הפתעות מתמטיות

מוטי בן-ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

עריכה: רחל זקס

15 בנובמבר 2024

פתח דבר

לו כל אחד היה נחשף למתמטיקה במצבה הטבעי,
עם כל ההנאה המאתגרת וההפתעות שבה, לדעתי
היינו רואים שינוי מרשים הן בדעות התלמידים
כלפי מתמטיקה והן בתפיסה שלנו של מה זה להיות
"טוב במתמטיקה".
Paul Lockhard

אני ממש רעב להפתעות, כי כל אחת מצעידה אותנו
צעד קטן אך משמעותי להיות חכמים יותר.
Tadashi Tokieda

כאשר ניגשים למתמטיקה בדרך נאותה, היא עשויה לספק לנו הפתעות רבות ומהנות. אישור לכך ניתן לקבל בחיפוש של mathematical surprises בגוגל, שמחזיר (וזה מפתיע) כחצי מיליארד תוצאות. מהי הפתעה? (surprise)? מקור המילה בצרפתית עתיקה עם שורשים בלטינית: sur, (מעל) ו-prendre (לקחת, לאחוז, לתפוס). באופן מילולי, להפתיע הוא להשיג. כשם עצם, הפתעה היא גם אירוע או מצב בלתי צפוי או מבלבל וגם הרגש שהוא גורם.

קחו לדוגמה קטע מהרצאה של מקסים ברוקהיימר. Maxim Bruckheimer[1] על מעגל פיירבאך Feuerbach: "שתי נקודות נמצאות על קו ישר אחד בלבד, אין זו הפתעה. אולם בהינתן שלוש נקודות שאינן בהכרח על קו ישר אחד, אם במהלך החקר הגיאומטרי שלוש הנקודות 'נופלות' על קו ישר, זו הפתעה, ולעיתים קרובות עלינו להתייחס לעובדה זו כאל משפט שדורש הוכחה. כל שלוש נקודות שאינן על קו ישר נמצאות על מעגל יחיד. אם ארבע נקודות נמצאות על אותו מעגל, זו הפתעה שיש לנסחה כמשפט. ... ככל שמספר הנקודות על קו ישר גדול משלוש, כך המשפט מפתיע יותר. באופן דומה, ככל שמספר הנקודות על מעגל גדול מארבע, 4, כך המשפט מפתיע עוד יותר. לכן, הטענה שעבור כל משולש קיימות תשע נקודות קשורות זו לזו הנמצאות על אותו מעגל ... היא מפתיעה ביותר. בנוסף, למרות עוצמת ההפתעה, ההוכחה פשוטה ואלגנטית".

בספר מציע מרדכי בן-ארי אוסף עשיר של הפתעות מתמטיות, רובן מוכרות פחות ממעגל פיירבאך , ובעלות סיבות מוצקות להכללתן. ראשית, למרות שהן נעדרות מספרי לימוד, אבני החן בספר נגישות עם רקע במתמטיקה של בית ספר תיכון בלבד (וסבלות ונייר ועפרון, כי הנאה לא מגיעה בחינם). שנית, כאשר תוצאה מתמטית מאתגרת את מה שהנחנו, אנו באמת מופתעים (פרקים 1,

[1] מקסים ברוקהיימר היה מתמטיקאי, ממייסדי האוניברסיטה הפתוחה בבריטניה ודיקן הפקולטה למתמטיקה שלה. וראש המחלקה להוראת מדעים במכון ויצמן למדע.

13). באופן דומה אנו מופתעים מ: הוכחות נבונות (פרקים 2, 3), הוכחה אלגברית של האפשרות לבנייה גאומטרית (פרק 16), הוכחות המתבססות על נושאים בלתי קשורים לכאורה (פרקים 4, 5), הוכחה מוזרה באינדוקציה (פרק 6), דרכים חדשות להסתכל על תוצאה ידועה היטב (פרק 7), משפט שנראה שולי והופך להיות בסיס לתחום רחב במתמטיקה (פרק 8), מקורות בלתי צפויים להשראה (פרק 9), מערכת אקסיומטית הנובעת מפעילות פנאי כגון אוריגמי (פרקים 10-12). אלו הסיבות השונות להכללת הפתעות מתמטית מהנות, יפות ובלתי נשכחות בספר נפלא זה.

עד כאן התייחסתי לצורה שבה הספר מטפל בחלק הראשון של הגדרת ההפתעה, הסיבות הקוגניטיביות והרציונליות לבלתי צפוי. בקשר להיבט השני, ההיבט הרגשי, הספר הוא מקרה מאיר של הטענה של מתמטיקאים לסיבה המרכזית לעסוק במתמטיקה: היא מרתקת! בנוסף, הם טוענים שמתמטיקה מעוררת גם את הסקרנות האינטלקטואלית שלנו וגם רגישות אסטטית, ושפתרון בעיות או הבנת מושג מספקים תגמול רוחני המפתה אותנו להמשיך לעבוד על בעיות ועל ומושגים נוספים.

אומרים שתפקידו של פתח דבר הוא לספר לקוראים למה כדאי להם לקרוא את הספר. ניסיתי למלא תפקיד זה, אבל אני מאמין שתשובה מלאה יותר תגיע מכם הקוראים, לאחר שתקראו ותחוו את מה שמשתמע ממקור המילה הפתעה: שיתפוס אתכם!

אברהם הרכבי

הקדמה

המאמר של [50] Godfried Toussaint על "מחוגה מתמוטטת" עשה עליי רושם חזק. מעולם לא עלה על דעתי שהמחוגה המודרנית עם ציר חיכוך איננה אותה מחוגה שהייתה קיימת בימיו של אוקלידס. בספר זה אני מציג מבחר נושאים מתמטיים שהם לא רק מעניינים, אלא שהפתיעו אותי כאשר נתקלתי בהם בפעם הראשונה.

המתמטיקה הדרושה לקריאת הספר היא ברמת בית-ספר תיכון, אבל אין זה אומר שהחומר פשוט. חלק מההוכחות הן ארוכות למדי ונדרשת מהקורא נכונות להשקיע ולהתמיד. הפרס הוא הבנה של כמה מהנושואים היפים יותר במתמטיקה. הספר אינו ספר לימוד כי מגוון הנושאים העשיר אינו מתאים לסילבוס. הוא כן מתאים לפעילויות העשרה של תלמידי תיכון, לסמינרים אוניברסיטאיים ולמורים למתמטיקה.

הפרקים אינם תלויים זה בזה (פרט לפרק 10 על אקסיומות האוריגמי שיש לקרוא אותו לפני פרקים 11, 12, הפרקים האחרים על אוריגמי).

מהי הפתעה?

שלושה קריטריונים הנחו אותי בבחירת נושאים לספר:

- המשפט הפתיע אותי. מפתיעים במיוחד היו המשפטים על בנייה בסרגל ובמחוגה. העושר המתמטי של אוריגמי היה כמעט הלם. כאשר מורה למתמטיקה הציעה פרויקט בנושא, סירבתי כי פקפקתי באפשרות שקיימת מתמטיקה רצינית בתחום זה של אומנות. נושאים אחרים נכללו מכיוון, שלמרות שהכרתי את התוצאות, הופתעתי מהאלגנטיות של ההוכחות ומהנגישות שלהן. בלטה במיוחד ההוכחה **האלגברית** של גאוס (Gauss) שניתן לבנות הפטדקגון heptadecagon (מצולע משוכלל בעל 17 צלעות).
- הנושא אינו מופיע בספרי לימוד לבתי-ספר תיכון או לאוניברסיטה. את המשפטים וההכחות מצאתי רק בספרים מתקדמים או בספרות מחקר. קיימים מאמרי ויקיפדיה לרוב הנושאים, אבל עליך לדעת איפה לחפש אותם ולעיתים קרובות הם אינם יורדים לפרטים.
- המשפטים וההוכחות נגישים עם ידע טוב במתמטיקה של בית ספר תיכון.

כל פרק מסתיים בסעיף **מה ההפתעה?** המסביר את בחירתי בנושא.

סקירת התוכן

פרק 1 מביא את ההוכחה של אוקלידס שעבור כל בנייה במחוגה קבועה, קיימת בנייה שקולה ב״מחוגה מתמוטטת״. לאורך השנים ניתנו הוכחות שגויות רבות המבוססות על תרשימים שאינם נכונים בכל מצב. כדי להדגיש שאין לסמוך על תרשימים, הבאתי את ה״הוכחה״ המפורסמת לכך שכל משולש הוא שווה-שוקיים.

לאורך שנים רבות, מתמטיקאים חיפשו לשווא בנייה שתחלק זווית שרירותית לשלושה חלקים שווים trisection. Underwood Dudley חקר לעומק אנשים שהקדישו את חייהם לחיפוש אחר בנייה. לרוב הבניות הן קירובים שממציאיהם טוענים לנכונותם. פרק 2 מתחיל בהצגת שתי בניות ובפיתוח הנוסחאות הטריגונומטריות המראות שמדובר בקירובים בלבד. כדי להראות שאין משמעות להגבלה לסרגל ומחוגה בלבד, מוצגת חלוקת זווית לשלושה חלקים שווים בעזרת כלים משוכללים יותר: ה-neusis של Archimedes וה-quadratrix של Hippias. בסוף הפרק מובאת הוכחה שלא ניתן לחלק זווית שרירותית לשלושה חלקים שווים בעזרת סרגל ומחוגה.

לא ניתן לרבע מעגל (לבנות ריבוע ששטחו זהה לשטח מעגל נתון) בעזרת סרגל ומחוגה. הבנייה בלתי אפשרית כי הערך של π. אינו ניתן לבנייה. פרק 3 מביא שלוש בניות אלגנטיות של קירובים טובים ל-π, אחת של Kochansky ושתיים של Ramanujan. בסוף הפרק נסביר איך לרבע מעגל באמצעות quadratrix.

לפי משפט ארבעת-הצבעים ניתן לצבוע כל מפה במישור בארבעה צבעים, כך ששתי ארצות שיש להן גבול משותף צבועות בצבעים שונים. ההוכחה של משפט זה מסובכת ביותר, אבל ההוכחה של משפט חמשת הצבעים פשוטה ואלגנטית (פרק 4). הפרק מביא גם את ה״הוכחה״ של Alfred Kempe לבעיית ארבעת הצבעים ואת ההדגמה של Percy Heawood לכך שההוכחה שגויה.

כמה שומרים דרושים לשמירה על מוזיאון לאומנות, כך שכל הקירות נמצאים תחת השגחה רציפה? ההוכחה בפרק 5 מתוחכמת, כי היא משתמשת בצביעת גרפים כדי לפתור בעיה שנראית במבט ראשון כבעיה גאומטרית.

פרק 6 מביא משפטים פחות מוכרים שהוכחותיהם באינדוקציה. המשפטים הם בנושאים: מספרי Fibonacci, מספרי Fermat, פונקציה 91 של McCarthy ובעיית Josephus (יוסף בן-מתתיהו).

פרק 7 עוסק בשיטה של Po-Shen Loh למציאת שורשים של משוואות ריבועיות. לשיטה חשיבות רבה בהוכחה האלגברית של Gauss לבניית heptadecagon. בפרק כלולות שתי בניות גאומטריות לפתרון בעיות אלגבריות. הפתרון של Khwarizmi למציאת שורשים של משוואות ריבועיות ובנייה ש-Cardano השתמש בה בפיתוח הנוסחה לשורשי משוואות ממעלה שלישית.

תיאוריית Ramsey היא נושא בקומבינטוריקה שמהווה תחום מחקר פעיל. בתיאוריה מחפשים תבניות בקבוצות גדולות. פרק 8 מציג דוגמאות פשוטות של שלשות Schur, שלשות פיתגוריות, מספרי Ramsey, ובעייתו של van der Waerden. הוכחת המשפט על שלשות פיתגוריות היא תוצאה חדשה שהשתמשה בתוכנת מחשב המבוססת על לוגיקה מתמטית. בסוף הפרק אנו סוטים מעט מהדרך הישרה כדי להציג את הידע של הבבלים על שלשות פיתגוריות.

C. Dudley Langford צפה יום אחד בבנו שסידר קוביות צבעוניות בסדר מעניין. פרק 9 מביא משפט שלו הקובע את התנאים שבהם סידור זה אפשרי.

בפרק 10 מוצגות שבע אקסיומות האוריגמי עם חישובים מפורטים בגאומטרייה אנליטית של משוואות האקסיומות ואפיון הקפלים כמוקדים גאומטריים.

פרק 11 מביא את השיטה של Eduard Lill ואת הקיפול של Margharita P. Beloch. אני מציג את השיטה של Lill כקסם, ולכן לא אפרט יותר כאן.

פרק 12 מראה שבאמצעות אוריגמי ניתן לבצע בניות שאינן אפשריות בבסרגל ומחוגה: חלוקת זווית לשלושה חלקים שווים, הכפלת קובייה ובניית nonagon, מצולע משוכלל בעל תשע צלעות.

פרק 13 מביא את המשפט של Lorenzo Mascheroni ו-Georg Mohr שכל בנייה בסרגל ומחוגה ניתן לבצע במחוגה בלבד.

הטענה המקבילה, שניתן להסתפק בסרגל, אינה נכונה, כי בסרגל לא ניתן לחשב ערכים שהם שורש ריבועי. Jean-Victor Poncelet שיער ו-Jakob Steiner הוכיח שאפשר להסתפק בסרגל בתנאי שקיים מעגל אחד אי-שם במישור (פרק 14).

האם שני משולשים בעלי אותו שטח ואותו היקף הם בהכרח חופפים? הטענה מתקבלת על הדעת אבל איננ'ה נכונה, אף שמציאת זוגות לא-חופפים מחייבת מסע דרך הרבה אלגברה וגאומטרייה כפי שמתואר בפרק 15.

פרק 16 מביא את ההישג המדהים של Gauss: הוכחה שניתן להשתמש בסרגל ומחוגה כדי לבנות heptadecagon (מצולע משוכלל עם 17 צלעות). באמצעות טיעון מבריק על הסמטרייה של שורשים של פולינומים, הוא מצא נוסחה המכילה רק את ארבע פעולות החשבון ושורש ריבועי. Gauss לא סיפק בנייה גאומטרית, ולכן הפרק מביא בנייה אלגנטית של James Callagy. בסיום הפרק מוצגות בניות של מחומש משוכלל המבוססות על השיטה של Gauss.

על מנת שהספר יהיה בלתי תלוי ככל האפשר בהוכחות של משפטים ושל נוסחאות אחרים, נספח א' אוסף הוכחות של משפטים בגאומטרייה ובטריגונומטריה שייתכן שאינם מוכרים לקורא.

סגנון

- הרקע הנדרש מהקורא הוא מתמטיקה ברמת בית-ספר תיכון, הכוללת:
  - אלגברה: פולינומים, חילוק של פולינומים, פולינומים monic (פולינומים שבהם מקדם החזקה הגבוהה ביותר הוא 1), משוואות ריבועיות, מכפלה של חזקות $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
  - גאומטרייה אוקלידית: משולשים חופפים $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ והקריטריונים לחפיפה, משולשים דומים $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ והיחסים בין הצלעות שלהם, מעגלים והזוויות ההיקפיות והמרכזיות שלהם.
  - גיאומטרייה אנלטית: המישור הקרטזי, חישוב אורכים ושיפועים של קטעי קו, נוסחת המעגל.
  - טריגונומטריה: הפונקציות $\sin, \cos, \tan$ וההמרות ביניהן, זוויות במעגל היחידה, פונקציות טריגונומטריות של זוויות לאחר שיקוף סביב ציר כגון $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$.

- כל טענה להוכחה נקראת "משפט" ואין ניסיון לסווג טענה כמשפט, כלמה או כמסקנה.
- כאשר משפט מופיע לאחר בנייה, המשתנים המופיעים במשפט מתייחסים לנקודות, לקווים ולזוויות המסומנים באיור הנלווה לבנייה.
- שמות המתמטיקאים ניתנים במלואם ללא מידע ביוגרפי שניתן למצוא בקלות בוויקיפדיה.
- הספר נכתב כדי שיהיה בלתי תלוי ככל האפשר במקורות אחרים. פה ושם נחוץ שימוש במושגים ובמשפטים הניתנים ללא הוכחה. הסברים קצרים ניתנים בתוך מסגרות וניתן לדלג עליהם.
- אין תרגילים, אבל הקורא השאפתן מוזמן לנסות להוכיח כל משפט לפני קריאת ההוכחה.
- ניתן להתעמק בבניות גאומטריות באמצעות תוכנה כגון גיאוגברה.
- $\overline{AB}$ מסמן גם שם של קטע קו וגם את אורכו.
- $\triangle ABC$ מסמן גם שם של משולש וגם את שטחו.

הבעת תודה

הספר נכתב בעידודו של אברהם הרכבי שקיבל בברכה את הסגת הגבול שלו בחינוך מתמטי. הוא גם התנדב לכתוב את פתח הדבר. אביטל אלבאום-כהן ורונית בן-בסט לוי היו נכונות תמיד לעזור לי ללמוד (מחדש) מתמטיקה של בית-ספר תיכון. אוריה בן-לולו הכירה לי את המתמטיקה של אוריגמי ועזרה לי בכתיבת ההוכחות. אני מודה ל-Michael Woltermann שהרשה לי להשתמש בעיבוד שלו לספרו של Heinrich Dörrie. ג'ייסון קופר, אברהם הרכבי, Richard Kruel והשופטים האנונימיים העירו הערות מועילות.

ברצוני להודות לצוות ב-Springer עבור התמיכה והמקצועונות בתהליך ההוצאה לאור, במיוחד לעורך Richard Kruel.

הספר פורסם באנגלית כ-*Mathematical Surprises*, Springer, 2022 וניתן להורידו בחינם מ:
.`https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-13566-8`

אני מודה למכון ויצמן למדע על מימון ההוצאה לאור.

קבצי המקור

קובצי המקור של הספר ב-LaTeX (כולל קבצי המקור לאיורים ב-TikZ) זמינים ב:

`https://github.com/motib/surprises`

מוטי בן-ארי
רחובות 2022

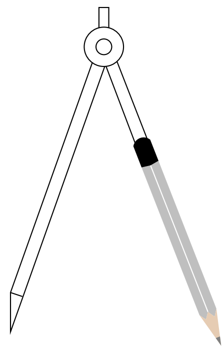
תוכן העניינים

פרק 1

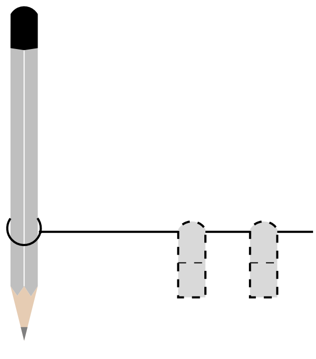
מחוגה מתמוטטת

מחוגה מודרנית היא **מחוגה קבועה**: ניתן לקבע את המרחק בין שתי הזרועות וכך להעתיק קטע קו או מעגל ממקום למקום (איור 1.1.א). אוקלידס השתמש במחוגה **מתמוטטת** (collapsing) שבה לא ניתן לשמור מרחק קבוע (איור 1.1.ב), שכן זרועותיה מתקפלות כאשר מרימים אותן מהנייר. לעיתים קרובות משתמשים מורים במחוגה מתמוטטת, המורכבת מטוש המחובר לחוט, כדי לבנות מעגל על הלוח. אי אפשר לשמור על מרחק קבוע כאשר מרחיקים את המחוגה מהלוח.

הפרק נפתח בדיון על הרלוונטיות של למידת בניות בסרגל ובמחוגה (סעיף 1.1). סעיף 1.2 משווה את שני סוגי המחוגה בבנייה הפשוטה ביותר: אנך אמצעי. סעיף 1.3 מביא את השיטה של אוקלידס להעתקת קטע קו באמצעות מחוגה מתמוטטת. שיטה זו מוכיחה שניתן לבצע באמצעות מחוגה מתמוטטת כל בנייה הניתנת לביצוע באמצעות מחוגה קבועה. סעיף 1.4 מציג הוכחה של משפט זה שנראית נכונה, אבל היא אינה נכונה עבור כל תצורה של קווים ונקודות. כדי להדגיש שאין לסמוך על שרטוט, סעיף 1.5 מביא את ה"הוכחה לכאורה" המפורסמת שכל משולש הוא שווה-שוקיים. ההוכחה נראית נכונה אבל היא שגויה כי היא מתבססת על שרטוט לא נכון.



1.1.א מחוגה קבועה. לזרוע אחת סיכה שניתן להניח במרכז המעגל. עיפרון המחובר לזרוע השנייה משמש לשרטוט המעגל. הזרועות מחוברות בציר קשיח כך שהמרחק בין הזרועות (רדיוס המעגל) נשמר גם כאשר מרימים את המחוגה מהנייר.



1.1.ב מחוגה מתמוטטת. המשתמש מצמיד חוט למרכז המעגל. לקצה השני של החוט מחובר עיפרון המשמש לשרטוט המעגל. כאשר מרימים את המחוגה מהנייר, האצבעות (מקווקוות) עלולות להחליק בקלות למקום אחר.

1.1 בנייה בסרגל ובמחוגה

עד לאחרונה בנייה בסרגל ובמחוגה הייתה מושג בסיסי שנלמד בגאומטרייה אוקלידית, אולם חשיבותה פחתה בסילבוסים מודרניים. מובן שלנושא אין כמעט חשיבות מעשית. כפי שאנו מראים בסעיפים 2.2, 2.3, 2.4, 3.4, היוונים ידעו לבנות בניות שאינן אפשריות בסרגל ובמחוגה, באמצעות כלים שהם רק מעט מתקדמים יותר. היום מסוגלים המחשבים לבצע בניות בדיוק רב ככל שנרצה באמצעות חישובים נומריים.

למרות זאת, אני מאמין שיש יתרונות ללימוד בניות בסרגל ובמחוגה:

- מעניין יותר ומאתגר יותר ללמוד גאומטרייה דרך בניות לעומת קריאה של משפטים ושל הוכחות.
- התקדמויות מכריעות במתמטיקה הושגו במסגרת ניסיונות למצוא בניות. פרק 16 מביא בנייה של גאוס שהיוותה נקודת מוצא לאלגברה מודרנית, במיוחד התיאוריה שפותחה על ידי אוורסט גלואה (Évariste Galois).
- העובדה שיש בניות שאינן אפשריות קשה לעיכול ולכן מאוד מעניינת.
- מעציב שאנשים רבים מבזבזים שנים מחייהם בניסיון לבצע בניות שאינן אפשריות. חשוב שתלמידים יכירו שהמאמצים הללו חסרי תוחלת.

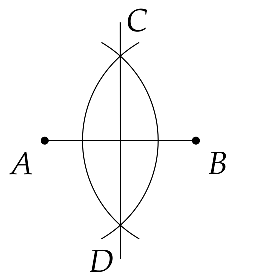
1.2 מחוגה קבועה ומחוגה מתמוטטת

בספרי לימוד גאומטרייה ניתן למצוא בנייה של אנך אמצעי לקטע קו על ידי בניית שני מעגלים שמרכזם על הקו, ובלבד שהרדיוס גדול ממחצית המרחק בין המרכזים (איור 1.2.א). בנייה זו אפשרית רק בעזרת מחוגה קבועה, כי לאחר בניית המעגל שמרכזו A, המרחק בין זרועות המחוגה חייב להישאר ללא שינוי כדי לבנות את המעגל שמרכזו B.

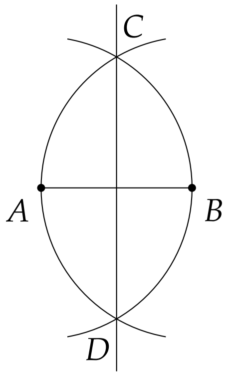
איור 1.2.ב מראה בנייה של אנך אמצעי הפועלת גם עם מחוגה קבועה וגם עם מחוגה מתמוטטת. נבנה שני מעגלים: אחד שמרכזו A עם רדיוס $\overline{AB}$ ואחד שמרכזו B עם רדיוס $\overline{BA}$. הבנייה אפשרית עם מחוגה מתמוטטת כי (ברור) $\overline{AB} = \overline{BA}$, ולכן המחוגה לא חייבת "לזכור" את האורך של $\overline{AB}$ כדי לבנות מעגל שמרכזו B עם רדיוס זהה.

הוכחת הנכונות של הבנייה באיור 1.2.א אינה פשוטה כלל, כי חייבים להשתמש במושגים יחסית מתקדמים כגון משולשים חופפים. אבל הוכחת הנכונות של הבנייה באיור 1.2.ב פשוטה ומבוססת על העובדה ש-$\triangle ABC$ הוא משולש שווה-צלעות. טענה זו היא המשפט הראשון בספר של אוקלידס. $\overline{AB} = \overline{AC}$ כי הם רדיוסים של אותו מעגל, וכן $\overline{BA} = \overline{BC}$. מכאן: $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BA} = \overline{BC}$.

איור 1.3.א מראה שעבור הבנייה במחוגה קבועה, המשולש יהיה שווה-שוקיים אך לא בהכרח שווה-צלעות (איור 1.3.ב).



1.2.א בניית אנך אמצעי בעזרת מחוגה קבועה



1.2.ב בניית אנך אמצעי בעזרת מחוגה מתמוטטת

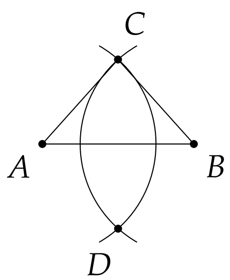
1.3 העתקת קטע קו לפי אוקלידס

המשפט השני בספרו של אוקלידס מתאר איך להעתיק קטע קו נתון $\overline{AB}$ לקטע באותו אורך שאחת מנקודות הקצה שלו היא נקודה נתונה C. מכאן שמחוגה קבועה אינה מוסיפה יכולות ואפשר להסתפק במחוגה מתמוטטת, אבל הבניות יהיו מסובכות יותר.

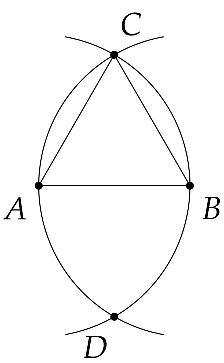
משפט 1.1 נתון קטע $\overline{AB}$ ונקודה C, ניתן לבנות במחוגה מתמוטטת קטע $\overline{CC'}$ שאחת מנקודות הקצה שלו היא C ואורכו $\overline{AB} = \overline{CC'}$ (איור 1.4.א).

הוכחה נבנה קטע $\overline{AC}$ ומשולש שווה-צלעות $\triangle ACD$ שבסיסו $\overline{AC}$ (איור 1.4.ב). לפי המשפט הראשון של אוקלידס הבנייה אפשרית באמצעות מחוגה מתמוטטת. נבנה קרן שהיא המשך הקטע מ-D לכיוון A, ונבנה קרן שהיא המשך הקטע מ- D לכיוון C (איור 1.5.א).

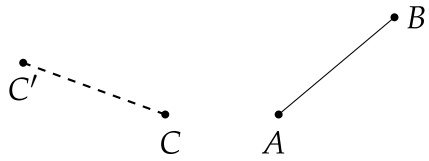
נבנה מעגל שמרכזו A עם רדיוס $\overline{AB}$, ונסמן ב-E את נקודת החיתוך של המעגל עם הקרן שממשיכה את $\overline{DA}$ (איור 1.5.ב). נבנה מעגל שמרכזו D עם רדיוס $\overline{DE}$, ונסמן ב-F את נקודת החיתוך של המעגל עם הקרן שממשיכה את $\overline{DC}$ (איור 1.6).



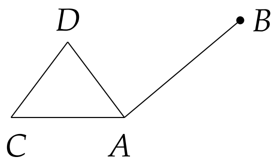
1.3.א בניית משולש שווה-שוקיים בעזרת מחוגה קבועה



1.3.ב בניית משולש שווה-צלעות בעזרת מחוגה קבועה או מחוגה מתמוטטת



א.1.4 העתקת קטע קו $\overline{AB}$



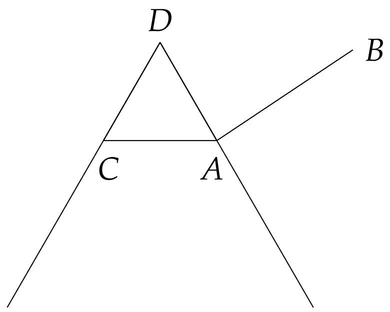
ב.1.4 העתקת קטע קו בעזרת מחוגה מתמוטטת

$\overline{DC} = \overline{DA}$ כי $\triangle ACD$ שווה-צלעות. $\overline{AE} = \overline{AB}$ כי שניהם רדיוסים של המעגל שמרכזו A, וכן $\overline{DF} = \overline{DE}$. מכאן:

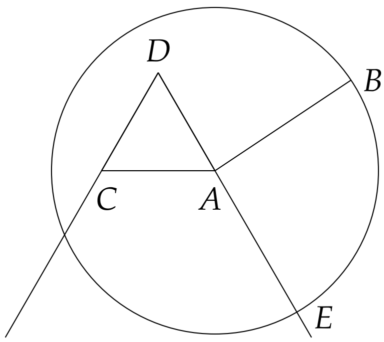
$$\overline{CF} = \overline{DF} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DA} = \overline{AE} = \overline{AB}\,.$$

. □

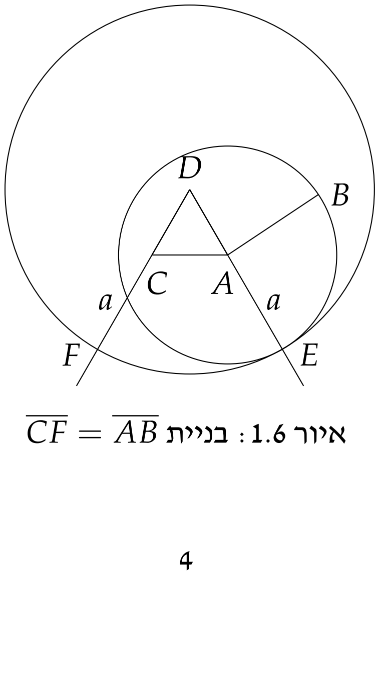
הדרישה על כיוון הקרנות חיונית. הוכחה זו נכונה לכל קטע קו $\overline{AB}$ ולכל נקודה C, ללא תלות במיקום שלה יחסית ל-$\overline{AB}$. בגלל דרישת הכיוון של הקרנות, ה״חרוט״ הכלוא בין שתי הקרנות יחתוך את המעגלים גם אם $\overline{AB} < \overline{AC}$ (איור 1.7).



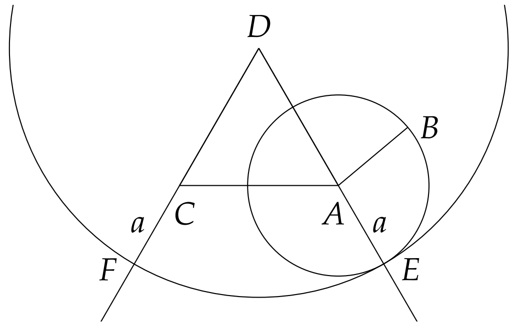
א.1.5 בניית קרניים מ-D



ב.1.5 מעגל עם רדיוס $\overline{AB}$



איור 1.6: בניית $\overline{CF} = \overline{AB}$



איור 1.7: בנייה עבור $\overline{AC} > \overline{AB}$

1.4 העתקה שגויה של קטע

הוכחה

נבנה שלושה מעגלים: מעגל שמרכזו A עם רדיוס $\overline{AB}$, מעגל שמרכזו A עם רדיוס $\overline{AC}$ ומעגל שמרכזו C עם רדיוס $\overline{AC} = \overline{CA}$. נסמן את נקודות החיתוך של המעגלים בעלי הרדיוסים השווים ב-E, F. נסמן ב-D את נקודת החיתוך של המעגל שמרכזו C עם המעגל ברדיוס AB שמרכזו A.

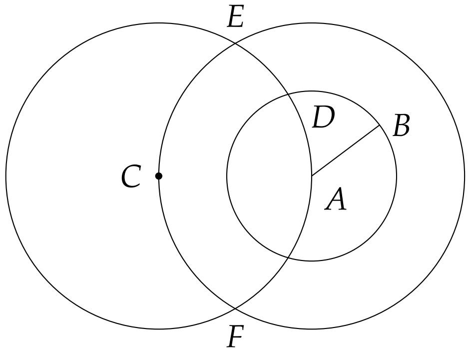
עבור $\overline{AC} > \overline{AB}$, הבנייה מוצגת באיור 1.8.

נבנה מעגל שמרכזו E עם רדיוס $\overline{ED}$. נסמן ב-G את נקודת החיתוך של מעגל זה עם המעגל ברדיוס AC ששמרכזו A.

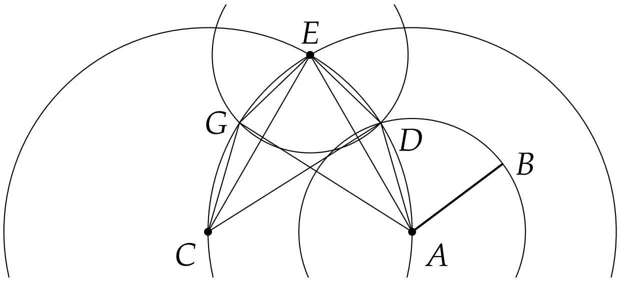
יש שתי נקודות חיתוך, נבחר את הנקודה הקרובה יותר ל-C (איור 1.9).

$\overline{CD} = \overline{CE}$ הם רדיוסים באותו מעגל, כך גם $\overline{AE} = \overline{AG}$. לפי הבנייה הרדיוסים $\overline{CE}$ ו-$\overline{AE}$ שווים. מכאן:

$$\overline{CD} = \overline{CE} = \overline{AE} = \overline{AG}\,.$$



איור 1.8: בנייה עבור העתקת קטע (1)



איור 1.9 : בנייה עבור העתקת קטע (2)

$\overline{EG} = \overline{ED}$ הם רדיוסים באותו מעגל, ולכן $\triangle EAG \cong \triangle DCE$ לפי צלע,צלע,צלע ו-$\angle GEA =$ $\angle DEC$.

מכיוון ש :

$$\angle GEC = \angle GEA - \angle CEA = \angle DEC - \angle CEA = \angle DEA\,,$$

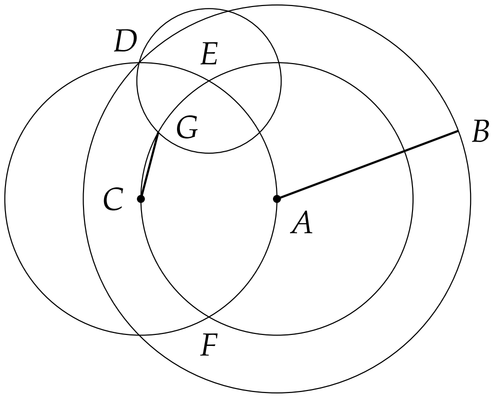
$\triangle ADE \cong \triangle CGE$ לפי צלע, זווית, צלע. $\overline{AB} = \overline{AD}$ הם רדיוסים במעגל שמרכזו A, ולכן $\overline{GC} = \overline{AD} = \overline{AB}$. □

הבנייה נכונה רק אם $\overline{AC} > \overline{AB}$. באיור 1.10 מתואר המקרה שבו $\overline{AB} < \overline{AC}$, ואפשר לראות ש-$\overline{GC} \neq \overline{AB}$.

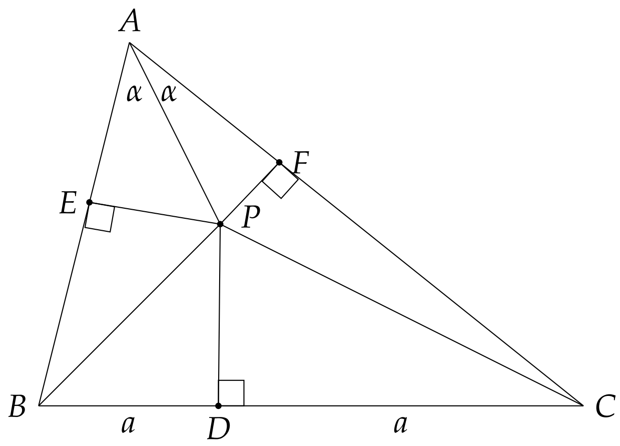
1.5 אין לסמוך על תרשים

משפט 1.2 (שגוי, כמובן) כל משולש הוא שווה-שוקיים.

הוכחה נתון משולש שרירותי $\triangle ABC$. תהי P נקודת החיתוך של חוצה הזווית $\angle BAC$ והאנך האמצעי של $\overline{BC}$. נקודות החיתוך של הגבהים מ-P לצלעות $\overline{AB}, \overline{AC}$ מסומנים ב-E, F בהתאמה (איור 1.11). $\triangle APE \cong \triangle APF$ כי הם משולשים ישרי-זווית שבהם זוויות שוות α וצלע משותפת



איור 1.10 : תרשים שעבורו ההוכחה לא עובדת



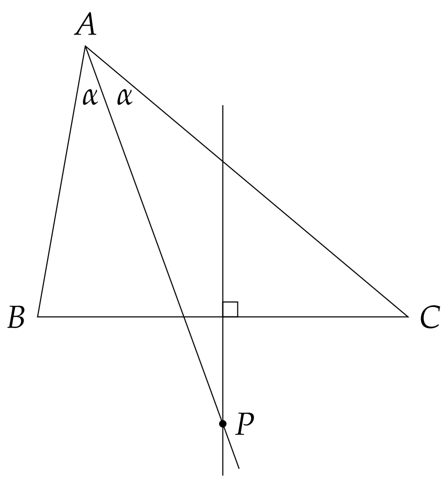
איור 1.11: הוכחה שגויה שכל משולש הוא שווה-שוקיים

$\overline{AP}$. $\triangle DPB \cong \triangle DPC$ כי הם משולשים ישרי-זווית, $\overline{PD}$ צלע משותפת ו-$\overline{BD} = \overline{DC} = a$. $\triangle EPB \cong \triangle FPC$ כי הם משולשים ישרי-זווית, $\overline{EP} = \overline{PF}$ לפי החפיפה הראשונה, ו-$\overline{PB} = \overline{PC}$ לפי החפיפה השנייה. מהשוויונות נקבל ש-$\triangle ABC$ שווה-שוקיים:

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AF} + \overline{FC} = \overline{AC}\,.$$

□

ה״לוגיקה״ של ההוכחה נכונה, אך ההוכחה מבוססת על תרשים שאינו נכון, כי הנקודה P נמצאת מחוץ למשולש (איור 1.12).



איור 1.12: הסיבה לכך שהבנייה לא עובדת

מה ההפתעה?

כתלמיד, הנחתי כמובן מאליו שלמחוגה יש ציר חיכוך השומר על המרחק בין החוד לעיפרון. הכאשר המורה השתמשה במחוגה המורכבת מחוט מחובר לגיר, לא העליתי על דעתי שהיא שונה מהמחוגה שלי. המאמר של גודפריד טוסה (Gotfried Toussaint) היה עבורי הפתעה גמורה, כמו גם ההצגה שלו לאי-נכונות הוכחות שבאו לאחר אוקלידס, מכיוון שהיו תלויות בתרשימים הנשענים על הנחות חסרות בסיס. אני ממליץ לקוראים לעיין במאמר כדי להעמיק את הבנתם על הוכחות במתמטיקה.

מקורות

הפרק מבוסס על [50]. ההוכחה השגויה בסעיף 1.4 לקוחה מ-[37]. תרגום מלא לאנגלית של ספר היסודות של אוקלידס בליווי פרשנות מפורטת נמצא ב-[22] שנכתב על ידי תומאס ליטל הית' Thomas L. Heath, אחד המומחים הבולטים למתמטיקה יוונית.

פרק 2

שילוש זווית

לא ניתן לחלק זווית שרירותית לשלושה חלקים שווים באמצעות סרגל ומחוגה (להלן בקיצור: לחלק זווית לשלושה). הסיבה היא שחלוקת זווית לשלושה דורשת בנייה של שורש שלישי, אבל בסרגל ומחוגה ניתן לבנות רק אורכים המתקבלים מארבע פעולות חשבון ושורש ריבועי. משפט זה הוכח ב-1837 על ידי פייר וונצל (Pierre Wantzel), אולם חובבנים אינספור מנסים עד היום לחלק זווית לשלושה. למרות שהם משוכנעים שהבניות נכונות, הם בונים רק קירובים. סעיף 2.1 מציג שתי בניות כאלו, מפתח נוסחאות לזוויות ומצביע על השגיאות בקירובים.

המתמטיקאים היוונים גילו שניתן לחלק זווית לשלושה אם משתמשים בכלים אחרים: הנוסיס של ארכימדס (סעיף 2.2) והקוואדרטריקס של היפיאס (Hippias) (סעיף 2.4). בסעיף 2.3 נראה איך להכפיל קובייה באמצעות נוסיס.

שאר הפרק מביא הוכחה שלא ניתן לחלק זווית לשלושה. סעיף 2.5 מאפיין מספרים בני-בנייה, סעיף 2.6 קושר מספרים בני-בנייה לשורשים של פולינומים, וסעיף 2.7 משתמש בתיאוריה זו כדי להראות שלא ניתן לחלק זווית לשלושה או להכפיל קובייה.

2.1 קירובים לשילוש זווית

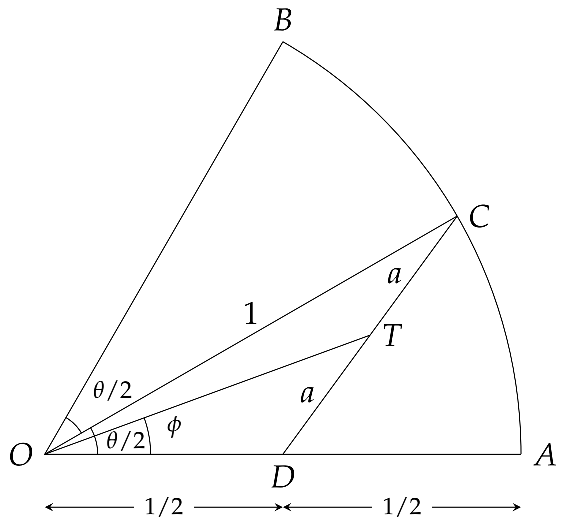
2.1.1 קירוב ראשון לשילוש זווית

בנייה:

תהי $\theta = \angle AOB$ זווית שרירותית, וללא הגבלת הכלליות נניח ש-A, B נמצאות על מעגל היחידה שמרכזו O. נבנה את חוצה הזווית $\angle AOB$ ותהי C נקודת החיתוך של חוצה הזווית עם מעגל היחידה. תהי D נקודת האמצע של $\overline{OA}$ ותהי T נקודת האמצע של $\overline{DC}$. נסמן את הזווית $\angle DOT$ על ידי ϕ (איור 2.1).

משפט 2.1

$$\tan\phi = \frac{2\sin(\theta/2)}{1+2\cos(\theta/2)}\,.$$



איור 2.1 : קירוב ראשון של שילוש(1)

הוכחה איור 2.2 נלקח מאיור 2.1 עם סימונים נוספים.

יהי $\overline{CF}$ האנך ל-$\overline{OA}$ שחותך את $\overline{OA}$ ב-F. $\overline{CF} = \sin(\theta/2)$ ו-$\overline{OF} = \cos(\theta/2)$ כי $\overline{OC} = 1$.
יהי $\overline{TE}$ האנך ל-$\overline{OA}$ שחותך את $\overline{OA}$ ב-E.

T היא נקודת האמצע של $\overline{DC}$ ולכן $\overline{DT} = \overline{TC} = a$. אבל $\overline{FT}$ הוא תיכון ליתר במשולש ישר-זווית, כך ש-$\overline{FT} = a$ ומכאן ש-$\triangle DTF$ שווה-שוקיים. $\overline{TE}$ הוא גם תיכון וגם גובה ל-$\overline{DF}$. מהאיור קל לראות ש:

$$\overline{OE} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right) .$$

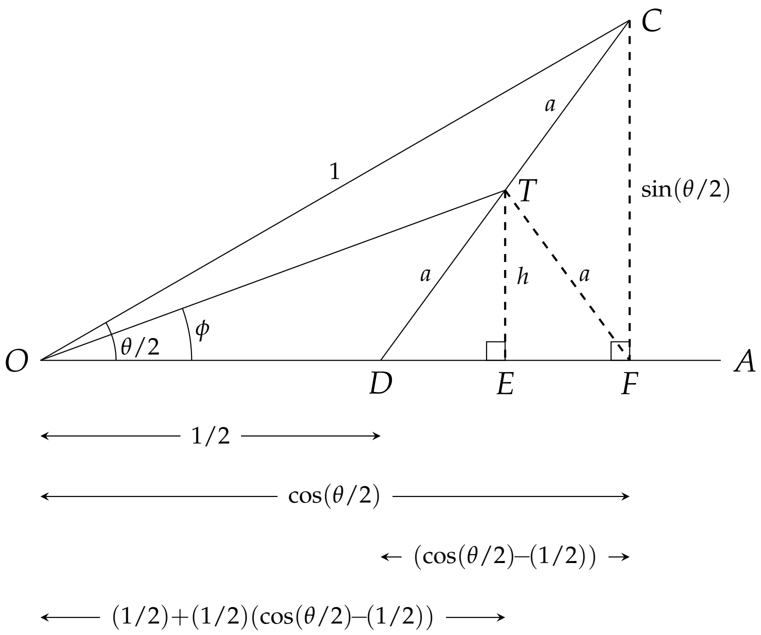
נחשב את האורך של $\overline{CD} = 2a$ בעזרת משפט פיתגורס ב-$\triangle DCF$:

$$(2a)^2 = \left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{\theta}{2} .$$

ניתן לחשב את אורכו של $h = \overline{TE}$ בעזרת משפט פיתגורס ב-$\triangle DTE$:

$$\begin{aligned}
a^2 &= h^2 + \left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right)\right]^2 \\
h^2 &= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2} - \left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2} \\
\tan\phi &= \frac{h}{\overline{OE}} = \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{1 + 2\cos\frac{\theta}{2}} .
\end{aligned}$$

□



איור 2.2 : קירוב ראשון של שילוש (2)

זהו קירוב לשילוש זווית $\phi = \theta/3$. עבור $\theta = 60^\circ$:

$$\tan^{-1}\left(\frac{2\sin 30^\circ}{1+2\cos 30^\circ}\right) = \tan^{-1} 0.366 \approx 20.1^\circ \approx 20^\circ\,.$$

טבלה 2.1 מראה את השגיאות עבור טווח של זוויות חדות. השגיאה קטנה יחסית עבור זוויות קטנות, אך עוברת את 1% עבור 85°.

2.1.2 קירוב שני לשילוש זווית

בנייה:

תהי $\theta = \angle AOB$ זווית שרירותית, ונניח ללא הגבלת הכלליות ש-A, B נמצאות על מעגל יחידה שמרכזו O. נבנה מעגל שהרדיוס שלו $1/3$ ומרכזו O, ותהי D נקודת החיתוך שלו עם $\overline{OA}$. נבנה את חוצה הזווית $\angle AOB$, ותהי C נקודת החיתוך שלו עם המעגל שרדיוסו $1/3$. נבנה את המיתר $\overline{CD}$ והמיתרים $\overline{AE} = \overline{ET} = \overline{CD}$. מכיוון שעל מיתרים שווים במעגל נשענות זוויות מרכזיות שוות, $\angle TOE = \angle EOA = \phi$ (איור 2.3).

משפט 2.2

$$\cos\phi = 1 - \frac{1}{9}(1-\cos(\theta/2)) = 1 - \frac{2}{9}\sin^2(\theta/4)\,.$$

הוכחה לפי משפט הקוסינוסים ב-$\triangle DOC$:

$$\overline{CD}^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\cos(\theta/2) = \frac{2}{9}(1-\cos(\theta/2))\,.$$

$\theta(^\circ)$	$\theta/3(^\circ)$	$\tan^{-1}\phi(^\circ)$	Error$(^\circ)$	Error(%)
5	1.667	1.667	0.000	0.004
10	3.333	3.334	0.000	0.014
15	5.000	5.002	0.002	0.032
20	6.667	6.670	0.004	0.057
25	8.333	8.341	0.007	0.088
30	10.000	10.013	0.013	0.128
35	11.667	11.687	0.020	0.174
40	13.333	13.364	0.030	0.228
45	15.000	15.043	0.043	0.289
50	16.667	16.726	0.060	0.358
55	18.333	18.413	0.080	0.435
60	20.000	20.104	0.104	0.520
65	21.667	21.799	0.133	0.612
70	23.333	23.500	0.166	0.713
75	25.000	25.206	0.206	0.823
80	26.667	26.918	0.251	0.941
85	28.333	28.636	0.303	1.068

טבלה 2.1: שגיאות בקירוב הראשון

לפי משפט הקוסינוסים ב-$\triangle EOA$:

$$\overline{AE}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\phi = 2(1-\cos\phi)\,.$$

נשווה את שני הביטויים $\overline{CD} = \overline{AE}$, נפשט ונקבל:

$$\cos\phi = 1 - \frac{1}{9}(1-\cos(\theta/2))\,.$$

מכיוון ש-$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ ולכן $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$, נקבל את הביטוי החלופי:

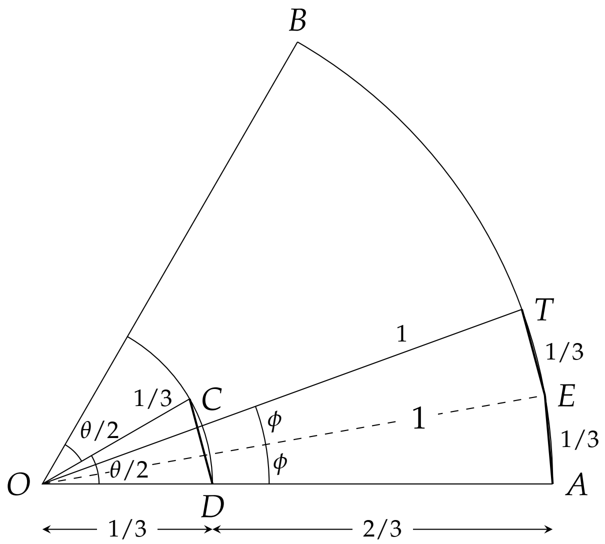
$$\cos\phi = 1 - \frac{2}{9}\sin^2(\theta/4)\,.$$

□

זהו קירוב לשילוש זווית $2\phi = \theta/3$. עבור $\theta = 60^\circ$:

$$2\cos^{-1}\left(1 - \frac{1}{9}(1-\cos 30^\circ)\right) \approx 19.8^\circ \approx 20^\circ\,.$$

טבלה 2.2 מראה את השגיאות עבור טווח של זוויות חדות. בנייה זו מדויקת הרבה פחות מהבנייה בסעיף 2.1.1.



איור 2.3 : קירוב שני לשילוש זווית

2.2 שילוש זווית באמצעות נוסיס

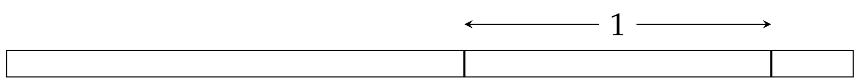
השימוש במילה "סרגל" מטעה, כי הכוונה היא למקל ישר ללא שנתות, שהפעולה היחידה שניתן לבצע בעזרתו היא למתוח קו ישר בין שתי נקודות. ארכימדס הראה שניתן להשתמש **בנוסיס**, סרגל בעל שתי שנתות בלבד, כדי לחלק זווית לשלושה. נגדיר את המרחק בין שתי השנתות כ-1 (איור 2.4).

בנייה: תהי α זווית שרירותית $\angle ABE$ במעגל יחידה שמרכזו B ורדיוסו שווה למרחק בין השנתות על הנוסיס. נמשיך את קטע הקו $\overline{EB}$ מחוץ למעגל. נניח את הנוסיס על הנקודה A ונזיז אותו עד שיחתוך את הישר בנקודה D ואת המעגל בנקודה C. נכוון את הנוסיס כך שאורך הקטע $\overline{CD}$ יהיה 1. נבנה את הקטע $\overline{AD}$. נסמן $\angle CDB = \beta$ (איור 2.5).

משפט 2.3 $\beta = \alpha/3$.

הוכחה נבנה את $\overline{BC}$ ונסמן את הזוויות ואת הקטעים כפי שמופיע באיור 2.6. $\triangle ABC$, $\triangle BCD$ הם משולשים שווי-שוקיים: $\overline{AB} = \overline{BC}$ הם רדיוסים באותו מעגל ו-$\overline{BC} = \overline{CD}$ לפי הבנייה באמצעות הנוסיס. סכום הזוויות במשולש שווה ל-180° כמו גם סכום הזוויות המשלימות, לכן

$$\epsilon = 180^\circ - 2\beta$$
$$\gamma = 180^\circ - \epsilon = 2\beta$$



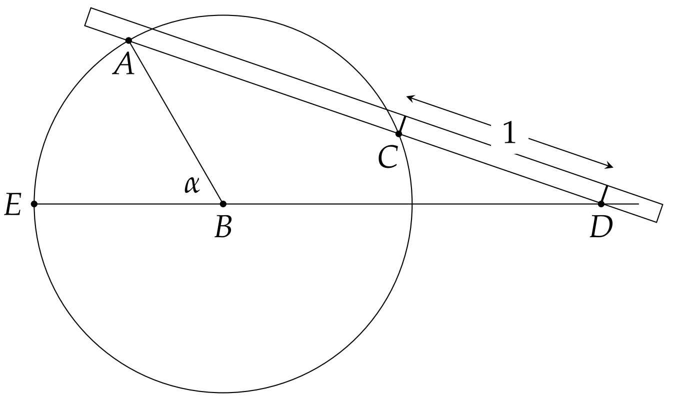
איור 2.4 : נוסיס

$\theta(^\circ)$	$\theta/3(^\circ)$	$\cos^{-1} 2\phi(^\circ)$	Error$(^\circ)$	Error$(\%)$
5	1.667	1.667	0.000	0.007
10	3.333	3.332	0.001	0.028
15	5.000	4.997	0.003	0.063
20	6.667	6.659	0.008	0.113
25	8.333	8.319	0.015	0.176
30	10.000	9.975	0.025	0.254
35	11.667	11.626	0.040	0.346
40	13.333	13.273	0.060	0.451
45	15.000	14.914	0.086	0.571
50	16.667	16.549	0.118	0.705
55	18.333	18.177	0.156	0.853
60	20.000	19.797	0.203	1.015
65	21.667	21.408	0.258	1.192
70	23.333	23.011	0.322	1.382
75	25.000	24.603	0.397	1.586
80	26.667	26.185	0.481	1.805
85	28.333	27.756	0.577	2.038

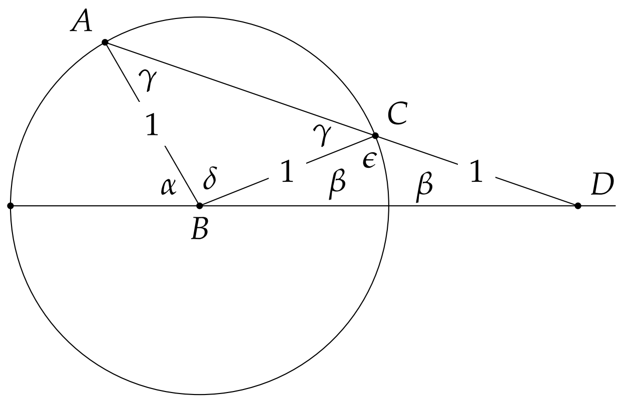
טבלה 2.2 : שגיאות בקירוב השני

$$\begin{aligned} \delta &= 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ - 4\beta \\ \alpha &= 180^\circ - \delta - \beta = 4\beta - \beta = 3\beta\,. \end{aligned}$$

□



איור 2.5 : שילוש זווית באמצעות נוסיס (1)



איור 2.6 : שילוש זווית באמצעות נוסיס (2)

2.3 הכפלת קובייה באמצעות נוסיס

נתונה קובייה C, יש לבנות קובייה בעלת נפח כפול. אם הנפח של C הוא V, אורך הצלע שלה הוא $\sqrt[3]{V}$. אורך צלע קובייה שנפחה כפול הוא $\sqrt[3]{2V} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{V}$, ולכן אם ניתן לבנות $\sqrt[3]{2}$ נוכל להכפיל קובייה.

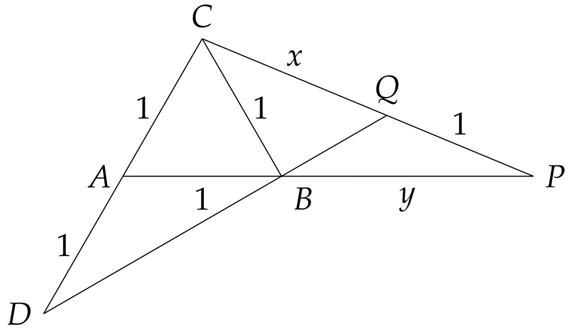
בנייה: נבנה משולש שווה-צלעות $\triangle ABC$ ונאריך את $\overline{CA}$ בקטע באורך יחידה עד ל-D. נבנה קרנות הממשיכות את $\overline{AB}$ ו-$\overline{DB}$. נניח את הנוסיס על הנקודה C ונזיז אותו עד שאחת השנתות שלו נמצאת על הקרן $\overline{AB}$ ב-P והשנת השנייה על הקרן $\overline{DB}$ ב-Q. נסמן $x = \overline{CQ}$ ו-$y = \overline{BP}$ (איור 2.7).

משפט 2.4 $x = \sqrt[3]{2}$.

הוכחה $\triangle ABC$ שווה-צלעות ולכן $\cos \angle CAP = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ולפי משפט הקוסינוסים ב-$\triangle APC$:

$$\overline{CP}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP} \cos 60^\circ \tag{2.1}$$

$$(x+1)^2 = 1^2 + (y+1)^2 - 2 \cdot 1 \cdot (y+1) \cdot \frac{1}{2} \tag{2.2}$$



איור 2.7 : הכפלת הקובייה באמצעות נוסיס

$$x^2 + 2x = y^2 + y\,. \tag{2.3}$$

לפי משפט מנלאוס (Menelaus) (משפט א'.20):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = 1\,.$$

ולכן:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{1} = 1 \tag{2.4}$$

$$xy = 2\,. \tag{2.5}$$

נציב את משוואה 2.5 במשוואה 2.3 ונקבל:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x} \\ x^4 + 2x^3 &= 4 + 2x \\ x^3(x+2) &= 2(x+2) \\ x &= \sqrt[3]{2}\,. \end{aligned}$$

□

2.4 שילוש זווית באמצעות קוואדרטריקס

יהי $\overline{ABCD}$ ריבוע. יהי l_1 קטע המונח על $\overline{DC}$ ויהי l_2 קטע המונח על $\overline{AD}$. נזיז את l_1 במהירות ליניארית קבועה עד שהוא מגיע ל-$\overline{AB}$ ונסובב את l_2 עם כיוון השעון במהירות סיבובית קבועה סביב A עד שגם הוא מגיע ל-$\overline{AB}$. נניח ששני הקטעים מגיעים ל-$\overline{AB}$ ביחד. למשל, אם l_2 מסתובב ב-1° לשנייה ואורך צלע הריבוע 9 ס״מ, l_1 חייב לזוז ב-0.1 ס״מ לשנייה. העקומה הנוצרת על ידי נקודת החיתוך של שני הקטעים P נקראת עקומת קוואדרטריקס **quadratrix curve** או פשוט **קוואדרטריקס (quadratrix)** (איור 2.8.א). ההגדרה מיוחסת למתמטיקאי היפיאס Hippias. איור 2.8.ב מראה **מחוגת קוואדרטריקס** המורכבת משני סרגלים (ללא שנתות) הנעים כמתואר לעיל, ומפרק המאלץ אותם לנוע יחד ומייצר עקומה.

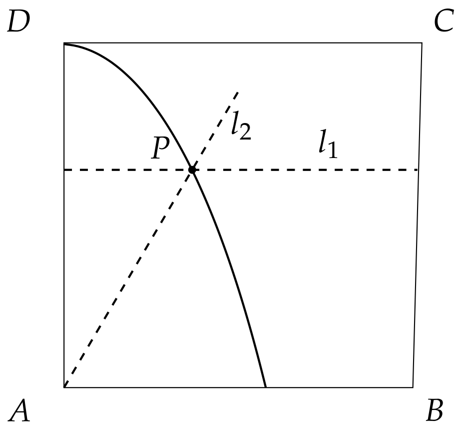
ניתן להשתמש בקוואדרטריקס לשילוש זווית.

בנייה: תהי $\angle CDP_1 = \alpha$ זווית שרירותית כאשר P_1 היא נקודת החיתוך של שוק הזווית α $\overline{DC}$ והקוואדרטריקס. נבנה ישר מקביל ל-$\overline{DC}$ דרך P_1 ונסמן ב-E את נקודת החיתוך שלו עם $\overline{AD}$. נסמן את הקטע $\overline{DE}$ ב-t ונחלק אותו לשלושה חלקים שווים (סעיף 2.5) כדי לקבל את הנקודה F שהיא $t/3$ מ-D. תהי P_2 נקודת החיתוך של הישר המקביל ל-$\overline{DC}$ דרך F והקוואדרטריקס, ונסמן ב-θ את הזווית בין $\overline{DC}$ ו-$\overline{DP_2}$ (איור 2.9).

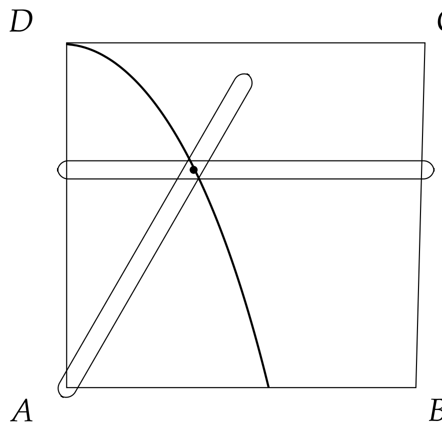
משפט 2.5 $\theta = \alpha/3$.

הוכחה שיעור ה-y של E הוא t $-$ 1, ולכן קוואורדינטת ה-y של F

שווה ל-$(t/3) - 1$. המהירות הליניארית הקבועה של הסרגל האופקי פרופורציונית למהירות הזוויתית הקבועה של הסרגל המסתובב, ולכן $\theta/\alpha = (t/3)/t$ ו-$\theta = \alpha/3$. □



2.8.א עקומת קוואדרטריקס



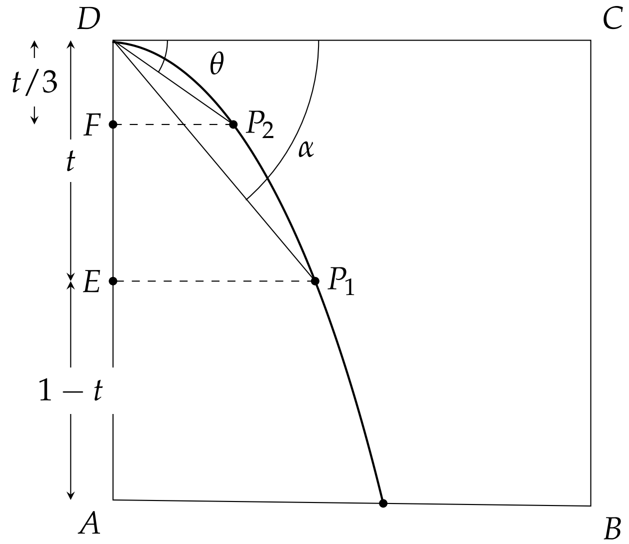
2.8.ב מחוגת קוואדרטריקס

2.5 מספרים בני-בנייה

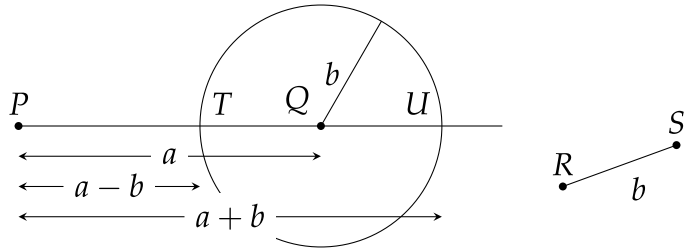
יהי l קטע שאורכו מוגדר כ-1.

הגדרה 2.1 מספר a הוא **בן-בנייה** ***(constructible)*** אם ורק אם ניתן לבנות באמצעות סרגל ומחוגה קטע קו באורך a בהינתן l.

נתון קטע $l = \overline{AB}$, נבנה ישר המכיל את $\overline{AB}$ ונשתמש במחוגה כדי למצוא על הישר נקודה C במרחק 1 מ-B. מכאן שאורכו של $\overline{AC}$ הוא 2 ולכן המספר 2 בן-בנייה. ניתן לבנות קטע $\overline{BD}$ באורך 1 מאונך ל-$\overline{AB}$ ב-B. אורך היתר של משולש $\triangle ABD$ הוא $\sqrt{2}$ ולכן המספר $\sqrt{2}$ בן-בנייה.



איור 2.9 : חלוקת זווית לשלושה באמצעות קוואדרטריקס



איור 2.10 : בניית חיבור וחיסור

משפט 2.6 מספר הוא **בן-בנייה** אם ורק אם הוא ערכו של ביטוי שנבנה ממספרים שלמים, ארבע פעולת חשבון $\{+,-,\times,/\}$ ופעולת השורש הריבועי $\sqrt{\ }$.

הוכחה תחילה נראה שניתן לבנות את המספרים המתקבלים מפעולות אלו.

חיבור וחיסור: נתונים קטעים $\overline{PQ}=a$ ו-$\overline{RS}=b$, נבנה מעגל ברדיוס b שמרכזו Q (איור 2.10). נמשיך את $\overline{PQ}$ עד שהוא חותך את המעגל ב-U. אזי $\overline{PTQU}$ הוא קטע המקיים $\overline{PT}=a-b$ ו-$\overline{PU}=a+b$.

כפל: לפי משולשים דומים באיור 2.11.א, $(1/b)=(a/\overline{OA})$ ולכן $\overline{OA}=ab$.

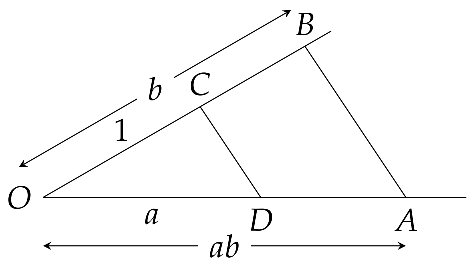
חילוק: לפי משולשים דומים באיור 2.11.ב, $(1/b)=(\overline{OD}/a)$ ולכן $\overline{OD}=(a/b)$.

שורש ריבועי: נתון קטע $\overline{BC}=a$, נבנה $\overline{AB}=1+a$ וחצ מעגל שקוטרו $\overline{AB}$. נבנה אנך לקטע ב-C ונסמן ב-D את נקודת החיתוך של האנך והמעגל (איור 2.12). $\angle ADB$ היא זווית ישרה כי היא נשענת על קוטר. לפי משולשים דומים $(h/1)=(a/h)$ ולכן $h^2=a$ ו-$h=\sqrt{a}$.

