Effizienz der DPLL ergibt sich aus der *Einheitsfortpflanzung*. Betrachten Sie einen Teil der Formel für Schur-Tripel:

$$\begin{aligned} & (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge \\ & (p_1 \vee p_3 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge \\ & \dots \\ & (p_3 \vee p_4 \vee p_7) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge \\ & (p_3 \vee p_5 \vee p_8) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8) . \end{aligned} \tag{8.4}$$

Nehmen wir an, wir haben  $F$  den Atomen  $p_1, p_2$  zugeordnet. Die erste Teilformel reduziert sich auf die Einheitsformel, die aus dem einzelnen Atom  $p_3$  besteht. Wenn die Formel erfüllt werden soll, müssen wir  $T$   $p_3$  und allen Teilformeln zuordnen:

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3), (p_1 \vee p_3 \vee p_4), (p_3 \vee p_4 \vee p_7), (p_3 \vee p_5 \vee p_8),$$

sofort zu  $T$  auswerten.

Da  $\neg p_3$  zu  $F$  ausgewertet wird, kann jede Teilformel, die  $\neg p_3$  enthält, nur erfüllt werden, wenn einem anderen Literal in der Teilformel  $T$  zugewiesen wird. In  $\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8$  muss entweder  $p_5$  oder  $p_8$   $F$  zugewiesen werden, damit entweder  $\neg p_5$  oder  $\neg p_8$  zu  $T$  ausgewertet wird.

Diese Analyse zeigt, dass, sobald  $p_1, p_2$   $F$  zugewiesen wurde, die Formel in Gl. 8.4 nur dann erfüllbar ist, wenn  $(\neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_8)$  erfüllbar ist. Führt

man die Propagierung von  $p_3$  auf allen Teilformeln von Gl. 8.3 durch, so reduziert sich die Formel auf:

$$\begin{aligned} & (p_4 \vee p_5) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_7) \wedge \\ & (p_6 \vee p_7) \wedge (p_6 \vee p_8) \wedge (p_7 \vee p_8) \wedge \\ & (\neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_8). \end{aligned}$$

Eine weitere Zuordnung von  $F$  zu  $p_4$  führt zu einer befriedigenden Interpretation, die wir nach nur drei willkürlichen Zuordnungen gefunden haben.

## 8.7 Pythagorean Triples in Babylonian Mathematics

Dieser Abschnitt ist eine Abschweifung von der Ramsey-Theorie; er wurde aufgenommen, um einen Vorgeschmack auf die reichhaltige Theorie der pythagoreischen Tripel zu geben und um die Tiefe des mathematischen Wissens in der antiken Welt zu demonstrieren. Pythagoräische Dreiergruppen waren in der babylonischen Mathematik seit mindestens 1800 v. Chr. bekannt.

**Definition 8.5.** Ein *primitives pythagoreisches Tripel* ist eine Menge von drei positiven ganzen Zahlen  $\{a, b, c\}$ , so dass  $a^2 + b^2 = c^2$  und  $a, b, c$  keinen gemeinsamen Faktor größer als 1 haben.

*Beispiel 8.3.*  $\{3, 4, 5\}$  ist ein primitives pythagoreisches Tripel, aber  $\{6, 8, 10\}$  ist ein pythagoreisches Tripel, das nicht primitiv ist, da 2 ein gemeinsamer Faktor ist.

Eine Keilschrifttafel namens *Plimpton 322* ist eines der frühesten Beispiele für babylonische Mathematik. Sie listet fünfzehn primitive pythagoräische Tripel unter Angabe von  $a$  und  $c$  auf. Tabelle 8.1 zeigt vier dieser Tripel, zusammen mit den berechneten Werten von  $b$  und anderen Werten, die weiter unten diskutiert werden. Mathematikhistoriker haben mehrere Erklärungen dafür vorgeschlagen, wie diese Dreiergruppen gefunden wurden. Eine Erklärung lautet, dass *Euklids Formel* verwendet wurde, um die Tripel aus einem Paar von erzeugenden Zahlen zu erhalten.

**Satz 8.7** (Euclid).  $\{a, b, c\}$  ist nur dann ein primitives pythagoräisches Tripel, wenn es zwei positive ganze Zahlen  $u, v$  gibt, die Zahlen erzeugen genannt werden, und zwar so, dass

1.  $u > v$
2. sie sind nicht beide ungerade
3. sie keinen gemeinsamen Faktor größer als 1 haben
4. gelten die folgenden Beziehungen zwischen  $\{a, b, c\}$  und  $u, v$ :

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2.$$

*Beweis.* Aus der Berechnung folgt unmittelbar, dass  $\{a, b, c\}$  ein pythagoräisches Tripel bildet, wenn es wie in Punkt 4 gefordert ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 \\ &= u^4 - 2(uv)^2 + v^4 + 4(uv)^2 \\ &= u^4 + 2(uv)^2 + v^4 \\ &= u^2 + v^2 = c^2. \end{aligned}$$

Der Beweis für die andere Richtung ist komplizierter und wird daher weggelassen.  $\square$

Wenn es stimmt, dass die Babylonier die Formel von Euklid verwendeten, bleibt die Frage: Wie haben sie die erzeugenden Zahlen  $u, v$  entdeckt?

Jede Zeile der Tabelle 8.1 zeigt  $a_{factors}$  und  $b_{factors}$ , die Faktorisierungen von  $a$  und  $b$ , die zeigen, dass sie keine gemeinsamen Faktoren haben. Der Leser ist eingeladen zu prüfen, dass  $c$  keinen gemeinsamen Faktor mit  $a, b$  hat, so dass die Tripel primitiv sind. Die erzeugenden Zahlen  $u, v$  und  $u_{factors}, v_{factors}$  sind ebenfalls dargestellt. Sie haben nicht nur keine gemeinsamen Faktoren, wie in Thm. 8.7 gefordert, sondern die einzigen Faktoren größer als 1 in  $u$  und  $v$  sind Potenzen von 2, 3, 5.

**Definition 8.6.** A *Babylonian triple* is a primitive Pythagorean triple such that the only prime factors of  $u, v$  are 2, 3, 5.

Der Grund, warum sich die Babylonier auf diese Faktoren beschränkten, ist, dass sie das *sexagesimal* oder das Zahlensystem zur Basis  $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$  verwendeten, dessen Primfaktoren 2, 3 und 5 sind.

Für Leser, die mit nicht dezimalen Zahlensystemen nicht vertraut sind, hier ein kurzer Überblick über das Konzept. Die "Zahl" 12345 ist eine Kurzform für die Zahl:

$$(1 \times 10^4) + (2 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (5 \times 10^0).$$

Dieses Zahlensystem wird als *decimal* oder Basis 10 Zahlensystem bezeichnet. Es gibt zehn Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 für die Koeffizienten der Potenzen, und die Potenzen werden durch die Stellen der Koeffizienten mit von rechts nach links zunehmenden Potenzen dargestellt.

Tab. 8.1: *Babylonische Dreiergruppen aus der Plimpton 322-Tafel*

$a$	$a_{factors}$	$b$	$b_{factors}$	$c$	$u$	$u_{factors}$	$v$	$v_{factors}$
119	$7 \cdot 17$	120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	169	12	$2^2 \cdot 3$	5	5
4601	$43 \cdot 107$	4800	$2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$	6649	75	$3 \cdot 5^2$	32	$2^5$
12709	$71 \cdot 179$	13500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3$	18541	125	$5^3$	54	$2 \cdot 3^3$
65	$5 \cdot 13$	72	$2^3 \cdot 3^2$	97	9	$3^2$	4	$2^2$

Tab. 8.2: *Babylonian triples in base 60*

$a$	$c$
$\langle 1 \rangle \langle 59 \rangle$	$\langle 2 \rangle \langle 49 \rangle$
$\langle 1 \rangle \langle 16 \rangle \langle 41 \rangle$	$\langle 1 \rangle \langle 50 \rangle \langle 49 \rangle$
$\langle 3 \rangle \langle 31 \rangle \langle 49 \rangle$	$\langle 5 \rangle \langle 09 \rangle \langle 01 \rangle$
$\langle 1 \rangle \langle 05 \rangle$	$\langle 1 \rangle \langle 37 \rangle$

Die Zahl kann auch im Binärsystem oder im Zahlensystem zur Basis 2 durch dargestellt werden:

$$12345 = 8192 + 4096 + 32 + 16 + 8 + 1 = 2^{13} + 2^{12} + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0 = 11000000111001.$$

Die binäre Notation verwendet zwei Ziffern 0, 1 für die Koeffizienten, und die Zweierpotenzen werden durch die Stellen der Koeffizienten angegeben.

Ein weiteres beliebtes Zahlensystem ist das *hexadezimale* oder Basis 16 Zahlensystem, das im Rechnen verwendet wird. Für dieses Zahlensystem benötigen wir 16 “Ziffern” und die Konvention ist, 0, 1, 2, ..., 8, 9, A, B, C, D, E, F zu verwenden.

Das Zahlensystem zur Basis 60 ist nicht so fremd, wie es scheinen mag, denn wir stellen Zeit, geografische Koordinaten und Winkel in diesem System dar. Wir sind es gewohnt, Berechnungen wie (1 Stunde 40 Minuten) plus (1 Stunde 30 Minuten) gleich (3 Stunden 10 Minuten) auszuführen.

Tabelle 8.2 zeigt die Werte von  $a, c$ , die in der Tafel in der Basis 60-Notation erscheinen, wobei  $\langle d \rangle$  die  $d$ -te “Ziffer” für  $0 \leq d < 60$  darstellt. Der Leser kann überprüfen, ob diese Werte mit den Dezimalwerten übereinstimmen, die z. B. in Tabelle 8.1 angegeben sind:

$$\begin{aligned} (3 \times 60^2) + (31 \times 60^1) + (49 \times 60^0) &= 12709 \\ (5 \times 60^2) + (9 \times 60^1) + (1 \times 60^0) &= 18541 \end{aligned}$$

Die Babylonier hatten keine 60 eigenen Symbole für die Ziffern. Stattdessen verwendeten sie ein hybrides System, bei dem die Koeffizienten mit zwei Symbolen dargestellt wurden: eines für den Zehnerkoeffizienten und das andere für den Einerkoeffizienten, und die Stellen der Koeffizienten gaben die Potenzen von 60 an. Mit ♥ für den Zehnerkoeffizienten und ♦ für den Einerkoeffizienten würde die Dezimalzahl  $(38 \times 60) + (16 \times 60^0) = 2296$  wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{array}{ccc} & \diamond\diamond\diamond & \diamond\diamond \\ \heartsuit\heartsuit\heartsuit & \diamond\diamond\diamond & \heartsuit \diamond\diamond\diamond . \end{array}$$



## Was ist die Überraschung?

Das Theorem von Frank P. Ramsey schien ein unbedeutendes Ergebnis in der Kombinatorik zu sein. Überraschenderweise war das Theorem die Grundlage für ein völlig neues und anspruchsvolles Gebiet der Mathematik mit vielen offenen Problemen. Auch die Natur der Ramsey-Theorie ist überraschend: Wenn eine Menge groß genug ist, gibt es Regelmäßigkeiten in ihren Teilmengen.

In die Ramsey-Theorie wurde ich durch den Artikel von Marijn J. H. Heule und Oliver Kullmann über die pythagoräischen Tripel eingeführt, deren Beweis eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Beweis des Vier-Farben-Satzes aufweist: der Einsatz massiver Rechenressourcen, der erst nach theoretischen Fortschritten erfolgreich ist. Daher auch der Titel ihres Artikels: *The Science of Brute Force*.

Probleme in der Kombinatorik verlangen nach bestimmten Zahlenwerten, zum Beispiel muss  $R(n)$  eine bestimmte positive ganze Zahl sein. Es ist überraschend, dass probabilistische Methoden sich als so fruchtbar erwiesen haben, um Ergebnisse in diesem Bereich zu erzielen.

Wir neigen zu der Annahme, dass die Menschen heute schlauer sind als vor Tausenden von Jahren. Es kann überraschen, wenn man erfährt, dass die babylonische Mathematik vor viertausend Jahren so weit fortgeschritten war, dass sie entdeckte, dass  $\{12709, 13500, 18541\}$  ein pythagoreisches Tripel ist.

## Quellen

Einen Überblick über die Ramsey-Theorie finden Sie unter [9], während eine fortgeschrittene Darstellung in [20] zu finden ist. Der Abschnitt über die probabilistische Methode basiert auf [43, Example 4o] und [9, Chapter 4]. Eine Datenbank mit Ramsey-Zahlen ist in [34] zu finden.

Die Methode zum Beweis des Satzes über die pythagoräischen Tripel wird in [23] ausführlich erläutert. Siehe [4] für eine Einführung in die Logik und in das SAT-Solving. Das Archiv meines SAT-Solvers für die Ausbildung [5] enthält Formeln für Schur-Dreier, Ramsey-Graphen und das van der Waerden-Problem.

Abschnitt 8.7 basiert auf [60], [42]. Das sexagesimale Zahlensystem wird in [62] beschrieben.

## Kapitel 9

### Langfords Problem

C. Dudley Langford bemerkte, dass sein Sohn farbige Blöcke wie in Abb. 9.1 dargestellt angeordnet hatte. Zwischen den roten Blöcken befindet sich ein Block, zwischen den blauen Blöcken zwei und zwischen den grünen Blöcken drei.

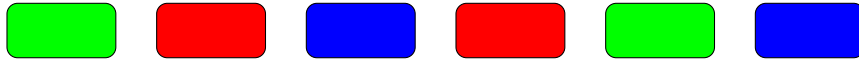


Abb. 9.1: Anordnung der Blöcke für das Langford-Problem

**Definition 9.1** (Langford-Problem  $L(n)$ ). Gegeben sei die Menge<sup>1</sup> von positiven ganzen Zahlen:

$$\{1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n\},$$

Lassen sie sich so anordnen, dass für  $1 \leq i \leq n$   $i$  Zahlen zwischen den beiden Vorkommen von  $i$  liegen?

Abbildung 9.1 zeigt, dass 312132 eine Lösung für  $L(3)$  ist.

Abschnitt 9.1 formuliert das Langford-Problem neu und verwendet dabei einen mathematischen Formalismus, der die Lösung des Problems erleichtert. Abschnitt 9.2 charakterisiert Werte von  $n$ , für die  $L(n)$  lösbar ist, und präsentiert zwei Beweise des Satzes. Der erste Beweis, der relativ einfach ist, verwendet die Technik der Doppelzählung: man zählt denselben Wert auf zwei verschiedene Arten und setzt die resultierenden Formeln gleich. Der zweite Beweis ist eine geschickte Induktion, aber die damit verbundene “Buchführung” erfordert eine sorgfältige Beachtung der Details. Abschnitt 9.3 arbeitet die Lösung für  $L(4)$  aus.

#### 9.1 (

Langfords Problem als Deckungsproblem)

Das Langford-Problem kann mit Hilfe einer Matrix gelöst werden. Für  $L(3)$  gibt es sechs Spalten, eine für jede Position, an der die sechs Zahlen platziert werden können. Es gibt eine Zeile für jede mögliche Platzierung einer der Zahlen, d.h. die beiden Vorkommen von  $k$  müssen  $k$  Zahlen zwischen sich haben. Es gibt vier mögliche Platzierungen der 1-Zahlen, drei der 2-Zahlen und zwei der 3-Zahlen:

<sup>1</sup>Ein *multiset* oder *bag* ist wie eine Menge, mit der Ausnahme, dass es mehr als ein Vorkommen eines Elements geben kann.

	1	2	3	4	5	6
1	1		1			
2		1		1		
3			1		1	
4				1		1
5	2			2		
6		2			2	
7			2			2
8	3				3	
9		3				3

Um das Problem zu lösen, müssen wir eine Zeile für die 1-Zahlen in der Folge, eine Zeile für die 2-Zahlen und eine Zeile für die 3-Zahlen auswählen, so dass, wenn wir diese Zeilen übereinander stapeln, keine Spalte mehr als eine Zahl enthält.

Die Zeile 9 braucht wegen der Symmetrie nicht berücksichtigt zu werden: Wenn man mit Zeile 9 beginnt, erhält man die Umkehrung der Folge, die man erhält, wenn man mit Zeile 8 beginnt.

Zeile 8 ist die einzige, die 3 enthält, also muss sie gewählt werden, und die Folge ist  $3_{\square\square\square}3_{\square}$ . Jede Zeile mit Zahlen in den Spalten 1 und 5 kann nicht mehr verwendet werden, da an jeder Stelle nur eine Zahl stehen kann. Bezeichnen wir die zulässigen und verbotenen Zeilen mit:

$\bar{1}, 2, \bar{3}, 4, \bar{5}, \bar{6}, 7, 8.$

Zeile 7 ist die einzige verbleibende Zeile, die 2's enthält, also muss sie ausgewählt werden und die Reihenfolge ist  $3_{\square}2_{\square}32$ . Das Löschen von Zeilen, die nicht mehr verwendet werden können, ergibt:

$\bar{1}, 2, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, 7, 8.$

Wählt man die einzige verbleibende Zeile, Zeile 2, ergibt sich die Lösung 312132:

	1	2	3	4	5	6
2		1		1		
7			2			2
8	3				3	

Die Analyse hat gezeigt, dass dies die einzige Lösung ist, mit Ausnahme der symmetrischen Lösung, die man erhält, wenn man mit Zeile 9 beginnt.

## 9.2 Für welche Werte von $N$ ist das Langfordsche Problem lösbar?

**Satz 9.1.**  $L(n)$  hat dann und nur dann eine Lösung, wenn  $n = 4k$  oder  $n = 4k + 3$ .

Wir beweisen die Vorwärtsrichtung des Satzes. Beweis 1 zeigt, dass wenn  $L(n)$  eine Lösung hat, dann  $n = 4k$  oder  $n = 4k + 3$ . Beweis 2 zeigt den Kehrsatz: wenn  $n = 4k + 1$  oder  $n = 4k + 2$ , dann hat  $L(n)$  keine Lösung.

*Beweis.* (1) Wenn das erste Vorkommen der Zahl  $k$  an der Stelle  $i_k$  ist, ist das zweite Vorkommen an der Stelle  $i_k + k + 1$ . Zum Beispiel in 312132, der Lösung für  $L(3)$ , ergibt die Wahl von  $k = 2$   $i_k = 3$  und  $i_k + k + 1 = 3 + 2 + 1 = 6$ .

$S_n$ , die Summe der Positionen aller Zahlen, ist:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n i_k + \sum_{k=1}^n (i_k + k + 1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n i_k + \sum_{k=1}^n (k + 1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n i_k + \frac{n(n+3)}{2}. \end{aligned}$$

Aber  $S_n$  ist einfach  $1 + 2 + 3 + \dots + 2n$ , also:

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{2n(2n+1)}{2}.$$

Die Gleichsetzung der beiden Formeln für  $S_n$  ergibt:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n i_k + \frac{n(n+3)}{2} &= \frac{2n(2n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^n i_k &= \frac{1}{2} \left( \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+3)}{2} \right) \\ &= \frac{3n^2 - n}{4}. \end{aligned}$$

Die linke Seite ist eine ganze Zahl, da sie die Summe von ganzen Zahlen ist (die Positionen), also muss die rechte Seite auch eine ganze Zahl sein. Wann ist  $3n^2 - n$  durch 4 teilbar? Die Faktorisierung von  $3n^2 - n$  ergibt  $n(3n - 1)$ .

Wenn  $n$  ein Vielfaches von 4 ist, ist das Produkt durch 4 teilbar.

Wann ist  $3n - 1$  durch 4 teilbar? Jede ganze Zahl  $n$  lässt sich als  $n = 4i + j$  für  $j = 0, 1, 2, 3$  darstellen. Wenn  $3n - 1$  durch 4 teilbar ist, dann ist auch  $3(4i + j) - 1 = 12i + 3j - 1$  teilbar.  $12i$  ist durch 4 teilbar. Für  $j = \{0, 1, 2, 3\}$  ist  $3j - 1 = \{-1, 2, 5, 8\}$  dann und nur dann durch 4 teilbar, wenn  $j = 3$ , also  $n = 4i + 3$ .  $\square$

Um die Idee des zweiten Beweises vorzustellen, betrachten wir, wie eine Lösung für  $n = 4$  aussehen könnte. In den folgenden Tabellen sind die Stellen, an denen 4

vorkommt, 1 und 6, und die Stellen, an denen 2 vorkommt, sind 5 und 8. In beiden Fällen ist eine Position ungerade und die andere gerade.

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
*					*		

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
				*			*

Sei  $k = 2m$  eine *gerade* Zahl. Wenn  $i$  die Position des ersten Vorkommens von  $k$  ist, dann ist die Position des zweiten Vorkommens  $i + k + 1$ . Die Summe der Positionen ist:

$$i + (i + k + 1) = 2i + 2m + 1 = 2(i + m) + 1,$$

was eine ungerade Zahl ist. Damit die Summe von zwei Zahlen ungerade ist, muss eine ungerade und die andere gerade sein.

Überprüfen wir nun die Positionen des Auftretens der ungeraden Zahlen. Die Positionen der Vorkommen von 1 sind 2 und 4, beides gerade Zahlen, und die Positionen der Vorkommen von 3 sind 3 und 7, beides ungerade Zahlen.

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
	*		*				

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
		*				*	

Sei  $k = 2m + 1$  eine *odd* Zahl. Die Summe der Positionen ist:

$$i + (i + k + 1) = 2i + 2m + 1 + 1 = 2(i + m + 1),$$

was eine gerade Zahl ist. Damit die Summe von zwei Zahlen gerade ist, müssen beide ungerade oder beide gerade sein.

Die Positionen  $1, 2, \dots, 2n - 1, 2n$  enthalten eine gleiche Anzahl von geraden und ungeraden Positionen. Die beiden Vorkommen einer Zahl in einer Zeile "bedecken" zwei Stellen. Wenn die Menge der Zeilen alle Positionen abdeckt, müssen sie eine gleiche Anzahl von geraden und ungeraden Positionen abdecken. Definieren Sie die Parität einer Reihe von Zeilen als die Differenz zwischen der Anzahl der geraden und ungeraden Positionen, die abgedeckt werden. Zu Beginn ist die Parität gleich Null, und wenn das Problem eine Lösung hat, hat die Menge der Zeilen in der Lösung ebenfalls die Parität Null.

Wenn zwei Vorkommen einer geraden Zahl platziert werden, decken sie eine gerade und eine ungerade Position ab, so dass die Parität gleich bleibt:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
-1					+1		

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
				-1			+1

Wenn zwei Vorkommen einer ungeraden Zahl platziert werden, wird die Parität +2 oder -2, also müssen wir in der Lage sein, dieses Paar mit einem Paar von

Vorkommen einer anderen ungeraden Zahl zu verbinden, die an Positionen platziert sind, die die Parität ausgleichen:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
	+1		+1				

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
		-1				-1	

Wir haben gezeigt, dass es eine Lösung des Langford-Problems nur dann geben kann, wenn es eine gerade Anzahl ungerader Zahlen in  $\{1, \dots, n\}$  gibt! Das Theorem besagt, dass, wenn dies wahr ist, entweder  $n = 4k$  oder  $n = 4k - 1$ , und wenn nicht, dann entweder  $n = 4k - 2$  oder  $4k - 3$ .

*Beweis.* (2) Der Beweis erfolgt durch Induktion. Es gibt vier Grundfälle:

- $n = 4k - 3 = 1$ . In  $\{1\}$  gibt es eine ungerade Anzahl von ungeraden Zahlen und es gibt keine Lösung.
- $n = 4k - 2 = 2$ . In  $\{1, 2\}$  gibt es eine ungerade Anzahl von ungeraden Zahlen und es gibt keine Lösung.
- $n = 4k - 1 = 3$ . In  $\{1, 2, 3\}$  gibt es eine gerade Anzahl von ungeraden Zahlen und wir haben gesehen, dass es eine Lösung gibt.
- $n = 4k - 0$ . In  $\{1, 2, 3, 4\}$  gibt es eine gerade Anzahl von ungeraden Zahlen und Sect. 9.3 gibt eine Lösung.

Die induktive Hypothese ist, dass der Satz für  $\{1, \dots, 4k - j\}$ ,  $k \geq 1, 0 \leq j \leq 3$  wahr ist, und wir werden beweisen, dass er für  $n = 4(k + 1) - j$  wahr ist.

- Füge  $4k + 1 = 4(k + 1) - 3$  zu  $\{1, \dots, 4k\}$  hinzu. Nach der Induktionshypothese für  $4k = 4k - 0$  gibt es eine gerade Anzahl von ungeraden Zahlen.  $4(k + 1) - 3$  ist ungerade, also gibt es jetzt eine ungerade Anzahl von ungeraden Zahlen und es gibt keine Lösung.
- Füge  $4k + 2 = 4(k + 1) - 2$  zu  $\{1, \dots, 4k + 1\}$  hinzu. Nach der Induktionshypothese für  $4k + 1 = 4(k + 1) - 3$  gibt es eine ungerade Anzahl von ungeraden Zahlen.  $4(k + 1) - 2$  ist gerade, also gibt es immer noch eine ungerade Anzahl von ungeraden Zahlen und es gibt keine Lösung.
- Füge  $4k + 3 = 4(k + 1) - 1$  zu  $\{1, \dots, 4k + 2\}$  hinzu. Nach der Induktionshypothese für  $4k + 2 = 4(k + 1) - 2$  gibt es eine ungerade Anzahl von ungeraden Zahlen.  $4(k + 1) - 1$  ist ungerade, also gibt es eine gerade Anzahl von ungeraden Zahlen und es gibt wahrscheinlich eine Lösung.

- Füge  $4k + 4 = 4(k + 1) - 0$  zu  $\{1, 2, \dots, 4k + 3\}$  hinzu. Nach der Induktionshypothese für  $4k + 3 = 4(k + 1) - 1$  gibt es eine gerade Anzahl von ungeraden Zahlen.  $4(k + 1) - 0$  ist gerade, also gibt es eine gerade Anzahl von ungeraden Zahlen und eine Lösung ist wahrscheinlich.

□

### 9.3 Lösung für $L(4)$

Hier ist das Feld für  $L(4)$ . Versuchen Sie, die Lösung selbst zu finden.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1		1					
2		1		1				
3			1		1			
4				1		1		
5					1		1	
6						1		1
7	2			2				
8		2			2			
9			2			2		
10				2			2	
11					2			2
12	3				3			
13		3				3		
14			3				3	
15				3				3
16	4					4		
17		4					4	
18			4					4

Aus Gründen der Symmetrie kann die Zeile 18 entfallen.

Wählen Sie Zeile 16 und die Reihenfolge ist  $4_{\square\square\square\square}4_{\square\square}$ . Jede Zeile mit einem Element an Position 1 oder Position 6 kann nicht mehr Teil der Lösung sein.

~~1~~, ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~7~~, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, ~~11~~, ~~12~~, ~~13~~, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, ~~17~~

Wählen Sie Zeile 14 und die Reihenfolge ist  $4_{\square}3_{\square\square}43_{\square}$ .

~~1~~, ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~7~~, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, ~~11~~, ~~12~~, ~~13~~, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, ~~17~~

Wählen Sie Zeile 8. Die Reihenfolge ist  $423_{\square}243_{\square}$ .

~~1~~, ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~7~~, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, ~~11~~, ~~12~~, ~~13~~, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, ~~17~~

Alle Auswahlmöglichkeiten für die 1 wurden eliminiert, also müssen wir zurückgehen.

Anstelle von Zeile 8 wählen Sie Zeile 11 und die Reihenfolge ist 4<sub>3</sub>2432.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Wählen Sie Zeile 2 und wir haben eine Lösung 41312432.

Gehen Sie weiter zurück, um zu sehen, ob es eine andere Lösung gibt.

Anstelle von Zeile 14 wählen Sie Zeile 15 und die Reihenfolge ist 4<sub>3</sub>3<sub>4</sub>3.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Reihe 8 muss gewählt werden und die Reihenfolge ist 42<sub>3</sub>324<sub>3</sub>.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Alle Möglichkeiten für die 1 wurden gestrichen, also gehen wir wieder zurück.

Anstelle von Zeile 16 wählen Sie Zeile 17 und die Reihenfolge ist 4<sub>3</sub>3<sub>4</sub>3<sub>4</sub>.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Wählen Sie Zeile 15 und die Reihenfolge ist 4<sub>3</sub>3<sub>4</sub>3<sub>4</sub>3.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Reihe 9 muss gewählt werden und die Reihenfolge ist 4<sub>3</sub>23<sub>4</sub>243.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Alle Auswahlmöglichkeiten für die 1 wurden eliminiert. Wir können ein letztes Mal zurückgehen.

Anstelle von Reihe 15 wählen Sie Reihe 12 und die Folge ist 34<sub>3</sub>3<sub>4</sub>.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Auch hier wurden alle Möglichkeiten für die 1er gestrichen.

Daher ist die einzige Lösung 41312432.

### Was ist die Überraschung?

Die Quelle der Inspiration für ein mathematisches Theorem kann überraschend sein. Langford bemerkte ein Muster in den farbigen Blöcken seines Sohnes, das zu dem interessanten Thm. 9.1 führte. Die Schüler sollten auch erfahren, dass ein Satz viele verschiedene Beweise haben kann.

### Quellen

Dieses Kapitel stützt sich auf [35]. [12] zeigt, wie man eine Lösung für  $n = 4k$  und  $n = 4k + 3$  findet.



## Kapitel 10

### The Axioms of Origami

Origami, die Kunst des Papierfaltens, wurde vor mehreren Jahrhunderten in Japan entwickelt und hat heute eine weltweite Anhängerschaft. Im späten zwanzigsten Jahrhundert wurde die mathematische Theorie des Origami entwickelt. Ihre Grundlage ist ein Satz von sieben Axiomen, die *Huzita-Hatori-Axiome*, benannt nach Humiaki Huzita, der die ersten sechs Axiome formalisierte, und Koshiro Hatori, der das siebte fand. Jacques Justin veröffentlichte alle sieben Axiome einige Jahre vor Huzita und Hatori, und Margherita P. Beloch formulierte das sechste Axiom im Jahr 1936. Dennoch sind die Axiome als die Huzita-Hatori-Axiome bekannt.

In einer Folge von drei Kapiteln werden wir die Mathematik des Origami erkunden. Dieses Kapitel stellt die Axiome vor, Kap. 11 verbindet Origami mit den Wurzeln von Polynomen und Kap. 12 zeigt, dass Konstruktionen mit Origami Probleme lösen können, die mit Lineal und Zirkel unmöglich sind.

Dieses Kapitel enthält einen Abschnitt für jedes der sieben Axiome. Im Anschluss an die Erklärung eines Axioms und ein Diagramm der von ihm spezifizierten *fold* werden die Gleichungen der Falte und der Schnittpunkte mit Hilfe der analytischen Geometrie entwickelt. Eine Falte kann auch als *geometrischer Ort* definiert werden, die Menge aller Punkte, die eine bestimmte Eigenschaft erfüllen. Der Begriff FF-altenßtammt von der Origami-Operation, bei der ein Stück Papier gefaltet wird, aber hier wird er verwendet, um die geometrische Linie zu bezeichnen, die durch das Falten des Papiers entstehen würde.

Faltungen führen zu *Reflexionen*. Bei einem Punkt  $p$  ergibt seine Spiegelung an einer Falte  $l$  einen solchen Punkt  $p'$ , dass  $l$  die Mittelsenkrechte des Liniensegments  $\overline{pp'}$  ist (Abb. 10.1).

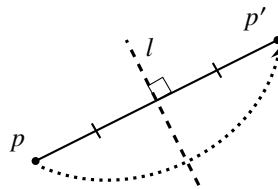


Abb. 10.1: Die Faltung ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsline zwischen einem Punkt und seiner Spiegelung

## 10.1 Axiom 1

**Axiom 10.1.** Bei zwei verschiedenen Punkten  $p_1 = (x_1, y_1)$ ,  $p_2 = (x_2, y_2)$  gibt es eine einzige Falte  $l$ , die durch beide Punkte verläuft (Abb. 10.2).

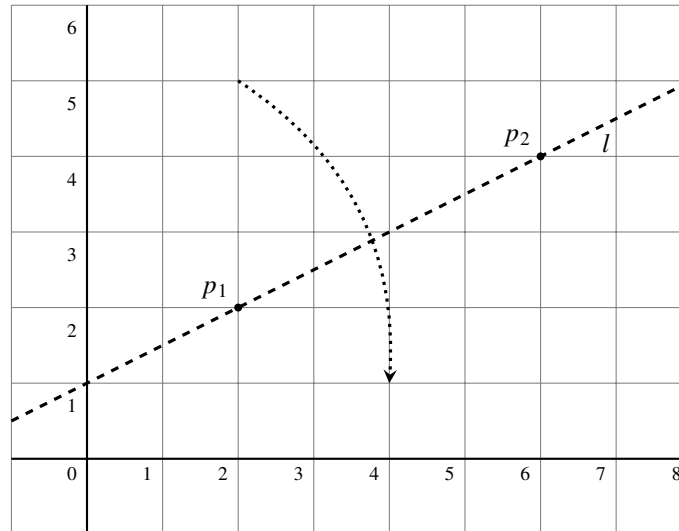


Abb. 10.2: Axiom 1

**Ableitung der Gleichung der Falte:** Die Gleichung der Falte  $l$  ergibt sich aus den Koordinaten von  $p_1$  und  $p_2$ . Die Steigung ist der Quotient aus den Differenzen der Koordinaten und der Achsenabschnitt ergibt sich aus  $p_1$ :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad (10.1)$$

*Beispiel 10.1.* Es sei  $p_1 = (2, 2)$ ,  $p_2 = (6, 4)$ . Die Gleichung von  $l$  sei:

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{4 - 2}{6 - 2}(x - 2) \\ y &= \frac{1}{2}x + 1. \end{aligned}$$

## 10.2 Axiom 2

**Axiom 10.2.** Bei zwei verschiedenen Punkten  $p_1 = (x_1, y_1)$ ,  $p_2 = (x_2, y_2)$  gibt es eine eindeutige Faltung  $l$ , die  $p_1$  auf  $p_2$  legt (Abb. 10.3).

Die Falte ist der geometrische Ort aller Punkte, die äquidistant von  $p_1$  und  $p_2$ .

