

# **Sorpresas matemáticas**

Mordechai Ben-Ari

Traducción: DeepL

Verificación de la traducción: Abraham Arcavi

© Moti Ben-Ari and Abraham Arcavi 2023

This work is licensed under Attribution-ShareAlike 4.0 International. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>.

## Prólogo

Si todos estuviéramos expuestos a las matemáticas en su estado natural, con todas las desafiantes diversiones y sorpresas que conllevan, creo que veríamos un cambio drástico tanto en la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas como en nuestra concepción de lo que significa ser «bueno en matemáticas».

Paul Lockhart

Estoy ávido de sorpresas, porque cada una de ellas nos hace un poco más inteligentes.

Tadashi Tokieda

Cuando se abordan adecuadamente, las matemáticas pueden depararnos muchas sorpresas agradables. Así lo confirma una búsqueda en Google de «sorpresas matemáticas» que, sorprendentemente, arroja casi 500 millones de resultados. ¿Qué es una sorpresa? Los orígenes de la palabra se remontan al francés antiguo, con raíces latinas: «sur» (sobre) y «prendre» (tomar, agarrar, apoderarse). Literalmente, sorprender es sobrecoger. Como sustantivo, sorpresa es tanto un acontecimiento o circunstancia imprevista o desconcertante como la emoción que provoca.

Consideremos, por ejemplo, un extracto de una conferencia de Maxim Bruckheimer<sup>1</sup> sobre el círculo de Feuerbach: «Dos puntos se encuentran en una y sólo una línea recta, esto no es ninguna sorpresa. Sin embargo, tres puntos no están necesariamente sobre una recta y si, durante una exploración geométrica, tres puntos ‘caen en’ una recta, esto es una sorpresa y frecuentemente tenemos que referirnos a este hecho como un teorema a demostrar. Tres puntos cualesquiera que no estén en una recta se encuentran en una circunferencia. Sin embargo, si cuatro puntos se encuentran en la misma circunferencia, es una sorpresa que debe formularse como un teorema. . . . En la medida en que el número de puntos en una línea recta es mayor que 3, el teorema es más sorprendente. Del mismo modo, en la medida en que el número de puntos situados sobre una circunferencia es mayor que 4, el teorema es más sorprendente. Así, la afirmación de que para cualquier triángulo hay nueve puntos relacionados en el mismo círculo . . . es muy sorprendente. Además, a pesar de la magnitud de la sorpresa, su demostración es elegante y fácil».

En este libro, Mordechai Ben-Ari ofrece una rica colección de sorpresas matemáticas, la mayoría de ellas menos conocidas que el Círculo de Feuerbach y con

---

<sup>1</sup>Maxim Bruckheimer fue un matemático, uno de los fundadores de la Open University UK y decano de su Facultad de Matemáticas. Fue Jefe del Departamento de Enseñanza de las Ciencias en el Instituto Weizmann de Ciencias.

sólidas razones para incluirlas. En primer lugar, a pesar de estar ausentes de los libros de texto, las joyas matemáticas de este libro son accesibles con sólo una formación de bachillerato (y paciencia, y papel y lápiz, ya que la diversión no sale gratis). En segundo lugar, cuando un resultado matemático desafía lo que damos por sentado, nos sorprendemos de verdad (Capítulos 1, 13). Del mismo modo, nos sorprende: la astucia de un argumento (Capítulos 2, 3), la justificación de la posibilidad de una construcción geométrica por medios algebraicos (Capítulo 16), una demostración basada en un tema aparentemente no relacionado (Capítulos 4, 5), una extraña demostración por inducción (Capítulo 6), nuevas formas de ver un resultado bien conocido (Capítulo 7), un teorema aparentemente menor que se convierte en el fundamento de todo un campo de las matemáticas (Capítulo 8), fuentes inesperadas de inspiración (Capítulo 9), ricas formalizaciones que surgen de actividades puramente recreativas como el origami (Capítulos 10–12). Todas estas son diferentes razones para la inclusión de agradables, bellas y memorables sorpresas matemáticas en este precioso libro.

Hasta ahora he abordado la relación del libro con la primera parte de la definición de sorpresa, las razones cognitivas racionales de lo inesperado. En cuanto al segundo aspecto, el emocional, este libro es una vívida ejemplificación de lo que muchos matemáticos afirman sobre la razón principal para hacer matemáticas: ¡son fascinantes! Además, afirman que las matemáticas estimulan tanto nuestra curiosidad intelectual como nuestra sensibilidad estética, y que resolver un problema o comprender un concepto proporciona una recompensa espiritual, que nos incita a seguir trabajando en más problemas y conceptos.

Se ha dicho que la función de un prólogo es decir a los lectores por qué deben leer el libro. He intentado lograrlo, pero creo que la respuesta más completa vendrá de usted, el lector, después de leerlo y experimentar lo que sugiere la etimología de la palabra sorpresa: ¡ser sobrecogido por ella!

*Abraham Arcavi*

## Prefacio

El artículo de Godfried Toussaint sobre la «brújula plegable» [50] me causó una profunda impresión. Nunca se me habría ocurrido que la brújula moderna con bisagra ajustable no es la que se utilizaba en tiempos de Euclides. En este libro presento una selección de resultados matemáticos que no sólo son interesantes, sino que me sorprendieron cuando los encontré por primera vez.

Las matemáticas necesarias para leer el libro son las de la enseñanza secundaria, pero eso no significa que el material sea sencillo. Algunas de las demostraciones son bastante largas y requieren que el lector esté dispuesto a perseverar en el estudio del material. La recompensa es la comprensión de algunos de los resultados más bellos de las matemáticas. El libro no es un libro de texto, porque el amplio abanico de temas tratados no encaja perfectamente en un programa de estudios. Es apropiado para actividades de enriquecimiento para estudiantes de secundaria, para seminarios de nivel universitario y para profesores de matemáticas.

Los capítulos pueden leerse independientemente. (Una excepción es que el capítulo 10 sobre los axiomas del origami es un requisito previo para los capítulos 11, 12, los otros capítulos sobre origami). Las notas pertinentes a todos los capítulos figuran a continuación en la lista denominada Estilo.

### ¿Qué es una sorpresa?

Hubo tres criterios para incluir un tema en el libro:

- Los teoremas me sorprendieron. Especialmente sorprendentes fueron los teoremas sobre la constructibilidad con regla y compás. Cuando una profesora de matemáticas me propuso un proyecto sobre origami, al principio lo rechacé porque dudaba de que pudiera haber matemáticas serias asociadas a esta forma de arte. Incluí otros temas porque, aunque conocía los resultados, sus demostraciones eran sorprendentes por su elegancia y accesibilidad, en particular, la demostración puramente algebraica de Gauss de que se puede construir un heptadecágono regular.
- El material no aparece en los libros de texto de secundaria o de educación terciaria, y sólo he encontrado estos teoremas y sus demostraciones en libros de texto avanzados y en la literatura de investigación. Hay artículos en Wikipedia sobre la mayoría de los temas, pero hay que saber dónde buscar y los artículos suelen ser esquemáticos.
- Los teoremas y sus demostraciones son accesibles con un buen conocimiento de las matemáticas de secundaria.

Cada capítulo concluye con un párrafo *¿Cuál es la sorpresa?* que explica mi elección del tema.

## Resumen del contenido

El capítulo 1 presenta la demostración de Euclides de que cualquier construcción que sea posible con un compás fijo lo es también con un compás plegable. Se han dado muchas demostraciones, pero, como muestra Toussaint, la mayoría son incorrectas porque dependen de diagramas que no siempre representan correctamente la geometría. Para subrayar que no hay que fiarse de los diagramas, presento la famosa supuesta demostración de que todo triángulo es isósceles.

A lo largo de los siglos, los matemáticos intentaron sin éxito trisecar un ángulo arbitrario (dividirlo en tres partes iguales) utilizando únicamente una regla y un compás. Underwood Dudley realizó un estudio exhaustivo de los trisectores que propusieron construcciones incorrectas; la mayoría de las construcciones son aproximaciones que se pretenden exactas. El capítulo 2 comienza presentando dos de estas construcciones y desarrolla las fórmulas trigonométricas que demuestran que sólo son aproximaciones. Para demostrar que la trisección con una regla y un compás no tiene importancia práctica, se presentan trisecciones con herramientas más complejas: El *neusis* de Arquímedes y el *cuadratrix* de Hipias. El capítulo concluye con una demostración de que es imposible trisecar un ángulo arbitrario con una regla y un compás.

La cuadratura de un círculo (dado un círculo construir un cuadrado con la misma área) no se puede realizar utilizando una regla y un compás, porque el valor de  $\pi$  no se puede construir. El capítulo presenta tres construcciones elegantes de aproximaciones cercanas a  $\pi$ , una de Kochański y dos de Ramanujan. El capítulo concluye mostrando que se puede utilizar una cuadratriz para cuadrar un círculo.

El teorema de los cuatro colores afirma que es posible colorear cualquier mapa plano con cuatro colores, de forma que ningún país con un límite común esté coloreado con el mismo color. La demostración de este teorema es extremadamente complicada, pero la demostración del teorema de los cinco colores es elemental y elegante, como se muestra en el capítulo 4. El capítulo también presenta la demostración de Percy Heawood de que la «demostración» de Alfred Kempe del teorema de los cuatro colores es incorrecta.

¿Cuántos guardias debe tener un museo de arte para que todas las paredes estén bajo la observación constante de al menos un guardia? La demostración en el capítulo 5 es bastante ingeniosa, ya que utiliza la coloración de grafos para resolver lo que a primera vista parece un problema puramente geométrico.

El capítulo 6 presenta algunos resultados menos conocidos y sus demostraciones por inducción: teoremas sobre los números de Fibonacci y los números de Fermat, la función 91 de McCarthy y el problema de Josefo.

El capítulo 7 analiza el método de Po-Shen Loh para resolver ecuaciones cuadráticas. El método es un elemento crítico de la demostración algebraica de Gauss de que se puede construir un heptadecágono (Capítulo 16). El capítulo incluye la construcción geométrica de al-Khwarizmi para encontrar raíces de ecuaciones cuadráticas y una construcción geométrica utilizada por Cardano en el desarrollo de la fórmula para encontrar raíces de ecuaciones cúbicas.

La teoría de Ramsey es un tema de combinatoria que constituye un área activa de investigación. Busca patrones entre subconjuntos de grandes conjuntos. El capítulo 8 presenta ejemplos sencillos de ternas de Schur, ternas pitagóricas, números de Ramsey y el problema de van der Waerden. La demostración del teorema de las ternas pitagóricas se ha realizado recientemente con ayuda de un programa informático basado en la lógica matemática. El capítulo concluye con una digresión sobre los conocimientos de los antiguos babilonios sobre los ternas pitagóricas.

C. Dudley Langford observó a su hijo jugando con bloques de colores y se dio cuenta de que los había colocado en una secuencia interesante. En el capítulo 9 presenta su teorema sobre las condiciones para que tal secuencia sea posible.

El capítulo 10 contiene los siete axiomas del origami, junto con los cálculos detallados de la geometría analítica de los axiomas, y las caracterizaciones de los pliegues como lugares geométricos.

El capítulo 11 presenta el método de Eduard Lill y el pliegue de origami propuesto por Margarita P. Beloch. Presento el método de Lill como un truco de magia, así que no lo estropearé dando detalles aquí.

El capítulo 12 muestra que el origami puede realizar construcciones que no son posibles con regla y compás: trisección de un ángulo, duplicación de un cubo y construcción de un nonágono (polígono regular de nueve lados).

El capítulo 13 presenta el teorema de Georg Mohr y Lorenzo Mascheroni de que cualquier construcción con regla y compás puede realizarse utilizando sólo un compás.

La afirmación correspondiente de que sólo es suficiente una regla es incorrecta, porque una regla no puede calcular longitudes que sean raíces cuadradas. Jean-Victor Poncelet conjeturó y Jakob Steiner demostró que una regla es suficiente, siempre que exista un único círculo fijo en algún lugar del plano (Capítulo 14).

Si dos triángulos tienen el mismo perímetro y la misma área, ¿deben ser congruentes? Eso parece razonable, pero resulta que no es cierto, aunque se necesita un poco de álgebra y geometría para encontrar un par no congruente como se muestra en el Capítulo 15.

El capítulo 16 presenta el tour-de-force de Gauss: una demostración de que un heptadecágono (un polígono regular con diecisiete lados) puede construirse utilizando una regla y un compás. Mediante un ingenioso argumento sobre la simetría de las raíces de los polinomios, obtuvo una fórmula que sólo utiliza los cuatro operadores aritméticos y las raíces cuadradas. Gauss no dio una construcción explícita de un

heptadecágono, por lo que se presenta la elegante construcción de James Callagy. El capítulo concluye con la construcción de un pentágono regular basado en el método de Gauss para la construcción de un heptadecágono.

Para mantener el libro lo más autónomo posible, el Apéndice A recoge demostraciones de teoremas de geometría y trigonometría que pueden no resultar familiares al lector.

## Estilo

- Se supone que el lector tiene un buen conocimiento de las matemáticas de secundaria, incluyendo:
  - Álgebra: polinomios y división de polinomios, polinomios mónicos (o unitarios)—aquellos cuyo coeficiente de la mayor potencia es 1, ecuaciones cuadráticas, multiplicación de expresiones con exponentes  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ .
  - Geometría euclídiana: triángulos congruentes  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  y los criterios de congruencia, triángulos semejantes  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  y las razones de sus lados, circunferencias y sus ángulos inscritos y centrales.
  - Geometría analítica: plano cartesiano, cálculo de longitudes y pendientes de segmentos, fórmula de la circunferencia.
  - Trigonometría: las funciones seno, coseno, tangente y las conversiones entre ellas, ángulos en el círculo unitario, las funciones trigonométricas de ángulos reflejados alrededor de un eje como  $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ .
- Las afirmaciones que hay que demostrar se denominan *teoremas* sin intentar distinguir entre teoremas, lemas y corolarios.
- Cuando un teorema sigue a una construcción, las variables que aparecen en el teorema se refieren a puntos, rectas y ángulos rotulados en la figura que acompaña a la construcción.
- Se han dado los nombres completos de los matemáticos sin información biográfica que se puede encontrar fácilmente en Wikipedia.
- El libro está escrito de manera que sea lo más autónomo posible, pero ocasionalmente la presentación depende de conceptos matemáticos avanzados y teoremas que se dan sin demostraciones. En tales casos, se presenta un resumen del material en recuadros que pueden omitirse.
- No hay ejercicios, pero se invita al lector ambicioso a demostrar cada teorema antes de leer la demostración.

- Las construcciones geométricas pueden estudiarse utilizando programas informáticos como Geogebra.
- $\overline{AB}$  se utiliza tanto para el nombre de un segmento como para su longitud.
- $\triangle ABC$  se utiliza tanto para el nombre de un triángulo como para su área.

### Agradecimientos

Este libro nunca se habría escrito sin el aliento de Abraham Arcavi, que me acogió con agrado para que me adentrara en su terreno de la educación matemática. También escribió amablemente el prólogo. Avital Elbaum Cohen y Ronit Ben-Bassat Levy siempre estuvieron dispuestas a ayudarme a (re)aprender matemáticas de secundaria. Oriah Ben-Lulu me introdujo en las matemáticas del origami y colaboró en las demostraciones. Agradezco a Michael Woltermann el permiso para utilizar varias secciones de su reelaboración del libro de Heinrich D'Orrie. Jason Cooper, Richard Kruel, Abraham Arcavi y los revisores anónimos han aportado comentarios muy útiles.

Me gustaría dar las gracias al equipo de Springer por su apoyo y profesionalidad, en particular al editor Richard Kruel.

El libro se publica bajo el programa Open Access y me gustaría dar las gracias al Instituto Weizmann de Ciencias por financiar la publicación.

Los archivos fuente  $\text{\LaTeX}$  para el libro (que incluyen la fuente TikZ para los diagramas) están disponibles en:

<https://github.com/motib/surprises>

*Mordechai (Moti) Ben-Ari*



## Índice general

<b>1. El compás plegable</b>	<b>1</b>
1.1. Construcción con regla y compás . . . . .	2
1.2. Compases fijos y compases plegables . . . . .	2
1.3. Construcción de Euclides para copiar un segmento . . . . .	3
1.4. Una construcción errónea para copiar un segmento de línea . . . . .	4
1.5. No te fíes de un diagrama . . . . .	5
<b>2. Trisección de un ángulo</b>	<b>9</b>
2.1. Trisecciones aproximadas . . . . .	9
2.2. Trisección con Neusis . . . . .	13
2.3. Duplicar el cubo con un Neusis . . . . .	15
2.4. Trisección mediante una cuadratriz . . . . .	17
2.5. Números construibles . . . . .	18
2.6. Números construibles como raíces de polinomios . . . . .	20
2.7. Imposibilidad de las Construcciones Clásicas . . . . .	23
<b>3. La cuadratura del círculo</b>	<b>26</b>
3.1. Construcción de Kochański . . . . .	26
3.2. Primera construcción de Ramanujan . . . . .	28
3.3. Segunda construcción de Ramanujan . . . . .	32
3.4. Cuadratura de un círculo con una cuadratriz . . . . .	34
<b>4. El teorema de los cinco colores</b>	<b>37</b>
4.1. Mapas y grafos planos . . . . .	37
4.2. Fórmula de Euler . . . . .	39
4.3. Grafos no planos . . . . .	41
4.4. Los grados de los vértices . . . . .	42
4.5. El teorema de los seis colores . . . . .	43
4.6. El teorema de los cinco colores . . . . .	44
4.7. Demostración incorrecta del teorema de los cuatro colores . . . . .	46
<b>5. Cómo custodiar un museo</b>	<b>49</b>
5.1. Colorear polígonos triangulados . . . . .	50
5.2. De colorear polígonos a vigilar un museo . . . . .	51
5.3. Cualquier polígono puede triangularse . . . . .	53

<b>6. Inducción</b>	<b>56</b>
6.1. El axioma de la inducción matemática . . . . .	56
6.2. Números de Fibonacci . . . . .	58
6.3. Números de Fermat . . . . .	60
6.4. La función 91 de McCarthy . . . . .	62
6.5. El problema de Josefo . . . . .	63
<b>7. Resolución de ecuaciones cuadráticas</b>	<b>68</b>
7.1. Métodos tradicionales para resolver ecuaciones cuadráticas . . . . .	68
7.2. La relación entre las raíces y los coeficientes . . . . .	69
7.3. Ejemplos del método de Loh . . . . .	71
7.4. Derivación de la fórmula tradicional . . . . .	72
7.5. Ecuaciones cuadráticas de Al-Khwarizmi . . . . .	73
7.6. Construcción de Cardano para resolver ecuaciones cúbicas . . . . .	74
7.7. No los intimidaban los números imaginarios . . . . .	74
7.8. El método de Lill y el círculo de Carlyle . . . . .	77
7.9. Cálculo numérico de las raíces . . . . .	79
<b>8. Teoría de Ramsey</b>	<b>82</b>
8.1. Ternas de Schur . . . . .	82
8.2. Ternas pitagóricas . . . . .	84
8.3. El problema de Van der Waerden . . . . .	85
8.4. Teorema de Ramsey . . . . .	86
8.5. El método probabilístico . . . . .	87
8.6. Resolución de SAT . . . . .	89
8.7. Las ternas pitagóricas en la matemática babilónica . . . . .	93
<b>9. El problema de Langford</b>	<b>97</b>
9.1. El problema de Langford como un problema de cobertura . . . . .	97
9.2. ¿Para qué valores de $N$ se puede resolver el problema? . . . . .	98
9.3. Solución para $L(4)$ . . . . .	102
<b>10. Los axiomas del origami</b>	<b>104</b>
10.1. Axioma 1 . . . . .	105
10.2. Axioma 2 . . . . .	105
10.3. Axioma 3 . . . . .	106
10.4. Axioma 4 . . . . .	108
10.5. Axioma 5 . . . . .	109
10.6. Axioma 6 . . . . .	111
10.7. Axioma 7 . . . . .	118

<b>11. El método de Lill y el pliegue de Beloch</b>	<b>122</b>
11.1. Un truco de magia . . . . .	122
11.2. Especificación del método de Lill . . . . .	124
11.3. Prueba del método de Lill . . . . .	128
11.4. El pliegue de Beloch . . . . .	129
<b>12. Construcciones geométricas con origami</b>	<b>132</b>
12.1. Trisección de Abe de un ángulo . . . . .	132
12.2. Trisección de Martin . . . . .	133
12.3. Duplicación de un cubo de Messer . . . . .	135
12.4. La duplicación de un cubo de Beloch . . . . .	137
12.5. Construcción de un nonágono regular . . . . .	139
<b>13. Un compás es suficiente</b>	<b>142</b>
13.1. ¿Qué es una construcción con sólo un compás? . . . . .	142
13.2. Reflexión de un punto . . . . .	143
13.3. Construcción de un círculo de radio dado . . . . .	144
13.4. Suma y resta de segmentos . . . . .	145
13.5. Un segmento como cociente de segmentos . . . . .	149
13.6. Construcción de la intersección de dos líneas . . . . .	150
13.7. La intersección de una recta y una circunferencia . . . . .	152
<b>14. Una regla y un círculo son suficientes</b>	<b>154</b>
14.1. ¿Qué es una construcción sólo con regla? . . . . .	154
14.2. Construcción de una recta paralela a una recta dada . . . . .	155
14.3. Construcción de una perpendicular a una recta dada . . . . .	158
14.4. Copiar un segmento en una dirección determinada . . . . .	158
14.5. Un segmento de línea como cociente de segmentos . . . . .	160
14.6. Construcción de una raíz cuadrada . . . . .	160
14.7. Construcción de la intersección de una recta y una circunferencia . . . . .	161
14.8. Construcción de la intersección de dos circunferencias . . . . .	162
<b>15. Los triángulos con áreas y perímetros iguales?</b>	<b>165</b>
15.1. De un triángulo a una curva elíptica . . . . .	165
15.2. Resolución de la ecuación de la curva elíptica . . . . .	167
15.3. Derivación de un triángulo a partir de la curva elíptica . . . . .	169
<b>16. Construcción de un Heptadecágono regular</b>	<b>172</b>
16.1. Construcción de polígonos regulares . . . . .	173
16.2. Teorema fundamental del álgebra . . . . .	174
16.3. Raíces de la unidad . . . . .	174
16.4. Prueba de Gauss de que un heptadecágono es construible . . . . .	175

16.5. Derivación de la fórmula de Gauss . . . . .	178
16.6. Construcción de un heptadecágono . . . . .	180
16.7. Construcción de un Pentágono Regular . . . . .	185
<b>A. Teoremas de geometría y trigonometría</b>	<b>188</b>
A.1. Teoremas sobre triángulos . . . . .	188
A.2. Identidades trigonométricas . . . . .	190
A.3. Teoremas de la bisectriz del ángulo . . . . .	200
A.4. Teorema de Ptolomeo . . . . .	201
A.5. Teorema de Ceva . . . . .	204
A.6. Teorema de Menelao . . . . .	205
<b>Bibliografía</b>	<b>207</b>

## Capítulo 1

### El compás plegable

Un compás moderno es un compás fijo: la distancia entre los dos brazos puede fijarse de modo que sea posible copiar un segmento de línea o un círculo de una posición a otra (Fig. 1.1). Euclides utilizó un *un compás plegable* cuando no se puede mantener una distancia fija (Fig. 1.2). Los profesores suelen utilizar un compás plegable que consiste en un rotulador atado a una cuerda que se utiliza para construir un círculo en una pizarra. Es imposible mantener una longitud fija cuando se retira el compás de la pizarra.

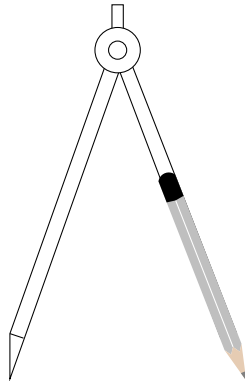


Fig. 1.1: *Un compás fijo. Un brazo tiene una aguja que se coloca en el centro del círculo. Un lápiz fijado al otro brazo sirve para dibujar el círculo. Los brazos están unidos por una bisagra ajustada modo que la distancia entre los brazos (el radio del círculo) se mantiene incluso cuando el compás se levanta del papel.*

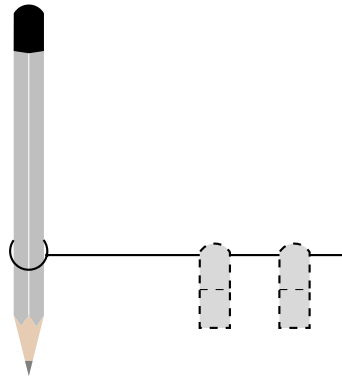


Fig. 1.2: *Un compás plegable. El usuario sujeta un trozo de cuerda en el centro del círculo. El otro extremo de la cuerda se ata a un lápiz y se utiliza para dibujar el círculo. Cuando se levanta el compás del papel, los dedos (punteados) pueden deslizarse fácilmente hasta una nueva posición.*

Este capítulo comienza con una discusión sobre la relevancia de estudiar la construcción con regla y compás (Sec. 1.1). En el apartado 1.2 se comparan los dos tipos de compás en la construcción más elemental: una mediatriz. En el apartado 1.3 se presenta el método de Euclides para copiar un segmento utilizando un compás plegable. Esto demuestra que cualquier construcción que se pueda hacer usando un compás fijo se puede realizar usando un compás plegable. La sección 1.4 presenta

una demostración de este teorema que parece correcta, pero no funciona para todas las configuraciones y puntos. Para enfatizar que no hay que fiarse de los diagramas, la sección 1.5 presenta una famosa supuesta demostración de que todos los triángulos son ; la demostración parece correcta, pero no lo es porque se basa en un diagrama incorrecto.

### 1.1 Construcción con regla y compás

La construcción con regla y compás solía ser el concepto fundamental que se enseñaba en geometría euclidiana. Recientemente, ha caído en desgracia en los programas escolares. Es cierto que el tema tiene poca o ninguna utilidad práctica. Como mostramos en las secciones 2.2, 2.3, 2.4, 3.4, los griegos sabían cómo realizar construcciones que son imposibles con una regla y un compás utilizando herramientas sólo ligeramente más avanzadas. Hoy en día, mediante métodos numéricos, los ordenadores pueden realizar construcciones con la precisión que se desee.

No obstante, creo que estudiar las construcciones tiene sus ventajas:

- Es más divertido y desafiante aprender geometría a través de construcciones que simplemente leyendo teoremas y demostraciones.
- Se han logrado avances significativos en matemáticas mediante intentos de encontrar construcciones. El capítulo 16 presenta una construcción de Gauss que condujo al álgebra abstracta moderna, en particular, la teoría desarrollada por Évariste Galois.
- Es algo contraintuitivo y por lo tanto muy interesante que se pueda demostrar que es imposible construir algunos objetos geométricos.
- Lamentablemente, hay muchas personas que pierden años de su vida intentando realizar construcciones imposibles. Los estudiantes deberían ser conscientes de la inutilidad de tales esfuerzos.

### 1.2 Compases fijos y compases plegables

Algunos libros de geometría presentan la construcción de la mediatriz de un segmento construyendo dos circunferencias centradas en los extremos del segmento de forma que los radios sean iguales y mayores que la mitad de la longitud del segmento (Fig. 1.3). Esto sólo se puede hacer con un compás fijo porque después de dibujar el círculo centrado en  $A$ , la distancia entre los brazos del compás tiene que permanecer fija para dibujar el círculo centrado en  $B$ .

Figura 1.4 muestra la construcción de una mediatriz con compás fijo o con compás plegable. Se construyen dos circunferencias: una centrada en  $A$  con radio  $\overline{AB}$  y otra centrada en  $B$  con radio  $\overline{BA}$ . Esto se puede hacer con un compás plegable

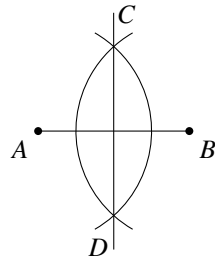


Fig. 1.3: Construcción de una mediatriz con compás fijo

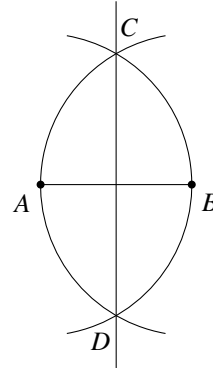


Fig. 1.4: Construcción de una mediatriz con compás fijo o plegable

porque (obviamente)  $\overline{AB} = \overline{BA}$ , por lo que el compás no tiene que «recordar» la longitud de  $\overline{AB}$  para construir una circunferencia centrada en  $B$  con el mismo radio. La demostración de que la recta construida mostrada en la figura 1.3 es una mediatriz no es nada elemental porque hay que utilizar conceptos relativamente avanzados como triángulos congruentes. Sin embargo, la demostración de que la construcción de una mediatriz mostrada en la figura 1.4 es correcta es sencilla y se basa en el hecho de que  $\triangle ABC$  es un triángulo equilátero. De hecho, esta es la primera proposición en los *Elementos* de Euclides.  $\overline{AC} = \overline{AB}$  ya que son radios del mismo círculo, análogamente,  $\overline{BC} = \overline{BA}$ . Tenemos:  $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BA} = \overline{BC}$ .

Figura 1.5 muestra que para la construcción con compás fijo, el triángulo será un triángulo isósceles, no necesariamente equilátero (Fig. 1.6).

### 1.3 Construcción de Euclides para copiar un segmento

La segunda proposición de los *Elementos* de Euclides describe cómo copiar un segmento  $\overline{AB}$  dado un segmento de la misma longitud, uno de cuyos puntos extremos es un punto  $C$  dado. Por lo tanto, un compás fijo no añade ninguna capacidad adicional y basta con un compás plegable, aunque las construcciones son más fáciles con un compás fijo.

**Teorema 1.1.** *Dado un segmento  $\overline{AB}$  y un punto  $C$ , se puede construir un segmento  $\overline{CC'}$ , uno de cuyos puntos extremos es  $C$ , utilizando un compás plegable, tal que  $\overline{AB} = \overline{CC'}$  (Fig. 1.7).*

*Demostración.* Construimos el segmento  $\overline{AC}$ . Construimos el triángulo equilátero  $\triangle ACD$  cuya base es  $\overline{AC}$  (Fig. 1.8). Por la primera proposición de Euclides, el triángulo se puede construir utilizando un compás plegable. Construimos la semirrecta

que es prolongación del segmento *de D a A*, y construir la semirrecta que es prolongación de la recta *segmento de D a C* (Fig. 1.9). Construimos la circunferencia centrada en A con radio  $\overline{AB}$  y denotamos con E la intersección de la circunferencia y la semirrecta que prolonga  $\overline{DA}$  (Fig. 1.10). Construimos la circunferencia centrada en D con radio  $\overline{DE}$  y denotamos con F la intersección de la circunferencia y la semirrecta que prolonga  $\overline{DC}$  (Fig. 1.11).

$\overline{DC} = \overline{DA}$  porque el  $\triangle ACD$  es equilátero.  $\overline{AE} = \overline{AB}$  son radios de lamisma circunferencia, al igual que  $\overline{DF} = \overline{DE}$ . Por lo tanto:

$$\overline{CF} = \overline{DF} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DA} = \overline{AE} = \overline{AB}.$$

□

La especificación de las direcciones de las semirrectas es esencial. La demostración funciona para cualquier segmento  $\overline{AB}$  y cualquier punto C, independientemente de su posición respecto a  $\overline{AB}$ . Especificando las direcciones, el «cono» encerrado por los dos rayos intersectará los círculos aunque  $\overline{AC} > \overline{AB}$  (Fig. 1.12).

#### 1.4 Una construcción errónea para copiar un segmento de línea

*Demostración.* Construimos tres circunferencias: una centrada en A con radio  $\overline{AB}$ , otra centrada en A con radio  $\overline{AC}$ , y otra centrada en C con radio  $\overline{AC} = \overline{CA}$ . Denotamos las intersecciones de las circunferencias centradas en A y C con E y F, respectivamente, y denotamos una intersección de la circunferencia centrada en C y la circunferencia centrada en A con radio  $\overline{AB}$  con D. Si  $\overline{AC} > \overline{AB}$ , la construcción es como se muestra en la figura 1.13.

Construimos una circunferencia centrada en E con radio  $\overline{ED}$ . Denotemos por G la intersección de esta circunferencia con la circunferencia centrada en A de radio  $\overline{AC}$ . Hay dos intersecciones, por lo que elegir la más cercana a C (Fig. 1.14).

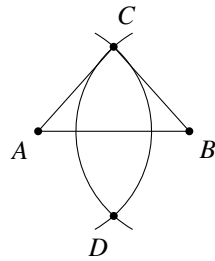


Fig. 1.5: Construcción de un triángulo isóceles con compás fijo

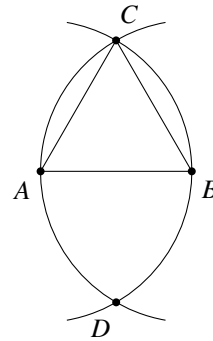


Fig. 1.6: Construcción de un triángulo equilátero con un compás plegable



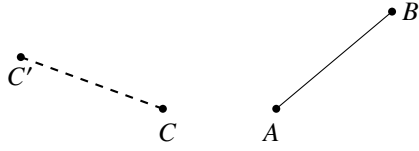


Fig. 1.7: Copiar el segmento  $\overline{AB}$ . La orientación de  $\overline{CC'}$  no es importante.

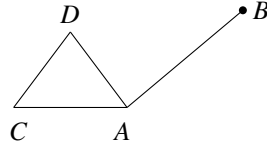


Fig. 1.8: Copiar un segmento de línea con un compás plegable

$\overline{CD} = \overline{CE}$  son radios de la misma circunferencia que  $\overline{AE} = \overline{AG}$ . Por construcción los radios  $\overline{CE}$  y  $\overline{AE}$  son iguales. Por tanto:

$$\overline{CD} = \overline{CE} = \overline{AE} = \overline{AG}.$$

$\overline{EG} = \overline{ED}$  son radios del mismo círculo, por lo que  $\triangle EAG \cong \triangle DCE$  por lado-lado-lado y  $\angle GEA = \angle DEC$ .

Como:

$$\angle GEC = \angle GEA - \angle CEA = \angle DEC - \angle CEA = \angle DEA,$$

resulta que  $\triangle ADE \cong \triangle CGE$  por lado-ángulo-lado.  $\overline{AB} = \overline{AD}$  son radios del círculo menor centrado en A, por lo que  $\overline{GC} = \overline{AD} = \overline{AB}$ .  $\square$

La demostración sólo es correcta si  $\overline{AC} > \overline{AB}$ . Figura 1.15 muestra un diagrama donde  $\overline{AC} < \overline{AB}$  y se puede ver que  $\overline{AB} \neq \overline{GC}$ .

### 1.5 No te fíes de un diagrama

**Teorema 1.2** (Incorrecto, por supuesto). *Todos los triángulos son isósceles.*

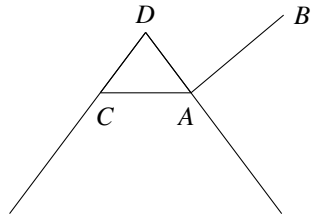


Fig. 1.9: Construcción de semirrectas a partir de D

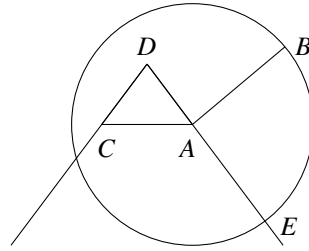
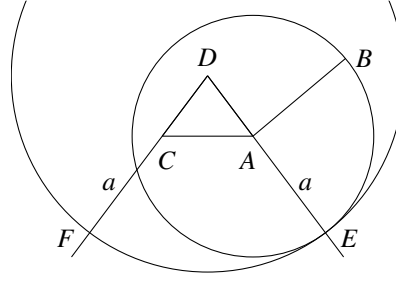
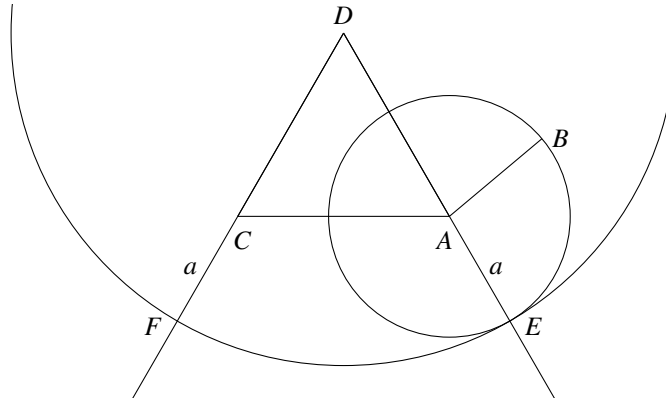


Fig. 1.10: Construimos un círculo de radio  $\overline{AB}$

Fig. 1.11: Construcción de  $\overline{CF} = \overline{AB}$ Fig. 1.12: Construcción para  $\overline{AC} > \overline{AB}$ 

*Demostración.* Dado un triángulo arbitrario  $\triangle ABC$ , sea  $P$  la intersección de la bisectriz del ángulo  $\angle BAC$  y la mediatriz de  $\overline{BC}$ . Las intersecciones de las altitudes desde  $P$  a los lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  se denotan por  $E$ ,  $F$ , respectivamente (Fig. 1.16).

$\triangle APE \cong \triangle APF$  porque son triángulos rectángulos con ángulos iguales  $\alpha$  y lado común  $\overline{AP}$ .  $\triangle DPB \cong \triangle DPC$  ya que son triángulos rectángulos,  $\overline{PD}$  es un lado común y  $\overline{BD} = \overline{CD} = a$ .  $\triangle EPB \cong \triangle FPC$  ya que son triángulos rectángulos,  $\overline{EP} = \overline{FP}$  por la primera congruencia y  $\overline{PB} = \overline{PC}$  por la segunda congruencia. Combinando las ecuaciones obtenemos que  $\triangle ABC$  es :

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AF} + \overline{FC} = \overline{AC}.$$

□

La lógica de la demostración es correcta, pero el diagrama en el que se basa la demostración no es correcto porque el punto  $P$  está fuera del triángulo. (Fig. 1.17).

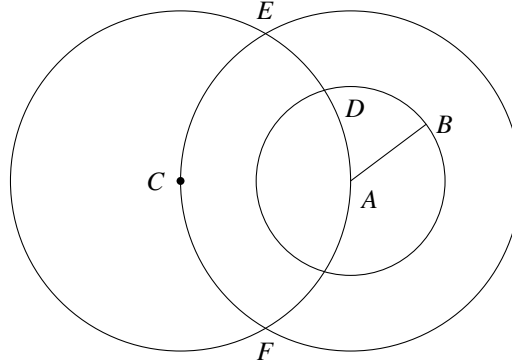


Fig. 1.13: Construcción para copiar un segmento (1)

**¿Cuál es la sorpresa?**

De estudiante daba por sentado que un compás tiene una bisagra que mantiene la distancia entre la punta y el lápiz cuando se levanta del papel. Cuando el profesor utilizaba un compás hecho con un trozo de cuerda y un trozo de tiza, nunca imaginé que se diferenciara de mi compás. El artículo de Gotfried Toussaint fue una verdadera sorpresa, al igual que su demostración de que las demostraciones posteriores a Euclides eran incorrectas porque dependían de diagramas que hacían suposiciones injustificadas. Recomendando el artículo a los lectores que deseen profundizar en el conocimiento de las demostraciones en matemáticas.

**Fuentes**

Este capítulo se basa en [50]. La construcción incorrecta de la equivalencia de los dos compases en Sec. 1.4 es de [37]. Thomas L. Heath, uno de los mayores expertos en matemáticas griegas, ha escrito una exhaustiva traducción al inglés de los *Elements* de Euclides junto con un extenso comentario [22].

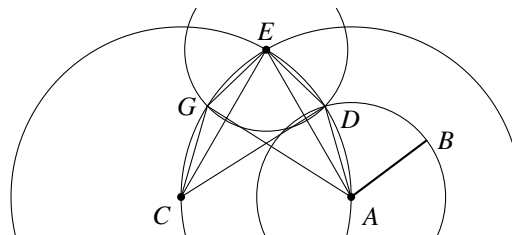


Fig. 1.14: Construcción para copiar un segmento (2)

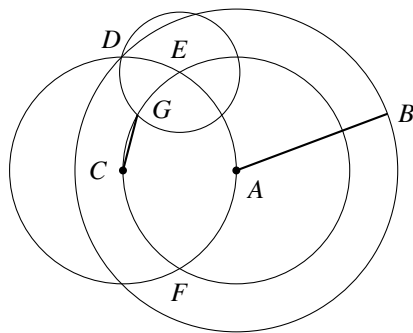


Fig. 1.15: Un diagrama para el que la demostración no funciona

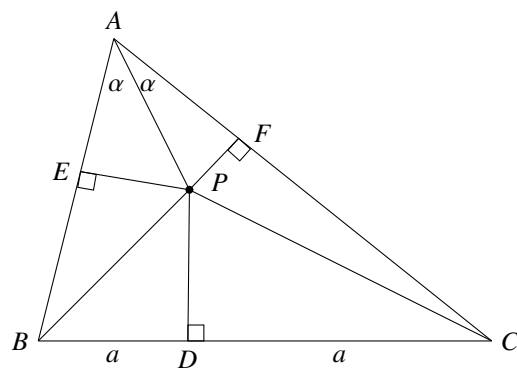


Fig. 1.16: Una demostración incorrecta de que todos los triángulos son isóceles

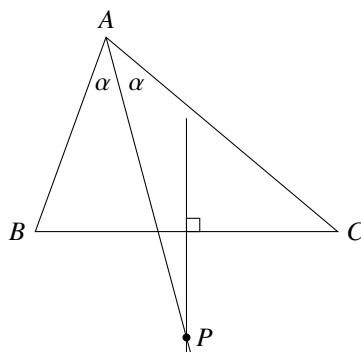


Fig. 1.17: Por qué no funciona la construcción

## Capítulo 2

### Trisección de un ángulo

Es imposible trisecar un ángulo arbitrario (dividir el ángulo en tres partes iguales) utilizando sólo una regla y un compás. La trisección requiere la construcción de raíces cúbicas, pero una regla y un compás sólo pueden construir longitudes que son expresiones construidas a partir de números enteros, las cuatro operaciones aritméticas y raíces cuadradas. Esto fue demostrado por Pierre Wantzel en 1837. Sin embargo, innumerables aficionados siguen intentando trisecar un ángulo. Sus construcciones son aproximaciones aunque están convencidos de que son correctas. La sección 2.1 presenta dos construcciones de este tipo, desarrolla fórmulas para los ángulos y muestra los errores en las aproximaciones.

Los matemáticos griegos descubrieron que si se permiten otros instrumentos, los ángulos se pueden trisecar. La sección 2.2 explica una construcción de Arquímedes utilizando un instrumento sencillo llamado *neusis* y la sección 2.3 muestra cómo duplicar el volumen de un cubo utilizando el *neusis*. La sección 2.4 presenta una construcción para la trisección de Hippias utilizando un instrumento llamado *cuadratriz*. El resto del capítulo contiene una demostración de la imposibilidad de la trisección de un ángulo. La sección 2.5 caracteriza los números construibles, la sección 2.6 relaciona los números construibles con las raíces de los polinomios y la sección 2.7 utiliza esta teoría para demostrar que la trisección de un ángulo y la duplicación de un cubo son imposibles.

#### 2.1 Trisecciones aproximadas

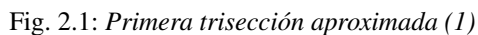
##### 2.1.1 Primera trisección aproximada

**Construcción:** Sea  $\theta = \angle AOB$  un ángulo arbitrario y sin pérdida de generalidad supongamos que  $A, B$  están en una circunferencia unitaria cuyo centro es  $O$ . Bisecamos  $\angle AOB$  y sea  $C$  la intersección de la bisectriz con la circunferencia unitaria. Sea  $D$  el punto medio de la  $\overline{OA}$  y sea  $T$  el punto medio de la  $\overline{DC}$ . Denotemos el ángulo  $\angle DOT$  por  $\phi$  (Fig. 2.1).

**Teorema 2.1.**

$$\tan \phi = \frac{2 \sin(\theta/2)}{1 + 2 \cos(\theta/2)}.$$

*Demostración.* Figura 2.2 se extrae de la figura 2.1 y contiene anotaciones adicionales. Sea  $\overline{CF}$  la perpendicular a  $\overline{OA}$  que corta a  $\overline{OA}$  en  $F$ . Dado que  $\overline{OC} = 1$ ,  $\overline{CF} = \sin(\theta/2)$  y  $\overline{OF} = \cos(\theta/2)$ . Sea  $\overline{TE}$  la perpendicular a  $\overline{OA}$  que interseca  $\overline{OA}$  en  $E$ .


$$\overline{OE} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right).$$
$$(2a)^2 = \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{2}.$$
$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + \left[ \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right) \right]^2 \\ h^2 &= \frac{1}{4} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right) \sin^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \left[ \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right) \right]^2 = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ h &= \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \phi &= \frac{h}{OE} = \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{1 + 2 \cos \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

9

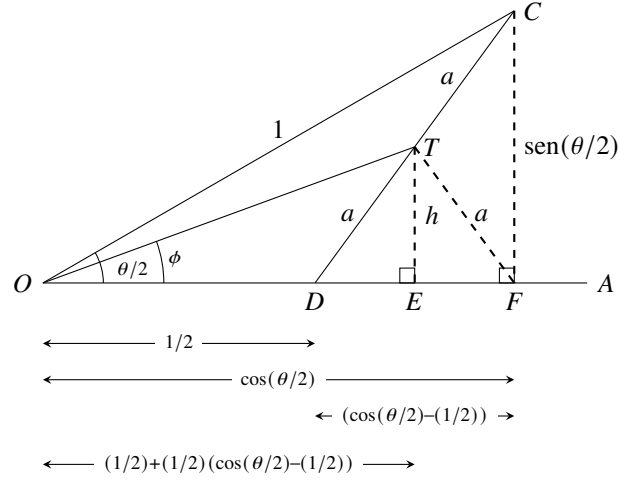


Fig. 2.2: Primera trisección aproximada (2)

Esta es una aproximación a una trisección  $\phi = \theta/3$ . Para  $\theta = 60^\circ$ :

$$\tan^{-1} \left( \frac{2 \sin 30^\circ}{1 + 2 \cos 30^\circ} \right) = \tan^{-1} 0,366 \approx 20,1^\circ \approx 20^\circ.$$

Tabla 2.1 muestra los errores para un rango de ángulos agudos. El error es relativamente pequeño para ángulos pequeños, aumentando a 1% a  $85^\circ$ .

### 2.1.2 Segunda trisección aproximada

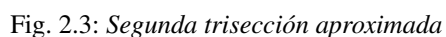
**Construcción:** Sea  $\theta = \angle AOB$  un ángulo arbitrario y sin pérdida de generalidad supongamos que  $A, B$  están en una circunferencia unitaria cuyo centro es  $O$ . Construimos una circunferencia de radio  $1/3$  con centro  $O$  y que  $D$  sea su intersección con  $\overline{OA}$ . Bisecamos  $\angle AOB$  y sea  $C$  la intersección de la bisectriz con la circunferencia de radio  $1/3$ . Construimos la cuerda  $\overline{CD}$  y las cuerdas  $\overline{AE} = \overline{ET} = \overline{CD}$ . Como cuerdas iguales subtienden ángulos centrales iguales  $\angle TOE = \angle EOA = \phi$  (Fig. 2.3).

**Teorema 2.2.**

$$\cos \phi = 1 - \frac{1}{9}(1 - \cos(\theta/2)) = 1 - \frac{2}{9} \sin^2(\theta/4).$$

*Demostración.* Por la Ley de los Cosenos en  $\triangle DOC$ :

$$\overline{CD}^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \cos(\theta/2) = \frac{2}{9}(1 - \cos(\theta/2)).$$


$$\overline{AE} = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \phi = 2(1 - \cos \phi).$$
$$\cos \phi = 1 - \frac{1}{9}(1 - \cos(\theta/2)).$$
$$\cos \phi = 1 - \frac{2}{9} \sin^2(\theta/4).$$

Esta es una aproximación a una trisección  $2\phi = \theta/3$ . Para  $\theta = 60^\circ$ :

La tabla 2.2 muestra los errores para un rango de ángulos agudos. Esta construcción es mucho menos precisa que la de la Sección 2.1.1.



Cuadro 2.1: Errores en la primera trisección aproximada

$\theta(^{\circ})$	$\theta/3(^{\circ})$	$\tan^{-1} \phi(^{\circ})$	Error( $^{\circ}$ )	Error(%)
5	1,667	1,667	0,000	0,004
10	3,333	3,334	0,000	0,014
15	5,000	5,002	0,002	0,032
20	6,667	6,670	0,004	0,057
25	8,333	8,341	0,007	0,088
30	10,000	10,013	0,013	0,128
35	11,667	11,687	0,020	0,174
40	13,333	13,364	0,030	0,228
45	15,000	15,043	0,043	0,289
50	16,667	16,726	0,060	0,358
55	18,333	18,413	0,080	0,435
60	20,000	20,104	0,104	0,520
65	21,667	21,799	0,133	0,612
70	23,333	23,500	0,166	0,713
75	25,000	25,206	0,206	0,823
80	26,667	26,918	0,251	0,941
85	28,333	28,636	0,303	1,068

## 2.2 Trisección con Neusis

Usamos el vocablo regla (a secas) para indicar un instrumento que no tiene graduación (medidas) y solo puede utilizarse para construir una línea recta entre dos puntos dados. La regla con unidades de medida se denomina «regla graduada». Arquímedes demostró que neusis, una regla con dos marcas a una distancia fija, puede utilizarse para trisecar un ángulo (Fig. 2.4). Definimos la distancia entre las marcas como 1.

**Construcción:** Sea  $\alpha = \angle ABE$  un ángulo arbitrario en una circunferencia unitaria con centro  $B$ , donde el radio de la circunferencia es igual a la distancia entre las marcas del neusis. Extendemos el radio  $\overline{EB}$  más allá del círculo. Colocamos una arista de la neusis sobre  $A$  y la movemos hasta que intersecte la prolongación de  $\overline{EB}$



Fig. 2.4: A neusis

Cuadro 2.2: Errores en la segunda trisección aproximada

$\theta(^{\circ})$	$\theta/3(^{\circ})$	$\cos^{-1} 2\phi(^{\circ})$	Error( $^{\circ}$ )	Error( %)
5	1,667	1,667	0,000	0,007
10	3,333	3,332	0,001	0,028
15	5,000	4,997	0,003	0,063
20	6,667	6,659	0,008	0,113
25	8,333	8,319	0,015	0,176
30	10,000	9,975	0,025	0,254
35	11,667	11,626	0,040	0,346
40	13,333	13,273	0,060	0,451
45	15,000	14,914	0,086	0,571
50	16,667	16,549	0,118	0,705
55	18,333	18,177	0,156	0,853
60	20,000	19,797	0,203	1,015
65	21,667	21,408	0,258	1,192
70	23,333	23,011	0,322	1,382
75	25,000	24,603	0,397	1,586
80	26,667	26,185	0,481	1,805
85	28,333	27,756	0,577	2,038

en  $D$  y la circunferencia en  $C$ , utilizando las marcas de forma que la longitud del segmento  $\overline{CD}$  sea 1. Construyamos la recta  $\overline{AD}$ . Denotemos  $\angle CDB = \beta$  (Fig. 2.5).

**Teorema 2.3.**  $\beta = \alpha/3$ .

*Demostración.* Construye  $\overline{BC}$  y denotemos los ángulos y segmentos como se muestra en la figura 2.6.  $\triangle ABC$  y  $\triangle BCD$  son triángulos isóceles:  $\overline{AB} = \overline{BC}$  son radios de la misma circunferencia y  $\overline{BC} = \overline{CD}$  por construcción mediante el neusis. Como la suma de los ángulos de un triángulo es igual a  $180^{\circ}$  y la suma de los ángulos suplementarios también es igual a  $180^{\circ}$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= 180^{\circ} - 2\beta \\
 \gamma &= 180^{\circ} - \epsilon = 2\beta \\
 \delta &= 180^{\circ} - 2\gamma = 180^{\circ} - 4\beta \\
 \alpha &= 180^{\circ} - \delta - \beta = 3\beta.
 \end{aligned}$$

□

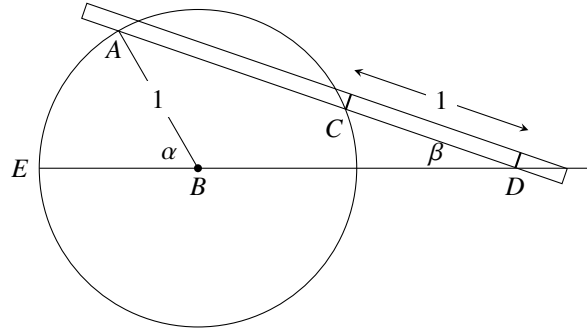


Fig. 2.5: La construcción de neusis para trisecar un ángulo (1)

### 2.3 Duplicar el cubo con un Neusis

Dado un cubo  $C$  construir otro cubo con el doble de su volumen. Si el volumen de  $C$  es  $V$  sus lados son de longitud  $\sqrt[3]{V}$ . Las caras de un cubo con el doble de volumen son  $\sqrt[3]{2V} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{V}$ , por lo que si pudiéramos construir  $\sqrt[3]{2}$  podríamos duplicar el cubo.

**Construcción:** Construimos el triángulo equilátero unitario  $\triangle ABC$  y prolonguemos  $\overline{CA}$  con otro segmento unitario hasta  $D$ . Construyamos los rayos que prolongan  $\overline{AB}$  y  $\overline{DB}$ . Coloquemos la neusis en el punto  $C$  y movámoslo hasta que una marca del neusis se sitúe en la semirrecta  $\overline{AB}$  en  $P$  y la otra marca se sitúe en la semirrecta  $\overline{DB}$  en  $Q$ . Denotemos  $\overline{CQ} = x$  y  $\overline{BP} = y$  (Fig. 2.7).

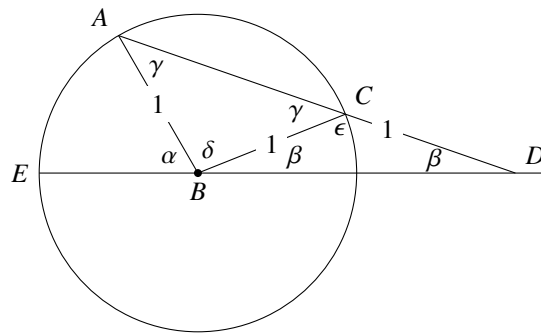


Fig. 2.6: La construcción con neusis para trisecar un ángulo (2)

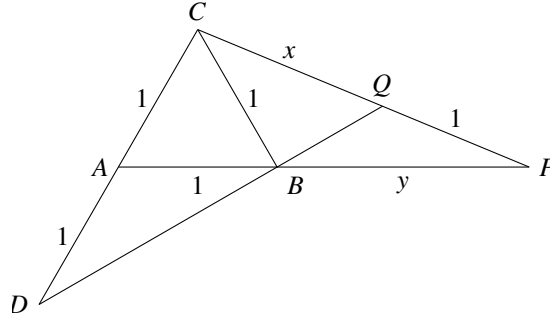


Fig. 2.7: Doblar el cubo con un neusis

**Teorema 2.4.**  $x = \sqrt[3]{2}$ .

*Demostración.* Como el triángulo  $ABC$  es equilátero,  $\cos \angle CAP = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  y por la Ley de los Cosenos en  $\triangle APC$ :

$$\overline{CP}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP} \cos 60^\circ \quad (2.1a)$$

$$(x+1)^2 = 1^2 + (y+1)^2 - 2 \cdot 1 \cdot (y+1) \cdot \frac{1}{2} \quad (2.1b)$$

$$x^2 + 2x = y^2 + y. \quad (2.1c)$$

Por el teorema de Menelao (Teorema A.20):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = 1.$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{1} = 1 \quad (2.2a)$$

$$xy = 2. \quad (2.2b)$$

Sustituyendo la ecuación 2.2b en la ecuación 2.1c da:

$$x^2 + 2x = \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x}$$

$$x^4 + 2x^3 = 4 + 2x$$

$$x^3(x+2) = 2(x+2)$$

$$x = \sqrt[3]{2}.$$

□

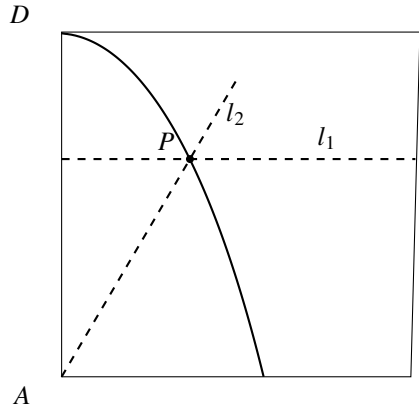


Fig. 2.8: Una cuadratriz

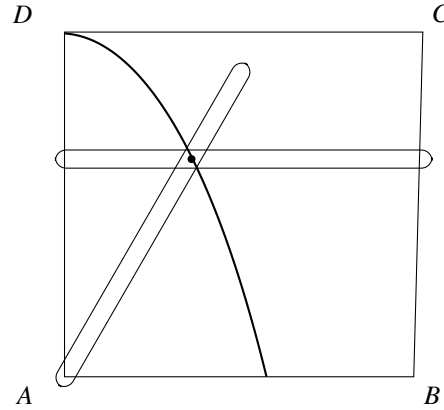


Fig. 2.9: Un compás de cuadraturiz

## 2.4 Trisección mediante una cuadratriz

Sea  $\overline{ABCD}$  un cuadrado. Sea  $l_1$  un segmento situado inicialmente en  $\overline{DC}$  y sea  $l_2$  un segmento situado inicialmente en  $\overline{AD}$ . Movamos  $l_1$  con velocidad lineal constante hasta alcanzar  $\overline{AB}$  y giremos  $l_2$  con velocidad angular constante en sentido horario sobre  $A$  hasta alcanzar también  $\overline{AB}$ . Supongamos que alcanzan  $\overline{AB}$  juntos. Por ejemplo, si  $l_2$  gira a  $1^\circ/\text{segundo}$  y el lado del cuadrado es de 9 centímetros,  $l_1$  debe moverse a 0,1 cm/segundo. La huella que deja su punto de intersección  $P$  se denomina *cuadratriz* (Fig. 2.8). Su definición se atribuye al matemático Hipias.

Se puede construir una cuadratriz utilizando un compás de cuadratriz como se muestra en la figura 2.9. Consiste en dos rectas (no marcadas) que se mueven como se ha descrito anteriormente. Una articulación las obliga a moverse simultáneamente y trazar la curva.

Se puede utilizar una cuadratriz para trisecar un ángulo.

**Construcción:** Sea  $\angle CDP_1 = \alpha$  un ángulo arbitrario, donde  $P_1$  es la intersección de la recta que define el ángulo  $\alpha$  relativo a  $\overline{DC}$  y la cuadratriz. Construyamos una recta que pase por  $P_1$  paralela a  $\overline{DC}$  y denotemos con  $E$  su intersección con  $\overline{AD}$ . Denotemos  $t$  el segmento  $\overline{DE}$  por  $t$  y trisequémoslo (Sec. 2.5) para obtener el punto  $F$  que está a  $t/3$  de  $\overline{DC}$ . Sea  $P_2$  la intersección de una recta desde  $F$  paralela a  $\overline{DC}$  y la cuadratriz, y denotemos por  $\theta$  el ángulo entre  $\overline{DC}$  y  $\overline{DP_2}$  (Fig. 2.10).