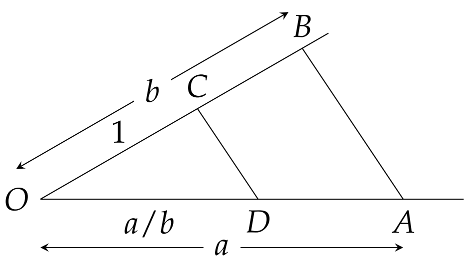
כדי להוכיח את הכיוון השני של המשפט, עלינו לקבוע אילו מספרים ניתן לבנות באמצעות סרגל ומחוגה. קיימות שלוש בניות :[1]

1. שני ישרים נחתכים בנקודה אחת (איור 2.13.א). ניתן לחשב את שיעורי נקודת החיתוך מהמשוואות של שני הישרים $y=x$ ו-$y=4x-2$. נקודת החיתוך היא $P=(2/3,2/3)$.

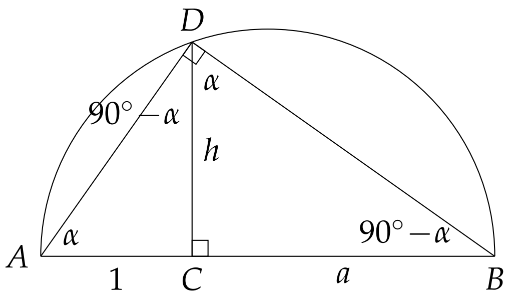
[1] למען הבהירות נדגים אותן על ערכים מסוימים במקום להשתמש במשוואות הכלליות.



2.11.א בניית כפל



2.11.ב בניית חילוק



איור 2.12: בניית שורש ריבועי

2. ישר חותך מעגל באפס נקודות, בנקודה אחת או בשתי נקודות (איור 2.13.ב). ניתן לחשב את שיעורי נקודות החיתוך ממשוואות הישר $y = x$ והמעגל $x^2 + y^2 = 4$. נקודות החיתוך הן $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $Q = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

3. שני מעגלים נחתכים באפס נקודות, בנקודה אחת או בשתי נקודות (איור 2.14). ניתן לחשב את שיעורי נקודות החיתוך ממשוואות שני המעגלים:

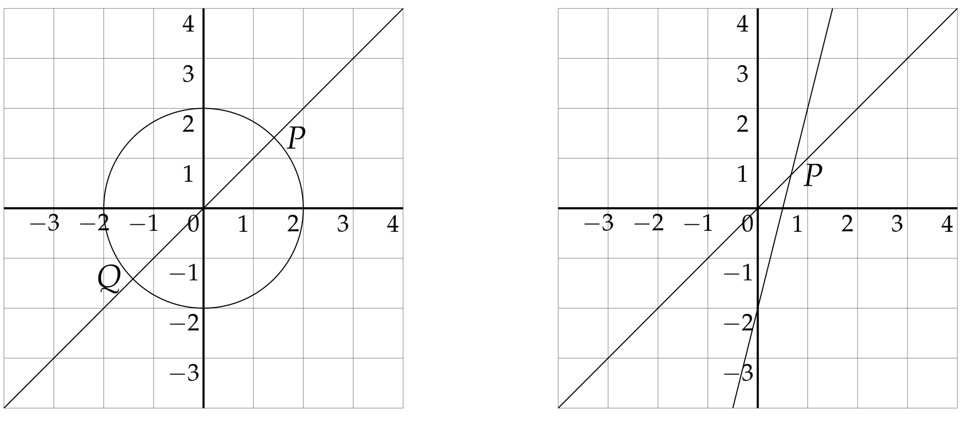
$$\begin{aligned}(x-1)^2 + y^2 &= 4\\(x+1)^2 + y^2 &= 4\,.\end{aligned}$$

נקודות החיתוך הן $P = (0, \sqrt{3}), Q = (0, -\sqrt{3})$.

□

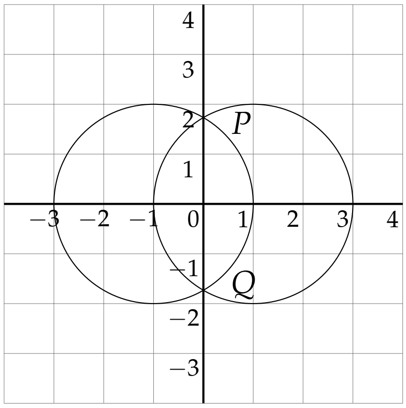
2.6 מספרים בני-בנייה כשורשים של פולינומים

כדי להראות שמספר אינו בן-בנייה יש להוכיח שלא ניתן לבטא אותו רק על ידי מספרים שלמים והפעולות $\{+, -, \times, /, \sqrt{}\}$. נראה שמספרים בני-בנייה הם השורשים של קבוצה מסוימת של פולינומים, ואז נוכיח ששילוש זווית והכפלת קובייה מחייבות בניית שורשים של פולינומים שאינם



2.13.א נקודת החיתוך של שני ישרים

2.13.ב נקודות החיתוך של ישר ומעגל



איור 2.14: נקודות החיתוך של שני מעגלים

איברים בקבוצה. היום מוכיחים את התוצאות הללו באמצעות תורת השדות מאלגברה מופשטת, אבל כאן אביא הוכחה שמשתמשת במתמטיקה בסיסית. ההוכחה מבוססת על ההגדרה שלהלן.

הגדרה 2.2 **העומק** של ביטוי שמורכב ממספרים שלמים ומהפעולות $\{+,-,\times,/,\sqrt{}\}$ הוא רמת הקינון המירבית של שורש ריבועי.

דוגמה 2.1 בביטוי שלהלן:

$$\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\,,$$

העומק הוא 3 כי בצד הימני של הביטוי מופיע $\sqrt{17}$ שמקונן בתוך $\sqrt{34+2\sqrt{17}}$ שבעצמו מקונן בתוך $\sqrt{17+\cdots-\cdots-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$.

משפט 2.7 ניתן לבטא ביטוי בעומק n כ-$a+b\sqrt{c}$ כאשר a,b,c הם ביטויים בעומק $n-1$ לכל היותר.

הוכחה חישובים פשוטים מראים שתוצאות הביטויים $(a_1+b_1\sqrt{c})\ op\ (a_2+b_2\sqrt{c})$ עבור הפעולות $op=\{+,-,\times\}$ הן ביטויים מהצורה $a+b\sqrt{c}$ בעומק $n-1$. עבור חילוק החישוב מעט יותר מסובך:

$$\begin{aligned}\frac{a_1+b_1\sqrt{c}}{a_2+b_2\sqrt{c}} &= \frac{(a_1+b_1\sqrt{c})(a_2-b_2\sqrt{c})}{(a_2+b_2\sqrt{c})(a_2-b_2\sqrt{c})}\\ &= \frac{a_1a_2-b_1b_2c}{a_2^2-b_2^2c}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-b_2^2c}\sqrt{c}\,,\end{aligned}$$

שהוא מהצורה $a+b\sqrt{c}$ כאשר a,b,c בעומק $n-1$. לבסוף, השורש של ביטוי בעומק $n-1$ הוא בעומק n. $\square$

משפט 2.8 יהי $p(x)$ פולינום מתוקן ממעלה שלישית עם מקדמים רציונליים:

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\,,$$

ויהי $r = a + b\sqrt{c}$ שורש של $p(x)$ בעל עומק **מינימלי** n, כאשר a, b, c הם בעומק $n-1$ לכל היותר. אזי $r' = a - b\sqrt{c}$ הוא שורש של $p(x)$ ו-$r \neq r'$.

הוכחה נחשב $p(r)$ שווה ל-0 כי r הוא שורש:

$$\begin{aligned}
(a+b\sqrt{c})^3 + a_2(a+b\sqrt{c})^2 + a_1(a+b\sqrt{c}) + a_0 &= \\
(a^3 + 3a^2b\sqrt{c} + 3ab^2c + b^3c\sqrt{c}) & \\
\quad + a_2(a^2 + 2ab\sqrt{c} + b^2c) + a_1(a+b\sqrt{c}) + a_0 &= \\
(a^3 + 3ab^2c + a_2a^2 + a_2b^2c + a_1a + a_0) & \\
\quad + (3a^2b + b^3c + 2a_2ab + a_1b)\sqrt{c} &= \\
d + e\sqrt{c} &= 0\,,
\end{aligned}$$

כאשר d, e הם ביטויים בעומק $n-1$ המורכבים ממקדמים רציונליים ו-a, b, c. אזי $\sqrt{c} = -d/e$ כך שניתן לבטא את $a + b\sqrt{c}$ כביטוי בעומק $n-1$, בסתירה להנחה ש-$a + b\sqrt{c}$ הוא מעומק מינימלי n. מכיוון ש-$\sqrt{c} \neq 0$ ובעומק n, כדי ש-$d + e\sqrt{c}$ יהיה שווה לאפס חייב להתקיים $d = e = 0$.

מה עם $r' = a - b\sqrt{c}$? אם נעיין בחישוב למעלה נראה ש-$p(r') = d - e\sqrt{c} = 0 + 0 \cdot \sqrt{c} = 0$ כך שגם r' הוא שורש של p. אם $r = r'$ אזי $0 = r - r' = 2b\sqrt{c}$ שמתקיים רק אם $b = 0$ ואז העומק של r, r' יהיה $n-1$, שוב בסתירה להנחה. $\square$

משפט 2.9 אם לפולינום מתוקן ממעלה שלישית עם מקדמים רציונליים:

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

אין שורשים רציונליים, אז אין לו שורשים בני-בנייה.

הוכחה לפי המשפט הבסיסי של אלגברה (משפט 16.1) ל-$p(x)$ שלושה שורשים r_1, r_2, r_3. יהי $r_1 = a + b\sqrt{c}$ שורש בעומק מינימלי n. לפי ההנחה שאין שורשים רציונליים, $n \geq 1$, ולכן $b \neq 0$ ו-$c \neq 0$. לפי משפט 2.8, $r_2 = a - b\sqrt{c}$ הוא גם שורש. נבצע את הכפל שלהלן:

$$(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3) = x^3 - (r_1+r_2+r_3)x^2 \tag{2.6}$$

$$+ (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x + r_1r_2r_3 \tag{2.7}$$

$$a_2 = -(r_1+r_2+r_3) \tag{2.8}$$

$$r_3 = -(a_2+r_1+r_2)\,. \tag{2.9}$$

אבל a_2 הוא רציונלי וכן:

$$r_3 = -a_2 - (r_1+r_2) = -a_2 - 2a$$

שורש רציונלי בסתירה להנחה. $\square$

2.7 אי-אפשר לשלש זווית ולהכפיל קובייה

משפט 2.10 $\sqrt[3]{2}$ אינו מספר רציונלי.

הוכחה נניח ש-$\sqrt[3]{2}$ רציונלי ושווה ל-p/q כאשר p,q מספרים שלמים ללא גורמים משותפים פרט ל-± 1. אזי:

$$\begin{aligned}(p/q)^3 &= (\sqrt[3]{2})^3\\ p^3 &= 2q^3\,,\end{aligned}$$

ולכן ניתן לחלק את p ב-2, כלומר, $p=2r$. נמשיך:

$$\begin{aligned}8r^3 &= 2q^3\\ q^3 &= 4r^3\,,\end{aligned}$$

כך שניתן לחלק גם את q ב-2, סתירה להנחה של-p,q אין גורם משותף. □

משפט 2.11 ל-x^3-2 אין שורשים רציונליים, ולכן לא ניתן להכפיל קובייה בעזרת סרגל ומחוגה.

הוכחה אחד מהשורשים הוא $\sqrt[3]{2}$ שהוא אי-רציונלי (משפט 2.10). השורשים האחרים הם השורשים של הפולינום הריבועי $x^2+\sqrt[3]{2}x+(\sqrt[3]{2})^2$ שמתקבל מחלוקת x^3-2 ב-$x-\sqrt[3]{2}$. קל לבדוק שהשורשים אי-רציונליים (למעשה, הם אפילו אינם ממשיים). □

משפט 2.12 לא ניתן לחלק זווית שרירותית לשלושה חלקים שווים בסרגל ומחוגה.

הוכחה מספיק להוכיח שיש זווית אחת שלא ניתנת לחלוקה. ננסה לחלק את 60° לשלושה חלקים כדי לקבל 20°. לפי משפט א׳.6:

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\\ \cos 60^\circ &= 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ\,.\end{aligned}$$

נסמן $x=\cos 20^\circ$ ונסמן $y=2x$. מ-$\cos 60^\circ = 1/2$ מתקבל:

$$\begin{aligned}4x^3-3x-\frac{1}{2} &= 0\\ 8x^3-6x-1 &= 0\\ y^3-3y-1 &= 0\,.\end{aligned}$$

כדי להוכיח שלפולינום y^3-3y-1 אין שורשים רציונליים, נניח ש-$y=a/b$ הוא שורש רציונלי כאשר ל-a,b אין גורמים משותפים פרט ל-± 1. אזי:

$$(a/b)^3-3(a/b)-1 = 0 \tag{2.10}$$

$$a^3-3ab^2 = b^3 \tag{2.11}$$

$$a(a^2-3b^2) = b^3 \tag{2.12}$$

$$a^3 = b(b^2+3ab)\,. \tag{2.13}$$

לפי משוואה 2.12, ניתן לחלק את b ב-a, ולפי משוואה 2.13, ניתן לחלק את a ב-b. זה אפשרי רק אם $a = b = \pm 1$ ו-$a/b = \pm 1$. ניתן לבדוק בחישוב ש-$y = a/b = 1$ ו-$y = a/b = -1$ אינם שורשים של הפולינום. $\square$

דרך אחרת להוכיח שהבעיות אינן אפשריות היא להשתמש במשפט שלהלן (ללא הוכחה):

משפט 2.13 אם לפולינום מתוקן שהמקדמים שלו שלמים $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ יש שורשים רציונליים, אזי יש לו שורשים שלמים.

כדי להראות שלא ניתן להכפיל קובייה עלינו לראות שלפולינום:

$$x^3 - 2 = (x - r_2)(x - r_1)(x - r_0)$$

אין שורשים שלמים. מכיוון ש-$(-r_0)(-r_1)(-r_2) = -2$ כל השורשים חייבים לחלק את 2, כך שהשורשים השלמים האפשריים הם $\pm 1, \pm 2$. חישוב קצר מראה שאף לא אחד מהם הוא שורש.

כדי להראות שלא ניתן לחלק זווית לשלושה חלקים עלינו להראות שלפולינום $y^3 - 3y - 1$ אין שורשים שלמים. שורש שלם חייב לחלק את -1 אבל 1 וגם -1 אינם שורשים.

מה ההפתעה?

אנדרווד דאדלי Underwood Dudley ערך חקירה רחבה על מי שהוא כינה "תמהוניים" המבזבזים שנים מחייהם בניסיון להוכיח שניתן לחלק זוויות לשלושה בעזרת סרגל ומחוגה. לא רק שהם מוליכים את עצמם שולל, אלא גרוע מכך, הם חושבים שיש חשיבות למציאת בנייה. בנייה היא חסרת שימוש מעשי כמובן, כי בכלים כגון הנוסיס והקוואדרטריקס ניתן למצוא בנייה מדויקת. המספר העצום של הבניות הללו מפתיע כי רבות מהן מתוחכמות ומשיגות קירובים טובים. חישוב הנוסחאות של הבניות הגיאומטריות הוא תרגיל מצוין בטריגונומטריה.

מפתיע גם שההוכחות שלא ניתן לבצע את הבניות הללו משתמשות רק באלגברה ומבוססות על תכונות של שורשים של פולינומים.

מקורות

ויקיפדיה

(Wikipedia) [51, 58, 62] הוא מקור טוב למידע על בניות. שני הקירובים לחלוקת זווית לשלושה חלקים לקוחים מ-[15, עמודים 67-68, 95-96]. הקירוב השני מיוחס לפילוסוף הנודע תומאס הובס (Thomas Hobbes). חלוקת זווית לשלושה באמצעות קוואדראטיקס מבוססת על [31, עמודים 48-49] ו-[15, עמודים 6-7]. הכפלת הקובייה באמצעות נוסיס נלקחה מ-[14].

אפשר למצוא הצגה מוקפדת של מספרים בני-בנייה בכל ספר לימוד אלגברה מודרנית, כגון [17], הכולל הוכחה של המקרה הכללי של משפט 2.6 בסעיף 32. משפט 2.13 הוא משפט 23.11 של [17]. הוכחה נגישה יחסית של ההוכחה של Wantzel נמצאת ב-[48]. ההצגה שלי של מספרים בני-בנייה מבוססת על ההצגות ב-[11, פרק III] וב-[27].

פרק 3

איך לרבע את המעגל

לרבע את המעגל היא אחת מבעיות הבנייה שהיוונים ניסו לפתור ולא הצליחו. בניגוד לחלוקה זווית לשלושה חלקים ולהכפלת הקובייה שאינן ניתנות לבנייה בגלל תכונות של שורשים של פולינומים, לא ניתן לרבע את המעגל מכיוון ש-π הוא טרנסצנדנטי: הוא אינו פתרון של אף פולינום שהמקדמים שלו רציונליים. ההוכחה מסובכת וניתנה רק ב-1882 על ידי קארל פון לינדמן (Carl von Lindemann).

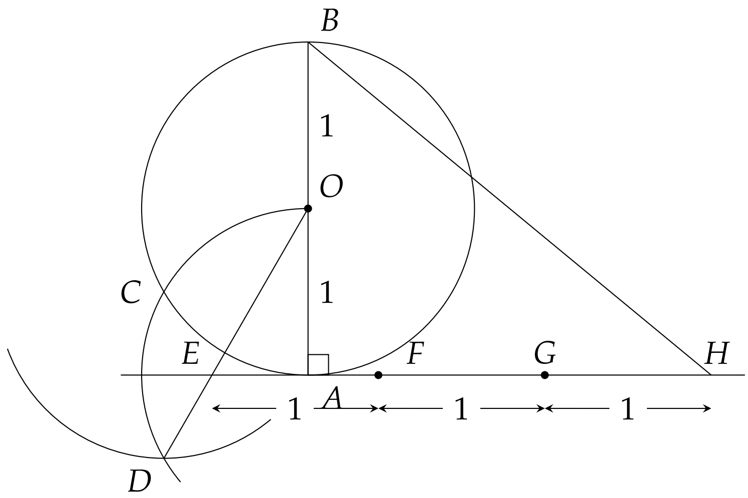
קירובים ל-$\pi \approx 3.14159265359$ היו ידועים גם בעולם העתיק. קירובים די מדויקים הם:

$$\frac{22}{7} \approx 3.142857, \quad \frac{333}{106} \approx 3.141509, \quad \frac{355}{113} \approx 3.141593\,.$$

נביא שלוש בניות בסרגל ובמחוגה של קירובים ל-π. בנייה אחת של אדם קוחנסקי (Adam Kochański) (סעיף 3.1) ושתי בניות של רמנוג׳אן (Ramanujan) (סעיפים 3.2, 3.3). סעיף 3.4 מסביר איך לרבע את המעגל באמצעות קוואדרטריקס.

הטבלה שלהלן מראה את הנוסחאות של האורכים שנבנו, ערכם המקורב, ההפרש בין ערכים אלו והערך של π, והשגיאה (במטרים) אם משתמשים בקירוב כדי לחשב את היקף כדור הארץ, כאשר נתון שהרדיוס שלו הוא 6378 ק״מ.

בנייה	נוסחה	ערך	הפרש	שגיאה (מ׳)
π		3.14159265359	—	—
Kochansky	$\sqrt{\dfrac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$	3.1415333871	5.932×10^{-5}	756
Ramanujan 1	$\dfrac{355}{113}$	3.14159292035	2.667×10^{-7}	3.4
Ramanujan 2	$\left(9^2 + \dfrac{19^2}{22}\right)^{1/4}$	3.14159265258	1.007×10^{-9}	0.013



איור 3.1 : הקירוב של Kochański ל-π

3.1 הבנייה של קוחנסקי Kochansky

בנייה (איור 3.1):

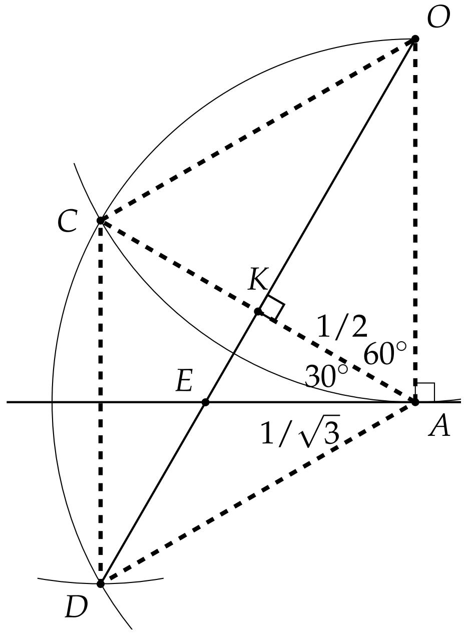
- נבנה מעגל יחידה שמרכזו O עם קוטר $\overline{AB}$, ונבנה משיק למעגל ב-A.
- נבנה מעגל יחידה שמרכזו A, ונסמן את נקודת החיתוך שלו עם המעגל הראשון ב-C. נבנה מעגל יחידה שמרכזו C ונסמן את נקודת החיתוך שלו עם המעגל השני ב-D.
- נבנה את $\overline{OD}$ ונסמן את נקודת החיתוך שלו עם המשיק ב-E.
- מ-E נבנה H, G, F, כל אחת במרחק 1 מהנקודה הקודמת.
- נבנה את $\overline{BH}$.

משפט 3.1 $\overline{BH} = \sqrt{\dfrac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx \pi$.

הוכחה איור 3.2 מתמקד בחלק מאיור 3.1 שבו נוספו קטעי הקו המקווקווים. מכיוון שכל המעגלים הם מעגלי היחידה, אורכו של כל אחד מהם הוא 1. מכאן ש-$\overline{AOCD}$ הוא מעוין ולכן האלכסונים שלו ניצבים זה לזה וחוצים זה את זה בנקודה שסומנה K, $\overline{AK} = 1/2$.

האלכסון $\overline{AC}$ יוצר שני משולשים שווי-צלעות $\triangle OAC, \triangle DAC$ כך ש-$\angle OAC = 60^\circ$. הזווית בין המשיק לרדיוס $\overline{OA}$ היא זווית ישרה ולכן $\angle KAE = 30^\circ$. נחשב:

$$\frac{1/2}{\overline{EA}} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\overline{EA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



איור 3.2: הוכחת הבנייה של Kochansky

$$\overline{AH} = 3 - \overline{EA} = \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$$

$\triangle ABH$ הוא משולש ישר-זווית ו-$\overline{AH} = 3 - \overline{EA}$, ולכן לפי משפט פיתגורס:

$$\begin{aligned}
\overline{BH}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 \\
&= 4 + \frac{27 - 6\sqrt{3} + 1}{3} = \frac{40}{3} - 2\sqrt{3} \\
\overline{BH} &= \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3.141533387 \approx \pi\,.
\end{aligned}$$

$\square$

3.2 הבנייה הראשונה של רמנוג'אן Ramanujan

בנייה (איור 3.3):

- נבנה מעגל יחידה שמרכזו O עם קוטר $\overline{PR}$.
- נבנה נקודה H שחוצה את $\overline{PO}$ ונקודה T כך שאורך הקטע $\overline{TR}$ הוא שליש מאורך $\overline{OR}$.
- נבנה אנך לקוטר ב-T שחותך את המעגל ב-Q.
- נבנה את המיתרים $\overline{RS} = \overline{QT}$ ואת המיתר $\overline{PS}$.
- נבנה מקביל ל-$\overline{RS}$ שיוצא מנקודהT וחותך את $\overline{PS}$ ב-N.
- נבנה מקביל ל-$\overline{RS}$ שיוצא מנקודהO וחותך את $\overline{PS}$ ב-M.
- נבנה מיתר $\overline{PK} = \overline{PM}$.
- נבנה משיק למעגל בנקודה P שאורכו $\overline{PL} = \overline{MN}$.
- נחבר את הנקודות K, L, R.
- נמצא נקודה C כך ש-$\overline{RC} = \overline{RH}$.
- נבנה $\overline{CD}$ מקביל ל-$\overline{KL}$ וחותך את $\overline{LR}$ ב-D.

משפט 3.2 $\overline{RD}^2 = \dfrac{355}{113} \approx \pi$.

הוכחה לפי הבנייה $\overline{RS} = \overline{QT}$ ולפי משפט פיתגורס ב-$\triangle QOT$:

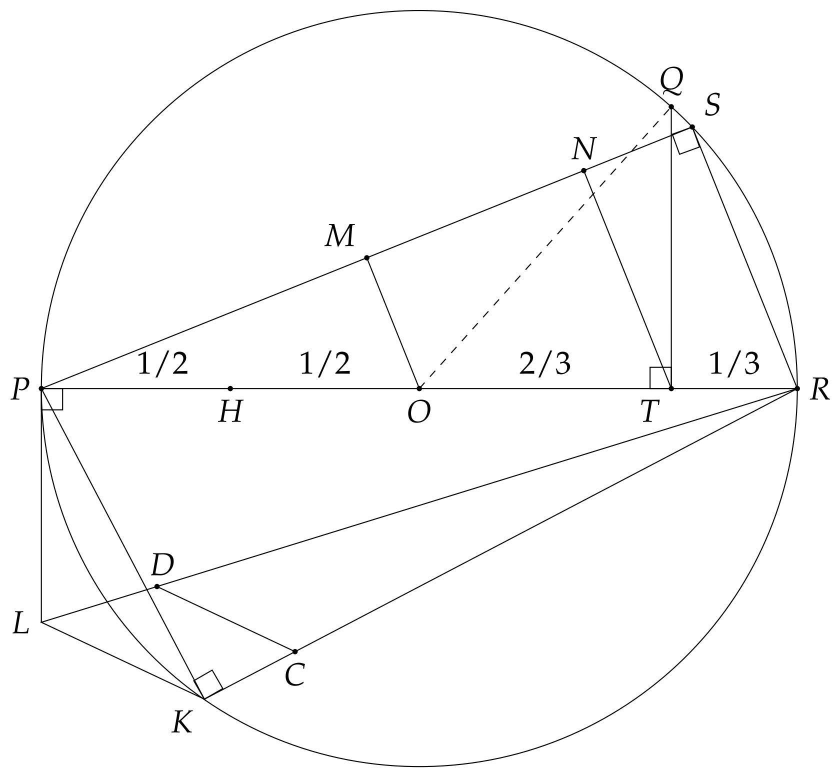
$$\overline{RS} = \overline{QT} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}\,.$$

הזווית $\angle PSR$ נשענת על קוטר כך ש-$\triangle PSR$ הוא משולש ישר-זווית, ולפי משפט פיתגורס:

$$\overline{PS} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{31}}{3}\,.$$

לפי הבנייה $\overline{MO} \| \overline{RS}$ כך ש-$\triangle MPO \sim \triangle SPR$ ו:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{PM}}{\overline{PO}} &= \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}}\\
\frac{\overline{PM}}{1} &= \frac{\sqrt{31}/3}{2}\\
\overline{PM} &= \frac{\sqrt{31}}{6}\,.
\end{aligned}$$



איור 3.3: הבנייה של Ramanujan

לפי הבנייה $\overline{RS} \| \overline{NT}$ כך ש-$\triangle SPR \sim \triangle NPT$ ו:

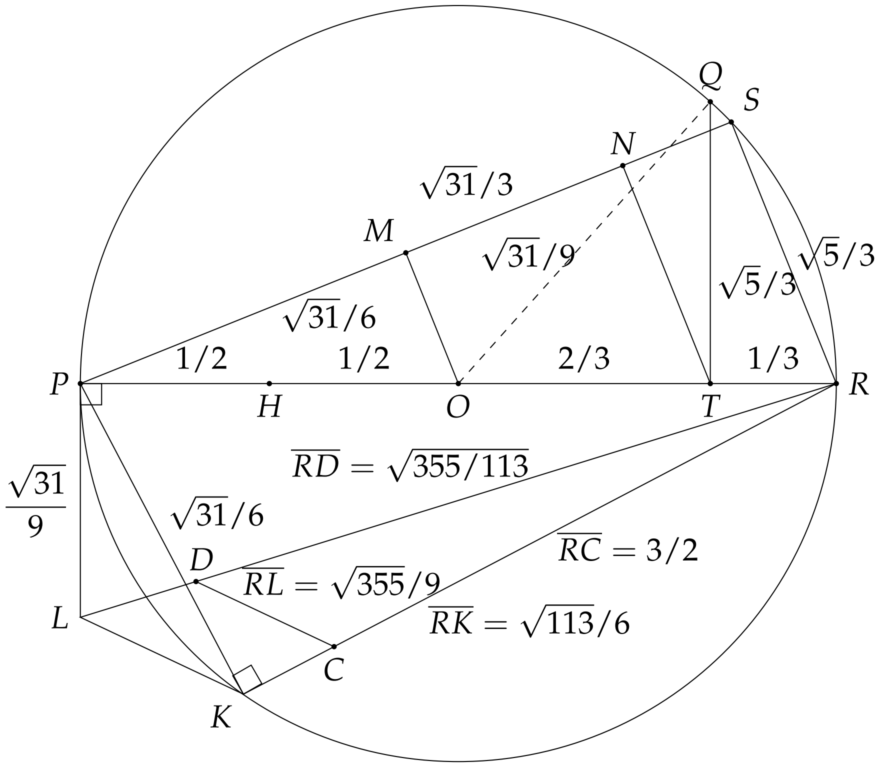
$$\frac{\overline{PN}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}}$$
$$\frac{\overline{PN}}{5/3} = \frac{\sqrt{31}/3}{2}$$
$$\overline{PN} = \frac{5\sqrt{31}}{18}$$
$$\overline{MN} = \overline{PN} - \overline{PM} = \sqrt{31}\left(\frac{5}{18} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{31}}{9}\,.$$

$\triangle PKR$ הוא משולש ישר-זווית כי $\angle PKR$ נשענת על קוטר. לפי הבנייה $\overline{PM} = \overline{PK}$ ולכן לפי משפט פיתגורס:

$$\overline{RK} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{31}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{113}}{6}\,.$$

$\triangle PLR$ הוא משולש ישר-זווית כי $\overline{PL}$ הוא משיק, ולכן $\angle PLR$ הוא משולש-ישר זווית. לפי הבנייה $\overline{MN} = \overline{PL}$ ולפי משפט פיתגורס:

$$\overline{RL} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{31}}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{355}}{9}\,.$$



איור 3.4 : הבנייה עם ציון אורכי הקטעים

לפי הבנייה $\overline{RC} = \overline{RH} = 3/2$ ו-$\overline{LK} \parallel \overline{CD}$. לפי משולשים דומים :

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{RD}}{\overline{RC}} &= \frac{\overline{RL}}{\overline{RK}} \\
\frac{\overline{RD}}{3/2} &= \frac{\sqrt{355}/9}{\sqrt{113}/6} \\
\overline{RD} &= \sqrt{\frac{355}{113}} \\
\overline{RD}^2 &= \frac{355}{113} \approx 3.14159292035 \approx \pi\,.
\end{aligned}$$

אורכי הקטעים מצוינים באיור 3.4. □

3.3 הבנייה השנייה של Ramanujan

בנייה (איור 3.5)

- נבנה מעגל יחידה שמרכזו O עם קוטר $\overline{AB}$ ונסמן ב-C את נקודת החיתוך של האנך ל-$\overline{AB}$ ב-O עם המעגל.
- נחלק את הקטע $\overline{AO}$ כך ש-$\overline{AT} = 1/3$ ו-$\overline{TO} = 2/3$.
- נבנה את $\overline{BC}$ ונמצא נקודות M, N כך ש-$\overline{CM} = \overline{MN} = \overline{AT} = 1/3$.
- נבנה את $\overline{AM}$ ואת $\overline{AN}$ ונסמן ב-P את הנקודה על $\overline{AN}$ כך ש-$\overline{AP} = \overline{AM}$.
- נבנה מקביל ל-$\overline{MN}$ שעובר דרך P ונסמן ב-Q את נקודת החיתוך שלו עם $\overline{AM}$.
- נבנה את $\overline{OQ}$ ונבנה מקביל ל-$\overline{OQ}$ שעובר דרך T ונסמן ב-R את נקודת החיתוך שלו עם $\overline{AM}$.
- נבנה משיק למעגל $\overline{AS}$ כך ש-$\overline{AS} = \overline{AR}$.
- נבנה את $\overline{SO}$.

משפט 3.3 $\pi \approx \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} = 3\sqrt{\overline{SO}}$.

הוכחה $\triangle COB$ הוא משולש ישר-זווית ולפי משפט פיתגורס $\overline{CB} = \sqrt{2}$ ו

$$\overline{NB} = \sqrt{2} - 2/3\,.$$

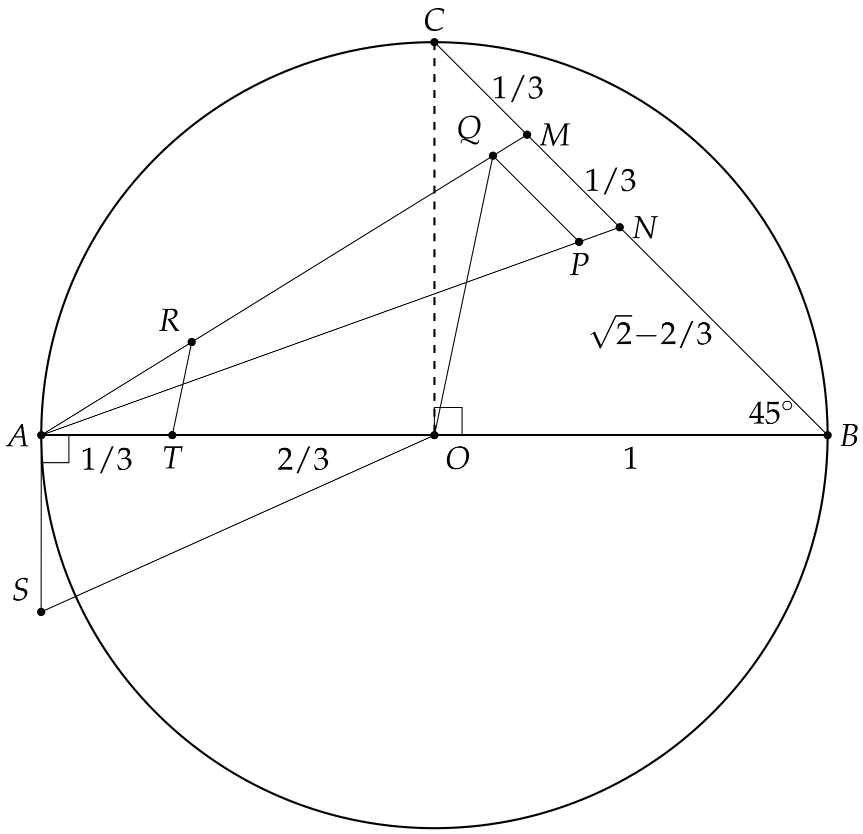
$\triangle COB$ הוא המשולש שווה-שוקיים ולכן $\angle NBA = \angle MBA = 45^\circ$. לפי משפט הקוסינוסים:

$$\begin{aligned}
\overline{AN}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BN}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BN}\cdot\cos\angle NBA \\
&= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)^2 - 2\cdot 2\cdot\left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{22}{9} \\
\overline{AN} &= \sqrt{\frac{22}{9}}\,.
\end{aligned}$$

שוב לפי משפט הקוסינוסים:

$$\begin{aligned}
\overline{AM}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BM}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BM}\cdot\cos\angle MBA \\
&= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 - 2\cdot 2\cdot\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{19}{9} \\
\overline{AM} &= \sqrt{\frac{19}{9}}\,.
\end{aligned}$$

לפי הבנייה $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$ כך ש-$\triangle QAP \sim \triangle MAN$, ולפי הבנייה $\overline{AP} = \overline{AM}$, ולכן:



איור 3.5 : הבנייה השנייה של Ramanujan

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}$$

$$\overline{AQ} = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AN}} = \frac{19/9}{\sqrt{22/9}} = \frac{19}{3\sqrt{22}}\,.$$

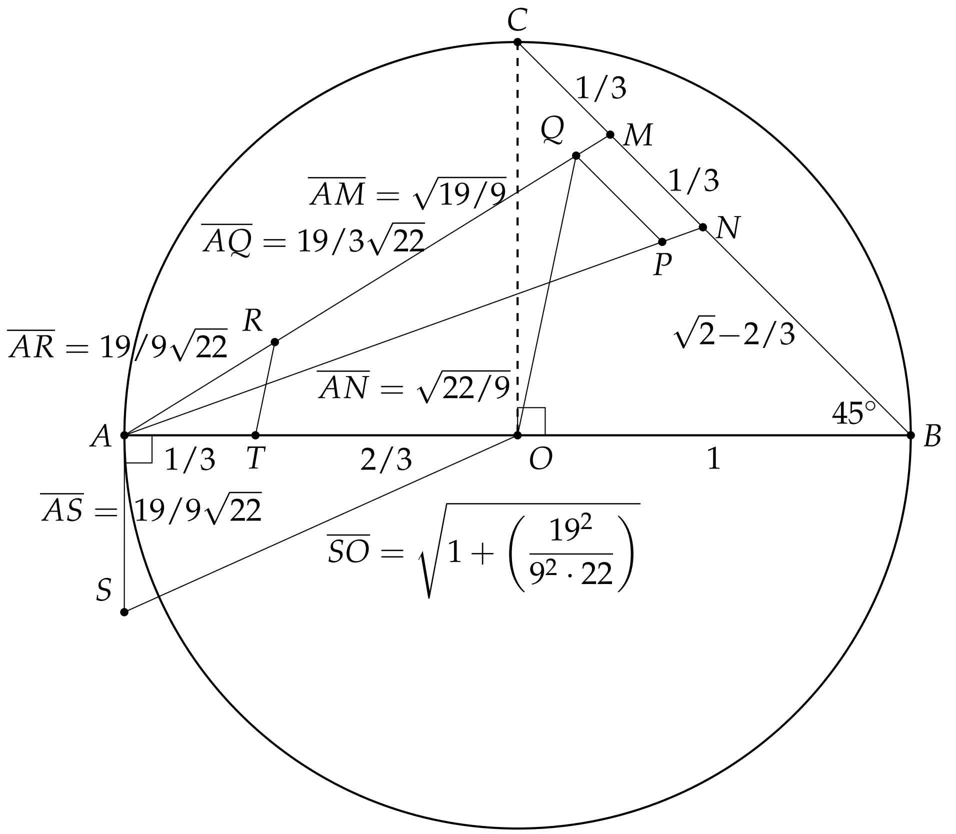
לפי הבנייה $\overline{OQ} \parallel \overline{TR}$ ולכן $\triangle QAO \sim \triangle RAT$ ו:

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}}$$

$$\overline{AR} = \overline{AQ} \cdot \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} = \frac{19}{3\sqrt{22}} \cdot \frac{1/3}{1} = \frac{19}{9\sqrt{22}}\,.$$

לפי הבנייה $\overline{AR} = \overline{AS}$ ו-$\triangle OAS$ הוא משולש ישר-זווית כי $\overline{AS}$ הוא משיק למעגל. לפי משפט פיתגורס:

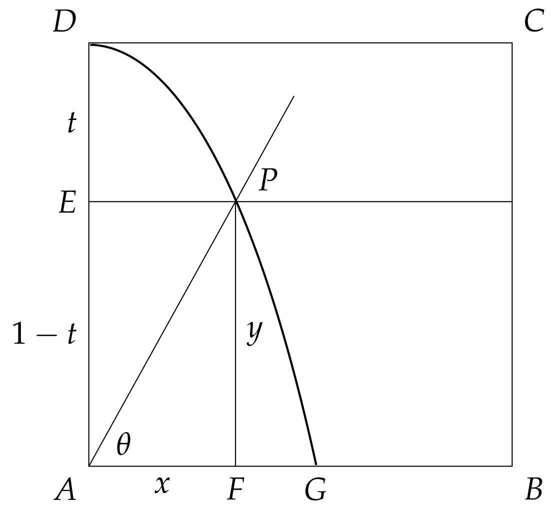
$$\overline{SO} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{19}{9\sqrt{22}}\right)^2}$$



איור 3.6 : הבנייה עם ציון אורכי הקטעים

$$3\sqrt{\overline{SO}} = 3\left(1 + \frac{19^2}{9^2 \cdot 22}\right)^{1/4} = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} \approx 3.14159265258 \approx \pi\,.$$

אורכי הקטעים מצוינים באיור 3.6. □



איור 3.7 : לרבע את המעגל באמצעות קוואדרטריקס

3.4 לרבע את המעגל באמצעות קוודרטיקס

הקוואדרטריקס מתואר בסעיף 2.4.

יהי $t = \overline{DE}$ המרחק שעובר הסרגל האופקי כאשר הוא יורד לאורך ציר ה-y ותהי θ הזווית שנוצרת בין הסרגל המסתובב ובין ציר ה-x. יהי P המיקום של הציר המחבר את שני הסרגלים. המקום הגיאומטרי של P הוא עקומת הקוואדרטריקס.

יהי F ההיטל של P על ציר ה-x ויהי G מקומו של הציר כאשר שני הסרגלים מגיעים לציר ה-x, כלומר, G היא נקודת החיתוך בין עקומת הקוואדרטריקס וציר ה-x (איור 3.7).

משפט 3.4 $\overline{AG} = 2/\pi$.

הוכחה יהי $y = \overline{PF} = \overline{EA} = 1 - t$. מכיוון שקצב הירידה של θ על הקוואדרטריקס זהה לקצב העלייה של t:

$$\frac{1-t}{1} = \frac{\theta}{\pi/2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}(1-t)\,.$$

יהי $x = \overline{AF} = \overline{EP}$. אזי $\tan\theta = y/x$, ולכן:

$$x = \frac{y}{\tan\theta} = y\cot\theta = y\cot\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right) = y\cot\left(\frac{\pi}{2}y\right)\,. \tag{3.1}$$

נהוג לבטא פונקציה כ-$y = f(x)$ אבל ניתן לבטא גם כ-$x = f(y)$.

כדי לקבל $\overline{AG} = x$ לא ניתן פשוט להציב $y = 0$ במשוואה 3.1 כי $\cot 0$ אינו מוגדר. נחשב את הגבול של x כאשר y שואף ל-0. תחילה נציב $z = (\pi/2)y$ ונקבל:

$$x = y\cot\frac{\pi}{2}y = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}y\cot\frac{\pi}{2}y\right) = \frac{2}{\pi}(z\cot z)\,,$$

ונחשב את הגבול:

$$\lim_{z\to 0} x = \frac{2}{\pi}\lim_{z\to 0}(z\cot z) = \frac{2}{\pi}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z\cos z}{\sin z}\right) = \frac{2}{\pi}\lim_{z\to 0}\left(\frac{\cos z}{(\sin z)/z}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{\cos 0}{1} = \frac{2}{\pi}\,,$$

כאשר השתמשנו ב משפט א׳.12:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1\,.$$

□

מה ההפתעה?

מפתיע שניתן לבנות קירובים כל כל מדויקים ל-π. כמובן, אנו נדהמים מהבניות של רמנוג׳אן.

מקורות

הבנייה של קוחנסקי מופיעה ב-[7]. הבניות של רמנוג׳אן נמצאות ב-[38, 39]. ריבוע המעגל באמצעות הקוואדרטריקס מבוסס על [31, pp. 48--49] ועל[62].

פרק 4

משפט חמשת הצבעים

מפות משתמשות בצבעים כדי להבחין בין אזור אחד לאחר, על ידי צביעת אזורים סמוכים בצבעים שונים. בשנת 1852 פרנסיס גאתירי (Francis Guthrie) שם לב שניתן לצבוע את המחוזות באנגליה בארבעה צבעים בלבד. הטענה שארבעה צבעים מספיקים לצביעת כל מפה מישורית נקראת **משפט ארבעת הצבעים**. המשפט הוכח רק ב-1976 על ידי קנת אפל (Kenneth Appel) וולפגאנג האקן (Wolfgang Haken). הם השתמשו במתמטיקה מתקדמת כדי להראות שאם קיימת דוגמה נגדית (מפה הדורשת יותר מארבעה בצבעים), אזי המפה קשורה לאחת מ-1834 תצורות. לבדיקת התצורות הללו הם השתמשו במחשב.

למרות שקשה מאוד להוכיח את משפט ארבעת הצבעים, ההוכחות של משפט חמשת הצבעים ומשפט ששת הצבעים פשוטות יחסית (סעיפים 4.5, 4.6). בדרך להוכחת משפטים אלו נגדיר מפות מישוריות וגרפים מישוריים (סעיף 4.1), נוכיח את הנוסחה של אוילר (Euler) (סעיף 4.2) ונראה שבגרף מישורי חייב להיות צומת שהדרגה שלו קטנה או שווה לחמש. בסעיף 4.3 נשתמש בנוסחת אוילר כדי להראות ששני גרפים אינם מישוריים.

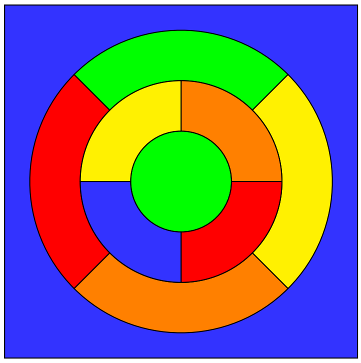
ב-1879 פרסם אלפרד קמפ (Alfred B. Kempe) הוכחה של משפט ארבעת הצבעים וב-1890 הראה פרסי היווד (Percy J. Heawood) שההוכחה שגויה. בסעיף 4.7 נביא את ההוכחה השגויה של קמפ ואת הדוגמה של היווד המפריכה את ההוכחה.

4.1 מפות מישוריות וגרפים מישוריים

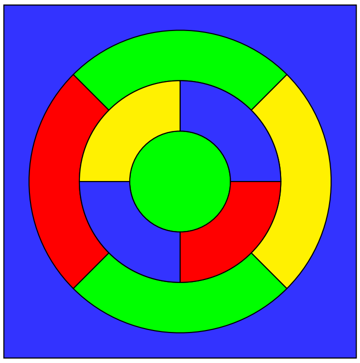
הגדרה 4.1 מפה מישורית היא קבוצה של אזורים במישור עם גבולות משותפים. **צביעה** של מפה היא הקצאה של צבע לכל אזור, כך שאזורים בעלי גבול משותף צבועים בצבעים שונים.

איור 4.1.א מציג צביעה בחמישה צבעים של מפה מישורית שבה עשרה אזורים. איור 4.1.ב מציג צביעה של אותה מפה בארבעה צבעים.

הגדרה 4.2 גרף הוא קבוצה של **צמתים** V וקבוצה של **קשתות** E, כך שכל קשת מחוברת לשני צמתים. הגרף **קשיר** אם קיים מסלול בין כל שני צמתים.



א.4.1 צביעת מפה בחמישה צבעים



ב.4.1 צביעת מפה בארבעה צבעים

גרף מישורי הוא גרף שבו שתי קשתות אינן חותכות זו את זו. בגרף מישורי חלק מהמישור התחום על ידי קבוצה של קשתות נקרא **פאה**.

צביעה של גרף מישורי היא הקצאה של צבעים לצמתים, כך ששני צמתים המחוברים על ידי קשת צבועים בצבעים שונים.

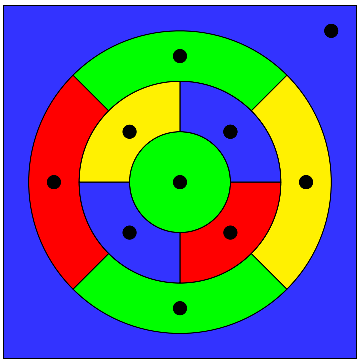
מפות וגרפים הם דואליים, ונוח יותר לטפל בבעיות צביעה בגרפים מאשר במפות.

משפט 4.1 נתונה מפה מישורית, ניתן לבנות גרף מישורי כך שעבור כל צביעה של אזורים במפה קיימת צביעה של הצמתים בגרף, ולהפך.

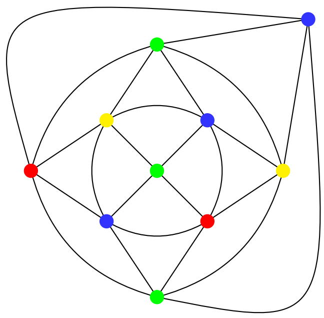
הוכחה בנו צומת עבור כל אזור במפה ובנו קשת בין שני צמתים אם ורק אם לשני השטחים יש גבול משותף. □

דוגמה 4.1 איור א.4.2 מציג את המפה המישורית מאיור ב.4.1 עם הצמתים המתאימים לכל האזורים. איור ב.4.2 מציג גרף מישורי המתאים למפה.

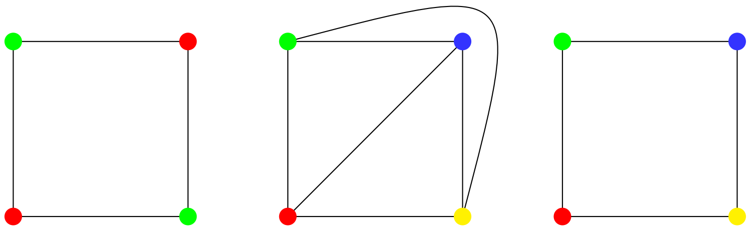
ניתן להגביל את עצמנו לגרפים שהפאות שלהם **משולשיות**.



א.4.2 התאמת צמתים לאזורים במפה מישורית



ב.4.2 התאמת גרף מישורי למפה המישורית



איור 4.3: צביעת גרף מתולת

הגדרה 4.3 גרף הוא **מתולת** *(triangular)* אם כל הפאות שלו חסומות על ידי שלוש קשתות. ניתן **לתלת** *(triangulate)* גרף אם אפשר להוסיף קשתות כדי שהגרף יהי מתולת. נאמר שקיים **תילות** *(triangulation)* של הגרף.

דוגמה 4.2 הפאות של הגרף המישורי באיור 4.2.ב מתולתות כי כל אחת חסומה על ידי שלוש קשתות. הקשתות עקומות ולכן הפאות אינן משולשים, שהם מצולעים שצלעותיהם קטעים.

משפט **Fáry** טוען שניתן להמיר כל גרף מישורי מתולת לגרף מישורי שקול שהקשתות שלו הן קטעים. מכאן, שללא הגבלת הכלליות ניתן לנסח הוכחות רק עבור גרפים מישוריים שהפאות שלהם הן משולשים.

דוגמה 4.3 איור 4.3 (משמאל) מציג ריבוע שניתן לצבוע בשני צבעים, אבל אם מתלתים אותו (במרכז) נדרשים ארבעה צבעים. המטרה שלנו היא להוכיח שניתן לצבוע את כל הגרפים ב-n צבעים (עבור n כלשהו). אם ניתן לצבוע את הגרף המתולת ב- n צבעים, אפשר לצבוע גם את הגרף המקורי באותו מספר צבעים, כי מחיקת הקשתות הנוספות אינו מקלקל את הצביעה (ימין).

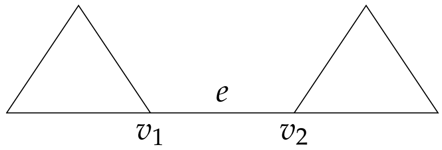
4.2 נוסחת אוילר Euler

משפט 4.2 (אוילר) יהי G גרף מישורי קשיר עם V צמתים, E קשתות ו-F פאות. אזי:

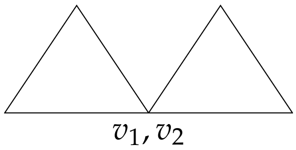
$$V - E + F = 2\,.$$

הוכחה באינדוקציה על מספר הקשתות. אם מספר הקשתות בגרף מישורי הוא אפס, קיימים רק צומת אחד ופאה אחת כך ש-$2 = 1 - 0 + 1$. אחרת, קיימת לפחות קשת אחת e שמחברת שני צמתים v_1, v_2. נמחק את הקשת e.

מקרה 1: הגרף מפסיק להיות קשיר (איור 4.4.א). נמזג את הצמתים v_1 עם v_2 (איור 4.4.ב). נוצר גרף מישורי קשיר G' שבו פחות קשתות מאשר ב-G, ולכן לפי הנחת האינדוקציה $(V-1) - (E-1) + F = 2$ כי יש בו גם צומת אחד פחות. נפשט ונקבל $V - E + F = 2$ עבור G.



4.4.א הגרף לא קשיר



4.4.ב מיזוג שני צמתים

מקרה 2: הגרף נשאר קשיר (איור 4.5.א). בגרף הנוצר G' פחות קשתות מאשר ב-G (איור 4.5.ב), ולכן לפי הנחת האינדוקציה, $V - (E-1) + (F-1) = 2$ מכיוון שמחיקת קשת אחת ממזגת שתי פאות לפאה אחת. נפשט ונקבל $V - E + F = 2$ עבור G. $\square$

משפט 4.3 יהי G גרף מישורי קשיר מתולת עם V צמתים ו-E קשתות. אזי $E = 3V - 6$.

הוכחה כל פאה חסומה על ידי שלוש קשתות כך ש-$E = 3F/2$, כי כל קשת נספרת פעמיים, פעם אחת לכל פאה שהיא חוסמת. לפי נוסחת אוילר:

$$
\begin{aligned}
E &= V + F - 2\\
E &= V + 2E/3 - 2\\
E &= 3V - 6\,.
\end{aligned}
$$

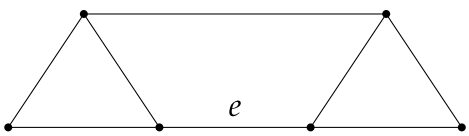
$\square$

דוגמה 4.4 בגרף המישורי באיור 4.2.ב יש 10 צמתים ו-$3 \cdot 10 - 6 = 24$ קשתות.

משפט 4.4 יהי G גרף מישורי קשיר. אז $E \leq 3V - 6$.

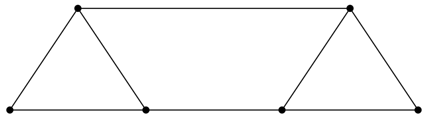
הוכחה נתלת את G כדי לקבל את G'. ב-G', $E = 3V - 6$ לפי משפט 4.3. נמחק קשתות מ-G' כדי לקבל את G. מספר הצמתים לא משתנה, כך ש-$E \leq 3V - 6$. $\square$

דוגמה 4.5 בגרף ב-4.6.א 8 קשתות ו-6 צמתים ולכן $8 < 3 \cdot 6 - 6 = 12$. איור 4.6.ב מציג גרף מתולת עם 6 צמתים ו-$12 = 3 \cdot 6 - 6$ קשתות.

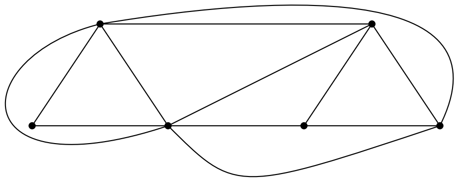


4.5.א הגרף נשאר קשיר לאחר מחיקת קשת

4.5.ב הגרף קשיר אבל עם פחות קשתות



4.4.6.א פחות קשתות מהחסם העליון



4.4.6.ב בגרף מתולת מספר הקשתות מירבי

4.3 גרפים שאינם מישוריים

נסטה מעט מהסיפור כדי להראות איך ניתן להשתמש במשפטים 4.2 ו-4.4 כדי להוכיח שגרפים מסוימים אינם מישוריים.

משפט 4.5 K_5, הגרף השלם עם חמישה צמתים, אינו מישורי (איור 4.4.7.א).

הוכחה עבור K_5, $V = 5$ ו-$E = 10$. לפי משפט 4.4 מספר הקשתות חייב להיות קטן או שווה ל-$3 \cdot 5 - 6 = 9$ ולכן הגרף אינו מישורי. $\square$

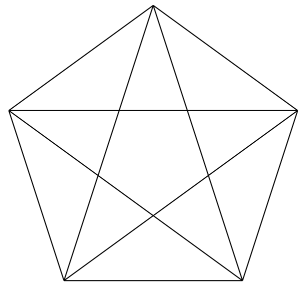
משפט 4.6 $K_{3,3}$, הגרף הדו-אזורי עם שלושה צמתים בכל אזור (איור 4.4.8.א), אינו מישורי.

הוכחה $V = 6$ ו-$E = 9$. לפי משפט 4.2, אם $K_{3,3}$ מישורי, $F = E - V + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$. אבל כל פאה חסומה על ידי ארבע קשתות (איור 4.4.8.ב), ולכן $E = 4F/2 = (4 \cdot 5)/2 \neq 9$. $\square$

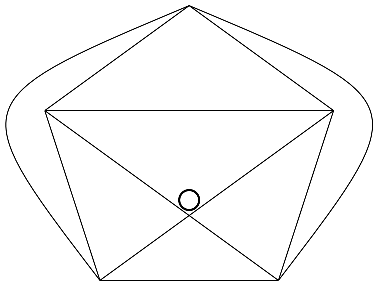
בשנת 1930 הוכיח קזימירייז קורטובסקי (Kazimierz Kuratowski) את הכיוון השני של המשפטים הללו: אם גרף אינו מישורי, אז הוא מכיל (במובן מסוים) K_5 או $K_{3,3}$.

4.4 דרגה של צמתים

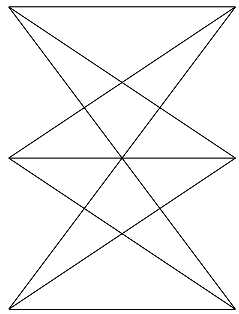
הגדרה 4.4 $d(v)$, **הדרגה** של צומת v, היא מספר הקשתות הנפגשות ב-v.



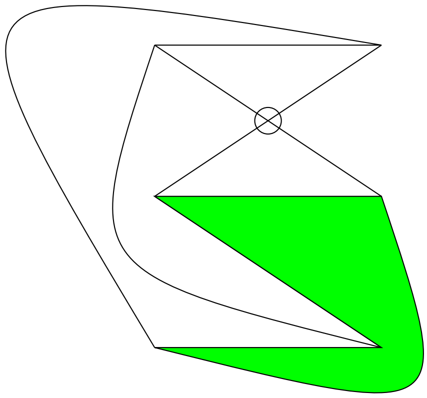
4.4.7.א K_5 אינו מישורי



4.4.7.ב K_5 אינו מישורי



4.8.א $K_{3,3}$ אינו מישורי



4.8.ב ניסיון כושל לצייר את $K_{3,3}$ במישור

דוגמה 4.6 בגרף באיור 4.2.ב 8 צמתים על שתי הטבעות, כל אחד מדרגה 5. ושני צמתים נוספים, על הפאה החיצונית ועל הפאה הפנימית, שדרגתם 4. לכן:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 5 \cdot 8 + 4 \cdot 2 = 48\,.$$

לקבלת מספר הקשתות בגרף נחלק את סכום הדרגות ב-2, כי כל קשת נספרה פעמיים, פעם אחת עבור כל צומת שהיא נוגעת בו.

הכללת הטיעונים הללו מוכיחה:

משפט 4.7 יהי $d_i, i = 1, 2, 3, \ldots, k$ מספרי הצמתים מדרגה i בגרף מישורי קשיר עם V צמתים ו-E קשתות, כאשר k היא הדרגה הגבוהה ביותר של צומת ב-V. אז:

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{i=1}^{k} i \cdot d_i = 2E\,.$$

משפט 4.8 יהי G גרף מישורי קשיר עם E קשתות ו-V צמתים, ויהי $d_i, i = 1, \ldots, k$ מספר הצמתים מדרגה i, כאשר k היא הדרגה הגבוהה ביותר של צומת ב-V. אזי חייב להיות צומת v ב-V כך ש-$d(v) \leq 5$.

הוכחה (1) ברור שאם יש d_1 צמתים מדרגה 1, d_2 צמתים מדרגה 2, ..., d_k צמתים מדרגה k, אז $V = \sum_{i=1}^{k} d_i$. ממשפטים 4.4 ו-4.7 נקבל:

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot d_i = 2E \leq 2(3V - 6) = 6V - 12 = 6 \sum_{i=1}^{k} d_i - 12\,.$$

מכאן,

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot d_i \leq 6\sum_{i=1}^{k} d_i - 12$$
$$\sum_{i=1}^{k}(6-i)d_i \geq 12\,.$$

$12 > 0$, ולכן ל-i אחד לפחות מתקיים $6 - i > 0$ ועבור i זה, $i < 6$. □

הוכחה (2) נחשב את **הממוצע** של דרגות הצמתים, שהוא סכום הדרגות לחלק למספר הצמתים:

$$d_{\text{avg}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} i \cdot d_i}{V}\,.$$

אבל סכום הדרגות הוא פעמיים מספר הקשתות, ולפי משפט 4.4:

$$d_{\text{avg}} = \frac{2E}{V} \leq \frac{6V-12}{V} = 6 - \frac{6}{V} < 6\,.$$

אם **הממוצע** של הדרגות קטן משש, חייב להיות לפחות צומת אחד שדרגתו קטנה משש. □

דוגמה 4.7 סכום הדרגות בגרף באיור 4.4.2.ב הוא $8 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 48$. יש 10 צמתים כך שממוצע הדרגות שלו הוא $48/10 = 4.8$ וחייב להיות צומת ממעלה 4 או פחות.

4.5 משפט ששת הצבעים

משפט 4.9 כל גרף מישורי ניתן לצביעה בשישה צבעים.

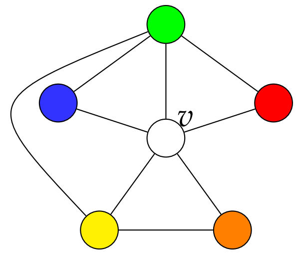
הוכחה באינדוקציה על מספר הצמתים ב-G. אם בגרף שישה צמתים או פחות, ברור שניתן לצבוע את הגרף בשישה צבעים. עבור הצעד האינדוקטיבי, לפי משפט 4.8 קיים צומת v מדרגה חמש או פחות. נמחק צומת v כדי לקבל את הגרף G'. לפי הנחת האינדוקציה ניתן לצבוע את G' בשישה צבעים, אבל ל-v חמישה שכנים לכל היותר והם צבועים בחמישה צבעים לכל היותר (איור 4.9.א), כך שנשאר צבע שישי שניתן לצבוע בו את v (איור 4.9.ב). □

4.6 משפט חמשת הצבעים

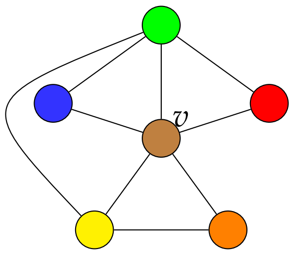
הגדרה 4.5 יהי G גרף מישורי קשיר צבוע. G' הוא **שרשרת** אם ורק אם G' הוא תת-גרף מקסימלי של G הצבוע בשני צבעים.[1]

משפט 4.10 כל גרף מישורי G ניתן לצביעה בחמישה צבעים.

[1] השרשרת נקראת גם שרשרת קמפ כי היא הוגדרה על ידי אלפרד קמפ בהוכחה השגויה שלו למשפט ארבעת הצבעים.



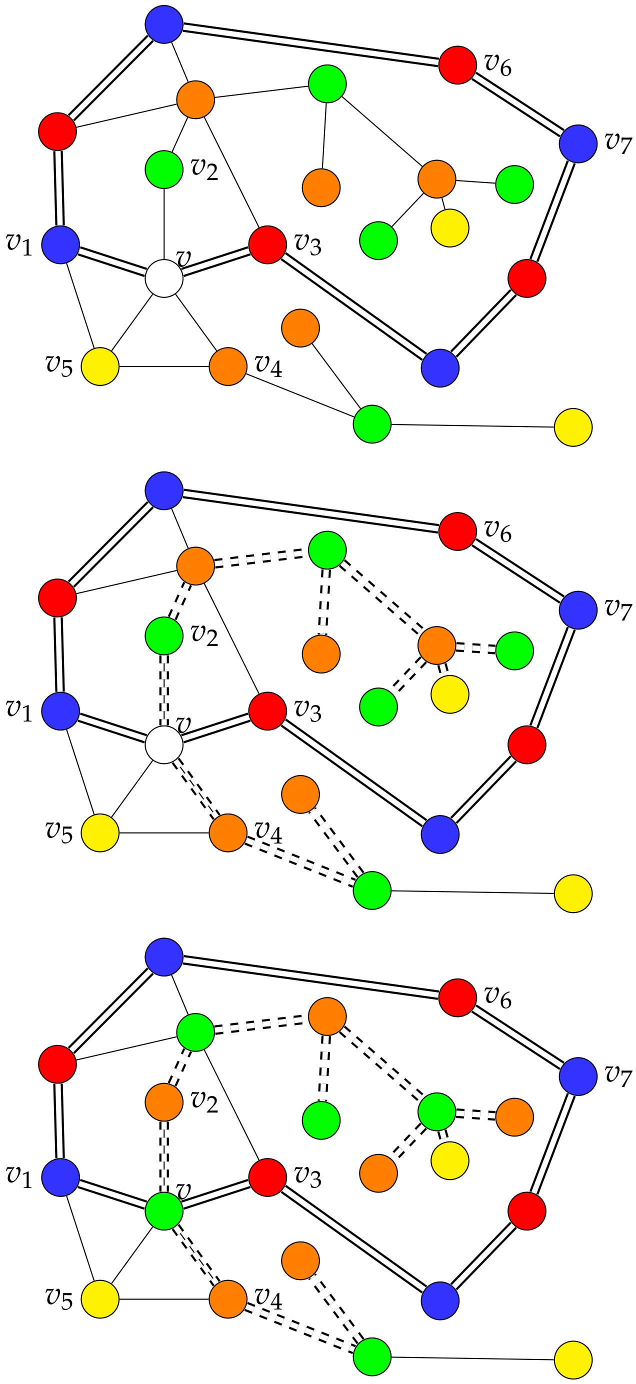
4.9.א חמישה צבעים מספיקים לשכנים של v



4.9.ב נצבע את v בצבע השישי

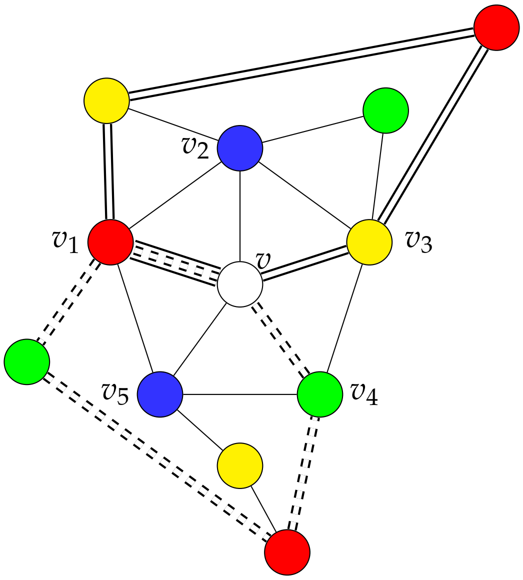
הוכחה באינדקציה על מספר הצמתים. אם ב-G חמישה צמתים או פחות, ניתן לצבוע אותו בחמישה צבעים. עבור הצעד האינדוקטיבי, לפי משפט 4.8 קיים צומת v מדרגה חמש או פחות. נמחק את הצומת v ונקבל את הגרף G'. לפי הנחת האינדוקציה, ניתן לצבוע את G' בחמישה צבעים או פחות. ב-G, אם הדרגה של v קטנה מחמש, או אם $v_1, \ldots, v_5$, השכנים של v, צבועים בארבעה צבעים או פחות, ניתן לצבוע את v בצבע החמישי. אחרת, הצמתים $v_1, \ldots, v_5$ צבועים בצבעים שונים ב-G' (איור 4.10, למעלה).

