הפתעות מתמטיות

מוטי בן-ארי

http://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/

16 בנובמבר 2022

פתח דבר

לו כל אחד היה נחשף למתמטיקה במצבו הטבעי,
עם כל ההנאה המאתגרת וההפתעות בה, לדעתי
היינו רואים שינוי מרשים גם בדיעות של תלמידים
כלפי מתמטיקה, וכם בתפיסה שלנו של מה זה
נקרא "טוב במתמטיקה".
Paul Lockhard

אני ממש רעב להפתעות כי כל אחת מצעיד אותנו
צעד קטן אך משמעותי להיות חכמים יותר.
Tadashi Tokieda

כאשר ניגשים למתמטיקה בצורה נאותה היא יכולה לספק לנו הפתעות רבות ומהנות. אישור לכך ניתן לקבל בחיפוש בגוגל של mathematical surprises שמחזיר (וזה מפתיע) כחצי מיליארד תוצאות. מהי הפתעה (surprises)? מקור המילה בצרפתית עתיקה עם שורשים בלטינית: sur, (מעל) ו-prendre (לקחת, לאחוז, לתפוס). באופן מילולי, להפתיע הוא להשיג. כשם עצם, הפתעה היא גם אירוע או מצב לא צפוי או מבלבל, וגם הרגש שהוא גורם.

קחו לדוגמה, קטע מהרצאה של Maxim Bruckheimer[1] על המעגל של Feuerbach: "שתי נקודות נמצאות על קו אחד בלבד, אין זו הפתעה. אולם, נתון שלוש נקודות, שאינן בהכרח על קו ישר, אם במהלך החקר הגיאומטרי, שלוש הנקודות 'נופלות' על קו ישר, זו הפתעה, ולעתים קרובות עלינו להתייחס לעובדה כמשפט שיש להוכיח. כל שלוש נקודות שאינן על קו ישר נמצאות על מעגל יחיד. אם ארבע נקודות נמצאות על אותו מעגל, זו הפתעה שיש לנסחה כמשפט. . . . ככל שמספר הנקודות בקו ישר גדול מ-3, כך המשפט מפתיע יותר. באופן דומה, ככל שמספר הנקודות על מעגל גדול מ-4, כך המשפט מפתיע עוד יותר. לכן, הטענה שעבור כל משולש קיימות תשע נקודות קשורות אחת לשניה שנמצאות על אותו מעגל . . . היא מפתיעה ביותר. בנוסף, למרות עוצמת ההפתעה, ההוכחה פשוטה ואלגנטית".

בספר מציע מרדכי בן-ארי אוסף עשיר של הפתעות מתמטיות, רובם ידועות פחות ממעגל Feuerbach, ועם סיבות מוצקות להכללתן. ראשית, למרות שהן נעדרות מספרי לימוד, אבני החן בספר נגישות עם רקע במתמטיקה של בית ספר תיכון בלבד (וסבלות, ונייר ועפרון, כי הנאה לא מגיעה בחינם). שנית, כאשר תוצאה מתמטית מאתגרת את מה שהנחנו, אנו באמת מופתעים (פרקים 1, 13). באופן דומה

[1] מקסים ברוקהיימר היה מתמטיקאי ממייסדי האוניברסיטה הפתוחה בבריטניה ודיקן הפקולטה למתמטיקה שלה. הוא היה ראש המחלקה להוראת מדעים במכון ויצמן למדע.

אנו מופתעים מ: הוכחות נובנות (פרקים 2, 3), הוכחה אלגברית של האפשרות לבנייה גיאומטרית (פרק 16), הוכחות המתבססות על נושאים לא קשורים לכאורה (פרקים 4, 5), הוכחה מוזרה באינדוקציה (פרק 6), דרכים חדשות להסתכל על תוצאה ידועה היטב (פרק 7), משפט שנראה שולי שהופך להיות הבסיס לתחום רחב במתמטיקה (פרק 8), מקורות בלתי צפויים להשראה (פרק 9), מערכת אקסיומתית שנובעת מפעילות פנאי כגון אוריגמי (פרקים 10-12). אלו הסיבות השונות להכללת הפתעות מתמטית מהנות, יפות ובלתי נשכחות בספר נפלא זה.

עד כאן התייחסתי לצורה בה הספר מטפל בחלק הראשון של ההגדרת הפתעה, הסיבות הקוגניטיביות והרצניוליות לבלתי צפוי. בקשר להיבט השני, ההיבט הרגשי, הספר הוא מקרה מאיר של הטענה של מתמטיקאים לסיבה המרכזית לעסוק במתמטיקה: היא מרתקת! בנוסף, הם טוענים שמתמטיקה מעוררת גם הסקרנות האינטלקטואלית שלנו וגם הרגישות האסטטית, ושפתרון בעיות או הבנת מושג מספק גמול רוחני, שמפתה אותנו להמשיך לעבוד על בעיות ומושגים נוספים.

אומרים שתפקידו של פתח דבר הוא לספר לקוראים למה כדאי להם לקרוא את הספר. ניסיתי למלא תפקיד זה, אבל אני מאמין שתשובה מלאה יותר יגיע ממך הקורא, לאחר שתקראו ותחוו את מה שמשתמע ממקור המילה הפתעה: שישיג אותכם!

אברהם הרכבי

הקדמה

המאמר של Godfried Toussaint [50] על "מחוגה מתמוטטת" עשה עלי רושם חזק. לעולם לא עלה על דעתי שהמחוגה המודרנית עם ציר חיכוך איננה אותה מחוגה שהיתה קיימת בימיו של אוקלידס. בספר זה אני מציג מבחר של נושאים מתמטיים שהם לא רק מעניינים, אלא שהפתיעו אותי כאשר נתקלתי בהם בפעם הראשונה.

המתמטיקה הדרושה לקריאת הספר היא ברמה בית ספר תיכון, אבל זה לא אומר שהחומר פשוט. חלק מההוכחות הן ארוכות למדי ודרושה מהקורא נכונות להשקיעה ולהתמיד. הפרס הוא הבנה של נשואים מהיפים היותר במתמטיקה. הספר אינו ספר לימוד כי המגוון העשיר אל הנושאים לא מתאים לסילבוס. הוא כן מתאים לפעילויות העשרה של תלמידי תיכון, לסמינרים אוניברסיטאים ולמורים למתמטיקה.

הפרקים לא תלויים אחד בשני (פרט לפרק 10 על האקסיומות של אוריגמי שיש לקרוא אותו לפני פרקים 11, 12, הפרקים האחרים על אוריגמי).

מהי הפתעה?

שלושה קריטריונים הנחו אותי בבחירת נושאים לספר:

- המשפט שהפתיע אותי. הפתיע במיוחד המשפטים על בנייה עם סרגל ומחוגה. העושר המתמטי של אוריגמי היה כמעט הלם: כאשר מורה למתמטיקה הציעה פרויקט בנושא סירבתי, כי פקפקתי באפשרות שקיימת מתמטיקה רצינית בתחום זה של אמנות. נושאים אחרים נכללו כי, למרות שידעתי אותם, הופתעתי מהאלגנטיות של ההוכחות ומהנגישות שלהן. בלט במיוחד ההוכחה **האלגברית** של Gauss שניתן לבנות heptadecagon (מצולע משוכלל עם 17 צלעות).
- הנושא אינו מופיע בספרי לימוד לבתי ספר תיכון או לאוניברסיטה. את המשפטים וההכחות מצאתי רק בספרים מתקדים או בספרות המחקר. קיימים מאמרי Wikipedia לרוב הנושאים, אבל חייבים לדעת איפה לחפשם ולעתים קרובות המאמרים לא נכנסים לפרטים.
- המשפטים וההוכחות נגישים עם ידע טוב במתמטיקה של בית ספר תיכון.

כל פרק מסתיים בסעיף **מה ההפתעה?** המסביר את הבחירה של הנושא.

סקירה של התוכן

פרק 1 מביא את ההוכחה של אוקלידס שעבור כל בנייה עם מחוגה קבועה, קיימת בנייה שקולה עם "מחוגה מתמוטטת". לאורך השנים ניתנו הוכחות שגויות רבות שמבוססות על תרשימים שאינם נכונים בכל מצב. כדי להדגיש שאין לסמוך על תרשימים, הבאתי את "ההוכחה" המפורסמת שכל משולש שווה-שוקיים.

לאורך שנים רבות מתמטיקאים חיפשו לשווא בנייה שתחלק זווית שרירותית לשלושה חלקים שווים trisection. Underwood Dudley חקר לעומק אנשים שהיקדשו את חייהם לחיפוש אחר בנייה. לרוב הבניות הן קירובים שממציאיהם טוענים לנכונותם. פרק 2 מתחיל בהצגת שתי בניות ופיתוח הנוסחאות הטריגונומטריות המראות שמדובר בקירובים בלבד. כדי להראות שאין משמעות להגבלה לסרגל ומחוגה בלבד, נראה שניתן לחלק זווית לשלושה חלקים שווים עם כלים יותר משוכללים: ה-neusis של Archimedes וה-quadratrix של Hippias. בסוף הפרק נמצאת הוכחה שלא ניתן לחלק זווית שרירותית לשלושה חלקים עם סרגל ומחוגה.

לא ניתן לרבע מעגל עם סרגל ומחוגה (לבנות ריבוע עם שטח זהה למעגל נתון). הבנייה בלתי אפשרית כי לא ניתן לבנות את הערך של π. פרק 3 מביא שלוש בניות אלגנטיות של קירובים טובים ל-π, אחת של Kochansky ושתיים של Ramanujan. בסוף הפרק נסביר איך לרבע מעגל באמצעות quadratrix.

לפי משפט ארבעת-הצבעים ניתן לצבוע כל מפה במישור בארבעה צבעים כך ששתי ארצות שיש להן גבול משותף צבועות בצבעים שונים. ההוכחה של משפט זה מסובך ביותר, אבל ההוכחה של משפט חמשת-הצבעים פשוטה ואלגנטית (פרק 4). הפרק מביא גם את ה"הוכחה" של Alfred Kempe לבעית ארבעת הצבים ואת ההדגמה של Percy Heawood שההוכחה שגויה.

כמה שומרים נחוצים כדי לשמור על מוזיאון לאומנות כך שכל הקירות נמצאים תחת השגחה רצופה? ההוכחה בפרק 5 מתוחכמת כי היא משתמשת בצביעה של גרפים כדי לפתור בעיה שבמבט ראשון נראה כבעיה גיומטרית.

פרק 6 מביא משפטים פחות מוכרים שהוכחותיהם באינדוקציה. המשפטים הם בנושאים: מספרי Fibonacci, מספרי Fermat, פונקציה 91 של McCarthy ובעיית Josephus (יוסף בן-מתתיהו).

פרק 7 עוסק בשיטה של Po-Shen Loh למציאת שורשים של משוואות ריבועיות. לשיטה חשיבות רבה בהוכחה האלגברית של Gauss לבניית heptadecagon. בפרק כלולות שתי בניות גיאומטרויות לפתרון של בעיות אלגבריות. הפתרון של Khwarizmi למציאת שורשים של משוואות ריבועיות ובנייה ש-Cardano השתמש בו בפיתוח הנוסחה לשורשים של משוואות ממעלה שלוש.

תיאורית Ramsey היא נושא בקומבניטוריקה שהמחקר בה פעיל מאוד. בתיאוריה מחפשים תבניות בקבוצות גדולות. פרק 8 מציג דוגמאות פשוטות של שלשות Schur, שלשות פיתרגורס, מספרי Ramsey, ובעייתו של van der Waerden. הוכחת המשפט על שלשות פיתגורס היא תוצאה חדשה שהשתמשה בתכנית מחשב שמבוססת על לוגיקה מתמטית. בסוף הפרק אנו סוטים מעט מהדרך הישרה כדי להציג את הידע של הבבלים על שלשות פיתגורס.

C. Dudley Langford צפה יום אחד בבנו שסידר קוביות צבעוניות בסדר מעניין. פרק 9 מביא משפט שלו הקובע את התנאים בהם סידור זה אפשרי.

בפרק 10 נציג את שבעת האקסיומות של אוריגמי ביחד חישובים מגיאומטריה אנאליטית של משוואות

האקסיומות ואפיון הקפלים כמוקדים גיאומטריים.

פרק 11 מביא את השיטה של Eduard Lill ואת הקיפול של Margharita P. Beloch. אני מציג את השיטה של Lill כקסם ולכן לא אפרט יותר כאן.

פרק 12 מראה שבאמצעות אוריגמי ניתן לבצע בניות שאינן אפשרויות עם סרגל ומחוגה: חלוקת זווית לשלושה לחלקים שווים, הכפלת קוביה ובניית nonagon, מצולע משוכלל עם תשע צלעות.

פרק 13 מביא את המשפט של Lorenzo Mascheroni ו-Georg Mohr שכל בנייה על סרגל ומחוגה ניתן לבצע עם מחוגה בלבד.

הטענה המקבילה שניתן להסתפק בסרגל אינה נכונה כי עם סרגל לא ניתן לחשב ערכים עם שורש ריבועי. Jean-Victor Poncelet שיער ו-Jakob Steiner הוכיח שאפשר להסתפק בסרגל בתנאי שקיים מעגל אחד אי-שם במישור (פרק 14).

האם שני משולשים עם אותו שטח ואותו היקף חייבים להיות חופפים? הטענה מתקבלת על הדעת אבל איננה נכונה, אולם מציאת זוגות לא-חופפים מחייבת מסע דרך הרבה אלגברה וגיאומטריה כפי שמתואר בפרק 15.

פרק 16 מביא את ההישג המדהים של Gauss: הוכחה שניתן להשתמש בסרגל ומחוגה כדי לבנות heptadecagon (מצולע משוכלל עם 17 צלעות). באמצעות טיעון מבריק על הסמטריה של שורשים של פולינומים, הוא מצא נוסחה המכילה רק את ארבעת פעולות החשבון ושורש ריבועי. Gauss לא סיפק בנייה גיאומטרית ולכן הפרק מביא בנייה אלגנטית של James Callagy. בסיום הפרק נמצאות בניות של מחומש משוכלל שמבוססות על השיטה של Gauss.

שהספר יהיה בלתי תלוי ככל האפשר בהוכחות של משפטים ונוסחאות אחרים, נספח א׳ אוסף הוכחות של משפטים בגיאומטריה וטריגונומטריה שייתכן שאינם מוכרים לקורא.

סגנון

- הרקע הנדרש מהקורא הוא מתמטיקה ברמה של בית ספר תיכון הכולל:
  - אלגברה: פולינומים, חילוק של פולינומים, פולינומים monic (שהמקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא 1), משוואות ריבועיות, מכפלה של ביטויים מעריכיים $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
  - גיאומטריה אוקלידית: משולשים חופפים $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ והקריטריונים לחפיפה, משולשים דומים $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ והיחסים בין הצלעות שלהם, מעגלים והזוויות ההיקפיות והמרכזיות שלהם.
  - גיאומטריה אנלטית: המישור הקרטזי, חישוב אורכים ושיפועים של קטעי קו, נוסחת המעגל.
  - טריגונומטריה: הפונקציות $\sin, \cos, \tan$ וההמרות ביניהן, זוויות במעגל היחידה, פונקציות טריגונומטריות של זוויות לאחר שיקוף סביב ציר כגון $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$.

- כל טענה להוכחה נקראת משפט ואין ניסיון לסווג טענה כמשפט, למה או מסקנה.

- כאשר משפט מופיע לאחר בנייה, המשתנים המופיעים במשפט מתייחסים לנקודות, קווים וזוויות במסומנים באיור הנלווה לבנייה.
- השמות של מתמטיקאים ניתנים במלואם ללא מידע ביאוגרפי שניתן למצוא בקלות בויקיפדיה.
- הספר נכתב כדי שיהיה בלתי תלוי ככל האפשר במקורות אחרים. פה ושם נחוץ שימוש במושגים ומשפטים שניתנים ללא הוכחה. הסברים קצרים ניתנים בתוך מסגרות וניתן לדלג עליהם.
- אין תרגילים אבל הקורא השאפתן מוזמן לנסות להוכיח כל משפט לפני קריאת ההוכחה.
- ניתן להתעמק בבניות גיאמטריות באמצעות תכנה כגון גיאוגברה.
- $\overline{AB}$ מסמן גם שם של קטע קו וגם את אורכו.
- $\triangle ABC$ מסמן גם שם של משולש וגם את שטחו.

הבעת תודה

הספר נכתב בעידודו של אברהם הרכבי שקיבל בברכה את הסגת הגבול לי בחינוך מתמטי. הוא גם התנדב לכתוב את פתח הדבר. אביטל אלבאום-כהן ורונית בן-בסט לוי היו נכונות תמיד לעזור לי ללמוד (מחדש) מתמטיקה של בית ספר תיכון. אוריה בן-לולו הכיר לי את המתמטיקה של אוריגמי ועזרה לי בכתיבת ההוכחות. אני מודה ל-Michael Woltermann שהרשה לי להשתמש בעיבוד שלו לספרו של Heinrich Dörrie. ג'ייסון קופר, אברהם הרכבי, Richard Kruel והשופטים האנונימיים העירו הערות מועילות.

ברצוני להודות לצוות ב-Springer עבור התמיכה והמקצועונות בתהליך ההוצאה לאור, במיוחד לעורך Richard Kruel.

הספר פורסם באנגלית כ-*Mathematical Surprises*, Springer, 2022 וניתן להורידו בחינם מ:
`https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-13566-8`.

אני מודה למכון ויצמן למדע על מימון ההוצאה לאור.

קבצי המקור

קובצי המקור של הספר ב-LaTeX (כולל קבצי המקור לאיורים ב-Ti*k*Z) זמינים ב:

`https://github.com/motib/surprises`

מוטי בן-ארי
רחובות 2022

תוכן העניינים

פרק 1

מחוגה מתמוטטת

במחוגה מודרנית היא **מחוגה קבועה**: ניתן לקבע את המרחק בין שתי הרגליים וכך להעתיק קטע קו או מעגל ממקום למקום (איור 1.1(א)). אוקלידס השתמש במחוגה **מתמוטטת** (collapsing) בה לא ניתן לשמור מרחק קבוע (איור 1.1(ב)). שרגליה מתקפלות כאשר מרימים אותן מהנייר. לעתים קרובות מורים משתמשים מחוגה מתמוטטת המורכבת מטוש שמחובר לחוט כדי לבנות מעגל הלוח. אי-אפשר לשמור על מרחק קבוע כאשר מרימים את המחוגה מהלוח.

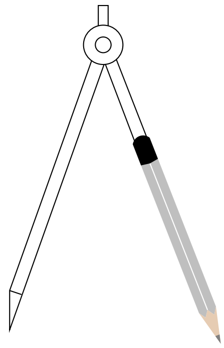
בתחילת הפרק דיון על הרלוונטית של למידה של בנייה עם סרגל ומחוגה (סעיף 1.1). סעיף 1.2 משווה את שני סוגי המחוגה בבנייה הפשוטה ביותר: אנך אמצעי. סעיף 1.3 מביא את השיטה של אוקלידס להעתקת קטע קו באמצעות מחוגה מתמוטטת. זה מוכיח שניתן לבצע באמצעות מחוגה מתמוטטת כל בנייה שניתנת לביצוע באמצעות מחוגה קבועה. סעיף 1.4 מציג הוכחה של משפט זה שנראית נכונה אבל היא לא נכונה עבור כל תצורה של קווים ונקודות. כדי להדגיש שאין לסמוך על שרטוט, סעיף 1.5 מביא "הוכחה לכאורה" מפורסמת שכל משולש הוא שווה שוקיים. ההוכחה נראית נכונה אבל היא שגויה כי היא מתבססת על שרטוט לא נכון.

1.1 בנייה עם סרגל ומחוגה

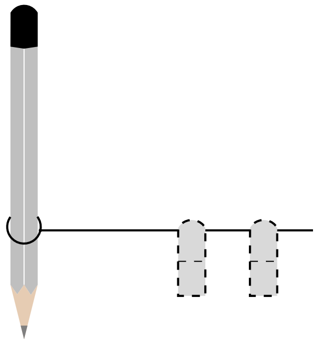
עד לאחרונה בנייה עם סרגל ומחוגה היתה המושג הבסיסי שנלמד בגיאומטריה אוקלידית, אולם חשיבותה ירדה בסילבוסים מודרניים. מובן שלנושא אין כמעט חשיבות מעשיות. כפי שאנו מראים בסעיפים 2.2, 2.3, 2.4, 3.4, היוונים ידעו לבנות בניות שאינן אפשריות עם סרגל ומחוגה באמצעות כליםי שהם רק מעט מתקדמים יותר. היום מחשבים מסוגלים לבצע בניות בדיוק רב כלל שנרצה באמצעות חישובים נומריים.

למרות זאת, אני מאמין שיש יתרונות ללמוד בניות עם סרגל ומחוגה:

- מעניין יותר ומאתגר יותר ללמוד גיאומטריה דרך בניות לעומת קריאה של משפטים והוכחות.
- התקדמויות מכריעות במתמטיקה הושגו במסגרת נסיונות למצוא בניות. פרק 16 מביא בנייה של Gauss שהיתה נקודת מוצא של אלגברה מודרנית, במיוחד התיאוריה שפותחה על יד Évariste Galois.



איור 1.1(א) מחוגה קבועה. לרגל אחת סיכה שניתן להניח במרכז המעגל. עפרון מחוברת לרגל השניה משמש לשרטוט המעגל. הרגלים מחוברות בציר קשיח כך שהמרחק בין הרגליים (רדיוס המעגל) נשמר גם כאשר מרימים את המחוגה מהנייר.



איור 1.1(ב) מחוגה מתמוטטת. המשתמש מצמיד חוט למרכז המעגל. לקצה השני של החוט מחובר עפרון המשמש לשרטוט המעגל. כאשר מרימים את המחוגה מהנייר, האצבעות (מקווקווים) יכולים בקלות להחליק למקום אחר.

- העובדה שיש בניות שאינן אפשריות קשה לעיכול ולכן מאוד מעניין.
- מעציב שאנשים רבים מבזבזים שנים של חייהם בניסיון לבצע בניות שאינן אפשריות. חשוב שתלמידים יכירו שהמאמצים הללו חסרי תוחלת.

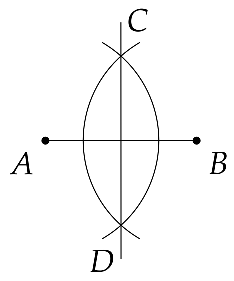
1.2 מחוגה קבועה ומחוגה מתמוטטת

בספרי לימוד גיאומטריה ניתן למצוא בנייה של אנך אמצעי לקטע קו על ידי בניית שני מעגלים שמרכזם על הקו,ובלבד שהרדיוס גדול ממחצית המרחק בין המרכזים (איור 1.2(א)). בנייה זו אפשרית רק עם מחוגה קבועה כי לאחר בניית המעגל שמרכזו A, המרחק בין רגלי המחוגה חייב להישאר ללא שינוי כדי לבנותאת המעגל שמרכזו B.

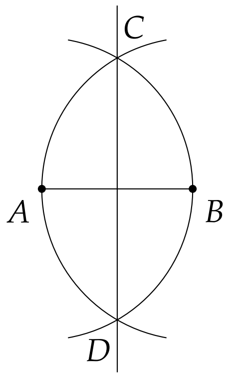
איור 1.2(ב) מראה בנייה של אנך אמצעי שפועלת גם עם מחוגה קבועה וגם עם מחוגה מתמוטטת. נבנה שני מעגלים: אחד שמרכזו A עם רדיוס $\overline{AB}$ ואחד עם רדיוס $\overline{BA}$. הבנייה אפשרית עם מחוגה מתמוטטת כי (ברור) $\overline{AB} = \overline{BA}$, ולכן המחוגה לא חייבת "לזכור" את האורך של $\overline{AB}$ כדי לבנות מעגל שמרכזו B עם רדיוס זהה.

הוכחת הנכונות של הבנייה ב-איור 1.2(א) לא פשוטה בכלל כי חייבים להשתמש במושגים יחסית מתקדמים כגון משולשים חופפים. אבל הוכחת הנכונות של הבנייה ב-איור 1.2(ב) פשוטה ומבוססת על העובדה ש-$\triangle ABC$ הוא משולש שווה-צלעות. טענה זו היא המשפט הראשון בספר של אוקלידס. $\overline{AB} = \overline{AC}$ כי הם רדיוסים של אותו מעגל, וכן $\overline{BA} = \overline{BC}$. מכאן: $\overline{BC} = \overline{BA} = \overline{AB} = \overline{AC}$.

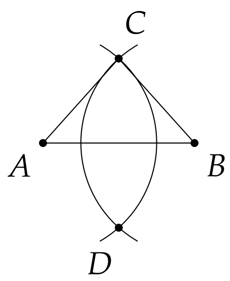
איור 1.3(א) מראה שעבור הבנייה עם מחוגה קבועה, המשולש יהיה שווה-שוקיים, לא בהכרח שווה-צלעות (איור 1.3(ב)).



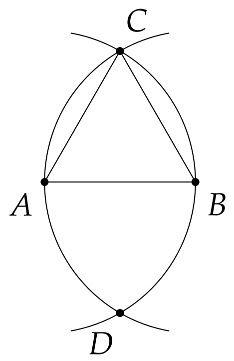
איור 1.2(א) בניית חוצה אנכי עם מחוגה קבועי



איור 1.2(ב) בניית חוצה אנכי עם מוחגה מתמוטטת



איור 1.3(א) בניית משולש שווה-שוקיים עם מחוגה קבועה



איור 1.3(ב) בניית משולש שווה-צלעות עם מחוגה מתמוטטת

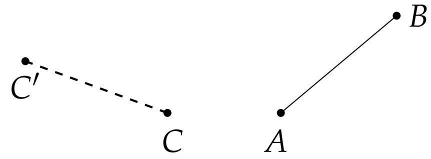
1.3 העתקת קטע קו לפי אוקלידס

המשפט השני של ספרו של אוקלידס מתאר איך להעתיק קטע קו נתון $\overline{AB}$ לקטע באותו אורך שאחת מנקודות הקצה שלו היא נקודה נתונה C. מכאן שמחוגה קבועה לא מוסיף יכולות ואפשר להסתפק במחוגה מתמוטטת, אבל הבניות יהיו מסובכות יותר.

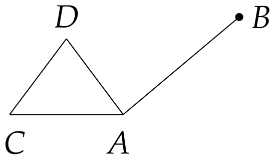
משפט 1.1 נתון קטע קו $\overline{AB}$ ונקודה C, ניתן לבנות עם מחוגה מתמוטטת בנקודה C, ניתן לבניות עם מחוגה מתמוטטת קטע קו $\overline{CC'}$ שאחת מנקודות הקצה שלו הוא C ואורכו $\overline{AB} = \overline{CC'}$ (איור *1.4*(א)).

הוכחה נבנה קטע קו $\overline{AC}$ ומשולש שווה-צלעות $\triangle ACD$ שבסיסו $\overline{AC}$ (איור 1.4(ב)). לפי המשפט הראשון של אוקלידס הבנייה אפשרית באמצעות מחוגה מתמוטטת. נבנה קרן שהיא המשך של קטע הקו מ-D לכיוון A, ונבנה קרן שהיא המשך של D לכיוון C (איור 1.5(א)).

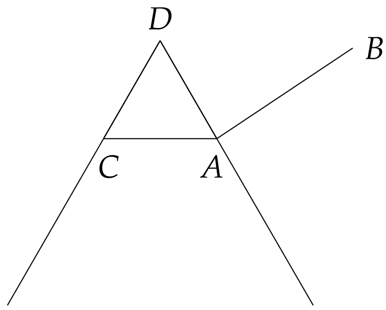
נבנה מעגל שמרכזו A עם רדיוס $\overline{AB}$, ונסמן ב-E את נקודת החיתוך של המעגל עם הקרן שממשיכה את $\overline{DA}$ (איור 1.5(ב)). נבנה מעגל שמרכזו D עם רדיוס $\overline{DE}$, ונסמן ב-F את נקודת החיתוך של המעגל עם הקרן שממשיכה את $\overline{DC}$ (איור1.6).



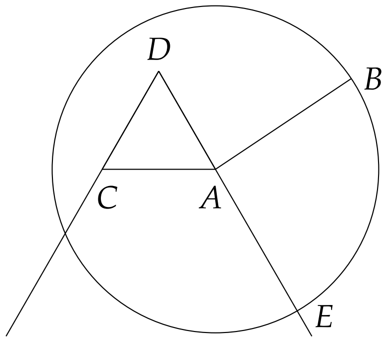
איור 1.4(א) העתקת קטע קו$\overline{AB}$; אין חשיבות לכיוון של $\overline{CC'}$



איור 1.4(ב) העתקת קו עם מחוגה מתמוטטת



איור 1.5(א) בניית קרניים מ-D



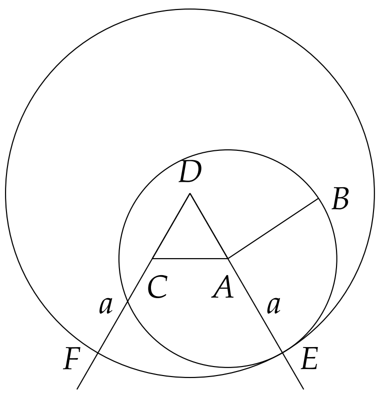
איור 1.5(ב) בניית מעגל עם רדיוס $\overline{AB}$

$\overline{DC} = \overline{DA}$ כי $\triangle ACD$ שווה-צלעות. $\overline{AE} = \overline{AB}$ כי שניהם רדיוסים של המעגל שמרכזו A וכן $\overline{DF} = \overline{DE}$. מכאן:

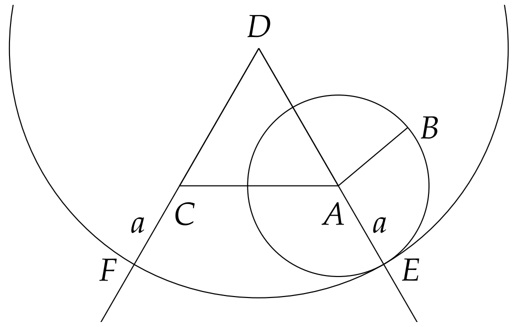
$$\overline{CF} = \overline{DF} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DA} = \overline{AE} = \overline{AB}\,.$$

. □

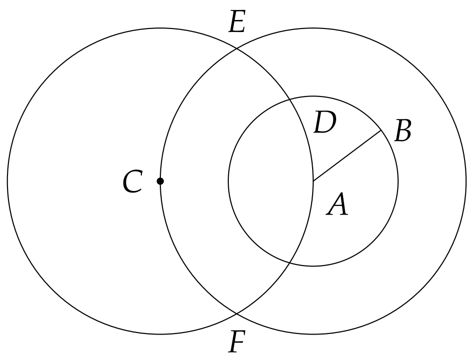
הדרישה על כיוון הקרנות חיונית. הוכחה זו נכונה לכל עבור כל קטע קו $\overline{AB}$ וכל נקודה C, ללא תלות במיקום שלו יחסית ל-$\overline{AB}$. בגלל הדרישה על הכיוונים, "החרוט" שכלוא בין שתי הקרנות יחתוך את המעגלים גם אם $\overline{AC} > \overline{AB}$ (איור 1.7).



איור 1.6: בניית $\overline{CF} = \overline{AB}$



איור 1.7: בנייה עבור $\overline{AC} > \overline{AB}$



איור 1.8: בניית עבור העתקת קו (1)

1.4 העתקה שגויה של קטע קו

הוכחה

נבנה שלושה ממעגלים: מעגל שמרכזו A עם רדיוס $\overline{AB}$, מעגל שמרכזו A עם רדיוס $\overline{AC}$ ומעגל שמרכזו C עם רדיוס $\overline{AC} = \overline{CA}$. נמן את נקודות החיתוך של המעגלים שמרכזם A, C ב-E, F, בהתאמה, ונסמן את נקודת החיתוך של המעגל שמרכזו C עם המעגל שמרכזו A עם רדיוס $\overline{AB}$ ב-D. אם $\overline{AC} > \overline{AB}$, הבנייה היא כפי שרואים באיור 1.8.

נבנה מעגל שמרכזו E עם רדיוס $\overline{ED}$. נסמן ב-G את נקודת החיתוך של המעגל עם המעגל שמרכזו A עם רדיוס $\overline{AC}$. אם יש שתי נקודות חיתוך, נבחר את הנקודה הקרובה יותר ל-C (איור 1.9).

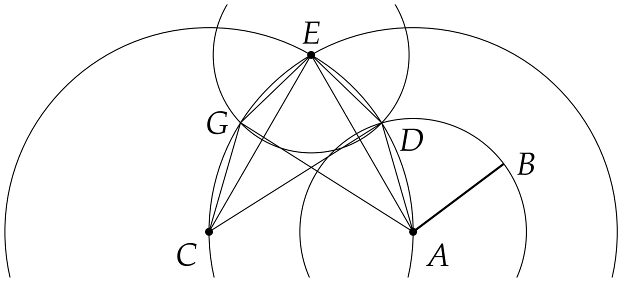
$\overline{CD} = \overline{CE}$ הם רדיוסים של אותו מעגל כמו גם $\overline{AE} = \overline{AG}$. לפי הבנייה הרדיוסים $\overline{CE}$ ו-$\overline{AE}$ שווים. מכאן ש:

$$\overline{CD} = \overline{CE} = \overline{AE} = \overline{AG}\,.$$

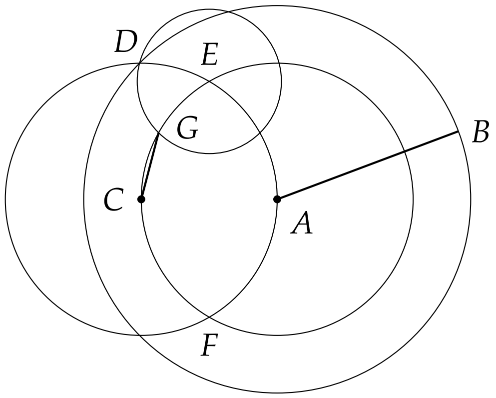
$\overline{EG} = \overline{ED}$ הם רדיוסים של אותו מעגל, ולכן $\triangle EAG \cong \triangle DCE$ לפי צלע-צלע-צלע ו-$\angle GEA =$ $\angle DEC$.

בגלל ש:

$$\angle GEC = \angle GEA - \angle CEA = \angle DEC - \angle CEA = \angle DEA\,,$$



איור 1.9: בניית עבור העתקת קו (2)



איור 1.10: תרשים עבורו ההוכחה לא עובדת

$\triangle ADE \cong \triangle CGE$ לפי צלע-זווית-צלע. $\overline{AB} = \overline{AD}$ הם רדיוסים של המעגל שמרכזו A, ולכן $\overline{GC} = \overline{AD} = \overline{AB}$. □

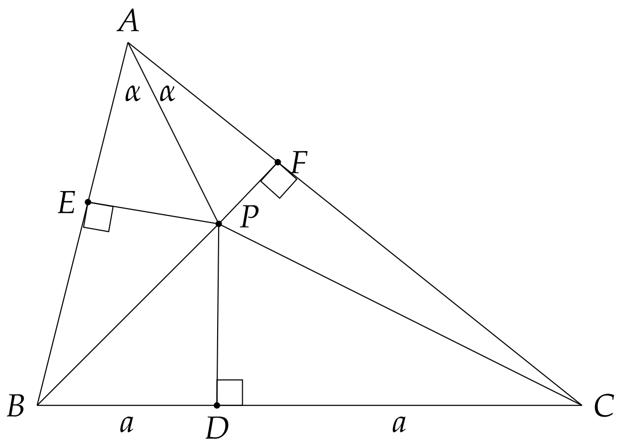
הבנייה נכונה רק אם $\overline{AC} > \overline{AB}$. איור 1.10 מראה תרשים בו $\overline{AC} < \overline{AB}$ ואפשר לראות ש-$\overline{AB} \neq \overline{GC}$.

1.5 אין לסמוך על תרשים

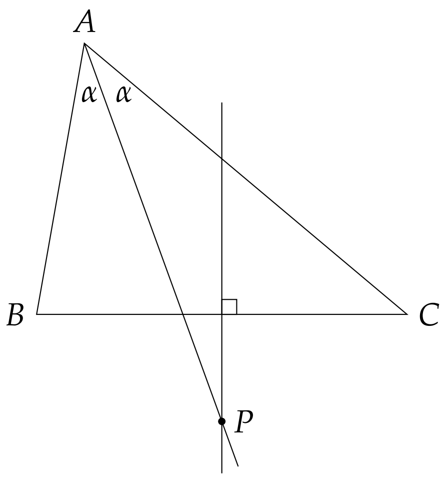
משפט 1.2 (שגוי, כמובן) כל משלוש הוא שווה-שוקיים.

הוכחה נתון משולש שרירותי $\triangle ABC$, תהי P נקודת החיתוך בין חוצה הזווית של $\angle BAC$ לבין האנך האמצעי של $\overline{BC}$. נקודות החיתוך של הגבהים מ-P לצלעות $\overline{AB}, \overline{AC}$ מסומנים ב-E, F, בהתאמה (איור 1.11). $\triangle APE \cong \triangle APF$ כי הם משולשים ישר-זווית עם זוויות שוות α וצלע משותף $\overline{AP}$. $\triangle DPB \cong \triangle DPC$ כי נם משולשים ישר-זווית, $\overline{PD}$ הוא צלע משותף ו-$\overline{BD} = \overline{DC} = a$. $\triangle EPB \cong \triangle FPC$ כי נם משולשים ישר-זווית, $\overline{EP} = \overline{PF}$ לפי החפיפה הראשונה, ו-$\overline{PB} = \overline{PC}$ לפי החפיפה השנייה. נחבר את השוויונות ונקבל ש-$\triangle ABC$ שווה-שוקיים:

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AF} + \overline{FC} = \overline{AC}\,.$$



איור 1.11 : הוכחה שגוייה שכל משולש שווה-שוקיים



איור 1.12 : הסיבה שהבנייה לא עובדת

□

״הלוגיקה״ של ההוכחה נכונה, ההוכחה מבוססת על תרשים שאינו נכון כי הנקודה P נמצאת מחוץ למשולש (איור 1.12).

מה ההפתעה?

כתלמיד היה לי מובן מאליו שלמחוגה ציר חיכוך ששומר את המרחק בין החוד והעפרון. הכאשר המורה השתמשה במחוגה המורכבת מחוט וגיר, לא העליתי על דעתי שהיא שונה מהמחוגה שלי. המאמר של Gotfried Toussaint היה הפתעה גמורה, כמו גם ההצגה שלו שההוכחות שבאו לאחר Euclid היו שגויות, כי הן היו תלויות בהנחות חסרות בסיס. אני ממליץ לקורא לעיין במאמר כדי להעמיק את הבנתם על הוכחות במתמטיקה.

מקורות

הפרק מבוסס על [50]. ההוכחה השגויה בסעיף 1.4 היא מ-[37]. תרגום שלם לאנגלית של ספר Elements של Euclid ביחד עם פרשנות מפורטת נמצא ב-[22] שנכתב על ידי Thomas L. Heath אחד המומחים הבולטים למתמטיקה יוונית.

פרק 2

חלוקת זווית לשלושה חלקים

לא ניתן לחלק זווית שרירותית לשלושה חלקים שווים באמצעות סרגל ומחוגה (להלן, בקיצור, לחלק זווית לשלושה). הסיבה היא שחלוקת זווית לשלושה דורשת בנייה של שורש שלישי, אבל עם סרגל ומחוגה ניתן לבנות רק אורכים שמתקבלים מארבעת פעולות החשבון ושורש ריבועי. משפט זה הוכח ב-1837 על ידי Pierre Wantzel, אולם חובבנים אינספור מנסים עד היום לחלק זווית לשלושה. הם בונים רק קירובים למרות שהם משוכנעים שהבניות נכונות. סעיף 2.1 מביא שתי בניות, מפתח את הנוסחאות לזוויות ומראה את השגיאות של הקירובים.

היוונים גילו שניתן לחלק זווית לשלושה אם משתמשים בכלים אחרים: הניאוסיס (neusis) של Archimedes (סעיף 2.2) והקוודרטריקס (quadratrix) של Hippias (סעיף 2.4). בסעיף 2.3 נראה איך להכפיל קוביה באמצעות ניאוסיס.

שאר הפרק מביא הוכחה שלא ניתן לחלק זווית לשלושה. סעיף 2.5 מאפיין מספרים בני-בנייה, סעיף 2.6 קושר מספרים בני-בנייה לשורשים של פולינומים, וסעיף 2.7 משתמש בתיאוריה זו כדי להראות שלא ניתן לחלק זווית לשלושה או להכפיל קוביה.

2.1 קירובים לחלקת זווית לשלושה חלקים

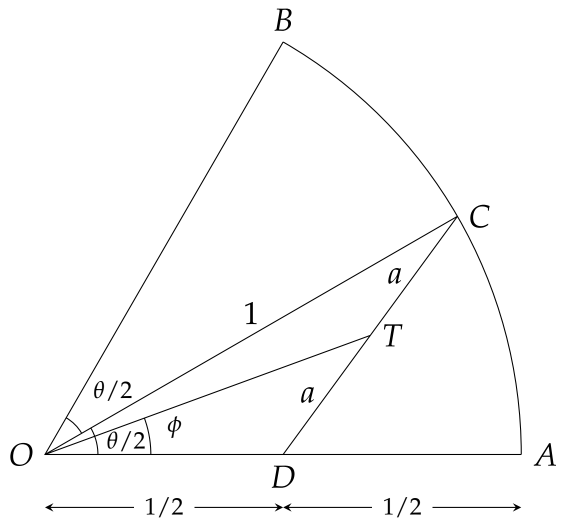
2.1.1 הקירוב הראשון

בנייה:

תהי $\theta = \angle AOB$ זווית שרירותית וללא הגבלת הכלליות נניח ש-A, B נמצאות על מעגל היחידה שמרכזו O. נבנה את חוצה הזווית $\angle AOB$ ותהי C נקודת החיתוך של חוצה הזווית עם מעגל היחידה. תהי D נקודת האמצע של $\overline{OA}$ ותהי T נקודת האמצע של $\overline{DC}$. נסמן את הזווית $\angle DOT$ על ידי ϕ (איור 2.1).

משפט 2.1

$$\tan \phi = \frac{2\sin(\theta/2)}{1+2\cos(\theta/2)}\,.$$



איור 2.1: קירוב ראשון (1)

הוכחה איור 2.2 נלקח מאיור 2.1 עם סימונים נוספים.

יהי $\overline{CF}$ האנך ל-$\overline{OA}$ שחוצה את $\overline{OA}$ ב-F. $\overline{CF} = \sin(\theta/2)$ ו-$\overline{OF} = \cos(\theta/2)$ כי $\overline{OC} = 1$.
יהי $\overline{TE}$ האנך ל-$\overline{OA}$ שחוצה את $\overline{OA}$ ב-E.

T היא נקודת האמצע של $\overline{DC}$ ולכן $\overline{DT} = \overline{TC} = a$. אבל $\overline{FT}$ הוא תיכון ליתר של משולש ישר-זווית, כך ש-$\overline{FT} = a$ ומכאן ש-$\triangle DTF$ שווי-שוקיים. $\overline{TE}$ הוא גם תיכון וגם גובה ל-$\overline{DF}$. מהאיור קל לראות ש:

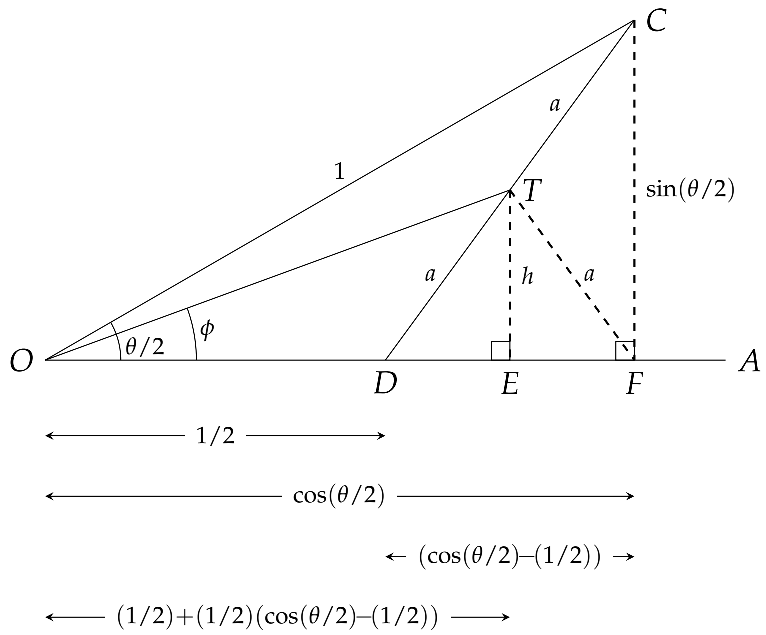
$$\overline{OE} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right).$$

נחשב את האורך $\overline{CD} = 2a$ באמצעות משפט פיתגורס ב-$\triangle DCF$:

$$(2a)^2 = \left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{\theta}{2}.$$

ניתן לחשב את אורכו של $h = \overline{TE}$ ממשפט פיתגורס ב-$\triangle DTE$:

$$\begin{aligned}
a^2 &= h^2 + \left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right)\right]^2\\
h^2 &= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2} - \left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}\\
h &= \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\\
\tan\phi &= \frac{h}{\overline{OE}} = \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{1 + 2\cos\frac{\theta}{2}}.
\end{aligned}$$



איור 2.2: קירוב ראשון (2)

□

זה קירוב לחלוקת זווית לשלושה חלקים $\phi = \theta/3$. עבור $\theta = 60°$:

$$\tan^{-1}\left(\frac{2\sin 30°}{1+2\cos 30°}\right) = \tan^{-1} 0.366 \approx 20.1° \approx 20° \,.$$

טבלה 2.1 מראה את השגיעות עבור טווח של זוויות חדות. השגיעה קטנה יחסית עבור זוויות קטנות אבל עולה עד 1% עבור $85°$.

2.1.2 הקירוב השני

בנייה:

תהי $\theta = \angle AOB$ זווית שרורותית ונניח ללא הגבלת הכלליות ש-A, B נמצאות על מעגל יחידה שמרכזו O. נבנה מעגל שהרדיוס שלו $1/3$ שמרכזו O ותהי D נקודת החיתוך שלו עם $\overline{OA}$. נבנה את חוצה הזווית $\angle AOB$ ותהי C נקודת החיתוך שלו עם המעגל שהרדיוס שלו $1/3$. נבנה את המיתר $\overline{CD}$ והמיתרים $\overline{AE} = \overline{ET} = \overline{CD}$. בגלל שמיתרים שווים נשענים על ידי זוויות מרכזיות שוות, $\angle TOE = \angle EOA = \phi$ (איור 2.3).

משפט 2.2

$$\cos\phi = 1 - \frac{1}{9}(1-\cos(\theta/2)) = 1 - \frac{2}{9}\sin^2(\theta/4)\,.$$

$\theta(^\circ)$	$\theta/3(^\circ)$	$\tan^{-1}\phi(^\circ)$	Error$(^\circ)$	Error(%)
5	1.667	1.667	0.000	0.004
10	3.333	3.334	0.000	0.014
15	5.000	5.002	0.002	0.032
20	6.667	6.670	0.004	0.057
25	8.333	8.341	0.007	0.088
30	10.000	10.013	0.013	0.128
35	11.667	11.687	0.020	0.174
40	13.333	13.364	0.030	0.228
45	15.000	15.043	0.043	0.289
50	16.667	16.726	0.060	0.358
55	18.333	18.413	0.080	0.435
60	20.000	20.104	0.104	0.520
65	21.667	21.799	0.133	0.612
70	23.333	23.500	0.166	0.713
75	25.000	25.206	0.206	0.823
80	26.667	26.918	0.251	0.941
85	28.333	28.636	0.303	1.068

טבלה 2.1: שגיאות בקירוב הראשון

הוכחה לפי חוק הקוסינוסים ב-$\triangle DOC$:

$$\overline{CD} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\cos(\theta/2) = \frac{2}{9}(1-\cos(\theta/2))\,.$$

לפי חוק הקוסינוסים ב-$\triangle EOA$:

$$\overline{AE} = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos\phi = 2(1-\cos\phi)\,.$$

נשווה שת שתי הביטויים עבור $\overline{CD} = \overline{AE}$, נפשט ונקבל:

$$\cos\phi = 1 - \frac{1}{9}(1-\cos(\theta/2))\,.$$

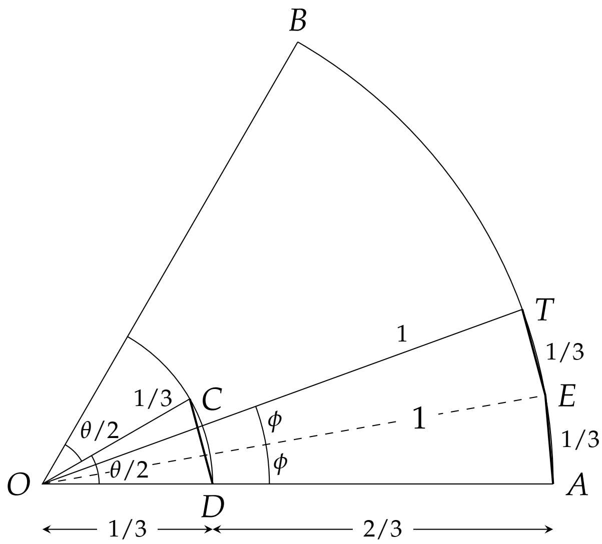
בגלל ש-$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ ולכן $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$, נקבל את הביטוי החלופי:

$$\cos\phi = 1 - \frac{2}{9}\sin^2(\theta/4)\,.$$

□

זה קירוב לחלוקת זווית לשלושה חלקים $2\phi = \theta/3$. עבור $\theta = 60^\circ$:

$$2\cos^{-1}\left(1 - \frac{1}{9}(1-\cos 30^\circ)\right) \approx 19.8^\circ \approx 20^\circ\,.$$



איור 2.3: הקירוב השני

איור 2.4: ניאוסיס

טבלה 2.2 מראה את השגיאות עבור טווח של זוויות חדות. בנייה זו הרבה בפחות מדוייק מהבנייה בסעיף 2.1.1.

2.2 חלוקת זווית לשלושה באמצעות ניאוסיס

השימוש במילה "סרגל" מטעה כי הכוונה היא למקל ישר ללא כל סימן, שהפעולה היחידה שניתן לעשות איתו היא למתוח קו ישר בין שתי נקודות. Archimedes הראה שניתן להשתמש **בניאוסיס**, מקל עם שני סימנים בלבד, כדי לחלק זווית לשלושה. נגדיר את המרחק בין שני הסימנים כ-1 (איור 2.4).

בנייה: תהי α זווית שרירותית $\angle ABE$ בתוך מעגל יחידה שמרכזו B שהוא המרחק בין הסינמים על הניאוסיס. נמשיך את קטע הקו $\overline{EB}$ מחוץ למעגל. שנשים את הניאוסיס על הנקודה A ונזיז אותו עד שהוא חותך את הקו בנקודה D ואת המעגל בנקודה C. נכוון את הניאוסיס כך שהאורכו של $\overline{CD}$ יהיה 1. נבנה את הקו $\overline{AD}$. נסמן $\angle CDB = \beta$ (איור 2.5).

משפט 2.3 $\beta = \alpha/3$.

הוכחה נבנה את $\overline{BC}$ ונסמן את הזוויות ואת קטעי הקו כפי שרשום באיור 2.6. $\triangle ABC$, $\triangle BCD$ הם משולשים שווי-שוקיים: $\overline{AB} = \overline{BC}$ הם רדיוסים של אותו מעגל ו-$\overline{BC} = \overline{CD}$ לפי הבנייה

$\theta(^\circ)$	$\theta/3(^\circ)$	$\cos^{-1}2\phi(^\circ)$	$\mathrm{Error}(^\circ)$	$\mathrm{Error}(\%)$
5	1.667	1.667	0.000	0.007
10	3.333	3.332	0.001	0.028
15	5.000	4.997	0.003	0.063
20	6.667	6.659	0.008	0.113
25	8.333	8.319	0.015	0.176
30	10.000	9.975	0.025	0.254
35	11.667	11.626	0.040	0.346
40	13.333	13.273	0.060	0.451
45	15.000	14.914	0.086	0.571
50	16.667	16.549	0.118	0.705
55	18.333	18.177	0.156	0.853
60	20.000	19.797	0.203	1.015
65	21.667	21.408	0.258	1.192
70	23.333	23.011	0.322	1.382
75	25.000	24.603	0.397	1.586
80	26.667	26.185	0.481	1.805
85	28.333	27.756	0.577	2.038

טבלה 2.2 : שגיאות בקירוב השני

באמצעות הניאוסיס. סכום הזוויות של משולש שווה ל-180° כמו גם סכום הזוויות המשלימות, לכן

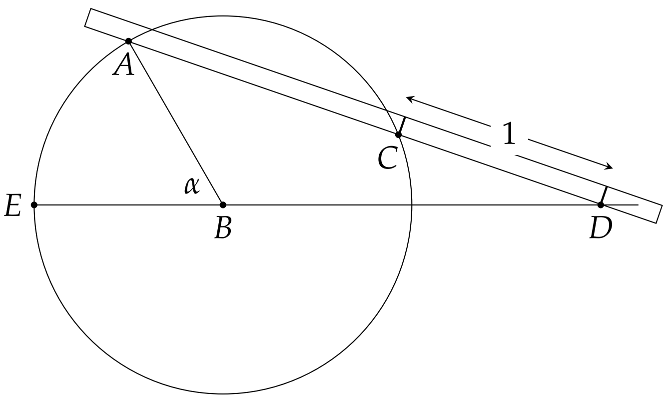
$$\begin{aligned}\epsilon &= 180^\circ - 2\beta\\ \gamma &= 180^\circ - \epsilon = 2\beta\\ \delta &= 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ - 4\beta\\ \alpha &= 180^\circ - \delta - \beta = 4\beta - \beta = 3\beta\,.\end{aligned}$$

□

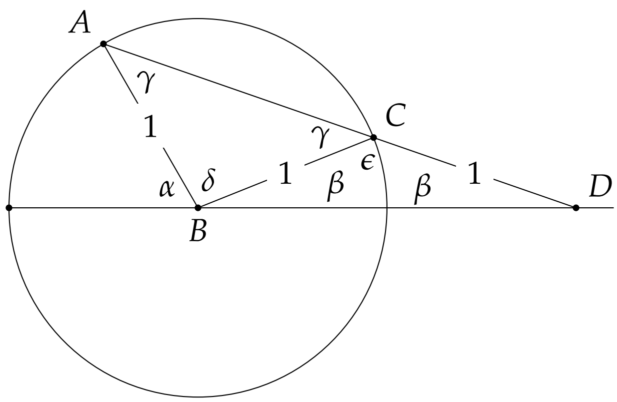
2.3 הכפלת קוביה באמצעות ניאוסיס

נתונה קוביה C יש לבנות קוביה עם נפח כפול. אם הנפח של C הוא V הצלעות שלה באורך $\sqrt[3]{V}$. אורך צלעות הקוביה עם נפח כפול הוא $\sqrt[3]{V}\cdot\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2V}$, ולכן אם ניתן לבנות $\sqrt[3]{2}$ נוכל להכפיל קוביה.

בנייה: נבנה משולש שווה-צלעות $\triangle ABC$ ונמשיך את $\overline{CA}$ עם קטע קו באורך אחד עד ל-D. נבנה קרנות שממשיכות את $\overline{AB}$ ו-$\overline{DB}$. נניח את הניאוסיס על הנקודה C ונזיז אותו עד שסימן אחד שלו נמצאת על הקרן $\overline{AB}$ ב-P והסימן השני על הקרן $\overline{DB}$ ב-Q. נסמן $x = \overline{CQ}$ ו-$y = \overline{BP}$ (איור 2.7).



איור 2.5: חלוקת זווית לשלושה חלקים באמצעות ניאוסיס (1)



איור 2.6: חלוקת זווית לשלושה חלקים באמצעות ניאוסיס (2)

משפט 2.4 $x = \sqrt[3]{2}$.

הוכחה $\triangle ABC$ שווה-צלעות ולכן $\cos \angle CAP = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ולפי חוק הקוסינוס ב-$\triangle APC$:

$$\overline{CP} = \overline{AC}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP} \cos 60^\circ \tag{2.1}$$

$$(x+1)^2 = 1^2 + (y+1)^2 - 2 \cdot 1 \cdot (y+1) \cdot \frac{1}{2} \tag{2.2}$$

$$x^2 + 2x = y^2 + y\,. \tag{2.3}$$

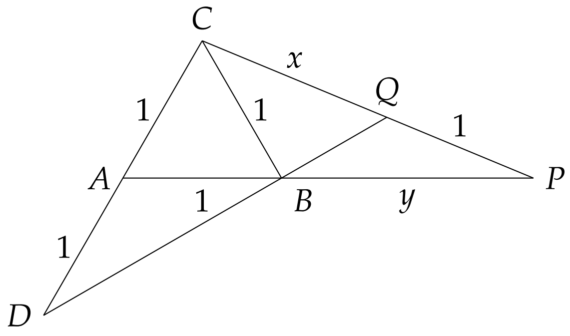
לפי חוק Menelaus (משפט א'.20):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = 1\,.$$

ולכן:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{1} = 1 \tag{2.4}$$

$$xy = 2\,. \tag{2.5}$$



איור 2.7: הכפלת הקוביה עם ניאוסיס

נציב משוואה 2.5 במשוואה 2.3 ונקבל:

$$\begin{aligned} x^2+2x &= \frac{4}{x^2}+\frac{2}{x} \\ x^4+2x^3 &= 4+2x \\ x^3(x+2) &= 2(x+2) \\ x &= \sqrt[3]{2}\,. \end{aligned}$$

□

2.4 חלוקת זווית לשלושה באמצעות קוודרטריקס

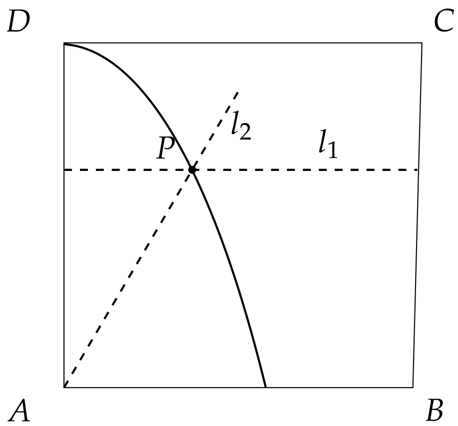
יהי $\overline{ABCD}$ ריבוע. יהי l_1 קטע קו המונח תחילה ב-$\overline{DC}$ ויהי l_2 קטע קו המונח תחילה ב-$\overline{AD}$. נזיז את l_1 במהירות ליניארית קבועה עד שהוא מגיע ל-$\overline{AB}$ ונסובב את l_2 במהירות סיבובית קבועה מסביב ל-A עד שגם הוא מגיע ל-$\overline{AB}$. נניח שהם מגיעים ל-$\overline{AB}$ ביחד. למשל, אם l_2 מסתובב ב-$1°$ לשנייה ואורך הריבוע הוא 9 ס״מ, l_1 חייב בזוז ב-0.1 שנייה/ס״מ. העקומה הנוצרת על ידי נקודת החיתוך P נקראת **quadratrix curve** או פשוט **קוודרטריקס (quadratrix)** (איור 2.8(א)). ההגדרה מיוחסת למתמטיקאי Hippias.

איור 2.8(ב) מראה **מחוגת קוודרטריקס** המורכב משני סרגלים (ללא סימנים) הזזים כפי שמתואר לעיל. מפרק המאלץ אותם לנוע ביחד ומייצר עקומה.

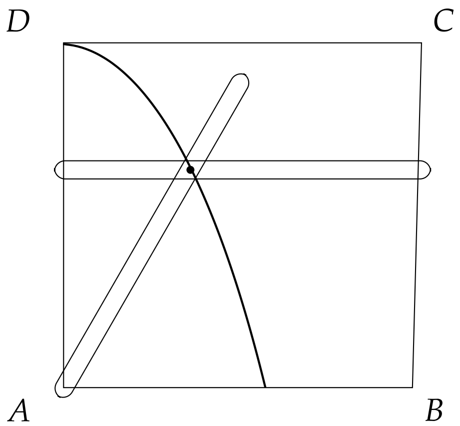
ניתן להשתמש בקוודראטריקס כדי לחלק זוויות לשלושה.

בנייה: תהי $\angle CDP_1 = \alpha$ זווית שרירותית כאשר P_1 היא נקודת החיתוך של הקו המגדיר את הזווית α יחסית ל-$\overline{DC}$ והקוודראטריקס. נבנה קו דרך P_1 מקביל ל-$\overline{DC}$ ונסמן ב-E את החיתוך שלו עם $\overline{AD}$. נסמן את טקע הקו $\overline{DE}$ ב-t ונחלק אותו לשלושה חלקים שווים (סעיף 2.5) עדי לקבל את הנקודה F שהיא $t/3$ מ-$\overline{DC}$. תהי P_2 נקודת החיתוך של קו מ-F מקביל ל-$\overline{DC}$ והקוודראטריקס, ונסמן ב-θ את הזווית בין $\overline{DC}$ ו-$\overline{DP_2}$ (איור 2.9).

משפט 2.5 $\theta = \alpha/3$.



איור 2.8(א) עקומת קוודראטריס



איור 2.8(ב) מחוגה קוודראטריקס

הוכחה קואורדינטת ה-y של E היא $1-t$, ולכן ל-F קואורדינטת ה-y שווה ל-$1-(t/3)$. המהירות הליניארית הקבועה של הסרגל האופקי ביחס קבוע למהירות הזוויתית הקבועה של הסרגל המסתובב, ולכן $\theta/\alpha=(t/3)/t$ ו-$\theta=\alpha/3$. □

2.5 מספרים בני-בנייה

יהי l קטע קו שאורכו מוגדר כ-1.

הגדרה 2.1 מספר a הוא **בן-בנייה** ***(constructible)*** אם ורק אם ניתן לבנות באמצעות סרגל ומחוגה קטע קו באורך a כאשר מתחילים עם l.

נתון קטע קו $\overline{AB}=l$, נבנה קו המכיל את $\overline{AB}$ ונשתמש במחוגה כדי למוצא נקודה C על הקו במרחק 1 מ-B. מכאן שאורכו של $\overline{AC}$ הוא 2 ולכן המספר 2 בן-בנייה. ניתן לבנות קטע קו $\overline{BD}$ באורך 1 ניצב ל-$\overline{AB}$ ב-B. היתר של המשולש $\triangle ABD$ הוא באורך $\sqrt{2}$ ולכן המספר $\sqrt{2}$ בן-בנייה.

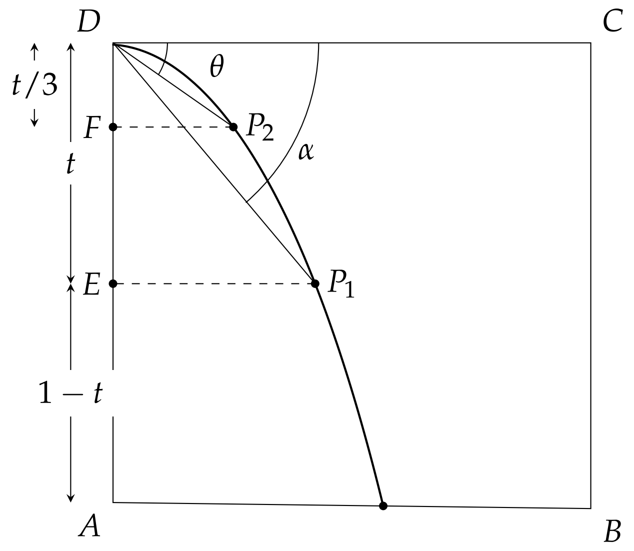
משפט 2.6 מספר הוא **בן-בנייה** אם ורק אם הוא ערכו שביטוי שנבנה ממספרים שלמים, ארבעת פעולת החשבון $\{+,-,\times,/\}$ ופעולת השורש הריבועי $\sqrt{}$.

הוכחה תחילה נראה שניתן לבנות את המספרים המתקבלים מהפעולות.

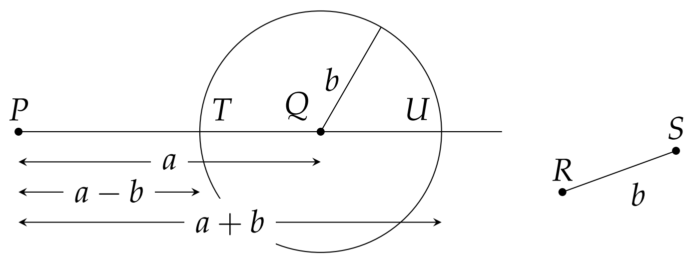
חיבור וחיסור: נתונים קטעי קו $\overline{PQ}=a$ ו-$\overline{RS}=b$, נבנה מעגל שמרכזו Q עם רדיוס b (איור 2.10). נמשיך את $\overline{PQ}$ עד שהוא חותך את המעגל ב-U. אזי $\overline{PTQU}$ הוא קטע קו כאשר $\overline{PT}=a-b$ ו-$\overline{PU}=a+b$.

כפל: לפי משולשים דומים באיור 2.11(א), $(1/b)=(a/\overline{OA})$ ולכן $\overline{OA}=ab$.

חילוק: לפי משולשים דומים באיור 2.11(ב), $(1/b)=(\overline{OD}/a)$ ולכן $\overline{OD}=(a/b)$.



איור 2.9: חלוקת זווית לשלושה באמצעות קוודרטריקס



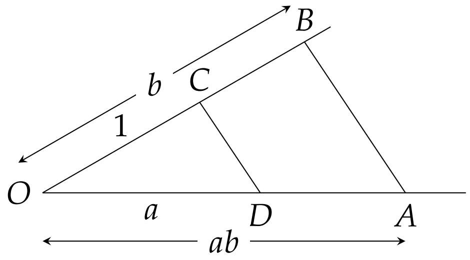
איור 2.10: בניית חיבור וחיסור

שורש ריבועי: נתון קטע קו $\overline{BC} = a$, נבנה $\overline{AB} = 1 + a$ ומחצית המגעל שקוטרו $\overline{AB}$. נבנה ניצב ב-C ונסמן ב-D את החיתוך של הניצב והמעגל (איור 2.12). $\angle ADB$ הוא משולש ישר-זווית כי הוא נשען על קוטר. לפי משולשים דומים $(a/h) = (h/1)$ ולכן $h^2 = a$ ו-$h = \sqrt{a}$.