**Teorema 2.5.**  $\theta = \alpha/3$ .

*Demostración.* La coordenada  $y$  de  $E$  es  $1 - t$  por lo que por construcción la coordenada de  $F$  es  $y = 1 - (t/3)$ . Puesto que la velocidad lineal constante de la línea horizontal es proporcional a la velocidad angular constante de la línea giratoria  $\theta/\alpha = (t/3)/t$  y  $\theta = \alpha/3$ .  $\square$

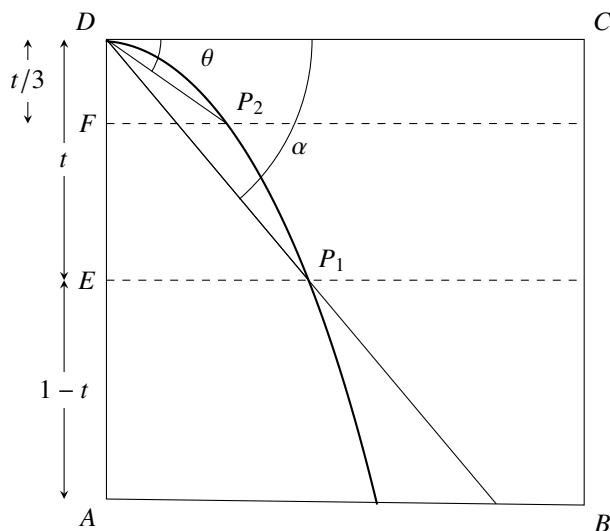


Fig. 2.10: Trisección de un ángulo mediante una cuadratriz

## 2.5 Números construibles

Sea  $l$  un segmento definido de longitud 1.

**Definición 2.1.** Un número  $a$  es *construible* si y sólo si se puede construir un segmento de longitud  $a$  con regla y compás partiendo de  $l$ .

Dado un segmento  $l = \overline{AB}$ , construir una recta que contenga a  $\overline{AB}$  y utilizar el compás para encontrar un punto  $C$  de la recta que esté a una distancia de 1 de  $B$ . Entonces  $\overline{AC}$  tiene una longitud 2 por lo que el número 2 es construible. Se puede construir un segmento  $\overline{BD}$  de longitud 1 perpendicular a  $\overline{AB}$  en  $B$ . La hipotenusa del triángulo  $\triangle ABD$  es de longitud  $\sqrt{2}$  por lo que el número  $\sqrt{2}$  es construible.

**Teorema 2.6.** Un número es construible si y sólo si es el valor de una expresión construida a partir de los números enteros, las cuatro operaciones aritméticas  $\{+, -, \times, /\}$  y la operación de sacar raíz cuadrada  $\sqrt{\phantom{x}}$ .

*Demostración.* Primero demostramos que los valores de estas expresiones son construibles.

**Suma y resta:** Dados los segmentos  $\overline{PQ} = a$  y  $\overline{RS} = b$ , construir una circunferencia centrada en  $Q$  con radio  $b$  (Fig. 2.11). Extender  $\overline{PQ}$  hasta que se cruza con la circunferencia en  $U$ . Entonces  $\overline{PTQU}$  es un segmento, donde  $\overline{PT} = a-b$  y  $\overline{PU} = a+b$ .

**Multipliación:** Por triángulos similares en la figura 2.12,  $(1/b) = (a/\overline{OA})$ , así que  $\overline{OA} = ab$ .

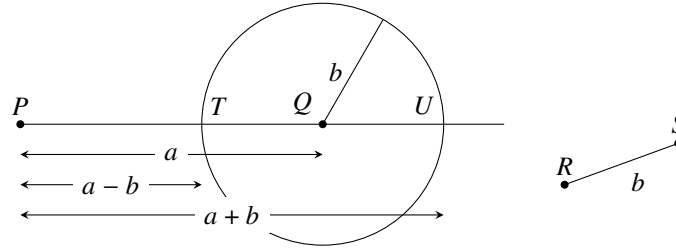


Fig. 2.11: Construcción de sumas y restas

**División:** Por triángulos similares en la figura 2.13,  $(1/b) = (\overline{OD}/a)$ , así que  $\overline{OD} = (a/b)$ .

**Raíces cuadradas:** Dado un segmento  $\overline{BC} = a$ , construyamos  $\overline{AB} = 1 + a$  y una semicircunferencia con  $\overline{AB}$  como diámetro. Construyamos una perpendicular en  $C$  y sea  $D$  la intersección de la perpendicular y la circunferencia (Fig. 2.14). El  $\angle ADB$  es un ángulo recto porque está subtendido por un diámetro. Por triángulos semejantes  $(h/1) = (a/h)$ , por lo que  $h^2 = a$  y  $h = \sqrt{a}$ .

Para demostrar la inversa del teorema, necesitamos determinar qué expresiones se pueden construir con una regla y un compás. Hay tres construcciones<sup>1</sup>:

1. Dos rectas se intersecan en un punto (Fig. 2.15). Las coordenadas de la intersección pueden deducirse de las ecuaciones de las dos rectas  $y = x$  y  $y = 4x - 2$ . El punto de intersección es  $P = (2/3, 2/3)$ .
2. Una recta interseca a una circunferencia en cero, uno o dos puntos (Fig. 2.16). Las coordenadas de las intersecciones pueden deducirse de las ecuaciones de la recta  $y = x$  y la circunferencia  $x^2 + y^2 = 4$ . Los puntos de intersección son  $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$  y  $Q = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ .

<sup>1</sup>Para mayor claridad se ilustran para valores específicos en lugar de las ecuaciones más generales.

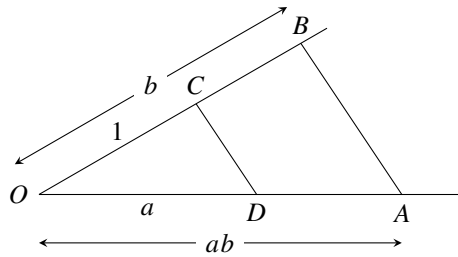


Fig. 2.12: Construcción de la multiplicación

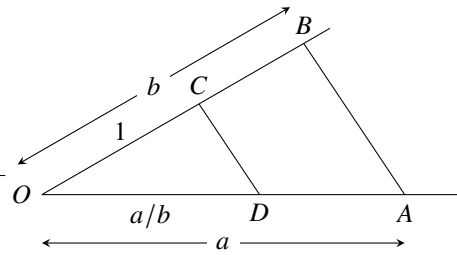


Fig. 2.13: Construcción de la división

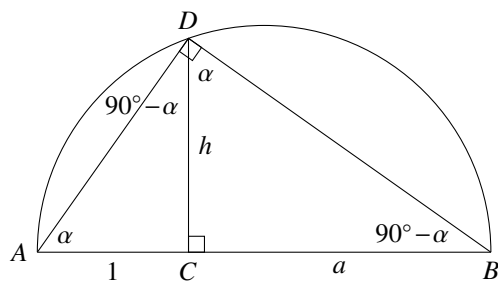


Fig. 2.14: Construcción de una raíz cuadrada

3. Dos circunferencias se intersecan en cero, uno o dos puntos (Fig. 2.17). Las coordenadas de las intersecciones pueden deducirse de las ecuaciones de las dos circunferencias  $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ ,  $(x + 1)^2 + y^2 = 4$ . Los puntos de intersección son  $P = (0, \sqrt{2})$ ,  $Q = (0, -\sqrt{2})$ .

□

## 2.6 Números construibles como raíces de polinomios

Para demostrar que un número no es construible, tenemos que demostrar que no se puede expresar utilizando sólo números enteros y las operaciones  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $/$ ,  $\sqrt{\phantom{x}}$ .

Demostraremos que los números construibles son las raíces de una cierta clase de polinomios y luego demostraremos que la trisección de un ángulo y la duplicación de un cubo requieren la construcción de raíces de polinomios que no están en esta clase.

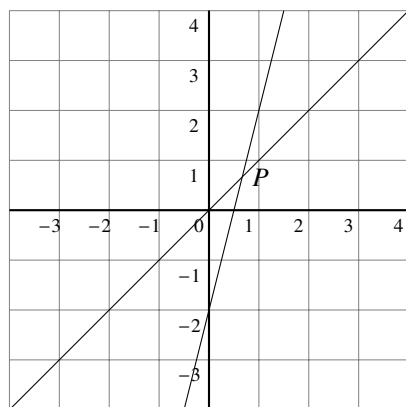


Fig. 2.15: El punto de intersección de dos líneas

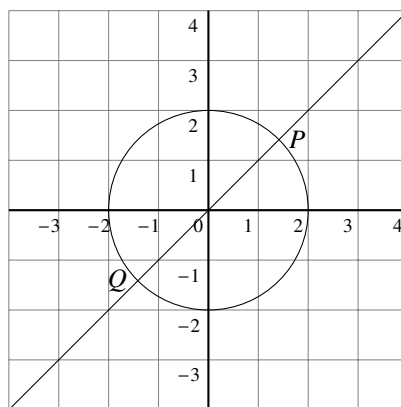


Fig. 2.16: Los puntos de intersección de una recta y una circunferencia



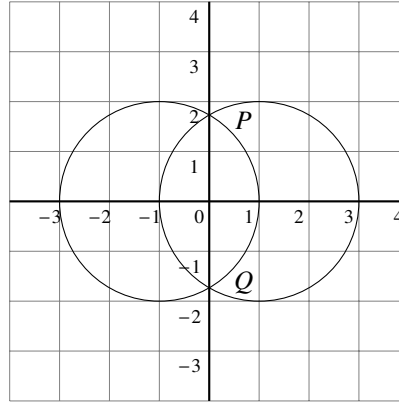


Fig. 2.17: Los puntos de intersección de dos círculos

Hoy en día estos resultados se demuestran utilizando la teoría de campos del álgebra abstracta, pero aquí doy una demostración que utiliza matemáticas elementales. La demostración se basa en la siguiente definición.

**Definición 2.2.** El *profundidad* de una expresión construida a partir de los enteros y los operadores  $\{+, -, \times, /, \sqrt{\cdot}\}$  es el máximo nivel de anidamiento de raíces cuadradas.

*Ejemplo 2.1.* Consideremos la siguiente expresión:

$$\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

La profundidad es 3 porque a la derecha de la expresión tenemos  $\sqrt{17}$  que está anidado dentro de  $\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$ , que a su vez está anidado dentro de:

$$\sqrt{17 + \dots - \dots - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

**Teorema 2.7.** Una expresión de profundidad  $n$  puede expresarse como  $a + b\sqrt{c}$  donde  $a, b, c$  son expresiones de profundidad como máximo  $n - 1$ .

*Demostración.* Cálculos sencillos muestran que las expresiones  $(a_1 + b_1\sqrt{c})$ , op  $(a_2 + b_2\sqrt{c})$  para los operadores  $op = \{+, -, \times\}$  resultan en expresiones  $a + b\sqrt{c}$  de profundidad  $n - 1$ . Para la división el cálculo es un poco más complicado:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + b_1\sqrt{c}}{a_2 + b_2\sqrt{c}} &= \frac{(a_1 + b_1\sqrt{c})(a_2 - b_2\sqrt{c})}{(a_2 + b_2\sqrt{c})(a_2 - b_2\sqrt{c})} \\ &= \frac{a_1a_2 - b_1b_2c}{a_2^2 - b_2^2c} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - b_2^2c}\sqrt{c}, \end{aligned}$$

que es de la forma  $a + b\sqrt{c}$  donde  $a, b, c$  son de profundidad  $n - 1$ . Por último, la raíz cuadrada de una expresión de profundidad  $n - 1$  es una expresión de profundidad  $n$ .  $\square$

**Teorema 2.8.** *Sea  $p(x)$  un polinomio cúbico mónico con coeficientes racionales:*

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

*y sea  $r = a + b\sqrt{c}$  una raíz de  $p(x)$  de profundidad mínima  $n$ , donde  $a, b, c$  son de profundidad (como máximo)  $n - 1$ . Entonces  $r' = a - b\sqrt{c}$  es una raíz de  $p(x)$  y  $r \neq r'$ .*

*Demostración.* Calculemos  $p(r)$  que es igual a 0 ya que  $r$  es una raíz:

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{c})^3 + a_2(a + b\sqrt{c})^2 + a_1(a + b\sqrt{c}) + a_0 &= \\ (a^3 + 3a^2b\sqrt{c} + 3ab^2c + b^3c\sqrt{c}) & \\ + a_2(a^2 + 2ab\sqrt{c} + b^2c) + a_1(a + b\sqrt{c}) + a_0 &= \\ (a^3 + 3ab^2c + a_2a^2 + a_2b^2c + a_1a + a_0) & \\ + (3a^2b + b^3c + 2a_2ab + a_1b)\sqrt{c} &= \\ d + e\sqrt{c} &= 0. \end{aligned}$$

donde  $d, e$  son expresiones de profundidad  $n - 1$  formadas a partir de los coeficientes racionales y  $a, b, c$ . Entonces  $\sqrt{c} = -d/e$ , por lo que  $a + b\sqrt{c}$  se puede expresar como una expresión de profundidad  $n - 1$ , contradiciendo la suposición de que  $a + b\sqrt{c}$  es de profundidad mínima  $n$ . Como  $\sqrt{c} \neq 0$  y es de profundidad  $n$ , para que  $d + e\sqrt{c}$  sea cero debe ser que  $d = e = 0$ .

Consideremos ahora  $r' = a - b\sqrt{c}$ . Examinando el cálculo anterior vemos que  $p(r') = d - e\sqrt{c} = 0 + 0 \cdot \sqrt{c} = 0$ , por lo que  $r'$  también es una raíz de  $p$ .

Si  $r = r'$  entonces  $0 = r - r' = 2b\sqrt{c}$ , lo cual es cierto sólo si  $b = 0$  por lo que  $r, r'$  sería de profundidad  $n - 1$ , contradiciendo de nuevo la suposición.  $\square$

**Teorema 2.9.** *Si un polinomio mónico cúbico con coeficientes racionales:*

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

*no tiene raíces racionales entonces ninguna de sus raíces es construible.*

*Demostración.* Por el Teorema Fundamental del Álgebra (Teorema 16.1)  $p(x)$  tiene tres raíces  $r_1, r_2, r_3$ . Sea  $r_1 = a + b\sqrt{c}$  una raíz de profundidad mínima  $n$ . Por la suposición de que no hay raíces racionales,  $n \geq 1$ , y por tanto  $b \neq 0$  y  $c \neq$

0. Por Teorema 2.8,  $r_2 = a - b\sqrt{c}$  también es una raíz. Realicemos la siguiente multiplicación:

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 \quad (2.3a)$$

$$+ (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x + r_1r_2r_3 \quad (2.3b)$$

$$a_2 = -(r_1 + r_2 + r_3) \quad (2.3c)$$

$$r_3 = -(a_2 + r_1 + r_2). \quad (2.3d)$$

Como  $a_2$  es racional también lo es:

$$r_3 = -a_2 - (r_1 + r_2) = -a_2 - 2a,$$

contradiendo la suposición.  $\square$

## 2.7 Imposibilidad de las Construcciones Clásicas

**Teorema 2.10.**  $\sqrt[3]{2}$  es irracional.

*Demostración.* Supongamos que  $\sqrt[3]{2}$  es racional e igual a  $p/q$  donde  $p, q$  son enteros sin factores comunes distintos de  $\pm 1$ . Entonces:

$$\begin{aligned} (p/q)^3 &= (\sqrt[3]{2})^3 \\ p^3 &= 2q^3, \end{aligned}$$

por lo que  $p$  debe ser divisible por 2, digamos  $p = 2r$ . Ahora:

$$\begin{aligned} 8r^3 &= 2q^3 \\ q^3 &= 4r^3, \end{aligned}$$

por lo que  $q$  es divisible por 2, contradiciendo la suposición de que  $p, q$  no tienen factor común.  $\square$

**Teorema 2.11.**  $x^3 - 2$  no tiene raíces racionales por lo que es imposible duplicar el volumen de un cubo con una regla y un compás.

*Demostración.* Una de sus raíces es  $\sqrt[3]{2}$  que por Teorema 2.10 es irracional. Las otras raíces son las raíces de la ecuación cuadrática  $x^2 + \sqrt[3]{2}x + (\sqrt[3]{2})^2$  que se obtiene dividiendo  $x^3 - 2$  entre  $x - \sqrt[3]{2}$ . Es fácil comprobar que sus raíces no son racionales (de hecho, ni siquiera reales).  $\square$

**Teorema 2.12.** *Es imposible trisecar un ángulo arbitrario con una regla y un compás.*

*Demostración.* Basta con demostrar la imposibilidad para un ángulo. Intentemos trisecar  $60^\circ$  para obtener  $20^\circ$ . Por el Teorema A.6:

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ \cos 60^\circ &= 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ.\end{aligned}$$

Denotemos  $x = \cos 20^\circ$  y  $2x$  por  $y$ . Como  $\cos 60^\circ = 1/2$  tenemos:

$$\begin{aligned}4x^3 - 3x - \frac{1}{2} &= 0 \\ 8x^3 - 6x - 1 &= 0 \\ y^3 - 3y - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Para demostrar que el polinomio  $y^3 - 3y - 1$  no tiene raíces racionales supongamos que  $y = a/b$  es una raíz racional con  $a, b$  que no tienen ningún factor común distinto de  $\pm 1$ . Entonces:

$$(a/b)^3 - 3(a/b) - 1 = 0 \quad (2.4a)$$

$$a^3 - 3ab^2 = b^3 \quad (2.4b)$$

$$a(a - 3b^2) = b^3 \quad (2.4c)$$

$$a^3 = b(b^2 + 3ab). \quad (2.4d)$$

Por la ecuación 2.4c,  $b$  debe ser divisible por  $a$ , y por la ecuación 2.4d,  $a$  debe ser divisible por  $b$ , lo que sólo es posible si  $a = b = \pm 1$  y  $a/b = \pm 1$ . Por cálculo,  $y = a/b = 1$  y  $y = a/b = -1$  no son raíces del polinomio.  $\square$

Una forma alternativa de demostrar la imposibilidad de las construcciones es utilizar el siguiente teorema que presentamos sin demostración.

**Teorema 2.13.** *Si un polinomio mónico  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$  con coeficientes enteros tiene raíces racionales entonces tiene raíces enteras.*

Para demostrar la imposibilidad de duplicar un cubo necesitamos demostrar que:

$$x^3 - 2 = (x - r_2)(x - r_1)(x - r_0)$$

no tiene raíces enteras. Como  $r_0 r_1 r_2 = -2$ , todas las raíces deben dividir a 2, así que las únicas raíces enteras posibles son  $\pm 1, \pm 2$ . Un cálculo rápido muestra que ninguna de ellas es raíz.

Para demostrar la imposibilidad de trisecar un ángulo hay que demostrar que  $y^3 - 3y - 1$  no tiene raíces enteras. Una raíz entera debe dividir a  $-1$  pero ni 1 ni  $-1$  son raíces.

**¿Cuál es la sorpresa?**

Underwood Dudley ha realizado un extenso estudio de lo que él llama «gruñones», que malgastan años de sus vidas intentando trisecar ángulos con una regla y un compás. No sólo se engañan a sí mismos pensando que esto es posible, sino que, lo que es peor, piensan que una solución sería importante. Por supuesto, una solución no tendría ninguna utilidad práctica, ya que herramientas como el neusis y la cuadratriz pueden resolver el problema con exactitud. El número de construcciones de este tipo es sorprendente, sobre todo porque muchas de ellas son ingeniosas y consiguen buenas aproximaciones. Calcular las fórmulas asociadas a las construcciones es un excelente ejercicio de trigonometría.

También es sorprendente que las demostraciones de la imposibilidad de estas construcciones geométricas sean puramente algebraicas, utilizando propiedades de raíces de polinomios.

**Fuentes**

Wikipedia [51, 58, 62] es una buena fuente para las construcciones de este capítulo. Las dos trisecciones aproximadas proceden de [15, pp. 67–68, 95–96]. El segundo ejemplo se atribuye al famoso filósofo Thomas Hobbes. Tanto [31, pp. 48–49] como [15, pp. 6–7] discuten la trisección usando la cuadratriz. La duplicación del cubo usando un neusis está tomada de [14].

Un tratamiento riguroso de la constructibilidad se puede encontrar en los libros de texto sobre álgebra abstracta como [17], que contiene una demostración general de la inversa de Teorema 2.6 en Sec. 32. Teorema 2.13 es Teorema 23.11 de [17]. Una presentación relativamente accesible de la demostración de Wantzel se puede encontrar en [48]. Mi presentación de la constructibilidad se basa en las presentaciones en [11, Capítulo III] y [27].

## Capítulo 3

### La cuadratura del círculo

La cuadratura del círculo, la construcción de un cuadrado con la misma área que un círculo dado, es uno de los tres problemas de construcción que los griegos se plantearon y no pudieron resolver. A diferencia de la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, en las que la imposibilidad se deriva de las propiedades de las raíces de los polinomios, la imposibilidad de cuadrar el círculo se deriva de la trascendentalidad de  $\pi$ : no es la raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales. Este es un teorema difícil que fue demostrado en 1882 por Carl von Lindemann.

Aproximaciones a  $\pi \approx 3,14159265359$  se han conocido desde la antigüedad. Algunas aproximaciones sencillas pero razonablemente exactas son:

$$\frac{22}{7} \approx 3,142857, \quad \frac{333}{106} \approx 3,141509, \quad \frac{355}{113} \approx 3,141593.$$

Presentamos tres construcciones mediante regla y compás de aproximaciones a  $\pi$ . Una es con Adam Kochański (Sec. 3.1) y dos son de Ramanujan (Secs. 3.2, 3.3). La sección 3.4 trata de cómo cuadrar el círculo utilizando la cuadratriz.

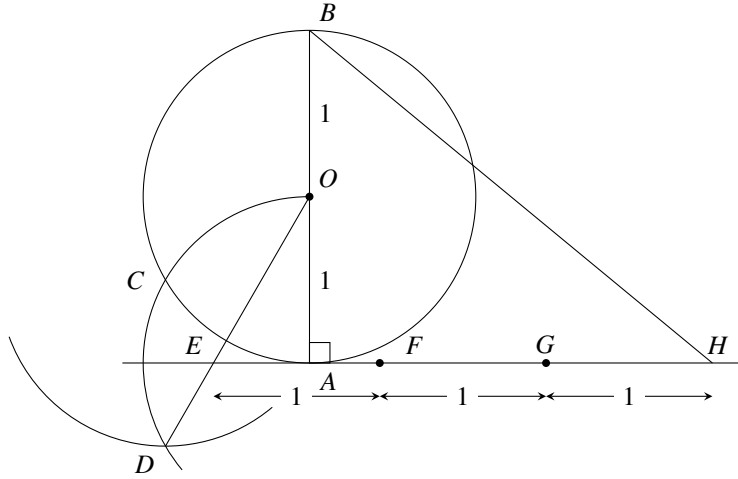
La siguiente tabla muestra las fórmulas de las longitudes que se construyen, sus valores aproximados, la diferencia entre estos valores y el valor de  $\pi$  y el error en metros que resulta si se utiliza la aproximación para calcular la circunferencia de la tierra dado que su radio es de 6378 km.

Construcción	Fórmula	Valor	Diferencia	Error (m)
$\pi$	—	3,14159265359	—	—
Kochański	$\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$	3,1415333871	$5,93 \times 10^{-5}$	757
Ramanujan 1	$\frac{355}{113}$	3,14159292035	$2,67 \times 10^{-7}$	3,4
Ramanujan 2	$\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4}$	3,14159265258	$1,01 \times 10^{-9}$	0,013

#### 3.1 Construcción de Kochański

**Construcción (Fig. 3.1):**

1. Construimos una circunferencia unitaria centrada en  $O$ , que  $\overline{AB}$  sea un diámetro y construimos una tangente a la circunferencia en  $A$ .

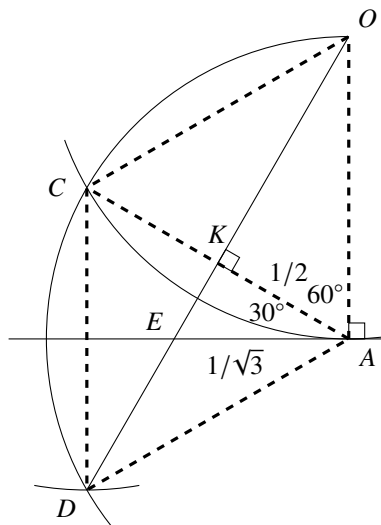
Fig. 3.1: La aproximación de Kochański a  $\pi$ 

2. Construimos una circunferencia unitaria centrada en  $A$  y denotemos con  $C$  su intersección con la primera circunferencia. Construimos una circunferencia unitaria centrada en  $C$  y denotemos con  $D$  su intersección con la segunda circunferencia.
3. Construimos  $\overline{OD}$  y denotemos con  $E$  intersección con la tangente.
4. A partir de  $E$  construimos  $F, G, H$ , cada uno a distancia 1 del punto anterior.
5. Construimos  $\overline{BH}$ .

**Teorema 3.1.**  $\overline{BH} = \sqrt{\frac{40}{3}} - 2\sqrt{3} \approx \pi.$

*Demostración.* La figura 3.2 es un extracto ampliado de la figura 3.1, donde se han añadido segmentos de línea discontinua. Como todos los círculos son unitarios, las longitudes de las líneas discontinuas son 1. Se deduce que  $\overline{AOCD}$  es un rombo por lo que sus diagonales son perpendiculares y se bisecan entre sí en el punto marcado con  $K$ .  $\overline{AK} = 1/2$ .

La diagonal  $\overline{AC}$  forma dos triángulos equiláteros  $\triangle OAC, \triangle DAC$  por lo que  $\angle OAC = 60^\circ$ . Como la tangente forma un ángulo recto con el radio  $\overline{OA}$ ,  $\angle KAE =$



30°. Ahora bien:

$$\begin{aligned}\frac{1/2}{\overline{EA}} &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \overline{EA} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \overline{AH} &= 3 - \overline{EA} = \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

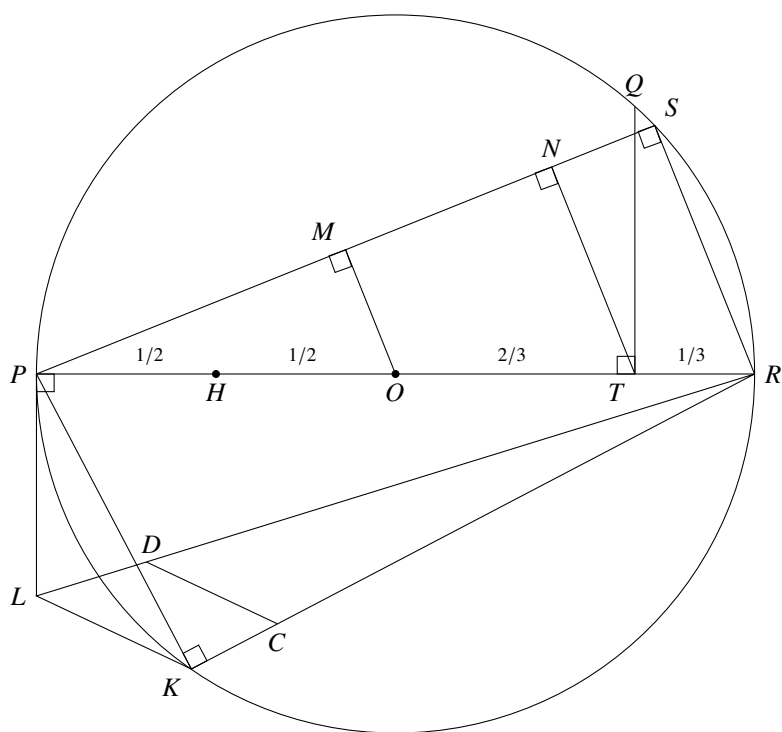
$$\begin{aligned}\overline{BH}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= 4 + \frac{27 - 6\sqrt{3} + 1}{3} = \frac{40}{3} - 2\sqrt{3} \\ \overline{BH} &= \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3,141533387 \approx \pi.\end{aligned}$$
☐

### 3.2 Primera construcción de Ramanujan

**Construcción (Fig. 3.3):**

1. Construimos una circunferencia unitaria centrada en  $O$  y que  $\overline{PR}$  sea un diámetro.





2. Construimos el punto  $H$  que biseca  $\overline{PO}$  y el punto  $T$  que triseca  $\overline{RO}$  (Teorema 2.6).
3. Construimos la perpendicular a  $T$  que corta a la circunferencia en  $Q$ .
4. Construimos las cuerdas  $\overline{RS} = \overline{QT}$  y  $\overline{PS}$ .
5. Construimos una recta paralela a  $\overline{RS}$  desde  $T$  que corte a  $\overline{PS}$  en  $N$ .
6. Construimos una recta paralela a  $\overline{RS}$  desde  $O$  que corte a  $\overline{PS}$  en  $M$ .
7. Construimos la cuerda  $\overline{PK} = \overline{PM}$ .
8. Construimos la tangente a  $P$  de longitud  $\overline{PL} = \overline{MN}$ .
9. Conectamos los puntos  $K, L, R$ .
10. Encontrar el punto  $C$  tal que  $\overline{RC}$  sea igual a  $\overline{RH}$ .
11. Construimos  $\overline{CD}$  paralela a  $\overline{KL}$  que corte a  $\overline{LR}$  en  $D$ .

**Teorema 3.2.**  $\overline{RD}^2 = \frac{355}{113} \approx \pi$ .

*Demostración.*  $\overline{RS} = \overline{QT}$  por construcción y por el Teorema de Pitágoras para  $\triangle QOT$ :

$$\overline{RS} = \overline{QT} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$\angle PSR$  está subtendido por un diámetro por lo que  $\triangle PSR$  es un triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{PS} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{31}}{3}.$$

Por construcción  $\overline{MO} \parallel \overline{RS}$  entonces  $\triangle MPO \sim \triangle SPR$  y:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PM}}{\overline{PO}} &= \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} \\ \frac{\overline{PM}}{1} &= \frac{\sqrt{31}/3}{2} \\ \overline{PM} &= \frac{\sqrt{31}}{6}. \end{aligned}$$

Por construcción  $\overline{NT} \parallel \overline{RS}$  entonces  $\triangle NPT \sim \triangle SPR$  y:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PN}}{\overline{PT}} &= \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} \\ \frac{\overline{PN}}{5/3} &= \frac{\sqrt{31}/3}{2} \\ \overline{PN} &= \frac{5\sqrt{31}}{18} \\ \overline{MN} &= \overline{PN} - \overline{PM} = \sqrt{31} \left( \frac{5}{18} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\sqrt{31}}{9}. \end{aligned}$$

$\triangle PKR$  es un triángulo rectángulo porque  $\angle PKR$  está subtendido por un diámetro. Por construcción  $\overline{PK} = \overline{PM}$  y por el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{RK} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{31}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{113}}{6}.$$

$\triangle LPR$  es un triángulo rectángulo porque  $\overline{PL}$  es una tangente por lo que  $\angle LPR$  es un ángulo recto.  $\overline{PL} = \overline{MN}$  por construcción y por el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{RL} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{31}}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{355}}{9}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{RD}}{\overline{RC}} &= \frac{\overline{RL}}{\overline{RK}} \\ \frac{\overline{RD}}{3/2} &= \frac{\sqrt{355}/9}{\sqrt{113}/6} \\ \overline{RD} &= \sqrt{\frac{355}{113}} \\ \overline{RD}^2 &= \frac{355}{113} \approx 3,14159292035 \approx \pi.\end{aligned}$$

En la figura 3.4 los segmentos de línea se rotulan con sus longitudes. □

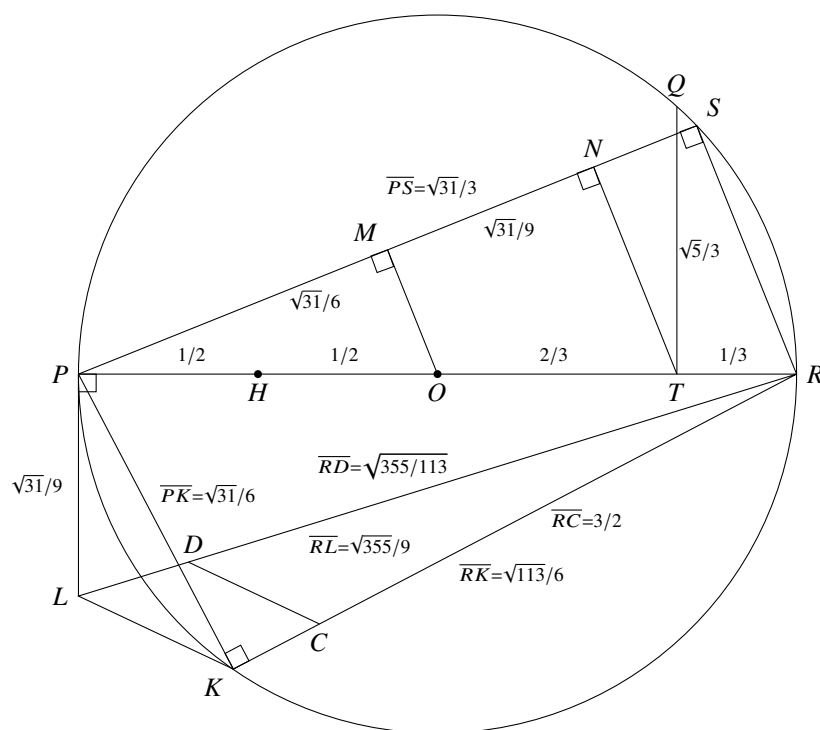


Fig. 3.4: *Primera construcción de Ramanujan con segmentos rotulados*

### 3.3 Segunda construcción de Ramanujan

**Construcción (Fig. 3.5):**

1. Construimos una circunferencia unitaria centrada en  $O$  de diámetro  $\overline{AB}$  y que  $C$  sea la intersección de la perpendicular a  $\overline{AB}$  en  $O$  con la circunferencia.
2. Trisecar el segmento  $\overline{AO}$  tal que  $\overline{AT} = 1/3$  y  $\overline{TO} = 2/3$  (Teorema 2.6).
3. Construimos  $\overline{BC}$  y encontrar puntos  $M, N$  tales que  $\overline{CM} = \overline{MN} = \overline{AT} = 1/3$ .
4. Construimos  $\overline{AM}$ ,  $\overline{AN}$  y que  $P$  sea el punto sobre  $\overline{AN}$  tal que  $\overline{AP} = \overline{AM}$ .
5. A partir de  $P$  Construimos una recta paralela a  $\overline{MN}$  que corte a  $\overline{AM}$  en  $Q$ .
6. Construimos  $\overline{OQ}$  y a partir de  $T$  construimos una recta paralela a  $\overline{OQ}$  que corte a  $\overline{AM}$  en  $R$ .
7. Construimos  $\overline{AS}$  tangente a  $A$  tal que  $\overline{AS} = \overline{AR}$ .
8. Construimos  $\overline{SO}$ .

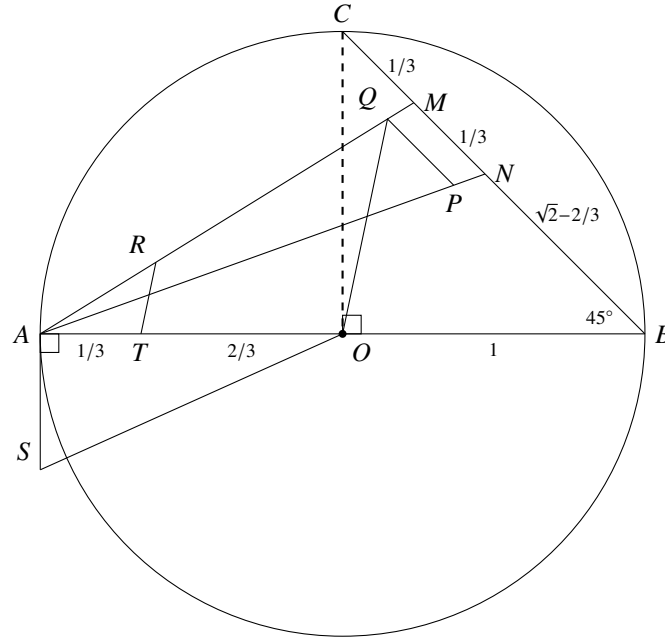


Fig. 3.5: Segunda construcción de Ramanujan

**Teorema 3.3.**  $3\sqrt{SO} = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} \approx \pi$ .

*Demostración.*  $\triangle COB$  es un triángulo rectángulo así que por el Teorema de Pitágoras  $\overline{CB} = \sqrt{2}$  y:

$$\overline{NB} = \sqrt{2} - 2/3.$$

$\triangle COB$  es isósceles por lo que  $\angle NBA = \angle MBA = 45^\circ$ . Por la Ley de los Cosenos:

$$\begin{aligned}\overline{AN}^2 &= \overline{BA}^2 + \overline{BN}^2 - 2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BN} \cdot \cos \angle NBA \\ &= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{22}{9} \\ \overline{AN} &= \sqrt{\frac{22}{9}}.\end{aligned}$$

Nuevamente por la Ley de los Cosenos:

$$\begin{aligned}\overline{AM}^2 &= \overline{BA}^2 + \overline{BM}^2 - 2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BM} \cdot \cos \angle MBA \\ &= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{19}{9} \\ \overline{AM} &= \sqrt{\frac{19}{9}}.\end{aligned}$$

Por construcción  $\overline{QP} \parallel \overline{MN}$  entonces  $\triangle MAN \sim \triangle QAP$ , y por construcción  $\overline{AP} = \overline{AM}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AQ}}{\overline{AM}} &= \frac{\overline{AP}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} \\ \overline{AQ} &= \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AN}} = \frac{19/9}{\sqrt{22/9}} = \frac{19}{3\sqrt{22}}.\end{aligned}$$

Por construcción  $\overline{TR} \parallel \overline{OQ}$  entonces  $\triangle RAT \sim \triangle QAO$  y:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}} &= \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} \\ \overline{AR} &= \overline{AQ} \cdot \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} = \frac{19}{3\sqrt{22}} \cdot \frac{1/3}{1} = \frac{19}{9\sqrt{22}}.\end{aligned}$$

Por construcción  $\overline{AS} = \overline{AR}$  y  $\triangle OAS$  es un triángulo rectángulo porque  $\overline{AS}$  es una tangente. Por el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}\overline{SO} &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{19}{9\sqrt{22}}\right)^2} \\ 3\sqrt{SO} &= 3 \left(1^2 + \frac{19^2}{9^2 \cdot 22}\right)^{1/4} = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} \approx 3,14159265258 \approx \pi.\end{aligned}$$



### 3.4 Cuadratura de un círculo con una cuadratriz

Sea  $t = \overline{DE}$  la distancia que se ha desplazado la recta horizontal por el eje  $y$ , y sea  $\theta$  el ángulo correspondiente entre la recta giratoria y el eje  $x$ . Sea  $P$  el punto de la unión de las dos rectas. El lugar geométrico de  $P$  es la curva cuadratriz.

Sea  $F$  la proyección de  $P$  sobre el eje  $x$  y sea  $G$  la posición de la unión cuando ambas rectas alcanzan el eje  $x$ , es decir,  $G$  es la intersección de la curva cuadratriz y el eje  $x$  (Fig. 3.7).

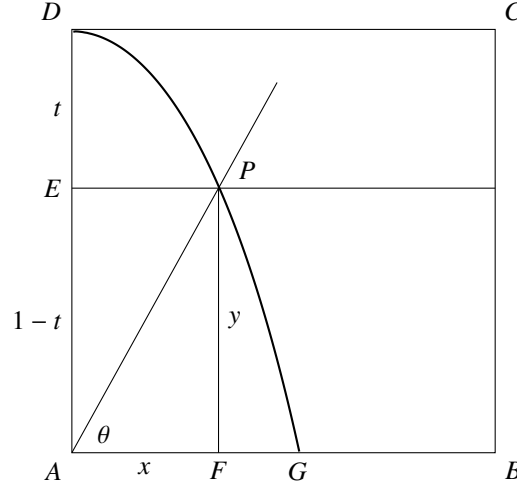


Fig. 3.7: Cuadratura del círculo con una cuadratriz

**Teorema 3.4.**  $\overline{AG} = 2/\pi$ .

*Demostración.* Sea  $y = \overline{PF} = \overline{EA} = 1 - t$ . Puesto que en una cuadratriz  $\theta$  disminuye al mismo ritmo que  $t$  aumenta:

$$\frac{1-t}{1} = \frac{\theta}{\pi/2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}(1-t).$$

Sea  $x = \overline{AF} = \overline{EP}$ . Entonces  $\tan \theta = y/x$  entonces:

$$x = \frac{y}{\tan \theta} = y \cot \theta = y \cot \frac{\pi}{2}(1-t) = y \cot \frac{\pi}{2}y. \quad (3.1)$$

Normalmente expresamos una función como  $y = f(x)$  pero también se puede expresar como  $x = f(y)$ .

Para obtener  $x = \overline{AG}$  no podemos simplemente sustituir  $y = 0$  en la Ecuación 3.1, porque  $\cot 0$  no está definida, así que vamos a calcular el límite de  $x$  a medida que  $y$  tiende a 0. En primer lugar, sustituimos  $z = (\pi/2)y$  para obtener:

$$x = y \cot \frac{\pi}{2}y = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi}{2}y \cot \frac{\pi}{2}y \right) = \frac{2}{\pi} (z \cot z),$$

y luego calculamos el límite:

$$\lim_{z \rightarrow 0} x = \frac{2}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} (z \cot z) = \frac{2}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{z \cos z}{\sin z} \right) = \frac{2}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{\cos z}{(\sin z)/z} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{\cos 0}{1} = \frac{2}{\pi},$$

donde hemos utilizado  $\lim_{z \rightarrow 0} (\sin z/z) = 1$  (Teorema A.12).  $\square$

**¿Cuál es la sorpresa?**

Es sorprendente que se puedan construir aproximaciones tan exactas a  $\pi$ . Uno no puede dejar de asombrarse ante las ingeniosas construcciones de Ramanujan.

**Fuentes**

La construcción de Kochański aparece en [7]. Las construcciones de Ramanujan están en [38, 39]. La cuadratura del círculo usando la cuadratriz está en [31, pp. 48–49] y [62].



## Capítulo 4

### El teorema de los cinco colores

Los mapas utilizan colores para distinguir una región de otra, asegurándose de que las regiones adyacentes estén coloreadas con colores diferentes. En 1852, Francis Guthrie observó que un mapa de los condados de Inglaterra podía colorearse con sólo cuatro colores. La afirmación de que cuatro países bastan para colorear cualquier mapa plano se denomina teorema de los cuatro colores y no fue demostrada hasta 1976 por Kenneth Appel y Wolfgang Haken. Ellos utilizaron sofisticados argumentos matemáticos para demostrar que si existe un contraejemplo (un mapa que necesite más de cuatro colores), tiene que estar asociado a una de las 1834 configuraciones. A continuación, utilizaron un ordenador para comprobar estas configuraciones.

Mientras que el teorema de los cuatro colores es extremadamente difícil de demostrar, las demostraciones de los teoremas de los cinco y seis colores son relativamente sencillas (Secs. 4.5, 4.6). Para demostrar de estos teoremas, definimos mapas y grafos planares (Sec. 4.1), demostramos la fórmula de Euler (Sec. 4.2) y mostramos que un grafo planar debe tener vértices cuyo grado sea menor o igual que cinco. En la Sección 4.3 se utiliza la fórmula de Euler para demostrar que dos grafos no son planares.

En 1879 Alfred B. Kempe publicó una demostración del teorema de los cuatro colores, pero en 1890 Percy J. Heawood demostró que la demostración es incorrecta. En la Sección 4.7 presentamos la demostración errónea de Kempe y la demostración de Heawood de que no es correcta.

#### 4.1 Mapas y grafos planos

**Definición 4.1.** Un *mapa plano* es un conjunto de regiones en el plano separadas por fronteras. Una *coloración* de un mapa es una asignación de un color a cada región de tal manera que se asignan diferentes colores a las regiones que tienen una frontera en común.

La figura 4.1 muestra una coloración con cinco colores de un mapa planar con diez regiones. La figura 4.2 muestra una coloración con cuatro colores del mismo mapa.

**Definición 4.2.** Un *grafo* es un conjunto de *vértices*  $V$  y un conjunto de *aristas*  $E$ , tal que cada arista es incidente a exactamente dos vértices.

Un *grafo plano* es un grafo en el que ninguna arista se cruza con otra. En un grafo plano, las zonas delimitadas por un conjunto de aristas se llaman *caras* (o *regiones*).

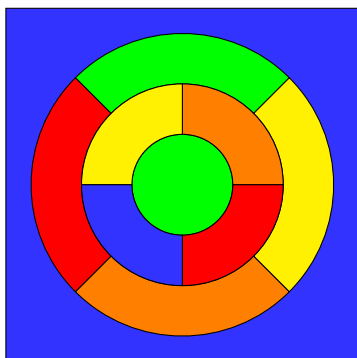


Fig. 4.1: Coloración de un mapa con cinco colores

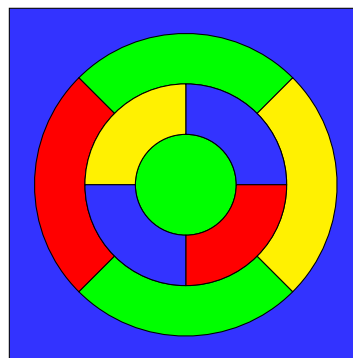


Fig. 4.2: Coloración de un mapa con cuatro colores

Una *coloración* de un grafo plano es una asignación de colores a los vértices de tal manera que no hay dos vértices del mismo color conectados por una arista.

Los mapas planos y los grafos planos son duales y, por lo tanto, es conveniente investigar los problemas de coloración en grafos en lugar de hacerlo directamente en mapas.

**Teorema 4.1.** *Dado un mapa plano, se puede construir un grafo plano tal que para cada coloración de las regiones del mapa exista una coloración de los vértices del grafo, y a la inversa.*

*Demostración.* Construimos un vértice para cada región y una arista entre dos vértices si y sólo si las regiones correspondientes comparten un límite.  $\square$

*Ejemplo 4.1.* La figura 4.3 muestra el mapa planar de la figura 4.2 y los vértices asociados a las regiones. La figura 4.4 muestra el grafo plano que corresponde al mapa.

Podemos limitar aún más nuestros grafos a aquellos cuyas caras son triangulares.

**Definición 4.3.** Un grafo es *triangular* si todas sus caras están delimitadas por tres aristas. Un grafo puede ser *triangulado* si se pueden añadir aristas de forma que el grafo sea triangular. También decimos que existe una *triangulación* del grafo.

*Ejemplo 4.2.* Las caras del grafo plano de la figura 4.4 son triangulares ya que cada una está delimitada por tres aristas. Las aristas son curvas por lo que las caras no son triángulos, que son polígonos cuyos tres lados son segmentos de línea recta.

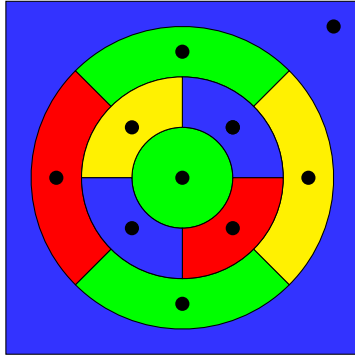


Fig. 4.3: Asociación de los vértices con las regiones de un mapa plano

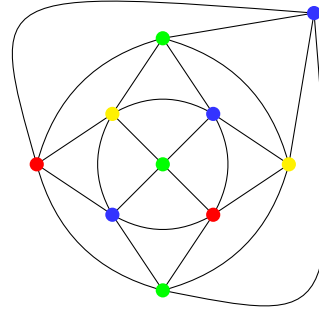


Fig. 4.4: El grafo plano que corresponde al mapa plano

**El Teorema de Fáry** establece que cualquier grafo plano triangular puede transformarse en un grafo plano equivalente cuyas aristas sean segmentos. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, las demostraciones se pueden restringir a grafos planos cuyas caras son triángulos.

*Ejemplo 4.3.* Fig. 4.5 (izquierda) muestra que un cuadrado puede ser bicolor, pero si está triangulado (centro), son necesarios cuatro colores. Nuestro objetivo es demostrar que los grafos pueden ser coloreados con  $n$  colores para algún  $n$ . Si el grafo triangulado está coloreado con  $n$ , también lo está el grafo original, porque eliminar las aristas sobrantes no invalida la coloración (derecha).

## 4.2 Fórmula de Euler

**Teorema 4.2.** Sea  $G$  un grafo plano conexo con  $V$  vértices,  $E$  aristas y  $F$  caras. Entonces  $V - E + F = 2$ .

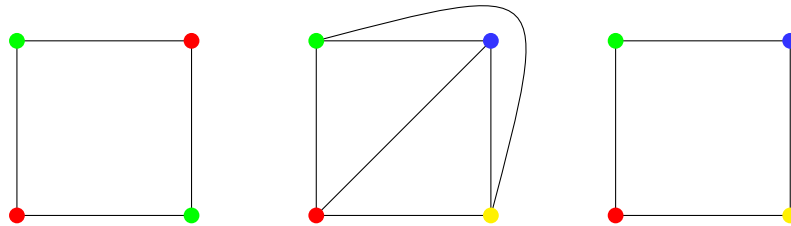


Fig. 4.5: Colorear un grafo triangulado

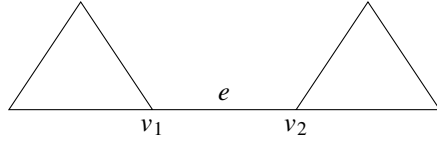


Fig. 4.6: Eliminar una arista desconecta el grafo

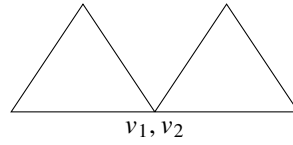


Fig. 4.7: Fusión de dos vértices

*Demostración.* Por inducción sobre el número de aristas. Si el número de aristas en el grafo es cero, sólo hay un único vértice y una única cara, por lo que  $1 - 0 + 1 = 2$ . En caso contrario, hay al menos una arista  $e$  que conecta dos vértices  $v_1, v_2$ . Eliminar la arista  $e$ .

*Caso 1:* El grafo se desconecta (Fig. 4.6). Fusionar  $v_1$  con  $v_2$  (Fig. 4.7). El grafo resultante  $G'$  es un grafo plano conexo y tiene menos aristas que  $G$ , por lo que por la hipótesis de inducción  $(V - 1) - (E - 1) + F = 2$  ya que el número de vértices también se reduce en uno. Simplificando, obtenemos  $V - E + F = 2$  para  $G$ .

*Caso 2:* El grafo sigue siendo conexo (Fig. 4.8).  $G'$  tiene menos aristas que  $G$  (Fig. 4.9), así que por la hipótesis de inducción  $V - (E - 1) + (F - 1) = 2$  ya que al eliminar la arista se unen dos caras en una. Simplificando, obtenemos  $V - E + F = 2$  para  $G$ .  $\square$

**Teorema 4.3.** Sea  $G$  un grafo plano triangulado conexo con  $E$  aristas y  $V$  vértices. Entonces  $E = 3V - 6$ .

*Demostración.* Cada cara está limitada por tres aristas, por lo que  $E = 3F/2$ , donde hemos dividido por 2 porque cada arista se ha contado dos veces, una por cada cara que limita. Por la fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} E &= V + F - 2 \\ &= V + 2E/3 - 2 \\ &= 3V - 6. \end{aligned}$$

$\square$

*Ejemplo 4.4.* El grafo plano de la figura 4.4 tiene 10 vértices y  $3 \cdot 10 - 6 = 24$  aristas.

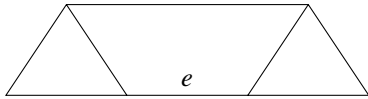


Fig. 4.8: Eliminar una arista no desconecta el grafo

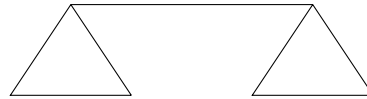


Fig. 4.9: El grafo sigue conectado y tiene menos aristas



Fig. 4.10: Menos bordes que el límite superior

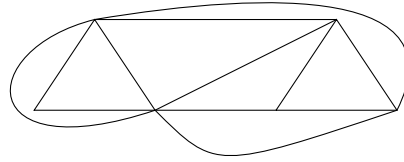


Fig. 4.11: En un grafo triangulado el número de aristas es máximo

**Teorema 4.4.** Sea  $G$  un grafo plano conexo. Entonces  $E \leq 3V - 6$ .

*Demostración.* Triangulamos  $G$  para obtener  $G'$ .  $E' = 3V' - 6$  por el Teorema 4.3. Ahora quitamos aristas de  $G'$  para obtener  $G$ . El número de vértices no cambia por lo que  $E \leq 3V - 6$ .  $\square$

*Ejemplo 4.5.* El grafo de la figura 4.10 tiene 8 aristas y 6 vértices y  $8 < 3 \cdot 6 - 6 = 12$ . La figura 4.11 muestra un grafo triangulado con 6 vértices y  $3 \cdot 6 - 6 = 12$  aristas.

### 4.3 Grafos no planos

Vamos a tomar un pequeño desvío para mostrar cómo los Teoremas 4.2 y 4.4 se pueden utilizar para demostrar que ciertos grafos no son planos.

**Teorema 4.5.**  $K_5$ , el grafo completo de cinco vértices, no es plano (Fig. 4.12).

*Demostración.* Para  $K_5$ ,  $V = 5$  y  $E = 10$ . Por Teorema 4.4 el número de aristas debe ser menor o igual a  $3 \cdot 5 - 6 = 9$  por lo que el grafo no es plano.  $\square$

**Teorema 4.6.**  $K_{3,3}$ , el grafo bipartito con tres vértices en cada lado, no es plano (Fig. 4.14).

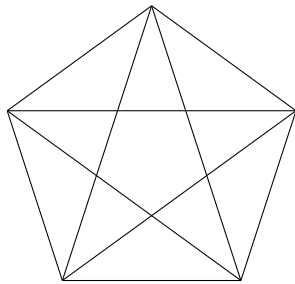


Fig. 4.12:  $K_5$  no es plano

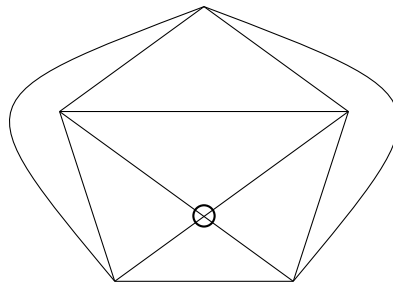
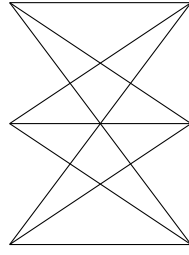
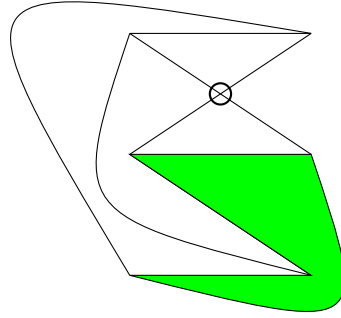


Fig. 4.13: Un intento fallido de dibujar  $K_5$  como plano

Fig. 4.14:  $K_{3,3}$  no es planoFig. 4.15: Un intento fallido de dibujar  $K_{3,3}$  como plano

*Demostración.*  $V = 6$  y  $E = 9$ . Por Thm 4.2 si  $K_{3,3}$  es plano,  $F = E - V + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ . Pero cada cara está limitada por cuatro aristas (Fig. 4.15), por lo que  $E = 4F/2 = 10 \neq 9$ .  $\square$

En 1930 Kazimierz Kuratowski demostró la inversa de estos teoremas: si un grafo no es plano, contiene (en cierto sentido)  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .

#### 4.4 Los grados de los vértices

**Definición 4.4.**  $d(v)$ , el *grado* del vértice  $v$ , es el número de aristas incidentes a  $v$ .

*Ejemplo 4.6.* El grafo de la figura 4.4 contiene 8 vértices correspondientes a los dos anillos y cada vértice es de grado 5. El vértice correspondiente a la cara exterior es de grado 4 al igual que el vértice correspondiente a la cara interior. Por tanto:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 5 \cdot 8 + 4 \cdot 2 = 48.$$

Para obtener el número total de aristas dividimos 48 entre 2 porque cada arista se ha contado dos veces, una por cada uno de los vértices a los que incide.

Generalizando el argumento obtenemos:

**Teorema 4.7.** Sea  $d_i$  para  $i$  en  $\{1, 2, 3, \dots, k\}$  el número de vértices de grado  $i$  en un grafo plano conexo  $G$  con  $V$  vértices y  $E$  aristas, donde  $k$  es el mayor grado de un vértice en  $V$ . Entonces:

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{i=1}^k i \cdot d_i = 2E.$$

**Teorema 4.8.** Sea  $G$  un grafo plano conexo con  $E$  aristas y  $V$  vértices, y sea  $d_i$  para  $i$  en  $\{1, 2, 3, \dots, k\}$  el número de vértices de grado  $i$ , donde  $k$  es el mayor grado de un vértice en  $V$ . Entonces debe haber un vértice  $v$  en  $V$  tal que  $d(v) \leq 5$ .

*Demostración.*

(1) Si hay  $d_1$  vértices de grado 1,  $d_2$  vértices de grado 2,  $\dots$ ,  $d_k$  vértices de grado  $k$ , entonces  $V = \sum_{i=1}^k d_i$ . Por los Teoremas 4.4 y 4.7:

$$\sum_{i=1}^k i \cdot d_i = 2E \leq 2(3V - 6) = 6V - 12 = 6 \sum_{i=1}^k d_i - 12.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k i \cdot d_i &\leq 6 \sum_{i=1}^k d_i - 12 \\ \sum_{i=1}^k (6 - i) d_i &\geq 12. \end{aligned}$$

Como  $12 > 0$  y todos los  $d_i$  son positivos, para al menos un  $i$ ,  $6 - i > 0$  y para ese  $i$ ,  $i < 6$ .  $\square$

*Demostración.*

(2) Calculemos el grado promedio de los vértices, que es la suma de los grados dividida por el número de vértices:

$$d_{avg} = \frac{\sum_{i=1}^k i \cdot d_i}{V}.$$

Pero la suma de los grados es el doble del número de aristas que por Teorema 4.4 da:

$$d_{avg} = \frac{2E}{V} \leq \frac{6V - 12}{V} = 6 - \frac{6}{V} < 6.$$

Si el promedio es menor que seis debe haber un vértice de grado menor que seis.  $\square$

*Ejemplo 4.7.* En la figura 4.4 la suma de los grados es  $8 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 48$ . Hay 10 vértices por lo que el grado promedio es  $48/10 = 4,8$  y debe haber un vértice de grado 4 o menos.

#### 4.5 El teorema de los seis colores

**Teorema 4.9.** Cualquier grafo plano  $G$  puede ser coloreado con seis colores.

*Demostración.* Por inducción sobre el número de vértices. Si  $G$  tiene seis vértices o menos, seis colores son suficientes. Para el paso inductivo, por el Teorema 4.8  $G$

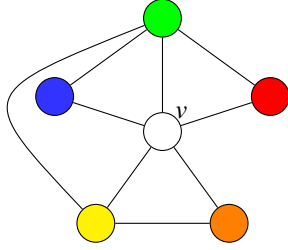


Fig. 4.16: Para colorear los vecinos de  $v$  cinco colores son suficientes

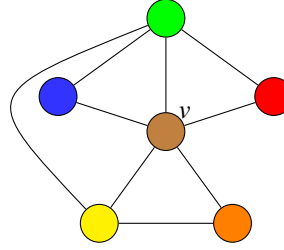


Fig. 4.17: Coloreamos  $v$  con el sexto color

tiene un vértice  $v$  con grado 5 o menos. Se elimina el vértice  $v$  para obtener el grafo  $G'$ . Por la hipótesis de inducción  $G'$  puede ser de seis colores, pero  $v$  tiene a lo sumo 5 vecinos y a lo sumo 5 colores se utilizan para colorearlos (Fig. 4.16), por el que  $v$  se puede colorear utilizando el sexto color (Fig. 4.17).  $\square$

#### 4.6 El teorema de los cinco colores

**Definición 4.5.** Sea  $G$  un grafo planar coloreado. Una cadena (*Kempe*)  $G'$  es un subgrafo maximal, bicolor y conexo de  $G$ .