נתבונן בצומת v_1 הצבוע בכחול ובצומת v_3 צבוע באדום. אם v_1, v_3 לא קשורים במסלול כחול-אדום (למשל, אם הקשת $\overline{v_6v_7}$ לא הייתה קיימת), ניתן להחליף את הצבעים על המסלול מ-v_1 ל-v_6 ולצבוע את v בכחול. אחרת, ניקח את שרשרת הכחול-אדום המכילה את v_1, v_3 ונוסיף את v ואת הקשתות $\overline{vv_1}, \overline{vv_3}$. נקבל מסלול סגור P (המסומן בקו כפול) שמחלק את המישור לאזור "פנימי" ולאזור "חיצוני" (איור 4.10, אמצע).

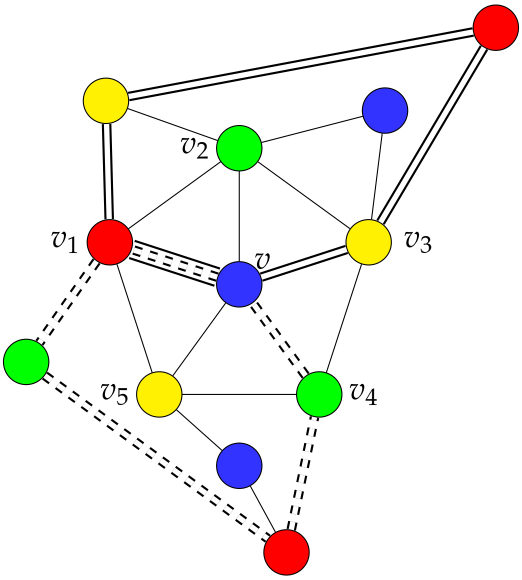


איור 4.10: הוכחת משפט חמשת הצבעים

כעת נתבונן בצומת v_2 הצבוע ירוק ובצומת v_4 הצבוע כתום. הצמתים הללו **אינם** יכולים להיות בשרשרת ירוק-כתום אחת, כי v_2 נמצא **בתוך** P ו-v_4 נמצא **מחוץ** ל-P, ולכן כל מסלול המחבר אותם חייב לחתוך את P, בסתירה להנחה שהגרף מישורי. לכן הם חייבים להיות בתוך שתי שרשראות ירוק-כתום **לא קשורות** (מסומנות בקו מקווקוו כפול באיור 4.10, באמצע). נחליף את שני הצבעים בשרשרת המכילה את v_2 ואז אפשר לצבוע את v בירוק כדי לקבל צביעה של G בחמישה צבעים



א.4.11 שרשראות Kempe ירוק-כחול וכחול-צהוב



ב.4.11 החלפת הצבעים של שתי שרשראות Kempe

(איור 4.10, למטה). □

הטענה שמסלול רציף מתוך עקומה רציפה סגורה P אל מחוץ ל-P חייב לחתוך את P היא משפט העקום של ז'ורדן **(Jordan Curve Theorem)**. המשפט ברור אינטואיטיבית אבל קשה להוכחה.

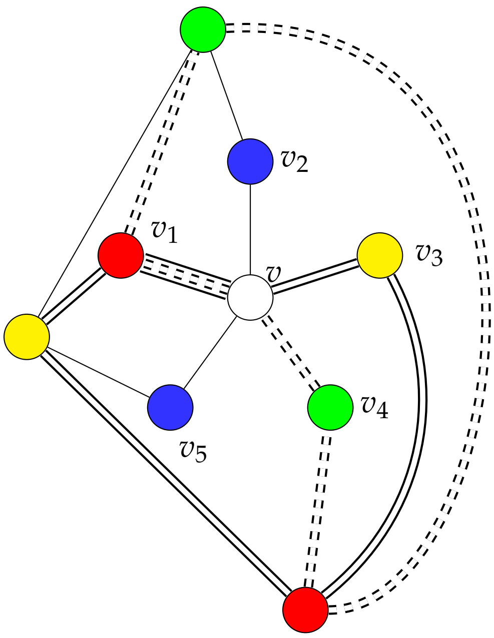
4.7 ההוכחה השגויה של קמפ לבעיית ארבעת הצבעים

הוכחה (שגויה) בסיס האינדוקציה ורוב ההוכחה זהים להוכחה של משפט חמשת הצבעים. המקרה החדש שיש לקחת בחשבון הוא צומת v עם חמישה שכנים, שלפי ההנחה האינדוקטיבית ניתן לצבוע אותם **בארבעה** צבעים לאחר מחיקת הצומת v.

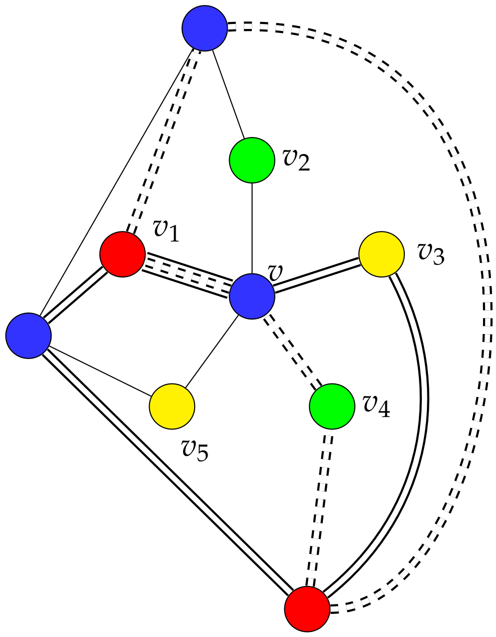
ב-א.4.11 קיימים שני צמתים v_2, v_5 הצבועים בכחול. נתבונן בשרשרת הכחול-ירוק המכילה את v_2 ובשרשרת הכחול-צהוב המכילה את v_5. השרשרת הכחול-ירוק נמצאת מתוך המסלול הסגור המוגדר על ידי השרשרת האדום-צהוב שמכילה את v_1, v_3 (מסומן בקו כפול), והשרשרת הכחול-צהוב נמצאת בתוך המסלול הסגור המוגדר על ידי השרשרת האדום-ירוק המכילה את v_1, v_4 (מסומן בקו כפול מקווקו).

נחליף את הצבעים בשתי השרשרות, שרשרת הכחול-ירוק ושרשרת הכחול-צהוב (איור ב.4.11). השכנים של v צבועים בשלושה צבעים, אדום, ירוק וצהוב, וניתן לצבוע את v בכחול. □

היווד שם לב שיש אפשרות שלמסלולים הסגורים המוגדרים על ידי שרשראות האדום-צהוב והאדום-ירוק יש צמתים אדומים משותפים (v_1, v_8 באיור א.4.12). כאשר מחליפים צבעים בשרשראות



א.4.12 לשרשארות אדום-צהוב ואדום-ירוק צמתים אדומים משותפים



ב.4.12 החלפת הצבעים גורמת לצמתי הכחולים להיות קשורים

הכחול-ירוק והכחול-צהוב, יש אפשרות שיהיו צמתים צבועים בכחול הקשורים בקשת (איור ב.4.12), כך שהצביעה כבר בלתי חוקית.

מהי ההפתעה?

משפט ארבעת הצבעים ידוע לשמצה, כי קל כל כך להציג אותו אבל קשה כל כך להוכיחו אותו. לכן מפתיע שההוכחה של משפט חמשת הצבעים כה פשוטה. החלק המרכזי של ההוכחה הוא משפט 4.8 (במפה מישורית חייב להיות צומת בדרגה 5 לכל היותר), שהוא משפט שאין לו קשר עם צביעה. למעשה, הוא נובע מספירת צמתים וקשתות.

מקורות

על משפט ארבעת הצבעים ראו [49], [54]. ההוכחה של משפט חמשת הצבעים לקוחה מ-[1], [53]. [16] מביא הוכחות רבות לנוסחת אוילר. השגיאה בהוכחה של קמפ מתוארת ב-[46].

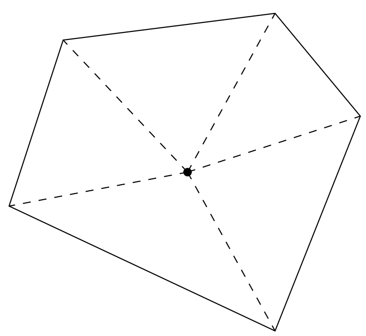
פרק 5

איך לשמור על מוזיאון

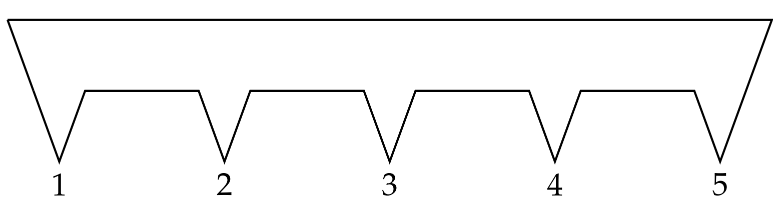
בשנת 1973 שאל ויקטור קלה (Victor Klee) כמה שומרים נחוצים כדי לצפות בכל הקירות של מוזיאון. אם קירות המוזיאון יוצרים מצולע משוכלל או אפילו מצולע קמור, אפשר להסתפק בשומר אחד (איור 5.1).

נתבונן במוזיאון שקירותיו בצורת מסור משונן (איור 5.2). וודאו על ידי ספירה שיש 15 קירות. כל "שן" מגדירה משולש שצבוע באפור באיור 5.3. שומרת הניצבת במקום כלשהו בתוך אחד המשולשים יכולה לראות את כל הקירות של אותו משולש (חיצים אדומים).

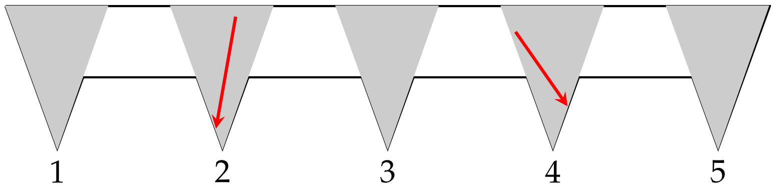
אם השומרת ניצבת בקירבת הקיר העליון, היא יכולה לראות את כל הקירות האופקיים (חיצים כחולים באיור 5.4). מכאן שחמש שומרות מספיקות כדי לצפות על כל הקירות. בגלל שהמשולשים



איור 5.1: מוזיאון שקירותיו יוצרים מצולע קמור



איור 5.2: מוזיאון שקירותיו אינם יוצרים מצולע קמור



איור 5.3 : נראות בתוך כל "שן"

אינם נחתכים, שומרת במשולש אחד לא יכולה לראות את כל הקירות של משולש אחר (חץ ירוק) ולכן נחוצות חמש שומרות .

ניתן להכליל את הדוגמה באיור 5.2 ולהראות שנחוצות $n/3$ שומרות. המשך הפרק מוקדש להוכחה שמספיקות $n/3$ שומרות לשמירה על כל מוזיאון.

סעיף 5.1 מוכיח שניתן לצבוע כל מצולע מתולת (triangulated) בשלושה צבעים. נשתמש במשפט זה בסעיף 5.2 כי להוכיח שמספיקות $n/3$ שומרות. סעיף 5.3 משלים את ההוכחה ומראה שניתן לתלת כל מצולע.

5.1 צביעת מצולעים מתולתים

הגדרה 5.1 **אלכסון** *(diagonal)* של מצולע הוא קטע המחבר שני קודקודים והוא אינו אחת מהצלעות (החיצוניות) של המצולע.

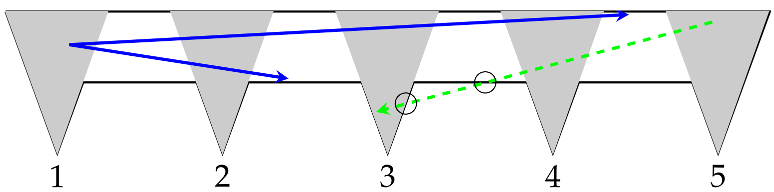
הגדרה 5.2 ניתן **לתלת** *(triangulate)* מצולע אם ניתן להעביר אלכסונים כך שהשטח הפנימי של המצולע מכוסה על ידי משולשים.

משפט 5.1 ניתן לתלת כל מצולע.

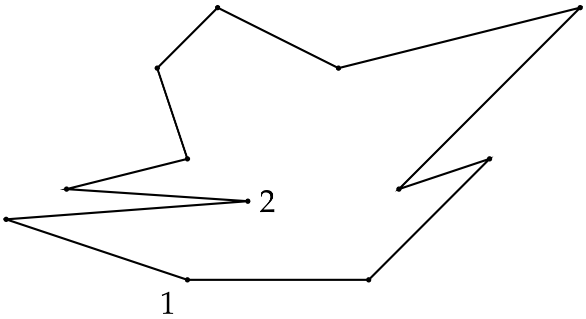
אנו דוחים את ההוכחה של משפט 5.1 לשלב מאוחר יותר.

הגדרה 5.3 קודקוד במצולע הוא **קמור** אם הזווית הפנימית שלו קטנה מ-$180°$. קודקוד במצולע הוא **קעור** אם הזווית הפנימית שלו גדולה מ-$180°$.

במצולע באיור 5.5 קודקוד 1 קמור וקודקוד 2 קעור.



איור 5.4 : נראות של קירות מוזיאון



איור 5.5 : מצולע עם קודקוד קמור (1) וקודקוד קעור (2)

הגדרה 5.4 ניתן **לצבוע מצולע בשלושה צבעים** אם קיימת העתקה :

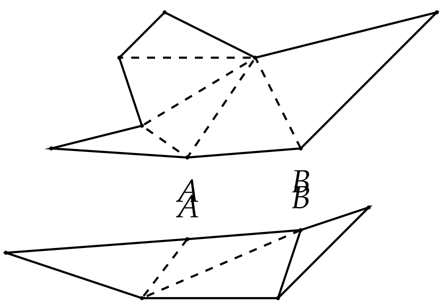
$$c : V \mapsto \{\text{אדום, כחול, ירוק}\},$$

כך ששני הקודקודים של צלע מקבלים צבעים שונים.

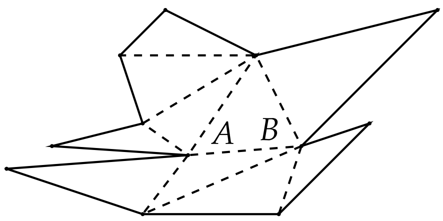
משפט 5.2 ניתן לצבוע מצולע מתולת בשלושה צבעים.

הוכחה באינדוקציה על מספר הקודקודים. ניתן לצבוע משולש בשלושה צבעים. למצולע עם $n > 3$ קודקודים חייב להיות אלכסון. נבחר אלכסון שרירותי $\overline{AB}$ (איור 5.6.א) ונחלק את המצולע לאורך האלכסון לשני מצולעים קטנים יותר (איור 5.6.ב). לפי הנחת האינדוקציה ניתן לצבוע כל אחד מהמצולעים הללו בשלושה צבעים (איור 5.7.א).

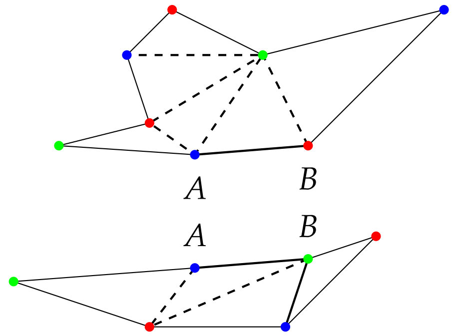
ההעתקה של קודקודים לצבעים היא שרירותית, כך שאם הקודקודים A, B מקבלים צבעים שונים בשני המצולעים, ניתן לשנות את הצבעים באחד מהם כך שהצבעים של A, B זהים בשני המצולעים. למשל, נחליף את הצבעים **אדום** ו-**ירוק** במצולע התחתון (איור 5.7.א). נדביק את שני המצולעים כדי לשחזר את המצולע המקורי עם n קודקודים (איור 5.7.ב). המצולע יהיה צבוע בשלושה צבעים (איור 5.8). □



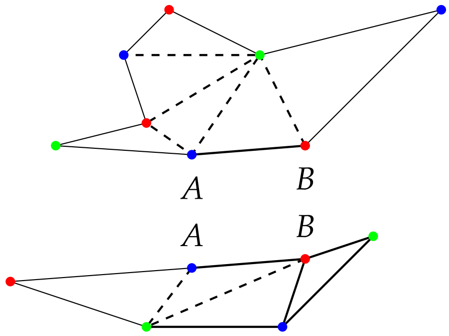
5.6.ב חלק את המצולע



5.6.א אלכסון שרירותי במצולע



5.7א צבע את שני המצולעים הקטנים בשלושה צבעים



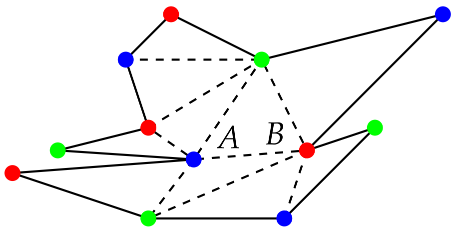
5.7ב החלף את הצבעים במצולע אחד כדי להתאים לשני

5.2 מצביעת מצולעים לשמירה על מוזיאונים

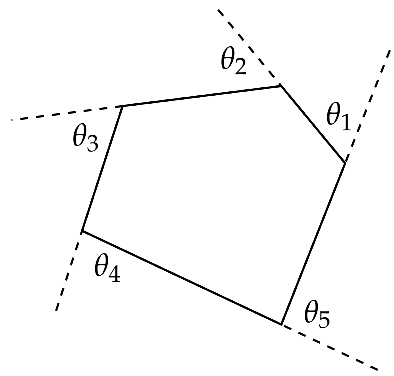
משפט 5.3 $n/3$ שומרים יכולים לשמור על מוזיאון עם n קירות.

הוכחה לפי משפט 5.1 ניתן לתלת את המצולע ולפי משפט 5.2 ניתן לצבוע את המצולע בשלושה צבעים. שלושת הקודקודים של כל משולש יהיו צבועים בצבעים שונים כדי שכל צבע יופיע באחד הקודקודים של כל משולש. אם צובעים n קודקודים בשלושה צבעים, צבע אחד לפחות, נניח אדום, יופיע לכל היותר $n/3$ פעמים, ובכל משולש חייב להיות קודקוד צבוע אדום. נציב שומרת בכל קודקוד אדום, והיא יכולה לראות את הקירות של אותו משולש. כל המשולשים של תילות המצולע כוללים את כל צלעות המצולע, ולכן $n/3$ שומרות מספיקות כדי לראות את כל קירות המוזיאון. □

אם n אינו מתחלק ב-3 מספר השומרות הדרוש הוא $\lfloor n/3 \rfloor$, המספר השלם הגדול ביותר שקטן או שווה ל-$n/3$. למשל, 4 שומרות מספיקות למוזיאון עם $12, 13, 14$ קירות, כי $\lfloor 12/3 \rfloor = \lfloor 13/3 \rfloor = \lfloor 14/3 \rfloor = 4$. למען הפשטות נתעלם מסיבוך זה.



איור 5.8: הדבק חזרה את שני המצולעים הקטנים



איור 5.9 : הזוויות החיצוניות של מצולע קמור

5.3 ניתן לתלת כל מצולע

משפט 5.4 סכום הזוויות הפנימיות של מצולע בעל n צלעות הוא $180^\circ(n-2)$.

הוכחה תחילה נוכיח עבור מצולעים קמורים. נסמן את **הזוויות החיצוניות** ב-θ_i (איור 5.9). אם נחבר את הזוויות החיצוניות נקבל :

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 360^\circ .$$

עבור כל זוית חיצונית θ_i נסמן את הזוית הפנימית באותו קודקוד ב-ϕ_i. נחשב :

$$\begin{aligned} \sum_1^n \theta_i &= \sum_1^n (180^\circ - \phi_i) = 360^\circ \\ \sum_1^n \phi_i &= n \cdot 180^\circ - 360^\circ = 180^\circ(n-2) . \end{aligned}$$

אם יש קודקוד קעור (B באיור 5.10), קיים משולש המורכב משתי הצלעות שנפגשות בקודקוד הקעור והצלע המסומנת בקו מקווקוו. נחבר את זוויות המשולש :

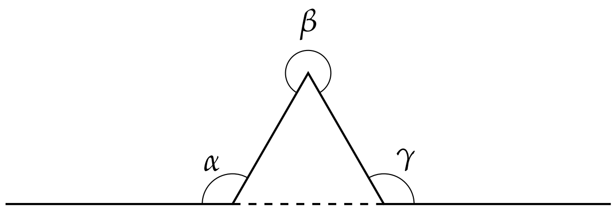
$$\begin{aligned} (180^\circ - \alpha) + (360^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) &= 180^\circ \\ \alpha + \beta + \gamma &= 3 \cdot 180^\circ . \end{aligned}$$

סכום הזוויות הפנימיות גדל ב-$\alpha + \beta + \gamma$ ומספר הקודקודים גדל בשלוש, ולכן השוויון במשפט נשמר :

$$\begin{aligned} \sum_1^n \phi_i + (\alpha + \beta + \gamma) &= 180^\circ(n-2) + 3 \cdot 180^\circ \\ &= 180^\circ((n+3) - 2) . \end{aligned}$$

□

משפט 5.5 חייבים להיות לפחות שלושה קודקודים קמורים במצולע.



איור 5.10: קודקוד קעור

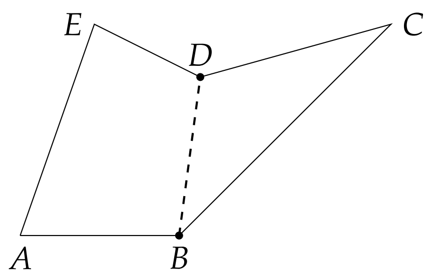
הוכחה יהי k מספר הקודקודים הקעורים כאשר הזווית הפנימית של כל קודקוד היא $180^\circ + \epsilon_i$, $\epsilon_i > 0$. סכום הזוויות הפנימיות של הקודקודים **הקעורים** הוא בוודאי קטן או שווה לסכום **כל** הזוויות הפנימיות:

$$
\begin{aligned}
k \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i &\leq 180^\circ (n-2) \\
k \cdot 180^\circ &< 180^\circ (n-2) \\
k &< n-2\,.
\end{aligned}
$$

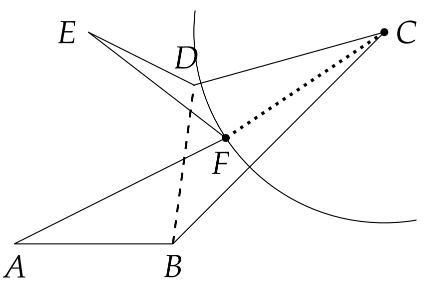
מכאן שיש לא רק קודקוד אחד אלא לפחות שלושה קודקודים שאינם קעורים. □

הוכחה (משפט 5.1 שניתן לתלת כל מצולע) באינדוקציה על מספר הקודקודים. עבור $n = 3$ אין מה להוכיח. נניח ש-$n > 3$. לפי משפט 5.5 חייב להיות קודקוד קמור C. נסמן את הקודקודים השכנים שלו B, D. אם $\overline{BD}$ נמצא כולו בתוך המצולע (איור 5.11.א), אז הוא אלכסון וניתן לחלק את המצולע למשולש $\triangle BCD$ ולמצולע אחר $\overline{ABDE}$ עם צלע $\overline{BD}$. לפי הנחת האינדוקציה ניתן לתלת את המצולע ואז להדביק אותו למשולש $\triangle BCD$ ולקבל תילות של המצולע המקורי.

אם $\overline{BD}$ אינו בתוך המצולע, חייב להיות קודקוד קעור F הקרוב ביותר ל-C (איור 5.11.ב). $\overline{CF}$ הוא אלכסון המחלק את המצולע לשני מצולעים קטנים יותר $\overline{CFED}$ ו-$\overline{CFAB}$. לפי הנחת האינדוקציה ניתן לתלת אותם ולהדביק אותם זה לזה. □



5.11.א תילות כאשר האלכסון נמצא בתוך המצולע



5.11.ב תילות כאשר האלכסון אינו בתוך המצולע

מה ההפתעה?

משפט המוזיאון מפתיע כי ההוכחה של מה שנראה כמשפט בגיאומטריה משתמשת בצורה אלגנטית בצביעת גרפים.

מקורות

פרק זה מבוסס על פרק 39 ב-[1].

פרק 6

אינדוקציה

האקסיומה של אינדוקציה מתמטית נמצאת בשימוש נרחב כשיטת הוכחה במתמטיקה. פרק זה מציג הוכחות אינדוקטיביות של תוצאות שייתכן שאינן מוכרות לקורא. נתחיל בסקירה קצרה של אינדוקציה מתמטית (סעיף 6.1). סעיף 6.2 מביא הוכחות של משפטים על מספרי פיבונאצ׳י (Fibonacci) המוכרים וסעיף 6.3 מביא הוכחות של משפטים על מספרי פרמה (Fermat). בסעיף 6.4 נציג את פונקציה 91 של ג׳ון מקארתי (John McCarthy). ההוכחה אינה שגרתית כי היא משתמשת באינדוקציה על מספרים שלמים בסדר הפוך. הוכחת הנוסחה עבור הבעיה של יוסף בן-מתתיהו (Josephus) גם היא אינה שגרתית כי היא משתמשת באינדוקציה כפולה על חלקים שונים של ביטוי (סעיף. 6.5).

6.1 האקסיומה של אינדוקציה מתמטית

אינדוקציה מתמטית היא הדרך המובילה להוכחת משפטים עבור קבוצה לא חסומה של מספרים. נעיין בשוויונות:

$$1 = 1, \quad 1 + 2 = 3, \quad 1 + 2 + 3 = 6, \quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10\,,$$

נשים לב ש:

$$1 = (1 \cdot 2)/2, \quad 3 = (2 \cdot 3)/2, \quad 6 = (3 \cdot 4)/2, \quad 10 = (4 \cdot 5)/2\,,$$

ונשער שעבור כל המספרים שלמים $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

עם מספיק סבלנות קל לבדוק את הנוסחה עבור כל ערך מסוים של n, אבל איך אפשר להוכיח עבור אינסוף המספרים השלמים החיוביים? כאן נכנסת אינדוקציה מתמטית.

אקסיומה 6.1 תהי $P(n)$ תכונה (כגון משוואה, נוסחה או משפט), כאשר n הוא מספר שלם חיובי. נניח שניתן:

- **טענת הבסיס**: להוכיח ש-$P(1)$ נכונה,
- **צעד אינדוקטיבי**: עבור m שרירותי, להוכיח ש-$P(m+1)$ נכונה בהנחה ש-$P(m)$ נכונה,

אז $P(n)$ נכונה עבור כל $n \geq 1$. ההנחה ש-$P(m)$ נכונה עבור m שרירותי נקראת **הנחת האינדוקציה**.

הנה דוגמה פשוטה עבור הוכחה באינדוקציה מתמטית.

משפט 6.2 עבור $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

הוכחה טענת הבסיס פשוטה:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}\,.$$

הנחת האינדוקציה היא שמשוואה שלהלן נכונה עבור m:

$$\sum_{i=1}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2}\,.$$

הצעד האינדוקטיבי הוא להוכיח את המשפט עבור $m+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1} i &= \sum_{i=1}^{m} i + (m+1)\\ &= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}\,.\end{aligned}$$

לפי אקסיומת האינדוקציה המתמטית, עבור כל $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

$\square$

הנחת האינדוקציה עלולה לבלבל ,כי נראה שאנחנו מניחים את מה שרוצים להוכיח. אין כאן הסקת מסקנות מעגלית כי ההנחה היא עבור תכונה של משהו קטן ומשתמשים בהנחה כדי להוכיח תכונה עבור משהו גדול יותר.

אינדוקציה מתמטית היא אקסיומה שאי-אפשר להוכיח. פשוט צריכים לקבל אותה כמו שמקבלים אקסיומות אחרות כגון $x+0=x$. כמובן שתוכלו לדחות את האקסיומה, אבל אז תצטרכו לדחות חלק גדול מהמתמטיקה המודרנית.

אינדוקציה מתמטית היא כלל היסק שהוא אחד מאקסיומות פאנו (Peano) לפורמליזציה של המספרים הטבעיים. ניתן להוכיח את האקסיומה בעזרת אקסיומה אחרת כגון עקרון הסדר הטוב ולהפך, אבל לא ניתן להוכיח אותה בעזרת אקסיומות אחרות, פשוטות יותר, של פאנו.

6.2 מספרי פיבונאצ׳י

מספרי פיבונטצ׳י מוגדרים ברקורסיה:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3 \text{ עבור}\,. \end{aligned}$$

שנים עשר מספרי פיבונאצ׳י הראשונים הם: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$.

משפט 6.3 כל מספר פיבונאצ׳י רביעי מתחלק ב-3.

דוגמה 6.1 $f_4 = 3 = 3 \cdot 1,\ f_8 = 21 = 3 \cdot 7,\ f_{12} = 144 = 3 \cdot 48$.

הוכחה טענת הבסיס מתקבלת באופן מיידי כי $f_4 = 3$ מתחלק ב-3. הנחת האינדוקציה היא ש-f_{4n} מתחלק ב-3. הצעד האינדוקטיבי הוא:

$$\begin{aligned} f_{4(n+1)} &= f_{4n+4} \\ &= f_{4n+3} + f_{4n+2} \\ &= (f_{4n+2} + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\ &= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\ &= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + (f_{4n+1} + f_{4n}) \\ &= 3f_{4n+1} + 2f_{4n}\,. \end{aligned}$$

$3f_{4n+1}$ מתחלק ב-3 ולפי הנחת האינדוקציה גם f_{4n}, ולכן $f_{4(n+1)}$ מתחלק ב-3. □

משפט 6.4 $f_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

הוכחה טענות הבסיס: $f_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$ ו-$f_2 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$.

הצעד האינדוקטיבי:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^n + f_{n-1} \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4} + 1\right) \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

מכיוון ש:

$$\left(\frac{7}{4}+1\right)=\frac{11}{4}=\frac{44}{16}<\frac{49}{16}=\left(\frac{7}{4}\right)^2.$$

□

כדי להוכיח f_{n+1}, הנחנו שהטענה נכונה לא רק עבור f_n אלא גם עבור f_{n-1}. ב-**אינדוקציה שלמה** אפשר להניח שהטענה נכונה עבור כל $n \leq m$. ניתן להוכיח שאינדוקציה שלמה שקולה לאינדוקציה מתמטית.

משפט 6.5 (נוסחת בינה (Binet))

$$f_n=\frac{\phi^n-\bar{\phi}^n}{\sqrt{5}}\,. \quad \text{כאשר} \quad \phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \bar{\phi}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

הוכחה ראשית נוכיח ש-$\phi^2=\phi+1$:

$$\begin{aligned}\phi^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{4}+\frac{2\sqrt{5}}{4}+\frac{5}{4}\\ &= \frac{2}{4}+\frac{2\sqrt{5}}{4}+\frac{4}{4}\\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\\ &= \phi+1\,.\end{aligned}$$

באופן דומה אפשר להוכיח ש: $\bar{\phi}^2=\bar{\phi}+1$.

טענת הבסיס של נוסחת בינה היא:

$$\frac{\phi^1-\bar{\phi}^1}{\sqrt{5}}=\frac{(1+\sqrt{5})/2-(1-\sqrt{5})/2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=1\,.$$

נניח שהנחת האינדוקציה נכונה עבור כל $k \leq n$. הצעד האינדוקטיבי הוא:

$$\begin{aligned}\phi^n-\bar{\phi}^n &= \phi^2\,\phi^{n-2}-\bar{\phi}^2\,\bar{\phi}^{n-2}\\ &= (\phi+1)\,\phi^{n-2}-(\bar{\phi}+1)\,\bar{\phi}^{n-2}\\ &= (\phi^{n-1}-\bar{\phi}^{n-1})+(\phi^{n-2}-\bar{\phi}^{n-2})\\ &= \sqrt{5}f_{n-1}+\sqrt{5}f_{n-2}\\ \frac{\phi^n-\bar{\phi}^n}{\sqrt{5}} &= f_{n-1}+f_{n-2}=f_n\,.\end{aligned}$$

□

משפט 6.6

$$f_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots.$$

הוכחה נוכיח תחילה את נוסחת פסקל (Pascal):

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\
&= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

נשתמש גם בשוויון $1 = \frac{k!}{0!(k-0)!} = \binom{k}{0}$ עבור כל $k \geq 1$.

עכשיו אפשר להוכיח את המשפט. טענת הבסיס:

$$f_1 = 1 = \binom{1}{0} = \frac{1!}{0!(1-0)!}.$$

הצעד האינדוקטיבי הוא:

$$\begin{aligned}
f_{n-1} + f_{n-2} = &\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \cdots \\
&\qquad\quad \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} + \cdots \\
= &\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots \\
= &\binom{n}{0} \qquad + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots.
\end{aligned}$$

□

6.3 מספרי פרמה

הגדרה 6.1 מספר פרמה הוא מספר שלם שערכו $2^{2^n}+1$ עבור $n \geq 0$.

אמנם הגדרנו שטענת הבסיס היא מ-$n=1$ אבל ניתן להשתמש בכל ערך שלם, והטענה נכונה מאותו ערך והלאה.

חמשת מספרי פרמה הראשונים הם מספרים ראשוניים:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537\,.$$

במאה ה-17 שיער המתמטיקאי פייר דה פרמה שכל מספרי פרמה הם ראשוניים, אבל כעבור כמאה שנים הראה לאונרד אוילר ש:

$$2^{2^5}+1 = 2^{32}+1 = 4294967297 = 641 \times 6700417\,.$$

מספרי פרמה גדלים מהר מאוד ככל ש-n גדל. ידוע שמספרי פרמה אינם ראשוניים עבור $5 \leq n \leq 32$, אבל הפירוק לגורמים של חלק מהמספרים הללו עדיין לא ידוע.

משפט 6.7 עבור $n \geq 2$, הספרה האחרונה של F_n היא 7.

הוכחה טענת הבסיס: $F_2 = 2^{2^2}+1 = 17$. הנחת האינדוקציה היא ש-$F_n = 10k_n + 7$ עבור $k \geq 1$. הצעד האינדוקטיבי הוא:

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= 2^{2^{n+1}}+1 = \left(2^{2^n}\right)^2+1 \\
&= \left(\left(2^{2^n}+1\right)-1\right)^2+1 \\
&= \left(2^{2^n}+1\right)^2 - 2\cdot\left(2^{2^n}+1\right)+1+1 \\
&= (10k_n+7)^2 - 2(10k_n+7)+2 \\
&= 100k_n^2+120k_n+37 \\
&= 10(10k_n^2+12k_n+3)+7 \\
&= 10k_{n+1}+7\,.
\end{aligned}$$

□

משפט 6.8 עבור כל $n \geq 1$, $F_n = \prod_{k=0}^{n-1} F_k + 2$.

הוכחה טענת הבסיס:

$$5 = F_1 = \prod_{k=0}^{0} F_k + 2 = F_0 + 2 = 3 + 2\,.$$

הצעד האינדוקטיבי:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n} F_k &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\right) F_n \\
&= (F_n - 2)F_n \\
&= F_n^2 - 2F_n \\
&= \left(2^{2^n}+1\right)^2 - 2\cdot\left(2^{2^n}+1\right) \\
&= 2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^{n+1}}+1) - 2 \\
&= F_{n+1} - 2 \\
F_{n+1} &= \prod_{k=0}^{n} F_k + 2\,.
\end{aligned}$$

□

6.4 פונקציה 91 של מקארתי (McCarthy)

אינדוקציה מתקשרת אצלנו להוכחות של תכונות המוגדרות על קבוצת המספרים השלמים החיוביים. כאן נביא הוכחה אינדוקטיבית המבוססת על יחס מוזר כאשר מספרים גדולים הם קטנים ממספרים קטנים. האינדוקציה מצליחה, כי התכונה היחידה הנדרשת מהקבוצה היא שקיים סדר לפי פעולה יחס.

נתבונן בפונקציה הרקורסיבית שלהלן המוגדרת על המספרים השלמים:

$$f(x) = \begin{cases} x - 10 & \text{אם } x > 100 \\ f(f(x+11)) & \text{אחרת} \end{cases}$$

עבור מספרים גדולים מ-100 חישוב הפונקציה פשוט ביותר:

$$f(101) = 91,\;\; f(102) = 92,\;\; f(103) = 93,\;\; f(104) = 94\,.$$

מה עם מספרים קטנים או שווים ל-100? נחשב את $f(x)$ עבור מספרים מסוימים כאשר החישוב בכל שורה מסתמך על השורות הקודמות:

$$\begin{aligned}
f(100) &= f(f(100+11)) = f(f(111)) = f(101) = 91 \\
f(99) &= f(f(99+11)) = f(f(110)) = f(100) = 91 \\
f(98) &= f(f(98+11)) = f(f(109)) = f(99) = 91 \\
&\cdots \\
f(91) &= f(f(91+11)) = f(f(102)) = f(92) \\
&\qquad = f(f(103)) = f(93) = \cdots = f(98) = 91 \\
f(90) &= f(f(90+11)) = f(f(101)) = f(91) = 91 \\
f(89) &= f(f(89+11)) = f(f(100)) = f(91) = 91\,.
\end{aligned}$$

נגדיר את הפונקציה g:

$$g(x) = \begin{cases} x - 10 & x > 100 \text{ אם} \\ 91 & \text{אחרת} \end{cases}$$

משפט 6.9 עבור כל x, $f(x) = g(x)$.

הוכחה ההוכחה באינדוקציה מעל קבוצת המספרים $S = \{x \mid x \leq 101\}$ כאשר היחס $\prec$ מוגדר על ידי:

$$x \prec y \text{ אוי״א } y < x\,.$$

בצד הימני $<$ הוא היחס הרגיל מעל למספרים שלמים. סדר המספרים לפי $\prec$ הוא:

$$101 \prec 100 \prec 99 \prec 98 \prec 97 \prec \cdots\,.$$

נפצל לשלושה מקרים. נשתמש בתוצאות של החישובים לעיל:

מקרה 1 $x > 100$. ההוכחה מיידית מההגדרות של f ו- g.

מקרה 2 $90 \leq x \leq 100$.

טענת הבסיס היא:

$$f(100) = 91 = g(100)\,,$$

כי הראינו ש-$f(100) = 91$ ולפי ההגדרה $g(100) = 91$.

הנחת האינדוקציה היא $f(y) = g(y)$ עבור $x \prec y$, והצעד האינדוקטיבי הוא:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(f(x+11)) && (6.1) \\ &= f(x+11-10) = f(x+1) && (6.2) \\ &= g(x+1) && (6.3) \\ &= 91 && (6.4) \\ &= g(x)\,. && (6.5) \end{aligned}$$

השוויון 6.1 מתקיים לפי ההגדרה של f כי $x \leq 100$. השוויון בין 6.1 ל- 6.2 מתקיים לפי ההגדרה של f, כי $x \geq 90$ ולכן $x + 11 > 100$. השוויון בין 6.2 ו- 6.3 נובע מהנחת האינדוקציה $x \leq 100$ ולכן $x + 1 \leq 101$ ומכאן אפשר להסיק ש-$x + 1 \in S$ ו-$x \prec x + 1$. השוויון בין 6.3, 6.4, 6.5 מתקיים לפי ההגדרה של g ו-$x + 1 \leq 101$ ולכן $x \leq 100$.

מקרה 3 $x < 90$.

טענת הבסיס היא $f(89) = f(f(100)) = f(91) = 91 = g(89)$ לפי ההגדרה של g כי $89 \leq 100$.

הנחת האינדוקציה היא $f(y) = g(y)$ עבור $x \prec y$ והצעד האינדוקטיבי הוא:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(f(x+11)) && (6.6) \\ &= f(g(x+11)) && (6.7) \\ &= f(91) && (6.8) \\ &= 91 && (6.9) \\ &= g(x)\,. && (6.10) \end{aligned}$$

השוויון 6.6 מתקיים לפי ההגדרה של f ו-$x < 90 \leq 100$. השוויון בין 6.6 ו-6.7 נובע מהנחת האינדוקציה, $x < 90$ ולכן $x + 11 < 101$ שממנו נובע $x + 11 \in S$ ו-$x + 11 \prec x$. השוויון בין 6.7 ו-6.8 מתקיים לפי ההגדרה של g ו-$x + 11 < 101$. לבסוף, כבר הוכחנו ש-$f(91) = 91$ ולפי ההגדרה $g(x) = 91$ עבור $x < 90$. □

6.5 בעיית יוספוס

יוסף בן מתתיהו (Titus Flavius Josephus) היה מפקד העיר יודפת בזמן המרד הגדול נגד הרומאים. הכוח העצום של הצבא הרומי מחץ את הגנת העיר ויוסף מצא מקלט במערה עם חלק מאנשיו שהעדיפו להתאבד ולא להיהרג או ליפול בשבי הרומאים. לפי מה שסיפר יוסף הוא מצא דרך להציל את עצמו, נשבה והפך למשקיף עם הרומאים ואחר כך כתב את ההיסטוריה של המרד. נציג את הבעיה הקרויה על שמו כבעיה מתמטית מופשטת.

הגדרה 6.2 (בעיית יוספוס) נסדר את המספרים $1, \ldots, n+1$ במעגל. נמחק כל מספר ה-q מסביב למעגל $q, 2q, 3q, \ldots$ (מודולו $n+1$) עד שיישאר רק מספר אחד m. $J(n+1, q) = m$ הוא **מספר יוסיפוס *(Josephus)*** עבור $n+1$ ו-q.

דוגמה 6.2 יהיו $n + 1 = 41$ ו-$q = 3$. נסדר את המספרים במעגל:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
\rightarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & & \downarrow \\
\uparrow & 41 & 40 & 39 & 38 & 37 & 36 & 35 & 34 & 33 & 32 & 31 & 30 & 29 & 28 & 27 & 26 & 25 & 24 & 23 & 22 & & & \leftarrow
\end{array}$$

תוצאת הסבב הראשון של המחיקות היא:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
\rightarrow & 1 & 2 & \cancel{3} & 4 & 5 & \cancel{6} & 7 & 8 & \cancel{9} & 10 & 11 & \cancel{12} & 13 & 14 & \cancel{15} & 16 & 17 & \cancel{18} & 19 & 20 & \cancel{21} & & \downarrow \\
\uparrow & 41 & 40 & \cancel{39} & 38 & 37 & \cancel{36} & 35 & 34 & \cancel{33} & 32 & 31 & \cancel{30} & 29 & 28 & \cancel{27} & 26 & 25 & \cancel{24} & 23 & 22 & & & \leftarrow
\end{array}$$

לאחר השמטת המספרים שנמחקו נקבל:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
\rightarrow & 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 10 & 11 & 13 & 14 & 16 & 17 & 19 & 20 & \downarrow \\
\uparrow & 41 & 40 & 38 & 37 & 35 & 34 & 32 & 31 & 29 & 28 & 26 & 25 & 23 & 22 & \leftarrow
\end{array}$$

תוצאת הסבב השני של המחיקות (כאשר מתחילים מהמחיקה האחרונה 39) היא:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
\rightarrow & \cancel{1} & 2 & 4 & \cancel{5} & 7 & 8 & \cancel{10} & 11 & 13 & \cancel{14} & 16 & 17 & \cancel{19} & 20 & \downarrow \\
\uparrow & \cancel{41} & 40 & 38 & \cancel{37} & 35 & 34 & \cancel{32} & 31 & 29 & \cancel{28} & 26 & 25 & \cancel{23} & 22 & \leftarrow
\end{array}$$

נמשיך למחוק כל מספר שלישי עד שרק אחד נשאר:

$$\begin{array}{llllllllllllllllll}
2 & 4 & \cancel{7} & 8 & 11 & \cancel{13} & 16 & 17 & \cancel{20} & 22 & 25 & \cancel{26} & 29 & 31 & \cancel{34} & 35 & 38 & \cancel{40} \\
2 & 4 & \cancel{8} & 11 & 16 & \cancel{17} & 22 & 25 & \cancel{29} & 31 & 35 & \cancel{38} \\
2 & 4 & \cancel{11} & 16 & 22 & \cancel{25} & 31 & 35 \\
\cancel{2} & 4 & 16 & \cancel{22} & 31 & 35 \\
\cancel{4} & 16 & 31 & \cancel{35} \\
\cancel{16} & 31 \\
31
\end{array}$$

מכאן ש-$J(41, 3) = 31$.

הקורא מוזמן לבצע את החישוב עבור מחיקת כל מספר שביעי במעגל של 40 ולבדוק שהמספר האחרון הוא 30.

משפט 6.10 $J(n+1,q) = (J(n,q)+q) \pmod{n+1}$.

הוכחה המספר הראשון שנמחק בסבב הראשון הוא מספר ה-q והמספרים שנשארים לאחר המחיקה הם n המספרים:

$$1 \quad 2 \quad \ldots \quad q-1 \quad q+1 \quad \ldots \quad n \quad n+1 \quad (\mathrm{mod}\ n+1)\,.$$

נמשיך ונחפש את המחיקה הבאה שמתחילה ב- $q+1$. העתקה של $1,\ldots,n$ לסדרה זו נותנת:

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 2 & \ldots & n-q & n+1-q & n+2-q & \ldots & n-1 & n & (\mathrm{mod}\ n{+}1) \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
q+1 & q+2 & \ldots & n & n+1 & 1 & \ldots & q-2 & q-1 & (\mathrm{mod}\ n{+}1)\,.
\end{array}$$

זכרו שכל החישובים הם מודולו $n+1$:

$$\begin{array}{lclcll}
(n+2-q)+q & = & (n+1)+1 & = & 1 & (\mathrm{mod}\ n+1) \\
(n)+q & = & (n+1)-1+q & = & q-1 & (\mathrm{mod}\ n+1)\,.
\end{array}$$

זאת בעיית יוספוס עבור n מספרים, פרט לעובדה שהמספרים מוזזים ב-q. מכאן ש:

$$J(n+1,q) = (J(n,q)+q) \pmod{n+1}\,.$$

$\square$

משפט 6.11 עבור $n \geq 1$ קיימים מספרים $a \geq 0, 0 \leq t < 2^a$ כך ש-$n = 2^a + t$.

הוכחה ניתן להוכיח את המשפט באמצעות אלגוריתם החילוק עם המחלקים $2^0, 2^1, 2^2, 2^4, \ldots$, אבל קל יותר לראות זאת מהייצוג הבינארי של n. קיימים a ו-$b_{a-1}, b_{a-2}, \ldots, b_1, b_0$, כך שעבור כל i, $b_i = 0$ או $b_i = 1$, ניתן לבטא את n כ:

$$\begin{aligned}
n &= 2^a + b_{a-1}2^{a-1} + \cdots + b_0 2^0 \\
n &= 2^a + (b_{a-1}2^{a-1} + \cdots + b_0 2^0) \\
n &= 2^a + t, \quad \text{כאשר } t \leq 2^a - 1\,.
\end{aligned}$$

$\square$ כעת נוכיח שקיים ביטוי סגור פשוט עבור $J(n,2)$.

משפט 6.12 עבור $n = 2^a + t$, $a \geq 0, 0 \leq t < 2^a$, $J(n,2) = 2t+1$.

הוכחה לפי משפט 6.11 ניתן לבטא את n כפי שרשום שם. ההוכחה ש-$J(n,2) = 2t+1$ היא על ידי אינדוקציה כפולה, תחילה על a ואחר כך על t.

אינדוקציה ראשונה

טענת בסיס: נניח ש-$t = 0$ כך ש-$n = 2^a$. יהי $a = 1$ כך ששני המספרים הראשונים במעגל הם $1, 2$. אבל $q = 2$ ולכן המספר השני יימחק והמספר שנשאר הוא 1 ומכאן ש-$J(2^1, 2) = 1$.

הנחת האינדוקציה היא $J(2^a,2)=1$. מהו $J(2^{a+1},2)$? בסבב הראשון מוחקים את כל המספרים הזוגיים:

$$1 \quad \cancel{2} \quad 3 \quad \cancel{4} \quad \ldots \quad 2^{a+1}-1 \quad \cancel{2^{a+1}}\,.$$

כעת נשארו 2^a מספרים:

$$1 \quad 3 \quad \ldots \quad 2^{a+1}-1\,.$$

לפי הנחת האינדוקציה $J(2^{a+1},2)=J(2^a,2)=1$ ולכן באינדוקציה $J(n,2)=1$ כאשר $n=2^a+0$.

אינדוקציה שנייה

הוכחנו ש-$J(2^a+0,2)=2\cdot 0+1$, טענת הבסיס של האינדוקציה השנייה.

הנחת האינדוקציה היא $J(2^a+t,2)=2t+1$. לפי משפט 6.10:

$$J(2^a+(t+1),2)=J(2^a+t,2)+2=2t+1+2=2(t+1)+1\,. \qquad \square$$

קיים אלגוריתם פשוט לחישוב $J(n,2)$ המבוסס על משפטים 6.11 ו- 6.12. מהוכחת משפט 6.11:

$$n=2^a+t=2^a+(b_{a-1}2^{a-1}+\cdots+b_0 2^0)\,,$$

כך ש-$t=b_{a-1}2^{a-1}+\cdots+b_0 2^0$. פשוט נכפול ב-2 (על ידי הזזה שמאלה של ספרה אחת) ונוסיף 1. לדוגמה, $n=41=2^5+2^3+2^0=101001$ ולכן $J(41,2)=2t+1$ ובסימון בינארי:

$$\begin{aligned} 41 &= 101001\\ 9 &= 001001\\ 2t+1 &= 010011 = 16+2+1=19\,. \end{aligned}$$

הקורא מוזמן לבדוק את התוצאה על ידי מחיקת כל מספר שני במעגל $1,\ldots,41$.

קיים ביטוי עבור $J(n,3)$ אבל הוא מסובך מאוד.

מה ההפתעה?

אינדוקציה היא אחת משיטות ההוכחה החשובות ביותר במתמטיקה מודרנית. מספרי פיבונאצ׳י מוכרים מאוד ומספרי פרמה קלים להבנה. הופתעתי לגלות נוסחאות רבות כל כך שלא הכרתי (כגון משפטים 6.3 ו-6.4) הניתנות להוכחה באינדוקציה. פונקציה 91 של מקארתי התגלתה בהקשר של מדעי המחשב למרות שהיא פונקציה מתמטית. מה שמפתיע איננה הפונקציה עצמה אלא האינדוקציה המוזרה כאשר $97 \prec 98$. ההפתעה בבעיית יוספוס היא באינדוקציה הדו-כיוונית בהוכחה.

מקורות

ניתן למצוא הצגה נרחבת של אינדוקציה ב-[21]. ההוכחה של פונקציה 91 של מקארתי נמצאת ב-[30] שמייחס אותה לבורסטל (Rod M. Burstall). ההצגה של בעיית יוספוס מבוססת על פרק 17 של [21] שגם מביא את הרקע ההיסטורי ובעיות מעניינות אחרות, כגון: הילדים המרוחים בבוץ, המטבע המזויף והאגורות בקופסה. חומר נוסף על בעיית יוספוס ניתן למצוא ב-[44, 57].

פרק 7

פתרון משוואות ריבועיות

פו-שן לו (Poh-Shen Loh) הציע שיטה למציאת פתרונות למשוואות ריבועיות המבוססת על היחס בין המקדמים של הפולינום הריבועי ובין שורשיו. סעיף 7.1 סוקר את השיטות הרגילות למציאת פתרונות למשוואות ריבועיות וסעיף 7.2 מנסה לשכנע את הקורא שהשיטה של לו הגיונית ומסביר איך לחשב את השורשים. בסעיף 7.3 נדגים את החישוב עבור שני פולינומים ריבועיים וחישוב דומה עבור פולינום ממעלה ארבע. סעיף 7.4 מפתח את הנוסחה הרגילה לחישוב שורשים מהנוסאות של לו.

אלגברה והסימונים האלגבריים הם פיתוח חדש יחסית. בתקופות קדומות מתמטיקאים השתמשו כמעט אך ורק בגיאומטריה, ולכן מעניין לעיין בבנייה הגיאומטרית של אל-ח'ווארִיזמי (al-Khwarizmi) עבור הנוסחאה למציאת שורשי משוואה ריבועית (סעיף 7.5). סעיף 7.6 מציג בנייה של שקרדאנו (Cardano) השתמש בה בפיתוח הנוסחאה למציאת השורשים של משוואה ממעלה שלישית.

סעיף 7.8 מציג שיטות גרפיות אחרות למציאת השורשים של משוואות ריבועיות.[1] סעיף 7.9 דן בחישוב נומרי של שורשי משוואות ריבועיות.

7.1 השיטות המסורתיות לפתרון משוואות ריבועיות

כל תלמיד לומד את הנוסחה למציאת השורשים של משוואה ריבועית $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

נגביל את עצמנו למשוואות שבהן המקדם המוביל הוא אחד, כי תמיד אפשר לחלק ב-a. השורשים של $x^2 + bx + c = 0$ הם:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} . \tag{7.1}$$

שיטה נוספת למציאת שורשים של משוואות ריבועיות היא לפרק את הפולינום הריבועי. לעתים קל לפרק את הפולינום:

[1] קריאת פרק 11 היא דרישת קדם להבנה מלאה של שיטות אלו.

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0\,. \tag{7.2}$$

קשה הרבה יותר לפרק את הפולינום:

$$x^2 - 2x - 24 = (x - r_1)(x - r_2) = 0\,,$$

כי יש לבדוק מספר רב של זוגות שורשים שלמים אפשריים:

$$(\pm 1, \mp 24)\,, (\pm 2, \mp 12)\,, (\pm 3, \mp 8)\,, (\pm 4, \mp 6)\,.$$

7.2 הקשר בין המקדמים לשורשים

משפט 7.1 אם r_1, r_2 הם השורשים של $x^2 + bx + c$ אזי:

$$(x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = x^2 + bx + c\,,$$

ולכן, גם אם ערכי השורשים אינם ידועים, כן ידוע ש:

$$r_1 + r_2 = -b\,, \qquad r_1 r_2 = c\,. \tag{7.3}$$

למעשה אין מה להוכיח כי התוצאה מתקבלת מהחישוב.

נסתכל על מספר ערכים עבור $-b, r_1, r_2$ ונסמן ב-m_{12} את הממוצע של r_1, r_2:

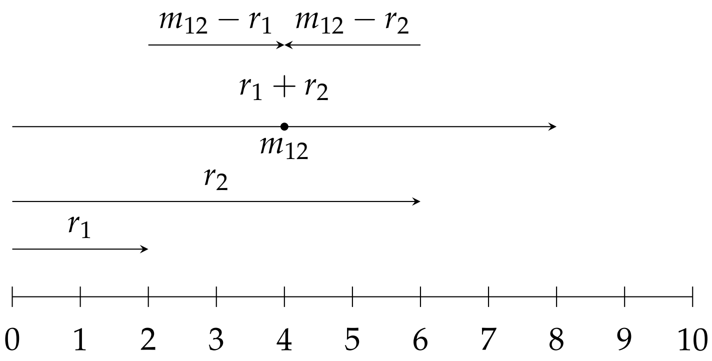
$-b$	r_1	r_2	m_{12}
33	12	21	$16\frac{1}{2}$
33	8	25	$16\frac{1}{2}$
33	1	32	$16\frac{1}{2}$
-4	-16	12	-2
-4	-4	0	-2
-4	-3	-1	-2

עבור כל משוואה ריבועית, הממוצע של שני השורשים קבוע:

$$m_{12} = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{(-b - r_2) + r_2}{2} = -\frac{b}{2}\,.$$

יהי s מספר כלשהו, אז:

$$-b = -b + s + (-s) = \left(\frac{-b}{2} + s\right) + \left(\frac{-b}{2} - s\right) = r_1 + r_2\,.$$

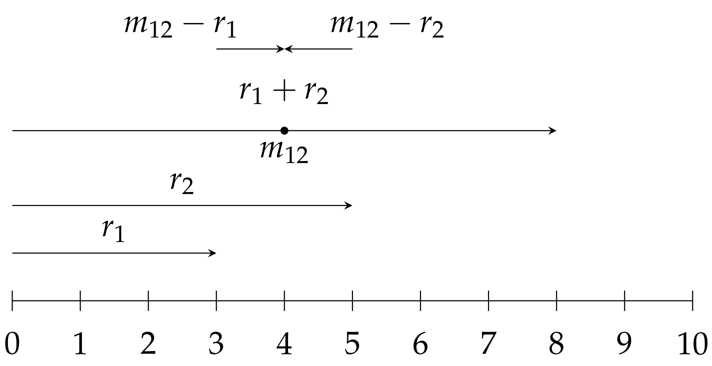


איור 7.1: היחס בין $r_1, r_2 = 2, 6$ והממוצע שלהם $m_{12} = 4$

אם שורש אחד נמצא במרחק s מהממוצע, השורש השני נמצא במרחק $-s$ מהממוצע. איור 7.1 מציג את הערכים עבור $r_1 = 2, r_2 = 6$, $s = 2$,$m_{12} = 4$. אם נבחר ערכים אחרים $r_1 = 3, r_2 = 5$ עבורם $m_{12} = 4$, הערכים נשארים ללא שינוי, אבל אם $s = 1$ המצב משתנה (איור 7.2).

הטבלה שלהלן מראה דוגמאות אחרות עבור $b = -33, b = 4$:

$-b$	r_1	r_2	m_{12}	$m_{12} - r_1$	$m_{12} - r_2$
33	12	21	$16\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$
33	8	25	$16\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{2}$
33	1	32	$16\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{2}$
-4	-16	12	-2	14	-14
-4	-4	0	-2	2	-2
-4	-3	-1	-2	1	-1



איור 7.2: היחס בין השורשים $r_1, r_2 = 3, 5$ והממוצע שלהם $m_{12} = 4$

לכאורה ההפרש s שרירותי ב:

$$r_1 = \frac{-b}{2} + s\,, \qquad r_2 = \frac{-b}{2} - s\,,$$

אבל קיים אילוץ נוסף $r_1 r_2 = c$, כאשר c הוא הקבוע בפולינום. אם נכפול את שני הביטויים שמצאנו עבור r_1, r_2, נוכל לחשב את s ואחר כך את r_1, r_2.

$$\begin{aligned} c &= \left(-\frac{b}{2} + s\right)\left(-\frac{b}{2} - s\right) = \frac{b^2}{4} - s^s \\ s &= \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}\,. \end{aligned}$$

7.3 דוגמאות לשיטה של לו

דוגמה 7.1 נשתמש בשיטה על הפולינום $x^2 - 2x - 24$ כאשר $b = -2, c = -24$:

$$\begin{aligned} -24 &= \left(-\frac{-2}{2} + s\right)\left(-\frac{-2}{2} - s\right) \\ -24 &= (1+s)(1-s) \\ s &= 5 \\ r_1 &= 1 + 5 = 6 \\ r_2 &= 1 - 5 = -4\,. \end{aligned}$$

בדיקה: $(x-6)(x-(-4)) = x^2 - 2x - 24$.

דוגמה 7.2 נמצא את השורשים של $x^2 - 83x - 2310$.

$$\begin{aligned} -2310 &= \left(\frac{83}{2} + s\right)\left(\frac{83}{2} - s\right) \\ s^2 &= \frac{6889}{4} + 2310 = \frac{16129}{4} \\ s &= \frac{127}{2} \\ r_1 &= \frac{83}{2} - \frac{127}{2} = -22 \\ r_2 &= \frac{83}{2} + \frac{127}{2} = 105\,. \end{aligned}$$

בדיקה: $(x+22)(x-105) = x^2 - 83x - 2310$.

נשווה את החישוב עם החישוב המשתמש בנוסחה:

$$\begin{aligned}\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2} &= \frac{-(-83)\pm\sqrt{(-83)^2-4\cdot(-2310)}}{2}\\ &= \frac{83\pm\sqrt{16129}}{2}=\frac{83\pm 127}{2}\\ r_1 &= \frac{83-127}{2}=-22\\ r_2 &= \frac{83+127}{2}=105\,.\end{aligned}$$

דוגמה 7.3 ניתן להכליל את משפט 7.1 לפולינומים ממעלות גבוהות יותר. הנה דוגמה מעניינת עבור משוואה ממעלה רביעית *(quartic)* $x^4-10x^2-x+20=0$. כמו למשוואות ריבועיות קיימות נוסחאות לפתרון משוואות ממעלה שלישית וממעלה רביעית (אבל לא למעלות גבוהות יותר), אבל הנוסחאות די מסובכות.

האם פולינום זה ממעלה רביעית מתפרק לשני פולינומים ריבועיים עם מקדמים שלמים? אם כן, המקדמים של הגורם x^3 חייבים להיות **שווים ובעלי סימנים נגדיים** כי המקדם שלו הוא אפס. מכאן, שהצורה של הפולינומים הריבועיים היא:

$$f(x)=(x^2-nx+k_1)\,(x^2+nx+k_2)\,.$$

לאחר ההכפלה נקבל:

$$\begin{array}{rlllll} f(x)= & x^4 & +nx^3 & +k_2x^2 & & \\ & & -nx^3 & -n^2x^2 & -nk_2x & \\ & & & +k_1x^2 & +nk_1x & +k_1k_2\,. \end{array}$$

נשווה את המקדמים ונקבל שלוש משוואות בשלושה נעלמים n, k_1, k_2:

$$\begin{aligned}(k_1+k_2)-n^2 &= -10\\ n(k_1-k_2) &= -1\\ k_1k_2 &= 20\,.\end{aligned}$$

אנחנו מחפשים מקדמים שלמים ולכן משתי המשוואות האחרונות נקבל:

$$n=1,\,k_1=4,\,k_2=5 \qquad \text{או} \qquad n=1,\,k_1=-5,\,k_2=-4\,.$$

רק $n=1, k_1=-5, k_2=-4$ מקיימים את המשוואה הראשונה עבור את המקדם של x^2 במשוואה הראשונה.

$$f(x)=(x^2-x-5)\,(x^2+x-4)\,.$$

מפתרון שתי המשוואות הריבועיות הללו נקבל ארבעה פתרונות למשוואה מהמעלה הרביעית:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}\ \text{ או }\ x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}\,.$$

7.4 פיתוח הנוסחה המסורתית

עבור פולינום שרירותי עם מקדם מוביל 1 x^2+bx+c, הנוסחאות של לו הן :

$$
\begin{aligned}
c = r_1, r_2 &= \left(\frac{-b}{2}+s\right)\left(\frac{-b}{2}-s\right) = \frac{b^2}{4}-s^2\\
s &= \sqrt{\left(\frac{b^2}{4}\right)-c}\\
r_1, r_2 &= \frac{-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4}\right)-c} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}\,,
\end{aligned}
$$

שהיא הנוסחה המסורתית למציאת שורשי פולינום. עבור פולינום עם מקדם מוביל a, הציבו במשוואה ופשטו :

$$
\begin{aligned}
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= 0\\
r_1, r_2 &= \frac{-(b/a)\pm\sqrt{(b/a)^2-4(c/a)}}{2}\\
&= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,.
\end{aligned}
$$

7.5 הפתרון הגיאומטרי של אל-ח׳ווארִיזמי למשוואות ריבועיות

נכתוב פולינום כ-x^2+bx-c. ניתן למצוא את השורשים על ידי **השלמה לריבוע** :

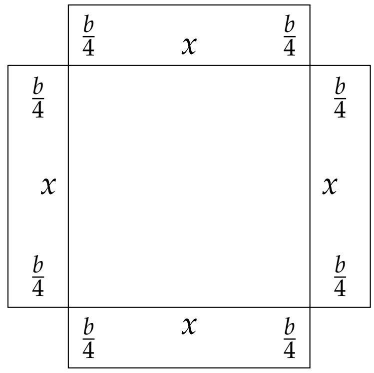
$$
\begin{aligned}
x^2+2\left(\frac{b}{2}\right)x+\left(\frac{b}{2}\right)^2 &= c+\left(\frac{b}{2}\right)^2\\
\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 &= c+\left(\frac{b}{2}\right)^2\\
x &= -\frac{b}{2}\pm\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2+4c}}{2}\,.
\end{aligned}
$$

נוסחה זו היא הנוסחה המוכרת למציאת שורשי משוואה ריבועית, פרט לעובדה של-$4c$ סימן חיובי כי המקדם של הגורם הקבוע הוא שלילי $-c$.

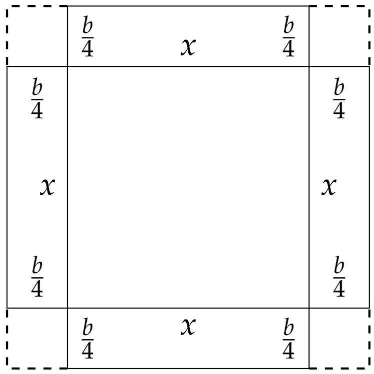
השלמת הריבוע פותחה במאה השמינית על ידי אל-ח׳ווארִיזמי בהקשר גיאומטרי. נתונה המשוואה $x^2+bx=c$, נניח שקיים ריבוע שצלעו הוא x ולכן שטחו x^2. לשטח x^2 נוסיף bx על ידי הוספת ארבעה מלבנים ששטח כל אחד מהם $bx/4$ וצלעותיהם $b/4$ ו-x (איור 7.3.א). כעת נשלים את התרשים לריבוע על ידי הוספת ארבעה ריבועים קטנים ששטחם $(b/4)^2$ (איור 7.3.ב).

לא ניתן לבנות את התרשים ב7.3.א כי איננו יודעים מה ערכו של x, אבל השטח של הריבוע הגדול ב7.3.ב הוא :

$$
x^2+bx+\frac{b^2}{4} = c+\frac{b^2}{4}\,,
$$



7.3.א השטח הוא
$x^2+4(b/4)x=x^2+bx$



7.3.ב השטח הוא
$x^2+4(b/4)x+4(b/4)^2=$
$x^2+bx+(b^2/4)$

ואותו אנו כן יודעים לבנות כי המקדמים b, c נתונים. על ידי בניית התרשים ומחיקת הריבועים הקטנים שצלעותיהם $(b/4)$, עוד ערך ידוע, נקבל קטע באורך x.

דוגמה 7.4 נתון $x^2+12x=64$. אז $c+(b^2/4)=64+36=100$ וקל לבנות ריבוע ששטחו 100 כי אורך כל צלע הוא 10. נחסיר את אורכי הצלעות של הריבועים הקטנים $(b/4)+(b/4)=6$, ונקבל $x=10-6=4$.