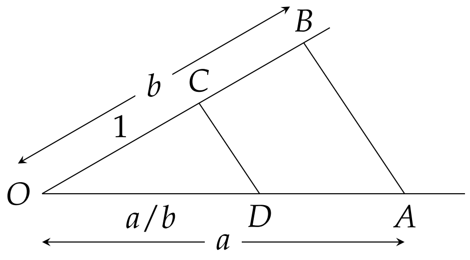
כדי להוכיח את הכיוון השני של המשפט, עלינו לקבוע איזו מספרים ניתן לבנות באמצעות סרגל ומחוגה. קיימות שלוש בניות:[1]

1. שני קווים נחתכים בנקודה (איור 2.13(א)). ניתן לחשב את הקואורדינטות של נקודה החיתוך מהמשוואות של שני הקווים $y = x$ ו-$y = 4x - 2$. נקודת החיתוך היא $P = (2/3, 2/3)$.
2. קו חותך מעגל באפס, אחת או שתי נקודות (איור 2.13(ב)). ניתן לחשב את הקואורדינטות של נקודות החיתוך מהמשוואות של הקו $y = x$ והמעגל $x^2 + y^2 = 4$. נקודות החיתוך היא $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ and $Q = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
3. שני מעגלים נחתכים באפס, אחת או שתי נקודה (איור 2.14). ניתן לחשב את הקואורדינטות

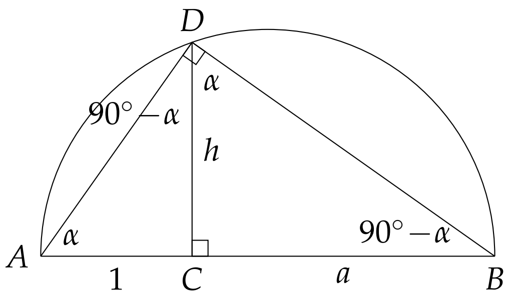
[1] למען הבהירות נדגים אותן על ערכים מסויימים במקום להשתמש במשוואות הכלליות.



איור 2.11(א) בניית כפל



איור 2.11(ב) בניית חילוק



איור 2.12: בניית שורש

של נקודות החיתוך מהמשוואות של שני המעגלים:

$$\begin{aligned}(x-1)^2+y^2 &= 4\\(x+1)^2+y^2 &= 4\,.\end{aligned}$$

נקודות החיתוך הן $P=(0,\sqrt{2}),Q=(0,-\sqrt{2})$. □

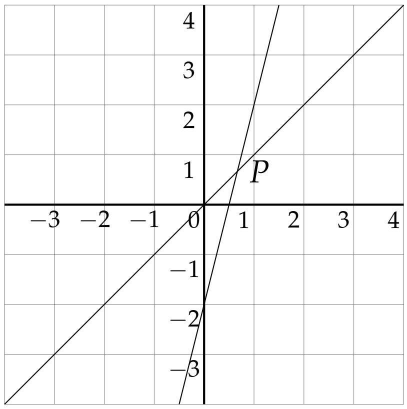
2.6 מספרים בני-בנייה כשורשים של פולינומים

כדי לראות שמספר איננו בן-בנייה יש להוכיח שלא ניתן לבטא אותו רק עם המספרים השלמים והפעולות $\{+,-,\times,/,\sqrt{}\}$. נראה שמספרים בני-בנייה הם השורשים של קבוצה מסויימת של פולינומים ואז נוכיח שחלוקת זווית לשלושה חלקים והכפלת קוביה מחייבות לבנות שורשים של פולינומים שאינם איברים בקבוצה. היום מוכיחים את התוצאות הללו באמצעות תורת השדות מאלגברה, אבל פה אביא הוכחה שמשתמשת במתמטיקה בסיסית. ההוכחה מבוססת על ההגדרה שלהלן.

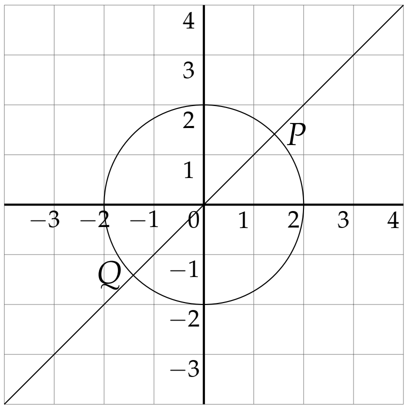
הגדרה 2.2 **העומק** של ביטוי שמורכב ממספרים שלמים ומהפעולות $\{+,-,\times,/,\sqrt{}\}$ הוא רמת הקינון המירבית של שורש ריבועי.

דוגמה 2.1 בביטוי שלהלן:

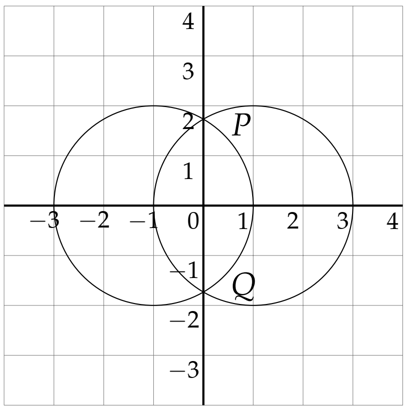
$$\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\,,$$



איור 2.13(א) נקודת החיתוך של שני קווים



איור 2.13(ב) נקודות החיתוך של קו ומעגל



איור 2.14: נקודות החיתוך של שני מעגלים

העומק הוא 3 כי בצד הימין של הביטוי נמצא $\sqrt{17}$ שמקונן תוך $\sqrt{34+2\sqrt{17}}$ שבעצמו מקונן בתוך $\sqrt{17+\cdots-\cdots-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$.

משפט 2.7 ניתן לבטא ביטוי בעומק n כ-$a+b\sqrt{c}$ כאשר a,b,c הם ביטויים בעומק $n-1$ לכל היותר.

הוכחה חישובים פשוטים מראים שהתוצאות של הביטויים $(a_1+b_1\sqrt{c})\ op\ (a_2+b_2\sqrt{c})$ עבור הפעולות $op=\{+,-,\times\}$ הן ביטויים $a+b\sqrt{c}$ בעומק $n-1$. עבור חילוק החישוב מעט יותר מסובך:

$$\begin{aligned}\frac{a_1+b_1\sqrt{c}}{a_2+b_2\sqrt{c}} &= \frac{(a_1+b_1\sqrt{c})(a_2-b_2\sqrt{c_2})}{(a_2+b_2\sqrt{c})(a_2-b_2\sqrt{c})}\\ &= \frac{a_1a_2-b_1b_2c}{a_2^2-b_2^2c}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-b_2^2c}\sqrt{c}\,,\end{aligned}$$

שהוא מהצורה $a+b\sqrt{c}$ ובעומק $n-1$. לבסוף, השורש של ביטוי בעומק $n-1$ הוא בעומק n. □

משפט 2.8 יהי $p(x)$ פולינום ממעלה שלוש מונית עם מקדמים רציונליים:

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\,,$$

ויהי $r = a + b\sqrt{c}$ שורש של $p(x)$ בעל עומק **מינימלי** n, כאשר a, b, c מס בעומק $n-1$ לכל היותר. אזי $r' = a - b\sqrt{c}$ הוא שורש של $p(x)$ ו-$r \neq r'$.

הוכחה נחשב $p(r)$ שווה ל-0 כי r הוא שורש:

$$\begin{aligned}
(a+b\sqrt{c})^3 + a_2(a+b\sqrt{c})^2 + a_1(a+b\sqrt{c}) + a_0 &= \\
(a^3 + 3a^2b\sqrt{c} + 3ab^2c + b^3c\sqrt{c}) & \\
\quad + a_2(a^2 + 2ab\sqrt{c} + b^2c) + a_1(a+b\sqrt{c}) + a_0 &= \\
(a^3 + 3ab^2c + a_2a^2 + a_2b^2c + a_1a + a_0) & \\
\quad + (3a^2b + b^3c + 2a_2ab + a_1b)\sqrt{c} &= \\
d + e\sqrt{c} &= 0\,,
\end{aligned}$$

כאשר d, e הם ביטויים בעומק $n-1$ שמורכבים ממקדמים רציונליים ו-a, b, c. אזי $\sqrt{c} = -d/e$ כך שניתן לבטא את $a + b\sqrt{c}$ כביטוי בעומק $n-1$, סתירה להנחה ש-$a + b\sqrt{c}$ הוא מעומק מינימלי. בגלל ש-$\sqrt{c} \neq 0$ ועומק n, כדי ש-$d + e\sqrt{c}$ יהיה שווה לאפס חייב להתקיים $d = e = 0$.

מה עם $r' = a - b\sqrt{c}$? אם נעיין בחישוב למעלה נראה ש-$p(r') = d - e\sqrt{c} = 0 + 0\cdot\sqrt{c} = 0$ כך שגם r' הוא שורש של p. אם $r = r'$ אזי $r - r' = 2b\sqrt{c} = 0$ שהוא נכון רק אם $b = 0$ ואז העומק של r, r' יהיה $n-1$, שוב בסתירה להנחה. □

משפט 2.9 אם לפולינום ממעלה שלוש עם מקדמים רציונליים:

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

אין שורשים רציונליים, אז אף אחד מהשורשים שלו אינו בן-בנייה.

הוכחה לפי המשפט הבסיסי של אלגברה (משפט 16.1) ל-$p(x)$ שלושה שורשים r_1, r_2, r_3. יהי $r_1 = a + b\sqrt{c}$ השורש עם העומק המינימלי n. לפי ההנחה שאין שורשים רציונליים, $n \geq 1$, ולכן $b \neq 0$ ו-$c \neq 0$. לפי משפט 2.8, $r_2 = a - b\sqrt{c}$ הוא גם שורש. נבצע את הכפל שלהלן:

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 \tag{2.6}$$

$$+ (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x + r_1r_2r_3 \tag{2.7}$$

$$a_2 = -(r_1 + r_2 + r_3) \tag{2.8}$$

$$r_3 = -(a_2 + r_1 + r_2)\,. \tag{2.9}$$

אבל a_2 הוא רציונלי ולכן גם:

$$r_3 = -a_2 - (r_1 + r_2) = -a_2 - 2a\,,$$

רציונלי בסתירה להנחה. □

2.7 אי-אפשר לחלק זווית לשלושה חלקים ולהכפיל קוביה

משפט 2.10 $\sqrt[3]{2}$ אינו מספר רציונלי.

הוכחה נניח ש-$\sqrt[3]{2}$ רציונלי ושווה ל-p/q כאשר p, q מספרים שלמים ללא גורמים משותפים פרט ל-± 1. אזי:

$$\begin{aligned}(p/q)^3 &= (\sqrt[3]{2})^3\\ p^3 &= 2q^3\,,\end{aligned}$$

ולכן ניתן לחלק את p ב-2, כלומר, $p = 2r$. נמשיך:

$$\begin{aligned}8r^3 &= 2q^3\\ q^3 &= 4r^3\,,\end{aligned}$$

כך שניתן לחלק גם את q ב-2, סתירה להנחה של-p, q אין גורם משותף. $\square$

משפט 2.11 ל-$x^3 - 2$ אין שורשים רציונליים, ולכן לא ניתן להכפיל קוביה עם סרגל ומחוגה.

הוכחה אחד מהשורשים הוא $\sqrt[3]{2}$ שהוא לא רציונלי (משפט 2.10). השורשים האחרים הם השורשים של הפולינום הריבועית $x^2 + \sqrt[3]{2}x + (\sqrt[3]{2})^2$ שמתקבל כאשר מחלקים את $x^3 - 2$ ב-$x - \sqrt[3]{2}$. קל לבדוק שהשורשים לא רציונליים (למעשה, הם אפילו לא ממשיים). $\square$

משפט 2.12 לא ניתן לחלוק זווית שרירותית לשלושה עם סרגל ומחוגה.

הוכחה מספיק להוכיח שיש זווית אחת שלא ניתנת לחלוקה. ננסה לחלק את 60° לשלושה חלקים כדי לקבל 20°. לפי משפט א׳.6:

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\\ \cos 60^\circ &= 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ\,.\end{aligned}$$

נסמן $x = \cos 20^\circ$ ונסמן $y = 2x$. מ-$\cos 60^\circ = 1/2$ מתקבל:

$$\begin{aligned}4x^3 - 3x - \frac{1}{2} &= 0\\ 8x^3 - 6x - 1 &= 0\\ y^3 - 3y - 1 &= 0\,.\end{aligned}$$

כדי להוכיח שלפולינום $y^3 - 3y - 1$ אין שורשים רציונליים, נניח ש-$y = a/b$ הוא שורש רציונלי כאשר ל-a, b אין גורמים משותפים פרט ל-± 1. אזי:

$$(a/b)^3 - 3(a/b) - 1 = 0 \tag{2.10}$$

$$a^3 - 3ab^2 = b^3 \tag{2.11}$$

$$a(a - 3b^2) = b^3 \tag{2.12}$$

$$a^3 = b(b^2 + 3ab)\,. \tag{2.13}$$

לפי משוואה 2.12, ניתן לחלק את b ב-a, ולפי משוואה 2.13, ניתן לחלק את a ב-b. זה אפשרי רק אם $a = b = \pm 1$ ו-$a/b = \pm 1$. ניתן לבדוק בחישוב ש-$y = a/b = 1$ ו-$y = a/b = -1$ אינם שורשים של הפולינום. □

דרך אחרת להוכיח שהבעיות אינן אפשריות היא להשתמש במשפט שלהלן (ללא הוכחה):

משפט 2.13 אם לפולינום עם מקדמים שלמים (שהמקדם הראשון הוא אחד) $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ יש שורשים רציונליים, אזי יש לו שורשים שלמים.

כדי להראות שלא ניתן להכפיל את קוביה עלינו לראות שלפולינום:

$$x^3 - 2 = (x - r_2)(x - r_1)(x - r_0)$$

אין שורשים שלמים. בגלל ש-$r_0 r_1 r_2 = -2$ כל השורשים חייבים לחלק את 2, כך שהשורשים השלמים האפשריים הם $\pm 1, \pm 2$. חישוב קצר מראה שאף אחד מהם אינו שורש.

כדי לראות שלא ניתן לחלק זווית לשלושה חלקים עלינו לראות שלפולינום $y^3 - 3y - 1$ אין שורשים שלמים. שורש שלם חייב לחלק את -1 אבל לא 1 ולא -1 הם שורשים.

מה ההפתעה?

Underwood Dudley ערך חקירה רחבה על מי שהוא כינה "תמהונים" שמבזבזים שנים של חייהם בניסיון להוכיח שניתן לחלק זוויות לשלושה. לא רק שהם מוליכים את עצמם שלל, אבל, גרוע מזה, הם חושבים שלמציאת בנייה חשיבות. כמובן, שבנייה היא חסרת שימוש מעשי כי עם כלים כגון הניאוסיס והקוודרטיקס ניתן למצוא בנייה מדוייקת. המספר העצום של הבניות הללו מפתיע כי רבים מהם מתוחכמות ומשיגים קירובים טובים. חישוב הנוסחאות של הבניות הגיאומטריות הוא תרגיל מצויין בטריגונומטריה.

מפתיע גם שההוכחות שלא ניתן לבצע את הבניות הללו משתמשות רק באלגברה ומבוססות על תכונות של שורשים של פולינומים.

מקודות

Wikipedia [52, 59, 63] הוא מקור טוב למידע על בניות. שני הקירובים לחלוקת זווית לשלושה חלקים הם מ-[15, עמודים 67-68, 95-96]. הקירוב השני מיוחס לפילוסוף הנודע Thomas Hobbes. חלוקת זווית לשלושה באמצעות קוודראטיקס מבוסס על [31, עמודים 48-49] ו-[15, עמודים 6-7]. הכפלת הקוביה באמצעות ניואסיס נלקחה מ-[14].

אפשר למצוא הצגה מוקפדת של מספרים בני-בנייה בכל ספר לימוד לאלגברה מודרנית כגון [17], שכולל הוכחה של המקרה הכללי של משפט 2.6 בסעיף 32. משפט 2.13 הוא משפט 23.11 של [17]. הוכחה נגישה יחסית של ההוכחה של Wantzel נמצא ב-[48]. ההצגה שלי של מספרים בני-בנייה מבוססת על ההצגות ב-[11, פרק III] ו-[27].

פרק 3

איך לרבע את המעגל

לרבע את המעגל היא אחת מבעיות הבנייה שהיוונים ניסו לפתור ולא הצליחו. בניגוד לחלוקה זווית לשלושה חלקים ולהפכלת הקוביה שאינן ניתנת לבנייה בגלל התכונות של השורשים של פולינומים, לא ניתן לרבע את המעגל בגלל ש-π הוא טרנסנדנטי: הוא אינו פתרון של אף פולינום עם מקדמים רציונליים. ההוכחה מסובכת וניתנה רק בי-1882 כל ידי Carl von Lindemann.

קירובים ל-$\pi \approx 3.14159265359$ היו ידועים גם בעולם העתיק. קירובים די מדוייקים הם:

$$\frac{22}{7} \approx 3.142857, \quad \frac{333}{106} \approx 3.141509, \quad \frac{355}{113} \approx 3.141593\,.$$

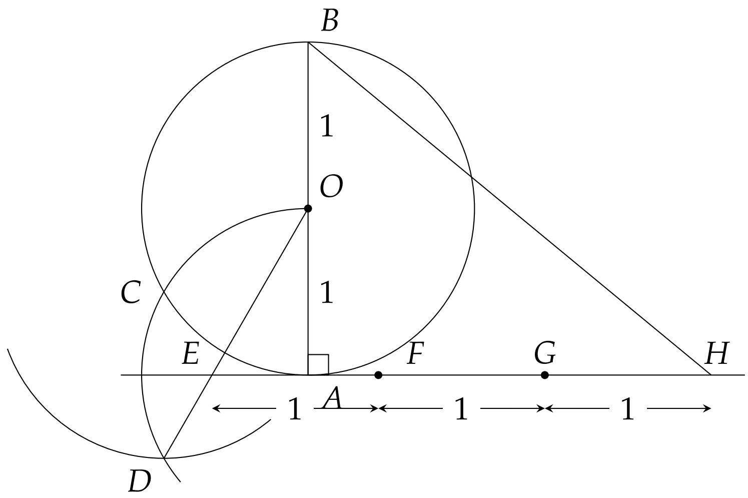
נביא שלוש בניות על ידי סרגל ומעגל של קירובים ל-π. בנייה אחת של Adam Kochański (סעיף 3.1) ושתי בניות של Ramanujan (סעיפים 3.2, 3.3). סעיף 3.4 מסביר איך לרבע את המעגל באמצעות קוודרטריקס.

הטבלה שלהלן מביא את הנוסחאות של האורכים שנבנה, ערכם המקורב, ההפרש בין ערכים הללו והערך של π, והשגיאה (במטרים) אם משתמשים בקירוב כדי לחשב את היקף כדור הארץ, כאשר נתון שהרדיוס הוא 6378 ק״מ.

בנייה	נוסחה	ערך	הפרש	שגיאה (מ)
π		3.14159265359	—	—
Kochansky	$\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$	3.1415333871	5.932×10^{-5}	756
Ramanujan 1	$\frac{355}{113}$	3.14159292035	2.667×10^{-7}	3.4
Ramanujan 2	$\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4}$	3.14159265258	1.007×10^{-9}	0.013

3.1 הבנייה של Kochansky

בנייה (איור 3.1):



איור 3.1: הקירוב של Kochański ל-π

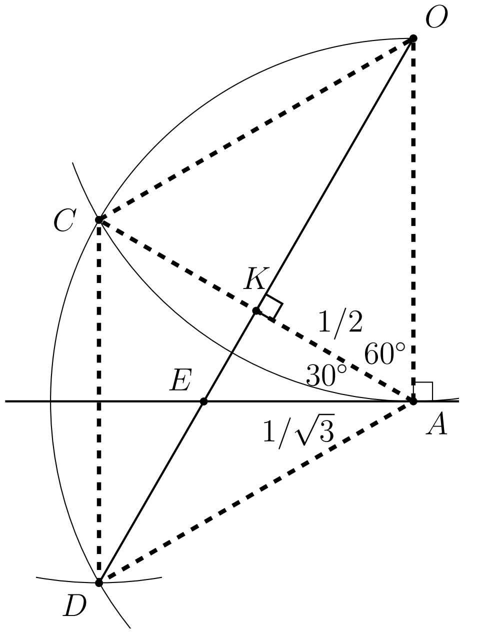
- נבנה מעגל יחידה שמרכזו O עם קוטר $\overline{AB}$ ונבנה משיק למעגל ב-A.
- נבנה מעגל יחידה שמרכזו A ונסמן את החיתוך עם המעגל הראשון ב-C. נבנה מעגל יחידה שמרכזו C ונסמן את החיתוך שלו עם המעגל השני ב-D.
- נבנה $\overline{OD}$ ונסמן את החיתוך שלו עם המשיק ב-E.
- מ-E נבנה F, G, H, כל אחת במרחק 1 מהנקודה הקודמת.
- נבנה $\overline{BH}$.

משפט 3.1 $\overline{BH} = \sqrt{\dfrac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx \pi$.

הוכחה איור 3.2 מתמקד בחלק מאיור 3.1 כאשר נוספו קטעי הקו המקווקווים. בגלל שכל המעגלים הם מעגלי היחידה, אורכו של כל אחד מהם הוא 1. מכאן ש-$AOCD$ הוא מעוין ולכן האלכסונים שלו ניצבים זה לזה וחוצים זה את זה בנקודה שסומנה K, $\overline{AK} = 1/2$.

האלכסון $\overline{AC}$ מייצר שני משולשים שווי-צלעות $\triangle OAC, \triangle DAC$ כך ש-$\angle OAC = 60°$. הזווית בין המשיק לרדיוס $\overline{OA}$ היא זווית ישרה ולכן $\angle KAE = 30°$. נחשב:

$$\frac{1/2}{\overline{EA}} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\overline{EA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\overline{AH} = 3 - \overline{EA} = \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$$



איור 3.2: הוכחת הבנייה של Kochansky

$\triangle ABH$ הוא משולש ישר-זווית ו-$\overline{AH} = 3 - \overline{EA}$, ולכן לפי משפט פיתרגורס:

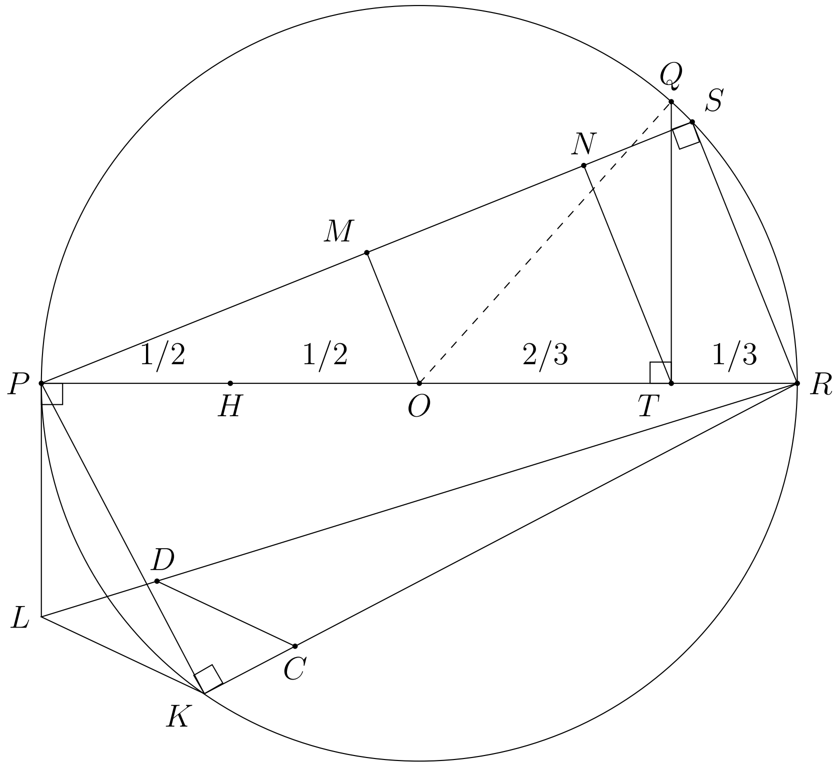
$$\begin{aligned}
\overline{BH}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 \\
&= 4 + \frac{27 - 6\sqrt{3} + 1}{3} = \frac{40}{3} - 2\sqrt{3} \\
\overline{BH} &= \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3.141533387 \approx \pi\,.
\end{aligned}$$

□

3.2 הבנייה הראשונה של Ramanujan

בנייה (איור 3.3):

- נבנה מעגל יחידה שמרכזו O עם קוטר $\overline{PR}$.
- נבנה נקודה H שחוצה את $\overline{PO}$ ונקודה T כך ש-$\overline{TR}$ מחלק את $\overline{OR}$ לשלושה קטעים שווים.
- נבנה ניצב ב-T שחותך את המעגל ב-Q.
- נבנה את המיתרים $\overline{RS} = \overline{QT}$ ו-$\overline{PS}$.
- נבנה קו מקביל ל-$\overline{RS}$ שמתחיך ב-T שחותך את $\overline{PS}$ ב-N.



איור 3.3: הבנייה של Ramanujan

- נבנה קו מקביל ל-$\overline{RS}$ שמתחיך ב-O שחותך את $\overline{PS}$ ב-M.
- נבנה מיתר $\overline{PK} = \overline{PM}$.
- נבנה משיק ב-P שאורכו $\overline{PL} = \overline{MN}$.
- נחבר את הנקודות K, L, R.
- נמצא נקודה C כך ש-$\overline{RC} = \overline{RH}$.
- נבנה קו $\overline{CD}$ המקביל ל-$\overline{KL}$ שחותך את $\overline{LR}$ ב-D.

משפט 3.2 $\pi \approx \frac{355}{113} = \overline{RD}^2$.

הוכחה לפי הבנייה $\overline{RS} = \overline{QT}$ ולפי משפט פיתגורס ב-$\triangle QOT$:

$$\overline{RS} = \overline{QT} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}\,.$$

הזווית $\angle PSR$ נשען על קוטר כך ש-$\triangle PSR$ הוא משולש ישר-זווית ולפי משפט פיתגורס:

$$\overline{PS} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{31}}{3}\,.$$

לפי הבנייה $\overline{MO} \| \overline{RS}$ כך ש-$\triangle SPR \sim \triangle MPO$ ול:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{PM}}{\overline{PO}} &= \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}}\\ \frac{\overline{PM}}{1} &= \frac{\sqrt{31}/3}{2}\\ \overline{PM} &= \frac{\sqrt{31}}{6}\,.\end{aligned}$$

לפי הבנייה $\overline{NT} \| \overline{RS}$ כך ש-$\triangle SPR \sim \triangle NPT$ ו:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{PN}}{\overline{PT}} &= \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}}\\ \frac{\overline{PN}}{5/3} &= \frac{\sqrt{31}/3}{2}\\ \overline{PN} &= \frac{5\sqrt{31}}{18}\\ \overline{MN} &= \overline{PN} - \overline{PM} = \sqrt{31}\left(\frac{5}{18} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{31}}{9}\,.\end{aligned}$$

$\triangle PKR$ הוא משולש ישר-זווית כי $\angle PKR$ נשען על קוטר. לפי הבנייה $\overline{PK} = \overline{PM}$ ולכן לפי משפט פיתגורס:

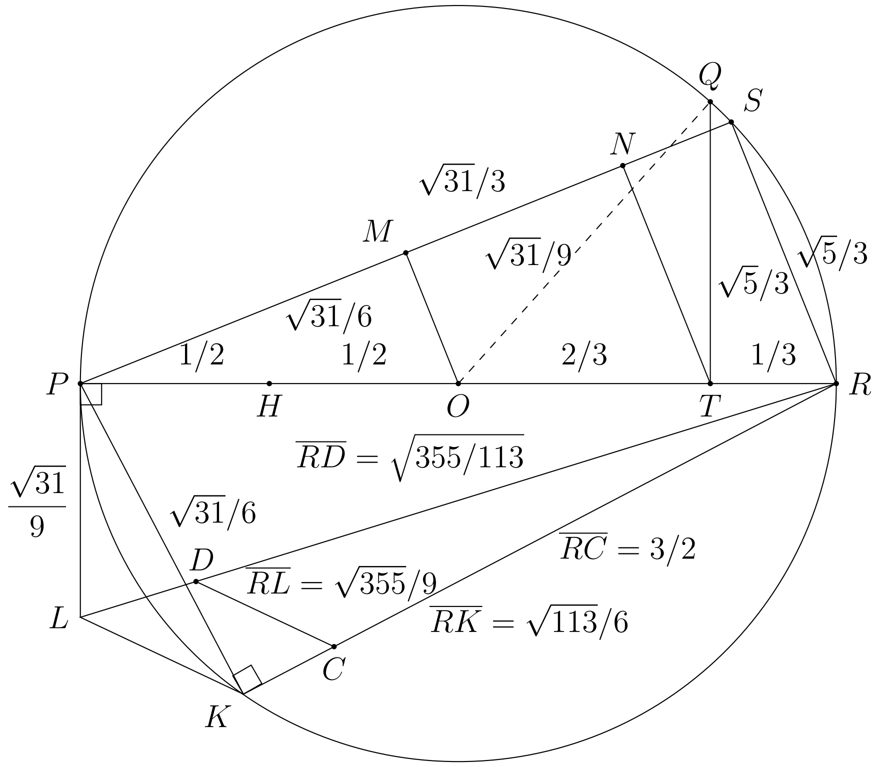
$$\overline{RK} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{31}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{113}}{6}\,.$$

$\triangle PLR$ הוא משולש ישר-זווית כי $\overline{PL}$ הוא משיק ולכן $\angle PLR$ הוא משולש-ישר זווית. לפי הבנייה $\overline{PL} = \overline{MN}$ ולפי משפט פיתגורס:

$$\overline{RL} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{31}}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{355}}{9}\,.$$

לפי הבנייה $\overline{RC} = \overline{RH} = 3/2$ ו-$\overline{LK} \parallel \overline{CD}$. לפי משולשים דומים:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{RD}}{\overline{RC}} &= \frac{\overline{RL}}{\overline{RK}}\\ \frac{\overline{RD}}{3/2} &= \frac{\sqrt{355}/9}{\sqrt{113}/6}\\ \overline{RD} &= \sqrt{\frac{355}{113}}\\ \overline{RD}^2 &= \frac{355}{113} \approx 3.14159292035 \approx \pi\,.\end{aligned}$$



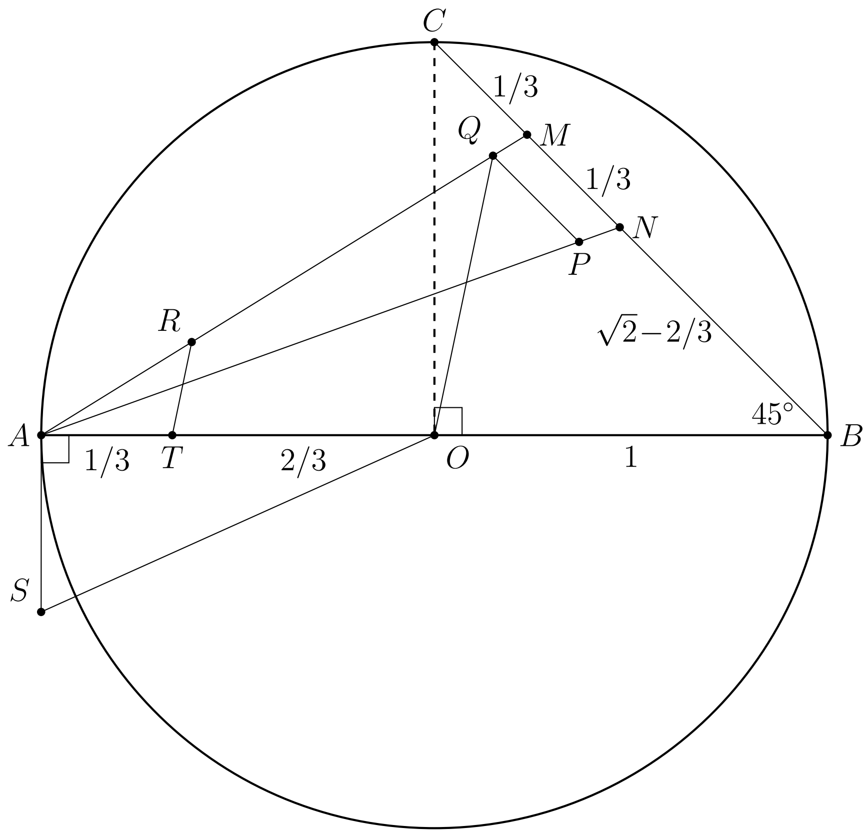
איור 3.4: הבנייה עם האורכים של סימון של ארכי קטעי הקו

באיור 3.4 אורכי קטעי הקו מסומנים. □

3.3 הבנייה השנייה של Ramanujan

בנייה (איור 3.5)

- נבנה מעגל יחידה שמרכזו O עם קוטר $\overline{AB}$ ונסמן ב-C את החיתוך של הניצב ל-$\overline{AB}$ ב-O עם המעגל.
- נחלק את הקטע $\overline{AO}$ כך ש-$\overline{AT} = 1/3$ ו-$\overline{TO} = 2/3$.
- נבנה $\overline{BC}$ ונמצא נקודות M, N כך ש-$\overline{CM} = \overline{MN} = \overline{AT} = 1/3$.
- נבנה $\overline{AM}$ ו-$\overline{AN}$ ונסמן ב-P את הנקודה על $\overline{AN}$ כך ש-$\overline{AP} = \overline{AM}$.
- נבנה קו המקביל ל-$\overline{MN}$ שעובר דרך P ונסמן ב-Q את נקודת החיתוך שלו עם $\overline{AM}$.
- נבנה $\overline{OQ}$ ונבנה קו המקביל ל-$\overline{OQ}$ שעובר דרך T ונסמן ב-R את נקודת החיתוך שלו עם $\overline{AM}$.



איור 3.5: הבנייה השנייה של Ramanujan

- נבנה משיק $\overline{AS}$ כך ש-$\overline{AS} = \overline{AR}$.
- נבנה $\overline{SO}$.

משפט 3.3 $\pi \approx \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} = 3\sqrt{\overline{SO}}$.

הוכחה $\triangle COB$ הוא משולש ישר-זווית ולפי משפט פיתגורס $\overline{CB} = \sqrt{2}$ ו-

$$\overline{NB} = \sqrt{2} - 2/3\,.$$

$\triangle COB$ הוא המשולש שווה-שוקיים ולכן $\angle NBA = \angle MBA = 45°$. לפי משפט הקוסינוסים:

$$\begin{aligned}\overline{AN}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BN}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BN}\cdot\cos\angle NBA\\ &= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)^2 - 2\cdot 2\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{22}{9}\\ \overline{AN} &= \sqrt{\frac{22}{9}}\,.\end{aligned}$$

שוב לפי משפט הקוסינוסים:

$$\begin{aligned}\overline{AM}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BM}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BM} \cdot \cos \angle MBA \\ &= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{19}{9}} \\ \overline{AM} &= \sqrt{\frac{19}{9}}\,.\end{aligned}$$

לפי הבנייה $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$ כך ש-$\triangle MAN \sim \triangle QAP$, ולפי הבנייה $\overline{AM} = \overline{AP}$, ולכן:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AQ}}{\overline{AM}} &= \frac{\overline{AP}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} \\ \overline{AQ} &= \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AN}} = \frac{19/9}{\sqrt{22/9}} = \frac{19}{3\sqrt{22}}\,.\end{aligned}$$

לפי הבנייה $\overline{OQ} \parallel \overline{TR}$ ולכן $\triangle QAO \sim \triangle RAT$ ו:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}} &= \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} \\ \overline{AR} &= \overline{AQ} \cdot \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} = \frac{19}{3\sqrt{22}} \cdot \frac{1/3}{1} = \frac{19}{9\sqrt{22}}\,.\end{aligned}$$

לפי הבנייה $\overline{AR} = \overline{AS}$ ו-$\triangle OAS$ הוא משולש ישר-זווית כי $\overline{AS}$ הוא משיק. לפי משפט פיתגורס:

$$\begin{aligned}\overline{SO} &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{19}{9\sqrt{22}}\right)^2} \\ 3\sqrt{\overline{SO}} &= 3\left(1 + \frac{19^2}{9^2 \cdot 22}\right)^{1/4} = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} \approx 3.14159265258 \approx \pi\,.\end{aligned}$$

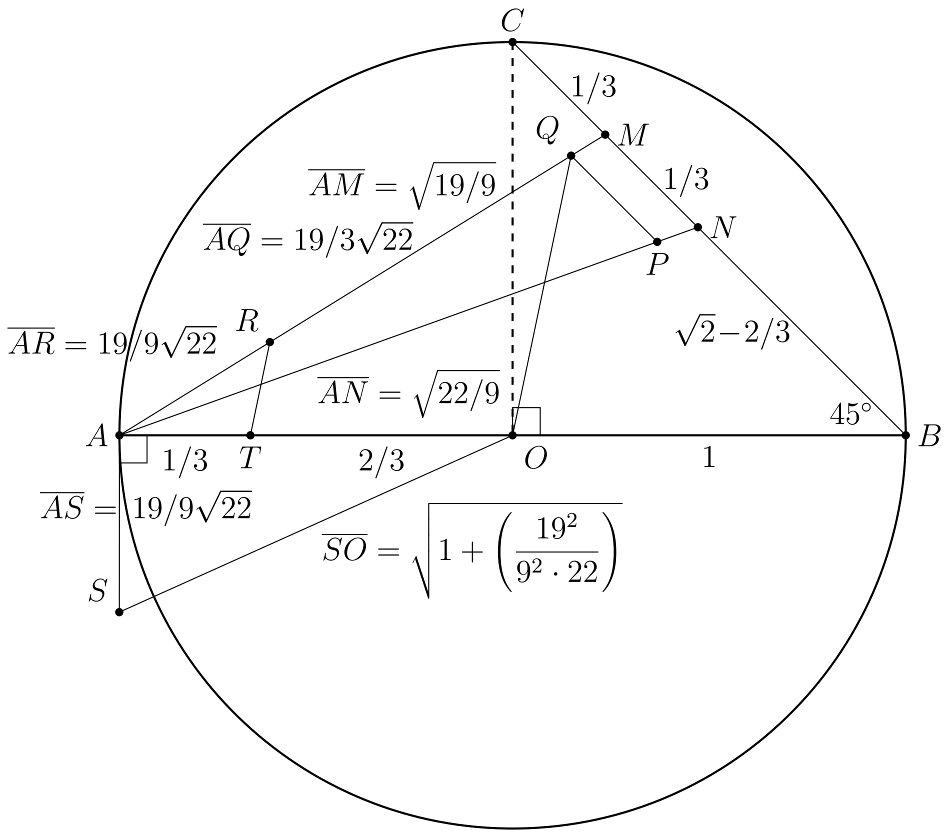
באיור 3.6 אורכי קטעי הקו מסומנים. □

3.4 לרבע את המעגל באמצעות קוודרטיקס

הקוודרטיקס מתואר בסעיף 2.4.

יהי $t = \overline{DE}$ המרחק שהסרגל האופקי זז כאשר הוא יורד בציר ה-y ויהי θ הזווית שנוצרה בין הסרגל המסתובב לבין ציר ה-x. יהי P המיקום של הציר המחבר את שני הסרגל. המקום הגיאומטרי של P הוא עקומת הקוודרטיקס.

יהי F ההיטל של P על ציר ה-x ויהי G המקום של הציר כאשר שני המקלות מגיעים לציר ה-x, כלומר, G היא נקודה החיתוך בין עקומת הקוודרטיקס לבין ציר ה-x (איור 3.7).



איור 3.6: הבנייה עם האורכים של סימון של ארכי קטעי הקו

משפט 3.4 $\overline{AG} = 2/\pi$.

הוכחה יהי $y = \overline{PF} = \overline{EA} = 1 - t$. על קוודרטיקס θ יורד בקצב זהה של העלייה ב-t:

$$\frac{1-t}{1} = \frac{\theta}{\pi/2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}(1-t)\,.$$

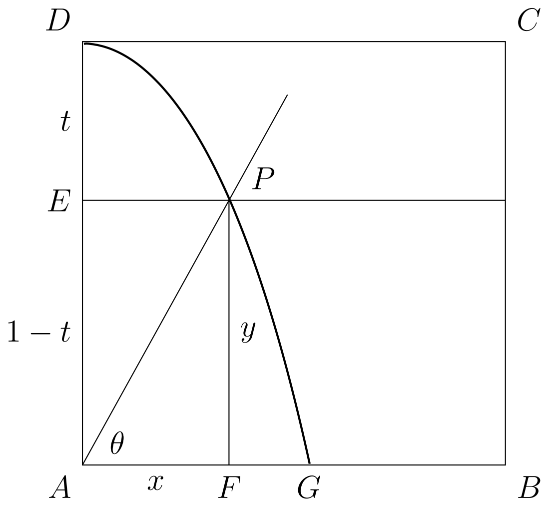
יהי $x = \overline{AF} = \overline{EP}$. אזי $\tan\theta = y/x$ ולכן:

$$x = \frac{y}{\tan\theta} = y\cot\theta = y\cot\frac{\pi}{2}(1-t) = y\cot\frac{\pi}{2}y\,. \tag{3.1}$$

נהוג לבטא פונקציה כ-$y = f(x)$ אבל ניתן לבטא אותה גם כ-$x = f(y)$.

כדי לקבל $x = \overline{AG}$ לא ניתן פשוט להציב $y = 0$ במשוואה 3.1 כי $\cot 0$ לא מוגדר. נחשב את הגבול של x כאשר y שואף ל-0. תחילה נציב $z = (\pi/2)y$ ונקבל:

$$x = y\cot\frac{\pi}{2}y = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}y\cot\frac{\pi}{2}y\right) = \frac{2}{\pi}(z\cot z)\,,$$



איור 3.7: לרבע את המעגל באמצעות קוודרטיקס

ונחשב את הגבול:

$$\lim_{z\to 0} x = \frac{2}{\pi}\lim_{z\to 0}(z\cot z) = \frac{2}{\pi}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z\cos z}{\sin z}\right) = \frac{2}{\pi}\lim_{z\to 0}\left(\frac{\cos z}{(\sin z)/z}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{\cos 0}{1} = \frac{2}{\pi},$$

כאשר השתמשנו ב-$\lim_{z\to 0}(\sin z/z) = 1$ (משפט א׳.12). □

מה ההפתעה?

מפתיע שניתן לנבנהת קירובים כל כל מדוייקים ל-π. כמובן, אנו נדהמים מהבניות של Ramanujan.

מקורות

הבנייה של Kochański מופיעה ב-[7]. הבניות של Ramanujan נמצאות ב-[38, 39]. ריבוע המגעל באמצעות הקוודרטיקס מבוסס על [31, pp. 48--49] ו-[63].

פרק 4

משפט חמשת הצבעים

מפות משתמשות בצבעים כדי להבחין בין איזור אחד לאחר על ידי צביעת איזורים סמוכים בצבעים שונים. ב-1852 Francis Guthrie שם לב שניתן לצבוע את המחוזות באנגליה עם ארבעה צבעים בלבד. הטענה שארבעה צבעים מספיקים כדי לצבוע כל מפה מישורית נקראת **משפט ארבעת הצבעים**. המשפט הוכח רק ב-1976 על ידי Kenneth Appel ו-Wolfgang Haken. הם השתמשו במתמטיקה מתקדמת כדי להראות שאם יש דוגמה נגדית (מפה הדורשת יותר מארבעה בצבעים), אזי המפה קשורה לאחת מ-1834 תצורות. לצרוך בדיקת התצורות הללו הם השתמשו במחשב.

למרות שקשה מאוד להוכיח את משפט ארבעת הצבעים, ההוכחות של משפט חמשת הצבעים ומשפט ששת הצבעים פשוטות יחסית (סעיפים 4.5, 4.6). בדרך להוכיח את המשפטים נגדיר מפות מישוריות וגרפים מישוריים (סעיף 4.1), נוכיח את הנוסחה של Euler (סעיף 4.2) ונראה שבגרף מישורי חייב להיות צומת שהמעלה שלו הוא פחות או שווה לחמש. בסעיף 4.3 נשתמש בנוסחה של Euler כדי להראות ששני גרפים לא מישוריים.

ב-1879 Alfred B. Kempe פירסם הוכחה של משפט ארבעת הצבעים וב-1890 Percy J. Heawood הראה שההוכחה שגוייה. בסעיף 4.7 נביא את ההוכחה השגוייה של Kempe והדוגמה של Heawood שמפריך את ההוכחה.

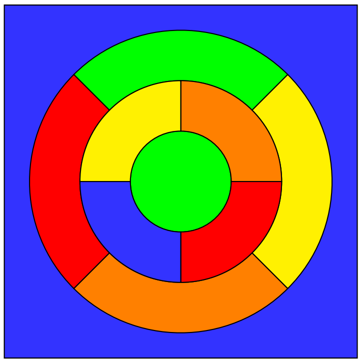
4.1 מפות מישוריות וגרפים מישוריים

הגדרה 4.1 **מפה מישורית** היא קבוצה של שטחים במישור עם גבולות משותפים. **צביעה** של מפה היא השמה של צבע לכל שטח כך שכל שטחים שיש להם גבולות משותפים צבועים בצבעים שונים.

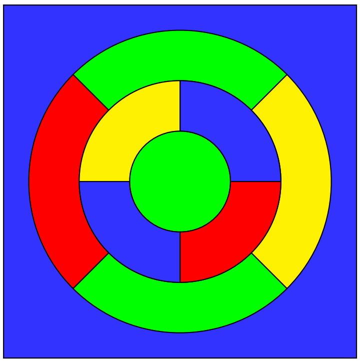
איור 4.1(א) מראה צביעה בחמישה צבעים של מפה מישורית עם עשרה שטחים. איור 4.1(א) מראה צביעה עם ארבעה צבעים של אותה מפה.

הגדרה 4.2 **גרף** הוא קבוצה של **צמתים** V וקבוצה של **קשתות** E, כך שכל קשת מחבר לשני צמתים.

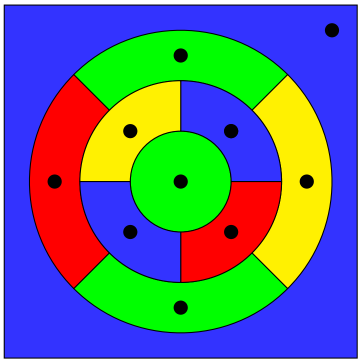
גרף מישורי הוא גרף בו שתי קשתות לא חותכות אחת את השניה. בגרף מישורי קטע מהמישור התחום על ידי קבוצה של קשתות נקרא **שטח**.



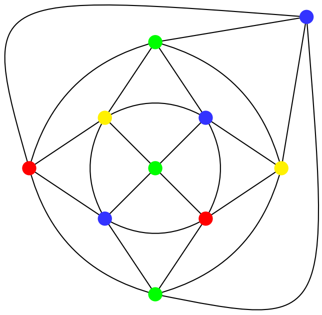
איור 4.1(א) צביעת מפה עם חמישה צבעים



איור 4.1(ב) צביעת מפה עם ארבעה צבעים



איור 4.2(א) התאמת צמתים לשטחים במפה מישורית



איור 4.2(ב) התאמת גרף מישורי למפה המישורית

צביעה של גרף מישורי היא השמה של צבעים לצמתים כך ששני צמתים המחוברים על ידי קשת צבועים בצבעים שונים.

מפות וגרפים דואליים ונוח יותר לטפל בבעיות צביעה בגרפים ולא במפות.

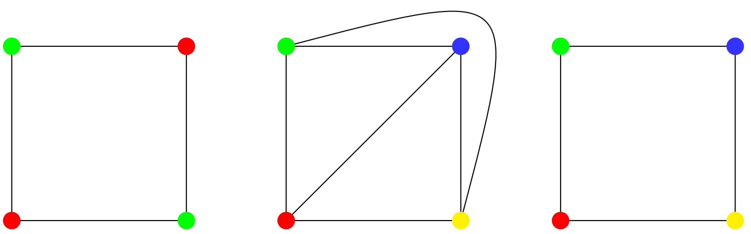
משפט 4.1 נתונה מפה מישורית, ניתן לבנות גרף מישורי כך שעבור כל צביעה של שטחים במפה קיימת צביעה של הצמתים בגרף, ולהיפך.

הוכחה בנו צומת עבור כל שטח במפה ובנו קשת בין שני צמתים אם ורק אם קיים גבול בין שני השטחים. □

דוגמה 4.1 איור *4.2*(א) מראה את המפה המישורית מ-איור *4.1*(ב) עם הצמתים המתאימים לכל השטחים. איור *4.2*(ב) מראה גרף מישורי המתאים למפה.

ניתן להגביל את עצמנו לגרפים שהשטחים שלהם **משולשיים**.

הגדרה 4.3 גרף הוא **מתולת** (*triangular*) אם כל השטחים שלו חוסמים על ידי שלוש קשתות. ניתן **לתלת** (*triangulate*) גרף אם אפשר להוסיף קשתות כדי שהגרף יהי מתולת. אפשר גם להגיד שיש **תילות** (*triangulation*) של הגרף.



איור 4.3: צביעת גרף מתולת

דוגמה 4.2 השטחים של הגרף המישורי ב-איור 4.2(ב) מתולתים כי כל אחד חסום על ידי שלוש קשתות. הקשתות מעוגלות ולכן השטחים אינם משולשים, שהם מצולעים שצלעותיהם קטעי קו ישרים.

משפט **Fáry** טוען שניתן להמר כל גרף מישורי מתולת לגרף מישורי שהקשתות שלו הם קטעי קו ישרים. מכאן, שללא הגבלת הכללית ניתן לנסח הוכחות רק עבור גרפים מישוריים שהשטחים שלהם משולשים.

דוגמה 4.3 איור 4.3 (משמאל) מראה ריבוע שניתן לצבוע עם שני צבעים, אבל אם מתלתים אותו (במרכז) חייבים ארבעה צבעים. המטרה שלנו היא להוכיח שניתן לצבוע את כל הגרפים ב-n צבעים (עבור n מסויים). אם ניתן לצבוע את הגרף המתולת עם n צבעים, אפשר גם לצבוע את הגרף המקורי כי מחיקת הקשתות הנוספות לא מקלקל את הצביעה (ימין).

4.2 הנוסחה של Euler

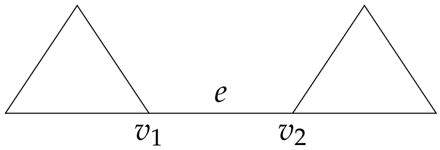
משפט 4.2 (Euler) יהי G גרף מישורי מקושר עם V צמתים, E קשתות ו-F שטחים. אזי:

$$V - E + F = 2\,.$$

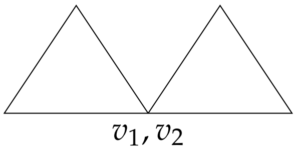
הוכחה באינדוקציה על מספר הקשתות. אם מספר הקשתות בגרף מישורי הוא אפס, קיים רק צומת אחד ושטח אחד כך ש-$2 = 1 + 0 - 1$. אחרת, קיים לפחות קשת אחת e שמחבר שני צמתים v_1, v_2. נמחק את הקשת e.

מקרה 1: הגרף מפסיק להיות מקושר (איור 4.4(א)). נשלב את v_1 עם v_2 (איור 4.4(ב)). ל-G' הגרף המישורי שנוצר פחות קשתות מ-G, ולכן לפי הנחת האינדוקציה $(V-1)-(E-1)+F=2$ כי יש גם צומת אחד פחות. נפשט ונקבל $V-E+F=2$ עבור G.

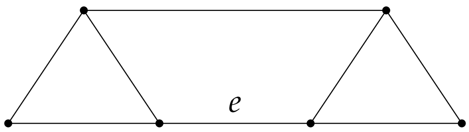
מקרה 2: הגרף נשאר מקושר (איור 4.5(א)). לגרף הנוצר G' פחות קשתות מ-G (איור 4.5(ב)), ולכן לפי הנחת האינדוקציה, $V-(E-1)+(F-1)=2$ כי מחיקת קשת אחת מאחדת שני שטחים לאחד. נפשט ונקבל $V-E+F=2$ עבור G. □



איור 4.4(א) הגרף לא קשור



איור 4.4(ב) שילוב שני צמתים



איור 4.5(א) הגרף נשאר קשור לאחר מחיקת קשת


איור 4.5(ב) הגרף קשור אבל עם פחות קשתות

משפט 4.3 יהי G גרף מישורי מקושר ומתולת. אזי $E = 3V - 6$.

הוכחה כל שטח חסום על ידי שלוש קשתות כך ש-$E = 3F/2$, כי כל קשת נספר פעמיים, פעם אחת לכל שטח שהיא חוסמת. לפי נוסחת Euler :

$$\begin{aligned} E &= V + F - 2 \\ E &= V + 2E/3 - 2 \\ E &= 3V - 6\,. \end{aligned}$$

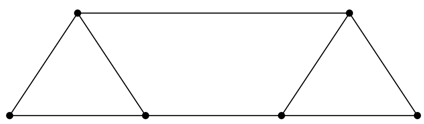
□

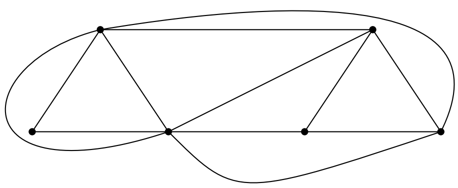
דוגמה 4.4 בגרף המישורי איור *4.2*(ב) יש 10 צמתים ו-$6 - 10 \cdot 3 = 24$ קשתות.

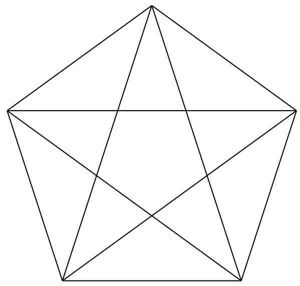
משפט 4.4 יהי G גרף מישורי מקושר. אזי $E \leq 3V - 6$.

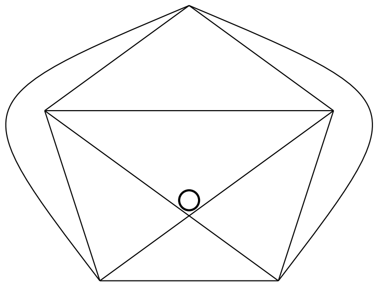
הוכחה נתלת את G כדי לקבל G'. ב-G', $E = 3V - 6$ לפי משפט 4.3. נמחק קשתות מ-G' כדי לקבל את G. מספר הצמתים לא משתנה כך ש-$E \leq 3V - 6$. □

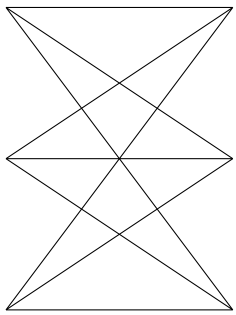
דוגמה 4.5 לגרף ב-איור *4.6*(א) 8 קשתות ו-6 צמתים ולכן $12 = 6 - 6 \cdot 3 < 8$. איור *4.6*(ב) מראה גרף מתולת עם 6 צמתים ו-$12 = 6 - 6 \cdot 3$ קשתות.

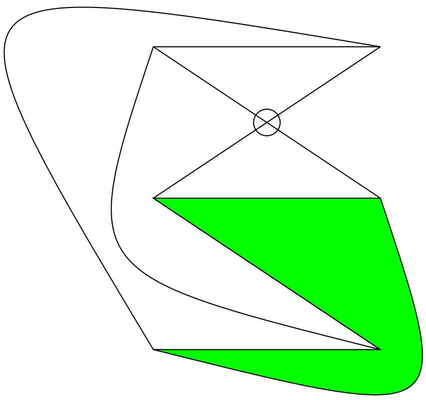

איור 4.6(א) פחות קשתות מהחסם העליון


איור 4.6(ב) בגרף מתולת מספר הקשתות מירבית


איור 4.7(א) K_5 אינו מישורי


איור 4.7(ב) K_5 אינו מישורי


איור 4.8(א) $K_{3,3}$ אינו מישורי


איור 4.8(ב) ניסיון כושל לצייר את $K_{3,3}$ במישור

4.3 גרפים שאינם מישוריים

נסטה מעט מהסיפור כדי להראות איך ניתן להשתמש במשפטים 4.2 ו-4.4 כדי להוכיח שגרפים מסויימים אינם מישוריים.

משפט 4.5 K_5, הגרף השלם עם חמישה צמתים, אינו מישורי (איור *4.7*(א)).

הוכחה עבור K_5, $V = 5$ ו-$E = 10$. לפי משפט 4.4 מספר הקשתות חייב להיות פחות או יותר מ-$3 \cdot 5 - 6 = 9$ ולכן הגרף לא מישורי. □

משפט 4.6 $K_{3,3}$, הגרף הדו-אזורי עם שלושה צמתים בכל איזור (איור *4.8*(א)), אינו מישורי.

הוכחה $V = 6$ ו-$E = 9$. לפי משפט 4.2, אם $K_{3,3}$ מישורי, $F = E - V + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$. אבל כל שטח תחום על ידי ארבע קשתות איור 4.8(ב), כך ש- ולכן $E = 4F/2 = (4 \cdot 5)/2 \neq 9$. □

ב-1930 Kazimierz Kuratowski הוכיח את הכיוון השני של המשפטים הללו: אם גרף אינו מישורי, אזי הוא מכיל (במובן מסויים) K_5 או $K_{3,3}$.

4.4 המעלה של הצמתים

הגדרה 4.4 $d(v)$, **המעלה** של צומת v, היא מספר הקשתות הנפגשות ב-v.

דוגמה 4.6 לגרף באיור איור 4.2(ב) 8 צמתים בתוך שתי הטבעות, כל אחד ממעלה 5. המעלה של השטח החיצוני ושל השטח הפנימי הוא 4. לכן:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 5 \cdot 8 + 4 \cdot 2 = 48\,.$$

נקבל את מספר הקשתות בגרף על ידי חלוקת סכום המעלות ב-2, כי כל קשת נספרה פעמיים, פעם אחת עבור כל צומת שהיא נוגעת בו.

הכללת הטיעונים הללו מוכיחה:

משפט 4.7 יהי $d_i, i = 1, 2, 3, \ldots, k$ מספרי הצמתים ממעלה i בגרף מישורי מקושר עם V צמתים ו-E קשתות, כאשר k הוא המעלה הגבוהה ביותר של צומת ב-V. אזי:

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{i=1}^{k} i \cdot d_i = 2E\,.$$

משפט 4.8 יהי G גרף מישורי מקושר עם E קשתות ו-V צמתים, ויהי $d_i, i = 1, \ldots, k$ מספרי הצמתים ממעלה i, כאשר k הוא המעלה הגבוהה ביותר של צומת ב-V. אזי חייב להיות צומת v ב-V כך ש-$d(v) \leq 5$.

הוכחה (1) ברור שאם יש d_1 צמתים ממעלה 1, d_2 צמתים ממעלה 2, ..., d_k צמתים ממעלה k, אזי $V = \sum_{i=1}^{k} d_i$. מהמשפטים 4.4 ו-4.7 נקבל:

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot d_i = 2E \leq 2(3V - 6) = 6V - 12 = 6\sum_{i=1}^{k} d_i - 12\,.$$

מכאן ש:

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot d_i \leq 6\sum_{i=1}^{k} d_i - 12$$

$$\sum_{i=1}^{k} (6 - i) d_i \geq 12\,.$$

$12 > 0$, ולכן ל-i אחד לפחות, $6 - i > 0$ ועבור i זה, $i < 6$. ☐

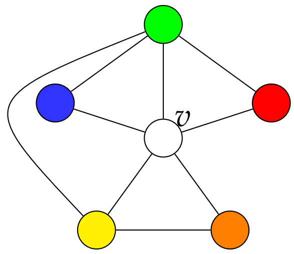
הוכחה (2) נחשב את **הממוצע** של המעלות של הצמתים שהוא סכום המעלות לחלק למספר הצמתים:

$$d_{\text{avg}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} i \cdot d_i}{V}\,.$$

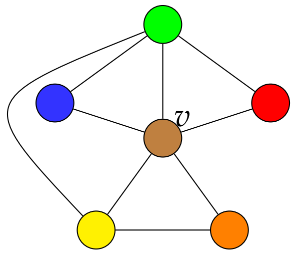
אבל סכום המעלות הוא פעמיים מספר הקשתות ולפי משפט 4.4:

$$d_{\text{avg}} = \frac{2E}{V} \leq \frac{6V - 12}{V} = 6 - \frac{6}{V} < 6\,.$$

אם **הממוצע** של המעלות הוא פחות משש חייב להיות צומת אחד לפחות ממעלה פחות משש. ☐



איור 4.9(א) חמישה צבעים מספיקים v



איור 4.9(ב) נצבע את v הצבע הששי

דוגמה 4.7 סכום המעלות ברף באיור איור *4.2*(ב) הוא $48 = 8 \cdot 5 + 2 \cdot 4$. יש 10 צמתים כך שממוצע המעלות שלו הוא $48/10 = 4.8$ וחייב להיות צומת ממעלה 4 או פחות.

4.5 משפט ששת הבצעים

משפט 4.9 כל גרף מישורי ניתן לצביעה בששה צבעים.

הוכחה באינדוקציה על מספר הצמתים ב-G. אם לגרף ששה צמתים או פחות, ברור שניתן לצבוע את הגרף בששה צבעים. עבור הצעד האינדוקטיבי, לפי משפט 4.8 קיים צומת v ממעלה חמש או פחות. נמחק צומת v כדי לקבל את הגרף G'. לפי הנחת האינדוקציה ניתן לצבוע את G' עם ששה צבעים, אבל ל-v חמישה שכנים לכל היותר שצבועים בחמישה צבעים לכל היותר (איור 4.9(א)), כך שנשאר צבע ששי שניתן לצבוע בו את v (איור 4.9(ב)). □

4.6 משפט חמשת הצבעים

הגדרה 4.5 יהי G גרף מישורי מקושר צבוע. G' הוא **שרשרת** אם ורק אם G' הוא תת-גרף מקסימלי של G הצבוע בשני צבעים.[1]

משפט 4.10 כל גרף מישורי G ניתן לצבוע בחמישה צבעים.

הוכחה באינדוקציה על מספר הצמתים. אם ב-G חמישה צמתים או פחות, ניתן לצבוע עם חמישה צבעים. עבור הצעד האינדוקטיבי, לפי משפט 4.8 קיים צומת v ממעלה חמש או פחות. נמחק את הצומת v ונקבל את הגרף G'. לפי הנחת האינדוקציה, ניתן לצבוע את G' עם חמישה צבעים או פחות. ב-G, אם המעלה של v היא פחות מחמש, או אם $v_1, \ldots, v_5$, השכנים של v, צבועים עם ארבעה צבעים או פחות, ניתן לצבוע את v עם הצבע החמישי. אחרת, הצמתים $v_1, \ldots, v_5$ צבועים בצבעים שונים ב-G' (איור 4.10, למעלה).

הצומת v_1 צבוע בכחול והצומת v_3 צבוע באדום. אם v_1, v_3 לא קשורים במסלול כחול-אדום (למשל, אם הקשת $\overline{v_6 v_7}$ לא היה קיים), ניתן להחליף את הצבעים על המסלול מ-v_1 ל-v_6 ולצבוע

[1] השרשרת נקראת גם **שרשרת Kempe** כי היא הוגדרה על ידי Alfred Kempe בהוכחה השגויה שלו למשפט ארבעת הצבעים.

את v בכחול. אחרת, ניקח את השרשרת הכחול-אדום שמכילה את v_1, v_3 ונוסיף את v והקשתות $\overline{vv_1}, \overline{vv_3}$. נקבל מסלול סגור P (המסומן בקו כפול) שמחלק את המישור לשטח "פנימי" ולשטח "חיצוני" (איור 4.10, אמצע).

כעת נתבונן בצומת v_2 הצבוע ירוק ובצומת v_4 הצבוע כתום. הצמתים הללו **אינם** יכולים להיות בשרשרת ירוק-כתום אחת, כי v_2 נמצא **בתוך** P ו-v_4 נמצא **מחוץ** ל-P, ולכן כל מסלול המחבר אותם חייב לחתוך את P, וזה סותר את ההנחה שהגרף מישורי. לכן הם חייבים להיות בתוך שתי שרשראות ירוק-כתום **לא קשורות** (מסומנות בקו מקווקוו כפול באיור 4.10, באמצע). נחליף את שני הצבעים בשרשרת המכילה את v_2 ואז אפשר לצבוע את v בירוק כדי לקבל צביעה עם חמישה צבעים של G (איור 4.10, למטה). □

הטענה שמסלול רציף מתוך עקומה רציפה סגורה P אל מחוץ ל-P חייב לחתוך את P היא ה-**Jordan Curve Theorem**. המשפט ברור אינטואיטיבית אבל קשה להוכחה.

4.7 ההוכחה השגויה של Kempe לבעיית ארבע הצבעים

הוכחה (שגויה) טענת הבסיס רוב ההוכחה זהה להוכחה של משפט חמשת הצבעים. המקרה החדש שיש לקחת בחשבון הוא צומת v עם חמישה שכנים שלפי ההנחה האינדוקטיבית ניתן לצבוע אותם **בארבעה** צבעים לאחר מחיקת הצומת v.

ב-איור 4.11(א) קיימים שני צמתים v_2, v_5 הצבועים בכחול. נתבונן בשרשרת הכחול-ירוק המכילה את v_2 ובשרשרת הכחול-צהוב המכילה את v_5. השרשרת הכחול-ירוק נמצאת מתוך המסלול הסגור המוגדר על ידי השרשרת האדום-צהוב שמכילה את v_1, v_3 (מסומן בקו כפול), והשרשרת הכחול-צהוב נמצאת בתוך המסלול הסגור המוגדר על ידי השרשרת האדום-ירוק המכילה את v_1, v_4 (מסומן בקו כפול מקווקוו).

