Теоретический и практический минимум по дисциплине
«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Теоретический минимум.

Тема 1. Случайные события и их вероятности.

1. Как найти число сочетаний из n по m?
2. Как найти число размещений из n по m?
3. Как найти число перестановок n элементов?
4. Что называется достоверным событием?
5. Верно ли, что если событие A достоверное, то $P(A)=1$? Верно ли обратное утверждение?
6. Что называется невозможным событием?
7. Верно ли, что если событие A невозможное, то $P(A)=0$? Верно ли обратное утверждение?
8. Классическое определение вероятности.
9. Что называется суммой событий?
10. Совместные и несовместные события.
11. Теорема сложения вероятностей для совместных и несовместных событий.
12. Противоположные события. Чему равна вероятность события, противоположного данному?
13. Что называется произведением событий?
14. Определение условной вероятности.
15. Теорема умножения вероятностей для зависимых и независимых событий.
16. Полная группа событий.
17. Формула полной вероятности.
18. Формулы Байеса.
19. Что называется схемой Бернулли?
20. Формула Бернулли. Вероятность какого события вычисляется по формуле Бернулли?
21. Формула Пуассона.
22. Локальная формула Муавра-Лапласа. Интегральная формула Муавра-Лапласа.

Тема 2. Случайные величины.

23. Функция распределения случайной величины, ее свойства.
24. Вычисление вероятности $P(\alpha \le \xi < \beta)$ по известной функции распределения случайной величины ξ.
25. Способы задания дискретных случайных величин.
26. Способы задания непрерывных случайных величин.
27. Плотность распределения непрерывной случайной величины, ее свойства.

28. Вычисление вероятности $P(\alpha \le \xi < \beta)$ по известной плотности распределения случайной величины ξ.
29. Формулы, связывающие плотность распределения и функцию распределения случайной величины.
30. Математическое ожидание дискретной случайной величины.
31. Математическое ожидание непрерывной случайной величины.
32. Дисперсия случайной величины.
33. Биномиальное распределение, его числовые характеристики.
34. Распределение Пуассона, его числовые характеристики.
35. Непрерывное равномерное распределение, его числовые характеристики.
36. Показательное распределение, его числовые характеристики.
37. Нормальное распределение, его числовые характеристики.
38. Вычисление вероятности $P(\alpha \le \xi < \beta)$ для случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение.
39. Правило трех сигм.

<u>Тема 3. Системы случайных величин.</u>

40. Функция распределения двумерной случайной величины, ее свойства.
41. Необходимые и достаточные условия независимости двух случайных величин.
42. Плотность распределения двумерной случайной величины, ее связь с функцией распределения.
43. Числовые характеристики двумерной случайной величины.
44. Коэффициент корреляции двух случайных величин, его свойства.
45. Верно ли, что если случайные величины ξ и η независимы, то $r_{\xi;\eta} = 0$? Верно ли обратное утверждение?

<u>Тема 4. Элементы математической статистики.</u>

46. Что называется выборкой? Что называется генеральной совокупностью?
47. Что такое вариационный ряд?
48. Что такое статистический ряд?
49. Что такое частота? Что такое относительная частота?
50. Что такое полигон частот?
51. Что такое гистограмма относительных частот?
52. Эмпирическая функция распределения и ее свойства.
53. Как рассчитывается выборочное среднее?
54. Как рассчитывается выборочная дисперсия?
55. Что такое исправленная выборочная дисперсия?
56. Что называется несмещенной оценкой параметра распределения?
57. Несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии.
58. Доверительный интервал и доверительная вероятность. Уровень значимости.
59. Простая и сложная гипотезы. Нулевая и альтернативная гипотезы.
60. Статистический критерий. Область принятия гипотезы и критическая область.

61. Ошибки первого и второго родов. Уровень значимости и мощность критерия.
62. Двусторонняя и одностороння критические области.
63. Какие критерии используются для проверки гипотез о математических ожиданиях одной и двух независимых нормальных выборок?
64. Какие критерии используются для проверки гипотез о дисперсиях одной и двух независимых нормальных выборок?
65. Критерии значимости. Проверка гипотез о математических ожиданиях двух зависимых и независимых нормальных выборок.
66. В каких задачах построения доверительных интервалов и проверки статистических гипотез используется распределение Стьюдента?
67. В каких задачах построения доверительных интервалов и проверки статистических гипотез используется нормальное распределение?
68. В каких задачах построения доверительных интервалов и проверки статистических гипотез используется χ^2-распределение?
69. Виды зависимостей между случайными величинами.
70. Основные задачи корреляционного анализа.
71. Основные задачи регрессионного анализа.
72. Выборочный коэффициент корреляции и его свойства.
73. В чем суть метода наименьших квадратов?