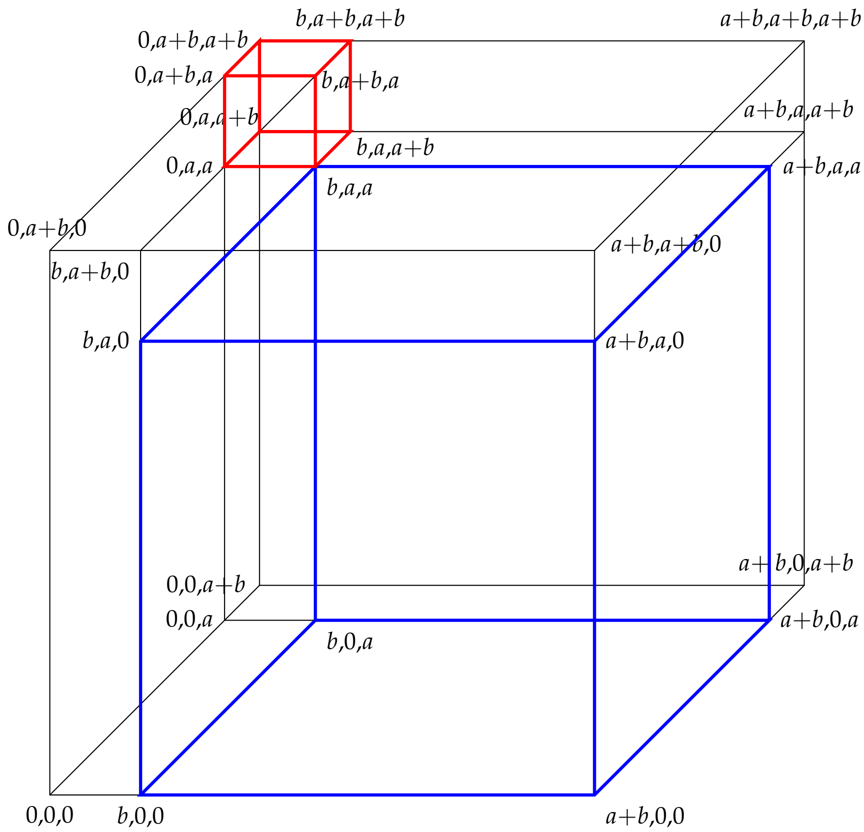
7.6 הבנייה של קרדאנו לפתרון משוואה ממעלה שלישית

הנוסחה לשורשי משוואה ממעלה שלישית פורסמה לראשונה במאה ה-16 על ידי ג׳ירולמו קרדאנו. לא נפתח כאן את הנוסחה, אבל הרעיון הבסיסי מעניין כי הוא מבוסס על בנייה גיאומטרית בדומה לבנייה של אל-חוארזמי. הבנייה מתקבלת בצורה פשוטה בעזרת האלגברה. נכפול ונקבל:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a^3+b^3)+3ab(a+b)\,. \tag{7.4}$$

בגיאומטריה, נתחיל עם קובייה שצלעה $a+b$ ולכן הנפח שלה $(a+b)^3$. נחלק את הקובייה לחמישה חלקים. שני החלקים הראשונים הם קוביות שצלעותיהן a ו-b והנפח a^3 (כחול) ו-b^3 (אדום), בהתאמה (איור 7.4).

שלושת החלקים האחרים הם תיבות (המונח הפורמלי הוא cuboid), כל אחת עם צלע באורך $a+b$ המתאים לצלע של הקובייה, צלע אחת באורך a וצלע אחת באורך b, כך שהנפח של כל שלוש התיבות הוא $ab(a+b)$. באיור 7.5, תיבה אחת נמצאת בצד השמאלי של הקובייה (כחול), אחת מאחורי הקובייה (אדום) ואחת מעל לקובייה (ירוק). על ידי צירוף כל חמשת הגופים באיור 7.4 ובאיור 7.5 נקבל את משוואה 7.4.



איור 7.4: $(a^3 + b^3) = (a^3 + b^3) + \cdots$

7.7 הם לא נרתעו ממספרים דמיוניים

ההיסטוריה של המתמטיקה מתאפיינת בסדרה של מושגים שתחילה נחשבו כחסרי משמעות, אבל לבסוף הובנו, התקבלו והוכיחו את חשיבותם. "ברור" ש--1, מספר שלילי, הוא חסר משמעות כי מספרים סופרים דברים. "ברור" ש-$\sqrt{2}$, מספר אי רציונלי, הוא חסר משמעות כי מספר הוא יחס בין שני מספרים שלמים. "ברור" ש-$\sqrt{-1}$, השורש של מספר שלילי, הוא חסר משמעות כי אין מספר שהריבוע שלו שלילי.

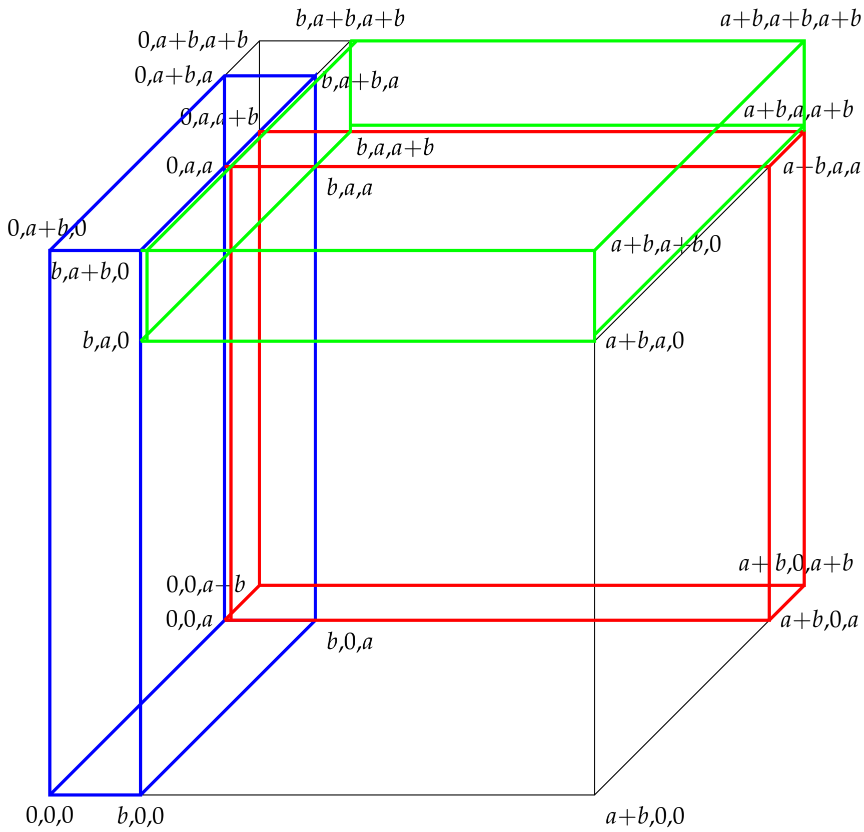
הבנה של השורשים של מספרים שליליים, שעד היום מכנים אותם מספרים **דמיוניים (imaginary)** למרות שהם לא פחות ממשיים ממספרים ממשיים, לא הושגה עד המאה ה-19. לכן מפתיע שכבר במאה ה-16, קרדאנו ובומבלי (Rafael Bombelli) סירבו להירתע מהמושג ועשו את הצעדים הקטנים הראשונים לקראת הבנה של המספרים הללו.

נוכל להשתמש בנוסחה הרגילה (משוואה 7.1) עבור המשוואה הריבועית:

$$x^2 - 10x + 40 = 0\,, \tag{7.5}$$

ונקבל:

$$r_1, r_2 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 160}}{2} = 5 \pm \sqrt{-15}\,.$$



איור 7.5: $(a^3 + b^3) = \cdots + 3ab(a+b)$

אומנם אין אנו יודעים מהם השורשים של מספרים שליליים ולא את ערכם, אבל כמו קרדאנו אנו יודעים לפי משפט 7.1:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= (5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) = 10 = -b \\ r_1 r_2 &= (5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = \\ &= 25 - \sqrt{-15} \cdot \sqrt{-15} = 25 - (-15) = 40 = c \,. \end{aligned}$$

שהם מקדמי משוואה הריבועית 7.5. די אינטואיטיבי ש-0 $\sqrt{-15} + (-\sqrt{-15}) = 0$ גם אם אין אנו יודעים מאומה על $\sqrt{-15}$, ודי אינטואיטיבי ש-15 $\sqrt{-15} \cdot -(\sqrt{-15}) = -(-15) = 15$ גם אם אין אנו יודעים מאומה על $\sqrt{-15}$.

נעיין במשוואה ממעלה שלישית:

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \,. \tag{7.6}$$

די ברור ש-4 הוא שורש, אבל איך אפשר לחשב אותו? לפי הנוסחה של קרדאנו השורש הוא:

$$r = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \,, \tag{7.7}$$

אבל זאת נוסחה די סבוכה שלא נראה שיש קשר בינה ובין 4.

בומבלי גילה אומץ לב וחישב את החישוב שלהלן (ראו משוואה 7.4):

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{-1})^3 &= 8+3\cdot 4\sqrt{-1}+3\cdot 2(-1)+(-1\sqrt{-1}) = 2+11\sqrt{-1}\\ (2-\sqrt{-1})^3 &= 8-3\cdot 4\sqrt{-1}+3\cdot 2(-1)-(-1\sqrt{-1}) = 2-11\sqrt{-1}\,,\end{aligned}$$

ולפי משוואה 7.7:

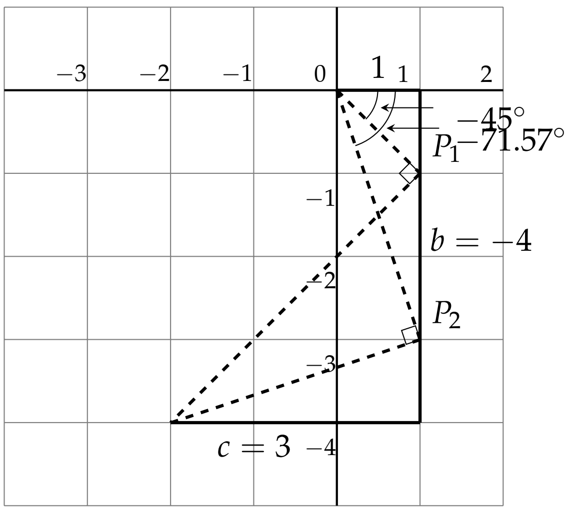
$$\begin{aligned}r &= \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}\\ &= \sqrt[3]{(2+\sqrt{-1})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{-1})^3}\\ &= (2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1}) = 4\,.\end{aligned}$$

7.8 השיטה של ליל (Lill) והמעגל של קרלייל (Carlyle)

ניתן להשתמש בשיטה של ליל Lill כדי לפתור משוואות ריבועיות.[2] נדגים את השיטה על משוואה 7.2 ששורשיה מתקבלים על ידי פירוק לגורמים:

$$x^2+bx+c = x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)\,.$$

מהשיטה של ליל נקבל את המסלולים באיור 7.6.

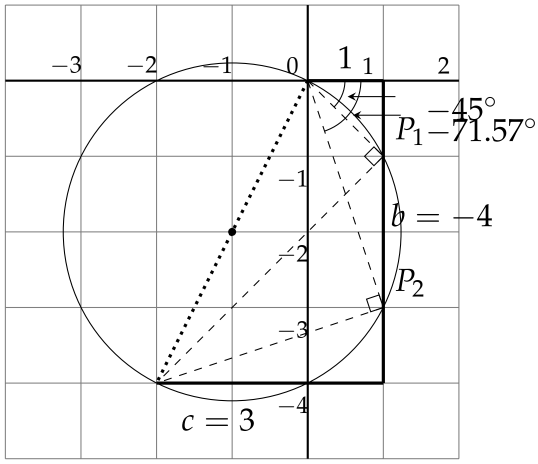


איור 7.6: השיטה של ליל עבור x^2-4x+3

נבדוק שהזוויות נכונות:

$$-\tan(-45^\circ) = -1, \quad -\tan(-71.57^\circ) \approx -3\,.$$

[2] סעיף זה מניח שקראתם על השיטה של ליל בפרק 11.



איור 7.7 : בניית מעגל למציאת השורשים

עבור משוואות ריבועיות ניתן למצוא P_1, P_2 שהן נקודות החיתוך של הקטע המייצג את המקדם b והמעגל שקוטרו הוא הקטע המחבר את נקודת ההתחלה ואת נקודת הסיום של המסלולים (איור 7.7). כדי שנקודה על הקטע b תהיה שורש, השיקוף של הקטע צריך להיות $90°$ ולכן הזווית כלואה על ידי קוטר. ניתן לבדוק באמצעות חישוב. מרכז המעגל הוא $(-1, -2)$, נקודת אמצע הקוטר. אורך הקוטר הוא :

$$\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}\,,$$

ולכן ריבוע הרדיוס הוא $\left(\sqrt{20/2}\right)^2 = 5$. החיתוך של מעגל זה עם הישר $x = 1$ הוא :

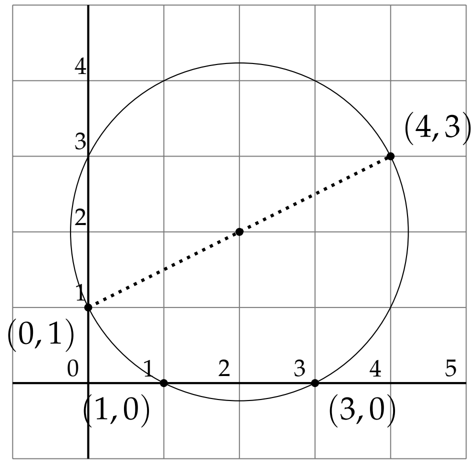
$$\begin{aligned}
(x - (-1))^2 + (y - (-2))^2 &= 5^2\\
(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) &= 5\\
y^2 + 4y + 3 &= 0\\
y &= -1,\ -3\,.
\end{aligned}$$

שיטה דומה לפתרון משוואות ריבועיות היא מעגלי קרלייל (Carlyle) שקודמת לשיטה של ליל. נתונה משוואה ריבועית $x^2 - bx + c$ (שימו לב לסימן המינוס של הגורם הליניארי), נבנה את הנקודות $(0, 1)$ ו-(b, c), ואת המעגל שקוטרו הוא הקטע המחבר את שתי הנקודות (איור 7.8). נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-x (אם הן קיימות) הן שורשי המשוואה.

במקרה הכללי מרכז המעגל הוא $(b/2, (c - (-1))/2)$ ואורך הקוטר הוא $\sqrt{b^2 + (c-1)^2}$, כך שמשוואת המעגל היא :

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + (c-1)^2}{4}\,.$$

למשל, אם נציב $b = 4, c = 3, y = 0$, נראה ש-$x = 3$, $x = 1$ הם שורשי המשוואה הריבועית.



איור 7.8 : השיטה של קרלייל עבור $x^2 - 4x + 3$

7.9 חישוב נומרי של שורשים

סטודנטים לומדים חישוב סימבולי של שורשים, נגזרות וכו׳. כיום מתבצעים רוב החישובים על ידי מחשבים, כך שחישוב סימבולי פחות חשוב. **אנליזה נומרית** היא תחום במתמטיקה ומדעי המחשב שבו מפתחים שיטות חישוב מדויקות ויעילות. האתגר המרכזי הוא לטפל בסופיות של ערכים הנשמרים בזיכרון של המחשב. קל לבצע את החישוב :

$$0.12 \times 0.14 = 0.0168$$

אבל כדי לחשב :

$$0.123456789 \times 0.123456789$$

המחשב חייב לשמור 18 ספרות, דרישה שאי אפשר למלא אם תאי הזיכרון במחשב מסוגלים לשמור 16 ספרות בלבד. שגיאה זו נקראת **שגיאת עיגול (round-off error)**.

בעיה חמורה יותר מופיעה כאשר החישובים מבוצעים ב**נקודה צפה (floating point)**. ברור שלא נחשב את

$$(0.12 \times 10^{-10}) \times (0.14 \times 10^{-8})$$

על ידי רישום כל ספרות האפס. במקום זה, נכפיל את המנטיסות (mantissas) ונחבר את המעריכים (exponents) כדי לקבל 0.0168×10^{-18} שעוברת נרמול ל-0.168×10^{-19} כך שספרת הערך (most significant) תופיע ליד הנקודה העשרונית. זה מאפשר להשתמש במספר הספרות המירבי בהינתן מנטיסה באורך קבוע. אם המעריך הגבוה ביותר שניתן לשמור הוא -16 פשוט לא ניתן לייצג את המספר בזיכרון. שגיאה זו נקראת **חמיקה של נקודה צפה (floating-point underflow)**.

הנוסחה למציאת השורשים של המשוואה הריבועית $x^2 + bx + c$ היא :

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \tag{7.8}$$

מה קורה אם $b = 1000$ ו-$c = 4$. השורשים הם:

$$r_1, r_2 = \frac{-1000 \pm \sqrt{1000000 - 16}}{2}\,.$$

בתלות בדיוק של החישובים, ייתכן שאחד השורשים קרוב כל כך לאפס, שהערך שנשמר הוא אפס. אם נציב אפס במשוואה נקבל את התוצאה המפתיעה $0^2 + b \cdot 0 + 4 = 4 = 0$.

האם יש שיטה טובה יותר? לפי משוואה 7.3:

$$r_1 + r_2 = -b\,, \qquad r_1 r_2 = c\,.$$

אם r_2 ממש קטן יותר מ-r_1, נסמן $r_1 \ll r_2$, אז $r_1 \approx -b$ ו-$r_2 \approx -c/b$. טבלה 7.1, שחושבה באמצעות תוכנית מחשב, משווה את ערכי השורשים המחושבים לפי נוסחאות אלו לערכים המתקבלים מהנוסחה הרגילה, משוואה 7.8. הערך של c נקבע ל-4 והטבלה מראה את השורשים עבור ערכים הולכים וגדלים של b.

בהתחלה, הערכים האמיתיים שחושבו באמצעות הנוסחה הרגילה עבור r_2 מדויקים יותר ($r_2 - r_{2v}$ שלילי) אבל החל מ-$b = 100000$ החישוב המבוסס על משוואה 7.3 מדויק יותר. כאלו הן ההפתעות של אנליזה נומרית.

טבלה 7.1: שני חישובים של השורשים של משוואה ריבועית. r_1, r_2 הם השורשים שחושבו לפי משוואה 7.8. r_{1v}, r_{2v} הם השורשים שחושבו לפי משוואה 7.3. השגיאות הן $r_i - r_{iv}$. מספרים בנקודה צפה נכתבו כ-$-4e-5$ במקום 4×10^{-5} כי תוכניות מחשב נכתבות לרוב כסדרה ליניארית של סימנים.

b	r_1	r_{1v}	שגיאה$_1$	r_2	r_{2v}	שגיאה$_2$
100	-99.9599	-100	0.0400	-0.04001	-0.04	$-1.6012e-05$
1000	-999.9959	-1000	0.0040	-0.0040	-0.004	$-1.6000e-08$
10000	-9999.9996	-10000	0.0004	-0.0004	-0.0004	$-1.6270e-11$
100000	-99999.9999	-100000	$3.9999e-5$	$-3.9999e-5$	$-4e-5$	$1.0104e-12$
1000000	-999999.9999	-1000000	$4.0000e-6$	$-3.9999e-6$	$-4e-6$	$2.7749e-11$
10000000	-10000000.0	-10000000	$3.9860e-7$	$-3.9953e-7$	$-4e-7$	$4.6261e-10$

מה ההפתעה?

השיטה של פו-שן לו מספקת נקודת מבט חדשה על היחס בין המקדמים לשורשים שאינה נראית כאשר לומדים בעל פה את הנוסחה הרגילה. מה שמפתיע הוא שיחס זה עקרוני בהוכחה האלגברית של גאוס שניתן לבנות מצולע משוכלל בעל 17 צלעות (פרק 16).

עם השליטה המודרנית של שיטות אלגבריות בגיאומטריה, חשוב לזכור שהמצב היה הפוך. כפי שרואים מהבניות של אל-חוואריזמי וקארדנו השיטות הגיאומטריות שימשו בעבר להוכחת תוצאות באלגברה. ליל וקרלייל פיתחו שיטות גיאומטריות לפתרון משוואות ריבועיות. שיקולים של חישובים נומריים יפתיעו סטודנטים שלא נחשפו קודם לנושא.

מקורות

השיטה של פו-שן לו פורסמה ב-[28, 29]. הבנייה של אל-ח'וואריזמי מופיעה ב-[6, פרק 1] וב-[32]. ניתן למצוא את הבנייה של קרדאנו ב-[6, פרק 1]. ההיסטוריה הצבעונית של פיתוח הנוסחה של קרדאנו מסופרת ב-[52]. תיאור הניסיונות הראשונים לחישוב עם מספרים דמיוניים נלקח מ-[6, פרק 2]. [61] מציג את השיטה של ליל ואת המעגל של קרלייל ביחד עם דיון על חישוב נומרי של השורשים.

פרק 8

תורת רמזי

תורת רמזי (Ramsey) היא תחום בקומבינטוריקה ששואל שאלות מהצורה: מה הגודל המינימלי של קבוצה, כך שאם מחלקים אותה לתת-קבוצות, לפחות לתת-קבוצה אחת תהיה תכונה מסוימת? קשה להוכיח תוצאות בתורת רמזי וישנן בעיות פתוחות רבות. בפרק זה נציג מקרים קלים של ארבע בעיות כדי לספק טעימה של תחום מרתק זה: שלשות שור (Schur triples) (סעיף 8.1) שהן שלשות של מספרים שלמים כך ש-$a+b=c$, שלשות פיתגוריות (סעיף 8.2) שהן שלשות של מספרים שלמים כך ש-$a^2+b^2=c^2$, הבעיה של ואן דר וארדן (van der Waarden) (סעיף 8.3) על תכונות של סדרות של מספרים, ותורת רמזי (סעיף 8.4) על צביעת גרפים. סעיף 8.5 מראה איך ניתן להשתמש בשיטה הסתברותית כדי למצוא חסם תחתון למספרי רמזי.

הבעיה של שלשות פיתגוריות נפתרה לאחרונה בעזרת מחשבים תוך שימוש בשיטה חדשה יחסית הנקראת SAT solving. עבור קוראים המכירים תחשיב פסוקים בלוגיקה, סעיף 8.6 מספק מבט קצר על השיטה.

סעיף 8.7 מתאר שלשות פיתגוריות כפי שהבבלים הכירו אותן לפני כארבעת אלפים שנה.

8.1 שלשות שור

הגדרה 8.1 נתונה חלוקה שרירותית של קבוצת המספרים השלמים:

$$S(n)=\{1,\ldots,n\}$$

לשתי תת-קבוצות זרות S_1, S_2, האם קיימות $\{a,b,c\}\subseteq S_1$ או $\{a,b,c\}\subseteq S_2$ (או שתיהן) כך ש-$a<b<c$ ו-$a+b=c$? אם כן, הקבוצה $\{a,b,c\}$ נקראת **שלשת שור**.

דוגמה 8.1 עבור $n=8$, בחלוקה:

$$S_1=\{1,2,3,4\},\ S_2=\{5,6,7,8\}\,, \tag{8.1}$$

הקבוצה S_1 מכילה את שלשת שור $\{1,2,3\}$. אולם החלוקה:

$$S_1'=\{1,2,4,8\},\ S_2'=\{3,5,6,7\}\,, \tag{8.2}$$

אינה מכילה שלשת שור כפי שניתן לראות על ידי בדיקת כל השלשות בכל תת-קבוצה.

משפט 8.1 בכל חלוקה של $S(9) = \{1, \ldots, 9\}$ לשתי תת-קבוצות זרות, לפחות תת-קבוצה אחת מכילה שלשת שור.

הוכחה ניתן להוכיח את המשפט על ידי בדיקת כל החלוקות של $S(9)$ לשתי תת-קבוצות זרות. אולם מספר תת-הקבוצות הוא $2^9 = 512$ ולכן נמצא הוכחה תמציתית יותר.

ננסה לבנות חלוקה **שאינה** מכילה שלשת שור ונראה שבגלל אילוצי הבעיה הדבר בלתי אפשרי. תחילה נשים את 1 ואת 3 ב-S_1. 2 חייב להיות ב-S_2 כי $3 = 2 + 1$ ואנחנו מנסים לבנות חלוקה שאינה מכילה שלשת שור. באופן דומה, 4 חייב להיות ב-S_2 כי $4 = 3 + 1$. נמשיך ונשים את 6 ב-S_1 כי $6 = 4 + 2$ ואת 7 ב-S_2 כי $7 = 6 + 1$. אבל $9 = 6 + 3$ ו-$9 = 7 + 2$, ולכן 9 חייב להופיע גם ב-S_1 וגם ב-S_2, סתירה. סדרת ההסקות הללו מוצגת בטבלה שלהלן:

S_1	S_2
$1, 3$	
$1, 3$	2
$1, 3$	$2, 4$
$1, 3, 6$	$2, 4$
$1, 3, 6$	$2, 4, 7$
$1, 3, 6, 9$	$2, 4, 7$
$1, 3, 6, 9$	$2, 4, 7, 9$

נחזור לאחור ונחפש חלוקה עם $1, 3$ בתת-קבוצות שונות. אם נשים עכשיו את 5 ב-S_2, סדרת הסקות שוב מובילה לסתירה כי 9 חייב להופיע בשתי תתי-הקבוצות. מומלץ לקורא להצדיק כל אחת מההסקות בטבלה שלהלן. למשל, בשורה לפני האחרונה, אמנם חייב ש-9 היה ב-S_2 כי $1, 8$ ב-S_1, אבל 9 חייב להיות ב-S_1 כי $3, 6$ ב-S_2.

S_1	S_2
1	3
1	$3, 5$
$1, 2$	$3, 5$
$1, 2, 8$	$3, 5$
$1, 2, 8$	$3, 5, 7$
$1, 2, 8$	$3, 5, 7, 9$
$1, 2, 8$	$3, 5, 6, 7, 9$
$1, 2, 8, 9$	$3, 5, 6, 7, 9$

שוב נחזור לאחור ונשים את 5 ב-S_1, אבל גם זה מוביל לסתירה כפי שאפשר לראות בטבלה שלהלן:

S_1	S_2
1	3
1, 5	3
1, 5	3, 4
1, 5	3, 4, 6
1, 2, 5	3, 4, 6
1, 2, 5	3, 4, 6, 7
1, 2, 5, 7	3, 4, 6, 7

מכאן שאין חלוקה שאינה מכילה שלשת שור. $\square$

ישי שור הוכיח את המשפט:

משפט 8.2 (Schur) לכל $k \geq 2$ קיים n קטן ביותר, כך שבכל חלוקה של $S(n)$ ל-k תת-קבוצות זרות, לפחות תת-קבוצה אחת מכילה שלשת שור.

8.2 שלשות פיתגוריות

הגדרה 8.2 נתונה חלקה שרירותית של קבוצת המספרים השלמים:

$$S(n) = \{1, \ldots, n\}$$

לשתי תתי-קבוצות זרות S_1, S_2, האם קיימים $\{a, b, c\} \subseteq S_1$ או $\{a, b, c\} \subseteq S_2$ (או שתיהן) כך ש-$a < b < c$ ו-$a^2 + b^2 = c^2$? אם כן, הקבוצה $\{a, b, c\}$ נקראת **שלשה פיתגורית**.

דוגמה 8.2 עבור $n = 10$, בחלוקה למספרים זוגיים ואי-זוגיים:

$$S_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\},\ S_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$

אין שלשה פיתגורית ב-S_1 אבל $\{6, 8, 10\}$ ב-S_2 היא שלשה פיתגורית כי $6^2 + 8^2 = 10^2$.

מרין היולה (Marijn J.H. Heule) ואוליבר קולמן Kullmann Oliver הוכיחו את המשפטים שלהלן. שיטת ההוכחה מתוארת בסעיף 8.6.

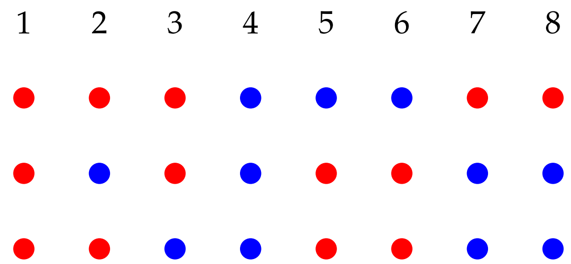
משפט 8.3 לכל $n \leq 7824$ **קיימת** חלוקה של $S(n)$ לשתי תתי-קבוצות זרות כך שאין שלשה פיתגורית באף אחת משתי הקבוצות.

משפט 8.4 לכל $n \geq 7825$ **בכל** חלוקה של $S(n)$ לשתי תתי-קבוצות זרות לפחות תת-קבוצה אחת מכילה שלשה פיתגורית.

אין כל אפשרות לבדוק את כל 2^{7825} החלוקות של $S(7825)$. לו יכולנו לבדוק חלוקה אחת בכל מיקרו-שנייה, שנים $2^{7825} \approx 10^{600}$ מיקרו-שניות, בעוד הגיל המשוערך של היקום הוא רק 10^{10} שנים.

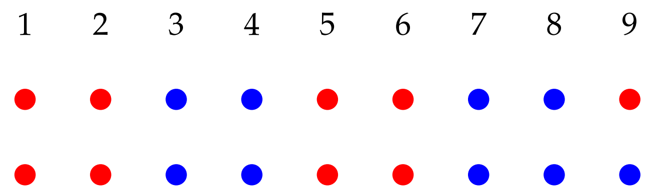
8.3 הבעיה של ואן דר וארדן

נעיין בסדרות של שמונה נקודות צבעוניות באיור 8.1. בסדרה הראשונה נקודות אדומות נמצאות במקומות $(1,2,3)$ ונקודות כחולות במקומות $(4,5,6)$. בשתיהן המקומות מהווים סדרה חשבונית. באופן דומה, בסדרה השנייה המקומות של הנקודות האדומות $(1,3,5)$ מהווים סדרה חשבונית. לעומת זאת, בסדרה השלישית אין קבוצה של שלוש נקודות חד-גוניות שמקומותיהן מהווים סדרה חשבונית. השלשות של המקומות של נקודות אדומות $(1,2,5)$, $(1,2,6)$, $(2,5,6)$ אינן סדרות חשבוניות וכנ״ל לגבי הנקודות הכחולות.



איור 8.1: בעיית ואן דר וארדן עבור שמונה נקודות

עבור תשע נקודות **כל** צביעה **חייבת** להכיל סדרה של שלוש נקודות חד-גוניות שמקומותיהן מהווים סדרה חשבונית. למשל, נוסיף נקודה אדומה או נקודה כחולה בסוף הסדרה השלישית באיור 8.1 ונקבל את הסדרות בסעיף 8.2. בסדרה הראשונה יש נקודות אדומות במקומות $(1,5,9)$ שהיא סדרה חשבונית, ובסדרה השנייה יש נקודות כחולות במקומות $(7,8,9)$ שגם היא סדרה חשבוניות. ואן דר וארדן הציג את הבעיה: לכל מספר שלם חיובי k, מה המספר הקטן ביותר n כך **שכל** סדרה

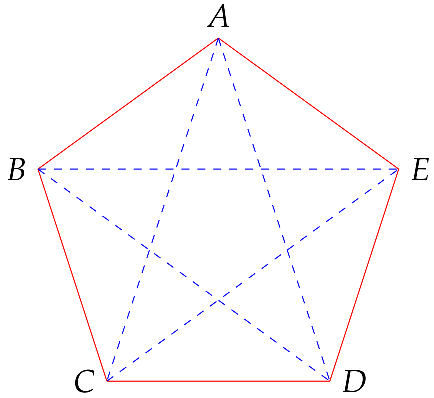


איור 8.2: בעיית ואן דר וארדן עבור תשע נקודות

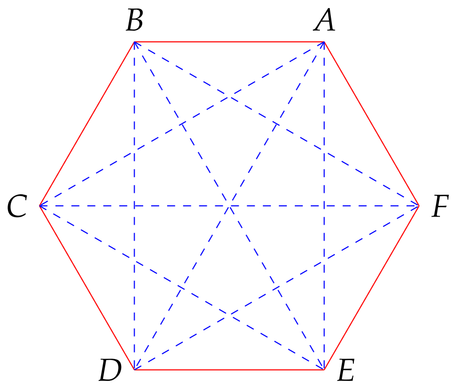
של n נקודות צבעוניות **חייבת להכיל** סדרה של k נקודות חד-גוניות שמקומותיהן מהווים סדרה חשבונית? עבור $k=3$ ראינו ש-$n=9$. הוכחת התוצאה הבאה היא קשה הרבה יותר: עבור $k=4$, $n=35$.

8.4 משפט רמזי

נצבע בשני צבעים את הקשתות של K_5, הגרף השלם בעל 5 צמתים (איור 8.3.א). אין תת-גרפים חד-גוניים K_3 (משולשים) בגרף. איור 8.3.ב מציג צביעה אחת של K_6 וניתן לראות שיש משולשים חד-גוניים $\triangle ACE$ ו-$\triangle BDF$. בסעיף זה נוכיח מקרה פשוט של משפט רמזי על קיומן של תת-קבוצות עם תכונה מסוימת.



8.3.א צביעה של K_5 בשני צבעים



8.3.ב צביעה של K_6 בשני צבעים

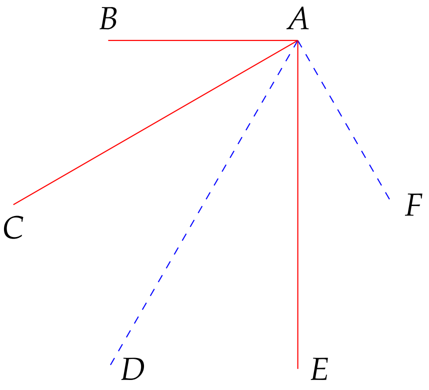
הגדרה 8.3 $R(k)$, **מספר רמזי** עבור k, הוא המספר שלם הקטן ביותר n, כך **שבכל** צביעה בשני צבעים של K_n, הגרף השלם מעל n צמתים, קיים תת-גרף שלם K_k שהוא חד-גוני.

משפט 8.5 (Ramsey) $R(3) = 6$.

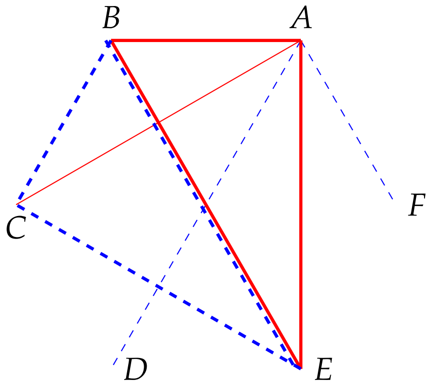
הוכחה 8.3.א מראה ש-$R(3) > 5$. כדי להראות ש-$R(3) \leq 6$ ניקח צומת שרירותי v ב-K_6. v מחובר לחמשת הצמתים האחרים, וכאשר הקשתות צבועות בשני צבעים, לפחות שלוש קשתות חד-גוניות יהיו מחוברות ל-v.

באיור 8.4.א, $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AE}$ צבועות באדום. הגרף שלם ולכן כל הצמתים מחוברים, כך שאם אחת מהקשתות $\overline{BC}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$ צבועה באדום, נניח $\overline{BE}$, נוצרמשולש אדום. אחרת, כל שלוש הקשתות צבועות בכחול והן יוצרות משולש כחול (איור 8.4.ב). □

ניתן להכליל את המשפט לכל מספר של צבעים וכן לתת-גרפים שאינם בגודל אחיד. $R(r, b, g)$ הוא הגרף השלם הקטן ביותר כך שבכל צביעה בשלושה צבעים חייבים להיות תת-גרפים שלמים עם r קשתות אדומות, b כחולות ו-g ירוקות.



א.8.4 צומת אחד של K_6



ב.8.4 משולשים חד-גוניים ב-K_6

8.5 השיטה ההסתברותית

רק שני מספרי רמזי לא טריוויאליים ידועים: $R(3)=6$ ו-$R(4)=18$. בשנת 1947, פיתח פאול ארדש (Paul Erdős) את **השיטה ההסתברותית** והשתמש בה כדי להראות חסמים עליונים ותחתונים עבור $R(k)$. מחקרים נוספים שיפרו את החסמים, אבל נושא זה עדיין פתוח כי החסמים אינם הדוקים. למשל, הוכח ש-$43 \leq R(5) \leq 48$ ו-$798 \leq R(10) \leq 23556$. בסעיף זה נשתמש בהסתברות פשוטה כדי להוכיח חסם תחתון עבור $R(k)$.

כדי להראות שקיים איבר בקבוצה S בעל תכונה A, מספיק להוכיח שההסתברות שאיבר **אקראי** הוא בעל התכונה הזו A גדולה מאפס. חשוב להבין שהשיטה אינה בונה איבר בעל התכונה. היא רק מוכיחה שקיים איבר העונה על הדרישה. למרות שידוע לנו ממשפט 8.5 ש-$R(3)=6$, נשתמש בשיטה ההסתברותית כדי להוכיח חסם תחתון עבור $R(3)$.

משפט 8.6 (Erdős) $R(3)>4$.

הוכחה נתונה צביעה אקראית של K_n בשני צבעים. נתבונן בתת-גרף שרירותי K_3, כלומר, משולש שרירותי עם $\binom{3}{2}=3$ צלעות. ההסתברות שכל הקשתות צבועות באדום היא 2^{-3} כמו גם ההסתברות שכל הקשתות צבועות בכחול. לכן ההסתברות שהמשולש הוא חד-גוני היא $2^{-3}+2^{-3}=2^{-2}=1/4$. מספר המשולשים ב-K_n הוא $\binom{n}{3}$, ולכן, $P(n,3)$, ההסתברות שקיים משולש חד-גוני בצביעה אקראית של K_n, היא:

$$P(n,3)=\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{4}\,.$$

אם $P(n,3)<1$ אזי המשלים שלה $\overline{P}(n,3)=1-P$ גדול מ-0, כלומר, ההסתברות שצביעה אקראית של K_n **לא מכילה** משולש חד-גוני גדולה מאפס, וצביעה אחת כזאת חייבת להתקיים.

הטבלה שלהלן מראה $\overline{P}(n,3)$ עבור מספר ערכים של n, ולכל אחד האם הערך של $\overline{P}(n,3)$ מוכיח שקיימת צביעה ללא משולש חד-גוני:

n	$\overline{P}(n,3)$	קיימת
3	$3/4$	כן
4	$5/6$	כן
5	$-3/7$	--

□

במבט ראשון התוצאה מוזרה כי איור 8.3.א מראה שיש צביעה של K_5 ללא משולש חד-גוני. אולם, הקריטריון ההסתברותי הוא מספיק ולא הכרחי. מדובר בחסם תחתון שמוכיח ש-$R(n) > 4$, טענה נכונה כי ראינו במשפט 8.5 ש-$R(n) = 6$.

אותה הוכחה תקפה עבור k שרירותי ולכן ההסתברות שקיימת צביעה של K_n ללא גרף שלם K_k חד-גוני היא:

$$P(n,k) = \binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}.$$

עבור $k = 4$:

$$\begin{aligned}
\overline{P}(n,4) &= 1 - \binom{n}{4} \cdot 2^{-5} = \left(32 - \binom{n}{4}\right) \Big/ 32 \\
\overline{P}(6,4) &= (32 - 15)/32 = 17/32 \\
\overline{P}(7,4) &= (32 - 35)/32 = -3/32\,.
\end{aligned}$$

מכאן ש-$R(4) > 6$ שהוא קטן הרבה יותר מהערך הידוע $R(4) = 18$.

8.6 SAT Solving

SAT Solving היא שיטה לפתרון בעיות על ידי קידוד הבעיה כנוסחה בלוגיקה (תחשיב פסוקים) ואז משתמשים בתוכנית מחשב כדי לבדוק את ערך האמת של הנוסחה. התקדמות באלגוריתמים ובמימושם מאפשרת פתרונות מעשיים למגוון בעיות. נביא סקירה של SAT Solving ונסביר איך להשתמש בה כדי לפתור את הבעיות המתמטיות שתיארנו בפרק זה. אנו מניחים שלקורא ידע בסיסי בתחשיב פסוקים כפי שמוצג בהגדרה 8.4.

8.6.1 תחשיב פסוקים ובעיית SAT

הגדרה 8.4

- **נוסחה** *(formula)* מורכבת מ-**נוסחאות אטומיות** *(atomic formula)* או **אטומים** *(atom)*.
- הנוסחאות מחוברת ב**אופרטורים** *(operators)*: $\vee$ (*disjunction*, "או"), $\wedge$ (*conjunction*, "וגם"), $\neg$ (*negation*, "לא").
- נוסחה מקבלת משמעות על ידי **פירוש** *(interperation)* שהוא השמה של T או F לכל אטום. חישוב נוסחה בפירוש נותן **ערך אמת** *(truth value)* T או F.
- נוסחה היא **ספיקה** *(satisfiable)* אם ורק אם קיים פירוש שבו ערך האמת שלה הוא T. אחרת, הנוסחה היא **בלתי ספיקה** *(unsatisfiable)*.
- נוסחה היא בצורת *CNF* (*conjunctive normal form*) אם ורק אם היא מורכת מתת-נוסחאות המחוברות ב-"וגם", כאשר כל תת-נוסחה מורכבת מ-"ליטרלים" (אטומים או שלילה של אטומים) מחוברים ב-"או".

הנוסחה הבאה היא בצורת CNF:

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \;\wedge\; (\neg p \vee r) \;\wedge\; (\neg r) \;\wedge\; (p \vee q \vee \neg r).$$

בעיית SAT היא להכריע אם נוסחה נתונה ב-CNF ספיקה או לא. SAT solver היא תוכנית מחשב לפתרון בעיות CNF. רוב תוכניות ה-SAT solver מבוססות על אלגוריתם DPLL שפותח כבר בשנות השישים של המאה ה-20 אבל התפתחויות מודרניות הביאו לשיפורים משמעותיים מאוד באלגוריתם. בעקבות פיתוח מימושים יעילים של האלגוריתמים הללו SAT solver הפכו להיות כלים חשובים לפתרון בעיות בשטחים רבים כולל במתמטיקה.

8.6.2 שלשות שור

נקדד את בעיית שלשות שור עבור $S(8)$ כנוסחה ב-CNF. הנוסחה תהיה ספיקה אם ורק אם קיימת חלוקה של S לשתי תתי-קבוצות זרות S_1, S_2 כך שלא S_1 ולא S_2 מכילות שלשת שור.

יש אטום p_i עבור כל אחד מהמספרים $1 \leq i \leq 8$. המשמעות של פירוש לנוסחה היא שהפירוש מציב T ל-p_i אם i נמצא בתת-קבוצה הראשונה S_1, והפירוש מציב F ב-p_i אם i נמצא בתת-קבוצה השנייה S_2. כדי לראות שבכל חלוקה אף אחת מתת-הקבוצות אינה מכילה שלשת שור. הפירוש חייב להבטיח **שלכל** שלשת שור אפשרית לפחות באטום אחד מוצב T ובאטום אחד מוצב F.

למשל, $\{2,4,6\}$ היא שלשת שור ולכן לפחות מספר אחד חייב להיות ב-S_1 ולפחות אחד ב-S_2. מכאן ש-$p_2 \vee p_4 \vee p_6$ חייב להיות אמת כמו גם $\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6$. קיימות 12 שלשות שור אפשריות

ולכן נוסחת ה-CNF היא:

$$\begin{aligned}
&(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \;\wedge\; (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \;\wedge \\
&(p_1 \vee p_3 \vee p_4) \;\wedge\; (\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \;\wedge \\
&(p_1 \vee p_4 \vee p_5) \;\wedge\; (\neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5) \;\wedge \\
&(p_1 \vee p_5 \vee p_6) \;\wedge\; (\neg p_1 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6) \;\wedge \\
&(p_1 \vee p_6 \vee p_7) \;\wedge\; (\neg p_1 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7) \;\wedge \\
&(p_1 \vee p_7 \vee p_8) \;\wedge\; (\neg p_1 \vee \neg p_7 \vee \neg p_8) \;\wedge \\
&(p_2 \vee p_3 \vee p_5) \;\wedge\; (\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5) \;\wedge \\
&(p_2 \vee p_4 \vee p_6) \;\wedge\; (\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6) \;\wedge \\
&(p_2 \vee p_5 \vee p_7) \;\wedge\; (\neg p_2 \vee \neg p_5 \vee \neg p_7) \;\wedge \\
&(p_2 \vee p_6 \vee p_8) \;\wedge\; (\neg p_2 \vee \neg p_6 \vee \neg p_8) \;\wedge \\
&(p_3 \vee p_4 \vee p_7) \;\wedge\; (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_7) \;\wedge \\
&(p_3 \vee p_5 \vee p_8) \;\wedge\; (\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8)\,.
\end{aligned} \tag{8.3}$$

כאשר מפעילים SAT solver על נוסחה זו, הוא עונה שהנוסחה ספיקה בשני הפירושים הבאים:

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
F	F	T	F	T	T	T	F
T	T	F	T	F	F	F	T

פירוש אחד הוא עבור החלוקה במשוואה 8.2: $S_1 = \{1,2,4,8\}$, $S_2 = \{3,5,6,7\}$, והפירוש השני הוא עבור החלוקה הסימטרית $S_1 = \{3,5,6,7\}$, $S_2 = \{1,2,4,8\}$.

עבור $S(9)$ יש לצרף ארבע תת-נוסחות עבור השלשות האפשריות הנוספות:

$$\begin{aligned}
&(p_1 \vee p_8 \vee p_9) \;\wedge\; (\neg p_1 \vee \neg p_8 \vee \neg p_9) \;\wedge \\
&(p_2 \vee p_7 \vee p_9) \;\wedge\; (\neg p_2 \vee \neg p_7 \vee \neg p_9) \;\wedge \\
&(p_3 \vee p_6 \vee p_9) \;\wedge\; (\neg p_3 \vee \neg p_6 \vee \neg p_9) \;\wedge \\
&(p_4 \vee p_5 \vee p_9) \;\wedge\; (\neg p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_9)\,.
\end{aligned}$$

כאשר מפעילים SAT solver על נוסחה זו, הוא עונה שהנוסחה בלתי ספיקה, כלומר, **שאין** חלוקה שבה **אין** שלשת שור. כאשר נוותר על השלילה הכפולה נקבל את התוצאה שבכל חלוקה של $S(9)$ קיימת שלשת שור.

8.6.3 שלשות פיתגוריות

היולה וקולמן פתרו את בעיית השלשות הפיתגוריות על ידי שימוש ב-SAT solver יעיל במיוחד. קיים הבדל מהותי ביעילות כאשר מחפשים חלוקה שאין בה שלשה פיתגורית (דרושה חלוקה אחת בלבד) לעומת הוכחה שבכל חלוקה אכן קיימת שלשה פיתגורית (יש לבדוק את כולן). כדי להראות שעבור כל $S(n)$, $1 \leq n \leq 7824$, קיימת חלוקה ללא שלשה, נדרשת רק דקה אחת של זמן חישוב, לעומת ההוכחה שבכל חלוקה של $S(7825)$ קיימת שלשה שאורכת כיומיים של חישוב עבור מחשב עם 800 ליבות (יחידות חישוב) שעובדות במקביל, סך הכול $40,000$ שעות חישוב.

השימוש במחשבים במתמטיקה מעלה את השאלה: האם אפשר לסמוך על הוכחה שנוצרה על ידי מחשב? גם הוכחות "רגילות" עלולות להיות מוטעות (סעיף 4.7), אבל הניסיון שלנו עם "באגים" שכיחים בחישובים, ביחד עם חוסר השקיפות של תוכניות גדולות, גורמים לנו להיות רגישים יותר לטעויות אפשריות בהוכחות שנוצרו על ידי מחשב.

גישה אחת להעלאת הביטחון בנכונות של הוכחה שנוצרה על ידי מחשב היא לכתוב שתי תוכניות או יותר בלתי תלויות, ולהקפיד שהן נכתבו על ידי חוקרים שונים, בשפות תכנות שונות ועבור מחשבים שונים ומערכות הפעלה שונות. זה מקטין את הסיכוי לבאג בחומרה או בתוכנה.

ה-SAT solver של היולה וקולמן תיעד את שלבי ההוכחה כדי שניתן לבדוק את הנכונות שלו. גודל התיעוד היה כל כך עצום (200 טרה-בייט) עד שבני אדם אינם יכולים לבדוק אותו. כדי להשוות גודל זה למשהו מוכר, נציין ש-200 טרה-בייט הוא 200,000 גיגה-בייט, כאשר למחשב שלך יש זיכרון פנימי בסדר גודל של 16 גיגה-בייט ודיסק קשיח של 128 גיגה-בייט. החוקרים כתבו תוכנית קטנה לבדוק את נכונות הנתונים בתיעוד. כדי להבטיח את הנכונות של תוכנית זו, הם כתבו הוכחה פורמלית בעזרת סייען ההוכחות Coq, שתומך בעבודה של מתמטיקאית ובודק אותה, מבלי להפוך את פיתוח ההוכחה לאוטומטית לחלוטין.

8.6.4 מבט על אלגוריתם DPLL

האלגוריתם הראשון שלומדים עבור SAT solving הוא **טבלאות אמת**. נתונה נוסחה A עם n אטומים שונים בתחשיב הפסוקים, קיימים 2^n פירושים, כי בכל אטום ניתן להציב T או F באופן בלתי תלוי. עבור כל פירוש ניתן לחשב את ערך האמת של A מהגדרת האופרטורים. אולם, בדיקת 2^n פירושים היא מאוד לא יעילה גם עבור n לא גדולים במיוחד.

האלגוריתם DPLL עובד על ידי הצבה של T או F לכל אטום בזה אחר זה, ולאחר כל הצבה האלגוריתם מנסה לחשב את ערך האמת של הנוסחה. למשל, עבור הנוסחה $A = p \wedge q \wedge \neg r$, אם מציבים F ב-p אזי ערך האמת של A הוא F ללא קשר להצבות ב-q ו-r, ואין צורך בחישובים נוספים. באופן דומה אם מציבים F ב-r ניתן לחשב שערך האמת של $A = p \vee q \vee \neg r$ הוא T ללא קשר להצבות של q ו-r.

היעילות של DPLL נובעת מהפצת יחידות (unit propagation). נעיין בחלק מהנוסחה לשלשות שור:

$$\begin{aligned}
&(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge \\
&(p_1 \vee p_3 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge \\
&\cdots \\
&(p_3 \vee p_4 \vee p_7) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge \\
&(p_3 \vee p_5 \vee p_8) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8)\,.
\end{aligned} \tag{8.4}$$

נניח שהצבנו F ב-p_1, p_2. התת-נוסחה הראשונה מצטמצמת לנוחסה **יחידה (unit)** המורכבת מאטום בודד p_3. כדי שהנוסחה תהיה ספיקה אנו **חייבים** להציב T ב-p_3 ואז ערכי האמת של כל התת-נוסחאות שלהלן הם T:

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3),\ (p_1 \vee p_3 \vee p_4),\ (p_3 \vee p_4 \vee p_7),\ (p_3 \vee p_5 \vee p_8)\,.$$

מכיוון שערך האמת של $\neg p_3$ הוא F, כל תת-נוסחה המכילה $\neg p_3$ תהיה ספיקה רק אם ליטרל **אחר** בתת-נוסחה מקבל ערך אמת T. ב-$\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8$, חייבים להציב F או ב-p_5 או ב-p_8 כך שערך האמת של $\neg p_5$ או של $\neg p_8$ הוא T. מרגע שהצבנו את F ב-p_1, p_2, הנוסחה במשוואה 8.4 ספיקה אם ורק אם $(\neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_8)$ ספיקה. על ידי **הפצת propagation** של p_3 לכל התת-נוסחאות במשוואה 8.3, הנוסחה מצטמצמת ל:

$$\begin{aligned}
&(p_4 \vee p_5) \ \wedge\ (p_4 \vee p_6) \ \wedge\ (p_5 \vee p_6) \ \wedge\ (p_5 \vee p_7) \wedge \\
&(p_6 \vee p_7) \ \wedge\ (p_6 \vee p_8) \ \wedge\ (p_7 \vee p_8) \wedge \\
&(\neg p_4 \vee \neg p_7) \ \wedge\ (\neg p_5 \vee \neg p_8)\,.
\end{aligned}$$

הצבה אחת נוספת של F ב-p_4 מביאה לפירוש שבו הנוסחה ספיקה, ומצאנו את הפירוש לאחר שלוש הצבות בלבד.

8.7 שלשות פיתגוריות במתמטיקה בבלית

סעיף זה חורג מתורת רמזי והוא נכלל כדי לתת טעימה מהתיאוריה העשירה של שלשות פיתגוריות וכדי להדגים את עומק הידע המתמטי בעולם העתיק. שלשות פיתגוריות היו מוכרות במתמטיקה בבלית מאז לפחות 1800 לפני הספירה.

הגדרה 8.5 **שלשה פרמיטיבית** היא קבוצה של שלושה מספרים שלמים חיוביים $\{a, b, c\}$ כך ש-$a^2 + b^2 = c^2$ ול-a, b, c אין מחלק משותף גדול מ-1.

דוגמה $\{3, 4, 5\}$ היא שלשה פיתגורית פרימיטיבית אבל $\{6, 8, 10\}$ היא שלשה פיתגורית שאינה פרימיטיבית כי 2 הוא מחלק משותף.

לוח בכתב יתדות הנקרא Plimpton 322 הוא אחד מהממצאים הקדומים ביותר של מתמטיקה בבלית. על הלוח רשומות 15 שלשות פיתגוריות פרימיטיביות הנתנות על ידי הערכים של a ו-c. טבלה 8.1 מציגה ארבע שלשות ביחד עם הערך המחושב של b וערכים נוספים שנדון בהם בהמשך. היסטוריונים של המתמטיקה הציעו מספר דרכים להסביר איך הבבלים מצאו את השלשות. הסבר אחד מציע שהשתמשו בנוסחה של אוקלידס כדי למצוא את השלשות מזוג של **מספרים מייצרים**.

משפט 8.7 (אוקלידס) $\{a, b, c\}$ שלשה פיתגורית פרימיטיבית אם ורק אם קיימים שני מספרים שלמים חיוביים u, v, הנקראים **מספרים מייצרים**, כך ש:

1. $u > v$
2. לא שניהם אי-זוגיים
3. אין להם מחלק משותף גדול מ-1
4. $\{a, b, c\}$ ו-u, v מקיימים את את היחסים:

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2\,.$$

טבלה 8.1: שלשות בבליות מלוח Plimption 322

a	a_f	b	b_f	c	u	u_f	v	v_f
119	$7 \cdot 17$	120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	169	12	$2^2 \cdot 3$	5	5
4601	$43 \cdot 107$	4800	$2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$	6649	75	$3 \cdot 5^2$	32	2^5
12709	$71 \cdot 179$	13500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3$	18541	125	5^3	54	$2 \cdot 3^3$
65	$5 \cdot 13$	72	$2^3 \cdot 3^2$	97	9	3^2	4	2^2

הוכחה חישוב פשוט מראה שאם ניתן לבטא את $\{a, b, c\}$ כפי שנדרש בסעיף 4 אז הם מהווים שלשה פיתגורית:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 \\ &= u^4 - 2(uv)^2 + v^4 + 4(uv)^2 \\ &= u^4 + 2(uv)^2 + v^4 \\ &= u^2 + v^2 = c^2 . \end{aligned}$$

הוכחת הכיוון השני קשה יותר ולא נביא אותה כאן. □

אם זה נכון שהבבלים השתמשו בנוסחה של אוקלידס נשארת השאלה: איך הם מצאו את המספרים היוצרים u, v?

כל שורה בטבלה 8.1 מציגה את a_f ו-b_f, החלוקה לגורמים של a, b, בהתאמה, כדי להראות שאין להם מחלקים משותפים. הקורא מוזמן לבדוק שאין מחלק משותף ל-c עם a, b ולכן השלשות פרימיטיביות. המספרים היוצרים u, v והגורמים שלהם u_f, v_f מוצגים גם הם. לא רק שאין להם מחלקים משותפים כפי שנדרש על ידי משפט 8.7, אלא הגורמים היחידים הגדולים מ-1 ב-u ו-v הם חזקות של $2, 3, 5$.

הגדרה 8.6 ***שלשה בבלית*** ***(Babylonian triple)*** היא שלשה פיתגורית פרימיטיבית כך שהגורמים הראשוניים היחידים של u, v הם $2, 3, 5$.

הסיבה שהבבלים הגבילו את עצמם לגורמים הללו היא שהם השתמשו במערכת ספירה בבסיס בבסיס $60 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ (sexagesimal) שהגורמים הראשוניים שלהם הם $2, 3, 5$.

עבור קוראים שאינם מכירים בסיסי ספירה לא-עשרוניים, נסקור בקצרה את המושג. "המספר" 12345 הוא קיצור למספר:

$$(1 \times 10^4) + (2 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (5 \times 10^0) .$$

מערכת מספרים זו נקראת **עשרונית**. יש עשר ספרות $0, 1, 2, \ldots, 8, 9$ עבור המקדמים של החזקות והחזקות מסומנות על ידי מיקומם של המקדמים כאשר החזקות עולות מימין לשמאל.

ניתן להציג את אותו מספר בבסיס **בינארי**, בסיס 2:

$$12345 = 8192 + 4096 + 32 + 16 + 8 + 1$$

טבלה 8.2: שלשות בבליות בבסיס 60

c	a
$\langle 2\rangle\langle 49\rangle$	$\langle 1\rangle\langle 59\rangle$
$\langle 1\rangle\langle 50\rangle\langle 49\rangle$	$\langle 1\rangle\langle 16\rangle\langle 41\rangle$
$\langle 5\rangle\langle 09\rangle\langle 01\rangle$	$\langle 3\rangle\langle 31\rangle\langle 49\rangle$
$\langle 1\rangle\langle 37\rangle$	$\langle 1\rangle\langle 05\rangle$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{13} + 2^{12} + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0 \\
&= 11000000111001\,.
\end{aligned}
$$

בסיס נפוץ במדעי המחשב הוא בסיס הקסדצימלי, בסיס 16. עבור בסיס זה אנחנו צריכים 16 "ספרות" ונהוג להשתמש ב-$0, 1, 2, \ldots, 8, 9, A, B, C, D, E, F$.

בסיס 60 אינו כה זר כפי שאפשר לחשוב. אנו מציגים בבסיס זה זמן, קואורדינטות גיאוגרפיות וזוויות. אנו מרגישים נוח לחשב חישובים כגון (1 שעה ו-40 דקות) ועוד (1 שעה ו-30 דקות) שווים ל-(3 שעות ו-10 דקות).

טבלה 8.2 מראה ערכים של a, c שמופיעים בלוח בבסיס 60 כאשר $\langle d\rangle$ מייצג את "הספרה" ה-d עבור $0 \leq d < 60$. הקורא מוזמן לבדוק שהערכים הללו זהים לערכים בבסיס עשרוני המופיעים בטבלה 8.1, למשל:

$$
\begin{aligned}
(3 \times 60^2) &+ (31 \times 60^1) &+ (49 \times 60^0) &= 12709 \\
(5 \times 60^2) &+ (9 \times 60^1) &+ (1 \times 60^0) &= 18541
\end{aligned}
$$

לבבלים לא היו 60 סימנים נפרדים עבור הספרות. הם השתמשו בשיטה מעורבבת כאשר המקדמים הוצגו על ידי שני סימנים: אחד למקדם העשרות ואחד ליחידות, והחזקות של 60 הוצגו על ידי מקומות המקדמים. אם נשתמש בסימן $\heartsuit$ עבור מקדמי העשרות ובסימן $\diamondsuit$ עבור מקדמי היחידות, המספר העשרוני $2296 = (38 \times 60) + (16 \times 60^0)$ יוצג כ:

$$
\heartsuit\heartsuit\heartsuit \;\; \begin{matrix}\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\\ \diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\end{matrix} \qquad \heartsuit \;\; \begin{matrix}\diamondsuit\diamondsuit\\ \diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\end{matrix}\;.
$$

מה ההפתעה?

המשפט של רמזי התגלה כתוצאה בלתי חשובה בקומבינטוריקה. באופן מפתיע, המשפט הביא לייסוד תחום חדש ומרתק של מתמטיקה עם בעיות פתוחות רבות. האופי של תורת רמזי מפתיע גם הוא: אם קבוצה גדולה מספיק אז קיימות תכונות של סדר בתת-הקבוצות.

הכרתי את תורת רמזי מהמאמר של היולה וקולמן על שלשות פיתגוריות, שההוכחה שלו דומה להוכחת משפט ארבעת הצבעים: השימוש במשאבי חישוב עצומים שהצליח רק לאחר התקדמות בתיאוריה. מכאן שם המאמר שלהם *The Science of Brute Force*.

בעיות בקומבינטוריקה מבקשות ערכים מספריים, למשל, $R(n)$ הוא מספר שלם. מפתיע ששיטות הסתברותיות כל כך פוריות במציאת תוצאות בתחום.

יש לנו נטייה לחשוב שבני האדם היום חכמים יותר מבני האדם שחיו לפני אלפי שנים. מפתיע לגלות שלפני אלפי שנים המתמטיקה של הבבלים הייתה מתקדמת מספיק כדי לגלות ש:

$$\{12709, 13500, 18541\}$$

היא שלשה פיתגורית.

מקורות

לסקירה של תורת רמזי ראו [9]. דיון מעמיק נמצא ב-[20]. הסעיף על השיטה ההסתברותית מבוסס על דוגמה 4o של [43] ופרק 4 של [9]. מסד נתונים של מספרי רמזי נמצא ב-[34].

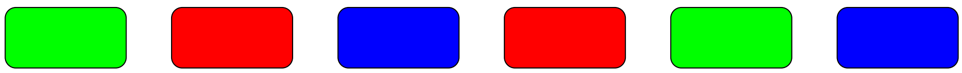
ההוכחה של המשפט על שלשות פיתגוריות מתוארת בפירוט ב-[23]. ראו [4] למבוא ללוגיקה ו-SAT solving. הארכיב של ה-SAT solver הלימודי שלי [5] מכיל נוסחאות עבור שלשות שור מספרי רמזי ובעיית ון דר וורדן.

סעיף 8.7 מבוסס על [60], [42]. מספרים בבסיס 60 מתוארים ב-[63].

פרק 9

בעיית לנגפורד Langford

המתמטיקאי ק׳ דדלי לנגפורד (C. Dudley Langford) הבחין שבנו סידר קוביות צבעוניות כמו באיור 9.1. קובייה אחת נמצאת בין שתי הקוביות האדומות, שתי קוביות בין הקוביות הכחולות ושלוש קוביות בין הקוביות הירוקות.



איור 9.1: סידור הקוביות לבעיית לנגפורד

הגדרה 9.1 (בעיית לנגפורד Langford $L(n)$) נתון שק[1] של מספרים

$$\{1,1,2,2,3,3,\ldots,n,n\},$$

האם ניתן לסדר אותם כך שלכל $1 \leq i \leq n$, i מספרים נמצאים בין שני המופעים של i?

מאיור 9.1 אנו רואים שעבור $n = 3$ הפתרון הוא 312132.

סעיף 9.1 מנסח מחדש את בעיית לנגפורד בייצוג מתמטי המקל על הפתרון. סעיף 9.2 מאפיין את ערכי n שעבורם ניתן למצוא פתרון ומביא שתי הוכחות של המשפט. ההוכחה הראשונה פשוטה יחסית ומשתמשת בשיטה של ספירה כפולה: לספור אותו הערך בשתי דרכים שונות ולהשוות את הנוסחאות המתקבלות. ההוכחה השנייה היא אינדוקציה יפה, אבל ה״פנקסנות״ בהוכחה מחייבת תשומת לב רבה לפרטים. בסעיף 9.3 נחשב את הפתרון עבור $L(4)$.

9.1 בעיית לנגפורד כבעיית כיסוי

ניתן להציג את בעיית לנגפורד באמצעות טבלה. עבור $L(3)$ יש 6 עמודות, אחת לכל מקום בסדרה. השורות מציגות את כל האפשרויות למקם את שני המופעים של אחד המספרים, כלומר, שני המופעים

[1] שק (bag) הוא קבוצה שבה איבר יכול להופיע מספר פעמים.

של k חייבים להיות ממוקמים כך שביניהם k עמודות. קל לראות שיש ארבעה זוגות של מקומות אפשריים עבור 1, שלושה עבור 2 ושניים עבור 3:

	1	2	3	4	5	6
1	1		1			
2		1		1		
3			1		1	
4				1		1
5	2			2		
6		2			2	
7			2			2
8	3				3	
9		3				3

כדי לפתור את הבעיה, עלינו לבחור שורה אחת עבור המופעים של 1, שורה אחת עבור המופעים של 2 ושורה אחת עבור המופעים של 3, כך שאם נמקם את השורות זו מעל זו, בכל עמודה יופיע רק מספר אחד.

שורה 9 אינה נחוצה בגלל סימטרייה: סדרה המתחילה בשורה 9 זהה לסדרה המתקבלת מהפיכת סדר האיברים של של הסדרה המתחילה בשורה 8. שורה 8 היא היחידה המכילה את המספר 3, כך שחובה לבחור אותה, והסדרה המתקבלת היא $3XXX3X$. אי אפשר להשתמש בכל שורה שמופיעים בה מספרים בעמודות 1 ו-5, כי מותר מספר אחד בלבד בכל מקום. נסמן את השורות שניתן לבחור ושלא ניתן לבחור כך: $\cancel{1}, 2, \cancel{3}, 4, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, 8$.

שורה 7 היא השורה האפשרית היחידה עבור 2, כך שחובה לבחור בה, והתוצאה היא $3X2X32$. נעדכן את רשימת השורות ונקבל: $\cancel{1}, 2, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, 8$.

כעת, השורה היחידה שניתן לבחור היא 2 ומתקבל הפתרון 312132.

	1	2	3	4	5	6
2		1		1		
7			2			2
8	3				3	

הניתוח הראה שאין פתרון אחר פרט לפתרון הסימטרי המתקבל אם מתחילים בשורה 9.

9.2 מהם ערכי n שעבורם ניתן לפתור את בעיית לנגפורד?

משפט 9.1 ניתן למצוא פתרון ל-$L(n)$ אם ורק אם $n = 4k$ או $n = 4k - 1$.

נוכיח רק שאם $n = 4k - 2$ או $n = 4k - 3$ אז אין פתרון לבעיה. ההוכחה הראשונה מוכיחה שאם יש פתרון ל-$L(n)$ אז $n = 4k$ או $n = 4k + 3$. ההוכחה השנייה מוכיחה את הפך השלילה: אם $n = 4k + 1$ או $n = 4k + 2$ אזי אין פתרון ל-$L(n)$.

הוכחה(1) אם המופע הראשון של המספר k נמצא במקום i_k, המופע השני נמצא במקום i_k+k+1.
למשל, ב-312132, הפתרון עבור $L(3)$, אם נבחר $k=2$, $i_k=3$ ו-$i_k+k+1=3+2+1=6$.

S_n, סכום המקומות של כל המספרים, הוא:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} i_k + \sum_{k=1}^{n}(i_k+k+1) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} i_k + \sum_{k=1}^{n}(k+1) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} i_k + \frac{n(n+3)}{2}\,.
\end{aligned}$$

אבל S_n הוא פשוט $1+2+3+\cdots+2n$ כך ש:

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{2n(2n+1)}{2}\,.$$

נשווה את שני הביטויים עבור S_n ונקבל:

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n} i_k + \frac{n(n+3)}{2} &= \frac{2n(2n+1)}{2} \\
\sum_{k=1}^{n} i_k &= \frac{1}{2}\left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+3)}{2}\right) \\
&= \frac{3n^2-n}{4}\,.
\end{aligned}$$

האגף השמאלי חייב להיות מספר שלם כי הוא סכום של מספרים שלמים (מיקומים), ולכן האגף הימני חייב גם הוא להיות מספר שלם. מתי $3n^2-n$ מתחלק ב-4? נפרק את $3n^2-n$ ונקבל $n(3n-1)$.