נחליף את הצבעים בשרשרת הכחול-ירוק ובשרשרת הכחול-צהוב (איור 4.11(ב)). השכנים של v צבועים בשלושה צבעים, אדום, ירוק צהוב, וניתן לצבוע את v בכחול. □

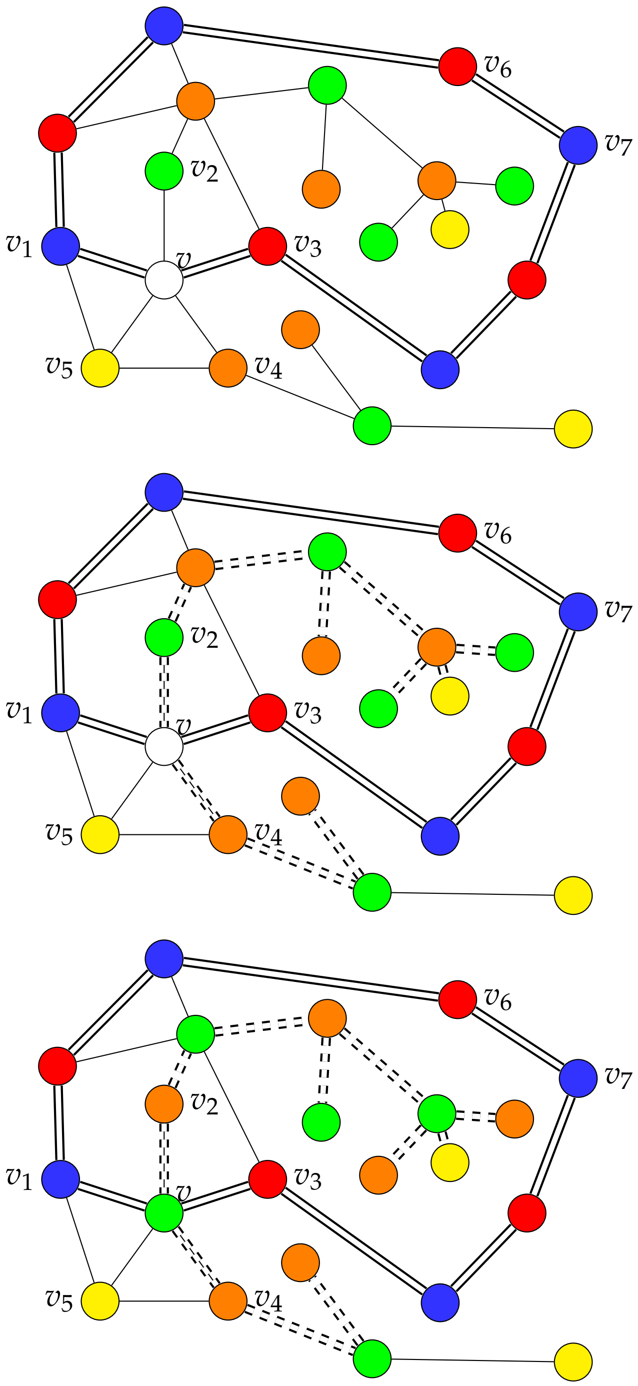
Heawood שם לב שיש אפשרות שלמסלולים הסגורים המוגדרים על ידי השרשראות האדום-צהוב והאדום-ירוק יש צמתים אדומים משותפים (v_1, v_8 ב-איור 4.12(א)). כאשר מחליפים צבעים בשרשראות הכחול-ירוק והכחול-צהוב, יש אפשרות שיהיו צמתים צבועים בכחול הקשורים בקשת (איור 4.12(ב)), כך שהצביעה כבר לא חוקית.

מהי ההפתעה?

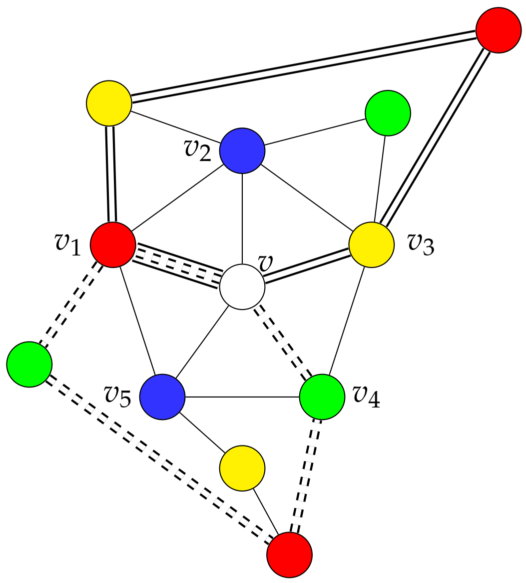
משפט ארבעת הצבעים ידוע לשמצה כי כל כך קל להציג אותו אבל כל כך קשה להוכיחו אותו. לכן מפתיע שההוכחה של משפט חמשת הצבעים כל כך פשוטה. החלק המרכזי של ההוכחה הוא משפט 4.8 (למפה מישורית חייב להיות צומת של מעלה 5 לכל היותר), שהוא משפט שאין לו קשר עם צביעה. למעשה, הוא תוצאת רק של ספירה של צמתים וקשתות.

מקורות

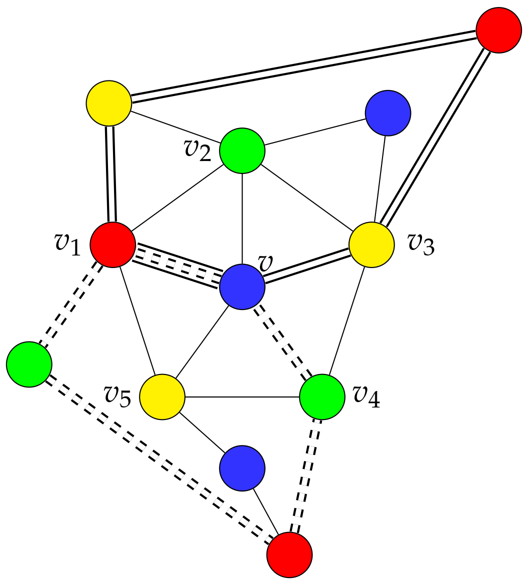
על משפט ארבעת הצבעים ראו [55] ,[49]. ההוכחה של משפט חמשת הצבעים לקוחה מ-[54] ,[1]. [16] מביא הוכחות רבות לנוסחת Euler. השגיאה בהוכחה של Kempe מתוארת ב-[46].



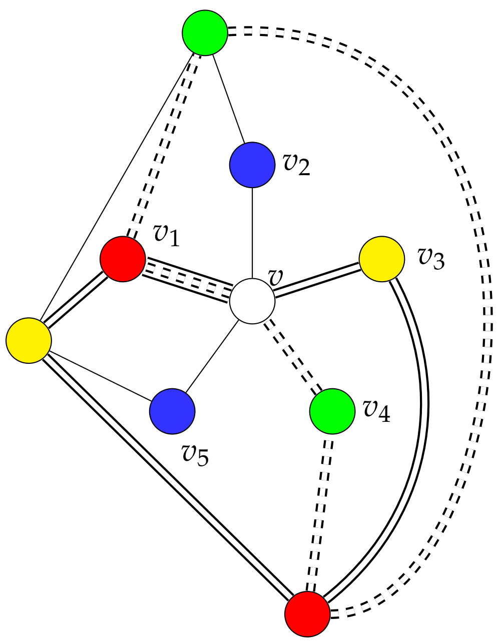
איור 4.10: הוכחת משפט חמשת הצבעים



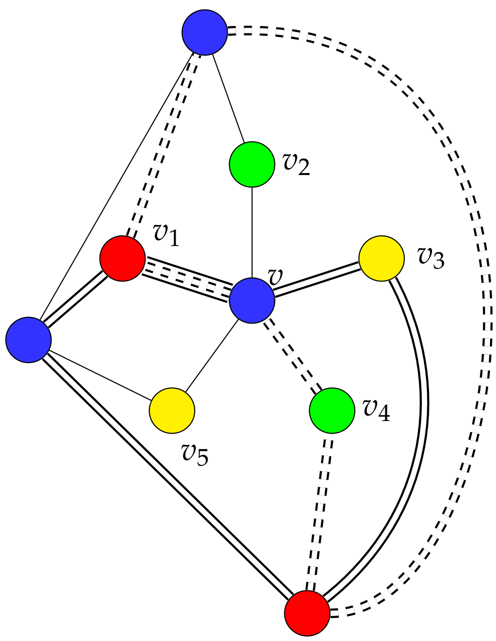
איור 4.11(א) שרשראות Kempe ירוק-כחול וכחול-צהוב



איור 4.11(ב) החלפת הצבעים של שתי שרשראות Kempe



איור 4.12(א) לשרשראות אדום-צהוב ואדום-ירוק צמתים אדומים משותפים



איור 4.12(ב) החלפת הצבעים גורמת לצמתי הכחולים להיות קשורים

פרק 5

איך לשמור על מוזיאון

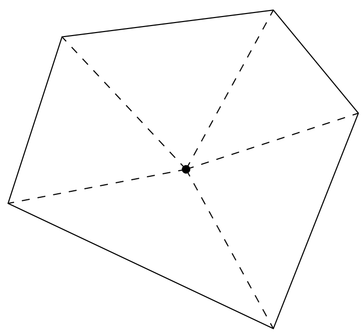
ב-1973 Victor Klee שאל כמה שומרים נחוצים כדי לראות את כל הקירות של מוזיאון. אם הקירות של המוזיאון מהווים מצולע משוכלל או אפילו מצולע קמור, אפשר להסתפק בשומר אחד (איור 5.1).

מה עם מוזיאון עם קירות בצורה של מסור (איור 5.2). וודא על ידי ספירה שיש 15 קירות. כל "שן" מגדירה משולש שמסומן באפור באיור 5.3. שומרת הניצבת במקום כלשהו בתוך אחד המשולשים יכולה לראות את כל הקירות של אותו משולש (חיצים אדומים).

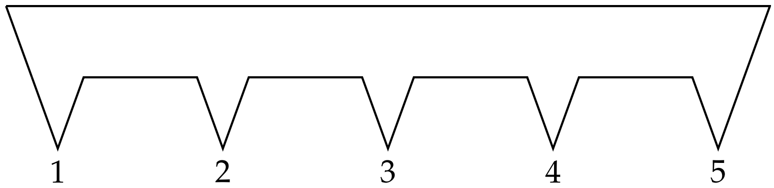
אם השומרת ניצבת בקירבת הקיר העליון היא יכולה לראות את כל הקירות האופקיים (חצים כחולים באיור 5.4). מכאן שחמש שומרות מספיקות כדי לראות על כל הקירות. בגלל שהמשולשים לא נחתכים שומרת במשולש אחד לא יכולה לראות את כל הקירות של משולש אחר (חץ ירוק) ולכן חמש שומרות נחוצות.

ניתן להכליל את הדוגמה באיור 5.2 ולהראות ש-$n/3$ שומרות נחוצות. שאר הפרק מוקדש להוכחה ש-$n/3$ שומרות מספיקות לשמור על כל מוזיאון.

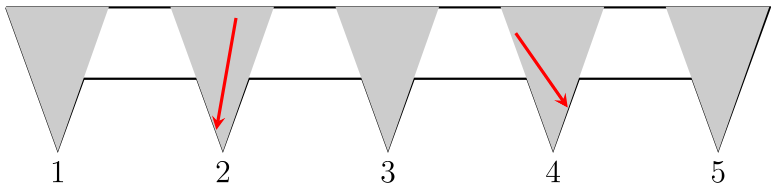
סעיף 5.1 מוכיח שניתן לצבוע כל מצולע מתולת (triangulated) בשלושה צבעים. נשתמש במשפט זה בסעיף 5.2 כי להוכיח ש-$n/3$ שומרות מספיקות. סעיף 5.3 משלים את ההוכחה ומראה שניתן לתלת כל מצולע.



איור 5.1: מוזיאון שקירותיו מרכיבים מצולע קמור



איור 5.2: מוזיאון שקירותיו אינה מרכיבכים מצולע קמור



איור 5.3: ראות בתוך כל "שן"

5.1 צביעת מצולעים מתולתים

הגדרה 5.1 **אלכסון** ***(diagonal)*** של מצולע הוא צלע המחברת שני קודקודים והוא אינו אחת מהצלעות (החיצוניות) של המצולע.

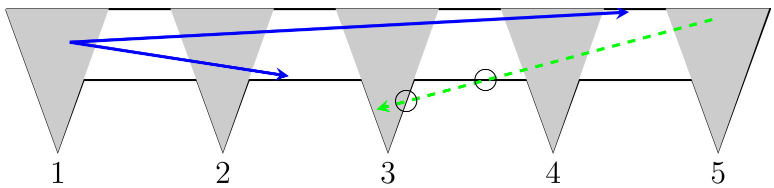
הגדרה 5.2 ניתן **לתלת** *(triangulate)* מצולע אם ניתן לצייר אלכסונים כך שהשטח הפנימי של המצולע מכוסה על ידי משולשים.

משפט 5.1 ניתן לתלת כל מצולע.

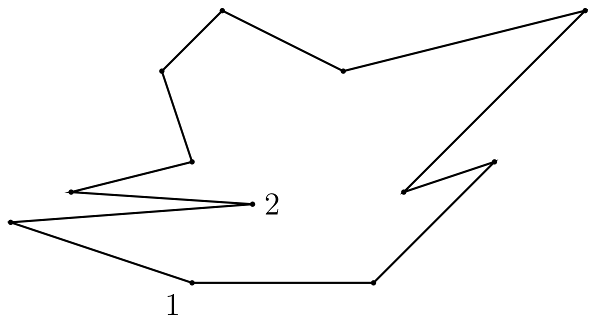
אנו דוחים את ההוכחה של משפט 5.1 לשלב מאוחר יותר.

הגדרה 5.3 קודקוד במצולע הוא **קמור** אם הזווית הפנימית שלו פחות מ-180°. קודקוד במצולע הוא **קעור** אם הזווית הפנימית שלו גדולה מ-180°.

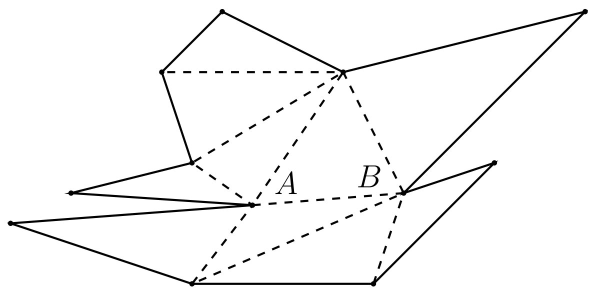
במצולע באיור *5.5* קודקוד 1 קמור וקודקוד 2 קעור.



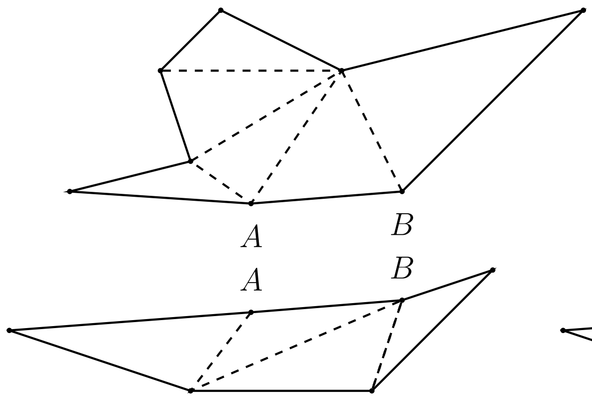
איור 5.4: ראות של הקירות של המוזיאון



איור 5.5: מצולע אם קודקוד קמור (1) וקודקוד קעור (2)



איור 5.6(א) אלכסון שרירותי במצולע



איור 5.6(ב) חלק את המצולע

הגדרה 5.4 ניתן **לצבוע מצולע בשלושה צבעים** אם קיים מיפוי:

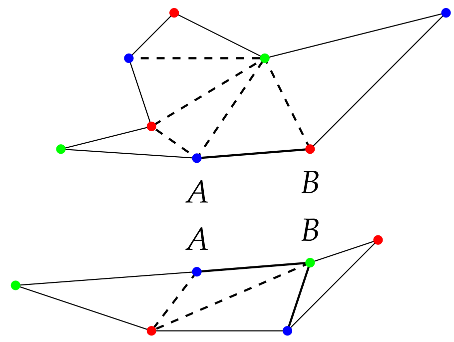
$$c : V \mapsto \{\text{אדום, כחול, ירוק}\},$$

כך ששני הקודקודים של צלע מקבלים צבעים שונים.

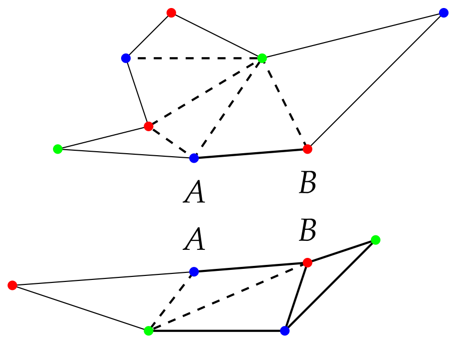
משפט 5.2 ניתן לצבוע מצולע מתולת בשלושה צבעים.

הוכחה באינדוקציה על מספר הקודקודים. ניתן לצבוע משולש בשלושה צבעים. למצולע עם $n > 3$ קודקודים חייב להיות אלכסון. נבחר אלכסון שרירותי $\overline{AB}$ (איור 5.6(א)) ונחלק את המצולע לאורך האלכסון לשני מצולעים קטנים יותר (איור 5.6(ב)). לפי הנחת האינדוקציה ניתן לצבוע כל אחד מהמצולעים הללו בשלושה צבעים (איור 5.7(א)).

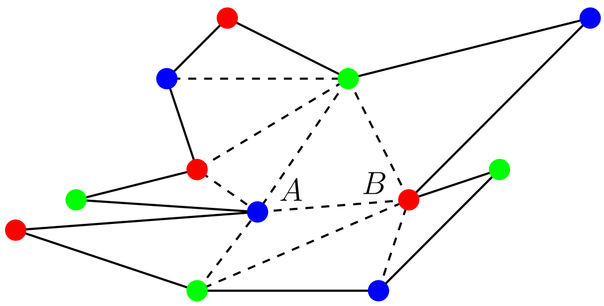
המיפוי של קודקודים לצבעים הוא שרירותי, כך שאם הקודקודים A, B מקבלים צבעים שונים בשני המצולעים, ניתן לשנות את הצבעים באחד מהם כך שהצבעים של A, B זהים בשני המצולעים. למשל, נחליף את הצבעים **אדום** ו-**ירוק** במצולע התחתון (איור 5.7(א)). נהדביק את שני המצולעים כדי לשחזר את המצולע המקורי עם n קודקודים (איור 5.7(ב)). המצולע יהיה צבוע בשלושה צבעים (איור 5.8). □



איור 5.7(א) צבע את שני המצולעים הקטנים עם שלושה צבעים



איור 5.7(ב) החלף את הצבעים של מצולע אחד כדי להתאים לשני



איור 5.8: הדבק את שני המצולעים הקטנים בחזרה

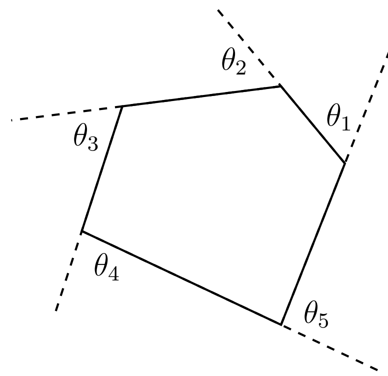
5.2 מצביעת מצולעים לשמירה על מוזיאונים

משפט 5.3 $n/3$ שומרים יכולים לשמור על מוזיאון עם n קירות.

הוכחה לפי משפט 5.1 ניתן לתלת את המצולע ולפי משפט 5.2 ניתן לצבוע את המצולע בשלושה צבעים. שלושת הקודקודים של כל משולש יהיו צבועים בצבעים שונים כדי שכל צבע יופיע באחד הקודקודים של כל משולש. אם צובעים n קודקודים בשלושה צבעים, צבע אחד לפחות, נניח אדום, יופיע לכל היותר $n/3$ פעמים, ובכל משולש חייב להיות קודקוד צבוע אדום. נציב שומרת בfka קודקוד אדום והיא יכולה לראות את הקירות של אותו משולש. כל המשולשים של תילות המצולע כוללים את כל הצלעות של המצולע ולכן $n/3$ שומרות מספיקות כדי לראות את כל הקירות של המוזיאון. □ אם n לא מתחלק ב-3 מספר השומרות הדרושות הוא $\lfloor n/3 \rfloor$, המספר השלם הגדול ביותר פחות או שווה ל-$n/3$. למשל, 4 שומרות מספיקות למוזיאון עם $12, 13, 14$ קירות כי $\lfloor 12/3 \rfloor = \lfloor 13/3 \rfloor = \lfloor 14/3 \rfloor = 4$. למען הפשטות נתעלם מסיבוך זה.

5.3 ניתן לתלת כל מצולע

משפט 5.4 סכום הזוויות הפנימיות של מצולע עם n צלעות הוא $180^\circ(n-2)$.



איור 5.9 : הזוויות החיצוניות של מצולע קמור

הוכחה תחילה נוכיח עבור מצולעים קמורים. נסמן את **הזוויות החיצוניות** ב-θ_i (איור 5.9). אם נסכם את הזוויות החיצוניות נקבל :

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 360^\circ \,.$$

עבור כל זוית חיצונית θ_i נסמן את הזוית הפנימית של אותו קודקוד ב-ϕ_i. נחשב :

$$\begin{aligned}\sum_{1}^{n} \theta_i &= \sum_{1}^{n} (180^\circ - \phi_i) = 360^\circ \\ \sum_{1}^{n} \phi_i &= n \cdot 180^\circ - 360^\circ = 180^\circ (n-2)\,.\end{aligned}$$

אם יש קודקוד קעור (B באיור 5.10), קיים משולש המורכב משני הצלעות שנוגעים בקודקוד הקעור והצלע המסומן בקו מקווקוו. נסכם את הזוויות של המשולש :

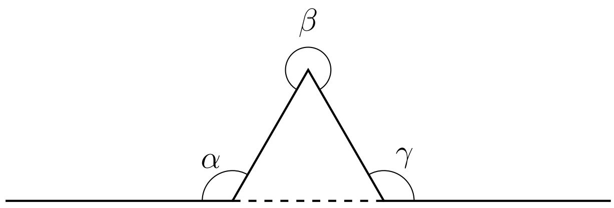
$$\begin{aligned}(180^\circ - \alpha) + (360^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) &= 180^\circ \\ \alpha + \beta + \gamma &= 3 \cdot 180^\circ \,.\end{aligned}$$

סכום הזוויות הפנימיות גדל ב-$\alpha + \beta + \gamma$ ומספר הקודקודים גדל בשלוש ולכן המשוואה במשפט נשמר :

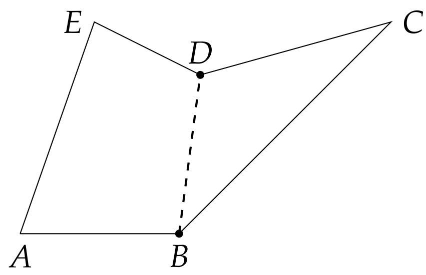
$$\begin{aligned}\sum_{1}^{n} \phi_i + (\alpha + \beta + \gamma) &= 180^\circ (n-2) + 3 \cdot 180^\circ \\ &= 180^\circ ((n+3) - 2)\,.\end{aligned}$$

□

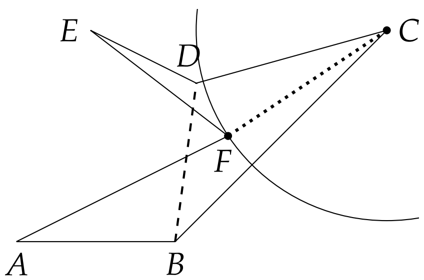
משפט 5.5 חייב להיות לפחות שלושה קודקודים קמורים במצולע.



איור 5.10: קודקוד קעור



איור 5.11(א) תילות כאשר האלכסון נמצא בתוך המצולע



איור 5.11(ב) תילות כאשר האלכסון לא נמצא בתוך המצולע

הוכחה יהי k מספר הקודקודים הקעורים כאשר הזווית הפנימית של כל אחד הוא $180^\circ + \epsilon_i$, $\epsilon_i > 0$. סכום הזוויות הפנימיות של הקודקודים **הקעורים** הוא בוודאי פחות או שווה לסכום **כל** הזוויות הפנימיות:

$$\begin{aligned} k \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i &\leq 180^\circ(n-2) \\ k \cdot 180^\circ &< 180^\circ(n-2) \\ k &< n-2\,. \end{aligned}$$

מכאן שיש לא רק קודקוד אחד אבל לפחות שלושה קודקודים שאינם קעורים. □

הוכחה(משפט 5.1) באינדוקציה על מספר הקודקודים. עבור $n = 3$ אין מה להוכיח. נניח ש-$n > 3$. לפי משפט 5.5 חייב להיות קודקוד קמור C. סמנו את הקודקודים השכנים שלו B, D. אם $\overline{BD}$ נמצא כולו בתוך המצולע (איור 5.11(א)), אזי הוא אלכסון וניתן לחלק את המצולע למשולש $\triangle BCD$ ולמצולע אחר $\overline{ABDE}$ עם צלע $\overline{BD}$. לפי הנחת האינדוקציה ניתן לתלת את המצולע ואז להדביק אותו למשולש $\triangle BCD$ ולקבל תילות של המצולע המקורי.

אם $\overline{BD}$ לא נמצא בתוך המצולע, חייב להיות קודקוד קעור F הקרוב ביותר ל-C (איור 5.11(ב)). $\overline{CF}$ הוא אלכסון המחלק את המצולע לשני מצולעים קטנים יותר $\overline{CFED}$ ו-$\overline{CFAB}$. לפי הנחת האינדוקציה ניתן לתלת אותם ולהדביק אותם אחד לשני. □

מה ההפתעה?

משפט המוזיאון מפתיע כי ההוכחה של מה שנראה כמשפט בגיאומטריה משתמשת בצורה אלגנטית בצביעת גרפים.

מקורות

פרק זה מבוסס על פרק 39 ב-[1].

פרק 6

אינדוקציה

האקסיומה של אינדוקציה מתמטית נמצאת בשימוש נרחב כשיטת הוכחה במתימטיה. פרק זה מציג הוכחות אינדוקטיביות של תוצאות שייתכן שהן לא מוכרות לקורא. נתחיל עם סקירה קצרה של אינדוקציה מתמטית (סעיף 6.1). סעיף 6.2 מביא הוכחות של משפטים על מספרי Fibonacci המוכרים וסעיף 6.3 מביא הוכחות של משפטים על מספרי Fermat. בסעיף 6.4 נציג את פונקציה 91 של John McCarthy. ההוכחה היא לא שגרתית כי היא משתמשת באינדוקציה על מספרים שלמים בסדר הפוך. הוכחת הנוסחה עבור הבעיה של Josephus (יוסף בן-מתתיהו) גם היא לא שגרתית כי היא משתמשת באינדוקציה כפולה על חלקים שונים של ביטוי (סעיף. 6.5).

6.1 האקסיומה של אינדוקציה מתמטית

אינדוקציה מתמטית היא הדרך המובילה להוכיח משפטים עבור קבוצה לא חסומה של מספרים. נעיין במשוואות:

$$1 = 1, \quad 1+2 = 3, \quad 1+2+3 = 6, \quad 1+2+3+4 = 10,$$

נשים לב ש:

$$1 = (1 \cdot 2)/2, \quad 3 = (2 \cdot 3)/2, \quad 6 = (3 \cdot 4)/2, \quad 10 = (4 \cdot 5)/2,$$

ונשער שעבור כל המספרים שלמים $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

עם מספיק סבלנות קל לבדוק את הנוסחה עבור כל ערך של n, אבל איך אפשר להוכיח עבור אינסוף מספרים שלמים חיוביים? כאן נכנסה אינדוקציה מתמטית.

אקסיומה 6.1 יהי $P(n)$ תכונה (כגון משוואה, נוסחה או משפט), כאשר n הוא מספר שלם חיובי. נניח שניתן:

- **טענת הבסיס**: להוכיח ש-$P(1)$ נכונה.
- **צעד אינדוקטיבי**: עבור m שרירותי, להוכיח ש-$P(m+1)$ נכונה בהנחה ש-$P(m)$ נכונה.

אזי $P(n)$ נכונה עבור כל $n \geq 1$. ההנחה ש-$P(m)$ נכונה עבור m שרירותי נקראת **הנחת האינדוקציה**.

הנה דוגמה פשוטה עבור הוכחה באינדוקציה מתמטית.

משפט 6.2 עבור $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

הוכחה טענת הבסיס פשוטה:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}\,.$$

הנחת האינדוקציה היא שמשוואה שלהלן נכונה עבור כל m:

$$\sum_{i=1}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2}\,.$$

הצעד האינדוקטיבי הוא להוכיח את המשפט עבור $m+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1} i &= \sum_{i=1}^{m} i + (m+1)\\ &= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}\,.\end{aligned}$$

לפי האקסיומה של אינדוקציה מתמטית, עבור כל $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

□

הנחת האינדוקציה יכולה לבלבל כי נראה שאנחנו מניחים את מה שרוצים להוכיח. אין כאן הסקת מסקנות מעגלית כי ההנחה היא עבור תכונה של משהו קטן ומשתמשים בהנחה להוכיח תכונה עבור משהו גדול יותר.

אינדוקציה מתמטית היא אקסיומה שאי-אפשר להוכיח. פשוט צריכים לקבל אותה כמו שמקבלים אקסיומות אחרות כגון $x + 0 = x$. כמובן שתוכלו לדחות את האקסיומה אבל אז תצטרכו לדחות חלק גדול מהמתמטיקה המודרנית.

> אינדוקציה מתמטית היא כלל היסק שהוא אחד מאקסיומות Peano לפורמלזציה של המספרים הטבעיים. ניתן להוכיח את האקסיומה המאקסיומה אחרת כגון אקסיומה well ordering, ולהיפך, אבל לא ניתן להוכיח אות מאקסיומות אחרות, פשוטות יותר, של Peano.

6.2 מספרי Fibonacci

מספרי פיבונצ׳י מוגדרים ברקורסיה:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3 \text{ עבור}. \end{aligned}$$

שנים עשר מספרי פיבונצ׳י הראשונים הם: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$.

משפט 6.3 כל מספר פיבונצ׳י רביעי מתחלק ב-3.

דוגמה 6.1 $f_4 = 3 = 3 \cdot 1,\ f_8 = 21 = 3 \cdot 7,\ f_{12} = 144 = 3 \cdot 48$.

הוכחה טענת הבסיס מתקבלת באופן מיידי כי $f_4 = 3$ מתחלק ב-3. הנחת האינדוקציה היא ש-f_{4n} מתחלק ב-3. הצעד האינדוקטיבי הוא:

$$\begin{aligned} f_{4(n+1)} &= f_{4n+4} \\ &= f_{4n+3} + f_{4n+2} \\ &= (f_{4n+2} + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\ &= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\ &= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + (f_{4n+1} + f_{4n}) \\ &= 3f_{4n+1} + 2f_{4n}\,. \end{aligned}$$

$3f_{4n+1}$ מתחלק ב-3 ולפי הנחת האינדוקציה גם f_{4n}, ולכן $f_{4(n+1)}$ מתחלק ב-3. $\square$

משפט 6.4 $f_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

הוכחה טענות הבסיס: $f_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$ ו-$f_2 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$.

הצעד האינדוקטיבי:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^n + f_{n-1} \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4} + 1\right) \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

בגלל ש:

$$\left(\frac{7}{4}+1\right) = \frac{11}{4} = \frac{44}{16} < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2 .$$

□

משפט 6.5 (נוסחת Binet)

$$f_n = \frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\sqrt{5}}, \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \; \bar{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} .$$

הוכחה נוכיח קודם ש-$\phi^2 = \phi + 1$:

$$\begin{aligned}
\phi^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} \\
&= \frac{2}{4} + \frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{4}{4} \\
&= \frac{1+2\sqrt{5}}{2} + 1 \\
&= \phi + 1 .
\end{aligned}$$

באופן דומה אפשר להוכיח ש: $\bar{\phi}^2 = \bar{\phi} + 1$.

טענת הבסיס של נוסחת Binet היא:

$$\frac{\phi^1 - \bar{\phi}^1}{\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})/2 - (1-\sqrt{5})/2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 .$$

נניח שהנחת האינדוקציה נכונה עבור כל $k \leq n$. הצעד האינדוקטיבי הוא:

$$\begin{aligned}
\phi^n - \bar{\phi}^n &= \phi^2 \, \phi^{n-2} - \bar{\phi}^2 \, \bar{\phi}^{n-2} \\
&= (\phi+1) \, \phi^{n-2} - (\bar{\phi}+1) \, \bar{\phi}^{n-2} \\
&= (\phi^{n-1} - \bar{\phi}^{n-1}) + (\phi^{n-2} - \bar{\phi}^{n-2}) \\
&= \sqrt{5} f_{n-1} + \sqrt{5} f_{n-2} \\
\frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\sqrt{5}} &= f_{n-1} + f_{n-2} = f_n .
\end{aligned}$$

□

משפט 6.6

$$f_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots .$$

הוכחה נוכיח תחילה את הנוסחה של [Pascal]:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}\\
&= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!}+\frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}\\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

נשתמש גם בשוויון $1 = \frac{k!}{0!(k-0)!} = \binom{k}{0}$ עבור כל $k \geq 1$.

עכשיו אפשר להוכיח את המשפט. טענת הבסיס:

$$f_1 = 1 = \binom{1}{0} = \frac{1!}{0!(1-0)!}.$$

הצעד האינדוקטיבי הוא:

$$\begin{aligned}
f_{n-1}+f_{n-2} &= \binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\binom{n-4}{3}+\cdots\\
&\qquad\qquad\binom{n-2}{0}+\binom{n-3}{1}+\binom{n-4}{2}+\cdots\\
&= \binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-3}{3}+\cdots\\
&= \binom{n}{0}\quad+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-3}{3}+\cdots.
\end{aligned}$$

□

6.3 מספרי Fermat

הגדרה 6.1 מספר פרמה הוא מספר שלם שערכו $2^{2^n}+1$ עבור $n \geq 0$.

חמשת מספרי פרמה הראשונים הם מספרים ראשוניים:

$$F_0 = 3,\quad F_1 = 5,\quad F_2 = 17,\quad F_3 = 257,\quad F_4 = 65537.$$

במאה השבע עשרה המתמיטאי Pierre de Fermat שיער שכל מספרי פרמה הם ראשוניים, אבל כעבור כמאה שנים Leonhard Euler הראה ש :

$$2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297=641\times 6700417\,.$$

מספרי פרמה גדלים מאוד מהר ככל ש-n גדל. ידוע שמספרי פרמה אינם ראשוניים עבור $5\leq n\leq 32$, אבל הפירוק לגורמים של חלק מהמספרים הללו עדיין לא ידוע.

משפט 6.7 עבור $n\geq 2$, הספרה האחרונה של F_n היא 7.

הוכחה טענת הבסיס : $F_2=2^{2^2}+1=17$. הנחת האינדוקציה היא ש-$F_n=10k_n+7$ עבור $k\geq 1$. הצעד האינדוקטיבי הוא :

$$\begin{aligned}F_{n+1}&=2^{2^{n+1}}+1=\left(2^{2^n}\right)^2+1\\&=\left(\left(2^{2^n}+1\right)-1\right)^2+1\\&=\left(2^{2^n}+1\right)^2-2\cdot\left(2^{2^n}+1\right)+1+1\\&=(10k_n+7)^2-2(10k_n+7)+2\\&=100k_n^2+120k_n+37\\&=10(10k_n^2+12k_n+3)+7\\&=10k_{n+1}+7\,.\end{aligned}$$

□

משפט 6.8 עבור כל $n\geq 1$, $F_n=\prod_{k=0}^{n-1}F_k+2$.

הוכחה טענת הבסיס :

$$5=F_1=\prod_{k=0}^{0}F_k+2=F_0+2=3+2\,.$$

הצעד האינדוקטיבי :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n}F_k&=\left(\prod_{k=0}^{n-1}F_k\right)F_n\\&=(F_n-2)F_n\\&=F_n^2-2F_n\\&=\left(2^{2^n}+1\right)^2-2\cdot\left(2^{2^n}+1\right)\\&=2^{2^{n+1}}-1=(2^{2^{n+1}}+1)-2\\&=F_{n+1}-2\\F_{n+1}&=\prod_{k=0}^{n}F_k+2\,.\end{aligned}$$

□

6.4 פונקציה 91 של McCarthy

אינדוקציה מתקשר אצלנו עם הוכחות של תכונות המוגדרות על קבוצת המספרים השלמים החיוביים. כאן נביא הוכחה אינדוקטיבית המבוססת על יחס מוזר כאשר מספרים גודלים הם קטנים ממספרים קטנים. האינדוקציה מצליחה כי התכונה היחידה שנדרשת מהקבוצה היא שקיים סדר לפי פעולה יחס.

נעיין בפונקציה הרקורסיבית שלהלן המוגדר עם מספרים שלמים:

$$f(x) = \text{if } \; x > 100 \; \text{ then } \; x - 10 \; \text{ else } \; f(f(x+11))\,.$$

עבור מספרים גדולים מ-100 חישוב הפונקציה פשוטה ביותר:

$$f(101) = 91,\;\; f(102) = 92,\;\; f(103) = 93,\;\; f(104) = 94\,.$$

מה עם מספרים קטנים או שווים ל-100? נחשב את $f(x)$ עבור מספרים מסויימים כאשר החישוב בכל שורה מסתמכת על השורות הקודמות:

$$\begin{aligned}
f(100) &= f(f(100+11)) = f(f(111)) = f(101) = 91\\
f(99) &= f(f(99+11)) = f(f(110)) = f(100) = 91\\
f(98) &= f(f(98+11)) = f(f(109)) = f(99) = 91\\
&\cdots\\
f(91) &= f(f(91+11)) = f(f(102)) = f(92)\\
&\qquad = f(f(103)) = f(93) = \cdots = f(98) = 91\\
f(90) &= f(f(90+11)) = f(f(101)) = f(91) = 91\\
f(89) &= f(f(89+11)) = f(f(100)) = f(91) = 91\,.
\end{aligned}$$

נגדיר את הפונקציה g:

$$g(x) = \text{if } \; x > 100 \; \text{ then } \; x - 10 \; \text{ else } \; 91\,.$$

משפט 6.9 עבור כל x, $f(x) = g(x)$.

הוכחה ההוכחה באינדוקציה מעל קבוצת המספרים $S = \{x \,|\, x \leq 101\}$ כאשר היחס $\prec$ מוגדר על ידי:

$$x \prec y \;\text{ iff }\; y < x\,.$$

בצד הימני $<$ הוא היחס הרגיל מעל למספרים שלמים. סדר המספרים לפי $\prec$ הוא:

$$101 \prec 100 \prec 99 \prec 98 \prec 97 \prec \cdots\,.$$

יש שלושה מקרים בהוכחה. נשתמש בתוצאות של החישובים לעיל:

מקרה 1 $x > 100$. ההוכחה מיידית מההגדרות של f ו- g.

מקרה 2 $90 \le x \le 100$.

טענת הבסיס היא:

$$f(100) = 91 = g(100)\,,$$

כי הראנו ש-$f(100) = 91$ ולפי ההגדרה $g(100) = 91$.

הנחת האינדוקציה היא $f(y) = g(y)$ עבור $x \prec y$, והצעד האינדוקטיבי הוא:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(f(x+11)) && (6.1)\\
&= f(x+11-10) = f(x+1) && (6.2)\\
&= g(x+1) && (6.3)\\
&= 91 && (6.4)\\
&= g(x)\,. && (6.5)
\end{aligned}$$

משוואה 6.1 נכונה מההגדרה של f כי $100 \le x$. השוויון בין משוואה 6.1 לבין משוואה 6.2 נכון מההגדרה של f, כי $90 \ge x$ ולכן $100 > x+11$. השוויון בין משוואה 6.2 ומשוואה 6.3 נובע מהנחת האינדוקציה $100 \le x$ ולכן $101 \le x+1$ שממנו אפשר להסיק ש-$x+1 \in S$ ו-$x \prec x+1$. השוויון בין המשוואות 6.3, 6.4, 6.5 נכון מההגדרה של g ו-$101 \le x+1$ ולכן $x \le 100$.

מקרה 3 $x < 90$.

טענת הבסיס היא $f(89) = f(f(100)) = f(91) = 91 = g(89)$ לפי ההגדרה של g כי $89 \le 100$.

הנחת האינדוקציה היא $f(y) = g(y)$ עבור $x \prec y$ והצעד האינדוקטיבי הוא:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(f(x+11)) && (6.6)\\
&= f(g(x+11)) && (6.7)\\
&= f(91) && (6.8)\\
&= 91 && (6.9)\\
&= g(x)\,. && (6.10)
\end{aligned}$$

משוואה 6.6 נכונה לפי ההגדרה של f ו-$x < 90 \le 100$. השוויון בין המשוואות 6.6 ו-6.7 נובע מהנחת האינדוקציה $x < 90$ ולכן $x+11 < 101$ שממנו נובע $x+11 \in S$ ו-$x \prec x+11$. השוויון בין המשוואות 6.7 ו-6.8 נכון לפי ההגדרה של g ו-$x+11 < 101$. לבסוף, כבר הוכחנו ש-$f(91) = 91$ ולפי ההגדרה $g(x) = 91$ עבור $x < 90$. □

6.5 בעיית Josephus

יוסף בן מתתיהו (Titus Flavius Josephus) היה מפקד העיר יודפת בזמן המרד הגדול נגד הרומאים. הכוח העצום של הצבא הרומי מחץ את הגנת העיר ויוסף מצא מקלט במערה עם חלק מאנשיו

שהעדיפו להתאבד ולא להיהרג או ליפול בשבי הרומאים. לפי מה שיוסף סיפר הוא מצא דרך להציל את עצמו, נשבה והפך למשקיף עם הרומאים ואחר כך כתב היסטוריה של המרד. נציג את הבעיה הקרויה על שמו כבעיה מתמטית מופשטת.

הגדרה 6.2 (בעיית Josephus) נסדר את המספרים $1,\ldots,n+1$ במעגל. נמחק כל מספר ה-q מסביב למעגל $q,2q,3q,\ldots$ (מודולו $n+1$) עד שרק מספר אחד m נשאר. $J(n+1,q)=m$ הוא **מספר Josephus** עבור $n+1$ ו-q.

דוגמה 6.2 יהי $n+1=41$ ו-$q=3$. נסדר את המספרים במעגל:

$\rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	$\downarrow$
$\uparrow$	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22		$\leftarrow$

תוצאת הסבב הראשון של המחיקות היא:

$\rightarrow$	1	2	$\cancel{3}$	4	5	$\cancel{6}$	7	8	$\cancel{9}$	10	11	$\cancel{12}$	13	14	$\cancel{15}$	16	17	$\cancel{18}$	19	20	$\cancel{21}$	$\downarrow$
$\uparrow$	41	40	$\cancel{39}$	38	37	$\cancel{36}$	35	34	$\cancel{33}$	32	31	$\cancel{30}$	29	28	$\cancel{27}$	26	25	$\cancel{24}$	23	22		$\leftarrow$

לאחר השמטת המספרים המחוקים נקבל:

1	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17	19	20
22	23	25	26	28	29	31	32	34	35	37	38	40	41

תוצאת הסבב השני של המחיקות היא (כאשר מתחילים מהמחיקה האחרונה 39):

$\cancel{1}$	2	4	$\cancel{5}$	7	8	$\cancel{10}$	11	13	$\cancel{14}$	16	17	$\cancel{19}$	20
22	$\cancel{23}$	25	26	$\cancel{28}$	29	31	$\cancel{32}$	34	35	$\cancel{37}$	38	40	$\cancel{41}$

נמשיך למחוק כל מספר שלישי עד שרק אחד נשאר:

2	4	$\cancel{7}$	8	11	$\cancel{13}$	16	17	$\cancel{20}$	22	25	$\cancel{26}$	29	31	$\cancel{34}$	35	38	$\cancel{40}$
2	4	$\cancel{8}$	11	16	$\cancel{17}$	22	25	$\cancel{29}$	31	35	$\cancel{38}$						
2	4	$\cancel{11}$	16	22	$\cancel{25}$	31	35										
$\cancel{2}$	4	16	$\cancel{22}$	31	35												
$\cancel{4}$	16	31	$\cancel{35}$														
$\cancel{16}$	31																
31																	

מכאן ש-$J(41,3)=31$.

הקורא מוזמן לבצע את החישוב עבור מחיקת כל מספר שביעי ממעגל של 40 ולבדוק שהמספר האחרון הוא 30.

משפט 6.10 $J(n+1,q)=(J(n,q)+q) \pmod{n+1}$.

הוכחה המספר הראשון שנמחק בסבב הראשון הוא מספר ה-q והמספרים שנשארים לאחר המחיקת הם n המספרים:

$$1 \quad 2 \quad \ldots \quad q-1 \quad q+1 \quad \ldots \quad n \quad n+1 \pmod{n+1}.$$

נמשיך ונחפש את המחיקה הבאה שמתחילה עם $q+1$. מיפוי של $n,\ldots,1$ אל סדרה זו נותן:

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 2 & \ldots & n-q & n+1-q & n+2-q & \ldots & n-1 & n & \pmod{n+1} \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
q+1 & q+2 & \ldots & n & n+1 & 1 & \ldots & q-2 & q-1 & \pmod{n+1}.
\end{array}$$

זיכרו שכל החישובים הם מודולו $n+1$:

$$\begin{aligned}
(n+2-q)+q &= (n+1)+1 &&= 1 &&\pmod{n+1} \\
(n)+q &= (n+1)-1+q &&= q-1 &&\pmod{n+1}.
\end{aligned}$$

זאת בעיה Josephus עבור n מספרים, פרט לעובדה שהמספרים מוזזים ב-q. מכאן ש:

$$J(n+1,q) = (J(n,q)+q) \pmod{n+1}.$$

$\square$

משפט 6.11 עבור $n \geq 1$ קיימים מספרים $a \geq 0, 0 \leq t < 2^a$ כך ש-$n = 2^a + t$.

הוכחה נוכיח את המשפט באמצעות אלגוריתם החילוק עם המחלקים $\ldots,2^4,2^2,2^1,2^0$, אבל קל יותר לראות מהייצוג הבינרי של n. קיימים a ו-$b_{a-1}, b_{a-2}, \ldots, b_1, b_0$, כך שעבור כל i, $b_i = 0$ או $b_i = 1$, ניתן לבטא את n כ:

$$\begin{aligned}
n &= 2^a + b_{a-1}2^{a-1} + \cdots + b_0 2^0 \\
n &= 2^a + (b_{a-1}2^{a-1} + \cdots + b_0 2^0) \\
n &= 2^a + t, \quad \text{כאשר } t \leq 2^a - 1.
\end{aligned}$$

$\square$ כעת נוכיח שקיים ביטוי סגור פשוט עבור $J(n,2)$.

משפט 6.12 עבור $n = 2^a + t$, $a \geq 0, 0 \leq t < 2^a$, $J(n,2) = 2t+1$.

הוכחה לפי משפט 6.11 ניתן לבטא את n כפי שרשום שם. ההוכחה ש-$J(n,2) = 2t+1$ היא על ידי אינדוקציה כפולה, תחילה על a אחר כך על t.

אינדוקציה ראשונה

טענת בסיס: נניח ש-$t = 0$ כך ש-$n = 2^a$. יהי $a = 1$ כך ששני המספרים הראשונים במעגל הם $1,2$. אבל $q = 2$ ולכן המספר השני יימחק והמספר שנשאר הוא 1 ומכאן ש-$J(2^1,2) = 1$.

הנחת האינדוקציה היא $J(2^a,2) = 1$. מהו $J(2^{a+1},2)$? בסבב הראשון מוחקים את כל המספרים הזוגיים:

$$1 \quad \cancel{2} \quad 3 \quad \cancel{4} \quad \ldots \quad 2^{a+1}-1 \quad \cancel{2^{a+1}}.$$

כעת נשארו 2^a מספרים:

$$1 \quad 3 \quad \ldots \quad 2^{a+1}-1.$$

לפי הנחת האינדוקציה $J(2^{a+1},2) = J(2^a,2) = 1$ ולכן לפי אינדוקציה $J(n,2) = 1$ כאשר $n = 2^a + 0$.

אינדוקציה שניה

הוכחנו ש-$J(2^a + 0, 2) = 2 \cdot 0 + 1$, טענת הבסיס של האינדוקציה השניה.

הנחת האינדוקציה היא $J(2^a + t, 2) = 2t + 1$. לפי משפט 6.10:

$$J(2^a + (t+1), 2) = J(2^a + t, 2) + 2 = 2t + 1 + 2 = 2(t+1) + 1 . \qquad \square$$

קיים אלגוריתם פשוט לחישוב $J(n,2)$ שמבוסס על משפטים 6.11 ו 6.12. מההוכחה של משפט 6.11:

$$n = 2^a + t = 2^a + \left(b_{a-1}2^{a-1} + \cdots + b_0 2^0\right),$$

כך ש-$t = b_{a-1}2^{a-1} + \cdots + b_0 2^0$. פשוט נכפיל ב-2 (על ידי הזזה שמאלה של ספרה אחת) ונוסיף 1. לדוגמה, $n = 41 = 2^5 + 2^3 + 2^0 = 101001$ ולכן $J(41,2) = 2t + 1$ ובסימון בינרי:

$$\begin{aligned} 41 &= 101001 \\ 9 &= 01001 \\ 2t+1 &= 10011 = 16 + 2 + 1 = 19 . \end{aligned}$$

הקורא מוסמן לבדוק את התוצאה על ידי מחיקת כל מספר שני במעגל $41, \ldots, 1$.

קיים ביטוי סגור עבור $J(n,3)$ אבל הוא מאוד מסובך.

מה ההפתעה?

אינדוקציה היא אחת ששיטות ההוכחה החשובות ביותר במתמטיקה מודרנית. מספרי Fibonacci מאוד ידועים ומספרי Fermat קלים להבנה. הופתעתי לגלות כל כך הרבה נוסחאות שלא היכרתי (כגון משפטים 6.3 ו- 6.4) שניתנות להוכחה באינדוקציה. פונקציה 91 של McCarthy התגלתה בהקשר של מדעי המחשב למרות שהיא פונקציה מתמטית. מה שמפתיעה איננה הפונקציה עצמה אלא האינדוקציה המוזרה כאשר $97 \prec 98$. ההפתעה בבעיית Josephus היא באינדוקציה הדו-כיוונית בהוכחה.

מקורות

ניתן למצוא הצגה נרחבת של אינדוקציה ב-[21]. ההוכחה של פונקציה 91 של McCarthy נמצאת ב-[30] שמייחס אותה ל-Rod M. Burstall. ההצגה של בעיית Josephus מבוססת על פרק 17 של [21] שגם מביא את הרקע ההיסטורי ובעיות מעניינות אחרות כגון הילדים המרוחים בבוץ, המטבע המזוייפת, והאגורות בקופסה. חומר נוסף על בעיית Josephus ניתן למצוא ב-[44, 58].

פרק 7

פתרון משוואות ריבועיות

Poh-Shen Loh הציע שיטת למצוא פרתונות למשוואות ריבועית המבוססת על היחס בין המקדמים של הפולינום הריבועי לבין שורשיו. סעיף 7.1 סוקר את השיטות הרגילות למצוא פתרונות למשוואות ריבועיות וסעיף 7.2 מנסה לשכנע את הקורא שהשיטה של Loh הגיונית ומסביר איך לחשב את השורשים. בסעיף 7.3 נדגים את החישוב עבור שני פולינומים ריבועיים וחישוב דומה עבור פולינום ממעלה ארבע. סעיף 7.4 מפתח את הנוסחה הרגילה לחישוב שורשים מהנוסאות של Loh.

אלגברה והסימונים האלגבריים הם פיתוח חדשה יחסית. בתקופות קדומות יותר מתמטיקאים השתמשו כמעט אך ורק בגיאומטריה, ולכן מעניין לעיין בבנייה הגיאומטרית של al-Khwarizmi עבור הנוסחאה למציאת השורשים של משוואה ריבועית (סעיף 7.5). סעיף 7.6 מציג בנייה של ש-Cardano השתמש בה בפיתוח הנוסחאה למציאת השורשים של משוואה ממעלה שלוש.

סעיף 7.8 מציג שיטות גרפיות אחרות למציאת השורשים של משוואות ריבועיות.[1] סעיף 7.9 דן בחישוב נומרי של השורשים של משוואות ריבועיות.

7.1 השיטות המסורתיות לפתרון משוואות ריבועיות

כל תלמיד לומד את הנוסחה למציאת השורשים של משוואה ריבועית $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

נגביל את עצמנו למשוואות שהמקדם הראשון הוא אחד, כי תמיד אפשר לחלק ב-a. השורשים של $x^2 + bx + c = 0$ הם :

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}\,. \tag{7.1}$$

שיטה נוספת למציאת שורשים של משוואות ריבועיות היא לפרק את הפולינום הריבועי. לעתים קל לפרק את הפולינום :

[1] קריאת פרק 11 היא דרישת קדם להבנה מליאה של השיטות הללו.

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0\,. \tag{7.2}$$

קשה הרבה יותר לפרק את הפולינום:

$$x^2 - 2x - 24 = (x - r_1)(x - r_2) = 0\,,$$

כי יש לבדוק מספר רב של זוזות שורשים האפשריים:

$$(\pm 1, \mp 24)\,, (\pm 2, \mp 12)\,, (\pm 3, \mp 8)\,, (\pm 4, \mp 6)\,.$$

7.2 הקשר בין המקדמים לשורשים

משפט 7.1 אם r_1, r_2 הם השורשים של $x^2 + bx + c$ אזי:

$$(x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = x^2 + bx + c\,,$$

ולכן, גם אם ערכם של השורשים לא ידועים, כן ידוע ש:

$$r_1 + r_2 = -b\,, \qquad r_1 r_2 = c\,. \tag{7.3}$$

למעשה אין מה להוכיח כי התוצאה מתקבלת מהחישוב.

נסתכל על מספר ערכים עבור $-b, r_1, r_2$ ונסמן ב-m_{12} את הממוצע של r_1, r_2:

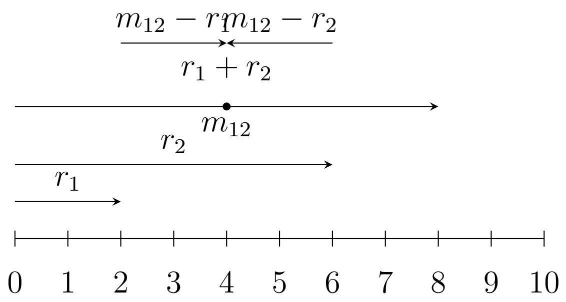
$-b$	r_1	r_2	m_{12}
33	12	21	$16\frac{1}{2}$
33	8	25	$16\frac{1}{2}$
33	1	32	$16\frac{1}{2}$
-4	-16	12	-2
-4	-4	0	-2
-4	-3	-1	-2

עבור כל משוואה ריבועית, הממוצע של שני השורשים קבוע:

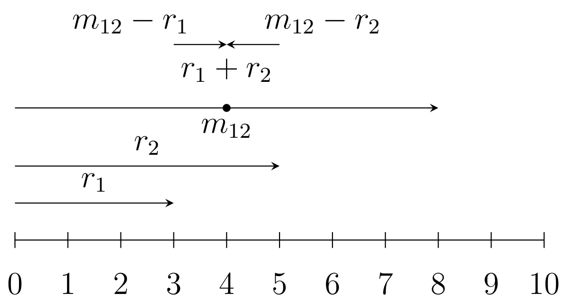
$$m_{1,2} = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{(-b - r_2) + r_2}{2} = \frac{-b}{2} + \frac{-r_2 + r_2}{2} = -\frac{b}{2}\,.$$

יהי s מספר כלשהו, אזי:

$$-b = -b + s + (-s) = \left(\frac{-b}{2} + s\right) + \left(\frac{-b}{2} - s\right) = r_1 + r_2\,.$$



איור 7.1: היחס בין $r_1, r_2 = 2, 6$ והממוצע שלהם $m_{12} = 4$



איור 7.2: היחס בין השורשים $r_1, r_2 = 3, 5$ והממוצע שלהם $m_{12} = 4$

אם שורש אחד נמצא במרחק s מהממוצע, השורש השני נמצא במרחק $-s$ מהממוצע. עבור $r_1, r_2 = 2, 6$, כאשר $m_{12} = 4, s = 2$, מתקבל:

$-b$	r_1	r_2	m_{12}	$m_{12} - r_1$	$m_{12} - r_2$
33	12	21	$16\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$
33	8	25	$16\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{2}$
33	1	32	$16\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{2}$
-4	-16	12	-2	14	-14
-4	-4	0	-2	2	-2
-4	-3	-1	-2	1	-1

איור 7.1 מראה את היחסים הללו. אם נבחר ערכים אחרים $r_1, r_2 = 3, 5$ עבורם $r_1 + r_2 = 8$, $m_{12} = 4$ נשאר ללא שינוי, אבל $s = 1$ משתנה (איור 7.2).

לכאורה ההפרש s שרירותי ב:

$$r_1 = \left(\frac{-b}{2} + s\right), \quad r_2 = \left(\frac{-b}{2} - s\right),$$

אבל קיים אילוץ נוסף $r_1 r_2 = c$ כאשר c הוא הקבוע בפולינום. אם נכפיל את שני ביטויים שמצאנו

עבור r_1, r_2, נוכל לחשב את s ואחר כך את r_1, r_2.

$$\begin{aligned} c &= \left(-\frac{b}{2}+s\right)\left(-\frac{b}{2}-s\right) = \frac{b^2}{4}-s^s \\ s &= \frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}\,. \end{aligned}$$

7.3 דוגמאות לשיטה של Loh

דוגמה 7.1 נשמתש בשיטה על הפולינום $x^2-2x-24$ כאשר $b=-2, c=-24$:

$$\begin{aligned} -24 &= \left(-\frac{-2}{2}+s\right)\left(-\frac{-2}{2}-s\right) \\ -24 &= (1+s)(1-s) \\ s &= 5 \\ r_1 &= 1+5=6 \\ r_2 &= 1-5=-4\,. \end{aligned}$$

בדיקה: $x^2-2x-24 == (x-6)(x-(-4))$.

דוגמה 7.2 נמצא את השורשים של $x^2-83x-2310$.

$$\begin{aligned} -2310 &= \left(\frac{83}{2}+s\right)\left(\frac{83}{2}-s\right) \\ s^2 &= \frac{6889}{4}+2310=\frac{16129}{4} \\ s &= \frac{127}{2} \\ r_1 &= \frac{83}{2}-\frac{127}{2}=-22 \\ r_2 &= \frac{83}{2}+\frac{127}{2}=105\,. \end{aligned}$$

בדיקה: $x^2-83x-2310 = (x+22)(x-105)$.

נשווה את החישוב עם החישוב המשתמש בנוסחה:

$$\begin{aligned} \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2} &= \frac{-(-83)\pm\sqrt{(-83)^2-4\cdot(-2310)}}{2} \\ &= \frac{83\pm\sqrt{16129}}{2}=\frac{83\pm 127}{2} \\ r_1 &= \frac{83-127}{2}=-22 \\ r_2 &= \frac{83+127}{2}=105\,. \end{aligned}$$

דוגמה 7.3 ניתן להכליל את משפט 7.1 לפולינומים מעלות גבוהות יותר. הנה דוגמה מעניינת עבור משוואה ממעלה ארבע *(quartic)* $x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0$. כמו עם משוואות ריבועיות קיימות נוסחאות לפתרון משוואות ממעלה שלוש וממעלה ארבע (אבל לא למעלות גבוהות יותר), אבל הנוסאות די מסובכות.

האם פולינום זה מתפרק לשני פולינומים ריבועיים עם מקדמים שלמים? אם כן, המקדמים של גורם ה-x^3 חייבים להיות **שווים ועם סימנים הפוכים** כי המקדם שלו הוא אפס. מכאן, שהצורה של הפולינומים הריבועיים היא:

$$f(x) = (x^2 - nx + k_1)\,(x^2 + nx + k_2)\,.$$

לאחר ההכפלה נקבל:

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & x^4 \quad +nx^3 \quad +k_2x^2 \\ & \qquad -nx^3 \quad -n^2x^2 \quad -nk_2x \\ & \qquad\qquad +k_1x^2 \quad +nk_1x \quad +k_1k_2\,. \end{aligned}$$

נשווה את המקדמים ונקבל שלוש משוואות עם שלושה נעלמים n, k_1, k_2:

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2) - n^2 &= -10 \\ n(k_1 - k_2) &= -1 \\ k_1k_2 &= 20\,. \end{aligned}$$

אנחנו מחפשים מקדמים שלמים ולכן משתי המשוואות האחרונות נקבל:

$$n = 1,\, k_1 = 4,\, k_2 = 5 \qquad \text{או} \qquad n = 1,\, k_1 = -5,\, k_2 = -4\,.$$

רק $n = 1, k_1 = -5,\ k_2 = -4$ מספקים את המקדם של x^2 במשוואה הראשונה.

$$f(x) = (x^2 - x - 5)\,(x^2 + x - 4)\,.$$

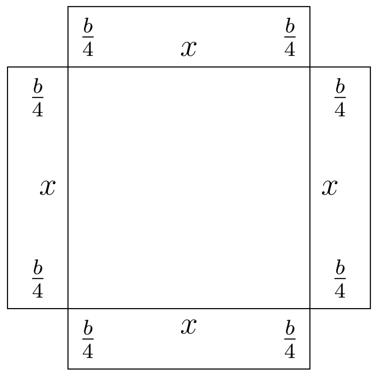
מפתרון של שתי המשוואות הריבועיות הללו נקבל ארבעה פתרונות למשוואה ממעלה ארבע:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \ \text{ or } \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}\,.$$

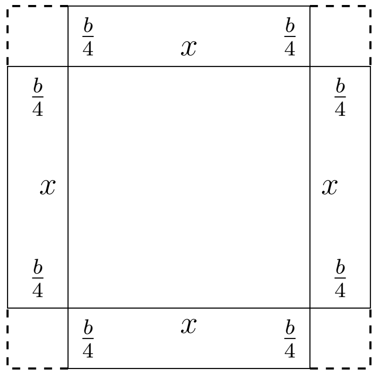
7.4 פיתוח הנוסחה המסורתית

עבור פולינום שרירותי עם מקדם ראשון אפס $x^2 + bx + c$, הנוסחאות של Loh הן:

$$\begin{aligned} c = r_1, r_2 &= \left(\frac{-b}{2} + s\right)\left(\frac{-b}{2} - s\right) = \left(\frac{b^2}{4} - s^2\right) \\ s &= \sqrt{\left(\frac{b^2}{4}\right) - c} \\ r_1, r_2 &= \frac{-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4}\right) - c} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}\,, \end{aligned}$$



איור 7.3(א) $x^2 + 4(b/4)x = x^2 + bx$



איור 7.3(ב) $x^2 + 4(b/4)x + 4(b/4)^2 = x^2 + bx + (b^2/4)$

שהיא הנוסחה המסורתית למצוא שורשים של פולינום. עבור פולינום עם מקדם ראשון a, הציבו במשוואה ופשטו:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ r_1, r_2 &= \frac{-(b/a) \pm \sqrt{(b/a)^2 - 4(c/a)}}{2} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,. \end{aligned}$$

7.5 הפתרון הגיאומטרי של Al-Khwarizmi למשוואות ריבועיות

נכתוב פולינום כ-$x^2 + bx - c$. ניתן למצוא את השורשים על ידי **השלמת הריבוע**:

$$\begin{aligned} x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 &= c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ x &= -\frac{b}{2} \pm \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}\,. \end{aligned}$$

נוסחה זו היא הנוסחה המוכרת למציאת שורשים של משוואה ריבועית, פרט לעובדה של-$4c$ סימן חיובי כי המקדם של הגורם הקבוע הוא שלילי $-c$.

השלמת הריבוע פותחה במאה השמינית על ידי Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi בהקשר גיאומטרי. נתונה המשוואה $x^2 + bx = c$, נניח שקיים ריבוע שצלעו הוא x כך ששטחו x^2. לשטח x^2 נוסיף bx על ידי הוספת ארבעה מלבנים בשטח $bx/4$ שהצלעותיהם הם $b/4$ ו-x (איור 7.3(א)). כעת נשלים את התרשים לריבוע על ידי הוספת ארבעה ריבועים קטנים ששטחם $(b/4)^2$ (איור 7.3(ב)).

לא ניתן בנות את התרשים באיור 7.3(א) כי אנחנו לא יודעים את ערכו של x, אבל השטח של הריבוע הגדול באיור 7.3(ב) הוא:

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = c + \frac{b^2}{4}\,,$$

שאנחנו כן יודעים כי המקדמים b, c נתונים. על ידי בניית התרשים ומחיקת הריבועים הקטנים שצלעותיהם $(b/4)$, עוד ערך ידוע, נקבל קטע קו אורך x.

דוגמה 7.4 נתון $x^2 + 12x = 64$. אזי $c + (b^2/4) = 64 + 36 = 100$ וקל לבנות ריבוע ששטחו 100 כי אורכו של כל צלע הוא 10. נחסיר $(b/4) + (b/4) = 6$, אורכם של הצלעות של הריבועים הקטנים ונקבל $x = 10 - 6 = 4$.

7.6 הבנייה של Cardano לפתרון משוואה ממעלה שלוש

הנוסחה לשורשים של משוואה ממעלה שלוש פורסמה לראשונה במאה ה-16 על ידי Gerolamo Cardano. לא נפתח כאן את הנוסחה, אבל הרעיון הבסיסי מעניין כי הוא מבוסס על בנייה גיאומטרית בדומה לבנייה של al-Khwarizmi. הבנייה מתקבלת בצורה פשוטה מאלגברה. נכפיל ונקבל:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a^3 + b^3) + 3ab(a+b)\,. \tag{7.4}$$

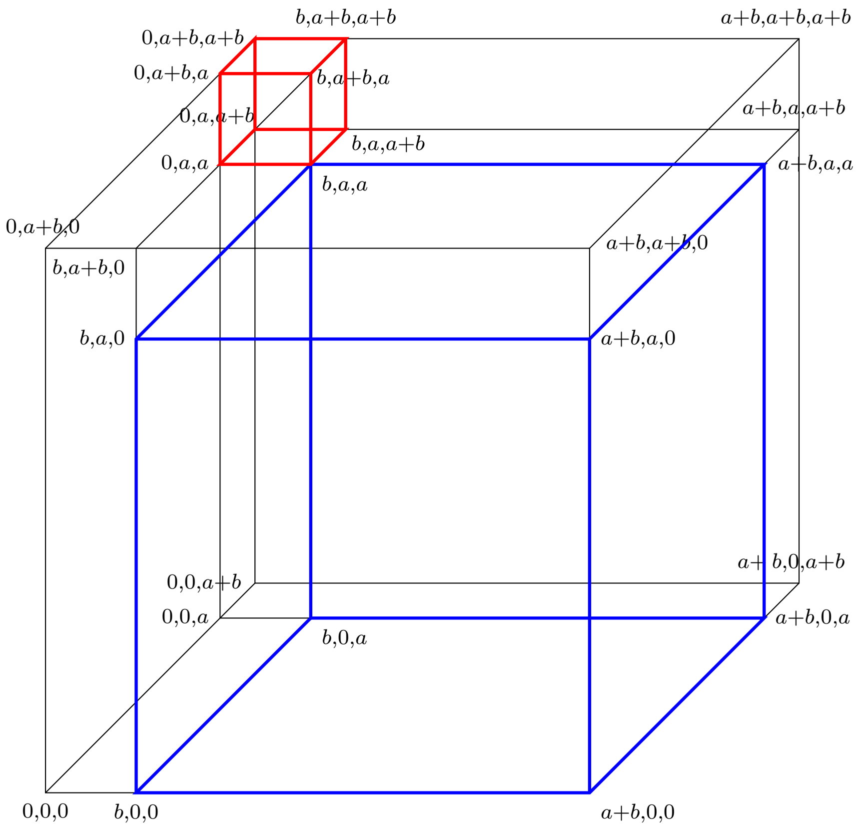
בגיאומטריה, נתחיל עם קוביה שצלעה $a+b$ כך שהנפח שלו $(a+b)^3$. נפרק את הקוביה לחמישה חלקים. שניים הראשונים הם קוביות שצלעיהן a ו-b עם נפח a^3 (כחול) ו-b^3 (אדום), בהתאמה (איור 7.4).