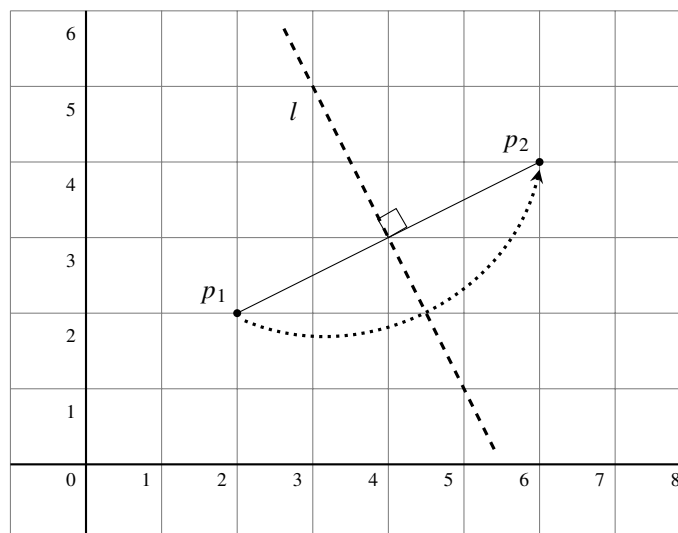


Abb. 10.3: Axiom 2

**Herleitung der Gleichung der Faltung:** Die Faltung  $l$  ist die Mittelsenkrechte von  $\overline{p_1 p_2}$ . Ihre Steigung ist der negative Kehrwert der Steigung der Verbindungslinie zwischen  $p_1$  und  $p_2$ .  $l$  geht durch den Mittelpunkt zwischen den beiden Punkten:

$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \left( x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right). \quad (10.2)$$

*Beispiel 10.2.* Es sei  $p_1 = (2, 2)$ ,  $p_2 = (6, 4)$ . Die Gleichung von  $l$  sei:

$$\begin{aligned} y - \left( \frac{2+4}{2} \right) &= -\frac{6-2}{4-2} \left( x - \left( \frac{2+6}{2} \right) \right) \\ y &= -2x + 11. \end{aligned}$$

### 10.3 Axiom 3

**Axiom 10.3.** Bei zwei Linien  $l_1, l_2$  gibt es eine Falte  $l$ , die  $l_1$  auf  $l_2$  legt (Abb. 10.4).

Die Faltung ist der geometrische Ort der Punkte, die von  $l_1$  und  $l_2$  gleich weit entfernt sind, wobei der Abstand eines Punktes zu einer Geraden die Länge des Geradenstücks ist, das durch den Punkt geht und senkrecht auf der Geraden steht. Mit Hilfe kongruenter Dreiecke lässt sich leicht zeigen, dass die Falte eine Winkelhalbierende des von  $l_1$  und  $l_2$  gebildeten Winkels ist.

**Herleitung der Gleichung der Faltung:**

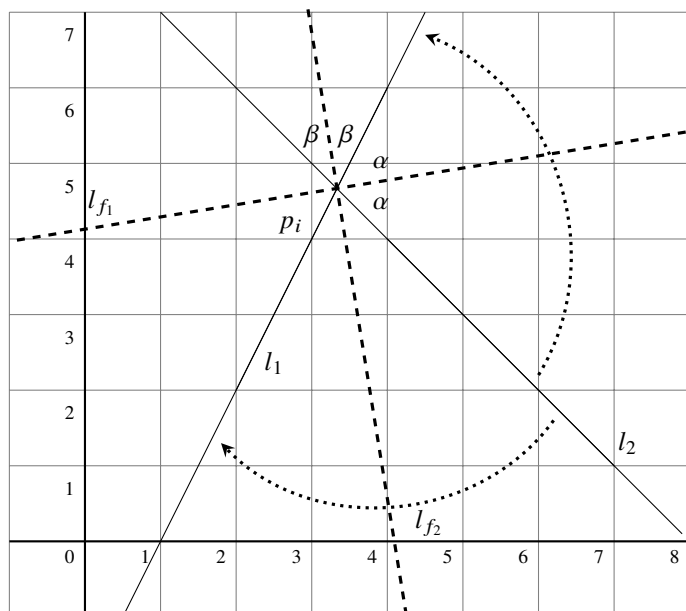


Abb. 10.4: Axiom 3

$l_1, l_2$  sind parallel: Sei  $l_1$  gleich  $y = mx + b_1$  und  $l_2$  gleich  $y = mx + b_2$ . Die Falte ist die zu  $l_1$  und  $l_2$  parallele Linie, die in der Mitte zwischen ihnen liegt:

$$y = mx + \frac{b_1 + b_2}{2}.$$

$l_1, l_2$  schneiden sich: Sei  $l_1$  gleich  $y = m_1x + b_1$  und  $l_2$  gleich  $y = m_2x + b_2$ .  $p_i = (x_i, y_i)$ , der Schnittpunkt der beiden Geraden, sei:

$$\begin{aligned} m_1x_i + b_1 &= m_2x_i + b_2 \\ x_i &= \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \\ y_i &= m_1x_i + b_1. \end{aligned}$$

Beispiel 10.3. Sei  $l_1$  gleich  $y = 2x - 2$  und  $l_2$  gleich  $y = -x + 8$ . Dann sei  $p_i = (x_i, y_i)$ :

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{8 - (-2)}{2 - (-1)} = \frac{10}{3} \approx 3.33 \\ y_i &= 2 \cdot \frac{10}{3} - 2 = \frac{14}{3} \approx 4.67. \end{aligned}$$

Die Faltung ist die Winkelhalbierende des Winkels, den  $l_1$  und  $l_2$  in ihrem Schnittpunkt bilden. Es gibt zwei mögliche Faltungen, da es zwei Paare von vertikalen

Winkeln gibt. Wir müssen die Steigungen der Winkelhalbierenden bestimmen. Ist der Winkel der Geraden  $l_1$  zur  $x$ -Achse  $\theta_1$  und der Winkel der Geraden  $l_2$  zur  $x$ -Achse  $\theta_2$ , so ist die Faltung diejenige, die zur  $x$ -Achse einen Winkel von  $\theta_b = (\theta_1 + \theta_2)/2$  bildet.

Es sei  $m_1 = \tan \theta_1, m_2 = \tan \theta_2$ . Nach Thm. A.9 ist  $m_s$ , die Steigung der Geraden, die einen Winkel von  $\theta_1 + \theta_2$  relativ zur  $x$ -Achse bildet, gleich:

$$m_s = \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}.$$

Nach Thm. A.10 ist  $m_b$ , die Steigung der Winkelhalbierenden, gleich:

$$m_b = \tan \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2(\theta_1 + \theta_2)}}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + m_s^2}}{m_s}.$$

*Beispiel 10.4.* Für  $y = 2x - 2$  und  $y = -x + 8$  ist die Steigung der Winkelhalbierenden:

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{2 + (-1)}{1 - (2 \cdot -1)} = \frac{1}{3} \\ m_b &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + (1/3)^2}}{1/3} = -3 \pm \sqrt{10} \approx -6.16, 0.162. \end{aligned}$$

Leiten wir die Gleichung der Falte  $l_{f_1}$  mit der positiven Steigung her. Aus Beispiel 10.3 sind die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden  $(10/3, 14/3)$ . Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{14}{3} &= (-3 + \sqrt{10}) \cdot \frac{10}{3} + b_i \\ b_i &= \frac{44 - 10\sqrt{10}}{3} \\ y &= (-3 + \sqrt{10})x + \frac{44 - 10\sqrt{10}}{3} \approx 0.162x + 4.13. \end{aligned}$$

#### 10.4 Axiom 4

**Axiom 10.4.** Bei einem Punkt  $p_1$  und einer Linie  $l_1$  gibt es eine einzige Falte  $l$  senkrecht zu  $l_1$ , die durch den Punkt  $p_1$  geht (Abb. 10.5).

Die Falte ist der geometrische Ort aller Punkte auf der Senkrechten zu  $l_1$ , die durch  $p_1$  geht.

**Herleitung der Gleichung der Falte:**  $l_1$  sei  $y = m_1x + b_1$  und  $p_1 = (x_1, y_1)$ .  $l$  steht senkrecht auf  $l_1$ , seine Steigung ist also  $-(1/m_1)$ . Da sie durch  $p_1$  geht, können wir

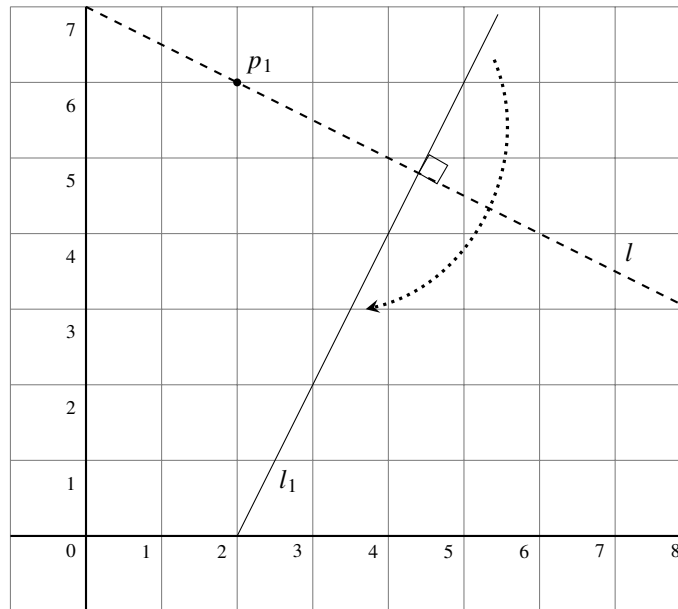


Abb. 10.5: Axiom 4

den Achsenabschnitt  $b$  berechnen und seine Gleichung aufschreiben:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= -\frac{1}{m}x_1 + b \\
 b &= \frac{(my_1 + x_1)}{m} \\
 y &= -\frac{1}{m}x + \frac{(my_1 + x_1)}{m}.
 \end{aligned}$$

*Beispiel 10.5.* Let  $p_1 = (2, 6)$  and let  $l_1$  be  $y = 2x - 4$ . The equation of the fold  $l$  is:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{2 \cdot 6 + 2}{2} = -\frac{1}{2}x + 7.$$

## 10.5 Axiom 5

**Axiom 10.5.** Bei zwei Punkten  $p_1, p_2$  und einer Linie  $l_1$  gibt es eine Falte  $l$ , die  $p_1$  auf  $l_1$  legt und durch  $p_2$  geht (Abb. 10.6).

Da die Falte durch  $p_2$  geht und  $p_2$  auf der Mittelsenkrechten von  $\overline{p_1 p'_1}$  liegt, ist die geometrische Ortskurve der Spiegelung von  $p_1$  der durch  $p_2$  zentrierte Kreis mit dem Radius  $\overline{p_1 p_2}$ . Die Faltung ist so beschaffen, dass die Spiegelung  $p'_1$  auf der gegebenen Linie  $l_1$  liegt.

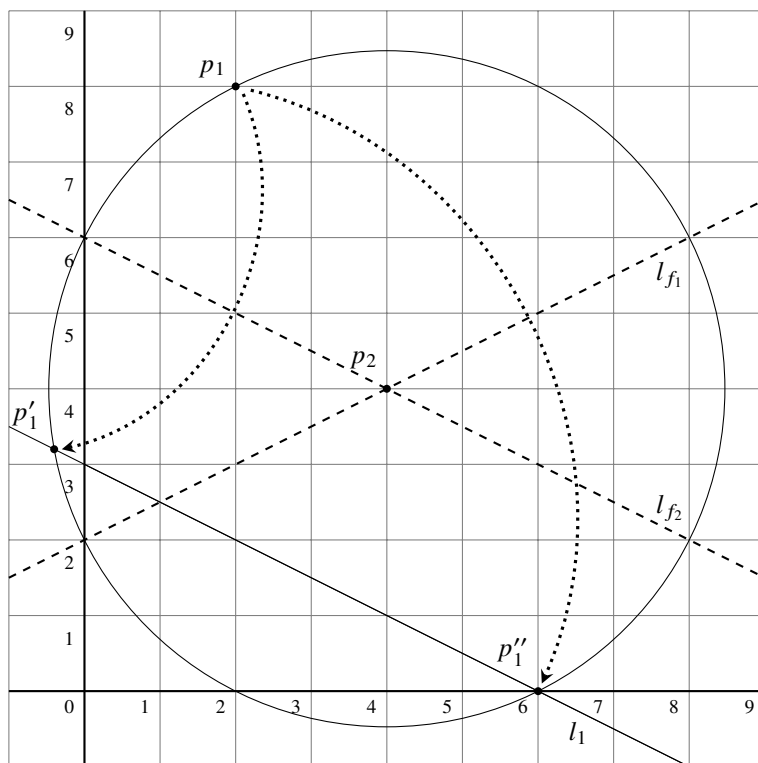


Abb. 10.6: Axiom 5

**Herleitung der Gleichungen der Faltungen:** Sei  $l_1$  gleich  $y = m_1x + b_1$  und sei  $p_1 = (x_1, y_1)$ ,  $p_2 = (x_2, y_2)$ . Die Gleichung des in  $p_2$  zentrierten Kreises mit dem Radius  $\overline{p_1p_2}$  lautet:

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2, \quad \text{where} \\ r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Setzt man die Gleichung von  $l_1$  in die Gleichung für den Kreis ein, so erhält man:

$$(x - x_2)^2 + ((m_1x + b_1) - y_2)^2 = r^2 \\ (x - x_2)^2 + (m_1x + (b_1 - y_2))^2 = r^2,$$

und wir erhalten eine quadratische Gleichung für die  $x$ -Koordinaten der möglichen Schnittpunkte:

$$x^2(1 + m_1^2) + 2(-x_2 + m_1(b - y_2))x + (x_2^2 + (b_1^2 - 2b_1y_2 + y_2^2) - r^2) = 0. \quad (10.3)$$

Da eine quadratische Gleichung höchstens zwei Lösungen hat, kann es für ein gegebenes Paar von Punkten und eine Linie null, eine oder zwei Falten geben. Aus den Lösungen  $x'_1, x''_1$  können wir  $y'_1, y''_1$  aus  $y = m_1x + b_1$  berechnen. Die reflektierten Punkte sind  $p'_1 = (x'_1, y'_1)$ ,  $p''_1 = (x''_1, y''_1)$ .

*Beispiel 10.6.* Es sei  $p_1 = (2, 8)$ ,  $p_2 = (4, 4)$  und  $l_1$  sei  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ . Die Gleichung des Kreises ist  $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = (4 - 2)^2 + (4 - 8)^2 = 20$ . Setzt man die Geradengleichung in die Kreisgleichung ein, so erhält man eine quadratische Gleichung für die  $x$ -Koordinaten der Schnittpunkte (oder man verwendet Gl. 10.3):

$$\begin{aligned}(x - 4)^2 + \left( \left( -\frac{1}{2}x + 3 \right) - 4 \right)^2 &= 20 \\(x - 4)^2 + (-1)^2 \cdot \left( \frac{1}{2}x + 1 \right)^2 - 20 &= 0 \\5x^2 - 28x - 12 &= 0 \\(5x + 2)(x - 6) &= 0.\end{aligned}$$

Die beiden Kreuzungspunkte sind:

$$p'_1 = (-2/5, 16/5) = (-0.4, 3.2), \quad p''_1 = (6, 0).$$

Die Falten sind die Winkelhalbierenden von  $\overline{p_1 p'_1}$  und  $\overline{p_1 p''_1}$ .

*Beispiel 10.7.* Für  $p_1 = (2, 8)$  und  $p'_1 = (-2/5, 16/5)$  lautet die Gleichung von  $l_{f_1}$ :

$$\begin{aligned}y - \frac{8 + (16/5)}{2} &= -\frac{(-2/5) - 2}{(16/5) - 8} \left( x - \frac{2 + (-2/5)}{2} \right) \\y &= -\frac{1}{2}x + 6.\end{aligned}$$

*Beispiel 10.8.* Für  $p_1 = (2, 8)$  und  $p''_1 = (6, 0)$  lautet die Gleichung von  $l_{f_2}$ :

$$\begin{aligned}y - \frac{8 + 0}{2} &= -\frac{6 - 2}{0 - 8} \left( x - \frac{2 + 6}{2} \right) \\y &= \frac{1}{2}x + 2.\end{aligned}$$

## 10.6 Axiom 6

**Axiom 10.6.** Bei zwei Punkten  $p_1, p_2$  und zwei Geraden  $l_1, l_2$  gibt es eine Falte  $l$ , die  $p_1$  auf  $l_1$  und  $p_2$  auf  $l_2$  legt (Abb. 10.7).

Eine Faltung, die  $p_i$  auf  $l_i$  legt, ist eine solche Linie  $l_f$ , dass der Abstand von  $p_i$  zu  $l_f$  gleich dem Abstand ihrer Spiegelung  $p'_i$  von  $l_f$  ist. Die geometrische Ortskurve der Punkte, die von einem Punkt  $p_i$  und einer Geraden  $l_i$  gleich weit entfernt sind,



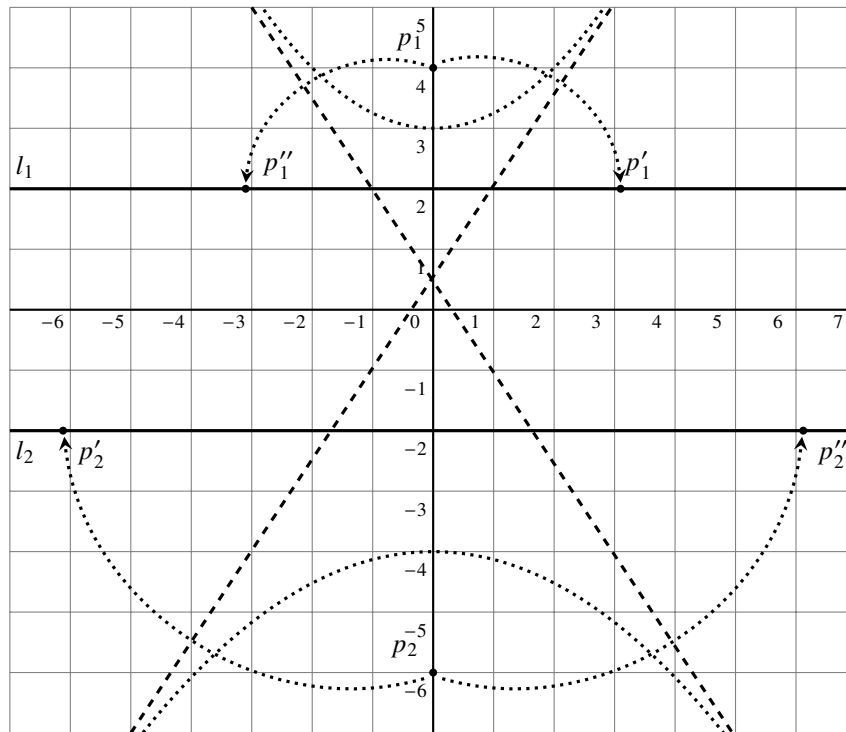


Abb. 10.7: Axiom 6

ist eine *parabola*.  $p_i$  heißt der *focus* und  $l_i$  heißt der *directrix*. Eine Falte ist eine beliebige Linie, die die Parabel tangiert (Sect. 10.6.3).

Damit eine Falte gleichzeitig  $p_1$  auf  $l_1$  und  $p_2$  auf  $l_2$  legen kann, muss sie eine gemeinsame Tangente an die beiden Parabeln sein. Es kann null, eine, zwei oder drei gemeinsame Tangenten geben (Abb. 10.8, 10.9, 10.10, 10.11).

Die Formel für eine beliebige Parabel ist recht komplex, so dass wir uns bei der Darstellung auf Parabeln beschränken, deren Symmetrieachse die  $x$ - oder  $y$ -Achse ist.

### 10.6.1 Herleitung der Gleichung einer Falte

Sei  $(0, f)$  der Brennpunkt einer Parabel mit der Leitkurve  $y = d$ . Definieren Sie  $p = f - d$ , die vorzeichenbehaftete Länge des Streckenabschnitts zwischen dem Brennpunkt und der Leitkurve.<sup>1</sup> Wenn der Scheitelpunkt der Parabel auf der  $x$ -Achse liegt, lautet die Gleichung der Parabel  $y = x^2/2p$ . Um die Parabel auf der

<sup>1</sup>Wir haben die Notation  $p_i$  für Punkte verwendet; die Verwendung von  $p$  hier könnte verwirrend sein, aber es ist die Standardnotation. Der formale Name für  $p$  ist die Hälfte des *latus rectum*.

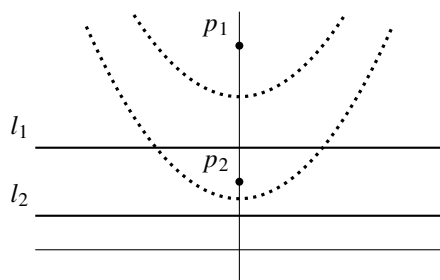


Abb. 10.8: Keine gemeinsamen Berührungspunkte

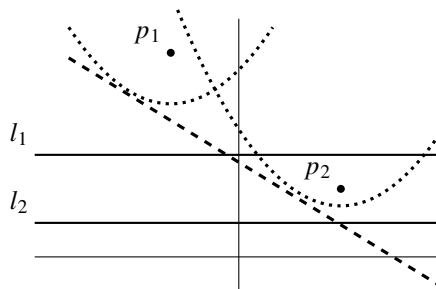


Abb. 10.9: Eine gemeinsame Tangente

y-Achse nach oben oder unten zu verschieben, so dass ihr Scheitelpunkt bei  $(0, h)$  liegt, addiert man  $h$  zur Gleichung der Parabel (Abb. 10.12):

$$y = \frac{x^2}{2p} + h.$$

Definieren Sie  $a = 2ph$  so, dass die Gleichung der Parabel lautet:

$$y = \frac{x^2}{2p} + \frac{a}{2p} \quad (10.4a)$$

$$x^2 - 2py + a = 0. \quad (10.4b)$$

Die Gleichung der Parabel in Abb. 10.12 ist  $x^2 - 12y + 12 = 0$ .

Setzt man die Gleichung einer beliebigen Geraden  $y = mx + b$  in Gl. 10.4b ein, erhält man eine Gleichung für die Schnittpunkte der Geraden und der Parabel:

$$\begin{aligned} x^2 - 2p(mx + b) + a &= 0 \\ x^2 + (-2mp)x + (-2pb + a) &= 0. \end{aligned}$$

Die Gerade tangiert die Parabel nur dann, wenn diese quadratische Gleichung genau eine Lösung hat, und nur dann, wenn ihre Diskriminante Null ist:

$$(-2mp)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2pb + a) = 0 \quad (10.5a)$$

$$m^2 p^2 + 2pb - a = 0. \quad (10.5b)$$

Dies ist eine Gleichung mit den Variablen  $m, b$  für die Tangenten an der Parabel. Um die gemeinsamen Tangenten an die beiden Parabeln zu erhalten, müssen wir die Gleichungen für die beiden Parabeln gleichzeitig lösen.

*Beispiel 10.9.*

**Parabel 1:** Brennpunkt  $(0, 4)$ , Leitlinie  $y = 2$ , Scheitelpunkt  $(0, 3)$ .

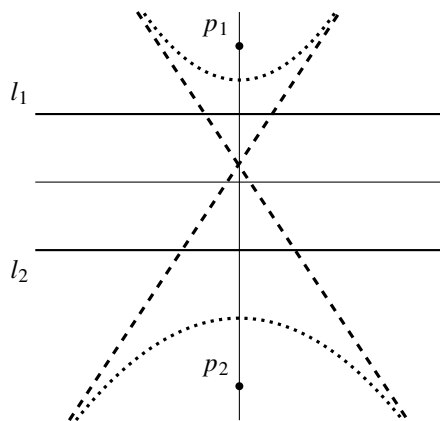


Abb. 10.10: Zwei gemeinsame Berührungspunkte

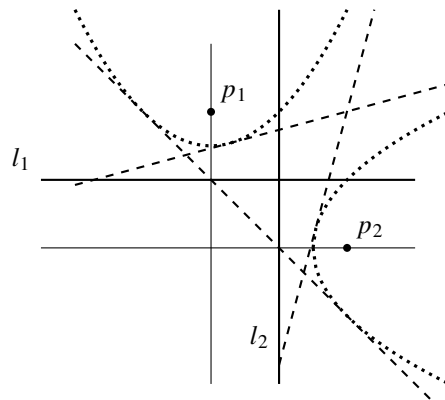


Abb. 10.11: Drei gemeinsame Berührungspunkte

$p = 2$ ,  $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ . Die Gleichung der Parabel lautet:

$$x^2 - 4y + 12 = 0.$$

Setzt man  $p$  und  $a$  in Gl. 10.5b ein und vereinfacht, so erhält man:

$$m^2 + b - 3 = 0.$$

**Parabel 2:** Brennpunkt  $(0, -4)$ , Leitlinie  $y = -2$ , Scheitelpunkt  $(0, -3)$ .

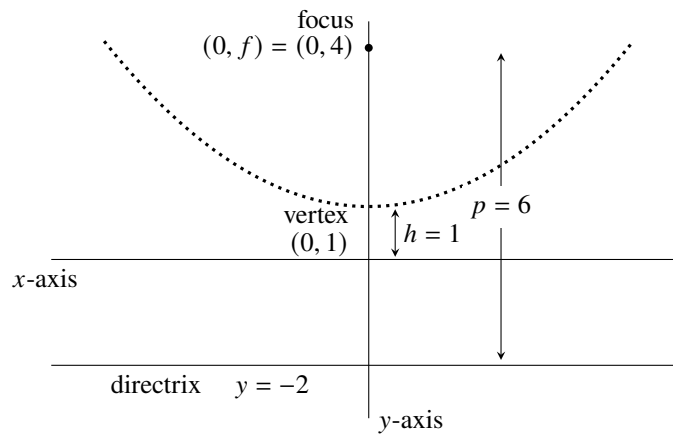


Abb. 10.12: Die Elemente der Definition einer Parabel

$p = -2$ ,  $a = 2 \cdot -2 \cdot -3 = 12$ . Die Gleichung der Parabel lautet:

$$x^2 + 4y + 12 = 0.$$

Setzt man  $p$  und  $a$  in Gl. 10.5b ein und vereinfacht, so erhält man:

$$m^2 - b - 3 = 0.$$

Die Lösungen der beiden Gleichungen:

$$m^2 + b - 3 = 0$$

$$m^2 - b - 3 = 0$$

are  $m = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73$  and  $b = 0$ . Es gibt zwei gemeinsame Berührungspunkte:

$$y = \sqrt{3}x, \quad y = -\sqrt{3}x.$$

*Beispiel 10.10.*

**Parabel 1:** Unverändert.

**Parabel 2:** Brennpunkt  $(0, -6)$ , Leitlinie  $y = -2$ , Scheitelpunkt  $(0, -4)$ .

$p = -4$ ,  $a = 2 \cdot -4 \cdot -4 = 32$ . Die Gleichung der Parabel lautet:

$$x^2 + 8y + 32 = 0.$$

Setzt man  $p$  und  $a$  in Gl. 10.5b ein und vereinfacht, so erhält man:

$$2m^2 - b - 4 = 0.$$

Die Lösungen der beiden Gleichungen:

$$m^2 + b - 3 = 0$$

$$2m^2 - b - 4 = 0$$

sind  $m = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \approx \pm 1.53$  und  $b = \frac{2}{3}$ . Es gibt zwei gemeinsame Berührungspunkte:

$$y = \sqrt{\frac{7}{3}}x + \frac{2}{3}, \quad y = -\sqrt{\frac{7}{3}}x + \frac{2}{3}.$$

*Beispiel 10.11.*

Definieren wir nun eine Parabel, deren Symmetrieachse die  $x$ -Achse ist.

**Parabel 1:** Unverändert.

**Parabel 2:** Brennpunkt  $(4, 0)$ , Leitlinie  $x = 2$ , Scheitelpunkt  $(3, 0)$ .

$p = 2$ ,  $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ . Die Gleichung der Parabel lautet:

$$y^2 - 4x + 12 = 0. \quad (10.6)$$

Dies ist eine Gleichung mit  $x$  und  $y^2$  anstelle von  $x^2$  und  $y$ , so dass Gl. 10.5b nicht verwendet werden kann und wir die Ableitung erneut durchführen müssen.

Setzen Sie die Geradengleichung in Gl. 10.6 ein:

$$\begin{aligned}(mx + b)^2 - 4x + 12 &= 0 \\ m^2x^2 + (2mb - 4)x + (b^2 + 12) &= 0.\end{aligned}$$

Setzen Sie die Diskriminante gleich Null und vereinfachen Sie:

$$\begin{aligned}(2mb - 4)^2 - 4m^2(b^2 + 12) &= 0 \\ -3m^2 - mb + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Wenn wir versuchen, die beiden Gleichungen zu lösen:

$$\begin{aligned}m^2 + b - 3 &= 0 \\ -3m^2 - mb + 1 &= 0,\end{aligned}$$

erhalten wir eine *kubische* Gleichung mit der Variablen  $m$ :

$$m^3 - 3m^2 - 3m + 1 = 0. \quad (10.7)$$

Da eine kubische Gleichung mindestens eine und höchstens drei reelle Lösungen hat, kann es eine, zwei oder drei gemeinsame Berührungspunkte geben.

Die Formel für die Lösung allgemeiner kubischer Gleichungen ist ziemlich kompliziert, also habe ich einen Rechner im Internet benutzt und die drei Lösungen ermittelt:

$$m = 3.73, m = -1, m = 0.27.$$

Aus der Form von Gl. 10.7 kann man schließen, dass  $m = 1$  oder  $m = -1$  eine Lösung ist:

$$\begin{aligned}1^3 - 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 &= -4 \\ (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Dividiert man Gl. 10.7 durch  $m - (-1) = m + 1$ , so erhält man die quadratische Gleichung  $m^2 - 4m + 1$ , deren Wurzeln die beiden anderen Lösungen der kubischen Gleichung sind  $m = 2 \pm \sqrt{3} \approx 3.73, 0.27$ .

### 10.6.2 Ableitung der Gleichungen der Reflexionen

Wir leiten die Lage der Spiegelung  $p'_1 = (x'_1, y'_1)$  von  $p_1 = (x_1, y_1)$  an einer Tangente  $l_t$  ab, deren Gleichung  $y = m_tx + b_t$  ist. Finden Sie zunächst die Gerade  $l_p$  mit der

Gleichung  $y = m_t x + b_t$ , die senkrecht auf  $l_t$  steht und durch  $p_1$  geht:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{m_t}x + b_p \\ y_1 &= -\frac{1}{m_t}x_1 + b_p \\ y &= \frac{-x}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t}\right). \end{aligned}$$

Finden Sie nun den Schnittpunkt  $p_t = (x_t, y_t)$  von  $l_t$  und  $l_p$ :

$$\begin{aligned} m_t x_t + b_t &= \frac{-x_t}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t}\right) \\ x_t &= \frac{\left(y_1 + \frac{x_1}{m_t} - b_t\right)}{\left(m_t + \frac{1}{m_t}\right)} \\ y_t &= m_t x_t + b_t. \end{aligned}$$

$p_t$  ist der Mittelpunkt zwischen  $p_1$  und  $p'_1$ :

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{x_1 + x'_1}{2}, & x'_1 &= 2x_t - x_1, \\ y_t &= \frac{y_1 + y'_1}{2}, & y'_1 &= 2y_t - y_1. \end{aligned}$$

*Beispiel 10.12.* Sei  $l_t: y = \sqrt{3}x + 0$  und sei  $p_1 = (0, 4)$ :

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\left(4 + \frac{0}{\sqrt{3}} - 0\right)}{\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \sqrt{3} \\ y_t &= \sqrt{3}\sqrt{3} + 0 = 3 \\ x'_1 &= 2x_t - x_1 = 2\sqrt{3} \approx 3.46 \\ y'_1 &= 2y_t - y_1 = 2. \end{aligned}$$

### 10.6.3 Tangenten an eine Parabel

Wir wollen beweisen, dass die Falten von Axiom 6 Tangenten an die Parabeln sind. Abbildung 10.13 zeigt fünf Punkte  $p_i, i = 1, \dots, 5$ , wobei jeder Punkt  $p_i$  sowohl vom Brennpunkt als auch von der Leitlinie einen Abstand  $a_i$  hat. Fallen Sie senkrechte Linien von  $p_i$  zur Leitkurve und bezeichnen Sie die Schnittpunkte dieser Linien mit der Leitkurve mit  $p'_i$ . Nach Axiom 2 gibt es Falten  $l_i$  durch  $p_i$ , die  $p$  auf die Leitkurve legen. Die Punkte  $p'_i$  sind die Spiegelungen von  $p$  an den Falten. Die Abbildung zeigt die Faltung  $l_1$  durch  $p_1$  und die Spiegelung  $p'_1$ .

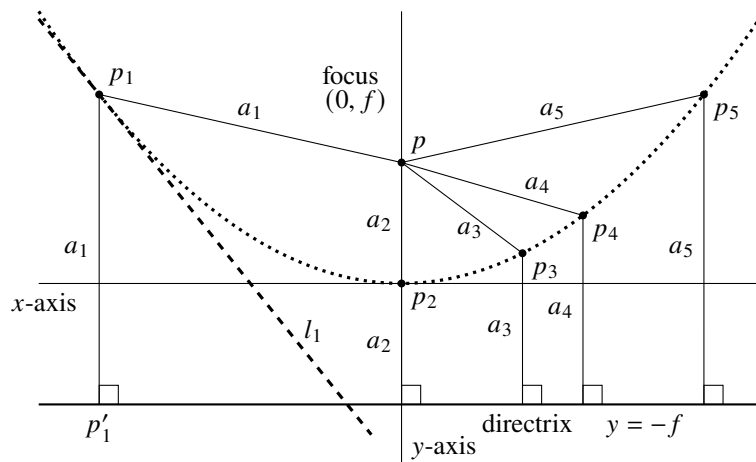


Abb. 10.13: Die Tangente als geometrische Ortskurve

**Satz 10.1.** Die Falten des Axioms 6 sind die Tangenten an die Parabeln, die die Orte der Punkte sind, die den Punkten  $p_1, p_2$  bzw.  $l_1, l_2$  äquidistant sind.

*Beweis.* In Abb. 10.14 ist der Brennpunkt  $p$  und die Leitlinie  $d$ .  $p'$  ist ein Punkt auf der Leitlinie und  $l$  ist die Falte, die  $p$  auf  $p'$  spiegelt. Sei  $s$  der Schnittpunkt von  $\overline{pp'}$  und  $l$ . Dann sei  $\overline{ps} = \overline{p's} = a$  und  $l \perp \overline{pp'}$ , da  $l$  die Mittelsenkrechte von  $\overline{pp'}$  ist.

