חדו"א 2, אפריל 23 בס"ד
בוחן א'

פתרון בוחן לדוגמא:

1) נשים לב שהשטח האפור והכחול יחדיו הם המשולש הנוצר ע"י הישר $y = 3-x$ וציר ה-x.

את השטח האפור נחשב ע"י אינטגרל ואת השטח הכחול נקבל ע"י חיסור השטח האפור משטח המשולש.

נק' החיתוך של הישר $y=3-x$ עם הצירים:

$$y=0 \rightarrow 0=3-x \rightarrow x=3 \quad (3,0)$$

$$x=0 \rightarrow y=3-0 \rightarrow y=3 \quad (0,3)$$

נק' החיתוך של הישר עם הפונק' $y=x^2+1$:

$$x^2+1 = 3-x$$

$$x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0$$

$$\rightarrow x=-2, \quad x=1$$

ובסה"כ: $(-2,5)$, $(1,2)$

ולכן שטח המשולש הוא:

$$S_\Delta = \frac{\text{גובה} * \text{בסיס}}{2} = \frac{(3-(-2))\cdot 5}{2} = 12.5$$

$$S_{\text{אפור}} = \int_{-2}^{1}\left[(3-x)-(x^2+1)\right]dx = \left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1} = 4.5$$

$$\rightarrow S_{\text{כחול}} = S_\Delta - S_{\text{אפור}} = 12.5-4.5 = 8$$

CamScanner

בס"ד

שאלה 2

א) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin(x)}$ מתכנס? - לא.

$\boxed{x=0 \text{ נק' בעייתית}}$

נשים לב שעבור $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ מתקיים $0 < \sin(x) < x$

ולכן,

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\int_t^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_t^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln(t) =$$

$$= \ln\left(\frac{\pi}{2t}\right) \xrightarrow[t \to 0]{} -\infty$$

ולכן $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} dx$ מתבדר $\leftarrow$ ממבחן ההשוואה גם $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin(x)}$ יתבדר.

(ק) $\int_1^2 \frac{\sin(x)}{\ln(x)}dx$ מתכנס- לא! $\boxed{\text{נק' בעיה } x=1}$

נסיב בפונק' $g(x)=\frac{1}{x-1}$ ונשתמש במבחן ההשוואה הגבולי.

$$f(x)=\frac{\sin(x)}{\ln(x)} \quad , \quad g(x)=\frac{1}{x-1}$$

עבור $u=x-1 \leftarrow u+1=x$ (נקבל:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{u\to0}\frac{f(u)}{g(u)}=\lim_{u\to0}\frac{\sin(u+1)}{\ln(u+1)}\cdot u=$$

$$=1\cdot\sin(1)=\sin(1)$$

השוויון האחרון נובע מגבול יסודי מפורסם במחברת כי $\left(\lim_{t\to0}\frac{\ln(t+1)}{t}=1\right)$

ולכן לפי משפט ההשוואה הגבולי, אם $\int g(x)dx$ מתכנסת/מתבדרת, כך גם $\int f(x)dx$.

$$\int_1^2 g(x)\,dx=\int_1^2\frac{1}{x-1}dx=\ln(x-1)\Big|_1^2=\ln(1)-\ln(0)$$ — <u>מתבדר</u>

ולכן $\int_1^2\frac{\sin(x)}{\ln(x)}dx$ מתבדר.

CamScanner

ג. $\int_{1/2}^{1} \frac{\ln(x^2+5)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ מתכנס? כן! $\boxed{\text{הנק' הבעייתית } x=1}$

נביט בפונק' $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ונשתמש במבחן ההשוואה הגבולי.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+5)}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \ln(x^2+5) = \ln(6) > 0$$

הגבול קיים וחיובי. ולכן אם $\int_{1/2}^{1} g(x)dx$ מתכנס/מתבדר, כך יהיה גורלו של האינטגרל $\int_{1/2}^{1} f(x)dx$.

$$\int_{1/2}^{1} g(x)dx = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x)\Big|_{1/2}^{1} =$$

$$= \arcsin(1) - \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow$$ מתכנס!

ולכן $\int_{1/2}^{1} \frac{\ln(x^2+5)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ מתכנס.