אם n מתחלק ב-4, המכפלה מתחלקת ב-4.

מתי $3n-1$ מתחלק ב-4? ניתן לייצג כל מספר שלם n כ-$n=4i+j$ עבור $j=0,1,2,3$. אם $3n-1$ מתחלק ב-4, גם $3(4i+j)-1 = 12i+3j-1$ מתחלק ב-4. ברור ש-$12i$ מתחלק ב-4. עבור $j=\{0,1,2,3\}$, $3j-1=\{-1,2,5,8\}$ מתחלק ב-4 אם ורק אם $j=3$, כלומר $n=4i+3$. $\square$

כדי להכיר את העיקרון של ההוכחה השנייה, נבדוק איך ייראה פתרון עבור $n=4$. בטבלאות שלהלן המקומות של 4 הם 1 ו-6 והמקומות של 2 הם 5 ו-8. בשני המקרים, מקום אחד זוגי ומקום אחד אי-זוגי:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
				*			*

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
*					*		

ניקח מספר **זוגי** $k = 2m$. מקום המופע הראשון שלו הוא i ומקום המופע השני שלו הוא $i + k + 1$. סכום המקומות הוא:

$$i + (i + k + 1) = 2i + 2m + 1 = 2(i + m) + 1\,,$$

שהוא מספר אי-זוגי. כדי שהסכום של שני מספרים יהיה אי-זוגי, אחד חייב להיות זוגי ואחד אי-זוגי.

נבדוק עכשיו את מקומות המופעים של המספרים האי-זוגיים. מקומות המופעים של 1 הם 2 ו-4, ומקומות המופעים של 3 הם 3 ו-7, שניהם מספרים אי-זוגיים.

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
		*				*	

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
	*		*				

ניקח מספר **אי-זוגי**, $k = 2m + 1$. סכום המקומות הוא:

$$i + (i + k + 1) = 2i + 2m + 1 + 1 = 2(i + m + 1)\,,$$

שהוא מספר זוגי. סכום של שני מספרים הוא זוגי אם ורק אם שניהם זוגיים או שניהם אי-זוגיים.

רשימת המקומות של המספרים בסדרה, $1, 2, \ldots, 2n - 1, 2n$, מכילה מספר שווה של מקומות זוגיים ומקומות אי-זוגיים. כאשר מציבים את שני המופעים של מספר בסדרה, הם "תופסים" שני מקומות. כאשר מסיימים להציב את כל המספרים בפתרון, חייב להיות מספר שווה של מקומות זוגיים ושל מקומות אי-זוגיים "שנתפסו". נגדיר את **הזוגיות** של קבוצת שורות כהפרש בין מספר המקומות הזוגיים שנתפסו ובין מספר המקומות האי-זוגיים שנתפסו. בהתחלה הזוגיות היא אפס, ואם קיים פתרון אז גם הזוגיות שלו היא אפס.

כאשר ממקמים את שני המופעים של מספר זוגי, הם תופסים מקום אחד זוגי (מסומן $+1$) ומקום אחר אי-זוגי (מסומן -1), והזוגיות אינה משתנה:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
				-1			$+1$

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
-1					$+1$		

כאשר ממקמים את שני המופעים של מספר אי-זוגי, הזוגיות משתנה ב-$+2$ או -2, ולכן עלינו לצרף את הזוג הזה לזוג מופעים של מספר אי-זוגי אחר כדי לאפס את השינוי בזוגיות:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
		-1				-1	

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
	$+1$		$+1$				

הראינו שייתכן פתרון לבעיית לנגפורד אם ורק אם יש מספר זוגי של מספרים אי-זוגיים ב-$\{1, \ldots, n\}$! המשפט טוען שזה נכון אם $n = 4k$ או $n = 4k - 1$ והמשפט לא-נכון אם $n = 4k - 2$ או $n = 4k - 3$.

הוכחה(2) ההוכחה באינדוקציה. קיימות ארבע טענות בסיס:

- $n = 4k - 3 = 1$. ב-$\{1\}$ יש מספר אי-זוגי של אי-זוגיים ואין פתרון.

- $n = 4k - 2 = 2$. ב-$\{1,2\}$ יש מספר אי-זוגי של אי-זוגיים ואין פתרון.
- $n = 4k - 1 = 3$. ב-$\{1,2,3\}$ יש מספר זוגי של אי-זוגיים וראינו שיש פתרון.
- $n = 4k - 0 = 4$. ב-$\{1,2,3,4\}$ יש מספר זוגי של אי-זוגיים והפתרון נמצא בסעיף 9.3.

הנחת האינדוקציה היא שהמשפט נכון עבור $\{1,\ldots,4k-j\}$, $0 \leq j \leq 3$, $k \geq 1$, ונוכיח שהמשפט נכון עבור $n = 4(k+1) - j$.

- נוסיף $4k+1 = 4(k+1) - 3$ ל-$\{1,\ldots,4k\}$. לפי הנחת האינדוקציה עבור $4k = 4k - 0$ קיים מספר זוגי של מספרים אי-זוגיים. $4(k+1) - 3$ אי-זוגי ולכן עכשיו יש מספר אי-זוגי של מספרים אי-זוגיים ואין פתרון.
- נוסיף $4k+2 = 4(k+1) - 2$ ל-$\{1,\ldots,4k+1\}$. לפי הנחת האינדוקציה עבור $4k+1 = 4(k+1) - 3$ קיים מספר אי-זוגי של מספרים אי-זוגיים. $4(k+1) - 2$ זוגי ולכן עכשיו עדיין יש מספר אי-זוגי של מספרים אי-זוגיים ואין פתרון.
- נוסיף $4k+3 = 4(k+1) - 1$ ל-$\{1,\ldots,4k+2\}$. לפי הנחת האינדוקציה עבור $4k+2 = 4(k+1) - 2$ קיים מספר אי-זוגי של מספרים אי-זוגיים. $4(k+1) - 1$ אי-זוגי ולכן עכשיו יש מספר זוגי של מספרים אי-זוגיים וסביר שיש פתרון.
- נוסיף $4k+4 = 4(k+1) - 0$ ל-$\{1,2,\ldots,4k+3\}$. לפי הנחת האינדוקציה עבור $4k+3 = 4(k+1) - 1$ קיים מספר זוגי של מספרים אי-זוגיים. $4(k+1) - 0$ זוגי ולכן עכשיו יש מספר זוגי של מספרים אי-זוגיים וסביר שיש פתרון.

□

9.3 פתרון עבור $L(4)$

הנה הטבלה עבור $L(4)$. אל תמשיך לקרוא לפני שתנסה בעצמך למצוא פתרון.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1		1					
2		1		1				
3			1		1			
4				1		1		
5					1		1	
6						1		1
7	2			2				
8		2			2			
9			2			2		
10				2			2	
11					2			2
12	3				3			
13		3				3		
14			3				3	
15				3				3
16	4					4		
17		4					4	
18			4					4

משיקולי סמטרייה ניתן להתעלם משורה 18.

בחר שורה 16 והסדרה היא 4XXXX4XX. כל שורה עם מספר במקום 1 או במקום 6 כבר אינה יכולה להיות חלק מהפתרון.

$\cancel{1}, 2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, \cancel{7}, 8, \cancel{9}, 10, 11, \cancel{12}, \cancel{13}, 14, 15, 16, \cancel{17}$

בחר שורה 14 והסדרה היא 4X3XX43X.

$\cancel{1}, 2, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, 8, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, \cancel{13}, 14, \cancel{15}, 16, \cancel{17}$

בחר שורה 8 והסדרה היא 423X243X.

$\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, 8, \cancel{9}, \cancel{10}, \cancel{11}, \cancel{12}, \cancel{13}, 14, \cancel{15}, 16, \cancel{17}$

לא נשארו מקומות עבור הספרה 1 ולכן עלינו לחזור אחורה.

במקום שורה 8 בחר שורה 11 והסדרה היא 4X3X2432.

$\cancel{1}, 2, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, \cancel{13}, 14, \cancel{15}, 16, \cancel{17}$

בחר שורה 2 ומצאנו פתרון 41312432.

נחזור אחורה ונחפש פתרון אחר.

במקום שורה 14 בחר שורה 15 והסדרה היא 4XX3X4X3.

$\cancel{1}, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, \cancel{7}, 8, \cancel{9}, \cancel{10}, \cancel{11}, \cancel{12}, \cancel{13}, \cancel{14}, 15, 16, \cancel{17}$

בחר בשורה 8 והסדרה היא 42X324X3.

$\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, 8, \cancel{9}, \cancel{10}, \cancel{11}, \cancel{12}, \cancel{13}, \cancel{14}, 15, 16, \cancel{17}$

לא נשארו מקומות עבור הספרה 1 ולכן עלינו לחזור אחורה.

במקום שורה 16 בחר שורה 17 והסדרה היא X4XXXX4X.

$1, \cancel{2}, 3, 4, \cancel{5}, 6, 7, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, 11, 12, \cancel{13}, \cancel{14}, 15, \cancel{16}, 17$

בחר שורה 15 והסדרה היא X4X3XX43.

$1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, \cancel{11}, \cancel{12}, \cancel{13}, \cancel{14}, 15, \cancel{16}, 17$

חייבים לבחור שורה 9 והסדרה היא X423X243.

$1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, \cancel{11}, \cancel{12}, \cancel{13}, \cancel{14}, 15, \cancel{16}, 17$

לא נשארו מקומות עבור הספרה 1 ולכן עלינו לחזור אחורה פעם אחת אחרונה.

במקום שורה 15 בחר שורה 12 והסדרה היא 34XX3X4.

$\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, \cancel{11}, 12, \cancel{13}, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{16}, 17$

שוב, לא נשארו מקומות עבור הספרה 1.

לכן הפתרון היחיד הוא 41312432.

מה ההפתעה?

מקור ההשראה למשפט מתמטי יכול להיות מפתיע. לנגפורד שם לב לתבנית בקוביות הצבעוניות של בנו וזה הוביל אותו למשפט 9.1. רצוי שסטודנטים ייחשפו להוכחות שונות למשפט אחד.

מקורות

פרק זה מבוסס על [35]. [12] מראה איך למצוא פתרון עבור $n = 4k$ ו-$n = 4k + 3$.

פרק 10

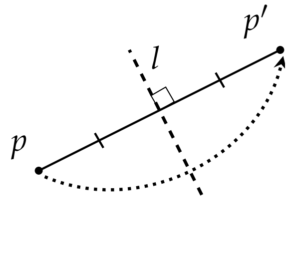
אקסיומות האוריגמי

אוריגמי, האומנות של קיפולי נייר, פותחה לפני מאות שנים ביפן והיום יש לה קהילה בינלאומית. לקראת סוף המאה ה-20 פותחה התיאוריה המתמטית של האוריגמי שבסיסה שבע אקסיומות, אקסיומות הוזיטה-האטורי על שם הומיאקו הוזיטה (Humiaki Huzita) שניסח את שש האקסיומות הראשונות וקושירו האטורי (Koshiro Hatori) שניסח את השביעית. ז׳אק ז׳סטן (Jacques Justin) פרסם את כל שבע האקסיומות לפני הוזיטה והאטורי ומרגריטה פ׳ בלוך (Margherita P. Beloch) הציגה את האקסיומה השישית בשנת 1936. למרות זאת, האקסיומות מוכרות כאקסיומות הוזיטה-האטורי.

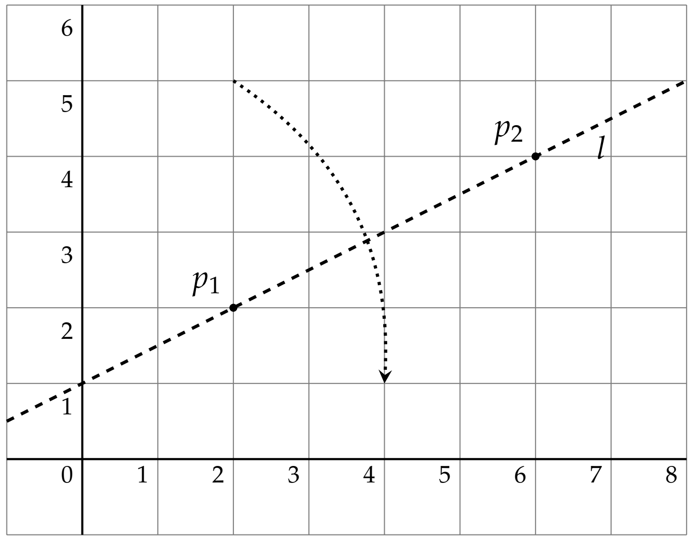
בסדרה של שלושה פרקים נלמד את המתמטיקה של אוריגמי. פרק זה מציג את האקסיומות, פרק 11 קושר את האוריגמי עם שורשים של פולינומים ופרק 12 מראה שבניות שאינן אפשריות בסרגל ובמחוגה ניתנות לבנייה בעזרת אוריגמי.

פרק זה מכיל סעיף עבור כל אחת מהאקסיומות. לאחר ניסוח האקסיומה והצגת תרשים של **הקיפול** שהיא מתארת, נפתח את משוואות הקיפול ואת נקודות החיתוך באמצעות גיאומטריה אנליטית. ניתן להגדיר קיפול גם **כמקום הגיאומטרי** שהוא מתאר, קבוצת כל הנקודות המקיימות תכונה מסוימת. המונח קיפול מגיע מפעולה של קיפול דף נייר באוריגמי, אבל כאן הוא משמש כקו הגיאומטרי שנוצר על ידי קיפול הדף.

התוצאה של פעולת הקיפול היא **שיקוף**. נתונה נקודה p, השיקוף של הנקודה סביב הקיפול l הוא הנקודה p' כך ש-l הוא האנך האמצעי של הקטע $\overline{pp'}$ (איור 10.1).



איור 10.1 : הקפל הוא האנך האמצעי של הקטע המחבר בין נקודה לשיקוף שלה



איור 10.2 : אקסיומה 1

10.1 אקסיומה 1

אקסיומה 10.1 נתונות שתי נקודות שונות $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, קיים קיפול יחיד l העובר דרך שתיהן (איור 10.2).

פיתוח משוואת הקיפול: שיפוע הקיפול הוא המנה של הפרשי הקואורדינטות של p_1, p_2 ונקודת החיתוך עם ציר ה-y מתקבלת מ-p_1 :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\,. \tag{10.1}$$

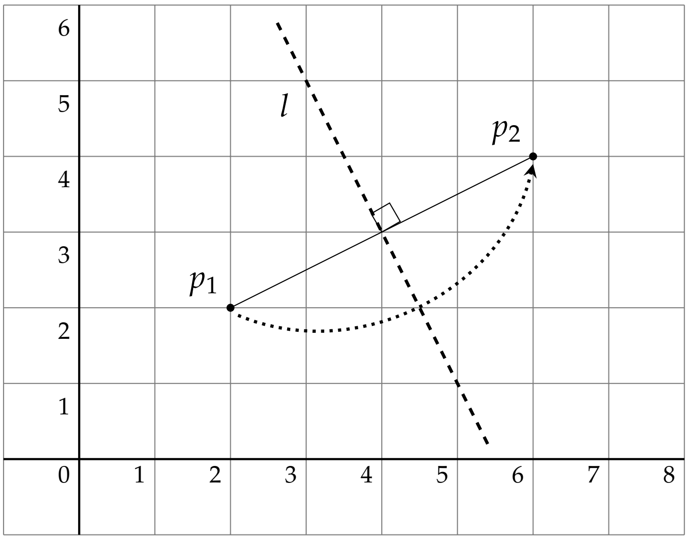
דוגמה 10.1 נתונות הנקודות $p_1 = (2,2), p_2 = (6,4)$, המשוואה של l היא :

$$y - 2 = \frac{4-2}{6-2}(x-2)$$
$$y = \frac{1}{2}x + 1\,.$$

10.2 אקסיומה 2

אקסיומה 10.2 נתונות שתי נקודות שונות $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, קיים קיפול יחיד l המניח את p_1 על p_2 (איור 10.3).

הקיפול הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שנמצאות במרחק שווה מ-p_1 ומ-p_2.



איור 10.3 : אקסיומה 2

פיתוח משוואת הקיפול: הקיפול l הוא האנך האמצעי של $\overline{p_1p_2}$. השיפוע שלו הוא ההופכי השלילי של שיפוע הישר המחבר את p_1 ו-p_2. l עובר דרך נקודת האמצע בין שתי הנקודות:

$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) . \tag{10.2}$$

דוגמה 10.2 נתונות הנקודות $p_1 = (2,2), p_2 = (6,4)$. המשוואה של l היא:

$$y - \left(\frac{2+4}{2}\right) = -\frac{6-2}{4-2}\left(x - \left(\frac{2+6}{2}\right)\right)$$
$$y = -2x + 11 .$$

10.3 אקסיומה 3

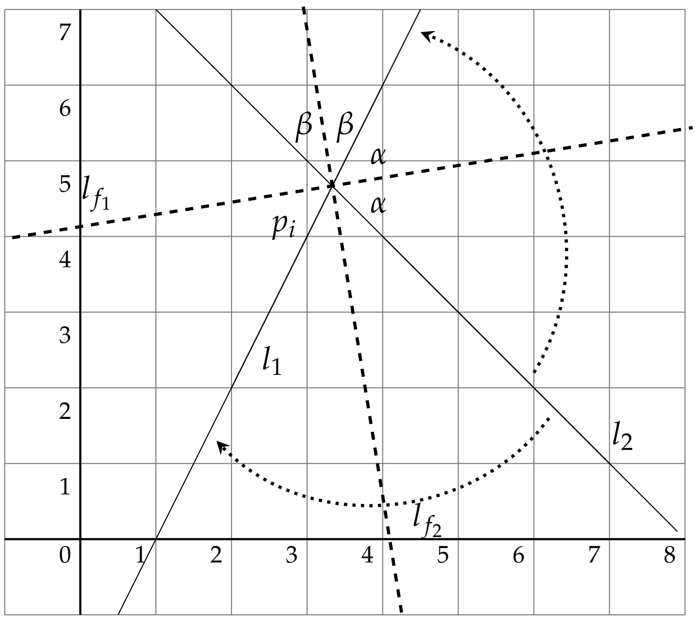
אקסיומה 10.3 נתונים שני ישרים l_1 ו-l_2, קיים קיפול l המניח את l_1 על l_2 (איור 10.4).

הקיפול הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מ-l_1 ומ-l_2, כאשר המרחק מנקודה לישר הוא אורך האנך מהנקודה לישר. קל להראות באמצעות משולשים חופפים שהקיפול הוא חוצה הזווית הנוצרת על ידי l_1 ו-l_2.

פיתוח משוואת הקיפול:

עבור ישרים מקבילים: יהי l_1 הישר $y = mx + b_1$ ויהי l_2 הישר $y = mx + b_2$. הקיפול הוא הישר המקביל ל-l_1, l_2 בחצי המרחק ביניהם:

$$y = mx + \frac{b_1 + b_2}{2} .$$



איור 10.4: אקסיומה 3

עבור ישרים נחתכים: יהי l_1 הישר $y = m_1x + b_1$ ויהי l_2 הישר $y = m_2x + b_2$. $p_i = (x_i, y_i)$, נקודת החיתוך שלהם, היא:

$$\begin{aligned} m_1x_i + b_1 &= m_2x_i + b_2 \\ x_i &= \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \\ y_i &= m_1x_i + b_1 \,. \end{aligned}$$

דוגמה 10.3 יהי l_1 הישר $y = 2x - 2$, ויהי l_2 הישר $y = -x + 8$. אזי $p_i = (x_i, y_i)$ היא:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{8 - (-2)}{2 - (-1)} = \frac{10}{3} \approx 3.33 \\ y_i &= 2 \cdot \frac{10}{3} - 2 = \frac{14}{3} \approx 4.67 \,. \end{aligned}$$

הקיפול הוא חוצה הזווית הנוצרת על ידי l_1 ו-l_2 בנקודת החיתוך שלהם. קיימים שני קיפולים אפשריים כי קיימות שתי זוויות קודקודיות ועלינו למצוא את השיפועים של שני חוצי הזוויות. אם הזווית של l_1 יחסית לציר ה-x היא θ_1 והזווית של l_2 יחסית לציר ה-x היא θ_2, אז קיפול הוא הישר היוצר את הזווית $\theta_b = (\theta_1 + \theta_2)/2$

יחסית לציר ה-x.

יהי $m_1 = \tan\theta_1$ ו-$m_2 = \tan\theta_2$. לפי משפט א׳.9, m_s, השיפוע של הישר היוצר זווית $\theta_1 + \theta_2$, הוא:

$$m_s = \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1m_2} \,.$$

לפי משפט א׳.10, m_b, השיפוע של חוצה הזווית, הוא:

$$m_b = \tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\tan^2(\theta_1+\theta_2)}}{\tan(\theta_1+\theta_2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+m_s^2}}{m_s}\,.$$

דוגמה 10.4 עבור $y = 2x - 2$ ו-$y = -x + 8$, השיפוע של חוצה הזווית הוא:

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{2+(-1)}{1-(2\cdot -1)} = \frac{1}{3} \\ m_b &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+(1/3)^2}}{1/3} = -3 \pm \sqrt{10} \approx -6.16,\ 0.162\,. \end{aligned}$$

נפתח את המשוואה של l_{f_1} עם השיפוע החיובי. מדוגמה 10.3, הקואורדינטות של נקודת החיתוך של הישרים הן $m_i = (10/3, 14/3)$, ולכן:

$$\begin{aligned} \frac{14}{3} &= (-3+\sqrt{10})\cdot\frac{10}{3} + b \\ b &= \frac{44-10\sqrt{10}}{3} \\ y &= (-3+\sqrt{10})x + \frac{44-10\sqrt{10}}{3} \approx 0.162x + 4.13\,. \end{aligned}$$

10.4 אקסיומה 4

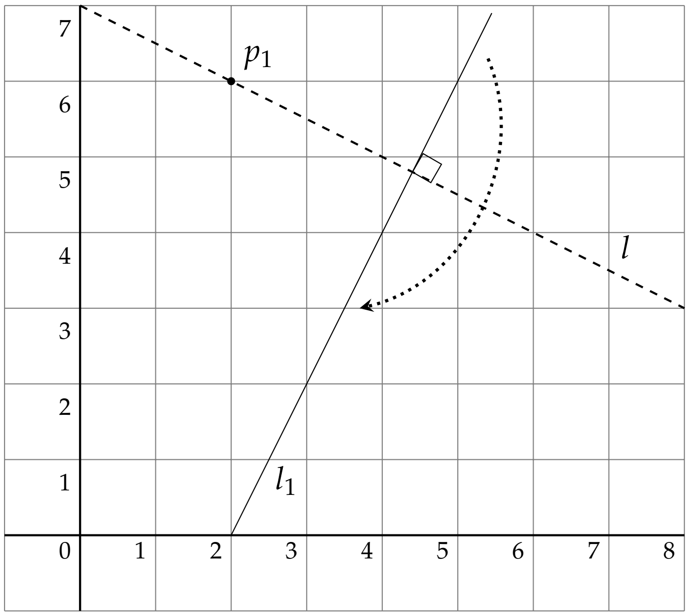
אקסיומה 10.4 נתונים נקודה $p_1 = (x_1, x_2)$ וישר l_1, קיים קיפול יחיד l הניצב ל-l_1 ועובר דרך p_1 (איור 10.5).

פיתוח משוואת הקיפול: משוואת הישר l_1 היא $y = m_1x + b_1$. l ניצב ל-l_1 לכן השיפוע שלו הוא $-(1/m_1)$. הישר עובר דרך p_1 ונוכל לחשב את משוואתו:

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{m}x_1 + b \\ b &= \frac{(my_1+x_1)}{m} \\ y &= -\frac{1}{m}x + \frac{(my_1+x_1)}{m}\,. \end{aligned}$$

דוגמה 10.5 תהי $p_1 = (2,6)$ ויהי l_1 הישר $y = 2x - 4$. משוואת הקיפול l היא:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{2\cdot 6+2}{2} = -\frac{1}{2}x + 7\,.$$



איור 10.5: אקסיומה 4

10.5 אקסיומה 5

אקסיומה 10.5 נתונות נקודות $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$ ונתון ישר l_1, קיים קיפול l המניח את p_1 על l_1 ועובר דרך p_2 (איור 10.6).

ייתכן שקיים קיפול אחד או שנים וייתכן שאין בכלל קיפול מתאים.

מכיוון שהקיפול עובר דרך p_2 ו-p_2 נמצאת על האנך האמצעי של $\overline{p_1p_1'}$, המקום הגיאומטרי של השיקוף של p_1 הוא מעגל ברדיוס $\overline{p_1p_2}$ שמרכזו p_2. נאלץ את הקיפול כך שהשיקוף p_1' יימצא על הישר הנתון l_1.

פיתוח משוואות הקיפולים: יהי l_1 הישר $y = m_1x + b_1$ ויהיו $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$ הנקודות הנתונות. משוואת המעגל שמרכזו p_2 ורדיוסו $\overline{p_1p_2}$ היא:

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2$$

כאשר

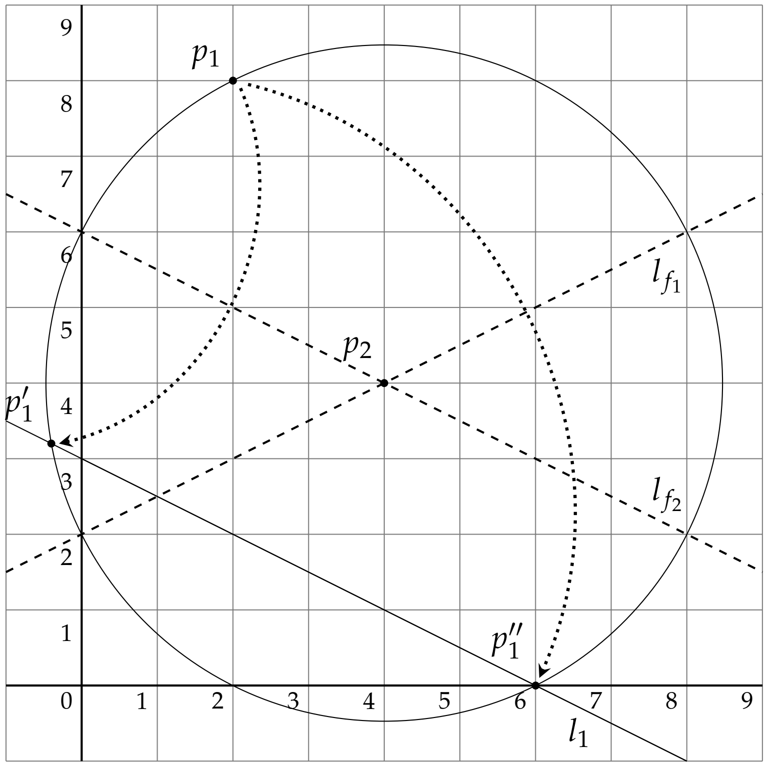
$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \,.$$

נציב את שוואת l_1 במשוואת המעגל, ונקבל:

$$\begin{aligned}(x - x_2)^2 + ((m_1x + b_1) - y_2)^2 &= r^2\\ (x - x_2)^2 + (m_1x + (b_1 - y_2))^2 &= r^2 \,.\end{aligned}$$

מתקבלת משוואה ריבועית עבור שיעורי x של נקודות החיתוך האפשריות:

$$x^2(1 + m_1^2) \;+\; 2(-x_2 + m_1(b_1 - y_2))x \;+\; (x_2^2 + (b_1 - y_2)^2 - r^2) = 0 \,. \tag{10.3}$$



איור 10.6 : אקסיומה 5

למשוואה ריבועית יש לכל היותר שני פתרונות, ולכן בהינתן זוג נקודות וישר ייתכנו אפס קיפולים, קיפול אחד או שני קיפולים. מהשורשים x_1', x_1'' ניתן לחשב את y_1', y_1'' בעזרת $y = m_1 x + b_1$. נקודות השיקוף הן $p_1' = (x_1', y_1'), p_1'' = (x_1'', y_1'')$.

דוגמה 10.6 יהיו $p_1 = (2, 8)$, $p_2 = (4, 4)$, ו- l_1 הישר $y = -\frac{1}{2}x + 3$. משוואת המעגל היא $(x-4)^2 + (y-4)^2 = r^2 = (4-2)^2 + (4-8)^2 = 20$. נציב את משוואת הישר במשוואת המעגל ונקבל משוואה ריבועית עבור שיעורי ה-x של נקודות החיתוך (או נשתמש במשוואה 10.3) :

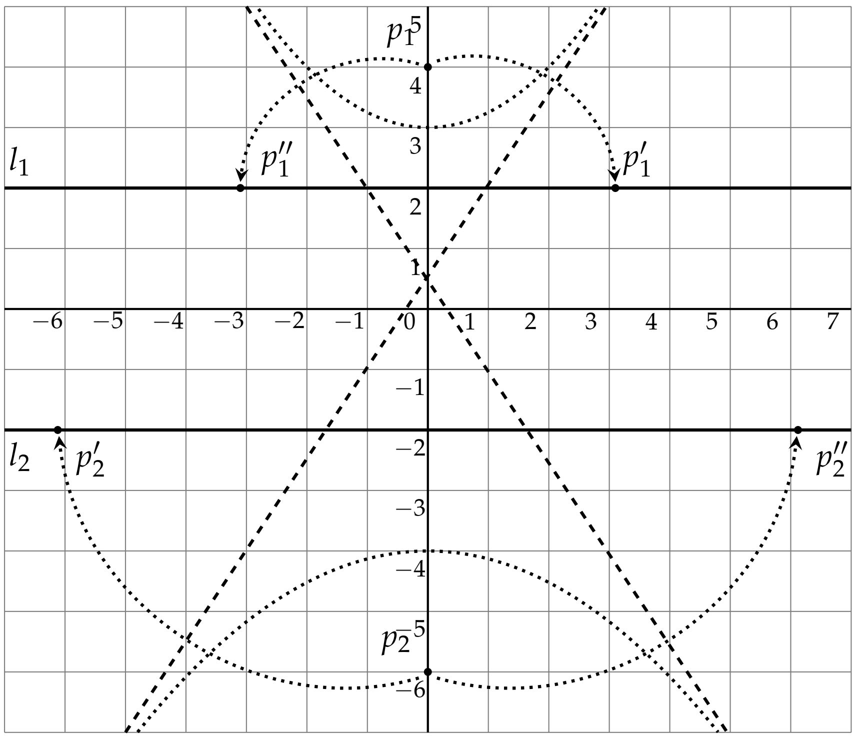
$$
\begin{aligned}
(x-4)^2 + \left(\left(-\frac{1}{2}x + 3\right) - 4\right)^2 &= 20 \\
\frac{5}{4}x^2 - 7x - 3 &= 0 \\
5x^2 - 28x - 12 &= 0 \\
(5x+2)(x-6) &= 0\,.
\end{aligned}
$$

שתי נקודות החיתוך הן :

$$
p_1' = (-2/5, 16/5) = (-0.4, 3.2)\,, \quad p_1'' = (6, 0)\,.
$$

דוגמה 10.7 עבור $p_1 = (2, 8)$, $p_1' = (-2/5, 16/5)$, משוואת ישר הקיפול l_{f_1} היא :

$$
y - \frac{8 + (16/5)}{2} = -\frac{(-2/5) - 2}{(16/5) - 8}\left(x - \frac{2 + (-2/5)}{2}\right)
$$



איור 10.7 : אקסיומה 6

$$y = -\frac{1}{2}x + 6\,.$$

דוגמה 10.8 עבור $p_1 = (2,8)$, $p_1'' = (6,0)$, המשוואה של l_{f_2} היא :

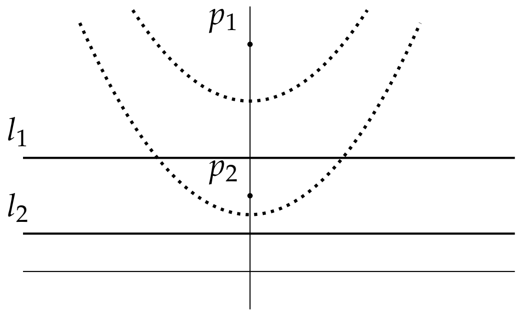
$$\begin{aligned} y - \frac{8+0}{2} &= -\frac{6-2}{0-8}\left(x - \frac{2+6}{2}\right) \\ y &= \frac{1}{2}x + 2\,. \end{aligned}$$

10.6 אקסיומה 6

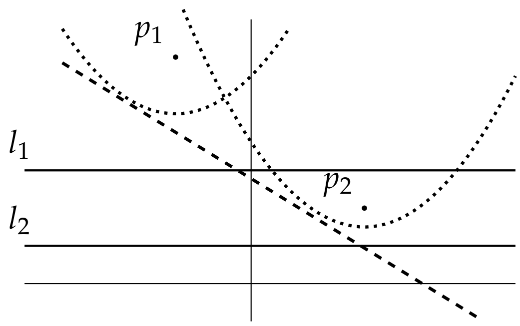
אקסיומה 10.6 נתונות שתי נקודות p_1 ו-p_2 ונתונים שני ישרים l_1 ו-l_2, קיים קיפול l המניח את p_1 על l_1 ואת p_2 על l_2 (איור 10.7).

קיפול המניח את p_i על l_i הוא ישר l_f כך שהמרחק מ-p_i ל-l_f שווה למרחק מ-l_i ל-l_f. המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מנקודה p_i ומישר l_i הוא פרבולה עם מוקד (focus) p_i ומדריך (directrix) l_i. קיפול הוא כל ישר המשיק לפרבולה (סעיף 10.6.3).

כדי שהקיפול יניח בו-זמנית את p_1 על l_1 ואת p_2 על l_2, הוא חייב להיות משיק משותף לשתי הפרבולות. מספר המשיקים המשותפים הוא אפס, אחד, שניים או שלושה (איורים 10.8.א, 10.8.ב, 10.9.א, 10.9.ב).



10.8.א אפס משיקים



10.8.ב משיק אחד

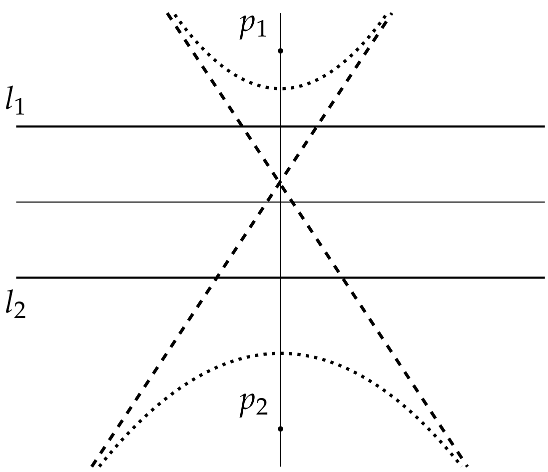
הנוסחה של פרבולה שרירותית מסובכת מאוד, ולכן נביא כאן רק את הנוסחאות עבור פרבולות שציר הסמטרייה שלהן הוא ציר ה-x או ציר ה-y.

10.6.1 פיתוח משוואת הקיפול

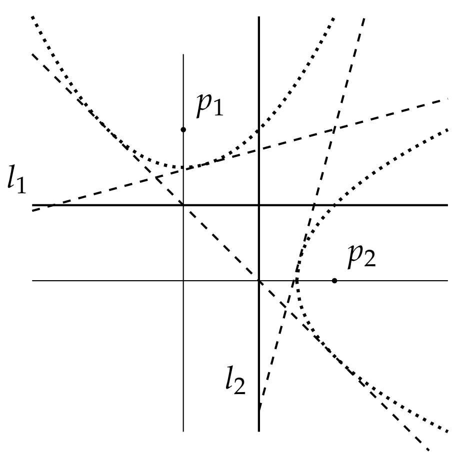
תהי הנקודה $(0, f)$ מוקד של פרבולה עם מדריך $y = d$. נגדיר $p = f - d$, האורך המכוון של הקטע בין המוקד למדריך.[1] אם קודקוד הפרבולה (vertex) נמצא על ציר ה-x, משוואת הפרבולה היא $y = \dfrac{x^2}{2p}$. כדי להזיז את הפרבולה למעלה או למטה על ציר ה-y, כדי שהקודקוד יהיה $(0, h)$, יש להוסיף h למשוואת הפרבולה (איור 10.10):

$$y = \frac{x^2}{2p} + h\,.$$

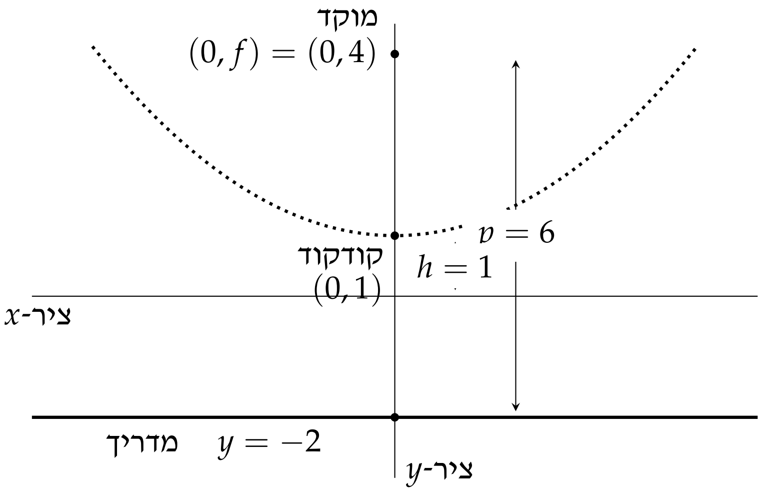
[1]השתמשנו עד כה בסימון p_i עבור נקודות. השימוש כאן ב-p עלול לבלבל אבל ניסוח זה מקובל בספרות. השם הפורמלי עבור p הוא מחצית ה-latus rectum.



10.9.א שני משיקים



10.9.ב שלושה משיקים



איור 10.10: הגדרת הפרבולה: מוקד, מדריך, קודקוד

נגדיר $a=2ph$ כדי שמשוואת הפרבולה תהיה:

$$y=\frac{x^2}{2p}+\frac{a}{2p} \tag{10.4}$$

$$x^2-2py+a=0\,. \tag{10.5}$$

משוואת הפרבולה באיור 10.10 היא $x^2-12y+12=0$.

נציב משוואת ישר **שרירותי** $y=mx+b$ במשוואה 10.5 ונקבל משוואה עבור נקודות החיתוך של הישר והפרבולה:

$$\begin{aligned} x^2-2p(mx+b)+a &= 0\\ x^2+(-2mp)x+(-2pb+a) &= 0\,. \end{aligned}$$

הישר משיק לפרבולה אם ורק אם למשוואה ריבועית זו יש **בדיוק** פתרון יחיד אם ורק אם הדיסקרימיננטה (discriminant) שווה לאפס:

$$(-2mp)^2\;-\;4\cdot 1\cdot(-2pb+a)=0 \tag{10.6}$$

$$m^2p^2+2pb-a=0\,. \tag{10.7}$$

משוואה זו עם המשתנים m,b היא המשוואה עבור המשיקים לפרבולה, אבל אנחנו מחפשים משיקים משותפים לשתי הפרבולות, ולכן יש לפתור את המשוואות עבור שתי הפרבולות.

דוגמה 10.9

פרבולה 1: מוקד $(0,4)$, מדריך $y=2$, קודקוד $(0,3)$.

$p=4-2=2$, $a=2\cdot2\cdot3=12$. משוואת הפרבולה היא:

$$x^2-4y+12=0\,.$$

נציב במשוואה 10.7 ונפשט:

$$m^2 + b - 3 = 0\,.$$

פרבולה 2: מוקד $(0,-4)$, מדריך $y=-2$, קודקוד $(0,-3)$.

$p = -4-(-2) = -2$, $a = 2\cdot -2\cdot -3 = 12$. משוואת הפרבולה היא:

$$x^2 + 4y + 12 = 0\,.$$

נציב במשוואה 10.7 ונפשט:

$$m^2 - b - 3 = 0\,.$$

הפתרונות של שתי המשוואות:

$$\begin{aligned} m^2 + b - 3 &= 0 \\ m^2 - b - 3 &= 0\,, \end{aligned}$$

הם $m = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73$ ו-$b = 0$. המשיקים המשותפים שהם הקיפולים הם:

$$y = \sqrt{3}x\,, \quad y = -\sqrt{3}x\,.$$

דוגמה 10.10

פרבולה 1: ללא שינוי.

פרבולה 2: מוקד $(0,-6)$, מדריך $y=-2$, קודקוד $(0,-4)$.

$p = -6-(-2) = -4$, $a = 2\cdot -4\cdot -4 = 32$. משוואת הפרבולה היא:

$$x^2 + 8y + 32 = 0\,.$$

נציב במשוואה 10.7 ונפשט:

$$2m^2 - b - 4 = 0\,.$$

הפתרונות של שתי המשוואות:

$$\begin{aligned} m^2 + b - 3 &= 0 \\ 2m^2 - b - 4 &= 0\,, \end{aligned}$$

הם $m = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \approx \pm 1.53$ ו-$b = \frac{2}{3}$. יש שני משיקים משותפים שהם קיפולים:

$$y = \sqrt{\frac{7}{3}}x + \frac{2}{3}\,, \quad y = -\sqrt{\frac{7}{3}}x + \frac{2}{3}\,.$$

דוגמה 10.11

עכשיו נגדיר פרבולה שציר הסמטרייה שלה הוא ציר ה-x.

פרבולה 1: ללא שינוי, המשוואה היא:

$$m^2 + b - 3 = 0\,.$$

פרבולה 2: מוקד $(4,0)$, מדריך $x=2$, קודקוד $(3,0)$.

$p=4-2=2$, $a=2\cdot 2\cdot 3=12$. משוואת הפרבולה היא:

$$y^2-4x+12=0\,. \tag{10.8}$$

שימו לב שזו משוואה עם x ו-y^2 במקום x^2 ו-y, כך שלא ניתן להשתמש במשוואה 10.7 ונצטרך לפתח את המשוואות מחדש.

נציב את משוואת הישר במשוואה 10.8:

$$\begin{aligned}(mx+b)^2-4x+12&=0\\ m^2x^2+(2mb-4)x+(b^2+12)&=0\end{aligned}$$

נשווה את הדיסקרימיננטה לאפס ונפשט:

$$\begin{aligned}(2mb-4)^2\;-\;4m^2(b^2+12)&=0\\ -3m^2-mb+1&=0\,.\end{aligned}$$

אם ננסה לפתור את שתי המשוואות:

$$\begin{aligned}m^2+b-3&=0\\ -3m^2-mb+1&=0\,,\end{aligned}$$

נקבל משוואה **ממעלה שלישית** במשתנה m:

$$m^3-3m^2-3m+1=0\,. \tag{10.9}$$

למשוואה ממעלה שלישית יש לפחות פתרון ממשי אחד ולכל היותר שלושה פתרונות ממשיים, לכן ייתכנו משיק אחד, שני משיקים או שלשה משיקים משותפים. הנוסחה למציאת פתרונות למשוואה ממעלה שלישית די מסובכת, לכן השתמשתי במחשבון באינטרנט וקיבלתי שלושה פתרונות:

$$m=3.73\,,\;m=-1\,,\;m=0.27\,.$$

מהצורה של המשוואה 10.9, נוכל לנחש ש-1 או -1 הוא פתרון:

$$\begin{aligned}1^3-3\cdot 1^2-3\cdot 1+1&=-4\\ (-1)^3-3\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+1&=0\,.\end{aligned}$$

נחלק את משוואה 10.9 ב-$m-(-1)=m+1$ ונקבל משוואה ריבועית m^2-4m+1 ששורשיה הם $2\pm\sqrt{3}\approx 3.73, 0.27$.

10.6.2 פיתוח משוואות השיקופים

נחשב את $p'_1 = (x'_1, y'_1)$, השיקוף של $p_1 = (x_1, y_1)$ ביחס למשיק l_t שמשוואתו $y = m_t x + b_t$.
תחילה נמצא את הישר l_p שמשוואתו $y = m_p x + b_p$ הניצב ל-l_t ועובר דרך p_1:

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{m_t}x + b_p \\
y_1 &= -\frac{1}{m_t}x_1 + b_p \\
y &= \frac{-x}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t}\right) .
\end{aligned}$$

כעת נמצא את נקודת החיתוך $p_t = (x_t, y_t)$ של l_t ו-l_p:

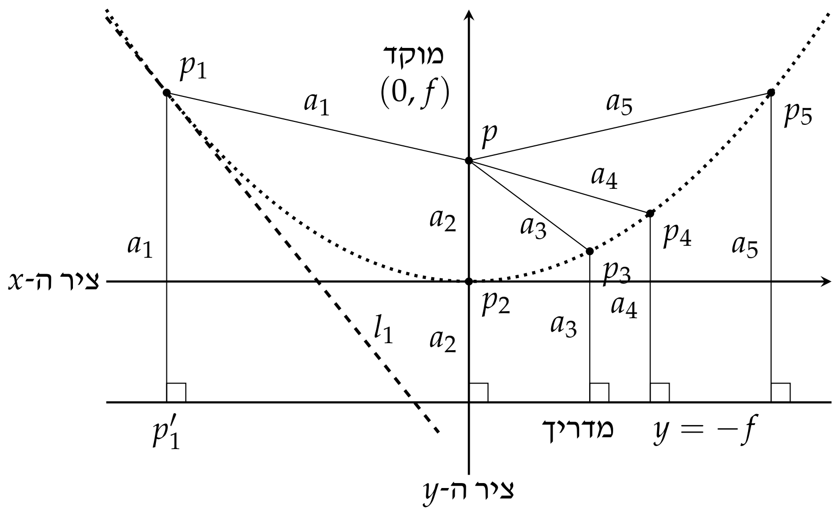
$$\begin{aligned}
m_t x_t + b_t &= \frac{-x_t}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t}\right) \\
x_t &= \frac{\left(y_1 + \frac{x_1}{m_t} - b_t\right)}{\left(m_t + \frac{1}{m_t}\right)} \\
y_t &= m_t x_t + b_t .
\end{aligned}$$

p_t היא נקודה האמצע בין p_1 ל-p'_1:

$$\begin{aligned}
x_t &= \frac{x_1 + x'_1}{2}, \quad & x'_1 &= 2x_t - x_1 , \\
y_t &= \frac{y_1 + y'_1}{2}, \quad & y'_1 &= 2y_t - y_1 .
\end{aligned}$$

דוגמה 10.12 יהי l_t הישר $y = \sqrt{3}x + 0$ ו-$p_1 = (0, 4)$:

$$\begin{aligned}
x_t &= \frac{\left(4 + \frac{0}{\sqrt{3}} - 0\right)}{\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \sqrt{3} \\
y_t &= \sqrt{3}\sqrt{3} + 0 = 3 \\
x'_1 &= 2x_t - x_1 = 2\sqrt{3} \approx 3.46 \\
y'_1 &= 2y_t - y_1 = 2 .
\end{aligned}$$



איור 10.11 : המשיק כמקום גיאומטרי

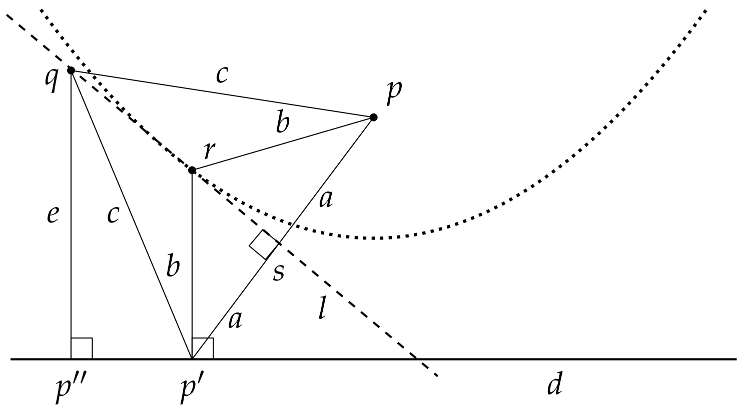
10.6.3 משיקים לפרבולה

אנו רוצים להוכיח שהקיפולים של אקסיומה 6 הם משיקים לפרבולות. איור 10.11 מציג חמש נקודות $p_1,\ldots,p_5$ על הפרבולה, כאשר כל נקודה p_i היא במרחק a_i גם מהמוקד וגם מהמדריך. נוריד ניצבים למדריך מ-p_i, ונסמן ב-p_i' את נקודות החיתוך של הניצב עם המדריך. לפי אקסיומה 2 קיימים קיפולים l_i דרך p_i המניחים את p על המדריך. האיור מציג את הקיפול l_1 דרך p_1 ואת השיקוף p_1'.

משפט 10.7 הקיפולים של אקסיומה 6 הם משיקים לפרבולה והמקומות הגיאומטריים של הנקודות שהן במרחק שווה מ-p_1, p_2 ומ-l_1, l_2, בהתאמה.

הוכחה באיור 10.12 המוקד הוא p, המדריך הוא d, p' היא נקודה על המדריך, ו-l הוא הקיפול המשקף את p על p'. תהי s נקודת החיתוך של $\overline{pp'}$ ו-l. אז $\overline{ps}=\overline{p's}=a$ ו-$\overline{pp'} \perp l$.

תהי r נקודת החיתוך של האנך ל-d דרך p' והקיפול l. אז $\triangle psr \cong \triangle p'sr$ לפי צלע, זווית, צלע. מכאן ש-$\overline{pr}=\overline{p'r}=b$ ולכן r נמצאת על הפרבולה. נבחר נקודה p'' שונה מ-p' על המדריך ונניח שהקיפול l משקף גם את p על p''. תהי q נקודת החיתוך של האנך ל-d דרך p'' והקיפול l. $\triangle psq \cong \triangle p'sq$ ולכן $\overline{pq}=\overline{p'q}=c$. נסמן $\overline{qp''}=e$. אם q נמצאת על הפרבולה, אזי $e=\overline{qp''}=\overline{qp}=c$, אבל c הוא יתר במשולש ישר-זווית $\triangle qp''p'$ ולא ייתכן שהיתר שווה לצלע אחרת במשולש. לכן לקיפול l נקודת חיתוך אחת עם הפרבולה והוא משיק לפרבולה. □



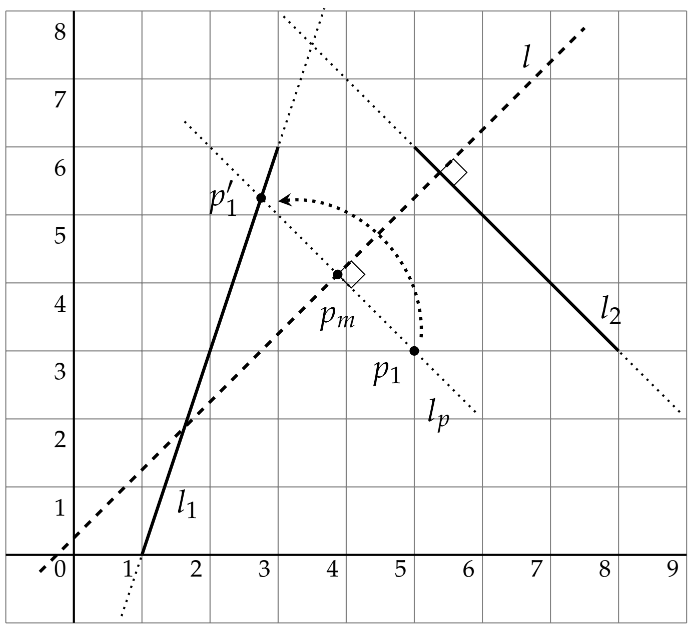
איור 10.12 : ההוכחה שהקיפול הוא משיק

10.7 אקסיומה 7

אקסיומה 10.8 נתונה נקודה $p_1 = (x_1, y_1)$, ונתונים ישרים l_1 ו-l_2, קיים קיפול l הניצב ל-l_2 ומניח את p_1 על l_1 (איור 10.13).

הקיפול הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות על הישר המאונך ל-l_2 ובמרחק שווה מ-p_1 ו-p'_1, השיקוף של p_1 על l_1.

פיתוח משוואת הקיפול: תהי $p_1 = (x_1, y_1)$, יהיו l_1 הישר $y = m_1 x + b_1$ ו-l_2 הישר $y = m_2 x + b_2$. יהי l_p הישר המכיל את $\overline{p_1 p'_1}$. מכיוון ש-$l \perp l_2, l_p \perp l$ נובע ש-$l_2 \parallel l_p$ ומשוואת l_p



איור 10.13 : אקסיומה 7

היא $y = m_2 x + b_p$.

l_p עובר דרך p_1 ולכן $y_1 = m_2 x_1 + b_p$ ומשוואתו $y = m_2 x + (y_1 - m_2 x_1)$. השיקוף $p_1' = (x_1', y_1')$ הוא נקודת החיתוך של l_1 ו-l_p:

$$\begin{aligned} m_1 x_1' + b_1 &= m_2 x_1' + (y_1 - m_2 x_1) \\ x_1' &= \frac{y_1 - m_2 x_1 - b_1}{m_1 - m_2} \\ y_1' &= m_1 x_1' + b_1 \,. \end{aligned}$$

$p_m = (x_m, y_m)$, נקודת האמצע של l_p, היא:

$$(x_m, y_m) = \left(\frac{x_1 + x_1'}{2}, \frac{y_1 + y_1'}{2} \right) \,.$$

$l \perp l_2$ ועובר דרך p_m ולכן משוואתו היא:

$$y_m = -\frac{1}{m_2} x_m + b_m \,.$$

כאשר ניתן לחשב את b_m בעזרת $y = -\frac{1}{m_2} x + b_m$:

$$b_m = y_m + \frac{x_m}{m_2} \,.$$

המשוואה של הקיפול l היא:

$$y = -\frac{1}{m_2} x + \left(y_m + \frac{x_m}{m_2} \right) \,.$$

דוגמה 10.13 נתונה הנקודה $p_1 = (5,3)$, נתון הישר l_1 שמשוואתו $y = 3x - 3$, ונתון הישר l_2 שמשוואתו $y = -x + 11$. אז:

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{3 - (-1) \cdot 5 - (-3)}{3 - (-1)} = \frac{11}{4} \\ y_1' &= 3 \cdot \frac{11}{4} + (-3) = \frac{21}{4} \\ p_m &= \left(\frac{5 + \frac{11}{4}}{2}, \frac{3 + \frac{21}{4}}{2} \right) = \left(\frac{31}{8}, \frac{33}{8} \right) \,. \end{aligned}$$

משוואת הקיפול היא:

$$y = -\frac{1}{-1} \cdot x + \left(\frac{33}{8} + \frac{\frac{31}{8}}{-1} \right) = x + \frac{1}{4} \,.$$

מה ההפתעה?

אוריגמי, אומנות קיפולי הנייר, קיימת מאות שנים, ולכן מפתיע שרק במאה ה-20 פותחה הפורמליזציה שלה. מפתיע עוד יותר שקיימת אקסיומטיזציה של קיפולי נייר. המתמטיקה של אוריגמי היא דרך מצוינת ללימוד גיאומטריה אנליטית, תכונות של פרבולות ומושג המקום הגיאומטרי.

מקורות

ניתן למוצא את אקסיומות האוריגמי ב-[56]. לאנג (Lang) [26] מביא דוגמאות ליצירות אוריגמי. פרק 10 ב [31] מציג את התיאוריה המפורטת של האורגמי, כולל הוכחה שלפרבולה ייתכנו אפס משיקים, משיק אחד, שני משיקים או שלושה. אוריה בן-לולו הראתה לי את ההוכחה של משפט 10.7. מצאתי שתוכנה גיאומטרית כגון Geogebra עוזרת להבין את הקשר בין הגיאומטריה והאלגברה של האקסיומות.

הצגה ברורה של משוואות קוביות ניתן למצוא בפרקים $1, 2$ של [6].

פרק 11

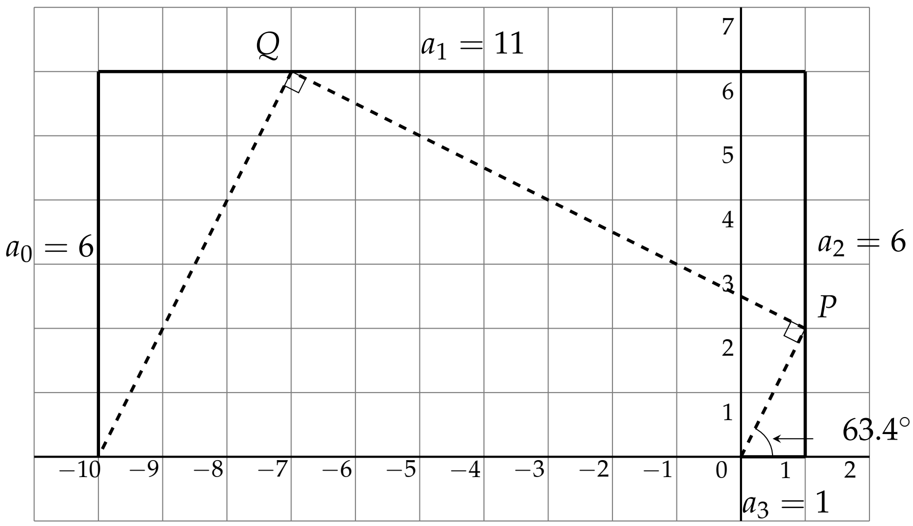
השיטה של ליל והקיפול של בלוץ'

11.1 קסם

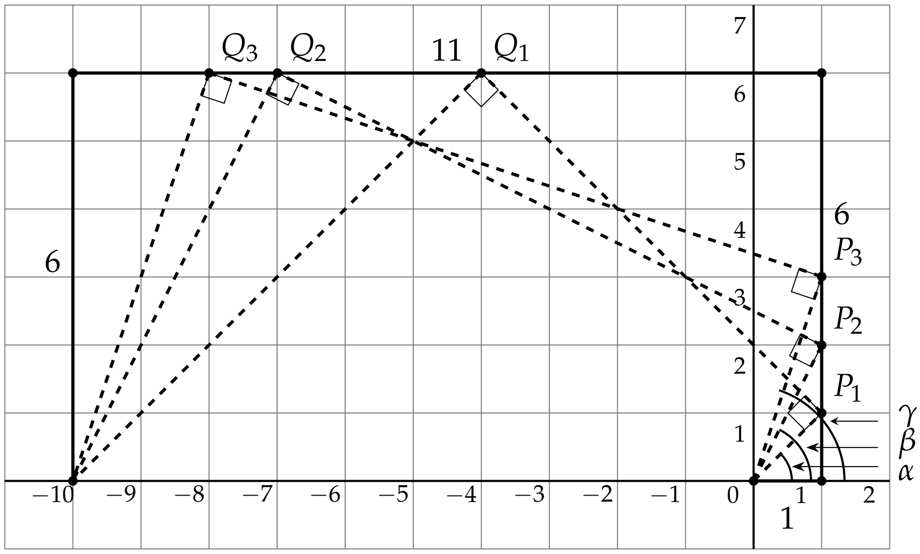
במערכת קרטזית נבנה מ-$(0,0)$ מסלול המורכב מארבעה קטעים באורכים שלהלן (איור 11.1):

$$\{a_3 = 1, a_2 = 6, a_1 = 11, a_0 = 6\}\,.$$

הבנייה מתחילה מראשית הצירים בכיוון החיובי של ציר ה-x תוך סיבוב של 90° בין הקטעים. בנו מסלול שני המתחיל בקטע היוצא מראשית הצירים ויוצר זווית בת 63.4° עם ציר ה-x, וסמנו ב-P את נקודת החיתוך שלו עם a_2. פנו 90° שמאלה ובנו קטע ש- Q היא נקודת החיתוך שלו עם a_1. פנו 90° שמאלה פעם נוספת, בנו קטע ושימו לב שהוא חותך את קצה המסלול הראשון הנמצא ב-$(-10,0)$.



איור 11.1: קסם



איור 11.2: שלושה מסלולים עבור שלושה שורשים

נחשב $-\tan 63.4^\circ = -2$ ונציב ערך זה בפולינום שהמקדמים שלו הם אורכי הקטעים במסלול הראשון:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\ p(-\tan 63.4^\circ) &= (-2)^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6 = 0\,. \end{aligned}$$

בשעה טובה! מצאנו שורש של $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, פולינום ממעלה שלישית.

לפולינום $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ שלושה שורשים $-1, -2, -3$. מחישוב הנגדי של הארקטנגנס של השורשים מתקבל:

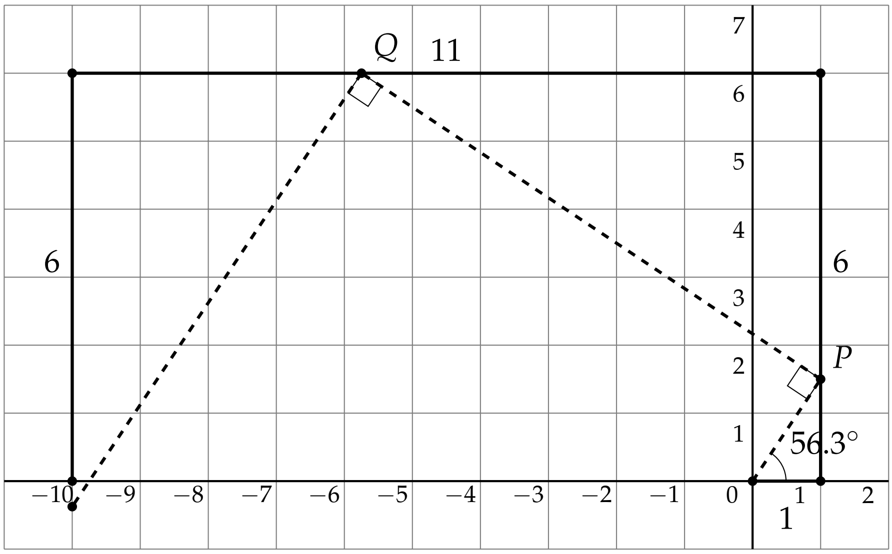
$$\alpha = -\tan^{-1} -1 = 45^\circ, \quad \beta \approx -\tan^{-1} -2 = 63.4^\circ, \quad \gamma = -\tan^{-1} -3 \approx 71.6^\circ\,.$$

באיור 11.2 רואים שעבור כל אחת מהזוויות, המסלול השני חותך את קצה המסלול הראשון.

באיור 11.3 אנו רואים שעבור זווית אחרת, נגיד 56.3°, שעבורה $-\tan 56.3 = -1.5$ – אינו שורש, המסלול השני חותך את המשך הקטע a_0, אבל לא ב-$(-10, 0)$, קצה המסלול הראשון.

דוגמה זו ממחישה שיטה שהומצאה על ידי אדוארד ליל (Eduard Lill) בשנת 1867. בשיטה הגרפית אפשר למצוא את השורשים הממשיים של כל פולינום. למעשה השיטה אינה מוצאת שורשים אלא מוודאת שערך נתון הוא שורש.

סעיף 11.2 מציג תיאור פורמלי של השיטה של ליל (מוגבל לפולינומים ממעלה שלישית) ומביא דוגמאות עבור מקרים מיוחדים. הוכחה לנכונות השיטה של ליל מובאת בסעיף 11.3. סעיף 11.4 מראה איך ליישם את השיטה באמצעות הקיפול של בלוך' (Beloch), שהוא למעשה האקסיומה השישית של האוריגמי, אבל קדם לפורמליזציה של האוריגמי בשנים רבות.

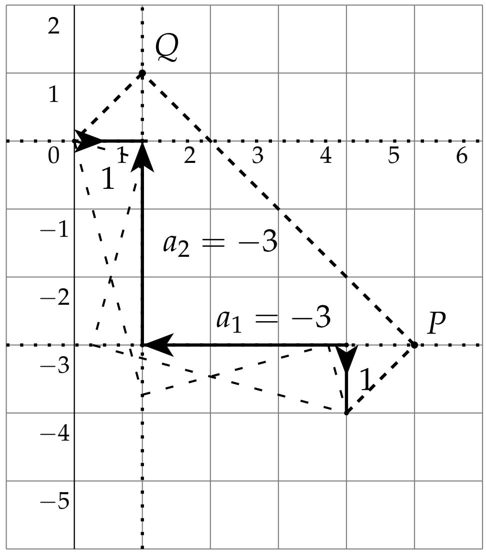


איור 11.3 : מסלול שאינו מתאים לשורש

11.2 הצגת השיטה של ליל Lill

11.2.1 השיטה של ליל כאלגוריתם

- נתון פולינום שרירותי $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.
- נבנה את המסלול הראשון : לכל מקדם a_3, a_2, a_1, a_0 (בסדר זה) נבנה קטע המתחיל בראשית הצירים $O = (0,0)$ בכיוון החיובי של ציר ה-x. נפנה 90° נגד כיוון השעון בין הקטעים.
- נבנה את המסלול השני :
  - נבנה קטע מ-O היוצר זווית θ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x וחותך את a_2 ב-P.
  - נפנה $\pm 90^\circ$ ונבנה קטע מ-P ונסמן ב-Q את נקודת החיתוך שלו עם a_1.
  - נפנה $\pm 90^\circ$ ונבנה קו מ-Q ונסמן ב-R את נקודת החיתוך שלו עם a_0.
  - אם R היא נקודת הקצה של המסלול הראשון, אז $-\tan\theta$ הוא שורש של $p(x)$.
- מקרים מיוחדים :
  - בבניית המסלול הראשון, אם המקדם הוא שלילי, נבנה את הקטע **בכיוון ההפוך**.
  - בבניית המסלול הראשון, אם המקדם הוא אפס, אין לבנות קטע אבל כן נבצע את הפנייה הבאה של $\pm 90^\circ$.
- הערות :
  - נקודת החיתוך של קטע עם "a_i היא חיתוך הקטע עם a_i או עם הקו המשכו.
  - כאשר בונים את המסלול השני, נבחר לפנות ימינה או שמאלה ב-90° כך שלמסלול השני תהיה נקודת חיתוך עם הקטעים במסלול הראשון או עם המשכו.



איור 11.4: מסלול עבור פולינום עם מקדמים שליליים

11.2.2 מקדמים שליליים

לפולינום $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ (סעיף 10.6) מקדמים שליליים. נפעיל את השיטה של ליל על הפולינום (איור 11.4).[1] נתחיל בבניית קטע באורך 1 לכיוון החיובי של ציר ה-x. אחר כך נפנה שמאלה $90°$ (למעלה), אבל המקדם שלילי ולכן נבנה קטע באורך -3, זאת אומרת קטע באורך 3 **כלפי מטה**, הפוך מהכיוון שאנו פונים אליו. לאחר פנייה נוספת של $90°$ לשמאל, המקדם שוב שלילי כך שנבנה קטע באורך 3 לאחור, לכיוון ימין. לבסוף, נפנה עם הפנים כלפי מטה ונבנה קטע באורך 1.

המסלול השני מתחיל עם ישר בזווית $45°$ יחסית לציר ה-x. נקודת החיתוך של הישר עם המשך הקטע a_2 היא $(1,1)$. נפנה $-90°$ (ימינה), נבנה קטע שנקודת החיתוך שלו עם המשך הקטע a_1 היא $(5,-3)$. נפנה שוב $-90°$, נבנה קטע שנקודת החיתוך שלו היא בנקודת הקצה של המסלול הראשון, $(4,-4)$.