Sei  $r$  der Schnittpunkt der Senkrechten  $d$  durch  $p'$  und die Falte  $l$ . Dann ist  $\triangle psr \cong \triangle p'sr$  durch Seite-Winkel-Seite. Daraus folgt, dass  $\overline{pr} = \overline{p'r} = b$  also ist  $r$  ein Punkt auf der Parabel. Wählen Sie einen Punkt  $p''$  auf der Leitkurve, der sich

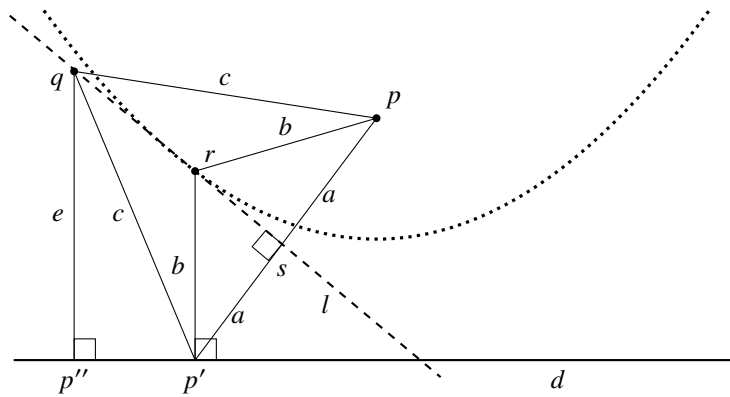


Abb. 10.14: Der Beweis, dass die Falte eine Tangente ist

von  $p'$  unterscheidet, und nehmen Sie an, dass die Falte  $l$  auch  $p$  auf  $p''$  spiegelt.  $q$  sei der Schnittpunkt der Senkrechten zu  $d$  durch  $p''$  und die Falte  $l$ .  $\triangle psq \cong \triangle p'sq$  so  $\overline{pq} = \overline{p'q} = c$ . Bezeichne  $\overline{qp''} = e$ . Wenn  $q$  ein Punkt auf der Parabel ist, dann ist  $e = \overline{qp''} = \overline{qp} = c$ , aber  $c$  ist die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks  $\triangle qp''p'$  und es ist nicht möglich, dass die Hypotenuse gleich einer der anderen Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ist. Daher hat die Falte  $l$  nur einen Schnittpunkt mit der Parabel und muss eine Tangente sein.  $\square$

## 10.7 Axiom 7

**Axiom 10.7.** Bei einem Punkt  $p_1$  und zwei Geraden  $l_1$  und  $l_2$  gibt es eine Falte  $l$ , die  $p_1$  auf  $l_1$  legt und senkrecht auf  $l_2$  steht (Abb. 10.15).

Die Falte ist der geometrische Ort aller Punkte auf der zu  $l_2$  senkrechten und von  $p_1$  und  $p'_1$ , der Spiegelung von  $p_1$  an  $l_1$ , äquidistanten Linie.

**Herleitung der Gleichung der Faltung:** Es sei  $p_1 = (x_1, y_1)$ ,  $l_1$  sei  $y = m_1x + b_1$  und  $l_2$  sei  $y = m_2x + b_2$ . Sei  $l_p$  die Linie, die  $p_1p'_1$  enthält. Da  $l \perp l_2$ ,  $l_p \perp l$ , folgt, dass  $l_p \parallel l_2$  und die Gleichung von  $l_p$   $y = m_2x + b_p$  ist.

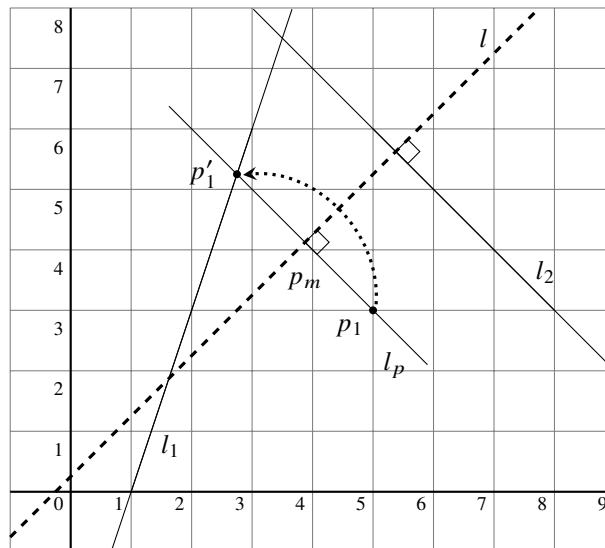


Abb. 10.15: Axiom 7

$l_p$  geht durch  $p_1$ , also ist  $y_1 = m_2x_1 + b_p$  und seine Gleichung lautet  $y =$



$m_2x + (y_1 - m_2x_1)$ . Die Spiegelung  $p'_1 = (x'_1, y'_1)$  ist der Schnittpunkt von  $l_1$  und  $l_p$ :

$$\begin{aligned} m_1x'_1 + b_1 &= m_2x'_1 + (y_1 - m_2x_1) \\ x'_1 &= \frac{y_1 - m_2x_1 - b_1}{m_1 - m_2} \\ y'_1 &= m_1x'_1 + b_1. \end{aligned}$$

Die Gleichung des Mittelpunkts  $p_m = (x_m, y_m)$  von  $l_p$  ist:

$$(x_m, y_m) = \left( \frac{x_1 + x'_1}{2}, \frac{y_1 + y'_1}{2} \right).$$

$l \perp l_2$  und sie geht durch  $p_m$ , so dass ihre Gleichung lautet:

$$y = -\frac{1}{m_2}x + b_m,$$

wobei  $b_m$  aus  $y = -\frac{1}{m_2}x + b_m$  berechnet werden kann:

$$b_m = y_m + \frac{x_m}{m_2}.$$

Die Gleichung der Falte  $l$  lautet also:

$$y = -\frac{1}{m_2}x + \left( y_m + \frac{x_m}{m_2} \right).$$

*Beispiel 10.13.* Sei  $p_1 = (5, 3)$ , sei  $l_1$  gleich  $y = 3x - 3$  und sei  $l_2$  gleich  $y = -x + 11$ . Dann:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{3 - (-1) \cdot 5 - (-3)}{3 - (-1)} = \frac{11}{4} \\ y'_1 &= 3 \cdot \frac{11}{4} + (-3) = \frac{21}{4} \\ p_m &= \left( \frac{5 + \frac{11}{4}}{2}, \frac{3 + \frac{21}{4}}{2} \right) = \left( \frac{31}{8}, \frac{33}{8} \right). \end{aligned}$$

Die Gleichung der Falte  $l$  lautet:

$$y = -\frac{1}{-1} \cdot x + \left( \frac{33}{8} + \frac{\frac{31}{8}}{-1} \right) = x + \frac{1}{4}.$$

### **Was ist die Überraschung?**

Origami, die Kunst des Papierfaltens, wird seit Hunderten von Jahren praktiziert. Es ist daher überraschend, dass die mathematische Formalisierung erst im zwanzigsten Jahrhundert erfolgte. Noch erstaunlicher ist es, dass es eine Axiomatisierung des Papierfaltens gibt. Die Origami-Mathematik eignet sich hervorragend zum Erlernen der analytischen Geometrie, der Eigenschaften von Parabeln und des Konzepts der geometrischen Ortskurve.

### **Quellen**

Die Axiome des Origami werden in [56] vorgestellt. Lang [26] gibt Beschreibungen von Origamikonstruktionen. [31, Kap. 10] enthält die detaillierte Theorie der Origami-Mathematik, einschließlich des Beweises, dass zwei Parabeln null, eine, zwei oder drei gemeinsame Tangenten haben können. Der Beweis von Thm. 10.1 wurde mir von Oriah Ben-Lulu gezeigt. Ich habe festgestellt, dass geometrische Software wie Geogebra nützlich ist, um die Beziehung zwischen der Geometrie und der Algebra der Axiome zu verstehen.

Eine übersichtliche Darstellung der kubischen Gleichungen findet sich in [6, Chapters 1, 2].

## Kapitel 11

### Lill's Method and the Beloch Fold

#### 11.1 Ein Zaubertrick

Konstruieren Sie eine Bahn, die aus vier Liniensegmenten  $\{a_3 = 1, a_2 = 6, a_1 = 11, a_0 = 6\}$  besteht, ausgehend vom Ursprung entlang der positiven Richtung der  $x$ -Achse, und drehen Sie  $90^\circ$  zwischen den Segmenten gegen den Uhrzeigersinn. Konstruieren Sie eine zweite Bahn wie folgt: Konstruieren Sie eine Linie vom Ursprung unter dem Winkel  $63.4^\circ$  und markieren Sie ihren Schnittpunkt mit  $a_2$  durch  $P$ . Wenden Sie sich nach links  $90^\circ$ , konstruieren Sie eine Gerade und markieren Sie deren Schnittpunkt mit  $a_1$  durch  $Q$ . Wenden Sie sich erneut nach links  $90^\circ$ , konstruieren Sie eine Linie und stellen Sie fest, dass sie das Ende des ersten Pfades bei  $(-10, 0)$  schneidet (Abb. 11.1).

Berechnen Sie die Negation des Tangens des Winkels am Anfang der zweiten Strecke:  $-\tan 63.4^\circ = -2$ . Setze diesen Wert in das Polynom ein, dessen Koeffizien-

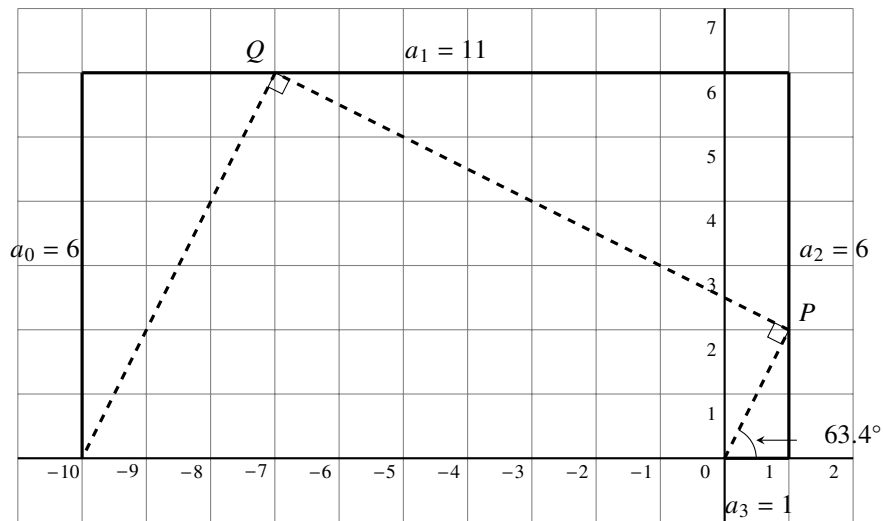


Abb. 11.1: *Ein Zaubertrick*

enten die Längen der Segmente des ersten Pfades sind:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\ p(-\tan 63.4^\circ) &= (-2)^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6 = 0. \end{aligned}$$

Wir haben eine Wurzel aus dem kubischen Polynom  $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$  gefunden!

Lassen Sie uns das Beispiel fortsetzen. Das Polynom  $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$  hat drei Wurzeln  $-1, -2, -3$ . Berechnen Sie den Arcustangens der Negation der Wurzeln:

$$\alpha = -\tan^{-1}(-1) = 45^\circ, \quad \beta = -\tan^{-1}(-2) \approx 63.4^\circ, \quad \gamma = -\tan^{-1}(-3) \approx 71.6^\circ.$$

Für jeden Winkel schneidet die zweite Bahn das Ende der ersten Bahn (Abb. 11.2).

Der Wert  $-\tan 56,3 \approx -1,5$  ist keine Wurzel aus der Gleichung. Abb. 11.3 zeigt das Ergebnis der Anwendung der Methode für diesen Winkel. Der zweite Pfad schneidet das Liniensegment für den Koeffizienten  $a_0$  nicht bei  $(-10, 0)$ .

Dieses Beispiel veranschaulicht eine von Eduard Lill 1867 entdeckte Methode zur grafischen Ermittlung der reellen Wurzeln eines beliebigen Polynoms. Es geht nicht darum, die Wurzeln zu finden, sondern zu überprüfen, ob ein bestimmter Wert eine Wurzel ist.

Abschnitt 11.2 stellt eine formale Spezifikation der Lill-Methode vor (beschränkt auf kubische Polynome) und gibt Beispiele dafür, wie sie in speziellen Fällen funktioniert. Ein Beweis für die Korrektheit der Lillschen Methode wird in Abschnitt 11.3

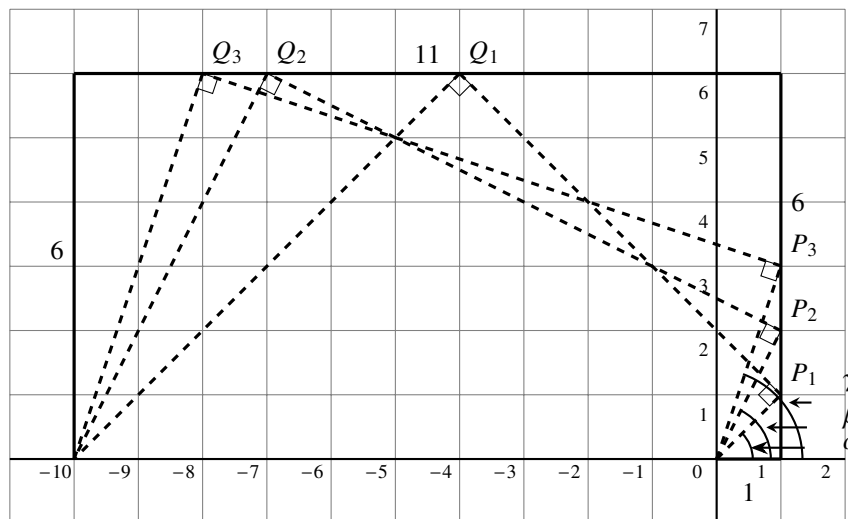


Abb. 11.2: Lill's Methode für die drei Wurzeln des Polynoms

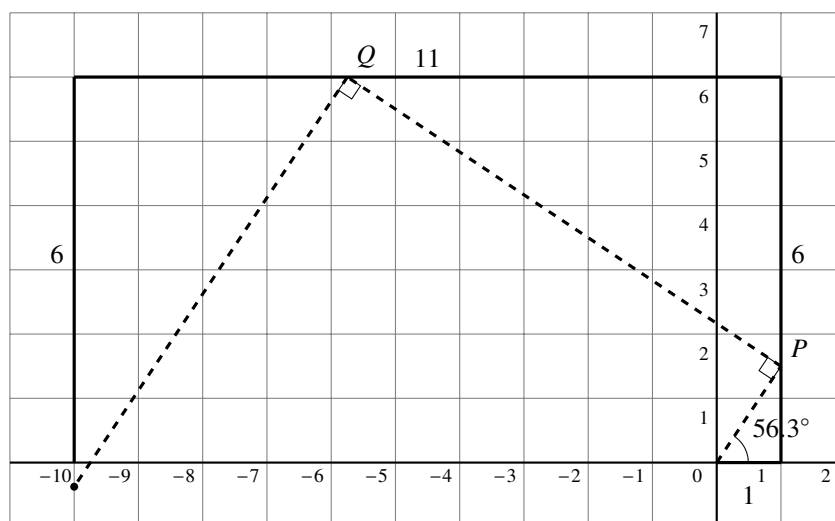


Abb. 11.3: Ein Pfad, der nicht zu einer Wurzel führt

gegeben. Abschnitt 11.4 zeigt, wie die Methode unter Verwendung des Origami-Axioms 6 implementiert werden kann. Dies wird als Beloch-Faltung bezeichnet und ging der Formalisierung der Origami-Axiome um viele Jahre voraus.

## 11.2 Spezifikation der Lill'schen Methode

### 11.2.1 Die Lillsche Methode als Algorithmus

- Beginnen Sie mit einem beliebigen kubischen Polynom  $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ .
- Konstruiere den ersten Pfad:
  - Konstruiere für jeden Koeffizienten  $a_3, a_2, a_1, a_0$  (in dieser Reihenfolge) eine Strecke dieser Länge, die am Ursprung  $O = (0, 0)$  in positiver Richtung der  $x$ -Achse beginnt. Drehe  $90^\circ$  zwischen den einzelnen Segmenten gegen den Uhrzeigersinn.
- Konstruiere den zweiten Pfad:
  - Konstruieren Sie eine Linie von  $O$  unter einem Winkel von  $\theta$  mit der positiven  $x$ -Achse, die  $a_2$  im Punkt  $P$  schneidet.
  - Drehen Sie  $\pm 90^\circ$  und konstruieren Sie von  $P$  eine Gerade, die  $a_1$  im Punkt  $Q$  schneidet.

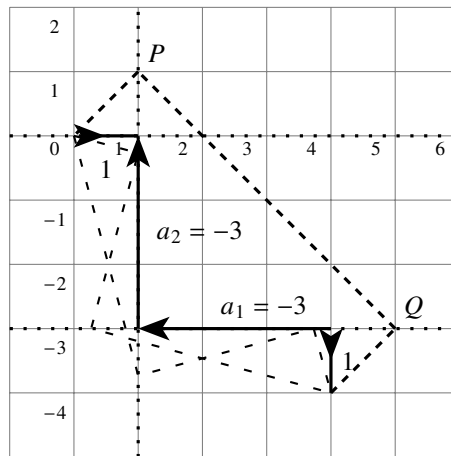


Abb. 11.4: Lillsche Methode mit negativen Wurzeln

- Drehen Sie  $\pm 90^\circ$  und konstruieren Sie eine Linie von  $Q$  aus, die  $a_0$  in  $R$  schneidet.
- Wenn  $R$  der Endpunkt des ersten Pfades ist, dann ist  $-\tan \theta$  eine Wurzel von  $p(x)$ .
- Sonderfälle:
  - Bei der Konstruktion der Liniensegmente des ersten Pfades, wenn ein Koeffizient negativ ist, konstruiere das Liniensegment *backwards*.
  - Bei der Konstruktion der Liniensegmente des ersten Pfades, wenn ein Koeffizient Null ist, konstruiere kein Liniensegment, sondern fahre mit der nächsten  $\pm 90^\circ$  Runde fort.
- Notizen:
  - Der Ausdruck *intersects  $a_i$*  bedeutet *intersects the line segment  $a_i$  or any extension of  $a_i$* .
  - Beim Bau des zweiten Pfades kann man wählen, ob man um  $90^\circ$  nach links oder rechts abbiegt, so dass ein Schnittpunkt mit dem nächsten Segment des ersten Pfades oder dessen Verlängerung entsteht.

### 11.2.2 Negative Koeffizienten

Wir wollen die Lillsche Methode für das Polynom  $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$  mit negativen Koeffizienten demonstrieren (Sect. 10.6). Man beginnt mit der Konstruktion

eines Segments der Länge 1 nach rechts. Als nächstes dreht man  $90^\circ$  nach oben, aber da der Koeffizient negativ ist, konstruiert man ein Segment der Länge 3 nach unten, d.h. in die dem Pfeil entgegengesetzte Richtung. Nachdem man  $90^\circ$  nach links gedreht hat, ist der Koeffizient wieder negativ, also konstruiert man ein Segment der Länge 3 nach rechts. Wenden Sie sich schließlich nach unten und konstruieren Sie ein Segment der Länge 1 (Abb. 11.4, die grob gestrichelten Linien werden in Sect. 11.2.4 besprochen).

Der zweite Pfad beginnt mit einer Linie bei  $45^\circ$  mit der positiven  $x$ -Achse. Sie schneidet die Verlängerung des Linienabschnitts für  $a_2$  bei  $(1, 1)$ . Dreht man  $-90^\circ$  (nach rechts), so schneidet die Linie die Verlängerung der Strecke für  $a_1$  in  $(5, -3)$ . Dreht man  $-90^\circ$  erneut, so schneidet die Linie das Ende der ersten Strecke bei  $(4, -4)$ . Da  $-\tan 45^\circ = -1$  ist, haben wir eine Wurzel des Polynoms gefunden:

$$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 6 = 0.$$

### 11.2.3 Null-Koeffizienten

$a_2$ , der Koeffizient des Terms  $x^2$  im Polynom  $x^3 - 7x - 6 = 0$ , ist Null. Konstruieren Sie eine Strecke der Länge 0, d.h. konstruieren Sie keine Linie, sondern machen Sie trotzdem die  $\pm 90^\circ$ -Drehung, die durch den nach oben zeigenden Pfeil bei  $(1, 0)$  in Abb. 11.5 angezeigt wird. Drehen Sie sich erneut und konstruieren Sie ein Liniensegment der Länge  $-7$ , also der Länge 7 rückwärts, bis  $(8, 0)$ . Drehen Sie sich schließlich noch einmal um und konstruieren Sie eine Strecke der Länge  $-6$  nach  $(8, 6)$ .

Die zweiten Bahnen mit den folgenden Winkeln schneiden das Ende der ersten Bahn:

$$-\tan^{-1}(-1) = 45^\circ, \quad -\tan^{-1}(-2) \approx 63.4^\circ, \quad -\tan^{-1} 3 \approx -71.6^\circ.$$

Wir schließen daraus, dass es drei reelle Wurzeln  $\{-1, -2, 3\}$  gibt. Prüfen:

$$(x+1)(x+2)(x-3) = (x^2 + 3x + 2)(x-3) = x^3 - 7x - 6.$$

### 11.2.4 Nicht-ganzzahlige Wurzeln

Abbildung 11.6 zeigt die Lillsche Methode für  $p(x) = x^3 - 2x + 1$ . Der erste Pfad geht von  $(0, 0)$  nach  $(1, 0)$  und dreht dann nach oben. Der Koeffizient von  $x^2$  ist Null, so dass kein Liniensegment konstruiert wird und der Pfad nach links abbiegt. Das nächste Liniensegment hat die Länge  $-2$  und führt rückwärts von  $(1, 0)$  nach  $(3, 0)$ . Schließlich biegt der Weg nach unten ab, und es wird ein Linienabschnitt der Länge 1 von  $(3, 0)$  nach  $(3, -1)$  konstruiert.

Es ist leicht zu erkennen, dass die zweite Bahn, wenn sie in einem Winkel von  $-45^\circ$  beginnt, die erste Bahn in  $(3, -1)$  schneidet. Daher ist  $-\tan^{-1}(-45)^\circ = 1$  eine

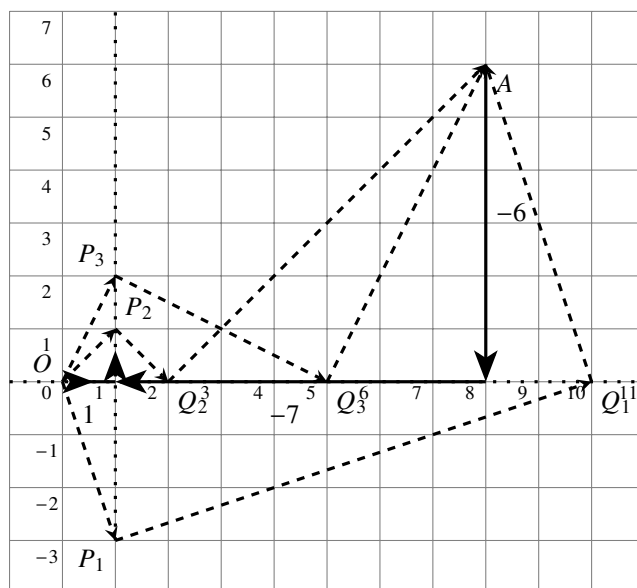


Abb. 11.5: Lillsche Methode mit Polynomen mit Nullkoeffizienten

Wurzel. Dividiert man  $p(x)$  durch  $x - 1$ , so erhält man das quadratische Polynom  $x^2 + x - 1$ , dessen Wurzeln sind:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx 0.62, -1.62.$$

Es gibt zwei zusätzliche zweite Pfade: einer beginnt bei  $-\tan^{-1} 0.62 \approx -31.8^\circ$ , der andere bei  $-\tan^{-1}(-1.62) \approx 58.3^\circ$ .

Das Polynom  $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$  (Sect. 11.2.2) hat Wurzeln  $2 \pm \sqrt{3} \approx 3.73, 0.27$ . Die entsprechenden Winkel sind  $-\tan^{-1} 3.73 \approx -75^\circ$  und  $-\tan^{-1} 0.27 \approx -15^\circ$ , wie die grob gestrichelten Linien in Abb. 11.4 zeigen.

### 11.2.5 Die Kubikwurzel von Zwei

Um einen Würfel zu verdoppeln, berechnet man  $\sqrt[3]{2}$ , eine Wurzel aus dem kubischen Polynom  $x^3 - 2$ . Bei der Konstruktion des ersten Weges biegt man zweimal nach links ab, ohne Liniensegmente zu konstruieren, da  $a_2$  und  $a_1$  beide Null sind. Dann wendet man sich wieder nach links (nach unten) und konstruiert rückwärts (nach oben), weil  $a_0 = -2$  negativ ist. Das erste Segment des zweiten Pfades wird in einem Winkel von  $-\tan^{-1} \sqrt[3]{2} \approx -51,6^\circ$  konstruiert (Abb. 11.7).



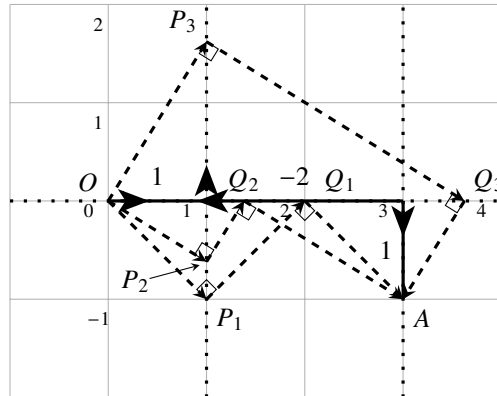


Abb. 11.6: Lillsche Methode mit nicht-ganzzahligen Wurzeln

### 11.3 Nachweis der Lill'schen Methode

Der Beweis gilt für monische kubische Polynome  $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ . Wenn das Polynom nicht monisch ist, teilt man es durch  $a_3$  und das resultierende Polynom hat die gleichen Wurzeln. In Abb. 11.8 sind die Liniensegmente des ersten Pfades mit den Koeffizienten und mit  $b_2, b_1, a_2 - b_2, a_1 - b_1$  beschriftet. Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck ein spitzer Winkel  $\theta$  ist, ist der andere Winkel  $90^\circ - \theta$ . Daher sind der Winkel über  $P$  und der Winkel links von  $Q$  gleich  $\theta$ . Hier sind die Formeln für  $\tan \theta$ , wie sie aus den drei Dreiecken berechnet wurden:

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{b_2}{1} = b_2 \\ \tan \theta &= \frac{b_1}{a_2 - b_2} = \frac{b_1}{a_2 - \tan \theta} \\ \tan \theta &= \frac{a_0}{a_1 - b_1} = \frac{a_0}{a_1 - \tan \theta(a_2 - \tan \theta)}.\end{aligned}$$

Vereinfache die letzte Gleichung, multipliziere mit  $-1$  und setze  $-1$  in die Potenzen ein:

$$\begin{aligned}(\tan \theta)^3 - a_2(\tan \theta)^2 + a_1(\tan \theta) - a_0 &= 0 \\ (-\tan \theta)^3 + a_2(-\tan \theta)^2 + a_1(-\tan \theta) + a_0 &= 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $-\tan \theta$  eine reelle Wurzel von  $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  ist.



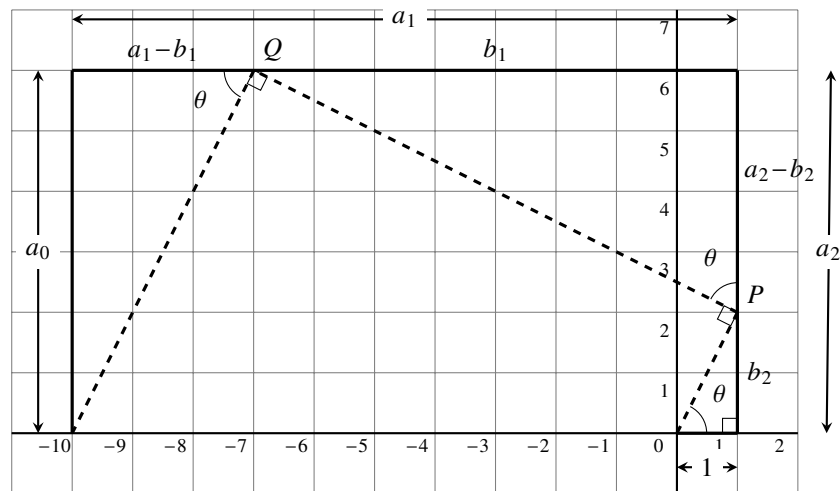


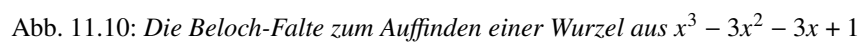
Abb. 11.8: Nachweis der Lillschen Methode

### Was ist die Überraschung?

Die Aufführung der Lill-Methode als Zaubertrick sorgt immer wieder für Überraschungen. Sie kann während einer Vorlesung mit einer Grafiksoftware wie GeoGebra durchgeführt werden. Überraschend ist auch, dass Lills Methode, veröffentlicht in 1867, und Belochs Faltung, veröffentlicht in 1936, der Axiomatisierung des Origami um viele Jahre vorausgingen.

### Quellen

Dieses Kapitel basiert auf [8, 24, 40].



## Kapitel 12

# Geometric Constructions Using Origami

Dieses Kapitel zeigt, dass Konstruktionen mit Origami leistungsfähiger sind als Konstruktionen mit Lineal und Zirkel. Wir geben zwei Konstruktionen für die Dreiteilung eines Winkels, eine von Hisashi Abe (Sect. 12.1) und die andere von George E. Martin (Sect. 12.2), zwei Konstruktionen zur Verdoppelung eines Würfels, eine von Peter Messer (Sect. 12.3) und die andere von Marghareta P. Beloch (Sect. 12.4), und die Konstruktion eines Nonagons, eines regelmäßigen Polynoms mit neun Seiten (Sect. 12.5).

### 12.1 Abe's Dreiteilung eines Winkels

**Konstruktion:** Bei einem spitzen Winkel  $\angle PQR$  konstruiere  $p$ , die Senkrechte zu  $\overline{QR}$  in  $Q$ . Konstruiere  $q$ , die Senkrechte zu  $p$ , die  $\overline{PQ}$  im Punkt  $A$  schneidet, und konstruiere  $r$ , die Senkrechte zu  $p$  in  $B$ , die auf halbem Weg zwischen  $Q$  und  $A$  liegt. Konstruieren Sie unter Verwendung von Axiom 6 die Faltung  $l$ , die  $A$  bei  $A'$  auf der  $\overline{PQ}$  und  $Q$  bei  $Q'$  auf  $r$  legt. Sei  $B'$  die Spiegelung von  $B$  um  $l$ . Konstruieren Sie Linien durch  $\overline{QB'}$  und  $QQ'$  (Abb. 12.1).

**Satz 12.1.**  $\angle PQB' = \angle B'QQ' = \angle Q'QR = \angle PQR/3$ .

*Beweis.* (1)  $A', B', Q'$  sind Spiegelungen um die Linie  $l$  der Punkte  $A, B, Q$  an der Linie  $\overline{DQ}$ , liegen also auf der Spiegelungslinie  $\overline{DQ'}$ . Durch die Konstruktion  $\overline{AB} = \overline{BQ}$ ,  $\angle ABQ' = \angle QBQ' = 90^\circ$  und  $\overline{BQ'}$  ist eine gemeinsame Seite, so dass  $\triangle ABQ' \cong \triangle QBQ'$  durch side-angle-side. Daher ist  $\angle AQQ' = \angle QAQ' = \alpha$  und  $\triangle AQQ'$  isocles (Abb. 12.2).

Durch Spiegelung ist  $\triangle AQQ' \cong \triangle A'QQ'$ , also ist  $\triangle A'QQ'$  auch ein isöisches Dreieck.  $\overline{QB'}$ , die Spiegelung von  $\overline{Q'B}$ , ist die Mittelsenkrechte eines isöischen Dreiecks, so dass  $\angle A'QB' = \angle Q'QB' = \angle QQ'B = \alpha$ . Durch Wechsel der Innenwinkel ergibt sich  $\angle Q'QR = \angle QQ'B = \alpha$ . Zusammen haben wir:

$$\angle PQB' = \angle A'QB' = \angle B'QQ' = \angle Q'QR = \alpha.$$

□

*Beweis.* (2) Da  $l$  eine Falte ist, ist sie die Mittelsenkrechte von  $\overline{QQ'}$ . Bezeichne den Schnittpunkt von  $l$  mit  $\overline{QQ'}$  mit  $U$  und seinen Schnittpunkt mit  $\overline{QB'}$  mit  $V$  (Abb. 12.2).  $\triangle VUQ \cong \triangle VUQ'$  by side-angle-side da  $\overline{VU}$  eine gemeinsame Seite ist, sind die Winkel bei  $U$  rechte Winkel und  $\overline{QU} = \overline{Q'U}$ . Daher sind  $\angle VQU = \angle VQ'U = \alpha$  und  $\angle Q'QR = \angle VQ'U = \alpha$  durch abwechselnde Innenwinkel.



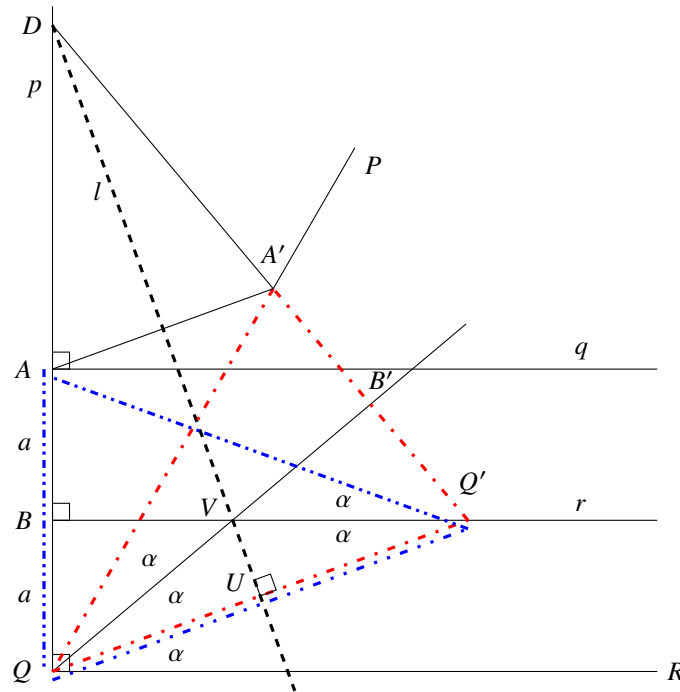


Abb. 12.2: Proofs of Abe's trisection ( $U, V$  are used in Proof 2)

$\triangle QWQ'$ , so dass die Höhen die beiden vertikalen Winkel  $\angle PWP'$ ,  $\angle QWQ'$  halbieren und sie auf derselben Linie liegen müssen.