**Teorema 4.10.** *Cualquier grafo plano  $G$  puede ser coloreado con cinco colores.*

*Demostración.* Por inducción sobre el número de vértices. Si  $G$  tiene cinco vértices o menos, cinco colores son suficientes. Para el paso inductivo, por el Teorema 4.8,  $G$  tiene un vértice  $v$  con grado 5 o menos. Eliminamos  $v$  para obtener  $G'$ . Por la hipótesis de inducción,  $G'$  puede ser coloreado con cinco colores. En  $G$ , si el grado de  $v$  es menor que 5, o si  $v_1, \dots, v_5$ , los vecinos de  $v$ , están coloreados con cuatro colores o menos,  $v$  se puede colorear con el quinto color. De lo contrario,  $v_1, \dots, v_5$  se colorean con diferentes colores en  $G'$  (Fig. 4.18, arriba).

Consideremos el vértice  $v_1$  que es de color azul y el vértice  $v_3$  que es de color rojo. Si  $v_1, v_3$  no están conectados por un camino azul-rojo (digamos si la arista  $\overline{v_6 v_7}$  no existiera), podemos intercambiar los colores a lo largo del camino de  $v_1$  a  $v_6$  y colorear  $v$  de azul. De lo contrario, consideremos la cadena azul-rojo que contiene  $v_1, v_3$ . Sumando  $v$  y las aristas  $\overline{v v_1}, \overline{v v_3}$  obtenemos un camino cerrado  $P$  (línea doble) que divide el plano en una región «interior» y otra «exterior» (Fig 4.18, centro).

Consideremos  $v_2$  que es de color verde y  $v_4$  que es de color naranja. Estos vértices no pueden estar contenidos en una sola cadena verde-naranja, porque  $v_2$  está dentro de  $P$  y  $v_4$  está fuera de  $P$ , por lo que cualquier camino que los conecte debe cruzar  $P$ , contradiciendo la suposición de que el grafo es plano. Por lo tanto, deben estar



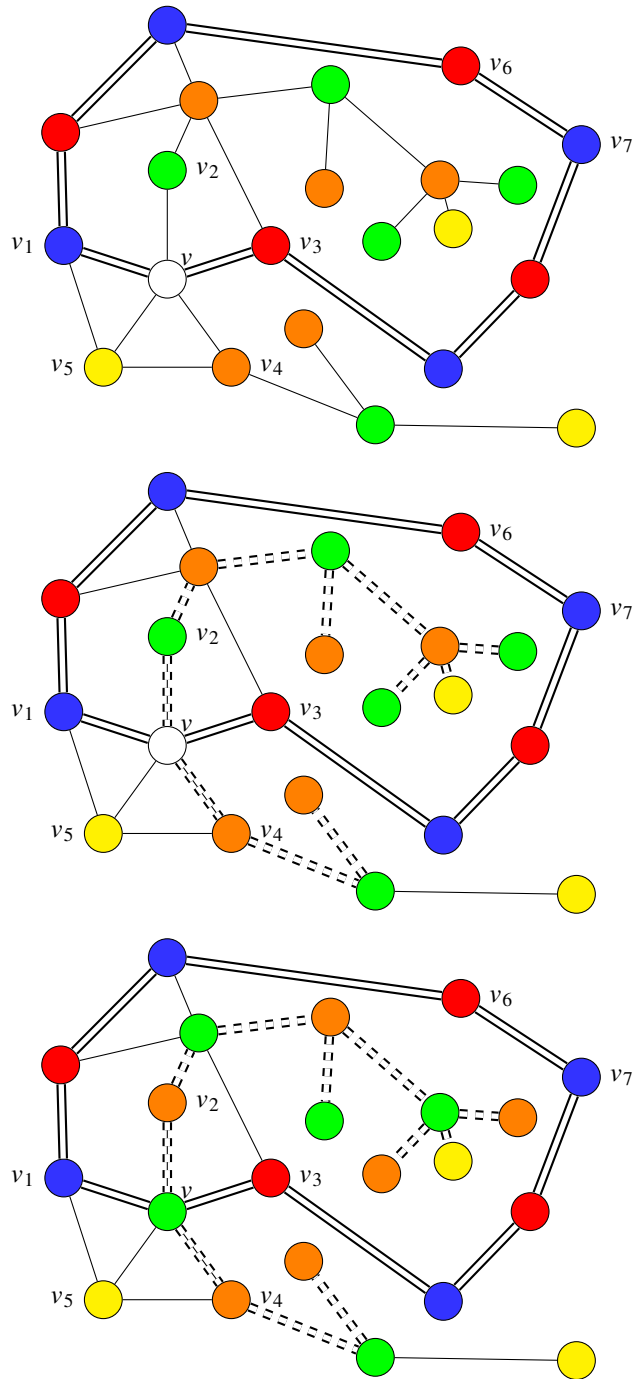


Fig. 4.18: Demostración del teorema de los cinco colores

contenidas en dos cadenas verde-naranja (doble línea discontinua, en la figura 4.18, centro). Intercambiamos los colores en la cadena que contiene  $v_2$  y luego  $v$  puede ser de color verde para obtener una coloración de  $G$  con cinco colores de  $G$  (Fig. 4.18, abajo).  $\square$

La afirmación de que un camino continuo desde el interior de una curva continua cerrada  $P$  al exterior de  $P$  debe intersectar a  $P$  es el Teorema de la Curva de Jordan. El teorema es intuitivamente obvio, pero difícil de demostrar.

#### 4.7 Demostración incorrecta del teorema de los cuatro colores de Kempe

**Teorema 4.11.** *Todo grafo plano puede ser coloreado con cuatro colores.*

*Demostración.* (Incorrecta) El caso base de la inducción y la mayor parte de la demostración es son los mismos que los del teorema de los cinco colores. El nuevo caso que hay que considerar es un vértice  $v$  con cinco vecinos que, por la hipótesis inductiva, se puede colorear con cuatro colores después de quitar  $v$ .

En la figura 4.19 hay dos vértices  $v_2, v_5$  coloreados de azul. Consideremos la cadena azul-verde que contiene  $v_2$  y la cadena azul-amarilla que contiene  $v_5$ . La cadena azul-verde está contenida dentro de la trayectoria cerrada definida por la cadena rojo-amarilla que contiene  $v_1, v_3$  (línea doble) y la cadena azul-amarilla está

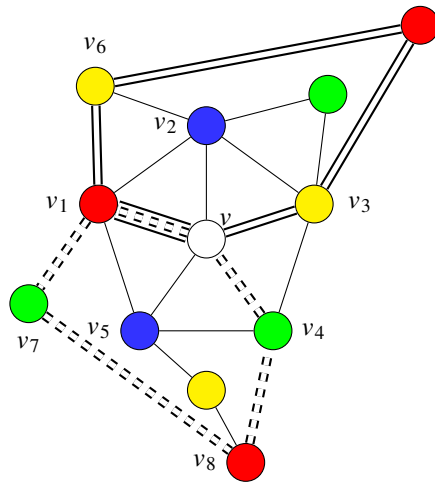


Fig. 4.19: Cadenas Kempe azul-verde y azul-amarillo

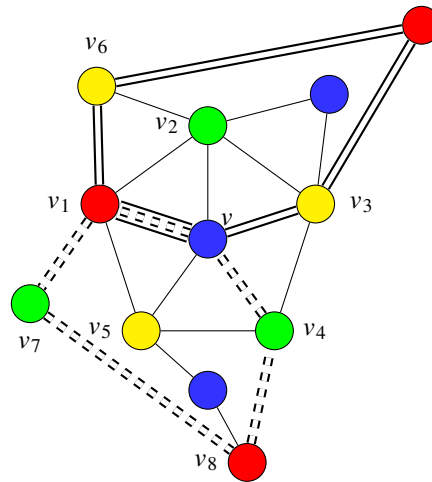


Fig. 4.20: Intercambia los colores de las dos cadenas Kempe

#### 4.7. DEMOSTRACIÓN INCORRECTA DEL TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES 47

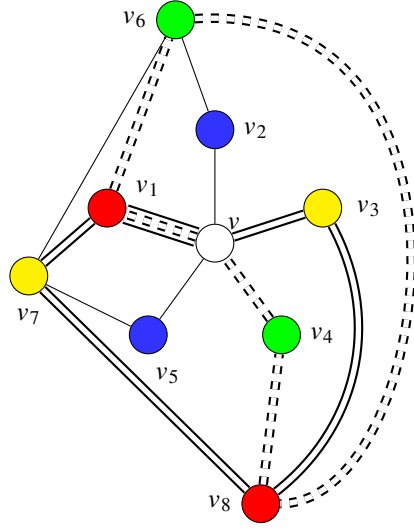


Fig. 4.21: Las cadenas rojo-amarillo y rojo-verde comparten vértices rojos

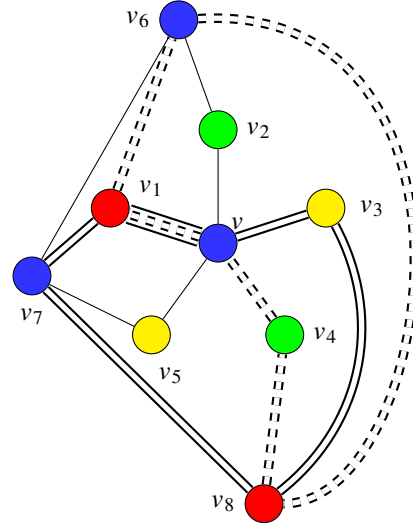


Fig. 4.22: El intercambio de colores hace que los vértices azules se conecten

contenida dentro de la trayectoria cerrada definida por la cadena rojo-verde que contiene  $v_1, v_4$  (línea doble discontinua).

Intercambiamos los colores de la cadena azul-verde y la cadena azul-amarillo (Fig. 4.20). El resultado es que los vecinos de  $v$  se colorean con los tres colores rojo, verde y amarillo, dejando libre el azul para colorear  $v$ .  $\square$

Heawood observó que los caminos cerrados definidos por la cadena rojo-amarillo y la cadena rojo-verde pueden compartir vértices rojos ( $v_1, v_8$  en la figura 4.21). Cuando se intercambian los colores en las cadenas azul-verde y azul-amarillo, es posible que los vértices azules  $v_6, v_7$  estén conectados (Fig. 4.22) y la coloración ya no es correcta.

#### ¿Cuál es la sorpresa?

El teorema de los cuatro colores es famoso porque es muy fácil de enunciar pero extremadamente difícil de demostrar. Por lo tanto, es sorprendente que la demostración del teorema de los cinco colores sea elemental. La parte inteligente de la demostración es el Teorema 4.8 (un grafo plano debe tener un vértice de como máximo grado 5), que es un teorema que no tiene nada que ver con la coloración. Simplemente, resulta simplemente de contar vértices y aristas.

**Fuentes**

Para el teorema de los cuatro colores, véase [49, 54]. La demostración del teorema de los cinco colores se basa en [1, 53]. [16] presenta numerosas demostraciones de la fórmula de Euler. La demostración incorrecta de Kempe del teorema de los cuatro colores se describe en [46].

## Capítulo 5

### Cómo custodiar un museo

En 1973 Victor Klee se preguntó cuántos custodios son necesarios para vigilar todas las paredes de un museo. Si las paredes forman un polígono regular o incluso un polígono convexo, basta con un guardia (Fig. 5.1).

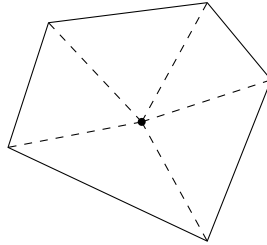


Fig. 5.1: *Un museo cuyas paredes forman un polígono convexo*

Consideremos ahora un museo con paredes en forma de sierra dentada (Fig. 5.2). Contando verificamos que el museo tiene 15 paredes. Cada «diente» define un triángulo que está sombreado en gris en la figura 5.3. Un guardia situado en cualquier lugar dentro de uno de los triángulos puede observar todas las paredes que limitan ese triángulo (flechas rojas).

Si al menos uno de los guardias se coloca cerca de la pared superior que abarca todo el museo, podrá observar todas las paredes horizontales (flechas azules en la figura 5.4). Así pues, bastan  $5 = 15/3$  guardias para observar todas las paredes del museo. Como los triángulos no se superponen, un vigilante de un triángulo no podrá observar todas las paredes de otro triángulo (flecha verde), por lo que se necesitan 5 vigilantes.

El ejemplo de la figura 5.2 puede generalizarse a  $n/3$  dientes con  $n$  paredes, por lo que concluimos que *al menos*  $n/3$  guardas son necesarios. Queremos demostrar

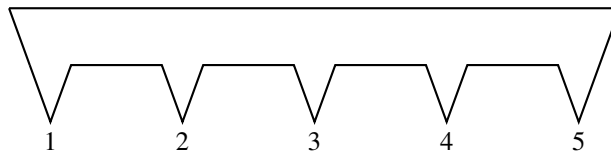


Fig. 5.2: *Un museo cuyas paredes no forman un polígono convexo*

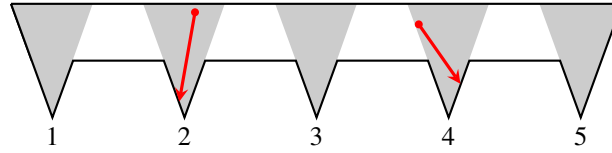


Fig. 5.3: Visibilidad dentro de cada «diente»

que  $n/3$  guardianes son suficientes para vigilar cualquier museo.

La sección 5.1 demuestra que cualquier polígono triangulado puede ser tricolor. Esto se utiliza en la sección 5.2 para demostrar el teorema de que  $n/3$  guardias son suficientes. La sección 5.3 completa la demostración demostrando que cualquier polígono puede ser triangulado.

### 5.1 Colorear polígonos triangulados

**Definición 5.1.** Una *diagonal* a de un polígono es una segmento que une dos vértices y que no es una de los lados del polígono.

**Definición 5.2.** Un polígono puede ser *triangulado* si se pueden construir diagonales no intersecantes de manera que el interior del polígono esté cubierto por triángulos.

**Teorema 5.1.** *Cualquier polígono puede triangularse.*

Aplazamos la demostración de este Teorema.

**Definición 5.3.** Un vértice de un polígono es *convexo* si su ángulo interior es menor que  $180^\circ$ ; un vértice es *cóncavo* si su ángulo interior es mayor que  $180^\circ$ .

En la figura 5.5 el vértice 1 es convexo y el vértice 2 es cóncavo.

**Definición 5.4.** Un polígono con vértices  $V$  puede ser *coloreado con tres colores* si existe una correspondencia:

$$c : V \mapsto \{\text{red}, \text{blue}, \text{green}\},$$

tal que ningún lado tenga dos vértices con el mismo color.

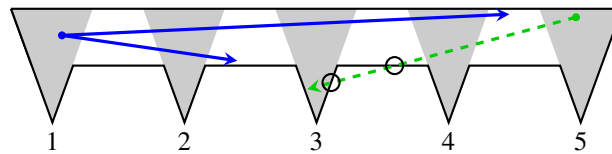


Fig. 5.4: Visibilidad de las paredes del museo

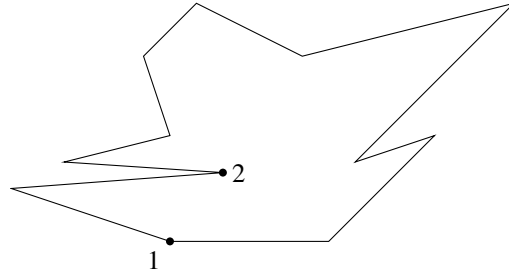


Fig. 5.5: Un polígono con un vértice convexo (1) y un vértice cóncavo (2)

**Teorema 5.2.** *Un polígono triangulado puede ser coloreado con tres colores.*

*Demostración.* Por inducción sobre el número de vértices. Un triángulo puede ser coloreado con tres colores. Un polígono triangulado con  $n > 3$  vértices debe tener una diagonal. Elegimos una diagonal arbitraria  $\overline{AB}$  (Fig. 5.6) y dividimos el polígono a lo largo de esta diagonal en dos polígonos más pequeños (Fig. 5.7). Por inducción, cada uno de estos polígonos más pequeños puede ser de tres colores (Fig. 5.8).

Como los colores asignados son arbitrarios, si se asignan colores diferentes a  $A, B$  en los dos polígonos, podemos reasignar los colores en uno de ellos para que los colores de  $A, B$  sean los mismos en ambos polígonos. Por ejemplo, en la figura 5.9 intercambiamos *rojo* y *verde* en el polígono inferior. Adosamos los dos polígonos para recuperar el polígono original con  $n$  vértices. Este será de tres colores (Fig. 5.10).  $\square$

## 5.2 De colorear polígonos a vigilar un museo

**Teorema 5.3.** *Un museo con  $n$  paredes puede estar vigilado por  $n/3$  guardias.*

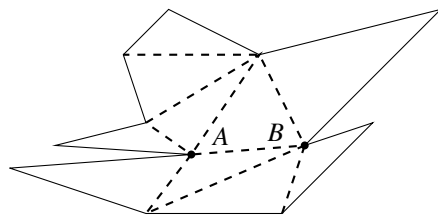


Fig. 5.6: Una diagonal arbitraria en un polígono

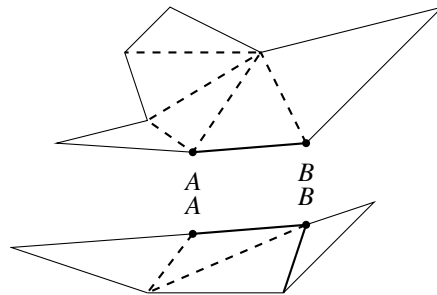


Fig. 5.7: División del polígono

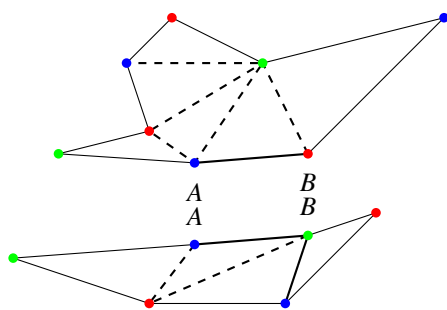


Fig. 5.8: Coloración con tres colores de los dos polígonos más pequeños

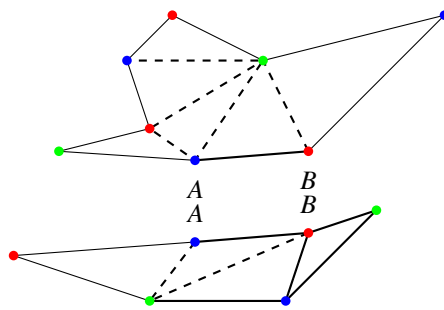


Fig. 5.9: Cambio de los colores de un polígono para que coincidan con los del otro

*Demostración.* Por el Teorema 5.1 el polígono puede ser triangulado y por el Teorema 5.2 el polígono puede ser coloreado con tres colores. Los tres vértices de cada triángulo en la triangulación deben ser coloreados por colores diferentes con el fin de satisfacer la condición de ser de tres colores. Dado que el polígono es de tres colores, al menos un color, por ejemplo rojo, puede aparecer como máximo  $n/3$  veces, y cada triángulo debe tener un vértice de color rojo. Coloquemos un guardia en cada vértice rojo; o ella puede observar todas las paredes de los triángulos a los que pertenece el vértice. Como los triángulos de la triangulación incluyen todos los lados del polígono,  $n/3$  guardias son suficientes para vigilar todas las paredes del museo.  $\square$

Si  $n$  no es divisible por 3 el número de vigilantes necesarios es  $\lfloor n/3 \rfloor$ , el mayor número entero menor o igual que  $n/3$ . Por ejemplo, 4 guardias son suficientes para museos con paredes de 12, 13, 14 ya que  $\lfloor 12/3 \rfloor = \lfloor 13/3 \rfloor = \lfloor 14/3 \rfloor = 4$ . Para simplificar, ignoramos esta complicación.

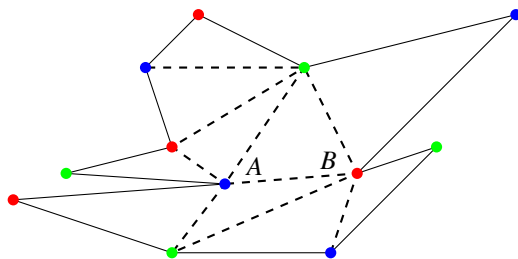


Fig. 5.10: Vuelve a pegar los dos polígonos más pequeños



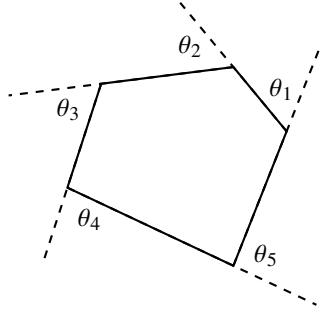


Fig. 5.11: Los ángulos exteriores de un polígono convexo

### 5.3 Cualquier polígono puede triangularse

**Teorema 5.4.** La suma de los ángulos interiores de un polígono con  $n$  vértices es:

$$180^\circ (n - 2) .$$

*Demostración.* Consideremos un polígono convexo y denotemos su *ángulos exteriores* por  $\theta_i$  (Fig. 5.11). Al pasar de una línea discontinua a la siguiente, se completa una rotación alrededor de un círculo así:

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = 360^\circ .$$

Para cada ángulo exterior  $\theta_i$  denotemos su correspondiente ángulo interior por  $\phi_i$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \theta_i &= \sum_{i=1}^n (180^\circ - \phi_i) = 360^\circ \\ \sum_{i=1}^n \phi_i &= n \cdot 180^\circ - 360^\circ = 180^\circ (n - 2) . \end{aligned}$$

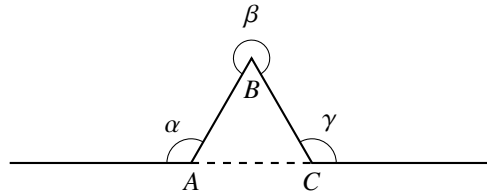


Fig. 5.12: Un vértice cóncavo

Si existe un vértice cóncavo ( $B$  en la figura 5.12), existe un triángulo formado por los dos lados incidentes con el vértice cóncavo y la recta  $\overline{AC}$  que une los otros dos vértices. Sumando los ángulos del triángulo obtenemos:

$$\begin{aligned}(180^\circ - \alpha) + (360^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) &= 180^\circ \\ \alpha + \beta + \gamma &= 3 \cdot 180^\circ.\end{aligned}$$

La suma de los ángulos interiores aumenta en  $\alpha + \beta + \gamma$  mientras que el número de vértices aumenta en tres conservando la ecuación del teorema:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \phi_i + (\alpha + \beta + \gamma) &= 180^\circ(n-2) + 3 \cdot 180^\circ \\ &= 180^\circ((n+3)-2).\end{aligned}$$

□

**Teorema 5.5.** *En un polígono debe haber al menos tres vértices convexos.*

*Demostración.* Sea  $k$  el número de vértices cóncavos donde el ángulo interior de cada uno es  $180^\circ + \epsilon_i$ ,  $\epsilon_i > 0$ . La suma de los ángulos interiores de los vértices cóncavos es ciertamente menor o igual que la suma de los ángulos interiores de todos los vértices:

$$\begin{aligned}k \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^k \epsilon_i &\leq 180^\circ(n-2) \\ (k+2) \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^k \epsilon_i &\leq n \cdot 180^\circ \\ (k+2) \cdot 180^\circ &< n \cdot 180^\circ \\ k &< n-2.\end{aligned}$$

De ello se deduce que debe haber al menos tres vértices que sean convexos, no cóncavos. □

Ahora podemos demostrar el Teorema 5.1.

*Demostración.* Por inducción en el número de vértices. Para  $n = 3$  no hay nada que demostrar. Si  $n > 3$ , por el Teorema 5.5 debe haber un vértice  $C$  convexo. Denotamos sus vértices adyacentes por  $B, D$ . Si  $\overline{BD}$  está contenida en el polígono (Fig. 5.13), es una diagonal y el polígono se puede dividir en  $\triangle BCD$  y otro polígono  $\overline{ABDE}$  con  $\overline{BD}$  como lado y que es más pequeño que el polígono original (Fig. 5.13). Por la hipótesis inductiva, el polígono se puede triangular y luego adosar de nuevo a  $\triangle BCD$ , triangulando el polígono original.

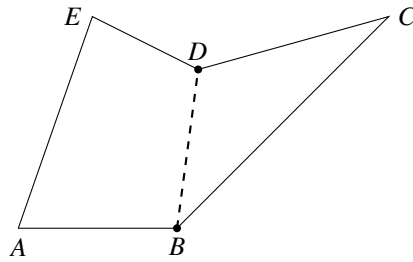


Fig. 5.13: Triangulación en la que una diagonal está contenida en el polígono

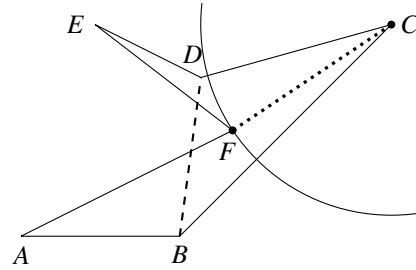


Fig. 5.14: Triangulación en la que una diagonal no está contenida en el polígono

Si  $\overline{BD}$  no está contenido en el polígono, debe haber un vértice cóncavo  $F$  que es más cercano a  $C$  (Fig. 5.14).  $\overline{CF}$  es una diagonal y divide el polígono en dos polígonos más pequeños  $\overline{CFED}$  y  $\overline{CFAB}$ . Por la hipótesis inductiva estos pueden ser triangulados y adosados.  $\square$

### ¿Cuál es la sorpresa?

El teorema del museo es sorprendente porque lo que parece un teorema de geometría se demuestra con bastante elegancia apelando a la coloración de un grafo.

### Fuentes

Este capítulo está basado en [1, Capítulo 39].

## Capítulo 6

### Inducción

El axioma de la inducción matemática se utiliza ampliamente como método de demostración en matemáticas. Este capítulo presenta demostraciones inductivas de resultados que pueden no ser conocidos por el lector. Comenzamos con una breve revisión de la inducción matemática (Sec. 6.1). La sección 6.2 demuestra resultados sobre los conocidos números de Fibonacci, mientras que la sección 6.3 demuestra resultados sobre los números de Fermat. La sección 6.4 presenta la función 91 descubierta por John McCarthy; la demostración es por inducción sobre una secuencia inusual: números enteros en un orden inverso. La demostración de la fórmula para el problema de Josephus (Sec. 6.5) también es inusual debido a la doble inducción en dos partes diferentes de una expresión.

#### 6.1 El axioma de la inducción matemática

La inducción matemática es el método principal para demostrar afirmaciones verdaderas para un conjunto ilimitado de números. Consideremos:

$$1 = 1, \quad 1 + 2 = 3, \quad 1 + 2 + 3 = 6, \quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Podríamos darnos cuenta:

$$1 = (1 \cdot 2)/2, \quad 3 = (2 \cdot 3)/2, \quad 6 = (3 \cdot 4)/2, \quad 10 = (4 \cdot 5)/2,$$

y luego conjeturar que para *todos* los números enteros  $n \geq 1$ :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si se tiene suficiente paciencia, comprobar esta fórmula para cualquier valor específico de  $n$  es fácil, pero ¿cómo se puede demostrar para del número infinito de enteros positivos? Aquí es donde entra en juego la inducción matemática.

**Axioma 6.1.** Sea  $P(n)$  una propiedad (como una ecuación, una fórmula o un teorema), donde  $n$  es un número entero positivo. Supongamos que se puede:

- *Caso base:* Demostrar que  $P(1)$  es cierto.
- *Paso inductivo:* Para  $m$  arbitrarios, demostrar que  $P(m+1)$  es cierto siempre que se suponga que  $P(m)$  es cierto.

Entonces  $P(n)$  es verdadera para todo  $n \geq 1$ . La suposición de que  $P(m)$  es cierta para  $m$  arbitrarios se denomina *hipótesis inductiva*.

He aquí un ejemplo sencillo de demostración por inducción matemática.

**Teorema 6.1.** Para  $n \geq 1$ :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*Demostración.* El caso base es trivial:

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

La hipótesis inductiva es que la siguiente ecuación es cierta para  $m$ :

$$\sum_{i=1}^m i = \frac{m(m+1)}{2}.$$

El paso inductivo es demostrar la ecuación para  $m+1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m+1} i &= \sum_{i=1}^m i + (m+1) \\ &= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}. \end{aligned}$$

Por el principio de inducción matemática, para cualquier  $n \geq 1$ :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

La hipótesis inductiva puede ser confusa porque parece que estamos suponiendo lo que intentamos demostrar. El razonamiento *no* es circular porque suponemos la verdad de una propiedad para algo *pequeño* y luego usamos la suposición para demostrar la propiedad para algo más *grande*.

La inducción matemática es un axioma, por lo que no se puede demostrar la inducción. Sólo aceptamos la inducción como aceptamos otros axiomas de las matemáticas como  $x+0 = x$ . Por supuesto, eres libre de rechazar la inducción matemática, pero entonces tendrás que rechazar gran parte de las matemáticas modernas.

La inducción matemática es una regla de inferencia que es uno de los *axiomas de Peano* para formalizar los números naturales. El *axioma de ordenación* puede utilizarse para demostrar el axioma de inducción y, a la inversa, el axioma de inducción puede utilizarse para demostrar el axioma de ordenación bien. Sin embargo, el axioma de inducción no puede demostrarse a partir de los otros axiomas de Peano, más elementales.

## 6.2 Números de Fibonacci

Los números de Fibonacci son un ejemplo clásico de definición recursiva:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \text{ for } n \geq 3. \end{aligned}$$

Los doce primeros números de Fibonacci son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.$$

**Teorema 6.2.** *Cada cuarto número de Fibonacci es divisible por 3.*

*Ejemplo 6.1.*  $f_4 = 3 = 3 \cdot 1$ ,  $f_8 = 21 = 3 \cdot 7$ ,  $f_{12} = 144 = 3 \cdot 48$ .

*Demostración.* Caso base:  $f_4 = 3$  es divisible por 3. La hipótesis inductiva es que  $f_{4n}$  es divisible por 3. El paso inductivo es:

$$\begin{aligned} f_{4(n+1)} &= f_{4n+4} \\ &= f_{4n+3} + f_{4n+2} \\ &= (f_{4n+2} + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\ &= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\ &= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + (f_{4n+1} + f_{4n}) \\ &= 3f_{4n+1} + 2f_{4n}. \end{aligned}$$

$3f_{4n+1}$  es divisible por 3 y, por la hipótesis inductiva,  $f_{4n}$  es divisible por 3. Por lo tanto,  $f_{4(n+1)}$  es divisible por 3.  $\square$

**Teorema 6.3.**  $f_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ .

*Demostración.* Casos base:  $f_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$  and  $f_2 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$ . El paso inductivo es:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4} + 1\right) \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

entonces:

$$\left(\frac{7}{4} + 1\right) = \frac{11}{4} = \frac{44}{16} < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2.$$

□

**Teorema 6.4** (Fórmula de Binet).

$$f_n = \frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\sqrt{5}}, \text{ where } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \bar{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

*Demostración.* Primero demostramos que  $\phi^2 = \phi + 1$ :

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + 1 \\ &= \phi + 1. \end{aligned}$$

Del mismo modo, podemos demostrar que  $\bar{\phi}^2 = \bar{\phi} + 1$ .

El caso base de la fórmula de Binet es:

$$\frac{\phi^1 - \bar{\phi}^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = f_1.$$

Supongamos la hipótesis inductiva para todo  $k \leq n$ . El paso inductivo es:

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} - \bar{\phi}^{n+1} &= \phi^2 \phi^{n-1} - \bar{\phi}^2 \bar{\phi}^{n-1} \\ &= (\phi + 1)\phi^{n-1} - (\bar{\phi} + 1)\bar{\phi}^{n-1} \\ &= (\phi^n - \bar{\phi}^n) + (\phi^{n-1} - \bar{\phi}^{n-1}) \\ &= \sqrt{5}f_n + \sqrt{5}f_{n-1} \\ \frac{\phi^{n+1} - \bar{\phi}^{n+1}}{\sqrt{5}} &= f_n + f_{n-1} = f_{n+1}. \end{aligned}$$

□

**Teorema 6.5.**

$$f_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots.$$

*Demostración.* Demostremos primero la regla de Pascal:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\
&= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

También utilizaremos la igualdad  $\binom{k}{0} = \frac{k!}{0!(k-0)!} = 1$  para cualquier  $k \geq 1$ .

Ahora podemos demostrar el teorema. El caso base es:

$$f_1 = \binom{1}{0} = \frac{1!}{0!(1-0)!} = 1.$$

El paso inductivo es:

$$\begin{aligned}
f_n = f_{n-1} + f_{n-2} &= \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \cdots \\
&\quad \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} + \cdots \\
&= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots \\
&= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots.
\end{aligned}$$

□

### 6.3 Números de Fermat

**Definición 6.1.** Los enteros  $F_n = 2^{2^n} + 1$  para  $n \geq 0$  se llaman *números de Fermat*.

Los cinco primeros números de Fermat son primos:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537.$$

El matemático del siglo XVII Pierre de Fermat afirmó que todos los números de Fermat son primos, pero casi cien años después Leonhard Euler demostró que:

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417.$$



Los números de Fermat se vuelven extremadamente grandes a medida que  $n$  aumenta. Se sabe que los números de Fermat no son primos para  $5 \leq n \leq 32$ , pero la factorización de algunos de esos números aún no se conoce.

**Teorema 6.6.** Para  $n \geq 2$ , el último dígito de  $F_n$  es 7.

*Demostración.* El caso base es  $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$ . La hipótesis inductiva es  $F_n = 10k_n + 7$  para algún  $k_n \geq 1$ . El paso inductivo es:

$$\begin{aligned}
 F_{n+1} &= 2^{2^{n+1}} + 1 = 2^{2^n \cdot 2^1} + 1 = \left(2^{2^n}\right)^2 + 1 \\
 &= \left(\left(2^{2^n} + 1\right) - 1\right)^2 + 1 = (F_n - 1)^2 + 1 \\
 &= (10k_n + 7 - 1)^2 + 1 = (10k_n + 6)^2 + 1 \\
 &= 100k_n^2 + 120k_n + 36 + 1 \\
 &= 10(10k_n^2 + 12k_n + 3) + 6 + 1 \\
 &= 10k_{n+1} + 7, \quad \text{para algún } k_{n+1} \geq 1.
 \end{aligned}$$

□

**Teorema 6.7.** Para  $n \geq 1$ ,  $F_n = \prod_{k=0}^{n-1} F_k + 2$ .

*Demostración.* El caso base es:

$$F_1 = \prod_{k=0}^0 F_k + 2 = F_0 + 2 = 3 + 2 = 5.$$

El paso inductivo es:

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=0}^n F_k &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\right) F_n \\
 &= (F_n - 2)F_n \\
 &= (2^{2^n} + 1 - 2)(2^{2^n} + 1) \\
 &= \left(2^{2^n}\right)^2 - 1 = \left(2^{2^{n+1}} + 1\right) - 2 \\
 &= F_{n+1} - 2 \\
 F_{n+1} &= \prod_{k=0}^n F_k + 2.
 \end{aligned}$$

□

#### 6.4 La función 91 de McCarthy

Solemos asociar la inducción con demostraciones de propiedades definidas en el conjunto de los números enteros positivos. Aquí traemos una demostración inductiva basada en una extraña ordenación en la que los números mayores son menores que los menores. La inducción funciona porque la única propiedad requerida del conjunto es que esté ordenado bajo algún operador relacional.

Consideremos la siguiente función recursiva definida sobre los números enteros:

$$f(x) = \text{si } x > 100 \text{ entonces } x - 10 \text{ si no } f(f(x + 11)) .$$

Para números superiores a 100 el resultado de aplicar la función es trivial:

$$f(101) = 91, \quad f(102) = 92, \quad f(103) = 93, \quad f(104) = 94, \quad \dots .$$

¿Qué pasa con los números menores o iguales que 100? Calculemos  $f(x)$  para algunos números, donde el cálculo en cada línea utiliza los resultados de las líneas anteriores:

$$\begin{aligned} f(100) &= f(f(100 + 11)) = f(f(111)) = f(101) = 91 \\ f(99) &= f(f(99 + 11)) = f(f(110)) = f(100) = 91 \\ f(98) &= f(f(98 + 11)) = f(f(109)) = f(99) = 91 \\ &\dots \\ f(91) &= f(f(91 + 11)) = f(f(102)) = f(92) \\ &\quad = f(f(103)) = f(93) = \dots = f(98) = 91 \\ f(90) &= f(f(90 + 11)) = f(f(101)) = f(91) = 91 \\ f(89) &= f(f(89 + 11)) = f(f(100)) = f(91) = 91 . \end{aligned}$$

Definimos la función  $g$  como:

$$g(x) = \text{si } x > 100 \text{ entonces } x - 10 \text{ si no } 91 .$$

**Teorema 6.8.** Para todo  $x$ ,  $f(x) = g(x)$ .

*Demostración.* La demostración es por inducción sobre el conjunto de enteros  $S = \{x \mid x \leq 101\}$  utilizando el operador relacional  $<$  definido por:

$$y < x \text{ si y solo si } x < y ,$$

donde en el lado derecho  $<$  es el operador relacional habitual sobre los números enteros. Esta definición da como resultado la siguiente ordenación:

$$101 < 100 < 99 < 98 < 97 < \dots .$$

Hay tres casos en la demostración. Utilizamos los resultados de los cálculos anteriores.

*Caso 1:*  $x > 100$ . Esto es trivial por las definiciones de  $f$  y  $g$ .

*Caso 2:*  $90 \leq x \leq 100$ . El caso base de la inducción es:

$$f(100) = 91 = g(100),$$

ya que hemos demostrado que  $f(100) = 91$  y por definición  $g(100) = 91$ .

La hipótesis inductiva es  $f(y) = g(y)$  para  $y < x$  y el paso inductivo es:

$$f(x) = f(f(x+11)) \quad (6.1a)$$

$$= f(x+11-10) = f(x+1) \quad (6.1b)$$

$$= g(x+1) \quad (6.1c)$$

$$= 91 \quad (6.1d)$$

$$= g(x). \quad (6.1e)$$

La ecuación 6.1a se cumple por definición de  $f$  ya que  $x \leq 100$ . La igualdad de la Ecuación 6.1a y la Ecuación 6.1b se cumple por definición de  $f$ , ya que  $x \geq 90$  por lo que  $x+11 > 100$ . La igualdad de la Ecuación 6.1b y la Ecuación 6.1c se deriva de la hipótesis inductiva  $x \leq 100$ , por lo que  $x+1 \leq 101$  lo que implica que  $x+1 \in S$  y  $x+1 < x$ . La igualdad de la Ecuación 6.1c, Ecuación 6.1d y Ecuación 6.1e se deriva de la definición de  $g$  y  $x+1 \leq 101$ , por lo que  $x \leq 100$ .

*Caso 3:*  $x < 90$ . El caso base es:  $f(89) = f(f(100)) = f(91) = 91 = g(89)$  por definición de  $g$  ya que  $89 < 100$ .

La hipótesis inductiva es  $f(y) = g(y)$  para  $y < x$  y el paso inductivo es:

$$f(x) = f(f(x+11)) \quad (6.2a)$$

$$= f(g(x+11)) \quad (6.2b)$$

$$= f(91) \quad (6.2c)$$

$$= 91 \quad (6.2d)$$

$$= g(x). \quad (6.2e)$$

La ecuación 6.2a se cumple por definición de  $f$  y  $x < 90 \leq 100$ . La igualdad de la Ecuación 6.2a y la Ec 6.2b se deriva de la hipótesis inductiva  $x < 90$ , por lo que  $x+11 < 101$ , lo que implica que  $x+11 \in S$  y  $x+11 < x$ . La igualdad de la Ecuación 6.2b y la Ec 6.2c se deriva de la definición de  $g$  y  $x+11 < 101$ . Por último, ya hemos demostrado que  $f(91) = 91$  y  $g(x) = 91$  para  $x < 90$  por definición.  $\square$

## 6.5 El problema de Josefo

Josefo era el comandante de la ciudad de Yodfat durante la rebelión judía contra los romanos. La abrumadora fuerza del ejército romano acabó aplastando la resistencia de la ciudad y Josefo se refugió en una cueva con algunos de sus hombres.

Prefirieron suicidarse antes que ser asesinados o capturados por los romanos. Según el relato de Josefo, él se las arregló para salvarse, se convirtió en observador de los romanos y más tarde escribió una historia de la rebelión. Presentamos el problema como un problema matemático abstracto.

**Definición 6.2** (El problema de Josefo). Considere los números  $1, \dots, n+1$  dispuestos en un círculo. Suprima cada número  $q$  alrededor del círculo  $q, 2q, 3q, \dots$  (donde el cálculo se realiza modulo  $n+1$ ) hasta que sólo quede un número  $m$ .  $J(n+1, q) = m$  es el *número de Josefo* para  $n+1$  y  $q$ .

*Ejemplo 6.2.* Sea  $n+1 = 41$  y  $q = 3$ . Ordena los números en un círculo:

→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	↑													15
	41													16
	40													17
	39													18
	38													19
	37													20
	36													21
	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22

La primera ronda de supresiones conduce a:

→	1	2	<del>3</del>	4	5	<del>6</del>	7	8	<del>9</del>	10	11	<del>12</del>	13	14
	↑													<del>15</del>
	41													16
	40													17
	<del>39</del>													<del>18</del>
	38													19
	37													20
	<del>36</del>													<del>21</del>
	35	34	<del>33</del>	32	31	<del>30</del>	29	28	<del>27</del>	26	25	<del>24</del>	23	22

Una vez eliminados los números suprimidos, se puede escribir como:

1	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17	19	20
41	40	38	37	35	34	32	31	29	28	26	25	23	22

La segunda ronda de supresiones (a partir de la última supresión de 39) conduce a:

<del>1</del>	2	4	<del>5</del>	7	8	<del>10</del>	11	13	<del>14</del>	16	17	<del>19</del>	20
<del>41</del>	40	38	<del>37</del>	35	34	<del>32</del>	31	29	<del>28</del>	26	25	23	<del>22</del>

Seguimos borrando uno de cada tres números hasta que sólo quede uno:

~~2~~   ~~4~~   ~~7~~   8   11   ~~13~~   16   17   ~~20~~   22   25   ~~26~~   29   31   ~~34~~   35   38   ~~40~~  
~~2~~   ~~4~~   ~~8~~   11   16   ~~17~~   22   25   ~~29~~   31   35   ~~38~~  
~~2~~   ~~4~~   ~~11~~   16   22   ~~25~~   31   35  
~~2~~   ~~4~~   16   ~~22~~   31   35  
~~4~~   16   31   ~~35~~  
~~16~~   31  
31

Se deduce que  $J(41, 3) = 31$ .

Se invita al lector a realizar el cálculo para eliminar uno de cada siete números de un círculo de 40 números con el fin de verificar que el último número es 30.

**Teorema 6.9.**  $J(n+1, q) = (J(n, q) + q) \pmod{n+1}$ .

*Demostración.* El primer número eliminado en la primera ronda es el número  $q$  y los números que quedan después de la eliminación son los números  $n$ :

$$1 \quad 2 \quad \dots \quad q-1 \quad q+1 \quad \dots \quad n \quad n+1 \pmod{n+1}.$$

El conteo para encontrar la siguiente eliminación comienza con  $q+1$ . Mapeando  $1, \dots, n$  en esta secuencia obtenemos:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & \dots & n-q & n+1-q & n+2-q & \dots & n-1 & n \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 q+1 & q+2 & \dots & n & n+1 & 1 & \dots & q-2 & q-1.
 \end{array}$$

Recordemos que los cálculos son módulo  $n+1$ :

$$\begin{aligned}
 (n+2-q) + q &= (n+1) + 1 &= 1 &\pmod{n+1} \\
 (n) + q &= (n+1) - 1 + q &= q-1 &\pmod{n+1}.
 \end{aligned}$$

Este es el problema de Josefo para  $n$  números, excepto que los números están desplazados por  $q$ . Se deduce que:

$$J(n+1, q) = (J(n, q) + q) \pmod{n+1}.$$

□

**Teorema 6.10.** Para  $n \geq 1$  existen números  $a \geq 0, 0 \leq t < 2^a$ , tales que  $n = 2^a + t$ .

*Demostración.* Esto se puede demostrar a partir de la aplicación repetida del algoritmo de división con divisores  $2^0, 2^1, 2^2, 2^4, \dots$ , pero es fácil de ver a partir de

la representación binaria de  $n$ . Para algunos  $a$  y  $b_{a-1}, b_{a-2}, \dots, b_1, b_0$ , donde para todo  $i$ ,  $b_i = 0$  o  $b_i = 1$ ,  $n$  se puede expresar como:

$$\begin{aligned} n &= 2^a + b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0 \\ n &= 2^a + (b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0) \\ n &= 2^a + t, \quad \text{donde } t \leq 2^a - 1. \end{aligned}$$

□

Ahora demostramos que existe una forma cerrada simple para  $J(n, 2)$ .

**Teorema 6.11.** *For  $n = 2^a + t$ ,  $a \geq 0$ ,  $0 \leq t < 2^a$ ,  $J(n, 2) = 2t + 1$ .*

*Demostración.* Por el Teorema 6.10,  $n$  puede expresarse como se indica en el teorema. La demostración de que  $J(n, 2) = 2t + 1$  se hace por doble inducción, primero sobre  $a$  y luego sobre  $t$ .

*Primera inducción:*

Caso base. Supongamos que  $t = 0$  de modo que  $n = 2^a$ . Sea  $a = 1$  de modo que haya dos números en el círculo 1, 2. Como  $q = 2$ , el segundo número se borrará, por lo que el número que queda es 1 y  $J(2^1, 2) = 1$ .

La hipótesis inductiva es que  $J(2^a, 2) = 1$ . ¿Cuál es  $J(2^{a+1}, 2)$ ? En la primera ronda se eliminan todos los números pares:

$$1 \quad \cancel{2} \quad 3 \quad \cancel{4} \quad \dots \quad 2^{a+1}-1 \quad \cancel{2^{a+1}}.$$

Ahora quedan  $2^a$  números:

$$1 \quad 3 \quad \dots \quad 2^{a+1}-1.$$

Por la hipótesis inductiva  $J(2^{a+1}, 2) = J(2^a, 2) = 1$  así que por inducción  $J(n, 2) = 1$  siempre que  $n = 2^a + 0$ .

*Segunda inducción:*

Hemos demostrado  $J(2^a + 0, 2) = 2 \cdot 0 + 1$ , el caso base de la segunda inducción.

La hipótesis inductiva es  $J(2^a + t, 2) = 2t + 1$ . Por el Teorema 6.9:

$$J(2^a + (t + 1), 2) = J(2^a + t, 2) + 2 = 2t + 1 + 2 = 2(t + 1) + 1.$$

□

Los teoremas 6.10 y 6.11 dan un algoritmo sencillo para calcular  $J(n, 2)$ . De la demostración de Teorema 6.10:

$$n = 2^a + t = 2^a + (b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0),$$

entonces  $t = b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0$ .

Multiplicamos  $t$  por 2 desplazando los dígitos binarios de  $t$  un dígito hacia la izquierda y sumamos 1 a la derecha. Por ejemplo, como  $n = 41 = 25 + 23 + 20 = 101001$ ,

$$t = n - 2^5 = 9 = 23 + 20 = 01001,$$

lo que implica que

$$J(41, 2) = 2t + 1 = 2 \cdot 9 + 1 = 1001 \sqcup 1 = 24 + 21 + 20 = 19.$$

El lector puede comprobar el resultado borrando uno de cada dos números de un círculo  $1, \dots, 41$ .

Existe una forma cerrada para  $J(n, 3)$  pero es bastante complicada.

### ¿Cuál es la sorpresa?

La inducción es quizá la técnica de demostración más importante de las matemáticas modernas. Aunque los números de Fibonacci son muy conocidos y los de Fermat también son fáciles de entender, me sorprendió encontrar tantas fórmulas que no conocía (como los Teoremas 6.2 y 6.3) que se pueden demostrar por inducción. La función 91 de McCarthy se descubrió en el contexto de la informática, aunque es un resultado puramente matemático. Lo sorprendente no es la función en sí, sino la extraña inducción utilizada para demostrarla donde  $98 < 97$ . La sorpresa del problema de Josefo es la demostración inductiva bidireccional.

### Fuentes

Para una presentación completa de la inducción, véase [21]. La demostración de la función 91 de McCarthy es de [30] donde se atribuye a Rod M. Burstall. La presentación del problema de Josefo se basa en [21, Capítulo 17], que también discute los antecedentes históricos. Ese capítulo contiene otros problemas interesantes con demostraciones inductivas, como los niños embarrados, la moneda falsa y los peniques en una caja. Se puede encontrar material adicional sobre el problema de Josefo en [44, 57].

## Capítulo 7

### Resolución de ecuaciones cuadráticas

Poh-Shen Loh propuso un método para resolver ecuaciones cuadráticas que se basa en una relación entre los coeficientes del polinomio cuadrático y sus raíces. Sección 7.1 revisa los métodos tradicionales para resolver ecuaciones cuadráticas. La sección 7.2 intenta convencer al lector de que el método de Loh tiene sentido y luego explica cómo calcular las raíces. En la sección 7.3 se realiza el cálculo para dos polinomios cuadráticos y un cálculo similar para un polinomio cuártico. La sección 7.4 deriva la fórmula tradicional para las raíces a partir de las fórmulas de Loh.

La introducción del álgebra y de la notación algebraica moderna es relativamente reciente. Anteriormente, los matemáticos utilizaban la geometría casi exclusivamente, por lo que es interesante observar la construcción geométrica de al-Khwarizmi de la fórmula para las raíces de ecuaciones cuadráticas (Sec. 7.5). La sección 7.6 muestra una ingeniosa construcción geométrica utilizada por Cardano en el desarrollo de la fórmula para las raíces de ecuaciones cúbicas.

La sección 7.8 presenta otros métodos geométricos para hallar las raíces de ecuaciones cuadráticas<sup>1</sup>. El capítulo concluye con la sección 7.9, que trata del cálculo numérico de las raíces de ecuaciones cuadráticas.

#### 7.1 Métodos tradicionales para resolver ecuaciones cuadráticas

Todo estudiante de matemáticas memoriza la fórmula para obtener las raíces de una ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c = 0$ :

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Por ahora trabajaremos con polinomios mónicos,  $x^2 + bx + c = 0$ , cuyas raíces son:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (7.1)$$

Otro método para resolver ecuaciones cuadráticas consiste en factorizar los polinomios más o menos por ensayo y error. A veces es fácil obtener las raíces mediante factorización:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3). \quad (7.2)$$

---

<sup>1</sup>El capítulo 11 es un prerrequisito para una comprensión completa de estos métodos.



Es mucho más difícil factorizar  $x^2 - 2x - 24$  porque hay muchos pares posibles de raíces que hay que considerar:

$$(\pm 1, \mp 24), (\pm 2, \mp 12), (\pm 3, \mp 8), (\pm 4, \mp 6).$$

## 7.2 La relación entre las raíces y los coeficientes

**Teorema 7.1.** Si  $r_1, r_2$  son las raíces de  $x^2 + bx + c$  entonces:

$$(x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2 = x^2 + bx + c.$$

Por lo tanto, aunque no conozcamos los valores de las raíces, sí sabemos que:

$$r_1 + r_2 = -b, \quad r_1r_2 = c. \quad (7.3)$$

En realidad no hay nada que demostrar porque el resultado surge del cálculo.

Consideremos algunos valores de  $-b, r_1, r_2$  y sea  $m_{12}$  la media de  $r_1, r_2$ :

$-b$	$r_1$	$r_2$	$m_{12}$
33	12	21	$16\frac{1}{2}$
33	8	25	$16\frac{1}{2}$
33	1	32	$16\frac{1}{2}$
$-b$	$r_1$	$r_2$	$m_{12}$
-4	-16	12	-2
-4	-4	0	-2
-4	-3	-1	-2

Para cualquier ecuación cuadrática la media de las dos raíces es constante:

$$m_{1,2} = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{(-b - r_2) + r_2}{2} = -\frac{b}{2}.$$

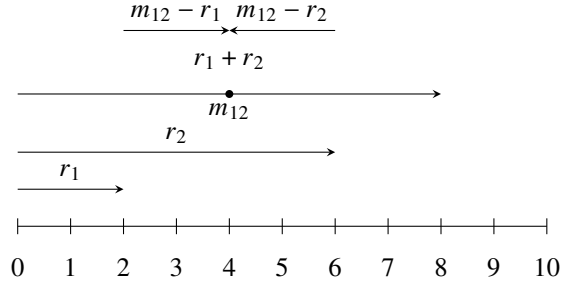
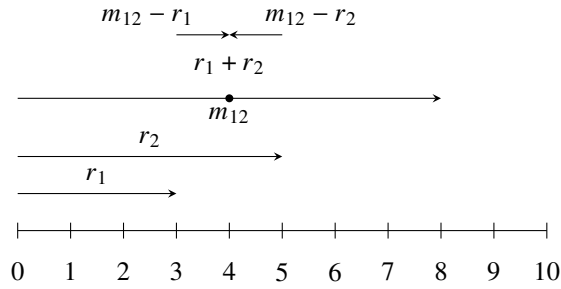
Sea  $s$  un número cualquiera. Entonces:

$$-b = -b + s + (-s) = \left(\frac{-b}{2} + s\right) + \left(\frac{-b}{2} - s\right) = r_1 + r_2.$$

Si una raíz está a distancia  $s$  de la media, la otra raíz está a distancia  $-s$  de la media.

Para  $r_1, r_2 = 2, 6$ , donde  $m_{12} = 4, s = 2$ , tenemos:

$-b$	$r_1$	$r_2$	$m_{12}$	$m_{12} - r_1$	$m_{12} - r_2$
33	12	21	$16\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$
33	8	25	$16\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{2}$
33	1	32	$16\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{2}$
-4	-16	12	-2	14	-14
-4	-4	0	-2	2	-2
-4	-3	-1	-2	1	-1

Fig. 7.1: Relación entre las raíces  $r_1, r_2 = 2, 6$  y su media  $m_{12} = 4$ Fig. 7.2: Relación entre las raíces  $r_1, r_2 = 3, 5$  y su media  $m_{12} = 4$ 

La figura 7.1 visualiza esta relación. Si utilizamos otros valores  $r_1, r_2 = 3, 5$  para los que  $r_1 + r_2 = 8$  entonces  $m_{12} = 4$  permanece igual mientras que  $s$  se convierte en 1 (Fig. 7.2).

El desplazamiento  $s$  parece ser arbitrario en:

$$r_1 = \left( \frac{-b}{2} + s \right), \quad r_2 = \left( \frac{-b}{2} - s \right),$$

pero hay una restricción adicional  $r_1 r_2 = c$ , donde  $c$  es el término constante del polinomio. Multiplicando las dos expresiones que hemos obtenido para  $r_1, r_2$ , podemos determinar  $s$  y luego  $r_1, r_2$ :

$$c = \left( \frac{-b}{2} + s \right) \left( \frac{-b}{2} - s \right) = \frac{b^2}{4} - s^2$$

$$s = \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

**7.3 Ejemplos del método de Loh**

*Ejemplo 7.1.* Consideremos el polinomio  $x^2 - 2x - 24$  donde  $b = -2$ ,  $c = -24$ :

$$\begin{aligned} c &= \left(-\frac{(-2)}{2} + s\right) \left(-\frac{(-2)}{2} - s\right) \\ -24 &= (1 + s)(1 - s) \\ s &= 5 \\ r_1 &= 1 + 5 = 6 \\ r_2 &= 1 - 5 = -4. \end{aligned}$$

Verifiquemos:  $(x - 6)(x - (-4)) = x^2 - 2x - 24$ .

*Ejemplo 7.2.* Busquemos las raíces de  $x^2 - 83x - 2310$ :

$$\begin{aligned} -2310 &= \left(\frac{83}{2} + s\right) \left(\frac{83}{2} - s\right) \\ s^2 &= \frac{6889}{4} + 2310 = \frac{16129}{4} \\ s &= \frac{127}{2} \\ r_1 &= \frac{83}{2} - \frac{127}{2} = -22 \\ r_2 &= \frac{83}{2} + \frac{127}{2} = 105. \end{aligned}$$

Verifiquemos:  $(x + 22)(x - 105) = x^2 - 83x - 2310$ .

Controlemos este cálculo con el cálculo mediante la fórmula tradicional:

$$\begin{aligned} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} &= \frac{-(-83) \pm \sqrt{(-83)^2 - 4 \cdot (-2310)}}{2} \\ &= \frac{83 \pm \sqrt{16129}}{2} = \frac{83 \pm 127}{2} \\ r_1 &= \frac{83 - 127}{2} = -22 \\ r_2 &= \frac{83 + 127}{2} = 105. \end{aligned}$$

*Ejemplo 7.3.* Teorema 7.1 puede generalizarse a polinomios de grados superiores. He aquí un ejemplo interesante para una *ecuación cuártica*  $x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0$ . Al igual que con las ecuaciones cuadráticas, existen fórmulas para resolver ecuaciones cúbicas y cuárticas (aunque no ecuaciones de potencias superiores), pero las fórmulas son bastante complicadas.

¿Se podrá factorizar este polinomio de grado cuatro en dos polinomios cuadráticos con coeficientes enteros? Si es así, los coeficientes de los términos  $x$  en los

factores cuadráticos deben ser *iguales y de signos opuestos* ya que el coeficiente del término  $x^3$  en el polinomio cuártico es cero. Por lo tanto, la forma de los factores cuadráticos es:

$$f(x) = (x^2 - nx + k_1)(x^2 + nx + k_2).$$

Realizando la multiplicación se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x) = & x^4 & +nx^3 & +k_2x^2 \\ & -nx^3 & -n^2x^2 & -nk_2x \\ & & +k_1x^2 & +nk_1x & +k_1k_2. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes se obtienen tres ecuaciones con tres incógnitas  $n, k_1, k_2$ :

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2) - n^2 &= -10 \\ n(k_1 - k_2) &= -1 \\ k_1 k_2 &= 20. \end{aligned}$$

Como buscamos factores con coeficientes enteros, de las dos últimas ecuaciones se deduce que:

$$n = 1, k_1 = 4, k_2 = 5 \quad \text{o} \quad n = 1, k_1 = -5, k_2 = -4.$$

Sólo  $n = 1, k_1 = -5, k_2 = -4$  satisfacen la primera ecuación para el coeficiente de  $x^2$ :

$$f(x) = (x^2 - x - 5)(x^2 + x - 4).$$

Resolviendo estas ecuaciones cuadráticas se obtienen cuatro soluciones de la ecuación cuártica:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

#### 7.4 Derivación de la fórmula tradicional

Para un polinomio mónico arbitrario  $x^2 + bx + c$ , las fórmulas de Loh son:

$$\begin{aligned} c = r_1 r_2 &= \left( \frac{-b}{2} + s \right) \left( \frac{-b}{2} - s \right) = \left( \frac{b^2}{4} - s^2 \right) \\ s &= \sqrt{\left( \frac{b^2}{4} \right) - c} \\ r_1, r_2 &= \frac{-b}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{b^2}{4} \right) - c} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \end{aligned}$$

que es la fórmula tradicional para obtener las raíces de un polinomio cuadrático mónico. Si el polinomio no es mónico se divide por  $a$ , se sustituye en la ecuación y se simplifica:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ r_1, r_2 &= \frac{-(b/a) \pm \sqrt{(b/a)^2 - 4(c/a)}}{2} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

### 7.5 Solución geométrica de ecuaciones cuadráticas de Al-Khwarizmi

Escribamos un polinomio cuadrático mónico como  $x^2 + bx - c$ . Las raíces se pueden encontrar *completando el cuadrado*:

$$\begin{aligned} x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 &= c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ x &= -\frac{b}{2} \pm \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}. \end{aligned}$$

Ésta es la fórmula familiar para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática, excepto que  $4c$  tiene el signo opuesto ya que el coeficiente del término constante era  $-c$ .

La fórmula de completar el cuadrado fue desarrollada en el siglo 8 por Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi en un contexto geométrico. Dada la ecuación  $x^2 + bx = c$ , supongamos que existe un cuadrado cuyo lado es  $x$  de modo que su área es  $x^2$ . Al área  $x^2$  se le añade  $bx$  sumando cuatro rectángulos de área  $bx/4$  cuyos lados son  $b/4$  y  $x$  (Fig. 7.3). Ahora completamos el diagrama a un cuadrado añadiendo los cuatro cuadraditos de área  $(b/4)^2$  (Fig. 7.4).