Практический минимум

Тема 1. Случайные события и их вероятности.

1. Брошен правильный игральный кубик. Найти вероятность того, что на верхней грани выпадет: **а)** 6 очков; **б)** нечетное число очков; **в)** не менее 3 очков.

2. В урне 10 красных, 15 зеленых, 20 синих и 25 желтых шаров. Вынули один шар. Найти вероятность того, что этот шар: **а)** зеленый; **б)** зеленый или желтый; **в)** белый; **г)** цветной.

3. Из 33 карточек с различными буквами русского алфавита наугад взяли одну. Какова вероятность того, что на ней написана гласная буква?

4. В коробке четыре одинаковые карточки с числами 3, 5, 7, 8. Из коробки последовательно, наугад вынимают две карточки, не возвращая их обратно. Рассмотрим следующие события:

A = {на обеих карточках нечетные числа},

B = {число на первой карточке больше числа на второй},

C = {первой вынута карточка с числом 8},

D = {сумма чисел – четное число},

E = {оба числа четные}.

Требуется:

а) составить пространство элементарных событий Ω;

б) определить элементарные события, благоприятствующие появлению рассматриваемых событий;

в) вычислить вероятности рассматриваемых событий;

г) выяснить, являются ли совместными события A и B; A и C; A и D; A и E;
д) описать словами и посредством элементарных событий, в чем состоят события $\overline{B}$, $\overline{E}$.

5. Слово «ПРОЕКТ» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешивают, затем наугад вытаскивают и раскладывают в линию в порядке вынимания. Какова вероятность получения при этом слова «ПРОЕКТ»?

6. Слово «НИАГАРА» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешивают, затем наугад вытаскивают 6 карточек и раскладывают в линию в порядке вынимания. Какова вероятность получения при этом слова «АНГАРА»?

7. Найти вероятность угадать трехзначный код, если известно, что он состоит из различных цифр.

8. В партии из 50 изделий 5 окрашенных. Из партии выбирают наугад 6 изделий. Определить вероятность того, что среди этих 6 изделий ровно 2 изделия окажутся окрашенными.

9. В урне 5 черных и 3 белых шара. Наугад вынули 3 шара. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров 2 черных.

10. В стройотряде 10 юношей и 5 девушек. Для участия в реставрации замка наудачу набирается бригада из 5 человек. Какова вероятность того, что среди них будет 3 девушки и 2 юноши?

11. Две монеты радиуса r занимают произвольное положение, не пересекаясь, внутри круга радиуса R. В данный круг наугад бросают точку. Определить вероятность того, что эта точка попадает на одну из монет.

12. В первой урне 6 черных и 4 белых шара, во второй 3 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны наудачу извлекают один шар. Какова вероятность того, что вынуты: **а)** 2 белых шара; **б)** хотя бы один черный шар?

13. В двух коробках находятся карандаши, отличающиеся только цветом, причем в первой коробке 5 синих, 11 зеленых и 8 красных, а во второй – 10 синих, 8 зеленых и 6 красных. Из каждой коробки наудачу извлекают по одному карандашу. С какой вероятностью будет извлечен только один красный карандаш?

14. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Произведено два независимых выстрела. Какова вероятность: **а)** двух попаданий; **б)** одного промаха; **в)** хотя бы одного попадания?

15. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7, вторым – 0,5, третьим – 0,4. Каждый выстрелил по одному разу. Найти вероятность того, что хотя бы один стрелок попал в цель.

16. Радист пытается принять сигналы от трех передатчиков. Сигнал первого передатчика он может принять с вероятностью 0,5, второго – 0,4 и третьего – 0,3. Найти вероятность того, что ему удастся принять сигналы не менее двух передатчиков.

17. Охотник произвел три независимых выстрела по удаляющейся цели. Вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,8 и после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что он: **а)** промахнется все три раза; **б)** попадет хотя бы один раз; **в)** попадет ровно два раза.

18. Из 20 вопросов, входящих в программу экзамена, студент подготовил 17. Найти вероятность того, что студент ответил правильно на экзаменационный билет, состоящий из 3-х наудачу выбранных вопросов.

19. Несколько раз независимым образом бросают игральную кость. Какова вероятность того, что одно очко появится впервые при третьем бросании?

20. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. По мишени стреляют одиночными выстрелами до первого попадания, после чего стрельба прекращается. Найти вероятность того, что будет произведено не более трех выстрелов.

