# פרק 16

# בניית מצולע משוכלל עם 17 צלעות

פרק זה מציג את החישוב של Gauss שהראה שניתן לבנות באמצעות סרגל ומחוגה **heptadecagon**, מצולע משוכלל עם 17 צלעות. נציג גם בניה של המצולע ובנוסף בניות של משולש משוכלל ומחומש משוכלל.

straightedge a with construct to how knew Greeks the that polygons regular only The 15 with polygon regular the and pentagon the square, the triangle, the were compass and constructed be can sides $2n$ with polygon a sides, $n$ with polygon regular a Given sides. .(16.1 (Fig. angle central the bisecting and circle a with polygon the circumscribing by morning, one awoke Gauss Friedrich Carl when 1796 until made was progress further No construct to how out figured thought'' ``concentrated by and birthday, 19th his before just him inspired achievement This sides. 17 with polygon regular a heptadecagon, regular a mathematician. a become to

the and circle a in inscribed polygon a of side the between relation the discusses ?? Section Theorem Fundamental the proof without states ?? Section subtends. it that angle central ,$x^n - 1$ polynomial the of roots the unity, of roots the presents 16.3 Section Algebra. of which proof Gauss's present 16.5 and 16.4 Sections proof. Gauss's to central are which that proving formula a derived Gauss polynomials. of roots of symmetries on based is almost for given not was construction geometric a but constructible, is heptadecagon the ?? Section Callagy. J. James by construction elegant an gives 16.6 Section century. a and geometry both using derived be can pentagon regular a of constructions how shows trigonometry.

This numbers. complex using presented if straightforward more is material the of Some skipped. be can that boxes in off set is material

## 16.1 בניה של מצולעים משוכללים

### 16.1.1 היסטוריה

היוונים ידעו לבנות מצולעים משוכללים מסויימים עם סרגל ומחוגה: משולש, ריבוע, מחומש ומצולע משוכלל עם 15 צלעות. כמובן, בהינתן מצולע משוכלל עם $n$ צלעות, קל לבנות מצולע עם $2n$ צלעות על ידי בניית חוצי הצלעות.

לא הייתה התקדמות במשך אלפיים שנה עד שבשנת 1796, קצת לפני יום הולדתו ה-19, Carl Friedrich Gauss התעורר בוקר אחד ולאחר "מחשבה מרוכזת" מצא דרך לבנות מצולע משוכלל עם 17 צלעות. הישג זה עודד אותו להיות מתמטיקאי.

הבניה של מצולע משוכלל עם 17 צלעות היתה אבן דרך למשפט Gauss-Wantzel: מצולע משוכלל עם $n$ צלעות ניתן לבנות עם סרגל ומחוגה אם ורק אם $n$ הוא מכפלה של חזקה של 2 ואפס או יותר מספרי Fermat ראשונים **שונים** $2^{2^k}+1$. מספרי Fermat הראשונים הידועים הם[1]:

$$F_0 = 3,\ F_1 = 5,\ F_2 = 17,\ F_3 = 257,\ F_4 = 65537\,.$$

מצולע משוכלל עם 257 צלעות נבנה לראשונה על ידי Magnus Georg Paucker ב-1822 ועל ידי Friedrich Julius Richelot ב-1832. ב-1894 Johann Gustav Hermes טען שבנה מצולע משוכלל עם 65537 צלעות. כתב היד שלו נשמר באוניברסיטת Göttigen.

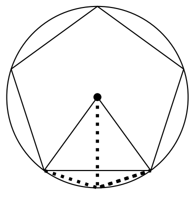
נתון קטע קו שאורכו מוגדר כ-1, האורכים שניתנים לבנייה הם אלה שניתן לקבל מאורכים קיימים תוך שימוש בפעולות $\{+,-,\times,/,\sqrt{}\}$.

### 16.1.2 הקוסינוס של הזווית המרכזית

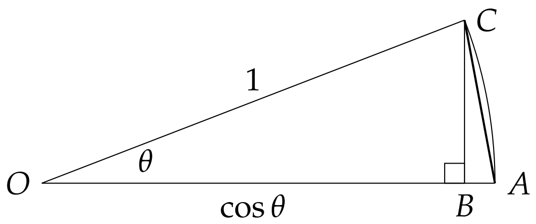
כדי לבנות מצולע משוכלל מספיק לבנות קטע קו באורך $\cos\theta$, כאשר $\theta$ היא הזווית המרכזית במעגל היחידה עליה נשען המיתר שהוא צלע של המצולע. נתון קטע הקו $\overline{OB} = \cos\theta$, בנו אנך ב-$B$ וסמנו את החיתוך שלו עם מעגל היחידה ב-$C$. אזי $\overline{OC} = 1$ ו-$\overline{OB} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \cos\theta$. המיתר $\overline{AC}$ הוא צלע של המצולע.