שלושת החלקים האחרים הם קופסאות (המונח הפורמלי הוא cuboid), כל אחת עם צלע באורך $a+b$ המתאים לצלע של הקוביה, צלע אחד באורך a וצלע אחד באורך b, כך שהנפח של כל שלושת הקופסאות הוא $ab(a+b)$. באיור 7.5, קופסה אחת נמצאת בצד השמאלי של הקוביה (כחול), אחת מאחורי הקוביה (אדום) ואחת מעל לקוביה (ירוק). על ידי צירוף כל חמשת הגופים באיור 7.4 ובאיור 7.5 נקבל את משוואה 7.4.

7.7 הם לא נרתעו ממספרים דמיוניים

ההיסטוריה של המתמטיקה מתאפיינת בסדרה של מושגים שתחילה נחשבו כחסרי משמעות, אבל לבסוף הובנו, התקבלו והוכיחו את חשיבותם. "ברור" ש--1, מספר שלילי, חסר משמעות כי מספרים סופרים דברים. "ברור" ש-$\sqrt{2}$, מספר לא רציונלי, חסר משמעות כי מספר הוא יחס בין שני מספרים שלמים. "ברור" ש-$\sqrt{-1}$, השורש של מספר שלילי, חסר משמעות כי אין מספר שהריבוע שלו שלילי.

הבנה של השורשים של מספרים שליליים, שעד היום קוראים להם מספרים **דמיוניים (imaginary)** למרות שהם לא פחות ממשיים ממספרים ממשיים, לא הושגה עד המאה התשע-עשרה. לכן מפתיע שכבר במאה השש-עשרה, Geralamo Cardano ו-Rafael Bombelli סירבו להירתע מהמושג וצעדו את הצעדים הראשונים הקטנים לקראת הבנה המספרים הללו.



איור 7.4: $(a^3+b^3) = (a^3+b^3) + \cdots$

נוכל להשתמש בנוסחה הרגילה (משוואה 7.1) עבור המשוואה הריבועית:

$$x^2 - 10x + 40 = 0\,, \tag{7.5}$$

ונקבל:

$$r_1, r_2 = \frac{10 \pm \sqrt{100-160}}{2} = 5 \pm \sqrt{-15}\,.$$

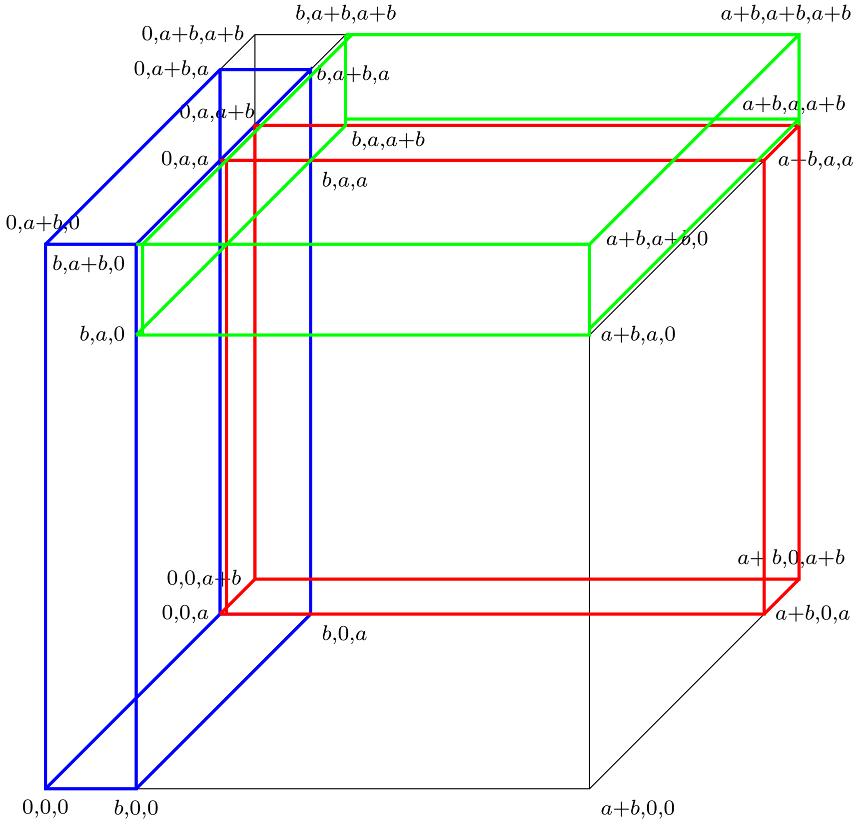
אמנם אין אנו יודעים מהם השורשים של מספרים שליליים ולא את ערכם, אבל כמו Cardano אנו יודעים שלפי משפט 7.1 ש:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= (5+\sqrt{-15}) + (5-\sqrt{-15}) = 10 = -b \\ r_1 r_2 &= (5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = \\ &= 25 - \sqrt{-15}\cdot\sqrt{-15} = 25 - (-15) = 40 = c\,. \end{aligned}$$

שהן המקדמים של המשוואה הריבועית 7.5. די אינטואיטיבית ש-$\sqrt{-15} + (-\sqrt{-15}) = 0$ גם אם אין אנו יודעים כלום על $\sqrt{-15}$, ודי אינטואיטיבית ש-$\sqrt{-15}\cdot -(\sqrt{-15}) = -(-15) =$ 15 גם אם אין אנו יודעים כלום על $\sqrt{-15}$.

נעיין במשוואה ממעלה שלוש:

$$x^3 - 15x - 4 = 0\,. \tag{7.6}$$



איור 7.5: $(a^3+b^3) = \cdots + 3ab(a+b)$

די ברור ש-4 הוא שורש, אבל איך אפשר לחשב אותו? לפי הנוסחה של Cardano השורש הוא:

$$r = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}\,, \tag{7.7}$$

אבל זאת נוסחה די סבוכה שלא נראה שיש קשר בינה לבין 4.

Bombelli גילה אומץ לב וחישוב את החישוב שלהן (ראו משוואה 7.4):

$$\begin{aligned}
(2+\sqrt{-1})^3 &= 8+3\cdot4\sqrt{-1}+3\cdot2(-1)+(-1\sqrt{-1}) = 2+11\sqrt{-1}\\
(2-\sqrt{-1})^3 &= 8-3\cdot4\sqrt{-1}+3\cdot2(-1)-(-1\sqrt{-1}) = 2-11\sqrt{-1}\,,
\end{aligned}$$

ולפי משוואה 7.7:

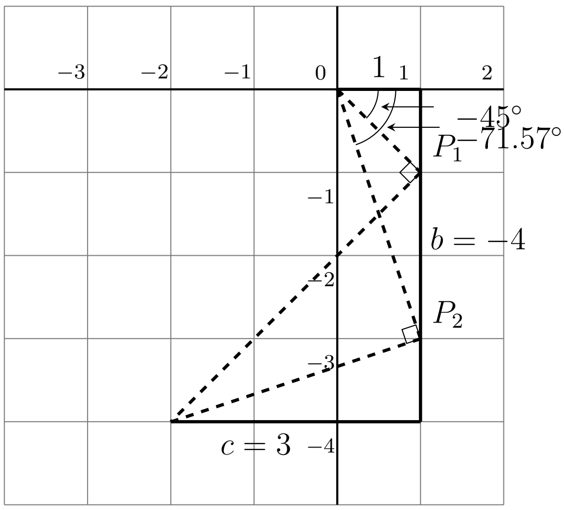
$$\begin{aligned}
r &= \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}\\
&= \sqrt[3]{(2+\sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{-1})^3}\\
&= (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4\,.
\end{aligned}$$

7.8 השיטה של Lill והמעגל של Carlyle

ניתן להשתמש בשיטה של Lill כדי לפתור משוואות ריבועיות.[2] נדגים את השיטה על משוואה 7.2 ששורשיה מתקבלים על ידי פירוק לגורמים:

$$x^2 + bx + c = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)\,.$$

מהשיטה של Lill נקבל את המסלולים באיור 7.6.



איור 7.6: השיטה של Lill עבור $x^2 - 4x + 3$

נבדוק שהזוויות נכונות:

$$-\tan(-45°) = -1, \quad -\tan(-71.57°) \approx -3\,.$$

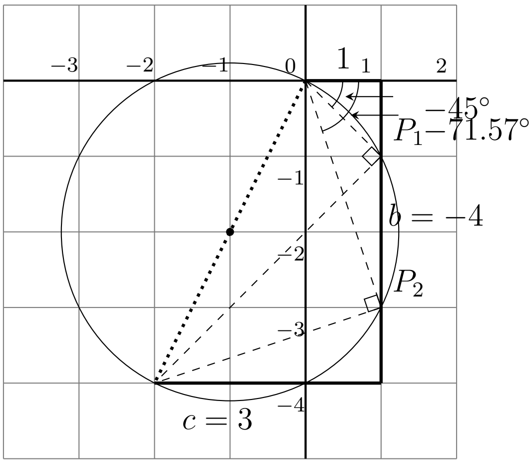
עבור משוואות ריבועיות ניתן למצוא P_1, P_2 שהן נקודות החיתוך של הקו המייצג את המקדם b והמעגל שקוטרו הוא הקו המחבר את נקודת ההתחלה ונקודת הסיום של המסלולים (איור 7.7). כדי שנקודה על הקו b תהיה שורש, השיקוף של הקו בצריך להיות $90°$ ולכן הזווית כלואה על ידי קוטר. ניתן לבדוק באמצעות חישוב. מרכז המעגל הוא $(-1,-2)$, נקודת האמצע של הקוטר. אורך הקוטר הוא:

$$\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}\,,$$

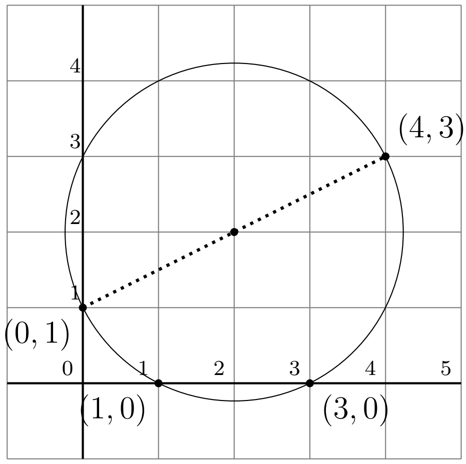
ולכן הריבוע של הרדיוס הוא $5 = \left(\sqrt{20/2}\right)^2$. החיתוך של מעגל זה עם הקו $x = 1$ הוא:

$$\begin{aligned}
(x-(-1))^2 + (y-(-2))^2 &= r^2\\
(x^2+2x+1) + (y^2+4y+4) &= 5\\
y^2 + 4y + 3 &= 0\\
y &= -1,\ -3\,.
\end{aligned}$$

[2] סעיף זה מניח שקראתם על השיטה של Lill בפרק 11.



איור 7.7: בניית מעגל כדי למצוא את השורשים



איור 7.8: השיטה של Carlyle עבור x^2-4x+3

שיטה דומה לפתרון של משוואות ריבועיות היא מעגלי Carlyle שקודמת לשיטה של Lill. נתון משוואה ריבועית x^2-bx+c (שימו לב שסימן המינוס בגורם הליניארי), נבנה את הנקודות $(0,1)$ ו-(b,c), והמעגל שקוטרו הוא הקו המחבר את שתי הנקודות (איור 7.8). נקודות החיתוך שלו עם ציר ה-x (אם הן קיימות) הן השורשים של המשוואה.

במקרה הכללי מרכז המעגל הוא $(b/2,(c-(-1))/2)$ ואורך הקוטר הוא $\sqrt{b^2+(c-1)^2}$, כך שמשוואות המעגל היא:

$$\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\left(y-\frac{c+1}{2}\right)^2=\frac{b^2+(c-1)^2}{4}\,.$$

למשל, אם נציב $b=4, c=, y=0$, נראה ש-$x=1, x=3$ הם השורשים של המשוואה הריבועית.

7.9 חישוב נומרי של שורשים

סטודנטים לומדים חישוב סימבולי של שורשים, נגזרות, וכו׳. היום, רוב החישובים מתבצעים על ידי מחשבים, כך שחישוב סימבולי פחות חשוב. **אנליזה נומרית** היא תחום במתמטיקה ומדעי המחשב בו מפתחים שיטות חישוב מדוייקות ויעילות. האתגר המרכזי היא לטפל בסופיות של ערכים שנשמרים בזיכרון של המחשב. קל לבצע את החישוב:

$$0.12 \times 0.14 = 0.0168$$

אבל כדי לחשב:

$$0.123456789 \times 0.123456789$$

המחשב חייב לשמור שמונה עשרה ספרות, דרישה שאי-אפשר למלא אם תאי הזיכרון במחשב מסוגלים לשמור שש עשרה ספרות בלבד. שגיאה זו נקראת **שגיאת עיגול (round-off error)**.

בעיה חמורה יותר מופיעה כאשר החישובים מבוצעים ב-**נקודה צפה (floating point)**. ברור שלא נחשב את

$$(0.12 \times 10^{-10}) \times (0.14 \times 10^{-8})$$

על ידי רישום כל ספרות האפס. במקום זה, נכפיל את המנטיסות (mantissas) ונחבר את המעריכים (exponents) כדי לקבל 0.0168×10^{-18} שעוברת נירמול ל-0.168×10^{-19} כך שהספרת הערך (most significant) תופיע ליד הנקודה העשרונית. זה מאפשר להשתמש במספר הספרות המירבי בהינתן מנטיסה באורך קבוע. אם המעריך הגבוה ביותר שניתן לשמור הוא -16 פשוט לא ניתן לייצג את המספר בזיכרון. שגיאה זו נקראת **חמיקה של נקודה צפה (floating-point underflow)**.

הנוסחה למציאת השורשים של המשוואה הריבועית $x^2 + bx + c$ היא:

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}\,. \tag{7.8}$$

מה קורה עם $b = 1000$ ו-$c = 4$. השורשים הם:

$$r_1, r_2 = \frac{-1000 \pm \sqrt{1000000 - 16}}{2}\,.$$

בתלות בדיוק של החישובים, אפשר שאחת השורשים כל כך קרובה לאפס שהערך שנשמר הוא אפס. אם נציב אפס במשוואה נקבל את התוצאה המפתיעה $0^2 + b \cdot 0 + 4 = 4 = 0$.

האם יש שיטה טובה יותר? לפי משוואה 7.3:

$$r_1 + r_2 = -b\,, \qquad r_1 r_2 = c\,.$$

אם r_2 ממש קטן יותר מ-r_1, שנסמן $r_1 \gg r_2$, אזי $r_1 \approx -b$ ו-$r_2 \approx -c/b$. טבלה 7.1, שחושבה באמצעות תכנית מחשב, משווה את ערכי השורשים המחשבים לפי הנוסחאות הללו אל הערכים המתקבלים מהנוסחה הרגילה, משוואה 7.8. הערך של c נקבע ל-4 והטבלה מראה את השורשים עבור ערכים הולכים וגדלים של b.

תחילה, הערכים האמיתיים שחושבו באמצעות הנוסחה הרגילה עבור r_2 מדוייקים יותר ($r_2 - r_{2v}$ שלילי) אבל החל מ-$b = 100000$ החישוב שמבוסס על משוואה 7.3 מדוייקת יותר. כך הן ההפתעות של אנליזה נומרית.

טבלה 7.1: שני חישובים של השורשים של משוואה ריבועית. r_1, r_2 הם השורשים שחושבו לפי משוואה 7.8. r_{1v}, r_{2v} הם השורשים שחושבו לפי משוואה 7.3. השגיאות הן $r_i - r_{iv}$. מספרים בנקודה צפה נכתבו כ-$4e-5$ במקום 4×10^{-5} כי תכניות מחשב נכתבים לרוב כסדרה ליניארית של סימנים.

b	r_1	r_{1v}	Error_1	r_2	r_{2v}	Error_2
100	-99.9599	-100	0.0400	-0.04001	-0.04	$-1.6012e-05$
1000	-999.9959	-1000	0.0040	-0.0040	-0.004	$-1.6000e-08$
10000	-9999.9996	-10000	0.0004	-0.0004	-0.0004	$-1.6270e-11$
100000	-99999.9999	-100000	$3.9999e-5$	$-3.9999e-5$	$-4e-5$	$1.0104e-12$
1000000	-999999.9999	-1000000	$4.0000e-6$	$-3.9999e-6$	$-4e-6$	$2.7749e-11$
10000000	-10000000.0	-10000000	$3.9860e-7$	$-3.9953e-7$	$-4e-7$	$4.6261e-10$

מה ההפתעה?

השיטה של Poh-Shen Loh מביא הסתכלות חדשה על היחס בין המקדמים לשורשים שלא רואים כאשר לומדים בעל פה את הנוסחה הרגילה. מה שמפתיע הוא שיחס זה עקרוני בהוכחה האלגברית של Gauss שניתן לבנות מצולע משוכלל עם שבעה עשר צלעות (פרק 16).

עם השליטה המודרנית של שיטות אלגבריות בגיאומטריה, חשוב לזכור שהמצב היה הפוך. כפי שרואים מהבניות של Al-Khwarizmi ו-Cardano, השיטות הגיאומטריות שימשו פעם כדי להוכיח תוצאות באלגברה. Lill ו-Carlyle פיתחו שיטות גיאומטריות לפתרון של משוואות ריבועיות. שיקולים של חישובים נומריים יפתיעו סטודנטים שלא נחשפו קודם לנושא.

מקורות

השיטה של Poh-Shen Loh פרוסמה ב-[28, 29]. הבנייה של Al-Khwarizmi נמצאת ב-[6, פרק 1] וב-[32]. ניתן למצוא את הבנייה של Cardano ב-[6, פרק 1]. ההיסטוריה הצבעונית של הפיתוח של הנוסחה של Cardano מסופרת ב-[53]. תיאור הניסיונות הראשונים לחישוב על מספרים דמיוניים נלקח מ-[6, פרק 2]. [62] מציג את השיטה של Lill והמעגל של Carlyle ביחד עם דיון על חישוב נומרי של השורשים.

פרק 8

תורת Ramsey

תורת Ramsey היא תחום בקומבינטוריקה ששואל שאלות מהצורה: מה הגודל המינימלי עבור קבוצה כך שאם מחלקים אותה לתת-קבוצות, לפחות לתת-קבוצה אחת תהיה תכונה מסויימת? קשה להוכיח תוצאות בתורת Ramsey ויש בעיות פתוחות רבות. בפרק זה נציג מקרים קלים של ארבע בעיות כדי לספק טעימה של תחום מרתק זה: שלשות Schur (סעיף 8.1) שהן שלושות של מספרים שלמים כך ש-$a+b=c$, שלשות Pythagorean (סעיף 8.2) שהן שלשות של מספרים שלמים כך ש-$a^2+b^2=c^2$, הבעיה של van der Waarden (סעיף 8.3) על תכונות של סדרות של מספרים, ותורת Ramsey (סעיף 8.4) על צביעת גרפים. סעיף 8.5 מראה איך ניתן להשתמש בשיטה הסתברותי כדי למצוא חסם תחתון למספרי Ramsey.

הבעיה של שלשות Pythagorean נפתרה לאחרונה בעזרת מחשבים תוך שימוש בשיטה חדשה יחסית הנקראת SAT solving. עבור קוראים המכירים תחשיב הפסוקים בלוגיקה, סעיף 8.6 מביא מבט קצר על השיטה.

סעיף 8.7 מתאר את שלשות Pythagorean כפי שהבבלים הכירו לפני כארבעת אלפים שנים.

8.1 שלשות Schur

הגדרה 8.1 נתונה חלוקה שרירותית של קבוצה של המספרים השלמים:

$$S(n)=\{1,\ldots,n\}$$

לשתי תת-קבוצות זרות S_1,S_2, האם קיימות $\{a,b,c\}\subseteq S_1$ או $\{a,b,c\}\subseteq S_2$ (או שתיהן) כך ש-$a<b<c$ ו-$a+b=c$? אם כן, הקבוצה $\{a,b,c\}$ נקראת ***שלשת Schur***.

דוגמה 8.1 עבור $n=8$, בחלוקה:

$$S_1=\{1,2,3,4\},\ S_2=\{5,6,7,8\}\,, \tag{8.1}$$

הקבוצה S_1 מכילה את שלשת ה-*Schur* $\{1,2,3\}$. אולם החלוקה:

$$S_1'=\{1,2,4,8\},\ S_2'=\{3,5,6,7\}\,, \tag{8.2}$$

אינה מכילה שלשת *Schur* כפי שניתן לראות על ידי בדיקת כל השלשות בכל תת-קבוצה.

משפט 8.1 בכל חלוקה של $S(9) = \{1, \ldots, 9\}$ לשתי תת-קבוצות זרות, לפחות תת-קבוצה אחת מכילה שלשת *Schur*.

כמובן שניתן לבדוק את כל $2^9 = 512$ החלוקות של $S(9)$ לשתי תת-קבוצות זרות, אבל ננסה למצוא הוכחה תמציתית יותר.

הוכחה ננסה לבנות חלוקה **שלא** מכילה שלשת Schur ונראה שבגלל אילוצי הבעיה הדבר בלתי אפשרי. תחילה נשים את 1 ואת 3 ב-S_1. 2 חייב להיות ב-S_2 כי $3 = 2 + 1$ ואנחנו מנסים לבנות חלוקה שלא מכילה שלשת Schur. באופן דומה, 4 חייב להיות ב-S_2 כי $4 = 3 + 1$. נמשיך ונשים את 6 ב-S_1 כי $6 = 4 + 2$ ו-7 ב-S_2 כי $7 = 6 + 1$. אבל $9 = 6 + 3$ ו-$9 = 7 + 2$, ולכן 9 חייב להופיע גם ב-S_1 וגם ב-S_2, סתירה. סדרת ההסקות הללו מוצגת בטבלה שלהלן:

S_1	S_2
$1,3$	
$1,3$	2
$1,3$	$2,4$
$1,3,6$	$2,4$
$1,3,6$	$2,4,7$
$1,3,6,9$	$2,4,7$
$1,3,6,9$	$2,4,7,9$

נחזור לאחור ונחפש חלוקה עם $1,3$ בתת-קבוצות שונות. אם נשים עכשיו את 5 ב-S_2, סדרת הסקות שוב מובילה לסתירה כי 9 חייב להופיע בשתי תת-הקבוצות. מומלץ לקורא להצדיק כל אחת מההסקות בטבלה שלהלן:

S_1	S_2
1	3
1	$3,5$
$1,2$	$3,5$
$1,2,8$	$3,5$
$1,2,8$	$3,5,7$
$1,2,8$	$3,5,7,9$
$1,2,8$	$3,5,6,7,9$
$1,2,8,9$	$3,5,6,7,9$

שוב נחזור לאחור ונשים את 5 ב-S_1, אבל גם זה מוביל לסתירה כפי שאפשר לראות בטבלה שלהלן:

S_1	S_2
1	3
$1, 5$	3
$1, 5$	$3, 4$
$1, 5$	$3, 4, 6$
$1, 2, 5$	$3, 4, 6$
$1, 2, 5$	$3, 4, 6, 7$
$1, 2, 5, 7$	$3, 4, 6, 7$

מכאן שאין חלוקה שאינה מכילה שלשת Schur. □

Issai Schur הוכיח את המשפט:

משפט 8.2 (Schur) לכל $k \geq 2$ קיים n קטן ביותר כך שבכל חלוקה של $S(n)$ ל-k תת-קבוצות זרות לפחות תת-קבוצה אחת מכילה שלשת *Schur*.

8.2 שלשות Pythagorean

הגדרה 8.2 נתונה חלקה שרירותית של קבוצה של המספרים השלמים:

$$S(n) = \{1, \ldots, n\}$$

לשתי תת-קבוצות זרות S_1, S_2, האם קיימים $\{a, b, c\} \subseteq S_1$ או $\{a, b, c\} \subseteq S_2$ (או שתיהן) כך ש-$a < b < c$ ו-$a^2 + b^2 = c^2$? אם כן, הקבוצה $\{a, b, c\}$ נקראת **שלשת** ***Pythagorean***.

דוגמה 8.2 עבור $n = 10$, בחלוקה למספרים זוגיים ואי-זוגיים:

$$S_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \; S_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$

אין שלשת *Pythagorean* ב-S_1 אבל $\{6, 8, 10\}$ ב-S_2 היא שלשת *Pythagorean* כי $6^2 + 8^2 = 10^2$.

Marijn J.H. Heule ו-Oliver Kullmann הוכיחו את המשפטים שלהלן. שיטת ההוכחה מתוארת בסעיף 8.6.

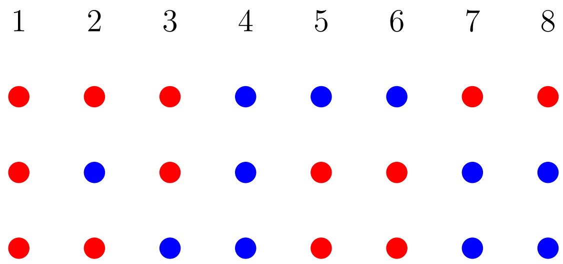
משפט 8.3 לכל $n \leq 7824$ **קיימת** חלוקה של $S(n)$ לשתי תת-קבוצות זרות כך שאין שלשת *Pythagorean* באף אחת משתי הקבוצות.

משפט 8.4 לכל $n \geq 7825$ **בכל** חלוקה של $S(n)$ לשתי תת-קבוצות זרות לפחות תת-קבוצה אחת מכילה שלשת *Pythagorean*.

אין כל אפשרות לבדוק את כל 2^{7825} החלוקות של $S(7825)$. לו יכולנו לבדוק חלוקה אחת כל מיקרושניה, 2^{7825} מיקרושניות $\approx 10^{600}$ שנים, בעוד הגיל המשוערך של היקום הוא רק 10^{10} שנים.

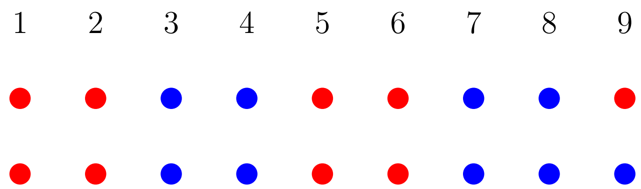
8.3 הבעיה של Van der Waerden

נעיין בסדרות של שמונה נקודות צבעוניות באיור 8.1. בסדרה הראשונה נקודות אדומות נמצאות במקומות $(1,2,3)$ ונקודות כחולות במקומות $(4,5,6)$. בשתיהן המקומות מהווים סדרה חשבונית. באופן דומה, בסדרה השניה המקומות של הנקודות האדומות $(1,3,5)$ מהווים סדרה חשבונית. לעומת זאת, בסדרה השלישית אין קבוצה של שלוש נקודות חד-צבעוניות שמקומותיהן מהווים סדרה חשבונית. השלשות של המקומות של נקודות אדומות $(1,2,5)$, $(1,2,6)$, $(2,5,6)$ אינן סדרות חשבוניות וכנ״ל עבור הנקודות הכחולות.



איור 8.1: בעיית Van der Waerden עבור שמונה נקודות

עבור תשע נקודות **כל** צביעה **חייבת** להכיל סדרה של שלוש נקודות חד-צבעוניות שמקומותיהן מהווים סדרה חשבונית. למשל, נוסיף נקודה אדומה או נקודה כחולה בסוף הסדרה השלישית באיור 8.1 ונקבל את הסדרות בסעיף 8.2. בסדרה הראשונה יש נקודות אדומות במקומות $(1,5,9)$ שהיא סדרה חשבונית, ובסדרה השניה יש נקודות כחולות במקומות $(7,8,9)$ שגם היא סדרה חשבוניות.



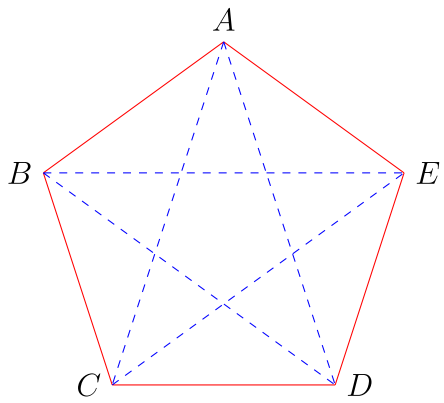
איור 8.2: בעיית Van der Waerden עבור תשע נקודות

Bartel L. Van der Waerden הציג את הבעיה: לכל מספר שלם חיובי k מה המספר הקטן ביותר n כך **שכל** סדרה של n נקודות צבעיניות **חייבת להכיל** סדרה של k נקודות חד-צבעוניות שמקומותיהן מהווים סדרה חשבונית? עבור $k = 3$ ראינו ש-$n = 9$. הוכחת התוצאה הבאה היא קשה הרבה יותר: עבור $k = 4$, $n = 35$.

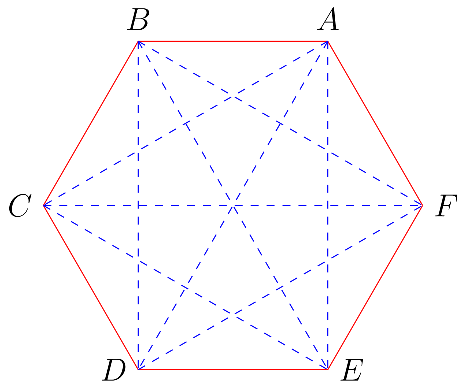
8.4 משפט Ramsey

נצבע עם שני צבעים את הקשתות של K_5, הגרף השלם על 5 צמתים (איור 8.3(א)). אין תת-גרפים חד-צבעוניים K_3 (משולשים) בגרף. איור 8.3(ב) מראה צביעה אחת של K_6 וניתן לראות שיש משולשים

חד-צבעוניים $\triangle ACE$ ו-$\triangle BDF$. בסעיף זה נוכיח מקרה פשוט של משפטו של Frank P. Ramsey על קיומן של תת-קבוצות עם תכונה מסויימת.



איור 8.3(א) צביעה של K_5 עם שני צבעים



איור 8.3(ב) צביעה של K_6 עם שני צבעים

הגדרה 8.3 $R(k)$, ***מספר Ramsey*** עבור k, הוא המספר שלם הקטן ביותר n כך **שבכל** צביעה עם שני צבעים של K_n, הגרף השלם מעל n צמתים, קיים תת-גרף שלם K_k שהוא חד-ציבעונית.

משפט 8.5 (Ramsey) $R(3) = 6$.

הוכחה איור 8.3(א) מראה ש-$R(3) > 5$. כדי להראות ש-$6 \geq R(3)$ ניקח צומת שרירותי v ב-K_6. v מחובר לחמשת הצמתים האחרים וכאשר הקשתות צבועות עם שני צבעים, לפחות שלוש קשתות חד-צבעוניות יהיו מחוברות ל-v.

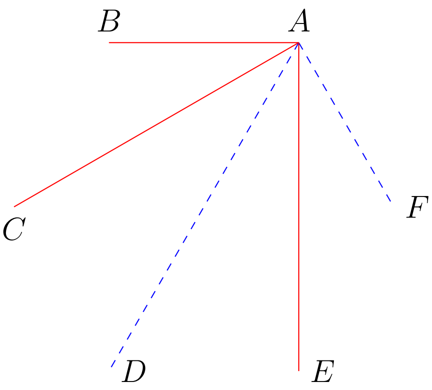
ב-איור 8.4(א), $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AE}$ צבועות באדום. הגרף שלם ולכן כל הצמתים מחוברים, כך שאם אחת מהקשתות $\overline{BC}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$ צבועה באדום, נניח $\overline{BE}$, משולש אדום נוצר. אחרת כל שלושת הקשתות צבועות בכחול והן מייצרות משולש כחול (איור 8.4(ב)). $\square$

ניתן להכליל את המשפט לכל מספר של צבעים וכן לתת-גרפים שאינם בגודל אחיד. $R(r, b, g)$ הוא הגרף השלם הקטן ביותר כך שבכל צביעה עם שלושה צבעים חייב להיות תת-גרפים שלמים עם r קשתות אדומות, b כחולות ו-g ירוקות.

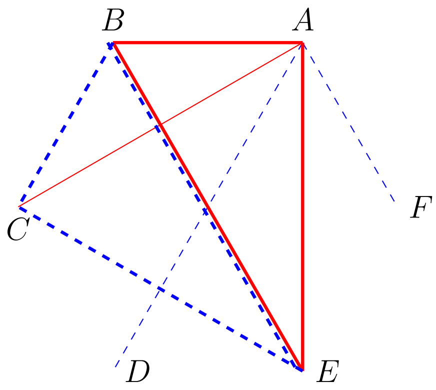
8.5 השיטה ההסתברותית

רק שני מספרי Ramsey לא טרוויאליים ידועים: $R(3) = 6$ ו-$R(4) = 18$. ב-1947, Paul Erdős פיתח את **השיטה ההסתברותית** והשתמש בה כדי להראות חסמים עליונים ותחתונים עבור $R(k)$. מחקרים נוספים שיפרו את החסמים אבל נושא זה הוא עדיין פתוח כי החסמים אינם הדוקים. למשל, הוכח ש-$48 \leq R(5) \leq 43$ ו-$23556 \leq R(10) \leq 798$. בסעיף זה נשתמש בהסתברות פשוטה כדי להוכיח חסם תחתון עבור $R(k)$.

כדי להראות שקיים איבר בקבוצה S עם תכונה A, מספיק להוכיח שההסתברות שלאיבר **אקראי** של התכונה A היא גדול מאפס. חשוב להבין שהשיטה לא בונה איבר עם התכונה. היא רק מוכיחה



איור 8.4(א) צומת אחד של K_6



איור 8.4(ב) משולשים חד-צבעוניים ב-K_6

שקיים איבר העונה על הדרישה. למרות שידוע לנו ממשפט 8.5 ש-$R(3) = 6$, נשתמש בשיטה ההסתברותית כדי להוכיח חסם תחתון עבור $R(3)$.

משפט 8.6 (Erdős) $R(3) > 4$.

הוכחה נתונה צביעה אקראית של K_n בשני צבעים, נעיין בתת-גרף שרירותי K_3, כלומר, משולש שרירותי עם $\binom{3}{2} = 3$ צלעות. ההסתברות שכל הקשתות צבועות באדום היא 2^{-3} כמו גם ההסתברות שכל הקשתות צבועות בכחול. לכן ההסתברות שהמשולש הוא חד-צבעוני היא $2^{-3} + 2^{-3} = 2^{-2} = 1/4$. מספר המשולשים ב-$K_n$ הוא $\binom{n}{3}$, ולכן, $P(n,3)$, ההסתברות שקיים משולש חד-צבעוני בצביעה אקראית של K_n, היא:

$$P(n,3) = \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{4}.$$

אם $P(n,3) < 1$ אזי המשלים שלה $\overline{P}(n,3) = 1 - P$ גדול מ-0, כלומר, ההסתברות שצביעה אקראית של K_n **לא מכילה** משולש חד-צבעונית גדולה מאפס וצביעה אחת כזאת חייבת להתקיים.

הטבלה שלהלן מראה $\overline{P}(n,3)$ עבור מספר ערכים של n, ולכל אחד האם הערך של $\overline{P}(n,3)$ מוכיח שקיים צביעה ללא משולש חד-צבעונית:

n	$\overline{P}(n,3)$	קיימת
3	$3/4$	כן
4	$5/6$	כן
5	$-3/7$	--

□

במבט ראשון התוצאה מוזרה כי איור 8.3(א) מראה שיש צביעה של K_5 ללא משולש חד-צבעונית. אולם, הקריטריון ההסתברותי מספיק ולא הכרחי. מדובר בחסם תחתון שמוכיח ש-$R(n) > 4$, טענה נכונה כי ראינו במשפט 8.5 ש-$R(n) = 6$.

אותה הוכחה תקפה עבור k שרירותי ולכן ההסתברות שקיימת צביעה של K_n ללא גרף שלם K_k חד-צבעוני היא:

$$P(n,k) = \binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}\,.$$

עבור $k = 4$:

$$\begin{aligned}\overline{P}(n,4) &= 1 - \binom{n}{4} \cdot 2^{-5} = \left(32 - \binom{n}{4}\right) \Big/ 32\\ \overline{P}(6,4) &= (32-15)/32 = 17/32\\ \overline{P}(7,4) &= (32-35)/32 = -3/32\,.\end{aligned}$$

מכאן ש-$6 < R(4)$ שהוא קטן הרבה יותר מהערך הידוע $R(4) = 18$.

8.6 SAT Solving

SAT Solving היא שיטה לפתרון בעיות על ידי קידוד הבעיה כנוסחה בלוגיקה (תחשיב הפסוקים) ואז משתמשים בתכנית מחשב כדי לבדוק את ערך האמת של הנוסחה. התקדמות באלגוריתמים ובמימושם מאפשרות פתרונות מעשיים למגוון בעיות. נביא סקירה של SAT Solving ונסביר איך להשתמש בה כדי לפתור את הבעיות המתמטיות שתיארנו בפרק זה. אנו מניחים שלקורא ידע בסיסי בתחשיב הפסוקים כפי שמוצג בהגדרה 8.4.

8.6.1 תחשיב הפסוקים ובעיית SAT

הגדרה 8.4

- **נוסחה** *(formula)* מורכבת מ-**נוסחאות אטומיות** *(atomic formula)* או **אטומים** *(atom)*.
- הנוסחאות מחוברת ב-**אופרטורים** *(operators)*: $\vee$ (*disjunction*, "או"), $\wedge$ (*conjunction*, "וגם"), $\neg$ (*negation*, "לא").
- נוסחה מקבלת משמעות על ידי **פירוש** *(interperation)* שהוא השמה של T או F לכן אטום. חישוב נוסחה בפירוש נותן **ערך אמת** *(truth value)* T או F.
- נוסחה היא **ספיקה** *(satisfiable)* אם ורק אם קיים פירוש שבו ערך האמת שלה הוא T. אחרת, הנוסחה היא **בלתי ספיקה** *(unsatisfiable)*.
- נוסחה היא בצורת CNF *(conjunctive normal form)* אם ורק אם היא מורכת מתת-נוסחאות המחוברות ב-"וגם", כאשר כל תת-נוסחה מורכבת מ-"ליטרלים" (אטומים או שלילה של אטומים) מחוברים ב-"או".

נוסחה זו היא בצורת CNF:

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \;\wedge\; (\neg p \vee r) \;\wedge\; (\neg r) \;\wedge\; (p \vee q \vee \neg r)\,.$$

בעיית SAT היא להכריע אם נוסחה נתונה ב-CNF ספיקה או לא. SAT solver היא תכנית מחשב לפתור בעיות CNF. רוב תכניות ה-SAT solver מבוססות על אלגוריתם DPLL שפותח כבר שנות השישים של המאה העשרים אבל התקדמות מודרניות הביאו לשיפורים מאוד משמעותיים באלגוריתם. בעקבות פיתוח מימושים יעילים של האלגוריתמים הללו SAT solver הפכו להיות כלים חשובים לפתרון של בעיות בהרבה שטחים כולל במתמטיקה.

8.6.2 שלשות Schur

נקדד את בעיית שלשות Schur עבור $S(8)$ כנוסחה ב-CNF. הנוסחה תהיה ספיקה אם ורק אם קיימת חלוקה של S לשתי תת-קבוצות זרות S_1, S_2 כך שלא S_1 ולא S_2 מכילה שלשת Schur.

יש אטום p_i עבור כל אחד מהמספרים $1 \leq i \leq 8$. המשמעות של פירוש לנוסחה היא שהפירוש מציב T ל-p_i אם i נמצא בתת-קבוצה הראשונה S_1, והפירוש מציב F ב-p_i אם i נמצא בתת-קבוצה השניה S_2. כדי לראות שבכל חלוקה אף אחת מתת-הקבוצות לא מכילה שלשת Schur, הפירוש חייב להבטיח **שלכל** שלשת Schur אפשרית לפחות באטום אחד מוצב T ובאטום אחד מוצב F.

למשל, $\{2,4,6\}$ היא שלשת Schur ולכן לפחות מספר אחד חייב להיות ב-S_1 ולפחות אחד ב-S_2. מכאן ש-$p_2 \vee p_4 \vee p_6$ חייב להיות אמת כמו גם $\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6$. קיימות 12 שלשות Schur אפשריות ולכן נוחסת ה-CNF היא:

$$
\begin{array}{lll}
(p_1 \vee p_2 \vee p_3) & \wedge & (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge \\
(p_1 \vee p_3 \vee p_4) & \wedge & (\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge \\
(p_1 \vee p_4 \vee p_5) & \wedge & (\neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5) \wedge \\
(p_1 \vee p_5 \vee p_6) & \wedge & (\neg p_1 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6) \wedge \\
(p_1 \vee p_6 \vee p_7) & \wedge & (\neg p_1 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7) \wedge \\
(p_1 \vee p_7 \vee p_8) & \wedge & (\neg p_1 \vee \neg p_7 \vee \neg p_8) \wedge \\
(p_2 \vee p_3 \vee p_5) & \wedge & (\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5) \wedge \\
(p_2 \vee p_4 \vee p_6) & \wedge & (\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6) \wedge \\
(p_2 \vee p_5 \vee p_7) & \wedge & (\neg p_2 \vee \neg p_5 \vee \neg p_7) \wedge \\
(p_2 \vee p_6 \vee p_8) & \wedge & (\neg p_2 \vee \neg p_6 \vee \neg p_8) \wedge \\
(p_3 \vee p_4 \vee p_7) & \wedge & (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge \\
(p_3 \vee p_5 \vee p_8) & \wedge & (\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8) .
\end{array}
\tag{8.3}
$$

כאשר מפעילים SAT solver על נוסחה זו, הוא עונה שהנוסחה ספיקה בשני הפירושים הללו:

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
F	F	T	F	T	T	T	F
T	T	F	T	F	F	F	T

פירוש אחד הוא עבור החלוקה במשוואה 8.2: $S_1 = \{1,2,4,8\}$, $S_2 = \{3,5,6,7\}$, והפירוש השני הוא עבור החלוקה הסימטרית $S_1 = \{3,5,6,7\}$, $S_2 = \{1,2,4,8\}$.

עבור $S(9)$ יש לצרף ארבע תת-נוסחות עבור השלשות האפשריות הנוספות:

$$\begin{array}{lll}(p_1 \vee p_8 \vee p_9) & \wedge & (\neg p_1 \vee \neg p_8 \vee \neg p_9) \wedge \\ (p_2 \vee p_7 \vee p_9) & \wedge & (\neg p_2 \vee \neg p_7 \vee \neg p_9) \wedge \\ (p_3 \vee p_6 \vee p_9) & \wedge & (\neg p_3 \vee \neg p_6 \vee \neg p_9) \wedge \\ (p_4 \vee p_5 \vee p_9) & \wedge & (\neg p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_9).\end{array}$$

כאשר מפעילים SAT solver על נוסחה זו, הוא עונה שהנוסחה בלתי ספיקה, כלומר, **שאין** חלוקה בה **אין** שלשת Schur triple. כאשר נוותר על השלילה הכפולה נקבל את התוצאה שבכל חלוקה של $S(9)$ קיימת שלשת Schur.

8.6.3 שלשות Pythagorean

Heule ו-Kullmann פתרו את בעיית שלשות Pythagorean על ידי שימוש ב-SAT solver יעילה במיוחד. קיים הבדל מהותי ביעילות כאשר מחפשים חלוקה שאין בה שלשת Pythagorean (צריכים רק חלוקה אחת) לעומת הוכיחה שבכל חלוקה אכן קיימת שלשת Pythagorean (צריך לבדוק את כולן). כדי להראות שעבור כל $S(n)$, $1 \leq n \leq 7824$, קיימת חלוקה ללא שלשה, לקח רק דקה אחת של זמן חישוב, לעומת ההוכחה שבכל חלוקה של $S(7825)$ קיימת שלשה שלקחה כיומיים של חישוב עבור מחשב עם 800 ליבות (יחידות חישוב) שעובדות במקביל, סך הכל $40,000$ שעות חישוב.

השימוש במחשבים במתמטיקה מעלה את השאלה: האם אפשר לסמוך על הוכחה שנוצרה על ידי מחשב? גם הוכחות "רגילות" עלולות להיות מוטעות (סעיף 4.7), אבל הנסיון שלנו עם "באגים" שכיחים בחישובים, ביחד עם חוסר השקיפות של תכניות גדולות, גורמים לנו להיות רגישים יותר לטעויות אפשריות בהוכחות שנוצרו על ידי מחשב.

גישה אחת להעלות את הביטחון בנכונות של הוכחה שנוצרה על ידי מחשב היא לכתוב שתי תכניות או יותר בלתי תלויות, ולהקפיד שהן נכתבו על ידי חוקרים שונים, בשפות תכנות שונות ועבור מחשבים שונים ומערכות הפעלה שונות. זה מקטין את הסיכוי לבאג בחמרה או בתכנה.

ה-SAT solver של Heule ו-Kullmann תיעד את שלבי ההוכחה כדי שניתן לבדוק את הנכונות שלו. גודל התיעוד היה כל כך עצום (200 טרה-בייט) שבני אדם לא יכלים לבדוק אותו. כדי להשוואת גודל זה למשהו מוכר, נציין ש-200 טרה-בייט הוא 200,000 גיגה-בייט, כאשר למחשב שלך יש זיכרון פנימי בסדר גודל של 16 גיגה-בייט ודיסק קשיח של 128 גיגה-בייט. החוקרים כתבו תכנית קטנה לבדוק את נכונות הנתונים בתיעוד. כדי להבטיח את הנכונות של תכנית זו, הם כתבו הוכחה פורמלית בעזרת סייען ההוכחות Coq, שתומך בעבודה של מתמטיקאית ובודק אותה, מבלי להפוך את פיתוח ההוכחה לאוטומטית לחלוטין.

8.6.4 מבט על אלגוריתם DPLL

האלגוריתם הראשון שלומדים עבור SAT solving הוא **טבלאות אמת**. נתונה נוסחה A עם n אטומים שונים בתחשיב הפסוקים, קיימים 2^n פירושים, כי בכל אטום ניתן להציב T או F באופן בלתי תלוי. עבור כל פירוש ניתן לחשב את ערך האמת של A מהגדרת האופרטורים. אולם, בדיקת 2^n פירושים היא מאוד לא יעיל גם עבור n לא גדולים במיוחד.

האלגוריתם DPLL עובד על ידי הצבה של T או F לכל אטום אחד אחרי שני, ולאחר כל הצבה האלרוגיתם מנסה לחשב את ערך האמת של הנוסחה. למשל, עבור הנוסחה $A = p \wedge q \wedge \neg r$, אם מצבים F ב-p אזי ערך האמת של A הוא F ללא קשר להצבות ל-q ו-r, ואין צורך בחישובים נוספים. באופן דומה אם מציבים F ב-r ניתן לחשב שערך האמת של $A = p \vee q \vee \neg r$ הוא T ללא קשר להצבות של q ו-r.

היעילות של DPLL נובעת מהפצת יחידות (unit propagation). נעיין בחלק מהנוסחה לשלשות Schur:

$$\begin{aligned}
&(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge \\
&(p_1 \vee p_3 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge \\
&\cdots \\
&(p_3 \vee p_4 \vee p_7) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge \\
&(p_3 \vee p_5 \vee p_8) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8) \,.
\end{aligned} \tag{8.4}$$

נניח שהצבנו F ל-p_1, p_2. התת-נוסחה הראשונה מצטמצמת לנוחסה **יחידה (unit)** המורכבת מאטום בודד p_3. כדי שהנוסחה תהיה ספיקה אנו **חייבים** להציב T ב-p_3 ואז ערכי האמת של כל התת-נוסחאות שלהלן הם T:

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3),\ (p_1 \vee p_3 \vee p_4),\ (p_3 \vee p_4 \vee p_7),\ (p_3 \vee p_5 \vee p_8)\,.$$

בגלל שערך האמת של $\neg p_3$ הוא F, כל תת-נוסחה המכילה $\neg p_3$ תהיה ספיקה רק אם ליטרל **אחר** בתת-נוסחה מקבל ערך אמת T. ב-$\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8$, חייבים להציב F או ב-p_5 או ב-p_8 כך שערך האמת של $\neg p_5$ או של $\neg p_8$ הוא T. מרגע שהצבנו את F ב-p_1, p_2, הנוסחה במשוואה 8.4 ספיקה אם ורק אם $(\neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_8)$ ספיקה. על ידי **הפצת propagation** של p_3 לכל התת-נוסחאות במשוואה 8.3, הנוסחה מצטמצמת ל:

$$\begin{aligned}
&(p_4 \vee p_5) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_7) \wedge \\
&(p_6 \vee p_7) \wedge (p_6 \vee p_8) \wedge (p_7 \vee p_8) \wedge \\
&(\neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_8)\,.
\end{aligned}$$

הצבה אחת נוספת של F ל-p_4 מביא לפירוש שבו הנוסחה ספיקה ומצאנו את הפירוש לאחר שלוש הצבות בלבד.

8.7 שלושות Pythagorean במתמטיקה בבלית

סעיף זה חורג מתורת Ramsey והוא נכלל כדי לתת טעימה של התיאוריה העשירה של שלשות Pythagorean, וכדי להדגים את עומק הידע המתמטית בעולם העתיק. שלשות Pythagorean היו ידועים במתמטיקה בבלית מאז לפחות 1800 לפני הספירה.

הגדרה 8.5 שלשה פרמיטיבי היא קבוצה של שלושה מספרים שלמים חיוביים $\{a, b, c\}$ כך ש-$a^2 + b^2 = c^2$ ול-a, b, c אין מחלק משותף גדול מ-1.

טבלה 8.1 : שלשות בבליות מלוח Plimpton 322

a	a_f	b	b_f	c	u	u_f	v	v_f
119	$7 \cdot 17$	120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	169	12	$2^2 \cdot 3$	5	5
4601	$43 \cdot 107$	4800	$2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$	6649	75	$3 \cdot 5^2$	32	2^5
12709	$71 \cdot 179$	13500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3$	18541	125	5^3	54	$2 \cdot 3^3$
65	$5 \cdot 13$	72	$2^3 \cdot 3^2$	97	9	3^2	4	2^2

דוגמה $\{3,4,5\}$ היא שלשה Pythagorean פרימיטיבי אבל $\{6,8,10\}$ היא שלשה Pythagorean שאינה פרימיטיבי כי 2 הוא מחלק משותף.

לוח בכתב יתדות הנקרא Plimpton 322 הוא אחד מהממצאים הקדומים ביותר של מתמטיקה בבלית. על הלוח רשומות חמש עשרה שלשות Pythagorean פרימיטיביות הנתנות על ידי הערכים של a ו-c. טבלה 8.1 מציג ארבע שלשות ביחד עם הערך המחושב של b וערכים נוספים שנדון עליהם בהמשך. היסטוריונים של המתמטיקה הציעו מספר דרכים להסביר איך הבבלים מצאו את השלשות. הסבר אחד מציע שהשתמשו בנוסחה של Euclid כדי למצוא את השלשות מזוג של **מספרים מייצרים**.

משפט 8.7 (Euclid) שלשת *Pythagorean* $\{a,b,c\}$ פרימיטיבי אם ורק אם קיימים שני מספרים שלמים חיוביים u, v, הנקראים **מספרים מייצרים**, כך ש :

1. $u > v$
2. שניהם לא אי-זוגיים
3. אין להם מחלק משותף גדול מ-1
4. $\{a,b,c\}$ ו-u, v מקיימים את את היחסים :

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2 .$$

הוכחה חישוב פשוט מראה שאם ניתן לבטא את $\{a,b,c\}$ כפי שדרוש בסעיף 4 אזי הם מהווים שלשת Pythagorean :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 \\ &= u^4 - 2(uv)^2 + v^4 + 4(uv)^2 \\ &= u^4 + 2(uv)^2 + v^4 \\ &= u^2 + v^2 = c^2 . \end{aligned}$$

הוכחת תהכיוון השני קשה יותר ולא נביא אותה כאן. □

אם זה נכון שהבבלים השתמשו בנוסחה של Euclid, נשארת השאלה : איך הם מצאו את המספרים היוצרים u, v?

טבלה 8.2 : שלשות בבליות בבסיס 60

a	c
$\langle 1\rangle\langle 59\rangle$	$\langle 2\rangle\langle 49\rangle$
$\langle 1\rangle\langle 16\rangle\langle 41\rangle$	$\langle 1\rangle\langle 50\rangle\langle 49\rangle$
$\langle 3\rangle\langle 31\rangle\langle 49\rangle$	$\langle 5\rangle\langle 09\rangle\langle 01\rangle$
$\langle 1\rangle\langle 05\rangle$	$\langle 1\rangle\langle 37\rangle$

כל שורה של טבלה 8.1 מציגה את a_f ו-b_f, החלוקה לגורמים של a, b, בהתאמה, כדי להראות שאין להם מחלקים משותפים. הקורא מוזמן לבדוק של-c אין מחלק משותף עם a, b ולכן השלשות פרימיטיביות. המספרים היוצרים u, v והגורמים שלהם u_f, v_f מוצגים גם הם. לא רק שאין להם מחלקים משותפים כפי שנדרש על ידי משפט 8.7, אלא הגורמים היחידים הגדולים מ-1 ב-u ו-v הם חזקות של $2, 3, 5$.

הגדרה 8.6 שלשה בבלית *(Babylonian triple)* היא שלשה *Pythagorean* פרימיטיבי כך שהגורמים הראשונים היחידים של u, v הם $2, 3, 5$.

הסיבה שהבבלים הגבילו את עצמם לגורמים הללו היא שהם השתמשו במספר בבסיס $60 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ sexagesimal שהגורמים הראשונים שלהם הם $2, 3, 5$.

עבור קוראים שלא מכירים בסיסי מספרים לא-עשרוניים, נסקור בקצרה את המושג. "המספר" 12345 הוא קיצור למספר:

$$(1 \times 10^4) + (2 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (5 \times 10^0)\,.$$

מערכת המספרים הללו נקראת **עשרוני**. יש עשר ספרות $0, 1, 2, \ldots, 8, 9$ עבור המקדמים של החזקות והחזקות מסומנות על ידי מיקומם של המקדמים כאשר החזקות עולות מימין לשמאל.

ניתן להציג את אותו מספר בבסיס **בינארי**, בסיס 2:

$$\begin{aligned}12345 &= 8192 + 4096 + 32 + 16 + 8 + 1\\ &= 2^{13} + 2^{12} + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0\\ &= 11000000111001\,.\end{aligned}$$

בסיס נפוץ מדעי המחשב הוא בסיס hexadecimal, בסיס 16. עבור בסיס זה אנחנו צריכים 16 "ספרות" ונהוג להשתמש ב-$0, 1, 2, \ldots, 8, 9, A, B, C, D, E, F$.

בסיס 60 אינו כה זר כפי שאפשר לחשוב. אני מציגים זמן, קואורדינטות גיאוגרפיות וזוויות בבסיס זה. אנו מרגישים נוח לחשב חישובים כגון (1 שעה ו-40 דקות) ועוד (1 שעה ו-30 דקות) שווים ל-(3 שעות ו-10 דקות).

טבלה 8.2 מראה ערכים של a, c שמופיעים בלוח בבסיס 60 כאשר $\langle d\rangle$ מייצג את "הספרה" ה-d עבור $0 \le d < 60$. הקורא מוזמן לבדוק שהערכים הללו זהים לערכים בבסיס עשרוני המופיעים

בטבלה 8.1, למשל:

$$\begin{array}{lllllll}(3 \times 60^2) & + & (31 \times 60^1) & + & (49 \times 60^0) & = & 12709 \\ (5 \times 60^2) & + & (9 \times 60^1) & + & (1 \times 60^0) & = & 18541\end{array}$$

לבבלים לא היו 60 סימנים נפרדים עבור הספרות. הם השתמשו בשיטה מעורבבת כאשר המקדמים הוצגו עם שני סימנים: אחד למקדם העשורים ואחד ליחידים, והחזקות של 60 הוצגו על ידי מקומות המקדמים. אם נשמתש בסימן $\heartsuit$ עבור מקדמי העשורים ובסימן $\diamondsuit$ עבור מקדמי היחידים, המספר העשרוני $2296 = (38 \times 60) + (16 \times 60^0)$ יוצג כ:

$$\heartsuit\heartsuit\heartsuit \; \begin{matrix}\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit \\ \diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\end{matrix} \qquad \heartsuit \; \begin{matrix}\diamondsuit\diamondsuit \\ \diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit\end{matrix} \; .$$

מה ההפתעה?

המשפט של Frank P. Ramsey נראתה בתוצאה לא חשובה בקומבינטוריקה. באופן מפתיע, המשפט הביא לייסוד של תחום חדש ומרתק של מתמטיקה עם בעיות פתוחות רבות. האופי של תורת Ramsey מפתיע גם הוא: אם קבוצה גדולה מספיק אזי קיימות תכונות של סדר בתת-הקבוצות.

היכרתי את תורת Ramsey מהמאמר של Marijn J. H. Heule ו-Oliver Kullmann על שלשות Pythagorean, שהוכחת המשפט דומה להוכחת משפט ארבעת הצבעים: השימוש במשאבי חישוב עצומים שהצליח רק לאחר התקדמות בתיאוריה. מכאן שם המאמר שלהם *The Science of Brute Force*.

בעיות בקומבינטוריקה מבקשות ערכים מספריים, למשל, $R(n)$ הוא מספר שלם. מפתיע ששיטות הסתברויתיות כל כך פוריות במציאת תוצאות בתחום.

יש לנו נטייה לחשוב שבני אדם היום חכמים יותר מבני אדם שחיו לפני אלפי שנים. מפתיע לגלות שלפני אלפי שנים המתמטיקה של הבבלים היתה מתקדמת מספיק כדי לגלות ש:

$$\{12709, 13500, 18541\}$$

היא שלשת Pythagorean.

מקורות

לסקירה של תורת Ramsey ראו [9]. דיון מעמיק נמצא ב-[20]. הסעיף על השיטה ההסתברותית מבוסס על דוגמה 4o של [43] ופרק 4 של [9]. מסד נתונים של מספרי Ramsey נמצא ב-[34].

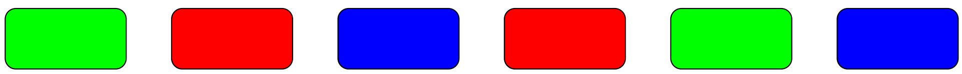
ההוכחה של המשפט על שלשות Pythagorean מתואר לפרטים ב-[23]. ראו [4] למבוא ללוגיקה ו-SAT solving. הארכיב של ה-SAT solver הלימודי שלי [5] מכיל נוסחאות עבור שלשות Schur, מספרי Ramsey ובעיית van der Waerden.

סעיף 8.7 מבוסס על [61], [42]. מספרים בבסיס 60 מתוארים ב-[64].

פרק 9

הבעיה של Langford

המתמטיקאי C. Dudley Langford שם לב שבנו סידר קוביות צבעוניות לפי הסדר באיור 9.1. קוביה אחת נמצאת בין שתי הקוביות האדומות, שתי קוביות בין הקוביות הכחולות, ושלוש קוביות בין הקוביות הירוקות.



איור 9.1: סידור הקוביות לבעיה של Langford

הגדרה 9.1 (הבעיה של Langford $L(n)$**)** נתון שק[1] של מספרים

$$\{1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, n, n\},$$

האם ניתן לסדר אותם כך שלכל $1 \leq i \leq n$,i מספרים נמצאים בין שני המופעים של i?

מאיור 9.1 אנו רואים שעבור $n = 3$ הפתרון הוא 312132.

סעיף 9.1 מנסח מחדש את הבעיה של Langford ביצוג מתמטי שמקל על הפתרון. סעיף 9.2 מאפיין את הערכים n עבורם ניתן למצוא פתרון ומביא שתי הוכחות של המשפט. ההוכחה הראשונה פשוטה יחסית ומשתמשת בשיטה של ספירה כפולה: לספור אותו הערך בשתי דרכים שונות ולהשוות את הנוסחאות שמתקבלת. ההוכחה השנייה היא אינדוקציה יפה אבל "הפנקסנות" בהוכחה מחייבת תשומת לב רבה לפרטים. בסעיף 9.3 נמחשב את הפתרון עבור $L(4)$.

9.1 הבעיה של Langford כבעיית כיסוי

ניתן להציג את הבעיה של Langford באמצעות טבלה. עבור $L(3)$ יש 6 עמודות, אחת לכל מקום בסדרה. השורות מציגות את כל האפשרויות למקם את שני המופעים של אחד המספרים, כלומר,

[1] שק (bag) הוא קבוצה בה איבר יכול להופיע מספר פעמים.

שני המופעים של k חייבים להיות מוקמים עם k עמודות ביניהם. קל לראות שיש ארבעה זוגות של מקומות אפשריים עבור 1, שלושה עבור 2 ושניים עבור 3:

	1	2	3	4	5	6
1	1		1			
2		1		1		
3			1		1	
4				1		1
5	2			2		
6		2			2	
7			2			2
8	3				3	
9		3				3

כדי לפתור את הבעיה, עלינו לבחור שורה אחת עבור המופעים של 1, שורה אחת עבור המופעים של 2 ושורה אחת עבור המופעים של 3, כך שאם נמקם את השורות אחת מעל לשניה, בכל עמודה יש רק מספר אחד.

שורה 9 אינה נחוצה בגלל סימטריה: סדרה המתחילה עם השורה 9 זהה לסדרה מתקבלת מהפיכת הסדר של סדרה המתקבלת כאשר מתחילים עם שורה 8. שורה 8 היא היחידה המכילה את המספר 3 כך שחובה לבחור אותה, והסדרה המתקבלת היא $3XXX3X$. אי אפשר להשתמש בכל שורה שיש לה מספרים בעמודות 1 ו-5, כי מותר רק מספר אחד בכל מקום. נסמן את השורות שניתן לבחור ושלא ניתן לבחור כך: $\cancel{1}, 2, \cancel{3}, 4, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, 8$.

שורה 7 היא השורה האפשרית היחידה עבור 2 כך שחובה לבחור בה והתוצאה היא $3X2X32$. נעדכן את רשימת השורות ונקבל: $\cancel{1}, 2, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, 8$.

כעת, השורה היחידה שניתן לבחור היא 2 ומתקבל הפתרון 312132.

	1	2	3	4	5	6
2		1		1		
7			2			2
8	3				3	

הניתוח הראה שאין פתרון אחר פרט לפתרון הסימטרי שמתקבל אם מלחילים עם שורה 9.

9.2 מהם הערכים של n עבורם ניתן לפתור את בעיית Langford?

משפט 9.1 ניתן למצוא פתרון ל-$L(n)$ אם ורק אם $n = 4k$ או $n = 4k - 1$.

נוכיח רק שאם $n = 4k - 2$ או $n = 4k - 3$ אין פתרון לבעיה. ההוכחה הראשונה מוכיחה שאם יש פתרון ל-$L(n)$ אזי $n = 4k$ או $n = 4k + 3$. ההוכחה השנייה מוכיחה את הפך השלילי: אם $n = 4k + 1$ או $n = 4k + 2$ אזי אין פתרון ל-$L(n)$.

הוכחה(1) אם המופע הראשון של המספר k נמצא במקום i_k, המופע השני נמצא במקום $i_k + k + 1$.
למשל, ב-312132, הפתרון עבור $L(3)$, אם נבחר $k = 2$, $i_k = 3$ ו-6 $= 3 + 2 + 1 = 6$ ... $i_k + k + 1 = 3 + 2 + 1 = 6$.

S_n, סכום המקומות של כל המספרים, הוא:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} i_k + \sum_{k=1}^{n} (i_k + k + 1) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} i_k + \sum_{k=1}^{n} (k+1) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} i_k + \frac{n(n+3)}{2}\,. \end{aligned}$$

אבל S_n הוא פשוט $1 + 2 + 3 + \cdots + 2n$ כך ש:

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{2n(2n+1)}{2}\,.$$

נשווה את שני הביטויים עבור S_n ונקבל:

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{n} i_k + \frac{n(n+3)}{2} &= \frac{2n(2n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^{n} i_k &= \frac{1}{2}\left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+3)}{2}\right) \\ &= \frac{3n^2 - n}{4}\,. \end{aligned}$$

הצד השמאלי חייב להיות מספר שלם כי הוא סכום של מספרים שלמים (מיקומים), ולכן, הצד הימני חייב גם הוא להיות מספר שלם. מתי $3n^2 - n$ מתחלק ב-4? נפרק את $3n^2 - n$ ונקבל $n(3n-1)$.

אם n מתחלק ב-4, המכפלה מתחלקת ב-4.

מתי $3n - 1$ מתחלק ב-4? ניתן לייצג כל מספר שלם n כ-$n = 4i + j$ עבור $j = 0, 1, 2, 3$. אם $3n - 1$ מתחלק ב-4, גם $3(4i + j) - 1 = 12i + 3j - 1$ מתחלק ב-4. ברור ש-$12i$ מתחלק ב-4. עבור $j = \{0, 1, 2, 3\}$, $3j - 1 = \{-1, 2, 5, 8\}$ מתחלק ב-4 אם ורק אם $j = 3$, כלומר, $n = 4i + 3$. □

כדי להכיר את העיקרון של ההוכחה השנייה, נבדוק איך פתרון עבור $n = 4$ ייראה. בטבלאות שלהלן המקומות של 4 הם 1 ו-6 והמקומות של 2 הם 5 ו-8. בשני המקרים, מקום אחד זוגי ומקום אחד אי-זוגי:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
*					*		

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
				*			*

ניקח מספר **זוגי** $k = 2m$. מקום המופע הראשון שלו הוא i ומקום המופע השני שלו הוא $i + k + 1$.
סכום המקומות הוא:

$$i + (i + k + 1) = 2i + 2m + 1 = 2(i + m) + 1\,,$$

שהוא מספר אי-זוגי. כדי שהסכום של שני מספרים יהיה אי-זוגיים, אחד חייב להיות זוגי ואחד אי-זוגי.

נבדוק עכשיו את מקומות המופעים של המספרים האי-זוגיים. מקומות המופעים של 1 הם 2 ו-4, ומקומות המופעים של 3 הם 3 ו-7, שניהם מספרים אי-זוגיים.