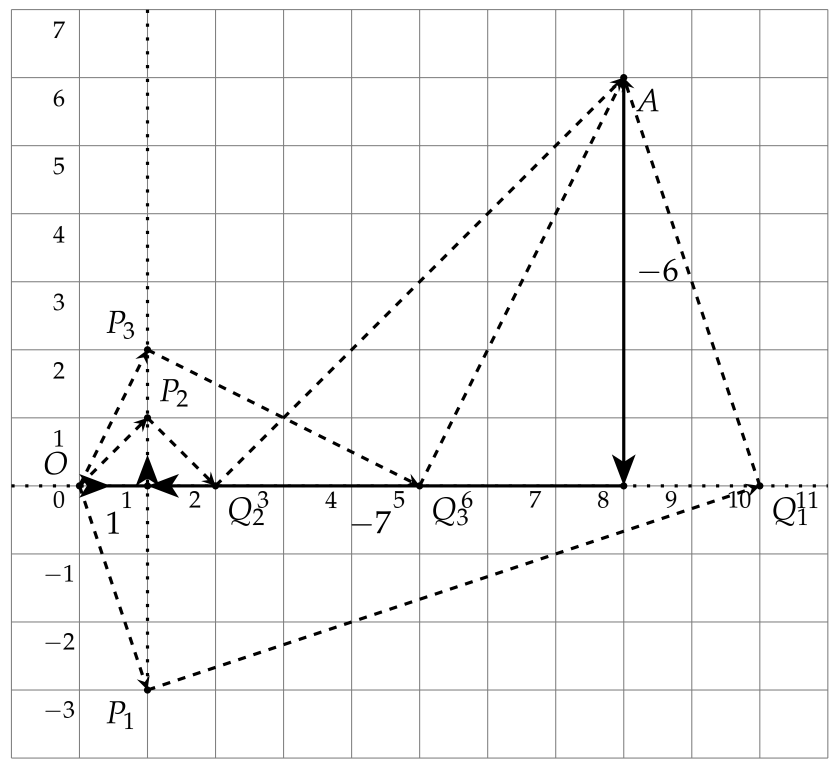
$-\tan 45° = -1$, ולכן -1 הוא שורש ממשי של הפולינום:

$$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 0\,.$$

11.2.3 מקדמים שהם אפס

a_2, המקדם של x^2 ב-$x^3 - 7x - 6 = 0$, הוא אפס. עבור מקדם אפס, אנו "בונים" קטע באורך 0, כלומר איננו משרטטים קו, אבל כן פונים $\pm 90°$ לפני ואחרי ש"בונים" אותו כפי שמסומן על ידי החץ הפונה למעלה בנקודה $(1,0)$ (איור 11.5). נפנה שוב ונבנה קטע באורך -7, כלומר באורך 7 לאחור אל $(8,0)$. לבסוף, נפנה פעם אחת אחרונה ונבנה קטע באורך -6 עד $(8,6)$.

[1] נדון בקווים המקווקווים העדינים בסעיף 11.2.4.



איור 11.5: מסלול עבור פולינום עם מקדם שהוא אפס

שלושה מסלולים חותכים את קצה המסלול הראשון:

$$-\tan 45^\circ = -1,\quad -\tan 63.4^\circ = -2,\quad -\tan(-71.6^\circ) = 3\,.$$

נסיק שקיימים שלושה שורשים ממשיים $\{-1,-2,3\}$. בדיקה:

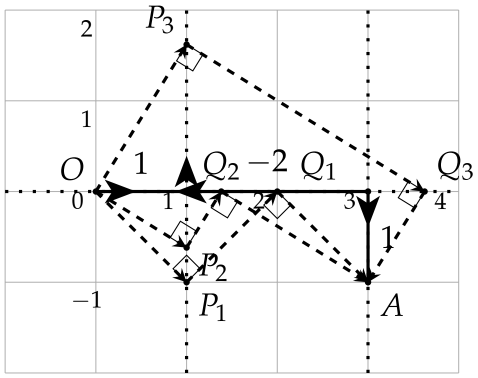
$$(x+1)(x+2)(x-3) = (x^2+3x+2)(x-3) = x^3-7x-6\,.$$

11.2.4 שורשים לא שלמים

נבדוק את הפולינום $p(x)=x^3-2x+1$ (איור 11.6): הקטע הראשון של המסלול הראשון עובר מ-$(0,0)$ ל-$(1,0)$ ואז פונה למעלה. המקדם של x^2 הוא אפס כך שלא נשרטט קטע ונפנה שמאלה. המקדם הבא הוא -2 כך שהקטע הבא נבנה לאחור מ-$(1,0)$ ל-$(3,0)$. לבסוף, המסלול פונה למטה וקטע באורך 1 נבנה מ-$(3,0)$ ל-$(3,-1)$.

קל לראות שאם המסלול השני מתחיל בזווית של -45° הוא יחתוך את המסלול הראשון ב-$(3,-1)$. מכאן ש-$-\tan^{-1} -45^\circ = 1$ הוא שורש. אם נחלק את $p(x)$ ב-$x-1$, נקבל פולינום ריבועי x^2+x-1 ששורשיו הם:

$$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \approx 0.62,\ -1.62\,.$$



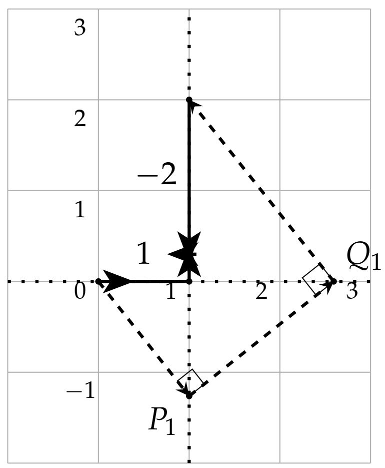
איור 11.6: שורשים שאינם מספרים שלמים

לכן קיימים שני מסלולים נוספים: אחד שמתחיל ב- $-\tan^{-1} 0.62 \approx -31.8^\circ$, ואחד שמתחיל ב- $-\tan^{-1} 1.62 \approx 58.3^\circ$.

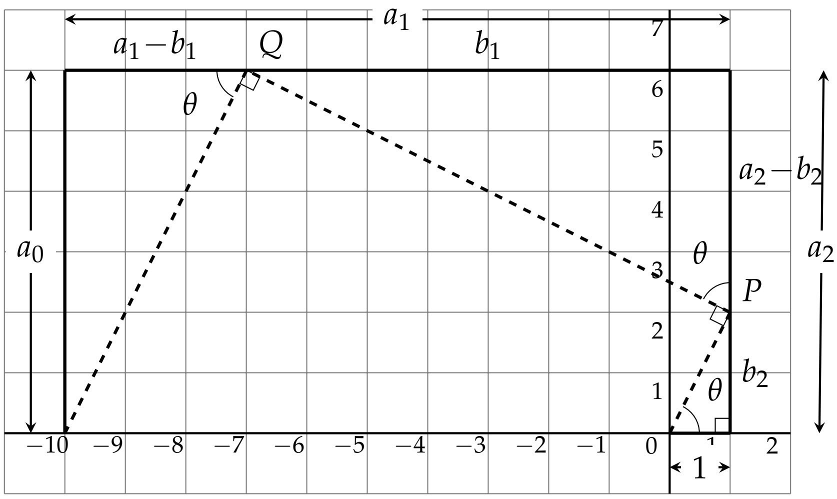
לפולינום $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ (סעיף 11.2.2) שורשים $2 \pm \sqrt{3} \approx 3.73, 0.27$. הזוויות הן $-\tan^{-1} 3.73 \approx -75^\circ$ ו-$-\tan^{-1} 0.27 \approx -15^\circ$ כפי שניתן לראות בקווים עם הקווקוו העדין באיור 11.4.

11.2.5 השורש השלישי של 2

כדי להכפיל קובייה עלינו לחשב את $\sqrt[3]{2}$, שורש של הפולינום ממעלה שלישית $x^3 - 2$. בבנייה של המסלול הראשון נפנה פעמיים שמאלה בלי לבנות קטעים, כי a_1 ו-a_2 שניהם שווים לאפס. נפנה



איור 11.7: השורש השלישי של 2



איור 11.8: הוכחת השיטה של ליל

שוב שמאלה (למטה) ונבנה קטע לאחור (למעלה) כי $a_0 = -2$ שלילי. נבנה את הקטע הראשון של המסלול השני בזווית של -51.6° מכיוון ש-$\sqrt[3]{2} \approx 1.26 \approx -\tan(-51.6^\circ)$ (איור 11.7).

11.3 הוכחת השיטה של ליל

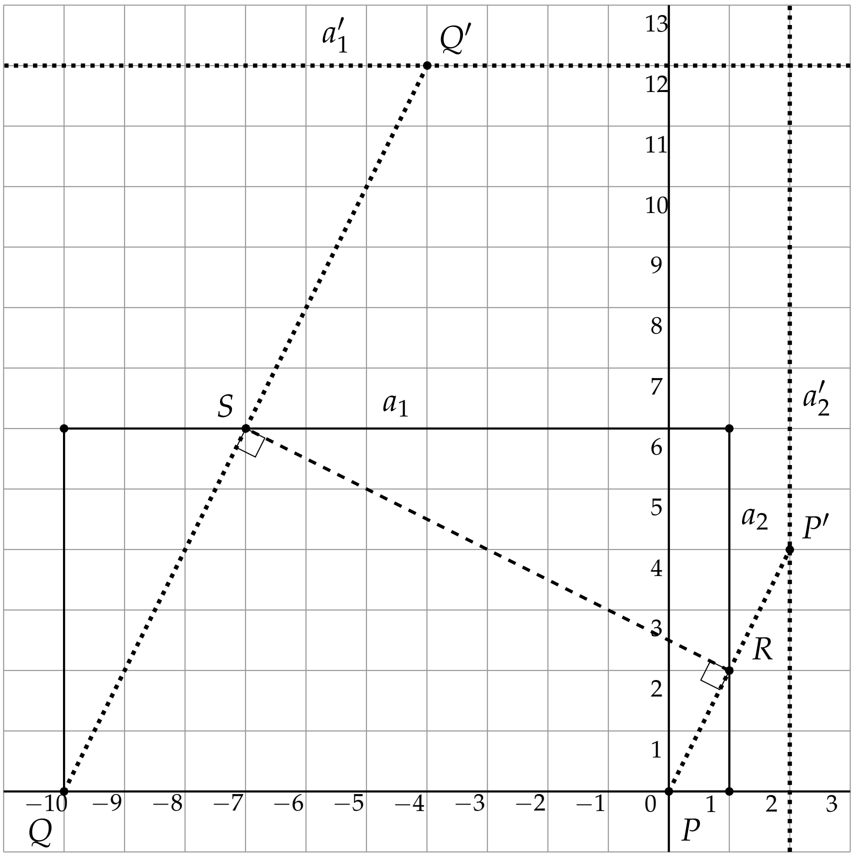
נגביל את הדיון לפולינומים שהמקדם המוביל שלהם הוא אחד, $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, אחרת אפשר לחלק ב-$a_3$ ולפולינום המתקבל אותם שורשים. באיור 11.8 הקטעים במסלול הראשון מסומנים ב-$a_1 - b_1, a_2 - b_2, b_1, b_2$. במשולש ישר-זווית אם אחת הזוויות החדות היא θ השנייה היא $90^\circ - \theta$. מכאן שהזווית מעל P והזווית משמאל ל-Q שוות ל-θ. כעת נרשום סדרת משוואות עבור $\tan\theta$ בשלושת המשולשים:

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{b_2}{1} = b_2 \\
\tan\theta &= \frac{b_1}{a_2 - b_2} = \frac{b_1}{a_2 - \tan\theta} \\
b_1 &= \tan\theta(a_2 - \tan\theta) \\
\tan\theta &= \frac{a_0}{a_1 - b_1} = \frac{a_0}{a_1 - \tan\theta(a_2 - \tan\theta)}\,.
\end{aligned}$$

נפשט את המשוואה האחרונה, נכפול ב--1 ונכניס את ממקדמים של -1 לתוך החזקות:

$$\begin{aligned}
(\tan\theta)^3 - a_2(\tan\theta)^2 + a_1(\tan\theta) - a_0 &= 0 \\
(-\tan\theta)^3 + a_2(-\tan\theta)^2 + a_1(-\tan\theta) + a_0 &= 0\,.
\end{aligned}$$

נסיק ש-$-\tan\theta$ הוא שורש ממשי של $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.



איור 11.9: הקיפול של בלוץ' עבור $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

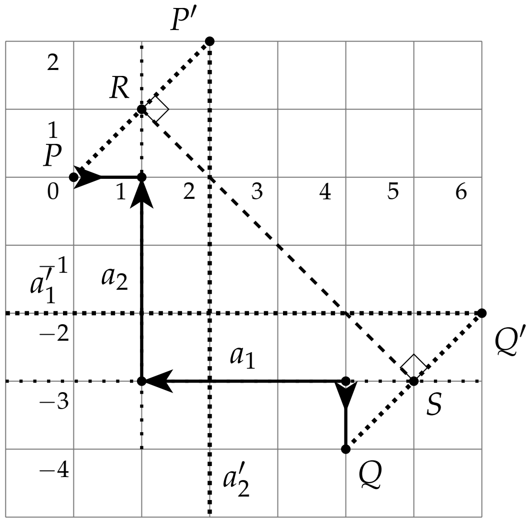
11.4 הקיפול של בלוץ'

מרגריטה פ' בלוץ' (Margharita P. Beloch) גילתה קשר מרתק בין אוריגמי לשיטה של ליל: יישום אחד בלבד של פעולה שנודעה בהמשך כאקסיומה 6 מייצרת שורש ממשי של כל פולינום ממעלה שלישית. לעתים מכנים את הפעולה "הקיפול של בלוץ'".

נדגים את השיטה על הפולינום $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ (סעיף 11.1). נזכור שקיפול הוא האנך האמצעי של הקטע המחבר בין כל נקודה לשיקוף שלה ביחס לישר הקיפול. אנו רוצים ש-$\overline{RS}$ באיור 11.9 יהיה אנך אמצעי גם של $\overline{QQ'}$ וגם של $\overline{PP'}$, כאשר P', Q' הם השיקופים של P, Q ביחס ל-$\overline{RS}$, בהתאמה.

נבנה ישר a_2' מקביל ל-a_2 שמרחקו מ-a_2 שווה למרחק של a_2 מ-P, ונבנה ישר a_1' מקביל ל-a_1 שמרחקו מ-a_1 שווה למרחק של a_1 מ-Q. נפעיל את אקסיומה 6 כדי להניח בו-זמנית את P ב-P' על a_2' ואת Q ב-Q' על a_1'. הקיפול $\overline{RS}$ הוא האנך האמצעי של הקטעים $\overline{PP'}$ ו-$\overline{QQ'}$, ולכן הזוויות ב-R ו-S הן זוויות ישרות כפי שמתחייב בשיטה של ליל.

איור 11.10 מציג את הקיפול של בלוץ' עבור הפולינום $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ (סעיף 11.2.2). a_2 הוא קטע על הישר האנכי $x = 1$, והקטע המקביל לו הוא a_2' על הישר $x = 2$. a_1 הוא קטע על הישר האופקי $y = -3$, והקטע המקביל לו הוא a_1' על הישר $y = -2$. $\overline{RS}$ הוא האנך האמצעי גם של



איור 11.10 : הקיפול של Beloch עבור $x^3 - 3x^2 + -3x + 1$

$\overline{PP'}$ וגם של $\overline{QQ'}$. המסלול $\overline{PRSQ}$ זהה למסלול באיור 11.4.

מה ההפתעה?

הדגמת שיטתו של ליל כקסם תמיד מפתיעה. ניתן לבצע אותה באמצעות תוכנה גיאומטרית כגון גיאוגברה. מפתיע גם שהשיטה של ליל שפורסמה בשנת 1867, והקיפול של בלוץ' שפורסם ב-1936 הקדימו בשנים רבות את אקסיומות האוריגמי.

מקורות

פרק זה מבוסס על [8, 24, 40].

פרק 12

בניות גיאומטריות באוריגמי

בפרק זה נראה שבניות באוריגמי חזקות יותר מבניות בסרגל ובמחוגה. נביא שתי בניות לחלוקת זווית לשלושה חלקים, הראשונה של היסאשי איבּ (Hisashi Abe) (סעיף 12.1) והשנייה של ג׳ורג׳ א׳ מרטין (George E. Martin) (סעיף 12.2); שתי בניות להכפלת קובייה, הראשונה של פיטר מסר (Peter Messer) (סעיף 12.3) והשנייה של מרגריטה פ׳ בלוך׳ (Marghareta P. Beloch) (סעיף 12.4). הבנייה האחרונה היא של מתושע (nonagon), מצולע משוכלל בעל תשע צלעות (סעיף 12.5).

12.1 הבנייה של איבּ לחלוקת זווית לשלושה חלקים

נתונה זווית חדה $\angle PQR$, נבנה את הישר p המאונך ל-$\overline{QR}$ ב-Q ואת הישר q המאונך ל-p ב-A כך שהוא חותך את $\overline{PQ}$. נבנה את הישר r, האנך האמצעי של $\overline{AQ}$ שחותך אותו בנקודה B. לפי אקסיומה 6 נבנה קיפול l המניח את A על $\overline{PQ}$ בנקודה A' ומניח את Q על r בנקודה Q'. תהי B' השיקוף של B ביחס ל-l. נבנה את הקטעים $\overline{QB'}$ ו-$\overline{QQ'}$ (איור 12.1).

משפט 12.1 $\angle PQB' = \angle B'QQ' = \angle Q'QR = \angle PQR/3$.

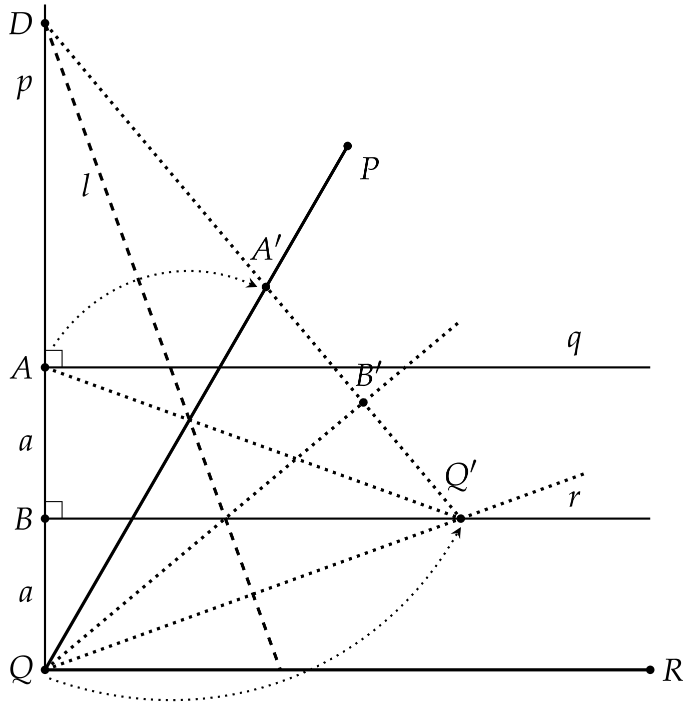
הוכחה(1) הנקודות A', B', Q' הן שיקופים ביחס לאותו ישר l של הנקודות A, B, Q הנמצאות על ישר אחד $\overline{DQ}$, ולכן הן נמצאות על קטע אחד $\overline{DQ'}$. לפי הבנייה, $\overline{AB} = \overline{BQ}$, $\angle ABQ' = \angle QBQ' = 90^\circ$, $\overline{BQ'}$ היא צלע משותפת, ולכן $\triangle ABQ' \cong \triangle QBQ'$ לפי צלע,זווית, צלע. מכאן ש-$\angle AQ'B = \angle BQ'Q = \alpha$ ו-$\triangle AQ'Q$ שווה-שוקיים (איור 12.2).

בגלל השיקוף $\triangle AQ'Q \cong \triangle A'QQ'$, ולכן גם $\triangle A'QQ'$ הוא משולש שווה-שוקיים. $\overline{QB'}$, השיקוף של $\overline{Q'B}$, הוא גובה לבסיס במשולש שווה-שוקיים ולכן $\angle A'QB' = \angle Q'QB' = \alpha$. לפי זוויות מתחלפות $\angle Q'QR = \angle QQ'B = \alpha$. ביחד:

$$\triangle PQB' = \angle A'QB' = \angle B'QQ' = \angle Q'QR = \alpha\,.$$

$\square$

הוכחה(2) הקו l הוא קיפול ולכן הוא האנך האמצעי של $\overline{QQ'}$. נסמן ב-U את נקודת החיתוך של l עם $\overline{QQ'}$, נסמן ב-V את נקודת החיתוך שלו עם $\overline{QB'}$ (איור 12.2). $\triangle VUQ \cong \triangle VUQ'$ לפי



איור 12.1: הבנייה של אייב לחלוקת זווית לשלושה חלקים

צלע, זווית, צלע כי $\overline{VU}$ צלע משותפת, הזוויות ב-U הן זוויות ישרות, ו-$\overline{Q'U} = \overline{QU}$. מכאן ש-$\angle VQU = \angle VQ'U = \alpha$ ו-$\angle Q'QR = \angle VQ'U = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות.

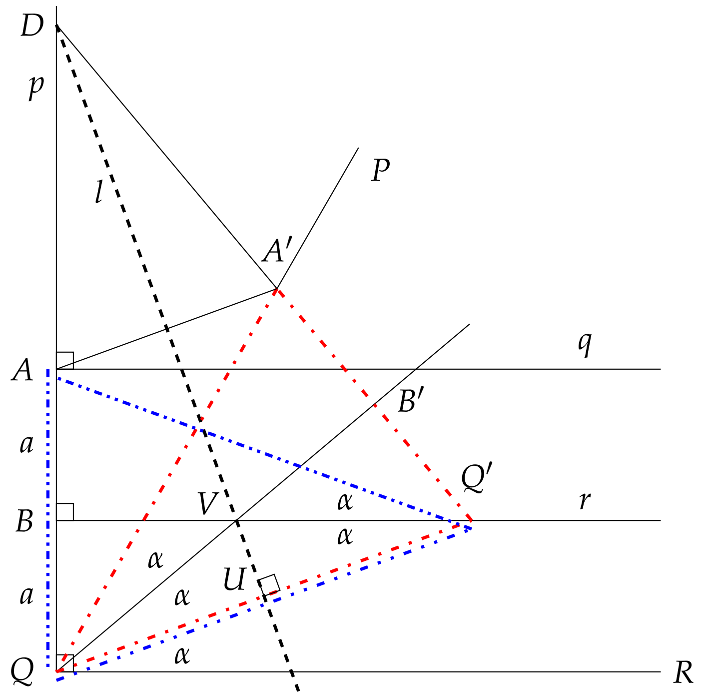
כמו בהוכחה הראשונה, A', B', Q' הן כולן שיקופים ביחס לישר l, ולכן כולן מונחות על קטע אחד $\overline{DQ'}$, ו-$\overline{A'B'} = \overline{AB} = \overline{BQ} = \overline{B'Q'} = a$. מכאן ש-$\triangle A'B'Q \cong \triangle Q'B'Q$ לפי צלע, זווית, צלע ו-$\angle A'QB' = \angle Q'QB' = \alpha$. □

12.2 הבנייה של מרטין לחלוקת זווית לשלושה חלקים

בנייה נתונה זווית חדה $\angle PQR$. תהי M נקודת האמצע של $\overline{PQ}$. בנו p ניצב ל-$\overline{QR}$ העובר דרך M ובנו q ניצב ל-p העובר דרך M. q מקביל ל-$\overline{QR}$. לפי אקסיומה 6 בנו קיפול l המניח את P ב-P' על p, ומניח את Q ב-Q' על q. ייתכן שקיימים מספר קיפולים מתאימים; בחרו את הקיפול החותך את $\overline{PM}$. בנו את הקטעים $\overline{PP'}$ ו-$\overline{QQ'}$ (איור 12.3).

משפט 12.2 $\angle Q'QR = \angle PQR/3$.

הוכחה סמנו ב-U את נקודת החיתוך של $\overline{QQ'}$ עם p, וסמנו ב-V את נקודת החיתוך שלו עם l. סמנו ב-W את החיתוכים של $\overline{PQ}$ ו-$\overline{P'Q'}$ עם l. לא ברור מאליו ש-$\overline{PQ}$ ו-$\overline{P'Q'}$ חותכים את l באותה נקודה. אבל $\triangle PWP' \sim \triangle QWQ'$ ומכאן שהגבהים חוצים את שתי הזוויות הקודקודיות $\angle PWP', \angle QWQ'$ והם חייבים להיות על ישר אחד.



איור 12.2: הוכחות של הבנייה של אייב (נשתמש ב-U, V בהוכחה השנייה)

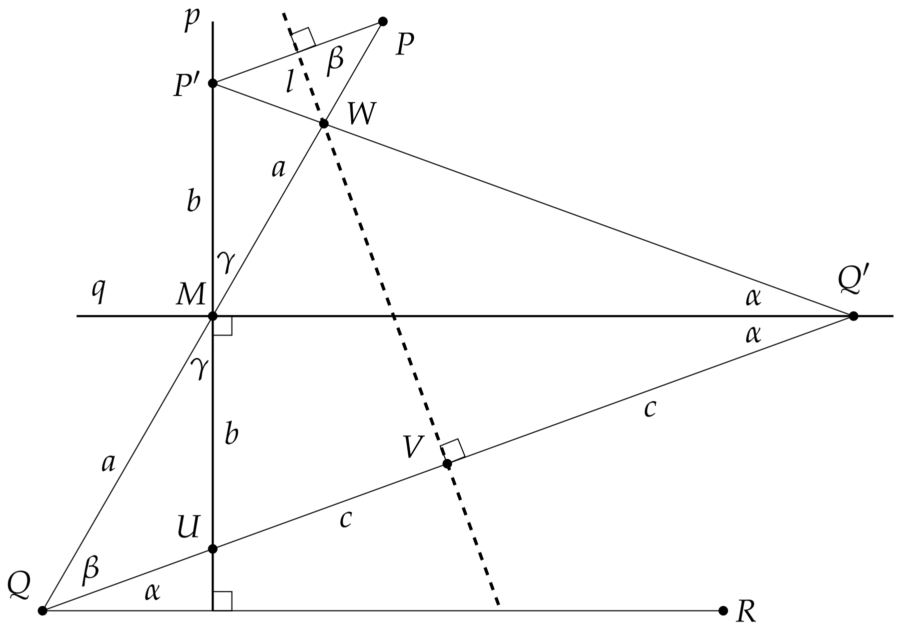
$\triangle QMU \cong \triangle PMP'$ לפי זווית, צלע, זווית: $\angle P'PM = \angle UQM = \beta$ לפי זוויות מתחלפות, $\overline{QM} = \overline{MP} = a$ כי M היא נקודת האמצע של $\overline{PQ}$ ו-$\angle QMU = \angle PMP' = \gamma$ כי הן זוויות קודקודיות. מכאן ש-$\overline{P'M} = \overline{MU} = b$.

$\triangle P'MQ' \cong \triangle UMQ'$ לפי צלע, זווית, צלע: ראינו ש-$\overline{P'M} = \overline{MU} = b$, הזוויות ב-$M$ הן זוויות ישרות, $\overline{MQ'}$ צלע משותפת. הגובה של המשולש שווה-השוקיים $\triangle P'Q'U$ הוא חוצה הזווית $\angle P'Q'U$ ולכן $\angle P'Q'M = \angle UQ'M = \alpha$. בנוסף, $\angle UQ'M = \angle Q'QR = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות.

$\triangle QWV \cong \triangle Q'WV$ לפי צלע, זווית, צלע: $\overline{QV} = \overline{VQ'} = c$ הזוויות ב-V ישרות ו-$\overline{VW}$ צלע משותפת. מכאן ש:

$$\angle WQV = \beta = \angle WQ'V = 2\alpha$$
$$\angle PQR = \beta + \alpha = 3\alpha \,.$$

□



איור 12.3 : בנייה של Martin

12.3 הבנייה של מסר להכפלת קובייה

לקובייה בנפח V צלעות באורך $\sqrt[3]{V}$. בקובייה בעלת נפח כפול אורכי הצלעות הם $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{2V}$, ולכן אם נוכל לבנות קטע באורך $\sqrt[3]{2}$, נוכל לכפול אותו באורך הנתון $\sqrt[3]{V}$ כדי להכפיל את נפח הקובייה.

בנייה: ניקח דף נייר שהוא ריבוע יחידה ונקפל אותו לחצי כדי למצוא את הנקודות $I = (0, 1/2)$, $J = (1, 1/2)$ (איור 12.4). נבנה את הקטעים $\overline{AC}$ ו-$\overline{BJ}$. אפשר לחשב את שיעורי נקודת החיתוך $K = (2/3, 1/3)$ על ידי פתרון המשוואות $y = 1 - x$ ו-$y = x/2$.

נבנה את הקטע $\overline{EF}$ ניצב ל-$\overline{AB}$ דרך K, ונבנה את $\overline{GH}$, השיקוף של $\overline{BC}$ ביחס ל- $\overline{EF}$. חילקנו את צלע הריבוע לקטעים באורך $1/3$.

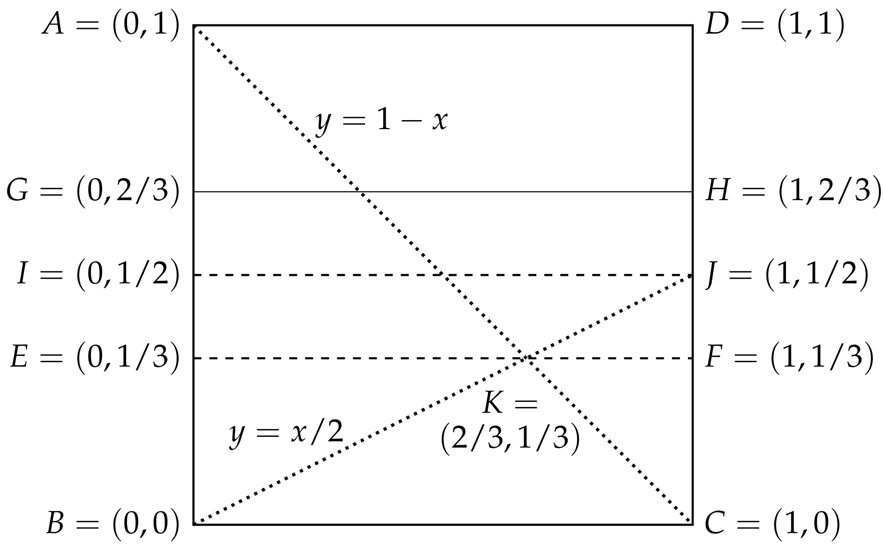
נשתמש באקסיומה 6 כדי להניח את C ב-C' על $\overline{AB}$, ולהניח את F ב-F' על $\overline{GH}$. נסמן ב-L את נקודת החיתוך של הקיפול עם $\overline{BC}$ ונסמן ב-b את אורכו של $\overline{BL}$. נשנה את סימון הצלע של הריבוע ל-$a + 1$ כאשר $a = \overline{AC'}$. אורכו של $\overline{LC}$ הוא $(a+1) - b$ (איור 12.5).

משפט 12.3 $\overline{AC'} = \sqrt[3]{2}$.

הוכחה לאחר ביצוע הקיפול, הקטע $\overline{LC'}$ הוא שיקוף של הקטע $\overline{LC}$ באותו אורך, והקטע $\overline{C'F'}$ הוא שיקוף של הקטע $\overline{CF}$. מכאן ש :

$$\overline{GC'} = a - \frac{a+1}{3} = \frac{2a-1}{3}\,. \tag{12.1}$$

$\angle FCL$ היא זווית ישרה, לכן גם $\angle F'C'L$ היא זווית ישרה.

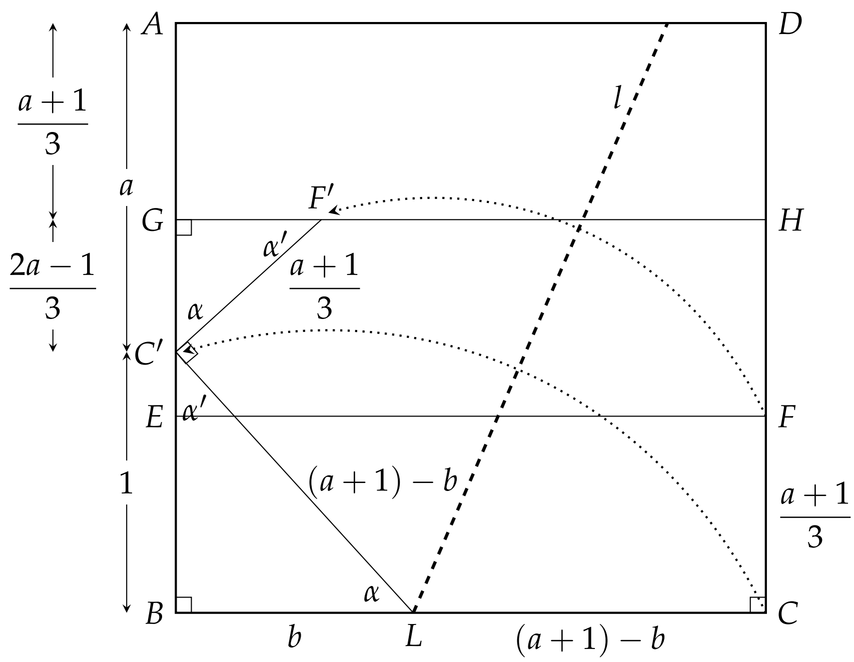


איור 12.4: בניית קטע באורך $1/3$

$\triangle C'BL$ הוא משולש ישר-זווית ולפי משפט פיתגורס:

$$1^2 + b^2 = ((a+1) - b)^2 \tag{12.2}$$

$$b = \frac{a^2 + 2a}{2(a+1)}\,. \tag{12.3}$$



איור 12.5: בניית $\sqrt[3]{2}$

$\angle GC'F' + \angle F'C'L + \angle LC'B = 180^\circ$ כי הם יוצרים את הישר $\overline{GB}$. נסמן $\alpha = \angle GC'F'$:

$$\angle LC'B = 180^\circ - \angle F'C'L - \angle GC'F' = 90^\circ - \alpha\,,$$

ונסמן $\alpha' = 90^\circ - \alpha$. המשולשים $\triangle C'LB$, $\triangle C'F'G$ הם משולשים ישרי-זווית, ולכן $\angle C'LB = \alpha$ ו-$\angle C'F'G = \alpha'$. מכאן ש-$\triangle C'BL \sim \triangle F'GC'$ ו-

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{C'L}} = \frac{\overline{GC'}}{\overline{C'F'}}\,.$$

ממשוואה 12.1 מתקבל:

$$\frac{b}{(a+1)-b} = \frac{\dfrac{2a-1}{3}}{\dfrac{a+1}{3}}\,.$$

נשתמש בערכו של b ממשוואה 12.3 ונקבל:

$$\frac{\dfrac{a^2+2a}{2(a+1)}}{(a+1)-\dfrac{a^2+2a}{2(a+1)}} = \frac{2a-1}{a+1}$$

$$\frac{a^2+2a}{a^2+2a+2} = \frac{2a-1}{a+1}\,.$$

נפשט ונקבל $a^3 = 2$ ו-$a = \sqrt[3]{2}$. □

12.4 הבנייה של בלוץ' להכפלת קובייה

הקיפול של בלוץ' (אקסיומה 6) מסוגל לפתור משוואות ממעלה שלישית, ולכן סביר לשער שניתן להשתמש בו כדי להכפיל קובייה. הנה בנייה ישירה שמשתמשת בקיפול.

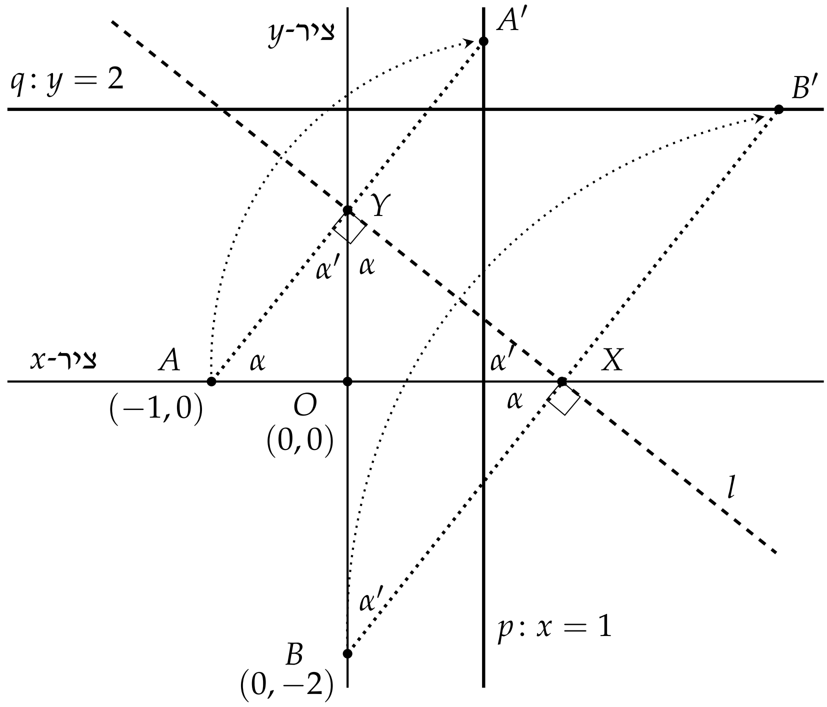
הבנייה: נסמן את הנקודה $(-1,0)$ ב-A ואת הנקודה $(0,-2)$ ב-B. נסמן ב-p את הישר $x = 1$ וב-q את הישר $y = 2$. לפי אקסיומה 6 ניתן לבנות קיפול l המניח את A ב-A' על p, ואת B ב-B' על q. נסמן ב-Y את נקודת החיתוך של הקיפול עם ציר ה-y, ונסמן ב-X את נקודת החיתוך של הקיפול עם ציר ה-x (איור 12.6).

משפט 12.4 $\overline{OY} = \sqrt[3]{2}$.

הוכחה הקיפול הוא האנך האמצעי של $\overline{AA'}$ ושל $\overline{BB'}$, ולכן $\overline{AA'}||\overline{BB'}$. $\angle XAY = \angle AXB = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות. סימון הזוויות האחרות נובע מהתכונות של משולשים ישרי-זווית. ניתן להסיק ש-$\triangle XOB \sim \triangle YOX \sim \triangle AOY$ ונתון $\overline{OA} = 1$, $\overline{OB} = 2$:

$$\frac{\overline{OY}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OX}}$$

$$\frac{\overline{OY}}{1} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{2}{\overline{OX}}\,.$$



איור 12.6: הכפלת קובייה לפי בלוץ׳

משני היחסים הראשונים נקבל $\overline{OX} = \overline{OY}^2$ ומהראשון והשלישי נקבל $\overline{OX}\,\overline{OY} = 2$. מהצבת $\overline{OX}$ נקבל $\overline{OY}^3 = 2$ ו-$\overline{OY} = \sqrt[3]{2}$. □

12.5 בניית מתושע

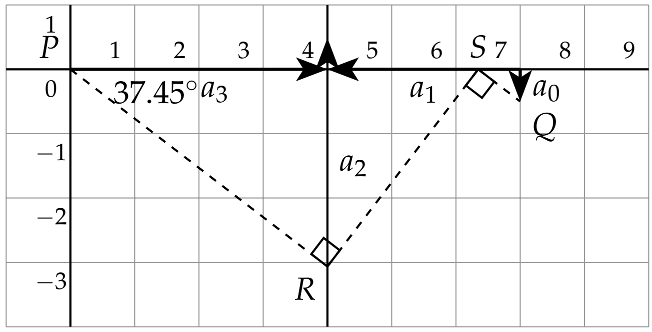
ניתן לבנות מתושע משוכלל (מצולע משוכלל בעל תשע צלעות) על ידי פיתוח משוואה ממעלה שלישית עבור הזווית המרכזית שלו ופתרון המשוואה באמצעות השיטה של ליל והקיפול של בלוץ׳. הזווית המרכזית היא $\theta = 360^\circ/9 = 40^\circ$. לפי משפט א׳.6:

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\,.$$

יהי $x = \cos 40^\circ$. עבור המתושע $4x^3 - 3x + (1/2) = 0$ כי $\cos 3\cdot 40^\circ = \cos 120^\circ = -(1/2)$. איור 12.7 מציג את המסלולים עבור המשוואה לפי השיטה של ליל.

המסלול השני מתחיל מ-P בזווית -37.45° בערך. פנייה של 90° ב-R ואז פנייה -90° ב-S גורמים למסלול לחתוך את המסלול הראשון בנקודת הקצה שלו Q, ולכן $x = -\tan(-37.45)^\circ = 0.766$ הוא שורש של $4x^3 - 3x + (1/2)$.

ניתן למצוא את השורש באמצעות הקיפול של בלוץ׳. נשרטט את הישר a_2' המקביל ל-a_2 ומרחקו מ-a_2 שווה למרחק בין a_2 ל-P. למרות שאורכו של a_2 הוא אפס, עדיין יש לו כיוון (למעלה) ולכן ניתן לבנות ישר מקביל. באופן דומה, נשרטט ישר a_1' מקביל ל-a_1 שמרחקו מ-a_1 שווה למרחק בין a_1



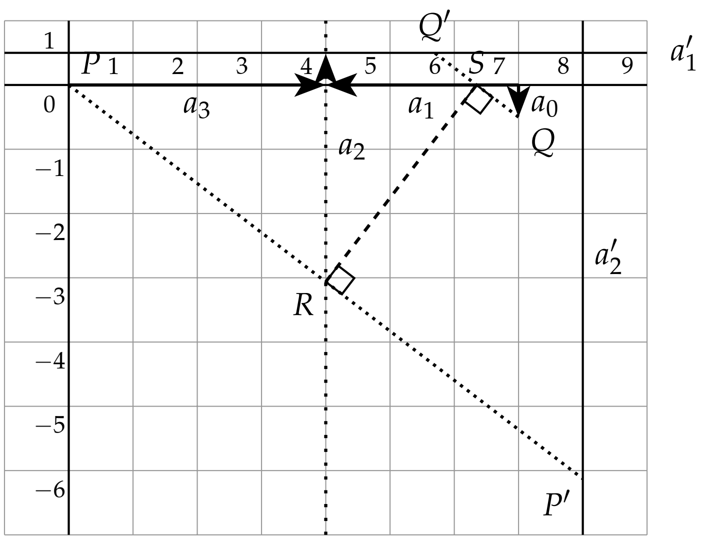
איור 12.7 : השיטה של ליל לבניית מתושע

ל-Q. $\overline{RS}$, הקיפול של בלוץ׳, מניח בו-זמנית את P ב-P' על a_2', ואת Q ב-Q' על a_1'. הקיפול בונה את הזווית $\angle SPR = -37.45°$ (איור 12.8).

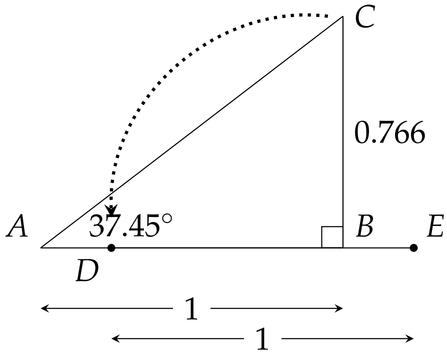
לפי השיטה של ליל, $-\tan(-37.45°) \approx 0.766$ ולכן $\cos\theta \approx 0.766$ הוא השורש של המשוואה עבור הזווית המרכזית θ.

נסיים את בניית המתושע על ידי בניית $\cos^{-1} 0.766 \approx 40°$:

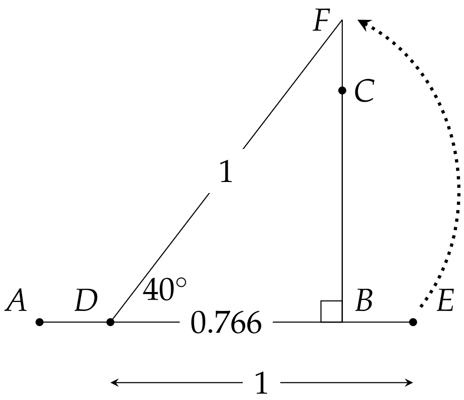
- במשולש ישר-זווית $\triangle ABC$ עם $\angle CAB \approx 37.45°$ ו-$\overline{AB} = 1$ הצלע הנגדית היא $\overline{BC} \approx 0.766$ לפי הגדרת הטנגנס (איור 12.9.א).
- לפי אקסיומה 1 נקפל את $\overline{CB}$ על $\overline{AB}$ כך שהשיקוף של C הוא D ו-$\overline{DB} = 0.766$.
- נמשיך את $\overline{DB}$ ונבנה את E כך ש-$\overline{DE} = 1$.



איור 12.8 : בנית מתושע באמצעות הקיפול של Beloch



12.9.א הטנגנס הוא הפתרון של משוואת המתושע



12.9.ב הקוסינוס של הזווית המרכזית של המתושע

- לפי אקסיומה 1 נקפל את $\overline{DE}$ כדי לשקף את E ב-F בהמשך של $\overline{BC}$ (איור 12.9.ב). אזי:

$$\angle BDF = \cos^{-1}\frac{0.766}{1} \approx 40^\circ\,.$$

מה ההפתעה?

ראינו בפרקים 2 ו- 3 שבעזרת כלים כגון הנוסיס אפשר לבצע בניות שלא ניתן לבצען בעזרת סרגל ומחוגה. לכן, מפתיע שניתן לחלק זווית לשלושה חלקים ולהכפיל קובייה רק על ידי קיפולי נייר. רוג'ר אלפרין (Roger C. Alperin) פיתח היררכייה של שיטות בנייה שכל אחת מהן חזקה מקודמתה.

מקודות

פרק זה מבוסס על [2, 26, 31, 36].

פרק 13

אפשר להסתפק במחוגה

בשנת 1797 הוכיח לורנצו מסקרוני Lorenzo Mascheroni שכל בנייה גיאומטרית באמצעות סרגל ומחוגה ניתנת לבנייה במחוגה בלבד. במאה ה-20 התגלה שהמשפט הוכח בשנת 1672 על ידי גיאורג מור (Georg Mohr). המשפט נקרא היום משפט מור-מסקרוני לאחר שנסביר בסעיף 13.1 מה המשמעות של בניות ללא מחוגה, נביא את ההוכחה בשלבים, תחילה עם ארבע בניות עזר: שיקוף של נקודה (סעיף 13.2), בניית מעגל עם רדיוס נתון (סעיף 13.3), חיבור וחיסור קטעים (סעיף 13.4) ובניית קטע כיחס בין קטעים אחרים (סעיף 13.5). סעיף 13.6 מראה איך למצוא את החיתוך בין שני ישרים וסעיף 13.7 מראה איך למצוא את החיתוך בין ישר ומעגל.

13.1 מהי בנייה במחוגה בלבד?

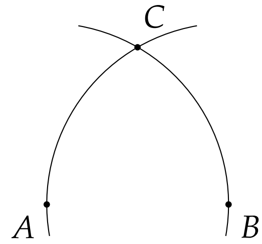
איור 13.1.א מראה את הבנייה הרגילה של משולש שווה צלעות בסרגל ומחוגה. איך אפשר לבנות משולש ללא הקטעים $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$? למעשה, אין כל צורך **לראות** את הקטעים. קטע מוגדר על ידי שתי נקודות, ומספיק לבנות את הנקודות A, B, C כדי לקבל בנייה שקולה לבנייה בסרגל (איור 13.1.ב). באיורים נצייר בכל זאת קווים, אולם הקווים משמשים אך ורק להבנת הבנייה ולהוכחת נכונותה. חשוב להשתכנע שהבנייה עצמה משתמשת רק במחוגה.

כל צעד בבנייה באמצעות סרגל ומחוגה הוא אחת משלוש הפעולות הבאות:

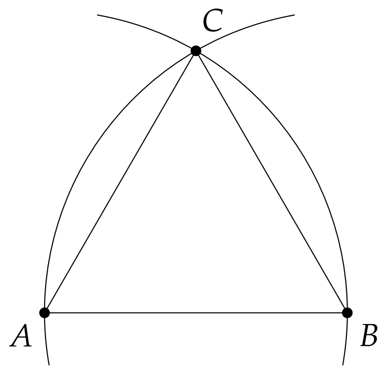
- מציאת נקודת החיתוך של שני ישרים.
- מציאת נקודות החיתוך של ישר ומעגל.
- מציאת נקודות החיתוך של שני מעגלים.

ניתן לבצע את הפעולה השלישית במחוגה בלבד. עלינו להראות שעבור שתי הפעולות הראשונות ניתן למצוא בנייה שקולה שמשתמשת במחוגה בלבד.

נשתמש בסימונים:



13.1.א בניית משולש שווה צלעות בסרגל ומחוגה



13.1.ב בניית משולש שווה צלעות במחוגה בלבד

- $c(O,A)$: מעגל שמרכזו O ועובר דרך הנקודה A.
- $c(O,r)$: מעגל שמרכזו O ורדיוסו r.
- $c(O,\overline{AB})$: מעגל שמרכזו O ורדיוס באורך הקטע $\overline{AB}$.

13.2 שיקוף נקודה

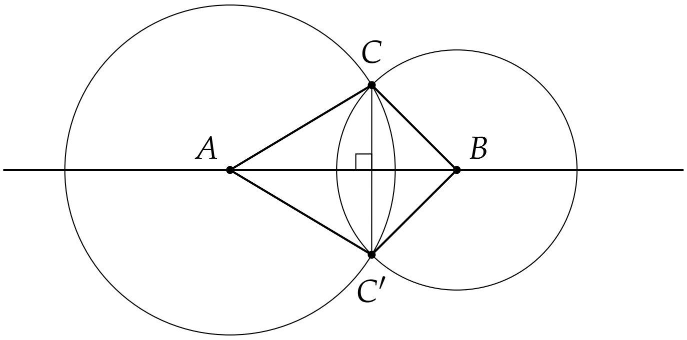
הגדרה 13.1 הנקודה C' היא **שיקוף** של הנקודה C ביחס לקטע $\overline{AB}$, אם $\overline{AB}$ (או הישר המכיל אותו) הוא האנך האמצעי של $\overline{CC'}$.

משפט 13.1 נתון קטע $\overline{AB}$ ונקודה C שלא נמצאת על $\overline{AB}$, ניתן לבנות נקודה C' שהיא השיקוף של C ביחס ל-$\overline{AB}$.

הוכחה בנו מעגל שמרכזו A העובר דרך C ומעגל שמרכזו B העובר דרך C. נקודות החיתוך של שני המעגלים הן הנקודה C והנקודה C' שהיא השיקוף של C (איור 13.2). $\triangle ABC \cong \triangle ABC'$ חופפים לפי צלע, צלע, צלע: $\overline{AC}, \overline{AC'}$ הם רדיוסים באותו מעגל כמו גם $\overline{BC}, \overline{BC'}$, ו-$\overline{AB}$ צלע משותפת. מכאן ש-$\angle CAB = \angle C'AB$, ולכן $\overline{AB}$ הוא חוצה הזווית $\angle CAC'$. אבל $\triangle CAC'$ הוא משולש שווה-שוקיים, וחוצה הזווית $\overline{AB}$ הוא גם האנך האמצעי לקטע $\overline{CC'}$, בסיס המשולש $\triangle CAC'$. לפי ההגדרה, C' היא השיקוף של C ביחס ל-$\overline{AB}$. □

13.3 בניית מעגל עם רדיוס נתון

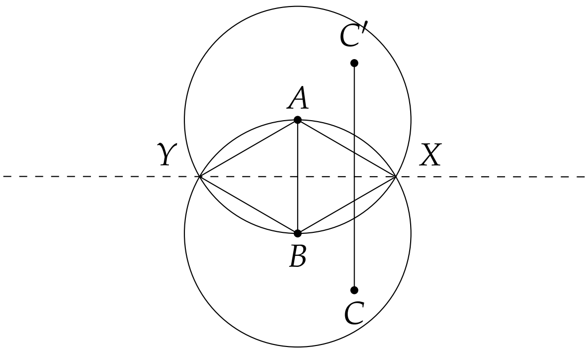
משפט 13.2 נתונות נקודות A, B, C, ניתן לבנות את המעגל $c(A,\overline{BC})$, המעגל שמרכזו A ורדיוסו באורך $\overline{BC}$.



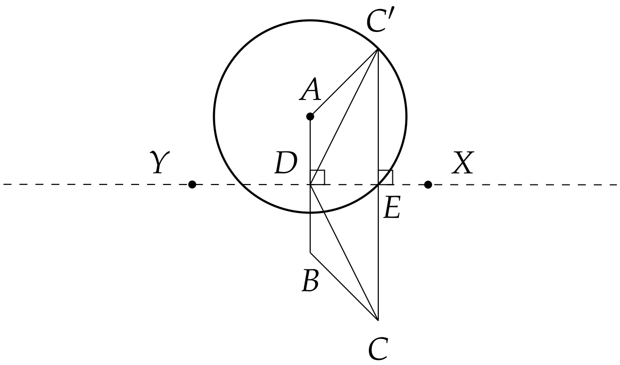
איור 13.2 : בניית שיקוף

הוכחה נבנה את המעגלים $c(A,B)$, $c(B,A)$, ונסמן את נקודות החיתוך שלהם X,Y (איור 13.3). הנקודה A היא השיקוף של B ביחס ל- $\overline{XY}$ כי $\triangle YAX \cong \triangle YBX$ לפי צלע, צלע, צלע. לפי משפט 13.1 נבנה את C', השיקוף של C ביחס לישר $\overline{XY}$, ואז נבנה את $c(A,C')$ (איור 13.4).

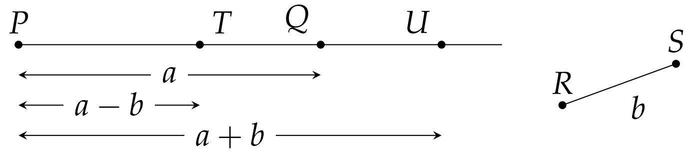
$\overline{XY}$ הוא האנך האמצעי לקטעים $\overline{AB},\overline{CC'}$. נסמן ב-$D$ את החיתוך של $\overline{XY}$ ו-$\overline{AB}$, ונסמן ב-E



איור 13.3 : בניית מעגל עם רדיוס נתון (1)



איור 13.4 : בניית מעגל עם רדיוס נתון (2)



איור 13.5 : חיבור וחיסור קטעים

את החיתוך של $\overline{XY}$ ו-$\overline{CC'}$. אז $\overline{C'E} = \overline{EC}$, $\overline{DE}$ הוא צלע משותף, ו-$\angle DEC = \angle DEC'$ הן זוויות ישרות. מכאן ש-$\triangle DEC \cong \triangle DEC'$ לפי צלע, זווית, צלע, ולכן $\overline{DC} = \overline{DC'}$ ו-$\angle ADC' = \angle BDC$ כי הן זוויות משלימות ל-$\angle EDC' = \angle EDC$. נסיק ש-$\triangle ADC' \cong \triangle BDC$ לפי צלע, זווית, צלע ו-$\overline{AC'} = \overline{BC}$. □

13.4 חיבור וחיסור קטעים

משפט 13.3 נתונים קטע $\overline{PQ}$ באורך a וקטע $\overline{RS}$ באורך b, ניתן לבנות קטעים $\overline{QT}, \overline{QU}$ כך ש-$\overline{PUQT}$ הוא קטע, האורך של $\overline{PU}$ הוא $a - b$ והאורך של $\overline{PT}$ הוא $a + b$ (איור 13.5).

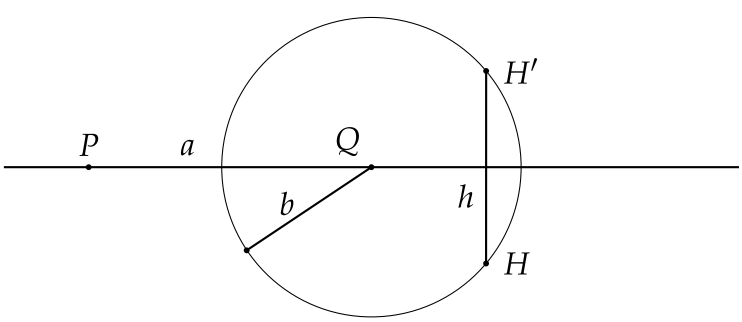
ההוכחה די ארוכה ונציג אותה כסדרה של בניות.

משפט 13.4 ניתן לבנות טרפז שווה-שוקיים.

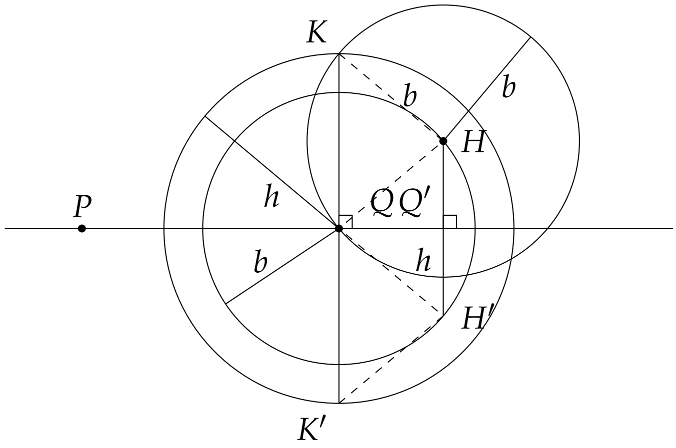
הוכחה תהי H, נקודה כלשהי על $c(Q, b)$. נבנה H', השיקוף שלה ביחס ל- $\overline{PQ}$, ונסמן ב-h את האורך של $\overline{HH'}$ (איור 13.6).

נבנה את המעגלים $c(Q, h)$, $c(H, b)$. תהי K נקודת חיתוך של שני המעגלים, ונבנה את K' כשיקוף של K ביחס ל-$\overline{PQ}$ (איור 13.7).

הישר המכיל את $\overline{PQ}$ הוא האנך האמצעי של $\overline{HH'}$ ושל $\overline{KK'}$, לכן $\overline{HH'} \| \overline{KK'}$. $\overline{KH} = b$ כי הוא הרדיוס של המעגל שמרכזו H, ו-K', H' הן שיקופים של K, H. $\triangle QQ'H \cong \triangle QQ'H'$ לפי צלע, צלע, צלע ו-$\triangle KQH \cong \triangle K'QH'$ לפי צלע, זווית, צלע, כך ש-$\overline{K'H'} = \overline{KH} = b$. נסיק ש



איור 13.6 : בניית טרפז שווה-שוקיים (1)



איור 13.7 : בניית טרפז שווה-שוקיים (2)

$\overline{KHH'K'}$ הוא טרפז שווה-שוקיים שבסיסיו $\overline{KK'} = 2h$, $\overline{HH'} = h$ (איור 13.8). נסמן ב-d את אורכי האלכסונים $\overline{K'H} = \overline{KH'}$. □

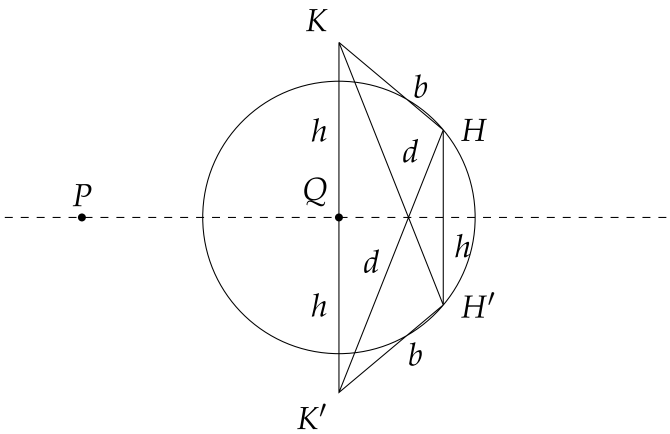
משפט 13.5 ניתן לחסום טרפז שווה-שוקיים במעגל.

הוכחה מיידי ממשפט א׳.15 וממשפט א׳.16. □

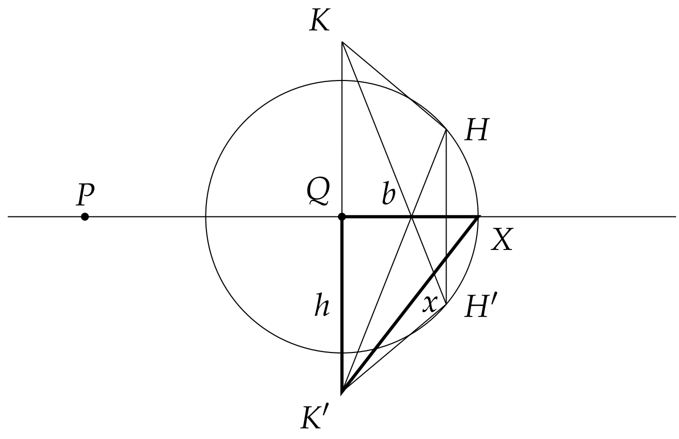
משפט 13.6 עבור d, b, h כפי שמופיע באיור 13.8, $d^2 = b^2 + 2h^2$.

הוכחה המשפט הוא מסקנה ממשפט תלמי (Ptolemy) (משפט א׳.18) שאומר שבמרובע החסום במעגל, מכפלת האלכסונים שווה לסכום המכפלות של שני זוגות הצלעות הנגדיות. □

כעת ניתן להוכיח את משפט 13.3.



איור 13.8 : בניית טרפז שווה-שוקיים (3)



איור 13.9 : בניית טרפז שווה-שוקיים (4)

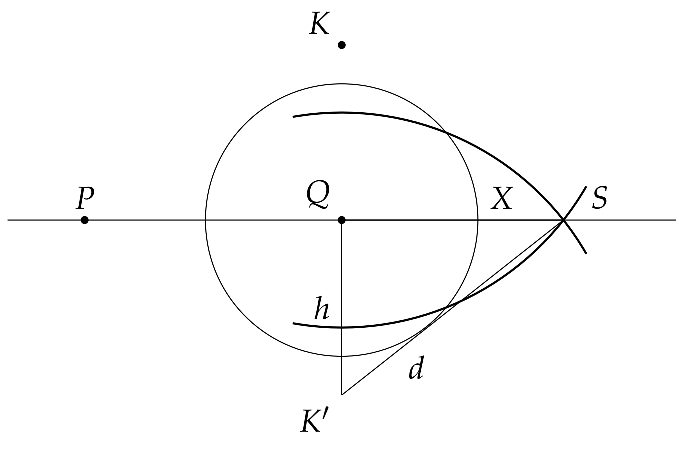
הוכחה תהי X נקודה על הישר $\overline{PQ}$ המאריכה את הקטע $\overline{PQ}$ ב-b. (בהמשך נבנה את הנקודה X.)
נגדיר $x = \overline{K'X}$. ממשפט 13.6 :

$$d^2 = b^2 + 2h^2 = (x^2 - h^2) + 2h^2 = x^2 + h^2\,.$$

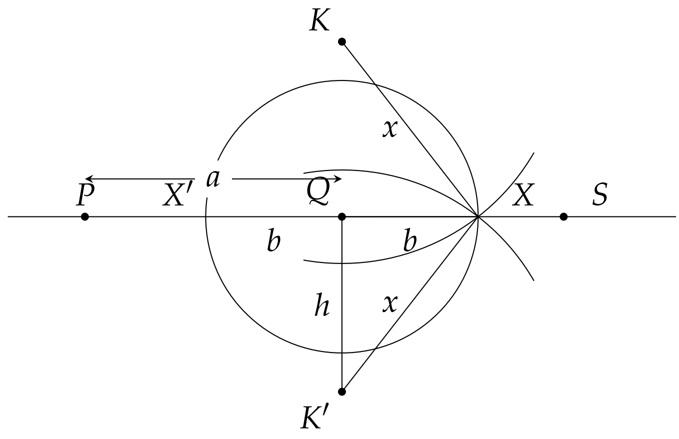
$\triangle QK'X$ הוא משולש ישר-זווית ולכן $x^2 = b^2 + h^2$ (איור 13.9).

נבנה את הנקודה S כנקודת החיתוך של המעגלים $c(K,d)$ ו-$c(K',d)$ (איור 13.10). $\triangle QSK'$ משולש ישר-זווית ולפי משפט פיתגורס $QS^2 + h^2 = d^2$ ו-$QS = x$.

נבנה את הנקודה X כנקודות החיתוך של המעגלים $c(K,x)$ ו-$c(K',x)$ (איור 13.11). $\overline{QX} = \sqrt{x^2 - h^2} = b$ ולכן $\overline{PX} = a + b, \overline{PX'} = a - b$. □



איור 13.10 : בניית נקודה לחיבור וחיסור (1)



איור 13.11 : בניית נקודה לחיבור וחיסור (2)

13.5 בניית קטע כיחס קטעים

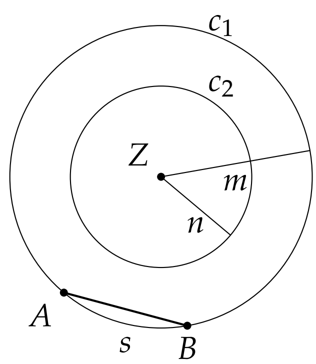
משפט 13.7 נתונים שלושה קטעים באורכים n, m, s, ניתן לבנות קטע קו שאורכו :

$$x=\frac{n}{m}s\,.$$

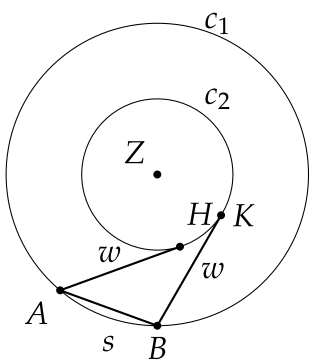
הוכחה נבנה שני מעגלים בעלי מרכז משותף : $c_1=c(Z,m), c_2=c(Z,n)$. נניח ש-$m>n$, אחרת נחליף את הסימונים של m,n. נבחר נקודה שרירותית A על c_1. לפי משפט 13.2 נבנה מיתר $\overline{AB}$ ב-c_1 שאורכו s (איור 13.12א). אם המיתר חותך את c_2, לפי 13.3 נכפול את m,n במספר שלם k עד שהמיתר אינו חותך את c_2. הכפלת הערכים אינה משנה את הערך שאנו בונים כי

$$x=\frac{kn}{km}s=\frac{n}{m}s\,.$$

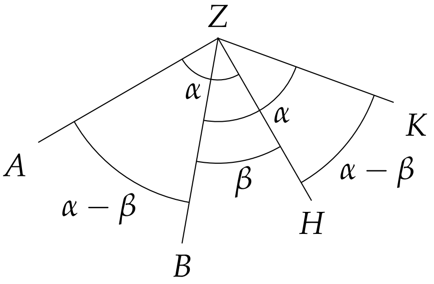
נבחר נקודה H על המעגל c_2 (שאינה נמצאת על הקו $\overline{AZ}$), ונסמן את אורך הקטע $\overline{AH}$ ב-w. נבנה נקודה K על c_2 כך שאורך הקטע $\overline{BK}$ גם הוא w (איור 13.12ב). $\triangle AHZ \cong \triangle BZK$ לפי צלע'



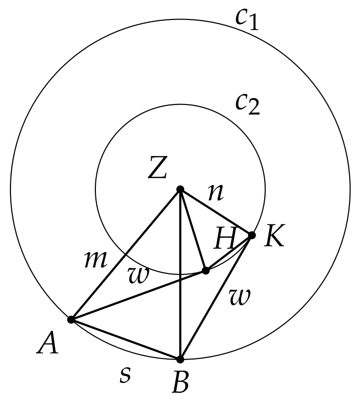
13.12א בניית $x=\frac{n}{m}s$, צעד 1



13.12ב בניית $x=\frac{n}{m}s$, צעד 2



13.13ב $\angle AZB = \angle HZK$



13.13א בניית $x = \frac{n}{m}s$, צעד 3

צלעי צלע כי $m = \overline{ZA} = \overline{ZB}$ הם רדיוסים באותו מעגל כמו גם $n = \overline{ZK} = \overline{ZH}$, ו-$\overline{AH} = \overline{BK} = w$ לפי הבנייה (איור 13.13א). מ-$\triangle AZH \cong \triangle BZK$ נסיק ש-$\angle AZB = \angle HZK$ ואז $\angle AZB = \angle HZK$. קשה לראות את השוויונות הללו באיור, אבל איור 13.13ב מבהיר את היחסים בין הזוויות.