הזווית המרכזית של מצולע משוכלל עם 17 צלעות היא $\dfrac{2\pi}{17}$ רדיאנים או $\dfrac{360^\circ}{17} \approx 21.12^\circ$.

[1] הוכח שעבור $5 \le k \le 32$ מספרי Fermat אינם ראשוניים.



איור 16.1: Constructing a regular polynomial with 10 sides from a regular pentagon




איור 16.2 : הקוסינוס של הזווית המרכזית של מצולע משוכלל

Gauss הראה ש :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

ערך זה ניתן לחשב תוך שימוש בפעולות $\{+, -, \times, /, \sqrt{}\}$ ולכן ניתן לבנות את המצולע.

## 16.2 המשפט הבסיסי של אלגברה

נשתמש במשפט שלהלן ללא הוכחה :

**משפט 16.1 (המשפט הבסיסי של אלגברה)**
לכל פולינום ממעלה $n$ )עם מקדמים מרוכבים( יש בדיוק $n$ שורשים )מרוכבים(.

## 16.3 שורשי היחידה

נתבונן במשוואה $x^n - 1 = 0$ עבור כל מספר שלם $n > 1$. שורש אחד הוא $x = 1$. לפי משפט 16.1 קיימים $n - 1$ שורשים נוספים. נסמן שורש אחד מתוכם ב-$r$ כך ש-$r^n = 1$. $r$ נקרא

נתבונן כעת ב-$r^2$. אנו רואים ש :

$$(r^2)^n = (r^n)^2 = 1^2 = 1\,.$$

חישוב דומה עבור כל חזקה של $r$ מראה שכל החזקות הם שורשי היחידה :

$$1, r, r^2, \ldots, r^{n-2}, r^{n-1}\,.$$

**משפט 16.2**
יהי $n$ ראשוני ו-$r$ שורש היחידה מסדר $n$. אזי $\{1, r, r^2, \ldots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$ שונים זה מזה ולכן הם מהווים את **כל** שורשי היחידה מסדר $n$.

**הוכחה:** נניח ש-$r^i = r^j$ עבור מספרים כלשהם $1 \leq i < j \leq n$. $r^j / r^i = r^{j-i} = 1$, כלומר, קיים מספר $m < n$ ,$m$ כך ש-$r^m = 1$. נניח ש-$m$ הוא המספר הקטן ביותר עם תכונה זו. לפי חילוק של שלמים עם שארית, $n = ml + k$ עבור $0 < l < n$, $0 \leq k < m$:

$$1 = r^n = r^{ml+k} = (r^m)^l \cdot r^k = 1^l \cdot r^k = r^k ,$$

ולכן $0 \leq k < m$ ו-$r^k = 1$, סתירה להנחה ש-$m$ הוא המספר הקטן ביותר המקיים את התנאי. מכאן ש-$k = 0$ ו-$n = ml$, כך ש-$n$ אינו ראשוני. □

נשתמש במשפט שלהלן ללא הוכחה:

**משפט 16.3**

יהיו $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ השורשים של פולינום $f(x)$ מסדר $n$. אזי:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-1})(x - a_n) .$$

מהנוסחה של Vieté (עמוד 82 של [6]) מתקבלים המקדמים של הפולינום כביטויים עם השורשים. עבור $x^{n-1}$ המקדם הוא:

$$-(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) .$$

בפולינום $x^n - 1$, ברור שהמקדם של $x^{n-1}$ הוא אפס ולכן:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} = 0 .$$

נשמתמש בעובדה זו בצורה:

$$r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} = -1 .$$

עבור מצולע משוכלל עם 17 צלעות המשוואה היא:

$$r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + r^7 + r^8 + r^9 + r^{10} + r^{11} + r^{12} + r^{13} + r^{14} + r^{15} + r^{16} = -1 ,$$

## 16.4 ההוכחה של Gauss שניתן לבנות heptadecagon

אין חובה לעבוד עם השורשים בסדר הטבעי שלהם $r, r^2, \ldots, r^{16}$. החזקות של $r^3$ נותנות אם כל השורשים אבל בסדר שונה. עבור $k < 17$, $r^{17m+k} = (r^{17})^m \cdot r^k = 1^m \cdot r^k = r^k$, ולכן רשמנו את החזקות כשאריות לאחר חלוקה ב-17.

$$r^1,\ r^{1\cdot 3=3},\ r^{3\cdot 3=9},\ r^{9\cdot 3=27=10},\ r^{10\cdot 3=30=13},\ r^{13\cdot 3=39=5},\ r^{5\cdot 3=15},\ r^{15\cdot 3=45=11}, \tag{16.1}$$

$$r^{11\cdot 3=33=16},\ r^{16\cdot 3=48=14},\ r^{14\cdot 3=42=8},\ r^{8\cdot 3=24=7},\ r^{7\cdot 3=21=4},\ r^{4\cdot 3=12},\ r^{12\cdot 3=36=2},\ r^{2\cdot 3=6} . \tag{16.2}$$

חשוב שתבדקו שהרשימה כוללת את כל 16 השורשים בדיוק פעם אחת.