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
		*				*	

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
	*		*				

ניקח מספר **אי-זוגי**, $k = 2m + 1$. סכום המקומות הוא:

$$i + (i + k + 1) = 2i + 2m + 1 + 1 = 2(i + m + 1)\,,$$

שהוא מספר זוגי. סכום של שני מספרים הוא זוגי אם ורק אם שניהם זוגיים או שניהם אי-זוגיים.

רשימת המקומות של המספרים בסדרה, $1, 2, \ldots, 2n-1, 2n$, מכילה מספר שווה של מקומות זוגיים ומקומות אי-זוגיים. כאשר מציבים את שני המופעים של מספר בסדרה, הם "תופסים" שני מקומות. כאשר מסיימים להציב את כל המספרים בפתרון, חייבים להיות מספר שווה של מקומות זוגיים ואי-זוגיים "שנתפסו". נגדיר את **הזוגיות** כהפרש בין מספר המקומות הזוגיים שנתפסו לבין מספר המקומות האי-זוגיים שנתפסו. תחילה הזוגיות היא אפס, ואם יש פתרון זוגיות שלו גם כן אפס.

כאשר ממקמים את שני המופעים של מספר זוגי, הם תופסים מקום אחד זוגי (מסומן $+1$) ומקום אחר אי-זוגי (מסומן -1), והזוגיות לא משתנה:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
				-1			$+1$

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
-1					$+1$		

כאשר ממקמים את שני המופעים של מספר אי-זוגי, הזוגיות משתנה ב-$+2$ או -2, ולכן עלינו לייחס את הזוג הזה עם זוג מופעים של מספר אי-זוגי אחר כדי לאפס את שנוי בזוגיות:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
		-1				-1	

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
	$+1$		$+1$				

הראנו שיש פתרון לבעיית Langford אם ורק אם יש מספר זוגי של מספרים אי-זוגיים ב-$\{1, \ldots, n\}$! המשפט טוען שזה נכון אם $n = 4k$ או $n = 4k-1$ והמשפט לא-נכון אם $n = 4k-2$ או $n = 4k-3$.

הוכחה(2) ההוכחה באינדוקציה. קיימות ארבע טענות בסיס:

- $n = 4k - 3 = 1$. ב-$\{1\}$ יש מספר אי-זוגי של אי-זוגיים ואין פתרון.
- $n = 4k - 2 = 2$. ב-$\{1, 2\}$ יש מספר אי-זוגי של אי-זוגיים ואין פתרון.

- $n = 4k - 1 = 3$. ב-$\{1, 2, 3\}$ יש מספר זוגי של אי-זוגיים וראינו שיש פתרון.
- $n = 4k - 0 = 4$. ב-$\{1, 2, 3, 4\}$ יש מספר זוגי של אי-זוגיים ופתרון נמצא בסעיף 9.3.

הנחת האינדוקציה היא שהמשפט נכון עבור $\{1, \ldots, 4k - j\}$, $0 \leq j \leq 3$, $k \geq 1$, ונוכיח שהמשפט נכון עבור $n = 4(k+1) - j$.

- נוסיף $4k + 1 = 4(k+1) - 3$ ל-$\{1, \ldots, 4k\}$. לפי הנחת האינדוקציה עבור $4k = 4k - 0$ קיים מספר זוגי של מספרים אי-זוגיים. $4(k+1) - 3$ אי-זוגי ולכן עכשיו יש מספר אי-זוגי של מספרים אי-זוגיים ואין פתרון.
- נוסיף $4k + 2 = 4(k+1) - 2$ ל-$\{1, \ldots, 4k+1\}$. לפי הנחת האינדוקציה עבור $4k + 1 = 4(k+1) - 3$ קיים מספר אי-זוגי של מספרים אי-זוגיים. $4(k+1) - 2$ זוגי ולכן עכשיו עדיין יש מספר אי-זוגי של מספרים אי-זוגיים ואין פתרון.
- נוסיף $4k + 3 = 4(k+1) - 1$ ל-$\{1, \ldots, 4k+2\}$. לפי הנחת האינדוקציה עבור $4k + 2 = 4(k+1) - 2$ קיים מספר אי-זוגי של מספרים אי-זוגיים. $4(k+1) - 1$ אי-זוגי ולכן עכשיו יש מספר זוגי של מספרים אי-זוגיים וסביר שיש פתרון.
- נוסיף $4k + 4 = 4(k+1) - 0$ ל-$\{1, 2, \ldots, 4k+3\}$. לפי הנחת האינדוקציה עבור $4k + 3 = 4(k+1) - 1$ קיים מספר זוגי של מספרים אי-זוגיים. $4(k+1) - 0$ זוגי ולכן עכשיו יש מספר זוגי של מספרים אי-זוגיים וסביר שיש פתרון.

□

9.3 פתרון עבור $L(4)$

הנה הטבלה עבור $L(4)$. אל תמשיך לקרוא לפני שתנסה בעצמך למצוא פתרון.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1		1					
2		1		1				
3			1		1			
4				1		1		
5					1		1	
6						1		1
7	2			2				
8		2			2			
9			2			2		
10				2			2	
11					2			2
12	3				3			
13		3				3		
14			3				3	
15				3				3
16	4					4		
17		4					4	
18			4					4

לפי סמטריה ניתן להתעלם משורה 18.

בחר שורה 16 והסדרה היא 4XXXX4XX. כל שורה עם מספר במקום 1 או במקום 6 כבר לא יכול להיות חלק מהפתרון.

$\cancel{1}, 2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, \cancel{7}, 8, \cancel{9}, 10, 11, \cancel{12}, \cancel{13}, 14, 15, 16, \cancel{17}$

בחר שורה 14 והסדרה היא 4X3XX43X.

$\cancel{1}, 2, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, 8, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, \cancel{13}, 14, \cancel{15}, 16, \cancel{17}$

בחר שורה 8 והסדרה היא 423X243X.

$\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, 8, \cancel{9}, \cancel{10}, \cancel{11}, \cancel{12}, \cancel{13}, 14, \cancel{15}, 16, \cancel{17}$

לא נשארו מקומות עבור הספרה 1 ולכן עלינו לחזור אחורה.

במקום שורה 8 בחר שורה 11 והסדרה היא 4X3X2432.

$\cancel{1}, 2, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, \cancel{13}, 14, \cancel{15}, 16, \cancel{17}$

בחר שורה 2 ומצאנו פתרון 41312432.

נחזור אחורה ונחפש פתרון אחר.

במקום שורה 14 בחר שורה 15 והסדרה היא 4XX3X4X3.

$\cancel{1}, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, \cancel{7}, 8, \cancel{9}, \cancel{10}, \cancel{11}, \cancel{12}, \cancel{13}, \cancel{14}, 15, 16, \cancel{17}$

בחר בשורה 8 והסדרה היא 42X324X3.

$\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, 8, \cancel{9}, \cancel{10}, \cancel{11}, \cancel{12}, \cancel{13}, \cancel{14}, 15, 16, \cancel{17}$

לא נשארו מקומות עבור הספרה 1 ולכן עלינו לחזור אחורה.

במקום שורה 16 בחר שורה 17 והסדרה היא X4XXXX4X.

$1, \cancel{2}, 3, 4, \cancel{5}, 6, 7, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, 11, 12, \cancel{13}, \cancel{14}, 15, \cancel{16}, 17$

בחר שורה 15 והסדרה היא X4X3XX43.

$1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, \cancel{11}, \cancel{12}, \cancel{13}, \cancel{14}, 15, \cancel{16}, 17$

חייבים לבחור שורה 9 והסדרה היא X423X243.

$1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, \cancel{11}, \cancel{12}, \cancel{13}, \cancel{14}, 15, \cancel{16}, 17$

לא נשארו מקומות עבור הספרה 1 ולכן עלינו לחזור אחורה פעם אחת אחרונה.

במקום שורה 15 בחר שורה 12 והסדרה היא 34XX3X4.

$\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, \cancel{11}, 12, \cancel{13}, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{16}, 17$

שוב, לא נשארו מקומות עבור הספרה 1.

לכן הפתרון היחיד הוא 41312432.

מה ההפתעה?

מקור ההשראה למשפט מתמטי יכול להיות מפתיע. Langford שם לב לתבנית בבלוקים הצבעוניים של בנו וזה הביא אותו למפשט 9.1. רצוי שסטודנטים ייחפו להוכחות שונות למשפט אחד.

מקורות

פרק זה מבוסס על [35]. [12] מראה איך למצוא פתרון עבור $n = 4k$ ו-$n = 4k + 3$.

פרק 10

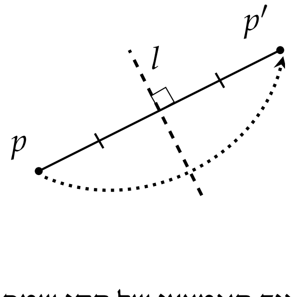
האקסיומות של אוריגמי

אוריגמי, האומנות של קיפולי נייר, פותח לפני מאות שנים ביפן והיום יש לו קהילה בינלאומית. לקראת סוף המאה העשרים, פוחתה התיאוריה המתמטית של אוריגמי שבסיסה שבע אקסיומות, אקסיומות Huzita–Hatori, על שם Humiaki Huzita שמצא את ששת האקסיומות הראשונות ו-Koshiro Hatori שמצא את השביעית. Jacques Justin פירסם את כל שבעת האקסיומות לפני Huzita ו-Hatori, ו-Margherita P. Beloch הציגה את האקסיומה השישית ב-1936. למרות זאת, האקסיומות ידועות כאקסיומות Huzita-Hatori.

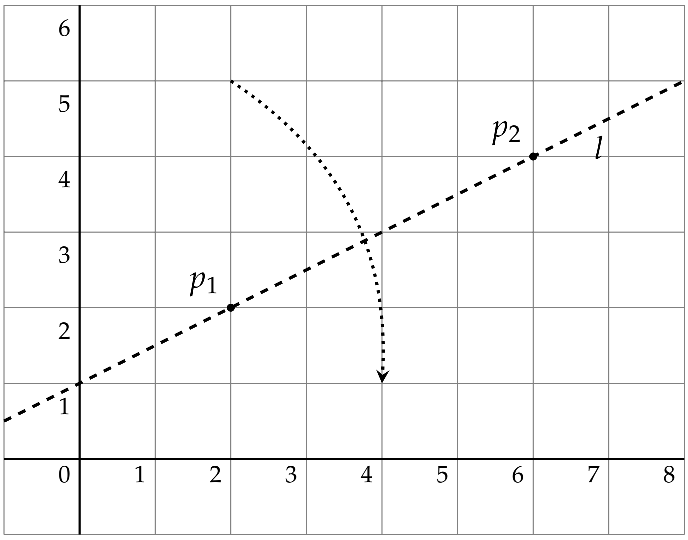
בסדרה של שלושה פרקים נלמד את המתמטיקה של אוריגמי. פרק זה מציג את האקסיומות, פרק 11 קושר את אוריגמי עם השורשים של פולינומים ופרק 12 מראה שבניות שאינן אפשריות עם סרגל ומחוגה ניתנות לבנייה עם אוריגמי.

פרק זה מכיל סעיף עבור כל אחת מהאקסיומות. לאחר ניסוח האקסיומה ותרשים של **הקיפול** שהיא מתארת, נפתח את משוואות הקיפול ושל נקודות החיתוך באמצעות גיאומטריה אנליטית. ניתן להגדיר קיפול גם **כמקום הגיאומטרי** שהוא מתאר, קבוצת כל הנקודות המקיימות תכונה מסויימת. המונח קיפול בא מהפעולה של קיפול דף נייר באוריגמי, אבל כאן הוא משמש לקו הגיאומטרי שנוצר על ידי קיפול הדף.

התוצאה של פעולת הקיפול היא **שיקוף**. נתון נקודה p, השיקוף שלה סביב הקיפול l היא הנקודה p' כך ש-l הוא האנך האמצעי של קטע הקו $\overline{pp'}$ (איור 10.1).



איור 10.1: הקפל הוא האנך האמצעי של הקו שמחבר בין נקודה לשיקוף שלה



איור 10.2: אקסיומה 1

10.1 אקסיומה 1

אקסיומה 10.1 נתונות שתי נקודות שונות $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, קיים קיפול יחיד l העובר דרך שתיהן (איור *10.2*).

פיתוח משוואת הקיפול: השיפוע של הקיפול הוא המנה של הפרשי הקואורינטות של p_1, p_2 ונקדות החיתוך עם ציר ה-y מתקבלת מ-p_1:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\,. \tag{10.1}$$

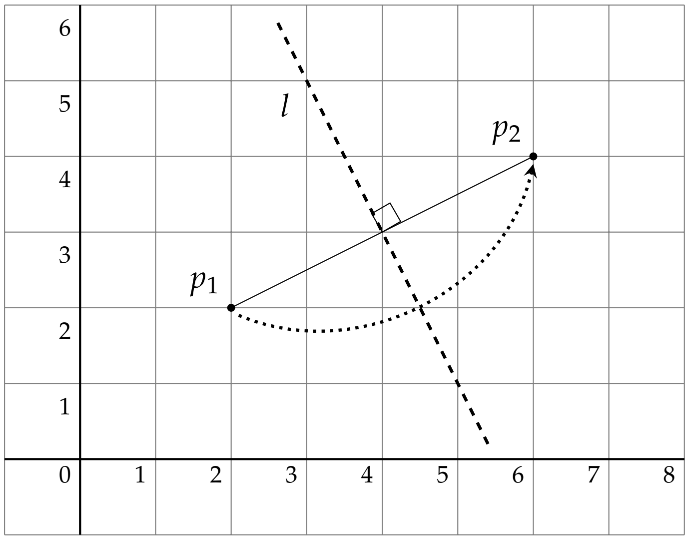
דוגמה 10.1 נתונות הנקודות $p_1 = (2,2), p_2 = (6,4)$, המשוואה של l היא:

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{4-2}{6-2}(x-2) \\ y &= \frac{1}{2}x + 1\,. \end{aligned}$$

10.2 אקסיומה 2

אקסיומה 10.2 נתונות שתי נקודות שונות $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, קיים קיפול יחיד l המניח את p_1 על p_2 (איור *10.3*).

הקיפול הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במרחק שווה מ-p_1 ו-p_2.



איור 10.3: אקסיומה 2

פיתוח משוואת הקיפול: הקיפול l הוא האנך האמצעי של $\overline{p_1p_2}$. השיפוע שלו הוא ההופכי השלילי של השיפוע של הקו המחבר את p_1 ו-p_2. l עובר דרך נקודת האמצע בין שתי הנקודות:

$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) . \tag{10.2}$$

דוגמה 10.2 נתונות הנקודות $p_1 = (2,2), p_2 = (6,4)$. המשוואה של l היא:

$$\begin{aligned} y - \left(\frac{2+4}{2}\right) &= -\frac{6-2}{4-2}\left(x - \left(\frac{2+6}{2}\right)\right) \\ y &= -2x + 11 . \end{aligned}$$

10.3 אקסיומה 3

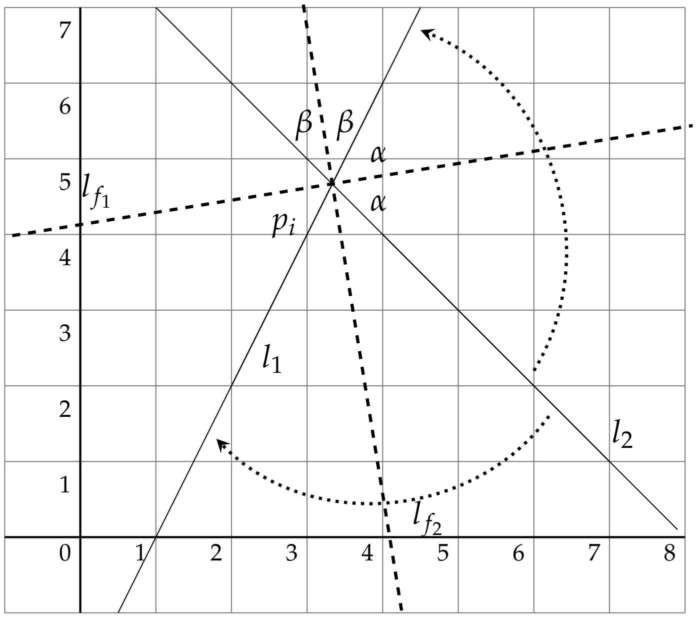
אקסיומה 10.3 נתונים שני קווים l_1 ו-l_2, קיים קיפול l המניח את l_1 על l_2 (איור *10.4*).

הקיפול הוא המקום הגיאומטרי של ההנקודות במרחק שווה מ-l_1 ו-l_2, כאשר המרחק מנקודה לקו הוא אורך קטע הקו דרך הנקודה שהוא ניצב לקו. קל להראות באמצעות משולשים חופפים שהקיפול הוא חותך הזווית הנוצרת על ידי l_1 ו-l_2.

פיתוח משוואת הקיפול:

עבור קווים מקבילים: יהי l_1 הקו $y = mx + b_1$ ויהי l_2 הקו $y = mx + b_2$. הקיפול הוא הקו המקביל ל-l_1, l_2 וחצי המרחק ביניהם:

$$y = mx + \frac{b_1 + b_2}{2} .$$



איור 10.4: אקסיומה 3

עבור קווים נחתכים: יהי l_1 הקו $y = m_1x + b_1$ ויהי l_2 הקו $y = m_2x + b_2$. $p_i = (x_i, y_i)$, נקודת החיתוך שלהם, היא:

$$\begin{aligned} m_1x_i + b_2 &= m_2x_i + b_2 \\ x_i &= \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \\ y_i &= m_1x_i + b_1 \,. \end{aligned}$$

דוגמה 10.3 יהי l_1 הקו $y = 2x - 2$, ויהי l_2 הקו $y = -x + 8$. אזי $p_i = (x_i, y_i)$ היא:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{8 - (-2)}{2 - (-1)} = \frac{10}{3} \approx 3.33 \\ y_i &= 2 \cdot \frac{10}{3} - 2 = \frac{14}{3} \approx 4.67 \,. \end{aligned}$$

הקיפול הוא חוצה הזווית הנוצרת על ידי l_1 ו-l_2 בנקודה החיתוך שלהם. קיימים שני קיפולים אפשריים כי קיימות שתי זוויות קודקודיות ועלינו למצוא את השיפועים של שני חוצי הזוויות. אם הזווית של l_1 יחסית לציר ה-x היא θ_1 והזווית של l_2 יחסית לציר ה-x היא θ_2, אזי קיפול הוא הקו היוצר זווית של $\theta_b = (\theta_1 + \theta_2)/2$

יחסית לציר ה-x.

יהי $m_1 = \tan\theta_1$ ו-$m_2 = \tan\theta_2$. לפי משפט א׳.9, m_s, השיפוע של $\theta_1 + \theta_2$, היא:

$$m_s = \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1m_2} \,.$$

לפי משפט א׳.10, m_b, השיפוע של חוצה הזווית היא:

$$m_b = \tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\tan^2(\theta_1+\theta_2)}}{\tan(\theta_1+\theta_2)} = \frac{-1\pm\sqrt{1+m_s^2}}{m_s}\,.$$

דוגמה 10.4 עבור $y = 2x-2$ ו-$y = -x+8$, השיפוע של חוצה הזווית הוא:

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{2+(-1)}{1-(2\cdot -1)} = \frac{1}{3}\\ m_b &= \frac{-1\pm\sqrt{1+(1/3)^2}}{1/3} = -3\pm\sqrt{10} \approx -6.16,\ 0.162\,. \end{aligned}$$

נפתח את המשוואה של l_{f_1} עם השיפוע החיובי. מדוגמה 10.3, הקואורדינטות של נקודת החיתוך של הקווים $m_i = (10/3), (14/3)$, ולכן:

$$\begin{aligned} \frac{14}{3} &= (-3+\sqrt{10})\cdot\frac{10}{3}+b\\ b &= \frac{44-10\sqrt{10}}{3}\\ y &= (-3+\sqrt{10})x + \frac{44-10\sqrt{10}}{3} \approx 0.162x+4.13\,. \end{aligned}$$

10.4 אקסיומה 4

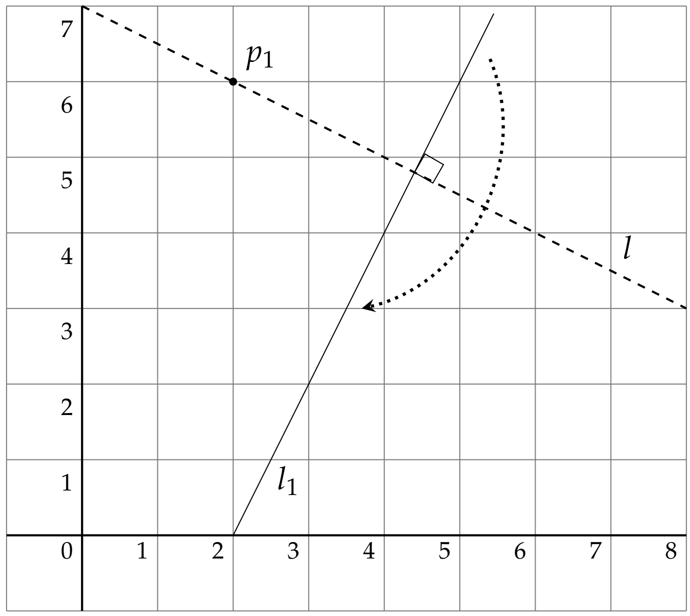
אקסיומה 10.4 נתון נקודה $p_1 = (x_1, x_2)$ וקו l_1, קיים קיפול יחיד l הניצב ל-l_1 שעובר דרך p_1 (*איור 10.5*).

פיתוח משוואת הקיפול: המשוואה של הקו l_1 היא $y = m_1x+b_1$. l ניצב ל-l_1 לכן השיפוע שלו הוא $-(1/m_1)$. הקו עובר דרך p_1 ונוכל לחשב את המשוואה שלו:

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{m}x_1+b\\ b &= \frac{(my_1+x_1)}{m}\\ y &= -\frac{1}{m}x+\frac{(my_1+x_1)}{m}\,. \end{aligned}$$

דוגמה 10.5 תהי $p_1 = (2,6)$ ויהי l_1 הקו $y = 2x-4$. המשוואה של הקיפול l היא:

$$y = -\frac{1}{2}x+\frac{2\cdot 6+2}{2} = -\frac{1}{2}x+7\,.$$



איור 10.5: אקסיומה 4

10.5 אקסיומה 5

אקסיומה 10.5 נתונות נקודות $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$ ונתון קו l_1, קיים קיפול l המניח את p_1 מעל l_1 והעובר דרך p_2 (איור 10.6).

בגלל שהקיפול עובר דרך p_2 ו-p_2 נמצאת על האנך האמצעי של $\overline{p_1p_1'}$, המקום הגיאומטרי של השיקוף של p_1 הוא מעגל שמרכזו p_2 עם רדיוס $\overline{p_1p_2}$. יש לאלץ את הקיפול כדי שהשיקוף p_1' נמצא על הקו הנתון l_1.

פיתוח משוואות הקיפולים: יהי l_1 הקו $y = m_1x + b_1$ ויהי $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$ הנקודות הנתונות. משוואת המעגל שמרכזו p_2 עם רדיוס $\overline{p_1p_2}$ היא:

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2$$

כאשר

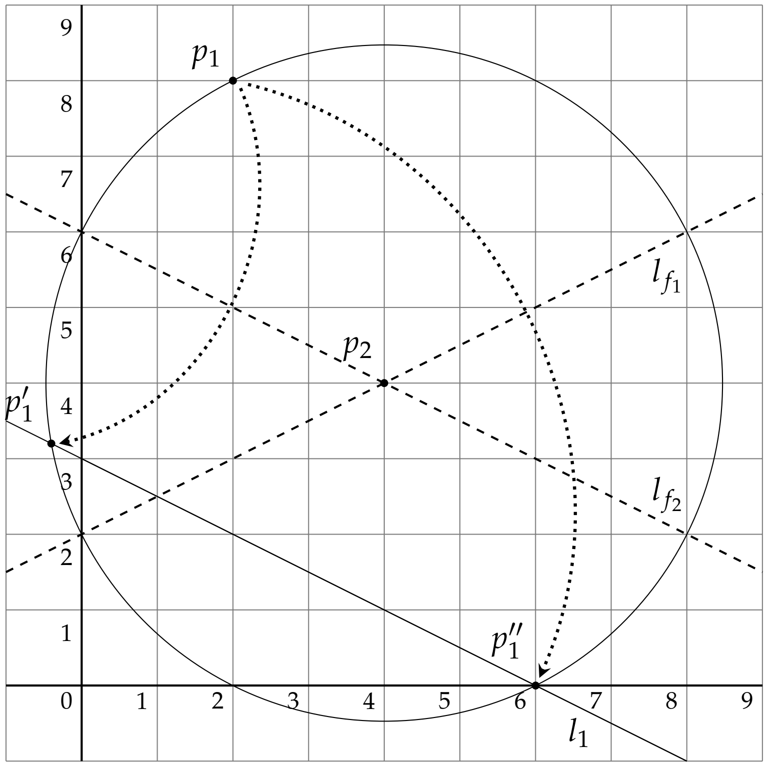
$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 .$$

נציב את המשוואה של l_1 בתוך המשוואה של המעגל ונקבל:

$$\begin{aligned}(x - x_2)^2 + ((m_1x + b_1) - y_2)^2 &= r^2\\ (x - x_2)^2 + (m_1x + (b_1 - y_2))^2 &= r^2 .\end{aligned}$$

מתקבלת משוואה ריבועית עבור קואורדינטות ה-x של נקודות החיתוך האפשריות:

$$x^2(1 + m_1^2) + 2(-x_2 + m_1(b - y_2))x + (x_2^2 + (b_1 - y_2)^2 - r^2) = 0 . \qquad (10.3)$$



איור 10.6 : אקסיומה 5

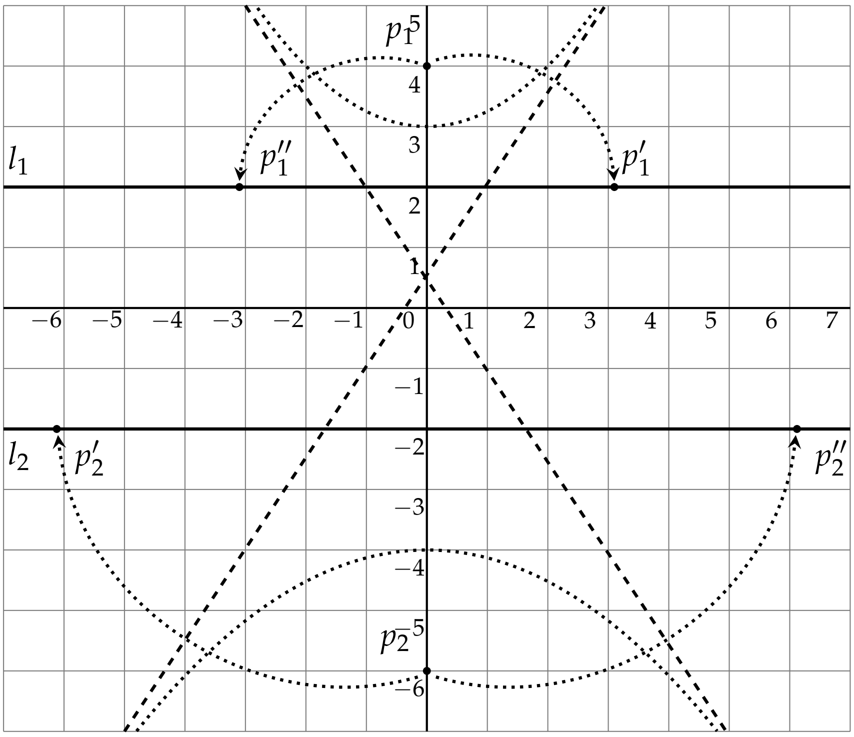
למשוואה ריבועית יש לכל היותר שני פתרונות, ולכן עבור זוג נקודות נתונה וקו נתון קיימים אפס, אחד או שני קיפולים. מהשורשים x'_1, x''_1 ניתן לחשב y'_1, y''_1 מ-$y = m_1x + b_1$. נקודות השיקוף הן $p'_1 = (x'_1, y'_1), p''_1 = (x''_1, y''_1)$.

דוגמה 10.6 יהי $p_1 = (2,8)$, $p_2 = (4,4)$, ויהי l_1 הקו $y = -\frac{1}{2}x + 3$. משוואת המעגל היא $(x-4)^2 + (y-4)^2 = r^2 = (4-2)^2 + (4-8)^2 = 20$. נציב את המשוואה של הקו לתוך המשוואה של המעגל ונקבל משוואה ריבועית עבור קואורדינטות ה-x של נקודות החיתוך (או השתמשו במשוואה *10.3*) :

$$\begin{aligned}
(x-4)^2 + \left(\left(-\frac{1}{2}x + 3\right) - 4\right)^2 &= 20 \\
\frac{5}{4}x^2 - 7x - 3 &= 0 \\
5x^2 - 28x - 12 &= 0 \\
(5x+2)(x-6) &= 0\,.
\end{aligned}$$

שתי נקודות חיתוך הן :

$$p'_1 = (-2/5, 16/5) = (-0.4, 3.2)\,, \quad p''_1 = (6,0)\,.$$



איור 10.7: אקסיומה 6

דוגמה 10.7 עבור $p_1 = (2,8)$, $p_1' = (-2/5, 16/5)$, המשוואתה של l_{f_1} היא:

$$y - \frac{8 + (16/5)}{2} = -\frac{(-2/5) - 2}{(16/5) - 8}\left(x - \frac{2 + (-2/5)}{2}\right)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 6\,.$$

דוגמה 10.8 עבור $p_1 = (2,8)$, $p_1'' = (6,0)$, המשוואה של l_{f_2} היא:

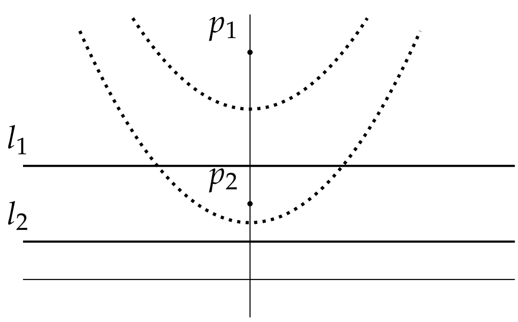
$$y - \frac{8+0}{2} = -\frac{6-2}{0-8}\left(x - \frac{2+6}{2}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2\,.$$

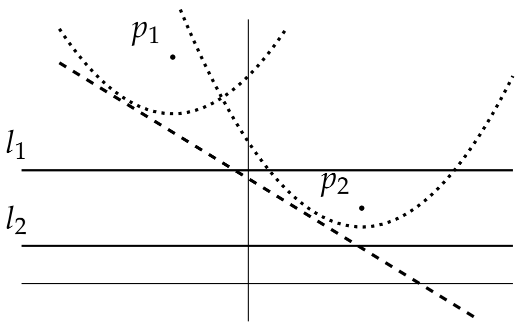
10.6 אקסיומה 6

אקסיומה 10.6 נתונות שתי נקודות p_1 ו-p_2 ונתונים שני קווים l_1 ו-l_2, קיים קיפול l המניח את p_1 על ל-l_1 ואת p_2 על ל-l_2 (איור *10.7*).

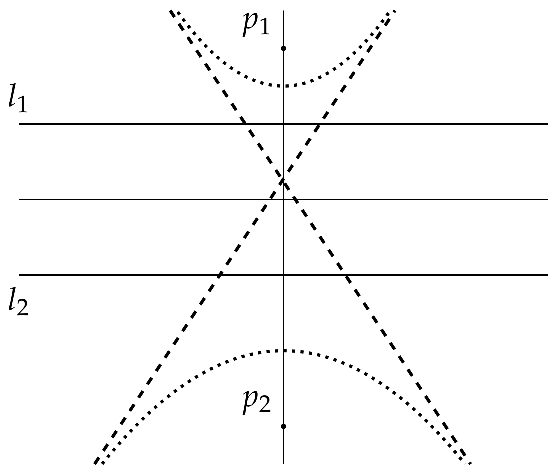
קיפול המניח את p_i על l_i הוא קו l_f שהמרחק מ-p_i ל-l_f שווה למרחק מ-l_i ל-l_f. המקום הגיאומטרי של נקודות שהן במרחק שווה מנקודה p_i ומקו l_i הוא פרבולה עם מוקד (focus) p_i ומדריך (directrix) l_i. קיפול הוא כל קו המשיק לפרבולה (סעיף 10.6.3).



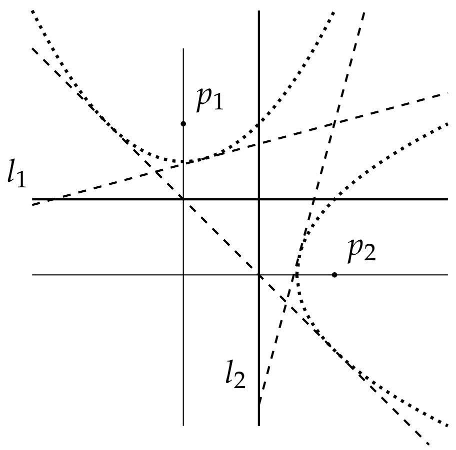
איור 10.8(א) אפס משיקים



איור 10.8(ב) משיק אחד



איור 10.9(א) שני משיקים



איור 10.9(ב) שלושה משיקים

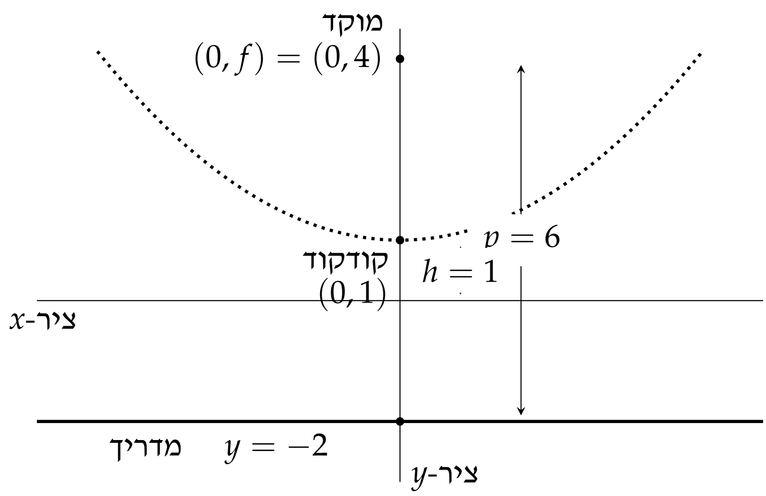
כדי שהקיפול יניח בו-זמנית את p_1 על ל-l_1 ו-p_2 על ל-l_2, הוא חייב להיות משיק משותף לשתי הפרבולות. מספר המשיקים המשותפים הוא אפס, אחד, שניים או שלושה (איורים איור 10.8(א), איור 10.8(ב), איור 10.9(א), איור 10.9(ב)).

הנוסחה של פרבולה שרירותית מסובכת מאוד ולכן נביא את הנוסחאות רק עבור פרבולות שציר הסמטריה הוא ציר ה-x או ציר ה-y.

10.6.1 פיתוח הנקודה של הקיפול

תהי הנקודה $(0, f)$ מוקד של פרבולה עם מדריך $y = d$. נגדיר $p = f - d$, האורך עם סימן פלוס או מינוס של קטע הקו בין המוקד למדריך.[1] אם הקודקוד (vertex) של הפרבולה נמצא על ציר ה-x, המשוואה של הפרבולה היא $y = \dfrac{x^2}{2p}$. כדי להזיז את הפרבולה למעלה או למטה על ציר ה-y, כדי

[1] השתמשנו עד כה בסימון p_i עבור נקודות. השימוש כאן ב-p עלול לבלבל אבל ניסוח זה מקובל בספרות. השם הפורמלי עבור p הוא מחצית ה-latus rectum.



איור 10.10: הגדרת הפרבולה: מוקד, מדריך, קודקוד

שהקודקוד יהיה $(0, h)$, יש להוסיף h למשוואת הפרבולה (איור 10.10):

$$y = \frac{x^2}{2p} + h\,.$$

נגדיר $a = 2ph$ כדי שמשוואת הפרבולה תהיה:

$$y = \frac{x^2}{2p} + \frac{a}{2p} \tag{10.4}$$

$$x^2 - 2py + a = 0\,. \tag{10.5}$$

עבור הפרבולה באיור 10.10 המשוואה היא $x^2 - 12y + 12 = 0$.

נציב את המשוואה של קו **שרירותי** $y = mx + b$ במשוואה 10.5 ונקבל משוואה עבור נקודות החיתוך של הקו והפרבולה:

$$\begin{aligned} x^2 - 2p(mx + b) + a &= 0 \\ x^2 + (-2mp)x + (-2pb + a) &= 0\,. \end{aligned}$$

הקו יהיה משיק לפרבולה אם ורק אם למשוואה ריבועית זו קיים **בדיוק** פתרון אחד אם ורק אם הדיסקרימיננטה (discriminant) היא אפס:

$$(-2mp)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2pb + a) = 0 \tag{10.6}$$

$$m^2p^2 + 2pb - a = 0\,. \tag{10.7}$$

משוואה זו עם המשתנים m היא המשוואה עבור המשיקים לפרבולה, אבל אנחנו מחפשים משיקים משותפים של שני משיקים, ולכן יש לפתור את המשוואות עבור שתי פרבולות.

דוגמה 10.9

פרבולה 1: מוקד $(0,4)$, מדריך $y=2$, קודקוד $(0,3)$.

$p=4-2=2$, $a=2\cdot 2\cdot 3=12$. משוואת הפרבולה היא:

$$x^2-4y+12=0\,.$$

נציב לתוך משוואה *10.7* ונפשט:

$$m^2+b-3=0\,.$$

פרבולה 2: מוקד $(0,-4)$, מדריך $y=-2$, קודקוד $(0,-3)$.

$p=-4-(-2)=-2$, $a=2\cdot -2\cdot -3=12$. משוואת הפרבולה היא:

$$x^2+4y+12=0\,.$$

נציב לתוך משווארה *10.7* ונפשט:

$$m^2-b-3=0\,.$$

הפתרונות של שתי המשוואות:

$$\begin{aligned} m^2+b-3&=0\\ m^2-b-3&=0\,, \end{aligned}$$

הם $m=\pm\sqrt{3}\approx\pm 1.73$ ו-$b=0$. המשיקים המשותפים שהם הקיפולים הם:

$$y=\sqrt{3}x\,,\quad y=-\sqrt{3}x\,.$$

דוגמה 10.10

פרבולה 1: ללא שינוי.

פרבולה 2: מוקד $(0,-6)$, מדריך $y=-2$, קודקוד $(0,-4)$.

$p=-6-(-2)=-4$, $a=2\cdot -4\cdot -4=32$. משוואת הפרבולה היא:

$$x^2+8y+32=0\,.$$

נציב לתוך משוואה *10.7* ונפשט:

$$2m^2-b-4=0\,.$$

הפתרונות של שתי המשוואות:

$$\begin{aligned} m^2+b-3&=0\\ 2m^2-b-4&=0\,, \end{aligned}$$

הם $m=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}\approx\pm 1.53$ ו-$b=\frac{2}{3}$. יש שני משיקים משותפים שהם קיפולים:

$$y=\sqrt{\frac{7}{3}}x+\frac{2}{3}\,,\quad y=-\sqrt{\frac{7}{3}}x+\frac{2}{3}\,.$$

דוגמה 10.11
עכשיו נגדיר פרבולה שציר הסמטריה שלה הוא ציר ה-x.

פרבולה 1: ללא שינוי, המשוואה היא:

$$m^2 + b - 3 = 0\,.$$

פרבולה 2: מוקד $(4, 0)$, מדריך $x = 2$, קודקוד $(3, 0)$.

$p = 4 - 2 = 2$, $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. משוואת הפרבולה היא:

$$y^2 - 4x + 12 = 0\,. \tag{10.8}$$

שימו לב שזו משוואה עם x ו-y^2 במקום x^2 ו-y, כך שלא ניתן להשתמש במשוואה *10.7* ונצטרך לפתח את משוואות מחדש.

נציב את המשוואה של הקו במשוואה *10.8*:

$$\begin{aligned}(mx + b)^2 - 4x + 12 &= 0\\ m^2x^2 + (2mb - 4)x + (b^2 + 12) &= 0\end{aligned}$$

נשווה את הדיסקרימיננטה לאפס ונפשט:

$$\begin{aligned}(2mb - 4)^2 \;-\; 4m^2(b^2 + 12) &= 0\\ -3m^2 - mb + 1 &= 0\,.\end{aligned}$$

אם ננסה לפתור את שתי המשוואות:

$$\begin{aligned}m^2 + b - 3 &= 0\\ -3m^2 - mb + 1 &= 0\,,\end{aligned}$$

נקבל משוואה **ממעלה שלוש** במשתנה m:

$$m^3 - 3m^2 - 3m + 1 = 0\,. \tag{10.9}$$

למשוואה ממעלה שלוש יש לפחות פתרון ממשי אחד ולכל היותר שלושה פתרונות ממשיים, לכן יכול להיות אחד, שניים או שלשה משיקים משותפים. הנוסחה למציאת פתרונות למשוואה ממעלה שלוש די מסובכת, לכן השתמשתי במחשבון באינטרנט וקיבלתי שלושה פתרונות:

$$m = 3.73\,,\; m = -1\,,\; m = 0.27\,.$$

מהצורה של המשוואה *10.9*, נוכל לנחש ש-1 או -1 הוא פתרון:

$$\begin{aligned}1^3 - 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 &= -4\\ (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 &= 0\,.\end{aligned}$$

נחלק את המשוואה *10.9* ב-$m - (-1) = m + 1$ ונקבל משוואה ריבועית $m^2 - 4m + 1$ ששורשיה הם $2 \pm \sqrt{3} \approx 3.73, 0.27$.

10.6.2 פיתוח המשוואות של השיקופים

נחשב את $p_1' = (x_1', y_1')$, השיקוף של $p_1 = (x_1, y_1)$ מסביב למשיק l_t שהמשוואה שלה היא $y = m_t x + b_t$. תחילה, נמצא את הקו l_p עם המשוואה $y = m_p x + b_p$ שניצב ל-l_t ועובר דרך p_1:

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{m_t}x + b_p \\
y_1 &= -\frac{1}{m_t}x_1 + b_p \\
y &= \frac{-x}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t}\right) .
\end{aligned}
$$

כעת נמצא את נקודת החיתוך $p_t = (x_t, y_t)$ של l_t ו-l_p:

$$
\begin{aligned}
m_t x_t + b_t &= \frac{-x_t}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t}\right) \\
x_t &= \frac{\left(y_1 + \frac{x_1}{m_t} - b_t\right)}{\left(m_t + \frac{1}{m_t}\right)} \\
y_t &= m_t x_t + b_t .
\end{aligned}
$$

p_t היא נקודה האמצע בין p_1

ל-p_1':

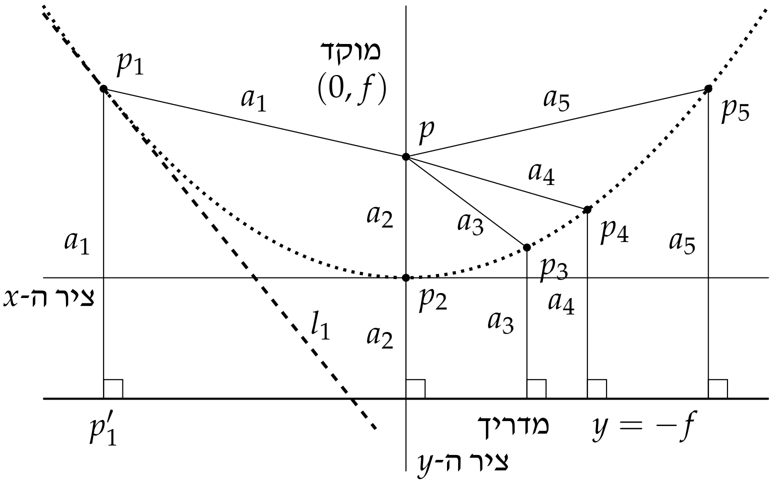
$$
\begin{aligned}
x_t &= \frac{x_1 + x_1'}{2}, & x_1' &= 2x_t - x_1 , \\
y_t &= \frac{y_1 + y_1'}{2}, & y_1' &= 2y_t - y_1 .
\end{aligned}
$$

דוגמה 10.12 יהי l_t הקו $y = \sqrt{3}x + 0$ ו-$p_1 = (0, 4)$:

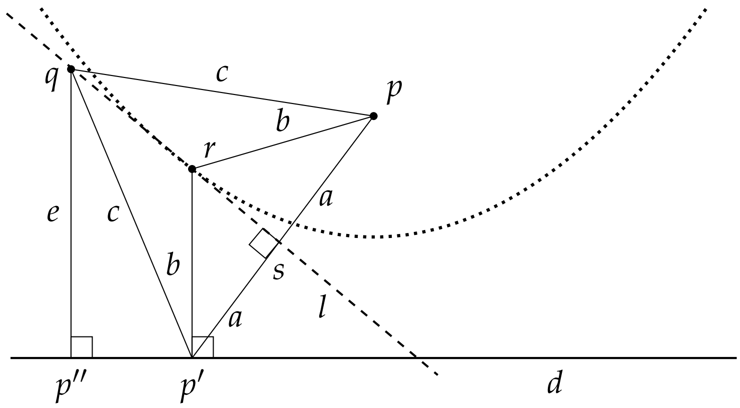
$$
\begin{aligned}
x_t &= \frac{\left(4 + \frac{0}{\sqrt{3}} - 0\right)}{\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \sqrt{3} \\
y_t &= \sqrt{3}\sqrt{3} + 0 = 3 \\
x_1' &= 2x_t - x_1 = 2\sqrt{3} \approx 3.46 \\
y_1' &= 2y_t - y_1 = 2 .
\end{aligned}
$$

10.6.3 משיקים לפרבולה

אנו רוצים להוכיח שהקיפולים של אקסיומה 6 הם משיקים לפרבולות. איור 10.11 מראה חמש נקודות $p_1, \ldots, p_5$, על הפרבולה כאשר כל נקודה p_i היא במרחק a_i גם מהמוקד וגם מהמדריך.



איור 10.11 : המשיק כמקום הגיאומטרית



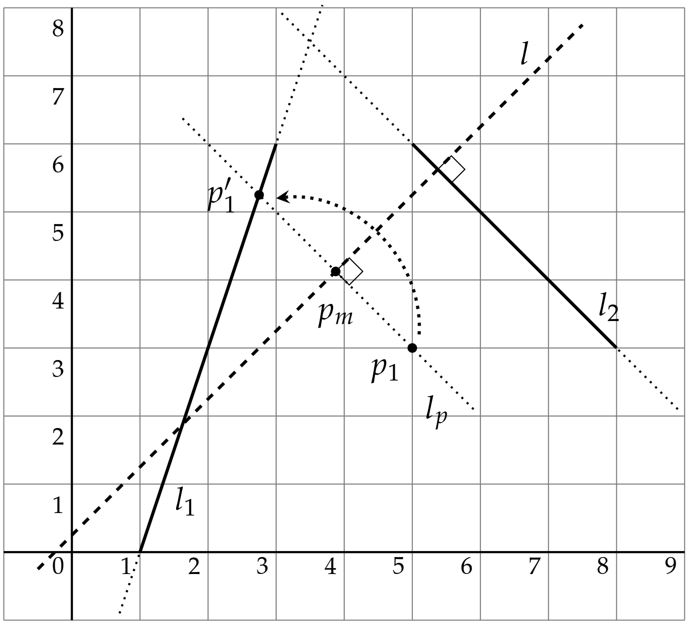
איור 10.12 : ההוכחה שקיפול הוא משיק

נוריד ניצבים למדריך מ-p_i, ונסמן ב-p'_i את נקודות החיתוך של הניצב עם המדריך. לפי אקסיומה 2 קיימים קיפולים l_i דרך p_i שמניח את p המדריך. האיור מראה את הקיפול l_1 דרך p_1 ואת השיקוף p'_1.

משפט 10.7 הקיפולים של אקסיומה 6 הם משיקים לפרבולה והמקומות הגיאומטריים של הנקודות שהן במרחק שווה מ-p_1, p_2 ומ-l_1, l_2, בהתאמה.

הוכחה באיור 10.12 המוקד הוא p, המדריך הוא l, p' היא נקודה על המדריך, ו-l הוא הקיפול המשקף את p על p'. תהי s נקודת החיתוך של $\overline{pp'}$ ו-l. אזי $\overline{ps} = \overline{p's} = a$ ו-$\overline{pp'} \perp l$.

תהי r נקודת החיתוך של הניצב ל-d דרך p' והקיפול l. אזי $\triangle psr \cong \triangle p'sr$ לפי צלע-זווית-צלע. מכאן ש-$\overline{pr} = \overline{p'r} = b$ ולכן r נמצאת על הפרבולה. נבחר נקודה p'' על המדריך שהיא שונה מ-p' ונניח שהקיפול l משקף גם את p על p''. תהי q החיתוך של הניצב ל-d דרך p'' והקיפול l. $\triangle p'sq \cong \triangle psq$ ולכן $\overline{pq} = \overline{p'q} = c$. נסמן $\overline{qp''} = e$. אם q נמצאת על הפרבולה, אזי



איור 10.13: אקסיומה 7

$c = \overline{qp} = \overline{qp''} = e$, אבל c הוא היתר של המשולש ישר-זווית $\triangle qp''p'$ ולא ייתכן שהיתר שווה לאחת הצלעות של המשולש. לכן לקיפול l נקודת חיתוך אחת עם בפרבולה והוא הקיפול הוא משיק.

□

10.7 אקסיומה 7

אקסיומה 10.8 נתונה נקודה $p_1 = (x_1, y_1)$, ונתונים קווים l_1 ו-l_2, קיים קיפול l הניצב ל-l_2 שהמניח את p_1 על ל-l_1 (איור *10.13*).

הקיפול הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות על הקו הניצב ל-l_2 ושנמצא במרחק שווה מ-p_1 ו-p'_1, השיקוף של p_1 על l_1.

פיתוח משוואת הקיפול: תהי $p_1 = (x_1, y_1)$, יהי l_1 הקו $y = m_1x + b_1$ ו-l_2 הקו $y = m_2x + b_2$. יהי l_p הקו שמכיל את $\overline{p_1p'_1}$. מ-$l \perp l_2, l_p \perp l$ נובע ש-$l_p \parallel l_2$ והמשוואה של l_p היא $y = m_2x + b_p$.

l_p עובר דרך p_1 ולכן $y_1 = m_2x_1 + b_p$ והמשוואה שלו היא $y = m_2x + (y_1 - m_2x_1)$. השיקוף $p'_1 = (x'_1, y'_1)$ הוא נקודת החיתוך של l_1 ו-l_p:

$$\begin{aligned} m_1x'_1 + b_1 &= m_2x'_1 + (y_1 - m_2x_1) \\ x'_1 &= \frac{y_1 - m_2x_1 - b_1}{m_1 - m_2} \\ y'_1 &= m_1x'_i + b_1\,. \end{aligned}$$

$p_m = (x_m, y_m)$, נקודת האמצע של l_p, היא:

$$(x_m, y_m) = \left(\frac{x_1 + x_1'}{2}, \frac{y_1 + y_1'}{2}\right) .$$

$l \perp l_2$ ועבור דרך p_m ולכן המשוואה שלו היא: so its equation is:

$$y_m = -\frac{1}{m_2} x_m + b_m .$$

כאשר ניתן לחשב את b_m מ-$y = -\frac{1}{m_2}x + b_m$:

$$b_m = y_m + \frac{x_m}{m_2} .$$

המשוואה של הקיפול l היא:

$$y = -\frac{1}{m_2}x + \left(y_m + \frac{x_m}{m_2}\right) .$$

דוגמה 10.13 נתונה הנקודה $p_1 = (5, 3)$, נתון הקו l_1 שהמשוואה שלו היא $y = 3x - 3$, ונתון הקו l_2 שהמשוואה שלו היא $y = -x + 11$. אזי:

$$\begin{aligned}
x_1' &= \frac{3 - (-1) \cdot 5 - (-3)}{3 - (-1)} = \frac{11}{4} \\
y_1' &= 3 \cdot \frac{11}{4} + (-3) = \frac{21}{4} \\
p_m &= \left(\frac{5 + \frac{11}{4}}{2}, \frac{3 + \frac{21}{4}}{2}\right) = \left(\frac{31}{8}, \frac{33}{8}\right) .
\end{aligned}$$

משוואת הקיפול היא:

$$y = -\frac{1}{-1} \cdot x + \left(\frac{33}{8} + \frac{\frac{31}{8}}{-1}\right) = x + \frac{1}{4} .$$

מה ההפתעה?

אוריגמי, האומנות של קיפולי נייר, קיים מאות שנים, ולכן מפתיע שרק במאה העשרים פותחה הפורמליזציה שלו. מפתיע עוד יותר שקיים אקסיומתיזציה של קיפולי נייר. המתמטיקה של אורגמי היא דרך מצויינת ללמוד גיאומטריה אנליטית, תכונות של פרבולות והמושג מקום גיאומטרי.

מקורות

ניתן למוצא את האקסיומות של אוריגמי ב-[57]. Lang [26] מביא דוגמאות של יצירות אוריגמי. פרק 10 של [31] מציג את התיאוריה המפורטת של אורגמי, כולל הוכחה שלפרבולה יכולה להיות אפס, אחד, שניים או שלושה משיקים. אוריה בן-לולו הראתה לי את ההוכחה של משפט 10.7. מצאתי שתוכנה גיאומטרית כגון Geogebra עוזרת להבין את הקשר בין הגיאומטריה והאלגברה של האקסיומות.

הצגה ברורה של משוואות קוביות ניתן למצוא בפרקים $1, 2$ של [6].

פרק 11

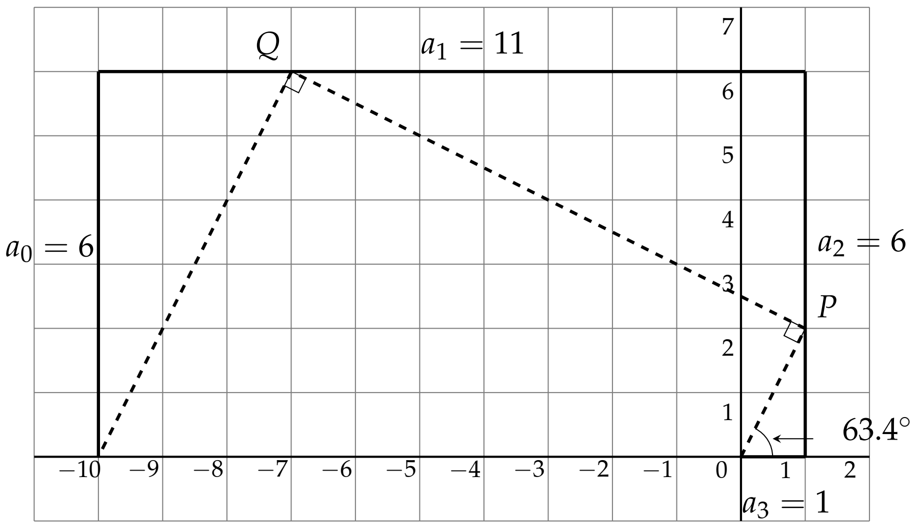
השיטה של Lill והקיפול של Beloch

11.1 קסם

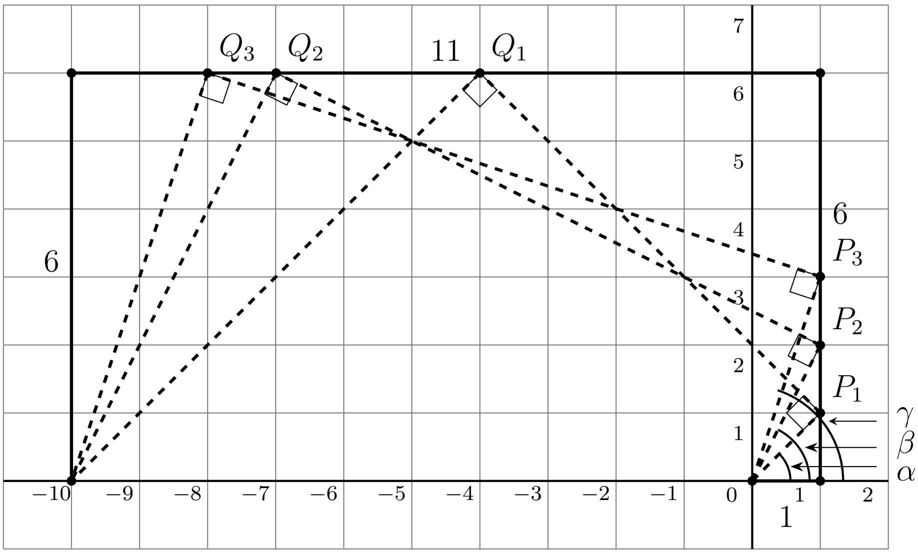
במערכת קרטזית נבנה מ-$(0,0)$ מסלול עם ארבעה קטעי קו באורכים שלהן (איור 11.1):

$$\{a_3 = 1, a_2 = 6, a_1 = 11, a_0 = 6\} \,.$$

הבנייה מתחילה ממרכז מערכת הצירים בכיוון החיובי של ציר ה-x תוך סיבוב של 90° בין הקטעים. בנו מסלול שני המתחיל עם קטע קו שיוצא ממרכז הצירים בזוויות 63.4° יחסית לציר ה-x, וסמנו ב-P את נקודת החיתוך שלו עם a_2. פנו שמאלה 90° ובנו קטע קו כאשר Q היא נקודת החיתוך שלו עם a_1. פנו שמאלה 90° פעם נוספת, בנו קו, ושימו לב שהוא חותך את קצה המסלול הראשון הנמצא ב-$(-10,0)$.



איור 11.1: קסם



איור 11.2 : שלושה מסלולים עבור שלושה שורשים

נחשב $-2 = -\tan 63.4^\circ$ ונציב ערך זה בפולינום שהמקדמים שלו הם אורכי הקטעים במסלול הראשון :

$$\begin{aligned} p(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\ p(-\tan 63.4^\circ) &= (-2)^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6 = 0\,. \end{aligned}$$

בשעה טובה! מצאנו שורש של $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, פולינום ממעלה שלוש.

לפולינום $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ שלושה שורשים $-1, -2, -3$. מחישוב השלילה של הארק-טנגנס שהשורשים מתקבל :

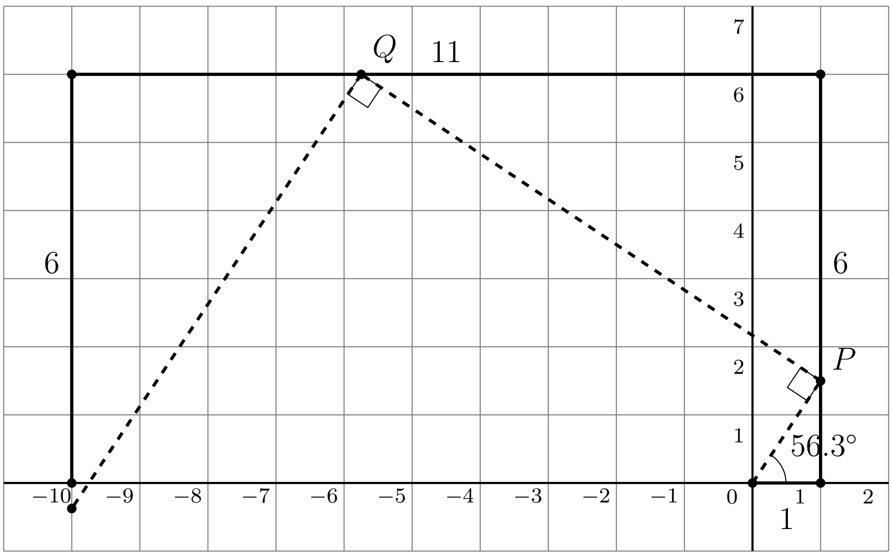
$$\alpha = -\tan^{-1} -1 = 45^\circ, \quad \beta \approx -\tan^{-1} -2 = 63.4^\circ, \quad \gamma = -\tan^{-1} -3 \approx 71.6^\circ\,.$$

באיור 11.2 רואים שעבור כל אחת מהזוויות, המסלול השני חותך את הקצה של המסלול הראשון.

באיור 11.3 אנו רואים שעבור זווית אחרת, נגיד 56.3°, שעבורה $-\tan 56.3 = -1.5$ אינו שורש, המסלול השני חותך את המשך קטע הקו עבור המקדם a_0, אבל לא ב-$(-10, 0)$, הקצה של המסלול הראשון.

דוגמה זו מדגימה שיטה שהומצאה על ידי Eduard Lill ב-1867. בשיטה הגרפית אפשר למצוא את השורשים הממשיים של כל פולינום. למעשה השיטה לא מוצאת שורשים אלא מוודא שערך נתון הוא שורש.

סעיף 11.2 מציג תיאור פורמלית של השיטה של Lill (מוגבל לפולינומים ממעלה שלוש) ומביא דוגמאות עבור מקרים מיוחדים. הוכחה לנכונות של השיטה של Lill ניתנת בסעיף 11.3. סעיף 11.4 מראה איך ליישם את השיטה באמצעות הקיפול של Beloch, שהוא למעשה האקסיומה השישית של אורגמי אבל קדם לפורמליזציה של אורגמי בשנים רבות.

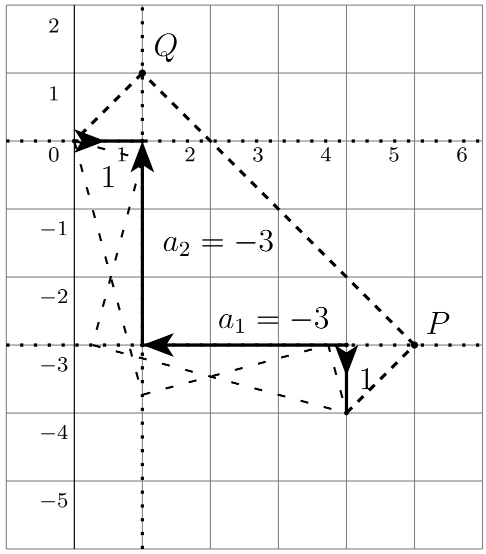


איור 11.3 : מסלול שאינו מתאים לשורש

11.2 הצגת השיטה של Lill

11.2.1 השיטה של Lill כאלגוריתם

- נתון פולינום שרירותי $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.
- נבנה את המסלול הראשון : לכל מקדם a_3, a_2, a_1, a_0 (בסדר זה) בנו קטע קו המתחיל במרכז הצירים $O = (0, 0)$ בכיוון החיובי של ציר ה-x. נפנה $90°$ נגד השעון בין הקטעים.
- נבנה את המסלול השני :
  - נבנה קו מ-O בזווית θ יחסית לכיוון החיובי של ציר ה-x שחותך את a_2 ב-P.
  - נפנה $\pm 90°$ ונבנה קו מ-P ונסמן ב-Q את הנקודת החיתוך של הקו עם a_1.
  - נפנה $\pm 90°$ ונבנה קו מ-Q ונסמן ב-R את נקודת החיתוך של הקו עם a_0.
  - אם R היא נקודת הקצה של המסלול הראשון $\tan\theta -$ הוא שורש של $p(x)$.
- מקרים מיוחדים :
  - בבניית המסלול הראשון אם מקדם הוא שלילי, נבנה את קטע הקו **בכיוון ההפוך**.
  - בבניית המסלול הראשון אם מקדם הוא אפס, אין לבנות קטע הקו אבל כן נבצע את הפנייה הבאה של $\pm 90°$.
- הערות :
  - המשמעות של ״נקודת החיתוך של קו עם a_i״ החיתוך קטע הקו a_i או עם הקו המאריך את a_i.



איור 11.4 : מסלול עבור פולינום עם מקדמים שליליים

– כאשר בונים את המסלול השני נבחר לפנות ימינה או שמאלה ב-$90°$ כך שלמסלול השני תהיה נקודת חיתוך עם קטעי הקו של המסלול הראשון או עם הארעות שלו.

11.2.2 מקדמים שליליים

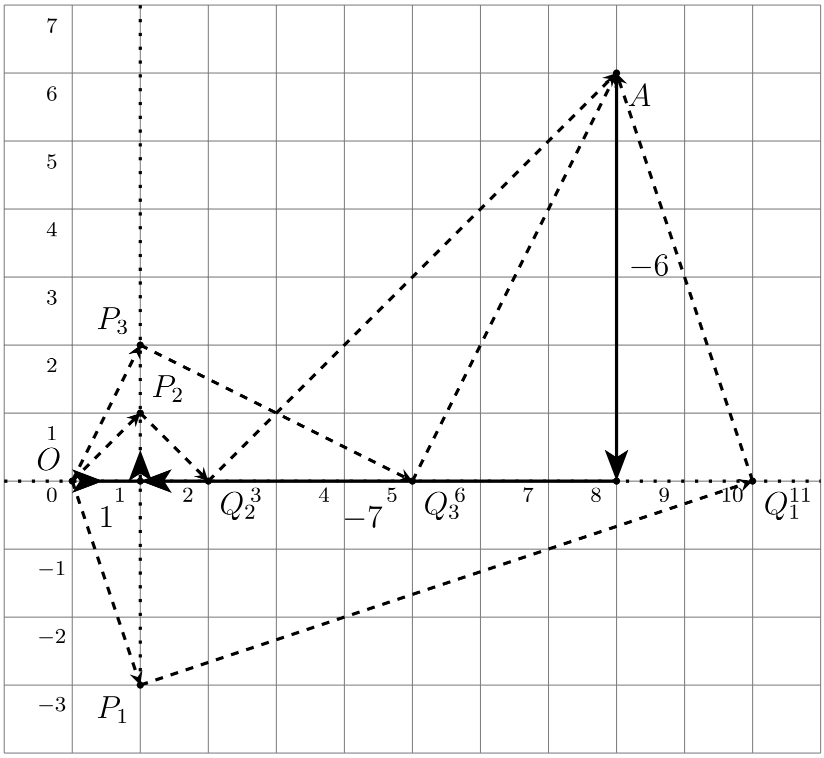
לפולינום $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ (סעיף 10.6) מקדמים שליליים. נפעיל את השיטה של Lill על הפולינום (איור 11.4).[1] נתחיל בבניית קטע קו באורך 1 לכיוון החיובי של ציר ה-x. אחר כך נפנה שמאלה $90°$ (למעלה), אבל המקדם שלילי ולכן נבנה קטע קו באורך -3, זאת אומרת קטע קו באורך 3 **למטה**, הפוך מהכיוון שאנו פונים אליו. לאחר פנייה נוספת $90°$ לשמאל, המקדם שוב שלילי כך שנבנה קו באורך 3 לאחור, לכיוון ימין. לבסוף, נפנה עם הפנים למטה ונבנה קטע קו באורך 1.