$\triangle QMU \cong \triangle PMP'$  durch Winkel-Seiten-Winkel, da  $\angle P'PM = \angle UQM = \beta$  durch abwechselnde Innenwinkel,  $\overline{QM} = \overline{MP} = a$  weil  $M$  der Mittelpunkt von  $\overline{PQ}$  ist und  $\angle QMU = \angle PMP' = \gamma$  vertikale Winkel sind. Daher ist  $\overline{P'M} = \overline{MU} = b$ .

$\triangle P'MQ' \cong \triangle UMQ'$  durch Seite-Winkel-Seite, da  $\overline{P'M} = \overline{MU} = b$ , sind die Winkel bei  $M$  rechtwinklig und  $\overline{MQ'}$  ist eine gemeinsame Seite. Da die Höhe des isozyklischen Dreiecks  $\triangle P'Q'U$  die Winkelhalbierende von  $\angle P'Q'U$  ist, folgt daraus, dass  $\angle P'Q'M = \angle UQ'M = \alpha$ . Außerdem ist  $\angle UQ'M = \angle Q'QR = \alpha$  durch abwechselnde Innenwinkel.  $\triangle QWV \cong \triangle Q'WV$  by side-angle-side, da  $\overline{QV} = \overline{VQ'} = c$ , die Winkel bei  $V$  rechte Winkel sind und  $\overline{VW}$  eine gemeinsame Seite ist. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\angle WQV &= \beta = \angle WQ'V = 2\alpha \\ \angle PQR &= \beta + \alpha = 3\alpha.\end{aligned}$$

□

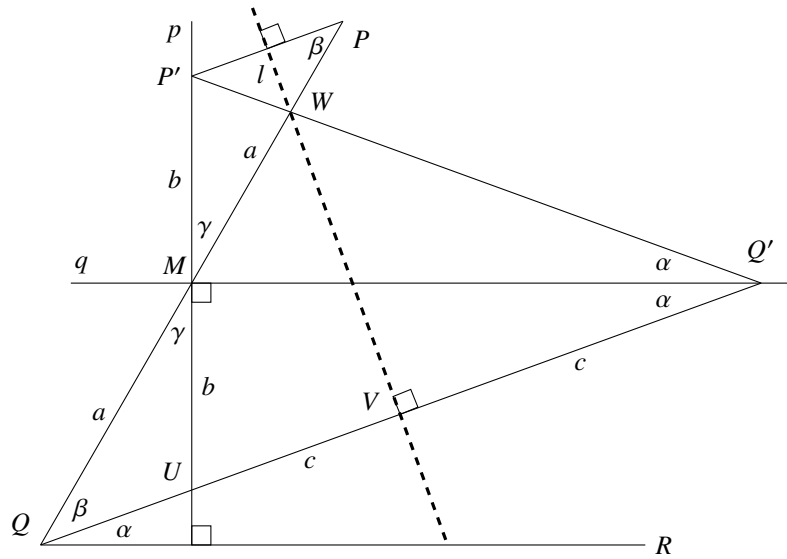


Abb. 12.3: Martinsche Dreiteilung eines Winkels

### 12.3 Messer's Verdoppelung eines Würfels

Ein Würfel mit dem Volumen  $V$  hat Seiten der Länge  $\sqrt[3]{V}$ . Ein Würfel mit dem doppelten Volumen hat Seiten der Länge  $\sqrt[3]{2V} = \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{V}$ . Wenn wir also  $\sqrt[3]{2}$  konstruieren können, können wir mit der gegebenen Länge  $\sqrt[3]{V}$  multiplizieren, um den Würfel zu verdoppeln.

**Konstruktion:** Teilen Sie die Seite eines Einheitsquadrats wie folgt in drei Teile: Falten Sie das Quadrat in der Hälfte und legen Sie die Punkte  $I = (0, 1/2)$  und  $J = (1, 1/2)$  fest. Konstruieren Sie dann die Linien  $\overline{AC}$  und  $\overline{BJ}$  (Abb. 12.4). Den Schnittpunkt  $K = (2/3, 1/3)$  erhält man durch Lösen der beiden Gleichungen  $y = 1 - x$  und  $y = x/2$ .

Konstruieren Sie  $\overline{EF}$ , die Senkrechte zu  $\overline{AB}$  durch  $K$ , und konstruieren Sie die Spiegelung  $\overline{GH}$  von  $\overline{BC}$  um  $\overline{EF}$ . Die Seite des Quadrats ist nun gedrittelt.

Unter Verwendung von Axiom 6 setze  $C$  bei  $C'$  auf  $\overline{AB}$  und  $F$  bei  $F'$  auf  $\overline{GH}$ . Bezeichne mit  $L$  den Schnittpunkt der Falte mit  $\overline{BC}$  und bezeichne mit  $b$  die Länge von  $\overline{BL}$ . Benennen Sie die Länge der Seite des Quadrats mit  $a + 1$ , wobei  $a = \overline{AC'}$ . Die Länge von  $\overline{LC}$  ist  $(a + 1) - b$  (Abb. 12.5).

**Satz 12.3.**  $\overline{AC'} = \sqrt[3]{2}$ .

**Beweis.** Bei der Faltung wird das Liniensegment  $\overline{LC}$  auf das Liniensegment  $\overline{LC'}$



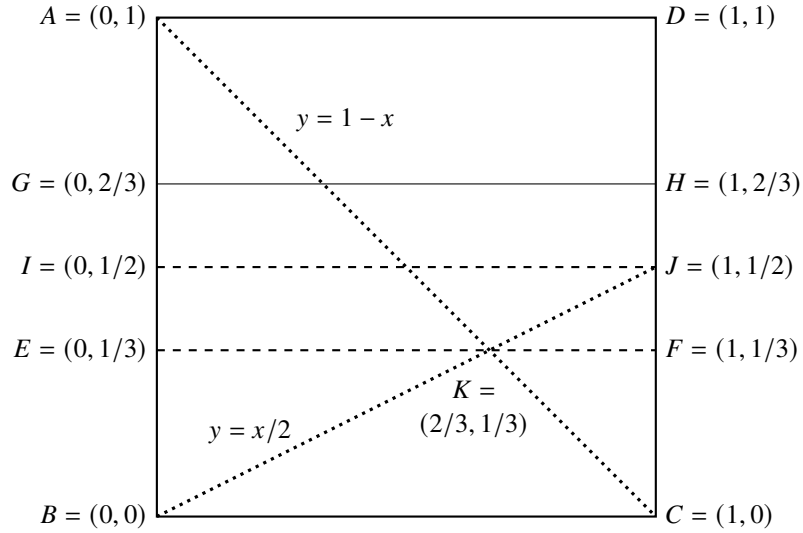


Abb. 12.4: Unterteilung einer Länge in Drittel

gespiegelt und  $\overline{CF}$  wird auf das Liniensegment  $\overline{C'F'}$  gefaltet. Deshalb:

$$\overline{GC'} = a - \frac{a+1}{3} = \frac{2a-1}{3}. \quad (12.1)$$

Da  $\angle FCL$  ein rechter Winkel ist, ist es auch  $\angle F'C'L$ .

$\triangle C'BL$  ist ein rechtwinkliges Dreieck, also nach dem Satz des Pythagoras:

$$1^2 + b^2 = ((a+1) - b)^2 \quad (12.2a)$$

$$b = \frac{a^2 + 2a}{2(a+1)}. \quad (12.2b)$$

$\angle GC'F' + \angle F'C'L + \angle LC'B = 180^\circ$ , da sie die gerade Linie  $\overline{GB}$  bilden. Bezeichne  $\triangle GC'F'$  mit  $\alpha$ . Dann:

$$\angle LC'B = 180^\circ - \angle F'C'L - \angle GC'F' = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha,$$

die wir mit  $\alpha'$  bezeichnen. Die Dreiecke  $\triangle C'BL$ ,  $\triangle F'GC'$  sind rechtwinklige Dreiecke, also  $\angle C'LB = \alpha$  und  $\angle C'F'G = \alpha'$ . Daher ist  $\triangle C'BL \sim \triangle F'GC'$  und:

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{C'L}} = \frac{\overline{GC'}}{\overline{C'F'}}.$$

Unter Verwendung von Gl. 12.1 ergibt sich:

$$\frac{b}{(a+1) - b} = \frac{\frac{2a-1}{3}}{\frac{a+1}{3}}.$$

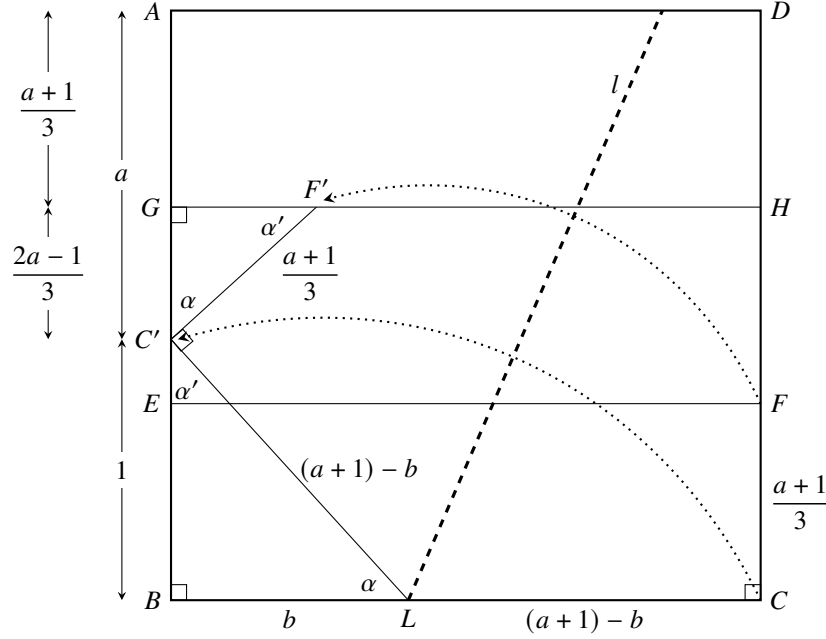


Abb. 12.5: Konstruktion von  $\sqrt[3]{2}$

Die Substitution von  $b$  mit Hilfe von Gl. 12.2b ergibt:

$$\frac{\frac{a^2 + 2a}{2(a+1)}}{(a+1) - \frac{a^2 + 2a}{2(a+1)}} = \frac{2a-1}{a+1}.$$

Vereinfachen Sie die Gleichung, um  $a^3 = 2$  und  $a = \sqrt[3]{2}$  zu erhalten.  $\square$

#### 12.4 Belochs Verdoppelung eines Würfels

Da die Beloch-Faltung (Axiom 6) kubische Gleichungen lösen kann, liegt die Vermutung nahe, dass sie auch zur Verdoppelung eines Würfels verwendet werden kann. Hier geben wir eine direkte Konstruktion an, die diese Faltung verwendet.

**Konstruktion:** Es sei  $A = (-1, 0)$ ,  $B = (0, -2)$ .  $p$  sei die Linie  $x = 1$  und  $q$  sei die Linie  $y = 2$ . Konstruieren Sie mit Hilfe der Beloch-Faltung die Falte  $l$ , die  $A$  bei  $A'$  auf  $p$  und  $B$  bei  $B'$  auf  $q$  platziert. Bezeichne den Schnittpunkt der Falte mit der  $y$ -Achse mit  $Y$  und den Schnittpunkt der Falte mit der  $x$ -Achse mit  $X$  (Abb. 12.6).

**Satz 12.4.**  $\overline{OY} = \sqrt[3]{2}$ .

*Beweis.* Die Falte ist die Mittelsenkrechte von sowohl  $\overline{AA'}$  als auch  $\overline{BB'}$ , also  $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$ . Bei abwechselnden Innenwinkeln  $\angle YAO = \angle BXO = \alpha$ . Die Beschriftung der anderen Winkel in der Abbildung ergibt sich aus den Eigenschaften von rechtwinkligen Dreiecken.

$\triangle AOY \sim \triangle YOX \sim \triangle XOB$  und  $\overline{OA} = 1, \overline{OB} = 2$  sind so gegeben:

$$\frac{\overline{OY}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OX}}$$

$$\frac{\overline{OY}}{1} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{2}{\overline{OX}}.$$

Aus dem ersten und zweiten Verhältnis ergibt sich  $\overline{OX} = \overline{OY}^2$  und aus dem ersten und dritten Verhältnis ergibt sich  $\overline{OY} \overline{OX} = 2$ . Die Substitution für  $\overline{OX}$  ergibt  $\overline{OY}^3 = 2$  und  $\overline{OY} = \sqrt[3]{2}$ .  $\square$

## 12.5 Konstruktion eines regelmäßigen Nonagons

Ein Nonagon (ein regelmäßiges Polygon mit neun Seiten) wird konstruiert, indem man die kubische Gleichung für seinen zentralen Winkel herleitet und dann die

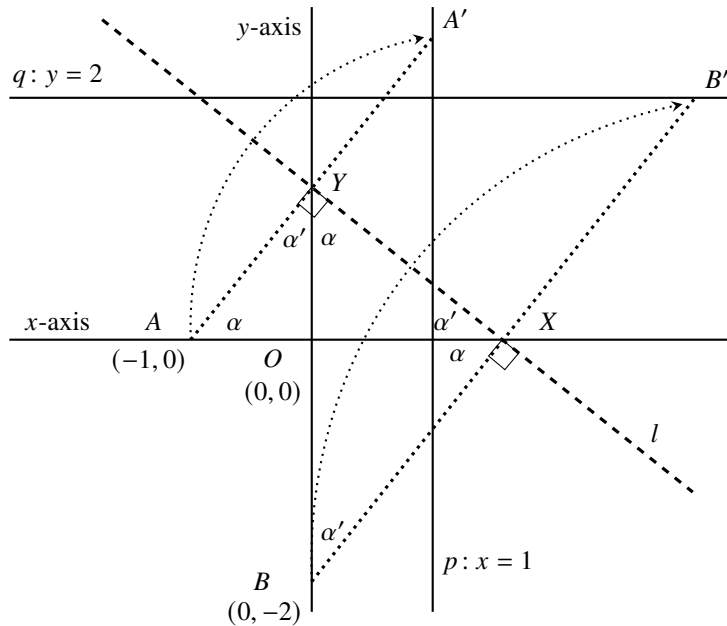


Abb. 12.6: Belochs Verdoppelung des Würfels

Gleichung mit Hilfe der Lillschen Methode und der Beloch-Faltung löst. Der zentrale Winkel ist  $\theta = 360^\circ/9 = 40^\circ$ . Nach Thm. A.6:

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta.$$

Es sei  $x = \cos 40^\circ$ . Dann lautet die Gleichung für das Nonagon  $4x^3 - 3x + (1/2) = 0$ , da  $\cos 3 \cdot 40^\circ = \cos 120^\circ = -(1/2)$ . Abbildung 12.7 zeigt die Pfade für die nach der Lillschen Methode konstruierte Gleichung.

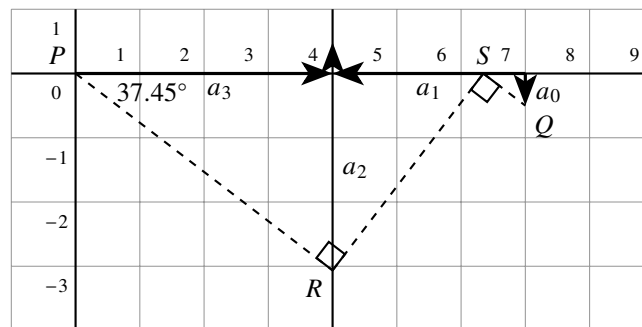


Abb. 12.7: Lillsche Methode für ein Nichteck

Die zweite Bahn startet von  $P$  unter einem Winkel von etwa  $-37,45^\circ$ . Drehungen von  $90^\circ$  bei  $R$  und dann  $-90^\circ$  bei  $S$  bewirken, dass sich der Pfad mit dem ersten Pfad an seinem Endpunkt  $Q$  schneidet. Daher ist  $x = -\tan(-37,45^\circ) \approx 0,766$  eine Wurzel aus  $4x^3 - 3x + (1/2)$ .

Die Wurzel kann mit Hilfe der Beloch-Faltung gewonnen werden. Konstruieren Sie die Linie  $a'_2$  parallel zu  $a_2$  im gleichen Abstand von  $a_2$  wie  $a_2$  von  $P$ . Obwohl die Länge von  $a_2$  gleich Null ist, hat sie dennoch eine Richtung (nach oben), so dass die parallele Linie konstruiert werden kann. In ähnlicher Weise konstruiert man die Linie  $a'_1$  parallel zu  $a_1$  im gleichen Abstand von  $a_1$  wie  $a_1$  von  $Q$ . Die Beloch-Faltung  $\overline{RS}$  legt gleichzeitig  $P$  bei  $P'$  auf  $a'_2$  und  $Q$  bei  $Q'$  auf  $a'_1$ . Dadurch wird der Winkel  $\angle SPR = -37,45^\circ$  konstruiert (Abb. 12.8).

Nach der Lill'schen Methode ist  $-\tan(-37,45^\circ) \approx 0,766$  und somit  $\cos \theta \approx 0,766$  eine Wurzel aus der Gleichung für den zentralen Winkel  $\theta$ . Wir schließen die Konstruktion des Nichtecks ab, indem wir  $\cos^{-1} 0,766 \approx 40^\circ$  konstruieren.

Das rechtwinklige Dreieck  $\triangle ABC$  mit  $\angle CAB \approx 37,45^\circ$  und  $\overline{AB} = 1$  hat die gegenüberliegende Seite  $\overline{BC} \approx 0,766$  durch die Definition des Tangens (Fig. 12.9). Falten Sie  $\overline{CB}$  auf die  $\overline{AB}$ , so dass die Spiegelung von  $C$   $D$  ist und  $\overline{DB} = 0,766$ . Erweitern Sie  $\overline{DB}$  und konstruieren Sie  $E$  so, dass  $\overline{DE} = 1$  ist. Falten Sie  $\overline{DE}$ , um



### **Was ist die Überraschung?**

Wir haben in den Kapiteln 2 und 3 gesehen, dass Werkzeuge wie die Neusis Konstruktionen ermöglichen, die mit Lineal und Zirkel nicht möglich sind. Es ist erstaunlich, dass die Dreiteilung eines Winkels und die Verdopplung eines Würfels nur mit Papierfalten konstruiert werden können. Roger C. Alperin hat eine Hierarchie von vier Konstruktionsmethoden entwickelt, die jeweils leistungsfähiger sind als die vorherige.

### **Quellen**

Dieses Kapitel basiert auf [2, 26, 31, 36].

## Kapitel 13

### Ein Kompass ist ausreichend

Lorenzo Mascheroni bewies 1797, dass jede Konstruktion, die mit Lineal und Zirkel ausgeführt wird, auch nur mit einem Zirkel ausgeführt werden kann. Später stellte sich heraus, dass dieses Theorem bereits 1672 von Georg Mohr bewiesen worden war. Nachdem in Sect. 13.1 erklärt wurde, was mit der Durchführung einer Konstruktion nur mit einem Zirkel gemeint ist, wird der Beweis in Etappen präsentiert, beginnend mit vier Hilfskonstruktionen: Spiegelung eines Punktes (Sect. 13.2), Konstruktion eines Kreises mit gegebenem Radius (Sect. 13.3), Addition und Subtraktion von Liniensegmenten (Sect. 13.4) und Konstruktion eines Liniensegments als Verhältnis von Segmenten (Sect. 13.5). Abschnitt 13.6 zeigt, wie man den Schnittpunkt zweier Linien findet und Sect. 13.7 zeigt, wie man den Schnittpunkt einer Linie und eines Kreises findet.

#### 13.1 Was ist eine Konstruktion nur mit einem Zirkel?

Abbildung 13.1 zeigt die Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks mit einem Lineal und einem Zirkel. Wie kann man ein Dreieck ohne die Linienabschnitte  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$  konstruieren? Ein Streckenabschnitt wird durch zwei Punkte definiert, so dass es ausreicht, diese Punkte zu konstruieren, um eine Konstruktion zu erhalten, die derjenigen mit einem Lineal entspricht (Abb. 13.2). Es ist nicht notwendig, die Liniensegmente tatsächlich zu sehen. In den Abbildungen dieses Kapitels wird es Linien geben, aber sie dienen nur dazu, die Konstruktion und den Beweis ihrer Korrektheit zu verstehen. Es ist wichtig, sich davon zu überzeugen, dass die Konstruktion selbst nur einen Zirkel verwendet.

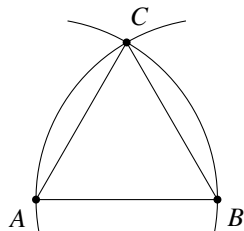


Abb. 13.1: Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks mit einem Lineal und einem Zirkel

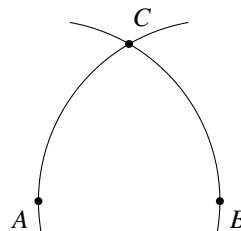


Abb. 13.2: Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks mit nur einem Zirkel

Eine Konstruktion mit Lineal und Zirkel ist eine Abfolge von drei Vorgängen:

- Finde den Schnittpunkt von zwei Geraden.
- Finde den/die Schnittpunkt(e) zwischen einer Linie und einem Kreis.
- Finde den/die Schnittpunkt(e) von zwei Kreisen.

Die dritte Operation kann nur mit einem Zirkel durchgeführt werden. Wir müssen zeigen, dass die ersten beiden Operationen nur mit einem Zirkel durchgeführt werden können.

Notation:

- $c(O, A)$ : der Kreis mit dem Mittelpunkt  $O$  durch den Punkt  $A$ .
- $c(O, r)$ : der Kreis mit dem Mittelpunkt  $O$  und dem Radius  $r$ .
- $c(O, \overline{AB})$ : der Kreis mit dem Mittelpunkt  $O$  und dem Radius der Länge des Liniensegments  $\overline{AB}$ .

### 13.2 Reflexion eines Punktes

**Definition 13.1.** Ein Punkt  $C'$  ist eine Spiegelung des Punktes  $C$  um ein Liniensegment  $\overline{AB}$ , wenn und nur wenn  $\overline{AB}$  (oder die Linie, die  $\overline{AB}$  enthält) die Mittelsenkrechte des Liniensegments  $\overline{CC'}$  ist.

**Satz 13.1.** *Gibt man eine Linie  $\overline{AB}$  und einen Punkt  $C$ , der nicht auf  $\overline{AB}$  liegt, so kann man  $C'$ , die Spiegelung von  $C$  um  $\overline{AB}$  herum bilden.*

*Beweis.* Konstruieren Sie einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $A$ , der durch  $C$  geht, und einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $B$ , der durch  $C$  geht. Der andere Schnittpunkt der beiden Kreise ist der Punkt  $C'$ , der die Spiegelung von  $C$  ist (Abb. 13.3).  $\triangle ABC \cong \triangle ABC'$  durch side-side-side, da  $\overline{AC}, \overline{AC'}$  Radien desselben Kreises sind, ebenso  $\overline{BC}, \overline{BC'}$  und  $\overline{AB}$  eine gemeinsame Seite ist. Daher ist  $\angle CAB = \angle C'AB$ , also ist  $\overline{AB}$  die Winkelhalbierende von  $\angle CAC'$ . Aber  $\triangle CAC'$  ist ein gleichschenkliges Dreieck und die Winkelhalbierende  $\overline{AB}$  ist auch die Mittelsenkrechte von  $\overline{CC'}$ , der Basis von  $\triangle CAC'$ . Per Definition ist  $C'$  die Spiegelung von  $C$  an  $\overline{AB}$ .  $\square$

### 13.3 Konstruktion eines Kreises mit einem vorgegebenen Radius

**Satz 13.2.** *Aus den Punkten  $A, B, C$  lässt sich  $c(A, \overline{BC})$  konstruieren, der Kreis mit dem Mittelpunkt  $A$  und dem Radius  $\overline{BC}$ .*



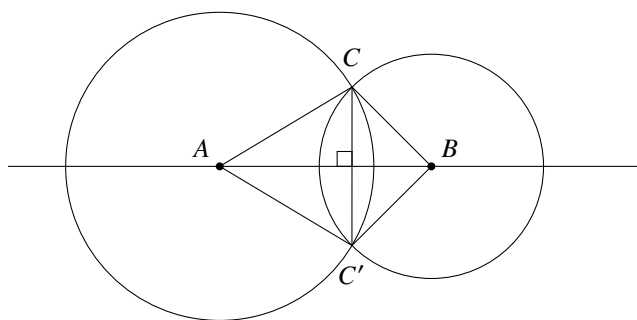


Abb. 13.3: Konstruktion einer Reflexion

*Beweis.* Konstruieren Sie  $c(A, B)$  und  $c(B, A)$  und lassen Sie  $X, Y$  ihre Schnittpunkte sein (Abb. 13.4).  $A$  ist die Spiegelung von  $B$  an der  $\overline{XY}$ , da das  $\triangle YAX$  das  $\triangle YBX$  in der Seitenansicht spiegelt. Nach Thm. 13.1 konstruiere  $C'$ , die Spiegelung von  $C$  um  $\overline{XY}$  und konstruiere dann  $c(A, \overline{AC'})$  (Abb. 13.5).

$\overline{XY}$  ist die Mittelsenkrechte von  $\overline{CC'}$  und  $\overline{AB}$ . Bezeichne den Schnittpunkt von  $\overline{XY}$  und  $\overline{AB}$  mit  $D$  und den Schnittpunkt von  $\overline{XY}$  und  $\overline{CC'}$  mit  $E$ . Dann ist  $\overline{C'E} = \overline{EC}$ ,  $\overline{AD} = \overline{DB}$  und  $\angle DEC = \angle DEC'$  ein rechter Winkel, also  $\triangle DEC \cong \triangle DEC'$  durch side-angle-side. Daher sind  $\overline{DC} = \overline{DC'}$  und  $\angle ADC' = \angle BDC$  (sie sind komplementär zu  $\angle EDC' = \angle EDC$ ). Daraus folgt, dass  $\triangle ADC' \cong \triangle BDC$  durch Seite-Winkel-Seite so  $\overline{AC'} = \overline{BC}$ .  $\square$

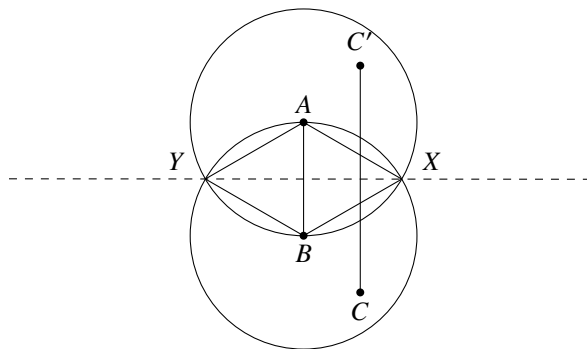


Abb. 13.4: Konstruktion eines Kreises mit einem bestimmten Radius (1)



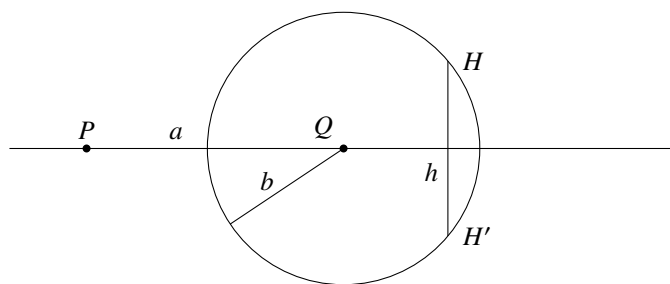


Abb. 13.7: Konstruktion eines isoceles Trapezes (1)

$\triangle KQH \cong \triangle K'QH'$  by side-angle-side, so  $\overline{K'H'} = \overline{KH} = b$ . Daraus folgt, dass  $\overline{KHH'K'}$  ein gleichschenkliges Trapez ist, dessen Basen  $\overline{HH'} = h$ ,  $\overline{KK'} = 2h$  sind (Abb. 13.9). Bezeichne die Länge der Diagonalen  $\overline{K'H} = \overline{KH'}$  mit  $d$ .  $\square$

**Satz 13.5.** Ein isozyklisches Trapez kann von einem Kreis umschrieben werden.

*Beweis.* Das Theorem folgt unmittelbar aus Thms. A.15 und A.16.  $\square$

**Satz 13.6.** Für  $d, b, h$  in Abb. 13.9 gilt  $d^2 = b^2 + 2h^2$ .

*Beweis.* Das Theorem folgt aus dem Satz des Ptolemäus (Thm. A.18), der besagt, dass in einem Viereck, das von einem Kreis umschrieben wird, das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten ist.  $\square$

Der Beweis von Thm. 13.3 kann nun gegeben werden.

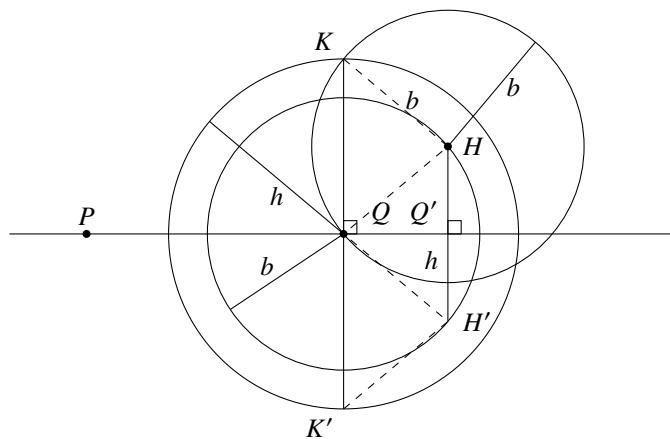


Abb. 13.8: Konstruktion eines isoceles Trapezes (2)

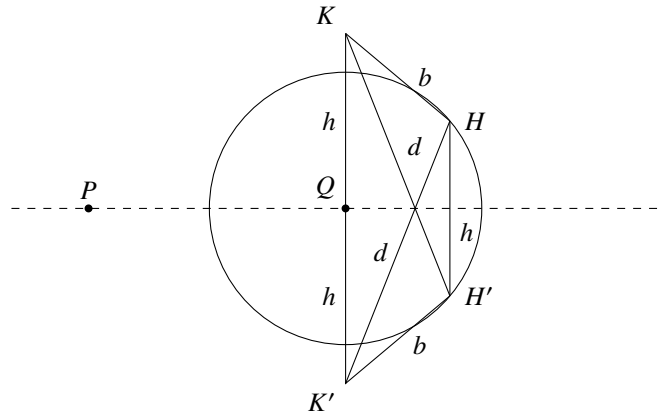


Abb. 13.9: Konstruktion eines isocelen Trapezes (3)

*Beweis.* Sei  $X$  der Punkt auf der Linie  $\overline{PQ}$ , der  $\overline{PQ}$  um  $b$  verlängert. (Wir werden  $X$  schließlich konstruieren.) Definieren Sie  $x = \overline{K'X}$ . Aus Thm. 13.6:

$$d^2 = b^2 + 2h^2 = (x^2 - h^2) + 2h^2 = x^2 + h^2.$$

Da  $\triangle QK'X$  ein rechtwinkliges Dreieck  $x^2 = b^2 + h^2$  ist (Abb. 13.10).

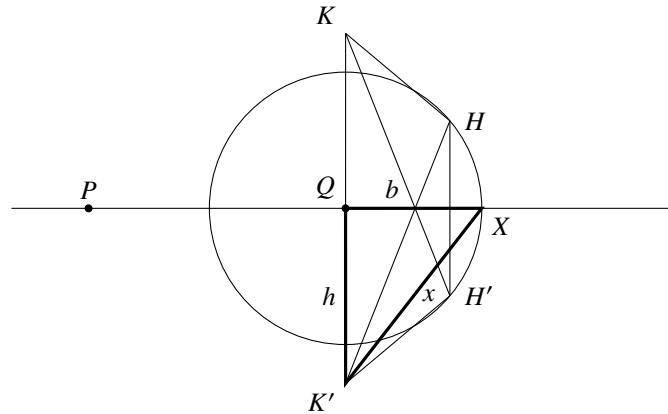


Abb. 13.10: Anwendung des Satzes von Ptolemäus

Konstruieren Sie  $S$  als Schnittpunkt von  $c(K, d)$ ,  $c(K', d)$  (Abb. 13.11).  $\triangle QSK'$  ist ein rechtwinkliges Dreieck, so dass nach dem Satz des Pythagoras  $\overline{QS}^2 = d^2 - h^2 = x^2$  und  $\overline{QS} = x$ .

