

קורס אלגוריתמים 1. שיעור 5 תבעית המזכירה.

משרד מסוים נותן שרות ללקוחות. הלקוחות באים בו-זמנית וממתינים בתור. לכל לקוח ידועה זמן הנדרש לטיפולו. המזכירה רוצה להקטין ככל האפשר את זמן הממוצע שהלקוחות נמצאים במשרד.

ניסוח הבעיה: זמן טיפול של כל אחד מ- m לקוחות נסמן ב- t_i ($i = 1, 2, \dots, n$), הזמן שהלקוח נמצא במשרד מורכב מזמן ההמתנה שלו וזמן הטיפול שלו. נסמן את הזמן שהלקוח נמצא במשרד ב- T_i ($i = 1, 2, \dots, n$). לפיכך

$$T_1 = t_1, \quad T_2 = t_1 + t_2, \quad \dots, \quad T_n = t_1 + t_2 + \dots + t_n$$

זמן ההמתנה הממוצע הוא, שצריך למצוא את המינימום שלו הוא

$$AVR = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_n}{n} \rightarrow \min$$

מספיק למצוא $\min(T_1 + T_2 + \dots + T_n)$, כוון כ המכנה הוא מספר קבוע.

דוגמה: $t_1 = 10, t_2 = 1, t_3 = 8$

1. כאשר תור הלקוחות הוא (1,2,3), זמן ההמתנה הממוצע הוא $40 = 10 + 11 + 19$
2. כאשר תור הלקוחות הוא (1,3,2), זמן ההמתנה הממוצע הוא $47 = 10 + 18 + 19$
3. כאשר תור הלקוחות הוא (2,1,3), זמן ההמתנה הממוצע הוא $31 = 1 + 11 + 19$
4. **כאשר תור הלקוחות הוא (2,3,1), זמן ההמתנה הממוצע הוא $29 = 1 + 9 + 19$**
5. כאשר תור הלקוחות הוא (3,1,2), זמן ההמתנה הממוצע הוא $45 = 8 + 18 + 19$
6. כאשר תור הלקוחות הוא (3,2,1), זמן ההמתנה הממוצע הוא $37 = 8 + 9 + 19$

פתרון ראשון: חיפוש שלם.

בחיפוש שלם צריך לעבור על כל הפרמוטציות האפשריות, לסדרה שמורכבת מ- n איברים מספר פרמוטציות הוא $2^n - 1$ – לא יעיל לגרי.

בעצם בדוגמה הנ"ל בצענו חיפוש שלם $n=3$, ומספר אפשרויות שעברנו עליהן הוא $3! = 6$.

פתרון שני: אלגוריתם יעיל.

בדוגמה שמנו לב שהתשובה הטובה ביותר מתקבלת כאשר מערך של זמני הטיפול ממין מקטן לגדול. שאלה: מה קורא עם זמן ההמתנה הממוצע כאשר מחליפים סדר של שני לקוחות שעומדים בתור אחד אחרי השני, נניח שזמן ההמתנה של קודם בתור גדול יותר מזמן ההמתנה של הבא: $t_i > t_{i+1}$, ונחליף את תורם, כך ש- הלקוח שזמן ההמתנה שלו t_i יעמוד בתור אחרי זה שזמן ההמתנה שלו הוא t_{i+1} :

$$sum = T_1 + \dots + T_{i-1} + T_i + T_{i+1} + \dots + T_n =$$

$$t_1 + \dots + (t_1 + \dots + t_{i-1}) + (t_1 + \dots + t_{i-1} + t_i) + (t_1 + \dots + t_{i-1} + t_i + t_{i+1}) + \dots +$$

$$(t_1 + \dots + t_{i-1} + t_i + t_{i+1} \dots + t_n)$$

האיבר היחיד שמושפע מסדר שבו נמצאים t_i, t_{i+1} הוא איבר שמכיל t_i ולא מכיל את t_{i+1} .

נחליף את $t_i \leftrightarrow t_{i+1}$, מקבל

$$\begin{aligned} sum' &= T_1 + \dots + T_{i-1} + T_i' + T_{i+1} + \dots + T_n = \\ &t_1 + \dots + (t_1 + \dots + t_{i-1}) + (t_1 + \dots + t_{i-1} + \mathbf{t_{i+1}}) + (t_1 + \dots + t_{i-1} + \mathbf{t_{i+1}} + \mathbf{t_i}) + \dots + \\ &(t_1 + \dots + t_{i-1} + t_i + \mathbf{t_{i+1}} \dots + t_n) \end{aligned}$$

נשווה בין sum לבין sum' :

$$sum - sum' = t_i - t_{i+1} > 0$$

לפי ההנחה.

המסקנה: זמן ההמתנה הממוצע קטן כאשר האיברים (זמני הטיפול) הסמוכים נמצאים בסדר עולה. כלומר המצב הטוב ביותר הוא כאשר זמני הטיפול של הלקוחות נמצאים בסדר עולה. על המזכירה יש למיין את המערך של זמני הטיפול ובהתאם לקבוע את התור.