פתרון מבחן לדוגמה

שאלה 1

תחילה נקבע האם האינטגרל מתכנס. נשים לב שהמכנה הוא חיובי ממש, ולכן אין נקודות בתוך התחום המהוות בעיה. לכן פצל את האינטגרל לשני ענפים על ידי נקודה באמצע הטווח:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{6w^3}{(w^4+1)^2}dw = \int_{-\infty}^{0} \frac{6w^3}{(w^4+1)^2}dw + \int_{0}^{\infty} \frac{6w^3}{(w^4+1)^2}dw$$

נשים לב כי מדובר על אינטגרל של פונקציה אי זוגית בתחום סימטרי, ולכן יהיה לו ערך עיקרי אפס. אם הענף הימני מתכנס לסכום סופי נאמר שהאינטגרל מתכנס לאפס. במידה והענף הימני לא מתכנס למספר סופי, אלא מתכנס במובן הרחב נסיק כי האינטגרל כולו מתבדר.

החלפת משתנים: $t = w^4$ ולכן: $dt = 4w^3dw$ ותחומי אינטגרציה זהים: $t \in (0, \infty)$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{6w^3}{(w^4+1)^2}dw = \frac{3}{2}\int_{0}^{\infty} \frac{dt}{(t+1)^2} = \lim_{s\to\infty}\left[-\frac{3}{2(t+1)}\right]_0^s = \left(0-\left(-\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{3}{2}$$

באופן זהה נקבל כי ענף שמאל מתכנס למספר סופי זהה בסימן הפוך:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{6w^3}{(w^4+1)^2}dw = \frac{3}{2}\int_{\infty}^{0} \frac{dt}{(t+1)^2} = \lim_{s\to-\infty}\left[-\frac{3}{2(t+1)}\right]_s^0 = \left(\left(-\frac{3}{2}\right)-0\right) = -\frac{3}{2}$$

כלומר:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{6w^3}{(w^4+1)^2}dw = 0$$

<u>שאלה 2</u>

נציב: $t = 2x + 17$ כך שנקבל טור חזקות:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2n+1}}{4^{3n}} t^n$$

הטור מתכנס בהחלט עבור טווח הערכים:

$$|t| < R$$

למדנו כי רדיוס ההתכנסות הוא:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

ולכן:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n+1}}{4^{3n}}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{4^{3n}}} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{4^3}\right)} = 0$$

כלומר הטור מתכנס בהחלט רק עבור $t = 0$, ובשפה של איקס, עבור $x = -\frac{17}{2}$

שאלה 3

$$\ln(5)-\ln(4)=\ln\left(\frac{5}{4}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)$$

ולכן אם נשתמש בטור טיילר של $\ln(1+x)$ המתכנס בתחום: $-1<x\leq 1$, נראה כי $x=\frac{1}{4}$ נכלל בתחום ההתכנסות, ולכן כל שנותר הוא רק למצוא את מספר הערכים העונים על הדיוק.

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\ \rightarrow\ \ln\left(1+\frac{1}{4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)4^{n+1}}$$

קיבלנו טור לייבניץ – מחליף סימן ומונוטוני יורד (מונה קבוע, מכנה הולך וגדל).

נחפש אינדקס n עבורו $|a_n|<0.001$ ונסכום עד אליו לא כולל.

$n\in\mathbb{N}$	$\lvert a_n\rvert=\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}$	$\lvert a_n\rvert<0.001$
0	0.25	לא
1	0.03125	לא
2	0.005208333	לא
3	0.0009765625	כן

ולכן עבור דיוק 0.001:

$$\ln\left(\frac{5}{4}\right)\approx\sum_{n=0}^{2}\frac{(-1)^n}{(n+1)4^{n+1}}=\frac{43}{192}=0.2239583$$

שאלה 4

נשים לב כי עבור: $h(x) = 9x^2 - 1$ ו- $g(y) = 1 + 4y$ הפונקציה $f(x,y) = g(y)h(x)$.

נחפש אפסים של הגרדיאנט בפנים המלבן $[-1,4] \times [-2,3]$:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} h'(x)g(y) \\ h(x)g'(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18x(1+4y) \\ 4(3x-1)(3x+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

משוואה (2) מתאפסת עבור $\pm\frac{1}{3}$ $x =$ שבתחום, והצבתם במשוואה (1) תניב $\pm 6(1+4y) = 0$ כך ש- $y = -\frac{1}{4}$.

משוואה (1) תתאפס עבור $x = 0$ אך הצבת ערך זה במשוואה (2) לא מניבה שום ערך y.