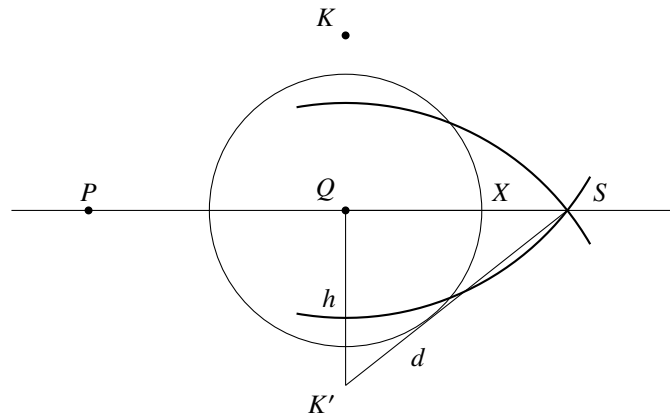


Abb. 13.11: Konstruktion des Punktes für Addition und Subtraktion (1)

Konstruiere  $X$  als Schnittpunkt von  $c(K, x)$ ,  $c(K', x)$  (Abb. 13.12). Da die Länge von  $\overline{QX}$   $\sqrt{x^2 - h^2} = b$  ist, ist die Länge von  $\overline{PX}$   $a + b$  und die Länge von  $\overline{PX'}$  ist  $a - b$ .  $\square$

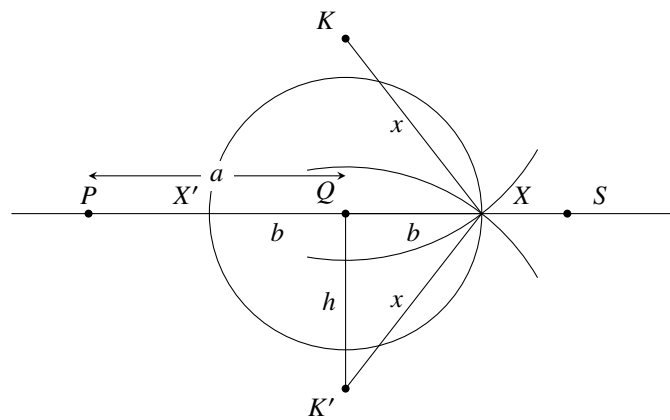


Abb. 13.12: Konstruktion des Punktes für Addition und Subtraktion (2)

### 13.5 Konstruktion eines Liniensegments als Verhältnis von Segmenten

**Satz 13.7.** Bei Liniensegmenten der Länge  $n, m, s$  ist es möglich, ein Liniensegment der Länge zu konstruieren:

$$x = \frac{n}{m} s.$$

*Beweis.* Konstruieren Sie zwei konzentrische Kreise  $c_1 = c(Z, m)$  und  $c_2 = c(Z, n)$ ,<sup>1</sup> und wählen Sie einen beliebigen Punkt  $A$  auf  $c_1$ . Nach Thm. 13.2 konstruiere eine Sehne  $\overline{AB}$  der Länge  $s$  auf  $c_1$  (Abb. 13.13). Wenn  $\overline{AB}$  den Kreis  $c_2$  schneidet, multipliziert man nach Thm. 13.3  $m, n$  mit einer Zahl  $k$ , damit die Sehne den Kreis nicht schneidet. Beachten Sie, dass dies den Wert, den wir zu konstruieren versuchen, nicht ändert, da  $x = \frac{kn}{km} s = \frac{n}{m} s$ .

Wählen Sie einen Punkt  $H$  auf  $c_2$  und bezeichnen Sie die Länge von  $\overline{AH}$  mit  $w$ . Konstruieren Sie  $K$  auf  $c_2$  so, dass die Länge von  $\overline{BK}$   $w$  ist (Abb. 13.14).  $\triangle AHZ \cong \triangle BZK$  durch side-side-side, da  $\overline{ZA} = \overline{ZB} = m$  die Radien desselben Kreises sind, ebenso  $\overline{ZH} = \overline{ZK} = n$ , und  $\overline{AH} = \overline{BK} = w$  durch Konstruktion (Fig. 13.15). Aus  $\triangle AHZ \cong \triangle BZK$  folgt  $\angle AZH = \angle BZK$  und dann  $\angle AZB = \angle HKZ$ . Es ist schwierig, diese Gleichheit aus dem Diagramm zu erkennen, aber Abb. 13.16 soll die Beziehung zwischen den Winkeln verdeutlichen.

$\triangle ZAB \sim \triangle ZHK$ , da beide gleichschenklige Dreiecke sind und wir gezeigt haben, dass sie denselben Scheitelwinkel haben. Beschriften Sie  $\overline{HK}$  mit  $x$ . Dann:

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} &= \frac{n}{x} \\ x &= \frac{n}{m} s. \end{aligned}$$

□

<sup>1</sup>Wir nehmen an, dass  $m > n$ ; falls nicht, tauschen Sie die Schreibweise aus.

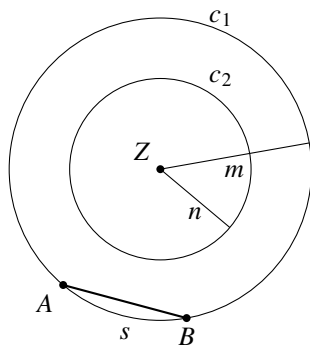


Abb. 13.13: Konstruktion von  $x = \frac{n}{m} s$ , Schritt 1

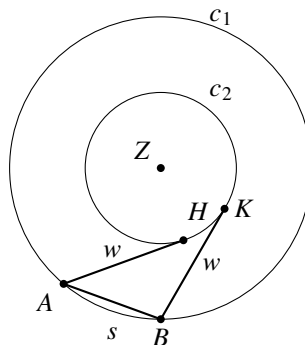


Abb. 13.14: Konstruktion von  $x = \frac{n}{m} s$ , Schritt 2

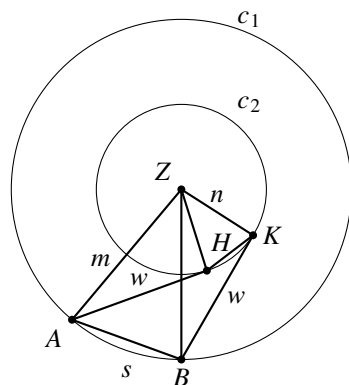


Abb. 13.15: Konstruktion von  $x = \frac{n}{m}s$ ,  
Schritt 3

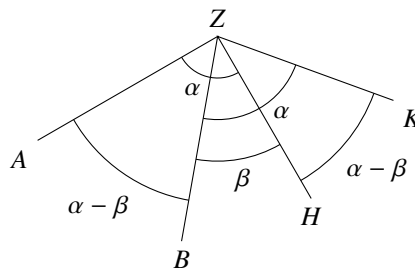


Abb. 13.16:  $\angle AZB = \angle HKZ$

### 13.6 Konstruktion des Schnittpunkts von zwei Geraden

**Satz 13.8.** Bei zwei Linien, die die Linienabschnitte  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$  enthalten, ist es möglich, ihren Schnittpunkt  $S$  zu konstruieren.

*Beweis.* Seien  $C', D'$  die Spiegelungen von  $C, D$  um  $\overline{AB}$ . Es gibt zwei Fälle, je nachdem, ob  $C, D$  auf der gleichen Seite von  $\overline{AB}$  oder auf verschiedenen Seiten liegen. Beschriften Sie  $x = \overline{CS}$ ,  $c = \overline{CC'}$ ,  $d = \overline{DD'}$ ,  $e = \overline{CD}$  wie in Abb. 13.17, 13.18 gezeigt. Wir berechnen den Wert von  $x$  für jeden Fall.

*Fall 1:*  $C, D$  liegen auf den verschiedenen Seiten von  $\overline{AB}$ .  $S$  liegt auf  $\overline{AB}$ , weil  $\triangle CZS \cong \triangle C'ZS$  durch side-angle-side:  $\overline{CZ} = \overline{C'Z}$ ,  $\angle CZS = \angle C'ZS = 90^\circ$  und  $\overline{ZS}$  ist eine gemeinsame Seite. Daher ist  $\overline{C'S} = \overline{CS}$  und ebenso  $\overline{D'S} = \overline{DS}$ .  $\triangle CSC' \sim \triangle DSD'$  sind ähnlich, also ist  $\frac{x}{e-x} = \frac{c}{d}$  und die Lösung der Gleichung ergibt  $x = \frac{c}{c+d}e$ .

*Fall 2:*  $C, D$  liegen auf der gleichen Seite von  $\overline{AB}$ .  $\triangle CSC' \sim \triangle DSD'$  ergibt  $\frac{x}{x-e} = \frac{c}{d}$  und die Lösung der Gleichung ergibt  $x = \frac{c}{c-d}e$ .

Konstruieren Sie die Kreise  $c(C', d)$ ,  $c(D, e)$  und bezeichnen Sie ihren Schnittpunkt mit  $H$  (Abb. 13.19). Die Summe der Linienabschnitte  $\overline{CC'}, \overline{C'H}$  ist  $c + d$ . Wir müssen zeigen, dass  $H$  auf der Verlängerung von  $\overline{CC'}$  liegt, so dass  $\overline{CH}$  ein Liniensegment der Länge  $c + d$  ist.  $\overline{CH} = c - d$  für den Fall, dass  $D$  auf der gleichen Seite von  $\overline{AB}$  liegt wie  $C$  (im Diagramm nicht dargestellt).

$H$  ist der Schnittpunkt von  $c(C', d)$ ,  $c(D, e)$ , also  $\overline{DH} = e$ ,  $\overline{C'H} = d$ . Durch die Konstruktion  $\overline{C'D'} = e$ ,  $\overline{D'D} = d$  ist das Viereck  $\overline{C'D'DH}$  also ein Parallelogramm.

Durch Konstruktion ist  $\overline{DD'} \parallel \overline{CC'}$  also  $\overline{C'H} \parallel \overline{DD'}$  und somit  $\overline{C'H} \parallel \overline{CC'}$ . Da einer ihrer Endpunkte  $C'$  ist, muss sie auf der Linie liegen, die  $\overline{CC'}$  enthält.

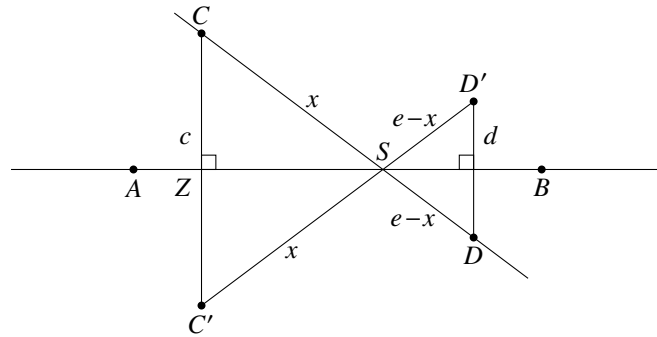


Abb. 13.17: Konstruktion des Schnittpunkts zweier Linien (1)

Durch Thm. 13.3 lässt sich aus den Längen  $c, d, e$  ein Linienabschnitt der Länge  $c + d$  konstruieren und durch Thm. 13.7 ein Linienabschnitt der Länge  $x = \frac{c}{c+d}e$  konstruieren.  $S$ , der Schnittpunkt von  $c(C', x)$  und  $c(C, x)$ , ist auch der Schnittpunkt von  $\overline{AB}, \overline{CD}$  (Abb. 13.20).  $\square$

### 13.7 Konstruktion des Schnittpunkts einer Linie und eines Kreises

**Satz 13.9.** Bei einem Kreis  $k = C(M, r)$  und einer Linie  $l$  kann man die Schnittpunkte von  $k$  und  $l$  konstruieren.

*Beweis.* Konstruieren Sie  $M'$ , sei die Spiegelung von  $M$  um  $l$  und konstruieren Sie den Kreis  $k' = c(M', r)$ . Da  $\triangle MYM' \cong \triangle MXM'$  ist, sind  $X, Y$ , die Schnittpunkte von  $k, k'$ , die Schnittpunkte von  $l$  und  $k$  (Abb. 13.21).

Diese Konstruktion kann nicht durchgeführt werden, wenn  $M$  auf der Linie  $l$  liegt. In diesem Fall ist ein beliebiger Punkt  $A$  auf  $l$  zu wählen, der mehr als  $r$  von  $M$  entfernt ist. Mit Thm 13.3 verkürzt und verlängert man  $\overline{AM}$  um  $r$ .  $X, Y$ , die Endpunkte dieser Segmente, sind die Schnittpunkte von  $k$  und  $l$  (Abb. 13.22).  $\square$

### Was ist die Überraschung?

Wenn man etwas über Konstruktionen mit einem Lineal und einem Zirkel lernt, ist es offensichtlich, dass beide Werkzeuge notwendig sind. Daher war es eine ziemliche Überraschung, herauszufinden, dass ein Zirkel ausreicht. Der Beweis ist ziemlich lang, also werden wir das Lineal nicht zu Hause lassen, aber das Theorem zeigt, dass wir nicht davon ausgehen sollten, dass es keine Alternativen zu bekannten mathematischen Konzepten gibt.





Dieses Kapitel basiert auf dem Problem 33 aus [13], das von Michael Woltermann [14] überarbeitet wurde. Ein zusätzlicher Beweis ist in [25] zu finden.



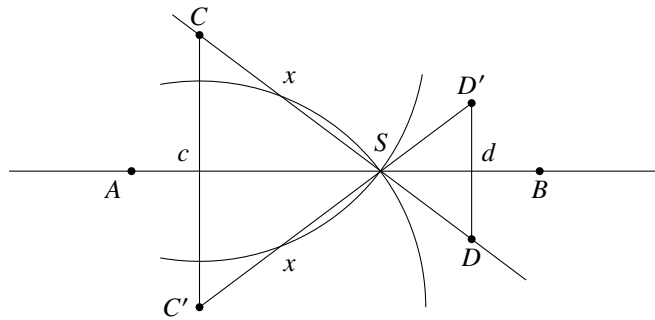


Abb. 13.20: Konstruktion des Schnittpunkts zweier Linien (4)

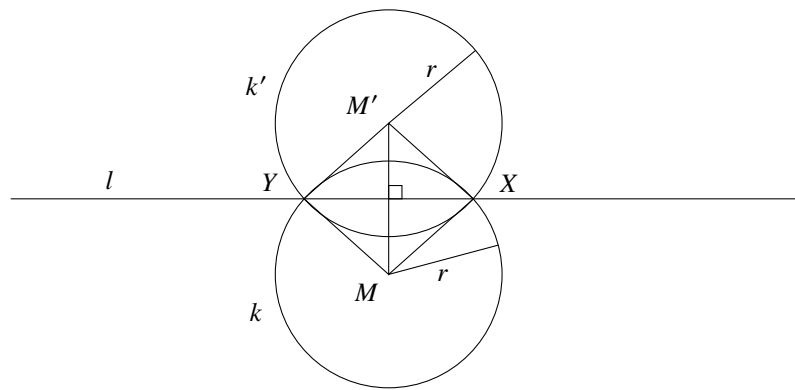


Abb. 13.21: Konstruktion des Schnittpunkts zwischen einer Linie und einem Kreis (1)

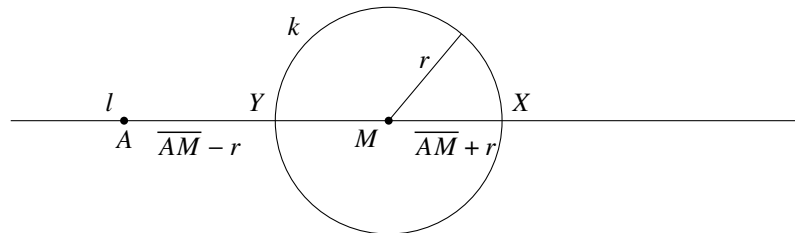


Abb. 13.22: Konstruktion des Schnittpunkts zwischen einer Linie und einem Kreis (2)

## Kapitel 14

### Ein Lineal und ein Kreis sind ausreichend

Kann jede Konstruktion mit Lineal und Zirkel auch nur mit einem Lineal durchgeführt werden? Die Antwort lautet nein, denn Linien sind durch lineare Gleichungen definiert und können keine Kreise darstellen, die durch quadratische Gleichungen definiert sind. 1822 stellte Jean-Victor Poncelet die Vermutung auf, dass ein Lineal ausreicht, wenn es in der Ebene nur einen Kreis gibt. Dies wurde 1833 von Jakob Steiner bewiesen.

Nachdem in Abschnitt 14.1 erklärt wurde, was unter einer Konstruktion mit nur einem Lineal und einem Kreis zu verstehen ist, wird der Beweis schrittweise anhand von fünf Hilfskonstruktionen präsentiert: Konstruktion einer Linie parallel zu einer gegebenen Linie (Abschnitt 14.2), Konstruktion einer Senkrechten zu einer gegebenen Linie (Abschnitt 14.3), Kopieren eines Liniensegments in einer gegebenen Richtung (Abschnitt 14.4), Konstruktion eines Liniensegments als Verhältnis von Segmenten (Abschnitt 14.5) und Konstruktion einer Quadratwurzel (Abschnitt 14.6). Abschnitt 14.7 zeigt, wie man den/die Schnittpunkt(e) einer Linie mit einem Kreis findet und Abschnitt 14.8 zeigt, wie man den/die Schnittpunkt(e) von zwei Kreisen findet.

#### 14.1 Was ist eine Konstruktion mit nur einem Lineal?

Eine Konstruktion mit Lineal und Zirkel ist eine Folge von drei Vorgängen:

- Finde den Schnittpunkt von zwei Linien.
- Finde den/die Schnittpunkt(e) einer Linie und eines Kreises.
- Finde den/die Schnittpunkt(e) von zwei Kreisen.

Die erste Operation kann nur mit einem Haarlineal durchgeführt werden.

Ein Kreis ist definiert durch einen Punkt  $O$ , seinen *Zentrum*, und durch einen *Radius*  $r$ , ein Liniensegment der Länge  $r$ , dessen einer Endpunkt das Zentrum ist. Wenn wir die mit  $X$  und  $Y$  bezeichneten Punkte in Abb. 14.1 konstruieren können, können wir behaupten, die Schnittpunkte eines bestimmten Kreises mit einer bestimmten Linie erfolgreich konstruiert zu haben. In ähnlicher Weise ist die Konstruktion von  $X, Y$  in Abb. 14.2 die Konstruktion der Schnittpunkte von zwei gegebenen Kreisen. Die in einem Diagramm gestrichelt gezeichneten Kreise kommen in einer Konstruktion nicht wirklich vor; sie werden nur verwendet, um die Konstruktion besser zu verstehen.

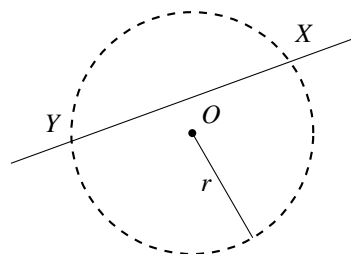


Abb. 14.1:  $X, Y$  sind die Schnittpunkte einer Linie und eines Kreises

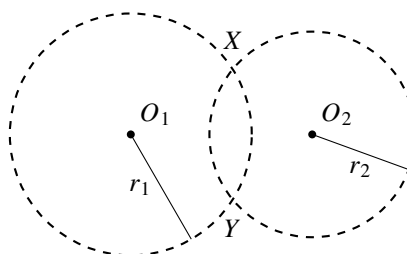


Abb. 14.2:  $X, Y$  sind die Schnittpunkte von zwei Kreisen

Der einzelne gegebene Kreis, der in den Konstruktionen verwendet wird, der so genannte *fixed circle*, kann überall in der Ebene erscheinen und einen beliebigen Radius haben.

## 14.2 Konstruktion einer Linie parallel zu einer gegebenen Linie

**Satz 14.1.** Bei einer Linie  $l$ , die durch zwei Punkte  $A, B$  und einen nicht auf der Linie liegenden Punkt  $P$  definiert ist, kann man eine Linie durch  $P$  konstruieren, die parallel zu  $\overline{AB}$ .

*Beweis.* Der Beweis ist in zwei Fällen zu erbringen.

*Fall 1:*  $\overline{AB}$  ist ein gerichtetes Liniensegment, wenn der Mittelpunkt  $M$  von  $\overline{AB}$  gegeben ist. Konstruieren Sie einen Strahl, der  $\overline{AP}$  verlängert, und wählen Sie einen beliebigen Punkt  $S$  auf dem Strahl jenseits von  $P$ . Konstruieren Sie die Linien  $\overline{BP}, \overline{SM}, \overline{SB}$ . Der Schnittpunkt von  $\overline{BP}$  und  $\overline{SM}$  wird mit  $O$  bezeichnet. Konstruieren Sie einen Strahl, der  $\overline{AO}$  verlängert und bezeichnen Sie mit  $Q$  den Schnittpunkt des Strahls  $\overline{AO}$  mit  $\overline{SB}$  (Abb. 14.3).

Wir behaupten, dass  $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$  ist.

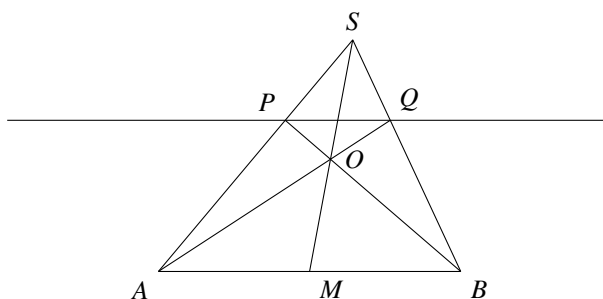


Abb. 14.3: Konstruktion einer parallelen Linie im Falle einer gerichteten Linie

Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Ceva-Satzes.

*Ceva-Satzes (Thm. A.5):* Wenn sich die Liniensegmente von den Scheitelpunkten eines Dreiecks zu den gegenüberliegenden Kanten in einem Punkt  $O$  schneiden (wie in Abb. 14.3), erfüllen die Längen der Segmente:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = 1.$$

In Abb. 14.3 ist  $M$  der Mittelpunkt von  $\overline{AB}$ , so dass  $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = 1$  und die Gleichung wird:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{SP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}}, \quad (14.1)$$

da die Reihenfolge der Endpunkte eines Linienabschnitts nicht wichtig ist.

Wir behaupten, dass  $\triangle ABS \sim \triangle PQS$ :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BS}}{\overline{QS}} &= \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + \frac{\overline{QS}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + 1 \\ \frac{\overline{AS}}{\overline{PS}} &= \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + \frac{\overline{PS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + 1. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Gl. 14.1:

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + 1 = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + 1 = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + \frac{\overline{PS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{PS}},$$

und es folgt, dass  $\triangle ABS \sim \triangle PQS$  und somit  $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ .

*Fall 2:*  $\overline{AB}$  ist nicht notwendigerweise ein gerichteter Linienabschnitt. Der feste Kreis  $c$  hat den Mittelpunkt  $O$  und den Radius  $r$ .  $P$  ist der Punkt, der nicht auf der Linie liegt, durch die eine zu  $l$  parallele Linie konstruiert werden muss (Abb. 14.4).

Wählen Sie  $M$ , einen beliebigen Punkt auf  $l$ , und konstruieren Sie einen Strahl, der  $\overline{MO}$  verlängert und den Kreis in  $U, V$  schneidet.  $\overline{UV}$  ist ein gerichteter Linienabschnitt, weil  $O$ , der Mittelpunkt des Kreises, den Durchmesser  $\overline{UV}$  halbiert. Man wählt einen Punkt  $A$  auf  $l$  und konstruiert mit Hilfe der Konstruktion für eine gerichtete Strecke (Fall 1) eine Linie durch  $A$  parallel zu  $\overline{UV}$ , die den Kreis in  $X, Y$  schneidet (Abb. 14.5).

Konstruieren Sie einen Durchmesser von  $X$  durch  $O$ , der die andere Seite des Kreises in  $X'$  schneidet, und konstruieren Sie in gleicher Weise den Durchmesser  $\overline{YY'}$ . Konstruieren Sie den Strahl von  $X'$  durch  $Y'$  und bezeichnen Sie mit  $B$  seinen Schnittpunkt mit  $l$ . Wir behaupten, dass  $M$  die Winkelhalbierende von  $\overline{AB}$  ist, so dass  $\overline{AB}$  ein gerichteter Linienabschnitt ist und daher eine Linie durch  $P$  parallel zu  $l$  konstruiert werden kann (Abb. 14.6).

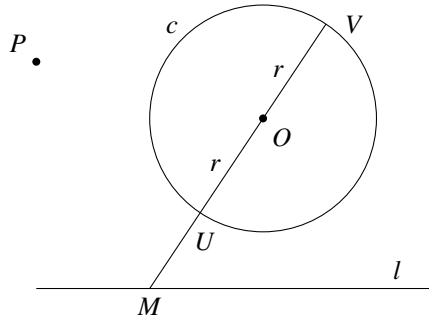


Abb. 14.4: Konstruktion einer gerichteten Linie

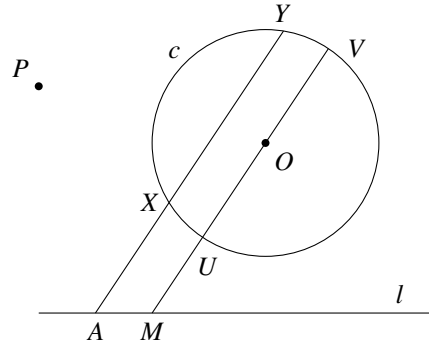


Abb. 14.5: Konstruktion einer Linie parallel zur gerichteten Linie

$\overline{OX}, \overline{OX'}, \overline{OY}, \overline{OY'}$  sind alle Radien des Kreises und  $\angle XOY = \angle X'OY'$ , da sie vertikale Winkel sind, also  $\triangle XOY \cong \triangle X'OY'$  durch side-angle-side. Definieren, nicht konstruieren, denn wir befinden uns mitten im Beweis, dass eine solche Linie konstruiert werden kann.  $l'$  sei eine Linie durch  $O$  parallel zu  $l$ , die  $\overline{XY}$  in  $Z$  und  $\overline{X'Y'}$  in  $Z'$  schneidet.  $\angle XOZ = \angle X'OZ'$  sind vertikale Winkel,  $\angle ZXO = \angle Z'X'O$  sind abwechselnde Innenwinkel und  $\overline{XO} = \overline{X'O'}$  sind Radien, so dass  $\triangle XOZ \cong \triangle X'OZ'$  durch Winkel-Seiten-Winkel und  $\overline{ZO} = \overline{OZ'}$ . Daher sind  $\overline{AMOZ}$  und  $\overline{BMOZ'}$  Parallelogramme und  $\overline{AM} = \overline{ZO} = \overline{OZ'} = \overline{MB}$ .  $\square$

**Satz 14.2.** Gegeben ein Liniensegment  $\overline{AB}$  und einen Punkt  $P$ , der nicht auf der Linie liegt, ist es möglich, ein Liniensegment  $\overline{PQ}$  zu konstruieren, das parallel zu  $\overline{AB}$  ist und dessen Länge gleich der Länge von  $\overline{AB}$  ist, d.h. es ist möglich,  $\overline{AB}$  parallel zu sich selbst zu kopieren mit  $P$  als einem seiner Endpunkte.

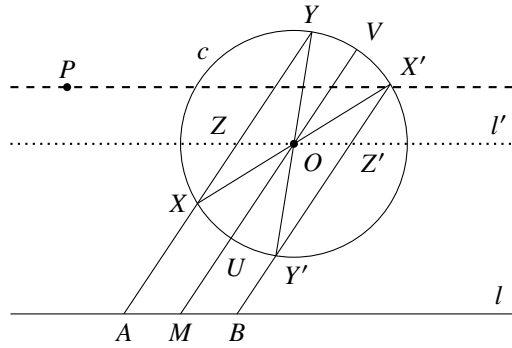


Abb. 14.6: Der Beweis, dass  $l'$  parallel ist zu  $l$

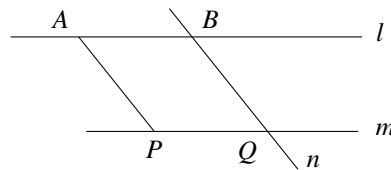


Abb. 14.7: Construction of a copy of a line parallel to an existing line

*Beweis.* Wir haben bewiesen, dass es möglich ist, eine Linie  $m$  durch  $P$  parallel zu  $\overline{AB}$  und eine Linie  $n$  durch  $B$  parallel zu  $\overline{AP}$  zu konstruieren. Das Viereck  $\overline{ABQP}$  ist ein Parallelogramm, so dass die gegenüberliegenden Seiten gleich sind  $\overline{AB} = \overline{PQ}$  (Abb. 14.7).  $\square$

### 14.3 Konstruktion einer Senkrechten zu einer gegebenen Linie

**Satz 14.3.** Bei einem Linienabschnitt  $l$  und einem Punkt  $P$ , der nicht auf  $l$  liegt, kann man eine Senkrechte zu  $l$  durch  $P$  konstruieren.

*Beweis.* Nach Thm. 14.1 konstruiere eine zu  $l$  parallele Linie  $l'$ , die den festen Kreis in  $U, V$  schneidet. Konstruieren Sie den Durchmesser  $\overline{OUU'}$  und die Sehne  $\overline{VU'}$  (Abb. 14.8).  $\angle UVU'$  ist ein rechter Winkel, weil er von einem Durchmesser begrenzt wird. Daher steht  $\overline{VU'}$  senkrecht auf  $\overline{UV}$  und  $l$ . Wiederum nach Thm. 14.1 konstruiert man die Parallele zu  $\overline{VU'}$  durch  $P$ .  $\square$

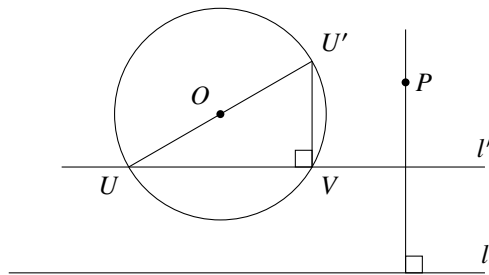


Abb. 14.8: Konstruktion einer senkrechten Linie

### 14.4 Kopieren eines Liniensegments in eine bestimmte Richtung

**Satz 14.4.** Es ist möglich, eine Kopie eines bestimmten Linienabschnitts in Richtung einer anderen Linie zu konstruieren.

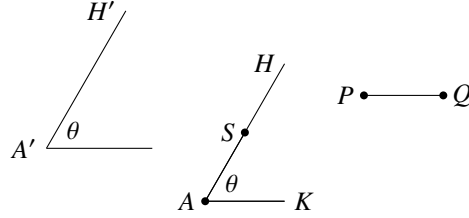


Abb. 14.9: Kopieren eines Liniensegments in eine bestimmte Richtung

Die Bedeutung von “Richtung” ist, dass die durch zwei Punkte  $A', H'$  definierte Linie einen Winkel  $\theta$  relativ zu einer Achse einnimmt, und das Ziel ist,  $\overline{AS} = \overline{PQ}$  so zu konstruieren, dass  $\overline{AS}$  denselben Winkel  $\theta$  relativ zu dieser Achse einnimmt (Abb. 14.9).

*Beweis.* Durch Thm. 14.2 ist es möglich, einen Streckenabschnitt  $\overline{AH}$  so zu konstruieren, dass  $\overline{AH} \parallel \overline{A'H'}$ , und einen Streckenabschnitt  $\overline{AK}$  so zu konstruieren, dass  $\overline{AK} \parallel \overline{PQ}$  und  $\overline{AK} = \overline{PQ}$ .  $\angle HAK = \theta$ , so dass es bleibt, einen Punkt  $S$  auf  $\overline{AH}$  zu finden, so dass  $\overline{AS} = \overline{PQ}$ .

Konstruieren Sie zwei zu  $\overline{AH}, \overline{AK}$  parallele Radien  $\overline{OU}, \overline{OV}$  des Festkreises und konstruieren Sie einen Strahl durch  $K$  parallel zu  $\overline{UV}$ . Bezeichnen Sie seinen Schnittpunkt mit  $\overline{AH}$  mit  $S$  (Abb. 14.10). Durch Konstruktion sind  $\overline{AH} \parallel \overline{OU}$  und  $\overline{AK} \parallel \overline{OV}$ , also  $\angle SAK = \angle HAK = \angle UOV = \theta$ .  $\overline{SK} \parallel \overline{UV}$  und  $\triangle SAK \sim \triangle UOV$  durch Winkel-Winkel-Winkel,  $\triangle UOV$  ist gleichschenkelig, weil  $\overline{OU}, \overline{OV}$  Radien des gleichen Kreises sind. Daher ist  $\triangle SAK$  gleichschenkelig und  $\overline{AS} = \overline{AK} = \overline{PQ}$ .  $\square$

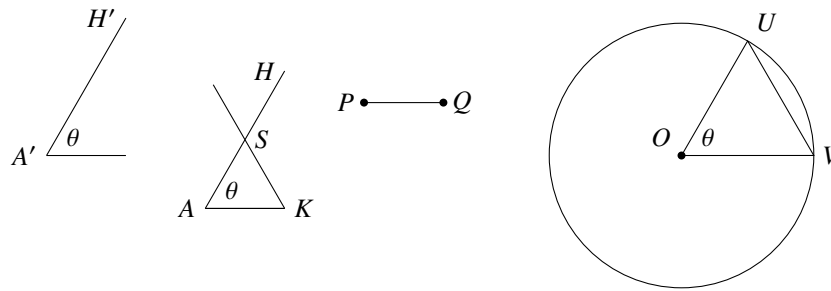


Abb. 14.10: Verwenden des festen Kreises zum Kopieren des Liniensegments



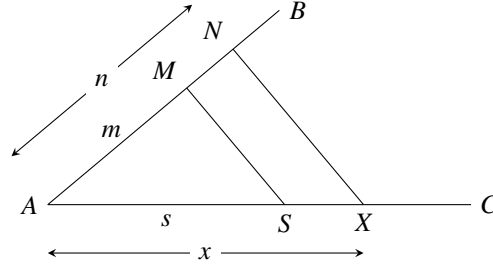


Abb. 14.11: Ähnliche Dreiecke zur Konstruktion des Längenverhältnisses

#### 14.5 Konstruktion eines Liniensegments als Verhältnis von Segmenten

**Satz 14.5.** Bei Liniensegmenten der Länge  $n, m, s$  kann man ein Liniensegment der Länge konstruieren:

$$x = \frac{n}{m} s.$$

*Beweis.* Man wähle Punkte  $A, B, C$ , die nicht auf derselben Geraden liegen, und konstruiere Strahlen  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ . Durch Thm. 14.4 ist es möglich, Punkte  $M, N, S$  so zu konstruieren, dass  $\overline{AM} = m, \overline{AN} = n, \overline{AS} = s$ . Nach Thm. 14.1 konstruiere eine Linie durch  $N$  parallel zu  $\overline{MS}$ , die  $\overline{AC}$  in  $X$  schneidet und beschrifte  $\overline{AX}$  mit  $x$  (Abb. 14.11).  $\triangle MAS \sim \triangle NAX$  by angle-angle-angle so  $\frac{m}{n} = \frac{s}{x}$  und  $x = \frac{n}{m} s$ .  $\square$

#### 14.6 Konstruktion einer Quadratwurzel

**Satz 14.6.** Aus Liniensegmenten der Länge  $a, b$  lässt sich ein Liniensegment der Länge  $\sqrt{ab}$  konstruieren.

*Beweis.* Wir wollen  $x = \sqrt{ab}$  als  $x = \frac{n}{m} s$  ausdrücken, um Thm. 14.5 zu verwenden.