המסלול השני מתחיל עם קו בזווית $45°$ יחסית לציר ה-x. נקודת החיתוך של הקו עם הקו המאריך את קטע ההקו a_2 היא $(1,1)$. נפנה $-90°$ (ימינה), נבנה קו שנקודת החיתוך שלה עם הקו המאריך את קטע הקו a_1 היא $(5,-3)$. נפנה שוב $-90°$, נבנה קו שנקודת החיתוך שלו היא בנוקדת הקצה של המסלול הראשון ב-$(4,-4)$.

$-\tan 45° = -1$, ולכן שורש ממשי של הפולינום הוא -1 :

$$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 6 = 0\,.$$

[1]נדון בקווים המקווקווים העדינים בסעיף 11.2.4.



איור 11.5 : מסלול עבור פולינום עם מקדם שהוא אפס

11.2.3 מקדמים שהם אפס

a_2, המקדם של x^2 ב-$x^3 - 7x - 6 = 0$, הוא אפס. עבור מקדם אפס, אנו "בונים" קטע קו באורך 0, כלומר, אנחנו לא מציירים קו אבל כן פונים $\pm 90°$ לפני ואחרי ש"בונים" אותו כפי שמסומן על ידי החץ הפונה למעלה בנקודה $(1,0)$ (איור 11.5). נפנה שוב ונבנה קטע קו באורך -7, כלומר, באורך 7 לאחור אל $(8,0)$. לבסוף, נפנה פעם אחת אחרונה ונבנה קטע קו באורך -6 עד $(8,6)$.

שלושה מסלולים חותכים את קצה המסלול הראשון :

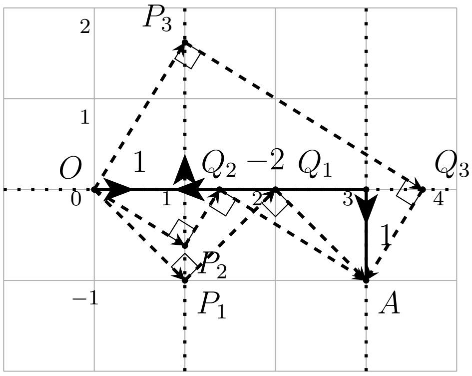
$$-\tan 45° = -1, \quad -\tan 63.4° = -2, \quad -\tan(-71.6°) = 3\,.$$

נסיק שקיימים שלושה שורשים ממשיים $\{-1, -2, 3\}$. בדיקה :

$$(x+1)(x+2)(x-3) = (x^2+3x+2)(x-3) = x^3 - 7x - 6\,.$$

11.2.4 שורשים לא שלמים

נבדוק את הפולינום $p(x) = x^3 - 2x + 1$: (איור 11.6). הקטע הראשון של המסלול הראשון עובר מ-$(0,0)$ ל-$(1,0)$ ואז פונה למעלה. המקדם של x^2 הוא אפס כך שלא נצייר קטע קו ונפנה



איור 11.6: שורשים שאינם מספרים שלמים

שמאלה. המקדם הבא הוא -2 — כך שהקטע הבא נבנה לאחור מ-$(1,0)$ ל-$(3,0)$. לבסוף, המסלול פונה למטה וקו באורך 1 נבנה מ-$(3,0)$ ל-$(3,-1)$.

קל לראות שאם המסלול השני מתחיל בזווית של $-45^\circ = 1$ הוא יחתוך את המסלול הראשון ב-$(3,-1)$. מכאן ש-$-\tan^{-1} -45^\circ = 1$ הוא שורש. אם נחלק את $p(x)$ ב-$x-1$, נקבל פולינום ריבועי x^2+x-1 ששורשיו הם:

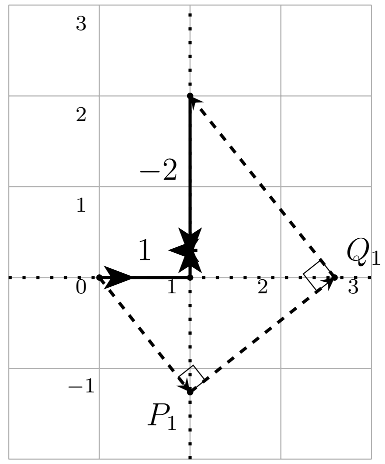
$$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\approx 0.62,\ -1.62\,.$$

לכן קיימים שני מסלולים נוספים: אחד שמתחיל $-\tan^{-1} 0.62 \approx -31.8^\circ$, ואחד שמתחיל $-\tan^{-1} 1.62 \approx 58.3^\circ$.

לפולינום $p(x)=x^3-3x^2-3x+1$ (סעיף 11.2.2) שורשים $2\pm\sqrt{3}\approx 3.73, 0.27$. הזוויות הן $-\tan^{-1} 3.73 \approx -75^\circ$ ו-$-\tan^{-1} 0.27 \approx -15^\circ$ כפי שניתן לראות בקווים עם הקווקוו העדין באיור 11.4.

11.2.5 השורש השלישי של שניים

כדי להכפיל קוביה עלינו למצוא $\sqrt[3]{2}$, שורש של הפולינום ממעלה שלוש x^3-2. בבנייה של המסלול הראשון נפנה שמאלה שמאלה בלי לבנות קטעי קו, כי a_2 ו-a_1 שניהם אפס. נפנה שוב שמאלה (למטה) ונבנה קו לאחור (למעלה) כי $a_0=-2$ שלילי. נבנה את הקטע הראשון של המסלול השני בזווית של -51.6° ו-$-\tan(-51.6^\circ)\approx 1.26\approx\sqrt[3]{2}$ (איור 11.7).



איור 11.7 : השורש השלישי של 2

11.3 ההוכחה של השיטה של Lill

נגביל את הדיון לפולינומים שהמקדם הראשי שלהם הוא אחד $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. אחרת, אפשר לחלק ב-$a_3$ ולפולינום המתקבל אותם שורשים.באיור 11.8 קטעי הקו של המסלול הראשון מסומנים ב-$b_2, b_1, a_2 - b_2, a_1 - b_1$. במשולש ישר-זווית אם זווית חדה אחת היא θ השנייה היא $90° - \theta$. מכאן שהזווית מעל ל-P והזווית משמאל ל-Q שוות ל-θ. כעת נרשום סדרת משוואות עבור $\tan\theta$ בשלושת המשולשים :

$$
\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{b_2}{1} = b_2 \\
\tan\theta &= \frac{b_1}{a_2 - b_2} = \frac{b_1}{a_2 - \tan\theta} \\
b_1 &= \tan\theta(a_2 - \tan\theta) \\
\tan\theta &= \frac{a_0}{a_1 - b_1} = \frac{a_0}{a_1 - \tan\theta(a_2 - \tan\theta)}\,.
\end{aligned}
$$

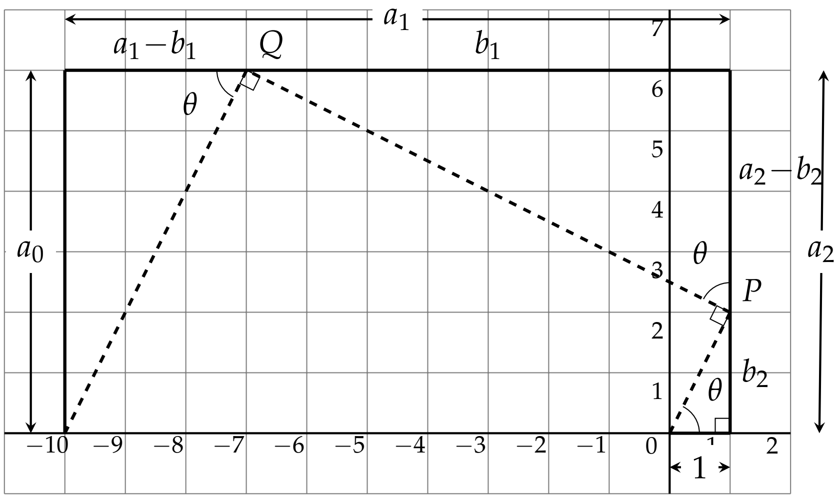
נפשט את המשוואה האחרונה, נכפיל ב--1 ונכניס את מקדמי ה--1 לתוך החזקות :

$$
\begin{aligned}
(\tan\theta)^3 - a_2(\tan\theta)^2 + a_1(\tan\theta) - a_0 &= 0 \\
(-\tan\theta)^3 + a_2(-\tan\theta)^2 + a_1(-\tan\theta) + a_0 &= 0\,.
\end{aligned}
$$

נסיק ש-$-\tan\theta$ הוא שורש ממשי של $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

11.4 הקיפול של Beloch

Margharita P. Beloch גילתה קשר מרתק בין אוריגמי והשיטה של Lill : הפעלה אחת בלבד של פעולה שנודעה בהמשך כאקסיומה 6 מייצרת שורש ממשי של כל פולינום ממעלה שלוש. לעתים מכנים את הפעולה ״הקיפול של Beloch״.



איור 11.8 : הוכחת השיטה של Lill

נדגים את השיטה על הפולינום $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ (סעיף 11.1). נזכור שקיפול הוא האנך האמצעי של קטע הקו בין כל שנקודה והשיקוף שלה סביב הקיפול. אנו רוצים ש-$\overline{RS}$ באיור 11.9 יהיה אנך אמצעי גם של $\overline{QQ'}$ וגם לשל $\overline{PP'}$, כאשר P', Q' הם השיקופים של P, Q מסביב ל-$\overline{RS}$, בהתאמה.

נבנה קו a_2' מקביל ל-a_2 ובאותו מרחק מ-a_2 כמו המרחק של a_2 מ-P, ונבנה את הקו a_1' מקביל ל-a_1 ובאותו מרחק מ-a_1 כמו המרחק של a_1 מ-Q. נפעיל את אקסיומה 6 כדי להניח בו-זמנית את P ב-P' על a_2' ואת Q ב-Q' על a_1'. הקיפול $\overline{RS}$ הוא האנך האמצעי של הקווים $\overline{PP'}$ ו-$\overline{QQ'}$, ולכן הזוויות ב-R ו-S הן ישרות כפי שמתחייב בשיטה של Lill.

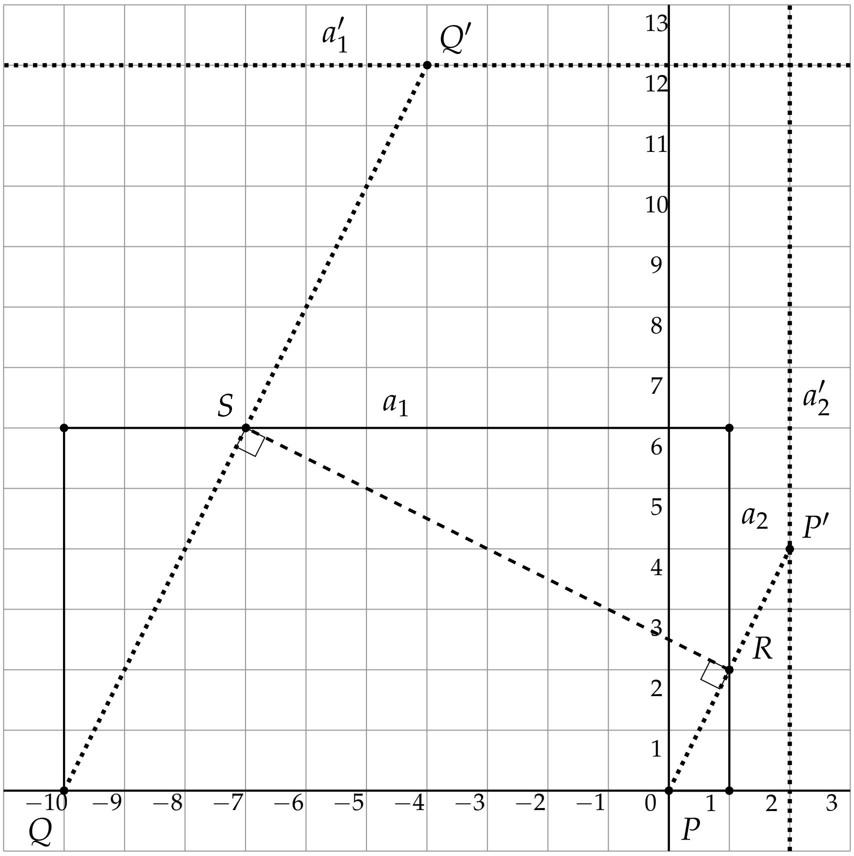
איור 11.10 מראה את הקיפול של Beloch על הפולינום $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ (סעיף 11.2.2). a_2 הוא קטע מהקו האנכי $x = 1$, והקו המקביל לו הוא a_2' הקו $x = 2$. a_1 הוא קטע מהקו האופקי $y = -3$, והקו המקביל לו הוא a_1' הקו $y = -2$. $\overline{RS}$ הוא האנך האמצעי גם של $\overline{PP'}$ וגם של $\overline{QQ'}$. המסלול $\overline{PRSQ}$ זהה למסלול באיור 11.4.

מה ההפתעה?

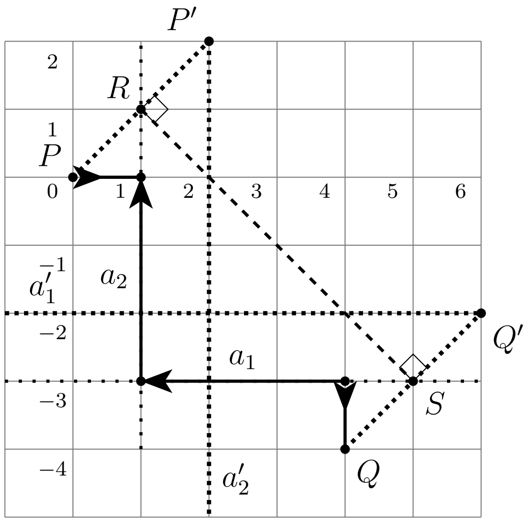
הדגמת השיטה של Lill כקסם תמיד מפתיעה. ניתן לבצע אותה באמצעות תוכנה גיאומטרית כגון גיאוגברה. מפתיע גם שהשיטה של Lill שפורסמה ב-1867, והקיפול של Beloch שפורסם ב-1936 הקדימו את האקסיומות של אוריגמי בשנים רבות.

מקורות

פרק זה מבוסס על [8, 24, 40].



איור 11.9: הקיפול של Beloch עבור $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$



איור 11.10: הקיפול של Beloch עבור $x^3 - 3x^2 + -3x + 1$

פרק 12

בניות גיאומטריות באוריגמי

בפרק זה נראה שבניות עם אוריגמי חזקים יותר מבניות עם סרגל ומחוגה. נביא שתי בניות לחלוקת זווית לשלושה חלקים, הראשונה של Hisashi Abe (סעיף 12.1) והשנייה של George E. Martin (סעיף 12.2), שתי בניות להכפלת קוביה, הראשונה של Peter Messer (סעיף 12.3) והשנייה של Marghareta P. Beloch (סעיף 12.4). הבנייה האחרונה היא של מתושע nonagon, מצולע משוכלל עם תשעה צלעות (סעיף 12.5).

12.1 הבנייה של Abe לחלוקת זווית לשלושה חלקים

נתונה זווית חדה $\angle PQR$, נבנה את הקו p ניצב ל-$\overline{QR}$ ב-Q והקו q ניצב ל-p ב-A כך שהוא חותך את $\overline{PQ}$. נבנה את הקו r, האנך האמצעי של $\overline{AQ}$ שחותך אותו בנקודה B. לפי אקסיומה 6 נבנה קיפול l המניח את A על $\overline{PQ}$ בנקודה A' ומניח את Q על r בנקודה Q'. תהי B' השיקוף של B מסביב ל-l. נבנה את הקווים $\overline{QB'}$ ו-$\overline{QQ'}$ (איור 12.1).

משפט 12.1 $\angle PQB' = \angle B'QQ' = \angle Q'QR = \angle PQR/3$.

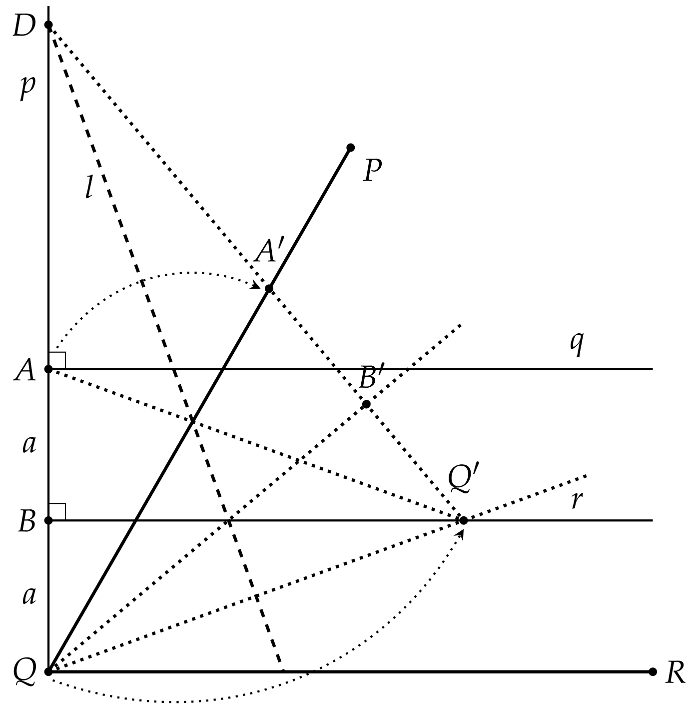
הוכחה(1) הנקודות A', B', Q' הן שיקופים סביב אותו קו l של הנקודות A, B, Q הנמצאות על קו אחד $\overline{DQ}$, ולכן הן נמצאות על קטע קו אחד $\overline{DQ'}$. לפי הבנייה, $\overline{AB} = \overline{BQ}$, $\angle ABQ' = \angle QBQ' = 90^\circ$, $\overline{BQ'}$ הוא צלע משותף, כך ש-$\triangle ABQ' \cong \triangle QBQ'$ לפי צלע-זווית-צלע. מכאן ש-$\angle AQA' = \angle QAQ' = \alpha$ ו-$\triangle AQ'Q$ הוא שווה-שוקיים (איור 12.2).

בגלל השיקוף $\triangle A'QQ' \cong \triangle AQ'Q$, ולכן גם $\triangle A'QQ'$ הוא משולש שווה-שוקיים. $\overline{QB'}$, השיקוף של $\overline{Q'B}$, הוא האנך האמצעי של משולש שווה-שוקיים ולכן $\angle A'QB' = \angle Q'QB' = \alpha$. לפי זוויות מתחלפות $\angle Q'QR = \angle QQ'B = \alpha$. ביחד:

$$\triangle PQB' = \angle A'QB' = \angle B'QQ' = \angle Q'QR = \alpha\,.$$

□

הוכחה(2) הקו l הוא קיפול ולכן הוא האנך האמצעי של $\overline{QQ'}$. נסמן ב-U את נקודת החיתוך של l עם $\overline{QQ'}$, נסמן ב-V את נקודת החיתוך שלו עם $\overline{QB'}$ (איור 12.2). $\triangle VUQ \cong \triangle VUQ'$ לפי



איור 12.1: הבנייה של Abe לחלוקת זווית לשלושה חלקים

צלע-זווית-צלע כי $\overline{VU}$ הוא צלע משותף, הזוויות ב-U הן זוויות ישרות, ו-$\overline{Q'U} = \overline{QU}$. מכאן ש-$\angle VQU = \angle VQ'U = \alpha$ ו-$\angle Q'QR = \angle VQ'U = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות.

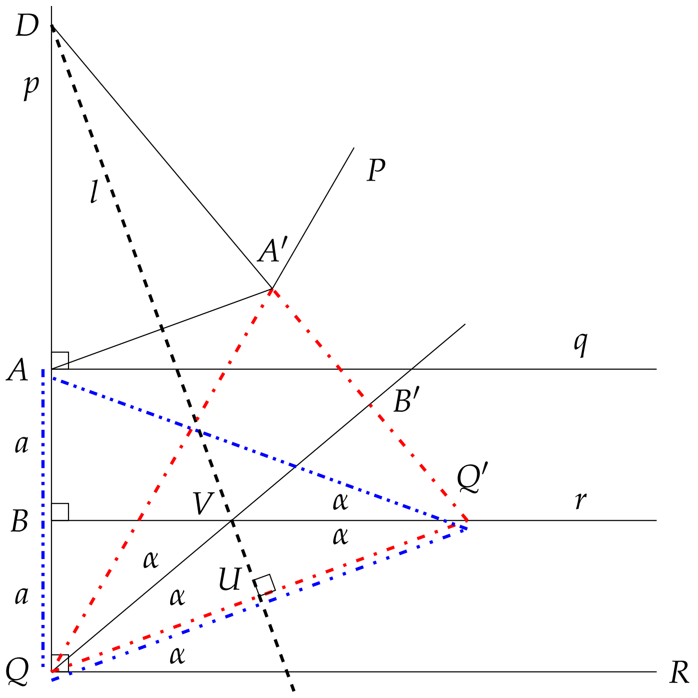
כמו בהוכחה הראשונה, A', B', Q' הן כולן שיקופים סביב l, ולכן הן כולן נמצאות על קטע קו אחד $\overline{DQ'}$, ו-$\overline{A'B'} = \overline{AB} = \overline{BQ} = \overline{B'Q'} = a$. מכאן ש-$\triangle A'B'Q \cong \triangle Q'B'Q$ לפי צלע-זווית-צלע ו-$\angle A'QB' = \angle Q'QB' = \alpha$. □

12.2 הבנייה של Martin לחלוקת זווית לשלושה חלקים

בנייה נתונה זווית חדה $\angle PQR$ תהי M נקודת האמצע של $\overline{PQ}$. בנו p ניצב ל-$\overline{QR}$ העובר דרך M ובנו q ניצב ל-p העובר דרך M. q מקביל ל-$\overline{QR}$. לפי אקסיומה 6 בנו קיפול l המניח את P ב-P' על p, ומניח את Q ב-Q' על q. ייתכן שקיים מספר קיפולים מתאימים; בחרו את הקיפול החותך את $\overline{PM}$. בנו את קטעי הקו $\overline{PP'}$ ו-$\overline{QQ'}$ (איור 12.3).

משפט 12.2 $\angle Q'QR = \angle PQR/3$.

הוכחה סמנו ב-U את נקודת החיתוך של $\overline{QQ'}$ עם p, וסמנו ב-V את נקודת החיתוך שלו עם l. סמנו ב-W את החיתוכים של $\overline{PQ}$ ו-$\overline{P'Q'}$ עם l. לא ברור מאליו ש-$\overline{PQ}$ ו-$\overline{P'Q'}$ חותכים את l באותה נקודה. אבל $\triangle PWP' \sim \triangle QQQ'$ כך שהגבהים מחלקים את שתי הזוויות הקודקודיות $\angle PWP', \angle QWQ'$ והם חייבים להיות על אותו קו.



איור 12.2: הוכחות של הבנייה של Abe (נשתמש ב-U, V בהוכחה השנייה)

$\triangle QMU \cong \triangle PMP'$ לפי זווית-צלע-זווית: $\angle P'PM = \angle UQM = \beta$ לפי זוויות מתחלפות, $\overline{QM} = \overline{MP} = a$ כי M היא נקודת האמצע של $\overline{PQ}$ ו-$\angle QMU = \angle PMP' = \gamma$ כי הן זוויות קודקודיות. מכאן ש-$b = \overline{MU} = \overline{P'M}$.

$\triangle UMQ' \cong \triangle P'MQ'$ לפי צלע-זווית-צלע: הראנו ש-$b = \overline{MU} = \overline{P'M}$, הזוויות ב-$M$ הן זוויות ישרות, $\overline{MQ'}$ הוא צלע משותף. הגובה של המשולש שווה-שוקיים $\triangle P'Q'U$ הוא חוצה הזווית $\angle P'Q'U$ ולכן $\angle P'Q'M = \angle UQ'M = \alpha$. בנוסף, $\angle UQ'M = \angle Q'QR = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות.

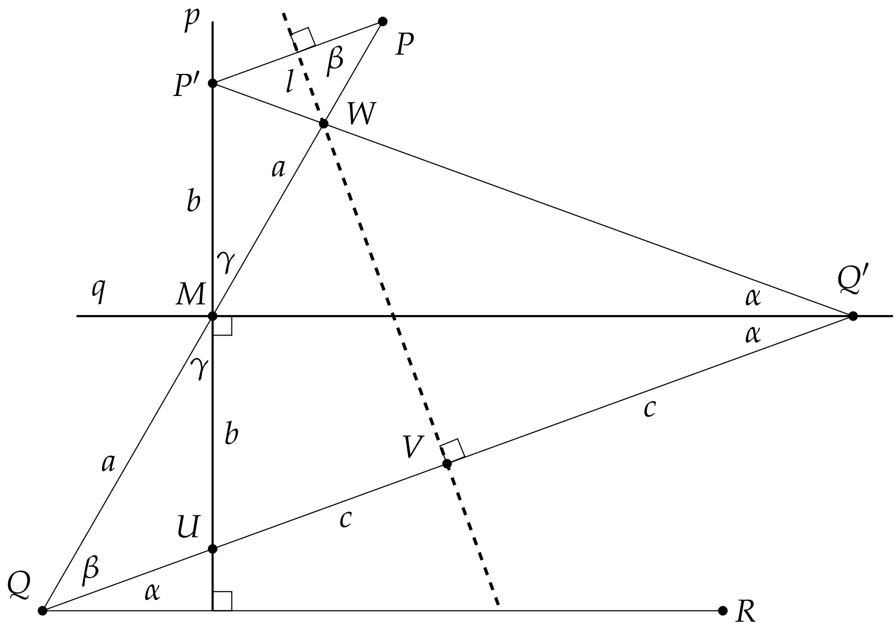
$\triangle Q'WV \cong \triangle QWV$ לפי צלע-זווית-צלע: $c = \overline{VQ'} = \overline{QV}$ הזוויות ב-V ישרות ו-$\overline{VW}$ הוא צלע משותף. מכאן ש:

$$\angle WQV = \beta = \angle WQ'V = 2\alpha$$
$$\angle PQR = \beta + \alpha = 3\alpha\,,$$

□

12.3 הבנייה של Messer להכפלת קוביה

לקוביה בנפח V צלעות באורך $\sqrt[3]{V}$. לקוביה עם נפח פי שניים אורכי הצלעות הם $\sqrt[3]{2V} = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{V}$, ולכן אם נוכל לבנות קטע קו באורך $\sqrt[3]{2}$, נוכל להכפיל באורך הנתון $\sqrt[3]{V}$ כדי להכפיל את הקוביה.



איור 12.3 : בנייה של Martin

בנייה: נקח דף נייר שהוא ריבוע ונקפל אותו לחצי כדי למצוא את הנקודת $I = (0, 1/2)$, $Q = (1, 1/2)$ (איור 12.4). נבנה את קטעי הקו $\overline{AC}$ ו-$\overline{BJ}$. אפשר לחשב את הקואורדינטות של נקודה החיתוך $K = (2/3, 1/3)$ על ידי פתרון המשוואות $y = 1 - x$ ו-$y = x/2$.

נבנה את הקו $\overline{EF}$ ניצב ל-$\overline{AB}$ דרך K, ונבנה את $\overline{GH}$, השיקוף של $\overline{BC}$ סביב $\overline{EF}$. חילקנו את צלע הריבוע לקטעים באורך $1/3$.

נשמתש באקסיומה 6 כדי להניח את C ב-C' על $\overline{AB}$, ולהניח את F ב-F' על $\overline{GH}$. נסמן ב-L את נקודת החיתוך של הקיפול עם $\overline{BC}$ ונסמן ב-b את אורכו של $\overline{BL}$. נשנה את סימון הצלע של הריבוע ל-$a + 1$ כאשר $a = \overline{AC'}$. אורכו של $\overline{LC}$ הוא $(a + 1) - b$ (איור 12.5).

משפט 12.3 $\overline{AC'} = \sqrt[3]{2}$.

הוכחה לאחר ביצוע הקיפול, קטע הקו $\overline{LC'}$ הוא שיקוף של קטע הקו $\overline{LC}$ מאותו אורך, וקטע הקו $\overline{C'F'}$ הוא שיקוף של קטע הקו $\overline{CF}$. מכאן ש :

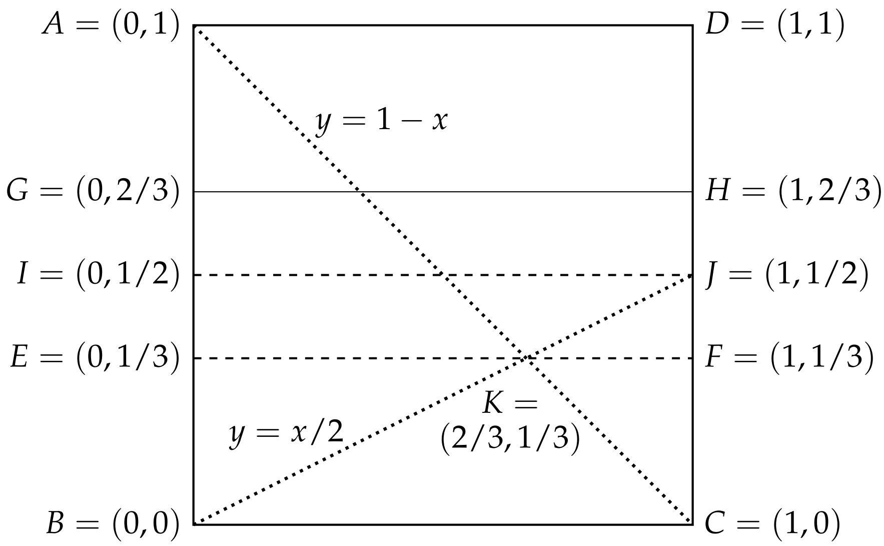
$$\overline{GC'} = a - \frac{a+1}{3} = \frac{2a-1}{3}\,. \tag{12.1}$$

$\angle FCL$ היא זווית ישרה, לכן גם $\angle F'C'L$ היא זווית ישרה.

$\triangle C'BL$ הוא משולש ישר-זווית ולפי משפט פיתגורס :

$$1^2 + b^2 = ((a+1) - b)^2 \tag{12.2}$$

$$b = \frac{a^2 + 2a}{2(a+1)}\,. \tag{12.3}$$



איור 12.4: בניית קטע קו באורך $1/3$

$\angle GC'F' + \angle F'C'L + \angle LC'B = 180^\circ$ כי הם מרכיבים את הקו הישר $\overline{GB}$. נסמן $\alpha = \angle GC'F'$:

$$\angle LC'B = 180^\circ - \angle F'C'L - \angle GC'F' = 90^\circ - \alpha\,,$$

ונסמן $\alpha' = 90^\circ - \alpha$. המשולשים $\triangle C'LB$, $\triangle C'F'G$ הם משולשים ישר-זווית, ולכן $\angle C'LB = \alpha$ ו-$\angle C'F'G = \alpha'$. מכאן ש-$\triangle C'BL \sim \triangle F'GC'$ ו:

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{C'L}} = \frac{\overline{GC'}}{\overline{C'F'}}\,.$$

ממשוואה 12.1 מתקבלת:

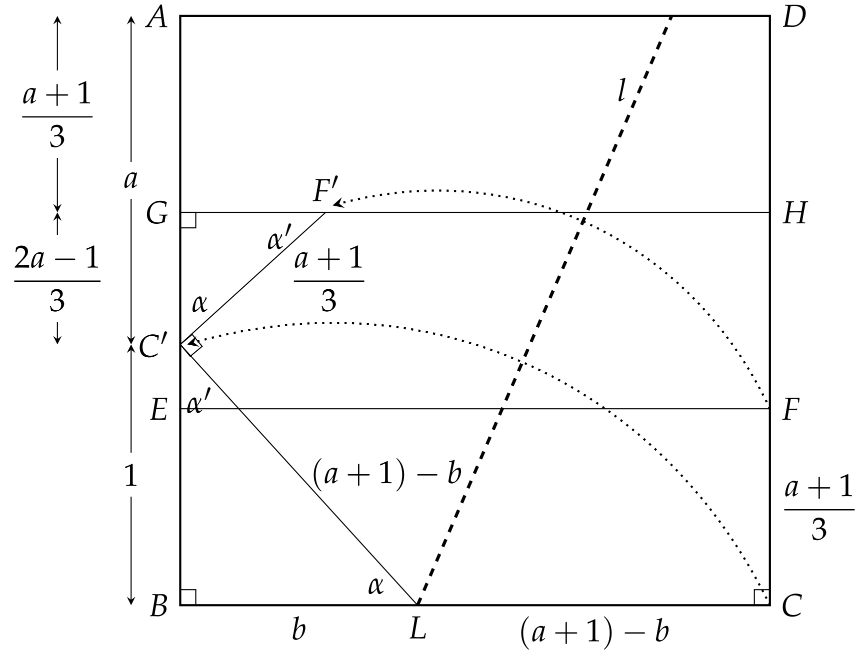
$$\frac{b}{(a+1)-b} = \frac{\frac{2a-1}{3}}{\frac{a+1}{3}}\,.$$

נשתמש בערכו של b ממשוואה 12.3 ונקבל:

$$\frac{\frac{a^2+2a}{2(a+1)}}{(a+1)-\frac{a^2+2a}{2(a+1)}} = \frac{2a-1}{a+1}$$

$$\frac{a^2+2a}{a^2+2a+2} = \frac{2a-1}{a+1}\,.$$

נפשט ונקבל $a^3 = 2$ ו-$a = \sqrt[3]{2}$. $\square$



איור 12.5: בניית $\sqrt[3]{2}$

12.4 הבנייה של Beloch להכפלת קוביה

הקיפול של Beloch (אקסיומה 6) מסוגל לפתור משוואות ממעלה שלוש ולכן סביר לשער שניתן להשתמש בו כדי להכפיל קוביה. הנה בנייה ישירה שמשתמשת בקיפול.

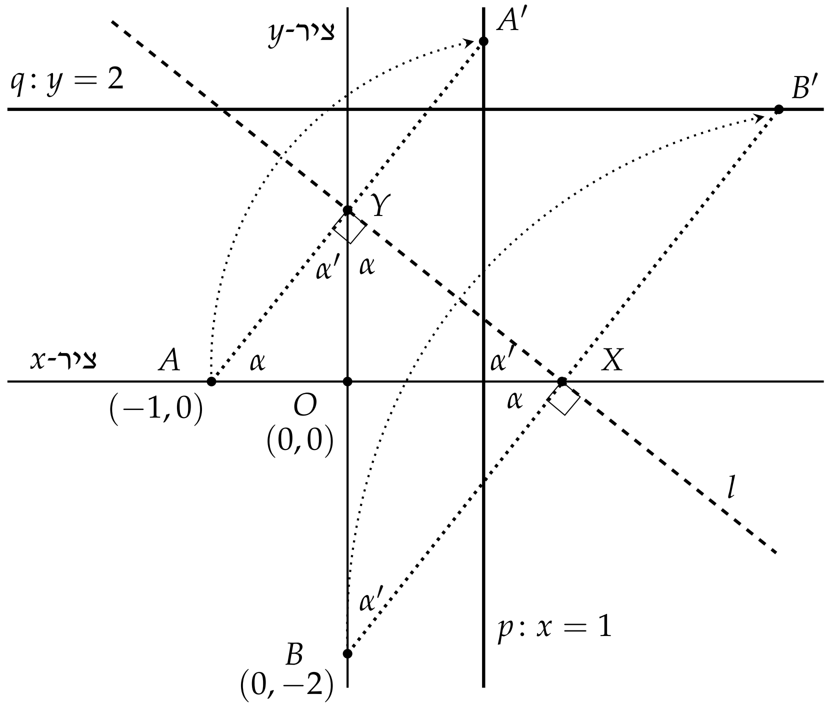
הבנייה: נסמן את הנקודה $(-1,0)$ ב-A ואת הנקודה $(0,-2)$ ב-B. נסמן ב-p את הקו $x=1$ וב-q את הקו $y=2$. לפי אקסיומה 6 ניתן לבנות קיפול l המניח את A ב-A' על p, והמניח את B ב-B' על q. נסמן ב-Y את נקודת החיתוך של הקיפול עם ציר ה-y, ונסמן ב-X את נקודת החיתוך של הקיפול עם ציר ה-x (איור 12.6).

משפט 12.4 $\overline{OY} = \sqrt[3]{2}$.

הוכחה הקיפול הוא האנך האמצעי של $\overline{AA'}$ ו-$\overline{BB'}$, ולכן $\overline{AA'} \| \overline{BB'}$. $\angle XAY = \angle AXB = \alpha$ לפי זוויות מתחלפות. סימון הזוויות האחרות נובע מהתכונות של משולשים ישר-זווית. ניתן להסיק ש-$\triangle AOY \sim \triangle YOX \sim \triangle XOB$ ונתון $\overline{OA} = 1$, $\overline{OB} = 2$:

$$\frac{\overline{OY}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OX}}$$
$$\frac{\overline{OY}}{1} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{2}{\overline{OX}}\,.$$

משני היחסים הראשונים נקבל $\overline{OY}^3 = 2$ ומהשני והשלישי נקבל $\overline{OY}\,\overline{OX} = 2$. נציב עבור $\overline{OX}$ ונקבל $\overline{OY}^3 = 2$ ו-$\overline{OY} = \sqrt[3]{2}$. □



איור 12.6: הכפלת קוביה לפי Beloch

12.5 בניית מתושע

ניתן לבנות מתושע (מצולע משוכלל עם תשע צלעות) על ידי פיתוח משוואה ממעלה שלוש עבור הזווית המרכזית ופתרון המשוואה באמצעות השיטה של Lill והקיפול של Beloch. הזווית המרכזית היא $\theta = 360^\circ/9 = 40^\circ$. לפי משפט א׳.6:

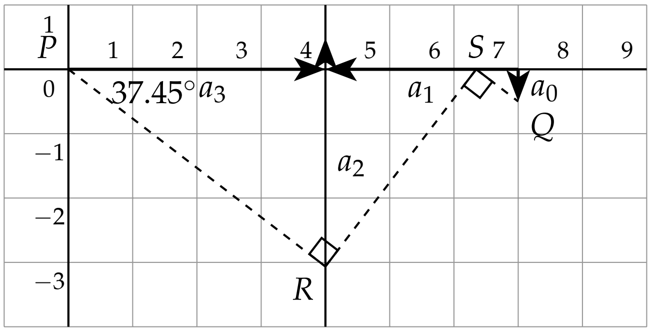
$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\,.$$

יהי $x = \cos 40^\circ$. עבור המתושע $4x^3 - 3x + (1/2) = 0$ כי $\cos 3\cdot 40^\circ = \cos 120^\circ = -(1/2)$. איור 12.7 מראה את המסלולים עבור המשוואה לפי השיטה של Lill.

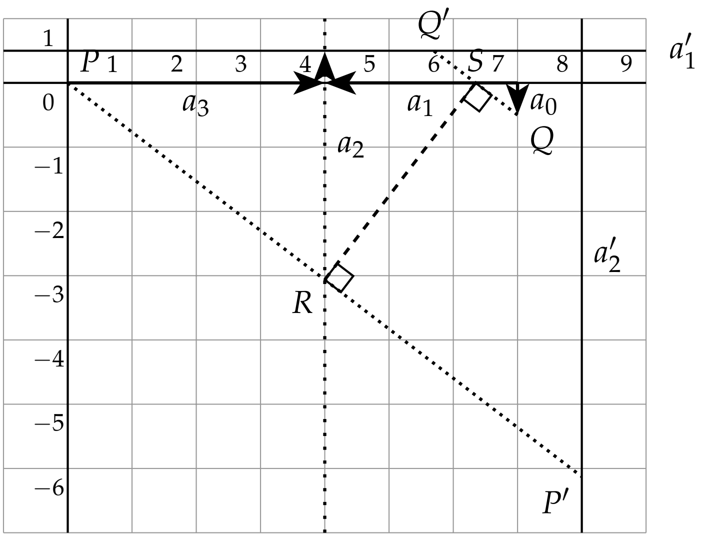
המסלול השני מתחיל מ-P בזווית -37.45° בערך. פניות של 90° ב-R ואז -90° ב-S קורמים למסלול לחתוך את המסלול הראשון בנקודת הקצה שלו Q, ולכן $x = -\tan(-37.45)^\circ = 0.766$ הוא שורש של $4x^3 - 3x + (1/2)$.

ניתן למצוא את השורש באמצעות הקיפול של Beloch. נמתח קו a_2' מקביל ל-a_2 באותו מרחק מ-a_2 כמו המרחק של a_2 מ-P. למרות שאורכו של a_2 הוא אפס, עדיין יש לו כיוון (למעלה) ולכן ניתן לבנות קו מקביל. באופן דומה, נמתח קו a_1' מקביל ל-a_1 באותו מרחק מ-a_1 כמו המרחק של a_1 מ-Q. $\overline{RS}$, הקיפול של Beloch, מניח בו-זמנית את P ב-P' על a_2', ואת Q ב-Q' על a_1'. הקיפול בונה את הזווית $\angle SPR = -37.45^\circ$ (איור 12.8).

לפי השיטה של Lill $-\tan(-37.45^\circ) \approx 0.766$ ולכן $\cos\theta \approx 0.766$ הוא השורש של המשוואה עבור הזווית המרכזית θ. נסיים את בניית המתושע על ידי בניית $\cos^{-1} 0.766 \approx 40^\circ$.



איור 12.7 : השיטה של Lill לבניית מתושע



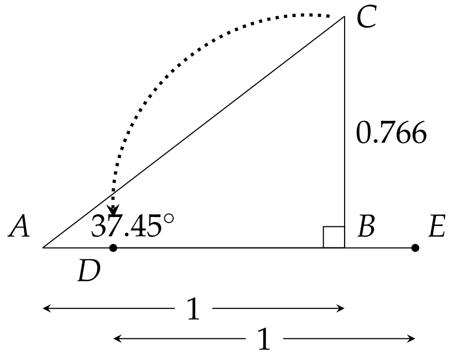
איור 12.8 : בנית מתושע באמצעות הקיפול של Beloch

במשולש ישר-הזווית $\triangle ABC$ עם $\angle CAB \approx 37.45°$ ו-1 $\overline{AB} = 1$ הצלע הנגדית היא $\overline{BC} \approx 0.766$ לפי ההגדרה של טנגונס (איור 12.9(א)). נקפל את $\overline{CB}$ מעל ל-$\overline{AB}$ כך שהשיקוף של C הוא D ו-$\overline{DB} = 0.766$. נמשיך את $\overline{DB}$ ונבנה את E כך ש-$\overline{DE} = 1$. נקפל את $\overline{DE}$ כדי לשקף את E ב-F בהמשך של $\overline{BC}$ (איור 12.9(ב)). אזי :

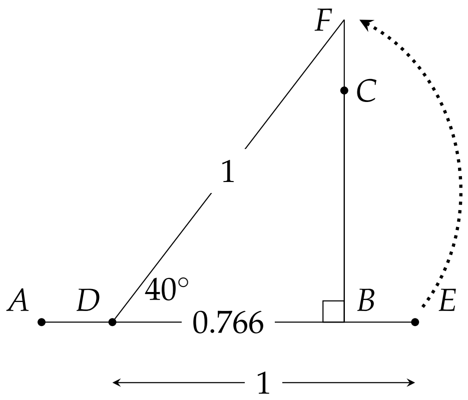
$$\angle BDF = \cos^{-1}\frac{0.766}{1} \approx 40° .$$

מה ההפתעה?

ראינו בפרקים 2 ו- 3 שכלים כגון הניאוסיס יכולים לבצע בניות שלא ניתן לבצע עם סרגל ומחוגה. לכן, מפתיע שניתן לחלק זווית לשלושה חלקים ולהכפיל קוביה רק על ידי קיפול נייר. .Roger C



איור 12.9(א) הטנגונס הוא הפתרון של המשוואה של המתושע



איור 12.9(ב) הקוסינוס של הזווית המרכזית של המתושע

Alperin פיתוח היררארכיה של שיטות בנייה שכל אחת חזקה יותר מהקודמת.

מקודות

פרק זה מבוסס על [2, 26, 31, 36].

פרק 13

אפשר להסתפק במחוגה

בשנת 1797 Lorenzo Mascheroni הוכיח שכל בנייה גיאומטרית באמצעות סרגל ומחוגה ניתנת לבנייה עם מחוגה בלבד. במאה העשרים התגלה שהמשפט הוכח בשנת 1672 על ידי Georg Mohr. המשפט נקרא היום משפט Mohr-Mascheroni. לאחר שנסביר בסעיף 13.1 מה המשמעות של בניית ללא מחוגה, נביא את ההוכחה בשלבים, תחילה עם ארבע בניות עזרה: שיקוף של נקודה (סעיף 13.2), בניית מעגל עם רדיוס נתון (סעיף 13.3), חיבור וחיסור של קטעי קו (סעיף 13.4) ובניית קטע קו כיחס בין קטעים אחרים (סעיף 13.5). סעיף 13.6 מראה איך למצוא את החיתוך בין שני קווים וסעיף 13.7 מראה איך למצוא את החיתוך בין קו ומעגל.

13.1 מהי בנייה רק עם מחוגה?

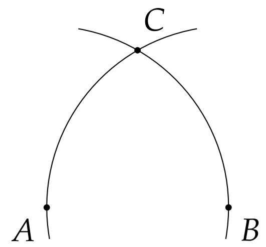
איור 13.1(א) מראה את הבנייה הרגילה של משולש שווה צלעות עם סרגל ומחוגה. איך אפשר לבנות משולש ללא קטעי הקווים $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$? למעשה, אין כל צורך **לראות** את הקווים. קו מוגדר על ידי שתי נקודות, ומספיק שבנו את הנקודות A, B, C כדי לקבל בנייה שקולה לבנייה עם סרגל (איור 13.1(ב)). באיורים נצייר בכל זאת קווים, אולם הקווים משמשים אך ורק להבנת הבנייה ולהוכחת נכונותה. חשוב להשתכנע שהבנייה עצמה משתמשת רק במחוגה.

כל צעד בבנייה באמצעות סרגל ומחוגה הוא אחת משלושת הפעולות הבאות:

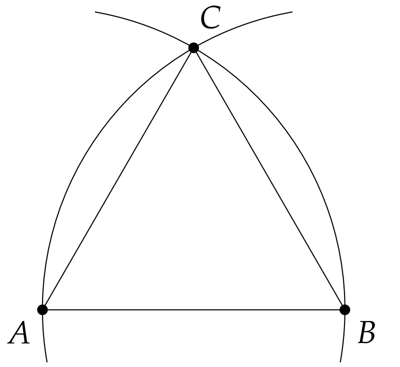
- מציאת נקודת החיתוך של שני קווים.
- מציאת נקודות החיתוך בין קו ומעגל.
- מציאת נקודות החיתוך בין שני מעגלים.

ניתן לבצע את הפעולה השלישית רק עם מחוגה. עלינו להראות שעבור שתי הפעולות הראשונות ניתן למצוא בנייה שקולה שמשתמשת רק במחוגה.

נשתמש בסימונים:



איור 13.1(א) בניית משולש שווה צלעות עם סרגל ומחוגה



איור 13.1(ב) בניית משולש שווה צלעות רק עם מחוגה

- $C(O, A)$: המעגל שמרכזו O העובר דרך הנקודה A.
- $C(O, r)$: המעגל שמרכזו O עם רדיוס r.
- $C(O, \overline{AB})$: המעגל שמרכזו O עם רדיוס שהוא אורך קטע הקו $\overline{AB}$.

13.2 שיקוף נקודה

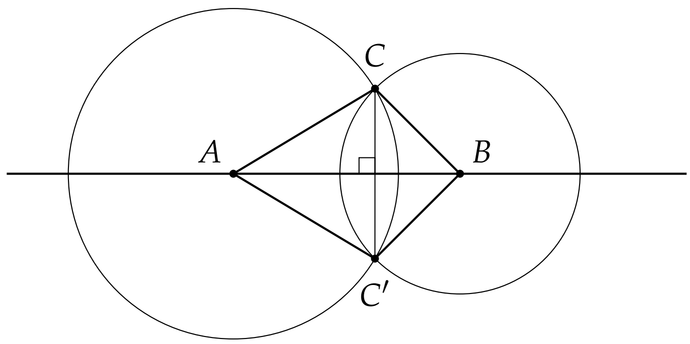
הגדרה 13.1 הנקודה C' היא **שיקוף** של הנקודה C מסביב לקטע הקו $\overline{AB}$, אם $\overline{AB}$ (או הקו המכיל אותו) הוא האנך האמצעי של $\overline{CC'}$.

משפט 13.1 נתון קטע קו $\overline{AB}$ ונקודה C שלא נמצאת על $\overline{AB}$, ניתן לבנות נקודה C' שהיא השיקוף של C מסביב ל-$\overline{AB}$.

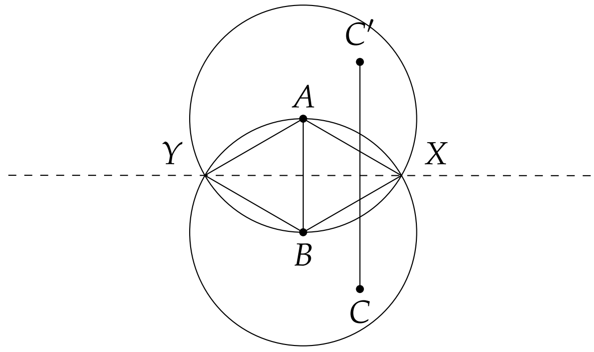
הוכחה בנו מעגל שמרכזו A העובר דרך C ומעגל שמרכזו B העובר דרך C. נקודות החיתוך של שני המעגלים הן הנקודה C והנקודה C' שהיא השיקוף של C (איור 13.2). $\triangle ABC \cong \triangle ABC'$ חופפים לפי צלע-צלע-צלע: $\overline{AC}, \overline{AC'}$ הם רדיוסים של אותו מעגל כמו גם $\overline{BC}, \overline{BC'}$, ו-$\overline{AB}$ הוא צלע משותף. מכאן ש-$\angle CAB = \angle C'AB$, ולכן $\overline{AB}$ הוא חוצה הזווית של $\angle CAC'$. אבל $\triangle CAC'$ הוא משולש שווה-שוקיים וחוצה הזווית $\overline{AB}$ הוא גם האנך האמצעי של $\overline{CC'}$ בסיס המשולש $\triangle CAC'$. לפי ההגדרה, C' היא השיקוף של C מסביב ל-$\overline{AB}$. □

13.3 בניית מעגל עם רדיוס נתון

משפט 13.2 נתונות נקודות A, B, C, ניתן לבנות את המעגל $c(A, \overline{BC})$, המעגל שמרכזו A שווה לאורך של $\overline{BC}$.



איור 13.2 : בניית שיקוף



איור 13.3 : בניית מעגל עם רדיוס נתון (1)

הוכחה נבנה את המעגלים $c(A,B)$, $c(B,A)$, ונסמן את נקודות החיתוך X,Y (איור 13.3). הנקודה A היא השיקוף של B סביב $\overline{XY}$ כי $\triangle YAX \cong \triangle YBX$ לפי צלע-צלע-צלע. לפי משפט 13.1 נבנה את C', השיקוף של C מסביב לקו $\overline{XY}$ ואז נבנה את $c(A,C')$ (איור 13.4).

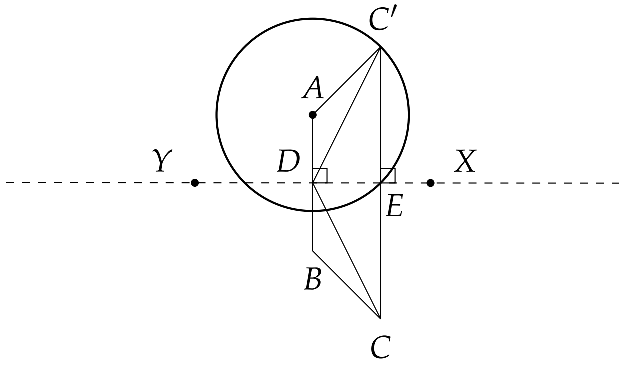
$\overline{XY}$ הוא האנך האמצעי לקטעי הקו $\overline{AB}, \overline{CC}'$. נסמן ב-$D$ את החיתוך של $\overline{XY}$ ו-$\overline{AB}$, ונסמן ב-E את החיתוך של $\overline{XY}$ ו-$\overline{CC'}$. אזי $\overline{C'E} = \overline{EC}$, $\overline{AD} = \overline{DB}$, ו-$\angle DEC = \angle DEC'$ הן זוויות ישרות. מכאן ש-$\triangle DEC \cong \triangle DEC'$ לפי צלע-זווית-צלע, ולכן $\overline{DC} = \overline{DC'}$ ו-$\angle ADC' = \angle BDC$ כן הן זוויות משלימות ל-$\angle EDC' = \angle EDC$. נסיק ש-$\triangle ADC' \cong \triangle BDC$ לפי צלע-זווית-צלע ו-$\overline{AC'} = \overline{BC}$. □

13.4 חיבור וחיסור קטעי קו

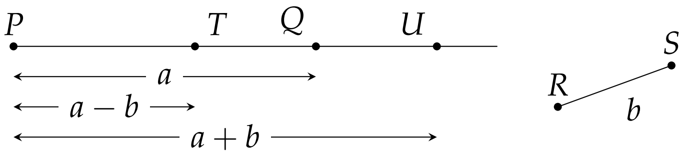
משפט 13.3 נתון קטע קו $\overline{PQ}$ באורך a וקטע קו $\overline{RS}$ באורך b, ניתן לבנות קטעי קו $\overline{QT}, \overline{QU}$ כך ש-$\overline{PUQT}$ הוא קטע קו, האורך של $\overline{PU}$ הוא $a-b$ והאורך של $\overline{PT}$ הוא $a+b$ (איור *13.5*).

ההוכחה די ארוכה ונציג אותה כסדרה של בניות.

משפט 13.4 ניתן לבנות טרפז שווה-שוקיים.



איור 13.4 : בניית מעגל עם רדיוס נתון (2)

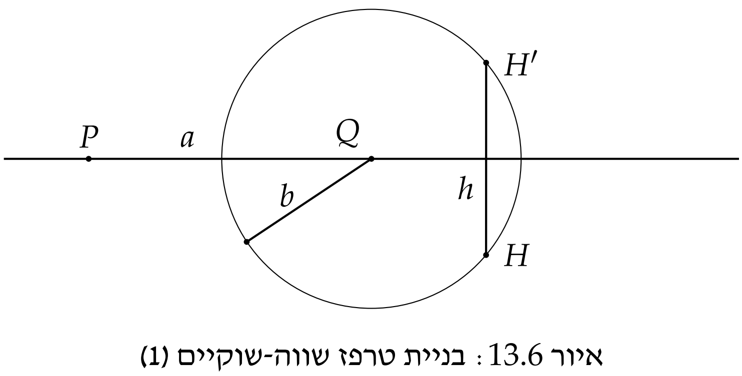


איור 13.5 : חיבור וחיסור של קטעי קו

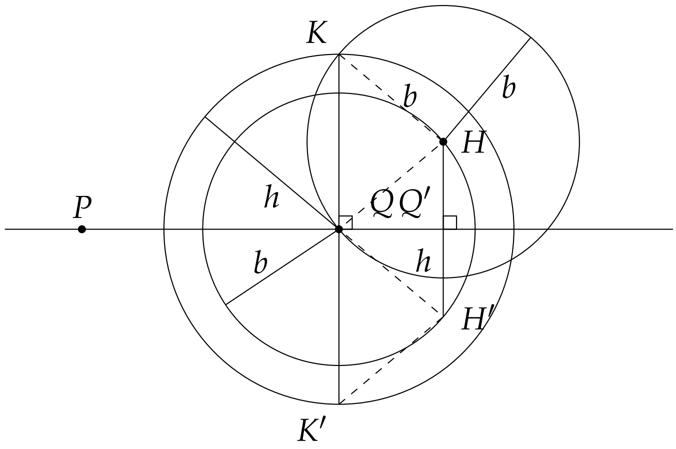
הוכחה תהי H, נקודה כלשהי על $c(Q,b)$. נבנה H', השיקוף שלה סביב $\overline{PQ}$, ונסמן ב-h את האורך של $\overline{HH'}$ (איור 13.6).

נבנה את המעגלים $c(Q,h)$, $c(H,b)$. תהי K נקודת חיתוך בין המעגלים, ונבנה את K' כשיקוף של K מסביב ל-$\overline{PQ}$ (איור 13.7).

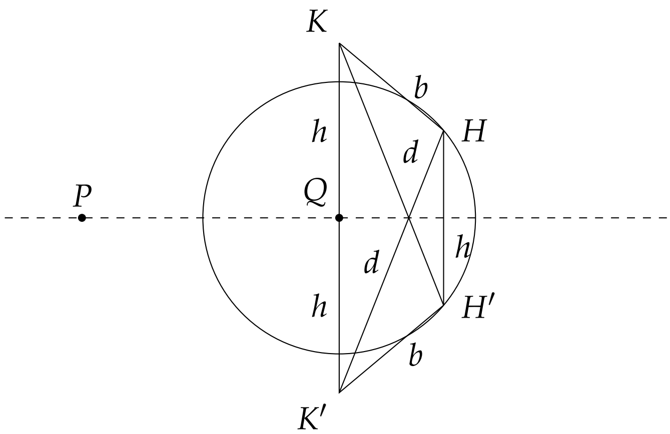
הקו המכיל את $\overline{PQ}$ הוא האנך האמצעי של $\overline{HH'}$ ו-$\overline{KK'}$, לכן $\overline{HH'}\|\overline{KK'}$. $\overline{KH} = b$ כי הוא הרדיוס של המעגל שמרכזו H, ו-K', H' הן שיקופים של K, H. $\triangle QQ'H \cong \triangle QQ'H'$ לפי צלע-צלע-צעל ו-$\triangle KQH \cong \triangle K'QH'$ לפי צלע-זווית-צלע, כך ש-$B = \overline{KH} = \overline{K'H'}$. נסיק א-$\overline{KHH'K'}$ מוא טרפז שווה-שוקיים בשסיסיו $\overline{KK'} = 2h$, $\overline{HH'} = h$ (איור 13.8). נסמן ב-d את אורך האלכסונים $\overline{K'H} = \overline{KH'}$. □



איור 13.6 : בניית טרפז שווה-שוקיים (1)



איור 13.7: בניית טרפז שווה-שוקיים (2)



איור 13.8: בניית טרפז שווה-שוקיים (3)

משפט 13.5 ניתן לחסום טרפז שווה-שוקיים במעגל.

הוכחה מייד ממשפט א׳.15 ומשפט א׳.16. □

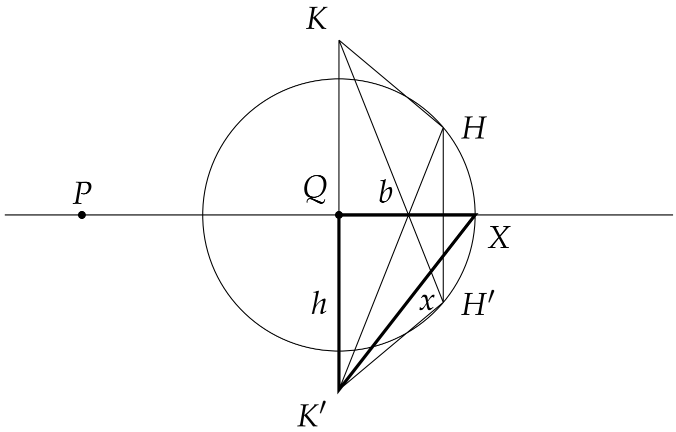
משפט 13.6 עבור d, b, h כפי שמופיע באיור *13.8*, $d^2 = b^2 + 2h^2$.

הוכחה המשפט הוא מסקנה ממשפט Ptolemy (משפט א׳.18) שאומר שבמרובע שחסום על ידי מעגל, מכפלת האלכסונים שווה לסכום מכפלות שני הזוגות של הצלעות הנגדיים. □ כעת ניתן להוכיח את משפט 13.3.

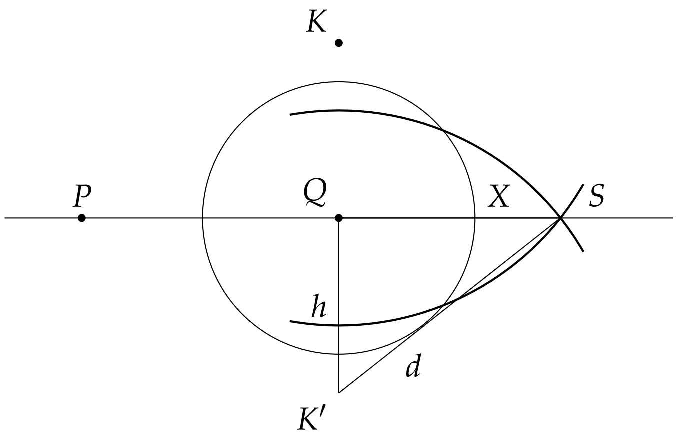
הוכחה תהי X נקודה על הקו $\overline{PQ}$ המאריך את $\overline{PQ}$ ב-b. (בהמשך נבנה את נקודה X.) נגדיר $x = \overline{K'X}$. ממשפט 13.6:

$$d^2 = b^2 + 2h^2 = (x^2 - h^2) + 2h^2 = x^2 + h^2 \,.$$

$\triangle QK'X$ הוא משולש ישר-זווית ולכן $x^2 = b^2 + h^2$ (איור 13.9).



איור 13.9 : בניית טרפז שווה-שוקיים (4)



איור 13.10 : בניית נקודה לחיבור וחיסור (1)

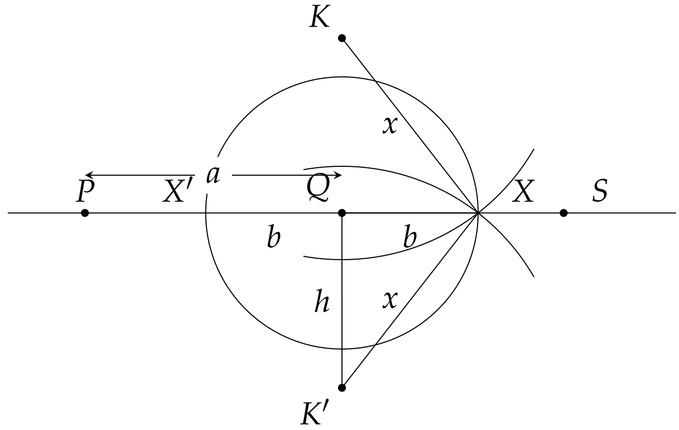
נבנה את הנקודה S כנקודת החיתוך של המעגלים $c(K,d)$ ו-$c(K',d)$ (איור 13.10). $\triangle QSK'$ משולש ישר-זווית ולפי משפט פיתגורס $QS^2+h^2=d^2$ ו-$QS=x$.

נבנה את הנקודה X כנקודות החיתוך בין המעגלים $c(K,x)$ ו-$c(K',x)$ (איור 13.11). $\overline{QX}=\sqrt{x^2-h^2}=b$ ולכן $\overline{PX}=a+b, \overline{PX'}=a-b$. □

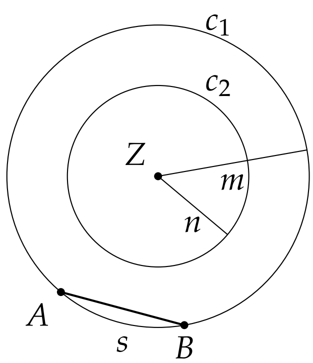
13.5 בניית קטע קו כיחס בין קטעי קו אחרים

משפט 13.7 נתונים שלושה קטעי קו באורכים n,m,s, ניתן לבנות קטע קו שאורכו :

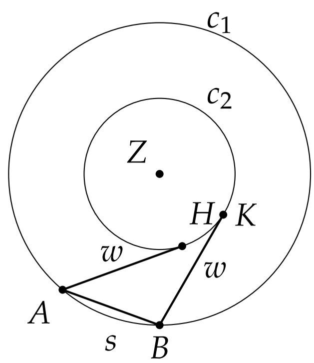
$$x=\frac{n}{m}s\,.$$



איור 13.11: בניית נקודה לחיבור וחיסור (2)



איור 13.12(א) בניית $x = \frac{n}{m}s$, צעד 1



איור 13.12(ב) בניית $x = \frac{n}{m}s$, צעד 2

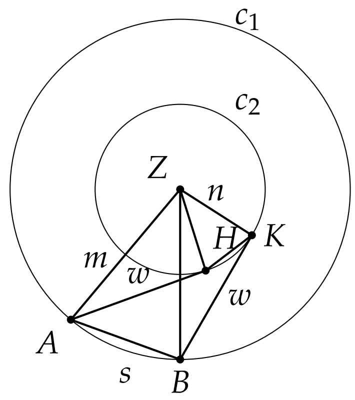
הוכחה נבנה שני מעגלים עם מרכז משותף: $c_1 = c(Z,m), c_2 = c(Z,n)$.[1] נבחר נקודה שרירותית A על c_1. לפי משפט 13.2 נבנה מיתר $\overline{AB}$ ב-c_1 שאורכו s (איור 13.12(א)). אם המיתר חותך את c_2, לפי 13.3 נכפיל את m,n במספר שלם k עד שהמיתר לא חותך את c_2. הכפלת הערכים אינה משנה את הערך שאנו בונים כי $x = \frac{kn}{km}s = \frac{n}{m}s$.

נבחר נקודה H כלשהי על המעגל c_2, ונסמן את אורך הקטע $\overline{AH}$ ב-w. נבנה נקודה K על c_2 כך שאורך הקטע $\overline{BK}$ גם הוא w (איור 13.12(ב)). $\triangle AHZ \cong \triangle BZK$ לפי צלע-צלע-צלע כי $\overline{ZA} = \overline{ZB} = m$ הם רדיוסים של אותו מעגל, כמו גם $\overline{ZH} = \overline{ZK} = n$ ו-$\overline{AH} = \overline{BK} = w$ לפי הבנייה (איור 13.13(א)). מ-$\triangle AZH \cong \triangle BZK$ נסיק ש-$\angle AZB = \angle HZK$ ואז $\angle AZB = \angle HZK$. קשה לראות את השוויונות הללו באיור, אבל איור איור 13.13(ב) מבהיר את היחסים בין הזוויות.

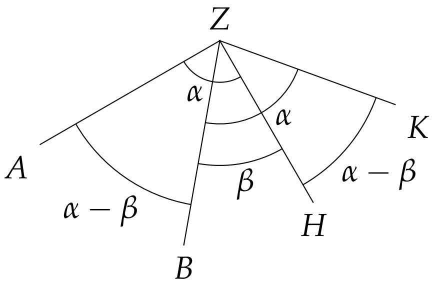
$\triangle ZAB \sim \triangle ZHK$ כי שניהם משולשים שווה-שוקיים עם אותו זווית קודקוד. נסמן ב-x את $\overline{HK}$ ונקבל:

$$\frac{m}{s} = \frac{n}{x}$$

[1] נניח ש-$m > n$, אחרת נחליף את הסימונים של m, n.



