בעיית פיצה

אלי ובני הזמינו פיצה משפחתית. ידוע כי מהירות אכילה של אלי גדולה פי-**X** ממהירות אכילה של בני, כאשר $X>1$ הוא מספר ממשי. לפני תחילת הארוחה לאלי קיימת אפשרות לחלק את הפיצה ל-**N** משולשים __**שווים**__.
במהלך הארוחה כל אחד מהבנים לוקח משולש נוסף בעת שסיים את הקודם. יש למצוא מספר משולשים שיאפשר לאלי לאכול כמה שיותר פיצה. אסור לחלק את הפיצה למספר משולשים שיביא בסופו של דבר למצב בו שני החברים מגיעים למשולש האחרון בו-זמנית.

א. יש לתת תשובה בצורת פונקציה של **X**.
ב. יש לתת תשובה בצורת אלגוריתם שהקלט שלו הוא **X**.

אלגוריתם, סיבוכיות, דוגמה והוכחות.

פתרון

א. ברור שמספר משולשים N צריך להיות גדול או שווה $X+1$, בגלל שאם $N = X$, אלי יאוכל $\frac{N-1}{N}$ מפיצה, ואם $N = X+1$ אלי יאוכל $\frac{N}{N+1}$ מפיצה ו $\frac{N}{N+1} > \frac{N-1}{N}$, $(N^2 > N^2 - 1)$.

דבר שני מספר חלקים N צריך להיות שונה מ- $N \neq (X+1)\cdot p+1$ כדי להימנע ממצב בו שני החברים מגיעים למשולש האחרון בו-זמנית, כוון ש- $X+1$ הוא מספר משולשים ששניהם מסיימים לאכול בו-זמנית).

נניח כי $N = (X+1)\cdot p + r$ כאשר $2 \le r \le X$. אז אלי יאוכל $\frac{X\cdot p + r - 1}{(X+1)\cdot p + r}$ מפיצה ובני יאוכל $\frac{p+1}{(X+1)\cdot p + r}$ מפיצה.

נוכיח שאלי צריך לחלק את הפיצה ל-$X+1$ משולשים. או במילים אחרות אנו צריכים להוכיח כי $\frac{X\cdot p + r - 1}{(X+1)\cdot p + r} < \frac{X}{X+1}$. אמנם, $(X\cdot p + r - 1)\cdot(X+1) < X\cdot((X+1)\cdot p + r)$

$$X^2 p + Xp + rX + r - X - 1 < X^2 p + Xp + Xr$$

$r - X - 1 < 0$ או $r < X+1$, מש"ל.

התשובה: $F(X) = X+1$.

ב.