- Für  $n$  verwenden wir  $d$ , den Durchmesser des festen Kreises.
- Für  $m$  verwenden wir  $t = a + b$ , das durch Thm. 14.4 aus  $a, b$  konstruiert werden kann.
- Wir definieren  $s = \sqrt{hk}$ , wobei  $h, k$  als Ausdrücke auf den Längen  $a, b, t, d$  definiert sind.

Definiere  $h = \frac{d}{t} a$  und  $k = \frac{d}{t} b$  und berechne dann:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{th}{d} \frac{tk}{d}} = \sqrt{\left(\frac{t}{d}\right)^2 hk} = \frac{t}{d} \sqrt{hk} = \frac{t}{d} s \\ h + k &= \frac{d}{t} a + \frac{d}{t} b = \frac{d(a+b)}{t} = \frac{dt}{t} = d. \end{aligned}$$

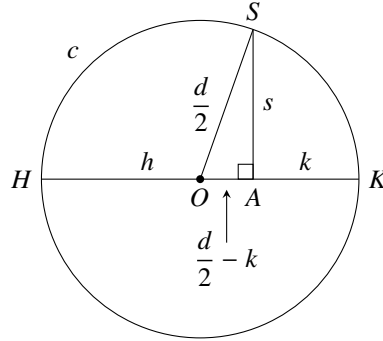


Abb. 14.12: Konstruktion einer Quadratwurzel

Nach Thm. 14.4 konstruiere  $\overline{HA} = h$  auf einem Durchmesser  $\overline{HK}$  des Festkreises. Aus  $h + k = d$  ergibt sich  $\overline{AK} = k$  (Abb. 14.12). Nach Thm. 14.3 konstruieren wir eine Senkrechte zu  $\overline{HK}$  bei A und bezeichnen den Schnittpunkt dieser Linie mit dem Kreis mit S.  $\overline{OS} = \overline{OK} = d/2$  und  $\overline{OA} = (d/2) - k$ .

Durch den Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - k\right)^2 \\
 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2\frac{dk}{2} - k^2 \\
 &= k(d - k) = kh \\
 s &= \sqrt{hk}.
 \end{aligned}$$

Nun kann  $x = \frac{t}{d}s$  durch Thm. 14.5 konstruiert werden. □

#### 14.7 Konstruktion des Schnittpunkts einer Linie und eines Kreises

**Satz 14.7.** *Ausgehend von einer Linie  $l$  und einem Kreis  $c(O, r)$  kann man ihre Schnittpunkte konstruieren (Abb. 14.13).*

*Beweis.* Nach Thm. 14.3 ist es möglich, eine Senkrechte vom Mittelpunkt des Kreises  $O$  zur Linie  $l$  zu konstruieren. Der Schnittpunkt von  $l$  mit der Senkrechten wird mit  $M$  bezeichnet.  $\overline{OM}$  halbiert die Sehne  $\overline{XY}$ , wobei  $X, Y$  die Schnittpunkte der Linie mit dem Kreis sind (Abb. 14.14). Definieren Sie  $\overline{XY} = 2s$  und  $\overline{OM} = t$ . Man beachte, dass  $s, X, Y$  nur Definitionen sind und nicht konstruiert wurden.

Nach dem Satz des Pythagoras  $s^2 = r^2 - t^2 = (r+t)(r-t)$ . Nach Thm. 14.4 ist es möglich, aus  $O$  in den beiden Richtungen  $\overline{OR}$  und  $\overline{RO}$  Linienabschnitte der Länge  $t$  zu konstruieren. Das Ergebnis sind zwei Linienabschnitte der Länge  $r + t, r - t$ .

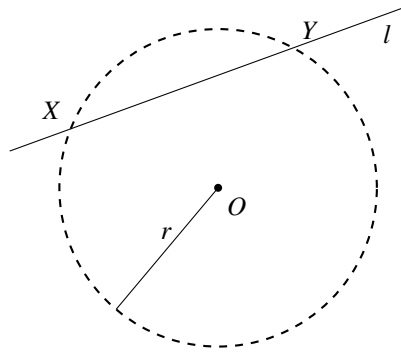


Abb. 14.13: Konstruktion der Schnittpunkte einer Linie und eines Kreises (1)

Durch Thm. 14.6 lässt sich ein Liniensegment der Länge  $s = \sqrt{(r+t)(r-t)}$  konstruieren, und durch Thm. 14.4 lassen sich Liniensegmente der Länge  $s$  von  $M$  entlang  $l$  in beide Richtungen konstruieren. Ihre anderen Endpunkte sind die Schnittpunkte von  $l$  und  $c$ .  $\square$

#### 14.8 Konstruktion des Schnittpunkts von zwei Kreisen

**Satz 14.8.** Bei zwei Kreisen  $c(O_1, r_1), c(O_2, r_2)$  ist es möglich, deren Schnittpunkte zu konstruieren.

*Beweis.* Konstruiere  $\overline{O_1O_2}$  und beschrifte ihre Länge  $t$  (Abb. 14.15). Beschrifte mit  $A$  den Schnittpunkt von  $\overline{O_1O_2}$  und  $\overline{XY}$ , und beschrifte  $q = \overline{O_1A}$ ,  $x = \overline{XA}$  (Fig. 14.16).  $A$  ist noch nicht konstruiert, aber wenn  $q, x$  konstruiert sind, dann kann durch Thm. 14.4 der Punkt  $A$  der Länge  $q$  von  $O_1$  in der Richtung  $\overline{O_1O_2}$  konstruiert

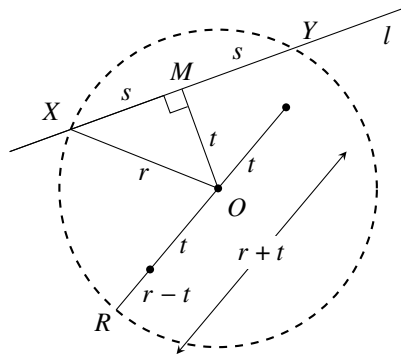


Abb. 14.14: Konstruktion der Schnittpunkte einer Linie und eines Kreises (2)

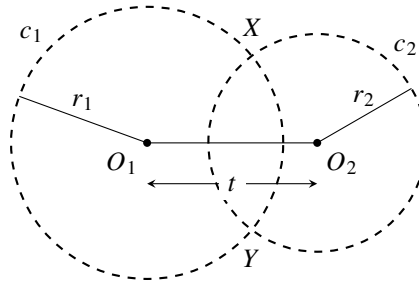


Abb. 14.15: Konstruktion des Schnittpunkts zweier Kreise (1)

werden.

Ist  $A$  konstruiert, so lässt sich durch Thm. 14.3 eine Senkrechte auf  $\overline{O_1O_2}$  bei  $A$  konstruieren, und durch Thm. 14.4 kann man von  $A$  aus in beiden Richtungen entlang der Senkrechten Linienabschnitte der Länge  $x$  konstruieren. Ihre anderen Endpunkte sind die Schnittpunkte der Kreise.

**Konstruktion der Länge  $q$ :** Definiere  $d = \sqrt{r_1^2 + t^2}$ , die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, das aus den bekannten Längen  $r_1, t$  konstruiert werden kann. Man beachte, dass  $\triangle O_1XO_2$  nicht notwendigerweise ein rechtwinkliges Dreieck ist; das rechtwinklige Dreieck kann überall in der Ebene konstruiert werden. Im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle XAO_1$  ist  $\cos \angle XO_1A = q/r_1$ . Nach dem Kosinussatz für  $\triangle XO_1O_2$ :

$$\begin{aligned} r_2^2 &= t^2 + r_1^2 - 2r_1t \cos \angle XO_1O_2 \\ &= t^2 + r_1^2 - 2tq \\ 2tq &= (t^2 + r_1^2) - r_2^2 = d^2 - r_2^2 \\ q &= \frac{(d + r_2)(d - r_2)}{2t}. \end{aligned}$$

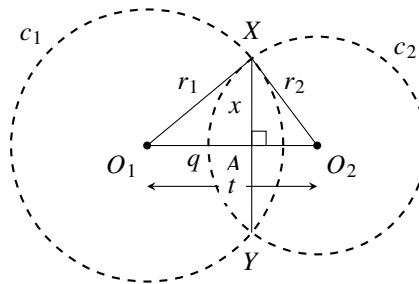


Abb. 14.16: Konstruktion des Schnittpunkts von zwei Kreisen (2)

Durch Thm. 14.4 können diese Längen konstruiert werden und durch Thm. 14.5 kann  $q$  aus  $d + r_2, d - r_2, 2t$  konstruiert werden.

**Konstruktion der Länge  $x$ :** Durch den Satz des Pythagoras:

$$x = \sqrt{r_1^2 - q^2} = \sqrt{(r_1 + q)(r_1 - q)}.$$

Durch Thm. 14.4 kann  $h = r_1 + q, k = r_1 - q$  konstruiert werden, ebenso  $x = \sqrt{hk}$  durch Thm. 14.6.  $\square$

### **Was ist die Überraschung?**

Ein Zirkel ist notwendig, weil ein Lineal nur die Wurzeln von linearen Gleichungen berechnen kann, nicht aber Werte wie  $\sqrt{2}$ , die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Seitenlänge 1. Es ist jedoch erstaunlich, dass das Vorhandensein eines einzigen Kreises, unabhängig von der Lage seines Mittelpunkts und der Länge seines Radius, ausreicht, um jede Konstruktion durchzuführen, die mit Lineal und Zirkel möglich ist.

### **Quellen**

Dieses Kapitel basiert auf dem Problem 34 von [13], das von Michael Woltermann überarbeitet wurde. [14].

## Kapitel 15

### Sind Dreiecke mit gleichen Flächen und Umfängen kongruent?

Sind zwei Dreiecke mit der gleichen Fläche und dem gleichen Umfang kongruent? Nicht unbedingt: Die Dreiecke mit den Seiten (17, 25, 28) und (20, 21, 29) haben beide einen Umfang von 70 und einen Flächeninhalt von 210, sind aber nicht kongruent (Abb. 15.1).<sup>1</sup> In diesem Kapitel wird gezeigt, dass es bei einem Dreieck mit rationalen Seiten möglich ist, ein nicht kongruentes Dreieck mit ebenfalls rationalen Seiten zu konstruieren, das denselben Flächeninhalt und Umfang hat. Wir führen die Herleitung anhand eines Beispiels durch und zeigen, dass das Dreieck mit den Seiten (3, 4, 5) und das Dreieck mit den Seiten  $\left(\frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15}\right)$  beide einen Umfang 12 und einen Flächeninhalt 6 haben.

#### 15.1 Von einem Dreieck zu einer elliptischen Kurve

Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, der als *incenter* des Dreiecks bezeichnet wird. Der Mittelpunkt ist der Mittelpunkt eines in das Dreieck einbeschriebenen Kreises (Abb. 15.2).

Ziehe vom Mittelpunkt  $O$  aus Höhenlinien zu den Seiten. Die Höhen haben die Länge  $r$ , den Radius des Inkreises. Die Höhen und Winkelhalbierenden bilden drei Paare von kongruenten rechtwinkligen Dreiecken:

$$\triangle AOB' \cong \triangle AOC', \quad \triangle BOA' \cong \triangle BOC', \quad \triangle COA' \cong \triangle COB'.$$

<sup>1</sup>Die Flächen wurden mit Hilfe der Heronschen Formel (Thm. A.3) und die Winkel mit Hilfe des Kosinussatzes (Thm. A.8) berechnet.

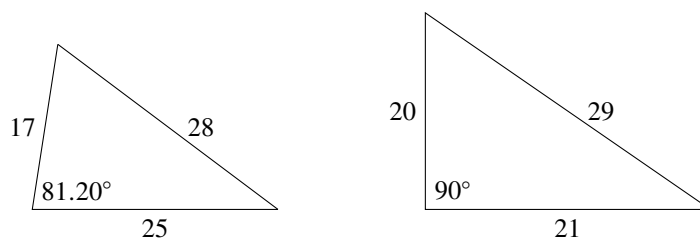


Abb. 15.1: Nicht kongruente Dreiecke mit gleicher Fläche und gleichem Umfang

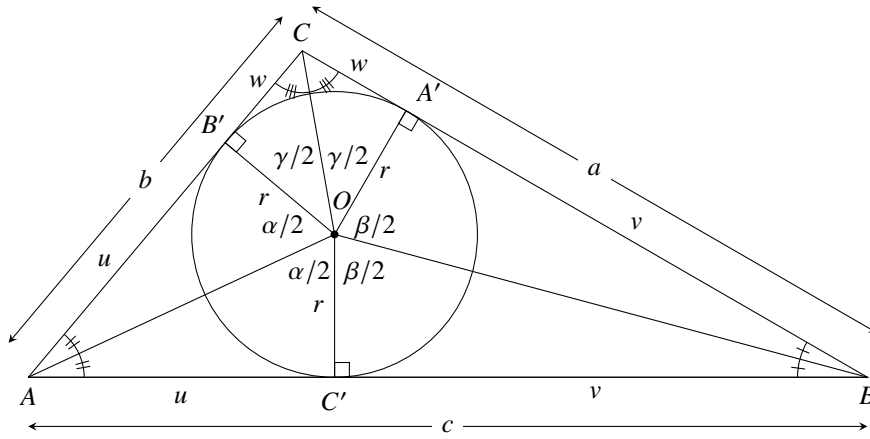


Abb. 15.2: Ein Kreis, der in ein Dreieck eingeschrieben ist

Die Höhen unterteilen die Seiten  $a, b, c$  in die Segmente  $u, v, w$ . Der Flächeninhalt des  $\triangle ABC$  ist die Summe der Flächeninhalte von  $\triangle BOC$ ,  $\triangle AOB$ ,  $\triangle AOC$ :

$$A = \frac{1}{2}(w+v)r + \frac{1}{2}(v+u)r + \frac{1}{2}(u+w)r \quad (15.1a)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2(u+v+w)r \quad (15.1b)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)r \quad (15.1c)$$

$$= sr, \quad (15.1d)$$

Dabei ist  $s$  der *Halbumfang*, die Hälfte des Umfangs des Dreiecks  $\triangle ABC$ . Die Längen von  $u, v, w$  können durch den Radius des Kreises und die zentralen Winkel  $\alpha/2, \beta/2, \gamma/2$  ausgedrückt werden:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{u}{r}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{v}{r}, \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{w}{r}. \quad (15.2)$$

Der Halbumfang kann nun durch die Tangenten ausgedrückt werden:

$$s = u + v + w = r \tan \frac{\alpha}{2} + r \tan \frac{\beta}{2} + r \tan \frac{\gamma}{2} = r \left( \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \right),$$

und nach Gl. 15.1d ist die Fläche:

$$A = sr = r^2 \left( \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \right). \quad (15.3)$$

Aus  $r = A/s$  lässt sich Gl. 15.3 wie folgt schreiben:

$$\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{A}{r^2} = \frac{A}{(A/s)^2} = \frac{s^2}{A}. \quad (15.4)$$

Da die Summe der Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$   $360^\circ$  beträgt:

$$\gamma/2 = 360^\circ/2 - (\alpha/2 + \beta/2) \quad (15.5a)$$

$$\tan \gamma/2 = \tan(180^\circ - (\alpha/2 + \beta/2)) \quad (15.5b)$$

$$= -\tan(\alpha/2 + \beta/2) \quad (15.5c)$$

$$= \frac{\tan \alpha/2 + \tan \beta/2}{\tan \alpha/2 \tan \beta/2 - 1}, \quad (15.5d)$$

mit Hilfe der Formel für den Tangens der Summe von zwei Winkeln (Thm. A.9).

Wir vereinfachen die Notation, indem wir Variablen für die Tangens definieren:

$$x = \tan \frac{\alpha}{2}, \quad y = \tan \frac{\beta}{2}, \quad z = \tan \frac{\gamma}{2}. \quad (15.6)$$

Durch Gl. 15.5d können wir  $z = \tan \gamma/2$  in Form von  $x, y$  ausdrücken:

$$z = \frac{x + y}{xy - 1}. \quad (15.7)$$

Mit dieser Schreibweise wird aus Gl. 15.4:

$$x + y + \frac{x + y}{xy - 1} = \frac{s^2}{A}. \quad (15.8)$$

Gibt es bei festen Werten von  $A$  und  $s$  mehrere Lösungen von Gl. 15.8?

Für das rechtwinklige Dreieck (3, 4, 5):

$$\frac{s^2}{A} = \frac{\left(\frac{1}{2}(3+4+5)\right)^2}{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6^2}{6} = 6. \quad (15.9)$$

Gibt es eine weitere Lösung Gl. 15.8 mit  $s^2/A = 6$ , so kann sie wie folgt geschrieben werden:

$$x + y + \frac{x + y}{xy - 1} = 6 \quad (15.10a)$$

$$x^2y + xy^2 - 6xy + 6 = 0. \quad (15.10b)$$

Dies ist eine Gleichung für eine *elliptische Kurve*.



## 15.2 Lösen der Gleichung für die elliptische Kurve

Ein Teil des Graphen von Gl. 15.10b ist in Abb. 15.3 dargestellt. Jeder Punkt auf der geschlossenen Kurve im ersten Quadranten ist eine Lösung der Gleichung, da die Längen der Seiten des Dreiecks positiv sein müssen.  $A, B, D$  entsprechen dem Dreieck  $(3, 4, 5)$  wie unten gezeigt. Um weitere rationale Lösungen zu finden, wird die Methode der zwei Sekanten verwendet.

Konstruieren Sie eine Sekante durch die Punkte  $A = (2, 3), B = (1, 2)$ . Sie schneidet die Kurve bei  $C = (-1.5, -0.5)$ , was aber keine Lösung ergibt, da die Werte negativ sind. Konstruieren Sie eine zweite Sekante von  $C$  nach  $D = (3, 2)$ . Der Schnittpunkt mit der Kurve bei  $E \approx (1.5, 1.2)$  ergibt eine neue Lösung, deren Koordinaten im Folgenden berechnet werden.

Die Gleichung der (roten) Linie durch  $A, B$  ist  $y = x + 1$ . Aus Gl. 15.10b:

$$\begin{aligned} x^2(x+1) + x(x+1)^2 - 6x(x+1) + 6 &= 0 \\ 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Aus  $A, B$  kennen wir zwei Wurzeln  $x = 2, x = 1$ , so dass wir das kubische Polynom faktorisieren können:

$$(x-2)(x-1)(ax+b) = 0,$$

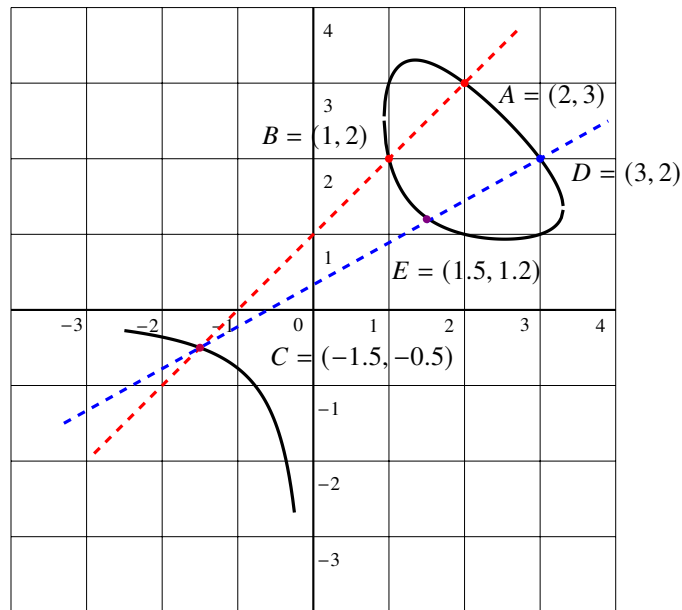


Abb. 15.3: Die Methode der zwei Sekanten

wobei die dritte Wurzel unbekannt ist. Multiplizieren Sie die Faktoren und schließen Sie, dass  $a = 2$ ,  $b = 3$ , da  $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = ax^3 + \dots + 2b$ . Der dritte Faktor ist  $2x + 3$ , was die dritte Wurzel  $x = -\frac{3}{2}$  und  $y = x + 1 = -\frac{1}{2}$  ergibt. Dies ist der Punkt  $C = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$  im Diagramm.

Die Gleichung der (blauen) Linie durch  $C, D$  lautet:

$$y = \frac{5}{9}x + \frac{1}{3}. \quad (15.11)$$

Ersetzen Sie  $y$  in Gl. 15.10b:

$$\begin{aligned} x^2 \left( \frac{5}{9}x + \frac{1}{3} \right) + x \left( \frac{5}{9}x + \frac{1}{3} \right)^2 - 6x \left( \frac{5}{9}x + \frac{1}{3} \right) + 6 &= 0 \\ \frac{70}{81}x^3 - \frac{71}{27}x^2 - \frac{17}{9}x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Aus  $C, D$  kennen wir zwei Wurzeln  $x = 3, x = -\frac{3}{2}$ , so dass wir das kubische Polynom faktorisieren können:

$$(x - 3) \left( x + \frac{3}{2} \right) (ax + b) = 0.$$

Die Gleichsetzung der Koeffizienten des kubischen Terms und der konstanten Terme ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{70}{81}x - \frac{4}{3} &= 0 \\ x &= \frac{54}{35} \approx 1.543, \end{aligned}$$

und  $y$  können aus Gl. 15.11 berechnet werden:

$$y = \frac{25}{21} \approx 1.190.$$

Die Koordinaten von  $E$  sind:

$$\left( \frac{54}{35}, \frac{25}{21} \right) = (1.543, 1.190),$$

die nahe an den aus dem Graphen gewonnenen Näherungen  $(1.5, 1.2)$  liegen.

Berechnen Sie schließlich  $z$  aus Gl. 15.7:

$$z = \frac{x + y}{xy - 1} = \left( \frac{54}{35} + \frac{25}{21} \right) / \left( \frac{54}{35} \frac{25}{21} - 1 \right) = \frac{2009}{615} = \frac{49}{15}.$$

### 15.3 Derivation of a Triangle From the Elliptic Curve

Using Eqs. 15.2, 15.6,  $a, b, c$ , the sides of the triangle  $\triangle ABC$ , can be computed from  $x, y, z$  and  $r = A/s = 6/6 = 1$ :

$$\begin{aligned} a &= w + v = r(z + y) = (z + y) \\ b &= u + w = r(x + z) = (x + z) \\ c &= u + v = r(x + y) = (x + y). \end{aligned}$$

Für die Lösung  $A$  der elliptischen Kurve sind die Seiten des Dreiecks:

$$\begin{aligned}a &= z + y = 1 + 3 = 4 \\b &= x + z = 2 + 1 = 3 \\c &= x + y = 2 + 3 = 5.\end{aligned}$$

Für die Lösung  $E$  der elliptischen Kurve sind die Seiten des Dreiecks:

$$\begin{aligned}a &= z + y = \frac{49}{15} + \frac{25}{21} = \frac{156}{35} \\b &= x + z = \frac{54}{35} + \frac{49}{15} = \frac{101}{21} \\c &= x + y = \frac{54}{35} + \frac{25}{21} = \frac{41}{15}.\end{aligned}$$

Wir wollen dieses Ergebnis überprüfen. Der Halbperimeter ist:

$$s = \frac{1}{2} \left( \frac{156}{35} + \frac{101}{21} + \frac{41}{15} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{468 + 505 + 287}{105} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1260}{105} \right) = 6,$$

und der Flächeninhalt kann mit Hilfe der Heron'schen Formel berechnet werden  
indexHeron'sche Formel|siehe Dreieck, Heron'sche Formel (Thm. A.3):

$$A = \sqrt{6 \left( 6 - \frac{156}{35} \right) \left( 6 - \frac{101}{21} \right) \left( 6 - \frac{41}{15} \right)} = \sqrt{36} = 6.$$

Ist  $\left( \frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15} \right) \cong (3, 4, 5)$ ? Um die Berechnung zu vereinfachen, verwenden wir die dezimalen Näherungswerte (4.48, 4.81, 2.73). Dann:

$$\sqrt{4.48^2 + 2.73^2} = 5.25 \neq 4.81,$$

Dies ist also kein rechtwinkliges Dreieck und nicht kongruent zu (3, 4, 5).

Mit Hilfe des Kosinussatzes lassen sich die Winkel des Dreiecks berechnen, wie in Abb. 15.4 dargestellt.

### Was ist die Überraschung?

Sind Dreiecke mit gleichem Flächeninhalt und Umfang kongruent? Mein erster Eindruck war, "Ja" zu sagen, denn es ist nicht leicht, Gegenbeispiele zu finden. Überraschend ist, dass es bei einem beliebigen Dreieck mit rationalen Seiten möglich ist, ein nicht kongruentes Dreieck mit rationalen Seiten zu konstruieren, das denselben Flächeninhalt und Umfang hat, obwohl das Ergebnis seltsam sein kann, wie bei den Dreiecken (3, 4, 5) und  $\left( \frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15} \right)$ .

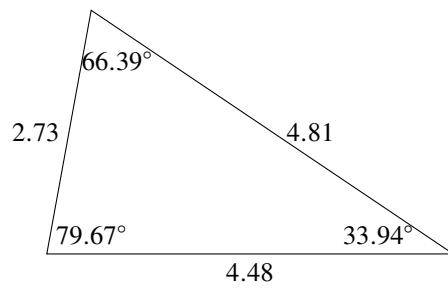


Abb. 15.4: *Das Dreieck mit demselben Umfang und derselben Fläche wie (3, 4, 5)*

### Quellen

Dieses Kapitel stützt sich auf [33]. In [3] wird gezeigt, dass es bei einem isozyklischen Dreieck nicht kongruente Dreiecke mit demselben Flächeninhalt und Umfang gibt, aber der Beweis enthält keine explizite Konstruktion.

## Kapitel 16

### Konstruktion eines regelmäßigen Heptadekagons

Die einzigen regelmäßigen Polygone, die die Griechen mit Lineal und Zirkel konstruieren konnten, waren das Dreieck, das Quadrat, das Fünfeck und das regelmäßige Polygon mit 15 Seiten. Bei einem regelmäßigen Vieleck mit  $n$  Seiten kann ein Vieleck mit  $2n$  Seiten konstruiert werden, indem das Vieleck mit einem Kreis umschrieben und der zentrale Winkel halbiert wird (Abb. 16.1). Weitere Fortschritte wurden erst 1796 erzielt, als Carl Friedrich Gauß eines Morgens, kurz vor seinem 19. Geburtstag, erwachte und durch “konzentriertes Denken” herausfand, wie man ein regelmäßiges *heptadecagon*, ein regelmäßiges Polygon mit 17 Seiten konstruieren kann. Diese Leistung inspirierte ihn dazu, Mathematiker zu werden.

In Abschnitt 16.1 wird die Beziehung zwischen der Seite eines in einen Kreis eingeschriebenen Polygons und dem zentralen Winkel, den es einschließt, erörtert. Abschnitt 16.2 gibt ohne Beweis den Fundamentalsatz der Algebra an. Abschnitt 16.3 stellt die *roots of unity* vor, die Wurzeln des Polynoms  $x^n - 1$ , die im Mittelpunkt des Gaußschen Beweises stehen. Die Abschnitte 16.4 und 16.5 stellen den Beweis von Gauß vor, der auf Symmetrien der Wurzeln von Polynomen beruht. Gauß leitete eine Formel ab, die beweist, dass das Heptadeck konstruierbar ist, aber eine geometrische Konstruktion wurde fast ein Jahrhundert lang nicht gegeben. Abschnitt 16.6 enthält eine elegante Konstruktion von James J. Callagy. Abschnitt 16.7 zeigt, wie Konstruktionen eines regelmäßigen Fünfecks sowohl aus der Geometrie als auch aus der Trigonometrie abgeleitet werden können.

Ein Teil des Materials ist einfacher, wenn es mit komplexen Zahlen dargestellt wird. Dieses Material ist in Kästen untergebracht, die übersprungen werden können.

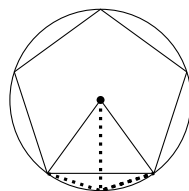


Abb. 16.1: Konstruktion eines regelmäßigen Polygons mit 10 Seiten aus einem regelmäßigen Fünfeck

## 16.1 Konstruktion von regelmäßigen Polygonen

Die Konstruktion des regelmäßigen Heptadecks führte zum Gauß-Wantzel-Theorem, das besagt, dass ein regelmäßiges Polygon mit  $n$  Seiten nur dann mit Lineal und Zirkel konstruiert werden kann, wenn  $n$  das Produkt aus einer Potenz von 2 und null oder mehr *distinct* ist. Fermat-Zahlen  $2^{2^k} + 1$ , die Primzahlen sind. Die bekannten Fermat-Primzahlen sind:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537.$$

Ein regelmäßiges Polygon mit 257 Seiten wurde von Magnus Georg Paucker in 1822 und von Friedrich Julius Richelot 1832 konstruiert. In 1894 behauptete Johann Gustav Hermes, ein regelmäßiges Polygon mit 65537 Seiten konstruiert zu haben.

Um ein regelmäßiges Polygon zu konstruieren, reicht es aus, ein Liniensegment der Länge  $\cos \theta$  zu konstruieren, wobei  $\theta$  der zentrale Winkel ist, der von einer Sehne eingeschlossen wird, die eine in einen Einheitskreis eingeschriebene Seite des Polygons ist. Konstruieren Sie für die Strecke  $\overline{OB} = \cos \theta$  eine Senkrechte bei  $B$  und bezeichnen Sie ihren Schnittpunkt mit dem Einheitskreis mit  $C$ . Dann:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \overline{OB} \\ \theta &= \cos^{-1}(\overline{OB}). \end{aligned}$$

Die Sehne  $\overline{AC}$  ist eine Seite des regelmäßigen Vielecks (Abb. 16.2).

Ausgehend von einem Liniensegment der Länge 1 sind die Längen konstruierbar, die sich aus Liniensegmenten bekannter Länge mit Hilfe der Operationen  $\{+, -, \times, /, \sqrt{\phantom{x}}\}$  gewinnen lassen (Sect. 2.5). Gauß zeigte, dass  $\cos(360^\circ/17)$ , der Kosinus des Zentralwinkels eines Heptadecks, konstruierbar ist, da er nur durch diese Operationen ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\ &\quad \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \end{aligned}$$

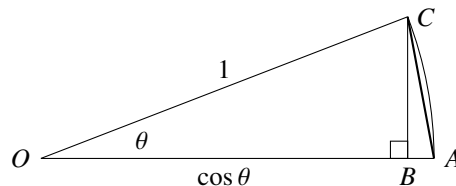


Abb. 16.2: Kosinus des zentralen Winkels eines regelmäßigen Polygons

## 16.2 Der Fundamentalsatz der Algebra

Das folgende Theorem wird ohne Beweis verwendet.

**Satz 16.1.** *Jedes Polynom vom Grad  $n$  hat genau  $n$  Wurzeln.*

Die Aussage des Satzes wurde vereinfacht, da wir nur wissen müssen, dass  $n$  Wurzeln *existieren*.

**Der Fundamentalsatz der Algebra** besagt, dass jedes nicht konstante Polynom vom Grad  $n$  in einer einzigen Variablen mit *komplexen* Koeffizienten genau  $n$  *komplexe* Wurzeln hat. Wenn es mehrere Wurzeln mit demselben Wert gibt, werden sie alle gezählt:  $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x - 2)$  hat zwei Wurzeln, die beide gleich 2 sind. Das Polynom  $x^2 + 1$  mit ganzzahligen Koeffizienten hat zwei komplexe Wurzeln  $\pm\sqrt{-1}$ . Obwohl es sich um endliche algebraische Gebilde handelt - Polynome vom Grad  $n$  mit  $n$  Wurzeln -, braucht man zum Beweis des Satzes Methoden der Analysis, meist der komplexen Analysis.

## 16.3 Die Wurzeln der Einheit

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Thm. 16.1) hat das Polynom  $x^n - 1$   $n$  Wurzeln für jede ganze Zahl  $n > 1$ . Eine Wurzel ist  $x = 1$ , also gibt es  $n - 1$  weitere Wurzeln. Bezeichnen Sie eine dieser Wurzeln mit  $r$ . Da  $r^n = 1$  ist, heißt sie  *$n$ -te Wurzel der Einheit*. Was ist mit  $r^2$ ?

$$(r^2)^n = (r^n)^2 = 1^2 = 1.$$

Daraus folgt, dass die  $n$ -Zahlen:

$$1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}$$

sind  $n$ -te Wurzeln der Einheit.

Sei  $r = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ . Nach der Formel von de Moivre:

$$\left[ \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right]^n = \cos\left(\frac{2n\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2n\pi}{n}\right) = 1.$$

**Satz 16.2.** Sei  $n$  eine Primzahl und  $r$  eine  $n$ -te Wurzel der Einheit. Dann:

$$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$$

sind verschieden, also sind sie all die  $n$ -ten Wurzeln der Einheit.