איור 13.13(א) בניית $x = \frac{n}{m}s$, צעד 3



איור 13.13(ב) $\angle AZB = \angle HZK$

$$x = \frac{n}{m}s\,.$$

□

13.6 מציאת נקודת החיתוך של שני קווים

משפט 13.8 נתונים שני קווים המכילים את קטעי הקו $\overline{AB}, \overline{CD}$, ניתן לבנות את נקודת החיתוך שלהם S.

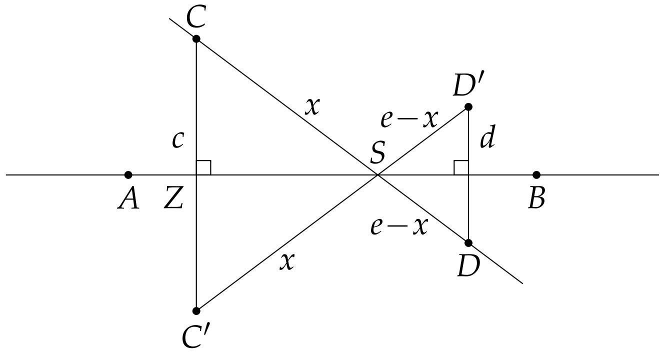
הוכחה נבנה את C', D', השיקופים של C, D מסביב ל-$\overline{AB}$. יש שני מקרים תלוי אם C, D נמצאות בשני הצדדים של $\overline{AB}$ או באותו צד כפי שניתן לראות באיורים 13.14, 13.15.

מקרה 1: C, D נמצאות בשני הצדדים של $\overline{AB}$. נקודת החיתוך S נמצאת על הקו $\overline{AB}$ כי $\triangle CZS \cong \triangle C'ZS$ לפי צלע-זווית-צלע: $\overline{CZ} = \overline{C'Z}$, $\angle CZS = \angle C'ZS = 90°$ ו-$\overline{ZS}$ צלע משותף. מכאן ש-$\overline{C'S} = \overline{CS}$, ובאופן דומה $\overline{D'S} = \overline{DS}$. $\triangle CSC' \sim \triangle DSD'$ ולכן $\frac{x}{e-x} = \frac{c}{d}$. נפתור את המשוואה עבור x ונקבל $x = \frac{c}{c+d}e$.

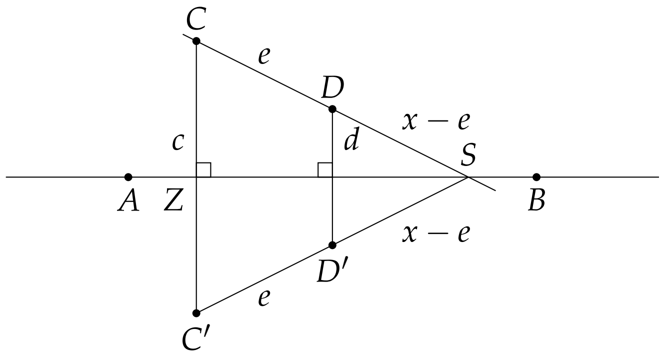
מקרה 2: C, D נמצאות באותו צד של $\overline{AB}$. $\triangle CSC' \sim \triangle DSD'$, ולכן $\frac{x}{x-e} = \frac{c}{d}$ ו-$x = \frac{c}{c-d}e$.

נבנה את המעגלים $c(C', d)$, $c(D, e)$ ונסמן את נקודת החיתוך שלהם ב-H (איור 13.16). סכום האורכים של $\overline{CC'}, \overline{C'H}$ הוא $c + d$. אנחנו צריכים להראות ש-H נמצאת בהמשך הקו של $\overline{CC'}$, כך ש-$\overline{CH}$ הוא קטע קו באורך $c + d$. במקרה ש-C, D נמצאות על אותו צד של $\overline{AB}$, $\overline{CH} = c - d$ (לא מופיע באיור).

H היא החיתוך של $c(C', d), c(D, e)$, ולכן $\overline{C'H} = d, \overline{DH} = e$. לפי הבנייה $\overline{C'D'} = e, \overline{DD'} = e$, ולכן המרובע $C'D'DH$ הוא מקבילית.



איור 13.14 : בניית החיתוך של שני קווים (1)



איור 13.15 : בניית החיתוך של שני קווים (2)

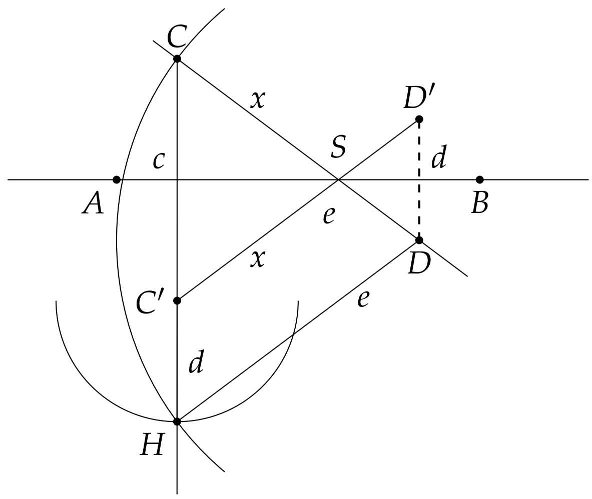
לפי הבנייה $\overline{CC'}\|\overline{DD'}$, ולכן $\overline{C'H}\|\overline{DD'}$ וגם $\overline{C'H}\|\overline{CC'}$. אחת מנקודות הקצה של הקטע היא C' והקטע חייב להיות על ההמשך של הקטע $\overline{CC'}$. בגלל שאחת מנקודות הקצה היא C' היא חייבת להיות על הקו המכיל את $\overline{CC'}$. לפי משפט 13.3 מהאורכים c, d, e נתונים ולפי משפט 13.3 ניתן לבנות קטע באורך $c+d$, ולפי משפט 13.7 ניתן לבנות קטע באורך $x = \dfrac{c}{c+d}e$. S, נקודת החיתוך של המעגלים $c(C, x)$ ו-$c(C', x)$, היא גם נקודת החיתוך של $\overline{AB}, \overline{CD}$ (איור 13.17). □

13.7 מציאת נקודת החיתוך של קו עם מעגל

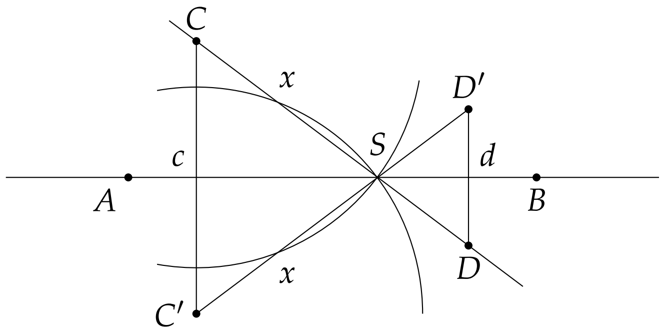
משפט 13.9 נתון מעגל $k = C(M, r)$ וקו l, ניתן לבנות את נקודות החיתוך של k, l.

הוכחה נבנה M', השיקוף של M מסביב ל-l, והמעגל $k' = c(M', r)$. $\triangle MXM' \cong \triangle MYM'$, X, Y, ולכן X, Y, נקודות החיתוך של k, k' הן נקודות החיתוך של l ו-k (איור 13.18).

בנייה זו אינה אפשרית אם מרכז המעגל M נמצא על הקו l. במקרה זה, נבחר נקודה שרירותיי A על l שהוא במרחק גדול מ-r מ-M. לפי משפט 13.3 נאריך או נקצר את $\overline{AB}$ ב-r. X, Y נקודות הקצה של הקטעים הללו, הן נקודות החיתוך של k ו-l (איור 13.19). □



איור 13.16 : בניית החיתוך של שני קווים (3)



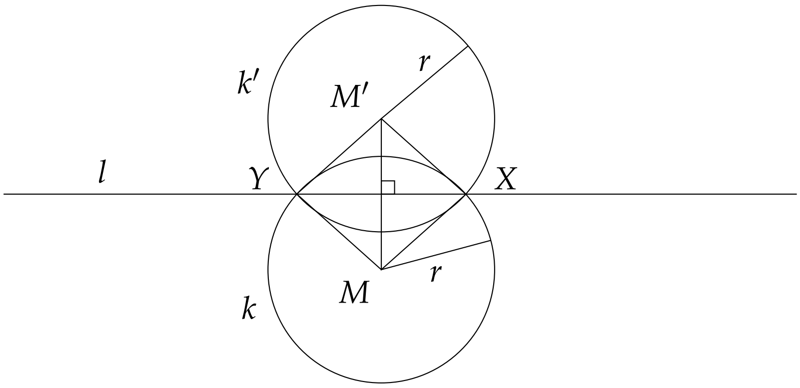
איור 13.17 : בניית החיתוך של שני קווים (4)

מהי ההפתעה?

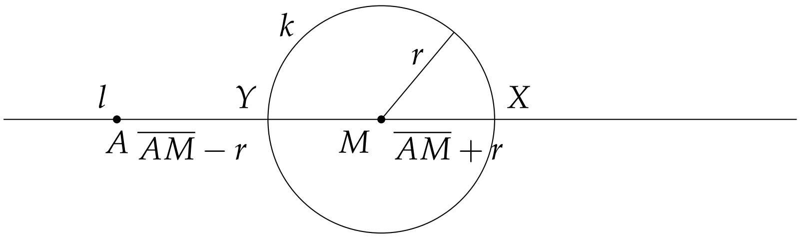
כאשר לומדים על בנייה עם סרגל ומחוגה, ברור מאליו ששני הכלים נחוצים, ולכן מפתיע מאוד לגלות שמחוגה בלבד מספיקה. ההוכחה די ארוכה כך שלא נשאיר את הסרגל בבית, אבל המשפט מראה שאין להניח שאין חלופות למושגים מתמטיים ידועים.

מקורות

פרק זה מבוסס על בעיה מספר 33 ב-[13] ועל העיבוד שלה על ידי Michael Woltermann [14]. הוכחה נוספת ניתן למוצא ב-[25].



איור 13.18 : בניית החיתוך של קו מעגל (1)



איור 13.19 : בניית החיתוך של קו מעגל (2)

פרק 14

אפשר להסתפק בסרגל ביחד עם מעגל אחד

האם כל בנייה עם סרגל ומחוגה ניתנת לבנייה עם סרגל בלבד? התשובה היא שלילית כי קווים הוגדרים על ידי משוואות ליניאריות ולא יכולים להגדיר מעגלים שמשוואותיהם ריבועיות. ב-1822 Jean-Victor Poncelet שיער שכן ניתן להסתפק בסרגל בלבד בתנאי שקיים במישור מעגל אחד בלבד. המשפט הוכח ב-1833 על ידי Jakob Steiner.

לאחר שנסביר בסעיף 14.1 מה המשמעות של בנייה רק עם סרגל ומעגל אחד, ההוכחה מוצגת בשלבים, תחילה עם חמש בניות עזר: בניית קו המקביל לקו נתון (סעיף 14.2), בניית ניצב לקו נתון (סעיף 14.3), העתקת קטע קו בכיוון נתון (סעיף 14.4), בניית קטע קו כיחס בין קטעים אחרים (סעיף 14.5) ובניית שורש ריבועי (סעיף 14.6). סעיף 14.7 מראה איך למצוא את החיתוכים של קו ומעגל וסעיף 14.8 מראה איך למצוא את החיתוכים של שני מעגלים.

14.1 מהי בנייה עם סרגל בלבד?

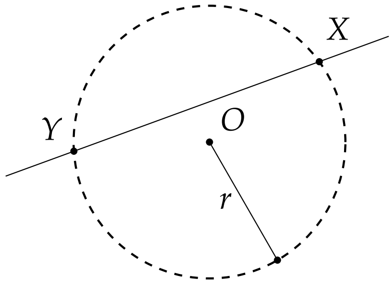
כל צעד בבנייה עם סרגל ומחוגה הוא אחת משלושת הפעולות הללו:

- מציאת נקודת החיתוך של שני קווים.
- מציאת נקודות החיתוך של קו עם מעגל.
- מציאת נקודות החיתוך של שני מעגלים.

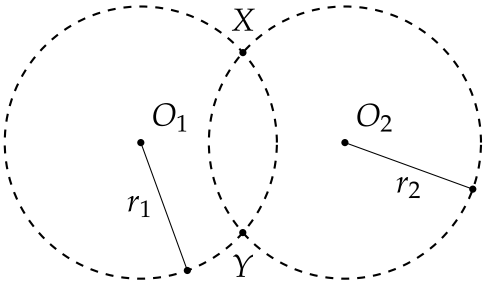
ניתן לבצע את הפעולה הראשונה עם סרגל בלבד.

מעגל מוגדר על ידי נקודה O, מרכזו, ועל ידי קטע קו באורך r, הרדיוס, שאחת מהנקודות הקצה שלו היא O. אם נצליח לבנות את הנקודות X, Y המסומנות ב-איור 14.1(א), נוכל לטעון שהצלחנו לבנות את נקודות החיתוך של מעגל נתון עם קו נתון. באופן דומה, הבנייה של X, Y ב-איור 14.1(ב), היא בניית נקודות החיתוך של שני מעגלים נתונים. המעגלים המצויירים בקווים מקווקווים לא מופיעים בבנייה והם רק עוזרים להבנתה.

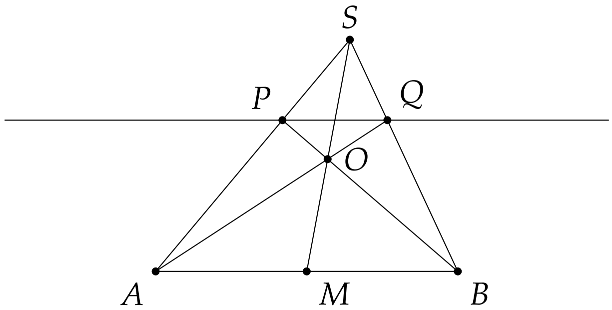
המעגל היחיד בבנייה ייקרא המעגל הקבוע ויכול להופיע בכל מקום במישור עם רדיוס שרירותי.



איור 14.1(א) X, Y הם נקודות החיתוך של קו ומעגל



איור 14.1(ב) X, Y הם נקודות החיתוך של שני מעגלים



איור 14.2 : בניית קו מקביל לקו מכוון

14.2 בניית קו המקביל לקו נתון

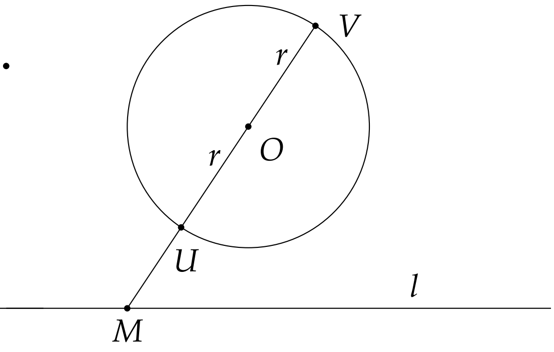
משפט 14.1 נתון קו l העובר דרך שתי נקודות A, B, ונתונה נקודה P שאיננה על הקו, ניתן לבנות קו דרך P המקביל ל-$\overline{AB}$.

הוכחה ההוכחה היא עבור שני מקרים בנפרד.

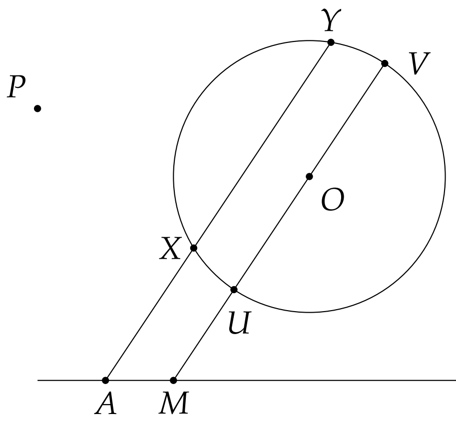
מקרה ראשון: $\overline{AB}$ נקרא קו מכוון אם נתונה M, נקודת האמצע של הקו. נבנה קרן הממשיכה את $\overline{AP}$, ונבחר S, נקודה כלשהי על הקרן מעבר ל-P. נבנה את הקווים $\overline{SB}$, $\overline{SM}$, $\overline{BP}$. נסמן ב-O את נקודת החיתוך של $\overline{BP}$ עם $\overline{SM}$. נבנה קרן הממשיכה את $\overline{AO}$ ונסמן ב-Q את החיתוך של הקרן עם $\overline{SB}$ (איור 14.2). טענה : $\overline{PQ} \| \overline{AB}$.

הוכחת הטענה משתמשת במשפט Ceva (משפט א׳.5) : אם קטעי הקו מקודקודי משולש לצלעות הנגדיות שנפגשים בנקודה M (כמו באיור 14.2), האורכים של הקטעי הצלעות מקיימים את היחס :

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = 1\,.$$



איור 14.3(א) בניית קו מכוון



איור 14.3(ב) בניית קו מקביל לקו מכוון

באיור 14.2 M היא נקודת האמצע של $\overline{AB}$ ולכן $1 = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$, ומכאן ש:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{SP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}}\,, \tag{14.1}$$

כי סדר נקודות הקצה של קטעי הקו אינו חשוב.

נוכיח ש-$\triangle ABS \sim \triangle PQS$:

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + \frac{\overline{QS}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + 1$$
$$\frac{\overline{AS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + \frac{\overline{PS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + 1\,.$$

לפי משוואה 14.1:

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + 1 = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + 1 = \frac{\overline{AS}}{\overline{PS}}\,,$$

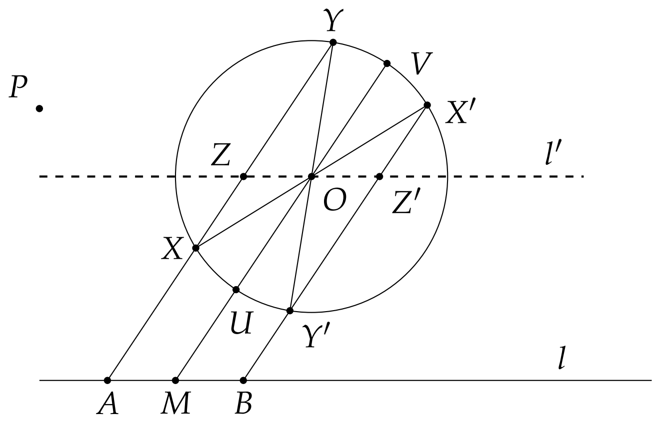
ולכן $\triangle ABS \sim \triangle PQS$ ו-$\overline{PQ} \| \overline{AB}$.

מקרה שני: $\overline{AB}$ אינו בהכרח קו מכוון. למעגל הקבוע c מרכז O ורדיוס r. P היא נקודה שאיננה נמצאת כל הקן דרכה יש לבנות קו המקביל ל-l (איור 14.3(א)).

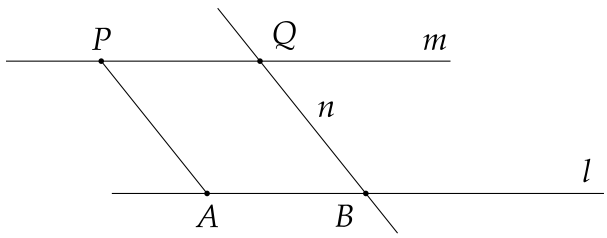
נבחר M, נקודה שרירותית על l ונבנה קרן $\overline{MO}$ שחותך את המעגל הקבוע ב-U, V. קו זה הוא קו מכוון כי O, מרכז המעגל, חוצה את הקוטר $\overline{UV}$. נבחר נקודה A על l ולפי הבנייה עבור קו מכוון, ניתן לבנות קו המקביל ל-$\overline{UV}$ דרך A. שחותך את המעגל ב-X, Y (איור 14.3(ב)). נבנה קוטר $\overline{XX'}$ דרך X במעגל O שחותך את הצד השני של המעגל ב-X', ובאופן דומה נבנה קוטר $\overline{YY'}$. נבנה קרן מ-X' שעבור דרך Y' ונסמן ב-B את נקודת החיתוך שלה עם l (איור 14.4).

$\overline{OX}, \overline{OX'}, \overline{OY}, \overline{OY'}$ הם כולם רדיוסים של המעגל ו-$\angle XOY = \angle X'OY'$ כי הן זוויות קודקודיות. לכן $\triangle XOY \cong \triangle X'OY'$ לפי צלע-זווית-צלע. נגדיר[1] קו l' כקן המקביל ל-l דרך O שחותך

[1] נגדיר, לא נבנה, כי אנו באמצע הוכחה שאותו קו הוא בן-בנייה.



איור 14.4 : הוכחה ש-l' מקביל ל-l



איור 14.5 : בניית העתק של קו מקביל לקו קיים

את $\overline{XY}$ ב-Z ושחותך את X', Y' ב-Z'. $\angle XOZ = \angle X'OZ'$ כי הן זוויות קודקודיות, ולכן $\triangle XOZ \cong \triangle X'OZ'$ לפי זווית-צלע-זווית. מכאן ש-$\overline{ZO} = \overline{OZ'}$. המרובעים $AMOZ$ ו-$BMOZ'$ הם מקביליות ולכן $\overline{AM} = \overline{ZO} = \overline{OZ'} = \overline{MB}$. □

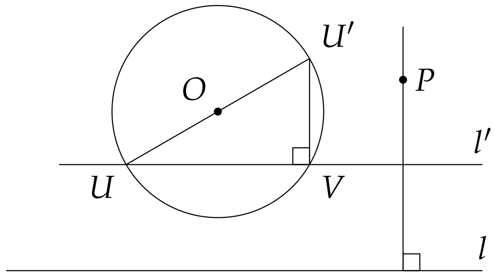
משפט 14.2 נתון קטע קו $\overline{AB}$ ונקודה P שאיננה נמצאת על הקו, ניתן לבנות קטע קו $\overline{PQ}$ מקביל ל-$\overline{AB}$ שאורכו שווה לאורכו של $\overline{AB}$. במילים אחרות, ניתן להעתיק $\overline{AB}$ מקביל לעצמו כאשר P היא אחת מנקודות הקצה שלה.

הוכחה הוכחנו שניתן לבנות קו m מקביל ל-$\overline{AB}$ דרך P, וגם קו n מקביל ל-$\overline{AP}$ דרך B. המרובע $\overline{ABQP}$ הוא מקבילית שצלעות הנגדיות שלה שוות $\overline{AB} = \overline{PQ}$ (איור 14.5). □

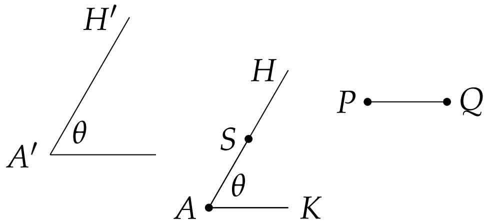
14.3 בניית אנך לקו נתון

משפט 14.3 נתון קו l ונקודה P שאיננה על הקו ניתן לבנות אנך ל-l דרך P.

הוכחה לפי משפט 14.1 נבנה קו l מקביל ל-l' שחותך את המעגל הקבוע ב-U, V (איור 14.6). נבנה את הקוטר $\overline{UOU'}$ והמיתר $\overline{U'V}$. $\angle UVU'$ היא זווית ישרה כי היא נשענת על קוטר. מכאן ש-$\overline{VU'}$ ניצב ל-$\overline{UV}$ ול-l. שוב לפי משפט 14.1 נבנה קו מקביל ל-$\overline{VU'}$ דרך P. □



איור 14.6 : בניית ניצב



איור 14.7 : העתקת קו בכיוון נתון

14.4 העתקת קטע קו נתון בכיוון נתון

משפט 14.4 נתון קטע קו ניתן לבנות עותק שלו בכיוון של קו אחר.

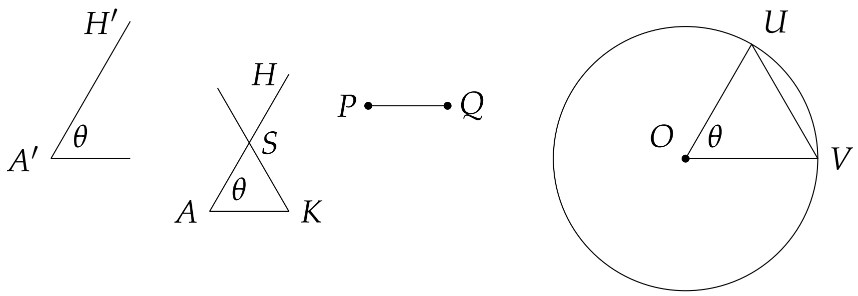
המשמעות של "כיוון" היא שקו שמוגדר על ידי שתי נקודות A', H' נמצא בזווית θ יחסית לציר כלשהו והמטרה היא לבנות $\overline{AS} = \overline{PQ}$ כך של-$\overline{AS}$ יהיה אותו זווית θ יחסיות לציר (איור 14.7).
הוכחה לפי משפט 14.1 ניתן לבנות קטע קו $\overline{AH}\|\overline{A'H'}$, וקטע קו $\overline{AK}$ כך ש-$\overline{AK}\|\overline{PQ}$. $\angle HAK = \theta$ ולכן מה שנשאר הוא למצוא נקודה S על $\overline{AH}$ כך ש-$\overline{AS} = \overline{PQ}$. נבנה שני רדיוסים במעגל הקבוע $\overline{OU}, \overline{OV}$ שמקבילים ל-$\overline{AH}, \overline{AK}$, בהתאמה, ונבנה קרן דרך K המקבילה ל-$\overline{UV}$. נסמן את נקודת החיתוך של הקו עם $\overline{AH}$ ב-S (איור 14.8). לפי הבנייה $\overline{AH}\|\overline{OU}$ ו-$\overline{AK}\|\overline{OV}$, ולכן $\angle SAK = \angle UOV = \theta$. $\overline{SK}\|\overline{UV}$ ו-$\triangle SAK \sim \triangle UOV$ לפי זווית-זווית-זווית, $\triangle UOV$ הוא שווה-שוקיים כי $\overline{OU}$, $\overline{OV}$ הם רדיוסים של אותו מעגל. מכאן ש-$\triangle SAK$ הוא שווה-שוקיים ו-$\overline{AS} = \overline{AK} = \overline{PQ}$. □

14.5 בניית קטע קו יחסית לקטעי קו אחרים

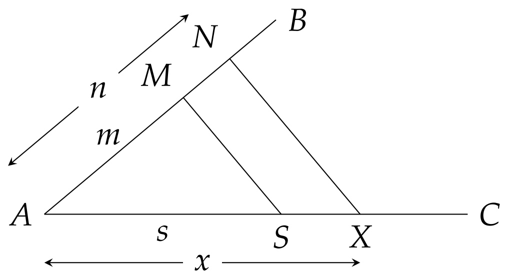
משפט 14.5 נתונים שלושה קטעי קו באורכים n, m, s, ניתן לבנות קטע קו באורך :

$$x = \frac{n}{m}s\,.$$

הוכחה נבחר נקודות A, B, C שאינן על אותו קו ונבנה קרונות $\overline{AB}, \overline{AC}$. לפי משפט 14.4 ניתן לבנות M, N, S כך ש-$\overline{AM} = m, \overline{AN} = n, \overline{AS} = s$. לפי משפט 14.1 נבנה קו המקביל ל-$\overline{MS}$ דרך



איור 14.8 : שימוש במעגל הקבוע כדי להעתיק קטע קו



איור 14.9 : בניית יחס אורכים באמצעות משולשים דומים

N שחותך את $\overline{AC}$ ב-X, ונסמן את אורכו של ב-x (איור 14.9). $\triangle MAS \sim \triangle NAX$ לפי זווית-זווית-זווית ולכן:

$$\frac{m}{n} = \frac{s}{x}, \qquad x = \frac{n}{m}s\,.$$

□

14.6 בניית שורש ריבועי

משפט 14.6 נתון קטעי קו באורכים a, b, ניתן לבנות קטע קו שאורכו $\sqrt{ab}$.

הוכחה אם נבטא את $x = \sqrt{ab}$ בצורה $x = \frac{n}{m}s$ נוכל להשתמש במשפט 14.5.

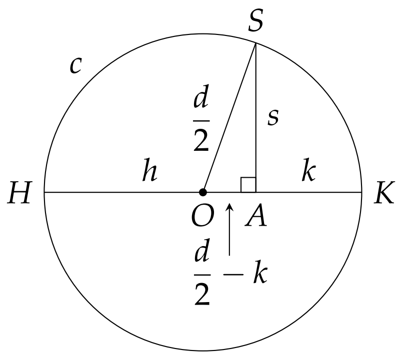
- עבור n נשתמש ב-d, הקוטר של המעגל הקבוע.

  עבור m נשתמש ב-$t = a + b$ שניתן לבנות מ-a, b לפי משפט 14.4.

- נגדיר את $s = \sqrt{hk}$ כאשר h, k a, b, t, d.

נגדיר $h = \frac{d}{t}a$, $k = \frac{d}{t}b$, ונחשב:

$$x = \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{th}{d}\frac{tk}{d}} = \sqrt{\left(\frac{t}{d}\right)^2 hk} = \frac{t}{d}\sqrt{hk} = \frac{t}{d}s$$



איור 14.10: בניית שורש ריבועי

$$h+k=\frac{d}{t}a+\frac{d}{t}b=\frac{d(a+b)}{t}=\frac{dt}{t}=d\,.$$

לפי משפט 14.4 נבנה $\overline{HA}=h$ על קוטר $\overline{HK}$ של המעגל הקבוע. מ-$h+k=d$ אפשר להסיק ש-$\overline{AK}=k$ (איור 14.10). לפי משפט 14.3 ניתן לבנות דרך A אנך ל-$\overline{HK}$. נסמן ב-S את החיתוך שלו עם המעגל הקבוע. $\overline{OS}=\overline{OK}=d/2$ הם רדיוסים של המעגל, ו-$\overline{OA}=(d/2)-k$.

לפי משפט פיתגורס:

$$\begin{aligned}
s^2=\overline{SA}^2&=\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}-k\right)^2\\
&=\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2+2\frac{dk}{2}-k^2\\
&=k(d-k)=kh\\
s&=\sqrt{hk}\,.
\end{aligned}$$

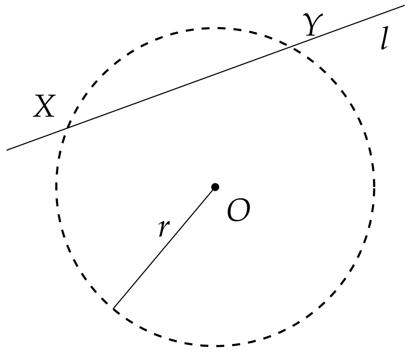
כעת ניתן לבנות $x=\frac{t}{d}s$ לפי משפט 14.5. □

14.7 בניית נקודות חיתוך של קו עם מעגל

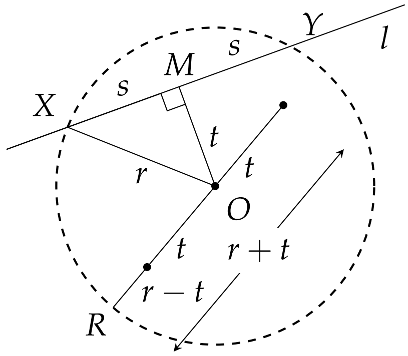
משפט 14.7 נתון קו l ומעגל c שמרכזו O ורדיוס r. ניתן לבנות את נקודות החיתוך של l עם c. (איור 14.11).

הוכחה לפי משפט 14.3 ניתן לבנות אנך ממרכז המעגל O לקו l. נסמן ב-M את נקודת החיתוך של l עם האנך. OM חוצה של המיתר $\overline{XY}$, כאשר X,Y הן נקודות החיתוך של הקו עם המעגל (איור 14.12). נגדיר $\overline{XY}=2s$ ו-$\overline{OM}=t$. שימו לב שבאיור s,X,Y הם רק הגדרות וטרם בנינו את נקודות החיתוך.

לפי משפט פיתגורס $s^2=r^2-t^2=(r+t)(r-t)$. לפי משפט 14.4 ניתן לבנות קטעי קו באורך r מהנקודה O בשני הכיוונים $\overline{RO}$ ו-$\overline{OR}$. התוצאה היא שני קטעי קו שאורכם $r+t, r-t$.



איור 14.11 : בניית נקודות החיתוך של קו ומעגל (1)



איור 14.12 : בניית נקודות החיתוך של קו ומעגל (2)

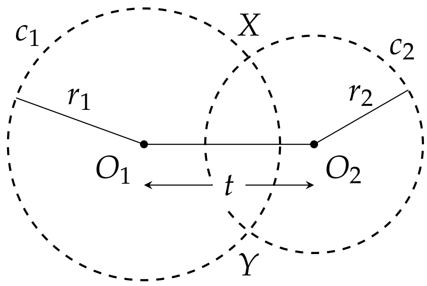
לפי משפט 14.6 ניתן לבנות קטע קו באורך $s = \sqrt{(r+t)(r-t)}$. שוב לפי משפט 14.4, ניתן לבנות קטעי קו באורך s על הקו הנתון l מהנקודה M בשני הכיוונים. הקצה השני של כל אחד מקטעי הקו האלה הוא נקודת חיתוך של l עם המעגל. □

14.8 בניית נקודות החיתוך של שני מעגלים

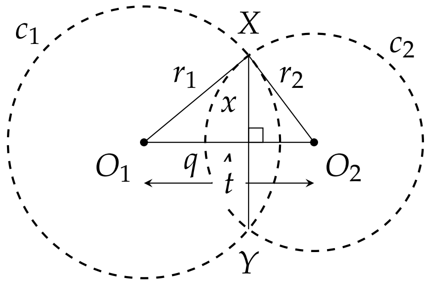
משפט 14.8 נתונים שני מעגלים עם מרכזים O_1, O_2 ורדיוסים r_1, r_2, ניתן לבנות את נקודות החיתוך שלהם.

הוכחה נבנה את $\overline{O_1O_2}$ ונסמן את אורכו ב-t (איור 14.13). נסמן ב-A את נקודת החיתוך של $\overline{O_1O_2}$ עם $\overline{XY}$, ונסמן $q = \overline{O_1A}, x = \overline{XA}$ (איור 14.14). טרם בנינו את הנקודה A, אבל אם נצליח לבנות את האורכים q, x, לפי משפט 14.4 נוכל לבנות את A באורך q מהנקודה O_1 לכיוון $\overline{O_1O_2}$. לאחר שבנינו את A, לפי משפט 14.3 ניתן לבנות את האנך ל-$\overline{O_1O_2}$ בנקודה A, ושוב לפי משפט 14.4 ניתן לבנות קטעי קו באורך x מהנקודה A בשני הכיוונים לאורך האנך. X, Y, הקצות של קטעי הקו, הם נקודות החיתוך של שני המעגלים.

בניית האורך q: נגדיר $d = \sqrt{r_1^2 + t^2}$, היתר של משולש ישר-זווית שניתן לבנות מהאורכים הידועים r_1, t. שימו לב ש-$\triangle O_1XO_2$ הוא לא בהכרח משולש ישר-זווית, ואת המשולש אפשר



איור 14.13: בניית החיתוך של שני מעגלים (1)



איור 14.14: בניית החיתוך של שני מעגלים (2)

לבנות בכל מקום במישור. במשולש ישר-זווית $\triangle XAO_1$, $\cos \angle XO_1A = q/r_1$. לפי משפט הקוסינוסים ב-$\triangle O_1O_2X$:

$$\begin{aligned} r_2^2 &= t^2 + r_1^2 - 2r_1 t \cos \angle XO_1O_2 \\ &= t^2 + r_1^2 - 2tq \\ 2tq &= (t^2 + r_1^2) - r_2^2 = d^2 - r_2^2 \\ q &= \frac{(d + r_2)(d - r_2)}{2t}\,. \end{aligned}$$

לפי משפט 14.4 ניתן לבנות את האורכים האלה, ולפי משפט 14.5 ניתן לבנות את q מהביטויים $d + r_2, d - r_2, 2t$.

בניית האורך x: לפי משפט פיתגורס:

$$x^2 = r_1^2 - q^2 = \sqrt{(r_1 + q)(r_1 - q)}\,.$$

לפי משפט 14.4 ניתן לבנות $h = r_1 + q$ ו-$k = r_1 - q$, ולפי משפט 14.6 ניתן לבנות $x = \sqrt{hk}$. □

מה ההפתעה?

חובה להשתמש במחוגה כי עם סרגל אפשר רק לחשב שורשים משוואות ליניאריות ולא ערכים כגון $\sqrt{2}$, היתר של משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים עם צלעות באורך 1. לכן, מפתיע שקיום של מעגל

אחד בלבד, ללא תלות במקומו של המרכז או של הרדיוס שלו, מספיק כדי לבצע כל בנייה שאפשרית עם סרגל ומחוגה.

מקורות

הפרק מבוסס על בעיה 34 ב-[13] שעובדה על ידי Michael Woltermann [14].

פרק 15

האם משולשים עם אותו שטח ואותו היקף חופפים?

האם משולשים עם אותו שטח ואותו היקף חופפים? לא בהכרח: לשני המשולשים הלא-חופפים עם הצלעות $(17,25,28)$ ו-$(20,21,27)$ היקף 70 ושטח 210 (איור 15.1). פרק זה מראה שנתון משולש עם אורכי צלעות רציונליים, ניתן לבנות משולש לא-חופף עם אורכי צלעות רציונליים, ועם אותו היקף ושטח. את השיטה נדגים על דוגמה ונראה שלמשולש עם הצלעות $(3,4,5)$ ולמשולש עם הצלעות $\left(\frac{156}{35},\frac{101}{21},\frac{41}{15}\right)$ אותו היקף 12 ואותו שטח 6.

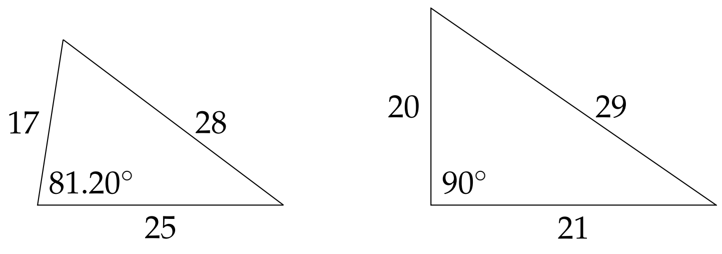
15.1 ממשולש לעקומה אליפטית

חוצי הזווית של משולש נחתכים בנקודה O הנקראת מרכז המעגל המוקף של המשולש (incenter) (איור 15.2).[1] נוריד גבהים מ-O לצלעות. לגבהים אורך r, הרדיוס של המעגל החסום. הגבהים וחוצי הזווית מייצרים שלושה זוגות של משולשים ישרים חופפים:

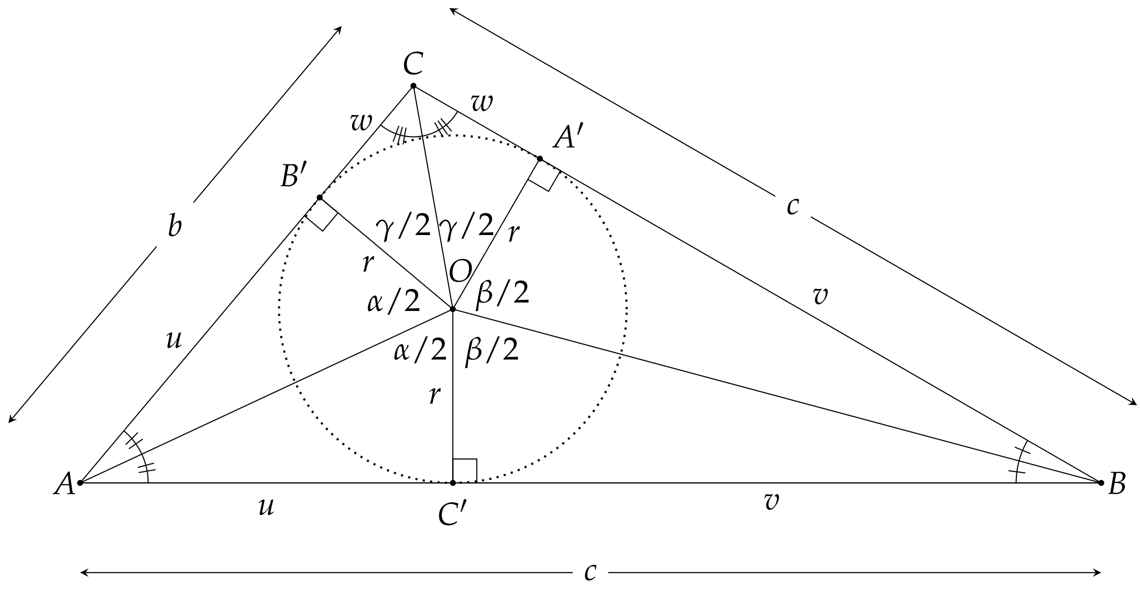
$$\triangle AOB' \cong \triangle AOC', \quad \triangle BOA' \cong \triangle BOC', \quad \triangle COA' \cong \triangle COB'\,.$$

הגבהים מחלקים את הצלעות לקטעי קו. u,v,w. שלהן עם המעגל. השטח של $\triangle ABC$ הוא סכום

[1] כך לפי המילון של האקדמיה ללשון העברית. מקובל לקרוא לנקודה: המרכז של המעגל החסום על ידי המשולש.



איור 15.1: משולשים לא חופפים עם אותו שטח ואותו הקיף



איור 15.2 : מעגל חסום המוגדר על ידי חיתוך חוצי הזווית משולש

השטחים של $\triangle AOC, \triangle BOC, \triangle AOB$:

$$A = \frac{1}{2}(w+v)r + \frac{1}{2}(v+u)r + \frac{1}{2}(u+w)r \tag{15.1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2(u+v+w)r \tag{15.2}$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)r \tag{15.3}$$

$$= rs\,, \tag{15.4}$$

כאשר s הוא מחצית היקף המשולש $\triangle ABC$. ניתן לבטא את u, v, w באמצעות רדיוס המעגל והזוויות המרכזיות $\alpha/2, \beta/2, \gamma/2$:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{u}{r}, \quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{v}{r}, \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{w}{r}\,. \tag{15.5}$$

כעת ניתן לבטא את מחצית ההיקף באמצעות הטנגנסים :

$$s = u+v+w = r\tan\frac{\alpha}{2} + r\tan\frac{\beta}{2} + r\tan\frac{\gamma}{2} = r\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\right)\,,$$

ולפי משוואה 15.4 השטח הוא :

$$A = sr = r^2\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\right)\,. \tag{15.6}$$

מ-$r = A/s$, ניתן לכתוב את משוואה 15.4 כ :

$$\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{A}{r^2} = \frac{A}{(A/s)^2} = \frac{s^2}{A}\,. \tag{15.7}$$

סכום הזוויות α, β, γ הוא 360°:

$$\gamma/2 = 360^\circ - (\alpha/2 + \beta/2) \tag{15.8}$$

$$\tan\gamma/2 = \tan(360^\circ - (\alpha/2 + \beta/2)) \tag{15.9}$$

$$\tan\gamma/2 = -\tan(\alpha/2 + \beta/2) \tag{15.10}$$

$$\tan\gamma/2 = \frac{\tan\alpha/2 + \tan\beta/2}{\tan\alpha/2\ \tan\beta/2 - 1}\,. \tag{15.11}$$

השתמשנו בנוסחה לטנגנס של החיבור של שתי זוויות (משפט א׳.9).

נפשט את הסימון על ידי הגדרת נעלמים עבור הטנגנסים:

$$x = \tan\frac{\alpha}{2}, \quad y = \tan\frac{\beta}{2}, \quad z = \tan\frac{\gamma}{2}\,. \tag{15.12}$$

לפי משוואה 15.11 ניתן לבטא את $z = \tan\gamma/2$ כתלות ב-x, y:

$$z = \frac{x+y}{xy-1}\,. \tag{15.13}$$

עם סימן זה משוואה 15.7 היא:

$$x + y + \frac{x+y}{xy-1} = \frac{s^2}{A}\,. \tag{15.14}$$

נתון ערכים קבועים של A ו-s, האם קיימים פתרונות שונים למשוואה 15.14?

עבור משולש ישר-הזווית $(3,4,5)$:

$$\frac{s^2}{A} = \frac{\left(\frac{1}{2}(3+4+5)\right)^2}{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4} = \frac{6^2}{6} = 6\,.$$

אם קיים פתרון אחר למשוואה 15.14 עם $s^2/A = 6$, ניתן לכתוב אותו כ:

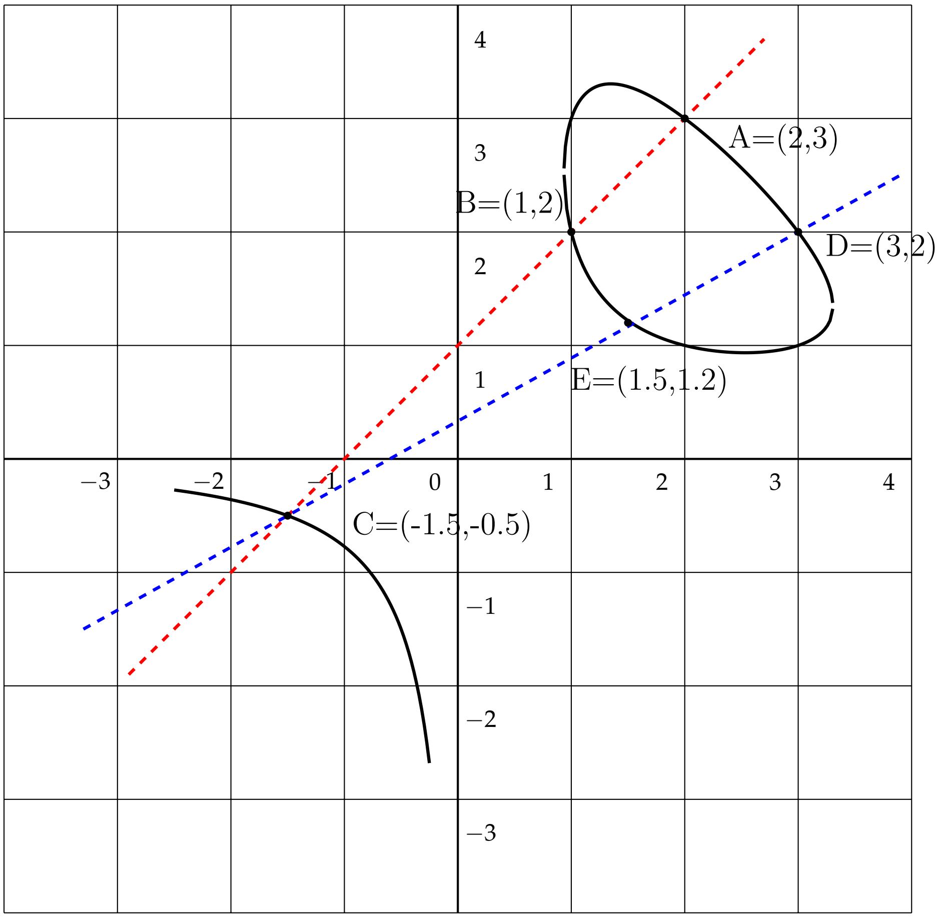
$$x + y + \frac{x+y}{xy-1} = 6 \tag{15.15}$$

$$x^2y + xy^2 - 6xy + 6 = 0\,. \tag{15.16}$$

משוואה זו נקראת עקומה אליפטית (elliptic curve).

15.2 פתרון המשוואה של העקומה האליפטית

העקומה באיור 15.3 היא גרף חלקי של משוואה 15.16. כל נקודה על העקומה ברביע הראשון היא פתרון, כי אורכי הצלעות חייבים להיות חיוביים. הנקודות A, B, D מתאימות למשולש $(3,4,5)$ כפי שנראה בסעיף 15.3. כדי למצוא פתרונות רציונליים נוספים, נשתמש ב-**שיטת שני סקנסים** (**method of two secants**).



איור 15.3: שיטת שני הסקנטים

נצייר סקנס דרך הנקודות $A = (2,3)$ ו-$B = (1,2)$ שחותך את העקומה ב-$C = (-1.5, -0.5)$. נקודה זו אינה פתרון כי הקואורדינטות שליליים. אם נצייר סקנס שני מ-C ל-$D = (3,2)$, החיתוך שלו עם העקומה ב-$E \approx (1.5, 1.2)$ כן מהווה פתרון נוסף ונחשב בהמשך את הקואורדינטות.

המשוואה של הקו (האדום) דרך A, B היא $y = x + 1$. נציב עבור y במשוואה 15.16:

$$x^2(x+1) + x(x+1)^2 - 6x(x+1) + 6 = 0$$
$$2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 0\,.$$

מהנקודות A, B אנו יודעים שני שורשים $x = 2, x = 1$, ולכן ניתן לפרק את הפולינום ממעלה שלוש כך:

$$(x-2)(x-1)(ax+b) = 0\,,$$

כאשר רק השורש השלישי לא ידוע.

נכפיל את הגורמים ונסיק ש-$a = 2, b = 3$ כי $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = ax^3 + \cdots + 2b$. הגורם השלישי הוא $2x + 3$ שנותן אל השורש השלישי $x = -\frac{3}{2}$ ו-$y = x + 1 = -\frac{1}{2}$. זאת הנקודה $C = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ בגרף.

המשוואה של הקו (הכחול) דרך D, C היא:

$$y = \frac{5}{9}x + \frac{1}{3}\,. \tag{15.17}$$

נציב עבור y במשוואה 15.16:

$$\begin{aligned} x^2\left(\frac{5}{9}x + \frac{1}{3}\right) + x\left(\frac{5}{9}x + \frac{1}{3}\right)^2 - 6x\left(\frac{5}{9}x + \frac{1}{3}\right) + 6 &= 0 \\ \frac{70}{81}x^3 - \frac{71}{27}x^2 - \frac{17}{9}x + 6 &= 0\,. \end{aligned}$$

מ-C, D אנו יודעים שני שורשים $x = 3, x = -\frac{3}{2}$, כך שניתן לפרק את הפולינום מעלה שלוש:

$$(x-3)\left(x + \frac{3}{2}\right)(ax+b) = 0\,.$$

נשווה את המקדם של x^3 ונשווה את הקובע ונקבל:

$$\frac{70}{81}x - \frac{4}{3} = 0\,,$$

ולכן:

$$x = \frac{81}{70} \cdot \frac{4}{3} = \frac{27 \cdot 4}{70} = \frac{54}{35} \approx 1.543\,.$$

נחשב את y ממשוואה 15.17 ונקבל:

$$y = \frac{25}{21} \approx 1.190\,.$$

הערכים הללו קרובים למה שהערכנו מאיור 15.3: $(1.5, 1.2)$.

לבסוף, נחשב את z ממשוואה 15.13:

$$z = \frac{x+y}{xy-1} = \left(\frac{54}{35} + \frac{25}{21}\right) \Big/ \left(\frac{54}{35} \cdot \frac{25}{21} - 1\right) = \frac{2009}{615} = \frac{49}{15}\,.$$

15.3 פיתוח משולש מהעקומה האליפטית

ניתן לחשב את ארוכי הצלעות של המשולש $\triangle ABC$ מ-x, y, z ו-$r = A/s = 6/6 = 1$ תוך שימוש במשוואות 15.5, 15.12:

$$\begin{aligned} a &= w + v = r(z+y) = (z+y) \\ b &= u + w = r(x+z) = (x+z) \\ c &= u + v = r(x+y) = (x+y)\,, \end{aligned}$$

עבור הפתרון A של העקומה האליפטית אורכי הצלעות הם:

$$\begin{aligned}
a &= z + y = 1 + 3 = 4 \\
b &= x + z = 2 + 1 = 3 \\
c &= x + y = 2 + 3 = 5\,.
\end{aligned}$$

עבור הפתרון E של העקומה האליפטית אורכי הצלעות הם:

$$\begin{aligned}
a &= z + y = \frac{49}{15} + \frac{25}{21} = \frac{243 + 125}{105} = \frac{156}{35} \\
b &= x + z = \frac{54}{35} + \frac{49}{15} = \frac{810 + 1715}{525} = \frac{101}{21} \\
c &= x + y = \frac{54}{35} + \frac{25}{21} = \frac{1134 + 875}{735} = \frac{41}{15}\,.
\end{aligned}$$

נבדוק את התוצאה. מחצית ההיקף הוא:

$$s = \frac{1}{2}\left(\frac{156}{35} + \frac{101}{21} + \frac{41}{15}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{468 + 505 + 287}{105}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1260}{105}\right) = 6\,.$$

נחשב את השטח באמצעות הנוסחה של הרון (משפט א׳.3):

$$A = \sqrt{6\left(6 - \frac{156}{35}\right)\left(6 - \frac{101}{21}\right)\left(6 - \frac{41}{15}\right)} = \sqrt{36} = 6\,.$$

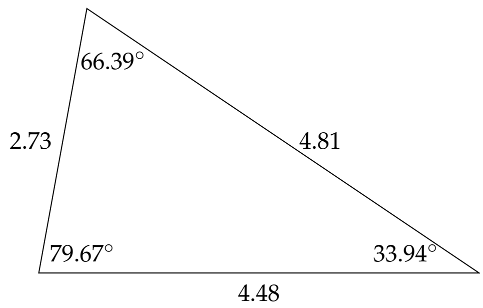
האם $(3,4,5) \cong \left(\frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15}\right)$?

כדי לפשט את החישוב נשתמש בקירובים העשירונים $(4.48, 4.81, 2.73)$. אזי:

$$\sqrt{4.48^2 + 2.73^2} = 5.25 \neq 4.81\,,$$

ולכן לא מדובר במשולש ישר-זווית והמשולש לא חופף ל-$(3,4,5)$.

נחשב את זווית המשולש באמצעות חוק הקוסינוסים (איור 15.4).



איור 15.4 : משולש עם שטח והיקף שווה למשולש $(3,4,5)$

מה ההפתעה?

האם משלושים עם אותו שטח ואותו היקף חופפים? הרושם הראשון שלי היה ״כן״ כי לא קל למצוא דוגמאות נגדיות. מה שמפתיע הוא שנתון משולש שרירותי עם צלעות רציונליות, ניתן לבנות משולש לא-חופף עם אותו שטח והיקף למרות שהתוצאה יכולה להיות מוזרה כגון המשולשים $(3,4,5)$ ו- $\left(\frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15}\right)$.

מקורות

פרק זה מבוסס על [33]. ברבש [3] מראה שאם נתון משולש שווה-צלעות, קיימים משולשים לא חופפים עם אותו היקף ואותו שטח, אולם ההוכחה שלה לא כוללת בנייה.

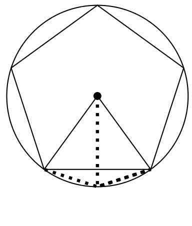
פרק 16

בניית מצולע משוכלל עם 17 צלעות

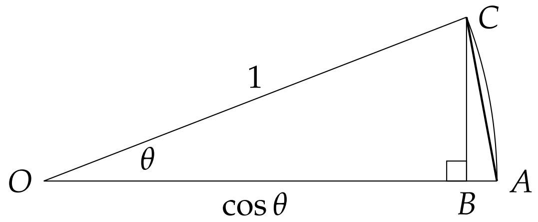
היוונים ידעו לבנות רק ארבעה מצולעים משוכללים: המשולש, הריבוע, המחומש והמצולע המשוכלל עם 15 צלעות. בנוסף, נתון מצולע משוכלל עם n צלעות, ניתן לבנות מצולע משוכלל עם $2n$ על ידי בניית המעגל החוסם ובניית חוצה הזווית המרכזית (איור 16.1). לא היתה שום התקדמות עד 1796 כאשר Carl Friedrich Gauss התעורר בוקר אחד, מעט לפני יום הולדתו ה-19, ועל ידי "חשיבה מרוכזת" מצא דרך לבנות heptadecagon, מצולע משוכלל עם 17 צלעות. הישג זה שיכנע אותו להיות מתמטיקאי.

סעיף 16.1 דן בקשר בין צלע של מצולע החסום על ידי מעגל לבין הזווית המרכזית שעליה הוא נשען. סעיף 16.2 מביא ללא הוכחה את המשפט הבסיסי של אלגברה. סעיף 16.3 מציג את שורשי היחידה, השורשים של הפולינום $x^n - 1$, שעומדים במרכז ההוכחה של Gauss. סעיפים 16.4 ו- 16.5 מביאים את הוכחה של Gauss שמבוססת על סמטריות של פולינומים. Gauss פיתח נוסחה שה-heptadecagon בן-בנייה, אבל בנייה גיאומטריה לא פורסמה במשך כמעט מאה שנה. סעיף 16.6 מביא בנייה אלגנטית של James J. Callagy. סעיף 16.7 מראה איך ניתן לפתח בניות של מחומש משוכלל גם באמצעות גיאומטריה וגם באמצעות טריגונומטריה.

ההוכחה ישירה יותר אם מציגים אותה עם מספרים מרוכבים. חומר זה מופרד במסגרות וניתן לדלג עליו.



איור 16.1: בניית מצולע משוכלל עם 10 צלעות ממחומש משוכלל



איור 16.2: הקוסינוס של הזווית המרכזית של מצולע משוכלל

16.1 בנייה של מצולעים משוכללים

הבנייה של heptadecagon היתה אבן דרך להוכחת משפט Gauss-Wantzel: מצולע משוכלל עם n צלעות הוא בן-בנייה עם סרגל ומחוגה אם ורק אם n הוא מכפלה של חזקה של 2 ואפס או יותר מספרי Fermat ראשונים **שונים** $2^{2^k}+1$. מספרי Fermat הראשוניים הידועים הם:

$$F_0 = 3,\ F_1 = 5,\ F_2 = 17,\ F_3 = 257,\ F_4 = 65537\,.$$

מצולע משוכלל עם 257 צלעות נבנה לראשונה על ידי Magnus Georg Paucker ב-1822 ועל ידי Friedrich Julius Richelot ב-1832. ב-1894 Johann Gustav Hermes טען שבנה מצולע משוכלל עם 65537 צלעות. כתב היד שלו נשמר באוניברסיטת Göttigen.

כדי לבנות מצולע משוכלל מספיק לבנות קטע קו באורך $\cos\theta$, כאשר θ היא הזווית המרכזית במעגל היחידה הנתמך על ידי המיתר שהוא צלע של המצולע. נתון קטע הקו $\overline{OB} = \cos\theta$, בנו אנך ב-$B$ וסמנו את החיתוך שלו עם מעגל היחידה ב-C. אזי:

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= 1\\ \cos\theta &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \overline{OB}\,.\end{aligned}$$

המיתר $\overline{AC}$ הוא צלע של המצולע (איור 16.2).

נתון קטע קו שאורכו מוגדר כ-1, האורכים שניתנים לבנייה הם אלה שניתן לקבל מאורכים קיימים תוך שימוש בפעולות $\{+,-,\times,/,\sqrt{}\}$ (סעיף 2.5). Gauss הראה ש-$\cos(360°/17)$, הקוסינוס של הזווית המרכזית של heptadecagon, בן-בנייה כי ניתן לבטא אותו תוך שימוש רק בפעולות הללו:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = &-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}\,+\\ &\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\,.\end{aligned}$$

16.2 המשפט הבסיסי של אלגברה

נשתמש במשפט שלהלן ללא הוכחה.

משפט 16.1 לכל פולינום ממעלה n בדיוק n שורשים.

הבאתי ניסוח פשוט של המשפט כי כל מה שאנחנו חייבים לדעת הוא קיימים n שורשים.

> **המשפט הבסיסי של אלגברה (The Fundamental Theorem of Algebra)** טוען שלכל פולינום לא-קבוע ממעלה n במשתנה אחד עם מקדמים מרוכבים יש בדיוק n שורשים מרוכבים. אם קיימים מספר שורשים בעלי אותו ערך, עלינו לספור את כולן. ל:
>
> $$x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x-2)$$
>
> שני שורשים שערכם 2. לפולינום $x^2 + 1$ עם מקדמים שלמים יש שני שורשים מרוכבים $\pm\sqrt{-1}$. באופן משונה, למרות שנושא המשפט קשור למבנים אלגבריים סופיים (פולינומים ממעלה n עם n שורשים), כדי להוכיח את המשפט חייבים להשתמש בשיטות מאנליזה, בדרך כלל, אנליזה של מספרים מרוכבים.

16.3 שורשי היחידה

לפי המשפט בסיסי של אלגברה (משפט 16.1) לפולינום $x^n - 1 = 0$ יש n שורשים עבור כל מספר שלם $n > 1$. שורש אחד הוא $x = 1$ ולכן קיימים $n - 1$ שורשים נוספים. נסמן שורש אחד מתוכם ב-r. בגלל ש-$r^n = 1$, r נקרא שורש היחידה מסדר n. מה עם r^2?

$$(r^2)^n = (r^n)^2 = 1^2 = 1\,.$$

חישוב דומה מראה ש-n המספרים:

$$1, r, r^2, \ldots, r^{n-2}, r^{n-1}$$

הם שורשים של היחידה מסדר n.

> יהי $r = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. לפי הנוסחה של de Moivre:
>
> $$\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^n = \cos\left(\frac{2n\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2n\pi}{n}\right) = 1\,.$$

משפט 16.2 יהי n מספר ראשוני ו-r שורש היחידה מסדר n. אזי:

$$\{1, r, r^2, \ldots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$$

שונים זה מזה ולכן הם מהווים את כל שורשי היחידה מסדר n.

הוכחה נניח שהשורשים לא שונים כך ש-$r^i = r^j$ עבור שני מספרים $1 \leq i < j \leq n$. אזי $r^j/r^i = r^{j-i} = 1$, כלומר, קיים לפחות מספר שלם חיובי אחד i' פחות מ-n כך ש-$r^{i'} = 1$.
יהי m המספר השלם החיובי הקטן ביותר. לפי אלגוריתם החילוק של שלמים, $n = ml + k$ עבור $0 < l < n$, $0 \leq k < m$. מ:

$$1 = r^n = r^{ml+k} = (r^m)^l \cdot r^k = 1^l \cdot r^k = r^k\,,$$

מתקבל $0 \leq k < m$ ו-$r^k = 1$. אבל m הוא המספר השלם החיובי הקטן ביותר המקיים את התנאי, חייב להתקיים $k = 0$ ו-$n = ml$ סתירה להנחה ש-n ראשוני. □

משפט 16.3 יהי $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ השורשים של פולינום $f(x)$ מסדר n. אזי:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-1})(x - a_n)\,. \tag{16.1}$$

הוכחה

לפי ההגדרה אם a_i הוא שורש של $f(x)$ אזי $f(a_i) = 0$, ולכן:

$$\begin{aligned} f(a_i) &= (a_i - a_1)(a_i - a_2) \cdots (a_i - a_{n-1})(a_i - a_n) \\ &= \cdots (a_i - a_i) \cdots = 0\,. \end{aligned}$$

מכאן ש-$f(x) = (x - a_i)g_i(x)$ עבור $g_i(x)$ כלשהו ובאינדוקציה הדבר נכון לכל השורשים. □
ממשוואה 16.1 קל לראות שהמקדם של $x^n - 1$ הוא:

$$-(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n)\,.$$

אבל המקדם של $x^n - 1$ עבור $n \geq 0$ הוא אפס ולכן:

$$\begin{aligned} 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} &= 0 \\ r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} &= -1\,. \end{aligned}$$

עבור heptadecagon המשוואה היא:

$$\begin{aligned} &r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + r^7 + r^8 + \\ &\quad r^9 + r^{10} + r^{11} + r^{12} + r^{13} + r^{14} + r^{15} + r^{16} = -1\,. \end{aligned} \tag{16.2}$$

16.4 ההוכחה של Gauss שניתן לבנות heptadecagon

Gauss הבין שאין חובה לעבוד עם השורשים בסדר הטבעי שלהם $r, r^2, \ldots, r^{16}$. החזקות של r^3 נותנות את כל השורשים אבל בסדר שונה:

$$\begin{aligned} &r^1,\ r^{1\cdot3=3},\ r^{3\cdot3=9},\ r^{9\cdot3=27=10},\ r^{10\cdot3=30=13},\ r^{13\cdot3=39=5},\ r^{5\cdot3=15}, \\ &r^{15\cdot3=45=11}, r^{11\cdot3=33=16},\ r^{16\cdot3=48=14},\ r^{14\cdot3=42=8},\ r^{8\cdot3=24=7}, \\ &r^{7\cdot3=21=4},\ r^{4\cdot3=12},\ r^{12\cdot3=36=2},\ r^{2\cdot3=6}, \end{aligned}$$

כאשר צמצמנו את השורשים מודולו 17:

$$r^{17m+k} = (r^{17})^m \cdot r^k = 1^m \cdot r^k = r^k\,.$$

חשוב שתבדקו שהרשימה כוללת את כל השורשים (פרט ל-1) בדיוק פעם אחת:

$$r^1, r^3, r^9, r^{10}, r^{13}, r^5, r^{15}, r^{11}, r^{16}, r^{14}, r^8, r^7, r^4, r^{12}, r^2, r^6\,. \tag{16.3}$$

נתון פולינום ריבועי מונית שהשורשיו הם: a, b:

$$y^2 + yx + q = (y-a)(y-b) = 0\,,$$

ניתן לחשב את המקדמים p, q מהשורשים (פרק7):

$$p = -(a+b)\,, \quad q = ab\,.$$

לכן אם ניתן $a+b$ ו-ab נוכל לכתוב את המשוואה הריבועית בשורשיו הם a, b.

יהי a_0 סכום השורשים במקומות האי-זוגיים במשוואה 16.3:

$$a_0 = r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2\,,$$

ויהי a_1 סכום השורשים במקומות הזוגיים במשוואה 16.3:

$$a_1 = r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6\,.$$

כדי לקבל את a_0, a_1 כשורשים של משוואה ריבועית, תחילה נחשב את הסכום שלהם:

$$a_0 + a_1 = r + r^2 + \cdots + r^{16} = -1\,.$$

כדי למצוא את המשוואה הריבועית עלינו לחשב את $a_0 a_1$. החישוב מעט מסורבל ומוצג באיור 16.3. הערכים של $r^i r^j$ רשומים לאחר חישוב $r^{(i+j) \bmod 17}$. מתחת לכל שורש נמצא מספר המופעים שלו עד כה. בדקו שכל שורש מופיע בדיוק ארבע פעמיים כך שערכה של המכפלה הוא -4.