No podemos construir el diagrama en la figura 7.3 porque no sabemos lo que  $x$  es, pero el área del cuadrado más grande en la figura 7.4 es:

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = c + \frac{b^2}{4},$$

que sí conocemos ya que los coeficientes  $b, c$  son dados. Construyendo el diagrama y borrando los cuadraditos cuyos lados son  $(b/4)$ —otra cantidad conocida—obtenemos el segmento de longitud  $x$ .

*Ejemplo 7.4.* Sea  $x^2 + 12x = 64$ . Entonces  $c + (b^2/4) = 64 + 36 = 100$ . Es fácil construir un cuadrado de área 100 ya que cada lado tiene longitud 10. Ahora restamos

$(b/4) + (b/4) = 6$ , los lados de los cuadrados más pequeños, para obtener  $x = 10 - 6 = 4$ .

### 7.6 Construcción de Cardano para resolver ecuaciones cúbicas

La fórmula para las raíces de las ecuaciones cúbicas fue publicada por primera vez en el siglo XVI por Gerolamo Cardano. No desarrollaremos aquí la fórmula, pero es interesante que la idea central se basa en una construcción geométrica similar a la de al-Khwarizmi. La construcción se puede obtener de forma muy sencilla utilizando el álgebra. Por multiplicación:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a^3 + b^3) + 3ab(a + b). \quad (7.4)$$

Geométricamente, partimos de un cubo cuyo lado es  $a + b$  de modo que su volumen es  $(a + b)^3$ . El cubo se descompone en cinco piezas. Las dos primeros son cubos cuyas caras son  $a$  y  $b$  con volúmenes  $a^3$  (azul) y  $b^3$  (rojo), respectivamente (Fig. 7.5).

Las otras tres partes son cajas (el término técnico es *cuboide*) cada una con un lado de longitud  $a + b$  que coincide con un lado del cubo, un lado de longitud  $a$  y un lado de longitud  $b$ , de modo que el volumen de cada una de las tres cajas es  $ab(a + b)$ . En la figura 7.6, hay una caja en el lado izquierdo del cubo (azul), una en la parte posterior del cubo (rojo) y una en la parte superior del cubo (verde). Combinando los cinco sólidos de la figura 7.5 y la figura 7.6 obtenemos la Ecuación 7.4.

### 7.7 No los intimidaban los números imaginarios

La historia de las matemáticas muestra una progresión de conceptos que inicialmente se consideraron sin sentido, pero que finalmente se comprendieron, aceptaron

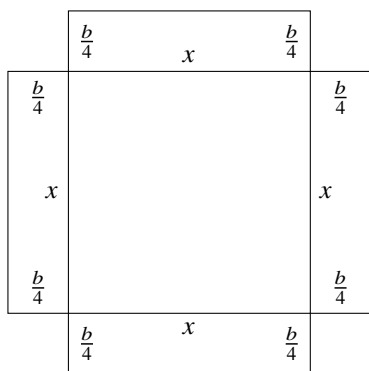


Fig. 7.3: El área es  $x^2 + 4(b/4)x = x^2 + bx$

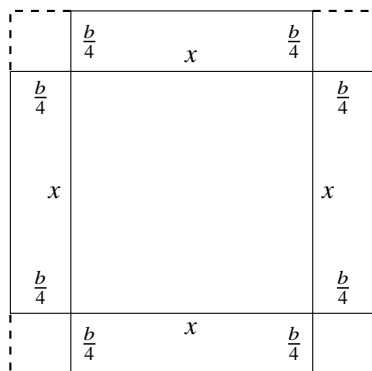
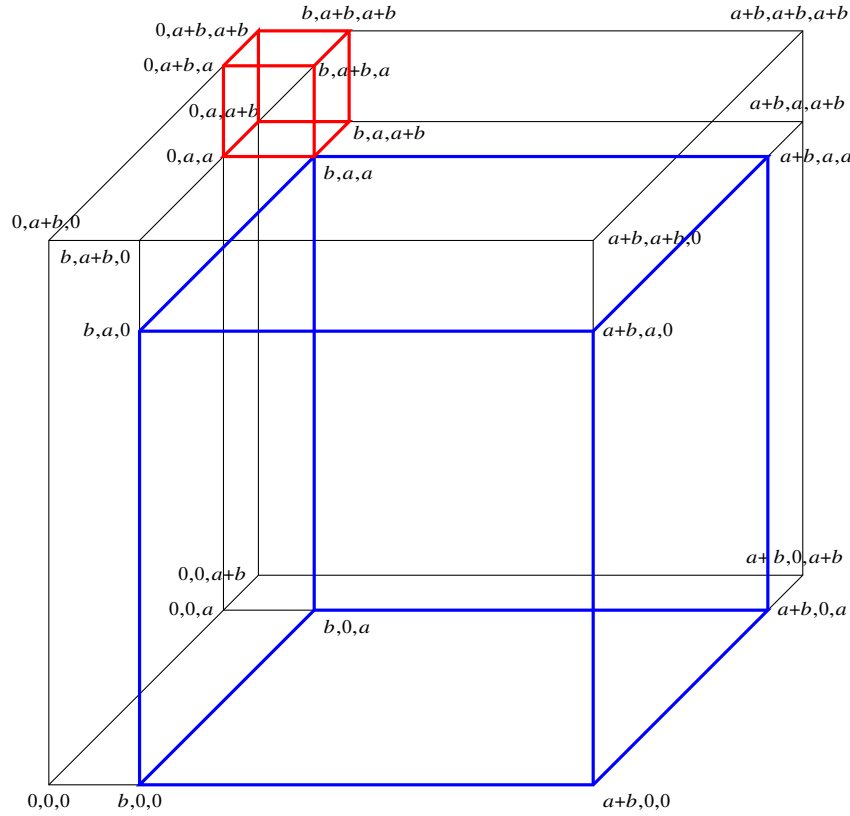


Fig. 7.4: El área es  $x^2 + 4(b/4)x + 4(b/4)^2 = x^2 + bx + (b^2/4)$

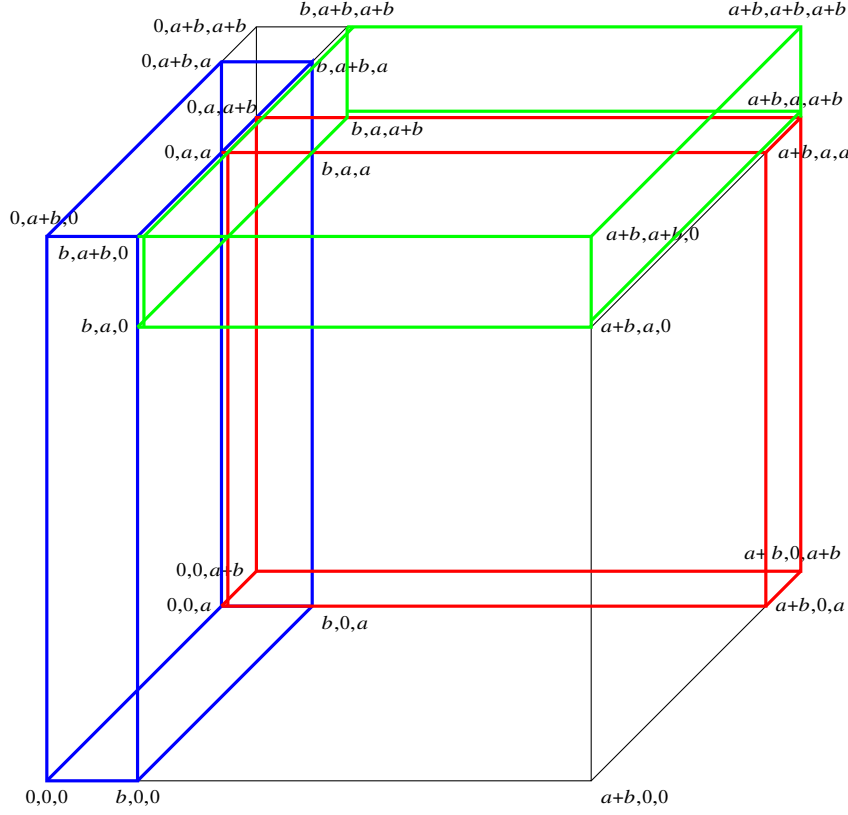
Fig. 7.5:  $(a+b)^3 = (a^3 + b^3) + \dots$ 

y demostraron su utilidad. «Obviamente,» como los números enumeran (cuentan) objetos,  $-1$ , un número negativo, no tiene sentido. «Obviamente,» puesto que los números son cocientes de números enteros (números racionales),  $\sqrt{2}$ , que puede demostrarse fácilmente que es irracional, no tiene sentido. «Obviamente,»  $\sqrt{-1}$ , la raíz cuadrada de un número negativo, no tiene sentido, ya que no hay ningún número —entero, racional o real— cuyo cuadrado sea  $-1$ .

La comprensión completa de las raíces cuadradas de los números negativos, hasta hoy llamados *números imaginarios* aunque no son menos reales que los números reales, no se alcanzó hasta el siglo XIX. Por eso sorprende que, ya en el siglo XVI, Geralamo Cardano y Rafael Bombelli se negaran a dejarse intimidar por el concepto y dieran los primeros pequeños pasos hacia la comprensión de estos números.

Consideremos la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 10x + 40 = 0. \quad (7.5)$$

Fig. 7.6:  $(a+b)^3 = \dots + 3ab(a+b)$ 

Según la conocida fórmula (Ecuación 7.1):

$$r_1, r_2 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 160}}{2} = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

Bueno, no sabemos nada acerca de las raíces cuadradas de los números negativos y no sabemos cuáles son estos valores, pero como Cardano sabemos por el Teorema 7.1 que:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= (5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) = 10 = -b \\ r_1 r_2 &= (5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - 5\sqrt{-15} + 5\sqrt{-15} - (-15) = 40 = c. \end{aligned}$$

que se corresponden con los coeficientes de la ecuación cuadrática (Ecuación 7.5). Es bastante intuitivo que  $\sqrt{-15} + (-\sqrt{-15}) = 0$  aunque no sepamos nada de  $\sqrt{-15}$ , y, del mismo modo, es bastante intuitivo que  $\sqrt{-15} \cdot -(\sqrt{-15}) = -(-15) = 15$  aunque no sepamos qué es  $\sqrt{-15}$ .



Consideremos ahora la ecuación cúbica:

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \quad (7.6)$$

No es difícil observar que 4 es una raíz, pero ¿cómo se puede calcular? La fórmula de Cardano da la raíz:

$$r = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}, \quad (7.7)$$

una fórmula bastante complicada que no tiene ninguna relación evidente con 4.

Bombelli realizó valientemente el siguiente cálculo (véase la Ecuación. 7.4):

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 8 + 3 \cdot 4\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(-1) + (-1\sqrt{-1}) = 2 + 11\sqrt{-1} \\ (2 - \sqrt{-1})^3 &= 8 - 3 \cdot 4\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(-1) - (-1\sqrt{-1}) = 2 - 11\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

y por la Ecuación 7.7:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \\ &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} \\ &= (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4. \end{aligned}$$

## 7.8 El método de Lill y el círculo de Carlyle

El método de Lill se puede aplicar para resolver ecuaciones cuadráticas<sup>2</sup>. Como ejemplo usamos la Ecuación 7.2 que da las raíces de una ecuación cuadrática obtenidas por factorización:

$$x^2 + bx + c = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$$

Aplicando el método de Lill se obtienen las trayectorias mostradas en la figura 7.7.

Comprobamos que los ángulos son correctos:

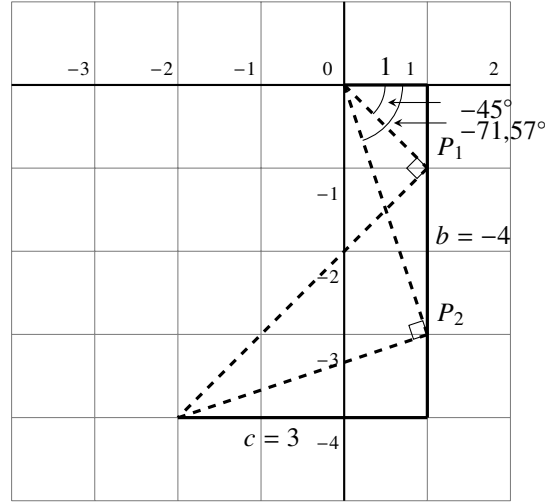
$$-\tan(-45^\circ) = -1, \quad -\tan(-71,57^\circ) \approx -3.$$

Para las ecuaciones cuadráticas podemos encontrar los puntos  $P_1, P_2$  como las intersecciones de la recta que representa el coeficiente  $b$  y el círculo cuyo diámetro es la recta que une el punto inicial y el punto final de las trayectorias (Fig. 7.8). Para que un punto de la recta  $b$  sea una raíz, la reflexión de la recta debe ser  $90^\circ$  y, por tanto, el ángulo inscrito es subtendido por un diámetro.

Esto también se puede comprobar por cálculo. El centro del círculo es el punto medio del diámetro  $(-1, -2)$ . La longitud del diámetro es:

$$\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20},$$

<sup>2</sup>Esta sección asume que has leído sobre el método de Lill en el Capítulo 11.

Fig. 7.7: Método de Lill en  $x^2 - 4x + 3$ 

por lo que el cuadrado de la longitud del radio es  $(\sqrt{20}/2)^2 = 5$ . Necesitamos la intersección de esta circunferencia con la recta  $x = 1$ :

$$\begin{aligned} (x - (-1))^2 + (y - (-2))^2 &= r^2 \\ (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) &= 5 \\ y^2 + 4y + 3 &= 0 \\ y &= -1, -3. \end{aligned}$$

Un método similar para resolver ecuaciones cuadráticas es el círculo de Carlyle, que es anterior al método de Lill. Dada una ecuación cuadrática  $x^2 - bx + c$  (nótese el signo menos en el término lineal), construimos puntos en  $(0, 1)$  y  $(b, c)$ . Construimos una circunferencia cuyo diámetro sea la recta que une los dos puntos (Fig. 7.9). Sus intersecciones (si las hay) con el eje  $x$  son las raíces de la ecuación.

En el caso general, el centro del círculo es  $(b/2, (c - (-1))/2)$  y la longitud del diámetro es  $\sqrt{b^2 + (c - 1)^2}$ , por lo que la ecuación del círculo es:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + (c-1)^2}{4}.$$

Para el ejemplo, sustituyendo  $b = 4, c = 3$  y  $y = 0$ , vemos que  $x = 1$  y  $x = 3$  son las raíces de la ecuación cuadrática.

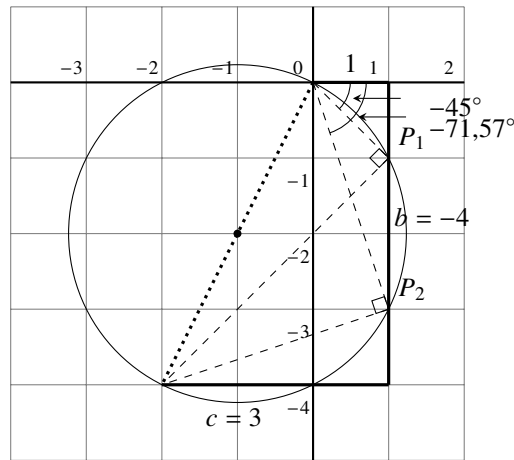


Fig. 7.8: Construimos un círculo para encontrar las raíces

### 7.9 Cálculo numérico de las raíces

Los alumnos aprenden cálculo simbólico de raíces, derivadas, etc. Hoy en día, la mayoría de los cálculos se realizan por ordenador, por lo que el cálculo simbólico es menos importante. El *análisis numérico* es la rama de las matemáticas y la informática que desarrolla métodos de cálculo precisos y eficaces. El principal reto es hacer frente a la finitud de los valores almacenados en la memoria del ordenador. El cálculo:

$$0,12 \times 0,14 = 0,0168$$

es fácil de hacer, pero:

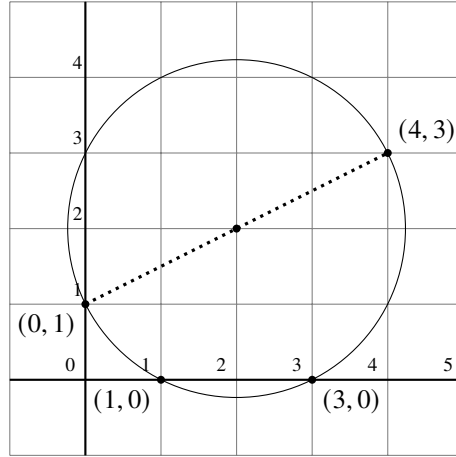
$$0,123456789 \times 0,123456789$$

necesita dieciocho dígitos para ser representado con precisión y esto no puede hacerse con una memoria que almacena dieciséis dígitos. El cálculo incurrirá en un error de redondeo.

Un problema aún más grave se encuentra cuando se realiza *aritmética de punto flotante*. Claramente:

$$(0,12 \times 10^{-10}) \times (0,14 \times 10^{-8})$$

no se calcularía escribiendo todos los dígitos que son cero. En su lugar, multiplicamos las mantisas y sumamos los exponentes para obtener  $0,0168 \times 10^{-18}$ , que se normaliza a  $0,168 \times 10^{-19}$  para que el dígito más significativo aparezca después del punto decimal, asegurando la máxima precisión dado el tamaño fijo de la mantisa.

Fig. 7.9: Círculo Carlyle para  $x^2 - 4x + 3$ 

Si el exponente máximo que se puede representar es  $-16$  el resultado simplemente no se puede almacenar. Este error se denomina desbordamiento de punto flotante.

La fórmula para encontrar las raíces de la ecuación cuadrática  $x^2 + bx + c$  es:

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (7.8)$$

Consideremos que ocurre si  $b = 1000$  and  $c = 4$ . Las raíces son:

$$r_1, r_2 = \frac{-1000 \pm \sqrt{1000000 - 16}}{2}.$$

Dependiendo de la precisión de la aritmética, es posible que una de las raíces esté tan cerca de cero que el valor almacenado sea cero. Evaluamos la ecuación cuadrática da el sorprendente resultado  $0^2 + b \cdot 0 + 4 = 4 \neq 0$ .

¿Podemos hacerlo mejor? Por la Ecuación 7.3:

$$r_1 + r_2 = -b, \quad r_1 r_2 = c.$$

Si  $r_2$  es mucho menor que  $r_1$ , que se denota  $r_2 \ll r_1$ , entonces  $r_1 \approx -b$  y  $r_2 \approx c/b$ . En la tabla 7.1, calculada por un programa informático, se comparan los valores de las raíces calculadas por estas fórmulas con los valores obtenidos de la fórmula tradicional (Ecuación 7.8). El valor de  $c$  se fija en 4 y se muestran las raíces para valores crecientes de  $b$ .

Inicialmente, los valores reales calculados mediante la fórmula tradicional para  $r_2$  son más exactos ( $r_2 - r_{2v}$  es negativo), pero a partir de  $b = 100000$ , el cálculo basado en la Ecuación 7.3 es más exacto. Tales son las sorpresas del análisis numérico.

Cuadro 7.1: Dos cálculos de las raíces de una ecuación cuadrática.  $r_1, r_2$  son las raíces calculadas por la Ecuación 7.8.  $r_{1v}, r_{2v}$  son las raíces calculadas mediante la Ecuación 7.3. Los errores son  $r_i - r_{iv}$ . Los valores se truncan a cuatro decimales. Los números en coma flotante se escriben  $-4e-5$  en lugar de  $4 \times 10^{-5}$  porque los programas de ordenador se escriben normalmente como secuencias lineales de caracteres.

$b$	$r_1$	$r_{1v}$	Error <sub>1</sub>	$r_2$	$r_{2v}$	Error <sub>2</sub>
100	-99,9599	-100	0,0400	-0,04001	-0,04	-1,6012e-05
1000	-999,9959	-1000	0,0040	-0,0040	-0,004	-1,6000e-08
10000	-9999,9996	-10000	0,0004	-0,0004	-0,0004	-1,6270e-11
100000	-99999,9999	-100000	3,9999e-5	-3,9999e-5	-4e-5	1,0104e-12
1000000	-999999,9999	-1000000	4,0000e-6	-3,9999e-6	-4e-6	2,7749e-11
10000000	-10000000,0	-10000000	3,9860e-7	-3,9953e-7	-4e-7	4,6261e-10

### ¿Cuál es la sorpresa?

El enfoque de Poh-Shen Loh proporciona una nueva forma de ver la relación entre los coeficientes y las raíces que no se ve simplemente memorizando la fórmula tradicional. Lo sorprendente es que esta relación es fundamental en la demostración algebraica de Gauss de la constructibilidad de un heptadecágono regular (Capítulo 16).

Con el dominio moderno de los métodos algebraicos en geometría, es importante recordar que antes ocurría lo contrario. Como lo demuestran las construcciones de Al-Khwarizmi y Cardano, los métodos geométricos se utilizaban para obtener resultados en álgebra. Lill y Carlyle desarrollaron métodos geométricos para resolver ecuaciones cuadráticas. Las consideraciones sobre el cálculo numérico en los ordenadores sorprenderán a los alumnos que no lo hayan experimentado antes.

### Fuentes

El método de Poh-Shen Loh procede de [28, 29]. La construcción de Al-Khwarizmi se encuentra en [6, Capítulo 1] y [32]. La construcción de Cardano se encuentra en [6, Capítulo 1]. Para la colorida historia del desarrollo de la fórmula de Cardano, véase [52]. Los primeros intentos de calcular con números imaginarios están en [6, Capítulo 2]. El método de Lill y el círculo de Carlyle se pueden encontrar en [61] junto con una discusión del cálculo numérico de las raíces.

## Capítulo 8

### Teoría de Ramsey

La teoría de Ramsey es una rama de la combinatoria que plantea preguntas del tipo ¿Qué tamaño debe tener un conjunto para que, si se divide en subconjuntos, al menos uno de ellos tenga una determinada propiedad? Los resultados de la teoría de Ramsey son difíciles de demostrar y quedan muchos problemas abiertos. En este capítulo presentamos casos sencillos de cuatro problemas para dar una idea de este fascinante tema: Ternaewde Schur (Sec. 8.1)—ternas de enteros tales que  $a + b = c$ , ternas pitagóricas (Sec. 8.2)—ternas de enteros tales que  $a^2 + b^2 = c^2$ , el problema de van der Waarden (Sec. 8.3) que se refiere a secuencias de números, y el teorema de Ramsey (Sec. 8.4) sobre grafos coloreados. La sección 8.5 muestra cómo se puede utilizar el método probabilístico en combinatoria para desarrollar una cota inferior para los números de Ramsey.

El problema de las ternas pitagóricas se ha resuelto recientemente con ayuda de ordenadores, utilizando un método relativamente nuevo llamado resolución SAT. Para los lectores familiarizados con la lógica proposicional, la sección 8.6 ofrece una visión general de cómo se hace.

La sección 8.7 describe las ternas pitagóricas tal y como las conocían los babilonios hace cuatro mil años.

Terminología: *Monocromático* significa del mismo color.

#### 8.1 Ternas de Schur

**Definición 8.1.** Dada *any* descomposición del conjunto de enteros positivos:

$$S(n) = \{1, \dots, n\}$$

en dos subconjuntos disjuntos  $S_1, S_2$ , ¿existen  $\{a, b, c\} \subseteq S_1$  o  $\{a, b, c\} \subseteq S_2$  (o en ambos) tales que  $a < b < c$  y  $a + b = c$ ? Si es así, el conjunto  $a, b, c$  se llama terna de Schur.

*Ejemplo 8.1.* Para  $n = 8$ , en la descomposición:

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4\}, S_2 = \{5, 6, 7, 8\}, \quad (8.1)$$

el conjunto  $S_1$  incluye la terna de Schur  $\{1, 2, 3\}$ . Sin embargo, la descomposición:

$$S'_1 = \{1, 2, 4, 8\}, S'_2 = \{3, 5, 6, 7\}, \quad (8.2)$$

no contiene ninguna terna de Schur, como se puede comprobar enumerando todos las ternas de cada subconjunto.

**Teorema 8.1.** *En todas descomposiciones de  $S(9) = \{1, \dots, 9\}$  en dos subconjuntos disjuntos, al menos un subconjunto contiene una terna de Schur.*

Por supuesto, podríamos comprobar las  $2^9 = 512$  descomposiciones de  $S(9)$  en dos subconjuntos disjuntos, pero vamos a tratar de llegar a una demostración más sucinta.

*Demostración.* Intentamos construir una descomposición que no contenga una terna de Schur y demostramos que las restricciones del problema lo hacen imposible. Se empieza colocando 1 y 3 en el subconjunto  $S_1$ . El 2 debe colocarse en  $S_2$  porque  $1 + 2 = 3$  y estamos intentando construir una descomposición que no contenga una terna de Schur. Análogamente, el 4 debe colocarse en  $S_2$  porque  $1 + 3 = 4$ . Continuando, el 6 se coloca en  $S_1$  porque  $2 + 4 = 6$  y el 7 se coloca en  $S_2$  porque  $1 + 6 = 7$ . Sin embargo,  $3 + 6 = 9$  y  $2 + 7 = 9$ , por lo que el 9 debe aparecer tanto en  $S_1$  como en  $S_2$ , una contradicción. La secuencia de inferencias se muestra en la siguiente tabla:

$S_1$	$S_2$
1, 3	
1, 3	2
1, 3	2, 4
1, 3, 6	2, 4
1, 3, 6	2, 4, 7
1, 3, 6, 9	2, 4, 7
1, 3, 6, 9	2, 4, 7, 9

Retrocediendo, buscamos una descomposición en la que 1, 3 estén en subconjuntos distintos. Si colocamos el 5 en  $S_2$ , una secuencia de inferencias conduce de nuevo a una contradicción porque el 9 debe aparecer en ambos subconjuntos. El lector debe justificar cada una de las inferencias que se muestran en la siguiente tabla:

$S_1$	$S_2$
1	3
1	3, 5
1, 2	3, 5
1, 2, 8	3, 5
1, 2, 8	3, 5, 7
1, 2, 8	3, 5, 7, 9
1, 2, 8	3, 5, 6, 7, 9
1, 2, 8, 9	3, 5, 6, 7, 9

Retrocediendo de nuevo, tratamos de colocar el 5 en  $S_1$ , pero eso también conduce

a una contradicción, como se muestra en la siguiente tabla:

$S_1$	$S_2$
1	3
1, 5	3
1, 5	3, 4
1, 5	3, 4, 6
1, 2, 5	3, 4, 6
1, 2, 5	3, 4, 6, 7
1, 2, 5, 7	3, 4, 6, 7

De ello se deduce que no existe ninguna descomposición que no incluya una terna de Schur.  $\square$

Issai Schur demostró el siguiente teorema:

**Teorema 8.2** (Schur). *Para cada  $k \geq 2$  existe un  $n$  mínimo tal que en cualquier descomposición disjunta de  $S(n)$  en  $k$  subconjuntos, al menos uno de los subconjuntos debe contener una terna de Schur.*

## 8.2 Ternas pitagóricas

**Definición 8.2.** Dada una descomposición cualquiera del conjunto de enteros positivos:

$$S(n) = \{1, \dots, n\}$$

en dos subconjuntos disjuntos  $S_1, S_2$ , ¿existen  $\{a, b, c\} \subseteq S_1$  o  $\{a, b, c\} \subseteq S_2$  (o en ambos) tal que  $a < b < c$  y  $a^2 + b^2 = c^2$ ? Si es así,  $a, b, c$  se llama *ternas pitagórica*.

*Ejemplo 8.2.* Para  $n = 10$ , en la descomposición en números pares e impares:

$$S_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}, S_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$

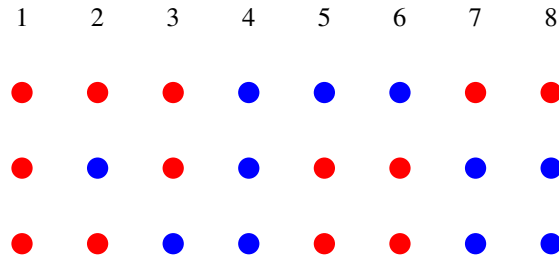
no hay ternas pitagóricas en  $S_1$  pero  $\{6, 8, 10\}$  en  $S_2$  es una terna pitagórica ya que  $6^2 + 8^2 = 10^2$ .

Marijn J.H. Heule y Oliver Kullmann demostraron los siguientes teoremas. Su método de demostración se discute en la sección 8.6.

**Teorema 8.3.** *Para todo  $n \leq 7824$ , existe alguna descomposición de  $S(n)$  en dos subconjuntos disjuntos tal que ambos subconjuntos no contienen una terna pitagórica.*

**Teorema 8.4.** *Para todo  $n \geq 7825$ , en todas las descomposiciones de  $S(n)$  en dos subconjuntos disjuntos al menos un subconjunto contiene una terna pitagórica.*



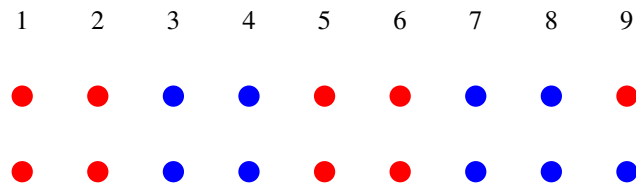
Fig. 8.1: *Problema de van der Waerden para ocho puntos de color*

Es imposible comprobar todas las descomposiciones  $2^{7825}$  de  $S(7825)$ . Si pudiéramos comprobar una descomposición cada microsegundo,  $2^{7825}$  microsegundos  $\approx 10^{600}$  años, mientras que la edad estimada del universo es sólo de unos  $10^{10}$  años.

### 8.3 El problema de Van der Waerden

Consideremos las secuencias de ocho puntos de colores en la figura 8.1. En la secuencia superior hay puntos rojos en las posiciones (1, 2, 3) y puntos azules en las posiciones (4, 5, 6). En cada caso, las posiciones forman una progresión aritmética. Del mismo modo, en la secuencia del medio, los puntos rojos en las posiciones (1, 3, 5) forman una progresión aritmética. Sin embargo, en la secuencia inferior no hay ningún conjunto de tres puntos monocromáticos cuyas posiciones formen una progresión aritmética. Las ternas de puntos rojos están en las posiciones (1, 2, 5), (1, 2, 6), (2, 5, 6), ninguna de las cuales forma progresiones aritméticas, y lo mismo para los puntos azules.

Con nueve puntos *cualquier* coloración *debe* contener una secuencia de tres puntos monocromáticos que formen una progresión aritmética. Por ejemplo, añadamos un punto rojo o un punto azul al final de la secuencia inferior de la figura 8.1 para obtener las secuencias de la figura 8.2. En la secuencia superior hay puntos rojos

Fig. 8.2: *Problema de van der Waerden para nueve puntos de color*

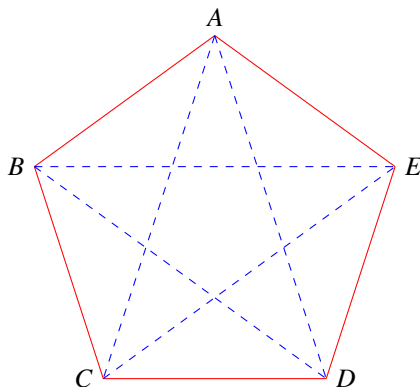


Fig. 8.3: Una coloración de  $K_5$  con dos colores

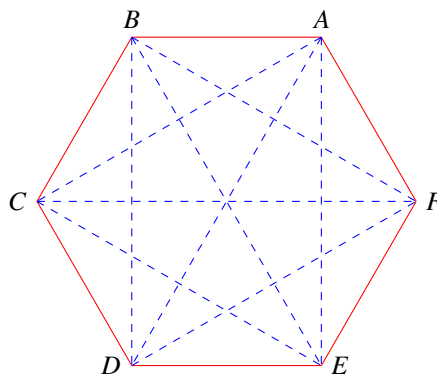


Fig. 8.4: Una coloración de  $K_6$  con dos colores

en las posiciones (1, 5, 9), una progresión aritmética, y en la secuencia inferior hay puntos azules en las posiciones (7, 8, 9), también una progresión aritmética.

Bartel L. van der Waerden planteó el siguiente problema: Para cualquier número entero positivo  $k$ , ¿cuál es el menor número  $n$  tal que *cualquier* secuencia de  $n$  puntos coloreados *debe* contener una secuencia de  $k$  puntos monocromáticos que formen una progresión aritmética? Para  $k = 3$ ,  $n = 9$ , como se ha demostrado anteriormente para una descomposición. El siguiente resultado es más difícil de demostrar: para  $k = 4$ ,  $n = 35$ .

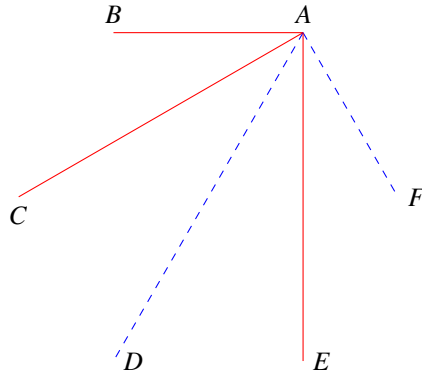
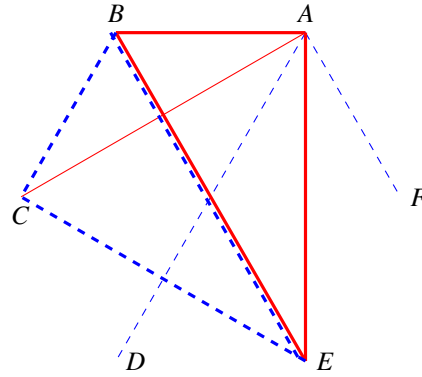
#### 8.4 Teorema de Ramsey

Colorear las aristas de  $K_5$ , el grafo completo en 5 vértices, con dos colores como se muestra en la figura 8.3. No hay subgrafos monocromáticos  $K_3$  (triángulos) en el grafo. La figura 8.4 muestra una coloración de  $K_6$  y es fácil ver que hay triángulos monocromáticos  $\triangle ACE$  y  $\triangle BDF$ . En esta sección demostramos un caso sencillo de un teorema de Frank P. Ramsey sobre la existencia de subconjuntos con cierta propiedad.

**Definición 8.3.**  $R(k)$ , el número de Ramsey para  $k$ , es el menor número  $n$  tal que en cualquier coloración de  $K_n$ , el grafo completo de  $n$  vértices, con dos colores hay un subgrafo monocromático completo  $K_k$ .

**Teorema 8.5** (Ramsey).  $R(3) = 6$ .

*Demostración.* La figura 8.3 muestra que  $R(3) > 5$ . Para demostrar que  $R(3) \leq 6$ , considere cualquier vértice  $v$  en  $K_6$ .  $v$  está conectado con otros cinco vértices, y

Fig. 8.5: Un vértice de  $K_6$ Fig. 8.6: Triángulos monocromáticos en  $K_6$ 

cuando las aristas se colorean con dos colores debe haber al menos tres aristas monocromáticas incidentes con  $v$ .

En la figura 8.5,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AE}$  están coloreadas de rojo. Dado que el grafo es completo todos los vértices están conectados, por lo que si cualquiera de las aristas  $\overline{BC}$ ,  $\overline{BE}$ ,  $\overline{CE}$  es de color rojo, digamos  $\overline{BE}$ , se forma un triángulo rojo  $\triangle ABE$ . De lo contrario, las tres aristas de estos bordes son de color azul y forman un triángulo azul (Fig. 8.6).  $\square$

El teorema se puede generalizar a cualquier número de colores, así como a coloraciones en las que los tamaños de los subgrafos no son iguales.  $R(r, b, g)$  es el grafo completo más pequeño tal que en cualquier coloración con tres colores debe haber subgrafos completos con  $r$  aristas rojas,  $b$  aristas azules y  $g$  aristas verdes.

### 8.5 El método probabilístico

Los únicos números de Ramsey no triviales conocidos son  $R(3) = 6$  y  $R(4) = 18$ . En 1947, Paul Erdős desarrolló el *método probabilístico* y lo utilizó para mostrar los límites inferior y superior de  $R(k)$ . Las investigaciones posteriores han mejorado ambos límites, pero sigue siendo un área de investigación importante, ya que los límites no son estrictos. Por ejemplo, se ha demostrado que  $43 \leq R(5) \leq 48$  y  $798 \leq R(10) \leq 23556$ . En esta sección se utiliza la probabilidad elemental para obtener una cota inferior de  $R(k)$ .

Para demostrar que existe un elemento de un conjunto  $S$  que tiene la propiedad  $A$ , demostraríamos que la probabilidad de que un elemento *aleatorio* de  $S$  tenga la propiedad  $A$  es mayor que cero. Es importante entender que el método es *no constructivo*: sólo se demuestra que existe tal elemento pero no lo construye. Aunque

por el Teorema 8.5 sabemos que  $R(3) = 6$ , utilicemos el método probabilístico para obtener una cota inferior para  $R(3)$ .

**Teorema 8.6** (Erdős).  $R(3) > 4$ .

*Demostración.* Dada una coloración *aleatoria* de  $K_n$  con dos colores, rojo y azul, consideremos un subgrafo arbitrario  $K_3$ , es decir, un triángulo arbitrario con  $\binom{3}{2} = 3$  lados. La probabilidad de que todos los lados sean de color rojo es  $2^{-3}$ , al igual que la probabilidad de que todos los lados sean de color azul, por lo que la probabilidad de que el triángulo sea monocromático es  $2^{-3} + 2^{-3} = 2^{-2} = 1/4$ . El número de triángulos en  $K_n$  es  $\binom{n}{3}$ , por lo que  $P(n, 3)$ , la probabilidad de que *algún* triángulo contenido en una coloración aleatoria de  $K_n$  sea monocromático, es:

$$P(n, 3) = \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{4}.$$

Si  $P(n, 3) < 1$  entonces su complemento  $\bar{P}(n, 3) = 1 - P > 0$ , es decir, la probabilidad de que una coloración aleatoria de  $K_n$  *no* contenga un triángulo monocromático es mayor que cero, por lo que debe existir al menos uno.

La siguiente tabla muestra  $\bar{P}(n, 3)$  para varios valores de  $n$ , y si el valor de  $\bar{P}(n, 3)$  demuestra que existe una coloración sin ningún triángulo monocromático:

$n$	$\bar{P}(n, 3)$	Exists
3	3/4	yes
4	5/6	yes
5	-3/7	-

□

A primera vista el resultado es extraño porque la figura 8.3 muestra que existe una coloración de  $K_5$  sin coloración monocromática. Sin embargo, el criterio probabilístico es suficiente pero no necesario; es una cota inferior, lo que significa que  $R(n) > 4$  lo cual es cierto porque e, Teorema 8.5 demostró que  $R(n) = 6$ .

La misma demostración funciona para valores arbitrarios de  $k$ , por lo que la probabilidad de la existencia de una coloración de  $K_n$  sin grafo completo monocromático  $K_k$  es:

$$P(n, k) = \binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Para  $k = 4$ :

$$\begin{aligned} \bar{P}(n, 4) &= 1 - \binom{n}{4} \cdot 2^{-5} = \left( 32 - \binom{n}{4} \right) / 32 \\ \bar{P}(6, 4) &= (32 - 15) / 32 = 17/32 \\ \bar{P}(7, 4) &= (32 - 35) / 32 = -3/32. \end{aligned}$$

De ello se deduce que  $R(4) > 6$  que es mucho menor que el valor conocido  $R(4) = 18$ .

## 8.6 Resolución de SAT

La resolución SAT es un método de resolución de problemas que consiste en codificar un problema como una fórmula en lógica proposicional y, a continuación, utilizar un programa informático para comprobar el valor de verdad de la fórmula. Los avances en algoritmos e implementaciones han hecho de la resolución SAT un método viable para resolver problemas. Damos una visión general de la resolución SAT y explicamos cómo se puede utilizar para resolver los problemas matemáticos descritos en este capítulo. Se supone que el lector tiene un conocimiento elemental de la lógica proposicional tal y como se resume en definición 8.4.

### 8.6.1 Lógica proposicional y el problema SAT

#### Definición 8.4.

- Una *fórmula* está compuesta de *fórmulas atómicas* o *átomos* conectados por los operadores proposicionales  $\vee$  (disyunción, «o»),  $\wedge$  (conjunción, «y»),  $\neg$  (negación, «no»).
- Una fórmula recibe un *interpretación* mediante una asignación de  $T$  o  $F$  a cada átomo. La evaluación de una fórmula en una interpretación da como resultado su valor de verdad  $T$  o  $F$ .
- Una fórmula es *satisfacible* si y sólo si existe una interpretación que hace que su valor de verdad sea  $T$ . En caso contrario, la fórmula es insatisfacible.
- Una fórmula está en *forma normal conjuntiva (FNC)* si y sólo si se compone de una conjunción de subfórmulas cada una de las cuales es una disyunción de *literales* (átomos o negaciones de átomos).

La siguiente fórmula está en FNC:

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r).$$

El problema SAT consiste en decidir si una fórmula dada en CNF es satisfacible o no. Un solucionador SAT es un programa informático que puede resolver el problema SAT. La mayoría de los solucionadores SAT se basan en el algoritmo DPLL que se remonta a la década de 1960, pero los desarrollos recientes han mejorado significativamente el algoritmo. Las implementaciones altamente optimizadas de estos algoritmos han hecho de los solucionadores SAT una herramienta importante para resolver problemas en muchos campos, incluidas las matemáticas.

### 8.6.2 Ternas de Schur

Codifiquemos el problema de ternas de Schur  $S(8)$  como una fórmula en FNC. La fórmula será satisfacible si y sólo si existe una descomposición de un conjunto  $S$  en subconjuntos disjuntos  $S_1, S_2$  tal que ni  $S_1$  ni  $S_2$  contengan una terna de Schur. Existe un átomo  $p_i$  para cada uno de los números  $1 \leq i \leq 8$ . El significado pretendido de una interpretación para la fórmula es que asigna  $T$  a  $p_i$  si  $i$  está en el primer subconjunto  $S_1$  y asigna  $F$  a  $p_i$  si  $i$  está en el segundo subconjunto  $S_2$ . Para demostrar que en todas las descomposiciones ninguno de los subconjuntos contiene una terna de Schur, la interpretación debe garantizar que para cada posible terna de Schur al menos un átomo tiene asignado  $T$  y un átomo tiene asignado  $F$ .

Por ejemplo,  $\{2, 4, 6\}$  es una terna de Schur, por lo que al menos uno de los tres enteros debe estar en  $S_1$  y al menos uno de ellos debe estar en  $S_2$ . Por lo tanto,  $p_2 \vee p_4 \vee p_6$  debe ser cierto y también  $\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6$  debe ser cierto. Hay 12 posibles ternas Schur por lo que la fórmula FNC es:

$$\begin{aligned}
 & (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_3 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_5 \vee p_6) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_6 \vee p_7) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_7 \vee p_8) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_7 \vee \neg p_8) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_3 \vee p_5) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_4 \vee p_6) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_5 \vee p_7) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_5 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_6 \vee p_8) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_6 \vee \neg p_8) \wedge \\
 & (p_3 \vee p_4 \vee p_7) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_3 \vee p_5 \vee p_8) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8) .
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Cuando a un solucionador SAT se le da esta fórmula, responde que la fórmula es satisfacible bajo cualquiera de las interpretaciones:

$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$
$F$	$F$	$T$	$F$	$T$	$T$	$T$	$F$
$T$	$T$	$F$	$T$	$F$	$F$	$F$	$T$

Una interpretación corresponde a la descomposición dada en la ecuación:  $S_1 = \{1, 2, 4, 8\}$ ,  $S_2 = \{3, 5, 6, 7\}$ , mientras que la otra corresponde a la descomposición simétrica  $S_1 = \{3, 5, 6, 7\}$ ,  $S_2 = \{1, 2, 4, 8\}$ .

Para  $S(9)$ , se añaden cuatro pares de subfórmulas para las posibles triplas adicionales:

$$\begin{aligned}
 & (p_1 \vee p_8 \vee p_9) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_8 \vee \neg p_9) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_7 \vee p_9) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_7 \vee \neg p_9) \wedge \\
 & (p_3 \vee p_6 \vee p_9) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_6 \vee \neg p_9) \wedge \\
 & (p_4 \vee p_5 \vee p_9) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_9) .
 \end{aligned}$$

/Cuando se le da esta fórmula al solucionador SAT, responde que la fórmula es insatisfacible, lo que significa que *no existe* descomposición que *no* tenga una terna de Schur. Quitando el doble negativo, esto afirma que en *cada* descomposición de  $S(9)$  existe una terna de Schur.

### 8.6.3 Ternas pitagóricas

Heule y Kullmann resolvieron el problema de las ternas pitagóricas utilizando un solucionador SAT altamente optimizado. Hubo una diferencia significativa entre la eficiencia para encontrar una descomposición que no tenga ternas pitagóricas (sólo se necesita una descomposición), y demostrar que todas las descomposiciones tienen una terna pitagórica (hay que comprobarlas todas). Demostrar que para todas las  $S(n)$ ,  $1 \leq n \leq 7824$ , hay una descomposición sin ternas llevó sólo un minuto de tiempo de cálculo, mientras que demostrar que cada descomposición de  $S(7825)$  tiene una terna llevó unos dos días de tiempo de cálculo para un ordenador con 800 *cores* (procesadores) trabajando en paralelo, en total 40,000 horas de tiempo de cálculo.

El uso de ordenadores en matemáticas plantea naturalmente la pregunta: ¿Podemos fiarnos de una demostración generada por un ordenador? Por supuesto, incluso las demostraciones matemáticas «ordinarias» pueden ser incorrectas (Sec. 4.7), pero nuestra experiencia con los frecuentes fallos informáticos, así como la opacidad de los grandes programas informáticos, nos hace más sensibles a los errores potenciales en las demostraciones generadas por ordenador.

Una forma de aumentar la confianza en la corrección de una demostración generada por ordenador es utilizar dos o más programas, escritos independientemente por dos o más investigadores. Si los múltiples programas están escritos en diferentes lenguajes de programación y para diferentes ordenadores y sistemas operativos, se reduce la posibilidad de un error en el hardware y el software del ordenador.

El solucionador SAT de Heule y Kullmann escribió un registro de los pasos de la demostración para que pudiera examinarse su corrección. El registro era tan grande, 200 terabytes, que era imposible examinarlo directamente. Para ponerlo en perspectiva, 200 terabytes son 200,000 gigabytes, mientras que tu ordenador puede tener una memoria interna de 16 gigabytes y una unidad de estado sólido de 128 gigabytes. En cambio, escribieron un pequeño programa para verificar la exactitud de los datos del registro. Para asegurarse de que este programa era correcto, escribieron una revisión formal utilizando el asistente de demostración Coq, que apoya y comdemostración el trabajo de los matemáticos sin automatizar totalmente el proceso de demostración.

#### 8.6.4 Visión general del algoritmo DPLL

El primer algoritmo que se aprende para resolver SAT son las *tablas de verdad*. Dada una fórmula  $A$  en lógica proposicional con  $n$  átomos diferentes, hay  $2^n$  interpretaciones ya que a cada átomo se le puede asignar independientemente  $T$  o  $F$ . Para cada interpretación es sencillo calcular el valor de verdad de  $A$  utilizando la definición de los operadores proposicionales. Sin embargo, comprobar  $2^n$  interpretaciones es muy ineficiente incluso para  $n$  moderadamente grandes.

El algoritmo DPLL funciona asignando incrementalmente  $T$  o  $F$  a un átomo y luego intentando evaluar la fórmula. Por ejemplo, dado  $A = p \wedge q \wedge \neg r$ , si a  $p$  se le asigna  $F$  entonces  $A$  es  $F$ , independientemente de los valores asignados a  $q$  y  $r$ , y no hay necesidad de realizar más evaluaciones. Del mismo modo,  $A = p \vee q \vee \neg r$  es  $T$  si a  $p$  se le asigna  $T$ , independientemente de las asignaciones a  $q$  y  $r$ .

La eficiencia de DPLL proviene de la propagación unitaria. Consideramos parte de la fórmula para las ternas de Schur:

$$\begin{aligned}
 & (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_3 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge \\
 & \dots \\
 & (p_3 \vee p_4 \vee p_7) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_3 \vee p_5 \vee p_8) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8).
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Supongamos que hemos asignado  $F$  a  $p_1, p_2$ . La primera subfórmula se reduce a la fórmula unitaria formada por el único átomo  $p_3$ . Si queremos que se cumpla la fórmula, debemos asignar  $T$  a  $p_3$  y todas las subfórmulas:

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3), (p_1 \vee p_3 \vee p_4), (p_3 \vee p_4 \vee p_7), (p_3 \vee p_5 \vee p_8),$$

adquieren inmediatamente el valor de verdad.

Como  $\neg p_3$  se evalúa a  $F$ , cada subfórmula que contenga  $\neg p_3$  sólo puede satisfacerse si a algún otro literal de la subfórmula se le asigna  $T$ . En  $\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8$ , a  $p_5$  o  $p_8$  se le debe asignar  $F$  para que el valor de verdad de  $\neg p_5$  o  $\neg p_8$  sea  $T$ .

Este análisis muestra que una vez  $p_1, p_2$  se han asignado  $F$ , la fórmula de la Ecuación 8.4 es satisfacible si y sólo si  $(\neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_8)$  es satisfacible. Al realizar la propagación de  $p_3$  en todas las subfórmulas de la Ecuación 8.3, la fórmula se reduce a:

$$\begin{aligned}
 & (p_4 \vee p_5) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_7) \wedge \\
 & (p_6 \vee p_7) \wedge (p_6 \vee p_8) \wedge (p_7 \vee p_8) \wedge \\
 & (\neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_8).
 \end{aligned}$$

Una asignación más de  $F$  a  $p_4$  resulta en una interpretación satisfactoria que hemos encontrado después de sólo tres asignaciones arbitrarias.



### 8.7 Las ternas pitagóricas en la matemática babilónica

Esta sección es una digresión de la teoría de Ramsey; se incluye para dar una idea de la rica teoría de las ternas pitagóricas y para ilustrar la profundidad de los conocimientos matemáticos en el mundo antiguo. Las ternas pitagóricas eran conocidas en las matemática babilónica desde al menos el año 1800 a.C.

**Definición 8.5.** Una terna pitagórica primitiva es un conjunto de tres enteros positivos  $a, b, c$  tales que  $a^2 + b^2 = c^2$  y  $a, b, c$  no tienen ningún factor común mayor que 1.

*Ejemplo 8.3.*  $\{3, 4, 5\}$  es una terna pitagórica primitiva pero  $\{6, 8, 10\}$  es una terna pitagórica que no es primitiva ya que 2 es un factor común.

Una tablilla cuneiforme llamada *Plimpton 322* es uno de los primeros ejemplos de la matemática babilónica. La tablilla lista quince ternas pitagóricas primitivas dando  $a$  y  $c$ . La tabla 8.1 muestra cuatro de estas ternas, junto con los valores calculados de  $b$  y otros valores que se discutirán más adelante. Los historiadores de las matemáticas han propuesto varias explicaciones sobre cómo se encontraron estas ternas. Una explicación es que se utilizó la *fórmula de Euclides* para obtener las ternas a partir de un par de números generadores.

**Teorema 8.7** (Euclid).  $\{a, b, c\}$  es una terna pitagórica primitiva si y sólo si existen dos enteros positivos  $u, v$ , llamados números generadores, tales que:

1.  $u > v$
2. no son los dos impares
3. no tienen un factor común mayor que 1
4. se dan las siguientes relaciones entre  $\{a, b, c\}$  y  $u, v$ :

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2.$$

*Demostración.* Mediante cálculo se deduce inmediatamente que si  $a, b, c$  se puede expresar como se requiere en el punto 4, ellos forman una terna pitagórica:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 \\ &= u^4 - 2(uv)^2 + v^4 + 4(uv)^2 \\ &= u^4 + 2(uv)^2 + v^4 \\ &= u^2 + v^2 = c^2. \end{aligned}$$

La demostración de la otra dirección es más complicada y se omite. □

Si es cierto que los babilonios utilizaban la fórmula de Euclides, la pregunta sigue en pie: ¿Cómo descubrieron los números generadores  $u, v$ ?

Cada fila de la Tabla 8.1 muestra  $a_{factores}$  y  $b_{factores}$ , las factorizaciones de  $a$  y  $b$ , respectivamente, mostrando que no tienen factores comunes. Se invita al lector a comprobar que  $c$  no tiene factor común con  $a, b$  por lo que las ternas son primitivas. También se muestran los números generadores  $u, v$  y  $u_{factores}, v_{factores}$ . No sólo no tienen ningún factor común como requiere el Teorema 8.7, sino que los únicos factores mayores que 1 en  $u$  y  $v$  son potencias de 2, 3, 5.

**Definición 8.6.** Una *terna babilónica* es una terna pitagórica primitiva tal que los únicos factores primos de  $u, v$  son 2, 3, 5.

La razón por la que los babilonios se limitaban a estos factores es que utilizaban el sistema numérico *sexagesimal* o de base 60 =  $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$  cuyos factores primos son 2, 3 y 5.

Para los lectores que no estén familiarizados con los sistemas numéricos no decimales, he aquí un breve resumen del concepto. El «número» 12345 es una abreviatura del número:

$$(1 \times 10^4) + (2 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (5 \times 10^0).$$

Este sistema numérico se denomina sistema numérico *decimal* o de base 10. Hay diez dígitos 0, 1, 2, ..., 8, 9 para los coeficientes de las potencias, y las potencias están representadas por los lugares de los coeficientes con potencias que aumentan de derecha a izquierda.

El número también podría representarse en el sistema numérico binario o de base 2 mediante:

$$12345 = 8192 + 4096 + 32 + 16 + 8 + 1 = 2^{13} + 2^{12} + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0 = 11000000111001.$$

La notación binaria utiliza dos dígitos 0, 1 para los coeficientes y las potencias de dos se indican mediante los lugares de los coeficientes.

Cuadro 8.1: *Triples babilónicos de la tablilla Plimpton 322.*

$a$	$a_{factores}$	$b$	$b_{factores}$	$c$	$u$	$u_{factores}$	$v$	$v_{factores}$
119	$7 \cdot 17$	120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	169	12	$2^2 \cdot 3$	5	5
4601	$43 \cdot 107$	4800	$2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$	6649	75	$3 \cdot 5^2$	32	$2^5$
12709	$71 \cdot 179$	13500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3$	18541	125	$5^3$	54	$2 \cdot 3^3$
65	$5 \cdot 13$	72	$2^3 \cdot 3^2$	97	9	$3^2$	4	$2^2$

Cuadro 8.2: Ternas babilónicas en base 60

$a$	$c$
$\langle 1 \rangle \langle 59 \rangle$	$\langle 2 \rangle \langle 49 \rangle$
$\langle 1 \rangle \langle 16 \rangle \langle 41 \rangle$	$\langle 1 \rangle \langle 50 \rangle \langle 49 \rangle$
$\langle 3 \rangle \langle 31 \rangle \langle 49 \rangle$	$\langle 5 \rangle \langle 09 \rangle \langle 01 \rangle$
$\langle 1 \rangle \langle 05 \rangle$	$\langle 1 \rangle \langle 37 \rangle$

Otro sistema numérico popular es el *hexadecimal* o sistema numérico de base 16 que se utiliza en informática. Para este sistema numérico necesitamos 16 «dígitos» y la convención es utilizar 0, 1, 2, ..., 8, 9, A, B, C, D, E, F.

El sistema numérico de base 60 no es tan desconocido como puede parecer, porque representamos el tiempo, las coordenadas geográficas y los ángulos en ese sistema. Nos sentimos cómodos realizando cálculos como (1 hora 40 minutos) más (1 hora 30 minutos) igual a (3 horas 10 minutos).

La tabla 8.2 muestra los valores de  $a, c$  que aparecen en la tabla en notación de base 60 donde  $\langle d \rangle$  representa el «dígito» en la posición  $d$  para  $0 \leq d < 60$ . El lector puede comprobar que estos valores coinciden con los valores decimales indicados en la Tabla 8.1, por ejemplo:

$$\begin{aligned} (3 \times 60^2) + (31 \times 60^1) + (49 \times 60^0) &= 12709 \\ (5 \times 60^2) + (9 \times 60^1) + (1 \times 60^0) &= 18541 \end{aligned}$$

Los babilonios no tenían símbolos distintos de 60 para los dígitos. En su lugar, utilizaban un sistema híbrido en el que los coeficientes se representaban con dos símbolos: uno para el coeficiente de las decenas y otro para el coeficiente de las unidades, y los lugares de los coeficientes indicaban las potencias de 60. Utilizando  $\heartsuit$  para el coeficiente de las decenas y  $\diamondsuit$  para el coeficiente de las unidades, el número decimal  $(38 \times 60) + (16 \times 60^0) = 2296$  se representaría como:

$$\heartsuit\heartsuit\heartsuit \begin{matrix} \diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit \\ \diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit \end{matrix} \quad \heartsuit \begin{matrix} \diamondsuit \\ \diamondsuit \end{matrix} \diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit .$$

### ¿Cuál es la sorpresa?

El teorema de Frank P. Ramsey parecía un resultado menor en combinatoria. Sorprendentemente, el teorema fue la base de un campo de las matemáticas totalmente nuevo y desafiante, con muchos problemas abiertos. La naturaleza de la teoría de Ramsey también es sorprendente: si un conjunto es lo bastante grande, existen regularidades en sus subconjuntos.

Me introduje en la teoría de Ramsey gracias al artículo de Marijn J. H. Heule y Oliver Kullmann sobre las ternas pitagóricas, cuya demostración guarda cierta

similitud con la demostración del teorema de los cuatro colores: el uso de recursos informáticos masivos que sólo tiene éxito tras los avances teóricos. De ahí el título de su artículo: *La ciencia de la fuerza bruta*.

Los problemas en combinatoria piden valores numéricos específicos, por ejemplo,  $R(n)$  debe ser un número entero positivo específico. Es sorprendente que los métodos probabilísticos hayan resultado tan fructíferos para obtener resultados en este campo.

Tendemos a pensar que los seres humanos son hoy más inteligentes que hace miles de años. Puede ser una sorpresa descubrir que hace cuatro mil años las matemáticas babilónicas eran lo suficientemente avanzadas como para descubrir que  $\{12709, 13500, 18541\}$  es una tripla pitagórica.

### Fuentes

Para una visión general de la teoría de Ramsey, véase [9], mientras que una presentación avanzada puede encontrarse en [20]. La sección sobre el método probabilístico se basa en [43, Ejemplo 4o] y [9, Capítulo 4]. Una base de datos de los números de Ramsey se puede encontrar en [34].

El método de demostración del teorema de las ternas pitagóricas se explica en detalle en [23]. Véase [4] para una introducción a la lógica y a la resolución SAT. El archivo de mi solucionador SAT para la educación [5] contiene fórmulas para ternas de Schur, grafos de Ramsey y el problema de van der Waerden.

Sección 8.7 se basa en [60], [42]. El sistema numérico sexagesimal se describe en [63].

## Capítulo 9

### El problema de Langford

C. Dudley Langford observó que su hijo había ordenado los bloques de colores como se muestra en la figura 9.1. Hay un bloque entre los bloques rojos, dos bloques entre los bloques azules y tres bloques entre los bloques verdes.

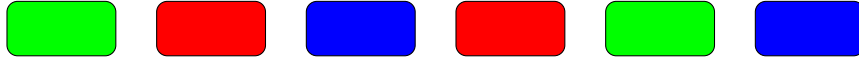


Fig. 9.1: Disposición de los bloques para el problema de Langford

**Definición 9.1** (Problema de Langford  $L(n)$ ). Dado el multiconjunto<sup>1</sup> de números enteros positivos:

$$\{1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n\},$$

¿pueden ordenarse en una secuencia tal que para  $1 \leq i \leq n$  haya  $i$  números entre las dos ocurrencias de  $i$ ?

La figura 9.1 muestra que 312132 es una solución para  $L(3)$ .

