פתרון בוחן 2024

7 ביולי 2024

שאלה 1

חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int e^{2x}\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx$$

פתרון:
באמצעות אינטגרציה בחלקים עבור $u = e^{2x}, v' = \cos(\frac{x}{4})$ נקבל ש

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx &= e^{2x}\cdot 4\sin\left(\frac{x}{4}\right) - 4\int 2e^{2x}\cdot\sin\left(\frac{x}{4}\right)\cdot dx\\ &= 4e^{2x}\cdot\sin\left(\frac{x}{4}\right) - 8\int e^{2x}\sin\left(\frac{x}{4}\right)dx\end{aligned}$$

על האינטגרל השני נפעיל אינטגרציה בחלקים פעם נוספת:

$$= 4e^{2x}\sin\left(\frac{x}{4}\right) - 8\left[-e^{2x}\cdot\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdot 4 + \int 2e^{2x}\cdot 4\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx\right]$$

ובסך הכל נקבל ש

$$\int e^{2x}\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx = 4e^{2x}\cdot\sin\left(\frac{x}{4}\right) + 32e^{2x}\cdot\cos\left(\frac{x}{4}\right) - 64\int e^{2x}\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx$$

נעביר אגפים ונקבל

$$65\int e^{2x}\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx = 4e^{2x}\left[\sin\left(\frac{x}{4}\right) + 8\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right]$$

ומכאן ש

$$\int e^{2x}\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx = \frac{4}{65}e^{2x}\left[\sin\left(\frac{x}{4}\right)+8\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right]+C$$

שאלה 2

בדקו אם האינטגרלים הבאים מתכנסים או מתבדרים.

סעיף א'

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{6x^3dx}{(x^4+1)^2}$$

פתרון:

נשים לב כי המכנה מקיים $(x^4+1)^2 \geq 1$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכן הנקודות הבעיתיות הן רק באינסוף.

$$\frac{6x^3}{(x^4+1)^2} < \frac{6x^3}{(x^4)^2} = \frac{6x^3}{x^8} = \frac{6}{x^5}$$

והרי האינטגרל הזה מתכנס ולכן לפי מבחן ההשוואה, גם האינטגרל שבשאלה מתכנס.

סעיף ב'

$$\int_{1}^{4}\frac{dx}{x^2+x-6}$$

פתרון:

נשים לב כי

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$$

כלומר נקודה בעייתית ב $x=2$

נמצא את האינטגרל הלא מסויים

$$\int \frac{dx}{x^2+x-6} = \int \left[\frac{1}{5(x+3)} - \frac{1}{5(x-2)}\right] dx = \frac{1}{5}\left[\int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{dx}{x-2}\right] =$$
$$\frac{1}{5}\left[\ln|x-2| - \ln|x+3|\right]$$

כעת נבחן את האינטגרל מצדי הנקודה הבעייתית

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x-6} = \lim_{t\to 2}\frac{1}{5}\left[\ln|x-2| - \ln|x+3|\right]_1^t =$$
$$\frac{1}{5}[\lim_{t\to 2}\ln|x-2| - \ln|1-2| - \ln|2+3| + \ln|1+3|] = \infty$$

ולכן האינטגרל מתבדר
לא צריך לבדוק גם את הצד השני כדי להוכיח התבדרות

סעיף ג'

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$$

פתרון:
הנקודות הבעיתית הן 0 ואינסוף
נגדיר $t = \frac{1}{x}$, $\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{x^2}$ לכן פתרון לאינטגרל הלא מסויים יהיה

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2} = -\int e^t dt = -e^t = -e^{\frac{1}{x}}$$

עכשיו ננסה לפתור עבור $x = 0$

$$\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2} = \lim_{t\to 0-} -e^{\frac{1}{x}}|_{-1}^t = \lim_{x\to 0-} -e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$$

כלומר האינטגרל מתכנס. נבדוק את הצד השני

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2} = \lim_{t\to -\infty} -e^{\frac{1}{x}}|_t^{-1} = \frac{1}{e} - \lim_{x\to -\infty} -e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e} + 1$$

כלומר האינטגרל מתכנס וערכו הוא

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2} = 1$$

סעיף ד'

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos(e^{2x^2+x+\pi})}{x^2} dx$$

פתרון:
הנקודה הבעיתית היא רק ב $x \to \infty$
לכל $x > 1$ מתקיים

$$|\frac{\cos(e^{2x^2+x+\pi})}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$$

והרי זה אינטגרל מתכנס, לכן לפי מבחן ההשוואה גם האינטגרל בשאלה מתכנס

שאלה 3

מצאו את פיתוח מקלורן עד לסדר n של הפונקציה הבאה:

$$\ln(3+4x)$$

פתרון: נזכור כי פיתוח מקלורן של פונקציה כלשהי נתון על ידי

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

עבור הפונקציה הנתונה בשאלה מתקיים ש

$$f^{(0)}(x) = \ln(3+4x)$$
$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{3+4x} \cdot 4$$
$$f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(3+4x)^2} \cdot 4 \cdot 4$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{1 \cdot 2}{(3+4x)^3} 4 \cdot 4 \cdot 4$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4^n \cdot (n-1)!}{(3+4x)^n}$$

נציב את הנגזרת הכללית בנוסחא של $P_n(x)$ עבור $x=0$ ובסך הכל נקבל ש

$$\ln(3+4x) \approx \ln(3) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}4^k(k-1)!}{3^k \cdot k!}x^k = \ln(3) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k \cdot \frac{x^k}{k}$$

שאלה 4

בדקו האם הטור הבא מתכנס:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{1+3n}(n+1)}{n^2 5^{1+n}}$$

פתרון:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{1+3n}(n+1)}{n^2 5^{1+n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1} \cdot (-2)^{2n}(n+1)}{5^{n+1} \cdot n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1} \cdot 4^n \cdot \frac{n+1}{n^2}$$

נשתמש במבחן המנה כדי לבדוק את התכנסות הטור:

$$a_{n+1} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+2} \cdot 4^{n+1} \cdot \left(\frac{n+2}{(n+1)^2}\right)$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\left(\frac{2}{5}\right) \cdot 4 \cdot \frac{n^2(n+2)}{(n+1)(n+1)^2}\right| = \left|\frac{8}{5} \cdot \frac{n^3+2n^2}{n^3+3n^2+3n+1}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{8}{5} \cdot 1 = \frac{8}{5} > 1$$

ולכן ממבחן המנה הטור מתבדר.