מ-$a_0+a_1=-1$ ו-$a_0a_1=-4$, אנו יודעים ש-a_0, a_1 הם השורשים של המשוואה:

$$x^2 + x - 4 = 0$$

ששורשיו הם:

$$a_{0,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}\,.$$

יהי b_0, b_1, b_2, b_3 הסכום של כל שורש רביעי החל מ-r^1, r^3, r^9, r^{10}, בהתאמה:

$$\begin{aligned}
b_0 &= r^1 + r^{13} + r^{16} + r^4 \\
b_1 &= r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12} \\
b_2 &= r^9 + r^{15} + r^8 + r^2 \\
b_3 &= r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6\,.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_0a_1 &= (r+r^9+r^{13}+r^{15}+r^{16}+r^8+r^4+r^2)\ \cdot \\
&\quad (r^3+r^{10}+r^5+r^{11}+r^{14}+r^7+r^{12}+r^6) \\
&= \underset{1}{r^4}+\underset{1}{r^{11}}+\underset{1}{r^6}+\underset{1}{r^{12}}+\underset{1}{r^{15}}+\underset{1}{r^8}+\underset{1}{r^{13}}+\underset{1}{r^7}+ \\
&\quad \underset{2}{r^{12}}+\underset{1}{r^2}+\underset{1}{r^{14}}+\underset{1}{r^3}+\underset{2}{r^6}+\underset{1}{r^{16}}+\underset{2}{r^4}+\underset{2}{r^{15}}+ \\
&\quad \underset{2}{r^{16}}+\underset{3}{r^6}+\underset{1}{r^1}+\underset{2}{r^7}+\underset{1}{r^{10}}+\underset{2}{r^3}+\underset{2}{r^8}+\underset{2}{r^2}+ \\
&\quad \underset{2}{r^1}+\underset{3}{r^8}+\underset{3}{r^3}+\underset{1}{r^9}+\underset{3}{r^{12}}+\underset{1}{r^5}+\underset{2}{r^{10}}+\underset{3}{r^4}+ \\
&\quad \underset{3}{r^2}+\underset{2}{r^9}+\underset{4}{r^4}+\underset{3}{r^{10}}+\underset{2}{r^{13}}+\underset{4}{r^6}+\underset{2}{r^{11}}+\underset{2}{r^5}+ \\
&\quad \underset{3}{r^{11}}+\underset{3}{r^1}+\underset{3}{r^{13}}+\underset{4}{r^2}+\underset{2}{r^5}+\underset{3}{r^{15}}+\underset{4}{r^3}+\underset{2}{r^{14}}+ \\
&\quad \underset{3}{r^7}+\underset{3}{r^{14}}+\underset{3}{r^9}+\underset{4}{r^{15}}+\underset{4}{r^1}+\underset{4}{r^{11}}+\underset{3}{r^{16}}+\underset{4}{r^{10}}+ \\
&\quad \underset{4}{r^5}+\underset{4}{r^{12}}+\underset{4}{r^7}+\underset{4}{r^{13}}+\underset{4}{r^{16}}+\underset{4}{r^9}+\underset{4}{r^{14}}+\underset{4}{r^8} \\
&= -4\,.
\end{aligned}
$$

איור 16.3: החישוב של a_0a_1

בדקו ש-$b_0+b_2=a_0, b_1+b_3=a_1$ וחשבו את המכפלות המתאימות:

$$
\begin{aligned}
b_0b_2 &= (r+r^{13}+r^{16}+r^4)\ \times \\
&\quad (r^9+r^{15}+r^8+r^2) \\
&= r^{10}+r^{16}+r^9+r^3+ \\
&\quad r^5+r^{11}+r^4+r^{15}+ \\
&\quad r^8+r^{14}+r^7+r^1\ + \\
&\quad r^{13}+r^2+r^{12}+r^6 \\
&= -1\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1b_3 &= (r^3+r^5+r^{14}+r^{12})\times \\
&\quad (r^{10}+r^{11}+r^7+r^6) \\
&= r^{13}+r^{14}+r^{10}+r^9\ + \\
&\quad r^{15}+r^{16}+r^{12}+r^{11}+ \\
&\quad r^7+r^8+r^4+r^3\ + \\
&\quad r^5+r^6+r^2+r^1 \\
&= -1\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{\frac{(-1+\sqrt{17})}{2} + \sqrt{\left[\frac{(-1+\sqrt{17})}{2}\right]^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{(-1+\sqrt{17}) + \sqrt{\left[-1+\sqrt{17}\right]^2 + 16}}{4} \\
&= \frac{(-1+\sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \\
b_1 &= \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{\frac{(-1-\sqrt{17})}{2} + \sqrt{\left[\frac{(-1-\sqrt{17})}{2}\right]^2 + 4}}{2} \\
&= \frac{(-1-\sqrt{17}) + \sqrt{\left[-1-\sqrt{17}\right]^2 + 16}}{4} \\
&= \frac{(-1-\sqrt{17}) + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}\,.
\end{aligned}
$$

איור 16.4: החישוב של b_0, b_1

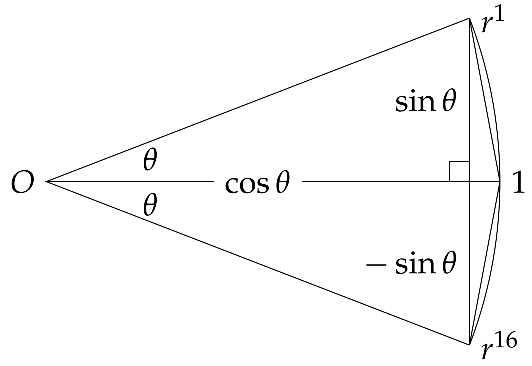
נסכם את החישובים:

$$
\begin{aligned}
b_0 + b_2 &= a_0 \\
b_0 b_2 &= -1 \\
b_1 + b_3 &= a_1 \\
b_1 b_3 &= -1\,.
\end{aligned}
$$

b_0, b_2 הם שורשיו של $y^2 - a_0 y - 1 = 0$ ו-b_1, b_3 הם שורשיו של $y^2 - a_1 y - 1 = 0$. מהערכים שחישבנו קודם עבור a_0, a_1, מתקבלים השורשים b_0, b_1 (איור 16.4).

לבסוף יהי c_0, c_4 הסכום של כל שורש שמיני החל מ-r^1, r^{13}, בהתאמה:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= r^1 + r^{16} \\
c_4 &= r^{13} + r^4 \\
c_0 + c_4 &= r^1 + r^{16} + r^{13} + r^4 = b_0
\end{aligned}
$$



איור 16.5 : בניית צלע מהזווית המרכזית שהוא כולא

$$\begin{aligned} c_0c_4 &= (r^1 + r^{16}) \cdot (r^{13} + r^4) \\ &= r^{14} + r^5 + r^{12} + r^3 = b_1 \,. \end{aligned}$$

c_0, c_4 הם השורשים של $y^2 - b_0 y + b_1 = 0$. בגלל ש-$c_0/2 = \cos(360°/17)$ (איור 16.5) מספיק לחשב את השורש $c_0 = r^1 + r^{16}$ (איור 16.6).

הקוסינוס של הזווית המרכזית של heptadecagon בן-בנייה עם סרגל ומחוגה כי הוא מורכב רק ממספרים רציונליים והפעולות $\{+, -, \times, /, \sqrt{}\}$:

$$\begin{aligned} &\cos\left(\frac{360°}{17}\right) = \frac{c_0}{2} = \\ &-\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \; + \\ &\frac{1}{16}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\,. \end{aligned} \tag{16.4}$$

$$\begin{aligned} r_1 + r_{16} &= \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{2\cdot 16\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\cdot 16\pi}{17}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{-2\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{17}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)\,. \end{aligned}$$

16.5 פיתוח הנוסחה של Gauss

הנוסחה שקיבלנו עבור $\cos(360°/17)$ איננה הנוסחה שניתנה על ידי Gauss. להלן פיתוח של הנוסחה של Gauss.

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4b_1}}{2} \\
&= \frac{\frac{(-1+\sqrt{17}) + \sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}}{2} + \\
&\quad \frac{\sqrt{\left[\frac{(-1+\sqrt{17}) + \sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\right]^2 - 4\left[\frac{(-1-\sqrt{17}) + \sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}\right]}}{2} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{\left[(-1+\sqrt{17}) + \sqrt{34-2\sqrt{17}}\right]^2 - 16\left[(-1-\sqrt{17}) + \sqrt{34+2\sqrt{17}}\right]} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{(-1+\sqrt{17})^2 + 2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} + (34-2\sqrt{17}) - \left[(-16-16\sqrt{17}) + 16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right]} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}
\end{aligned}
$$

איור 16.6: החישוב של c_0

נפשט את $2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}$:

$$\begin{aligned}
2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} = & -2\sqrt{34-2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
& 4\sqrt{34-2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34-2\sqrt{17}} \\
= & \ 2\sqrt{34-2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
& -4\sqrt{34-2\sqrt{17}} \\
= & \ 2(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34-2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}$$

נזכור את הגורם $-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}$ ונפשט את הגורם הראשון. נרבע אותו ואז נוציא שורש הריבועי:

$$\begin{aligned}
2(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} &= 2\sqrt{\left[(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right]^2} \\
&= 2\sqrt{(18+2\sqrt{17})(34-2\sqrt{17})} \\
&= 2\sqrt{(18\cdot 34 - 4\cdot 17) + \sqrt{17}(2\cdot 34 - 2\cdot 18)} \\
&= 2\cdot 4\sqrt{34+2\sqrt{17}}\,.
\end{aligned}$$

נציב את הגורמים ונקבל את הנוסחה של Gauss:

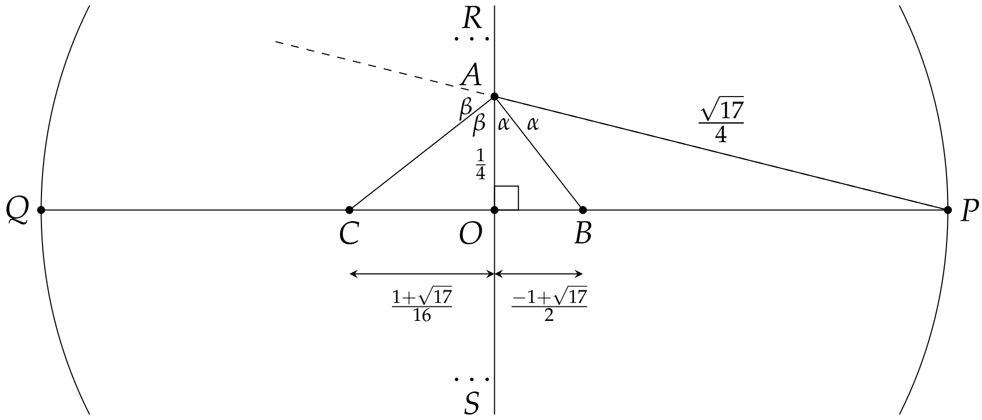
$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = & -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
& \frac{1}{16}\sqrt{68+12\sqrt{17}+2\cdot 4\sqrt{34+2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34-2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34+2\sqrt{17}}} \\
= & -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\
& \frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17} - \sqrt{34-2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}
\end{aligned}$$

16.6 בניית heptadecagon

בנו מעגל יחידה שמרכזו O, עם קוטרים ניצבים $\overline{PQ}, \overline{RS}$ (איור 16.7). בנו נקודה A כך ש-$\overline{OA} = \frac{1}{4}\overline{OR}$.

לפי משפט פיתגורס:

$$\overline{AP} = \sqrt{(1/4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}/4\,.$$



איור 16.7: בניית heptadecagon (1)

תהי B נקודת החיתוך של $\angle OAP$ וקטע הקו $\overline{OP}$, ותהי C נקודת החיתוך של חוצה הזווית המשלימה ל-$\angle OAP$ וקטע הקו $\overline{QO}$. לפי משפט חוצה הזווית הפנימית (משפט א׳.13):

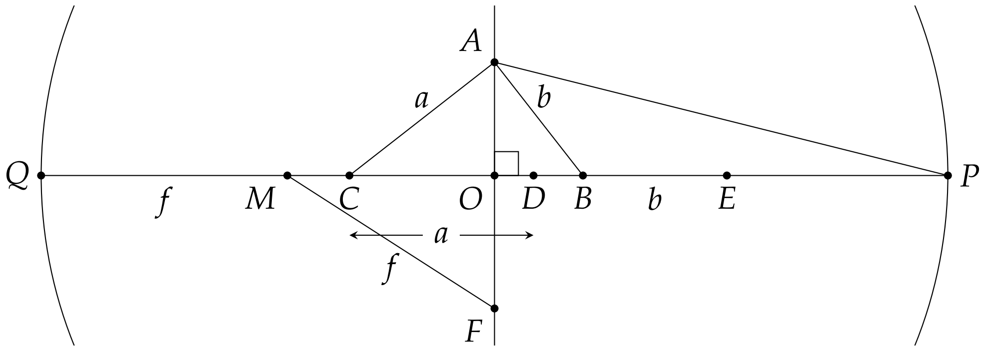
$$\begin{aligned}
\frac{\overline{OB}}{\overline{BP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}}\\
\frac{\overline{OB}}{1-\overline{OB}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4}\\
\overline{OB} &= \frac{1}{1+\sqrt{17}} = \frac{1}{1+\sqrt{17}}\cdot\frac{1-\sqrt{17}}{1-\sqrt{17}}\\
&= \frac{-1+\sqrt{17}}{16},
\end{aligned}$$

ולפי משפט חוצה הזווית החיצונית (משפט א׳.14):

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{OC}}{\overline{CP}} &= \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}}\\
\frac{\overline{OC}}{1+\overline{OC}} &= \frac{1/4}{\sqrt{17}/4}\\
\overline{OC} &= \frac{1}{-1+\sqrt{17}} = \frac{1}{-1+\sqrt{17}}\cdot\frac{1+\sqrt{17}}{1+\sqrt{17}}\\
&= \frac{1+\sqrt{17}}{16}.
\end{aligned}$$

בנו D על $\overline{OP}$ כך ש-$\overline{CD} = \overline{CA} = a$ (איור 16.8). לפי משפט פיתרורס:

$$\begin{aligned}
\overline{CD} = \overline{CA} &= \sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OC}^2}\\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{17}}{16}\right)^2}\\
&= \frac{1}{16}\sqrt{34+2\sqrt{17}}.
\end{aligned}$$



איור 16.8 : בניית heptadecagon (2)

נבנה E על $\overline{OP}$ כך ש-$\overline{BE} = \overline{BA} = b$. שוב לפי משפט פיתגורס :

$$\begin{aligned}\overline{BE} = \overline{BA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{17}}{16}\right)^2} \\ &= \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\,.\end{aligned}$$

נבנה M, נקודת האמצע של $\overline{QD}$, ונבנה F על $\overline{OS}$ כך ש-$\overline{MF} = \overline{MQ} = f$:

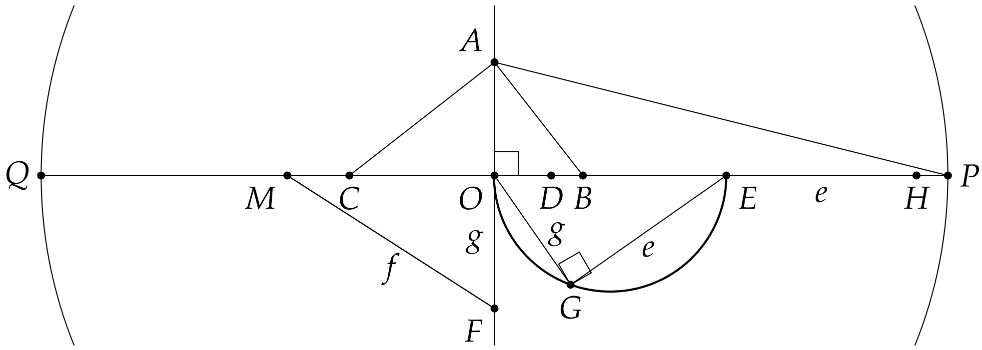
$$\begin{aligned}\overline{MF} = \overline{MQ} = \frac{1}{2}\overline{QD} = \frac{1}{2}(\overline{QC} + \overline{CD}) &= \frac{1}{2}((1 - \overline{OC}) + \overline{CD}) \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1+\sqrt{17}}{16}\right) + \frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{16}\right] \\ &= \frac{1}{32}\left(15 - \sqrt{17} + \sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)\,.\end{aligned}$$

שימו לב ש-$\overline{MO} = 1 - \overline{MQ} = 1 - \overline{MF}$.

נבנה חצי מעגל שקוטרו $\overline{OE}$. נבנה מיתר $\overline{OG} = \overline{OF} = g$ (איור 16.9). לפי משפט פיתגורס :

$$\begin{aligned}\overline{OG} = \overline{OF} = \sqrt{\overline{MF}^2 - \overline{MO}^2} &= \sqrt{\overline{MF}^2 - (1 - \overline{MF})^2} \\ &= \sqrt{2\overline{MF} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{16}\left(15 - \sqrt{17} + \sqrt{34+2\sqrt{17}}\right) - 1} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34+2\sqrt{17}}}\,.\end{aligned}$$

$\angle OGE$ היא זווית ישרה כי היא תומכת בקוטר של מעגל. נבנה H על $\overline{OP}$ כך ש-$\overline{EH} = \overline{EG} = 3$.



איור 16.9: בניית heptadecagon (3)

).

שוב לפי משפט פיתגורס:

$$
\begin{aligned}
\overline{EH} = \overline{EG} &= \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{OG}^2} = \sqrt{(\overline{OB}+\overline{BE})^2 - \overline{OG}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)} \\
&= \frac{1}{16}\sqrt{\left((18-2\sqrt{17}) + 2(-1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}} + (34-2\sqrt{17})\right) + \left(16+16\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)} \\
&= \frac{1}{16}\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}} - 2(1-\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\,.
\end{aligned}
$$

נחשב את $\overline{OE}$:

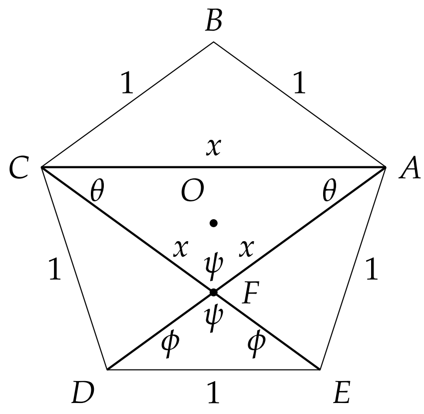
$$
\begin{aligned}
\overline{OE} = \overline{OB} + \overline{BE} &= \frac{-1+\sqrt{17}}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} \\
&= \frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)\,.
\end{aligned}
$$

לבסוף, $\overline{OH} = \overline{OE} + \overline{EH}$ שהיא הנוסחה של Gauss עבור $\cos(360^\circ/17)$. כפי שמופיע באיור 16.6.

16.7 בניית מחומש משוכלל

השורשים של היחידה במעלה חמש כמספרים מרוכבים הם:

$$
1+i\cdot 0, \quad \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{-\sqrt{5}-1}{4} \pm i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\,.
$$



איור 16.10: בניית מחומש משוכלל (1)

16.7.1 בטריגונומטריה

הזווית המרכזית היא $360°/5 = 72°$. נחשב $\cos 36°$ תוך שימוש בזהויות הטריגונומטריות עבור 2θ ו-$\theta/2$ (משפטים א׳.2.1, א׳.7):

$$\begin{aligned}
0 = \cos 90° &= \cos(72° + 18°) = \cos 2 \cdot 36° \cos 36°/2 - \sin 2 \cdot 36° \sin 36°/2 \\
&= (2\cos^2 36° - 1)\sqrt{\frac{1+\cos 36°}{2}} - 2\sin 36° \cos 36° \sqrt{\frac{1-\cos 36°}{2}}\,.
\end{aligned}$$

כעת יש רק זווית אחת בנוסחה. נסמן $x = \cos 36°$ ונחשב:

$$\begin{aligned}
(2x^2 - 1)\sqrt{\frac{1+x}{2}} &= 2\sqrt{1-x^2} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{2}} \\
(2x^2 - 1)\sqrt{1+x} &= 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x} \cdot x \cdot \sqrt{1-x} \\
2x^2 - 1 &= 2x(1-x) \\
4x^2 - 2x - 1 &= 0\,.
\end{aligned}$$

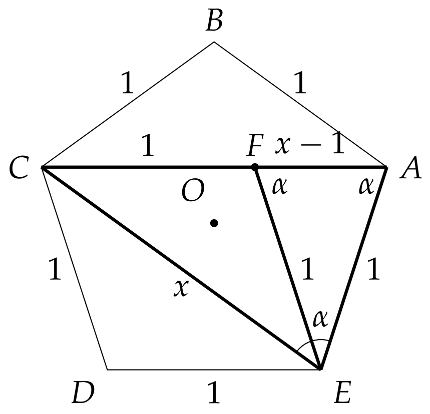
מהפתרון למשוואה הריבועית מתקבל ערך בן-בנייה:

$$\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\,.$$

16.7.2 גיאומטריה

יהי $\overline{ABCDE}$ מחומש משוכלל (איור 16.10). לפי ההגדרה כל הצלעות וכל הזוויות הפנימיות שוות, וקל להראות באמצעות משולשים חופפים שכל האלכסונים שווים. נסמן את אורכי הצלעות ב-1 ואורכי האלכסונים ב-x.

$\triangle ACE \cong \triangle CAD$ לפי צלע-צלע-צלע כך ש-$\angle ACE = \angle CAD = \theta$. $\triangle AED \cong \triangle CDE$ לפי צלע-צלע-צלע כך ש-$\angle ADE = \angle CED = \phi$. $\angle AFC = \angle DFE = \psi$ הן זוויות קודקודיות.



איור 16.11 : בניית מחומש משוכלל (2)

במשולשים סכום הזוויות שווה ל-180°, ולכן $\psi + 2\theta = 180^\circ$, וגם $\psi + 2\phi = 180^\circ$, ומכאן $\theta = \phi$. לפי זוויות מתחלפות $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$.

נבנה קו דרך E המקביל ל-$\overline{DC}$ ותהי F נקודת החיתוך שלו עם $\overline{AC}$ (איור 16.11). $\triangle ACE$ הוא משולש שווה-שוקיים עם זוויות בסיס α. $\triangle AEF$ הוא גם משולש שווה-שוקיים ולכן $\angle AFE = \angle FAE = \alpha$. מכאן ש-$\triangle AEF \sim \triangle ACE$. לפי יחסי הצלעות:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}\,.$$

התוצאה היא משוואה ריבועית:

$$x^2 - x - 1 = 0\,,$$

שהשורש החיובי שלה בן-בנייה:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

מה ההפתעה?

מפתיע שעברו מעל אלפיים שנים מתקופת היוונים עד הגילוי של Gauss שה-heptadecagon בן-בנייה. מפתיע גם שפתרון הבעיה הגיע לא דרך גיאומטריה אלא על ידי פיתוח שיטות אלגבריות חדשות שהיו להן השפעה מרחיקת לכת במתמטיקה.

מקורות

הפרק מבוסס על [6]. אפשר לעיין בתרגום לאנגלית של ספרו של Gauss [18]. משוואה 16.4 מופיעה ב-[41]. המחבר נותן תרגיל להמיר את הנוסחה לזו שמופיעה בעמוד 458 של [18] ועמוד 68 של [6].

הבנייה של המצולע לקוחה מ-[10]. ניתן למצוא בניות אחרות ב-[56]. הבנייה הטריגונומטרית של מחומש משוכלל לקוחה מ-[60]. הבנייה הגיאומטרית של מחומש משוכלל התקבלה מהפתרונות של התרגילים 2.3.3--2.3.4 ב-[47].

נספח א׳

משפטים מגיאומטריה וטריגונומטרה

נספח זה מביא משפטים מגיאומטריה וטריגונומטרה שייתכן שהם לא מוכרים לקורא וכן משפטים מוכרים שהוכחותיהם לא מוכרות. סעיף א׳.1 מציג שלוש נוסחאות לחישוב השטח של משולש. סעיף א׳.2 מוכיח זהיות טריגונומטריות. למרות שהנוסחאות והשוויונות מוכרות ברובן, לעתים תלמידים זוכרים אותן בעל-פה או מחפשים אותן בספרים בלי שאי-פעם ראו את ההוכחות. בסעיפים הבאים נמצאות הוכחות של משפטים מתקדמים בגיאומטריה: משפטים על חוצי זוויות (סעיף א׳.3), המשפט של Ptolemy על הקשר בין הצלעות והאלכסונים של מרובע חסום במעגל (סעיף א׳.4), המשפט של Ceva על הקשר בין שלושה קטעי קו של משולש (סעיף א׳.5), והמשפט של Menelaus על קטעי הקו של חותך מעגל (סעיף א׳.6).

א׳.1 משפטים על משולשים

א׳.1.1 חישוב השטח של משולש

הנוסחה הסנדרטית לחישוב השטח של משולש מהבסיס והגובה ידועה היטב. ניתן להוכיח אותה בדרכים גיאומטריות שונות.

משפט א׳.1 השטח של משולש $\triangle ABC$ ניתן על ידי:

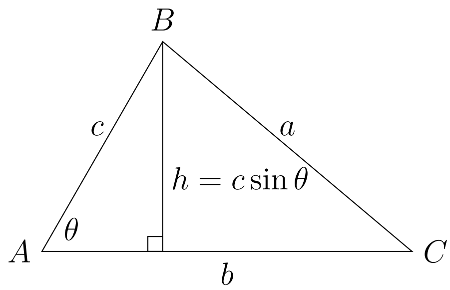
$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bh\,, \tag{1.1}$$

כאשר הבסיס b הוא אחד מצלעות המשולש ו-h הוא הגובה ל-b מהקודקוד הנגדי (איור *1.1*(א)).

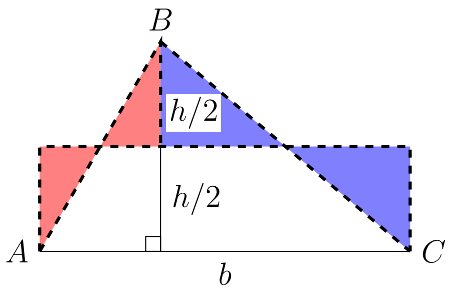
הוכחה איור 1.1(ב) מראה שעל ידי ״חיתוך״ המשולש במחצית גובהו, נוכל ״להזיז״ את המשולשים הצבועים כדי לבנות מלבן ששטחו שווה לשטח המשולש. בסיס המלבן הוא b וגובהו $h/2$. □

משפט א׳.2 השטח של משולש $\triangle ABC$ ניתן על ידי:

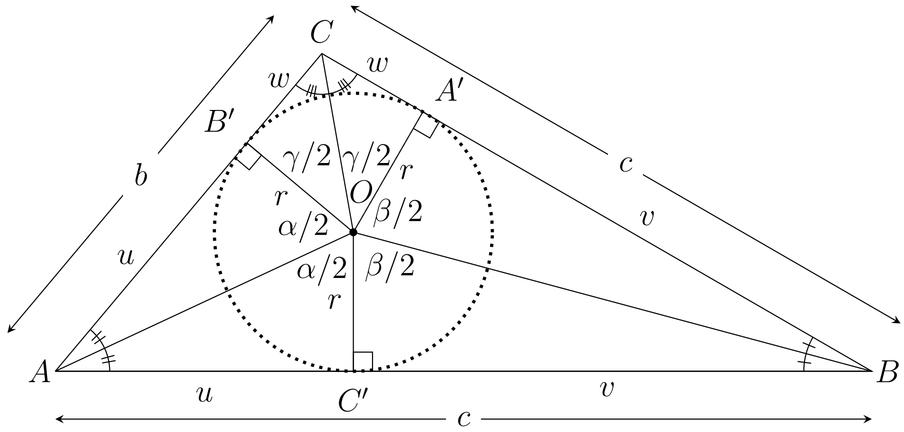
$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc\sin\theta\,. \tag{1.2}$$



איור 1.1(א) חישוב שטח משולש מהבסיס והגובה



איור 1.1(ב) חישוב שטח משולש מהבסיס והגובה



איור 1.2 : משולש החוסם מעגל

הוכחה ממשפט 1.1 כאשר $h = c\sin\theta$. □

משפט א׳.3 (Heron) השטח של משולש $\triangle ABC$ ניתן על ידי:

$$\triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,$$

כאשר s, מחצית ההיקף של המשולש, שווה ל-$\frac{1}{2}(a+b+c)$.

הוכחה רדיוס של מעגל ומשיק החותך את רדיוס ניצבים אחד לשני. בנוסף, האורכים של קטעי הקו של שני משיקים מאותה נקודה למעגל שווים. לכן (איור 1.2):[1]

$$\triangle AOB' \cong \triangle AOC', \quad \triangle BOA' \cong \triangle BOC', \quad \triangle COA' \cong \triangle COB'\,.$$

השטח של $\triangle ABC$ הוא סכום השטחים של ששת המשולשים הללו. הגובה של כל אחד מהמשולשים

[1] זה מראה שה-incenter מרכז המעגל החסום הוא נקודת החיתוך המשותפת לשלושת חוצי הזווית.

הוא r, הרדיוס של המעגל החסום, ולכן:

$$\triangle ABC = \triangle AOB' + \triangle AOC' + \triangle BOA' + \triangle BOC' + \triangle COA' + \triangle COB' \tag{1.3}$$
$$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(u+u+v+v+w+w) \tag{1.4}$$
$$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(a+b+c) \tag{1.5}$$
$$\triangle ABC = rs\,. \tag{1.6}$$

נגדיר עכשיו את הצלעות מהטנגסים של הזוויות המרכזיות:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{u}{r}, \quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{v}{r}, \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{w}{r}\,.$$

מההגדרות הללו ומ-$s = \frac{1}{2}(2u + 2u + 2w)$ נקבל:

$$s = u + v + w = r\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\right)\,.$$

מ-$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = 360°$ נקבל $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180°$, ולפי משפט א׳.11:

$$\begin{aligned} s &= r\left(\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}\right) \\ &= r\left(\frac{u}{r}\frac{v}{r}\frac{w}{r}\right) = \frac{1}{r^2}(u\,v\,w) \\ r &= \sqrt{\frac{u\,v\,w}{s}}\,. \end{aligned}$$

מנוסחה 1.6:

$$\triangle ABC = rs = s\sqrt{\frac{u\,v\,w}{s}} = \sqrt{s\,u\,v\,w}\,.$$

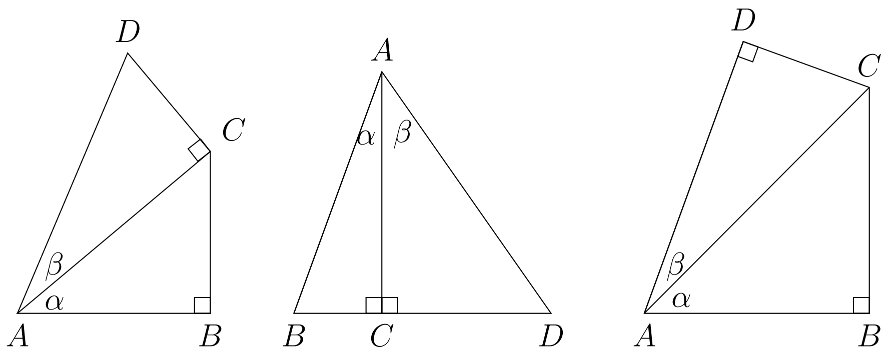
הנוסחה של Heron מתקבלת מ-$u = s - a, v = s - b, w = s - c$. □

א׳.2 זהויות טריגונומטריות

א׳.2.1 הסינוס והקוסינוס של הסכום וההפרש של שתי זוויות

משפט א׳.4

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,. \end{aligned}$$



איור 1.3 : איורים להכוחת הזהות לסינוס של הסכום של זוויות

נוכיח את הנוסחה הראשונה. ניתן לקבל את הנוסחאות האחרות מערכי הסינוס והקוסינוס עבור $-\alpha$ ו-$\alpha - 90^\circ$.

נתון משולש ישר-זווית $\triangle ABC$ עם זווית חדה α ונתון משלוש ישר-זווית $\triangle ACD$ עם זווית חדה β, ניתן לחבר אותם ולקבל מצולעים עם זווית $\alpha + \beta$ (איור. 1.3). המצולע השמאלי מראה את המצולע המופיע לעתים קרובות בהוכחות בספרי לימוד. כאן נביא הוכחות המבוססות על המצולעים במרכז ובימין.

הוכחה(1) נחשב את השטח של $\triangle ABD$ בשתי דרכים שונות : **(1)** על ידי שימוש בנוסחה 1.2 על $\triangle ABD$, ו-(2) על ידי שימוש בנוסחה בנפרד על $\triangle ABC$ ו-$\triangle ADC$ (איור 1.4). גם את h נחשב בשתי דרכים שונות על ידי שימוש בהגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות :

$$\begin{aligned}
\triangle ABD &= \frac{1}{2}bc\sin(\alpha+\beta)\\
\triangle ABD &= \triangle ABC + \triangle ADC\\
&= \frac{1}{2}ch\sin\alpha + \frac{1}{2}bh\sin\beta\\
&= \frac{1}{2}c(b\cos\beta)\sin\alpha + \frac{1}{2}b(c\cos\alpha)\sin\beta\,.
\end{aligned}$$

נשווה את שתי הנוסחות עבור $\triangle ABD$ ומצמצום $\frac{1}{2}bc$ נקבל :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,.$$

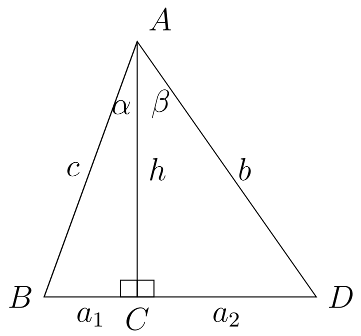
□

הוכחה השניה משתמשת במשפט שלהלן :

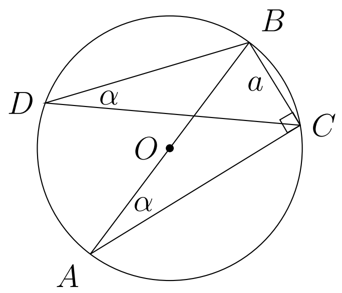
משפט א׳.5 במעגל עם **קוטר** 1 אורכו של מיתר התומך בזווית שווה לסינוס של הזווית *(איור. 1.5)*.

הוכחה יהי $\overline{AB}$ קוטר ותהי $\angle BAC = \alpha$. תהי D כל נקודה אחרת במעגל המייצרת את המשולש $\triangle BDC$. בגלל שכל הזוויות שנתמכות על ידי אותו מיתר שוות, $\angle BDC = \alpha$. במשולש ישר-זווית $\triangle ABC$:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{1} = \overline{BC}\,.$$



איור 1.4 : חישוב שטח המשולש בשתי דרכים שונות



איור 1.5 : כל הזוויות הנתמכות על ידי מיתר שוות

□

הוכחה(2) ההוכחה מבוססת על התרשים הימני באיור 1.3 שנמצא גם ב- 1.6, כאשר המרובע $\overline{ABCD}$ חסום בתוך מעגל. לפי משפט א׳.15 מרובע יכול להיות חסום בתוך מעגל אם ורק אם הסכום שכל זוג של זוויות נגדיות שווה ל-180°. $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$ כי שתי הזוויות הן ישרות. לפי משפט 5.4 סכום הזוויות המרכזיות במרובע הוא 360° ולכן $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$. נניח שקוטר המעגל הוא 1 (אחרת הכפל הכל באורך הקוטר). הצלעות של המרובע הם :

$$\overline{BC} = \sin\alpha, \quad \overline{CD} = \sin\beta, \quad \overline{AB} = \sin\gamma, \quad \overline{DA} = \sin\delta\,,$$

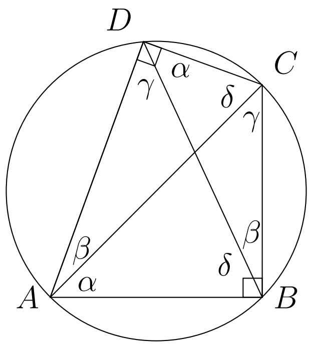
והאלכסונים הם :

$$\overline{BD} = \sin(\alpha+\beta), \quad \overline{CA} = \sin(\alpha+\gamma)\,.$$

לפי משפט Ptolemy (משפט. א׳.18) המכפלה של האלכסונים של מרובע חסום על ידי מעגל שווה לסכום המכפלות של הצלעות הנגדיות במרובע. $\angle ADC$ ו-$\angle ABC$ הן זוויות ישרות :

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma) &= \sin\alpha\sin\delta + \sin\beta\sin\gamma \\
\sin(\alpha+\beta)\sin(90^\circ) &= \sin\alpha\sin(90^\circ-\beta) + \sin\beta\sin(90^\circ-\alpha) \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,.
\end{aligned}$$

□



איור 1.6 : מרובע חסום בתוך מעגל

א׳.2.2 הקוסינוס של זווית משולשת

משפט א׳.6

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,.$$

הוכחה ההוכחה משתמשת בנוסחות במשפט א׳.4 ובנוסחה $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$\begin{aligned}
\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha)\\
&= \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha\\
&= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - (2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\alpha\\
&= \cos^3\alpha - \cos\alpha\sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha)\\
&= \cos^3\alpha - \cos\alpha + \cos^3\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha\\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,.
\end{aligned}$$

□

א׳.2.3 הסינוס והקוסינוס של חצי זווית

משפט א׳.7 אם α היא זווית **במעגל** אזי :[2]

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\\
\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\,.
\end{aligned}$$

הוכחה ההוכחה משתמשת בנוסחות במשפט א׳.4 ובנוסחה $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$\cos\alpha = \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

[2]הנוסחה הכללית מסובכת יותר משום שהשורשים יכולים להיות חיוביות או שליליות בתלות ברביע בו נמצאת $\alpha/2$. עבור משולש $0<\alpha<180^\circ$ ולכן $0<\alpha/2<90^\circ$ נמצאת ברביע הראשון והסינוס והקוסינוס שניהם חיוביים.

$$
\begin{aligned}
&= 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 \\
\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \\
\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{1+\cos\alpha}{2} \\
\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\,.
\end{aligned}
$$

□

א׳.2.4 חוק הקוסינוסים

משפט א׳.8 (חוק הקוסינוסים) במשולש $\triangle ABC$ עם צלעות a, b, c (איור *1.7*):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle ACB\,.$$

הוכחה(1) הורד גובה מ-C אל $\overline{AB}$ והשתמש בהגדרה של קוסינוס ובמשפט פיתגורס:

$$c = x + (c-x) = a\cos\beta + b\cos\alpha \tag{1.7}$$

$$c^2 = ac\cos\beta + bc\cos\alpha\,. \tag{1.8}$$

באופן דומה, הורד גבהים מ-A ל-$\overline{BC}$ ומ-B ל-$\overline{AC}$ כדי לקבל:

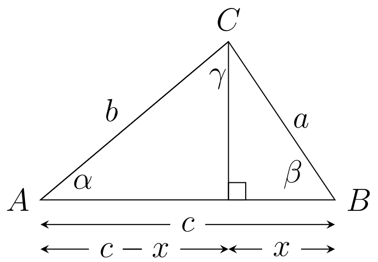
$$a^2 = ca\cos\beta + ba\cos\gamma \tag{1.9}$$

$$b^2 = cb\cos\alpha + ab\cos\gamma\,. \tag{1.10}$$

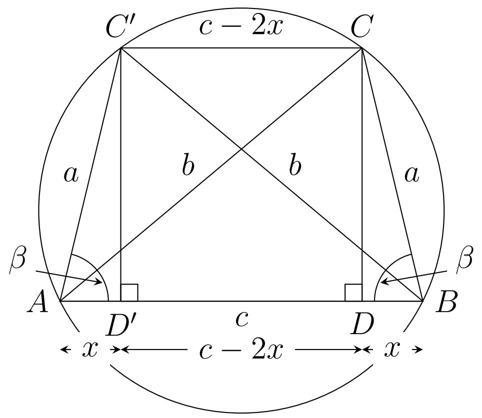
נחבר את המשוואות 1.9 ו-1.10, נחסיר את המשוואה 1.8 ונקבל:

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 - c^2 &= ca\cos\beta + ba\cos\gamma \\
&\qquad + cb\cos\alpha + ab\cos\gamma \\
&\qquad - ac\cos\beta - bc\cos\alpha \\
&= 2ab\cos\gamma \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.
\end{aligned}
$$

□



איור 1.7 : הוכחה ראשונה של חוק הקוסינוסים



איור 1.8 : הוכחה שנייה של חוק הקוסינוסים

הוכחה(2) ההוכחה השניה משתמשת במפשט Ptolemy (משפט א׳.18).[3]

נחסום את המשלוש $\triangle ABC$ במעגל. נבנה משולש נוסף $\triangle ABC'$ שחופף את $\triangle ABC$ וחסום על ידי אותו מעגל (איור 1.8). כדי לבנות את $\triangle ABC'$, נבנה זווית מ-$\overline{AB}$ השווה ל-$\angle CAB$ שחותך את המעגל ב-C' ואז נבנה את קטע הקו

$\overline{C'A}$. זווית שנתמכות על ידי אותו מיתר שוות $\angle AC'B = \angle BCA$, ולכן גם $\angle CBA = \angle C'AB$ ומכאן $\triangle BAC \cong \triangle ABC'$ לפי זווית-צלע-זווית עם צלע משותפת $\overline{AB}$.

הורד ניצבים מ-C ל-D ומ-C' ל-D' על $\overline{AB}$ כך ש-$x = a\cos\beta$. לפי משפט Ptolemy עבור המרובע $\overline{ABCC'}$:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c(c-2x) \\ &= a^2 + c(c - 2a\cos\beta) \\ &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta\,. \end{aligned}$$

□

[3]סעיף א׳.4 השתמש בחוק הקוסינוסים כדי להוכיח משפט Ptolemy; ההוכחה הראשונה מאפשרת הוכחה לא מעגלית. בנוסף, קיימות הוכחות של משפט Ptolemy שאינן משתמשות בחוק הקוסינוסים.

א׳.2.5 הטנגנס של הסכום של שתי זוויות

משפט א׳.9

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}\,.$$

הוכחה

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}\\
&= \frac{\sin\alpha + \cos\alpha\tan\beta}{\cos\alpha - \sin\alpha\tan\beta}\\
&= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}\,.
\end{aligned}$$

□

א׳.2.6 הטנגנס של חצי זווית

משפט א׳.10

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}\,.$$

הוכחה נפתח ונפתור משוואה ריבועית ב-$\tan(\frac{\alpha}{2})$:

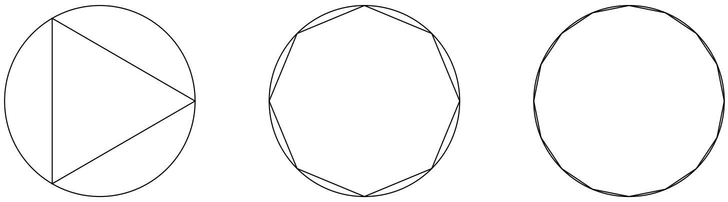
$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\\
\tan\alpha\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tan\alpha &= 0\\
\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}\,.
\end{aligned}$$

□

א׳.2.7 המכפלה של שלושה טנגנסים

משפט א׳.11 אם $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ אזי:

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\,.$$



איור 1.9: מצולעים משוכללים עם 3 ,8 ,16 צלעות חסומים על ידי מעגל

הוכחה

$$\begin{aligned}
\tan\gamma &= \tan(180^\circ - (\alpha+\beta)) \\
&= -\tan(\alpha+\beta) \\
&= -\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \\
\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma &= \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma\,.
\end{aligned}$$

□

א׳.2.8 הגבול של $\sin\alpha/\alpha$

משפט א׳.12

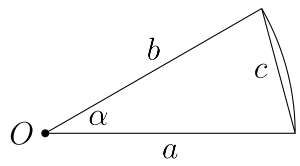
$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1\,.$$

הוכחה נעיין במצולעים משוכללים החסומים בתוך מעגל (איור 1.9) ונראה שככל שיש למצולע יותר צלעות, כך ההיקף שלו קרוב יותר להיקף המעגל. אורכו של קשת עם אותן נקודות קצה של הצלע הוא היקף המעגל חלקי מספר הצלעות במצולע, כי אורכם של כל הצלעות שווים. היחס בין היקף המעגל להיקף המצולע החסום שואף ל-1 ככל שיש יותר צלעות, כך גם היחס של אורך הקשת לאורך המיתר, כפי שניתן לראות מהדוגמאות שלהלן:

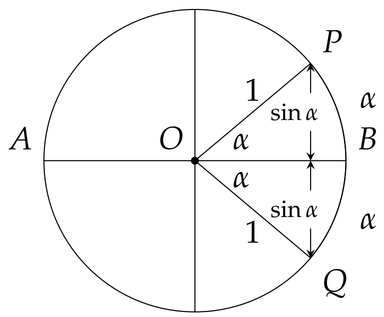
זווית	אורך הקשת	אורך המיתר	יחס
80	1.396	1.286	1.090
60	1.047	1.000	1.047
40	0.698	0.684	1.006
5	0.087	0.087	1.000

$a=b=1$ ולכן ניתן לחשב את אורך המיתר c התומך ב-α מחוק הקוסינוסים (איור 1.10):

$$\begin{aligned}
c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos\alpha \\
c &= \sqrt{2-2\cos\alpha} \\
\lim_{\alpha\to 0} c &= \sqrt{2-2\cdot 1} = 0\,.
\end{aligned}$$



איור 1.10: אורכו של מיתר ביחס לקשת בגודל α



איור 1.11: היחס בין $\sin x$ ל-x

מאיור 1.11 אפשר לראות ש:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\sin\alpha}{2\alpha}\,.$$

זה היחס בין אורכו של המיתר $\overline{PQ}$ לאורכו של הקשת $\widehat{PQ}$. אבל ראינו שיחס זה שואף ל-1 כאשר הזווית הנתמכת 2α שואף ל-0, ולכן:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1\,.$$

□

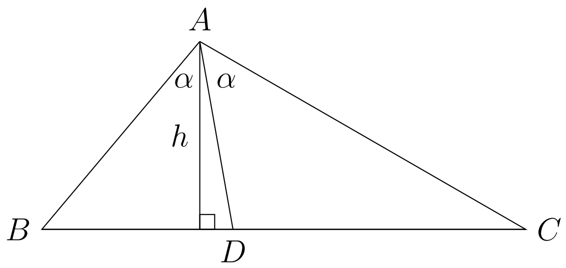
א׳.3 משפטי חוצי זווית

משפט א׳.13 במשולש $\triangle ABC$ חוצה הזווית $\angle BAC$ חותך את $\overline{BC}$ ב-D (איור *1.12*). אזי:

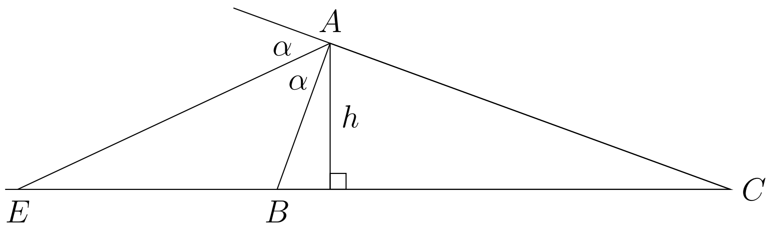
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\,.$$

הוכחה נוכיח את המשפט על ידי חישוב השטחים של שני משולשים תוך שימוש בבסיס וגובה (משוואה 1.1), ובבסיס, זווית וצלע (משוואה 1.2):

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}\overline{BD}h=\frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{AD}\sin\alpha$$
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AD}\sin\alpha}{h}$$



איור 1.12 : משפט חוצה הזווית הפנימית



איור 1.13 : משפט חוצה הזווית החיצונית

$$\begin{aligned}
\triangle ACD &= \frac{1}{2}\overline{CD}h = \frac{1}{2}\overline{AC}\,\overline{AD}\sin\alpha \\
\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{AD}\sin\alpha}{h} \\
\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\,.
\end{aligned}$$

□

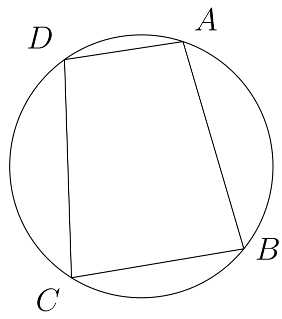
קיים גם משפט חוצה הזווית עבור חוצה הזווית החיצונית:

משפט א׳.14 במשולש $\triangle ABC$, $\overline{AE}$, חוצה הזווית המשלימה לזווית $\triangle BAC$ (איור *1.13*), חותך את ההמשך של $\overline{BC}$ ב-E (איור *1.12*). אזי:

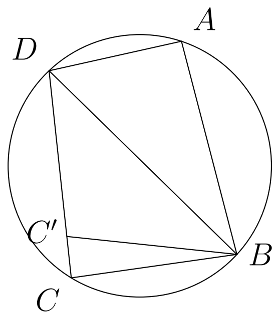
$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\,.$$

הוכחה $\overline{AC}$ הוא קו ישר ולכן $\angle EAC = 180^\circ - \alpha$:

$$\begin{aligned}
\triangle ABE &= \frac{1}{2}\overline{BE}h = \frac{1}{2}\overline{AE}\,\overline{AB}\sin\alpha \\
\triangle ACE &= \frac{1}{2}\overline{CE}h = \frac{1}{2}\overline{AE}\,\overline{AC}\sin(180^\circ-\alpha) = \frac{1}{2}\overline{AE}\,\overline{AC}\sin\alpha \\
\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{AE}\sin\alpha}{h} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} \\
\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\,.
\end{aligned}$$



איור 1.14(א) מרובע חסום על ידי מעגל



איור 1.14(ב) הקודקוד הרביעי חייב להיות על היקף המעגל

□

א׳.4 משפט Ptolemy

א׳.4.1 מעגל החסום על ידי טרפז

לפני שנוכיח את משפט Ptolemy נוכיח משפטים על מרובעים וטרפזים.

משפט א׳.15 ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם הזוויות הנגדיות משלימות (הסכום שווה ל-180°).

ספרי לימוד בגיאומטריה מביאים הוכחה פשוטה של הכיוון ״רק אם״, אבל קשה למצוא הוכחה של הכיוון ״אם״, לכן אביא פה את שתי ההוכחות.

הוכחה (רק אם) זווית היקפית במעגל שווה למחצית הקשת שתומך בו כך ש-$\angle DAB$ שווה לחצי הקשת $\widehat{DCB}$ ו-$\angle DCB$ שווה לחצי הקשת $\widehat{DAB}$ (איור 1.14(א)). שתי הקשתות ביחד מקיפים את כל היקף המעגל ולכן סכומן 360°. מכאן ש-$\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$ ו-$\angle ADC + \angle ABC =$ 180°.

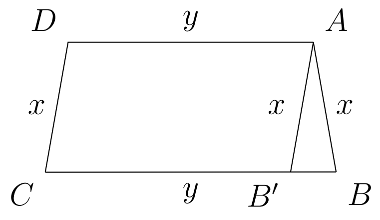
□

הוכחה (אם) ניתן לחסום כל משולש על ידי מעגל. נחסום את $\triangle DAB$ במעגל ונניח שיש נקודה C' כך ש-$\angle DAB + \angle DC'B = 180^\circ$, אבל C' **לא נמצאת** על היקף המעגל. ללא הגבלת הכלליות נניח ש-C' נמצאת בתוך המעגל (איור 1.14(ב)).

בנה קרן שמאריכה את $\overline{DC'}$ ותהי C נקודת החיתוך שלה עם המעגל. $\overline{ABCD}$ חסום על ידי מעגל ולכן:

$$\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ = \angle DAB + \angle DC'B$$
$$\angle DCB = \angle DC'B\,,$$

תוצאה שאינה אפשרית אם C נמצאת על היקף המעגל ו-C' נמצאת בתוך המעגל. □



איור 1.15: טרפז שווה-שוקיים

משפט א׳.16 הזוויות הנגדיות של טרפז שווה-שוקיים משלימות.

הוכחה נבנה קו $\overline{AB'}$ מקביל ל-$\overline{CD}$ (איור 1.15). $\overline{AB'CD}$ מקבילית ו-$\triangle ABB'$ משולש שווה-שוקיים, ולכן $\angle B = \angle AB'B = \angle ABB' = \angle C$. באופן דומה $\angle D = \angle A$. סכום הזוויות הפנימיות של מרובע הוא $360°$ ולכן:

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C + \angle D &= 360° \\ 2\angle A + 2\angle C &= 360° \\ \angle A + \angle C &= 180°\,, \end{aligned}$$

ובאופן דומה $\angle B + \angle D = 180°$. □

משפט א׳.17 ניתן לחסום טרפז שווה-שוקיים על ידי מעגל.

ההוכחה מיידית מהמשפטיםא׳.15, א׳.16.

א׳.4.2 הוכחת המשפט של Ptolemy

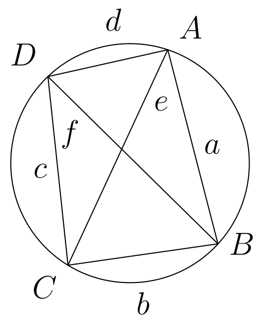
משפט א׳.18 (Ptolemy) נתון מרובע חסום על ידי מעגל, הנוסחה שלהלן מתאר את הקשר בין אורכי האלכסונים ואורכי הצלעות (איור *1.16*).

$$ef = ac + bd\,.$$

הוכחה לפי חוק הקוסינוס עבור ארבעת המשולשים $\triangle ABC$, $\triangle ADC$, $\triangle DAB$, $\triangle DCB$:

$$\begin{aligned} e^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle B \\ e^2 &= c^2 + d^2 - 2cd\cos\angle D \\ f^2 &= a^2 + d^2 - 2ad\cos\angle A \\ f^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle C\,. \end{aligned}$$

$\angle C = 180° - \angle A$ ו=$\angle D = 180° - \angle B$ כי הן זוויות נגדיות של מרובע חסום על ידי מעגל, ולכן $\cos\angle D = -\cos\angle B$ ו-$\cos\angle C = -\cos\angle A$. נצמצם את הקוסינוס מהמשוואות הללו



איור 1.16: משפט Ptolemy

כדי לקבל:

$$\begin{aligned} e^2(cd+ab) &= abc^2+abd^2+a^2cd+b^2cd \\ e^2 &= \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)} \\ f^2 &= \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}\,. \end{aligned}$$

הכפל את שתי המשוואות ופשט כדי לקבל את משפטו של Ptolemy:

$$\begin{aligned} e^2\cdot f^2 &= (ac+bd)^2 \\ ef &= (ac+bd)\,. \end{aligned}$$

□

א׳.5 המשפט של Ceva

משפט א׳.19 (Ceva) נתון קטעי קו מהקודקודים של משלוש לצלעות הנגדיות שנחתכים בנקודה, אורכי הקטעים מקיימים את הנוסחה (איור *1.17*):

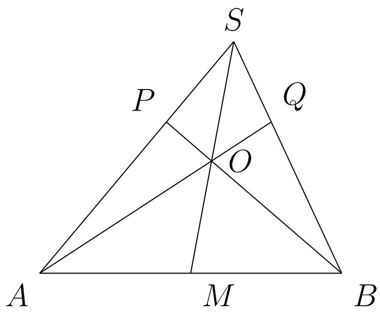
$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}\cdot\frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}\cdot\frac{\overline{SP}}{\overline{PA}}=1\,.$$

הוכחה אם הגבהים של שני משולשים שווים, אזי היחסים בין השטחים שווים ליחסים בין לבסיסים. בשתי התרשימים באיור 1.18 הגבהים של המשולשים האפורים שווים ולכן:

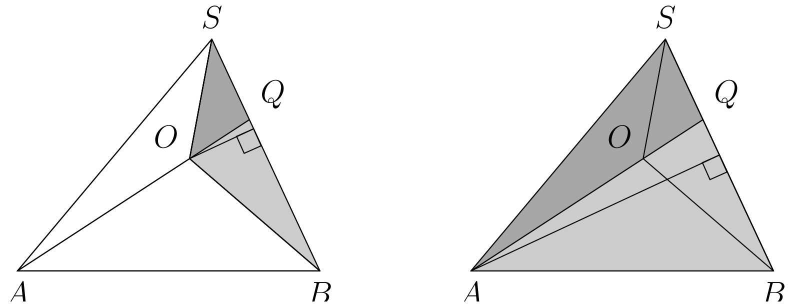
$$\frac{\triangle BQO}{\triangle SQO}=\frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}\,,\qquad \frac{\triangle BQA}{\triangle SQA}=\frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}\,.$$

נחסיר את השטחים האפרים במשולשים ונקבל את היחס בין המשלושים האפורים באיור 1.19:

$$\frac{\triangle BOA}{\triangle SOA}=\frac{\triangle BQA-\triangle BQO}{\triangle SQA-\triangle SQO}=\frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}\,.$$



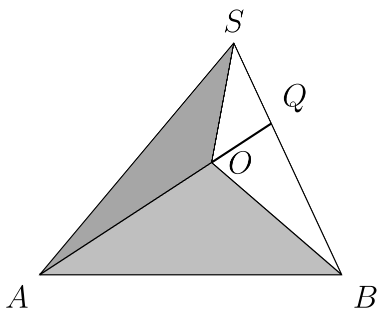
איור 1.17 : משפט Ceva



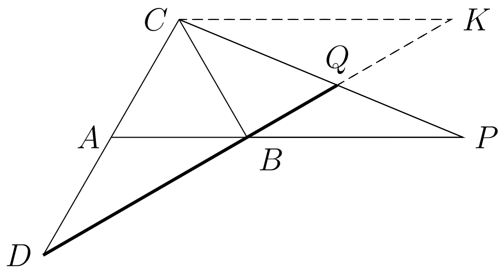
איור 1.18 : משולשים במשפט Ceva

חישוב זה עלול להיראות מעט מוזר אז נסביר אותו בסימון פשוט יותר :

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$
$$\frac{e}{f} = \frac{a}{b}$$
$$c - e = \frac{ad}{b} - \frac{af}{b} = \frac{a}{b}(d - f)$$



איור 1.19 : החסרת שטחים במשפט Ceva



איור 1.20: המשפט של Menelaus

$$\frac{c-e}{d-f} = \frac{a}{b}\,.$$

באופן דומה ניתן להוכיח:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\triangle AOS}{\triangle BOS}$$
$$\frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = \frac{\triangle SOB}{\triangle AOB}\,,$$

ולכן:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}\frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}\frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = \frac{\triangle AOS}{\triangle BOS}\frac{\triangle BOA}{\triangle SOA}\frac{\triangle SOB}{\triangle AOB} = 1\,,$$

כי הסדר של הקודקודים במשולש לא משנה. □

א׳.6 המשפט של Menelaus

משפט א׳.20 (Menelaus) יהי $\triangle ABC$ משולש ויהי $\overline{DBQ}$ **קו חותך** *(transveral)* החותך את שלושת הצלעות של המשולש או את ההארכות שלהם (איור. *1.20*). אזי:[4]

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = 1\,. \tag{1.11}$$

הוכחה נבנה קו דרך C המקביל ל-$\overline{AB}$ ונאריך את $\overline{DQ}$ עד שהוא חותך את הקו המקביל ב-K. מ-$\triangle ADB \sim \triangle CDK$ נובע:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{AB}}\,.$$

מ-$\triangle BQP \sim \triangle KQC$ נובע:

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{BP}}\,.$$

נצמצם את $\overline{CK}$ ונקבל $\overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{PQ} = \overline{QC}\cdot\overline{BP}\cdot\overline{AD}$ שניתן לסדר מחדש כדי לקבל את המשוואה 1.11. □

[4] כתלות המבנה המשולשים והקו החותך, המכפלה יכולה להיות $+1$ או -1.

מקורות

פרק זה מבוסס בעיקר על [19]. ניתן להוכיח את משפט Ceva ומשפט Menelaus אחד המשני [45].

ביבליוגרפיה

[1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. Proofs from THE BOOK (Fifth Edition). Springer, .2014

[2] Roger C. Alperin. A mathematical theory of origami constructions and numbers. New York Journal of Mathematics, ,133--6:119 .2000

[3] Marita Barabash. A non-visual counterexample in elementary geometry. The College Mathematics Journal, ,(5)36 .2005

[4] Mordechai Ben-Ari. Mathematical Logic for Computer Science (Third Edition). Springer, .2012

[5] Mordechai Ben-Ari. LearnSAT: A SAT solver for education. Journal of Open Source Software, ,639:(24)3 .2018 https://doi.org/10.21105/joss.00639.

[6] Jörg Bewersdorff. Galois Theory for Beginners: A Historical Perspective. American Mathematical Society, .2006

[7] Benjamin Bold. Famous Problems of Mathematics: A History of Constructions with Straight Edge and Compass. Van Nostrand, .1969

[8] Phillips Verner Bradford. Visualizing solutions to n-th degree algebraic equations using right-angle geometric paths. Archived May ,2 2010 at the Wayback Machine. https://web.archive.org/web/20100502013959/http://www.concentric.net/~pvb/ALG/rightpaths.html, .2010

[9] Lane Butler IV. Ramsey theory. https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2016/Barton.pdf, .2016

[10] James J. Callagy. The central angle of the regular 17-gon. The Mathematical Gazette, ,292--290:(442)67 .1983 https://www.jstor.org/stable/3617271.

[11] Richard Courant and Hebert Robbins. What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods (Second Edition). Oxford University Press, .1996 Revised by Ian Stewart.

[12] R.O. Davies. On Langford's problem (II). The Mathematical Gazette, ,5--43:253 .1959

[13] Heinrich Dörrie. 100 Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution. Dover, .1965

[14] Heinrich Dörrie. 100 problems of elementary mathematics: Their history and solution. Reworked by Michael Woltermann. Archived 21 February 2020 at the Wayback Machine. `https://web.archive.org/web/20191223032114/http://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/DorrieContents.htm`, .2010

[15] Underwood Dudley. A Budget of Trisections. Springer, .1987

[16] David Eppstein. Twenty proofs of Euler's formula: $V - E + F = 2$. `https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/`, n.d.

[17] John B. Fraleigh. A First Course in Abstract Algebra (Seventh Edition). Addison-Wesley, .2003

[18] Karl Friedrich Gauss. Disquisitiones Arithmeticae. Yale University Press, .2006 Editors: Todd W. Bressi and Paul Groth.

[19] I.M. Gelfand and Mark Saul. Trigonometry. Springer, .2001

[20] Ron Graham and Steve Butler. Rudiments of Ramsey Theory (Second Edition). American Mathematical Society, .2015

[21] David S. Gunderson. Handbook of Mathematical Induction: Theory and Applications. Mathematical Association of America, .2010

[22] Thomas L. Heath. The Thirteen Books of Euclid's Elements. Dover, .1956

[23] Marijn J. H. Heule and Oliver Kullmann. The science of brute force. Communications of the ACM, ,79--70: (8)60 .2017

[24] Thomas C. Hull. Solving cubics with creases: The work of Beloch and Lill. American Mathematical Monthly, ,315--307: (4)118 .2011

[25] Norbert Hungerbühler. A short elementary proof of the Mohr-Mascheroni theorem. American Mathematical Monthly, ,787--784: (8)101 .1994

[26] Robert J. Lang. Origami and geometric constructions. `http://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf`, .2015—-1996

[27] Detlef Laugwitz. Eine elementare Methode für Unmöglichkeitsbeweise bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Elemente der Mathematik, ,58--17: 54 .1962

[28] Po-Shen Loh. A different way to solve quadratic equations. `https://www.poshenloh.com/quadratic/`, .2019

[29] Po-Shen Loh. A simple proof of the quadratic formula. `https://arxiv.org/abs/1910.06709`, .2019

[30] Zohar Manna. Mathematical Theory of Computing. McGraw-Hill, .1974

[31] George E. Martin. Geometric Constructions. Springer, .1998

[32] Luke Mastin. Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi: Muslim Mathematician. https://www.storyofmathematics.com/islamic_alkhwarizmi.html, .2020

[33] William McCallum. A tale of two triangles: Heron triangles and elliptic curves. http://blog.kleinproject.org/?p=4, .2012

[34] Brendan D. McKay. Ramsey theory. http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/ramsey.html, nd.

[35] J.E. Miller. Langford's problem, remixed. http://dialectrix.com/langford.html, .2014

[36] Liz Newton. The power of origami. https://plus.maths.org/content/power-origami.

[37] Timothy Peil. The rusty compass theorem. Archived 20/07/2020 at the Wayback Machine. https://web.archive.org/web/20200720195718/http://web.mnstate.edu/peil/geometry/C2EuclidNonEuclid/1Compass.htm, .2006

[38] Ramanujan. Squaring the circle. Journal of the Indian Mathematical Society, V: 138, .1913 http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram05.pdf.

[39] Ramanujan. Modular equations and approximations to π. The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, XLV: 350--372, .1914 http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram06.pdf.

[40] M. Riaz. Geometric solutions of algebraic equations. American Mathematical Monthly, ,658--654: (7)69 .1962

[41] Tom Rike. Fermat numbers and the heptadecagon. https://mathcircle.berkeley.edu/sites/default/files/BMC6/ps0506/Heptadecagon.pdf, .2005

[42] Eleanor Robson. Words and pictures: New light on Plimpton .322 American Mathematical Monthly, ,120--105: (2)109 .2002

[43] Sheldon Ross. A First Course in Probability (Tenth Edition). Pearson, .2019

[44] Peter Schumer. The Josephus problem: Once more around. Mathematics Magazine, ,17--12: (1)75 .2002

[45] John R. Silvester. Ceva = (Menelaus)^2. The Mathematical Gazette, ,271--268: (500)84 .2000

[46] Timothy Sipka. Alfred Bray Kempe's ``Proof'' of the four-color theorem. Math Horizons, ,26--21: (2)10 .2002 http://www.jstor.org/stable/25678395.

[47] John Stillwell. Mathematics and Its History (Third Edition). Springer, .2010

[48] Jeff Suzuki. A brief history of impossibility. Mathematics Magazine, ,38--27: (1)81 .2008

[49] Robin Thomas. An update on the four-color theorem. Notices of the AMS, ,859--848: (7)45 .1998 http://www.ams.org/notices/199807/thomas.pdf.

[50] Godfried Toussaint. A new look at Euclid's second proposition. The Mathematical Intelligencer, ,23--12:(3)15 .1993

[51] Wikipedia. Angle bisector theorem.

[52] Wikipedia. Angle trisection.

[53] Wikipedia. Cubic equation.

[54] Wikipedia. Five color theorem.

[55] Wikipedia. Four color theorem.

[56] Wikipedia. Heptadecagon.

[57] Wikipedia. Huzita–Hatori axioms.

[58] Wikipedia. Josephus problem.

[59] Wikipedia. Neusis construction.

[60] Wikipedia. Pentagon.

[61] Wikipedia. Plimpton .322

[62] Wikipedia. Quadratic equation.

[63] Wikipedia. Quadratrix of Hippias.

[64] Wikipedia. Sexagesimal.