La sección 9.1 replantea el problema de Langford utilizando un formalismo matemático que facilita la resolución del problema. La sección 9.2 caracteriza los valores de  $n$  para los que  $L(n)$  es resoluble y presenta dos demostraciones del teorema. La primera, relativamente sencilla, utiliza la técnica del doble recuento: contar el mismo valor de dos formas distintas e igualar las fórmulas resultantes. La segunda demostración es una inducción inteligente, pero que implica requiere una cuidadosa atención a los detalles. La sección 9.3 deriva la solución para  $L(4)$ .

#### 9.1 El problema de Langford como un problema de cobertura

El problema de Langford se puede plantear utilizando una matriz. Para  $L(3)$  hay seis columnas, una para cada posición en la que se pueden colocar los seis números. Hay una fila para cada posible colocación de uno de los números, es decir, las dos ocurrencias de  $k$  deben tener  $k$  números entre ellos. Hay cuatro colocaciones posibles de 1, tres de 2 y dos de 3:

<sup>1</sup>Un *multiconjunto* o *bolsa* difiere de un conjunto en que cada miembro del mismo tiene asociada una multiplicidad (un número natural), indicando cuántas veces el elemento es miembro del conjunto.

	1	2	3	4	5	6
1	1		1			
2		1		1		
3			1		1	
4				1		1
5	2			2		
6		2			2	
7			2			2
8	3				3	
9		3				3

Para resolver el problema tenemos que seleccionar una fila para los 1 de la secuencia, una fila para los 2 y una fila para los 3, de tal forma que si apilamos estas filas unas sobre otras, ninguna columna contenga más de un número.

No es necesario considerar la fila 9 debido a la simetría: empezar por la fila 9 sólo da la inversa de la secuencia obtenida al empezar por la fila 8.

La fila 8 es la única que contiene el 3 por lo que debe ser elegida y la secuencia es  $3\_ \_ \_ 3 \_$ . Ya no se puede utilizar ninguna fila con números en las columnas 1 y 5, porque sólo se puede colocar un número en cada posición. Denotemos las filas permitidas y prohibidas por:

$$\bar{1}, 2, \bar{3}, 4, \bar{5}, \bar{6}, 7, 8.$$

La fila 7 es la única fila restante que contiene 2, por lo que debe elegirse y la secuencia es  $3\_2\_32$ . La eliminación de las filas que ya no se puede utilizar da:

$$\bar{1}, 2, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, 7, 8.$$

Elijiendo la única fila que queda, la fila 2, se obtiene la solución 312132:

	1	2	3	4	5	6
2		1		1		
7			2			2
8	3				3	

El análisis ha demostrado que ésta es la única solución, salvo la solución simétrica obtenida empezando por la fila 9.

## 9.2 ¿Para qué valores de $N$ se puede resolver el problema de Langford?

**Teorema 9.1.**  $L(n)$  tiene solución si y sólo si  $n = 4k$  o  $n = 4k + 3$ .

Demostramos el sentido directo del teorema. La demostración 1 muestra que si  $L(n)$  tiene solución entonces  $n = 4k$  o  $n = 4k + 3$ . La demostración 2 muestra el contrapositivo: si  $n = 4k + 1$  o  $n = 4k + 2$  entonces  $L(n)$  no tiene solución.

9.2. ¿PARA QUÉ VALORES DE  $n$  SE PUEDE RESOLVER EL PROBLEMA? 99

*Demostración.*

(1) Si la primera ocurrencia del número  $k$  está en la posición  $i_k$ , la segunda ocurrencia está en la posición  $i_k + k + 1$ . Por ejemplo, en 312132, la solución para  $L(3)$ , eligiendo  $k = 2$  se obtiene  $i_k = 3$  y  $i_k + k + 1 = 3 + 2 + 1 = 6$ .

$S_n$ , la suma de las posiciones de todos los números, es:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n i_k + \sum_{k=1}^n (i_k + k + 1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n i_k + \sum_{k=1}^n (k + 1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n i_k + \frac{n(n+3)}{2}. \end{aligned}$$

Pero  $S_n$  es simplemente  $1 + 2 + 3 + \dots + 2n$ , así que:

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{2n(2n+1)}{2}.$$

Igualando las dos fórmulas para  $S_n$  se obtiene:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n i_k + \frac{n(n+3)}{2} &= \frac{2n(2n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^n i_k &= \frac{1}{2} \left( \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+3)}{2} \right) \\ &= \frac{3n^2 - n}{4}. \end{aligned}$$

El lado izquierdo es un entero ya que es la suma de enteros (las posiciones), por lo que el lado derecho también debe ser un entero. ¿Cuándo es  $3n^2 - n$  divisible por 4? Al factorizar  $3n^2 - n$  se obtiene  $n(3n - 1)$ .

Si  $n$  es múltiplo de 4, el producto es divisible por 4.

¿Cuándo  $3n - 1$  es divisible por 4? Cualquier número entero  $n$  se puede expresar como  $n = 4i + j$  para  $j = 0, 1, 2, 3$ . Si  $3n - 1$  es divisible por 4, entonces también lo es  $3(4i + j) - 1 = 12i + 3j - 1$ .  $12i$  es divisible por 4. Para  $j = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $3j - 1 = \{-1, 2, 5, 8\}$  es divisible por 4 si y sólo si  $j = 3$ , es decir,  $n = 4i + 3$ .  $\square$

Para introducir la idea de la segunda demostración, consideremos cómo podría ser una solución para  $n = 4$ . En las tablas siguientes las posiciones de las apariciones de 4 son 1 y 6, y las posiciones de las apariciones de 2 son 5 y 8. En ambos casos, una posición es impar y la otra par.

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
*					*		

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
				*			*

Sea  $k$  un número *par*, o sea  $k = 2m$ . Si  $i$  es la posición de la primera ocurrencia de  $k$ , entonces la posición de la segunda ocurrencia es  $i + k + 1$ . La suma de las posiciones es:

$$i + (i + k + 1) = 2i + 2m + 1 = 2(i + m) + 1,$$

que es un número impar. Para que la suma de dos números sea impar, uno debe ser impar y el otro par.

Comprobemos ahora las posiciones de los números impares. Las posiciones de las apariciones de 1 son 2 y 4, ambos números pares, y las posiciones de las apariciones de 3 son 3 y 7, ambos números impares.

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
	*		*				

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
		*				*	

Sea  $k$  un número *impar*, o sea  $k = 2m + 1$ . La suma de las posiciones es:

$$i + (i + k + 1) = 2i + 2m + 1 + 1 = 2(i + m + 1),$$

que es un número par. Para que la suma de dos números sea par, ambos deben ser impares o ambos pares.

Las posiciones  $1, 2, \dots, 2n - 1, 2n$  contienen igual número de posiciones pares e impares. Las dos apariciones de un número en una fila «cubren» dos posiciones. Cuando el conjunto de filas cubre todas las posiciones, deben cubrir igual número de posiciones pares e impares. Definimos la *paridad* de un conjunto de filas como la diferencia entre el número de posiciones pares e impares cubiertas. Inicialmente, la paridad es cero, y si el problema tiene una solución, el conjunto de filas en la solución también tiene paridad cero.

Cuando se colocan dos ocurrencias de un número par, cubren una posición par y una impar, por lo que la paridad sigue siendo la misma:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
-1					+1		

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
				-1			+1

Cuando se colocan dos ocurrencias de un número impar, la paridad se convierte en  $+2$  o  $-2$ , por lo que debemos ser capaces de asociar este par con un par de ocurrencias de *otro* número impar que se coloquen en posiciones que equilibren la paridad:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
	+1		+1				

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
		-1				-1	

Hemos demostrado que puede haber una solución al problema de Langford si y sólo si ¡hay un número par de números impares en  $\{1, \dots, n\}$ ! El teorema afirma que si



## 9.2. ¿PARA QUÉ VALORES DE $N$ SE PUEDE RESOLVER EL PROBLEMA? 101

esto es cierto entonces o  $n = 4k$  o  $n = 4k - 1$ , y si no entonces o  $n = 4k - 2$  o  $n = 4k - 3$ .

*Demostración.*

(2) La demostración es por inducción. Hay cuatro casos base:

- $n = 4k - 3 = 1$ . En  $\{1\}$  hay un número impar de números impares y no hay solución.
- $n = 4k - 2 = 2$ . En  $\{1, 2\}$  hay un número impar de números impares y no hay solución.
- $n = 4k - 1 = 3$ . En  $\{1, 2, 3\}$  hay un número par de números impares y hemos visto que hay solución.
- $n = 4k - 0$ . En  $\{1, 2, 3, 4\}$  hay un número par de números impares y la sección 9.3 da una solución.

La hipótesis inductiva es que el teorema es cierto para  $\{1, \dots, 4k - j\}$ ,  $k \geq 1$ ,  $0 \leq j \leq 3$ , y demostraremos que es cierto para  $n = 4(k + 1) - j$ .

- Añadimos  $4k + 1 = 4(k + 1) - 3$  a  $\{1, \dots, 4k\}$ . Por la hipótesis inductiva para  $4k = 4k - 0$  hay un número par de impares.  $4(k + 1) - 3$  es impar por lo que ahora hay un número impar de números impares y no hay solución.
- Añadimos  $4k + 2 = 4(k + 1) - 2$  a  $\{1, \dots, 4k + 1\}$ . Por la hipótesis inductiva para  $4k + 1 = 4(k + 1) - 3$  hay un número impar de números impares.  $4(k + 1) - 2$  es par por lo que sigue habiendo un número impar de números impares y no hay solución.
- Añadimos  $4k + 3 = 4(k + 1) - 1$  a  $\{1, \dots, 4k + 2\}$ . Por la hipótesis inductiva para  $4k + 2 = 4(k + 1) - 2$  hay un número impar de números impares.  $4(k + 1) - 1$  es impar por lo que hay un número par de números impares y es probable que exista una solución.
- Añadimos  $4k + 4 = 4(k + 1) - 0$  a  $\{1, 2, \dots, 4k + 3\}$ . Por la hipótesis inductiva para  $4k + 3 = 4(k + 1) - 1$  hay un número par de impares.  $4(k + 1) - 0$  es par por lo que hay un número par de números impares y es probable que exista una solución.

□

### 9.3 Solución para $L(4)$

Aquí está la matriz para  $L(4)$ . Intenta encontrar la solución tú mismo.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1		1					
2		1		1				
3			1		1			
4				1		1		
5					1		1	
6						1		1
7	2			2				
8		2			2			
9			2			2		
10				2			2	
11					2			2
12	3				3			
13		3				3		
14			3				3	
15				3				3
16	4					4		
17		4					4	
18			4					4

Por simetría, la fila 18 puede eliminarse.

Si se elige la fila 16 y la secuencia es  $4\_4\_4\_4\_4\_$ . Cualquier fila con un elemento en la posición 1 o en la posición 6 ya no puede formar parte de la solución.

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$

Si se elige la fila 14 y la secuencia es  $4\_3\_43\_$ .

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$

Si elegimos la fila 8 la secuencia es  $423\_243\_$ .

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$

Todas las opciones de 1 han sido eliminadas, así que debemos retroceder.

En lugar de la fila 8 elija la fila 11 y la secuencia será  $4\_3\_2432$ .

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$

Si se elige la fila 2, tendremos una solución 41312432.

Sigamos retrocediendo para ver si hay otra solución.

En lugar de la fila 14 elegimos la fila 15 y la secuencia será  $4\_4\_3\_4\_3$ .

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$

Se debe elegir la fila 8 y la secuencia es  $42\_324\_3$ .

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$

Todas las opciones de 1 han sido eliminadas, así que de nuevo retrocedemos.

En lugar de la fila 16 elijamos la fila 17 y la secuencia será  $\square 4 \square \square \square \square 4 \square$ .

1, ~~2~~, 3, 4, ~~5~~, 6, 7, ~~8~~, 9, ~~10~~, 11, 12, ~~13~~, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17

Elegimos la fila 15 y la secuencia será  $\square 4 \square 3 \square \square 4 3$ .

1, ~~2~~, 3, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~7~~, ~~8~~, 9, ~~10~~, ~~11~~, ~~12~~, ~~13~~, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17

Se debe elegir la fila 9 y la secuencia es  $\square 4 2 3 \square 2 4 3$ .

1, ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~7~~, ~~8~~, 9, ~~10~~, ~~11~~, ~~12~~, ~~13~~, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17

Todas las opciones de 1 han sido eliminadas. Podemos retroceder una última vez.

En lugar de la fila 15 elegimos la fila 12 y la secuencia será  $3 4 \square \square 3 \square 4$ .

~~1~~, ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~7~~, ~~8~~, 9, ~~10~~, ~~11~~, 12, ~~13~~, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17

De nuevo, se han eliminado todas las opciones de 1.

Por lo tanto, la única solución es 41312432.

### Cuál es la sorpresa?

La fuente de inspiración de un teorema matemático puede ser sorprendente. Langford observó un patrón en los bloques de colores de su hijo que dio lugar al interesante Teorema 9.1. Los estudiantes también deben ser introducidos al hecho de que un teorema puede tener muchas demostraciones completamente diferentes.

### Fuentes

Este capítulo se basa en [35]. [12] muestra cómo encontrar una solución para  $n = 4k$  y  $n = 4k + 3$ .

## Capítulo 10

### Los axiomas del origami

Origami, el arte del plegado de papel, se desarrolló hace varios siglos en Japón y hoy cuenta con seguidores en todo el mundo. A finales del siglo XX se desarrolló la teoría matemática del origami. Su fundamento es un conjunto de siete axiomas, los *axiomas Huzita-Hatori*, llamados así por Humiaki Huzita, quien formalizó los primeros seis axiomas, y Koshiro Hatori, quien encontró el séptimo. Jacques Justin publicó los siete axiomas varios años antes que Huzita y Hatori, y Margherita P. Beloch formuló el sexto axioma en 1936. No obstante, los axiomas se conocen como axiomas de Huzita-Hatori.

En una secuencia de tres capítulos exploraremos las matemáticas del origami. En este capítulo se presentan los axiomas, en el capítulo 11 se relaciona el origami con las raíces de los polinomios y en el capítulo 12 se muestra que las construcciones con origami pueden resolver problemas que son imposibles utilizando una regla y un compás.

Este capítulo contiene una sección para cada uno de los siete axiomas. Tras el enunciado de un axioma y un diagrama del pliegue que especifica, se desarrollan las ecuaciones del pliegue y los puntos de intersección mediante geometría analítica. Un pliegue también puede definirse como un «lugar geométrico», el conjunto de todos los puntos que satisfacen alguna propiedad. El término pliegue proviene de la operación de origami de doblar un trozo de papel, pero aquí se utiliza para referirse a la línea geométrica que se crearía al doblar el papel.

Los pliegues dan lugar a *reflexiones*. Dado un punto  $p$ , su reflexión alrededor de un pliegue  $l$  da como resultado un punto  $p'$  tal que  $l$  es la mediatriz del segmento  $\overline{pp'}$  (Fig. 10.1).

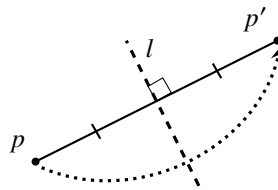


Fig. 10.1: El pliegue es la mediatriz de la recta que une un punto y su reflexión

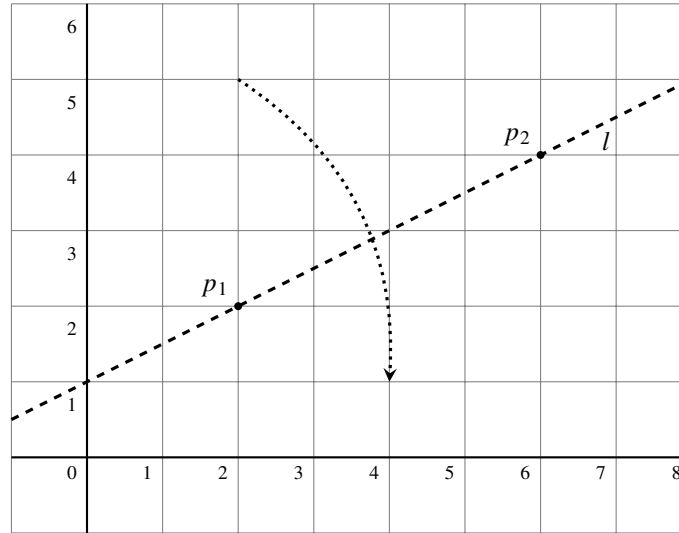


Fig. 10.2: Axioma 1

### 10.1 Axioma 1

**Axioma 10.1.** Dados dos puntos distintos  $p_1 = (x_1, y_1)$ ,  $p_2 = (x_2, y_2)$ , existe un único pliegue  $l$  que pasa por ambos (Fig. 10.2).

**Derivación de la ecuación del pliegue:** La ecuación del pliegue  $l$  se obtiene a partir de las coordenadas de  $p_1$  y  $p_2$ . La pendiente es el cociente de las diferencias de las coordenadas y el intercepto (con el eje  $y$ ) se obtiene de  $p_1$ :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad (10.1)$$

*Ejemplo 10.1.* Sea  $p_1 = (2, 2)$ ,  $p_2 = (6, 4)$ . La ecuación de  $l$  es:

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{4 - 2}{6 - 2}(x - 2) \\ y &= \frac{1}{2}x + 1. \end{aligned}$$

### 10.2 Axioma 2

**Axioma 10.2.** Dados dos puntos distintos  $p_1 = (x_1, y_1)$ ,  $p_2 = (x_2, y_2)$ , existe un pliegue único  $l$  que refleja  $p_1$  en  $p_2$  (Fig. 10.3).

El pliegue es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de  $p_1$  y  $p_2$ .

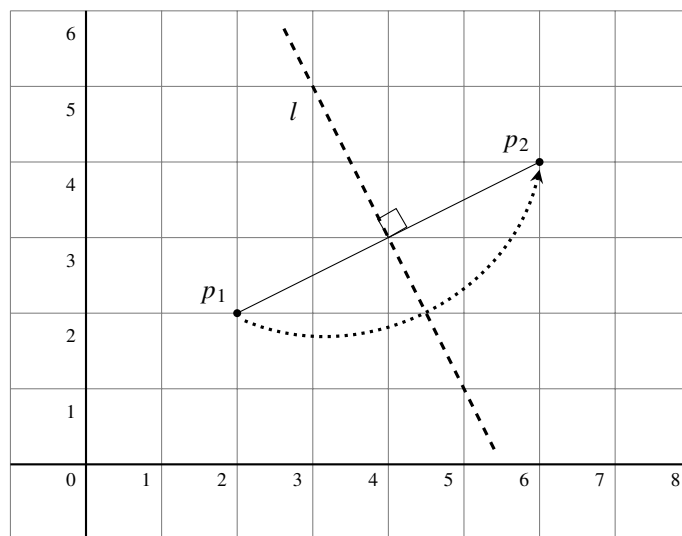


Fig. 10.3: Axioma 2

**Derivación de la ecuación del pliegue:** El pliegue  $l$  es la mediatriz de  $\overline{p_1p_2}$ . Su pendiente es el recíproco negativo de la pendiente de la recta que une  $p_1$  y  $p_2$ .  $l$  pasa por el punto medio entre los puntos:

$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \left( x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right). \quad (10.2)$$

*Ejemplo 10.2.* Sea  $p_1 = (2, 2)$ ,  $p_2 = (6, 4)$ . La ecuación de  $l$  es:

$$\begin{aligned} y - \left( \frac{2+4}{2} \right) &= -\frac{6-2}{4-2} \left( x - \left( \frac{2+6}{2} \right) \right) \\ y &= -2x + 11. \end{aligned}$$

### 10.3 Axioma 3

**Axioma 10.3.** Dadas dos rectas  $l_1, l_2$ , existe un pliegue  $l$  que coloca  $l_1$  sobre  $l_2$  (Fig. 10.4).

El pliegue es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $l_1$  y  $l_2$ , donde la distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento que pasa por el punto y es perpendicular a la recta. Utilizando triángulos congruentes es fácil demostrar que el pliegue es bisectriz del ángulo formado por  $l_1$  y  $l_2$ .

**Derivación de la ecuación del pliegue:**

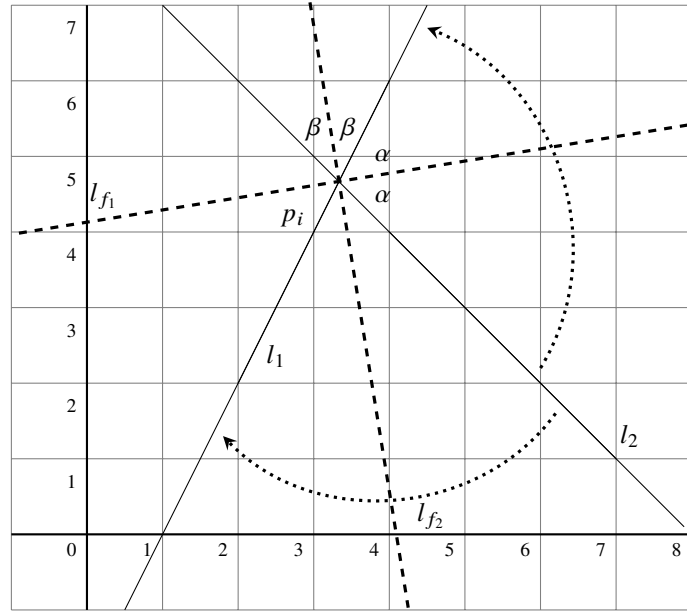


Fig. 10.4: Axioma 3

$l_1, l_2$  son paralelas: Sea  $l_1$   $y = mx + b_1$  y sea  $l_2$   $y = mx + b_2$ . El pliegue es la recta paralela a  $l_1$  y  $l_2$  que está a mitad de camino entre ellas:

$$y = mx + \frac{b_1 + b_2}{2}.$$

$l_1, l_2$  se intersectan: Sea  $l_1$   $y = m_1x + b_1$  y sea  $l_2$   $y = m_2x + b_2$ .  $p_i = (x_i, y_i)$ , el punto de intersección de las dos rectas, es:

$$\begin{aligned} m_1x_i + b_1 &= m_2x_i + b_2 \\ x_i &= \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \\ y_i &= m_1x_i + b_1. \end{aligned}$$

*Ejemplo 10.3.* Sea  $l_1$   $y = 2x - 2$  y sea  $l_2$   $y = -x + 8$ . Entonces  $p_i = (x_i, y_i)$  es:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{8 - (-2)}{2 - (-1)} = \frac{10}{3} \approx 3,33 \\ y_i &= 2 \cdot \frac{10}{3} - 2 = \frac{14}{3} \approx 4,67. \end{aligned}$$

El pliegue es la bisectriz del ángulo formado por  $l_1$  y  $l_2$  en su punto de intersección. Hay dos pliegues posibles ya que hay dos pares de ángulos verticales.

Determinemos las pendientes de las bisectrices de los ángulos. Si el ángulo de la recta  $l_1$  respecto al eje  $x$  es  $\theta_1$  y el ángulo de la recta  $l_2$  respecto al eje  $x$  es  $\theta_2$ , entonces el pliegue es la recta que forma un ángulo de  $\theta_b = (\theta_1 + \theta_2)/2$  respecto al eje  $x$ .

Sea  $m_1 = \tan \theta_1, m_2 = \tan \theta_2$ . Por el Teorema A.9,  $m_s$ , la pendiente de la recta que hace un ángulo de  $\theta_1 + \theta_2$  respecto del eje  $x$ , es:

$$m_s = \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}.$$

Por el Teorema A.10,  $m_b$ , la pendiente de la bisectriz del ángulo, es:

$$m_b = \tan \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2(\theta_1 + \theta_2)}}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + m_s^2}}{m_s}.$$

*Ejemplo 10.4.* Para  $y = 2x - 2$  y  $y = -x + 8$ , la pendiente de la bisectriz del ángulo es:

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{2 + (-1)}{1 - (2 \cdot -1)} = \frac{1}{3} \\ m_b &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + (1/3)^2}}{1/3} = -3 \pm \sqrt{10} \approx -6,16, 0,162. \end{aligned}$$

Derivemos la ecuación del pliegue  $l_{f_1}$  con la pendiente positiva. Del Ejemplo 10.3, las coordenadas de la intersección de las dos rectas son  $(10/3, 14/3)$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{14}{3} &= (-3 + \sqrt{10}) \cdot \frac{10}{3} + b_i \\ b_i &= \frac{44 - 10\sqrt{10}}{3} \\ y &= (-3 + \sqrt{10})x + \frac{44 - 10\sqrt{10}}{3} \approx 0,162x + 4,13. \end{aligned}$$

#### 10.4 Axioma 4

**Axioma 10.4.** Dado un punto  $p_1$  y una recta  $l_1$ , existe un único pliegue  $l$  perpendicular a  $l_1$  que pasa por el punto  $p_1$  (Fig. 10.5).

El pliegue es el lugar geométrico de todos los puntos de la recta perpendicular a  $l_1$  que pasa por  $p_1$ .

**Derivación de la ecuación del pliegue:** Sea  $l_1$   $y = m_1x + b_1$  y sea  $p_1 = (x_1, y_1)$ .  $l$  es perpendicular a  $l_1$  por lo que su pendiente es  $-(1/m_1)$ . Como pasa por  $p_1$  podemos



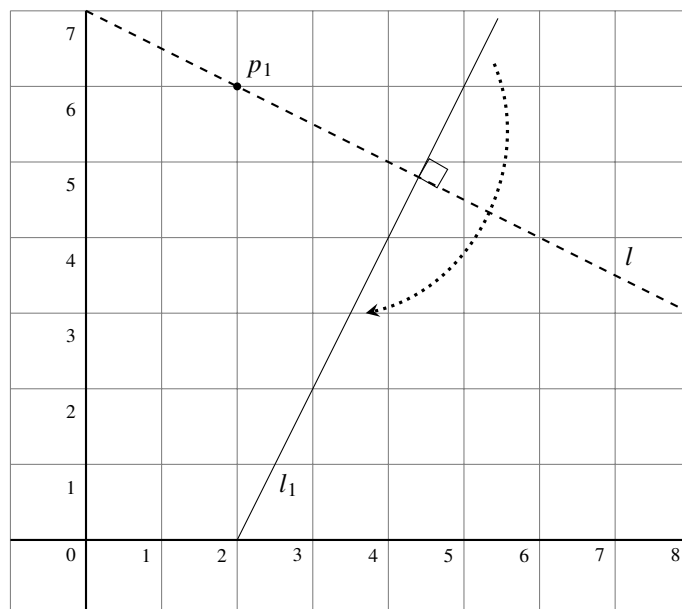


Fig. 10.5: Axioma 4

calcular el intercepto  $b$  y escribir su ecuación:

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{m}x_1 + b \\ b &= \frac{(my_1 + x_1)}{m} \\ y &= -\frac{1}{m}x + \frac{(my_1 + x_1)}{m}. \end{aligned}$$

*Ejemplo 10.5.* Sea  $p_1 = (2, 6)$  y  $l_1: y = 2x - 4$ . La ecuación del pliegue  $l$  es:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{2 \cdot 6 + 2}{2} = -\frac{1}{2}x + 7.$$

### 10.5 Axioma 5

**Axioma 10.5.** Dados dos puntos  $p_1, p_2$  y una recta  $l_1$ , existe un pliegue  $l$  que sitúa  $p_1$  en  $l_1$  y pasa por  $p_2$  (Fig. 10.6).

Como el pliegue pasa por  $p_2$  y  $p_2$  está en la mediatriz de  $\overline{p_1 p'_1}$ , el lugar geométrico de la reflexión de  $p_1$  es la circunferencia centrada en  $p_2$  de radio  $\overline{p_1 p_2}$ . El pliegue se construye de modo que la reflexión  $p'_1$  esté sobre la recta dada  $l_1$ .

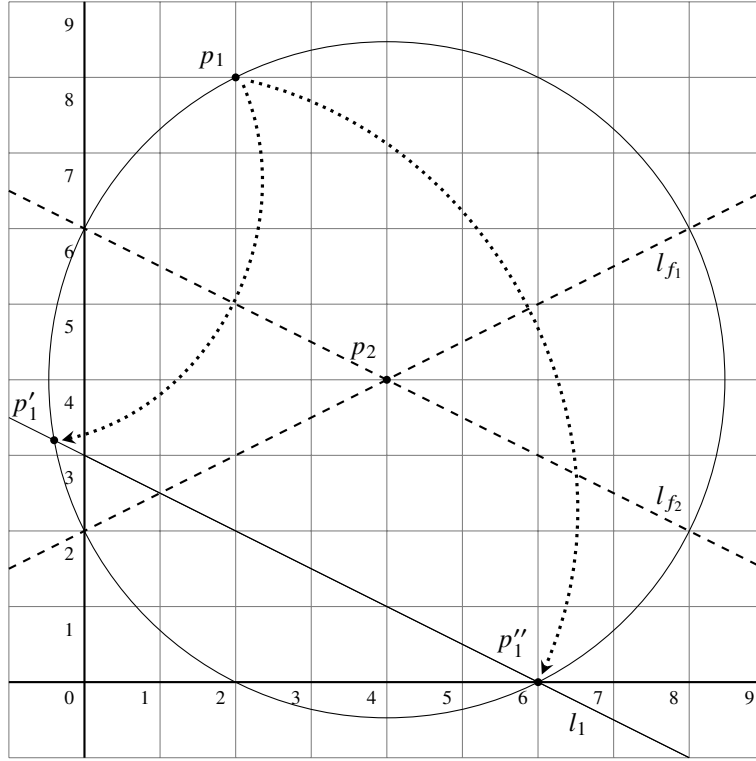


Fig. 10.6: Axioma 5

**Derivación de las ecuaciones de los pliegues:** Sea  $l_1$   $y = m_1x + b_1$  y sean  $p_1 = (x_1, y_1)$ ,  $p_2 = (x_2, y_2)$ . La ecuación de la circunferencia centrada en  $p_2$  con radio  $\overline{p_1p_2}$  es:

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2, \quad \text{donde} \\ r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Sustituyendo la ecuación de  $l_1$  en la ecuación del círculo se obtiene:

$$(x - x_2)^2 + ((m_1x + b_1) - y_2)^2 = r^2 \\ (x - x_2)^2 + (m_1x + (b_1 - y_2))^2 = r^2,$$

y obtenemos una ecuación cuadrática para las coordenadas  $x$  de las posibles intersecciones:

$$x^2(1 + m_1^2) + 2(-x_2 + m_1(b - y_2))x + (x_2^2 + (b_1^2 - 2b_1y_2 + y_2^2) - r^2) = 0. \quad (10.3)$$

Como una ecuación cuadrática tiene a lo sumo dos soluciones, para un par dado de puntos y una recta puede haber cero, uno o dos pliegues. A partir de las soluciones  $x'_1, x''_1$  podemos calcular  $y'_1, y''_1$  de  $y = m_1x + b_1$ . Los puntos reflejados son  $p'_1 = (x'_1, y'_1)$ ,  $p''_1 = (x''_1, y''_1)$ .

*Ejemplo 10.6.* Sea  $p_1 = (2, 8)$ ,  $p_2 = (4, 4)$  y sea  $l_1$   $y = -\frac{1}{2}x + 3$ . La ecuación de la circunferencia es  $(x-4)^2 + (y-4)^2 = (4-2)^2 + (4-8)^2 = 20$ . Sustituimos la ecuación de la recta en la ecuación de la circunferencia para obtener una ecuación cuadrática de las coordenadas  $x$  de las intersecciones (o utilizamos la Ecuación 10.3):

$$\begin{aligned}(x-4)^2 + \left(\left(-\frac{1}{2}x + 3\right) - 4\right)^2 &= 20 \\(x-4)^2 + (-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 - 20 &= 0 \\5x^2 - 28x - 12 &= 0 \\(5x+2)(x-6) &= 0.\end{aligned}$$

Los dos puntos de intersección son:

$$p'_1 = (-2/5, 16/5) = (-0,4, 3,2), \quad p''_1 = (6, 0).$$

Los pliegues serán las bisectrices perpendiculares de  $\overline{p_1 p'_1}$  y  $\overline{p_1 p''_1}$ .

*Ejemplo 10.7.* Para  $p_1 = (2, 8)$  y  $p'_1 = (-2/5, 16/5)$  la ecuación de  $l_{f_1}$  es:

$$\begin{aligned}y - \frac{8 + (16/5)}{2} &= -\frac{(-2/5) - 2}{(16/5) - 8} \left(x - \frac{2 + (-2/5)}{2}\right) \\y &= -\frac{1}{2}x + 6.\end{aligned}$$

*Ejemplo 10.8.* Para  $p_1 = (2, 8)$  y  $p''_1 = (6, 0)$  la ecuación de  $l_{f_2}$  es:

$$\begin{aligned}y - \frac{8+0}{2} &= -\frac{6-2}{0-8} \left(x - \frac{2+6}{2}\right) \\y &= \frac{1}{2}x + 2.\end{aligned}$$

## 10.6 Axioma 6

**Axioma 10.6.** Dados dos puntos  $p_1, p_2$  y dos rectas  $l_1, l_2$ , existe un pliegue  $l$  que sitúa  $p_1$  en  $l_1$  y sitúa  $p_2$  en  $l_2$  (Fig. 10.7).

Un pliegue que sitúa  $p_i$  sobre  $l_i$  es una recta  $l_f$  tal que la distancia de  $p_i$  a  $l_f$  es igual a la distancia de su reflexión  $p'_i$  a  $l_f$ . El lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto  $p_i$  y una recta  $l_i$  es una *parábola*. A  $p_i$  se le llama *foco* de la

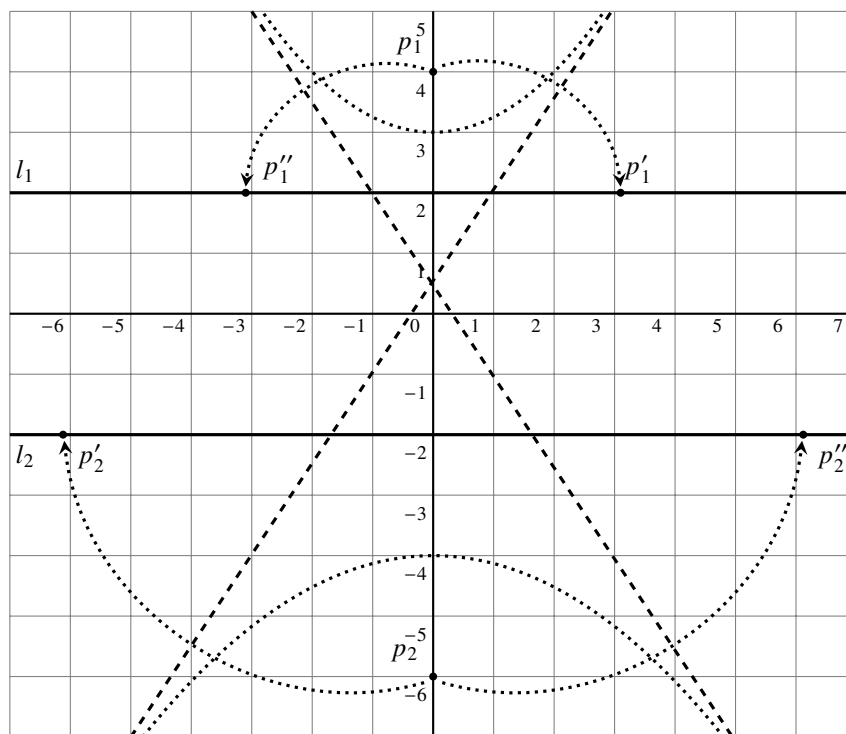


Fig. 10.7: Axioma 6

parábola y a  $l_1$  directriz de la parábola. Un pliegue es cualquier recta tangente a la parábola (Sec. 10.6.3).

Para que un pliegue sitúe simultáneamente  $p_1$  en  $l_1$  y  $p_2$  en  $l_2$ , debe ser una tangente común a las dos parábolas. Puede haber cero, una, dos o tres tangentes comunes (Figs. 10.8, 10.9, 10.10, 10.11).

La fórmula de una parábola arbitraria es bastante compleja, por lo que limitamos la presentación a las parábolas cuyo eje de simetría es el eje  $x$  o  $y$ .

### 10.6.1 Derivación de la ecuación de un pliegue

Sea  $(0, f)$  el foco de una parábola con directriz  $y = d$ . Definimos  $p = f - d$ , la longitud con signo del segmento entre el foco y la directriz<sup>1</sup>. Si el vértice de la parábola está en el eje  $x$  la ecuación de la parábola es  $y = x^2/2p$ . Para mover la parábola arriba o abajo del eje  $y$  de forma que su vértice esté en  $(0, h)$ , se añade  $h$  a

<sup>1</sup>Hemos estado utilizando la notación  $p_i$  para los puntos; el uso de  $p$  aquí puede ser confuso, pero es la notación estándar. El nombre formal de  $p$  es la mitad del *latus rectum*.

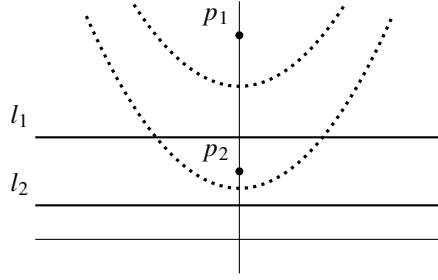


Fig. 10.8: No hay tangentes comunes

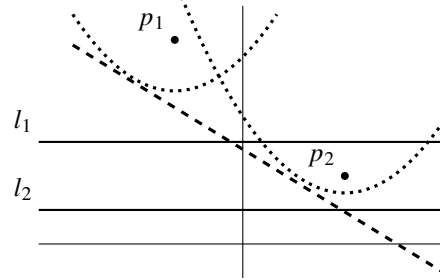


Fig. 10.9: Una tangente en común

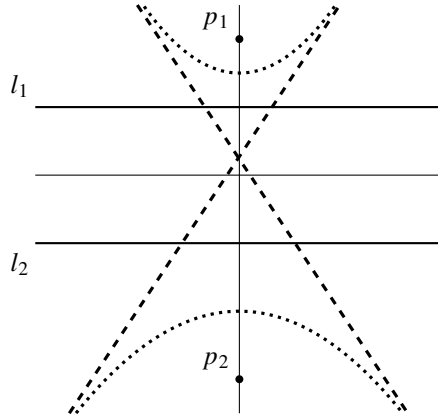


Fig. 10.10: Dos tangentes en comunes

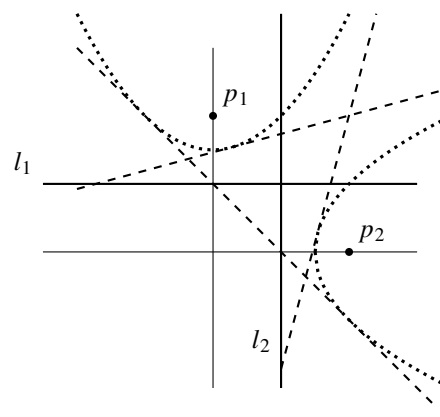


Fig. 10.11: Tres tangentes en comunes

la ecuación de la parábola (Fig. 10.12):

$$y = \frac{x^2}{2p} + h.$$

Definimos  $a = 2ph$  para que la ecuación de la parábola sea:

$$y = \frac{x^2}{2p} + \frac{a}{2p} \quad (10.4a)$$

$$x^2 - 2py + a = 0. \quad (10.4b)$$

La ecuación de la parábola de la figura 10.12 es  $x^2 - 12y + 12 = 0$ .

Sustituimos la ecuación de una línea arbitraria  $y = mx + b$  en la Ecuación 10.4b para obtener una ecuación de los puntos de intersección de la recta y la parábola:

$$\begin{aligned} x^2 - 2p(mx + b) + a &= 0 \\ x^2 + (-2mp)x + (-2pb + a) &= 0. \end{aligned}$$

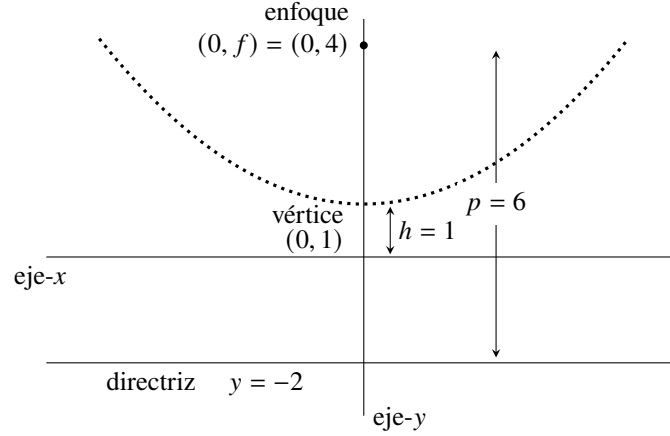


Fig. 10.12: Los elementos de la definición de una parábola

La recta será tangente a la parábola si y sólo si esta ecuación cuadrática tiene *exactamente una solución* si y sólo si su discriminante es cero:

$$(-2mp)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2pb + a) = 0 \quad (10.5a)$$

$$m^2 p^2 + 2pb - a = 0. \quad (10.5b)$$

Se trata de una ecuación con variables  $m, b$  para las tangentes a la parábola. Para obtener las tangentes comunes a ambas parábolas debemos resolver simultáneamente las ecuaciones de las dos parábolas.

*Ejemplo 10.9.*

**Parábola 1:** Foco  $(0, 4)$ , directriz  $y = 2$ , vértice  $(0, 3)$ .

$p = 2$ ,  $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ . La ecuación de la parábola es:

$$x^2 - 4y + 12 = 0.$$

Sustituyendo  $p$  y  $a$  en la Ecuación 10.5b y simplificando da:

$$m^2 + b - 3 = 0.$$

**Parábola 2:** Foco  $(0, -4)$ , directriz  $y = -2$ , vértice  $(0, -3)$ .

$p = -2$ ,  $a = 2 \cdot -2 \cdot -3 = 12$ . La ecuación de la parábola es:

$$x^2 + 4y + 12 = 0.$$

Sustituyendo  $p$  y  $a$  en la Ecuación 10.5b y simplificando da:

$$m^2 - b - 3 = 0.$$

Las soluciones de las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}m^2 + b - 3 &= 0 \\m^2 - b - 3 &= 0\end{aligned}$$

son  $m = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1,73$  y  $b = 0$ . Hay dos tangentes comunes:

$$y = \sqrt{3}x, \quad y = -\sqrt{3}x.$$

*Ejemplo 10.10.*

**Parábola 1:** Sin cambios.

**Parábola 2:** Enfoque  $(0, -6)$ , directriz  $y = -2$ , vértice  $(0, -4)$ .

$p = -4$ ,  $a = 2 \cdot -4 \cdot -4 = 32$ . La ecuación de la parábola es:

$$x^2 + 8y + 32 = 0.$$

Sustituyendo  $p$  y  $a$  en la Ecuación 10.5b y simplificando da:

$$2m^2 - b - 4 = 0.$$

Las soluciones de las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}m^2 + b - 3 &= 0 \\2m^2 - b - 4 &= 0\end{aligned}$$

son  $m = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \approx \pm 1,53$  y  $b = \frac{2}{3}$ . Hay dos tangentes comunes:

$$y = \sqrt{\frac{7}{3}}x + \frac{2}{3}, \quad y = -\sqrt{\frac{7}{3}}x + \frac{2}{3}.$$

*Ejemplo 10.11.*

Definamos ahora una parábola cuyo eje de simetría es el eje  $x$ .

**Parábola 1:** Sin cambios.

**Parábola 2:** Foco  $(4, 0)$ , directriz  $x = 2$ , vértice  $(3, 0)$ .

$p = 2$ ,  $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ . La ecuación de la parábola es:

$$y^2 - 4x + 12 = 0. \tag{10.6}$$

Esta es una ecuación con  $x$  y  $y^2$  en lugar de  $x^2$  e  $y$ , por lo que la Ecuación 10.5b no se puede utilizar y debemos realizar la derivación de nuevo.

Sustituir la ecuación de una recta en la Ecuación 10.6:

$$\begin{aligned}(mx + b)^2 - 4x + 12 &= 0 \\m^2x^2 + (2mb - 4)x + (b^2 + 12) &= 0.\end{aligned}$$

Igualemos el discriminante a cero y simplifiquemos:

$$\begin{aligned}(2mb - 4)^2 - 4m^2(b^2 + 12) &= 0 \\ -3m^2 - mb + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Si intentamos resolver las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}m^2 + b - 3 &= 0 \\ -3m^2 - mb + 1 &= 0,\end{aligned}$$

obtenemos una ecuación *cúbica* con variable  $m$ :

$$m^3 - 3m^2 - 3m + 1 = 0. \quad (10.7)$$

Como una ecuación cúbica tiene como mínimo una y como máximo tres soluciones reales, puede haber una, dos o tres tangentes comunes.

La fórmula para resolver ecuaciones cúbicas generales es bastante complicada, así que he utilizado una calculadora de Internet y he obtenido las tres soluciones:

$$m = 3,73, m = -1, m = 0,27.$$

A partir de la forma de la Ecuación 10.7 podríamos suponer que  $m = 1$  o  $m = -1$  es una solución:

$$\begin{aligned}1^3 - 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 &= -4 \\ (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Dividimos Ecuación 10.7 por  $m - (-1) = m + 1$  para obtener la ecuación cuadrática  $m^2 - 4m + 1$  cuyas raíces son las otras dos soluciones de la ecuación cúbica  $m = 2 \pm \sqrt{3} \approx 3,73, 0,27$ .

### 10.6.2 Derivación de las ecuaciones de las reflexiones

Derivamos la posición de la reflexión  $p'_1 = (x'_1, y'_1)$  de  $p_1 = (x_1, y_1)$  alrededor de una recta tangente  $l_t$  cuya ecuación es  $y = m_t x + b_t$ . Primero, hallamos la recta  $l_p$  de ecuación  $y = m_p x + b_p$  que es perpendicular a  $l_t$  y pasa por  $p_1$ :

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{m_t}x + b_p \\ y_1 &= -\frac{1}{m_t}x_1 + b_p \\ y &= \frac{-x}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t}\right).\end{aligned}$$



A continuación hallamos la intersección  $p_t = (x_t, y_t)$  de  $l_t$  y  $l_p$ :

$$\begin{aligned} m_t x_t + b_t &= \frac{-x_t}{m_t} + \left( y_1 + \frac{x_1}{m_t} \right) \\ x_t &= \frac{\left( y_1 + \frac{x_1}{m_t} - b_t \right)}{\left( m_t + \frac{1}{m_t} \right)} \\ y_t &= m_t x_t + b_t. \end{aligned}$$

$p_t$  es el punto medio entre  $p_1$  y  $p'_1$ :

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{x_1 + x'_1}{2}, & x'_1 &= 2x_t - x_1, \\ y_t &= \frac{y_1 + y'_1}{2}, & y'_1 &= 2y_t - y_1. \end{aligned}$$

*Ejemplo 10.12.* Sea  $l_t$  y  $y = \sqrt{3}x + 0$  y sea  $p_1 = (0, 4)$ :

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\left( 4 + \frac{0}{\sqrt{3}} - 0 \right)}{\left( \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)} = \sqrt{3} \\ y_t &= \sqrt{3}\sqrt{3} + 0 = 3 \\ x'_1 &= 2x_t - x_1 = 2\sqrt{3} \approx 3,46 \\ y'_1 &= 2y_t - y_1 = 2. \end{aligned}$$

### 10.6.3 Tangentes a una parábola

Queremos demostrar que los pliegues del axioma 6 son tangentes a las parábolas. La figura 10.13 muestra cinco puntos  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , cada punto  $p_i$  a una distancia  $a_i$  tanto del foco como de la directriz. Se trazan rectas perpendiculares desde  $p_i$  a la directriz y se denotan las intersecciones de estas rectas con la directriz por  $p'_i$ . Por Axioma 2 existen pliegues  $l_i$  que pasan por  $p_i$  y sitúan  $p$  en la directriz. Los puntos  $p'_i$  son las reflexiones de  $p$  alrededor de los pliegues. La figura muestra el pliegue  $l_1$  que atraviesa  $p_1$  y la reflexión  $p'_1$ .

**Teorema 10.1.** *Los pliegues del axioma 6 son las tangentes a las parábolas que son los lugares geométricos de los puntos equidistantes a los puntos  $p_1, p_2$  y  $l_1, l_2$ , respectivamente.*

*Demostración.* En la figura 10.14, el foco es  $p$  y la directriz es  $d$ .  $p'$  es un punto de la directriz y  $l$  es el pliegue que refleja  $p$  en  $p'$ . Sea  $s$  la intersección de  $\overline{pp'}$  y  $l$ . Entonces  $\overline{ps} = \overline{p's} = a$  y  $l \perp \overline{pp'}$  ya que  $l$  es la mediatriz de  $\overline{pp'}$ .

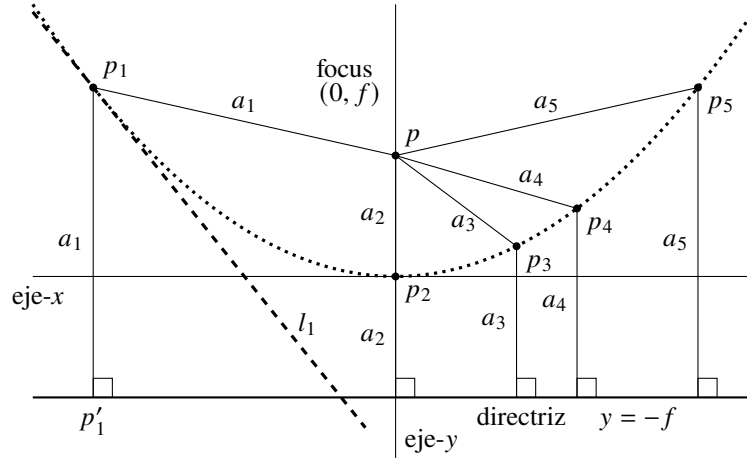


Fig. 10.13: La tangente como lugar geométrico

Sea  $r$  la intersección de la recta perpendicular a  $d$  que pasa por  $p'$  y el pliegue  $l$ . Entonces  $\triangle psr \cong \triangle p'sr$  por lado-ángulo-lado. Se deduce que  $\overline{pr} = \overline{p'r} = b$  por lo que  $r$  es un punto de la parábola. Elegimos un punto  $p''$  sobre la directriz que sea distinto de  $p'$  y suponemos que el pliegue  $l$  también refleja  $p$  sobre  $p''$ . Sea  $q$  la intersección de la perpendicular a  $d$  que pasa por  $p''$  y el pliegue  $l$ .  $\triangle psq \cong \triangle p'sq$  por lo que  $\overline{pq} = \overline{p'q} = c$ . Denotemos  $\overline{qp''} = e$ . Si  $q$  es un punto de la parábola entonces  $e = \overline{qp''} = \overline{qp} = c$ , pero  $c$  es la hipotenusa del triángulo rectángulo  $\triangle qp''p'$  y no es posible que la hipotenusa sea igual a uno de los otros lados del triángulo rectángulo. Por lo tanto el pliegue  $l$  sólo tiene una intersección con la parábola y debe ser una tangente.  $\square$

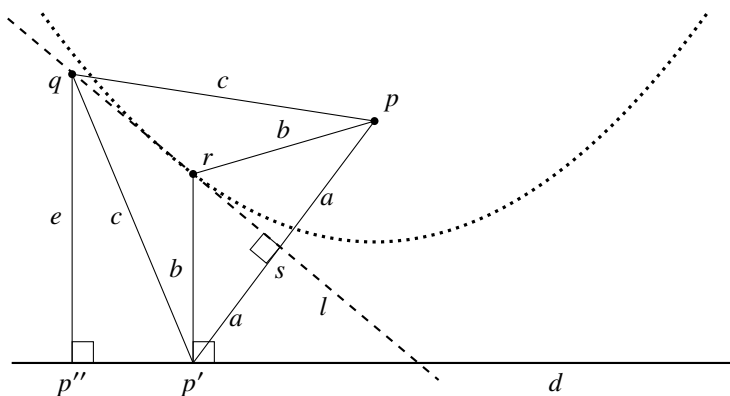
### 10.7 Axioma 7

**Axioma 10.7.** Dado un punto  $p_1$  y dos rectas  $l_1$  y  $l_2$ , existe un pliegue  $l$  que sitúa  $p_1$  sobre  $l_1$  y es perpendicular a  $l_2$  (Fig. 10.15).

El pliegue es el lugar geométrico de todos los puntos de la recta perpendicular a  $l_2$  y equidistante de  $p_1$  y  $p'_1$ , la reflexión de  $p_1$  sobre  $l_1$ .

**Derivación de la ecuación del pliegue:** Sea  $p_1 = (x_1, y_1)$ , sea  $l_1$  y  $y = m_1x + b_1$  y sea  $l_2$  y  $y = m_2x + b_2$ . Sea  $l_p$  la recta que contiene a  $\overline{p_1p'_1}$ . Como  $l \perp l_2$ ,  $l_p \perp l$ , resulta que  $l_p \parallel l_2$  y la ecuación de  $l_p$  es  $y = m_2x + b_p$ .

$l_p$  pasa por  $p_1$  por lo que  $y_1 = m_2x_1 + b_p$  y su ecuación es  $y = m_2x + (y_1 - m_2x_1)$ .



La reflexión  $p'_1 = (x'_1, y'_1)$  es la intersección de  $l_1$  y  $l_p$ :

$$\begin{aligned} m_1 x'_1 + b_1 &= m_2 x'_1 + (y_1 - m_2 x_1) \\ x'_1 &= \frac{y_1 - m_2 x_1 - b_1}{m_1 - m_2} \\ y'_1 &= m_1 x'_1 + b_1. \end{aligned}$$

$$(x_m, y_m) = \left( \frac{x_1 + x'_1}{2}, \frac{y_1 + y'_1}{2} \right).$$
$$y = -\frac{1}{m_2}x + b_m,$$
$$b_m = y_m + \frac{x_m}{m_2}.$$
$$y = -\frac{1}{m_2}x + \left(y_m + \frac{x_m}{m_2}\right).$$

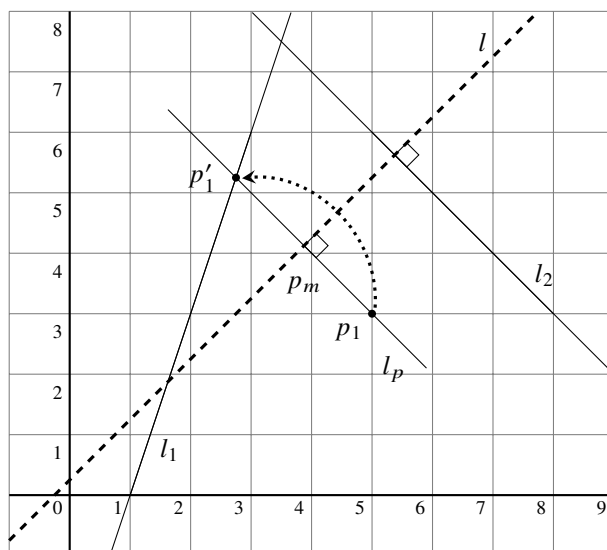


Fig. 10.15: Axioma 7

*Ejemplo 10.13.* Sea  $p_1 = (5, 3)$ ,  $l_1: y = 3x - 3$  y  $l_2: y = -x + 11$ . Entonces:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{3 - (-1) \cdot 5 - (-3)}{3 - (-1)} = \frac{11}{4} \\ y'_1 &= 3 \cdot \frac{11}{4} + (-3) = \frac{21}{4} \\ p_m &= \left( \frac{5 + \frac{11}{4}}{2}, \frac{3 + \frac{21}{4}}{2} \right) = \left( \frac{31}{8}, \frac{33}{8} \right). \end{aligned}$$

La ecuación del pliegue  $l$  es:

$$y = -\frac{1}{-1} \cdot x + \left( \frac{33}{8} + \frac{31}{-1} \right) = x + \frac{1}{4}.$$

### ¿Cuál es la sorpresa?

El origami, el arte de plegar papel, se practica desde hace cientos de años, por lo que sorprende que la formalización matemática se remonte sólo al siglo XX. Sorprende aún más que exista una axiomatización del plegado de papel. Las matemáticas del origami son una excelente manera de aprender geometría analítica, propiedades de las parábolas y el concepto de lugar geométrico.

**Fuentes**

Los axiomas del origami se presentan en [56]. Lang [26] ofrece descripciones de construcciones de origami. [31, Capítulo 10] contiene la teoría detallada de las matemáticas del origami, incluyendo la demostración de que dos parábolas pueden tener cero, una, dos o tres tangentes comunes. La demostración de Teorema 10.1 me fue mostrada por Oriah Ben-Lulu. He encontrado que el software geométrico como Geogebra es útil para entender la relación entre la geometría y el álgebra de los axiomas.

Una presentación clara de las ecuaciones cúbicas se puede encontrar en [6, Capítulos 1, 2].

## Capítulo 11

### El método de Lill y el pliegue de Beloch

#### 11.1 Un truco de magia

Construimos una trayectoria formada por cuatro segmentos  $\{a_3 = 1, a_2 = 6, a_1 = 11, a_0 = 6\}$ , partiendo del origen en la dirección positiva del eje  $x$  y girando  $90^\circ$  en sentido contrario a las agujas del reloj entre segmento y segmento. Construimos una segunda trayectoria de la siguiente manera: trazamos una recta desde el origen con un ángulo de  $63,4^\circ$  y denotamos con  $P$  su intersección con  $a_2$ . Giramos a la izquierda  $90^\circ$ , trazamos una recta y marcar su intersección con  $a_1$  con  $Q$ . Giramos de nuevo  $90^\circ$  a la izquierda, trazamos una recta y señalamos que interseca el final de la trayectoria en  $(-10, 0)$  (Fig. 11.1).

Calcular el valor negativo de la tangente del ángulo al inicio del segundo del trayecto:  $-\tan 63,4^\circ = -2$ . Sustituimos este valor en el polinomio cuyos coeficientes

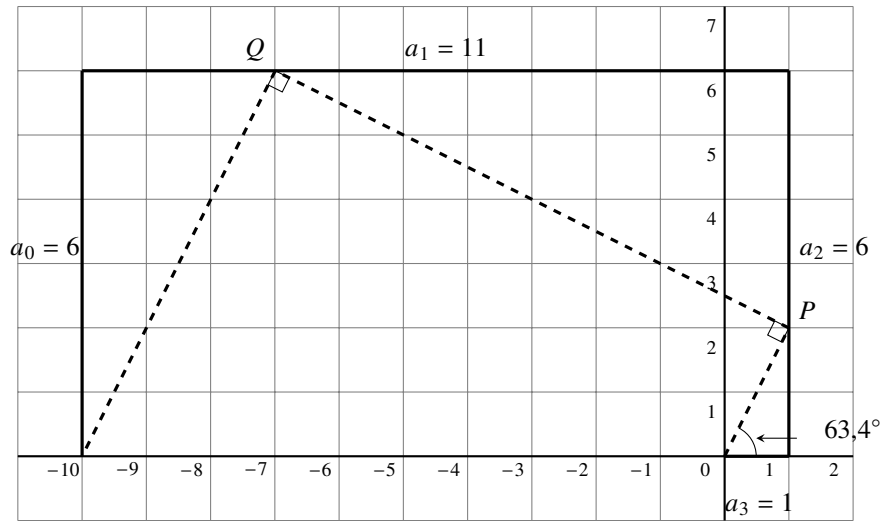


Fig. 11.1: *Un truco de magia*

son las longitudes de los segmentos del primer camino:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\ p(-\tan 63,4^\circ) &= (-2)^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6 = 0. \end{aligned}$$

¡Hemos encontrado una raíz del polinomio cúbico  $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ !

Continuemos con el ejemplo. El polinomio  $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$  tiene tres raíces  $-1, -2, -3$ . Calculamos el arcotangente de los valores negativos de las raíces :

$$\alpha = -\tan^{-1}(-1) = 45^\circ, \quad \beta = -\tan^{-1}(-2) \approx 63,4^\circ, \quad \gamma = -\tan^{-1}(-3) \approx 71,6^\circ.$$

Para cada ángulo la segunda trayectoria interseca el final de la primera trayectoria (Fig. 11.2).

El valor  $-\tan 56,3 \approx -1,5$  no es una raíz de la ecuación. La figura 11.3 muestra el resultado de la aplicación del método para este ángulo. Esta trayectoria no se cruza con el segmento de línea para el coeficiente  $a_0$  en  $(-10, 0)$ .