21. Две фирмы поставляют в магазин ученические тетради. Поставки первой фирмы составляют 40%, а второй – 60% от общего количества. Вероятность брака среди продукции первого поставщика равна 0,01, второго – 0,02. Найти вероятность того, что взятая наугад тетрадь не содержит брака.

22. Два датчика посылают сигналы в общий канал связи, причем первый из них посылает вдвое больше сигналов, чем второй. Вероятность получить искаженный сигнал от первого датчика 0,01, от второго – 0,04. Каков процент искаженных сигналов в общем канале связи?

23. На сборку поступило 50 деталей от первого станка, 100 от второго и 150 от третьего. Первый станок дает 2%, второй 1% и третий 2% брака. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь окажется не бракованной.

24. Из 5 винтовок, из которых 3 снайперские, наудачу выбирается одна и из неё производится выстрел. Найти вероятность попадания в цель, если вероятность попадания из снайперской винтовки – 0,95, а из обычной – 0,7.

25. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 10 стандартных, во втором 30 деталей, из них 25 стандартных, в третьем 10 деталей, из них 8 стандартных. Из случайно выбранного ящика наудачу взята одна деталь. Какова вероятность того, что она оказалась стандартной?

26. В первой урне 2 белых и 1 черный шар; во второй – 3 белых и 1 черный; в третьей – 2 белых и 2 черных шара. Из наугад выбранной урны вынимают шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

27. Игральную кость независимым образом подбрасывают 5 раз. Найти вероятность того, что ровно 3 раза появится четное число очков.

28. Правильную монету независимым образом подбрасывают 5 раз. Найти вероятность того, что цифра выпадет менее 4 раз.

29. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,1. Какова вероятность того, что из 4 наудачу купленных билетов выиграет: **а)** один билет; **б)** хотя бы один билет?

30. В среднем 20% пакетов акций на независимых аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 6 пакетов акций в результате торгов по первоначальной цене будет продано не более 4 пакетов.

31. Найти вероятность того, что после облучения из 500 бактерий выживет: **а)** ровно 3 бактерии; **б)** хотя бы одна бактерия, если вероятность выживания равна 0,004.

32. Вероятность брака при изготовлении некоторого изделия равна 0,002. Найти вероятность того, что среди 500 независимым образом произведенных изделий: **а)** не окажется бракованных; **б)** не более 2 бракованных.

Тема 2. Случайные величины.

33. Найти числовые характеристики случайной величины, заданной рядом распределения:

ξ	–3	4	7	10
P	0,1	0,1	0,4	0,4

34. Задан закон распределения случайной величины ξ:

ξ	–3	1	2
P	0,2	0,3	p

Требуется:

а) определить, при каком значении p указанная таблица является рядом распределения некоторой случайной величины ξ;

б) вычислить вероятности $P(1 \le \xi < 3)$, $P(\xi \ge -2)$, $P(\xi = 2,5)$;

в) найти функцию распределения случайной величины ξ и построить ее график.

35. Построить ряд распределения числа успехов в двух независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность успеха равна 0,3.

36. Игральную кость подбрасывают наудачу 4 раза. Найти математическое ожидание и дисперсию числа выпадений шестерки.

37. Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с $M\xi = 0,8$ и $D\xi = 0,64.$ Найти $P(\xi \le 1).$

38. Дана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \le 1, \\ a(x^2 - x) \quad \text{при } 1 < x \le 3, \\ 1 \quad \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Требуется:

а) определить значение параметра a;

б) вычислить $M\xi, D\xi, \sigma_\xi$;

в) вычислить вероятности $P(0 \le \xi < 2)$, $P(\xi < 1,5)$, $P(\xi = 1,5)$.

39. Требуется:

а) определить, при каком значении параметра a функция

$$p(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \le 0, \\ ax^3 \quad \text{при } 0 < x \le 2, \\ 0 \quad \text{при } x > 2 \end{cases}$$

является плотностью распределения непрерывной случайной величины ξ;

б) вычислить $M\xi, D\xi, \sigma_\xi$;

в) вычислить вероятности $P(1 \le \xi < 3)$, $P(\xi \ge 0,5)$, $P(\xi = M\xi)$.

40. Непрерывная случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке [2; 8]. Найти числовые характеристики случайной величины ξ и $P(0 \le \xi < 6)$, $P(6 \le \xi < 7)$, $P(\xi \ge 5)$, $P(\xi = 8)$.

41. Случайная величина ξ подчинена нормальному закону распределения с $M\xi = 5$ и $D\xi = 9$. Найти $P(4 \le \xi < 6)$, $P(6 \le \xi < 10)$, $P(\xi \ge 3)$, $P(\xi = 3)$.