*Beweis.* Angenommen, die Potenzen sind nicht verschieden, so dass  $r^i = r^j$  für einige  $0 \leq i < j \leq n-1$ . Dann ist  $r^j/r^i = r^{j-i} = 1$ , so dass es mindestens eine positive ganze Zahl  $i'$  kleiner als  $n$  gibt, für die  $r^{i'} = 1$  gilt. Sei  $m$  die kleinste solche positive ganze Zahl. Durch den Divisionsalgorithmus für ganze Zahlen  $n = ml + k$  für einige  $0 < l < n$  und  $0 \leq k < m$ . Von:

$$1 = r^n = r^{ml+k} = (r^m)^l \cdot r^k = 1^l \cdot r^k = r^k,$$

haben wir  $0 \leq k < m$  und  $r^k = 1$ . Da  $m$  als die kleinste solche positive ganze Zahl definiert wurde, ist  $k = 0$  und  $n = ml$  nicht prim.  $\square$

**Satz 16.3.** Seien  $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$  die Wurzeln eines Polynoms  $n$ -ten Grades  $f(x)$ . Dann:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-1})(x - a_n). \quad (16.1)$$

*Beweis.* Ist  $a_i$  eine Wurzel von  $f(x)$ , so ist per Definition  $f(a_i) = 0$ :

$$\begin{aligned} f(a_i) &= (a_i - a_1)(a_i - a_2) \cdots (a_i - a_{n-1})(a_i - a_n) \\ &= \cdots (a_i - a_i) \cdots = 0. \end{aligned}$$

Daher ist  $f(x) = (x - a_i)g_i(x)$  für einige  $g_i(x)$  und durch Induktion gilt dies für alle Wurzeln.  $\square$

Aus Gl. 16.1 ist leicht zu erkennen, dass der Koeffizient von  $x^{n-1}$  ist:

$$-(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n).$$

Da der Koeffizient von  $x^{n-1}$  in  $x^n - 1$  für  $n \geq 2$  Null ist, haben wir:

$$\begin{aligned} -(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}) &= 0 \\ r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} &= -1. \end{aligned}$$

Für das Heptadecagon ist dies:

$$\begin{aligned} r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + r^7 + r^8 + \\ r^9 + r^{10} + r^{11} + r^{12} + r^{13} + r^{14} + r^{15} + r^{16} = -1. \end{aligned} \quad (16.2)$$



## 16.4 Gauß' Beweis der Konstruierbarkeit eines Heptadekagons

Gauß hat verstanden, dass man nicht mit den Wurzeln in ihrer natürlichen Reihenfolge  $r, r^2, \dots, r^{16}$  arbeiten muss. Die Potenzen  $3^0, 3^1, 3^2, \dots$  von  $r$  ergeben alle Wurzeln, aber in einer anderen Reihenfolge:

$$r^1, r^{1 \cdot 3=3}, r^{3 \cdot 3=9}, r^{9 \cdot 3=27=10}, r^{10 \cdot 3=30=13}, r^{13 \cdot 3=39=5}, r^{5 \cdot 3=15}, r^{15 \cdot 3=45=11}, \\ r^{11 \cdot 3=33=16}, r^{16 \cdot 3=48=14}, r^{14 \cdot 3=42=8}, r^{8 \cdot 3=24=7}, r^{7 \cdot 3=21=4}, r^{4 \cdot 3=12}, r^{12 \cdot 3=36=2}, r^{2 \cdot 3=6},$$

wobei die Wurzeln modulo 17 reduziert wurden:

$$r^{17m+k} = (r^{17})^m \cdot r^k = 1^m \cdot r^k = r^k.$$

Prüfen Sie, ob die Liste alle Wurzeln (außer 1) genau einmal enthält:

$$r^1, r^3, r^9, r^{10}, r^{13}, r^5, r^{15}, r^{11}, r^{16}, r^{14}, r^8, r^7, r^4, r^{12}, r^2, r^6. \quad (16.3)$$

Gegeben sei ein monisches Indexpolynom, dessen Wurzeln  $a, b$  sind:

$$y^2 + py + q = (y - a)(y - b) = 0,$$

können wir die Koeffizienten  $p, q$  aus den Wurzeln berechnen (Kap. 7):

$$p = -(a + b), \quad q = ab.$$

Daher gilt  $a + b$  und  $ab$  können wir die quadratische Gleichung aufschreiben, deren Wurzeln  $a, b$  sind.

Sei  $a_0$  die Summe der Wurzeln an den ungeraden Stellen in Gl. 16.3:

$$a_0 = r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2,$$

und sei  $a_1$  die Summe der Wurzeln an den geraden Stellen in Gl. 16.3:

$$a_1 = r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6.$$

Um  $a_0, a_1$  als Wurzeln einer quadratischen Gleichung zu erhalten, berechnet man zunächst ihre Summe und verwendet Gl. 16.2:

$$a_0 + a_1 = r + r^2 + \dots + r^{16} = -1.$$

Jetzt müssen wir uns sehr anstrengen, um ihr Produkt zu berechnen. Abbildung 16.3 zeigt die Berechnung, bei der die Werte von  $r^i r^j = r^{i+j}$  nach Reduzierung der Exponenten modulo 17 geschrieben werden. Überprüfen Sie, dass jede Wurzel genau viermal vorkommt, so dass - wiederum unter Verwendung von Gl. 16.2 - der Wert des Produkts  $-4$  ist.

$$\begin{aligned}
a_0 a_1 &= (r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2) \times \\
&\quad (r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6) \\
&= \begin{aligned}
&r_1^4 + r_1^{11} + r_1^6 + r_1^{12} + r_1^{15} + r_1^8 + r_1^{13} + r_1^7 + \\
&r_2^{12} + r_1^2 + r_1^{14} + r_1^3 + r_2^6 + r_1^{16} + r_2^4 + r_2^{15} + \\
&r_2^{16} + r_3^6 + r_1^1 + r_2^7 + r_1^{10} + r_2^3 + r_2^8 + r_2^2 + \\
&r_2^1 + r_3^8 + r_3^3 + r_1^9 + r_3^{12} + r_1^5 + r_2^{10} + r_3^4 + \\
&r_3^2 + r_2^9 + r_4^4 + r_3^{10} + r_2^{13} + r_4^6 + r_2^{11} + r_2^5 + \\
&r_3^{11} + r_3^1 + r_3^{13} + r_4^2 + r_3^5 + r_3^{15} + r_4^3 + r_2^{14} + \\
&r_3^7 + r_3^{14} + r_3^9 + r_4^{15} + r_4^1 + r_4^{11} + r_3^{16} + r_4^{10} + \\
&r_4^5 + r_4^{12} + r_4^7 + r_4^{13} + r_4^{16} + r_4^9 + r_4^{14} + r_4^8
\end{aligned} \\
&= -4.
\end{aligned}$$

Abb. 16.3: Berechnung von  $a_0 a_1$ ; unter jeder Wurzel steht die Anzahl der bisherigen Vorkommen der Wurzel

Da  $a_0 + a_1 = -1$  und  $a_0 a_1 = -4$ , sind  $a_1, a_2$  die Wurzeln der quadratischen Gleichung  $y^2 + y - 4 = 0$  und können mit der einfachen Formel für die Wurzeln einer quadratischen Gleichung berechnet werden:

$$a_{0,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Nun seien  $b_0, b_1, b_2, b_3$  die Summen aller vierten Wurzeln aus  $r^1, r^3, r^9, r^{10}$ :

$$\begin{aligned}
b_0 &= r^1 + r^{13} + r^{16} + r^4 \\
b_1 &= r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12} \\
b_2 &= r^9 + r^{15} + r^8 + r^2 \\
b_3 &= r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6.
\end{aligned}$$

Prüfen Sie, dass  $b_0 + b_2 = a_0, b_1 + b_3 = a_1$  und berechnen Sie die entsprechenden

Produkte:

$$\begin{aligned}
 b_0 b_2 &= (r + r^{13} + r^{16} + r^4) \times (r^9 + r^{15} + r^8 + r^2) \\
 &= (r^{10} + r^{16} + r^9 + r^3) + (r^5 + r^{11} + r^4 + r^{15}) + \\
 &\quad (r^8 + r^{14} + r^7 + r^1) + (r^{13} + r^2 + r^{12} + r^6) \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 b_3 &= (r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12}) \times (r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6) \\
 &= (r^{13} + r^{14} + r^{10} + r^9) + (r^{15} + r^{16} + r^{12} + r^{11}) + \\
 &\quad (r^7 + r^8 + r^4 + r^3) + (r^5 + r^6 + r^2 + r^1) \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

Um diese Berechnungen zusammenzufassen:

$$\begin{aligned}
 b_0 + b_2 &= a_0 \\
 b_0 b_2 &= -1 \\
 b_1 + b_3 &= a_1 \\
 b_1 b_3 &= -1,
 \end{aligned}$$

$b_0, b_2$  sind also die Lösungen von  $y^2 - a_0 y - 1 = 0$ , und  $b_1, b_3$  sind die Lösungen von  $y^2 - a_1 y - 1 = 0$ . Mit den zuvor berechneten Werten für  $a_0, a_1$  können wir die Wurzeln  $b_0, b_1$  berechnen (Abb. 16.4). Schließlich seien  $c_0, c_4$  die Summen aller Achtelwurzeln, die mit  $r^1, r^{13}$ :

$$\begin{aligned}
 c_0 &= r^1 + r^{16} \\
 c_4 &= r^{13} + r^4 \\
 c_0 + c_4 &= r^1 + r^{16} + r^{13} + r^4 = b_0 \\
 c_0 c_4 &= (r^1 + r^{16}) \cdot (r^{13} + r^4) \\
 &= r^{14} + r^5 + r^{12} + r^3 = b_1,
 \end{aligned}$$

$c_0, c_4$  sind also die Wurzeln von  $y^2 - b_0 y + b_1 = 0$ . Da  $\cos(360^\circ/17) = c_0/2$  (Abb. 16.5) reicht es aus, die Wurzel  $c_0 = r^1 + r^{16}$  (Abb. 16.6) zu berechnen.

Der Kosinus des Zentralwinkels eines Heptadecks ist mit Lineal und Zirkel konstruierbar, da er nur aus rationalen Zahlen und den Operationen  $\{+, -, \times, /, \sqrt{\quad}\}$

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{\frac{(-1 + \sqrt{17})}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-1 + \sqrt{17})}{2}\right)^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{(-1 + \sqrt{17})^2 + 16}}{4} \\
&= \frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \\
b_1 &= \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{\frac{(-1 - \sqrt{17})}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-1 - \sqrt{17})}{2}\right)^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{(-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{(-1 - \sqrt{17})^2 + 16}}{4} \\
&= \frac{(-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}.
\end{aligned}$$

Abb. 16.4: Berechnung von  $b_0$  und  $b_1$

zusammengesetzt ist:

$$\cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) = \frac{c_0}{2} \quad (16.4)$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \quad (16.5)$$

$$\frac{1}{16}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \quad (16.6)$$

$$\begin{aligned}
r_1 + r_{16} &= \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{2 \cdot 16\pi}{17}\right) + i \sin\left(\frac{2 \cdot 16\pi}{17}\right) \\
&= \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{-2\pi}{17}\right) + i \sin\left(\frac{-2\pi}{17}\right) \\
&= 2 \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right).
\end{aligned}$$

### 16.5 Herleitung der Gaußschen Formel

Die obige Formel für  $\cos(360^\circ/17)$  ist nicht die von Gauß angegebene. Hier ist eine Ableitung der Gaußschen Formel:

Vereinfachen wir  $2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$ :

$$\begin{aligned}
2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} &= -2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
&\quad + 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
&= 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
&\quad - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
&= 2(1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}.
\end{aligned}$$

Wir merken uns den Term  $-4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$  und vereinfachen den ersten Term, indem

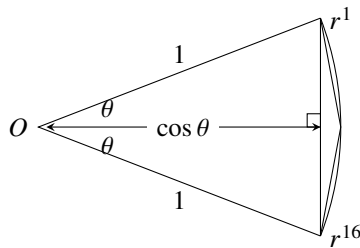


Abb. 16.5: Der Kosinus des Zentralwinkels, berechnet aus  $r_1, r_{16}$

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4b_1}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} + \\
&\quad \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \right)^2 - 4 \left( \frac{(-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4} \right)} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8} \sqrt{\left( (-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right)^2 - 16 \left( (-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right)} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8} \sqrt{(-1 + \sqrt{17})^2 + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + (34 - 2\sqrt{17}) -} \\
&\quad \left( (-16 - 16\sqrt{17}) + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right) \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8} \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}
\end{aligned}$$

Abb. 16.6: Berechnung von  $c_0$

wir ihn quadrieren und dann die Quadratwurzel ziehen:

$$\begin{aligned}
2(1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} &= 2\sqrt{\left[ (1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right]^2} \\
&= 2\sqrt{(18 + 2\sqrt{17})(34 - 2\sqrt{17})} \\
&= 2\sqrt{(18 \cdot 34 - 4 \cdot 17) + \sqrt{17}(2 \cdot 34 - 2 \cdot 18)} \\
&= 2 \cdot 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}.
\end{aligned}$$

Das Einsetzen der Terme ergibt die Gaußsche Formel:

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
 &\quad + \frac{1}{16}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 8\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \\
 &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
 &\quad + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.
 \end{aligned}$$

## 16.6 Konstruktion eines Heptadekagons

Konstruieren Sie einen Einheitskreis mit Mittelpunkt  $O$  und senkrechten Durchmessern  $\overline{QP}$  und  $\overline{SR}$  (Abb. 16.7). Konstruieren Sie  $A$  so, dass  $\overline{OA} = (1/4)\overline{OR}$ . Durch den Satz des Pythagoras:

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OP}^2} = \sqrt{(1/4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}/4.$$

Sei  $B$  der Schnittpunkt der inneren Winkelhalbierenden von  $\angle OAP$  und der Geradenstrecke  $\overline{OP}$  und sei  $C$  der Schnittpunkt der äußeren Winkelhalbierenden von  $\angle OAP$  und der Geradenstrecke  $\overline{QO}$ . Nach dem Satz von der inneren Winkelhalbierenden

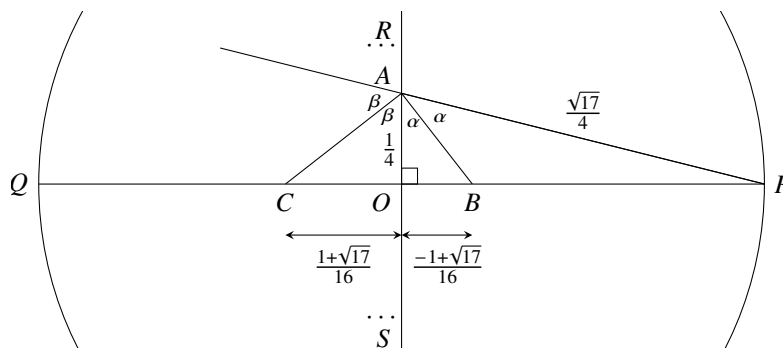


Abb. 16.7: Konstruktion eines Heptadekagons (1)

(Thm. A.13):

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{OB}}{\overline{BP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}} \\
 \frac{\overline{OB}}{1 - \overline{OB}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4} \\
 \overline{OB} &= \frac{1}{1 + \sqrt{17}} = \frac{1}{1 + \sqrt{17}} \cdot \frac{1 - \sqrt{17}}{1 - \sqrt{17}} \\
 &= \frac{-1 + \sqrt{17}}{16},
 \end{aligned}$$

und durch den Satz von der äußeren Winkelhalbierenden (Thm. A.14):

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{OC}}{\overline{CP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}} \\
 \frac{\overline{OC}}{1 + \overline{OC}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4} \\
 \overline{OC} &= \frac{1}{-1 + \sqrt{17}} = \frac{1}{-1 + \sqrt{17}} \cdot \frac{1 + \sqrt{17}}{1 + \sqrt{17}} \\
 &= \frac{1 + \sqrt{17}}{16}.
 \end{aligned}$$

Konstruiere  $D$  auf  $\overline{OP}$  so, dass  $\overline{CD} = \overline{CA} = a$  (Abb. 16.8). Durch den Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned}
 \overline{CD} = \overline{CA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{16}\right)^2} = \frac{1}{16} \sqrt{16 + 1 + 17 + 2\sqrt{17}} \\
 &= \frac{1}{16} \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}.
 \end{aligned}$$

Konstruieren Sie  $E$  auf  $\overline{OP}$  so, dass  $\overline{BE} = \overline{BA} = b$ ; wiederum durch den Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned}
 \overline{BE} = \overline{BA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{16}\right)^2} = \frac{1}{16} \sqrt{16 + 1 + 17 - 2\sqrt{17}} \\
 &= \frac{1}{16} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}.
 \end{aligned}$$



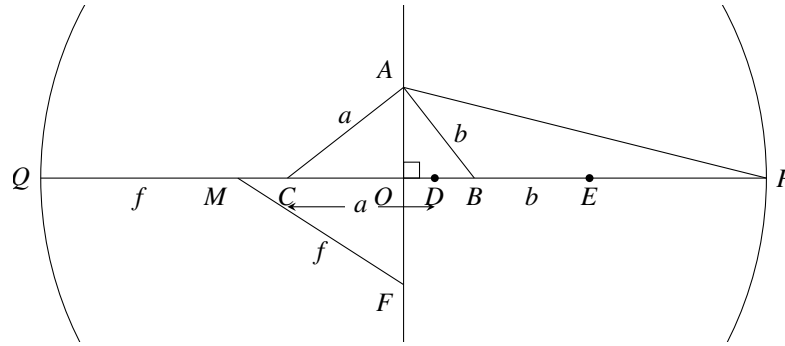


Abb. 16.8: Konstruktion eines Heptadecagons (2)

Konstruiere  $M$  als Mittelpunkt von  $\overline{QD}$  und konstruiere  $F$  auf  $\overline{OS}$  so, dass  $\overline{MF} = \overline{MQ} = f$ :

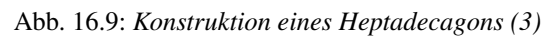
$$\begin{aligned}
 \overline{MF} = \overline{MQ} &= \frac{1}{2}\overline{QD} = \frac{1}{2}(\overline{QC} + \overline{CD}) = \frac{1}{2}((1 - \overline{OC}) + \overline{CD}) \\
 &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1 + \sqrt{17}}{16} \right) + \frac{\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{16} \right] \\
 &= \frac{1}{32} \left( 15 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right).
 \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass  $\overline{MO} = 1 - \overline{MQ} = 1 - \overline{MF}$ .

Konstruieren Sie einen Halbkreis, dessen Durchmesser  $\overline{OE}$  ist. Konstruieren Sie eine Sehne  $\overline{OG} = \overline{OF} = g$  (Abb. 16.9). Mit dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned}
 \overline{OG} = \overline{OF} &= \sqrt{\overline{MF}^2 - \overline{MO}^2} = \sqrt{\overline{MF}^2 - (1 - \overline{MF})^2} \\
 &= \sqrt{2\overline{MF} - 1} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{16} \left( 15 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right) - 1} \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.
 \end{aligned}$$

$\angle OGE$  ist ein rechter Winkel, da er von einem Durchmesser des Kreises begrenzt wird. Konstruieren Sie  $H$  auf  $\overline{OP}$  so, dass  $\overline{EH} = \overline{EG} = e$ ; wiederum durch den Satz


$$\begin{aligned}
 \overline{EH} = \overline{EG} &= \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{OG}^2} = \sqrt{(\overline{OB} + \overline{BE})^2 - \overline{OG}^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{16}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\right)} \\
 &= \frac{1}{16}\sqrt{\left((18 - 2\sqrt{17}) + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + (34 - 2\sqrt{17})\right)} \\
 &\quad + \left(16 + 16\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\right) \\
 &= \frac{1}{16}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2(1 - \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}.
 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\overline{OE} = \overline{OB} + \overline{BE} &= \frac{-1 + \sqrt{17}}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &= \frac{1}{16} \left( -1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right).\end{aligned}$$

Schließlich ist  $\overline{OH} = \overline{OE} + \overline{EH}$  die Gauß'sche Formel für  $\cos(360^\circ/17)$ .

## 16.7 Konstruktion eines regelmäßigen Pentagons

Die komplexen fünften Wurzeln der Einheit sind:

$$1 + i \cdot 0, \quad \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm i \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{-\sqrt{5}-1}{4} \pm i \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

### 16.7.1 Trigonometry

Der zentrale Winkel eines regelmäßigen Fünfecks ist  $360^\circ/5 = 72^\circ$ . Berechnen wir  $\cos 36^\circ$  mit Hilfe der trigonometrischen Identitäten für  $2\theta$  und  $\theta/2$  (Thms. A.2.1, A.7):

$$\begin{aligned} 0 = \cos 90^\circ &= \cos(72^\circ + 18^\circ) = \cos 2 \cdot 36^\circ \cos 36^\circ/2 - \sin 2 \cdot 36^\circ \sin 36^\circ/2 \\ &= (2 \cos^2 36^\circ - 1) \sqrt{\frac{1 + \cos 36^\circ}{2}} - 2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \sqrt{\frac{1 - \cos 36^\circ}{2}}. \end{aligned}$$

Es gibt jetzt nur noch einen Winkel in der Formel; es sei  $x = \cos 36^\circ$ . Dann:

$$\begin{aligned} (2x^2 - 1) \sqrt{\frac{1+x}{2}} &= 2\sqrt{1-x^2} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{2}} \\ (2x^2 - 1) \sqrt{1+x} &= 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x} \cdot x \cdot \sqrt{1-x} \\ 2x^2 - 1 &= 2x(1-x) \\ 4x^2 - 2x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung ergibt einen konstruierbaren Wert:

$$\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

### 16.7.2 Geometrie

Sei  $\overline{ABCDE}$  ein regelmäßiges Fünfeck (Abb. 16.10). Per Definition sind alle Seiten und alle Innenwinkel gleich. Durch kongruente Dreiecke lässt sich leicht zeigen, dass alle Diagonalen gleich sind. Die Länge der Seiten sei 1 und die Länge der Diagonalen sei  $x$ .

$\triangle ACE \cong \triangle CAD$  by side-side-side so  $\angle ACE = \angle CAD = \theta$ .  $\triangle AED \cong \triangle CDE$  by side-side-side so  $\angle ADE = \angle CED = \phi$ .  $\angle AFC = \angle EFD = \psi$  sind vertikale Winkel. In beiden Dreiecken ist die Summe der Winkel  $180^\circ$ , so dass  $\psi + 2\theta = \psi + 2\phi$  und  $\theta = \phi$ . Aus den abwechselnden Innenwinkeln schließen wir, dass  $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$  ist.

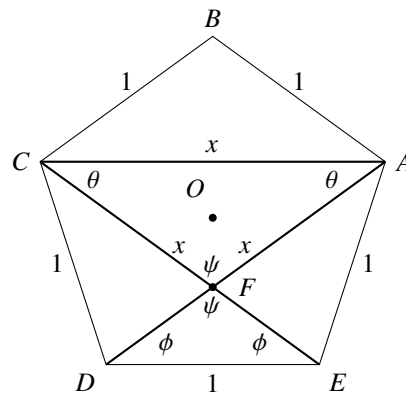


Abb. 16.10: Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks (1)

Konstruieren Sie eine Linie durch  $E$  parallel zu  $\overline{DC}$  und lassen Sie  $F$  ihren Schnittpunkt mit  $\overline{AC}$  sein (Abb. 16.11).  $\overline{CDEF}$  ist ein Rhombus, also  $\overline{EF} = \overline{CD} = \overline{AE} = 1$ .  $\triangle ACE$  ist ein isozyklisches Dreieck mit Basiswinkeln  $\alpha$ .  $\triangle AEF$  ist ebenfalls isozyklisch und  $\angle AFE = \angle FAE = \alpha$ , also  $\triangle ACE \sim \triangle AEF$ . Wenn man das Verhältnis der Seiten nimmt, erhält man:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}.$$

Das Ergebnis ist eine quadratische Gleichung  $x^2 - x - 1 = 0$  deren positive Wurzel konstruierbar ist:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

### Was ist die Überraschung?

Es ist erstaunlich, dass von der Arbeit der Griechen an der Konstruktion bis zur Entdeckung der Konstruierbarkeit des regelmäßigen Heptadekagons durch Gauß zwei Jahrtausende vergangen sind. Erstaunlich ist auch, dass das Problem nicht mit Hilfe der Geometrie, sondern durch die Erfindung neuer algebraischer Methoden gelöst wurde, die einen weitreichenden Einfluss auf die Mathematik hatten.

### Quellen

Dieses Kapitel basiert auf [6]. Das Originalwerk von Gauß ist in einer englischen Übersetzung [18] verfügbar. Die Gleichung 16.5–16.6 erscheint in [41]; der Autor gibt eine Übung, um sie in die Gaußsche Formel umzuwandeln, wie sie in [18, S. 458] und [6, S. 68] erscheint.

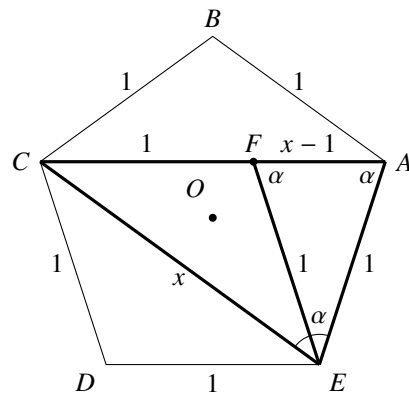


Abb. 16.11: Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks (2)

Die Konstruktion des Heptadekagons ist aus [10] entnommen, während andere Konstruktionen in [55] zu finden sind. Die trigonometrische Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks stammt aus [59]. Die geometrische Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks wurde durch Lösen der Aufgaben 2.3.3 und 2.3.4 in [47] gewonnen.

## Anhang A

### Theorems From Geometry and Trigonometry

In diesem Anhang werden Theoreme der Geometrie und Trigonometrie vorgestellt, die dem Leser möglicherweise nicht vertraut sind, sowie Theoreme, die zwar bekannt sind, deren Beweise jedoch nicht. Abschnitt A.1 stellt drei Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks vor. Abschnitt A.2 beweist trigonometrische Identitäten. Obwohl die Formeln und Identitäten meist bekannt sind, lernen die Schüler diese Identitäten häufig auswendig oder schlagen sie nach, ohne jemals einen Beweis zu sehen. Die folgenden Abschnitte enthalten Beweise für fortgeschrittene Theoreme in der Geometrie: Abschnitt A.3—die Winkelhalbierungssätze, Abschnitt A.4—Ptolemäus' Theorem, das die Seiten und Diagonalen in einem Viereck, das von einem Kreis umschrieben wird, in Beziehung setzt, Abschnitt A.5—Ceva's Lehrsatz über die drei Liniensegmente eines Dreiecks und Abschnitt A.6—Menelaus' Lehrsatz über die Segmente einer Transversale in einem Dreieck.

#### A.1 Theoreme über Dreiecke

##### A.1.1 Berechnen des Flächeninhalts eines Dreiecks

Die Standardformel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks aus der Basis und der Höhe ist bekannt. Sie kann mit verschiedenen geometrischen Methoden bewiesen werden.

**Satz A.1.** *Der Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle ABC$  ist gegeben durch:*

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bh, \quad (\text{A.1})$$

wobei  $b$ , die Basis, eine der Seiten des Dreiecks ist, und  $h$ , die Höhe, die Länge der Höhe zu  $b$  vom gegenüberliegenden Scheitelpunkt (Abb. A.1).

*Beweis.* Abbildung A.2 zeigt, dass man die schraffierten Dreiecke so verschieben kann, dass sie ein Rechteck mit der gleichen Fläche wie das Dreieck bilden, wenn man das Dreieck in der Hälfte der Höhe  $\beta$ schneidet". Die Basis des Rechtecks ist  $b$  und seine Höhe ist  $h/2$ .  $\square$

**Satz A.2.** *Der Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle ABC$  ist gegeben durch:*

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin \theta. \quad (\text{A.2})$$

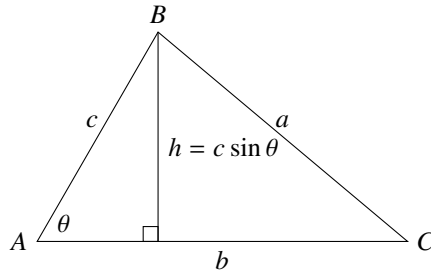


Abb. A.1: Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks aus der Basis und der Höhe

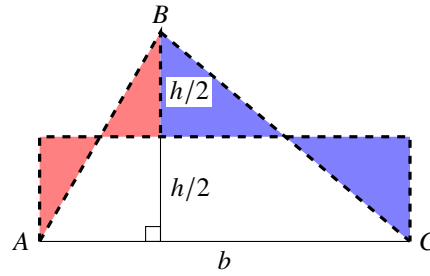


Abb. A.2: Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks aus der Basis und der Höhe

*Beweis.* Aus Thm. A.1 mit  $h = c \sin \theta$ . □

**Satz A.3 (Heron).** Der Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle ABC$  ist gegeben durch:

$$\triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei  $s$ , der Halbkreisumfang des Dreiecks, gleich ist  $\frac{1}{2}(a+b+c)$ .

*Beweis.* Ein Radius eines Kreises und eine Tangente, die den Radius schneidet, stehen senkrecht zueinander. Außerdem sind die Längen der Linienabschnitte zweier Tangenten vom gleichen Punkt zum Kreis gleich. Dies zeigt, dass der Mittelpunkt des Dreiecks, der Mittelpunkt des Inkreises, der gemeinsame Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden ist.

$$\triangle AOB' \cong \triangle AOC', \quad \triangle BOA' \cong \triangle BOC', \quad \triangle COA' \cong \triangle COB'.$$

Die Fläche  $\triangle ABC$  ist die Summe der sechs oben aufgeführten Dreiecke. Da die Höhe von sechs Dreiecken  $r$ , dem Radius des Inkreises, entspricht, erhalten wir:

$$\triangle ABC = \triangle AOB' + \triangle AOC' + \triangle BOA' + \triangle BOC' + \triangle COA' + \triangle COB' \quad (\text{A.3a})$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(u+u+v+v+w+w) \quad (\text{A.3b})$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(a+b+c) \quad (\text{A.3c})$$

$$\triangle ABC = rs. \quad (\text{A.3d})$$

Definieren wir nun die Seiten in Bezug auf die Tangenten der zentralen Winkel:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{u}{r}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{v}{r}, \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{w}{r}.$$

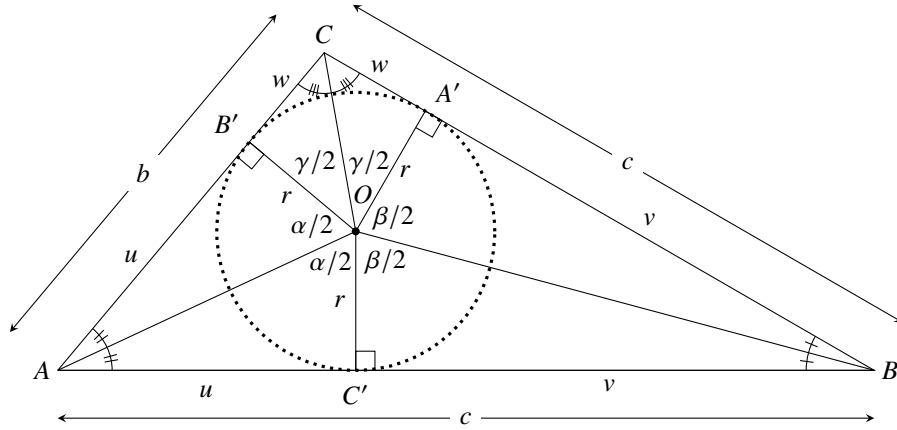


Abb. A.3: Dreieck mit eingeschriebenem Kreis

Aus diesen Definitionen und  $s = \frac{1}{2}(2u + 2v + 2w)$  erhalten wir:

$$s = u + v + w = r \left( \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \right).$$

Seit  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = 360^\circ$  und somit  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$ , von Thm. A.11:

$$\begin{aligned} s &= r \left( \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} \right) \\ &= r \left( \frac{u}{r} \frac{v}{r} \frac{w}{r} \right) = \frac{1}{r^2} (u v w) \\ r &= \sqrt{\frac{u v w}{s}}. \end{aligned}$$

Von Eq. A.3d:

$$\triangle ABC = rs = s \sqrt{\frac{u v w}{s}} = \sqrt{s u v w}.$$

Die Heronsche Formel ergibt sich aus  $u = s - a, v = s - b, w = s - c$ . □



## A.2 Trigonometrische Identitäten

### A.2.1 Sinus und Kosinus der Summe und Differenz zweier Winkel

**Satz A.4.**

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Wir werden die erste Formel beweisen; die anderen Formeln können mit Hilfe der Werte von Sinus und Kosinus für  $-\alpha$  und  $90^\circ - \alpha$  erhalten werden.

Ausgehend von einem rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABC$  mit spitzem Winkel  $\alpha$  und einem rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ACD$  mit spitzem Winkel  $\beta$  können wir sie zu geometrischen Figuren mit einem Winkel  $\alpha + \beta$  verbinden (Abb. A.4). Das linke Diagramm wird am häufigsten in den Beweisen der Identitäten verwendet. Hier geben wir zwei Beweise, die auf dem mittleren und dem rechten Diagramm basieren.

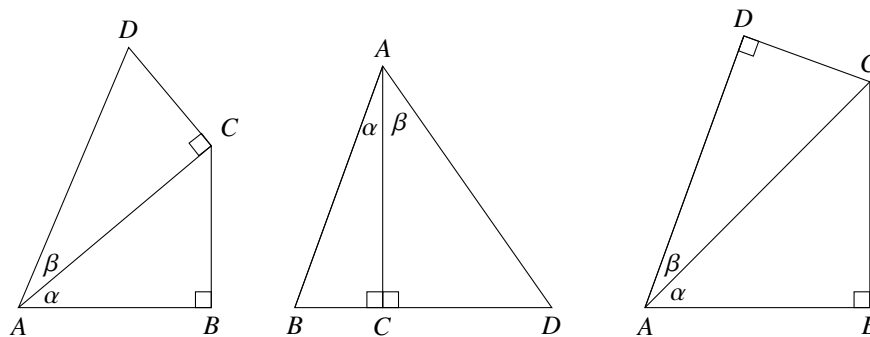


Abb. A.4: Diagramme zum Nachweis der Identität für den Sinus von Winkelsummen

*Beweis.* (1) Berechnen wir den Flächeninhalt von  $\triangle ABD$  auf zwei verschiedene Arten: (1) mit Hilfe von Gl. A.2 für  $\triangle ABD$ , und (2) mit Hilfe der Gleichung getrennt für  $\triangle ABC$  und  $\triangle ADC$  (Fig. A.5). Auch  $h$  wird zweimal mit Hilfe der Definition der

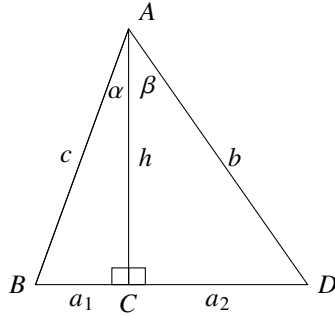


Abb. A.5: Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks auf zwei Arten

trigonometrischen Funktionen berechnet:

$$\begin{aligned}
 \triangle ABD &= \frac{1}{2}bc \sin(\alpha + \beta) \\
 \triangle ABD &= \triangle ABC + \triangle ADC \\
 &= \frac{1}{2}ch \sin \alpha + \frac{1}{2}bh \sin \beta \\
 &= \frac{1}{2}c(b \cos \beta) \sin \alpha + \frac{1}{2}b(c \cos \alpha) \sin \beta .
 \end{aligned}$$

Wenn man die beiden Formeln für  $\triangle ABD$  gleichsetzt und  $\frac{1}{2}bc$  aufhebt, erhält man:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta .$$

□

Der zweite Beweis beruht auf folgendem Satz:

**Satz A.5.** In einem Kreis mit einem Durchmesser von 1 ist die Länge einer Sehne, die einen eingeschriebenen Winkel einschließt, gleich dem Sinus des Winkels (Abb. A.6).