Este ejemplo muestra un método descubierto por Eduard Lill en 1867 para hallar gráficamente las raíces reales de cualquier polinomio. En realidad no estamos encontrando las raíces, sino verificando que un valor dado es una raíz.

La sección 11.2 presenta una especificación formal del método de Lill (limitado a polinomios cúbicos) y da ejemplos de cómo funciona en casos especiales. Una

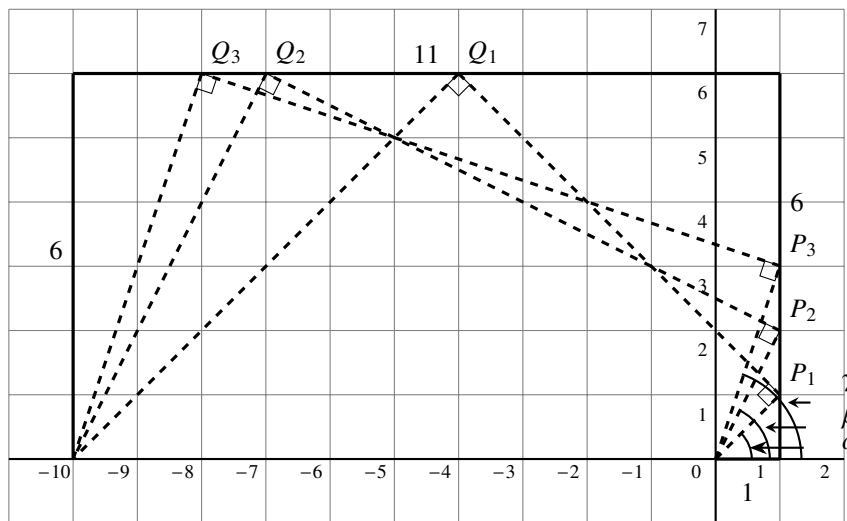


Fig. 11.2: Método de Lill para las tres raíces del polinomio

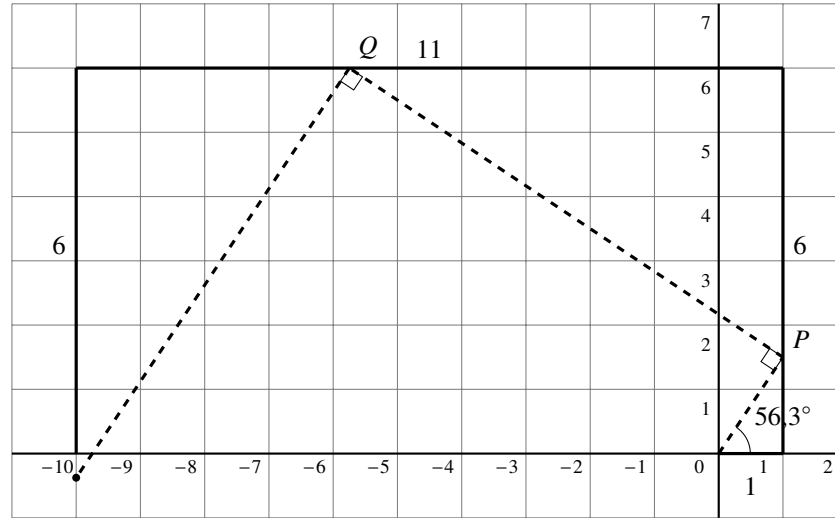


Fig. 11.3: Una trayectoria que no ilustra una raíz

demostración de la corrección del método de Lill se da en la sección 11.3. La sección 11.4 muestra cómo se puede implementar el método utilizando el axioma 6 de origami. Esto se llama el pliegue de Beloch y precedió a la formalización de los axiomas de origami durante muchos años.

## 11.2 Especificación del método de Lill

### 11.2.1 El método de Lill como algoritmo

- Comenzamos a partir de con un polinomio cúbico arbitrario  $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ .
- Construimos la primer trayectoria:
  - Para cada coeficiente  $a_3, a_2, a_1, a_0$  (en ese orden) construye un segmento de las respectivas longitudes, partiendo del origen  $O = (0, 0)$  en la dirección positiva del eje  $x$ . Giramos  $90^\circ$  en sentido contrario a las agujas del reloj entre cada segmento.
- Construimos el segundo camino:
  - Construimos una recta desde  $O$  formando un ángulo de  $\theta$  con el eje  $x$  positivo que intersecte a  $a_2$  en el punto  $P$ .
  - Giramos  $\pm 90^\circ$  y trazamos una recta desde  $P$  que corte a  $a_1$  en  $Q$ .



- Giramos  $\pm 90^\circ$  y construimos una recta desde  $Q$  que intersecte a  $a_0$  en  $R$ .
- Si  $R$  es el punto final de la primera trayectoria entonces  $-\tan \theta$  es una raíz de  $p(x)$ .

■ Casos especiales:

- Al construir los segmentos de la primera trayectoria, si un coeficiente es negativo, construimos el segmento *hacia atrás*.
- Al construir los segmentos de línea de la primera trayectoria, si un coeficiente es cero, no construimos un segmento, sino continuamos con el siguiente giro de  $\pm 90^\circ$ .

■ Notes:

- La frase *se cruza con  $a_i$*  significa *interseca el segmento de línea  $a_i$  o cualquier extensión de  $a_i$* .
- Al construir la segunda trayectoria, elegimos gira  $90^\circ$  a la izquierda o a la derecha por  $90^\circ$  para que haya una intersección con el siguiente segmento de la primera trayectoria o su extensión.

### 11.2.2 Coeficientes negativos

Vamos a demostrar el método de Lill para el polinomio  $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$  con coeficientes negativos (Sec. 10.6). Comenzamos construyendo un segmento de

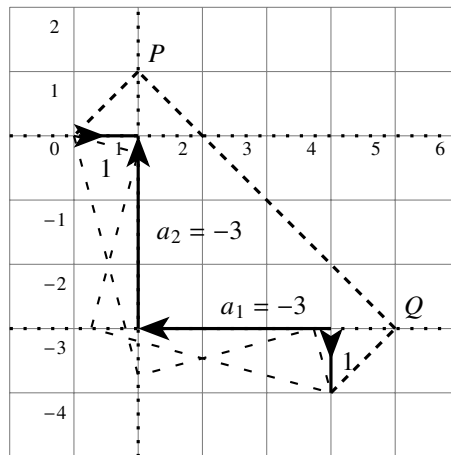


Fig. 11.4: Método de Lill con raíces negativas

longitud 1 a la derecha. A continuación, giramos  $90^\circ$  hacia arriba, pero como el coeficiente es negativo, construimos un segmento de longitud 3 hacia abajo, es decir, en dirección opuesta a la flecha. Tras girar  $90^\circ$  hacia la izquierda, el coeficiente vuelve a ser negativo, así que construimos un segmento de longitud 3 hacia la derecha. Por último, giramos hacia abajo y construimos un segmento de longitud 1 (Fig. 11.4, las líneas de trazos sueltos será discutido en Sec. 11.2.4).

Comencemos el segundo camino con una línea a  $45^\circ$  con el eje  $x$  positivo. Se cruza con la extensión del segmento de línea para  $a_2$  en  $(1, 1)$ . Girando  $-90^\circ$  (hacia la derecha), la recta interseca la prolongación de  $a_1$  en  $(5, -3)$ . Girando nuevamente  $-90^\circ$ , la recta interseca el final de la primera trayectoria en  $(4, -4)$ . Como  $-\tan 45^\circ = -1$ , hemos encontrado una raíz del polinomio:

$$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 6 = 0.$$

Los segundos trayectos con los siguientes ángulos intersecan el final de la primera trayectoria:

$$-\tan^{-1}(-1) = 45^\circ, \quad -\tan^{-1}(-2) \approx 63,4^\circ, \quad -\tan^{-1} 3 \approx -71,6^\circ.$$

Concluimos que hay tres raíces reales  $\{-1, -2, 3\}$ . Compruébalo:

$$(x+1)(x+2)(x-3) = (x^2+3x+2)(x-3) = x^3-7x-6.$$

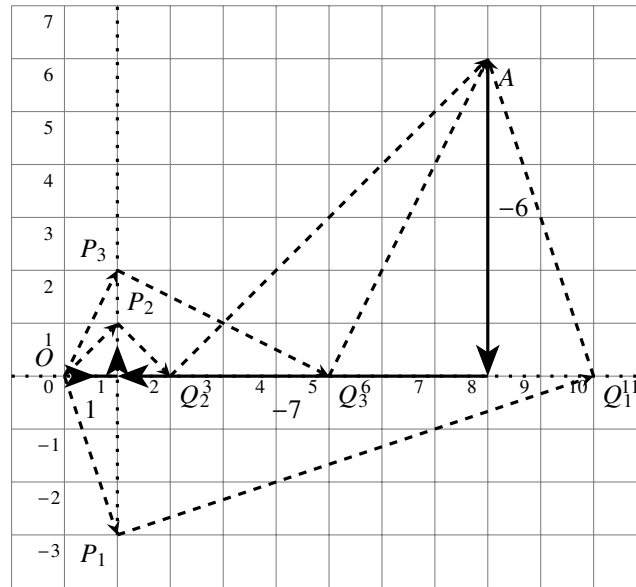


Fig. 11.5: Método de Lill con polinomios de coeficientes nulos

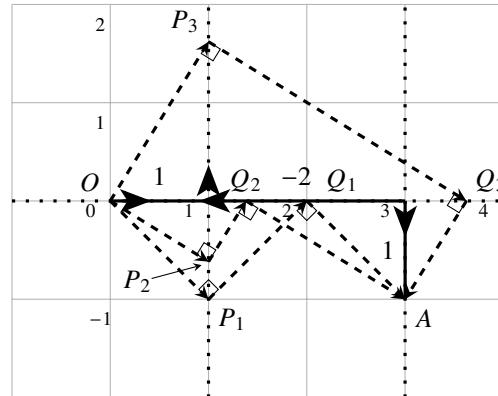


Fig. 11.6: Método de Lill con raíces no enteras

### 11.2.3 Coeficientes cero

$a_2$ , el coeficiente del término  $x^2$  del polinomio  $x^3 - 7x - 6 = 0$ , es cero. Trazamos un segmento de longitud 0, es decir, no trazamos una recta, pero sí giramos  $\pm 90^\circ$  como indica la flecha que apunta hacia arriba en  $(1, 0)$  en la figura 11.5. Giramos nuevamente y trazamos un segmento de longitud  $-7$ , es decir, de longitud 7 hacia atrás, hasta  $(8, 0)$ . Por último, giramos una vez más y trazamos un segmento de longitud  $-6$  a  $(8, 6)$ .

### 11.2.4 Raíces no enteras

La figura 11.6 muestra el método de Lill para  $p(x) = x^3 - 2x + 1$ . La primera trayectoria va de  $(0, 0)$  a  $(1, 0)$  y luego gira hacia arriba. El coeficiente de  $x^2$  es cero por lo que no se construye ningún segmento y el trayecto gira a la izquierda. El siguiente segmento es de longitud  $-2$  por lo que va hacia atrás desde  $(1, 0)$  hasta  $(3, 0)$ . Finalmente, el trayecto gira hacia abajo y se construye un segmento de longitud 1 desde  $(3, 0)$  hasta  $(3, -1)$ .

Es fácil ver que si la segunda trayectoria comienza en un ángulo de  $45^\circ$  se cruzará con la primera trayectoria en  $(3, -1)$ . Por lo tanto,  $-\tan^{-1}(-45)^\circ = 1$  es una raíz. Si dividimos  $p(x)$  entre  $x - 1$ , obtenemos el polinomio cuadrático  $x^2 + x - 1$  cuyas raíces son:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx 0,62, -1,62.$$

Hay dos segundas trayectorias adicionales: una que empieza en  $-\tan^{-1} 0,62 \approx -31,8^\circ$ , y otra que empieza en  $-\tan^{-1}(-1,62) \approx 58,3^\circ$ .



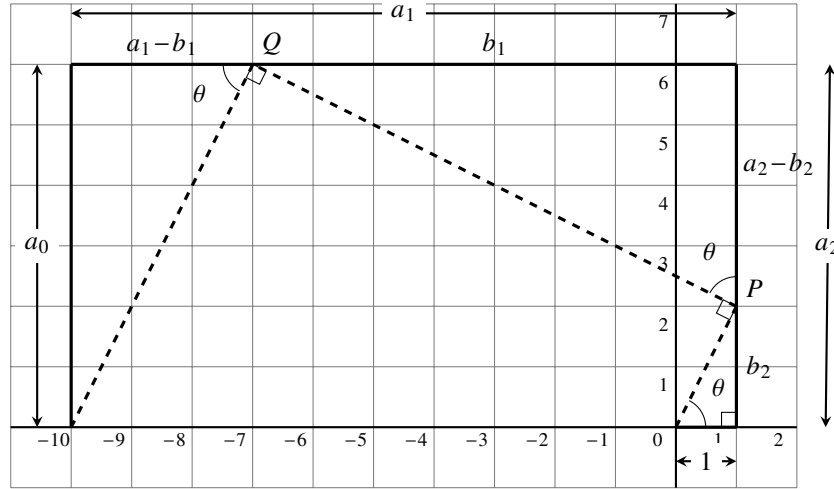


Fig. 11.8: Prueba del método de Lill

a partir de los tres triángulos:

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{b_2}{1} = b_2 \\ \tan \theta &= \frac{b_1}{a_2 - b_2} = \frac{b_1}{a_2 - \tan \theta} \\ \tan \theta &= \frac{a_0}{a_1 - b_1} = \frac{a_0}{a_1 - \tan \theta (a_2 - \tan \theta)}.\end{aligned}$$

Simplificamos la última ecuación, multiplicamos por  $-1$  e incluimos  $-1$  en las potencias:

$$\begin{aligned}(\tan \theta)^3 - a_2(\tan \theta)^2 + a_1(\tan \theta) - a_0 &= 0 \\ (-\tan \theta)^3 + a_2(-\tan \theta)^2 + a_1(-\tan \theta) + a_0 &= 0.\end{aligned}$$

Se deduce que  $-\tan \theta$  es una raíz real de  $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ .

#### 11.4 El pliegue de Beloch

Margarita P. Beloch descubrió una notable conexión entre el plegado y el método de Lill: una aplicación de la operación más tarde conocida como el sexto axioma del origami genera una raíz real de un polinomio cúbico. La operación se denomina a menudo *pliegue de belloch*.

Consideremos el polinomio  $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$  (Sec. 11.1). Recordemos que un pliegue es la mediatriz del segmento entre un punto cualquiera y su reflexión

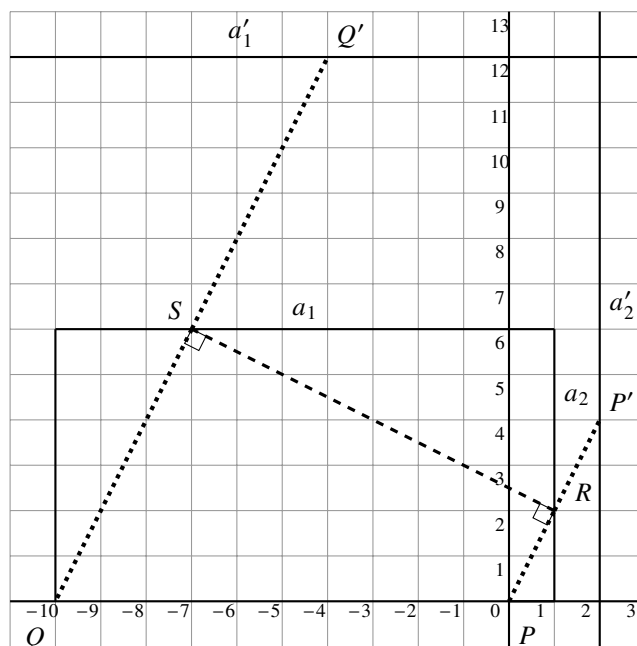


Fig. 11.9: El pliegue de Beloch para encontrar una raíz de  $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

alrededor del pliegue. Queremos que  $\overline{RS}$  en la figura 11.9 sea la mediatriz de  $\overline{QQ'}$  y  $\overline{PP'}$ , donde  $Q', P'$  son las reflexiones de  $Q, P$  alrededor de  $\overline{RS}$ , respectivamente.

Construimos una recta  $a'_2$  paralela a  $a_2$  a la misma distancia de  $a_2$  que  $a_2$  de  $P$ , y construimos una recta  $a'_1$  paralela a  $a_1$  a la misma distancia de  $a_1$  que  $a_1$  de  $Q$ . Aplicamos el axioma 6 para situar simultáneamente  $P$  en  $P'$  sobre  $a'_2$  y para situar  $Q$  en  $Q'$  sobre  $a'_1$ . El pliegue  $\overline{RS}$  es la mediatriz de las rectas  $\overline{PP'}$  y  $\overline{QQ'}$  por lo que los ángulos en  $R$  y  $S$  son ambos rectos como lo exige el método de Lill.

La figura 11.10 muestra el pliegue de Beloch para el polinomio  $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$  (Sec. 11.2.2).  $a_2$  es el segmento vertical de longitud 3 cuya ecuación es  $x = 1$ , y su recta paralela es  $a'_2$  cuya ecuación es  $x = 2$ , porque  $P$  está a una distancia de 1 de  $a_2$ .  $a_1$  es el segmento horizontal de longitud 3 cuya ecuación es  $y = -3$ , y su recta paralela es  $a'_1$  cuya ecuación es  $y = -2$  porque  $Q$  está a una distancia de 1 de  $a_1$ . El pliegue  $\overline{RS}$  es la mediatriz tanto de  $\overline{PP'}$  como de  $\overline{QQ'}$ , y la recta  $\overline{PRSQ}$  es la misma que la segunda trayectoria de la figura 11.4.

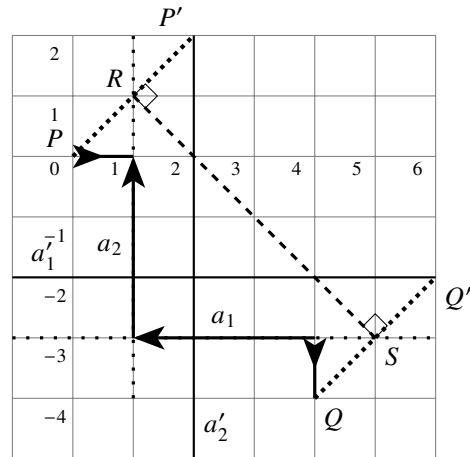


Fig. 11.10: El pliegue de Beloch para encontrar una raíz de  $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$

### ¿Cuál es la sorpresa?

Ejecutar el método de Lill como un truco de magia nunca deja de sorprender. Puede realizarse durante una presentación utilizando un programa de gráficos como GeoGebra. También sorprende que el método de Lill, publicado en 1867, y el pliegue de Beloch, publicado en 1936, precedieran en muchos años a la axiomatización del origami.

### Fuentes

Este capítulo se basa en [8, 24, 40].

## Capítulo 12

### Construcciones geométricas con origami

Este capítulo muestra que las construcciones con origami son más poderosas que las construcciones con regla y compás. Damos dos construcciones para trisecionar un ángulo, una de Hisashi Abe (Sec. 12.1) y la otra de George E. Martin (Sec. 12.2), dos construcciones para duplicar un cubo, una de Peter Messer (Sec. 12.3) y la otra de Marghareta P. Beloch (Sec. 12.4), y la construcción de un nonágono, un polinomio regular de nueve lados (Sec. 12.5).

#### 12.1 Trisección de Abe de un ángulo

**Construcción:** Dado un ángulo agudo  $\angle PQR$ , construimos  $p$ , la perpendicular a  $\overline{QR}$  en  $Q$ . Construimos  $q$ , la perpendicular a  $p$  que corta a  $\overline{PQ}$  en el punto  $A$ , y construimos  $r$ , la perpendicular a  $p$  en  $B$  que está a mitad de camino entre  $Q$  y  $A$ . Utilizando el axioma 6 construimos el pliegue  $l$  que sitúa  $A$  en  $A'$  sobre  $\overline{PQ}$  y  $Q$  en  $Q'$  sobre  $r$ . Sea  $B'$  el simétrico de  $B$  alrededor de  $l$ . Construimos rectas que pasen por  $\overline{QB'}$  y  $\overline{QQ'}$  (Fig. 12.1).

**Teorema 12.1.**  $\angle PQB' = \angle B'QQ' = \angle Q'QR = \angle PQR/3$ .

*Demostración.*

(1)  $A', B', Q'$  son reflexiones en torno a la recta  $l$  de los puntos  $A, B, Q$  sobre la recta  $\overline{DQ}$ , por lo que están sobre la recta  $\overline{DQ'}$  reflejada. Por construcción  $\overline{AB} = \overline{BQ}$ ,  $\angle ABQ' = \angle QBQ' = 90^\circ$  y  $\overline{BQ'}$  es un lado común, por lo que  $\triangle ABQ' \cong \triangle QBQ'$  por lado-ángulo-lado. Por lo tanto,  $\angle AQQ' = \angle QAQ' = \alpha$  por lo que  $\triangle AQQ'$  es isósceles (Fig. 12.2).

Por reflexión  $\triangle AQQ' \cong \triangle A'QQ'$ , por lo que  $\triangle A'QQ'$  es también un triángulo isósceles.  $\overline{QB'}$ , el reflejo de  $\overline{QB}$ , es la mediatriz de un triángulo isósceles, por lo que  $\angle A'QB' = \angle Q'QB' = \angle QQ'B = \alpha$ . Alternando los ángulos interiores,  $\angle Q'QR = \angle QQ'B = \alpha$ . En conjunto tenemos:

$$\angle PQB' = \angle A'QB' = \angle B'QQ' = \angle Q'QR = \alpha .$$

□

*Demostración.*

(2) Como  $l$  es un pliegue es la mediatriz de  $\overline{QQ'}$ . Denotemos la intersección de  $l$  con  $\overline{QQ'}$  con  $U$  y su intersección con  $\overline{QB'}$  por  $V$  (Fig. 12.2). Por tanto,  $\triangle VUQ \cong \triangle VUQ'$  por lado-ángulo-lado ya que  $\overline{VU}$  es un lado común, los ángulos en  $U$  son ángulos



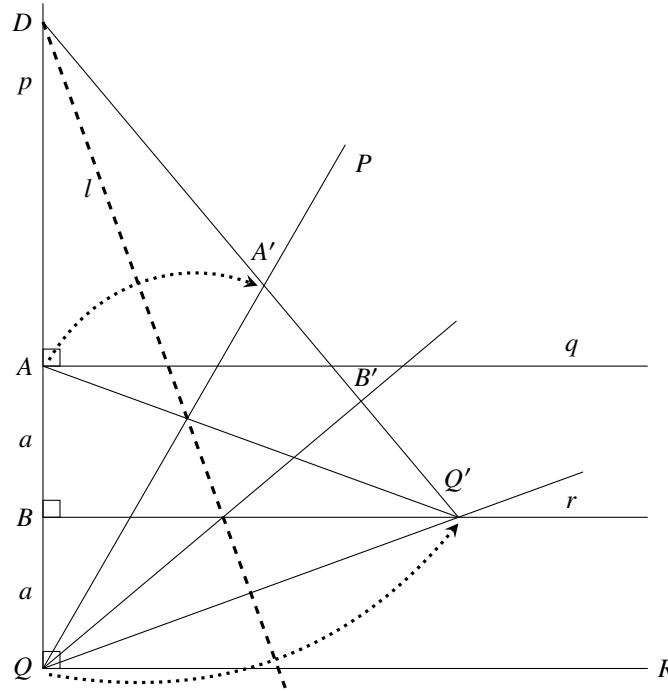


Fig. 12.1: Trisección de Abe

rectos y  $\overline{QU} = \overline{Q'U}$ . Por tanto,  $\angle VQU = \angle VQ'U = \angle \alpha$  y  $\angle Q'QR = \angle VQ'U = \angle \alpha$  por alternancia de ángulos interiores.

Como en la primera demostración  $A', B', Q'$  son todas reflexiones alrededor de  $l$ , por lo que están sobre la recta  $\overline{DQ'}$  y  $\overline{A'B'} = \overline{AB} = \overline{BQ} = \overline{B'Q'} = a$ . Entonces  $\triangle A'B'Q \cong \triangle Q'B'Q$  por lado-ángulo-lado y  $\angle A'QB' = \angle Q'QB' = \alpha$ .  $\square$

## 12.2 Trisección de Martin

**Construcción:** Dado un ángulo agudo  $\angle PQR$ , sea  $M$  el punto medio de  $\overline{PQ}$ . Construimos  $p$  la perpendicular a  $\overline{QR}$  por  $M$  y construimos  $q$  la perpendicular a  $p$  por  $M$  de modo que  $q \parallel \overline{QR}$ . Utilizando el axioma 6 construimos el pliegue  $l$  que sitúe  $P$  en  $P'$  sobre  $p$  y  $Q$  en  $Q'$  sobre  $q$ . Si más de un pliegue es posible, elegimos el que interseca  $\overline{PM}$ . Construimos  $\overline{PP'}$  y  $\overline{QQ'}$  (Fig. 12.3).

**Teorema 12.2.**  $\angle Q'QR = \angle PQR/3$ .

*Demostración.* Denotemos con  $U$  y  $V$  la intersección de  $\overline{QQ'}$  con  $p$  y su intersección con  $l$ . Denotemos la intersección de  $\overline{PQ}$  y  $\overline{P'Q'}$  con  $l$  por  $W$ . No es inmediato que



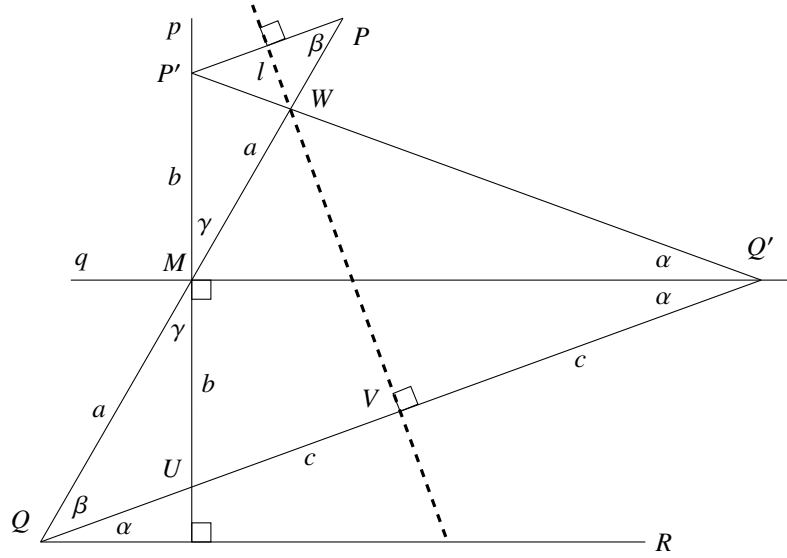


Fig. 12.3: Trisección de Martin

### 12.3 Duplicación de un cubo de Messer

Un cubo de volumen  $V$  tiene lados de longitud  $\sqrt[3]{V}$ . Un cubo con el doble de volumen tiene caras de longitud  $\sqrt[3]{2V} = \sqrt{2}\sqrt[3]{V}$ , por lo que si pudiéramos construir  $\sqrt{2}$  pudiéramos multiplicar por la longitud dada  $\sqrt[3]{V}$  para duplicar el cubo.

**Construcción:** Dividimos el lado de un cuadrado unitario en tercios de la siguiente manera: Doblamos el cuadrado por la mitad para localizar los puntos  $I = (0, 1/2)$  y  $J = (1, 1/2)$ . A continuación construimos las rectas  $\overline{AC}$  y  $\overline{BJ}$  (Fig. 12.4). El punto de intersección  $K = (2/3, 1/3)$  se obtiene resolviendo las dos ecuaciones  $y = 1 - x$  y  $y = x/2$ .

Construimos  $\overline{EF}$ , la perpendicular a  $\overline{AB}$  que pasa por  $K$ , y construimos la reflexión  $\overline{GH}$  de  $\overline{BC}$  alrededor de  $\overline{EF}$ . Ahora el lado del cuadrado se ha dividido en tercios.

Utilizando el axioma 6 situamos  $C$  en  $C'$  de  $\overline{AB}$  y  $F$  en  $F'$  de  $\overline{GH}$ . Denotemos por  $L$  el punto de intersección del pliegue con  $\overline{BC}$  y con  $b$  la longitud de  $\overline{BL}$ . Renombramos  $a + 1$  la longitud del lado del cuadrado donde  $a = \overline{AC'}$ . La longitud de  $\overline{LC}$  es  $(a + 1) - b$ . (Fig. 12.5).

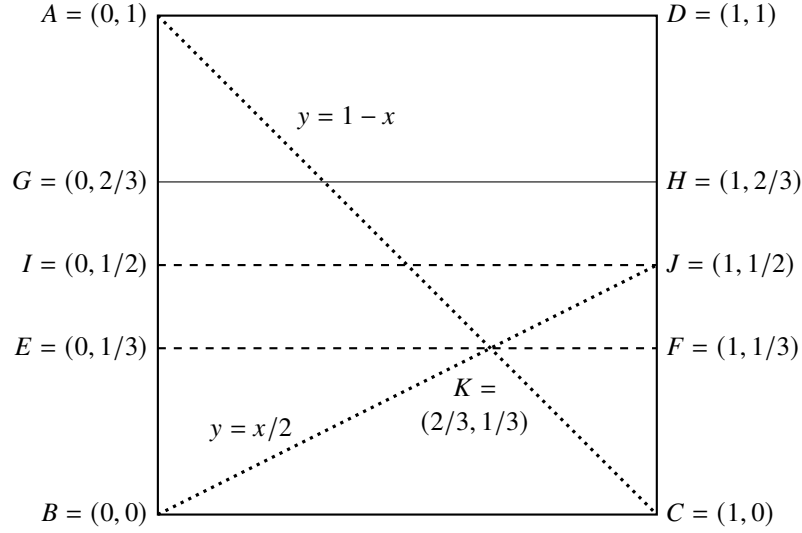


Fig. 12.4: División una longitud en tercios

**Teorema 12.3.**  $\overline{AC'} = \sqrt[3]{2}$ .

*Demostración.* Al realizar el pliegue, el segmento  $\overline{LC}$  se refleja en el segmento  $\overline{LC'}$  y  $\overline{CF}$  se refleja en el segmento  $\overline{C'F'}$ . Por lo tanto:

$$\overline{GC'} = a - \frac{a+1}{3} = \frac{2a-1}{3}. \quad (12.1)$$

Como  $\angle FCL$  es un ángulo recto, también lo es  $\angle F'C'L$ .

$\triangle C'BL$  es un triángulo rectángulo así que por el Teorema de Pitágoras:

$$1^2 + b^2 = ((a+1) - b)^2 \quad (12.2a)$$

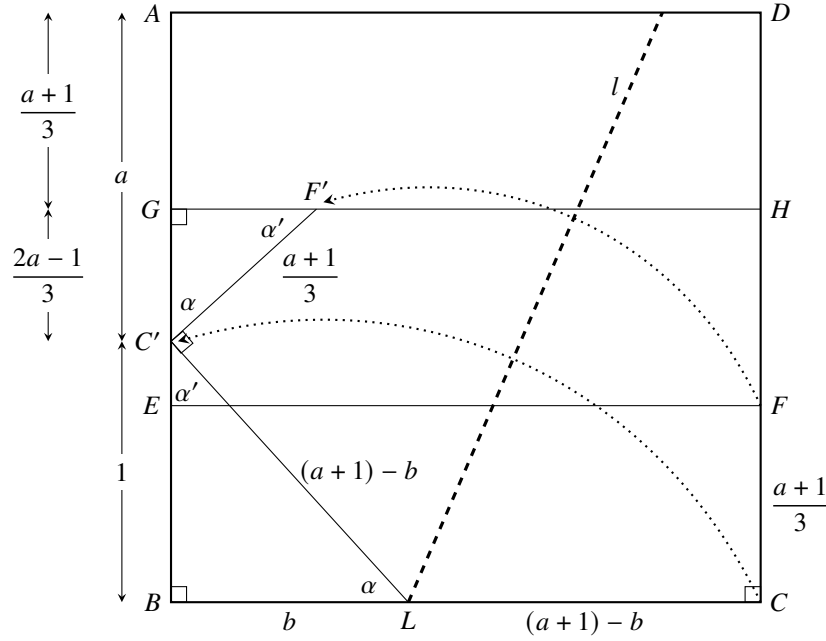
$$b = \frac{a^2 + 2a}{2(a+1)}. \quad (12.2b)$$

$\angle GC'F' + \angle F'C'L + \angle LC'B = 180^\circ$  ya que forman la recta  $\overline{GB}$ . Denotemos  $\angle GC'F'$  con  $\alpha$ . Entonces:

$$\angle LC'B = 180^\circ - \angle F'C'L - \angle GC'F' = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha,$$

que denotamos con  $\alpha'$ . Los triángulos  $\triangle C'BL$ ,  $\triangle F'GC'$  son triángulos rectángulos por lo que  $\angle C'LB = \alpha$  y  $\angle C'F'G = \alpha'$ . Por lo tanto,  $\triangle C'BL \sim \triangle F'GC'$  y:

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{C'L}} = \frac{\overline{GC'}}{\overline{C'F'}}.$$

Fig. 12.5: Construcción de  $\sqrt[3]{2}$ 

Usando la Ecuación 12.1 tenemos:

$$\frac{b}{(a+1) - b} = \frac{\frac{2a-1}{3}}{\frac{a+1}{3}}.$$

Sustituimos  $b$  usando la Ecuación 12.2b da:

$$\frac{\frac{a^2 + 2a}{2(a+1)}}{(a+1) - \frac{a^2 + 2a}{2(a+1)}} = \frac{2a-1}{a+1}.$$

Simplificamos la ecuación obteniendo  $a^3 = 2$  y  $a = \sqrt[3]{2}$ . □

#### 12.4 La duplicación de un cubo de Beloch

Dado que el pliegue de Beloch (Axioma 6) puede resolver ecuaciones cúbicas, es razonable conjeturar que puede utilizarse para doblar un cubo. Aquí damos una construcción directa que utiliza el pliegue.

**Construcción:** Sea  $A = (-1, 0)$ ,  $B = (0, -2)$ . Sea  $p$  la recta  $x = 1$  y sea  $q$  la recta  $y = 2$ . Utilizar el pliegue de Beloch para construir el pliegue  $l$  que sitúa  $A$  en  $A'$  sobre  $p$  y  $B$  en  $B'$  sobre  $q$ . Denotemos con  $Y$  la intersección del pliegue y el eje  $y$  y con  $X$  la intersección del pliegue y el eje  $x$ . (Fig. 12.6).

**Teorema 12.4.**  $\overline{OY} = \sqrt[3]{2}$ .

*Demostración.* El pliegue es la mediatriz de  $\overline{AA'}$  y  $\overline{BB'}$  por lo que  $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$ . Por ángulos interiores alternos  $\angle YAO = \angle BXO = \alpha$ . Los nombres de los otros ángulos en la figura son de acuerdo a las propiedades de los triángulos rectángulos.

$\triangle AOY \sim \triangle YOX \sim \triangle XOB$  y  $\overline{OA} = 1$ ,  $\overline{OB} = 2$  se dan así:

$$\frac{\overline{OY}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OX}}$$

$$\frac{\overline{OY}}{1} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{2}{\overline{OX}}.$$

De la primera y de la segunda relaciones tenemos  $\overline{OX} = \overline{OY}^2$  y de la primera y de la tercera relaciones tenemos  $\overline{OY} \overline{OX} = 2$ . Sustituyendo por  $\overline{OX}$  se obtiene  $\overline{OY}^3 = 2$  y  $\overline{OY} = \sqrt[3]{2}$ .  $\square$

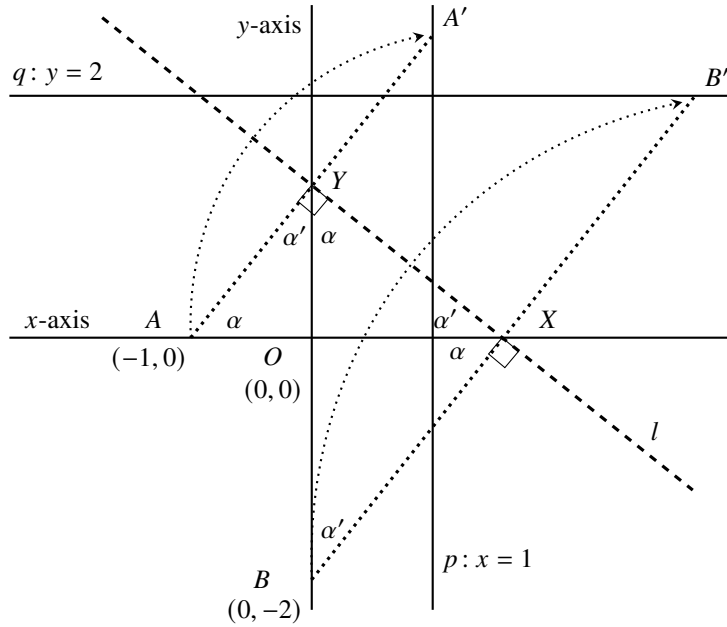


Fig. 12.6: La duplicación del cubo de Beloch

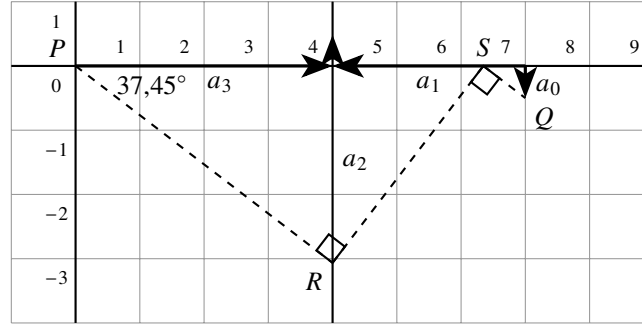


Fig. 12.7: Método de Lill para un nonágono

### 12.5 Construcción de un nonágono regular

Se construye un nonágono o eneágono (polígono regular de nueve lados) derivando la ecuación cúbica de su ángulo central y resolviendo la ecuación mediante el método de Lill y el pliegue de Beloch. El ángulo central es  $\theta = 360^\circ/9 = 40^\circ$ . Por el Teorema A.6:

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta.$$

Sea  $x = \cos 40^\circ$ . Entonces para el nonágono la ecuación es  $4x^3 - 3x + (1/2) = 0$  ya que  $\cos 3 \cdot 40^\circ = \cos 120^\circ = -(1/2)$ . La figura 12.7 muestra las trayectorias para la ecuación construida según el método de Lill.

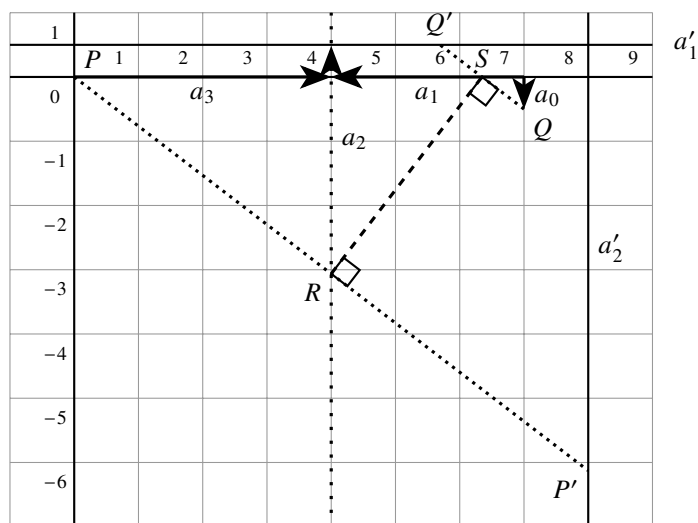
La segunda trayectoria parte de  $P$  con un ángulo aproximado de  $-37,45^\circ$ . Giros de  $90^\circ$  en  $R$  y luego de  $-90^\circ$  en  $S$  hacen que la trayectoria intersecte a la primera en su punto final  $Q$ . Por lo tanto,  $x = -\tan(-37,45^\circ) \approx 0,766$  es una raíz de

$$4x^3 - 3x + (1/2)$$

La raíz se puede obtener utilizando el pliegue de Beloch. Construimos la recta  $a'_2$  paralela a  $a_2$  a la misma distancia de  $a_2$  que  $a_2$  de  $P$ . Aunque la longitud de  $a_2$  es cero, sigue teniendo dirección (hacia arriba), por lo que se puede construir la recta paralela. Análogamente, se construye la recta  $a'_1$  paralela a  $a_1$  a la misma distancia de  $a_1$  que  $a_1$  de  $Q$ . El pliegue de Beloch  $\overline{RS}$  sitúa simultáneamente  $P$  en  $P'$  sobre  $a'_2$  y  $Q$  en  $Q'$  sobre  $a'_1$ . Esto construye el ángulo  $\angle SPR = -37,45^\circ$  (Fig. 12.8).

Por el método de Lill,  $-\tan(-37,45^\circ) \approx 0,766$  y por tanto  $\cos \theta \approx 0,766$  es una raíz de la ecuación del ángulo central  $\theta$ . Concluimos la construcción del nonágono construyendo  $\cos^{-1} 0,766 \approx 40^\circ$ .

El triángulo rectángulo  $\triangle ABC$  con  $\angle CAB \approx 37,45^\circ$  y  $\overline{AB} = 1$  tiene lado opuesto  $\overline{BC} \approx 0,766$  por definición de tangente (Fig. 12.9). Plegamos  $\overline{CB}$  sobre la  $\overline{AB}$  de



modo que el reflejo de  $C$  sea  $D$  y  $\overline{DB} = 0,766$ . Extendemos  $\overline{DB}$  y construimos  $E$  de modo que  $\overline{DE} = 1$ . Plegamos  $\overline{DE}$  para reflejar  $E$  en  $F$  en la extensión de  $\overline{BC}$  (Fig. 12.10). Entonces:

$$\angle BDF = \cos^{-1} \frac{0,766}{1} \approx 40^\circ.$$

Vimos en los capítulos 2 y 3 que herramientas como el neusis pueden realizar construcciones que no se pueden hacer con una regla y un compás. Es sorprendente que la trisección de un ángulo y la duplicación de un cubo puedan construirse utilizando sólo papel plegado. Roger C. Alperin ha desarrollado una jerarquía de cuatro métodos de construcción cada uno más potente que el anterior.

Este capítulo se basa en [2, 26, 31, 36].



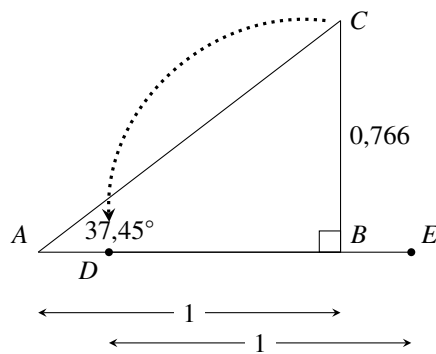


Fig. 12.9: La tangente que es la solución de la ecuación del nonágono

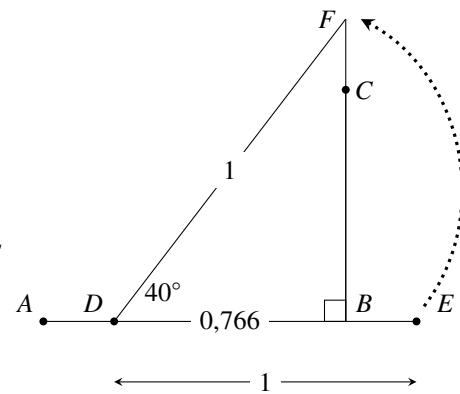


Fig. 12.10: El coseno del ángulo central del nonágono

## Capítulo 13

### Un compás es suficiente

En 1797 Lorenzo Mascheroni demostró que cualquier construcción realizada con regla y compás puede realizarse sólo con compás. Más tarde se supo que este teorema ya había sido demostrado por Georg Mohr en 1672. Después de explicar en Sec. 13.1 lo que se entiende por la realización de una construcción con sólo un compás, la demostración se presenta en etapas a partir de cuatro construcciones auxiliares: la reflexión de un punto (Sec. 13.2), la construcción de un círculo con un radio dado (Sec. 13.3), suma y resta de segmentos (Sec. 13.4) y construcción de un segmento como cociente de segmentos (Sec. 13.5). La sección 13.6 muestra cómo encontrar la intersección de dos líneas y la sección 13.7 muestra cómo encontrar la intersección de una línea y un círculo.

#### 13.1 ¿Qué es una construcción con sólo un compás?

Figura 13.1 muestra la construcción de un triángulo equilátero utilizando una regla y un compás. ¿Cómo podemos construir un triángulo sin los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$ ? Un segmento está definido por dos puntos, por lo que basta con construir estos puntos para obtener una construcción equivalente a la realizada con regla (Fig. 13.2). No es necesario *ver* realmente los segmentos. Habrá líneas en las figuras de este capítulo, pero se utilizan sólo para entender la construcción y la demostración de su exactitud. Es importante convencerse de que la construcción en sí utiliza sólo un compás.

Una construcción con regla y compás es una secuencia de tres operaciones:

- Hallar el punto de intersección de dos rectas.

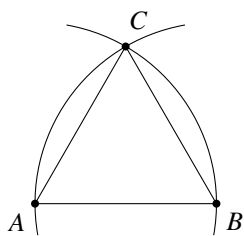


Fig. 13.1: Construcción de un triángulo equilátero con regla y compás

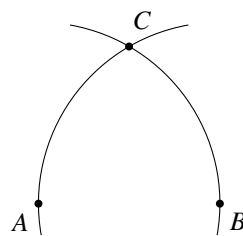


Fig. 13.2: Construcción de un triángulo equilátero con sólo un compás

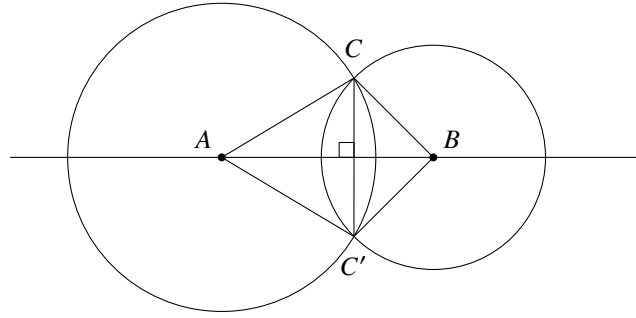


Fig. 13.3: Construcción de un reflejo

- Hallar el punto o puntos de intersección de una recta y una circunferencia.
- Hallar el punto o puntos de intersección de dos circunferencias.

La tercera operación se puede hacer sólo con un compás. Tenemos que demostrar que las dos primeras operaciones se pueden hacer sólo con un compás.

Notation:

- $c(O, A)$ : la circunferencia con centro  $O$  que pasa por el punto  $A$ .
- $c(O, r)$ : la circunferencia con centro  $O$  y radio  $r$ .
- $c(O, \overline{AB})$ : la circunferencia con centro  $O$  y radio la longitud del segmento  $\overline{AB}$ .

### 13.2 Reflexión de un punto

**Definición 13.1.** Un punto  $C'$  es un *reflejo* del punto  $C$  alrededor de un segmento  $\overline{AB}$  si y sólo si  $\overline{AB}$  (o la recta que contiene a  $\overline{AB}$ ) es la mediatriz del segmento  $\overline{CC'}$ .

**Teorema 13.1.** Dada una recta  $\overline{AB}$  y un punto  $C$  que no está en  $\overline{AB}$ , es posible construir  $C'$ , la reflexión de  $C$  alrededor de  $\overline{AB}$ .

*Demostración.* Construimos una circunferencia centrada en  $A$  que pase por  $C$  y una circunferencia centrada en  $B$  que pase por  $C$ . La otra intersección de las dos circunferencias es el punto  $C'$  que es la reflexión de  $C$  (Fig. 13.3).  $\triangle ABC \cong \triangle ABC'$  por lado-lado ya que  $\overline{AC}, \overline{AC'}$  son radios de la misma circunferencia, al igual que  $\overline{BC}, \overline{BC'}$  y  $\overline{AB}$  es un lado común. Por lo tanto,  $\angle CAB = \angle C'AB$  por lo que  $\overline{AB}$  es la bisectriz del ángulo  $\angle CAC'$ . Pero  $\triangle CAC'$  es un triángulo isósceles y la bisectriz del ángulo  $\overline{AB}$  es también la mediatriz de  $\overline{CC'}$ , la base de  $\triangle CAC'$ . Por definición  $C'$  es la reflexión de  $C$  alrededor de  $\overline{AB}$ .  $\square$

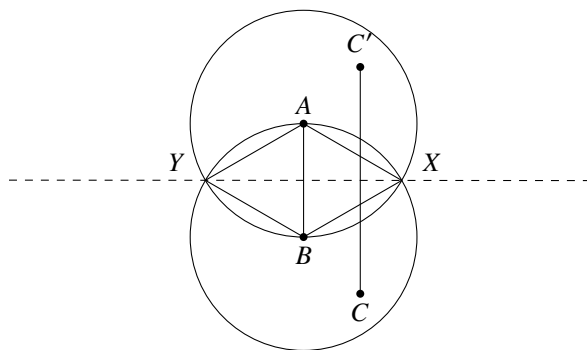


Fig. 13.4: Construcción de un círculo de radio determinado (1)

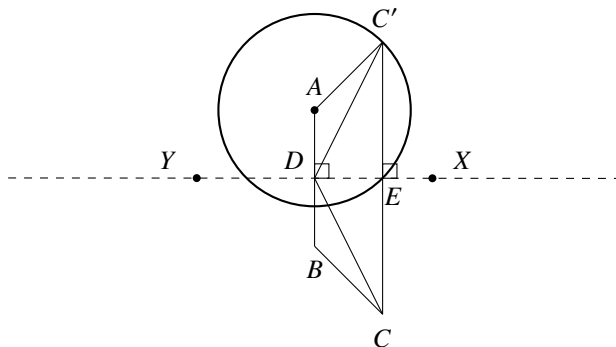


Fig. 13.5: Construcción de un círculo de radio determinado (2)

### 13.3 Construcción de un círculo de radio dado

**Teorema 13.2.** *Dados los puntos  $A, B, C$  es posible construir  $c(A, \overline{BC})$ , la circunferencia centrada en  $A$  con radio  $\overline{BC}$ .*

*Demostración.* Construimos  $c(A, B)$  y  $c(B, A)$  y tal que  $X, Y$  son sus puntos de intersección (Fig. 13.4).  $A$  es el reflejo de  $B$  alrededor de  $\overline{XY}$  ya que  $\triangle YAX \cong \triangle YBX$  porque tienen sus tres lados correspondientes iguales. Por el Teorema 13.1 construimos  $C'$ , el reflejo de  $C$  alrededor de  $\overline{XY}$  y luego construimos  $c(A, \overline{AC'})$  (Fig. 13.5).

$\overline{XY}$  es la mediatriz de  $\overline{CC'}$  y  $\overline{AB}$ . Denotemos con  $D$  a la intersección de  $\overline{XY}$  y  $\overline{AB}$  y con  $E$  la intersección de  $\overline{XY}$  y  $\overline{CC'}$ . Entonces  $\overline{C'E} = \overline{EC}$ ,  $\overline{AD} = \overline{DB}$  y  $\angle DEC = \angle DEC'$  es un ángulo recto, por lo que  $\triangle DEC \cong \triangle DEC'$  por lado-

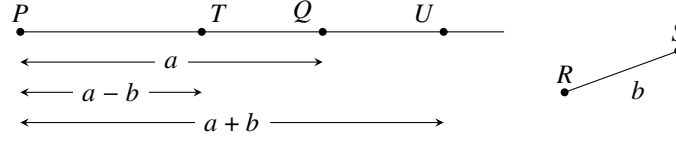


Fig. 13.6: Suma y resta de segmentos

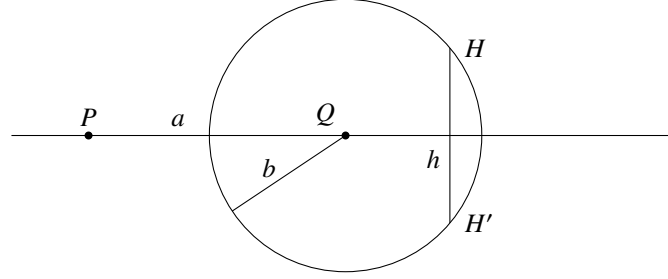


Fig. 13.7: Construcción de un trapecio isósceles (1)

ángulo-lado. Por tanto,  $\overline{DC} = \overline{DC'}$  y  $\angle ADC' = \angle BDC$  (son complementarios de  $\angle EDC' = \angle EDC$ ). Se deduce que  $\triangle ADC' \cong \triangle BDC$  por lado-ángulo-lado por lo que  $\overline{AC'} = \overline{BC}$ .  $\square$

#### 13.4 Suma y resta de segmentos

**Teorema 13.3.** Dado un segmento  $\overline{PQ}$  de longitud  $a$  y un segmento  $\overline{RS}$  de longitud  $b$ , es posible construir segmentos  $\overline{QT}, \overline{QU}$  tales que  $\overline{PTQU}$  es un segmento, la longitud de  $\overline{PT}$  es  $a - b$  y la longitud de  $\overline{PU}$  es  $a + b$  (Fig. 13.6).

La demostración es bastante larga y se presentará como una secuencia de construcciones.

**Teorema 13.4.** Se puede construir un trapecio isósceles.

*Demostración.* Sea  $H$  un punto cualquiera sobre  $c(Q, b)$ . Construimos  $H'$  su reflexión en torno a  $\overline{PQ}$ . Denotemos la longitud de  $\overline{HH'}$  por  $h$  (Fig. 13.7). Construimos las circunferencias  $c(H, b)$ ,  $c(Q, h)$ . Sea  $K$  un punto de intersección de las circunferencias y construyamos  $K'$  la reflexión de  $K$  en torno a  $\overline{PQ}$  (Fig. 13.8). La recta que contiene  $\overline{PQ}$  es la mediatriz de  $\overline{HH'}$  y  $\overline{KK'}$  por lo que  $\overline{HH'} \parallel \overline{KK'}$ .  $\overline{KH} = b$  ya que es el radio de la circunferencia centrada en  $H$ , y  $K', H'$  son reflexiones de  $K, H$ .  $\triangle QQ'H \cong \triangle QQ'H'$  por lado-ángulo-lado y  $\triangle KQH \cong \triangle K'QH'$  por lado-lado-lado,

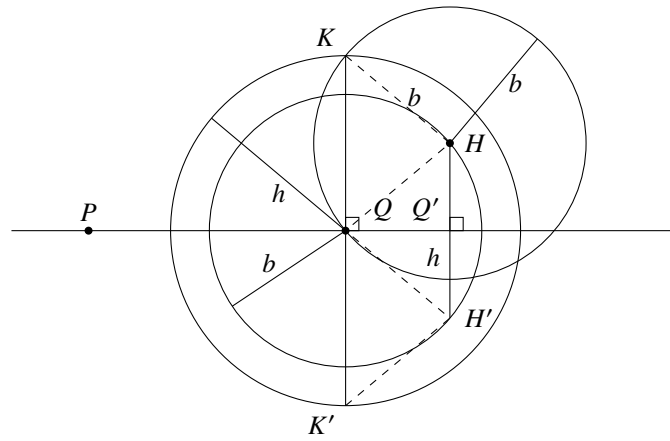


Fig. 13.8: Construcción de un trapecio isósceles (2)

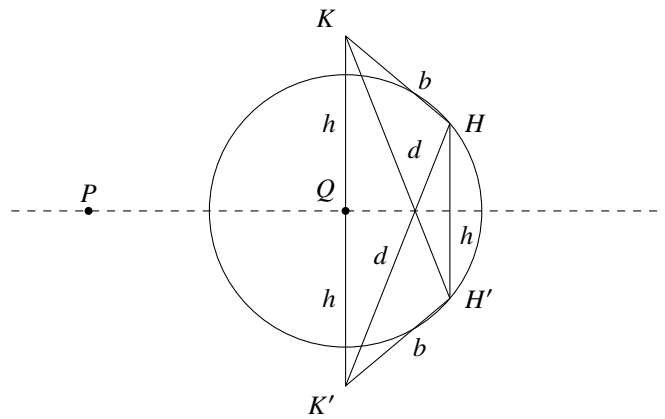


Fig. 13.9: Construcción de un trapecio isósceles (3)



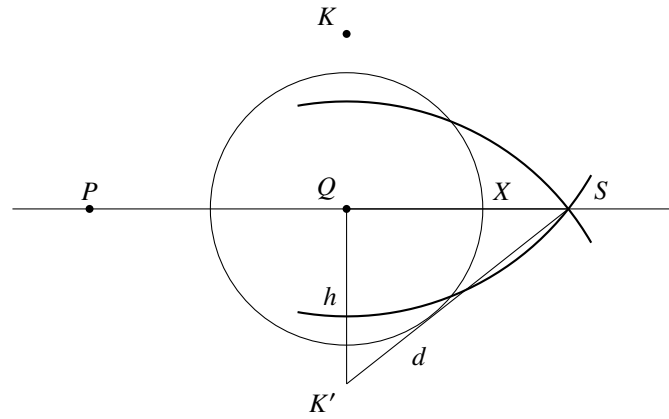


Fig. 13.11: Construcción del punto para sumar y restar segmentos (1)

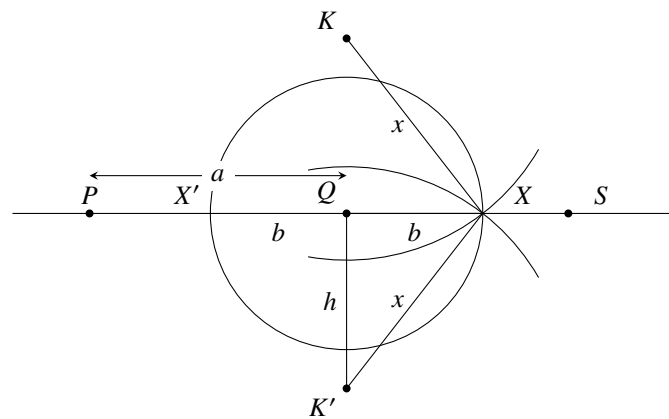
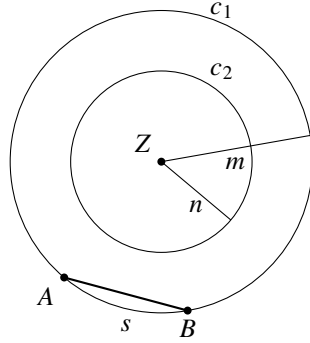
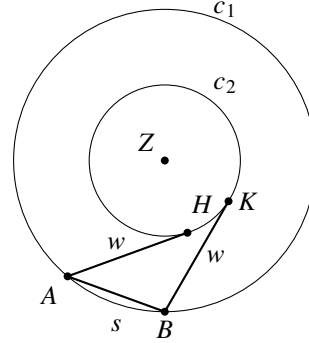


Fig. 13.12: Construcción del punto para sumar y restar segmentos (2)



Fig. 13.13: Construcción de  $x = \frac{n}{m}s$ , paso 1Fig. 13.14: Construcción de  $x = \frac{n}{m}s$ , paso 2

### 13.5 Construcción de un segmento como cociente de segmentos

**Teorema 13.7.** *Dados segmentos de longitud  $n, m, s$ , es posible construir un segmento de longitud:*

$$x = \frac{n}{m}s.$$

*Demostración.* Construimos dos circunferencias concéntricas  $c_1 = c(Z, m)$  y  $c_2 = c(Z, n)$ <sup>1</sup>, y elegimos un punto arbitrario  $A$  en  $c_1$ . Por el Teorema 13.2 construimos una cuerda  $\overline{AB}$  de longitud  $s$  sobre  $c_1$  (Fig. 13.13). Si  $\overline{AB}$  interseca  $c_2$ , por Teorema 13.3 multiplicamos  $m, n$  por un número  $k$  para que la cuerda no interseca el círculo. Notemos que esto no cambia el valor que estamos tratando de construir pues  $x = \frac{kn}{km}s = \frac{n}{m}s$ .