$\triangle ZHK \sim \triangle ZAB$ כי שניהם משולשים שווי-שוקיים עם שזוויות הראש שלהן שוות. נסמן ב-x את $\overline{HK}$ ונקבל:

$$\frac{m}{s} = \frac{n}{x}$$
$$x = \frac{n}{m}s\,.$$

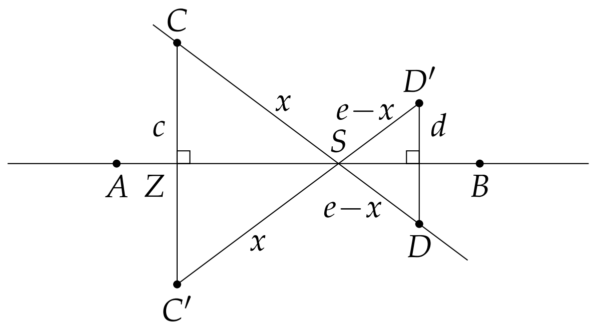
□

13.6 מציאת נקודת החיתוך של שני ישרים

משפט 13.8 נתונים שני ישרים (שאינם מקבילים) המכילים את הקטעים $\overline{AB}, \overline{CD}$, ניתן לבנות את S, נקודת החיתוך של הישרים.

הוכחה נבנה את C', D', השיקופים של C, D ביחס ל-$\overline{AB}$. ישנם שני מקרים, תלוי אם C, D נמצאות משני צדדיו של $\overline{AB}$ או באותו צד, כפי שניתן לראות באיורים 13.14, 13.15. נסמן את קטעי הקו c, d, e, x לפי האיורים.

מקרה 1: C, D נמצאות בצדדים שונים של $\overline{AB}$. נקודת החיתוך S נמצאת על $\overline{AB}$ כי $\triangle CZS \cong \triangle C'ZS$ לפי צלע, זווית, צלע: $\overline{CZ} = \overline{C'Z}$, $\angle CZS = \angle C'ZS = 90^\circ$ ו-$\overline{ZS}$ צלע משותפת. מכאן ש-$\overline{CS} = \overline{C'S}$ ובאופן דומה $\overline{DS} = \overline{D'S}$. $\triangle CSC' \sim \triangle DSD'$ ולכן $\frac{c}{d} = \frac{x}{e-x}$. נפתור את המשוואה עבור x ונקבל $x = \frac{c}{c+d}e$.



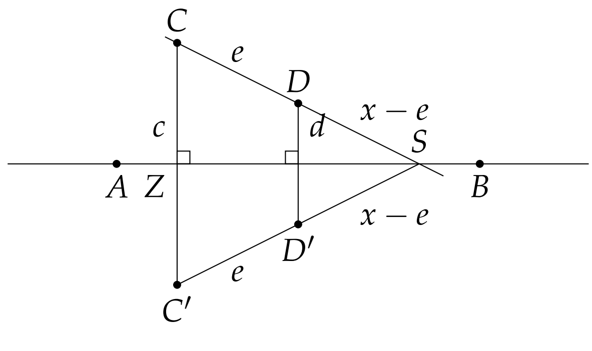
איור 13.14 : בניית החיתוך של שני ישרים (1)

מקרה 2: C, D נמצאות באותו צד של $\overline{AB}$. $\triangle CSC' \sim \triangle DSD'$, ולכן $\frac{c}{d} = \frac{x}{x-e}$ ונקבל $x = \frac{c}{c-d}e$.

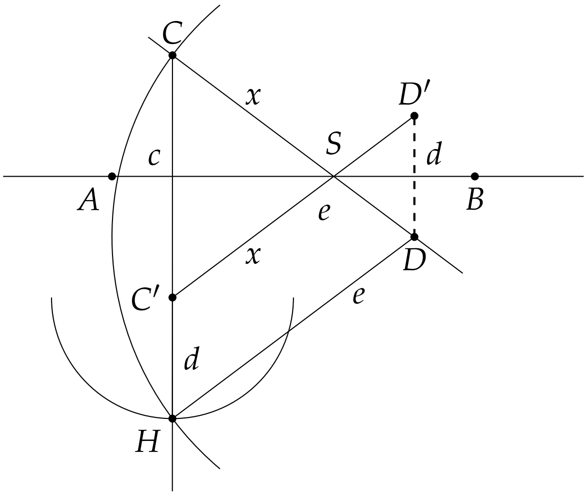
נבנה את המעגלים $c(C', d)$, $c(D, e)$ ונסמן את נקודת החיתוך שלהם על הקו $\overline{CC'}$ ב-H (איור 13.16). סכום האורכים של $\overline{CC'}, \overline{C'H}$ הוא $c + d$. עלינו להראות ש-H נמצאת על המשך $\overline{CC'}$, כך ש-$\overline{CH}$ הוא קטע באורך $c + d$. במקרה ש-C, D נמצאות באותו צד של $\overline{AB}$, $\overline{CH} = c - d$ (לא מופיע באיור).

H היא החיתוך של $c(C', d), c(D, e)$, ולכן $\overline{C'H} = d, \overline{DH} = e$. לפי הבנייה $\overline{C'D'} = e, \overline{DD'} = d$, ולכן המרובע $C'D'DH$ הוא מקבילית.

לפי הבנייה $\overline{DD'} \| \overline{CC'}$, ולכן $\overline{C'H} \| \overline{DD'}$ וגם $\overline{C'H} \| \overline{CC'}$. מכיוון שאחת מנקודות הקצה של הקטע היא C'ת היא חייבת להיות על הישר המכיל את $\overline{CC'}$. לפי משפט 13.3, מהאורכים הנתונים c, d, e ניתן לבנות קטע באורך $c + d$, ולפי משפט 13.7 ניתן לבנות קטע באורך $x = \frac{c}{c+d}e$. S, נקודת החיתוך של המעגלים $c(C, x)$ ו-$c(C', x)$, היא גם נקודת החיתוך של $\overline{AB}, \overline{CD}$ (איור 13.17). $\square$



איור 13.15 : בניית החיתוך של שני ישרים (2)



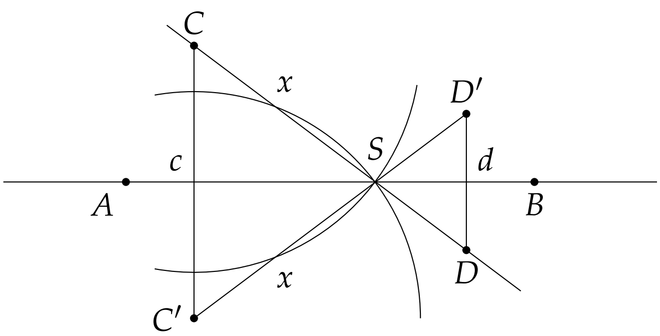
איור 13.16 : בניית החיתוך של שני ישרים (3)

13.7 מציאת נקודת החיתוך של ישר ומעגל

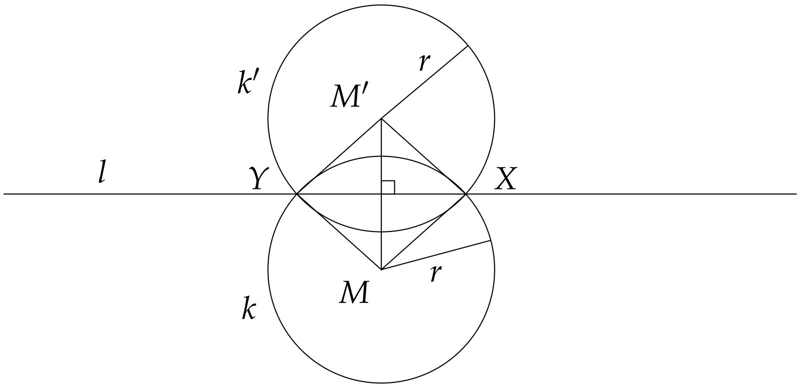
משפט 13.9 נתונים מעגל $k = C(M, r)$ וישר l, ניתן לבנות את X, Y, נקודות החיתוך של k, l.

הוכחה נבנה את M', השיקוף של M ביחס ל-l, ואת המעגל $k' = c(M', r)$. $\triangle MXM' \cong MYM'$, ולכן X, Y, הן נקודות החיתוך של l ו-k (איור 13.18).

בנייה זו אינה אפשרית אם מרכז המעגל M נמצא על הקו l. במקרה זה, נבחר נקודה שרירותית A על l שמרחקה מ-M גדול מ-r. לפי משפט 13.3 נאריך או נקצר את $\overline{AM}$ ב-r. X, Y נקודות הקצה של קטעים אלו, הן נקודות החיתוך של k ו-l (איור 13.19). □



איור 13.17 : בניית החיתוך של שני ישרים (4)



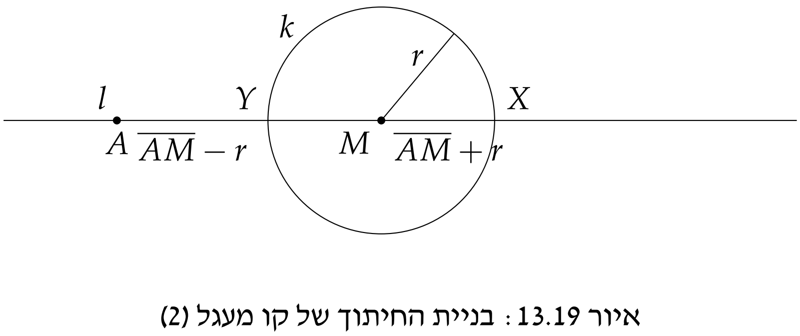
איור 13.18 : בניית החיתוך של ישר ומעגל (1)

מהי ההפתעה?

כאשר לומדים על בנייה בסרגל ובמחוגה, ברור מאליו ששני הכלים נחוצים, ולכן מפתיע מאוד לגלות שמחוגה בלבד מספיקה. ההוכחה די ארוכה כך שלא נשאיר את הסרגל בבית, אבל המשפט מראה שאין להניח שאין חלופות למושגים מתמטיים ידועים.

מקודות

פרק זה מבוסס על בעיה מספר 33 ב-[13] ועל העיבוד שלה על ידי מיכאל וולטרמן (Michael Woltermann) [14]. הוכחה נוספת ניתן למצוא ב-[25].



איור 13.19 : בניית החיתוך של קו מעגל (2)

פרק 14

אפשר להסתפק בסרגל ביחד עם מעגל אחד

האם כל בנייה בסרגל ובמחוגה ניתנת לבנייה בסרגל בלבד? התשובה שלילית, כי ישרים מוגדרים על ידי משוואות ליניאריות ואינם יכולים להגדיר מעגלים שמשוואותיהם ריבועיות. בשנת 1822 שיער ז'אן-ויקטור פונסלה (Jean-Victor Poncelet) שניתן להסתפק בסרגל בלבד בתנאי שקיים במישור מעגל אחד בלבד. המשפט הוכח בשנת 1833 על ידי יאקוב שטיינר (Jakob Steiner).

לאחר שנסביר בסעיף 14.1 מה המשמעות של בנייה רק בסרגל ומעגל אחד, ההוכחה מוצגת בשלבים ופותחת בחמש בניות עזר: בניית ישר מקביל לישר נתון (סעיף 14.2), בניית אנך לישר נתון (סעיף 14.3), העתקת קטע בכיוון נתון (סעיף 14.4), בניית קטע כיחס בין קטעים אחרים (סעיף 14.5) ובניית שורש ריבועי (סעיף 14.6). סעיף 14.7 מראה איך למצוא את החיתוכים של ישר ומעגל וסעיף 14.8 מראה איך למצוא את החיתוכים של שני מעגלים.

14.1 מהי בנייה בסרגל בלבד?

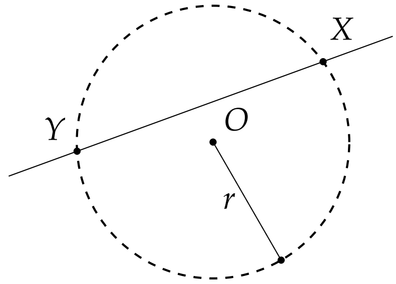
כל צעד בבנייה בסרגל ובמחוגה הוא אחת משלוש הפעולות הבאות:

- מציאת נקודת החיתוך של שני ישרים,
- מציאת נקודות החיתוך של ישר ומעגל,
- מציאת נקודות החיתוך של שני מעגלים.

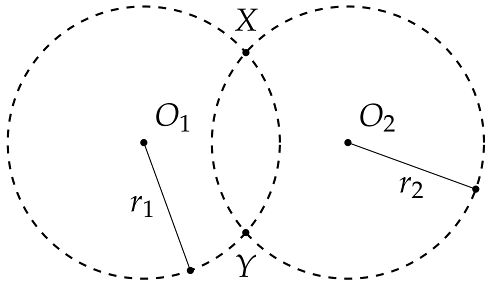
ניתן לבצע את הפעולה הראשונה בסרגל בלבד.

מעגל מוגדר על ידי נקודה O, מרכזו, ועל ידי קטע באורך r, הרדיוס, שאחת מהנקודות הקצה שלו היא O. אם נצליח לבנות את הנקודות X, Y המסומנות באיור 14.1.א, נוכל לטעון שהצלחנו לבנות את נקודות החיתוך של מעגל נתון וישר נתון. באופן דומה, הבנייה של X, Y באיור 14.1.ב, היא בניית נקודות החיתוך של שני מעגלים נתונים. המעגלים המסורטטים בקווים מקווקווים אינם מופיעים בבנייה והם מסייעים להבנתה.

המעגל היחיד בבנייה ייקרא המעגל הקבוע ויכול להופיע בכל מקום במישור עם רדיוס שרירותי.



14.1א. X, Y הם נקודות החיתוך של קו ומעגל



14.1ב. X, Y הן נקודות החיתוך של שני מעגלים

14.2 בניית ישר מקביל לישר נתון

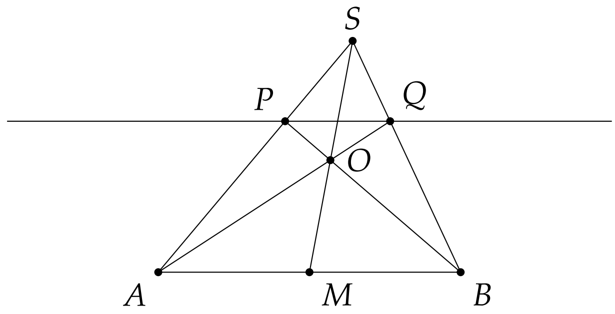
משפט 14.1 נתון ישר l העובר דרך שתי נקודות A, B, ונתונה נקודה P שאיננה על הישר, ניתן לבנות ישר דרך P המקביל ל-$\overline{AB}$.

הוכחה ההוכחה היא עבור שני מקרים בנפרד.

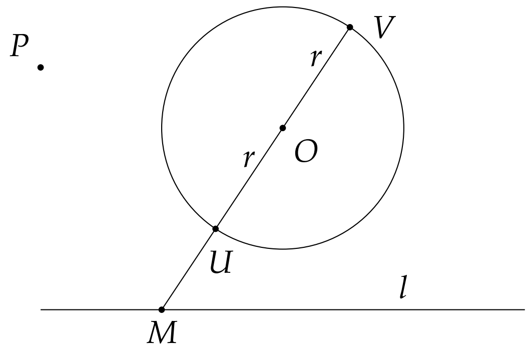
מקרה ראשון: $\overline{AB}$ נקרא קטע מכוון אם נתונה M, נקודת אמצע הקטע. נבנה קרן הממשיכה את $\overline{AP}$, ונבחר S, נקודה כלשהי על הקרן מעבר ל-P. נבנה את הקווים $\overline{SB}$, $\overline{SM}$, $\overline{BP}$. נסמן ב-O את נקודת החיתוך של $\overline{BP}$ עם $\overline{SM}$. נבנה קרן הממשיכה את $\overline{AO}$ ונסמן ב-Q את החיתוך של הקרן עם $\overline{SB}$ (איור 14.2). טענה: $\overline{PQ}\|\overline{AB}$.

הוכחת הטענה משתמשת במשפט צ׳בה (Ceva) (משפט א׳.5): אם קטעים היוצאים מקודקודי משולש לצלעות הנגדיות נפגשים בנקודה O (כמו באיור 14.2), האורכים של קטעי הצלעות מקיימים:

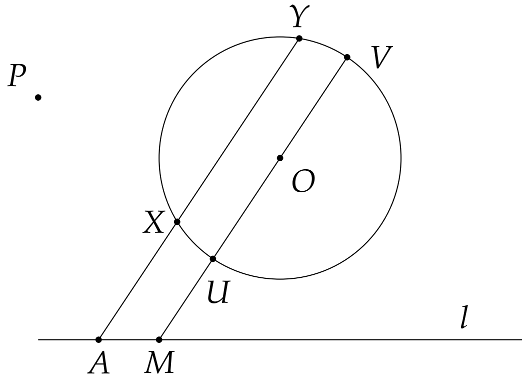
$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = 1\,.$$



איור 14.2: בניית ישר מקביל לקטע מכוון



14.3.א בניית קטע מכוון



14.3.ב בניית ישר מקביל לקטע מכוון

באיור 14.2 M היא נקודת האמצע של $\overline{AB}$ ולכן $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = 1$, ומכאן:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{SP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}}\,, \tag{14.1}$$

מכיוון שסדר נקודות הקצה של הקטע אינו חשוב.

נוכיח ש-$\triangle ABS \sim \triangle PQS$:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BS}}{\overline{QS}} &= \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + \frac{\overline{QS}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + 1 \\ \frac{\overline{AS}}{\overline{PS}} &= \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + \frac{\overline{PS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + 1\,. \end{aligned}$$

לפי משוואה 14.1:

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + 1 = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + 1 = \frac{\overline{AS}}{\overline{PS}}\,,$$

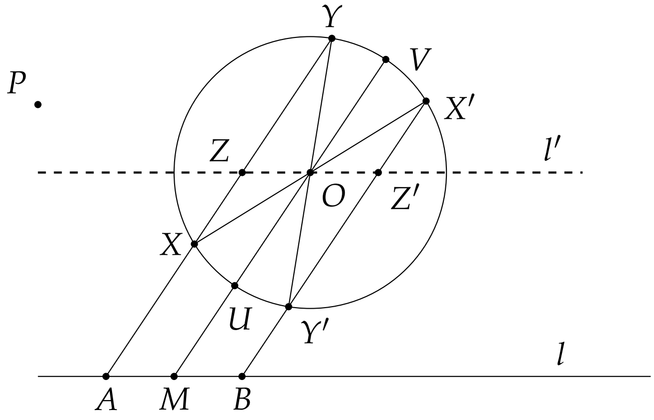
ולכן $\triangle ABS \sim \triangle PQS$ ו-$\overline{AB} \| \overline{PQ}$.

מקרה שני: $\overline{AB}$ אינו בהכרח קטע מכוון. למעגל הקבוע c מרכז O ורדיוס r. P היא נקודה מחוץ לישר ודרכה יש לבנות מקביל ל-l (איור 14.3.א).

נבחר M, נקודה שרירותית על l ונבנה קרן $\overline{MO}$ שחותכת את המעגל הקבוע ב-U, V. $\overline{UV}$ הוא קטע מכוון כי O, מרכז המעגל, חוצה את הקוטר $\overline{UV}$. נבחר נקודה A על l ולפי הבנייה עבור קטע מכוון, נבנה ישר מקביל ל-$\overline{UV}$ דרך A. החותך את המעגל ב-X, Y (איור 14.3.ב). נבנה $\overline{XX'}$, קוטר דרך X במעגל O שחותך את המעגל ב-X', ובאופן דומה נבנה קוטר $\overline{YY'}$. נבנה קרן מ-X' שעוברת דרך Y' ונסמן ב-B את נקודת החיתוך שלה עם l (איור 14.4).

$\overline{OX}, \overline{OX'}, \overline{OY}, \overline{OY'}$ הם כולם רדיוסים במעגל ו-$\angle XOY = \angle X'OY'$ כי הן זוויות קודקודיות. לכן $\triangle XOY \cong \triangle X'OY'$ לפי צלע, זווית, צלע. נגדיר[1] ישר l' כישר המקביל ל-l דרך O וחותך

[1] נגדיר, לא נבנה, כי אנו באמצע הוכחה שישר זה הוא בן-בנייה.



איור 14.4 : הוכחה ש-l' מקביל ל-l

את $\overline{XY}$ ב-Z ואת X', Y' ב-Z'. $\angle XOZ = \angle X'OZ'$ כי הן זוויות קודקודיות, ולכן $\triangle XOZ \cong \triangle X'OZ'$ לפי זווית, צלע, זווית. מכאן ש-$\overline{OZ'} = \overline{ZO}$. המרובעים $AMOZ$ ו-$BMOZ'$ הם מקביליות ולכן $\overline{AM} = \overline{ZO} = \overline{OZ'} = \overline{MB}$. □

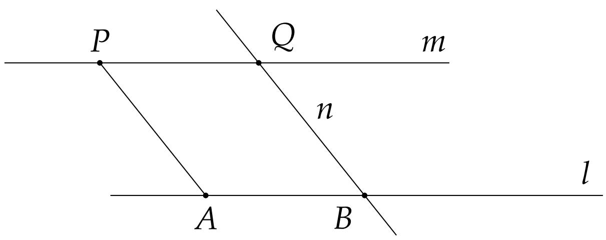
משפט 14.2 נתון קטע $\overline{AB}$ ונקודה P שאינה נמצאת על הישר, ניתן לבנות קטע $\overline{PQ}$ מקביל ל-$\overline{AB}$ שאורכו שווה לאורך $\overline{AB}$. במילים אחרות, ניתן להעתיק $\overline{AB}$ מקביל לעצמו כאשר P היא אחת מנקודות הקצה שלה.

הוכחה הוכחנו שניתן לבנות ישר m מקביל ל-$\overline{AB}$ דרך P, וגם ישר n מקביל ל-$\overline{AP}$ דרך B. המרובע $\overline{ABQP}$ הוא מקבילית שצלעותיה הנגדיות שוות $\overline{AB} = \overline{PQ}$ (איור 14.5). □

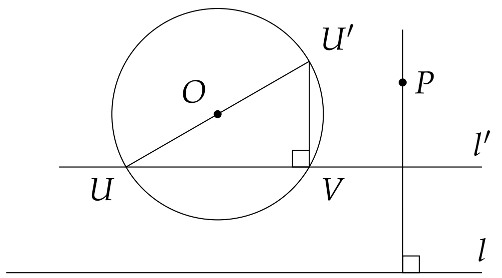
14.3 בניית אנך לישר נתון

משפט 14.3 נתונים ישר l ונקודה P שאינה על הישר, ניתן לבנות אנך ל-l דרך P.

הוכחה לפי משפט 14.1 נבנה ישר l מקביל ל-l' שחותך את המעגל הקבוע ב-U, V (איור 14.6). נבנה את הקוטר $\overline{UOU'}$ ואת המיתר $\overline{U'V}$. $\angle UVU'$ היא זווית ישרה כי היא נשענת על קוטר. מכאן ש-$\overline{VU'}$ ניצב ל-$\overline{UV}$ ול-l. שוב לפי משפט 14.1 נבנה ישר מקביל ל-$\overline{VU'}$ דרך P. □



איור 14.5 : בניית העתקת קטע במקביל לקטע קיים



איור 14.6 : בניית ניצב

14.4 העתקת קטע בכיוון נתון

משפט 14.4 נתון קטע, ניתן לבנות עותק שלו בכיוון של ישר אחר.

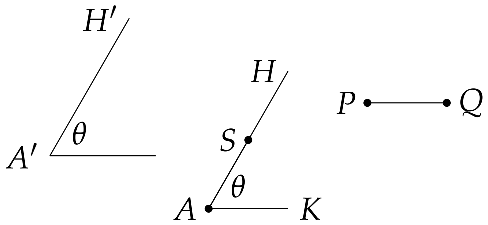
המשמעות של "כיוון" היא שישר המוגדר על ידי שתי נקודות A', H' נמצא בזווית θ יחסית לציר כלשהו, והמטרה היא לבנות $\overline{AS} = \overline{PQ}$ כך ש-$\overline{AS}$ יהיה באותה זווית θ יחסית לציר (איור 14.7).

הוכחה לפי משפט 14.1 ניתן לבנות קטע $\overline{AH}$ כך ש- $\overline{AH} \| \overline{A'H'}$ וקטע $\overline{AK}$ כך ש-$\overline{AK} \| \overline{PQ}$ ו- $\overline{AK} = \overline{PQ}$. $\angle HAK = \theta$ ולכן מה שנשאר הוא למצוא נקודה S על $\overline{AH}$ כך ש-$\overline{AS} = \overline{PQ}$. נבנה שני רדיוסים במעגל הקבוע $\overline{OU}, \overline{OV}$ המקבילים ל-$\overline{AH}, \overline{AK}$ בהתאמה, ונבנה דרך K קרן המקבילה ל-$\overline{UV}$. נסמן את נקודת החיתוך שלה עם $\overline{AH}$ ב-S (איור 14.8). לפי הבנייה $\overline{AH} \| \overline{OU}$ ו-$\overline{AK} \| \overline{OV}$, ולכן $\angle SAK = \angle UOV = \theta$. $\overline{SK} \| \overline{UV}$ ו-$\triangle SAK \sim \triangle UOV$ לפי זווית, זווית, זווית. $\triangle UOV$ הוא שווה-שוקיים כי $\overline{OU}$, $\overline{OV}$ הם רדיוסים באותו מעגל. מכאן ש-$\triangle SAK$ הוא שווה-שוקיים ו-$\overline{AS} = \overline{AK} = \overline{PQ}$. □

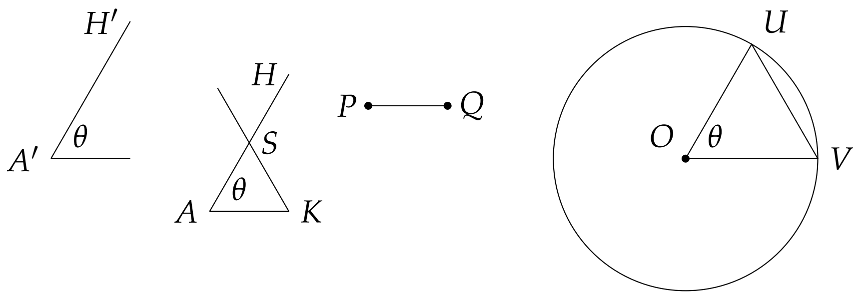
14.5 בניית קטע כיחס קטעים

משפט 14.5 נתונים שלושה קטעים באורכים n, m, s, ניתן לבנות קטע באורך :

$$x = \frac{n}{m} s\,.$$



איור 14.7 : העתקת קטע בכיוון נתון



איור 14.8 : שימוש במעגל הקבוע להעתקת קטע

הוכחה נבחר נקודות A, B, C שאינן על אותו ישר ונבנה קרניים $\overline{AB}, \overline{AC}$. לפי משפט 14.4 ניתן לבנות M, N, S כך ש-$\overline{AM} = m, \overline{AN} = n, \overline{AS} = s$. לפי משפט 14.1 נבנה מקביל ל-$\overline{MS}$ דרך N החותך את $\overline{AC}$ ב-X, ונסמן את אורך $\overline{AX}$ ב-x (איור 14.9). $\triangle NAX \sim \triangle MAS$ לפי זווית, זווית, זווית ולכן:

$$\frac{m}{n} = \frac{s}{x}, \qquad x = \frac{n}{m}s\,.$$

□

14.6 בניית שורש ריבועי

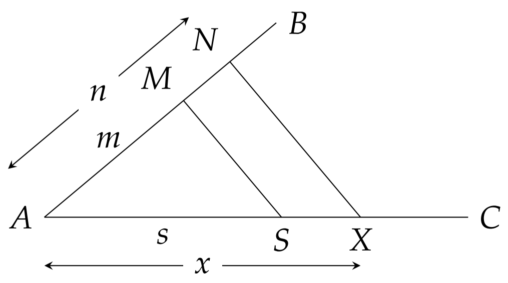
משפט 14.6 נתון קטעים באורך a, b, ניתן לבנות קטע שאורכו $\sqrt{ab}$.

הוכחה אם נבטא את $x = \sqrt{ab}$ בצורה $x = \frac{n}{m}s$ נוכל להשתמש במשפט 14.5.

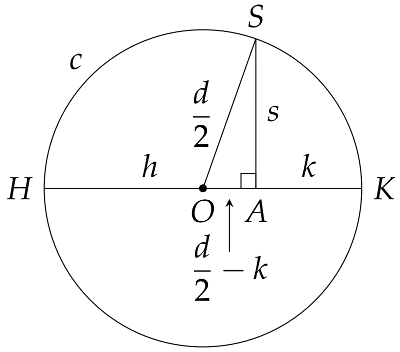
- עבור n נשתמש ב-d, קוטר המעגל הקבוע.

  עבור m נשתמש ב-$t = a + b$ שניתן לבנות מ-a, b לפי משפט 14.4.

- נגדיר את $s = \sqrt{hk}$ כאשר h, k מוגדרים כביטויים על אורכי a, b, t, d.



איור 14.9 : בניית יחס אורכים באמצעות משולשים דומים



איור 14.10 : בניית שורש ריבועי

נגדיר $h=\frac{d}{t}a$, $k=\frac{d}{t}b$, $s=\sqrt{hk}$, ונחשב :

$$x=\sqrt{ab}=\sqrt{\frac{th}{d}\frac{tk}{d}}=\sqrt{\left(\frac{t}{d}\right)^2 hk}=\frac{t}{d}\sqrt{hk}=\frac{t}{d}s$$

$$h+k=\frac{d}{t}a+\frac{d}{t}b=\frac{d(a+b)}{t}=\frac{dt}{t}=d\,.$$

לפי משפט 14.4 נבנה $\overline{HA}=h$ על הקוטר $\overline{HK}$ של המעגל הקבוע. מ-$h+k=d$ אפשר להסיק ש-$\overline{AK}=k$ (איור 14.10). לפי משפט 14.3 ניתן לבנות דרך A אנך ל-$\overline{HK}$. נסמן ב-S את החיתוך שלו עם המעגל הקבוע. $\overline{OS}=\overline{OK}=d/2$ הם רדיוסים במעגל, ו-$\overline{OA}=(d/2)-k$.

לפי משפט פיתגורס :

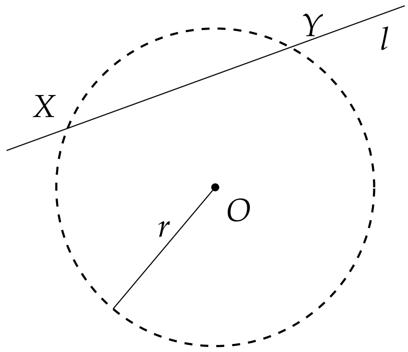
$$\begin{aligned} s^2=\overline{SA}^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}-k\right)^2 \\ &= \left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2+2\frac{dk}{2}-k^2 \\ &= k(d-k)=kh \\ s &= \sqrt{hk}\,. \end{aligned}$$

כעת ניתן לבנות $x=\frac{t}{d}s$ לפי משפט 14.5. □

14.7 בניית נקודות חיתוך של ישר ומעגל

משפט 14.7 נתונים ישר l ומעגל c שמרכזו O ורדיוסו r. ניתן לבנות את נקודות החיתוך של l ו-c (איור 14.11).

הוכחה לפי משפט 14.3 ניתן לבנות אנך ממרכז המעגל O לישר l. נסמן ב-M את נקודת החיתוך של l עם האנך. OM חוצה את המיתר $\overline{XY}$, כאשר X,Y הן נקודות החיתוך של הישר והמעגל



איור 14.11 : בניית נקודות החיתוך של ישר ומעגל (1)

(איור 14.12). נגדיר $\overline{XY} = 2s$ ו-$\overline{OM} = t$. שימו לב שבאיור s, X, Y הם רק הגדרות וטרם בנינו את נקודות החיתוך.

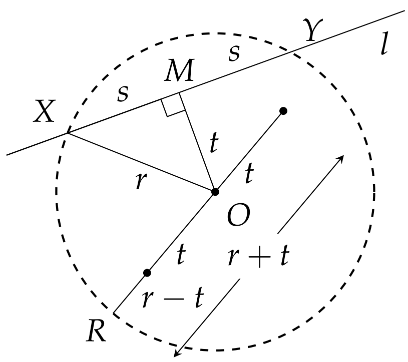
לפי משפט פיתגורס $s^2 = r^2 - t^2 = (r+t)(r-t)$. לפי משפט 14.4 ניתן לבנות קטעים באורך r מהנקודה O בשני הכיוונים $\overline{RO}$ ו-$\overline{OR}$. התוצאה היא שני קטעים שאורכיהם $r+t, r-t$.

לפי משפט 14.6 ניתן לבנות קטע באורך $s = \sqrt{(r+t)(r-t)}$. שוב לפי משפט 14.4, ניתן לבנות קטעים באורך s על הישר הנתון l, מנקודה M בשני הכיוונים. הקצה השני של כל אחד מהקטעים האלה הוא נקודת חיתוך של l עם המעגל. $\square$

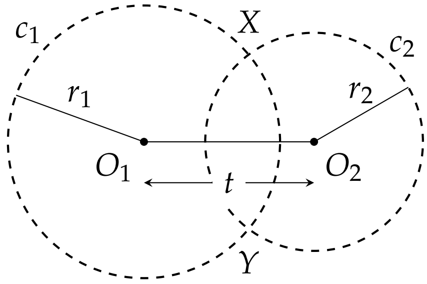
14.8 בניית נקודות החיתוך של שני מעגלים

משפט 14.8 נתונים שני מעגלים עם מרכזים O_1, O_2 ורדיוסים r_1, r_2, ניתן לבנות את נקודות החיתוך שלהם.

הוכחה נבנה את $\overline{O_1O_2}$ ונסמן את אורכו ב-t (איור 14.13). נסמן ב-A את נקודת החיתוך של $\overline{O_1O_2}$ עם $\overline{XY}$, ונסמן $q = \overline{O_1A}, x = \overline{XA}$ (איור 14.14). טרם בנינו את הנקודה A, אבל אם נצליח לבנות



איור 14.12 : בניית נקודות החיתוך של ישר ומעגל (2)



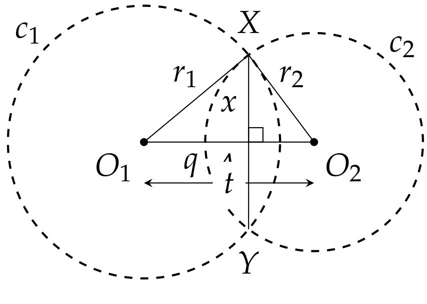
איור 14.13 : בניית החיתוך של שני מעגלים (1)

את האורכים q, x, לפי משפט 14.4 נוכל לבנות את A באורך q מהנקודה O_1 לכיוון $\overline{O_1O_2}$. לאחר שבנינו את A, לפי משפט 14.3 ניתן לבנות את האנך ל-$\overline{O_1O_2}$ בנקודה A, ושוב לפי משפט 14.4 ניתן לבנות קטעים באורך x מהנקודה A בשני הכיוונים לאורך האנך. X, Y, הקצוות של הקטעים, הם נקודות החיתוך של שני המעגלים.

בניית האורך q: נגדיר $d = \sqrt{r_1^2 + t^2}$, היתר של משולש ישר-זווית שניתן לבנות מהאורכים הידועים r_1, t. שימו לב ש-$\triangle O_1XO_2$ הוא לא בהכרח משולש ישר-זווית, ואת המשולש אפשר לבנות בכל מקום במישור. במשולש ישר-זווית $\triangle XAO_1$, $\cos \angle XO_1A = q/r_1$. לפי משפט הקוסינוסים ב-$\triangle O_1O_2X$:

$$\begin{aligned}
r_2^2 &= t^2 + r_1^2 - 2r_1 t \cos \angle XO_1O_2 \\
&= t^2 + r_1^2 - 2tq \\
2tq &= (t^2 + r_1^2) - r_2^2 = d^2 - r_2^2 \\
q &= \frac{(d + r_2)(d - r_2)}{2t} \,.
\end{aligned}$$

לפי משפט 14.4 ניתן לבנות את האורכים האלה, ולפי משפט 14.5 ניתן לבנות את q מהביטויים $d + r_2, d - r_2, 2t$.



איור 14.14 : בניית החיתוך של שני מעגלים (2)

בניית האורך x: לפי משפט פיתגורס:

$$x^2 = r_1^2 - q^2 = \sqrt{(r_1+q)(r_1-q)}\,.$$

לפי משפט 14.4 ניתן לבנות $h = r_1 + q$ ו-$k = r_1 - q$, ולפי משפט 14.6 ניתן לבנות $x = \sqrt{hk}$. □

מה ההפתעה?

חובה להשתמש במחוגה, כי בעזרת סרגל אפשר לחשב שורשים של משוואות ליניאריות בלבד, ולא ערכים כגון $\sqrt{2}$, היתר של משולש ישר-זווית שווה-שוקיים עם שוקיים באורך 1. לכן, מפתיע שקיום של מעגל אחד בלבד, ללא תלות במקומו של מרכז המעגל או הרדיוס שלו, מספיק כדי לבצע כל בנייה שאפשרית בסרגל ובמחוגה.

מקורות

הפרק מבוסס על בעיה 34 ב-[13] שעובדה על ידי מיכאל וולטרמן (Michael Woltermann) [14].

פרק 15

האם משולשים עם אותו שטח ואותו היקף חופפים?

האם משולשים בעלי אותו שטח ואותו היקף הם משולשים חופפים? לא בהכרח. לשני המשולשים שאינם חופפים, שצלעותיהם $(17, 25, 28)$ ו-$(20, 21, 27)$ היקף 70 ושטח 210 (איור 15.1).[1] פרק זה מראה שבהינתן משולש עם אורכי צלעות רציונליים, ניתן לבנות משולש שאינו חופף לו עם אורכי צלעות רציונליים, בעל אותו היקף ואותו שטח. את השיטה נציג בעזרת דוגמה, ונראה שלמשולש שצלעותיו $(3, 4, 5)$ ולמשולש שצלעותיו $\left(\frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15}\right)$ אותו היקף 12 ואותו שטח 6.

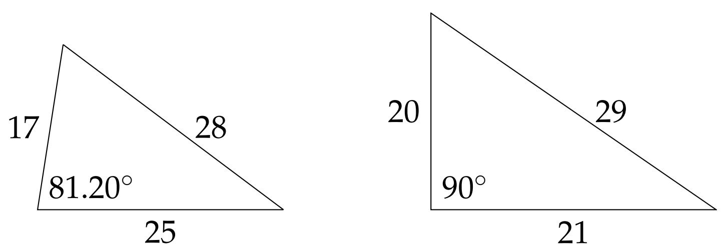
15.1 ממשולש לעקומה אליפטית

חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה O הנקראת מרכז המעגל החסום במשולש (incenter) (איור 15.2). נוריד גבהים מ-O לצלעות. אורך הגבהים הוא r, רדיוס המעגל החסום. הגבהים וחוצי הזווית יוצרים שלושה זוגות של משולשים ישרי זווית חופפים:

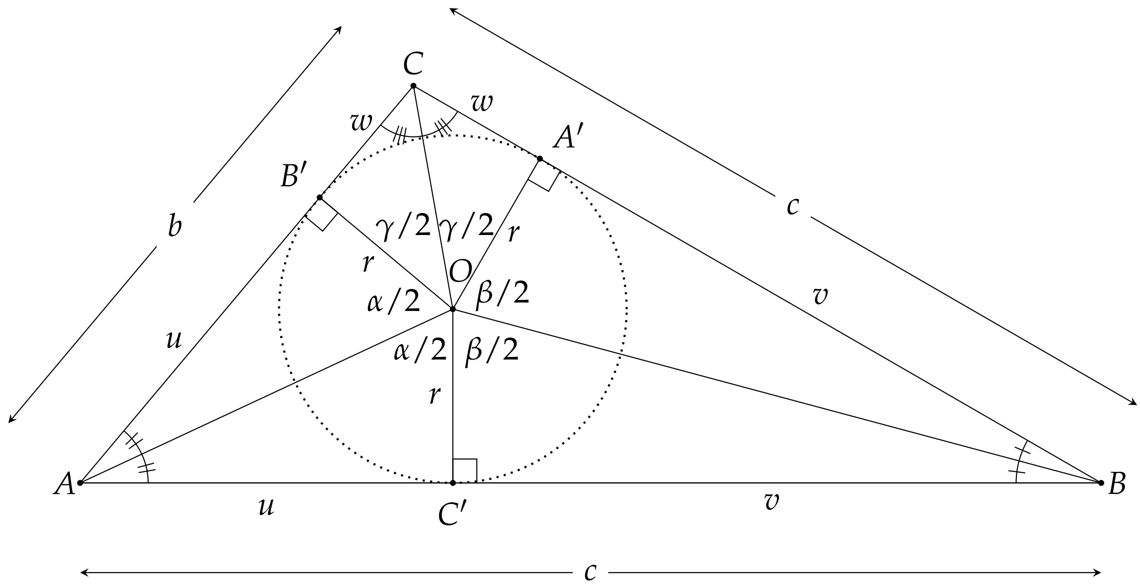
$$\triangle AOB' \cong \triangle AOC', \quad \triangle BOA' \cong \triangle BOC', \quad \triangle COA' \cong \triangle COB'.$$

הגבהים מחלקים את צלעות המשולש לקטעים u, v, w. שטח המשולש $\triangle ABC$ הוא סכום השטחים

[1] השטחים חושבו מנוסחת הרון (משפט א׳.3) והזווית חושבו מחוק הקוסינוסים (מפשט א׳.8).



איור 15.1: משולשים לא חופפים בעלי אותו שטח ואותו היקף



איור 15.2 : מעגל חסום המוגדר על ידי חיתוך חוצי הזווית משולש

של $\triangle AOC, \triangle BOC, \triangle AOB$:

$$A = \frac{1}{2}(w+v)r + \frac{1}{2}(v+u)r + \frac{1}{2}(u+w)r \tag{15.1}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2(u+v+w)r \tag{15.2}$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)r \tag{15.3}$$

$$= rs\,, \tag{15.4}$$

כאשר s הוא מחצית היקף המשולש $\triangle ABC$. ניתן לבטא את u, v, w באמצעות רדיוס המעגל והזוויות המרכזיות $\alpha/2, \beta/2, \gamma/2$:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{u}{r}, \quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{v}{r}, \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{w}{r}\,. \tag{15.5}$$

כעת ניתן לבטא את מחצית ההיקף באמצעות ערכי הטנגנס :

$$s = u+v+w = r\tan\frac{\alpha}{2} + r\tan\frac{\beta}{2} + r\tan\frac{\gamma}{2} = r\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\right)\,,$$

ולפי משוואה 15.4 השטח הוא :

$$A = sr = r^2\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\right)\,. \tag{15.6}$$

לפי $r = A/s$, ניתן לכתוב את משוואה 15.4 כך :

$$\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{A}{r^2} = \frac{A}{(A/s)^2} = \frac{s^2}{A}\,. \tag{15.7}$$

סכום הזוויות α, β, γ הוא 360°:

$$\gamma/2 = 360^\circ - (\alpha/2 + \beta/2) \tag{15.8}$$
$$\tan\gamma/2 = \tan(360^\circ - (\alpha/2 + \beta/2)) \tag{15.9}$$
$$\tan\gamma/2 = -\tan(\alpha/2 + \beta/2) \tag{15.10}$$
$$\tan\gamma/2 = \frac{\tan\alpha/2 + \tan\beta/2}{\tan\alpha/2\,\tan\beta/2 - 1}\,. \tag{15.11}$$

השתמשנו בנוסחה לטנגנס של סכום זוויות (משפט א׳.9).

נפשט את הסימון על ידי הגדרת משתנים עבור הטנגנסים:

$$x = \tan\frac{\alpha}{2}, \quad y = \tan\frac{\beta}{2}, \quad z = \tan\frac{\gamma}{2}\,. \tag{15.12}$$

לפי משוואה 15.11 ניתן לבטא את $z = \tan\gamma/2$ באמצעות x, y:

$$z = \frac{x+y}{xy-1}\,. \tag{15.13}$$

בסימון זה משוואה 15.7 היא:

$$x + y + \frac{x+y}{xy-1} = \frac{s^2}{A}\,. \tag{15.14}$$

בהינתן ערכים קבועים של A ושל s, האם קיימים פתרונות שונים למשוואה 15.14?

עבור המשולש ישר-הזווית $(3,4,5)$:

$$\frac{s^2}{A} = \frac{\left(\frac{1}{2}(3+4+5)\right)^2}{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4} = \frac{6^2}{6} = 6\,.$$

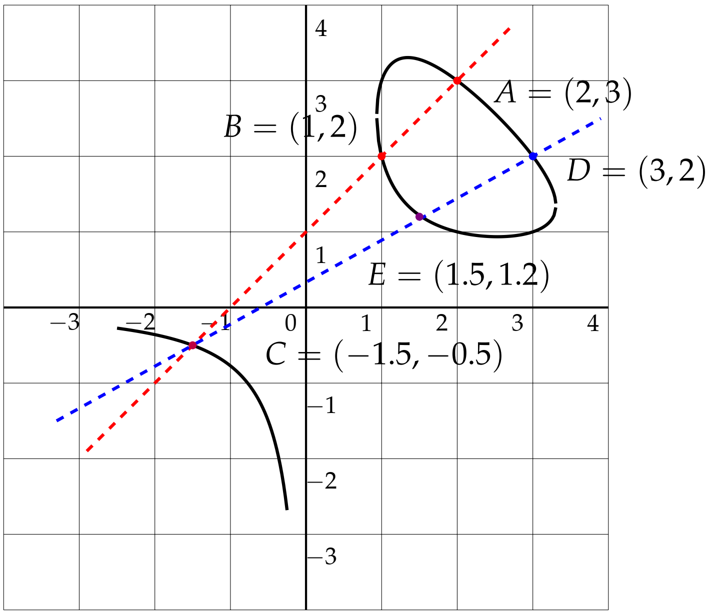
אם קיים פתרון אחר למשוואה 15.14 עם $s^2/A = 6$, ניתן לכתוב אותו כ:

$$x + y + \frac{x+y}{xy-1} = 6 \tag{15.15}$$
$$x^2y + xy^2 - 6xy + 6 = 0\,. \tag{15.16}$$

משוואה זו נקראת עקומה אליפטית (elliptic curve).

15.2 פתרון משוואת העקומה האליפטית

העקומה באיור 15.3 היא גרף חלקי של משוואה 15.16. כל נקודה על העקומה ברביע הראשון היא פתרון, כי אורכי הצלעות חייבים להיות חיוביים. הנקודות A, B, D מתאימות למשולש $(3,4,5)$ כפי שנראה בסעיף 15.3. כדי למצוא פתרונות רציונליים נוספים, נשתמש ב **שיטת שני חותכים** (**method of two secants**).



איור 15.3: שיטת שני החותכים

נסרטט ישר דרך הנקודות $A=(2,3)$ ו-$B=(1,2)$ החותך את העקומה ב-$C=(-1.5,-0.5)$. נקודה זו אינה פתרון כי שיעוריה שליליים. אם נסרטט חותך שני מ-C ל-$D=(3,2)$, החיתוך שלו עם העקומה ב-$E\approx(1.5,1.2)$ כן מהווה פתרון נוסף, ונחשב את שיעוריו בהמשך.

משוואת הישר (האדום) דרך A,B היא $y=x+1$. נציב עבור y במשוואה 15.16:

$$\begin{aligned} x^2(x+1)+x(x+1)^2-6x(x+1)+6&=0\\ 2x^3-3x^2-5x+6&=0\,. \end{aligned}$$

מהנקודות A,B אנו יודעים שני שורשים $x=2, x=1$, ולכן ניתן לפרק את הפולינום ממעלה שלישית כך:

$$(x-2)(x-1)(ax+b)=0\,,$$

כאשר רק השורש השלישי אינו ידוע.

נכפול את הגורמים ונסיק ש-$a=2, b=3$ כי $2x^3-3x^2-5x+6=ax^3+\cdots+2b$. הגורם השלישי הוא $2x+3$ שנותן את השורש השלישי $x=-\frac{3}{2}$ ו-$y=x+1=-\frac{1}{2}$. זאת הנקודה $C=(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ על הגרף.

משוואת הישר (הכחול) דרך D,C היא:

$$y=\frac{5}{9}x+\frac{1}{3}\,. \tag{15.17}$$

נציב עבור y במשוואה 15.16:

$$\begin{aligned} x^2\left(\frac{5}{9}x+\frac{1}{3}\right)+x\left(\frac{5}{9}x+\frac{1}{3}\right)^2-6x\left(\frac{5}{9}x+\frac{1}{3}\right)+6&=0\\ \frac{70}{81}x^3-\frac{71}{27}x^2-\frac{17}{9}x+6&=0\,. \end{aligned}$$

מ-C, D אנו יודעים שני שורשים $x = 3, x = -\frac{3}{2}$, כך שניתן לפרק את הפולינום ממעלה שלישית:

$$(x-3)\left(x+\frac{3}{2}\right)(ax+b) = 0\,.$$

נשווה את המקדמים של x^3 ואת הקבועים, ונקבל:

$$\frac{70}{81}x - \frac{4}{3} = 0\,,$$

ולכן:

$$x = \frac{81}{70}\cdot\frac{4}{3} = \frac{27\cdot 4}{70} = \frac{54}{35} \approx 1.543\,.$$

נחשב את y ממשוואה 15.17 ונקבל:

$$y = \frac{25}{21} \approx 1.190\,.$$

הערכים הללו קרובים למה שהערכנו מאיור 15.3: $(1.5, 1.2)$.

לבסוף, נחשב את z ממשוואה 15.13:

$$z = \frac{x+y}{xy-1} = \left(\frac{54}{35}+\frac{25}{21}\right) \Big/ \left(\frac{54}{35}\cdot\frac{25}{21}-1\right) = \frac{2009}{615} = \frac{49}{15}\,.$$

15.3 פיתוח משולש מהעקומה האליפטית

ניתן לחשב את אורכי צלעות המשולש $\triangle ABC$ בעזרת x, y, z ו-$r = A/s = 6/6 = 1$ תוך שימוש במשוואות 15.5, 15.12:

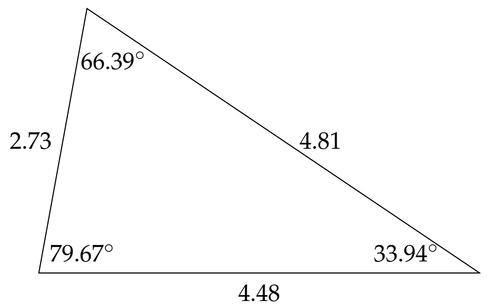
$$\begin{aligned}
a &= w+v = r(z+y) = z+y\\
b &= u+w = r(x+z) = x+z\\
c &= u+v = r(x+y) = x+y\,,
\end{aligned}$$

עבור הפתרון A של העקומה האליפטית אורכי הצלעות הם:

$$\begin{aligned}
a &= z+y = 1+3 = 4\\
b &= x+z = 2+1 = 3\\
c &= x+y = 2+3 = 5\,.
\end{aligned}$$

עבור הפתרון E של העקומה האליפטית אורכי הצלעות הם:

$$\begin{aligned}
a &= z+y = \frac{49}{15}+\frac{25}{21} = \frac{243+125}{105} = \frac{156}{35}\\
b &= x+z = \frac{54}{35}+\frac{49}{15} = \frac{810+1715}{525} = \frac{101}{21}\\
c &= x+y = \frac{54}{35}+\frac{25}{21} = \frac{1134+875}{735} = \frac{41}{15}\,.
\end{aligned}$$



איור 15.4: משולש עם שטח והיקף שווים למשולש $(3,4,5)$

נבדוק את התוצאה. מחצית ההיקף היא:

$$s=\frac{1}{2}\left(\frac{156}{35}+\frac{101}{21}+\frac{41}{15}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{468+505+287}{105}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1260}{105}\right)=6\,.$$

נחשב את השטח באמצעות נוסחת הרון (משפט א׳.3):

$$A=\sqrt{6\left(6-\frac{156}{35}\right)\left(6-\frac{101}{21}\right)\left(6-\frac{41}{15}\right)}=\sqrt{36}=6\,.$$

האם $(3,4,5)\cong\left(\frac{156}{35},\frac{101}{21},\frac{41}{15}\right)$?

כדי לפשט את החישוב נשתמש בקירובים העשרוניים $(4.48,4.81,2.73)$. אזי:

$$\sqrt{4.48^2+2.73^2}=5.25\neq 4.81\,,$$

ולכן לא מדובר במשולש ישר-זווית והוא אינו חופף ל-$(3,4,5)$.

נחשב את זוויות המשולש באמצעות משפט הקוסינוסים (איור 15.4).

מה ההפתעה?

האם משולשים בעלי אותו שטח ואותו היקף הם משולשים חופפים? הרושם הראשון שלי היה ״כן״, כי לא קל למצוא דוגמאות נגדיות. מה שמפתיע הוא שבהינתן משולש שרירותי עם צלעות רציונליות, ניתן לבנות משולש שאינו חופף לו עם אותו שטח ואותו היקף, למרות שהתוצאה יכולה להיות מוזרה כמו המשולשים $(3,4,5)$ ו-$\left(\frac{156}{35},\frac{101}{21},\frac{41}{15}\right)$.

מקורות

פרק זה מבוסס על [33]. ברבש [3] מראה שאם נתון משולש שווה-צלעות, קיימים משולשים לא חופפים עם אותו היקף ואותו שטח, אולם ההוכחה שלה אינה כוללת בנייה.

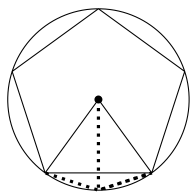
פרק 16

בניית מצולע משוכלל בעל 17 צלעות

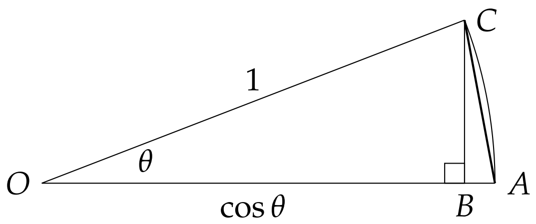
היוונים ידעו לבנות רק ארבעה מצולעים משוכללים: משולש, ריבוע, מחומש ומצולע המשוכלל בעל 15 צלעות. בנוסף, בהינתן מצולע משוכלל בעל n צלעות, ניתן לבנות מצולע משוכלל בעל $2n$ על ידי בניית המעגל החוסם ובניית חוצה הזווית המרכזית (איור 16.1). לא חלה שום התקדמות עד 1796 כאשר קרל פרידריך גאוס (Carl Friedrich Gauss) התעורר בוקר אחד, מעט לפני יום הולדתו ה-19, ועל ידי "חשיבה מרוכזת" מצא דרך לבנות הפטדקאגון (heptadecagon), מצולע משוכלל בעל 17 צלעות. הישג זה שכנע אותו להיות מתמטיקאי.

סעיף 16.1 דן בקשר בין צלע של מצולע חסום במעגל ובין הזווית המרכזית שעליה הוא נשען. סעיף 16.2 מביא ללא הוכחה את המשפט היסודי של האלגברה. סעיף 16.3 מציג את שורשי היחידה, השורשים של הפולינום $x^n - 1$, העומדים במרכז הוכחתו של גאוס. סעיפים 16.4 ו- 16.5 מביאים את הוכחה של גאוס המבוססת על סימטריות של פולינומים. גאוס פיתח נוסחה המוכיחה שההפטדקאגון בר-בנייה, אבל בנייה גיאומטרית לא פורסמה במשך כמעט מאה שנה. סעיף 16.6 מביא בנייה אלגנטית של ג'יימס ג' קלאגי (James J. Callagy). סעיף 16.7 מראה איך ניתן לפתח בניות של מחומש משוכלל גם באמצעות גיאומטריה וגם באמצעות טריגונומטריה.

ההוכחה ישירה יותר אם מציגים אותה בעזרת מספרים מרוכבים. חומר זה מופרד במסגרות וניתן לדלג עליו.



איור 16.1: בניית מעושר משוכלל ממחומש משוכלל



איור 16.2 : הקוסינוס של הזווית המרכזית של מצולע משוכלל

16.1 בנייה של מצולעים משוכללים

בניית הפטדקאגון הייוותה אבן דרך להוכחת משפט גאוס-וונצל (Gauss-Wantzel) : מצולע משוכלל בעל n צלעות הוא בר-בנייה בסרגל ובמחוגה אם ורק אם n הוא מכפלה של חזקה של 2 באפס או יותר מספרי פרמה (Fermat), $2^{2^k}+1$,

ראשוניים **שונים**

מספרי פרמה הראשוניים הידועים הם :

$$F_0 = 3,\ F_1 = 5,\ F_2 = 17,\ F_3 = 257,\ F_4 = 65537\,.$$

מצולע משוכלל בעל 257 צלעות נבנה לראשונה על ידי מאגנוס גאורג פאוקר (Magnus Georg Paucker) ב-1822 ועל ידי פרידריך יוליוס ריכלוט (Friedrich Julius Richelot) ב-1832. בשנת 1894 טען יוהאן גוסטב הרמס (Johann Gustav Hermes) שהוא בנה מצולע משוכלל בעל 65537 צלעות. כתב היד שלו שמור באוניברסיטת גטינגן.

כדי לבנות מצולע משוכלל מספיק לבנות קטע באורך $\cos\theta$, כאשר θ היא הזווית המרכזית במעגל היחידה הנשענת על מיתר שהוא צלע של המצולע. נתון הקטע $\overline{OB} = \cos\theta$, בנו אנך ב-$B$ וסמנו את נקודת החיתוך שלו עם מעגל היחידה ב-C. אזי :

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= 1 \\ \cos\theta &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \overline{OB}\,. \end{aligned}$$

המיתר $\overline{AC}$ הוא צלע של המצולע (איור 16.2).

נתון קטע שאורכו מוגדר כ-1, האורכים שניתנים לבנייה הם אלה שניתן לקבל מאורכים קיימים תוך שימוש בפעולות $\{+, -, \times, /, \sqrt{}\}$ (סעיף 2.5). גאוס הראה ש-$\cos(360^\circ/17)$, הקוסינוס של הזווית המרכזית של הפטדקאגון הוא בן-בנייה כי ניתן לבטא אותו תוך שימוש רק בפעולות אלו :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = &-\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\ &\frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\,. \end{aligned}$$

16.2 המשפט היסודי של האלגברה

נשתמש במשפט שלהלן ללא הוכחה.

משפט 16.1 לכל פולינום ממעלה n יש בדיוק n שורשים.

הבאתי ניסוח פשוט של המשפט, כי כל מה שאנחנו חייבים לדעת הוא שקיימים n שורשים.

המשפט היסודי של האלגברה (The Fundamental Theorem of Algebra) טוען שלכל פולינום לא-קבוע ממעלה n במשתנה אחד עם מקדמים מרוכבים יש בדיוק n שורשים מרוכבים. אם קיימים מספר שורשים בעלי אותו ערך, עלינו לספור את כולם. לפולינום:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x-2)$$

שני שורשים שערכם 2. לפולינום $x^2 + 1$ עם מקדמים שלמים יש שני שורשים מרוכבים $\pm\sqrt{-1}$. באופן משונה, למרות שנושא המשפט קשור למבנים אלגבריים סופיים (פולינומים ממעלה n עם n שורשים), כדי להוכיח את המשפט חייבים להשתמש בשיטות מאנליזה, בדרך כלל אנליזה של מספרים מרוכבים.

16.3 שורשי היחידה

לפי המשפט היסודי של האלגברה (משפט 16.1) לפולינום $x^n - 1$ יש n שורשים עבור כל מספר שלם $n > 1$. אחד השורשים הוא $x = 1$, ולכן קיימים $n - 1$ שורשים נוספים. נסמן שורש אחד מתוכם ב-r. מכיוון ש-$r^n = 1$, r הוא נקרא שורש היחידה מסדר n. מה עם r^2?

$$(r^2)^n = (r^n)^2 = 1^2 = 1\,.$$

חישוב דומה מראה ש-n המספרים:

$$1, r, r^2, \ldots, r^{n-2}, r^{n-1}$$

הם שורשי היחידה מסדר n.

יהיו $r = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. לפי נוסחת דה מואבר:

$$\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^n = \cos\left(\frac{2n\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2n\pi}{n}\right) = 1\,.$$

משפט 16.2 יהי n מספר ראשוני ו-r שורש היחידה מסדר n. אז:

$$\{1, r, r^2, \ldots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$$

שונים זה מזה, ולכן הם מהווים את כל שורשי היחידה מסדר n.

הוכחה נניח שהשורשים אינם שונים, כך ש-$r^i = r^j$ עבור שני מספרים $1 \leq i < j \leq n$. אזי $r^j/r^i = r^{j-i} = 1$, כלומר קיים לפחות מספר שלם חיובי אחד i' קטן מ-n כך ש-$r^{i'} = 1$. יהי m המספר השלם החיובי הקטן ביותר. לפי אלגוריתם החילוק של שלמים, $n = ml + k$ עבור $0 < l < n$, $0 \leq k < m$. מ:

$$1 = r^n = r^{ml+k} = (r^m)^l \cdot r^k = 1^l \cdot r^k = r^k\,,$$

מתקבל $0 \leq k < m$ ו-$r^k = 1$. אבל m הוא המספר השלם החיובי הקטן ביותר המקיים את התנאי, חייב להתקיים $k = 0$ ו-$n = ml$ בסתירה להנחה ש-n ראשוני. □

משפט 16.3 יהיו $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ השורשים של פולינום $f(x)$ מסדר n. אזי:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-1})(x - a_n)\,. \tag{16.1}$$

הוכחה

לפי ההגדרה, אם a_i הוא שורש של $f(x)$ אזי $f(a_i) = 0$, ולכן:

$$\begin{aligned} f(a_i) &= (a_i - a_1)(a_i - a_2) \cdots (a_i - a_{n-1})(a_i - a_n) \\ &= \cdots (a_i - a_i) \cdots = 0\,. \end{aligned}$$

מכאן ש-$f(x) = (x - a_i)g_i(x)$ עבור $g_i(x)$ כלשהו, ובאינדוקציה הדבר נכון לכל השורשים. □
ממשוואה 16.1 קל לראות שהמקדם של x^{n-1} הוא:

$$-(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n)\,.$$

אבל המקדם של x^{n-1} עבור $n \geq 2$ הוא אפס ולכן:

$$\begin{aligned} 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} &= 0 \\ r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} &= -1\,. \end{aligned}$$

עבור הפטדקאגון המשוואה היא:

$$\begin{aligned} & r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + r^7 + r^8 + \\ & \quad r^9 + r^{10} + r^{11} + r^{12} + r^{13} + r^{14} + r^{15} + r^{16} = -1\,. \end{aligned} \tag{16.2}$$

16.4 ההוכחה של גאוס שניתן לבנות הפטדקאגון

גאוס הבין שאין חובה לעבוד עם השורשים בסדר הטבעי שלהם $r, r^2, \ldots, r^{16}$. החזקות $r^{3^0}, r^{3^1}, r^{3^2}, \ldots$ נותנות את כל השורשים אבל בסדר שונה:

$$\begin{array}{l} r^1,\ r^{1\cdot 3=3},\ r^{3\cdot 3=9},\ r^{9\cdot 3=27=10},\ r^{10\cdot 3=30=13},\ r^{13\cdot 3=39=5},\ r^{5\cdot 3=15}, \\ r^{15\cdot 3=45=11}, r^{11\cdot 3=33=16},\ r^{16\cdot 3=48=14},\ r^{14\cdot 3=42=8},\ r^{8\cdot 3=24=7}, \\ r^{7\cdot 3=21=4},\ r^{4\cdot 3=12},\ r^{12\cdot 3=36=2},\ r^{2\cdot 3=6}, \end{array}$$

כאשר צמצמנו את השורשים מודולו 17:

$$r^{17m+k} = (r^{17})^m \cdot r^k = 1^m \cdot r^k = r^k\,.$$

חשוב שתבדקו שהרשימה כוללת את כל השורשים (פרט ל-1) בדיוק פעם אחת:

$$r^1, r^3, r^9, r^{10}, r^{13}, r^5, r^{15}, r^{11}, r^{16}, r^{14}, r^8, r^7, r^4, r^{12}, r^2, r^6\,. \tag{16.3}$$

נתון פולינום ריבועי מתוקן ששורשיו הם a, b:

$$y^2 + py + q = (y-a)(y-b) = 0\,,$$

ניתן לחשב את המקדמים p, q מהשורשים (פרק7):

$$p = -(a+b)\,, \quad q = ab\,.$$

לכן בהינתן $a+b$ ו-ab נוכל לכתוב את המשוואה הריבועית ששורשיה הם a, b.

יהי a_0 סכום השורשים במקומות האי-זוגיים ב- 16.3:

$$a_0 = r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2\,,$$

ויהי a_1 סכום השורשים במקומות הזוגיים ב- 16.3:

$$a_1 = r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6\,.$$

כדי לקבל את a_0, a_1 כשורשים של משוואה ריבועית, תחילה נחשב את הסכום שלהם:

$$a_0 + a_1 = r + r^2 + \cdots + r^{16} = -1\,.$$

כדי למצוא את המשוואה הריבועית עלינו לחשב את a_0a_1. החישוב מעט מסורבל ומוצג באיור 16.3. הערכים של r^ir^j רשומים לאחר חישוב $r^{(i+j) \bmod 17}$. תחת כל שורש רשום מספר המופעים שלו עד כה. בדקו שכל שורש מופיע בדיוק ארבע פעמים כך שערך המכפלה הוא -4.