42. Найти числовые характеристики случайной величины ξ и $P(-3 \le \xi < 1)$, $P(\xi < 0)$, если непрерывная случайная величина ξ задана плотностью распределения $p(x) = \frac{1}{5\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{25}(x+2)^2}$.

43. Детали, выпускаемые цехом, имеют диаметры, распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием 5 см и средним квадратическим отклонением 0,9 см. **а)** Найти вероятность того, что диаметр наугад взятой детали находится в пределах от 4 см до 7 см. **б)** С помощью правила трех сигм определить границы, в которых будут находиться диаметры деталей.

Тема 3. Системы случайных величин.

44. Задан закон распределения двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$:

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1	2
-1	0,05	0,3	0	0,05
1	0	p	0,2	0

Требуется:

а) определить значение параметра p;

б) найти $P(\xi \ge \eta)$;

в) найти законы распределения случайных величин ξ и η;

г) вычислить числовые характеристики случайных величин ξ и η;

д) найти коэффициент корреляции между ξ и η;

е) выяснить, зависимы ли случайные величины ξ и η.

Тема 4. Элементы математической статистики.

45. При проверке партии изделий получены следующие данные по сортам:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Требуется:

а) составить статистический ряд;

б) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

в) найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

46. По данному статистическому ряду

x_i^*	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

требуется:
а) построить полигон частот;
б) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;
в) найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

47. По данному интервальному статистическому ряду:
а) найти несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии;
б) построить гистограмму относительных частот;
в) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

$[x_{i-1}; x_i)$	[–1; 1)	[1; 3)	[3; 5)	[5; 7)
n_i	10	45	30	15

48. Найти доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения с заданной надежностью $\gamma = 0,95$, если среднеквадратическое отклонение равно 2 и по выборке объема 10 найдено выборочное среднее, равное 5,4.

49. Предполагая, что выборка

–2; –4; 2; 14; 2; 8; 6; –2

взята из нормального распределения, оценить математическое ожидание с надежностью γ = 0,95.

50. Определить коэффициенты эмпирического линейного уравнения регрессии, построить прямую на корреляционном поле, если исследуется зависимость y от x по результатам 4 наблюдений:

x	1	2	3	4
y	2	4	5	7

51. Найти выборочный коэффициент корреляции и проверить его значимость при уровне значимости $\alpha = 0,05$, если исследуется зависимость y от x по результатам 5 наблюдений:

x	1	1,5	3	4,5	5
y	1,25	1,4	1,5	1,75	2,25

Ответы. **1. а)** $\frac{1}{6}$; **б)** $\frac{1}{2}$; **в)** $\frac{2}{3}$. **2. а)** $\frac{3}{14}$; **б)** $\frac{4}{7}$; **в)** 0; **г)** 1. **3.** $\frac{10}{33}$.

4. а) $\Omega = \left\{ \begin{matrix} (3;5); (3;7); (3;8); (5;3); (5;7); (5;8); \\ (7;3); (7;5); (7;8); (8;3); (8;5); (8;7) \end{matrix} \right\}$;

б) $A = D = \{(3;5); (3;7); (5;3); (5;7); (7;3); (7;5)\}$;

$B = \{(5;3); (7;3); (7;5); (8;3); (8;5); (8;7)\}$; $C = \{(8;3); (8;5); (8;7)\}$; $E = \varnothing$;

в) $P(A) = P(D) = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{1}{2}; P(C) = \frac{1}{4}; P(E) = 0$; **г)** A и B совместны; A и C несовместны; A и D совместны; A и E несовместны;

д) $\overline{B}$ = {число на первой карточке не больше, чем число на второй} =

$=\{(3;5);(3;7);(3;8);(5;7);(5;8);(7;8)\}$; $\bar{E}=\Omega=$ {хотя бы одно число нечетное}. **5.** $\frac{1}{720}$. **6.** $\frac{1}{840}$. **7.** $\frac{1}{720}$. **8.** 0,094. **9.** $\frac{15}{28}$. **10.** $\frac{150}{1001}$. **11.** $\frac{2r^2}{R^2}$.
12. а) 0,28; **б)** 0,72. **13.** $\frac{7}{18}$. **14. а)** 0,49; **б)** 0,42; **в)** 0,91. **15.** 0,91. **16.** 0,5.
17. а) 0,024; **б)** 0,976; **в)** 0,452. **18.** $\frac{34}{57}$. **19.** $\frac{25}{216}$. **20.** 0,936. **21.** 0,984. **22.** 2%.
23. 0,983. **24.** 0,85. **25.** $\frac{32}{45}$. **26.** $\frac{23}{36}$. **27.** $\frac{5}{16}$. **28.** 0,8125. **29. а)** 0,2916; **б)** 0,3439.
30. 0,9984. **31. а)** 0,180; **б)** 0,865. **32. а)** 0,368; **б)** 0,920.