Elegimos un punto  $H$  en  $c_2$  y denotamos con  $w$  la longitud de  $\overline{AH}$ . Construimos  $K$  sobre  $c_2$  tal que la longitud de  $\overline{BK}$  sea  $w$  (Fig. 13.14). De  $\triangle AHZ \cong \triangle BZK$  por lado-lado-lado ya que  $\overline{ZA} = \overline{ZB} = m$  son los radios del mismo círculo, como lo son  $\overline{ZH} = \overline{ZK} = n$ , y  $\overline{AH} = \overline{BK} = w$  por construcción (Fig. 13.15). De  $\triangle AHZ \cong \triangle BZK$  se deduce  $\angle AZH = \angle BZK$  y entonces  $\angle AZB = \angle HZK$ . Es difícil ver esta igualdad desde el diagrama, pero la figura 13.16 debería aclarar la relación entre los ángulos.

$\triangle ZAB \sim \triangle ZHK$  ya que ambos son triángulos isósceles y hemos demostrado que tienen el mismo ángulo vértice. Si denoto  $\overline{HK}$  con  $x$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} &= \frac{n}{x} \\ x &= \frac{n}{m}s. \end{aligned}$$

□

<sup>1</sup>Suponemos que  $m > n$ ; si no, cambiamos la notación.

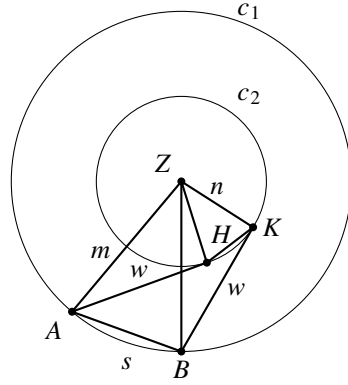


Fig. 13.15: Construcción de  $x = \frac{n}{m}s$ ,  
paso 3

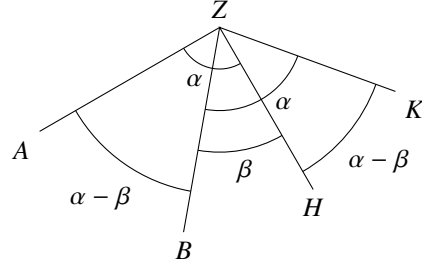


Fig. 13.16:  $\angle AZB = \angle HZK$

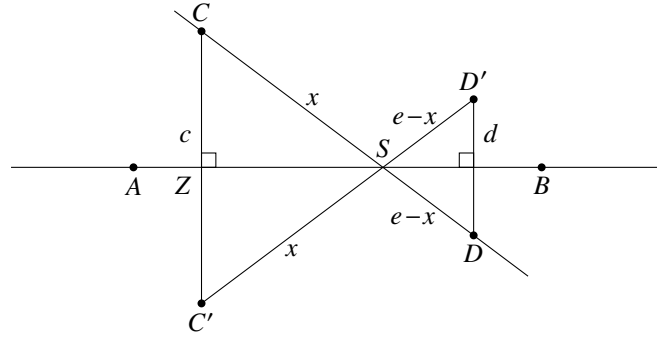


Fig. 13.17: Construcción de la intersección de dos líneas (1)

### 13.6 Construcción de la intersección de dos líneas

**Teorema 13.8.** Dadas dos rectas que contienen los segmentos  $\overline{AB}, \overline{CD}$ , es posible construir su intersección  $S$ .

*Demostración.* Sean  $C', D'$  las reflexiones de  $C, D$  alrededor de  $\overline{AB}$ . Hay dos casos dependiendo de si  $C, D$  se encuentran en el mismo lado de  $\overline{AB}$  o en lados diferentes. Denominamos  $x = \overline{CS}, c = \overline{CC'}, d = \overline{DD'}, e = \overline{CD}$  como se muestra en las Figs. 13.17, 13.18. Calculamos el valor de  $x$  para cada caso.

*Caso 1:*  $C, D$  están en lados distintos de  $\overline{AB}$ .  $S$  está en  $\overline{AB}$  porque  $\triangle CZS \cong \triangle C'ZS$  por lado-ángulo-lado:  $\overline{CZ} = \overline{C'Z}$ ,  $\angle CZS = \angle C'ZS = 90^\circ$  y  $\overline{ZS}$  es un lado común. Por tanto  $\overline{C'S} = \overline{CS}$  y análogamente  $\overline{D'S} = \overline{DS}$ .  $\triangle CSC' \sim \triangle DSD'$  son semejantes por lo que  $\frac{x}{e-x} = \frac{c}{d}$  y resolviendo la ecuación se obtiene  $x = \frac{c}{c+d}e$ .

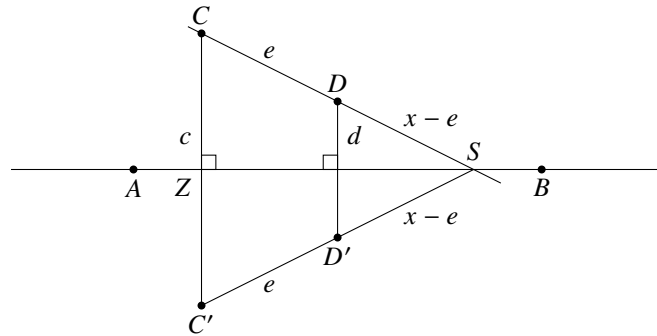
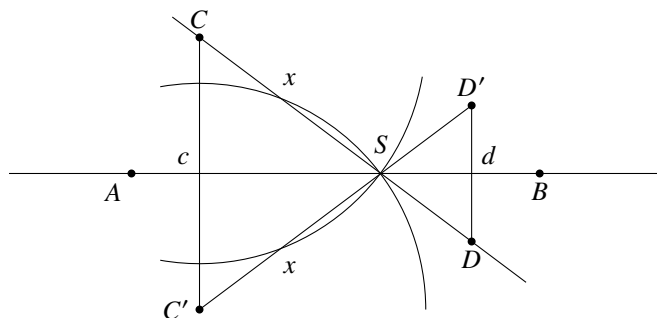


Fig. 13.19: Construcción de la intersección de dos líneas (3)



*Caso 2:*  $C, D$  están en el mismo lado de  $\overline{AB}$ .  $\triangle CSC' \sim \triangle DSD'$  da  $\frac{x}{x-e} = \frac{c}{d}$  y resolviendo la ecuación se obtiene  $x = \frac{c}{c-d}e$ .

$H$  es la intersección de  $c(C', d), c(D, e)$  por lo que  $\overline{DH} = e, \overline{CH} = d$ . Por construcción  $\overline{C'D'} = e, \overline{D'D} = d$  por lo que el cuadrilátero  $\overline{C'D'DH}$  es un paralelogramo.

Por construcción  $\overline{DD'} \parallel \overline{CC'}$  entonces  $\overline{C'H} \parallel \overline{DD'}$  y por tanto  $\overline{C'H} \parallel \overline{CC'}$ . Como uno de sus extremos es  $C'$  debe estar en la recta que contiene a  $\overline{CC'}$ . Por el Teorema 13.3, a partir de las longitudes  $c, d, e$  se puede construir un segmento de longitud  $c + d$  y por el Teorema 13.7 se puede construir un segmento de longitud  $x = \frac{c}{c+d}e$ .  $S$ , la intersección de  $c(C', x)$  y  $c(C, x)$ , es también la intersección de  $\overline{AB}, \overline{CD}$  (Fig. 13.20).  $\square$

### 13.7 Construcción de la intersección de una recta y una circunferencia

**Teorema 13.9.** *Dada una circunferencia  $k = C(M, r)$  y una recta  $l$  es posible construir las intersecciones de  $k$  y  $l$ .*

*Demostración.* Construimos  $M'$ , la reflexión de  $M$  alrededor de  $l$  y construimos la circunferencia  $k' = c(M', r)$ . Como  $\triangle MYM' \cong \triangle MXM'$ ,  $X, Y$ , los puntos de intersección de  $k, k'$ , son los puntos de intersección de  $l$  y  $k$ . (Fig. 13.21).

Esta construcción no puede hacerse si  $M$  está sobre la recta  $l$ . En ese caso se elige un punto arbitrario  $A$  sobre  $l$  que esté a una distancia mayor que  $r$  de  $M$ . Usando el

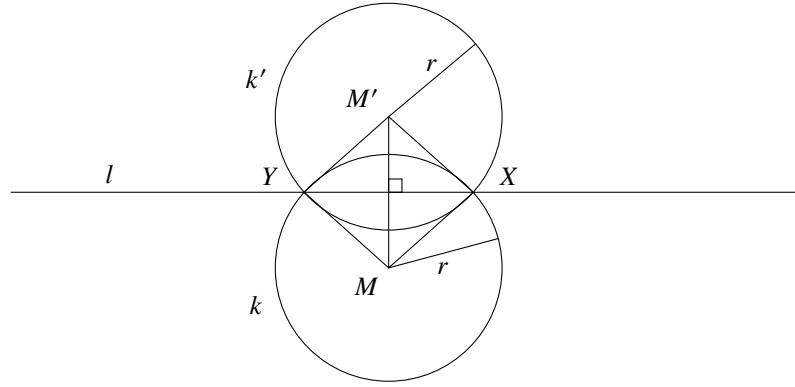


Fig. 13.21: Construcción de la intersección de una recta y una circunferencia (1)

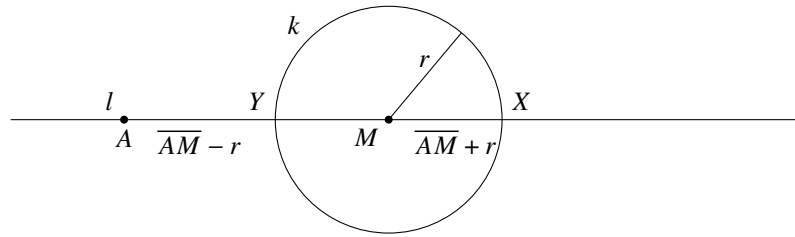


Fig. 13.22: Construcción de la intersección de una recta y una circunferencia (2)

teorema 13.3 acortamos y alargamos  $\overline{AM}$  en  $r$ .  $X, Y$ , los puntos extremos de estos segmentos, son las intersecciones de  $k$  y  $l$  (Fig. 13.22).  $\square$

### ¿Cuál es la sorpresa?

Cuando se aprende a construir con regla y compás, es obvio que ambas herramientas son necesarias. Por lo tanto, fue toda una sorpresa descubrir que un compás es suficiente. La demostración es bastante larga, así que no vamos a dejar la regla en casa, pero el teorema demuestra que no debemos suponer que no existen alternativas a conceptos matemáticos bien conocidos.

### Fuentes

Este capítulo se basa en el problema 33 de [13] reelaborado por Michael Woltermann [14]. Una demostración adicional se puede encontrar en [25].

## Capítulo 14

### Una regla y una circunferencia son suficientes

¿Se pueden hacer todas las construcciones con regla y compás sólo con regla? La respuesta es no porque las rectas se definen por ecuaciones lineales y no pueden representar círculos que se definen por ecuaciones cuadráticas. En 1822 Jean-Victor Poncelet conjeturó que una regla es suficiente siempre que exista una circunferencia en el plano. Esto fue demostrado en 1833 por Jakob Steiner.

Después de explicar en la Sec. 14.1 lo que significa realizar una construcción con sólo una regla y una circunferencia, la demostración se presenta en etapas a partir de cinco construcciones auxiliares: la construcción de una línea paralela a una línea dada (Sec. 14.2), construcción de una perpendicular a una recta dada (Sec. 14.3), copia de un segmento en una dirección dada (Sec. 14.4), construcción de un segmento como razón de segmentos (Sec. 14.5) y construcción de una raíz cuadrada (Sec. 14.6). La sección 14.7 muestra cómo encontrar la(s) intersección(es) de una recta con una circunferencia y la sección 14.8 muestra cómo encontrar la(s) intersección(es) de dos circunferencias.

#### 14.1 ¿Qué es una construcción sólo con regla?

Una construcción utilizando una regla y un compás es una secuencia de tres operaciones:

- Hallar el punto de intersección de dos rectas.
- Hallar el/los punto/s de intersección de una recta y una circunferencia.
- Hallar el punto o puntos de intersección de dos circunferencias.

La primera operación sólo se puede realizar con una regla.

Una circunferencia está definida por un punto  $O$ , su *centro*, y por un *radio*  $r$ , un segmento de longitud  $r$  uno de cuyos extremos es el centro. Si podemos construir los puntos denotados con  $X$  y  $Y$  en la figura 14.1 podemos afirmar que hemos construido con éxito los puntos de intersección de una circunferencia dada con una recta dada. Del mismo modo, la construcción de  $X, Y$  en la figura 14.2 es la construcción de los puntos de intersección de dos circunferencias dadas. Las circunferencias trazadas con líneas punteadas en un diagrama no aparecen realmente en una construcción; sólo se utilizan para ayudar a entenderla.

La única circunferencia dada, utilizada en las construcciones, llamada *circunferencia fija*, puede aparecer en cualquier parte del plano y puede tener un radio arbitrario.

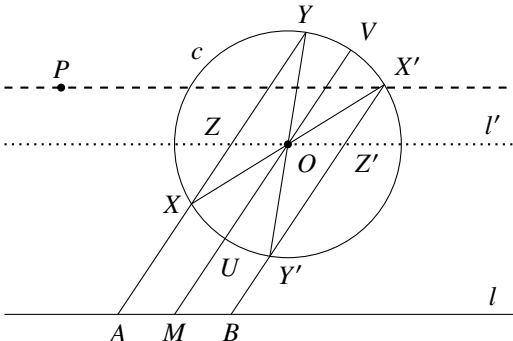


The diagram shows a circle with center  $O$  and radius  $c$ . A horizontal line  $l$  is tangent to the circle at point  $Y$ . Two parallel lines,  $AX$  and  $MU$ , are drawn from points  $A$  and  $M$  on line  $l$ , intersecting the circle at points  $X$  and  $U$  respectively. A point  $P$  is shown outside the circle.

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{OS}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = 1.$$
$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{SP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}}, \quad (14.1)$$
$$\begin{aligned}\frac{\overline{BS}}{\overline{QS}} &= \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + \frac{\overline{QS}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + 1 \\ \frac{\overline{AS}}{\overline{PS}} &= \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + \frac{\overline{PS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + 1.\end{aligned}$$
$$\frac{\overline{BS}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{OS}} + 1 = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + 1 = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + \frac{\overline{PS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{PS}},$$

*Caso 2:*  $\overline{AB}$  no es necesariamente un segmento dirigido. La circunferencia fija  $c$  tiene centro  $O$  y radio  $r$ .  $P$  es el punto no situado sobre la recta por el que hay que construir una recta paralela a  $l$  (Fig. 14.4).



Fig. 14.6: Prueba de que  $l'$  es paralelo a  $l$ 

Elegimos  $M$ , un punto cualquiera de  $l$ , y construimos una semirrecta que extienda  $\overline{MO}$  y que corte a la circunferencia en  $U, V$ .  $\overline{UV}$  es un segmento dirigido porque  $O$ , el centro de la circunferencia, biseca el diámetro  $\overline{UV}$ . Elegir un punto  $A$  en  $l$  y utilizamos la construcción de un segmento rectilíneo dirigido (Caso 1) para construir una recta que pase por  $A$  paralela a  $\overline{UV}$  y que corte a la circunferencia en  $X, Y$  (Fig. 14.5).

Construimos un diámetro desde  $X$  hasta  $O$  que corte al otro lado de la circunferencia en  $X'$ , y construimos análogamente el diámetro  $\overline{Y'Y}$ . Construimos la semirrecta desde  $X'$  pasando por  $Y'$  y denotamos con  $B$  su intersección con  $l$ . Afirmamos que  $M$  es la bisectriz de  $\overline{AB}$  de modo que  $\overline{AB}$  es un segmento dirigido y por lo tanto se puede construir una recta que pase por  $P$  paralela a  $l$  (Fig. 14.6).

$\overline{OX}, \overline{OX'}, \overline{OY}, \overline{OY'}$  son todos radios de la circunferencia y  $\angle XOY = \angle X'OY'$  ya que son ángulos verticales, por lo que  $\triangle XOY \cong \triangle X'OY'$  por lado-ángulo-lado. Definir  $l'$  como una recta que pasa por  $O$  paralela a  $l$  y que interseca a  $\overline{XY}$  en  $Z$  y a  $\overline{X'Y'}$  en  $Z'$ .  $\angle XOZ = \angle X'OZ'$  son ángulos verticales,  $\angle ZXO = \angle Z'X'O$  son ángulos interiores alternos y  $\overline{XO} = \overline{X'O}$  son radios, por lo que  $\triangle XOZ \cong \triangle X'OZ'$  por ángulo-lado-ángulo y  $\overline{ZO} = \overline{OZ'}$ . Por lo tanto,  $\overline{AMOZ}$  y  $\overline{BMOZ'}$  son paralelogramos y  $\overline{AM} = \overline{ZO} = \overline{OZ'} = \overline{MB}$ .  $\square$

**Teorema 14.2.** *Dado un segmento  $\overline{AB}$  y un punto  $P$  que no está en la recta, es posible construir un segmento  $\overline{PQ}$  que sea paralelo a  $\overline{AB}$  y cuya longitud sea igual a la longitud de  $\overline{AB}$ , es decir, es posible copiar  $\overline{AB}$  paralelo a sí mismo con  $P$  como uno de sus puntos extremos.*

<sup>1</sup>Definimos, no construimos, porque estamos en medio de la demostración de que tal recta se puede construir.

*Demostración.* Hemos demostrado que es posible construir una recta  $m$  por  $P$  paralela a  $\overline{AB}$  y una recta  $n$  por  $B$  paralela a  $\overline{AP}$ . El cuadrilátero  $\overline{ABQP}$  es un paralelogramo con lados opuestos iguales  $\overline{AB} = \overline{PQ}$  (Fig. 14.7).  $\square$

**Teorema 14.3.** *Dado un segmento  $l$  y un punto  $P$  que no está en  $l$ , es posible construir una perpendicular a  $l$  que pase por  $P$ .*

#### 14.4 Copiar un segmento en una dirección determinada

**Teorema 14.4.** *Es posible construir una copia de un segmento dado en la dirección de otra recta.*

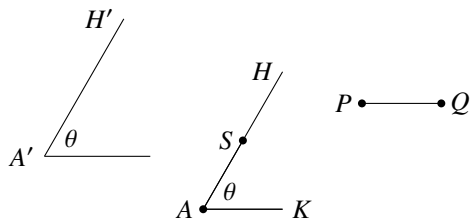


Fig. 14.9: Copiar un segmento en una dirección determinada

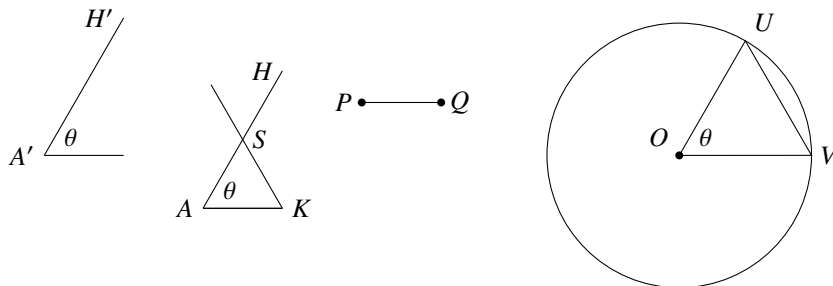


Fig. 14.10: Utilizar la circunferencia fija para copiar el segmento de línea

El significado de «dirección» es que la línea definida por dos puntos  $A', H'$  tiene un ángulo  $\theta$  relativo a algún eje y el objetivo es construir  $\overline{AS} = \overline{PQ}$  tal que  $\overline{AS}$  tenga el mismo ángulo  $\theta$  relativo a ese eje (Fig. 14.9).

*Demostración.* Por el Teorema 14.2 es posible construir un segmento  $\overline{AH}$  tal que  $\overline{AH} \parallel \overline{A'H'}$ , y construir un segmento  $\overline{AK}$  tal que  $\overline{AK} \parallel \overline{PQ}$  y  $\overline{AK} = \overline{PQ}$ .  $\angle HAK = \theta$  por lo que queda por encontrar es un punto  $S$  en  $\overline{AH}$  de modo que  $\overline{AS} = \overline{PQ}$ .

Construimos dos radios  $\overline{OU}, \overline{OV}$  de la circunferencia fija que sean paralelos a  $\overline{AH}, \overline{AK}$ , respectivamente, y construimos una semirrecta que pase por  $K$  paralela a  $\overline{UV}$ . Denotemos con  $S$  su intersección con  $\overline{AH}$  (Fig. 14.10). Por construcción,  $\overline{AH} \parallel \overline{OU}$  y  $\overline{AK} \parallel \overline{OV}$ , por lo que  $\angle SAK = \angle HAK = \angle UOV = \theta$ . Si  $\overline{SK} \parallel \overline{UV}$  y  $\triangle SAK \sim \triangle UOV$  por ángulo-ángulo-ángulo,  $\triangle UOV$  es isósceles porque  $\overline{OU}, \overline{OV}$  son radios de la misma circunferencia. Por lo tanto,  $\triangle SAK$  es isósceles y  $\overline{AS} = \overline{AK} = \overline{PQ}$ .  $\square$

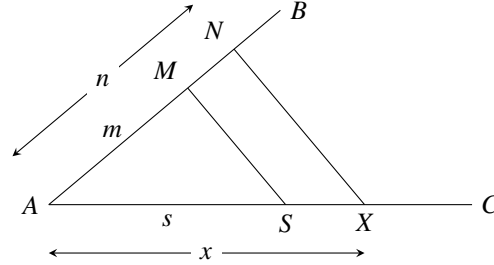


Fig. 14.11: Triángulos semejantes para construir la relación de longitudes

#### 14.5 Construcción de un segmento de línea como cociente de segmentos

**Teorema 14.5.** *Dados segmentos de longitudes  $n, m, s$ , es posible construir un segmento de longitud:*

$$x = \frac{n}{m}s.$$

*Demostración.* Elegimos puntos  $A, B, C$  que no estén en la misma recta y construimos semirrectas  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ . Por el Teorema 14.4 se pueden construir puntos  $M, N, S$  tales que  $\overline{AM} = m$ ,  $\overline{AN} = n$ ,  $\overline{AS} = s$ . Por el Teorema 14.1 construir una recta que pase por  $N$  paralela a  $\overline{MS}$  que corte a  $\overline{AC}$  en  $X$  y etiquetar  $\overline{AX}$  (Fig. 14.11).  $\triangle MAS \sim \triangle NAX$  por ángulo-ángulo-ángulo entonces  $\frac{m}{n} = \frac{s}{x}$  y  $x = \frac{n}{m}s$ .  $\square$

#### 14.6 Construcción de una raíz cuadrada

**Teorema 14.6.** *Dados segmentos de longitudes  $a, b$ , es posible construir un segmento de longitud  $\sqrt{ab}$ .*

*Demostración.* Queremos expresar  $x = \sqrt{ab}$  como  $x = \frac{n}{m}s$  para usar Teorema 14.5.

- En lugar de  $n$  utilizamos  $d$ , el diámetro del círculo fijo.
- En lugar de  $m$  utilizamos  $t = a + b$  que se puede construir a partir de  $a, b$  mediante el Teorema 14.4.
- Definimos  $s = \sqrt{hk}$  donde  $h, k$  se definen como expresiones sobre las longitudes  $a, b, t, d$ .

Definimos  $h = \frac{d}{t}a$  y  $k = \frac{d}{t}b$  y luego calculamos:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{th}{d} \frac{tk}{d}} = \sqrt{\left(\frac{t}{d}\right)^2 hk} = \frac{t}{d} \sqrt{hk} = \frac{t}{d} s \\ h + k &= \frac{d}{t}a + \frac{d}{t}b = \frac{d(a+b)}{t} = \frac{dt}{t} = d. \end{aligned}$$

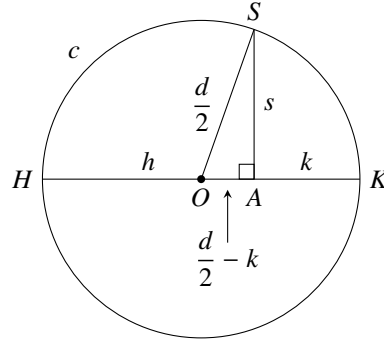


Fig. 14.12: Construcción de una raíz cuadrada

Por el Teorema 14.4 construimos  $\overline{HA} = h$  en un diámetro  $\overline{HK}$  de la circunferencia fija. De  $h + k = d$  tenemos  $\overline{AK} = k$  (Fig. 14.12). Por el Teorema 14.3 construimos una perpendicular a  $\overline{HK}$  en A y denotamos con S la intersección de esta recta con la circunferencia.  $\overline{OS} = \overline{OK} = d/2$  y  $\overline{OA} = (d/2) - k$ .

Por el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - k\right)^2 \\
 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2\frac{dk}{2} - k^2 \\
 &= k(d - k) = kh \\
 s &= \sqrt{hk}.
 \end{aligned}$$

Ahora  $x = \frac{t}{d}s$  se puede construir por el Teorema 14.5. □

### 14.7 Construcción de la intersección de una recta y una circunferencia

**Teorema 14.7.** Dada una recta  $l$  y una circunferencia  $c(O, r)$ , es posible construir sus puntos de intersección (Fig. 14.13).

*Demostración.* Por el Teorema 14.3 es posible construir una perpendicular desde el centro del círculo  $O$  a la recta  $l$ . La intersección de  $l$  con la perpendicular se denota con  $M$ .  $\overline{OM}$  biseca la cuerda  $\overline{XY}$ , donde  $X, Y$  son las intersecciones de la recta con la circunferencia (Fig. 14.14). Definimos  $\overline{XY} = 2s$  y  $\overline{OM} = t$ . Tengamos en cuenta que  $s, X, Y$  son sólo definiciones para las cuales no se ha efectuado una construcción.

Por el Teorema de Pitágoras  $s^2 = r^2 - t^2 = (r + t)(r - t)$ . Por el Teorema 14.4 es posible construir segmentos de longitud  $t$  a partir de  $O$  en las dos direcciones  $\overline{OR}$  y  $\overline{RO}$ . El resultado son dos segmentos de longitud  $r + t, r - t$ .

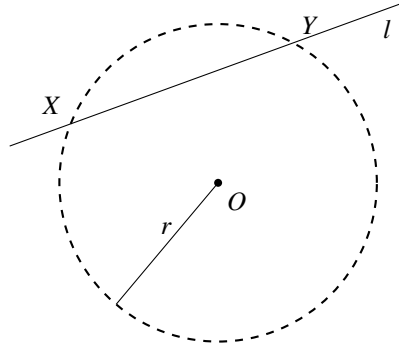


Fig. 14.13: Construcción de los puntos de intersección de una recta y una circunferencia ( $l$ )

Por el Teorema 14.6 se puede construir un segmento de longitud  $s = \sqrt{(r+t)(r-t)}$ , y por el Teorema 14.4 se pueden construir segmentos de longitud  $s$  desde  $M$  a lo largo de  $l$  en ambas direcciones. Sus otros extremos son los puntos de intersección de  $l$  y  $c$ .  $\square$

#### 14.8 Construcción de la intersección de dos circunferencias

**Teorema 14.8.** *Dadas dos circunferencias  $c(O_1, r_1), c(O_2, r_2)$ , es posible construir sus puntos de intersección.*

*Demostración.* Construimos  $\overline{O_1O_2}$  y denotamos su longitud con  $t$  (Fig. 14.15). Denotamos con  $A$  ser el punto de intersección de  $\overline{O_1O_2}$  y  $\overline{XY}$ , y Denotamos  $q = \overline{O_1A}$ ,  $x = \overline{XA}$  (Fig. 14.16). A aún no se ha construido, pero si  $q, x$  se construyen entonces por el Teorema 14.4 se puede construir el punto  $A$  a la longitud  $q$  de  $O_1$  en la dirección  $\overline{O_1O_2}$ .

Una vez construido  $A$ , por el Teorema 14.3 se puede construir una perpendicular a  $\overline{O_1O_2}$  en  $A$ , y por el Teorema 14.4 es posible construir segmentos de longitud  $x$  desde  $A$  en ambas direcciones a lo largo de la perpendicular. Sus otros puntos extremos son los puntos de intersección de las circunferencias.

**Construcción de la longitud  $q$ :** Definimos  $d = \sqrt{r_1^2 + t^2}$ , la hipotenusa de un triángulo rectángulo, que se puede construir a partir de las longitudes conocidas  $r_1, t$ . Obsérvese que  $\triangle O_1XO_2$  no es necesariamente un triángulo rectángulo; el triángulo rectángulo puede construirse en cualquier parte del plano. En el triángulo

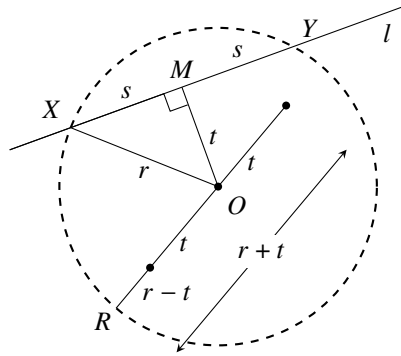


Fig. 14.14: Construcción de los puntos de intersección de una recta y una circunferencia (2)

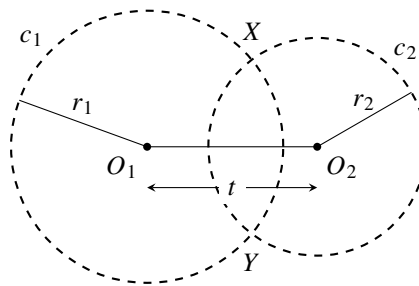


Fig. 14.15: Construcción de la intersección de dos circunferencias (1)

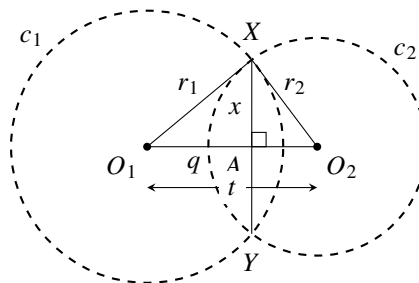


Fig. 14.16: Construcción de la intersección de dos circunferencias (2)

rectángulo  $\triangle XAO_1$ ,  $\cos \angle XO_1A = q/r_1$ . Por la Ley de los Cosenos para  $\triangle XO_1O_2$ :

$$\begin{aligned} r_2^2 &= t^2 + r_1^2 - 2r_1t \cos \angle XO_1O_2 \\ &= t^2 + r_1^2 - 2tq \\ 2tq &= (t^2 + r_1^2) - r_2^2 = d^2 - r_2^2 \\ q &= \frac{(d + r_2)(d - r_2)}{2t}. \end{aligned}$$

Por el Teorema 14.4 estas longitudes se pueden construir y por el Teorema 14.5  $q$  se puede construir a partir de  $d + r_2, d - r_2, 2t$ .

**Construcción de la longitud  $x$ :** Por el Teorema de Pitágoras:

$$x = \sqrt{r_1^2 - q^2} = \sqrt{(r_1 + q)(r_1 - q)}.$$

Por el Teorema 14.4,  $h = r_1 + q, k = r_1 - q$  puede construirse, al igual que  $x = \sqrt{hk}$  por el Teorema 14.6.  $\square$

### ¿Cuál es la sorpresa?

El compás es necesario porque una regla sólo puede calcular las raíces de ecuaciones lineales y no valores como  $\sqrt{2}$ , la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles con lados de longitud 1. Sin embargo, es sorprendente que la existencia de una sola circunferencia, independientemente de la posición de su centro y de la longitud de su radio, sea suficiente para realizar cualquier construcción que sea posible con una regla y un compás.

### Fuentes

Este capítulo se basa en el problema 34 de [13] reelaborado por Michael Woltermann [14].



## Capítulo 15

### ¿Son congruentes los triángulos con áreas y perímetros iguales?

¿Son congruentes dos triángulos con el mismo área y el mismo perímetro? No necesariamente: los triángulos con lados  $(17, 25, 28)$  y  $(20, 21, 29)$  tienen ambos perímetro 70 y área 210 pero no son congruentes (Fig. 15.1)<sup>1</sup>. Este capítulo muestra que dado un triángulo de lados racionales es posible construir un triángulo no congruente, también de lados racionales, que tenga el mismo área y el mismo perímetro. Llevamos a cabo la derivación utilizando un ejemplo, mostrando que el triángulo de lados  $(3, 4, 5)$  y el triángulo de lados  $\left(\frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15}\right)$  ambos tienen perímetro 12 y área 6.

#### 15.1 De un triángulo a una curva elíptica

Las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo se intersectan en un punto llamado *incentro* del triángulo. El incentro es el centro de una circunferencia inscrita en el triángulo (Fig. 15.2).

Tracemos las perpendiculares a los lados desde el centro  $O$ . Las altitudes tienen longitud  $r$ , el radio de la circunferencia inscrita. Las perpendiculares y las bisectrices de los ángulos crean tres pares de triángulos rectángulos congruentes:

$$\triangle AOB' \cong \triangle AOC', \quad \triangle BOA' \cong \triangle BOC', \quad \triangle COA' \cong \triangle COB'.$$

<sup>1</sup>Las áreas se calcularon mediante la fórmula de Herón (Teorema A.3) y los ángulos mediante la ley de los cosenos (Teorema A.8).

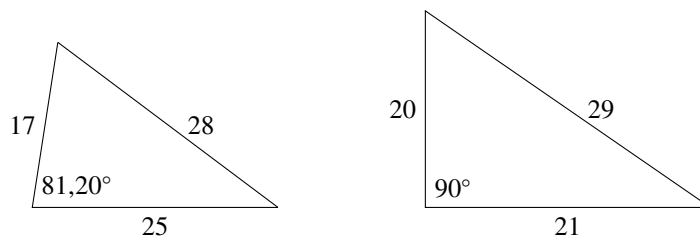


Fig. 15.1: Triángulos no congruentes con el mismo área y el mismo perímetro

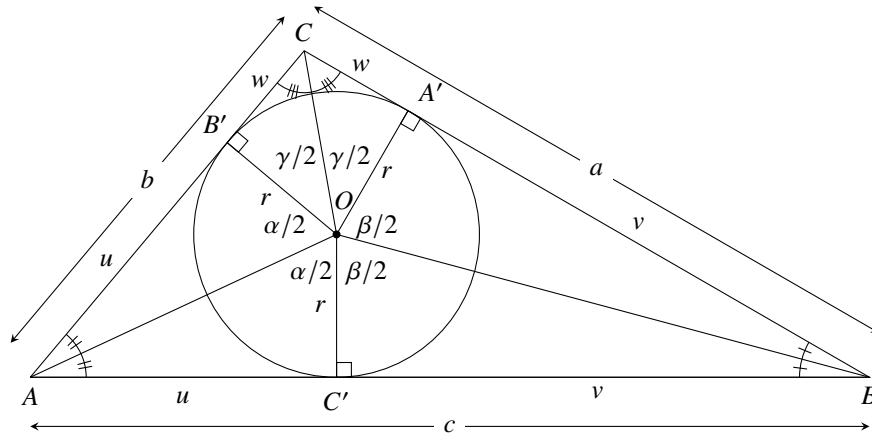


Fig. 15.2: Una circunferencia inscrito en un triángulo

Las perpendiculares dividen los lados  $a, b, c$  en segmentos  $u, v, w$ . El área del  $\triangle ABC$  es la suma de las áreas del  $\triangle BOC, \triangle AOB, \triangle AOC$ :

$$A = \frac{1}{2}(w+v)r + \frac{1}{2}(v+u)r + \frac{1}{2}(u+w)r \quad (15.1a)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2(u+v+w)r \quad (15.1b)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)r \quad (15.1c)$$

$$= sr, \quad (15.1d)$$

donde  $s$  es el *semiperímetro*, la mitad del perímetro del triángulo  $\triangle ABC$ . Las longitudes de  $u, v, w$  se pueden expresar utilizando el radio de la circunferencia y los ángulos centrales  $\alpha/2, \beta/2, \gamma/2$ :

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{u}{r}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{v}{r}, \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{w}{r}. \quad (15.2)$$

El semiperímetro puede expresarse ahora en términos de las tangentes:

$$s = u + v + w = r \tan \frac{\alpha}{2} + r \tan \frac{\beta}{2} + r \tan \frac{\gamma}{2} = r \left( \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \right),$$

y por la Ecuación 15.1d el área es:

$$A = sr = r^2 \left( \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \right). \quad (15.3)$$

A partir de  $r = A/s$ , la Ecuación 15.3 puede escribirse como:

$$\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{A}{r^2} = \frac{A}{(A/s)^2} = \frac{s^2}{A}. \quad (15.4)$$

Ya que la suma de los ángulos  $\alpha, \beta, \gamma$  es  $360^\circ$ :

$$\gamma/2 = 360^\circ/2 - (\alpha/2 + \beta/2) \quad (15.5a)$$

$$\tan \gamma/2 = \tan(180^\circ - (\alpha/2 + \beta/2)) \quad (15.5b)$$

$$= -\tan(\alpha/2 + \beta/2) \quad (15.5c)$$

$$= \frac{\tan \alpha/2 + \tan \beta/2}{\tan \alpha/2 \tan \beta/2 - 1}, \quad (15.5d)$$

utilizando la fórmula de la tangente de la suma de dos ángulos (Teorema A.9).

Simplifiquemos la notación definiendo variables para las tangentes:

$$x = \tan \frac{\alpha}{2}, \quad y = \tan \frac{\beta}{2}, \quad z = \tan \frac{\gamma}{2}. \quad (15.6)$$

Por la Ecuación 15.5d podemos expresar  $z = \tan \gamma/2$  en términos de  $x, y$ :

$$z = \frac{x + y}{xy - 1}. \quad (15.7)$$

Con esta notación, la Ecuación 15.4 se convierte en:

$$x + y + \frac{x + y}{xy - 1} = \frac{s^2}{A}. \quad (15.8)$$

Dados valores fijos de  $A$  y  $s$  ¿existen múltiples soluciones de la Ecuación 15.8?

Para el triángulo rectángulo  $(3, 4, 5)$ :

$$\frac{s^2}{A} = \frac{\left(\frac{1}{2}(3+4+5)\right)^2}{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6^2}{6} = 6. \quad (15.9)$$

Si hay otra solución de la Ecuación 15.8 con  $s^2/A = 6$ , se puede escribir como:

$$x + y + \frac{x + y}{xy - 1} = 6 \quad (15.10a)$$

$$x^2y + xy^2 - 6xy + 6 = 0. \quad (15.10b)$$

Esta es una ecuación de una *curva elíptica*.

## 15.2 Resolución de la ecuación de la curva elíptica

La figura 15.3 muestra una parte de la gráfica de la ecuación 15.10b. Cualquier punto de la curva cerrada en el primer cuadrante es una solución de la ecuación porque

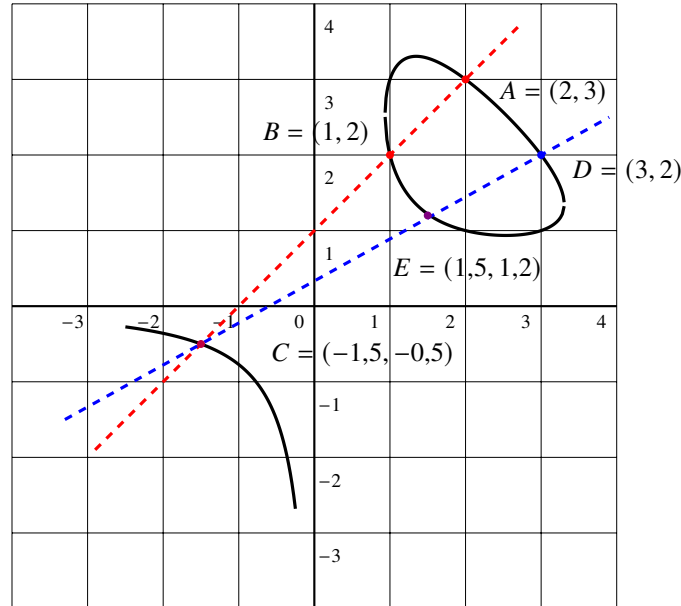


Fig. 15.3: El método de las dos secantes

las longitudes de los lados del triángulo deben ser positivas.  $A, B, D$  corresponden al triángulo  $(3, 4, 5)$  como se muestra a continuación. Para encontrar soluciones racionales adicionales se utiliza el método de las dos secantes.

Construimos una recta secante a través de los puntos  $A = (2, 3), B = (1, 2)$ . Corta la curva en  $C = (-1, 5, -0, 5)$ , pero no da solución porque los valores son negativos. Construimos una segunda secante desde  $C$  hasta  $D = (3, 2)$ . La intersección con la curva en  $E \approx (1, 5, 1, 2)$  da una nueva solución cuyas coordenadas se calcularán a continuación.

La ecuación de la recta (roja) que pasa por  $A, B$  es  $y = x + 1$ . En la ecuación 15.10b:

$$\begin{aligned} x^2(x+1) + x(x+1)^2 - 6x(x+1) + 6 &= 0 \\ 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

De  $A, B$  conocemos dos raíces  $x = 2, x = 1$  por lo que podemos factorizar el polinomio cúbico:

$$(x-2)(x-1)(ax+b) = 0,$$

donde la tercera raíz es desconocida. Multiplicamos los factores y concluimos que  $a = 2, b = 3$  ya que  $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = ax^3 + \dots + 2b$ . El tercer factor es  $2x + 3$  lo que da la tercera raíz  $x = -\frac{3}{2}$  e  $y = x + 1 = -\frac{1}{2}$ . Este es el punto  $C = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$  de la gráfica.

### 15.3. DERIVACIÓN DE UN TRIÁNGULO A PARTIR DE LA CURVA ELÍPTICA 169

La ecuación de la recta (azul) que pasa por  $C, D$  es:

$$y = \frac{5}{9}x + \frac{1}{3}. \quad (15.11)$$

Sustituimos por  $y$  en la Ecuación 15.10b:

$$\begin{aligned} x^2 \left( \frac{5}{9}x + \frac{1}{3} \right) + x \left( \frac{5}{9}x + \frac{1}{3} \right)^2 - 6x \left( \frac{5}{9}x + \frac{1}{3} \right) + 6 &= 0 \\ \frac{70}{81}x^3 - \frac{71}{27}x^2 - \frac{17}{9}x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

De  $C, D$  conocemos dos raíces  $x = 3, x = -\frac{3}{2}$  por lo que podemos factorizar el polinomio cúbico:

$$(x - 3) \left( x + \frac{3}{2} \right) (ax + b) = 0.$$

Igualando los coeficientes del término cúbico y los términos constantes se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{70}{81}x - \frac{4}{3} &= 0 \\ x &= \frac{54}{35} \approx 1,543, \end{aligned}$$

entonces  $y$  se puede calcular a partir de la Ecuación 15.11:

$$y = \frac{25}{21} \approx 1,190.$$

Las coordenadas de  $E$  son:

$$\left( \frac{54}{35}, \frac{25}{21} \right) = (1,543, 1,190),$$

que se acercan a las aproximaciones  $(1, 5, 1, 2)$  obtenidas del gráfico.

Por último, calculamos  $z$  a partir de la Ecuación 15.7:

$$z = \frac{x + y}{xy - 1} = \left( \frac{54}{35} + \frac{25}{21} \right) / \left( \frac{54}{35} \frac{25}{21} - 1 \right) = \frac{2009}{615} = \frac{49}{15}.$$

### 15.3 Derivación de un triángulo a partir de la curva elíptica

Usando las Ecuaciones 15.2, 15.6,  $a, b, c$ , los lados del triángulo  $\triangle ABC$ , se pueden calcular a partir de  $x, y, z$  y  $r = A/s = 6/6 = 1$ :

$$\begin{aligned} a &= w + v = r(z + y) = (z + y) \\ b &= u + w = r(x + z) = (x + z) \\ c &= u + v = r(x + y) = (x + y). \end{aligned}$$

Para la solución A de la curva elíptica los lados del triángulo son:

$$\begin{aligned}a &= z + y = 1 + 3 = 4 \\b &= x + z = 2 + 1 = 3 \\c &= x + y = 2 + 3 = 5.\end{aligned}$$

Para la solución E de la curva elíptica los lados del triángulo son:

$$\begin{aligned}a &= z + y = \frac{49}{15} + \frac{25}{21} = \frac{156}{35} \\b &= x + z = \frac{54}{35} + \frac{49}{15} = \frac{101}{21} \\c &= x + y = \frac{54}{35} + \frac{25}{21} = \frac{41}{15}.\end{aligned}$$

Comprobemos este resultado. El semiperímetro es:

$$s = \frac{1}{2} \left( \frac{156}{35} + \frac{101}{21} + \frac{41}{15} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{468 + 505 + 287}{105} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1260}{105} \right) = 6,$$

y el área puede calcularse mediante la fórmula de Heron (Teorema A.3):

$$A = \sqrt{6 \left( 6 - \frac{156}{35} \right) \left( 6 - \frac{101}{21} \right) \left( 6 - \frac{41}{15} \right)} = \sqrt{36} = 6.$$

¿Es  $\left( \frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15} \right) \cong (3, 4, 5)$ ? Para simplificar el cálculo vamos a utilizar las aproximaciones decimales  $(4, 48, 4, 81, 2, 73)$ . Entonces:

$$\sqrt{4,48^2 + 2,73^2} = 5,25 \neq 4,81,$$

por lo que no es un triángulo rectángulo y no es congruente con  $(3, 4, 5)$ .

La ley de los cosenos se puede utilizar para calcular los ángulos del triángulo como se muestra en la figura 15.4.

### ¿Cuál es la sorpresa?

¿Son congruentes los triángulos que tienen el mismo área y el mismo perímetro? Mi primera impresión fue decir «sí» porque no es fácil encontrar contraejemplos. Lo sorprendente es que dado un triángulo arbitrario de lados racionales, es posible construir un triángulo no congruente de lados racionales que tenga el mismo área y perímetro, aunque el resultado puede ser extraño como en el caso de los triángulos  $(3, 4, 5)$  y  $\left( \frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15} \right)$ .

### 15.3. DERIVACIÓN DE UN TRIÁNGULO A PARTIR DE LA CURVA ELÍPTICA 171

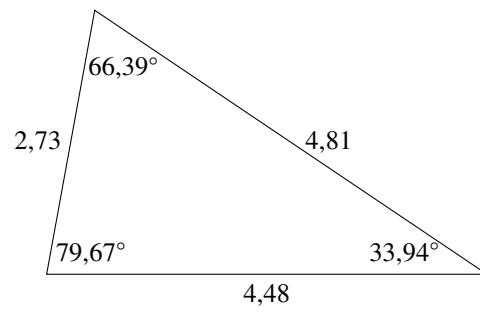


Fig. 15.4: *El triángulo con el mismo perímetro y área que (3, 4, 5)*

#### Fuentes

Este capítulo se basa en [33]. En [3] se demuestra que dado un triángulo hay triángulos no congruentes con el mismo área y perímetro, pero la demostración no incluye una construcción explícita.

## Capítulo 16

### Construcción de un Heptadecágono regular

Los únicos polígonos regulares que los griegos sabían construir con regla y compás eran el triángulo, el cuadrado, el pentágono y el polígono regular de 15 lados. Dado un polígono regular de  $n$  lados, se puede construir un polígono de  $2n$  lados circunscribiendo el polígono en una circunferencia y bisecando el ángulo central (Fig. 16.1). No se hicieron más progresos hasta 1796, cuando Carl Friedrich Gauss se despertó una mañana, justo antes de cumplir 19 años, y mediante «pensamiento concentrado» descubrió cómo construir un *heptadecágono* regular, un polígono regular con 17 lados. Este logro le inspiró para convertirse en matemático.

En la sección 16.1 se analiza la relación entre el lado de un polígono inscrito en una circunferencia y el ángulo central que subtiende. En la sección 16.2 se expone sin demostraciones el Teorema Fundamental del Álgebra. Sección 16.3 presenta las raíces de la unidad, las raíces del polinomio  $x^n - 1$ , que son fundamentales para la demostración de Gauss. Las secciones 16.4 y 16.5 presentan la demostración de Gauss que se basa en simetrías de raíces de polinomios. Gauss derivó una fórmula que demuestra que el heptadecágono es construible, pero no se dio una construcción geométrica hasta casi un siglo después. La sección 16.6 ofrece una elegante construcción de James J. Callagy. La sección 16.7 muestra cómo las construcciones de un pentágono regular se pueden derivar utilizando tanto la geometría como la trigonometría.

Parte del material es más sencillo si se presenta utilizando números complejos. Este material se establece en /los recuadros que se pueden omitir.

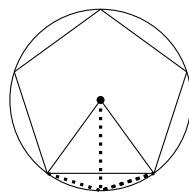


Fig. 16.1: Construcción de un polinomio regular de 10 lados a partir de un pentágono regular



### 16.1 Construcción de polígonos regulares

La construcción del heptadecágono regular condujo al teorema de Gauss-Wantzel, que afirma que un polígono regular con  $n$  lados se puede construir con una regla y un compás si y sólo si  $n$  es el producto de una potencia de 2 y cero o más números de Fermat  $2^{2^k} + 1$  que son primos. Los números primos de Fermat conocidos son:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65,537.$$

Un polígono regular con 257 lados fue construido por Magnus Georg Paucker en 1822 y por Friedrich Julius Richelot en 1832. En 1894 Johann Gustav Hermes afirmó haber construido un polígono regular con 65,537 lados.

Para construir un polígono regular basta con construir un segmento de longitud  $\cos \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo central subtendido por una cuerda que es un lado del polígono inscrito en un círculo unitario. Dado el segmento  $\overline{OB} = \cos \theta$ , construimos una perpendicular en  $B$  y denotamos con  $C$  su intersección con la circunferencia unitaria. Entonces:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \overline{OB} \\ \theta &= \cos^{-1}(\overline{OB}). \end{aligned}$$

La cuerda  $\overline{AC}$  es un lado del polígono regular (Fig. 16.2).

Dado un segmento definido como de longitud 1, las longitudes que son construibles son las que se pueden obtener a partir de segmentos de longitud conocida mediante las operaciones  $\{+, -, \times, /, \sqrt{\cdot}\}$  (Sec. 2.5). Gauss demostró que  $\cos(360^\circ/17)$ , el coseno del ángulo central de un heptadecágono, es construible ya que se puede expresar utilizando sólo estas operaciones:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\ &\quad \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \end{aligned}$$

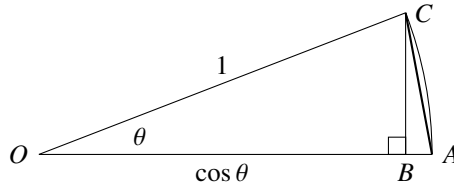


Fig. 16.2: El coseno del ángulo central de un polígono regular

## 16.2 Teorema fundamental del álgebra

El siguiente teorema se utilizará sin demostración.

**Teorema 16.1.** *Todo polinomio de grado  $n$  tiene exactamente  $n$  raíces.*

El enunciado del teorema se ha simplificado porque todo lo que necesitaremos saber es que  $n$  raíces *existen*.

**El Teorema Fundamental del Álgebra** afirma que todo polinomio no constante de grado  $n$  en una sola variable con coeficientes *complejos* tiene exactamente  $n$  raíces *complejas*. Si hay varias raíces con el mismo valor, se cuentan todas:  $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x - 2)$  tiene dos raíces ambas iguales a 2. El polinomio  $x^2 + 1$  con coeficientes enteros tiene dos raíces complejas  $\pm\sqrt{-1}$ . Curiosamente, aunque el teorema se refiere a entidades algebraicas finitas -polinomios de grado  $n$  con  $n$  raíces- se necesitan métodos de análisis, normalmente análisis complejo, para demostrar el teorema.

## 16.3 Raíces de la unidad

Por el Teorema Fundamental del Álgebra (Teorema 16.1) el polinomio  $x^n - 1$  tiene  $n$  raíces para cualquier entero  $n > 1$ . Una raíz es  $x = 1$  por lo que hay otras  $n - 1$  raíces. Denotemos una de estas raíces con  $r$ . Como  $r^n = 1$  se llama una *enésima raíz de la unidad*. ¿Y  $r^2$ ?

$$(r^2)^n = (r^n)^2 = 1^2 = 1.$$

Se deduce que los números  $n$ :

$$1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}$$

son  $n$ -ésimas raíces de la unidad.

Sea  $r = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ . Por la fórmula de Moivre:

$$\left[ \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right]^n = \cos\left(\frac{2n\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{n}\right) = 1.$$

**Teorema 16.2.** *Sea  $n$  un número primo y sea  $r$  una raíz enésima de la unidad. Entonces:*

$$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$$

*son distintos por lo que son todas las enésimas raíces de la unidad.*

#### 16.4. PRUEBA DE GAUSS DE QUE UN HEPTADECÁGONO ES CONSTRUIBLE 175

*Demostración.* Supongamos que las potencias no son distintas de modo que  $r^i = r^j$  para algún  $0 \leq i < j \leq n-1$ . Entonces  $r^j/r^i = r^{j-i} = 1$  por lo que existe al menos un entero positivo  $i'$  menor que  $n$  tal que  $r^{i'} = 1$ . Sea  $m$  el menor de dichos enteros positivos. Por el algoritmo de la división de enteros  $n = ml + k$  para algún  $0 < l < n$  y  $0 \leq k < m$ . De:

$$1 = r^n = r^{ml+k} = (r^m)^l \cdot r^k = 1^l \cdot r^k = r^k,$$

tenemos  $0 \leq k < m$  y  $r^k = 1$ . Dado que  $m$  se definió como el menor entero positivo  $k = 0$  y  $n = ml$  no es primo.  $\square$

**Teorema 16.3.** Sean  $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$  las raíces de un polinomio de enésimo grado  $f(x)$ . Entonces:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-1})(x - a_n). \quad (16.1)$$

*Demostración.* Si  $a_i$  es una raíz de  $f(x)$  por definición  $f(a_i) = 0$  pero:

$$\begin{aligned} f(a_i) &= (a_i - a_1)(a_i - a_2) \cdots (a_i - a_{n-1})(a_i - a_n) \\ &= \cdots (a_i - a_i) \cdots = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f(x) = (x - a_i)g_i(x)$  para algún  $g_i(x)$  y por inducción esto vale para todas las raíces.  $\square$

A partir de la Ecuación 16.1 es fácil ver que el coeficiente de  $x^{n-1}$  es:

$$-(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n).$$

Dado que el coeficiente de  $x^{n-1}$  en  $x^n - 1$  para  $n \geq 2$  es cero, tenemos:

$$\begin{aligned} -(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}) &= 0 \\ r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} &= -1. \end{aligned}$$

Para el heptadecágono esto es:

$$\begin{aligned} r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + r^7 + r^8 + \\ r^9 + r^{10} + r^{11} + r^{12} + r^{13} + r^{14} + r^{15} + r^{16} = -1. \end{aligned} \quad (16.2)$$

#### 16.4 Prueba de Gauss de que un heptadecágono es construible

Lo que Gauss entendió es que no es necesario trabajar con las raíces en su orden natural  $r, r^2, \dots, r^{16}$ . Los  $3^0, 3^1, 3^2, \dots$  potencias de  $r$  dan todas las raíces pero en un orden diferente:

$$\begin{aligned} r^1, r^{1 \cdot 3=3}, r^{3 \cdot 3=9}, r^{9 \cdot 3=27=10}, r^{10 \cdot 3=30=13}, r^{13 \cdot 3=39=5}, r^{5 \cdot 3=15}, r^{15 \cdot 3=45=11}, \\ r^{11 \cdot 3=33=16}, r^{16 \cdot 3=48=14}, r^{14 \cdot 3=42=8}, r^{8 \cdot 3=24=7}, r^{7 \cdot 3=21=4}, r^{4 \cdot 3=12}, r^{12 \cdot 3=36=2}, r^{2 \cdot 3=6}, \end{aligned}$$

donde las raíces han sido reducidas modulo 17:

$$r^{17m+k} = (r^{17})^m \cdot r^k = 1^m \cdot r^k = r^k .$$

Corroboramos que la lista contiene todas las raíces (excepto 1) exactamente una vez:

$$r^1, r^3, r^9, r^{10}, r^{13}, r^5, r^{15}, r^{11}, r^{16}, r^{14}, r^8, r^7, r^4, r^{12}, r^2, r^6 . \quad (16.3)$$

Dado un polinomio cuadrático monicó cuyas raíces son  $a, b$ :

$$y^2 + py + q = (y - a)(y - b) = 0 ,$$

podemos calcular los coeficientes  $p, q$  a partir de las raíces (Capítulo 7):

$$p = -(a + b) , \quad q = ab .$$

Por lo tanto, *dado*  $a + b$  y  $ab$  podemos escribir la ecuación cuadrática de la que  $a, b$  son las raíces.

Sea  $a_0$  la suma de las raíces en las posiciones impares de la Ecuación 16.3:

$$a_0 = r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2 ,$$

y sea  $a_1$  la suma de las raíces en las posiciones pares de la Ecuación 16.3:

$$a_1 = r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6 .$$

Para obtener  $a_0, a_1$  como raíces de una ecuación cuadrática primero se calcula su suma y se utiliza la Ecuación 16.2:

$$a_0 + a_1 = r + r^2 + \dots + r^{16} = -1 .$$

Ahora tenemos que trabajar mucho para calcular su producto. La figura muestra el cálculo donde los valores de  $r^i r^j = r^{i+j}$  se escriben después de reducir los exponentes modulo 17. Comprobamos que cada raíz se produce exactamente cuatro veces para que - de nuevo utilizando Ecuación 16.2 - el valor del producto es  $-4$ .

Como  $a_0 + a_1 = -1$  y  $a_0 a_1 = -4$ ,  $a_1, a_2$  son las raíces de la ecuación cuadrática  $y^2 + y - 4 = 0$  y se pueden calcular mediante la fórmula simple de las raíces de una ecuación cuadrática:

$$a_{0,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} .$$

Ahora bien, sean  $b_0, b_1, b_2, b_3$  las sumas de cada cuarta raíz a partir de  $r^1, r^3, r^9, r^{10}$ , respectivamente:

$$\begin{aligned} b_0 &= r^1 + r^{13} + r^{16} + r^4 \\ b_1 &= r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12} \\ b_2 &= r^9 + r^{15} + r^8 + r^2 \\ b_3 &= r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 a_1 &= (r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2) \times \\
&\quad (r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6) \\
&= r_1^4 + r_1^{11} + r_1^6 + r_1^{12} + r_1^{15} + r_1^8 + r_1^{13} + r_1^7 + \\
&\quad r_2^{12} + r_2^2 + r_2^{14} + r_2^3 + r_2^6 + r_2^{16} + r_2^4 + r_2^{15} + \\
&\quad r_2^{16} + r_3^6 + r_3^1 + r_3^7 + r_3^{10} + r_3^3 + r_3^8 + r_3^2 + \\
&\quad r_2^1 + r_3^8 + r_3^3 + r_3^9 + r_3^{12} + r_3^5 + r_2^{10} + r_3^4 + \\
&\quad r_3^2 + r_2^9 + r_4^4 + r_3^{10} + r_3^{13} + r_4^6 + r_2^{11} + r_2^5 + \\
&\quad r_3^{11} + r_3^1 + r_3^{13} + r_4^2 + r_3^5 + r_3^{15} + r_4^3 + r_2^{14} + \\
&\quad r_3^7 + r_3^{14} + r_3^9 + r_4^{15} + r_4^1 + r_4^{11} + r_3^{16} + r_4^{10} + \\
&\quad r_4^5 + r_4^{12} + r_4^7 + r_4^{13} + r_4^{16} + r_4^9 + r_4^{14} + r_4^8 \\
&= -4.
\end{aligned}$$

Fig. 16.3: Cálculo de  $a_0 a_1$ ; debajo de cada raíz está el número de apariciones de la raíz hasta el momento

Corroboramos que  $b_0 + b_2 = a_0$ ,  $b_1 + b_3 = a_1$  y calcula los productos correspondientes (Fig. 16.4). Para resumir estos cálculos:

$$\begin{aligned}
b_0 + b_2 &= a_0 \\
b_0 b_2 &= -1 \\
b_1 + b_3 &= a_1 \\
b_1 b_3 &= -1,
\end{aligned}$$

por lo que  $b_0, b_2$  son las soluciones de  $y^2 - a_0 y - 1 = 0$ , y  $b_1, b_3$  son las soluciones de  $y^2 - a_1 y - 1 = 0$ . Utilizando los valores calculados anteriormente para  $a_0, a_1$  podemos calcular las raíces  $b_0, b_1$  (Fig. 16.5).