המטרה של Gauss היתה למצוא את ערך השורש $r$ על ידי פתרון של משוואות ריבועיות, כך שניתן לבנות אותו עם סרגל ומחוגה. נתבונן במשוואה הריבועית:

$$x^2 + px + q = 0\,,$$

ונניח שהשורשים שלה הם: $a, b$. אזי:

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab\,.$$

לכן $p = -(a+b)$ ו-$q = ab$.

אם **נתונים** $a+b$ ו-$ab$, נוכל לרשום את המשוואה הריבועית עבורה הם השורשים.[2]

יהי $a_0$ החיבור של השורשים במקומות האי-זוגיים ברשימה לעיל:

$$a_0 = r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2\,,$$

ויהי $a_1$ הסכום של השורשים במקומות הזוגיים ברשימה:

$$a_1 = r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6\,.$$

כדי לקבל את $a_0, a_1$ כשורשים של משוואה ריבועית, תחילה נחשב את הסכום שלהם:

$$a_0 + a_1 = r + r^2 + \cdots + r^{16} = -1\,.$$

כדי למצוא את המשוואה הריבועית עלינו לחשב את $a_0a_1$. החישוב מעט מסורבל ומוצג באיור 16.3. הערכים של $r^ir^j$ רשומים לאחר חישוב $r^{(i+j) \bmod 17}$. מתחת לכל שורש נמצא מספר המופעים שלו עד כה; בדקו שכל שורש מופיע בדיוק ארבע פעמיים כך שערכה של המכפלה הוא $-4$.

מ-$a_0+a_1=-1$ ו-$a_0, a_1=-4$, אנו יודעים ש-$a_0, a_1$ הם השורשים של המשוואה:

$$x^2 + x - 4 = 0\,.$$

השורשים הם:

$$a_{0,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}\,.$$

יהי $b_0, b_1, b_2, b_3$ הסכום של כל שורש רביעי החל מ-$r^1, r^3, r^9, r^{10}$, בהתאמה:

$$\begin{aligned}
b_0 &= r^1 + r^{13} + r^{16} + r^4\\
b_1 &= r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12}\\
b_2 &= r^9 + r^{15} + r^8 + r^2\\
b_3 &= r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6\,.
\end{aligned}$$

בדקו ש-$b_0 + b_2 = a_0, b_1 + b_3 = a_1$ (איורים **??**, **??**).

---

[2] ראו פרק 7 המציג שיטה למציאת שורשים של משוואה ריבועית המבוססת על הרעיון הזה.

$$
\begin{aligned}
a_0a_1 &= (r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2)\ \cdot \\
&\quad (r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6) \\
&= \underset{1}{r^4} + \underset{1}{r^{11}} + \underset{1}{r^6} + \underset{1}{r^{12}} + \underset{1}{r^{15}} + \underset{1}{r^8} + \underset{1}{r^{13}} + \underset{1}{r^7} + \\
&\quad \underset{2}{r^{12}} + \underset{1}{r^2} + \underset{1}{r^{14}} + \underset{1}{r^3} + \underset{2}{r^6} + \underset{1}{r^{16}} + \underset{2}{r^4} + \underset{2}{r^{15}} + \\
&\quad \underset{2}{r^{16}} + \underset{3}{r^6} + \underset{1}{r^1} + \underset{2}{r^7} + \underset{1}{r^{10}} + \underset{2}{r^3} + \underset{2}{r^8} + \underset{2}{r^2} + \\
&\quad \underset{2}{r^1} + \underset{3}{r^8} + \underset{3}{r^3} + \underset{1}{r^9} + \underset{3}{r^{12}} + \underset{1}{r^5} + \underset{2}{r^{10}} + \underset{3}{r^4} + \\
&\quad \underset{3}{r^2} + \underset{2}{r^9} + \underset{4}{r^4} + \underset{3}{r^{10}} + \underset{2}{r^{13}} + \underset{4}{r^6} + \underset{2}{r^{11}} + \underset{2}{r^5} + \\
&\quad \underset{3}{r^{11}} + \underset{3}{r^1} + \underset{3}{r^{13}} + \underset{4}{r^2} + \underset{2}{r^5} + \underset{3}{r^{15}} + \underset{4}{r^3} + \underset{2}{r^{14}} + \\
&\quad \underset{3}{r^7} + \underset{3}{r^{14}} + \underset{3}{r^9} + \underset{4}{r^{15}} + \underset{4}{r^1} + \underset{4}{r^{11}} + \underset{3}{r^{16}} + \underset{4}{r^{10}} + \\
&\quad \underset{4}{r^5} + \underset{4}{r^{12}} + \underset{4}{r^7} + \underset{4}{r^{13}} + \underset{4}{r^{16}} + \underset{4}{r^9} + \underset{4}{r^{14}} + \underset{4}{r^8} \\
&= -4\,.
\end{aligned}
$$