כלומר נקודות מעניינות בפנים הן: $\left(\pm\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$.

הנקודות שקיבלנו הן למעשה הנקודות שמאפסות את $g(y), h(x)$ ולכן $f\left(\pm\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right) = 0$.

בנוסף, כיוון שהפונקציה ניתנת לתיאור במכפלת פונקציות של x או y לבד בהתאמה, נחפש את הערך המקסימלי עבור כל פונקציה בנפרד:

$$\max_{-2\le x\le 3} |h(x)| = \max_{-2\le x\le 3} |9x^2 - 1| = h(3) = 9 * 3^2 - 1 = 80$$

$$\max_{-1\le y\le 4} |g(y)| = \max_{-1\le y\le 4} |1 + 4y| = g(4) = 1 + 4^2 = 17$$

כיון שהערכים המקסימליים בשתי הפונקציות בנפרד התקבלו בסימן שווה (שניהם חיוביים), המכפלה שלהם גם היא חיובית ומקסימלית, ולכן הערך המקסימלי של $f(x,y) = h(x)g(y)$ מתקבל ממכפלת ערכי המקסימום:

$$\max_{\substack{-2\le x\le 3 \\ -1\le y\le 4}} |h(x)\, g(y)| = \max_{-2\le x\le 3} |h(x)| \max_{-1\le y\le 4} |g(y)| = 80 * 17 = 1360$$

כלומר הנקודה עבורה נקבל מקסימום גלובאלי בתחום היא (3,4) וערך המקסימום בה 1360.

<u>הערה:</u> שימו לב כי במידה והערכים המוחלטים המקסימליים היו נובעים מערכים שוני סימן בפונקציות הנפרדות – מכפלתם הייתה מניבה את המינימום המוחלט.

שאלה 5

עבור מספר מרוכב: $z = a + bi \in \mathbb{C}$ כך ש- $a, b \in \mathbb{R}$ נחפש פתרון למשוואה: $z^2 * \bar{z} = z$

תחילה נשים לב כי הפתרון הטריוויאלי $z = 0 + 0i = 0$ פותר את המשוואה.

כעת נניח $z \neq 0$:

נשתמש בזהות: $\bar{z}z = a^2 + b^2$ כך ש:

$$z^2 * \bar{z} = z$$

$$z[\bar{z}z] = z$$

$$z(a^2 + b^2) = z \quad \backslash z \neq 0$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

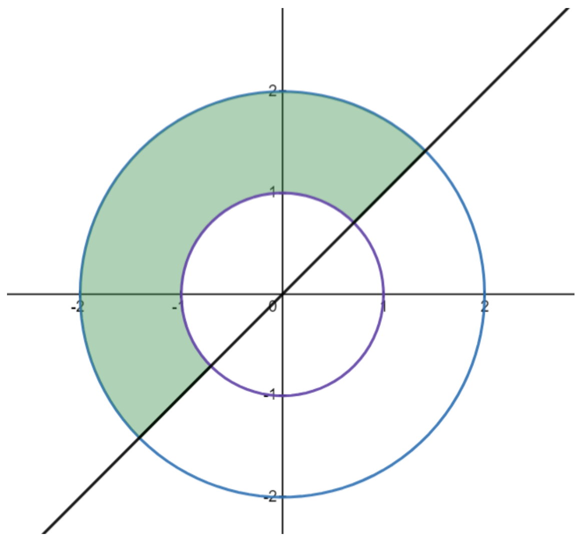
כלומר כל מספר מרוכב $z = a + bi$ במישור המרוכב הנמצא על מעגל היחידה פותר את המשוואה.

בשפה פולארית: $z = cis(\theta)$ לכל $0 \leq \theta \leq 2\pi$ עבור רדיוסים: $r = 1,0$

שאלה 6

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad D=\{(x,y)|\ 1\le x^2+y^2\le 4\ ,\ \ x\le y\}$$

כלומר אם נשרטט את התחומים נראה שזה תחום הנקודות הכלואות בין 2 מעגלים שמרכזם בראשית, ורדיוסם 1 ו-2 בהתאמה, עבור כל הנקודות בין המעגלים המקיימות $x\le y$:



נעבור כמובן לקורדינטות פולאריות:

$$x=rcos(\theta), \qquad y=rsin(\theta), \qquad dxdy=rdrd\theta$$

והתחום D הוא למעשה:

$$1\le r\le 2$$

$$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$$

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\iint_D\frac{rdrd\theta}{\sqrt{r^2}}=\int_1^2 dr\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}d\theta=\pi(2-1)=\pi$$