*Beweis.* Sei  $\overline{AB}$  ein Durchmesser und sei  $\angle BAC = \alpha$ . Sei  $D$  ein beliebiger anderer Punkt auf dem Kreis, der ein Dreieck  $\triangle BDC$  bildet, dessen eine Seite die Sehne  $\overline{BC}$  ist. Da gleiche Sehnen gleiche Inkreiswinkel einschließen, sei  $\angle BDC = \alpha$ . Im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABC$ :

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{1} = \overline{BC} .$$

□

*Beweis.* (2) Dieser Beweis basiert auf dem rechten Diagramm in Abb. A.4, das in Abb. A.7 wiedergegeben ist, wo das Viereck  $\overline{ABCD}$  in einen Kreis eingeschrieben wurde. Nach Thm. A.15 kann ein Viereck dann und nur dann von einem Kreis umschrieben werden, wenn die Summe jedes Paares gegenüberliegender Winkel  $180^\circ$  ist.  $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$ , da beide Winkel rechtwinklig sind. Aus Thm. 5.4 ist die Summe der Innenwinkel eines Vierecks  $360^\circ$ , also  $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$ . Der Durchmesser des Kreises sei 1 (ansonsten alles mit der Länge des Durchmessers multiplizieren). Dann sind die Seiten des Vierecks:

$$\overline{BC} = \sin \alpha, \quad \overline{CD} = \sin \beta, \quad \overline{AB} = \sin \gamma, \quad \overline{DA} = \sin \delta,$$

und ihre Diagonalen sind:

$$\overline{BD} = \sin(\alpha + \beta), \quad \overline{CA} = \sin(\alpha + \gamma).$$

Nach dem Satz des Ptolemäus (Thm. A.18) ist das Produkt der Diagonalen eines Vierecks, das von einem Kreis umschrieben wird, gleich der Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten des Vierecks. Da  $\angle ADC$  und  $\angle ABC$  rechte Winkel sind, haben wir:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \gamma) &= \sin \alpha \sin \delta + \sin \beta \sin \gamma \\ \sin(\alpha + \beta) \sin(90^\circ) &= \sin \alpha \sin(90^\circ - \beta) + \sin \beta \sin(90^\circ - \alpha) \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

□

### A.2.2 Der Kosinus eines Dreifachwinkels

**Satz A.6.**

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

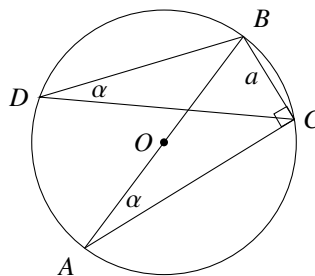


Abb. A.6: Alle von einer Sehne eingeschlossenen Winkel sind gleich

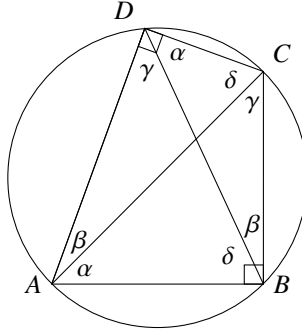


Abb. A.7: Ein Viereck, das von einem Kreis umschrieben wird

*Beweis.* Der Beweis verwendet die Formeln in Thm. A.4 und die Formel  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ :

$$\begin{aligned}
 \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) \\
 &= \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha \\
 &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - (2 \sin \alpha \cos \alpha) \sin \alpha \\
 &= \cos^3 \alpha - \cos \alpha \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\
 &= \cos^3 \alpha - \cos \alpha + \cos^3 \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha \\
 &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha .
 \end{aligned}$$

□

### A.2.3 Sinus und Kosinus eines Halbwinkels

**Satz A.7.** Wenn  $\alpha$  ein Winkel in einem Dreieck ist, dann:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\
 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} .
 \end{aligned}$$

*Beweis.* Der Beweis verwendet die Formeln Thm. A.4 und die Formel  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

<sup>1</sup>Die allgemeine Formel ist komplexer, weil die Quadratwurzeln entweder positiv oder negativ sein können, je nachdem, in welchem Quadranten  $\alpha/2$  liegt. Für ein Dreieck  $0 < \alpha < 180^\circ$  liegt also  $0 < \alpha/2 < 90^\circ$  im ersten Quadranten und sowohl der Sinus als auch der Kosinus sind positiv.

$\cos^2 \alpha = 1$ :

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}} \\ \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{1+\cos \alpha}{2} \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}}.\end{aligned}$$

□

#### A.2.4 Das Kosinusetz

**Satz A.8** (Law of cosines). *In einem Dreieck  $\triangle ABC$  mit den Seiten  $a, b, c$  (Abb. A.8):*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle ACB.$$

*Beweis.* (1) Ziehe eine Höhe von  $C$  nach  $\overline{AB}$  und verwende die Definition des Kosinus und den Satz des Pythagoras:

$$c = x + (c - x) = a \cos \beta + b \cos \alpha \quad (\text{A.4a})$$

$$c^2 = ac \cos \beta + bc \cos \alpha. \quad (\text{A.4b})$$

In ähnlicher Weise fallen die Höhen von  $A$  bis  $\overline{BC}$  und von  $B$  bis  $\overline{AC}$ , um zu erhalten:

$$a^2 = ca \cos \beta + ba \cos \gamma \quad (\text{A.5a})$$

$$b^2 = cb \cos \alpha + ab \cos \gamma. \quad (\text{A.5b})$$

Die Addition der Gleichungen A.5a und A.5b und die Subtraktion der Gleichung A.4b ergibt:

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 - c^2 &= ca \cos \beta + ba \cos \gamma \\ &\quad + cb \cos \alpha + ab \cos \gamma \\ &\quad - ac \cos \beta - bc \cos \alpha \\ &= 2ab \cos \gamma \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.\end{aligned}$$

□

*Beweis.* (2) Der zweite Beweis verwendet den Satz des Ptolemäus (Thm. A.18).<sup>2</sup>

Das Dreieck  $\triangle ABC$  kann von einem Kreis umschrieben werden. Konstruieren Sie ein weiteres Dreieck  $\triangle ABC'$ , das kongruent zu  $\triangle ABC$  ist und in denselben Kreis eingeschrieben ist (Abb. A.9). Dazu konstruiert man einen Winkel von  $\overline{AB}$  gleich  $\angle CAB$ , der den Kreis in  $C'$  schneidet, und konstruiert dann die Linie  $\overline{C'A}$ . Da Winkel, die durch dieselbe Sehne aufgespannt werden, gleich sind  $\angle AC'B = \angle BCA$ , so ist auch  $\angle CBA = \angle C'AB$  und damit  $\triangle ABC' \cong \triangle BAC$  durch Winkel-Seiten-Winkel mit der gemeinsamen Seite  $\overline{AB}$ .

Fallen Sie die Lote von  $C$  nach  $D$  und von  $C'$  nach  $D'$  auf  $\overline{AB}$ , so dass  $x = a \cos \beta$ . Nach dem Satz des Ptolemäus für das Viereck  $\overline{ABCC'}$ :

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c(c - 2x) \\ &= a^2 + c(c - 2a \cos \beta) \\ &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta. \end{aligned}$$

□

### A.2.5 Der Tangens der Summe von zwei Winkeln

**Satz A.9.**

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

---

<sup>2</sup>Abschnitt A.4 verwendet das Kosinussatzgesetz zum Beweis des Satzes des Ptolemäus! Der erste Beweis des Kosinussatzes vermeidet diesen Zirkelschluss. Außerdem gibt es Beweise für den Satz des Ptolemäus, die das Kosinussatzgesetz nicht verwenden.

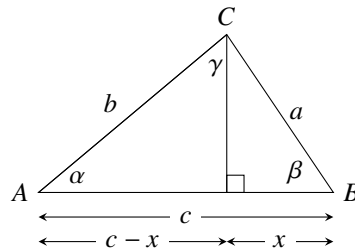


Abb. A.8: Beweis 1 für das Kosinussatzgesetz

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\
 &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\
 &= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta}{\cos \alpha - \sin \alpha \tan \beta} \\
 &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.
 \end{aligned}$$

□

## A.2.6 Der Tangens eines Halbwinkels

**Satz A.10.**

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}.$$

*Beweis.* Wir leiten eine quadratische Gleichung ab und lösen sie in  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ :

$$\begin{aligned}
 \tan \alpha &= \frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\
 \tan \alpha \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tan \alpha &= 0 \\
 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}.
 \end{aligned}$$

□

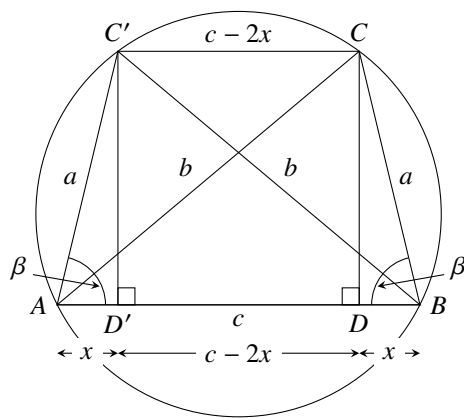


Abb. A.9: Beweis 2 für das Kosinusetz

### A.2.7 Das Produkt aus drei Tangenten

**Satz A.11.** Wenn  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  dann:

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma .$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \tan \gamma &= \tan(180^\circ - (\alpha + \beta)) \\ &= -\tan(\alpha + \beta) \\ &= -\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma &= \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma . \end{aligned}$$

□

### A.2.8 Die Grenze der $\sin \alpha / \alpha$

**Satz A.12.**

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 .$$

*Beweis.* Betrachtet man regelmäßige Polygone, die in einen Kreis eingeschrieben sind (Abb. A.10), so stellt man fest, dass der Umfang eines Polygons umso näher am Kreisumfang liegt, je mehr Seiten es hat. Der Umfang des Kreises geteilt durch die Anzahl der Seiten ist die Länge eines Bogens mit denselben Endpunkten wie die entsprechende Seite, da in einem regelmäßigen Polygon alle Seiten gleich lang sind. Da sich das Verhältnis zwischen dem Kreisumfang und dem Umfang eines Inkreispolygons mit zunehmender Seitenzahl 1 annähert, gilt dies auch für das Verhältnis zwischen der Länge eines Bogens und der entsprechenden Sehne. Dies

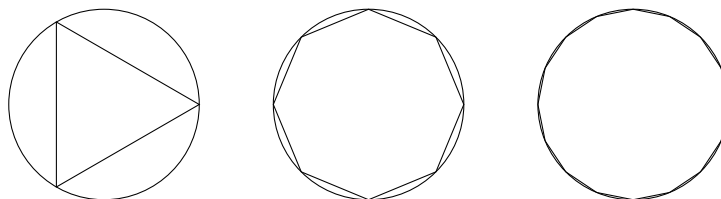


Abb. A.10: Regelmäßige Polygone mit 3, 8 und 16 Seiten, die in einen Kreis eingeschrieben sind



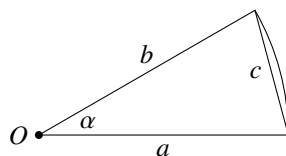


Abb. A.11: Die Länge einer Sehne, die einem Bogen der Größe  $\alpha$

wird an den folgenden Zahlenbeispielen deutlich:

Angle	Arc length	Chord length	Ratio
80	1.396	1.286	1.090
60	1.047	1.000	1.047
40	0.698	0.684	1.006
5	0.087	0.087	1.000

Da  $a = b = 1$  ist, kann die Länge der Sehne  $c$ , die  $\alpha$  unterlagert, aus dem Kosinussatz (Abb. A.11) berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \\
 c &= \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} \\
 \lim_{\alpha \rightarrow 0} c &= \sqrt{2 - 2 \cdot 1} = 0.
 \end{aligned}$$

Bezug nehmend auf Abb. A.12:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2 \sin \alpha}{2\alpha}.$$

Dies ist das Verhältnis zwischen der Länge der Sehne  $\overline{PQ}$  und der Länge des Bogens  $\widehat{PQ}$ . Wir haben aber gesehen, dass dieses Verhältnis gegen 1 konvergiert, wenn der unterstellte Winkel  $2\alpha$  gegen 0 tendiert, also:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

□

### A.3 Der Satz von der Winkelhalbierenden

**Satz A.13.** Im  $\triangle ABC$  schneidet die Winkelhalbierende von  $\angle BAC$  die  $\overline{BC}$  in  $D$  (Abb. A.13). Dann:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

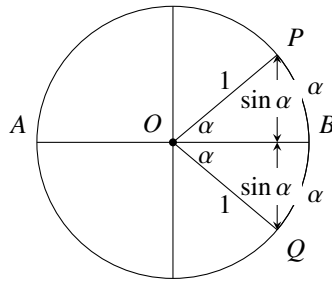


Abb. A.12: Verhältnis von  $\sin x$  zu  $x$

*Beweis.* Wir beweisen den Satz, indem wir die Flächen zweier Dreiecke berechnen, indem wir sowohl die Basis und die Höhe (Gl. A.1), als auch die Basis, den Winkel und die Seite (Gl. A.2) verwenden:

$$\begin{aligned}\triangle ABD &= \frac{1}{2} \overline{BD} h = \frac{1}{2} \overline{AB} \overline{AD} \sin \alpha \\ \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{AD} \sin \alpha}{h} \\ \triangle ACD &= \frac{1}{2} \overline{CD} h = \frac{1}{2} \overline{AC} \overline{AD} \sin \alpha \\ \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{AD} \sin \alpha}{h} \\ \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.\end{aligned}$$

□

Es gibt auch einen Winkelhalbierungssatz für die *externe Winkelhalbierung*:

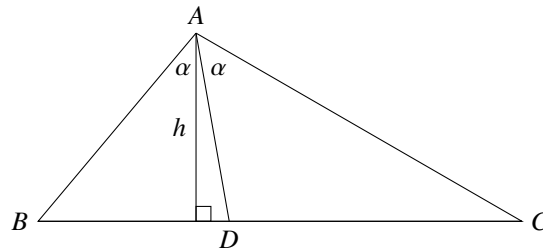


Abb. A.13: Der Satz von der inneren Winkelhalbierenden

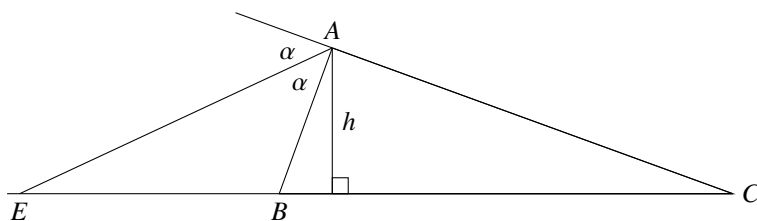


Abb. A.14: Der Satz von der äußeren Winkelhalbierenden

**Satz A.14.** Im  $\triangle ABC$  sei  $\overline{AE}$  die Winkelhalbierende des Winkels, der zum Winkel  $\triangle BAC$  (Abb. A.14) hinzukommt, und die Winkelhalbierende schneide  $\overline{BC}$  in  $E$  (Abb. A.13). Dann:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

*Beweis.* Da  $\overline{AC}$  eine gerade Linie ist  $\angle EAC = 180^\circ - \alpha$ .

$$\begin{aligned} \triangle ABE &= \frac{1}{2} \overline{BE} h = \frac{1}{2} \overline{AE} \overline{AB} \sin \alpha \\ \triangle ACE &= \frac{1}{2} \overline{CE} h = \frac{1}{2} \overline{AE} \overline{AC} \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \overline{AE} \overline{AC} \sin \alpha \\ \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{AE} \sin \alpha}{h} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} \\ \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}. \end{aligned}$$

□

## A.4 Ptolemäus' Theorem

### A.4.1 Ein von einem Kreis umschriebenes Trapez

Vor dem Beweis des Satzes von Ptolemäus werden Theoreme über Vierecke und Trapeze bewiesen.

**Satz A.15.** Ein Viereck kann nur dann von einem Kreis umschrieben werden, wenn die gegenüberliegenden Winkel ergänzend sind (Summe  $180^\circ$ ).

In den Geometrie-Lehrbüchern findet man den einfachen Beweis für die Vorwärtsrichtung, aber es ist schwierig, einen Beweis für die Umkehrung zu finden, so dass hier beide Beweise gegeben werden.

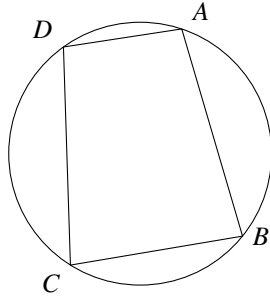


Abb. A.15: Ein Viereck, das von einem Kreis umschrieben wird

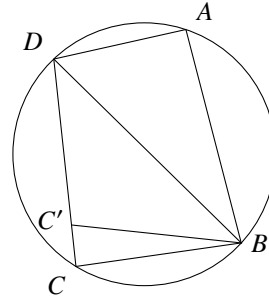


Abb. A.16: Der vierte Scheitelpunkt muss auf dem Kreisumfang liegen

*Beweis.* (Vorwärtsrichtung) Ein eingeschriebener Winkel ist gleich der Hälfte des Bogens, der ihn unterspannt, so dass  $\angle DAB$  die Hälfte des Bogens  $\widehat{DCB}$  ist und  $\angle DCB$  die Hälfte des Bogens  $\widehat{DAB}$  (Abb. A.15). Die beiden Bögen bilden den gesamten Umfang des Kreises, so dass ihre Summe  $360^\circ$  beträgt. Daher ist  $\angle DAB + \angle DCB = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$ , und in ähnlicher Weise  $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$ .  $\square$

*Beweis.* (Umgekehrte Richtung) Jedes Dreieck kann von einem Kreis umschrieben werden. Umschreibe das  $\triangle DAB$  durch einen Kreis und nimm an, dass  $C'$  ein solcher Punkt ist, dass  $\angle DAB + \angle DC'B = 180^\circ$ , aber  $C'$  nicht auf dem Kreisumfang liegt. Ohne Verlust der Allgemeinheit sei  $C'$  innerhalb des Kreises (Abb. A.16).

Konstruieren Sie einen Strahl, der  $\overline{DC'}$  verlängert, und lassen Sie  $C$  seinen Schnittpunkt mit dem Kreis sein.  $\overline{ABCD}$  wird also von einem Kreis umschrieben:

$$\begin{aligned}\angle DAB + \angle DCB &= 180^\circ = \angle DAB + \angle DC'B \\ \angle DCB &= \angle DC'B,\end{aligned}$$

was nicht möglich ist, wenn  $C$  auf dem Kreis liegt und  $C'$  innerhalb des Kreises liegt.  $\square$

**Satz A.16.** Die gegenüberliegenden Winkel eines gleichschenkligen Trapezes sind ergänzend.

*Beweis.* Konstruieren Sie die Linie  $\overline{AB'}$  parallel zu  $\overline{CD}$  (Abb. A.17).  $\overline{AB'CD}$  ist ein Parallelogramm und  $\triangle ABB'$  ist ein gleichschenkliges Dreieck, also  $\angle C = \angle ABB' = \angle AB'B = \angle B$ . Ähnlich verhält es sich mit  $\angle A = \angle D$ . Da die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Vierecks gleich  $360^\circ$  ist:

$$\begin{aligned}\angle A + \angle B + \angle C + \angle D &= 360^\circ \\ 2\angle A + 2\angle C &= 360^\circ \\ \angle A + \angle C &= 180^\circ,\end{aligned}$$

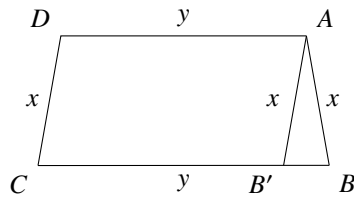


Abb. A.17: Ein isoceles Trapez

und in ähnlicher Weise  $\angle B + \angle D = 180^\circ$ .

□

**Satz A.17.** *Ein isozyklisches Trapez kann von einem Kreis umschrieben werden.*

Der Beweis ist unmittelbar durch Thms. A.15, A.16.

#### A.4.2 Beweis des Satzes von Ptolemäus

**Satz A.18.** (Ptolemy) *Bei einem Viereck, das von einem Kreis umschrieben wird, setzt die folgende Formel die Längen der Diagonalen und der Seiten in Beziehung (Abb. A.18).*

$$ef = ac + bd.$$

*Beweis.* Nach dem Kosinussatz für die vier Dreiecke  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ADC$ ,  $\triangle DAB$ ,

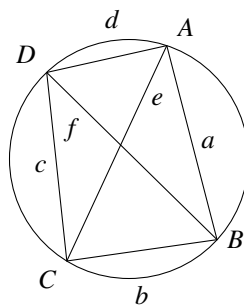


Abb. A.18: Ptolemäus' Theorem

$\triangle DCB$ :

$$\begin{aligned} e^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle B \\ e^2 &= c^2 + d^2 - 2cd \cos \angle D \\ f^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cos \angle A \\ f^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle C . \end{aligned}$$

$\angle C = 180^\circ - \angle A$  und  $\angle D = 180^\circ - \angle B$ , weil sie entgegengesetzte Winkel eines von einem Kreis umschriebenen Vierecks sind, also  $\cos \angle D = -\cos \angle B$  und  $\cos \angle C = -\cos \angle A$ . Eliminiert man den Kosinusterm aus den obigen Gleichungen, erhält man:

$$\begin{aligned} e^2(cd + ab) &= abc^2 + abd^2 + a^2cd + b^2cd \\ e^2 &= \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{(ab + cd)} \\ f^2 &= \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{(ad + bc)} . \end{aligned}$$

Multiplizieren Sie die beiden Gleichungen und vereinfachen Sie sie, um das Theorem von Ptolemäus zu erhalten:

$$\begin{aligned} e^2 \cdot f^2 &= (ac + bd)^2 \\ ef &= (ac + bd) . \end{aligned}$$

□

## A.5 Ceva's Theorem

**Satz A.19.** (Ceva) Bei Liniensegmenten von den Eckpunkten eines Dreiecks zu den gegenüberliegenden Kanten, die sich in einem Punkt schneiden, erfüllen die Längen der Segmente (Fig. A.19):

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = 1 .$$

*Beweis.* Wenn die Höhen von zwei Dreiecken gleich sind, sind ihre Flächen proportional zu den Basen. In beiden Diagrammen in Abb. A.20 sind die Höhen der grauen Dreiecke gleich, also:

$$\frac{\triangle BQO}{\triangle SQO} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} , \quad \frac{\triangle BQA}{\triangle SQA} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} .$$

Durch Subtraktion der Flächen der angegebenen Dreiecke erhält man das Verhältnis zwischen den grauen Dreiecken in Abb. A.21:

$$\frac{\triangle BOA}{\triangle SOA} = \frac{\triangle BQA - \triangle BQO}{\triangle SQA - \triangle SQO} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} .$$

Das mag auf den ersten Blick seltsam erscheinen, deshalb erklären wir es mit einer einfacheren Notation:

$$\begin{aligned}\frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \\ \frac{e}{f} &= \frac{a}{b} \\ c - e &= \frac{ad}{b} - \frac{af}{b} = \frac{a}{b}(d - f) \\ \frac{c - e}{d - f} &= \frac{a}{b}.\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise können wir beweisen:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} &= \frac{\triangle AOS}{\triangle BOS} \\ \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} &= \frac{\triangle SOB}{\triangle AOB},\end{aligned}$$

so:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = \frac{\triangle AOS}{\triangle BOS} \frac{\triangle BOA}{\triangle SOA} \frac{\triangle SOB}{\triangle AOB} = 1,$$

da die Reihenfolge der Scheitelpunkte in einem Dreieck keinen Unterschied macht.

□

## A.6 Der Satz des Menelaos

**Satz A.20.** (Menelaos) Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck und  $\overline{DBQ}$  eine Transversallinie, die alle drei Kanten des Dreiecks oder deren Erweiterungen schneidet (Abb. A.22).

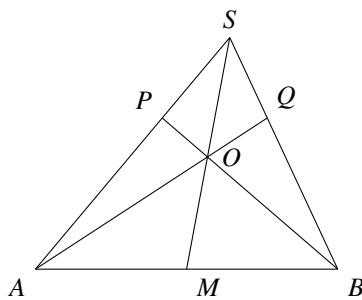


Abb. A.19: Cevas Theorem

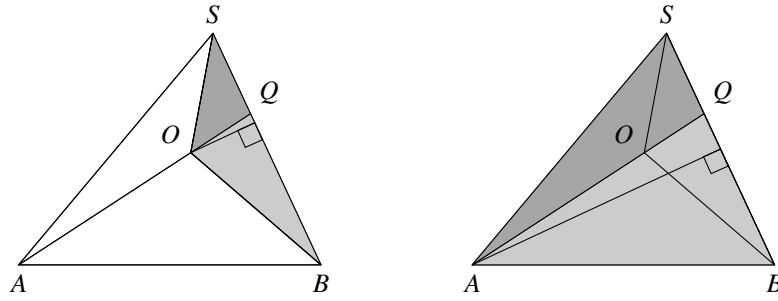


Abb. A.20: Dreiecke in Ceva Theorem

Dann:<sup>3</sup>

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = 1. \quad (\text{A.6})$$

<sup>3</sup>Abhängig von der Konfiguration des Dreiecks und der transversalen Linie kann das Ergebnis der Multiplikation entweder plus oder minus eins sein.

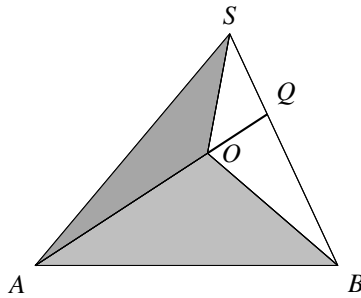


Abb. A.21: Subtraktion von Flächen im Ceva-Theorem

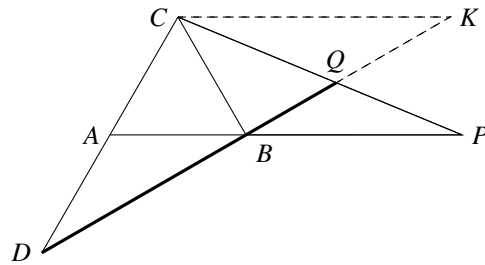


Abb. A.22: Menelaos' Theorem



*Beweis.* Ziehe eine Linie durch  $C$  parallel zu  $\overline{AB}$  und verlängere  $\overline{DQ}$ , bis sie die Parallele in  $K$  schneidet. Aus  $\triangle ADB \sim \triangle CDK$  ergibt sich, dass:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{AB}}.$$

Aus  $\triangle BQP \sim \triangle KQC$  ergibt sich, dass:

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{BP}}.$$

Die Eliminierung von  $\overline{CK}$  ergibt  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{PQ} = \overline{QC} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{AD}$ , das umgeordnet werden kann, um Gl. A.6 zu erhalten.  $\square$

## Quellen

Der Anhang basiert in erster Linie auf [19]. Cevas Theorem und Menelaus' Theorem können aus einander bewiesen werden [45].

## Literaturverzeichnis

- [1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK (Fifth Edition)*. Springer, 2014.
- [2] Roger C. Alperin. A mathematical theory of origami constructions and numbers. *New York Journal of Mathematics*, 6:119–133, 2000.
- [3] Marita Barabash. A non-visual counterexample in elementary geometry. *The College Mathematics Journal*, 36(5), 2005.
- [4] Mordechai Ben-Ari. *Mathematical Logic for Computer Science (Third Edition)*. Springer, 2012.
- [5] Mordechai Ben-Ari. LearnSAT: A SAT solver for education. *Journal of Open Source Software*, 3(24):639, 2018. <https://doi.org/10.21105/joss.00639>.
- [6] Jörg Bewersdorff. *Galois Theory for Beginners: A Historical Perspective*. American Mathematical Society, 2006.
- [7] Benjamin Bold. *Famous Problems of Mathematics: A History of Constructions with Straight Edge and Compass*. Van Nostrand, 1969.
- [8] Phillips Verner Bradford. Visualizing solutions to n-th degree algebraic equations using right-angle geometric paths. Archived May 2, 2010 at the Wayback Machine. <https://web.archive.org/web/20100502013959/http://www.concentric.net/~pvb/ALG/rightpaths.html>, 2010.
- [9] Lane Butler IV. Ramsey theory. <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2016/Barton.pdf>, 2016.
- [10] James J. Callagy. The central angle of the regular 17-gon. *The Mathematical Gazette*, 67(442):290–292, 1983. <https://www.jstor.org/stable/3617271>.
- [11] Richard Courant and Hebert Robbins. *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods (Second Edition)*. Oxford University Press, 1996. Revised by Ian Stewart.
- [12] R.O. Davies. On Langford’s problem (II). *The Mathematical Gazette*, 43:253–5, 1959.
- [13] Heinrich Dörrie. *100 Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*. Dover, 1965.

- [14] Heinrich Dörrie. 100 problems of elementary mathematics: Their history and solution. Reworked by Michael Woltermann. Archived 21 February 2020 at the Wayback Machine. <https://web.archive.org/web/20191223032114/http://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/DorrieContents.htm>, 2010.
- [15] Underwood Dudley. *A Budget of Trisections*. Springer, 1987.
- [16] David Eppstein. Twenty proofs of Euler’s formula:  $V - E + F = 2$ . <https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>, n.d.
- [17] John B. Fraleigh. *A First Course in Abstract Algebra (Seventh Edition)*. Addison-Wesley, 2003.
- [18] Karl Friedrich Gauss. *Disquisitiones Arithmeticae*. Yale University Press, 2006. Editors: Todd W. Bressi and Paul Groth.
- [19] I.M. Gelfand and Mark Saul. *Trigonometry*. Springer, 2001.
- [20] Ron Graham and Steve Butler. *Rudiments of Ramsey Theory (Second Edition)*. American Mathematical Society, 2015.
- [21] David S. Gunderson. *Handbook of Mathematical Induction: Theory and Applications*. Mathematical Association of America, 2010.
- [22] Thomas L. Heath. *The Thirteen Books of Euclid’s Elements*. Dover, 1956.
- [23] Marijn J. H. Heule and Oliver Kullmann. The science of brute force. *Communications of the ACM*, 60(8):70–79, 2017.
- [24] Thomas C. Hull. Solving cubics with creases: The work of Beloch and Lill. *American Mathematical Monthly*, 118(4):307–315, 2011.
- [25] Norbert Hungerbühler. A short elementary proof of the Mohr-Mascheroni theorem. *American Mathematical Monthly*, 101(8):784–787, 1994.
- [26] Robert J. Lang. Origami and geometric constructions. [http://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami\\_constructions.pdf](http://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf), 1996–2015.
- [27] Detlef Laugwitz. Eine elementare Methode für Unmöglichkeitbeweise bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. *Elemente der Mathematik*, 17:54–58, 1962.
- [28] Po-Shen Loh. A different way to solve quadratic equations. <https://www.poshenloh.com/quadratic/>, 2019.

- [29] Po-Shen Loh. A simple proof of the quadratic formula. <https://arxiv.org/abs/1910.06709>, 2019.
- [30] Zohar Manna. *Mathematical Theory of Computing*. McGraw-Hill, 1974.
- [31] George E. Martin. *Geometric Constructions*. Springer, 1998.
- [32] Luke Mastin. Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi: Muslim Mathematician. [https://www.storyofmathematics.com/islamic\\_alkhwarizmi.html](https://www.storyofmathematics.com/islamic_alkhwarizmi.html), 2020.
- [33] William McCallum. A tale of two triangles: Heron triangles and elliptic curves. <http://blog.kleinproject.org/?p=4>, 2012.
- [34] Brendan D. McKay. Ramsey theory. <http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/ramsey.html>, nd.
- [35] J.E. Miller. Langford’s problem, remixed. <http://dialectrix.com/langford.html>, 2014.
- [36] Liz Newton. The power of origami. <https://plus.maths.org/content/power-origami>.
- [37] Timothy Peil. The rusty compass theorem. Archived 20/07/2020 at the Wayback Machine. <https://web.archive.org/web/20200720195718/http://web.mnstate.edu/peil/geometry/C2EuclidNonEuclid/1Compass.htm>, 2006.
- [38] Ramanujan. Squaring the circle. *Journal of the Indian Mathematical Society*, V:138, 1913. <http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram05.pdf>.
- [39] Ramanujan. Modular equations and approximations to  $\pi$ . *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, XLV:350–372, 1914. <http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram06.pdf>.
- [40] M. Riaz. Geometric solutions of algebraic equations. *American Mathematical Monthly*, 69(7):654–658, 1962.
- [41] Tom Rike. Fermat numbers and the heptadecagon. <https://mathcircle.berkeley.edu/sites/default/files/BMC6/ps0506/Heptadecagon.pdf>, 2005.
- [42] Eleanor Robson. Words and pictures: New light on Plimpton 322. *American Mathematical Monthly*, 109(2):105–120, 2002.
- [43] Sheldon Ross. *A First Course in Probability (Tenth Edition)*. Pearson, 2019.

- [44] Peter Schumer. The Josephus problem: Once more around. *Mathematics Magazine*, 75(1):12–17, 2002.
- [45] John R. Silvester. Ceva = (Menelaus)<sup>2</sup>. *The Mathematical Gazette*, 84(500):268–271, 2000.
- [46] Timothy Sipka. Alfred Bray Kempe’s “Proof” of the four-color theorem. *Math Horizons*, 10(2):21–26, 2002. <http://www.jstor.org/stable/25678395>.
- [47] John Stillwell. *Mathematics and Its History (Third Edition)*. Springer, 2010.
- [48] Jeff Suzuki. A brief history of impossibility. *Mathematics Magazine*, 81(1):27–38, 2008.
- [49] Robin Thomas. An update on the four-color theorem. *Notices of the AMS*, 45(7):848–859, 1998. <http://www.ams.org/notices/199807/thomas.pdf>.
- [50] Godfried Toussaint. A new look at Euclid’s second proposition. *The Mathematical Intelligencer*, 15(3):12–23, 1993.
- [51] Wikipedia. Angle trisection.
- [52] Wikipedia. Cubic equation.
- [53] Wikipedia. Five color theorem.
- [54] Wikipedia. Four color theorem.
- [55] Wikipedia. Heptadecagon.
- [56] Wikipedia. Huzita–Hatori axioms.
- [57] Wikipedia. Josephus problem.
- [58] Wikipedia. Neusis construction.
- [59] Wikipedia. Pentagon.
- [60] Wikipedia. Plimpton 322.
- [61] Wikipedia. Quadratrix of Hippias.
- [62] Wikipedia. Sexagesimal.