איור 16.3 : החישוב של $a_0a_1$

$$
\begin{aligned}
b_0b_2 &= (r + r^{13} + r^{16} + r^4)\ \times \\
&\quad (r^9 + r^{15} + r^8 + r^2) \\
&= r^{10} + r^{16} + r^9 + r^3 + \\
&\quad r^5 + r^{11} + r^4 + r^{15} + \\
&\quad r^8 + r^{14} + r^7 + r^1\ + \\
&\quad r^{13} + r^2 + r^{12} + r^6 \\
&= -1\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1b_3 &= (r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12}) \times \\
&\quad (r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6) \\
&= r^{13} + r^{14} + r^{10} + r^9\ + \\
&\quad r^{15} + r^{16} + r^{12} + r^{11} + \\
&\quad r^7 + r^8 + r^4 + r^3\ + \\
&\quad r^5 + r^6 + r^2 + r^1 \\
&= -1\,.
\end{aligned}
$$

נסכם את החישובים:

$$\begin{aligned} b_0 + b_2 &= a_0 \\ b_0 b_2 &= -1 \\ b_1 + b_3 &= a_1 \\ b_1 b_3 &= -1 \,. \end{aligned}$$

$b_0, b_2$ הם השורשים של:

$$x^2 - a_0 x - 1 = 0 \,,$$

ו-$b_1, b_3$ הם השורשים של:

$$x^2 - a_1 x - 1 = 0 \,.$$

מהנוסחה לפתרון משוואות ריבועיות ומהערכים שחישבנו קודם עבור $a_0, a_1$, מתקבלים השורשים $b_0, b_1$ (איור ??, 16.4).

לבסוף יהי $c_0, c_4$ הסכום של כל שורש שמיני החל מ-$r^1, r^{13}$, בהתאמה:[3]

$$\begin{aligned} c_0 &= r^1 + r^{16} \\ c_4 &= r^{13} + r^4 \\ c_0 + c_4 &= r^1 + r^{16} + r^{13} + r^4 = b_0 \\ c_0 c_4 &= (r^1 + r^{16}) \cdot (r^{13} + r^4) \\ &= r^{14} + r^5 + r^{12} + r^3 = b_1 \,. \end{aligned}$$

$c_0, c_4$ הם השורשים של:

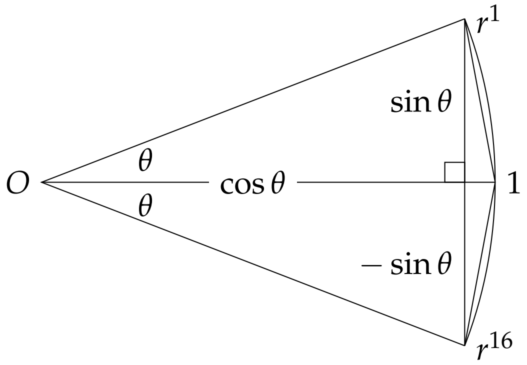
$$y^2 - b_0 y + b_1 = 0 \,.$$

נראה שמספיק לחשב את השורש $c_0 = r^1 + r^{16}$ (איור 16.6).

[3] יש סכומים נוספים אבל שני אלה יספיקו.

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \frac{a_0+\sqrt{a_0^2+4}}{2}\\
&= \frac{\dfrac{(-1+\sqrt{17})}{2}+\sqrt{\left[\dfrac{(-1+\sqrt{17})}{2}\right]^2+4}}{2}\\
&= \frac{(-1+\sqrt{17})+\sqrt{\left[-1+\sqrt{17}\right]^2+16}}{4}\\
&= \frac{(-1+\sqrt{17})+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\\
b_1 &= \frac{a_1+\sqrt{a_1^2+4}}{2}\\
&= \frac{\dfrac{(-1-\sqrt{17})}{2}+\sqrt{\left[\dfrac{(-1-\sqrt{17})}{2}\right]^2+4}}{2}\\
&= \frac{(-1-\sqrt{17})+\sqrt{\left[-1-\sqrt{17}\right]^2+16}}{4}\\
&= \frac{(-1-\sqrt{17})+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}\,.
\end{aligned}
$$