Por último, sean  $c_0, c_4$  las sumas de cada raíz octava a partir de  $r^1, r^{13}$ :

$$\begin{aligned}
c_0 &= r^1 + r^{16} \\
c_4 &= r^{13} + r^4 \\
c_0 + c_4 &= r^1 + r^{16} + r^{13} + r^4 = b_0 \\
c_0 c_4 &= (r^1 + r^{16}) \cdot (r^{13} + r^4) \\
&= r^{14} + r^5 + r^{12} + r^3 = b_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_0 b_2 &= (r + r^{13} + r^{16} + r^4) \times (r^9 + r^{15} + r^8 + r^2) \\
&= (r^{10} + r^{16} + r^9 + r^3) + (r^5 + r^{11} + r^4 + r^{15}) + \\
&\quad (r^8 + r^{14} + r^7 + r^1) + (r^{13} + r^2 + r^{12} + r^6) \\
&= -1 \\
b_1 b_3 &= (r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12}) \times (r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6) \\
&= (r^{13} + r^{14} + r^{10} + r^9) + (r^{15} + r^{16} + r^{12} + r^{11}) + \\
&\quad (r^7 + r^8 + r^4 + r^3) + (r^5 + r^6 + r^2 + r^1) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Fig. 16.4: Cálculo de  $b_0 b_2, b_1 b_3$ 

por lo que  $c_0, c_4$  son las raíces de  $y^2 - b_0 y + b_1 = 0$ . Como  $\cos(360^\circ/17) = c_0/2$  (Fig. 16.6) basta calcular la raíz  $c_0 = r^1 + r^{16}$  (Fig. 16.7).

El coseno del ángulo central de un heptadecágono es construible con regla y compás ya que se compone sólo de números racionales y de las operaciones  $\{+, -, \times, /, \sqrt{\cdot}\}$ :

$$\cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) = \frac{c_0}{2} \quad (16.4)$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \quad (16.5)$$

$$\frac{1}{16}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \quad (16.6)$$

$$\begin{aligned}
r_1 + r_{16} &= \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{2 \cdot 16\pi}{17}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot 16\pi}{17}\right) \\
&= \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{-2\pi}{17}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{-2\pi}{17}\right) \\
&= 2 \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right).
\end{aligned}$$

### 16.5 Derivación de la fórmula de Gauss

La fórmula anterior para  $\cos(360^\circ/17)$  no es la dada por Gauss. Aquí está una derivación de la fórmula de Gauss:

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{\frac{(-1 + \sqrt{17})}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-1 + \sqrt{17})}{2}\right)^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{(-1 + \sqrt{17})^2 + 16}}{4} \\
&= \frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \\
b_1 &= \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{\frac{(-1 - \sqrt{17})}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-1 - \sqrt{17})}{2}\right)^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{(-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{(-1 - \sqrt{17})^2 + 16}}{4} \\
&= \frac{(-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}.
\end{aligned}$$

Fig. 16.5: Cálculo de  $b_0$  y  $b_1$ 

Simplifiquemos  $2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$ :

$$\begin{aligned}
2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} &= -2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
&\quad + 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
&= 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
&\quad - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
&= 2(1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}.
\end{aligned}$$

Recordaremos el término  $-4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$  por ahora y simplificaremos el primer

término elevándolo al cuadrado y luego sacando la raíz cuadrada:

$$\begin{aligned}
 2(1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} &= 2\sqrt{\left[(1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right]^2} \\
 &= 2\sqrt{(18 + 2\sqrt{17})(34 - 2\sqrt{17})} \\
 &= 2\sqrt{(18 \cdot 34 - 4 \cdot 17) + \sqrt{17}(2 \cdot 34 - 2 \cdot 18)} \\
 &= 2 \cdot 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo los términos se obtiene la fórmula de Gauss:

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
 &\quad + \frac{1}{16}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 8\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \\
 &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
 &\quad + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.
 \end{aligned}$$

### 16.6 Construcción de un heptadecágono

Construimos una circunferencia unitaria centrada en  $O$  con diámetros perpendiculares  $\overline{QP}$  y  $\overline{SR}$  (Fig. 16.8). Construimos  $A$  de modo que  $\overline{OA} = (1/4)\overline{OR}$ .

Por el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OP}^2} = \sqrt{(1/4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}/4.$$

Sea  $B$  la intersección de la bisectriz interna del  $\angle OAP$  y el segmento  $\overline{OP}$  y sea  $C$  la intersección de la bisectriz externa del  $\angle OAP$  y el segmento  $\overline{QO}$ . Por el teorema de

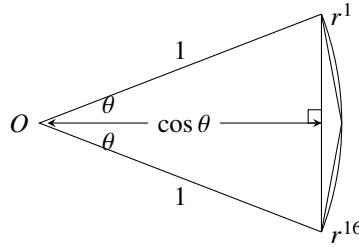


Fig. 16.6: El coseno del ángulo central calculado a partir de  $r_1, r_{16}$



$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4b_1}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} + \\
&\quad \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \right)^2 - 4 \left( \frac{(-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4} \right)} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8} \sqrt{\left( (-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right)^2 - 16 \left( (-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right)} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8} \sqrt{(-1 + \sqrt{17})^2 + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + (34 - 2\sqrt{17}) -} \\
&\quad \left( (-16 - 16\sqrt{17}) + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right) \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8} \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}
\end{aligned}$$

Fig. 16.7: Cálculo de  $c_0$ 

la bisectriz interna del ángulo (Teorema A.13):

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{OB}}{\overline{BP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}} \\
\frac{\overline{OB}}{1 - \overline{OB}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4} \\
\overline{OB} &= \frac{1}{1 + \sqrt{17}} = \frac{1}{1 + \sqrt{17}} \cdot \frac{1 - \sqrt{17}}{1 - \sqrt{17}} \\
&= \frac{-1 + \sqrt{17}}{16},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{OC}}{\overline{CP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}} \\ \frac{\overline{OC}}{1 + \overline{OC}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4} \\ \overline{OC} &= \frac{1}{-1 + \sqrt{17}} = \frac{1}{-1 + \sqrt{17}} \cdot \frac{1 + \sqrt{17}}{1 + \sqrt{17}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{17}}{16}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CD} = \overline{CA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{16}\right)^2} = \frac{1}{16}\sqrt{16 + 1 + 17 + 2\sqrt{17}} \\ &= \frac{1}{16}\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}.\end{aligned}$$

Construimos  $E$  en  $\overline{OP}$  tal que  $\overline{BE} = \overline{BA} = b$ ; nuevamente por el Teorema de

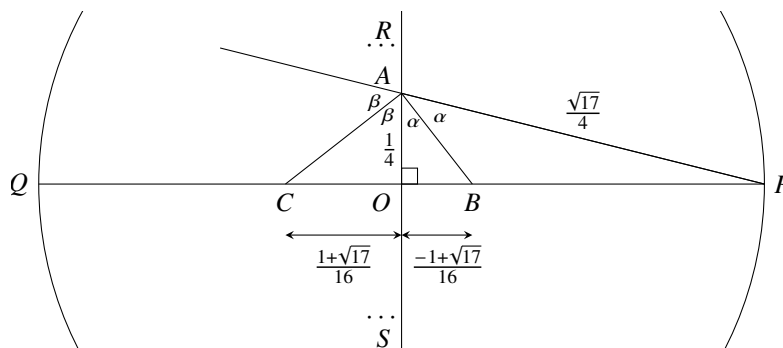


Fig. 16.8: *Construcción de un heptadecágono (1)*

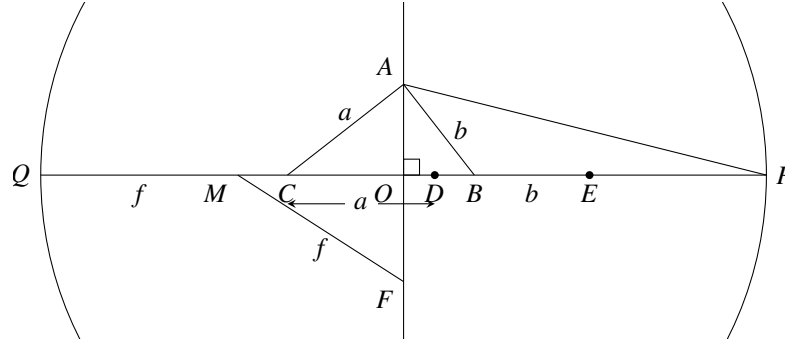


Fig. 16.9: Construcción de un heptadecágono (2)

Pitágoras:

$$\begin{aligned}
 \overline{BE} = \overline{BA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{16}\right)^2} = \frac{1}{16} \sqrt{16 + 1 + 17 - 2\sqrt{17}} \\
 &= \frac{1}{16} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}.
 \end{aligned}$$

Construimos  $M$  como punto medio de  $\overline{QD}$  y construimos  $F$  en  $\overline{OS}$  tal que  $\overline{MF} = \overline{MQ} = f$ :

$$\begin{aligned}
 \overline{MF} = \overline{MQ} &= \frac{1}{2} \overline{QD} = \frac{1}{2} (\overline{QC} + \overline{CD}) = \frac{1}{2} ((1 - \overline{OC}) + \overline{CD}) \\
 &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1 + \sqrt{17}}{16} \right) + \frac{\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{16} \right] \\
 &= \frac{1}{32} \left( 15 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right).
 \end{aligned}$$

Nótese que  $\overline{MO} = 1 - \overline{MQ} = 1 - \overline{MF}$ .

Construimos una semicircunferencia cuyo diámetro sea  $\overline{OE}$ . Construimos una

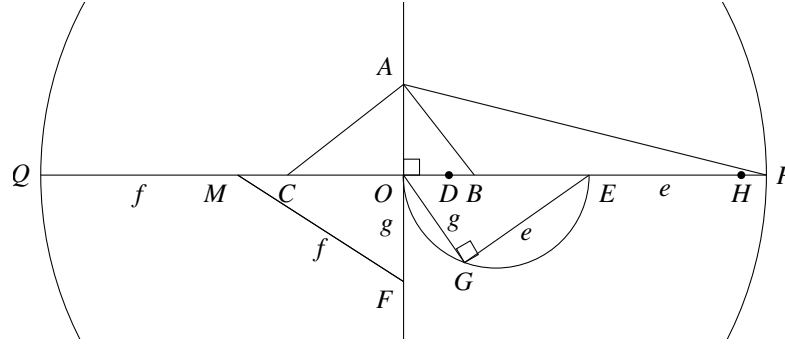


Fig. 16.10: Construcción de un heptadecágono (3)

cuerda  $\overline{OG} = \overline{OF} = g$  (Fig. 16.10). Mediante el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
 \overline{OG} = \overline{OF} &= \sqrt{\overline{MF}^2 - \overline{MO}^2} = \sqrt{\overline{MF}^2 - (1 - \overline{MF})^2} \\
 &= \sqrt{2\overline{MF} - 1} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{16} \left( 15 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right) - 1} \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.
 \end{aligned}$$

$\angle OGE$  es un ángulo recto, ya que es subtendido por un diámetro del círculo. Construimos  $H$  sobre  $\overline{OP}$  tal que  $\overline{EH} = \overline{EG} = e$ ; nuevamente por el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
 \overline{EH} = \overline{EG} &= \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{OG}^2} = \sqrt{(\overline{OB} + \overline{BE})^2 - \overline{OG}^2} \\
 &= \sqrt{\left( \frac{-1 + \sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{16} \right)^2 - \frac{1}{16} \left( -1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right)} \\
 &= \frac{1}{16} \sqrt{\left( (18 - 2\sqrt{17}) + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + (34 - 2\sqrt{17}) \right)} \\
 &\quad + \left( 16 + 16\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right) \\
 &= \frac{1}{16} \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2(1 - \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}.
 \end{aligned}$$

Calculamos  $\overline{OE}$ :

$$\begin{aligned}\overline{OE} = \overline{OB} + \overline{BE} &= \frac{-1 + \sqrt{17}}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &= \frac{1}{16} \left( -1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right).\end{aligned}$$

Finalmente,  $\overline{OH} = \overline{OE} + \overline{EH}$  que es la fórmula de Gauss para  $\cos(360^\circ/17)$ .

### 16.7 Construcción de un Pentágono Regular

Las quintas raíces complejas de la unidad son:

$$1 + i \cdot 0, \quad \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \pm i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{-\sqrt{5} - 1}{4} \pm i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

#### 16.7.1 Trigonometría

El ángulo central de un pentágono regular es  $360^\circ/5 = 72^\circ$ . Calculemos  $\cos 36^\circ$  utilizando las identidades trigonométricas para  $2\theta$  y  $\theta/2$  (Teoremas. A.2.1, A.7):

$$\begin{aligned}0 = \cos 90^\circ &= \cos(72^\circ + 18^\circ) = \cos 2 \cdot 36^\circ \cos 36^\circ/2 - \sin 2 \cdot 36^\circ \sin 36^\circ/2 \\ &= (2 \cos^2 36^\circ - 1) \sqrt{\frac{1 + \cos 36^\circ}{2}} - 2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \sqrt{\frac{1 - \cos 36^\circ}{2}}.\end{aligned}$$

Ahora sólo hay un ángulo en la fórmula; sea  $x = \cos 36^\circ$ . Entonces:

$$\begin{aligned}(2x^2 - 1) \sqrt{\frac{1+x}{2}} &= 2\sqrt{1-x^2} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{2}} \\ (2x^2 - 1) \sqrt{1+x} &= 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x} \cdot x \cdot \sqrt{1-x} \\ 2x^2 - 1 &= 2x(1-x) \\ 4x^2 - 2x - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática se obtiene un valor construible:

$$\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

#### 16.7.2 Geometría

Sea  $\overline{ABCDE}$  un pentágono regular (Fig. 16.11). Por definición todos los lados y todos los ángulos interiores son iguales. Es fácil demostrar por triángulos congruentes que todas las diagonales son iguales. Sea la longitud de los lados 1 y la de las diagonales  $x$ .

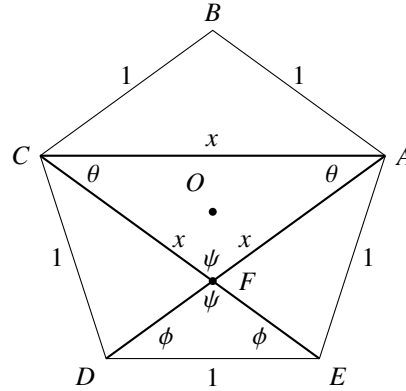


Fig. 16.11: Construcción de un pentágono regular (1)

$\triangle ACE \cong \triangle CAD$  por lado-lado por lo que  $\angle ACE = \angle CAD = \theta$ .  $\triangle AED \cong \triangle CDE$  por lado-lado-lado por lo que  $\angle ADE = \angle CED = \phi$ .  $\angle AFC = \angle EFD = \psi$  son ángulos opuestos por el vértice. En ambos triángulos la suma de los ángulos es  $180^\circ$  por lo que  $\psi + 2\theta = \psi + 2\phi$  y  $\theta = \phi$ . Por alternancia de ángulos interiores concluimos que  $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$ .

Construimos una recta que pase por  $E$  paralela a  $\overline{DC}$  y sea  $F$  su intersección con  $\overline{AC}$  (Fig. 16.12).  $CDEF$  es un rombo por lo que  $\overline{EF} = \overline{CD} = \overline{AE} = 1$ .  $\triangle ACE$  es un triángulo isósceles con ángulos de base  $\alpha$ .  $\triangle AEF$  también es isósceles y  $\angle AFE = \angle FAE = \alpha$  por lo que  $\triangle ACE \sim \triangle AEF$ . Tomando cocientes de los lados da:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}.$$

El resultado es una ecuación cuadrática  $x^2 - x - 1 = 0$  cuya raíz positiva es construible:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

### ¿Cuál es la sorpresa?

Resulta sorprendente que transcurrieran dos milenios desde los trabajos de los griegos sobre la construcción hasta el descubrimiento por Gauss de la constructibilidad del heptadecágono regular. También es sorprendente que el problema se resolviera no utilizando la geometría, sino inventando nuevos métodos algebraicos que tuvieron una gran influencia en las matemáticas.

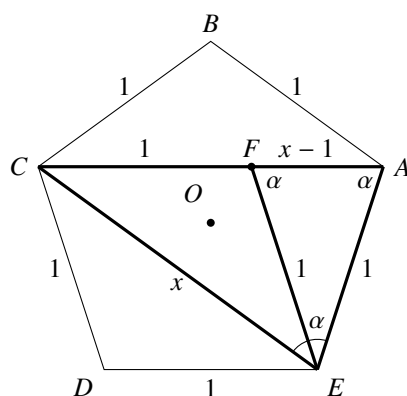


Fig. 16.12: Construcción de un pentágono regular (2)

### Fuentes

Este capítulo se basa en [6]. El trabajo original de Gauss está disponible en una traducción al inglés [18]. La ecuación 16.5–16.6 aparece en [41]; el autor asigna un ejercicio para transformarla en la fórmula de Gauss tal como aparece en [18, p. 458] y [6, p. 68].

La construcción del heptadecágono está tomada de [10] mientras que otras construcciones se pueden encontrar en [55]. La construcción trigonométrica del pentágono regular está tomada de [59]. La construcción geométrica del pentágono regular se obtuvo resolviendo los ejercicios 2.3.3 y 2.3.4 en [47].

## Apéndice A

### Teoremas de geometría y trigonometría

Este apéndice presenta teoremas de geometría y trigonometría que pueden no ser familiares al lector, así como teoremas que pueden ser familiares pero cuyas demostraciones no lo son. La sección A.1 presenta tres fórmulas para calcular el área de un triángulo. La sección A.2 demuestra las identidades trigonométricas. Aunque las fórmulas y las identidades son en su mayoría familiares, los estudiantes a menudo aprenden estas identidades de memoria o las buscan sin ver nunca una demostración. Las siguientes secciones contienen demostraciones de teoremas avanzados de geometría: Sec. A.3—los teoremas de la bisectriz de ángulos, Sec. A.4—el teorema de Ptolomeo que relaciona los lados y las diagonales de un cuadrilátero circunscrito por una circunferencia, Sec. A.5—Teorema de Ceva que relaciona los tres segmentos de línea de un triángulo, y Sec. A.6—Teorema de Menelao sobre los segmentos de una transversal en un triángulo.

#### A.1 Teoremas sobre triángulos

##### A.1.1 Cálculo del área de un triángulo

La fórmula estándar para calcular el área de un triángulo a partir de la base y la altura es bien conocida. Se puede demostrar utilizando varios métodos geométricos.

**Teorema A.1.** *El área del triángulo  $\triangle ABC$  viene dada por:*

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bh, \quad (\text{A.1})$$

donde  $b$ , la base, es uno de los lados del triángulo, y  $h$ , la altura, es la longitud de la perpendicular a  $b$  desde el vértice opuesto (Fig. A.1).

*Demostración.* Figura A.2 muestra que “cortando” el triángulo por la mitad de la altura, podemos “mover” los triángulos sombreados para formar un rectángulo de la misma área que el triángulo. La base del rectángulo es  $b$  y su altura  $h/2$ .  $\square$

**Teorema A.2.** *El área del triángulo  $\triangle ABC$  viene dada por:*

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin \theta. \quad (\text{A.2})$$

*Demostración.* Del Teorema A.1 usando  $h = c \sin \theta$ .  $\square$



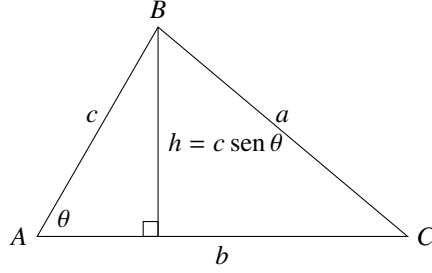


Fig. A.1: Cálculo del área de un triángulo a partir de la base y la altura

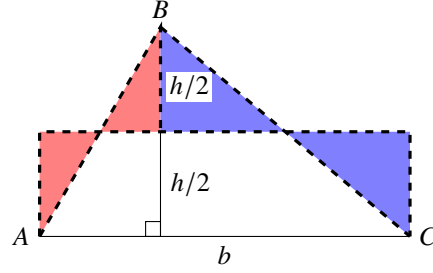


Fig. A.2: Cálculo del área de un triángulo a partir de la base y la altura

**Teorema A.3** (eron). El área del triángulo  $\triangle ABC$  viene dada por:

$$\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

donde  $s$ , es el semi-perímetro del triángulo, es igual a  $\frac{1}{2}(a+b+c)$ .

*Demostración.* El radio de una circunferencia y una tangente que interseca al radio son perpendiculares. Además, las longitudes de los segmentos de dos tangentes desde el mismo punto al círculo son iguales. Por lo tanto (Fig. A.3)<sup>1</sup>:

$$\triangle AOB' \cong \triangle AOC', \quad \triangle BOA' \cong \triangle BOC', \quad \triangle COA' \cong \triangle COB'.$$

El área  $\triangle ABC$  es la suma de los seis triángulos anteriores. Como la altura de los seis triángulos es  $r$ , el radio de la circunferencia inscrita, obtenemos:

$$\Delta ABC = \Delta AOB' + \Delta AOC' + \Delta BOA' + \Delta BOC' + \Delta COA' + \Delta COB' \quad (\text{A.3a})$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}r(u+u+v+v+w+w) \quad (\text{A.3b})$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}r(a+b+c) \quad (\text{A.3c})$$

$$\Delta ABC = rs. \quad (\text{A.3d})$$

Definamos ahora los lados en función de las tangentes de los ángulos centrales:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{u}{r}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{v}{r}, \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{w}{r}.$$

A partir de estas definiciones y  $s = \frac{1}{2}(2u+2v+2w)$  obtenemos:

$$s = u+v+w = r \left( \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \right).$$

<sup>1</sup>Esto demuestra que el *incentro* el centro de la circunferencia inscrita, es la intersección común de las tres bisectrices de los ángulos.

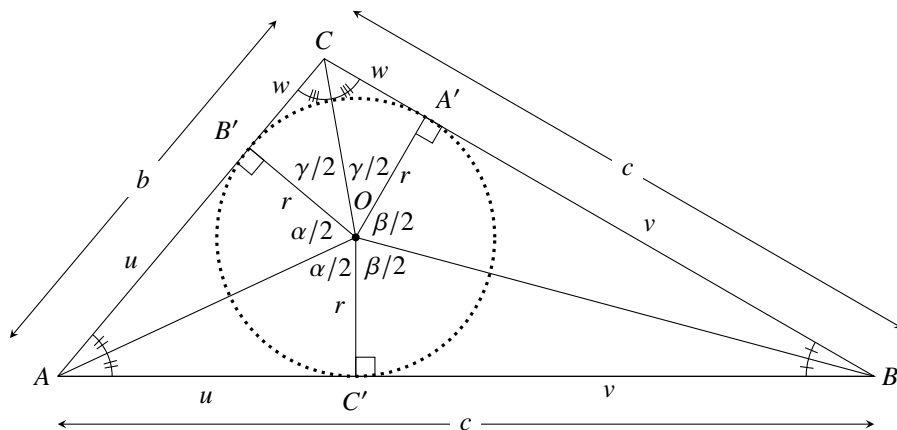


Fig. A.3: Triangle con un círculo inscrito

Como  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = 360^\circ$  y así  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$ , por el Teorema A.11:

$$\begin{aligned} s &= r \left( \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} \right) \\ &= r \left( \frac{u}{r} \frac{v}{r} \frac{w}{r} \right) = \frac{1}{r^2} (u v w) \\ r &= \sqrt{\frac{u v w}{s}}. \end{aligned}$$

Por Ecuación A.3d:

$$\Delta ABC = r s = s \sqrt{\frac{u v w}{s}} = \sqrt{s u v w}.$$

La fórmula de Heron se deduce de  $u = s - a$ ,  $v = s - b$ ,  $w = s - c$ . □

## A.2 Identidades trigonométricas

### A.2.1 El seno y el coseno de la suma y la diferencia de dos ángulos

**Teorema A.4.**

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

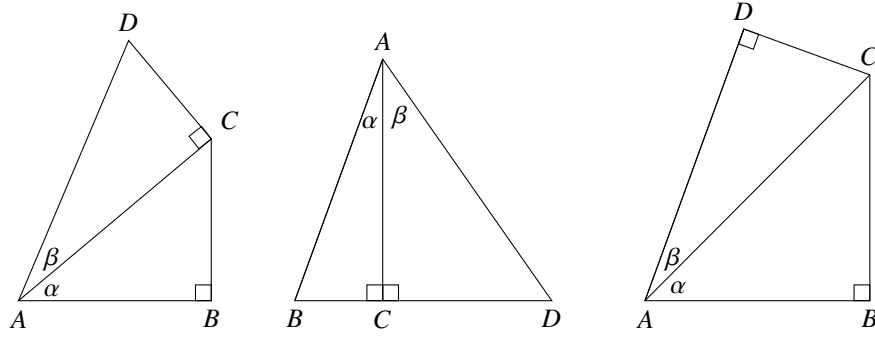


Fig. A.4: Diagramas para demostrar la identidad del seno de sumas de ángulos

Demostraremos la primera fórmula; las demás pueden obtenerse utilizando los valores del seno y coseno para  $-\alpha$  y  $90^\circ - \alpha$ .

Dado un triángulo rectángulo  $\triangle ABC$  con ángulo agudo  $\alpha$  y un triángulo rectángulo  $\triangle ACD$  con ángulo agudo  $\beta$ , podemos unirlos para obtener figuras geométricas con ángulo  $\alpha + \beta$  (Fig. A.4). El diagrama de la izquierda es el más utilizado en las demostraciones de las identidades. Aquí damos dos demostraciones basadas en los diagramas central y derecho.

*Demostración.*

(1) Calculemos el área del  $\triangle ABD$  de dos maneras distintas: (1) utilizando la Ecuación A.2 sobre el  $\triangle ABD$ , y (2) utilizando la ecuación por separado sobre el  $\triangle ABC$  y el  $\triangle ADC$  (Fig. A.5).  $h$  también se calcula dos veces utilizando la definición de las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned}
 \triangle ABD &= \frac{1}{2}bc \sin(\alpha + \beta) \\
 \triangle ABD &= \triangle ABC + \triangle ADC \\
 &= \frac{1}{2}ch \sin \alpha + \frac{1}{2}bh \sin \beta \\
 &= \frac{1}{2}c(b \cos \beta) \sin \alpha + \frac{1}{2}b(c \cos \alpha) \sin \beta.
 \end{aligned}$$

Igualando las dos fórmulas para  $\triangle ABD$  y cancelando  $\frac{1}{2}bc$ , obtenemos:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

□

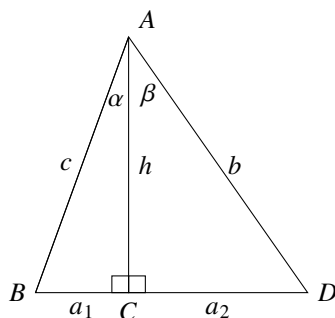


Fig. A.5: Cálculo del área de un triángulo de dos maneras

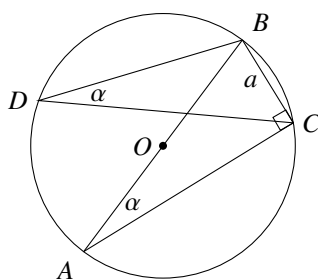


Fig. A.6: Todos los ángulos inscritos subtendidos por una cuerda son iguales

La segunda demostración utiliza el siguiente teorema:

**Teorema A.5.** En una circunferencia de diámetro 1 la longitud de una cuerda que subtende un ángulo inscrito es igual al seno del ángulo (Fig. A.6).

*Demostración.* Sea  $\overline{AB}$  un diámetro y  $\angle BAC = \alpha$ . Sea  $D$  cualquier otro punto de la circunferencia que forme un triángulo  $\triangle BDC$ , uno de cuyos lados es la cuerda  $\overline{BC}$ . Como cuerdas iguales subtenden ángulos inscritos iguales  $\angle BDC = \alpha$ . En el triángulo rectángulo  $\triangle ABC$ :

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{1} = \overline{BC}.$$

□

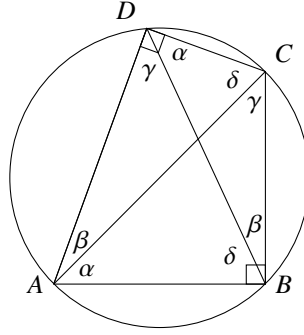


Fig. A.7: Un cuadrilátero inscrito en una circunferencia

*Demostración.*

(2) Esta demostración se basa en el diagrama de la derecha de la figura A.4 reproducido en la figura A.7, donde el cuadrilátero  $ABCD$  ha sido inscrito en una circunferencia. Por el Teorema A.15 un cuadrilátero puede ser inscrito en una circunferencia si y sólo si la suma de cada par de ángulos opuestos es  $180^\circ$ .  $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$  ya que ambos ángulos son rectos. Por Teorema 5.4 la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es  $360^\circ$ , por lo que  $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$ .

Sea el diámetro de la circunferencia 1 (si no, multiplicamos todo por la longitud del diámetro). Entonces los lados del cuadrilátero son:

$$\overline{BC} = \text{sen } \alpha, \quad \overline{CD} = \text{sen } \beta, \quad \overline{AB} = \text{sen } \gamma, \quad \overline{DA} = \text{sen } \delta,$$

y sus diagonales son:

$$\overline{BD} = \text{sen}(\alpha + \beta), \quad \overline{CA} = \text{sen}(\alpha + \gamma).$$

Por el Teorema de Ptolomeo (Teorema A.18) el producto de las diagonales de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia es igual a la suma de los productos de los lados opuestos del cuadrilátero. Como  $\angle ADC$  y  $\angle ABC$  son ángulos rectos tenemos:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha + \beta) \text{sen}(\alpha + \gamma) &= \text{sen } \alpha \text{sen } \delta + \text{sen } \beta \text{sen } \gamma \\ \text{sen}(\alpha + \beta) \text{sen}(90^\circ) &= \text{sen } \alpha \text{sen}(90^\circ - \beta) + \text{sen } \beta \text{sen}(90^\circ - \alpha) \\ \text{sen}(\alpha + \beta) &= \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen } \beta. \end{aligned}$$

□

**A.2.2 Coseno de un ángulo triple****Teorema A.6.**

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha .$$

*Demostración.* La demostración utiliza las fórmulas en Teorema A.4 y la fórmula  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ :

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) \\ &= \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha \\ &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - (2 \sin \alpha \cos \alpha) \sin \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - \cos \alpha \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - \cos \alpha + \cos^3 \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha . \end{aligned}$$

□

**A.2.3 El seno y el coseno de la mitad de un ángulo****Teorema A.7.** Si  $\alpha$  es un ángulo en un ángulo entonces<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} . \end{aligned}$$

*Demostración.* La demostración utiliza las fórmulas del Teorema A.4 y la fórmula  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos 2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= 2 \cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) - 1 \\ \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) &= 1 - \cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) = 1 - \frac{1 + \cos \alpha}{2} \\ \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} . \end{aligned}$$

□

<sup>2</sup>La fórmula general es más compleja porque las raíces cuadradas pueden ser positivas o negativas dependiendo del cuadrante en el que se encuentre  $\alpha/2$ . Para un triángulo  $0 < \alpha < 180^\circ$ , entonces  $0 < \alpha/2 < 90^\circ$  está en el primer cuadrante y tanto el seno como el coseno son positivos.

## A.2.4 La ley de los cosenos

**Teorema A.8** (Law of cosines). *En un triángulo  $\triangle ABC$  de lados  $a, b, c$  (Fig. A.8):*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle ACB.$$

*Demostración.*

(1) Trazamos una altura desde  $C$  hasta  $\overline{AB}$  y utilizamos la definición de coseno y el Teorema de Pitágoras:

$$c = x + (c - x) = a \cos \beta + b \cos \alpha \quad (\text{A.4a})$$

$$c^2 = ac \cos \beta + bc \cos \alpha. \quad (\text{A.4b})$$

Del mismo modo, trazamos las altitudes de  $A$  a  $\overline{BC}$  y de  $B$  a  $\overline{AC}$  para obtener:

$$a^2 = ca \cos \beta + ba \cos \gamma \quad (\text{A.5a})$$

$$b^2 = cb \cos \alpha + ab \cos \gamma. \quad (\text{A.5b})$$

Sumando las Ecuaciones A.5a y A.5b y restando la Ecuación A.4b se obtiene:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - c^2 &= ca \cos \beta + ba \cos \gamma \\ &\quad + cb \cos \alpha + ab \cos \gamma \\ &\quad - ac \cos \beta - bc \cos \alpha \\ &= 2ab \cos \gamma \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

□

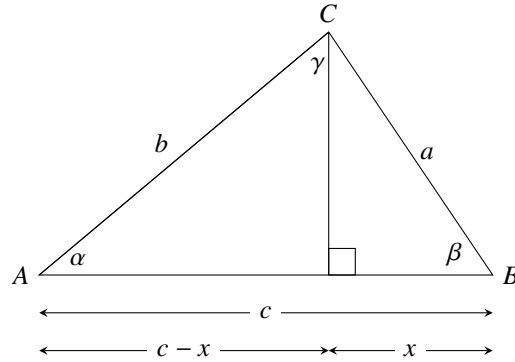


Fig. A.8: Demostración 1 de la ley de los cosenos

*Demostración.*

(2) La segunda demostración utiliza el teorema de Ptolomeo (Teorema A.18)<sup>3</sup>.

El triángulo  $\triangle ABC$  puede inscribirse en una circunferencia. Construimos otro triángulo  $\triangle ABC'$  congruente con  $\triangle ABC$  e inscrito en la misma circunferencia (Fig. A.9). Esto se puede hacer mediante la construcción de un ángulo de  $\overline{AB}$  igual a  $\angle CAB$  que interseca a la circunferencia en  $C'$  y luego construimos la línea  $\overline{C'A}$ . Como los ángulos subtendidos por la misma cuerda son iguales  $\angle AC'B = \angle BCA$ , entonces también  $\angle CBA = \angle C'AB$  y así  $\triangle ABC' \cong \triangle BAC$  por ángulo-lado-ángulo con el lado común  $\overline{AB}$ .

Trazamos perpendiculares de  $C$  a  $D$  y de  $C'$  a  $D'$  sobre  $\overline{AB}$  de modo que  $x = a \cos \beta$ . Por el teorema de Ptolomeo para el cuadrilátero  $\overline{ABCC'}$ :

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c(c - 2x) \\ &= a^2 + c(c - 2a \cos \beta) \\ &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta. \end{aligned}$$

□

### A.2.5 La tangente de la suma de dos ángulos

**Teorema A.9.**

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

<sup>3</sup>La sección A.4 utiliza la Ley de los Cosenos para demostrar el teorema de Ptolomeo! La primera demostración de la Ley de los Cosenos evita este razonamiento circular. Además, hay demostraciones del teorema de Ptolomeo que no utilizan la Ley de los Cosenos.

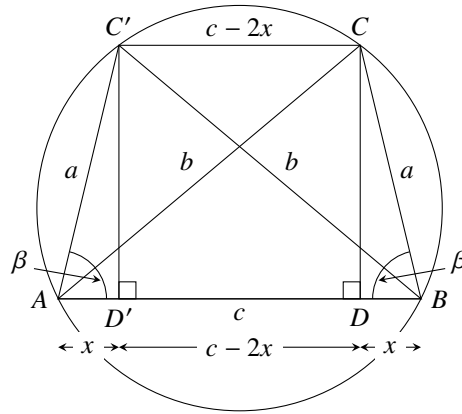


Fig. A.9: Demostración 2 de la ley de los cosenos



*Demostración.*

$$\begin{aligned}
 \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\
 &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\
 &= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta}{\cos \alpha - \sin \alpha \tan \beta} \\
 &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.
 \end{aligned}$$

□

### A.2.6 La tangente de la mitad de un ángulo

**Teorema A.10.**

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}.$$

*Demostración.* Deducimos y resolvemos una ecuación cuadrática en  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ :

$$\begin{aligned}
 \tan \alpha &= \frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\
 \tan \alpha \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tan \alpha &= 0 \\
 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}.
 \end{aligned}$$

□

### A.2.7 El producto de tres tangentes

**Teorema A.11.** *If  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  then:*

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
 \tan \gamma &= \tan(180^\circ - (\alpha + \beta)) \\
 &= -\tan(\alpha + \beta) \\
 &= -\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\
 \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma &= \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma.
 \end{aligned}$$

□

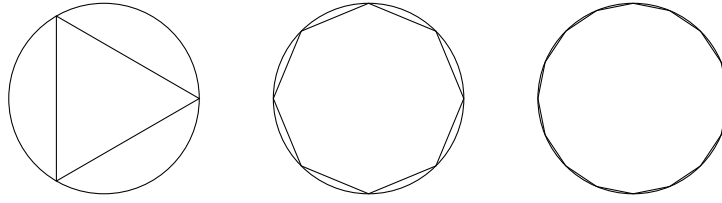
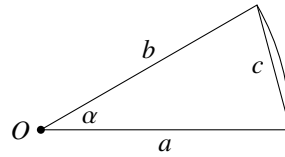


Fig. A.10: Polígonos regulares con lados de 3, 8 y 16 inscritos en un círculo

Fig. A.11: La longitud de una cuerda correspondiente a un arco de tamaño  $\alpha$ **A.2.8 El límite de  $\sin \alpha / \alpha$** **Teorema A.12.**

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 .$$

*Demostración.* Al examinar los polígonos regulares inscritos en una circunferencia (Fig. A.10), vemos que cuantos más lados tenga un polígono, más se acerca al perímetro de la circunferencia. Una circunferencia del círculo dividido por el número de lados es la longitud de un arco con los mismos puntos extremos que el lado correspondiente, ya que en un polígono regular todos los lados tienen la misma longitud. Dado que la relación entre la circunferencia y el perímetro de un polígono inscrito se aproxima a 1 a medida que aumenta el número de lados, también lo hace la relación entre la longitud de un arco y la cuerda correspondiente. Esto se demuestra con los siguientes ejemplos numéricos:

Ángulo	Longitud del arco	Longitud de la cuerda	Razón
80	1,396	1,286	1,090
60	1,047	1,000	1,047
40	0,698	0,684	1,006
5	0,087	0,087	1,000

Dado que  $a = b = 1$  la longitud de la cuerda  $c$  que subtiende a  $\alpha$  puede calcularse a partir de la Ley de los Cosenos (Fig. A.11):

$$\begin{aligned}
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \\
 c &= \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} \\
 \lim_{\alpha \rightarrow 0} c &= \sqrt{2 - 2 \cdot 1} = 0.
 \end{aligned}$$

En referencia a la figura A.12:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{2\alpha}.$$

Esta es la razón entre la longitud de la cuerda  $\overline{PQ}$  y la longitud del arco  $\widehat{PQ}$ . Pero hemos visto que esta razón converge a 1 como el ángulo subtendido  $2\alpha$  tiende a 0, así:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1.$$

□

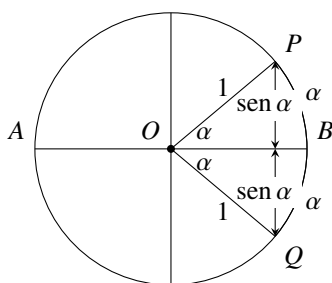


Fig. A.12: Relación entre  $\operatorname{sen} x$  y  $x$

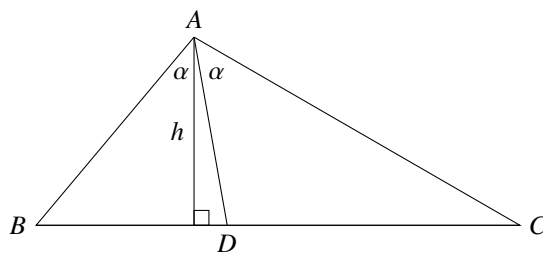


Fig. A.13: Teorema de la bisectriz interna del ángulo

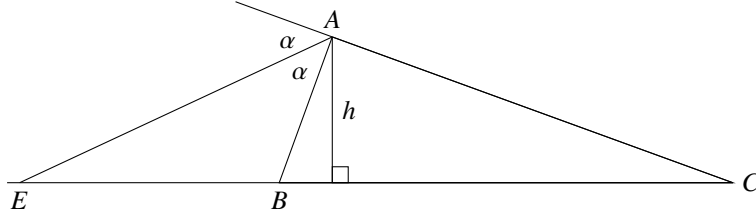


Fig. A.14: Teorema de la bisectriz del ángulo exterior

### A.3 Teoremas de la bisectriz del ángulo

**Teorema A.13.** En  $\triangle ABC$  la bisectriz del ángulo de  $\angle BAC$  interseca  $\overline{BC}$  en  $D$  (Fig. A.13). Entonces:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

*Demostración.* Demostramos el teorema calculando las áreas de dos triángulos utilizando tanto la base y la altura (Ecuación A.1), como la base, el ángulo y el lado (Ecuación A.2):

$$\begin{aligned} \triangle ABD &= \frac{1}{2} \overline{BD} h = \frac{1}{2} \overline{AB} \overline{AD} \sin \alpha \\ \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{AD} \sin \alpha}{h} \\ \triangle ACD &= \frac{1}{2} \overline{CD} h = \frac{1}{2} \overline{AC} \overline{AD} \sin \alpha \\ \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{AD} \sin \alpha}{h} \\ \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}. \end{aligned}$$

□

También existe un teorema de la bisectriz del ángulo para la *bisectriz externa*:

**Teorema A.14.** In  $\triangle ABC$  sea  $\overline{AE}$  la bisectriz del ángulo suplementario al ángulo  $\triangle BAC$  (Fig. A.14) y que la bisectriz interseque a  $\overline{BC}$  en  $E$  (Fig. A.14). Entonces:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

*Demostración.* Dado que  $\overline{AC}$  es una línea recta  $\angle EAC = 180^\circ - \alpha$ .

$$\begin{aligned}\triangle ABE &= \frac{1}{2} \overline{BE} h = \frac{1}{2} \overline{AE} \overline{AB} \sin \alpha \\ \triangle ACE &= \frac{1}{2} \overline{CE} h = \frac{1}{2} \overline{AE} \overline{AC} \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \overline{AE} \overline{AC} \sin \alpha \\ \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{AE} \sin \alpha}{h} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} \\ \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.\end{aligned}$$

□

#### A.4 Teorema de Ptolomeo

##### A.4.1 Trapecio inscrito en una circunferencia

Antes de demostrar el teorema de Ptolomeo, demostraremos teoremas sobre cuadriláteros y trapecios.

**Teorema A.15.** *Un cuadrilátero puede ser inscrito en una circunferencia si y sólo si los ángulos opuestos son suplementarios (suman a  $180^\circ$ ).*

Los libros de texto de geometría ofrecen una demostración sencilla de una dirección, pero es difícil encontrar una demostración de la inversa, por lo que aquí se ofrecen ambas demostraciones.

*Demostración.* Un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco que lo subtiende por lo que  $\angle DAB$  es la mitad del arco  $\widehat{DCB}$  y  $\angle DCB$  es la mitad del arco  $\widehat{DAB}$  (Fig. A.15). Los dos arcos forman toda la circunferencia por lo que su suma es  $360^\circ$ . Por lo tanto,  $\angle DAB + \angle DCB = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$ , y análogamente  $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$ .

(Dirección inversa) Cualquier triángulo puede ser inscrito en una circunferencia. Circunscribimos  $\triangle DAB$  por una circunferencia y supongamos que  $C'$  es un punto tal que  $\angle DAB + \angle DC'B = 180^\circ$ , pero  $C'$  no está en la circunferencia del círculo. Sin pérdida de generalidad, supondremos que  $C'$  esté dentro de la circunferencia (Fig. A.16).

Construimos una semirrecta que prolongue  $\overline{DC'}$  y que  $C$  sea su intersección con la circunferencia. Entonces  $\overline{ABCD}$  está inscrito en una circunferencia:

$$\begin{aligned}\angle DAB + \angle DCB &= 180^\circ = \angle DAB + \angle DC'B \\ \angle DCB &= \angle DC'B,\end{aligned}$$

lo cual es imposible si  $C$  está en la circunferencia y  $C'$  está dentro de la circunferencia.

□

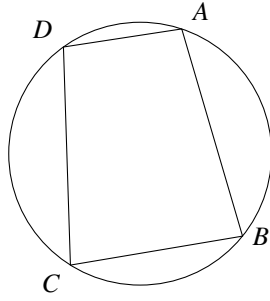


Fig. A.15: Un cuadrilátero inscrito en una circunferencia

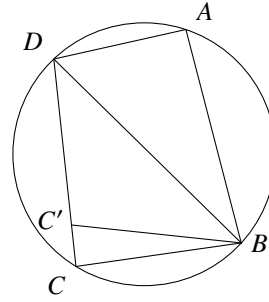


Fig. A.16: El cuarto vértice debe estar en la circunferencia

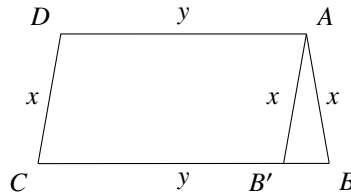


Fig. A.17: Un trapecio

**Teorema A.16.** Los ángulos opuestos de un trapecio isósceles son suplementarios.

*Demostración.* Construimos la recta  $\overline{AB'}$  paralela a  $\overline{CD}$  (Fig. A.17).  $\overline{AB'CD}$  es un paralelogramo y  $\triangle ABB'$  es un triángulo isósceles, por lo que  $\angle C = \angle ABB' = \angle AB'B = \angle B$ . Análogamente,  $\angle A = \angle D$ . Como la suma de los ángulos internos de cualquier cuadrilátero es igual a  $360^\circ$ :

$$\begin{aligned}\angle A + \angle B + \angle C + \angle D &= 360^\circ \\ 2\angle A + 2\angle C &= 360^\circ \\ \angle A + \angle C &= 180^\circ,\end{aligned}$$

y de manera similar  $\angle B + \angle D = 180^\circ$ . □

**Teorema A.17.** Un trapecio puede ser inscrito en un círculo.

La demostración es inmediata por los Teoremas. A.15, A.16.

**A.4.2 Demostración del teorema de Ptolomeo**

**Teorema A.18** (Ptolomeo). *Dado un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, la siguiente fórmula relaciona las longitudes de las diagonales y las longitudes de los lados (Fig. A.18).*

$$ef = ac + bd.$$

*Demostración.* Por la Ley de los Cosenos para los cuatro triángulos  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ADC$ ,  $\triangle DAB$ ,  $\triangle DCB$ :

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle B$$

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \angle D$$

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \angle A$$

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle C.$$

$\angle C = 180^\circ - \angle A$  y  $\angle D = 180^\circ - \angle B$  porque son ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, por lo que  $\cos \angle D = -\cos \angle B$  y  $\cos \angle C = -\cos \angle A$ . Eliminamos el término coseno de las ecuaciones anteriores para obtener:

$$e^2(cd + ab) = abc^2 + abd^2 + a^2cd + b^2cd$$

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{(ab + cd)}$$

$$f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{(ad + bc)}.$$

Multiplicamos las dos ecuaciones y simplificamos para obtener el teorema de Ptolomeo:

$$e^2 \cdot f^2 = (ac + bd)^2$$

$$ef = (ac + bd).$$

□

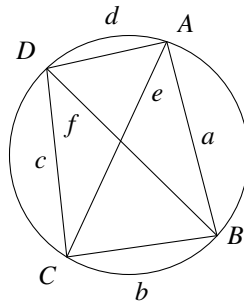


Fig. A.18: Teorema de Ptolomeo

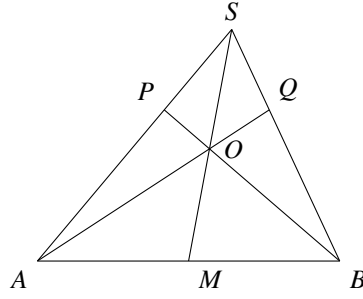


Fig. A.19: Teorema de Ceva

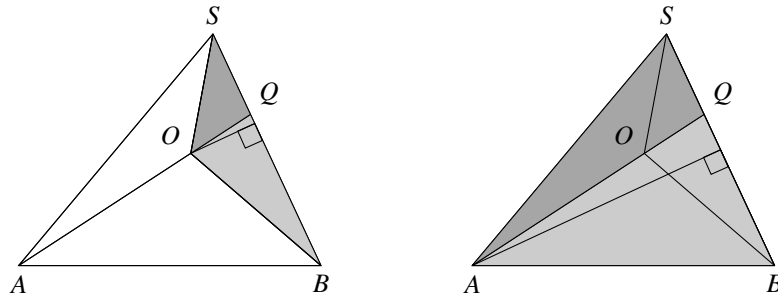


Fig. A.20: Triángulos en el teorema de Ceva

### A.5 Teorema de Ceva

**Teorema A.19 (Ceva).** *Dados segmentos desde los vértices de un triángulo hasta los lados opuestos que se cruzan en un punto, las longitudes de los segmentos satisfacen (Fig. A.19):*

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = 1.$$

*Demostración.* Si las altitudes de dos triángulos son iguales, sus áreas son proporcionales a las bases. En ambos diagramas de la figura A.20, las altitudes de los triángulos grises son iguales, por lo que:

$$\frac{\triangle BQO}{\triangle SQO} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}, \quad \frac{\triangle BQA}{\triangle SQA} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}.$$

Restando las áreas de los triángulos indicados, obtenemos la proporción entre los



triángulos grises mostrados en la figura A.21:

$$\frac{\triangle BOA}{\triangle SOA} = \frac{\triangle BQA - \triangle BQO}{\triangle SQA - \triangle SQO} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}.$$

Esto puede parecer extraño al principio, así que lo explicaremos utilizando una notación más sencilla:

$$\begin{aligned} \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \\ \frac{e}{f} &= \frac{a}{b} \\ c - e &= \frac{ad}{b} - \frac{af}{b} = \frac{a}{b}(d - f) \\ \frac{c - e}{d - f} &= \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Del mismo modo, podemos demostrar:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} &= \frac{\triangle AOS}{\triangle BOS} \\ \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} &= \frac{\triangle SOB}{\triangle AOB}, \end{aligned}$$

Así que:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = \frac{\triangle AOS}{\triangle BOS} \cdot \frac{\triangle BOA}{\triangle SOA} \cdot \frac{\triangle SOB}{\triangle AOB} = 1,$$

ya que el orden de los vértices en un triángulo no hace ninguna diferencia.  $\square$

## A.6 Teorema de Menelao

**Teorema A.20** (Menelao). Sea  $\triangle ABC$  un triángulo y  $\overline{DBQ}$  una línea transversal que corta los tres lados del triángulo o sus prolongaciones (Fig. A.22). Entonces<sup>4</sup>:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = 1. \quad (\text{A.6})$$

*Demostración.* Trazamos una recta que pase por  $C$  paralela a  $\overline{AB}$  y prolongamos  $\overline{DQ}$  hasta que corte a la paralela en  $K$ . Del  $\triangle ADB \sim \triangle CDK$  se deduce que:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{AB}}.$$

<sup>4</sup>En función de la configuración del triángulo y de la recta transversal, el resultado de la multiplicación puede ser más o menos uno.

Del  $\triangle BQP \sim \triangle KQC$  se deduce que:

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{BP}}.$$

Eliminando  $\overline{CK}$  se obtiene  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{PQ} = \overline{QC} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{AD}$  que puede reordenarse para obtener la Ecuación A.6.  $\square$

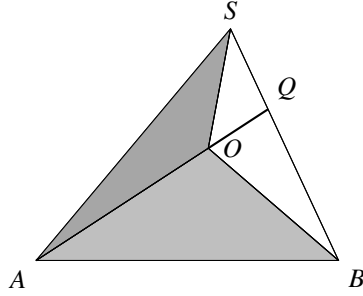


Fig. A.21: *Restar áreas en el teorema de Ceva*

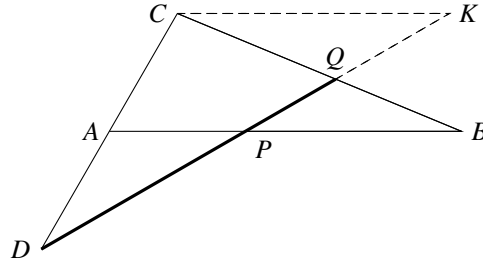


Fig. A.22: *Teorema de Menelao*

### Fuentes

El apéndice se basa principalmente en [19]. El teorema de Ceva y el teorema de Menelao pueden demostrarse entre sí [45].

## Bibliografía

- [1] Aigner, M., Ziegler, G.M.: Proofs from THE BOOK (Fifth Edition). Springer (2014)
- [2] Alperin, R.C.: A mathematical theory of origami constructions and numbers. *New York Journal of Mathematics* **6**, 119–133 (2000)
- [3] Barabash, M.: A non-visual counterexample in elementary geometry. *The College Mathematics Journal* **36**(5) (2005)
- [4] Ben-Ari, M.: Mathematical Logic for Computer Science (Third Edition). Springer (2012)
- [5] Ben-Ari, M.: LearnSAT: A SAT solver for education. *Journal of Open Source Software* **3**(24), 639 (2018). <https://doi.org/10.21105/joss.00639>
- [6] Bewersdorff, J.: Galois Theory for Beginners: A Historical Perspective. American Mathematical Society (2006)
- [7] Bold, B.: Famous Problems of Mathematics: A History of Constructions with Straight Edge and Compass. Van Nostrand (1969)
- [8] Bradford, P.V.: Visualizing solutions to n-th degree algebraic equations using right-angle geometric paths. Archived May 2, 2010 at the Wayback Machine. <https://web.archive.org/web/20100502013959/http://www.concentric.net/~pvb/ALG/rightpaths.html> (2010)
- [9] Butler IV, L.: Ramsey theory. <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2016/Barton.pdf> (2016)
- [10] Callagy, J.J.: The central angle of the regular 17-gon. *The Mathematical Gazette* **67**(442), 290–292 (1983). <https://www.jstor.org/stable/3617271>
- [11] Courant, R., Robbins, H.: What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods (Second Edition). Oxford University Press (1996). Revised by Ian Stewart
- [12] Davies, R.: On Langford’s problem (II). *The Mathematical Gazette* **43**, 253–5 (1959)
- [13] Dörrie, H.: 100 Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution. Dover (1965)

- [14] Dörrie, H.: 100 problems of elementary mathematics: Their history and solution. Reworked by Michael Woltermann. Archived 21 February 2020 at the Wayback Machine. <https://web.archive.org/web/20191223032114/http://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/DorrieContents.htm> (2010)
- [15] Dudley, U.: A Budget of Trisections. Springer (1987)
- [16] Eppstein, D.: Twenty proofs of Euler's formula:  $V - E + F = 2$ . <https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/> (n.d.)
- [17] Fraleigh, J.B.: A First Course in Abstract Algebra (Seventh Edition). Addison-Wesley (2003)
- [18] Gauss, K.F.: Disquisitiones Arithmeticae. Yale University Press (2006). Editors: Todd W. Bressi and Paul Groth
- [19] Gelfand, I., Saul, M.: Trigonometry. Springer (2001)
- [20] Graham, R., Butler, S.: Rudiments of Ramsey Theory (Second Edition). American Mathematical Society (2015)
- [21] Gunderson, D.S.: Handbook of Mathematical Induction: Theory and Applications. Mathematical Association of America (2010)
- [22] Heath, T.L.: The Thirteen Books of Euclid's Elements. Dover (1956)
- [23] Heule, M.J.H., Kullmann, O.: The science of brute force. Communications of the ACM **60**(8), 70–79 (2017)
- [24] Hull, T.C.: Solving cubics with creases: The work of Beloch and Lill. American Mathematical Monthly **118**(4), 307–315 (2011)
- [25] Hungerbühler, N.: A short elementary proof of the Mohr-Mascheroni theorem. American Mathematical Monthly **101**(8), 784–787 (1994)
- [26] Lang, R.J.: Origami and geometric constructions. [http://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami\\_constructions.pdf](http://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf) (1996–2015)
- [27] Laugwitz, D.: Eine elementare Methode für Unmöglichkeitbeweise bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Elemente der Mathematik **17**, 54–58 (1962)
- [28] Loh, P.S.: A different way to solve quadratic equations. <https://www.poshenloh.com/quadratic/> (2019)
- [29] Loh, P.S.: A simple proof of the quadratic formula. <https://arxiv.org/abs/1910.06709> (2019)

- [30] Manna, Z.: *Mathematical Theory of Computing*. McGraw-Hill (1974)
- [31] Martin, G.E.: *Geometric Constructions*. Springer (1998)
- [32] Mastin, L.: Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi: Muslim Mathematician. [https://www.storyofmathematics.com/islamic\\_alkhwarizmi.html](https://www.storyofmathematics.com/islamic_alkhwarizmi.html) (2020)
- [33] McCallum, W.: A tale of two triangles: Heron triangles and elliptic curves. <http://blog.kleinproject.org/?p=4> (2012)
- [34] McKay, B.D.: Ramsey theory. <http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/ramsey.html> (nd)
- [35] Miller, J.: Langford's problem, remixed. <http://dialectrix.com/langford.html> (2014)
- [36] Newton, L.: The power of origami. <https://plus.maths.org/content/power-origami>
- [37] Peil, T.: The rusty compass theorem. Archived 20/07/2020 at the Wayback Machine. <https://web.archive.org/web/20200720195718/http://web.mnstate.edu/peil/geometry/C2EuclidNonEuclid/1Compass.htm> (2006)
- [38] Ramanujan: Squaring the circle. *Journal of the Indian Mathematical Society* **V**, 138 (1913). <http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram05.pdf>
- [39] Ramanujan: Modular equations and approximations to  $\pi$ . *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* **XLV**, 350–372 (1914). <http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram06.pdf>
- [40] Riaz, M.: Geometric solutions of algebraic equations. *American Mathematical Monthly* **69**(7), 654–658 (1962)
- [41] Rike, T.: Fermat numbers and the heptadecagon. <https://mathcircle.berkeley.edu/sites/default/files/BMC6/ps0506/Heptadecagon.pdf> (2005)
- [42] Robson, E.: Words and pictures: New light on Plimpton 322. *American Mathematical Monthly* **109**(2), 105–120 (2002)
- [43] Ross, S.: *A First Course in Probability* (Tenth Edition). Pearson (2019)
- [44] Schumer, P.: The Josephus problem: Once more around. *Mathematics Magazine* **75**(1), 12–17 (2002)

- [45] Silvester, J.R.: Ceva = (Menelaus)<sup>2</sup>. The Mathematical Gazette **84**(500), 268–271 (2000)
- [46] Sipka, T.: Alfred Bray Kempe’s “Proof” of the four-color theorem. Math Horizons **10**(2), 21–26 (2002). <http://www.jstor.org/stable/25678395>
- [47] Stillwell, J.: Mathematics and Its History (Third Edition). Springer (2010)
- [48] Suzuki, J.: A brief history of impossibility. Mathematics Magazine **81**(1), 27–38 (2008)
- [49] Thomas, R.: An update on the four-color theorem. Notices of the AMS **45**(7), 848–859 (1998). <http://www.ams.org/notices/199807/thomas.pdf>
- [50] Toussaint, G.: A new look at Euclid’s second proposition. The Mathematical Intelligencer **15**(3), 12–23 (1993)
- [51] Wikipedia: Angle trisection
- [52] Wikipedia: Cubic equation
- [53] Wikipedia: Five color theorem
- [54] Wikipedia: Four color theorem
- [55] Wikipedia: Heptadecagon
- [56] Wikipedia: Huzita–Hatori axioms
- [57] Wikipedia: Josephus problem
- [58] Wikipedia: Neusis construction
- [59] Wikipedia: Pentagon
- [60] Wikipedia: Plimpton 322
- [61] Wikipedia: Quadratic equation
- [62] Wikipedia: Quadratrix of Hippias
- [63] Wikipedia: Sexagesimal