33. $M\xi=7,2$; $D\xi=9,36$. **34. а)** $p=0,5$; **б)** $P(1\le\xi<3)=0,8$; $P(\xi\ge-2)=0,8$; $P(\xi=2,5)=0$; **в)** $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -3,\\ 0,2 & \text{при } -3<x\le 1,\\ 0,5 & \text{при } 1<x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$

35.

ξ	0	1	2
P	0,49	0,42	0,09

36. $M\xi=\frac{2}{3}$; $D\xi=\frac{5}{9}$. **37.** 0,8192. **38. а)** $a=\frac{1}{6}$; **б)** $M\xi=\frac{20}{9}$; $D\xi=\frac{23}{81}$; $\sigma_\xi=\frac{\sqrt{23}}{9}$;
в) $P(0\le\xi<2)=\frac{1}{3}$; $P(\xi<1,5)=\frac{1}{8}$; $P(\xi=1,5)=0$. **39. а)** $a=\frac{1}{4}$; **б)** $M\xi=\frac{8}{5}$;
$D\xi=\frac{8}{75}$; $\sigma_\xi=\frac{2\sqrt{6}}{15}$; **в)** $P(1\le\xi<3)=\frac{15}{16}$; $P(\xi\ge 0,5)=\frac{255}{256}$; $P(\xi=M\xi)=0$.
40. $M\xi=5$; $D\xi=3$; $P(0\le\xi<6)=\frac{2}{3}$; $P(6\le\xi<7)=\frac{1}{6}$; $P(\xi\ge5)=0,5$;
$P(\xi=8)=0$. **41.** $P(4\le\xi<6)\approx0,2586$; $P(6\le\xi<10)\approx0,3232$; $P(\xi\ge3)\approx0,2514$;
$P(\xi=3)=0$. **42.** $M\xi=-2$; $D\xi=12,5$; $P(-3\le\xi<1)\approx0,4126$; $P(\xi<0)\approx0,7157$.
43. а) 0,1309; **б)** (2,3 см; 7,7 см).

44. а) $p=0,4$; **б)** 0,65;

в)

ξ	–1	1
P	0,4	0,6

η	–1	0	1	2
P	0,05	0,7	0,2	0,05

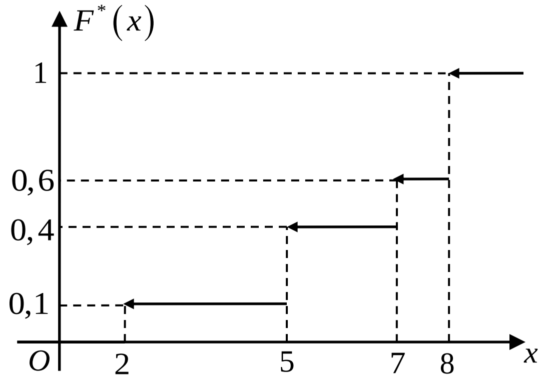
г) $M\xi=0,2$; $D\xi=0,96$; $M\eta=0,25$; $D\eta=0,3875$; **д)** 0,164; **е)** зависимы.

45. а)

x_i^*	1	2	3	4
n_i	9	7	2	2

б) $F_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 1,\\ 0{,}45, & \text{если } 1<x\le 2,\\ 0{,}8, & \text{если } 2<x\le 3,\\ 0{,}9, & \text{если } 3<x\le 4,\\ 1, & \text{если } x>4;\end{cases}$ **в)** $\bar{x}=1{,}85;\ s^2\approx 0{,}976.$

46. б) $F_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 2,\\ 0{,}1, & \text{если } 2<x\le 5,\\ 0{,}4, & \text{если } 5<x\le 7,\\ 0{,}6, & \text{если } 7<x\le 8,\\ 1, & \text{если } x>8;\end{cases}$



в) $\bar{x}=6{,}3;\ s^2\approx 4{,}01.$ **47. а)** $\bar{x}=3;\ s^2\approx 3{,}03;$ **в)** $F_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,\\ 0{,}1, & \text{если } 0<x\le 2,\\ 0{,}55, & \text{если } 2<x\le 4,\\ 0{,}85, & \text{если } 4<x\le 6,\\ 1, & \text{если } x>6.\end{cases}$

48. (4,16; 6,64). **49.** (-1,94; 7,94). **50.** $y=0{,}5+1{,}6x.$ **51.** $r\approx 0{,}912;$ значимо отличается от 0.