איור 16.4: החישוב של $b_0, b_1$




איור 16.5: בניית צלע מהזווית המרכזית שהוא כולא

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4b_1}}{2} \\
&= \frac{\frac{(-1+\sqrt{17}) + \sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}}{2} + \\
&\quad \frac{\sqrt{\left[\frac{(-1+\sqrt{17}) + \sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\right]^2 - 4\left[\frac{(-1-\sqrt{17}) + \sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}\right]}}{2} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{\left[(-1+\sqrt{17}) + \sqrt{34-2\sqrt{17}}\right]^2 - 16\left[(-1-\sqrt{17}) + \sqrt{34+2\sqrt{17}}\right]} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{(-1+\sqrt{17})^2 + 2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} + (34-2\sqrt{17}) -} \\
&\quad \overline{\left[(-16-16\sqrt{17}) + 16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right]} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}
\end{aligned}
$$

איור 16.6: החישוב של $c_0$

סיימנו כי:

$$c_0 = r_1 + r_{16} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right).$$

קואורדינטות ה-$y$ של $r_1, r_{16}$ שוות עם סימנים הפוכים ולכן הסכום שלהם אפס. קואורדינטות ה-$x$ נספרות פעמיים:

הוכחנו שניתן לבנות קטע קו באורך הקוסינוס של הזווית המרכזית של מצולע משוכלל עם 17 צלעות, כי הוא מורכב רק ממספרים רציונליים והפעולות $\{+, -, \times, /, \sqrt{}\}$:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{16}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$

נסכם את הייצוג של השורשים של $x^{17} - 1$ כמספרים מרוכבים.[4]

השורש $r$ של $x^n - 1$ הוא

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

כי לפי נוסחאת de Moivre:

$$\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^n = \cos\left(\frac{2\cdot n\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot n\pi}{n}\right) = 1,$$

הקשר בין $c_0$ לבין הקוסינוס של הזווית המרכזית של המצולע מתקבל בקלות:

$$\begin{aligned}
c_0 &= r_1 + r_{16} \\
&= \left[\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right)\right] + \left[\cos\left(\frac{2\cdot 16\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 16\pi}{17}\right)\right] \\
&= \left[\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{-2\pi}{17}\right)\right] + i\left[\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \sin\left(\frac{-2\pi}{17}\right)\right] \\
&= 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i\cdot 0 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right).
\end{aligned}$$

## 16.5 פיתוח הנוסחה של Gauss

הנוסחה שקיבלנו עבור $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ איננה הנוסחה שניתנה על ידי Gauss עצמו )ראו עמוד 458 של [17] ועמוד 68 של [6](. את הנוסחה שקיבלתי מצאתי רק ב-[39] ביחד עם תרגיל להמיר אותה לנוסחה של Gauss. סעיף זה פותר את התרגיל.

[4] מספרים מרוכבים עומדים במרכז החקר של השורשים של פולינומים. קוראים שלא מכירים את הנושא יכולים לדלג על סעיף זה.

נפשט את הביטוי $2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}$:

$$\begin{aligned}
2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} &= -2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\\
&\quad 4\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}\\
&= 2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\\
&\quad -4\sqrt{34-2\sqrt{17}}\\
&= 2(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}$$

נזכור את הביטוי $-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}$ ונפשט את הביטוי הראשון. נרבע אותו ואז נוציא שורש הריבועי:

$$\begin{aligned}
2(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} &= 2\sqrt{\left[(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right]^2}\\
&= 2\sqrt{(18+2\sqrt{17})(34-2\sqrt{17})}\\
&= 2\sqrt{(18\cdot 34-4\cdot 17)+\sqrt{17}(2\cdot 34-2\cdot 18)}\\
&= 2\cdot 4\sqrt{34+2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}$$