מ-$a_0+a_1=-1$ ו-$a_0a_1=-4$, אנו יודעים ש-a_0, a_1 הם מקדמי המשוואה:

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$
\begin{aligned}
a_0a_1 = {} & (r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2) \cdot \\
& (r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6) \\
= {} & \underset{1}{r^4} + \underset{1}{r^{11}} + \underset{1}{r^6} + \underset{1}{r^{12}} + \underset{1}{r^{15}} + \underset{1}{r^8} + \underset{1}{r^{13}} + \underset{1}{r^7} + \\
& \underset{2}{r^{12}} + \underset{1}{r^2} + \underset{1}{r^{14}} + \underset{1}{r^3} + \underset{2}{r^6} + \underset{1}{r^{16}} + \underset{2}{r^4} + \underset{2}{r^{15}} + \\
& \underset{2}{r^{16}} + \underset{3}{r^6} + \underset{1}{r^1} + \underset{2}{r^7} + \underset{1}{r^{10}} + \underset{2}{r^3} + \underset{2}{r^8} + \underset{2}{r^2} + \\
& \underset{2}{r^1} + \underset{3}{r^8} + \underset{3}{r^3} + \underset{1}{r^9} + \underset{3}{r^{12}} + \underset{1}{r^5} + \underset{2}{r^{10}} + \underset{3}{r^4} + \\
& \underset{3}{r^2} + \underset{2}{r^9} + \underset{4}{r^4} + \underset{3}{r^{10}} + \underset{2}{r^{13}} + \underset{4}{r^6} + \underset{2}{r^{11}} + \underset{2}{r^5} + \\
& \underset{3}{r^{11}} + \underset{3}{r^1} + \underset{3}{r^{13}} + \underset{4}{r^2} + \underset{2}{r^5} + \underset{3}{r^{15}} + \underset{4}{r^3} + \underset{2}{r^{14}} + \\
& \underset{3}{r^7} + \underset{3}{r^{14}} + \underset{3}{r^9} + \underset{4}{r^{15}} + \underset{4}{r^1} + \underset{4}{r^{11}} + \underset{3}{r^{16}} + \underset{4}{r^{10}} + \\
& \underset{4}{r^5} + \underset{4}{r^{12}} + \underset{4}{r^7} + \underset{4}{r^{13}} + \underset{4}{r^{16}} + \underset{4}{r^9} + \underset{4}{r^{14}} + \underset{4}{r^8} \\
= {} & -4\,.
\end{aligned}
$$

איור 16.3: החישוב של a_0a_1

ששורשיה הם:

$$a_{0,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}\,.$$

יהיו b_0, b_1, b_2, b_3 הסכומים של כל שורש רביעי החל מ-r^1, r^3, r^9, r^{10}, בהתאמה:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= r^1 + r^{13} + r^{16} + r^4 \\
b_1 &= r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12} \\
b_2 &= r^9 + r^{15} + r^8 + r^2 \\
b_3 &= r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6\,.
\end{aligned}
$$

בדקו ש-$b_0 + b_2 = a_0, b_1 + b_3 = a_1$ וחשבו את המכפלות המתאימות:

$$
\begin{aligned}
b_0b_2 = {} & (r + r^{13} + r^{16} + r^4) \times \\
& (r^9 + r^{15} + r^8 + r^2) \\
= {} & r^{10} + r^{16} + r^9 + r^3 + \\
& r^5 + r^{11} + r^4 + r^{15} + \\
& r^8 + r^{14} + r^7 + r^1 + \\
& r^{13} + r^2 + r^{12} + r^6 \\
= {} & -1\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1b_3 &= (r^3+r^5+r^{14}+r^{12}) \times \\
&\quad (r^{10}+r^{11}+r^7+r^6) \\
&= r^{13}+r^{14}+r^{10}+r^9 \; + \\
&\quad r^{15}+r^{16}+r^{12}+r^{11} + \\
&\quad r^7+r^8+r^4+r^3 \qquad + \\
&\quad r^5+r^6+r^2+r^1 \\
&= -1\,.
\end{aligned}
$$

נסכם את החישובים:

$$
\begin{aligned}
b_0+b_2 &= a_0 \\
b_0b_2 &= -1 \\
b_1+b_3 &= a_1 \\
b_1b_3 &= -1\,.
\end{aligned}
$$

b_0, b_2 הם שורשיו של $y^2-a_0y-1=0$ ו-b_1, b_3 הם שורשיו של $y^2-a_1y-1=0$. מהערכים שחישבנו קודם עבור a_0, a_1, מתקבלים השורשים b_0, b_1 (איור 16.4).

לבסוף יהיו c_0, c_4 הסכום של כל שורש שמיני החל מ-r^1, r^{13}, בהתאמה:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= r^1+r^{16} \\
c_4 &= r^{13}+r^4 \\
c_0+c_4 &= r^1+r^{16}+r^{13}+r^4 = b_0 \\
c_0c_4 &= (r^1+r^{16})\cdot(r^{13}+r^4) \\
&= r^{14}+r^5+r^{12}+r^3 = b_1\,.
\end{aligned}
$$

c_0, c_4 הם השורשים של $y^2-b_0y+b_1=0$. מכיוון ש-$\cos(360^\circ/17) = c_0/2$ (איור 16.5) מספיק לחשב את השורש $c_0 = r^1+r^{16}$ (איור 16.6).

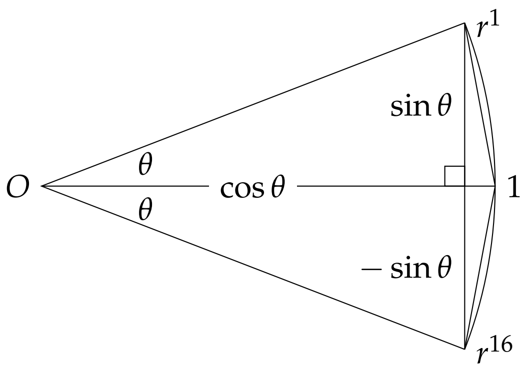
קוסינוס הזווית המרכזית של הפטדקטאגון הוא בר-בנייה בסרגל ובמחוגה כי הוא מורכב רק ממספרים רציונליים והפעולות $\{+,-,\times,/,\sqrt{}\}$:

$$
\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) = \frac{c_0}{2} = \\
&\quad -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} \; + \\
&\quad \frac{1}{16}\sqrt{68+12\sqrt{17}+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\,.
\end{aligned} \tag{16.4}
$$

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{\frac{(-1+\sqrt{17})}{2} + \sqrt{\left[\frac{(-1+\sqrt{17})}{2}\right]^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{(-1+\sqrt{17}) + \sqrt{\left[-1+\sqrt{17}\right]^2 + 16}}{4} \\
&= \frac{(-1+\sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \\
b_1 &= \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{\frac{(-1-\sqrt{17})}{2} + \sqrt{\left[\frac{(-1-\sqrt{17})}{2}\right]^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{(-1-\sqrt{17}) + \sqrt{\left[-1-\sqrt{17}\right]^2 + 16}}{4} \\
&= \frac{(-1-\sqrt{17}) + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}\,.
\end{aligned}
$$

איור 16.4 : החישוב של b_0, b_1

$$
\begin{aligned}
r_1 + r_{16} &= \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{2\cdot 16\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 16\pi}{17}\right) \\
&= \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{-2\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{17}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)\,.
\end{aligned}
$$



איור 16.5: בניית צלע מהזווית המרכזית הנשענת עליה

16.5 פיתוח הנוסחה של גאוס

הנוסחה שקיבלנו עבור $\cos(360^\circ/17)$ איננה הנוסחה שניתנה על ידי גאוס. להלן פיתוח הנוסחה של גאוס.

נפשט את $2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}$:

$$\begin{aligned}
2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} &= -2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\\
&\quad 4\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}\\
&= 2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\\
&\quad -4\sqrt{34-2\sqrt{17}}\\
&= 2(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}$$

נזכור את הגורם $-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}$ ונפשט את הגורם הראשון. נעלה אותו בריבוע ואז נוציא שורש הריבועי:

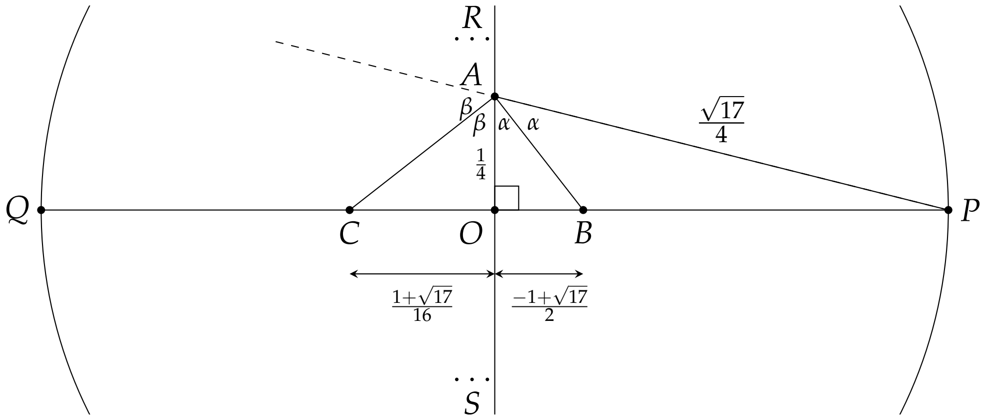
$$\begin{aligned}
2(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} &= 2\sqrt{\left[(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right]^2}\\
&= 2\sqrt{(18+2\sqrt{17})(34-2\sqrt{17})}\\
&= 2\sqrt{(18\cdot 34-4\cdot 17)+\sqrt{17}(2\cdot 34-2\cdot 18)}\\
&= 2\cdot 4\sqrt{34+2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{b_0+\sqrt{b_0^2-4b_1}}{2}\\
&= \frac{\dfrac{(-1+\sqrt{17})+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}}{2}+\\
&\quad \frac{\sqrt{\left[\dfrac{(-1+\sqrt{17})+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\right]^2-4\left[\dfrac{(-1-\sqrt{17})+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}\right]}}{2}\\
&= -\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{\left[(-1+\sqrt{17})+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right]^2-16\left[(-1-\sqrt{17})+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right]}\\
&= -\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{(-1+\sqrt{17})^2+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}+(34-2\sqrt{17})-}\\
&\quad \overline{\left[(-16-16\sqrt{17})+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right]}\\
&= -\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{68+12\sqrt{17}+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}
\end{aligned}
$$

איור 16.6 : החישוב של c_0

נציב את הגורמים ונקבל את הנוסחה של גאוס :

$$
\begin{aligned}
\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) &= -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\\
&\quad \frac{1}{16}\sqrt{68+12\sqrt{17}+2\cdot 4\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\\
&= -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}
\end{aligned}
$$



איור 16.7: בניית heptadecagon (1)

16.6 בניית הפטדקאגון

בנו מעגל יחידה שמרכזו O, עם קטרים ניצבים $\overline{PQ}, \overline{RS}$ (איור 16.7). בנו נקודה A כך ש-$\overline{OA} = \frac{1}{4}\overline{OR}$.

לפי משפט פיתגורס:

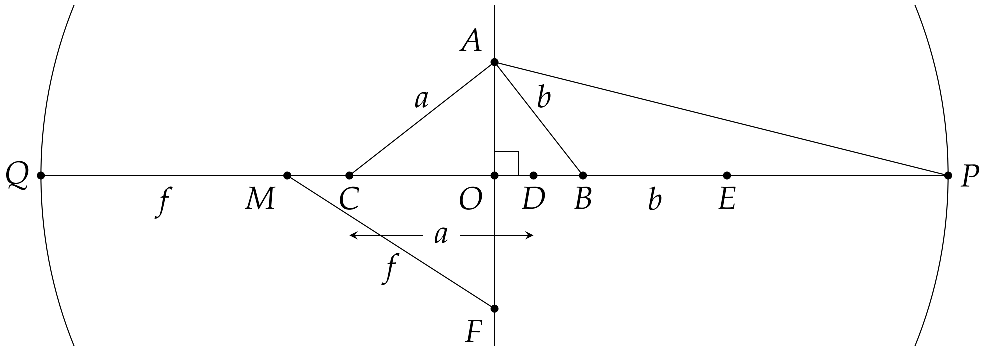
$$\overline{AP} = \sqrt{(1/4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}/4\,.$$

תהי B נקודת החיתוך של חוצה הזווית $\angle OAP$ והקטע $\overline{OP}$, ותהי C נקודת החיתוך של חוצה הזווית המשלימה ל-$\angle OAP$ והקטע $\overline{QO}$. לפי משפט חוצה הזווית הפנימית (משפט א׳.13):

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{OB}}{\overline{BP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}} \\
\frac{\overline{OB}}{1-\overline{OB}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4} \\
\overline{OB} &= \frac{1}{1+\sqrt{17}} = \frac{1}{1+\sqrt{17}} \cdot \frac{1-\sqrt{17}}{1-\sqrt{17}} \\
&= \frac{-1+\sqrt{17}}{16}\,,
\end{aligned}$$

ולפי משפט חוצה הזווית החיצונית (משפט א׳.14):

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{OC}}{\overline{CP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}} \\
\frac{\overline{OC}}{1+\overline{OC}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4} \\
\overline{OC} &= \frac{1}{-1+\sqrt{17}} = \frac{1}{-1+\sqrt{17}} \cdot \frac{1+\sqrt{17}}{1+\sqrt{17}} \\
&= \frac{1+\sqrt{17}}{16}\,.
\end{aligned}$$



איור 16.8: בניית heptadecagon (3)

בנו D על $\overline{OP}$ כך ש-$\overline{CD} = \overline{CA} = a$ (איור 16.8). לפי משפט פיתגורס:

$$\begin{aligned}
\overline{CD} = \overline{CA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{17}}{16}\right)^2} \\
&= \frac{1}{16}\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}$$

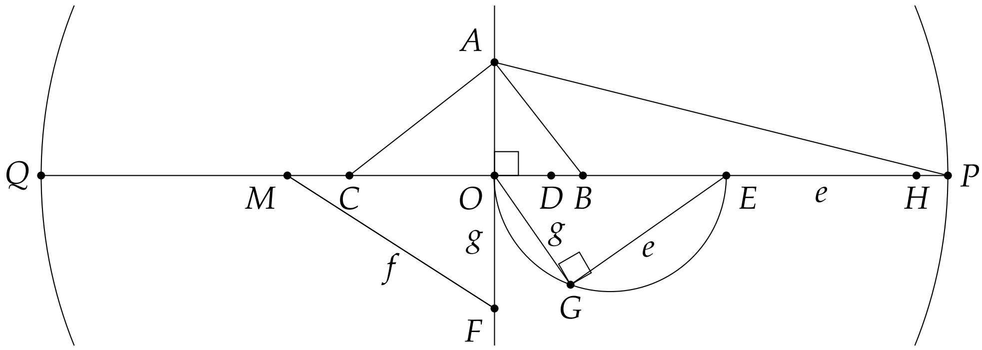
נבנה E על $\overline{OP}$ כך ש-$\overline{BE} = \overline{BA} = b$. שוב לפי משפט פיתגורס:

$$\begin{aligned}
\overline{BE} = \overline{BA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{17}}{16}\right)^2} \\
&= \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}$$

נבנה M, נקודת האמצע של $\overline{QD}$, ונבנה F על $\overline{OS}$ כך ש-$\overline{MF} = \overline{MQ} = f$:

$$\begin{aligned}
\overline{MF} = \overline{MQ} &= \frac{1}{2}\overline{QD} = \frac{1}{2}(\overline{QC} + \overline{CD}) = \frac{1}{2}((1 - \overline{OC}) + \overline{CD}) \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1+\sqrt{17}}{16}\right) + \frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{16}\right] \\
&= \frac{1}{32}\left(15 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\right)\,.
\end{aligned}$$

שימו לב ש-$\overline{MO} = 1 - \overline{MQ} = 1 - \overline{MF}$.



איור 16.9: בניית heptadecagon (3)

נבנה חצי מעגל שקוטרו $\overline{OE}$. נבנה מיתר $\overline{OG} = \overline{OF} = g$ (איור 16.9). לפי משפט פיתגורס:

$$\begin{aligned}\overline{OG} = \overline{OF} &= \sqrt{\overline{MF}^2 - \overline{MO}^2} = \sqrt{\overline{MF}^2 - (1-\overline{MF})^2}\\ &= \sqrt{2\overline{MF}-1}\\ &= \sqrt{\frac{1}{16}\left(15-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)-1}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\,.\end{aligned}$$

$\angle OGE$ היא זווית ישרה כי היא נשענת על קוטר של מעגל. נבנה H על $\overline{OP}$ כך ש-$\overline{EH} = \overline{EG} = e$.
שוב לפי משפט פיתגורס:

$$\begin{aligned}\overline{EH} = \overline{EG} &= \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{OG}^2} = \sqrt{(\overline{OB}+\overline{BE})^2 - \overline{OG}^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)}\\ &= \frac{1}{16}\sqrt{\left((18-2\sqrt{17})+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}+(34-2\sqrt{17})\right)+}\\ &\qquad\overline{\left(16+16\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)}\\ &= \frac{1}{16}\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\,.\end{aligned}$$

נחשב את $\overline{OE}$:

$$\begin{aligned}\overline{OE} = \overline{OB}+\overline{BE} &= \frac{-1+\sqrt{17}}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}\\ &= \frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)\,.\end{aligned}$$

לבסוף, $\overline{OH} = \overline{OE} + \overline{EH}$ שהיא הנוסחה של גאוס עבור $\cos(360°/17)$. כפי שמופיע באיור 16.6.

16.7 בניית מחומש משוכלל

שורשי היחידה ממעלה חמש כמספרים מרוכבים הם:

$$1+i\cdot 0,\quad \frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\quad \frac{-\sqrt{5}-1}{4}\pm i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\,.$$

16.7.1 טריגונומטריה

הזווית המרכזית במחומש משוכלל היא $360^\circ/5 = 72^\circ$. נחשב $\cos 36^\circ$ תוך שימוש בזהויות הטריגונומטריות עבור 2θ ו-$\theta/2$ (משפטים א׳.2.1, א׳.7):

$$\begin{aligned}0=\cos 90^\circ &= \cos(72^\circ+18^\circ) = \cos 2\cdot 36^\circ \cos 36^\circ/2 - \sin 2\cdot 36^\circ \sin 36^\circ/2\\ &= (2\cos^2 36^\circ - 1)\sqrt{\frac{1+\cos 36^\circ}{2}} - 2\sin 36^\circ \cos 36^\circ \sqrt{\frac{1-\cos 36^\circ}{2}}\,.\end{aligned}$$

כעת יש רק זווית אחת בנוסחה. נסמן $x=\cos 36^\circ$ ונחשב:

$$\begin{aligned}(2x^2-1)\sqrt{\frac{1+x}{2}} &= 2\sqrt{1-x^2}\cdot x\cdot\sqrt{\frac{1-x}{2}}\\ (2x^2-1)\sqrt{1+x} &= 2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}\cdot x\cdot\sqrt{1-x}\\ 2x^2-1 &= 2x(1-x)\\ 4x^2-2x-1 &= 0\,.\end{aligned}$$

מפתרון המשוואה הריבועית מתקבל ערך בר-בנייה:

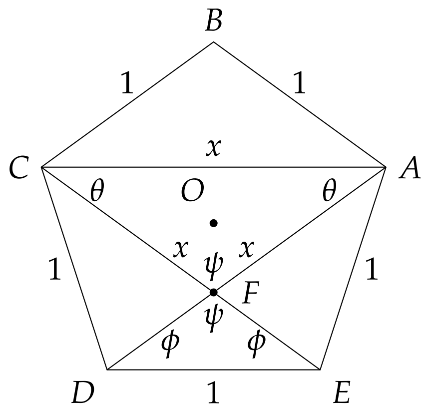
$$\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\,.$$

16.7.2 גיאומטריה

יהי $\overline{ABCDE}$ מחומש משוכלל (איור 16.10). לפי ההגדרה כל הצלעות וכל הזוויות הפנימיות שוות, וקל להראות באמצעות משולשים חופפים שכל האלכסונים שווים. נסמן את אורכי הצלעות ב-1 ואת אורכי האלכסונים ב-x.

$\triangle ACE \cong \triangle CAD$ לפי צלע, צלע, צלע כך ש-$\angle ACE = \angle CAD = \theta$. $\triangle AED \cong \triangle CDE$ לפי צלע, צלע, צלע כך ש-$\angle ADE = \angle CED = \phi$. $\angle AFC = \angle DFE = \psi$ הן זוויות קודקודיות. סכום הזוויות במשולש שווה ל-180°, ולכן $\psi + 2\theta = 180^\circ$, וגם $\psi + 2\phi = 180^\circ$, ומכאן $\theta = \phi$. לפי זוויות מתחלפות $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$.

נבנה דרך E ישר מקביל ל-$\overline{DC}$ ותהי F נקודת החיתוך שלו עם $\overline{AC}$ (איור 16.11). $\triangle ACE$ הוא משולש שווה-שוקיים עם זוויות בסיס α. $\triangle AEF$ הוא גם משולש שווה-שוקיים ולכן $\angle AFE =$



איור 16.10 : בניית מחומש משוכלל (1)

$\alpha = \angle FAE$. מכאן ש-$\triangle AEF \sim \triangle ACE$. לפי יחסי הצלעות :

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}\,.$$

התוצאה היא משוואה ריבועית :

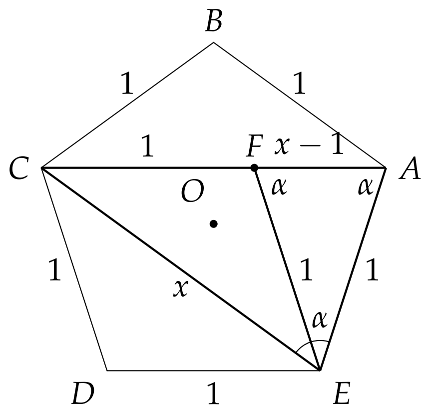
$$x^2 - x - 1 = 0\,,$$

שהשורש החיובי שלה בר-בנייה :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

מה ההפתעה?

מפתיע שעברו מעל אלפיים שנה מתקופת היוונים עד הגילוי של גאוס שהפטדקאגון הוא בר-בנייה. מפתיע גם שפתרון הבעיה הגיע לא דרך גיאומטריה אלא על ידי פיתוח שיטות אלגבריות חדשות שהיו להן השפעה מרחיקת לכת במתמטיקה.



איור 16.11 : בניית מחומש משוכלל (2)

מקורות

הפרק מבוסס על [6]. אפשר לעיין בתרגום לאנגלית של ספרו של גאוס [18]. משוואה 16.4 מופיעה ב-[41]. המחבר נותן תרגיל להמיר את הנוסחה לזו שמופיעה בעמוד 458 של [18] ובעמוד 68 של [6].

הבנייה של המצולע לקוחה מ-[10]. ניתן למצוא בניות אחרות ב-[55]. הבנייה הטריגונומטרית של מחומש משוכלל לקוחה מ-[59]. הבנייה הגיאומטרית של מחומש משוכלל התקבלה מהפתרונות של התרגילים 2.3.3--2.3.4 ב-[47].

נספח א׳

משפטים בגיאומטריה ובטריגונומטריה

נספח זה מביא משפטים בגיאומטריה ובטריגונומטריה שייתכן שאינם מוכרים לקורא וכן משפטים מוכרים שהוכחותיהם אינן מוכרות. סעיף א׳.1 מציג שלוש נוסחאות לחישוב שטח משולש. סעיף א׳.2 מוכיח זהויות טריגונומטריות. למרות שהנוסחאות והשוויונות מוכרים ברובם, לעתים תלמידים זוכרים אותם בעל-פה או מחפשים אותם בספרים בלי שאי-פעם ראו את ההוכחות. בסעיפים הבאים נמצאות הוכחות של משפטים מתקדמים בגיאומטריה: משפטים על חוצי זוויות (סעיף א׳.3), משפט תלמי (Ptolemy) על הקשר בין הצלעות והאלכסונים של מרובע חסום במעגל (סעיף א׳.4), משפט צ׳בה (Ceva) על הקשר בין שלושה קטעים במשולש (סעיף א׳.5), ומשפט מנלאוס (Menelaus) על קטעי ישר החותך מעגל (סעיף א׳.6).

א׳.1 משפטים על משולשים

א׳.1.1 חישוב שטח משולש

הנוסחה הסנדרטית לחישוב שטח משולש בעזרת הבסיס והגובה מוכרת היטב. ניתן להוכיח אותה בדרכים גיאומטריות שונות.

משפט א׳.1 השטח של משולש $\triangle ABC$ ניתן על ידי:

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bh\,, \tag{א׳.1}$$

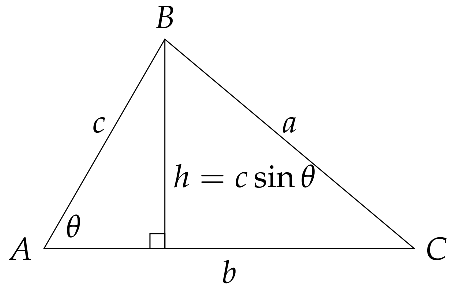
כאשר הבסיס b הוא אחד מצלעות המשולש ו-h הוא הגובה ל-b מהקודקוד הנגדי (איור א׳.1.א).

הוכחה איור א׳.1.ב מראה שעל ידי ״חיתוך״ המשולש במחצית גובהו, נוכל ״להזיז״ את המשולשים הצבועים כדי לבנות מלבן ששטחו שווה לשטח המשולש. בסיס המלבן הוא b וגובהו $h/2$. □

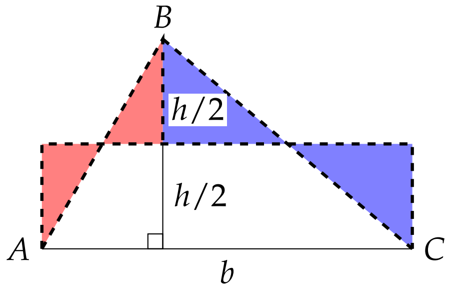
משפט א׳.2 השטח של משולש $\triangle ABC$ ניתן על ידי:

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc\sin\theta\,, \tag{א׳.2}$$

כאשר θ היא הזווית בין הצלעות b, c.



א׳.1.א חישוב שטח משולש לפי בסיס וגובה



א׳.1.ב חישוב שטח משולש לפי בסיס וגובה

הוכחה ממשפט א׳.1 כאשר $h = c\sin\theta$. □

משפט א׳.3 (הרון (Heron)) השטח של משולש $\triangle ABC$ ניתן על ידי:

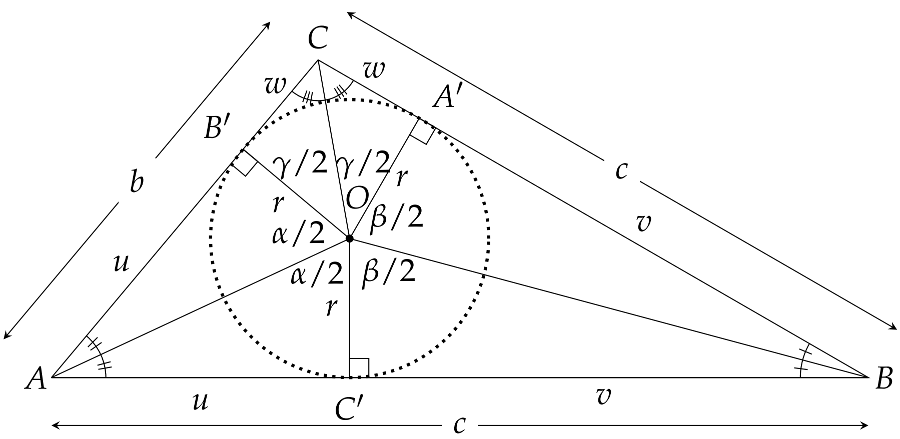
$$\triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,$$

כאשר s, מחצית ההיקף של המשולש, שווה ל-$\frac{1}{2}(a+b+c)$.

הוכחה רדיוס המעגל ומשיק החותך את הרדיוס ניצבים זה לזה. בנוסף, אורכי הקטעים של שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים. לכן (איור א׳.2):[1]

$$\triangle AOB' \cong \triangle AOC', \quad \triangle BOA' \cong \triangle BOC', \quad \triangle COA' \cong \triangle COB'\,.$$

[1] זה מראה שה-incenter מרכז המעגל החסום הוא נקודת החיתוך המשותפת לשלושת חוצי הזוויות.



איור א׳.2: משולש החוסם מעגל

השטח של $\triangle ABC$ הוא סכום השטחים של ששת המשולשים הללו. הגובה של כל אחד מהמשולשים הוא r, הרדיוס של המעגל החסום, ולכן:

$$\triangle ABC = \triangle AOB' + \triangle AOC' + \triangle BOA' + \triangle BOC' + \triangle COA' + \triangle COB' \tag{א׳.3}$$
$$\triangle ABC = \frac{1}{2} r(u+u+v+v+w+w) \tag{א׳.4}$$
$$\triangle ABC = \frac{1}{2} r(a+b+c) \tag{א׳.5}$$
$$\triangle ABC = rs\,. \tag{א׳.6}$$

נגדיר עכשיו את הצלעות באמצעות הטנגנסים של הזוויות המרכזיות:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{u}{r}, \quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{v}{r}, \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{w}{r}\,.$$

מההגדרות הללו ומ-$s = \frac{1}{2}(2u+2u+2w)$ נקבל:

$$s = u+v+w = r\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\right)\,.$$

מ-$360° = \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$ נקבל $\frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = 180°$, ולפי משפט א׳.11:

$$\begin{aligned} s &= r\left(\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}\right) \\ &= r\left(\frac{u}{r}\frac{v}{r}\frac{w}{r}\right) = \frac{1}{r^2}(u\,v\,w) \\ r &= \sqrt{\frac{u\,v\,w}{s}}\,. \end{aligned}$$

ממשוואה א׳.6:

$$\triangle ABC = rs = s\sqrt{\frac{u\,v\,w}{s}} = \sqrt{s\,u\,v\,w}\,.$$

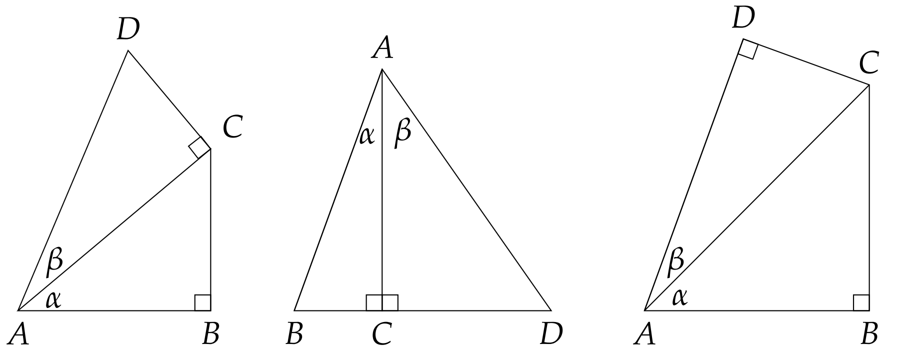
נוסחת הרון מתקבלת מ-$u = s-a, v = s-b, w = s-c$. □

א׳.2 זהויות טריגונומטריות

א׳.2.1 הסינוס והקוסינוס של סכום ושל ההפרש של שתי זוויות

משפט א׳.4

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,. \end{aligned}$$



איור א׳.3 : איורים להוכחת הזהות לסינוס של סכום זוויות

נוכיח את הנוסחה הראשונה. ניתן לקבל את הנוסחאות האחרות מערכי הסינוס והקוסינוס עבור $-\alpha$ ו-$\alpha - 90^\circ$. נתון משולש ישר-זווית $\triangle ABC$ עם זווית חדה α, ומשולש ישר-זווית $\triangle ACD$ עם זווית חדה β, ניתן לחברם ולקבל מצולעים עם זווית $\alpha + \beta$ (איור. א׳.3). המצולע השמאלי מופיע לעתים קרובות בהוכחות בספרי לימוד. כאן נביא הוכחות המבוססות על המצולעים במרכז ובימין.

הוכחה (1) נחשב את השטח של $\triangle ABD$ בשתי דרכים שונות : (1) על ידי שימוש בנוסחה א׳.2 על $\triangle ABD$, ו-(2) על ידי שימוש בנוסחה על $\triangle ABC$ ועל $\triangle ADC$ בנפרד .(איור א׳.4) גם את h נחשב בשתי דרכים שונות על ידי שימוש בהגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות :

$$\begin{aligned}
\triangle ABD &= \frac{1}{2} bc \sin(\alpha+\beta) \\
\triangle ABD &= \triangle ABC + \triangle ADC \\
&= \frac{1}{2} ch \sin\alpha + \frac{1}{2} bh \sin\beta \\
&= \frac{1}{2} c(b\cos\beta)\sin\alpha + \frac{1}{2} b(c\cos\alpha)\sin\beta \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,.
\end{aligned}$$

□

ההוכחה השנייה משתמשת במשפט שלהלן :

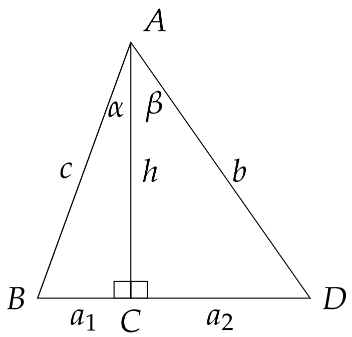
משפט א׳.5 במעגל עם **קוטר** 1 אורך המיתר שווה לסינוס הזווית ההיקפית הנשענת עליו (איור. א׳.5.א).

הוכחה יהיו $\overline{AB}$ קוטר, $\angle BAC = \alpha$ ו-D כל נקודה אחרת על המעגל היוצרת את המשולש $\triangle BDC$. בגלל שכל הזוויות הנשענות על אותו מיתר שוות, $\angle BDC = \alpha$. במשולש ישר-זווית $\triangle ABC$:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{1} = \overline{BC}\,.$$

□

הוכחה (2) ההוכחה מבוססת על התרשים הימני באיור א׳.3 שנמצא גם ב- א׳.5.ב, כאשר המרובע $\overline{ABCD}$ חסום במעגל. לפי משפט א׳.15 מרובע הוא בר-חסימה אם ורק אם סכום זוויות נגדיות



איור א׳.4: חישוב שטח המשולש בשתי דרכים שונות

שלו שווה ל-180°. $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$ כי שתי הזוויות ישרות. לפי משפט 5.4 סכום הזוויות הפנימיות במרובע הוא 360° ולכן $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$.

נניח שקוטר המעגל הוא 1 (אחרת הכפל הכול באורך הקוטר). צלעות המרובע הן:

$$\overline{BC} = \sin\alpha, \quad \overline{CD} = \sin\beta, \quad \overline{AB} = \sin\gamma, \quad \overline{DA} = \sin\delta\,,$$

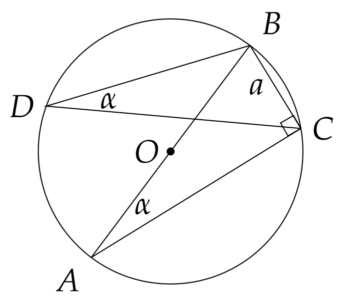
ולפי משפט הסינוסים, האלכסונים הם:

$$\overline{BD} = \sin(\alpha+\beta), \quad \overline{CA} = \sin(\alpha+\gamma)\,.$$

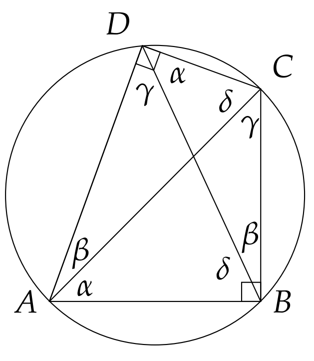
לפי משפט תלמי (משפט. א׳.18) מכפלת האלכסונים של מרובע חסום במעגל שווה לסכום המכפלות של הצלעות הנגדיות. $\angle ADC$ ו-$\angle ABC$ הן זוויות ישרות:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma) &= \sin\alpha\sin\delta + \sin\beta\sin\gamma \\
\sin(\alpha+\beta)\sin(90^\circ) &= \sin\alpha\sin(90^\circ-\beta) + \sin\beta\sin(90^\circ-\alpha) \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,.
\end{aligned}$$

$\square$



א׳.5.א כל הזוויות הנשענות על אותו מיתר שוות



א׳.5.ב מרובע חסום במעגל

א׳.2.2 הקוסינוס של זווית משולשת

משפט א׳.6

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,.$$

הוכחה ההוכחה משתמשת בנוסחות במשפט א׳.4 ובנוסחה $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$\begin{aligned}
\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha+\alpha)\\
&= \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha\\
&= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - (2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\alpha\\
&= \cos^3\alpha - \cos\alpha\sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha\\
&= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha\\
&= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)\\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,.
\end{aligned}$$

□

א׳.2.3 סינוס וקוסינוס של חצי זווית

משפט א׳.7 אם α היא זווית **במעגל** אז:[2]

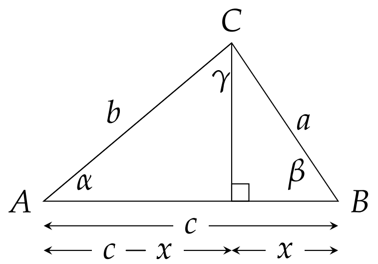
$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\\
\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\,.
\end{aligned}$$

הוכחה ההוכחה משתמשת בנוסחות במשפט א׳.4 ובנוסחה $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\
&= 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1\\
\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\\
\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 1-\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1-\frac{1+\cos\alpha}{2}\\
\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\,.
\end{aligned}$$

□

[2] הנוסחה הכללית מסובכת יותר משום שהשורשים יכולים להיות חיוביים או שליליים בתלות ברביע בו נמצאת $\alpha/2$. עבור משולש, $0 < \alpha < 180^\circ$ ולכן $0 < \alpha/2 < 90^\circ$ נמצאת ברביע הראשון והסינוס והקוסינוס שניהם חיוביים.



איור א׳.6: הוכחה ראשונה של משפט הקוסינוסים

א׳.2.4 משפט הקוסינוסים

משפט א׳.8 (חוק הקוסינוסים) במשולש $\triangle ABC$ עם צלעות a, b, c (איור א׳.6):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle ACB\,.$$

הוכחה(1) הורד גובה מ-C אל $\overline{AB}$ והשתמש בהגדרת הקוסינוס ובמשפט פיתגורס:

$$c = x + (c - x) = a\cos\beta + b\cos\alpha \tag{א׳.7}$$

$$c^2 = ac\cos\beta + bc\cos\alpha\,. \tag{א׳.8}$$

באופן דומה, הורד גבהים מ-A ל-$\overline{BC}$ ומ-B ל-$\overline{AC}$ כדי לקבל:

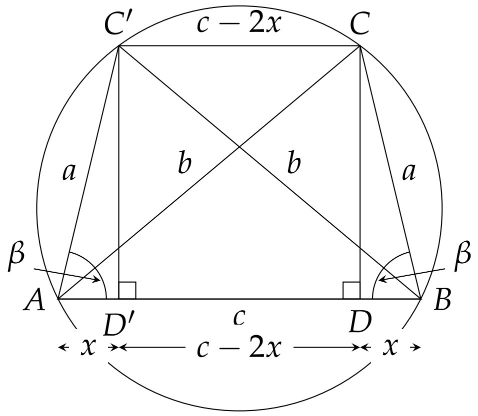
$$a^2 = ca\cos\beta + ba\cos\gamma \tag{א׳.9}$$

$$b^2 = cb\cos\alpha + ab\cos\gamma\,. \tag{א׳.10}$$

נחבר את המשוואות א׳.9 ו-א׳.10, נחסיר את המשוואה א׳.8 ונקבל:

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 - c^2 &= ca\cos\beta + ba\cos\gamma \\
&\quad + cb\cos\alpha + ab\cos\gamma \\
&\quad - ac\cos\beta - bc\cos\alpha \\
&= 2ab\cos\gamma \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.
\end{aligned}$$

□



איור א׳.7: הוכחה שנייה של משפט הקוסינוסים

הוכחה(2) ההוכחה השנייה משתמשת במשפט תלמי

(משפט א׳.18).[3]

נחסום את המשולש $\triangle ABC$ במעגל. נבנה משולש נוסף $\triangle ABC'$ שחופף למשולש $\triangle ABC$ וחסום באותו מעגל (איור א׳.7). כדי לבנות את $\triangle ABC'$, נבנה זווית מ-$\overline{AB}$ השווה ל-$\angle CAB$ והשוק שלה חותכת את המעגל ב-C' ואז נבנה את הקטע $\overline{C'A}$. זווית הנשענות על אותו מיתר שוות, $\angle AC'B = \angle BCA$, ולכן גם $\angle CBA = \angle C'AB$ ומכאן $\triangle ABC' \cong \triangle BAC$ לפי זווית, צלע, זווית עם צלע משותפת $\overline{AB}$.

הורד ניצבים ל-$\overline{AB}$ מנקודה C ל-D ומ-C' ל-D', כך ש-$x = a\cos\beta$. לפי משפט תלמי במרובע $\overline{ABCC'}$:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c(c-2x) \\ &= a^2 + c(c - 2a\cos\beta) \\ &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta\,. \end{aligned}$$

□

א׳.2.5 הטנגנס של סכום שתי זוויות

משפט א׳.9

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}\,.$$

הוכחה

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

[3] סעיף א׳.4 השתמש במשפט הקוסינוסים כדי להוכיח את משפט תלמי. ההוכחה הראשונה מאפשרת הוכחה לא מעגלית. בנוסף, קיימות הוכחות למשפט תלמי שאינן משתמשות במשפט הקוסינוסים.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}\\
&= \frac{\sin\alpha + \cos\alpha\tan\beta}{\cos\alpha - \sin\alpha\tan\beta}\\
&= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}\,.
\end{aligned}
$$

□

א׳.2.6 הטנגנס של חצי זווית

משפט א׳.10

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}\,.$$

הוכחה נפתח ונפתור משוואה ריבועית ב-$\tan(\frac{\alpha}{2})$:

$$
\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\\
\tan\alpha\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tan\alpha &= 0\\
\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}\,.
\end{aligned}
$$

□

א׳.2.7 המכפלה של שלושה טנגנסים

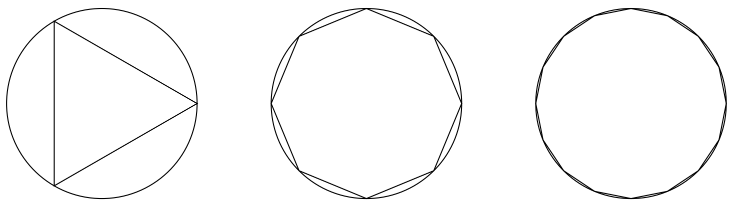
משפט א׳.11 אם $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ אזי:

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\,.$$

הוכחה

$$
\begin{aligned}
\tan\gamma &= \tan(180^\circ - (\alpha+\beta))\\
&= -\tan(\alpha+\beta)\\
&= -\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}\\
\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma &= \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma\,.
\end{aligned}
$$

□



איור א׳.8: מצולעים משוכללים בעלי 16, 8, 3 צלעות חסומים במעגלים

א׳.2.8 הגבול של $\sin\alpha/\alpha$

משפט א׳.12.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1\,.$$

הוכחה נעיין במצולעים משוכללים החסומים במעגלים (איור א׳.8), ונראה שככל שיש למצולע יותר צלעות, כך ההיקף שלו קרוב יותר להיקף המעגל. אורך הקשת שקצותיה הן נקודות הקצה של הצלע הוא היקף המעגל חלקי מספר הצלעות במצולע, כי אורכי כל הצלעות שווים. היחס בין היקף המעגל להיקף המצולע החסום שואף ל-1 ככל שיש יותר צלעות, כך גם היחס של אורך הקשת לאורך המיתר, כפי שניתן לראות מהדוגמאות שלהלן:

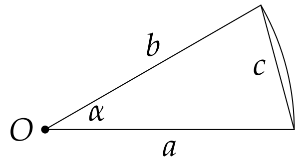
זווית	אורך הקשת	אורך המיתר	יחס
80	1.396	1.286	1.090
60	1.047	1.000	1.047
40	0.698	0.684	1.006
5	0.087	0.087	1.000

במעגל היחידה (איור א׳.9), הרדיוסים $a=b=1$, ולכן ניתן לחשב את אורך המיתר c שעליו נשענת α בעזרת משפט הקוסינוסים:

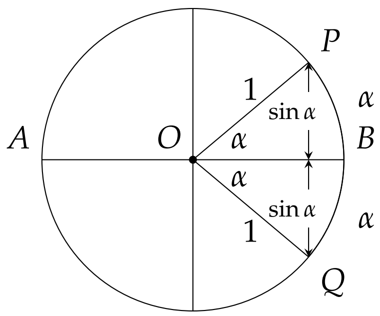
$$\begin{aligned}
c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos\alpha\\
c &= \sqrt{2-2\cos\alpha}\\
\lim_{\alpha\to 0} c &= \sqrt{2-2\cdot 1}=0\,.
\end{aligned}$$

מאיור א׳.10 אפשר לראות ש:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\sin\alpha}{2\alpha}\,.$$



איור א׳.9: אורכו של מיתר ביחס לקשת בגודל α



איור א׳.10 : היחס בין $\sin x$ ל-x

זה היחס בין אורכו של המיתר $\overline{PQ}$ לאורך הקשת $\widehat{PQ}$. אבל ראינו שיחס זה שואף ל-1 כאשר הזווית הנשענת עלהמיתר 2α שואפת ל-0, ולכן :

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1\,.$$

□

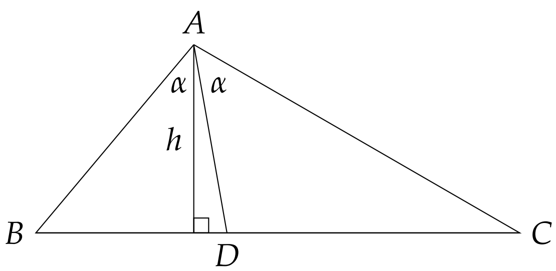
א׳.3 משפטי חוצי זווית

משפט א׳.13 במשולש $\triangle ABC$ חוצה הזווית $\angle BAC$ חותך את $\overline{BC}$ ב-D (איור א׳.11). אזי :

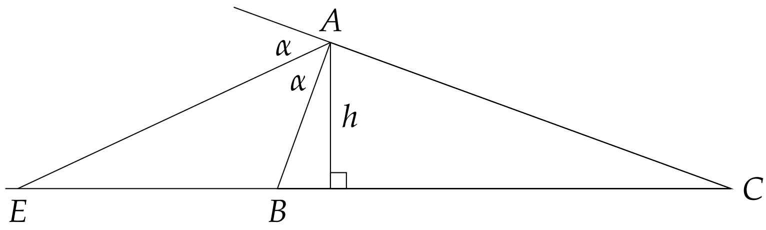
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\,.$$

הוכחה נוכיח את המשפט על ידי חישוב השטחים של שני משולשים תוך שימוש בבסיס וגובה (משוואה א׳.1), ובבסיס, זווית וצלע (משוואה א׳.2) :

$$\begin{aligned}\triangle ABD &= \frac{1}{2}\overline{BD}h = \frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{AD}\sin\alpha \\ \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{AD}\sin\alpha}{h}\end{aligned}$$



איור א׳.11 : משפט חוצה הזווית הפנימית



איור א׳.12 : משפט חוצה הזווית החיצונית

$$
\begin{aligned}
\triangle ACD &= \frac{1}{2}\overline{CD}h = \frac{1}{2}\overline{AC}\,\overline{AD}\sin\alpha \\
\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{AD}\sin\alpha}{h} \\
\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\,.
\end{aligned}
$$

□

קיים גם משפט חוצה הזווית עבור חוצה הזווית החיצונית :

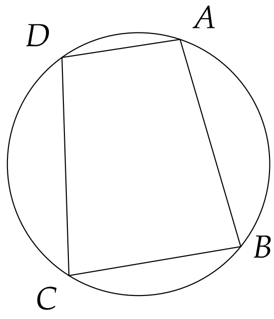
משפט א׳.14 במשולש $\triangle ABC$, $\overline{AE}$, חוצה הזווית הצמודה לזווית $\triangle BAC$ (איור א׳.12), חותך את ההמשך של $\overline{BC}$ ב-E (איור א׳.11). אזי :

$$
\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\,.
$$

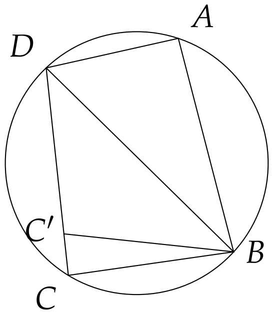
הוכחה $\overline{AC}$ הוא ישר ולכן $\angle EAC = 180^\circ - \alpha$:

$$
\begin{aligned}
\triangle ABE &= \frac{1}{2}\overline{BE}h = \frac{1}{2}\overline{AE}\,\overline{AB}\sin\alpha \\
\triangle ACE &= \frac{1}{2}\overline{CE}h = \frac{1}{2}\overline{AE}\,\overline{AC}\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}\overline{AE}\,\overline{AC}\sin\alpha \\
\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{AE}\sin\alpha}{h} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} \\
\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\,.
\end{aligned}
$$

□



א׳.13.א מרובע חסום במעגל



א׳.13.ב הקודקוד C חייב להיות על היקף המעגל

א׳.4 משפט תלמי

א׳.4.1 מעגל החסום על ידי טרפז

לפי שנוכיח את משפט תלמי נוכיח משפטים על מרובעים וטרפזים.

משפט א׳.15 ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם הזוויות הנגדיות שלו משלימות (סכומן שווה ל-180°).

ספרי לימוד בגיאומטריה מביאים הוכחה פשוטה של הכיוון ״רק אם״, אבל קשה למצוא הוכחה של הכיוון ״אם״, לכן אביא פה את שתי ההוכחות.
הוכחה (רק אם) זווית היקפית במעגל שווה למחצית הקשת שעליה היא נשענת כך ש-$\angle DAB$ שווה לחצי הקשת $\widehat{DCB}$ ו-$\angle DCB$ שווה לחצי הקשת $\widehat{DAB}$ (איור א׳.13.א). שתי הקשתות ביחד משלימות להיקף המעגל, ולכן סכומן 360°. מכאן ש-$\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$ ו-$\angle ADC + \angle ABC =$ 180°.

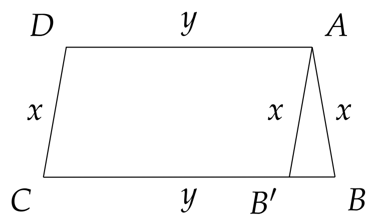
□

הוכחה (אם) ניתן לחסום כל משולש במעגל. נחסום את $\triangle DAB$ במעגל ונניח שיש נקודה C' כך ש-$\angle DAB + \angle DC'B = 180^\circ$, אבל C' **לא נמצאת** על היקף המעגל. ללא הגבלת הכלליות נניח ש-C' נמצאת בתוך המעגל (איור א׳.13.ב).

בנה קרן שמאריכה את $\overline{DC'}$ ותהי C נקודת החיתוך שלה עם המעגל. $\overline{ABCD}$ חסום במעגל ולכן:

$$\begin{aligned}\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ = \angle DAB + \angle DC'B\\ \angle DCB = \angle DC'B\,,\end{aligned}$$

תוצאה שאינה אפשרית אם C נמצאת על היקף המעגל ו-C' נמצאת בתוך המעגל. □



איור א׳.14 : טרפז שווה-שוקיים

משפט א׳.16 הזוויות הנגדיות של טרפז שווה-שוקיים משלימות.

הוכחה נבנה קטע $\overline{AB'}$ מקביל ל-$\overline{CD}$ (איור א׳.14). $\overline{AB'CD}$ מקבילית ו-$\triangle ABB'$ משולש שווה-שוקיים, ולכן $\angle B = \angle AB'B = \angle ABB' = \angle C$. באופן דומה $\angle A = \angle D$. סכום הזוויות הפנימיות של מרובע הוא $360°$ ולכן :

$$\begin{aligned}\angle A + \angle B + \angle C + \angle D &= 360^\circ\\ 2\angle A + 2\angle C &= 360^\circ\\ \angle A + \angle C &= 180^\circ\,,\end{aligned}$$

ובאופן דומה $\angle B + \angle D = 180^\circ$. □

משפט א׳.17 ניתן לחסום טרפז שווה-שוקיים במעגל.

ההוכחה מיידית מהמשפטיםא׳.15, א׳.16.

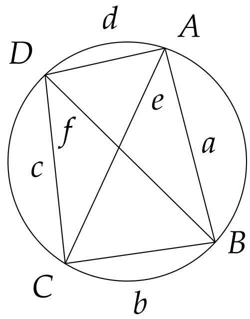
א׳.4.2 הוכחת משפט תלמי

משפט א׳.18 (Ptolemy) נתון מרובע חסום במעגל, הנוסחה שלהלן מתארת את הקשר בין אורכי האלכסונים ואורכי הצלעות במרובע (איור א׳.15).

$$ef = ac + bd\,.$$

הוכחה לפי משפט הקוסינוסים עבור ארבעת המשולשים $\triangle ABC$, $\triangle ADC$, $\triangle DAB$, $\triangle DCB$:

$$\begin{aligned}e^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle B\\ e^2 &= c^2 + d^2 - 2cd\cos\angle D\\ f^2 &= a^2 + d^2 - 2ad\cos\angle A\\ f^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle C\,.\end{aligned}$$



איור א׳.15: משפט תלמי

$\angle D = 180^\circ - \angle B$ ו-$\angle C = 180^\circ - \angle A$ כי הן זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל, ולכן $\cos\angle D = -\cos\angle B$ ו-$\cos\angle C = -\cos\angle A$. נציב במשוואות ונקבל:

$$\begin{aligned}
e^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle B\\
e^2 &= c^2 + d^2 + 2cd\cos\angle B\\
f^2 &= a^2 + d^2 - 2ad\cos\angle A\\
f^2 &= b^2 + c^2 + 2bc\cos\angle A\,.
\end{aligned}$$

נפתור את שתי המשוואות הראשונות כדי לקבל משוואה עבור e^2 ללא הקוסינוס:

$$\begin{aligned}
e^2(cd+ab) &= abc^2 + abd^2 + a^2cd + b^2cd\\
e^2 &= \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)}\,.
\end{aligned}$$

באופן דומה נקבל משוואה עבור f^2:

$$f^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}\,.$$

הכפל את שתי המשוואות ופשט כדי לקבל את משפט תלמי:

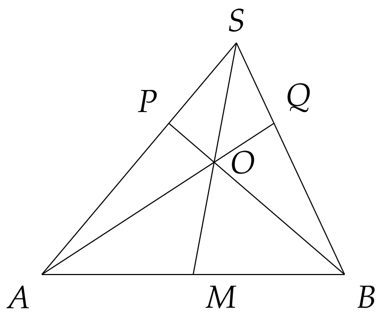
$$\begin{aligned}
e^2\cdot f^2 &= (ac+bd)^2\\
ef &= (ac+bd)\,.
\end{aligned}$$

□

א׳.5 משפט צ׳בה

משפט א׳.19 (Ceva) נתונים קטעים היוצאים מקודקודי המשלוש לצלעות הנגדיות ונחתכים בנקודה, אורכי הקטעים מקיימים את הנוסחה (איור א׳.16):

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}\cdot\frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}\cdot\frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = 1\,.$$



איור א׳.16: משפט צ׳בה

הוכחה אם הגבהים של שני משולשים שווים, אז היחס בין שטחי המשולשים שווה ליחס בין הבסיסים שלהם. בשני התרשימים באיור א׳.17 הגבהים של המשולשים האפורים שווים ולכן:

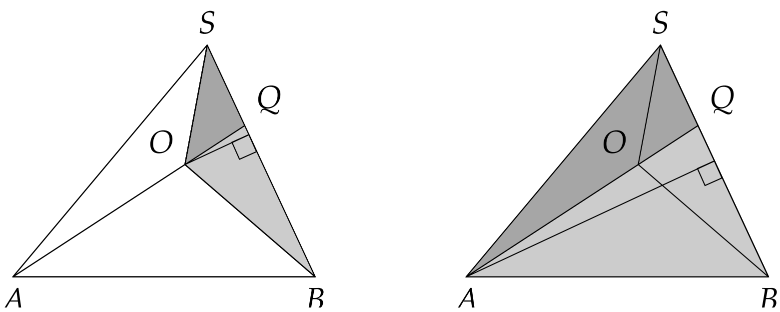
$$\frac{\triangle BQO}{\triangle SQO} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}\,, \qquad \frac{\triangle BQA}{\triangle SQA} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}\,.$$

נחסר את השטחים האפורים במשולשים ונקבל את היחס בין המשלושים האפורים באיור א׳.18:

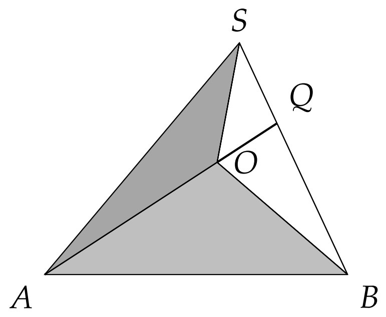
$$\frac{\triangle BOA}{\triangle SOA} = \frac{\triangle BQA - \triangle BQO}{\triangle SQA - \triangle SQO} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}\,.$$

חישוב זה עלול להיראות מעט מוזר, אז נסביר אותו בסימון פשוט יותר:

$$\begin{aligned} \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \\ \frac{e}{f} &= \frac{a}{b} \\ c - e &= \frac{ad}{b} - \frac{af}{b} = \frac{a}{b}(d-f) \\ \frac{c-e}{d-f} &= \frac{a}{b}\,. \end{aligned}$$



איור א׳.17: משולשים במשפט צ׳בה



איור א׳.18 : החסרת שטחים במשפט צ׳בהs

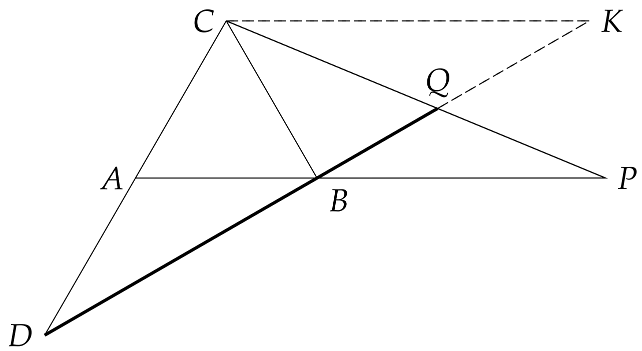
באופן דומה ניתן להוכיח :

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\triangle AOS}{\triangle BOS}$$
$$\frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = \frac{\triangle SOB}{\triangle AOB}\,,$$

ולכן :

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}\frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}\frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = \frac{\triangle AOS}{\triangle BOS}\frac{\triangle BOA}{\triangle SOA}\frac{\triangle SOB}{\triangle AOB} = 1\,,$$

כי הסדר של הקודקודים במשולש אינו משנה. □



איור א׳.19 : משפט מנלאוס

א׳.6 המשפט של Menelaus

משפט א׳.20 (Menelaus) יהי $\triangle ABC$ משולש ויהי $\overline{DBQ}$ **ישר חותך** *(transversal)* החותך את שלוש צלעות המשולש או את המשכן (איור. א׳.19). אזי:[4]

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = 1\,. \tag{א׳.11}$$

הוכחה נבנה דרך C ישר מקביל ל-$\overline{AB}$ ונאריך את $\overline{DQ}$ עד שהוא חותך את המקביל ב-K. מ-$\triangle ADB \sim \triangle CDK$ נובע:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{AB}}\,.$$

מ-$\triangle BQP \sim \triangle KQC$ נובע:

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{BP}}\,.$$

נצמצם את $\overline{CK}$ ונקבל $\overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{PQ} = \overline{QC} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{AD}$ שניתן לסדר מחדש כדי לקבל את המשוואה א׳.11. □

מקורות

פרק זה מבוסס בעיקר על [19]. ניתן להוכיח את משפט צ׳בה ואת משפט מנלאוס זה על ידי זה [45].

[4] כתלות במבנה המשולשים והקו החותך, המכפלה יכולה להיות $+1$ או -1.

ביבליוגרפיה

[1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. Proofs from THE BOOK (Fifth Edition). Springer, .2014

[2] Roger C. Alperin. A mathematical theory of origami constructions and numbers. New York Journal of Mathematics, ,133--6: 119 .2000

[3] Marita Barabash. A non-visual counterexample in elementary geometry. The College Mathematics Journal, ,(5)36 .2005

[4] Mordechai Ben-Ari. Mathematical Logic for Computer Science (Third Edition). Springer, .2012

[5] Mordechai Ben-Ari. LearnSAT: A SAT solver for education. Journal of Open Source Software, ,639: (24)3 .2018 https://doi.org/10.21105/joss.00639.

[6] Jörg Bewersdorff. Galois Theory for Beginners: A Historical Perspective. American Mathematical Society, .2006

[7] Benjamin Bold. Famous Problems of Mathematics: A History of Constructions with Straight Edge and Compass. Van Nostrand, .1969

[8] Phillips Verner Bradford. Visualizing solutions to n-th degree algebraic equations using right-angle geometric paths. Archived May ,2 2010 at the Wayback Machine. https://web.archive.org/web/20100502013959/http://www.concentric.net/~pvb/ALG/rightpaths.html, .2010

[9] Lane Butler IV. Ramsey theory. https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2016/Barton.pdf, .2016

[10] James J. Callagy. The central angle of the regular 17-gon. The Mathematical Gazette, ,292--290: (442)67 .1983 https://www.jstor.org/stable/3617271.

[11] Richard Courant and Hebert Robbins. What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods (Second Edition). Oxford University Press, .1996 Revised by Ian Stewart.

[12] R.O. Davies. On Langford's problem (II). The Mathematical Gazette, ,5--43: 253 .1959

[13] Heinrich Dörrie. 100 Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution. Dover, .1965

[14] Heinrich Dörrie. 100 problems of elementary mathematics: Their history and solution. Reworked by Michael Woltermann. Archived 21 February 2020 at the Wayback Machine. `https://web.archive.org/web/20191223032114/http://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/DorrieContents.htm`, .2010

[15] Underwood Dudley. A Budget of Trisections. Springer, .1987

[16] David Eppstein. Twenty proofs of Euler's formula: $V - E + F = 2$. `https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/`, n.d.

[17] John B. Fraleigh. A First Course in Abstract Algebra (Seventh Edition). Addison-Wesley, .2003

[18] Karl Friedrich Gauss. Disquisitiones Arithmeticae. Yale University Press, .2006 Editors: Todd W. Bressi and Paul Groth.

[19] I.M. Gelfand and Mark Saul. Trigonometry. Springer, .2001

[20] Ron Graham and Steve Butler. Rudiments of Ramsey Theory (Second Edition). American Mathematical Society, .2015

[21] David S. Gunderson. Handbook of Mathematical Induction: Theory and Applications. Mathematical Association of America, .2010

[22] Thomas L. Heath. The Thirteen Books of Euclid's Elements. Dover, .1956

[23] Marijn J. H. Heule and Oliver Kullmann. The science of brute force. Communications of the ACM, ,79--70: (8)60 .2017

[24] Thomas C. Hull. Solving cubics with creases: The work of Beloch and Lill. American Mathematical Monthly, ,315--307: (4)118 .2011

[25] Norbert Hungerbühler. A short elementary proof of the Mohr-Mascheroni theorem. American Mathematical Monthly, ,787--784: (8)101 .1994

[26] Robert J. Lang. Origami and geometric constructions. `http://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf`, -1996 .2015–

[27] Detlef Laugwitz. Eine elementare Methode für Unmöglichkeitsbeweise bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Elemente der Mathematik, ,58--17: 54 .1962

[28] Po-Shen Loh. A different way to solve quadratic equations. `https://www.poshenloh.com/quadratic/`, .2019

[29] Po-Shen Loh. A simple proof of the quadratic formula. `https://arxiv.org/abs/1910.06709`, .2019

[30] Zohar Manna. Mathematical Theory of Computing. McGraw-Hill, .1974

[31] George E. Martin. Geometric Constructions. Springer, .1998

[32] Luke Mastin. Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi: Muslim Mathematician. https://www.storyofmathematics.com/islamic_alkhwarizmi.html, .2020

[33] William McCallum. A tale of two triangles: Heron triangles and elliptic curves. http://blog.kleinproject.org/?p=4, .2012

[34] Brendan D. McKay. Ramsey theory. http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/ramsey.html, nd.

[35] J.E. Miller. Langford's problem, remixed. http://dialectrix.com/langford.html, .2014

[36] Liz Newton. The power of origami. https://plus.maths.org/content/power-origami.

[37] Timothy Peil. The rusty compass theorem. Archived 20/07/2020 at the Wayback Machine. https://web.archive.org/web/20200720195718/http://web.mnstate.edu/peil/geometry/C2EuclidNonEuclid/1Compass.htm, .2006

[38] Ramanujan. Squaring the circle. Journal of the Indian Mathematical Society, V: 138, .1913 http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram05.pdf.

[39] Ramanujan. Modular equations and approximations to π. The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, XLV: 350--372, .1914 http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram06.pdf.

[40] M. Riaz. Geometric solutions of algebraic equations. American Mathematical Monthly, ,658--654: (7)69 .1962

[41] Tom Rike. Fermat numbers and the heptadecagon. https://mathcircle.berkeley.edu/sites/default/files/BMC6/ps0506/Heptadecagon.pdf, .2005

[42] Eleanor Robson. Words and pictures: New light on Plimpton .322 American Mathematical Monthly, ,120--105: (2)109 .2002

[43] Sheldon Ross. A First Course in Probability (Tenth Edition). Pearson, .2019

[44] Peter Schumer. The Josephus problem: Once more around. Mathematics Magazine, ,17--12: (1)75 .2002

[45] John R. Silvester. Ceva = (Menelaus)^2. The Mathematical Gazette, ,271--268: (500)84 .2000

[46] Timothy Sipka. Alfred Bray Kempe's ``Proof'' of the four-color theorem. Math Horizons, ,26--21: (2)10 .2002 http://www.jstor.org/stable/25678395.

[47] John Stillwell. Mathematics and Its History (Third Edition). Springer, .2010

[48] Jeff Suzuki. A brief history of impossibility. Mathematics Magazine, ,38--27: (1)81 .2008

[49] Robin Thomas. An update on the four-color theorem. Notices of the AMS, ,859--848: (7)45 .1998 http://www.ams.org/notices/199807/thomas.pdf.

[50] Godfried Toussaint. A new look at Euclid's second proposition. The Mathematical Intelligencer, ,23--12: (3)15 .1993

[51] Wikipedia. Angle trisection.

[52] Wikipedia. Cubic equation.

[53] Wikipedia. Five color theorem.

[54] Wikipedia. Four color theorem.

[55] Wikipedia. Heptadecagon.

[56] Wikipedia. Huzita–Hatori axioms.

[57] Wikipedia. Josephus problem.

[58] Wikipedia. Neusis construction.

[59] Wikipedia. Pentagon.

[60] Wikipedia. Plimpton .322

[61] Wikipedia. Quadratic equation.

[62] Wikipedia. Quadratrix of Hippias.

[63] Wikipedia. Sexagesimal.