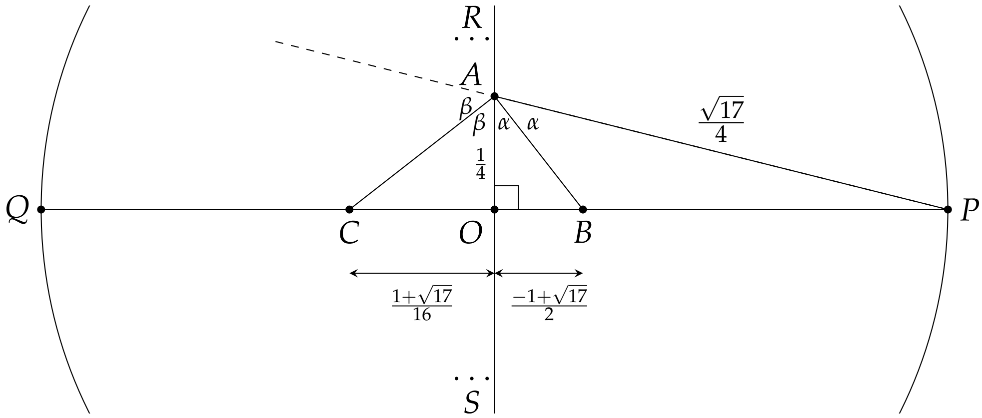
נציב את הביטויים ונקבל את הנוסחה של Gauss:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) &= -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\\
&\quad \frac{1}{16}\sqrt{68+12\sqrt{17}+2\cdot 4\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\\
&= -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}
\end{aligned}$$

## 16.6 בניית heptadecagon עם סרגל ומחוגה

בנו מעגל יחידה שמרכזו $O$, עם קוטרים ניצבים $\overline{PQ}, \overline{RS}$.

בנו נקודה $A$ כך ש-$\overline{OA}=\frac{1}{4}\overline{OR}$. לפי משפט פיתגורס, $\overline{AP}=\sqrt{(1/4)^2+1^2}=\sqrt{17}/4$.




איור 16.7: בניית heptadecagon (1)

יהי $B$ נקודת החיתוך של $\angle OAP$ עם ציר ה-$x$, ויהי $C$ נקודת החיתוך של הזווית המשלימה ל-$\angle OAP$ עם ציר ה-$x$. לפי משפט חוצה הזווית [49]:

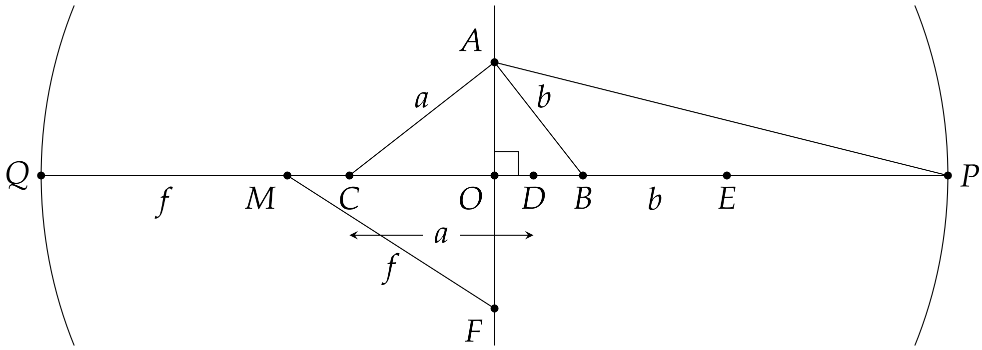
$$\begin{aligned}
\frac{\overline{OB}}{\overline{BP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}}\\
\frac{\overline{OB}}{1-\overline{OB}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4}\\
\overline{OB} &= \frac{1}{1+\sqrt{17}} = \frac{1}{1+\sqrt{17}} \cdot \frac{1-\sqrt{17}}{1-\sqrt{17}}\\
&= \frac{-1+\sqrt{17}}{16},
\end{aligned}$$

ו:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{OC}}{\overline{CP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}}\\
\frac{\overline{OC}}{1+\overline{OC}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4}\\
\overline{OC} &= \frac{1}{-1+\sqrt{17}} = \frac{1}{-1+\sqrt{17}} \cdot \frac{1+\sqrt{17}}{1+\sqrt{17}}\\
&= \frac{1+\sqrt{17}}{16}.
\end{aligned}$$

בנו $D$ על $\overline{OP}$ כך ש-$\overline{CD} = \overline{CA}$:

$$\overline{CD} = \overline{CA} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2}$$




איור 16.8: בניית heptadecagon (2)

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{17}}{16}\right)^2} \\
&= \frac{1}{16}\sqrt{34+2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}
$$

בנו $E$ על $\overline{OP}$ כך ש-$\overline{BE} = \overline{BA}$:

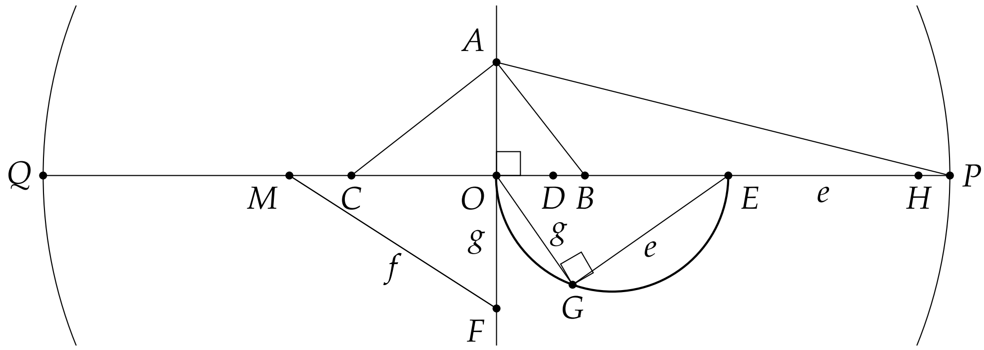
$$
\begin{aligned}
\overline{BE} = \overline{BA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{17}}{16}\right)^2} \\
&= \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}
$$

בנו $M$, נקודת האמצע של $\overline{QD}$ ובנו $F$ על $\overline{OS}$ כך ש-$\overline{MF} = \overline{MQ}$:

$$
\begin{aligned}
\overline{MF} = \overline{MQ} &= \frac{1}{2}\overline{QD} = \frac{1}{2}(\overline{QC} + \overline{CD}) = \frac{1}{2}((1-\overline{OC}) + \overline{CD}) \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1+\sqrt{17}}{16}\right) + \frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{16}\right] \\
&= \frac{1}{32}\left(15 - \sqrt{17} + \sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)\,.
\end{aligned}
$$

בנו מעגל שקוטרו $\overline{OE}$. בנו מיתר $\overline{OG} = \overline{OF}$. שימו לב ש-$\overline{MO} = 1 - \overline{MQ} = 1 - \overline{MF}$:

$$
\overline{OG} = \overline{OF} = \sqrt{\overline{MF}^2 - \overline{MO}^2} = \sqrt{\overline{MF}^2 - (1-\overline{MF})^2}
$$




איור 16.9: בניית heptadecagon (3)

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2\overline{MF}-1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{16}\left(15-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)-1} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\,. \end{aligned}$$

$\overline{OE}$ הוא קוטר של המעגל כך ש-$\angle OGE = 90^\circ$. בנו $H$ על $\overline{OP}$ כך ש-$\overline{EG} = \overline{EH}$:

$$\begin{aligned} \overline{EH} = \overline{EG} &= \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{OG}^2} = \sqrt{(\overline{OB}+\overline{BE})^2 - \overline{OG}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{16}+\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)} \\ &= \frac{1}{16}\sqrt{\left((18-2\sqrt{17})+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}+(34-2\sqrt{17})\right)+ \left(16+16\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)} \\ &= \frac{1}{16}\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\,. \end{aligned}$$

נחשב את $\overline{OE}$:

$$\begin{aligned} \overline{OE} = \overline{OB}+\overline{BE} &= \frac{-1+\sqrt{17}}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} \\ &= \frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right). \end{aligned}$$

לבסוף, $\overline{OH} = \overline{OE}+\overline{EH}$ שהוא $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ כפי שמופיע באיור 16.6.

## 16.7 בניית מחומש משוכלל

**בניה בטריגונומטריה:** הזווית המרכזית היא $360^\circ/5 = 72^\circ$. נחשב $\cos 36^\circ$ תוך שימוש בזהויות הטריגונומטריות עבור $2\theta$ ו-$\theta/2$:

$$\begin{aligned} 0 = \cos 90^\circ &= \cos(72^\circ + 18^\circ) \\ &= (2\cos^2 36^\circ - 1)\sqrt{\frac{1+\cos 36^\circ}{2}} - \\ &\qquad 2\sin 36^\circ \cos 36^\circ \sqrt{\frac{1-\cos 36^\circ}{2}}\,. \end{aligned}$$

נסמן $x = \cos 36^\circ$ ונחשב:

$$\begin{aligned} (2x^2-1)\sqrt{\frac{1+x}{2}} &= 2\sqrt{1-x^2}\cdot x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{2}} \\ (2x^2-1)\sqrt{1+x} &= 2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}\cdot x\cdot\sqrt{1-x} \\ 4x^2-2x-1 &= 0\,. \end{aligned}$$

מהפתרון למשוואה הריבועית מתקבל ערך שניתן לבניה:

$$\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\,.$$

האיור שלהלן מראה שניתן לבנות מחומש משוכלל מ-$\cos 36^\circ$. מ-$D$ במרחק $\cos 36^\circ$ מ-$O$ בנו אנך ל-$\overline{OA}$ החותך את מעגל היחידה ב-$C$. בנו $\overline{OC}$. בנו אנך מ-$A$ ל-$\overline{OC}$. החיתוך שלו עם מעגל היחידה ב-$B$ מגדיר את $\overline{AB}$, הצלע של המחומש החסום על ידי המעגל.

**בניה בגיאומטריה:**

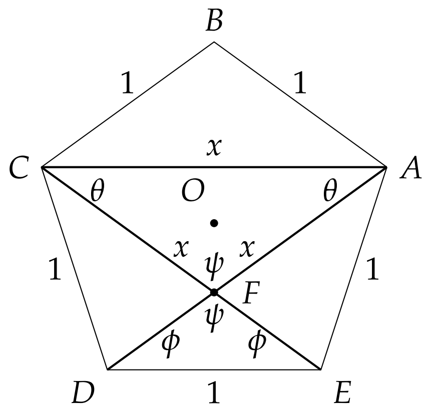
יהי $ABCDE$ מחומש משוכלל. כל הצלעות וכל הזוויות הפנימיות שוות. גם כל האלכסונים שווים. למשל, $\triangle AED \cong \triangle ABC$ לפי צלע-זווית-צלע, כך ש-$\overline{AC} = \overline{AD}$. נסמן את אורכי הצלעות ב-1 ואורכי האלכסונים ב-$x$.

$\triangle ACE \cong \triangle CAD$ לפי צלע-צלע-צלע כך ש-$\angle ACE = \angle CAD = \theta$. $\triangle AED \cong \triangle CDE$ לפי צלע-צלע-צלע כך ש-$\angle ADE = \angle CED = \phi$. $\angle AFC = \angle DFE = \psi$ הן זוויות קודקודיות. $\psi + 2\theta = 180^\circ$ וגם $\psi + 2\phi = 180^\circ$, ולכן $\theta = \phi$. לפי זוויות מתחלפות $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$.

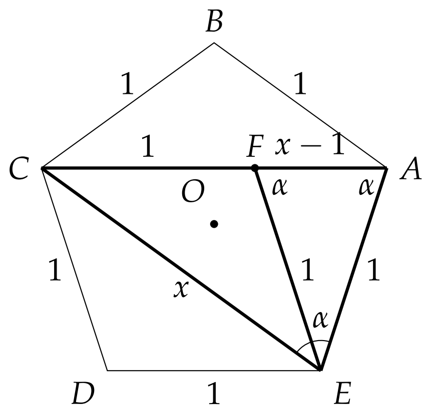
בנו קו דרך $E$ המקביל ל-$\overline{DC}$ ותהי $F$ נקודת החיתוך שלו עם $\overline{AC}$.

### Surprise? the Is What

construction on Greeks the of work the from passed millennia two that surprising is It also is It heptadecagon. regular the of constructibility the of Gauss by discovery the to




איור 16.10: בניית מחומש משוכלל (1)




איור 16.11: pentagon regular a of Construction (2)

algebraic new inventing by but geometry using by not solved was problem the that surprising mathematics. in influence far-reaching a had that methods

$\triangle ACE$ הוא משולש שווה-שוקיים עם זוויות בסיס $\alpha$. $\triangle AEF$ הוא גם משולש שווה-שוקיים ולכן $\angle AFE = \angle FAE = \alpha$. מכאן ש-$\triangle AEF \sim \triangle ACE$:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}\,.$$

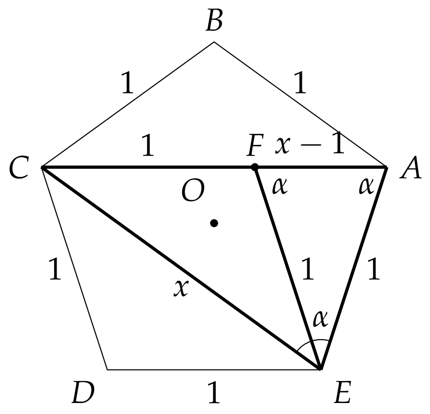
נכפיל ונקבל את המשוואה הריבועית:

$$x^2 - x - 1 = 0\,,$$

שהשורש החיובי שלה הוא:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,$$

ניתן לבנות.




איור 16.12 : בניית מחומש משוכלל (2)

## Surprise? the Is What

construction on Greeks the of work the from passed millennia two that surprising is It also is It heptadecagon. regular the of constructibility the of Gauss by discovery the to algebraic new inventing by but geometry using by not solved was problem the that surprising mathematics. in influence far-reaching a had that methods

### מקורות

הפרק מבוסס על [6]. אפשר גם לעיין בתרגום של ספרו של Gauss [17]. הבניה של המצולע לקוחה מ-[10]. ניתן למצוא בניות אחרות ב-[54]. הבניה הטריגונומטרית של מחומש משוכלל לקוחה מ-[58]. הבניה הגיאומטרית של מחומש משוכלל מתקבלת מהפתרונות של התרגילים 2.3.3--2.3.4 בעמוד 28 של [45].