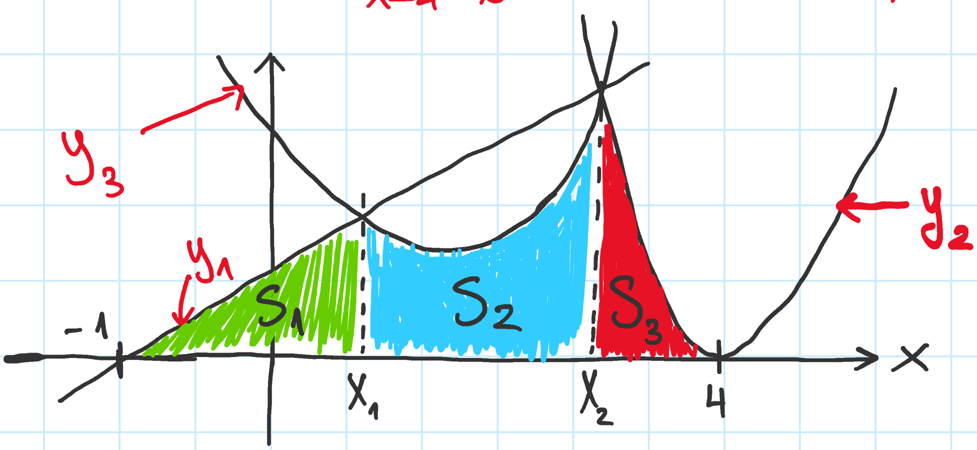
פתרון בוחן 1

שאלה 1

$y_1 = x+1$, $y_2 = \underbrace{4(x-4)^2}$, $y_3 = \underbrace{x^2-3x+4}$

משיק ל- $y=0$ ב- $x=4$

לא פריק, אין חיתוך עם x



נמצא את נקודות החיתוך x_1 ו- x_2 ונחלק את השטח הרלוונטי ל- 3 תתי שטחים שנחשב בנפרד.

x_1 הוא החיתוך בין y_1 ו- y_3, ו- x_2 הוא חיתוך בין 3 הפונקציות. כלומר נשווה את y_1 ו- y_3 ונקבל 2 נקודות, x_1 הקטנה מהן.

$$x+1 = x^2-3x+4$$
$$x^2-4x+3=0$$
$$(x-3)(x-1)=0$$

$x_1 = 1$

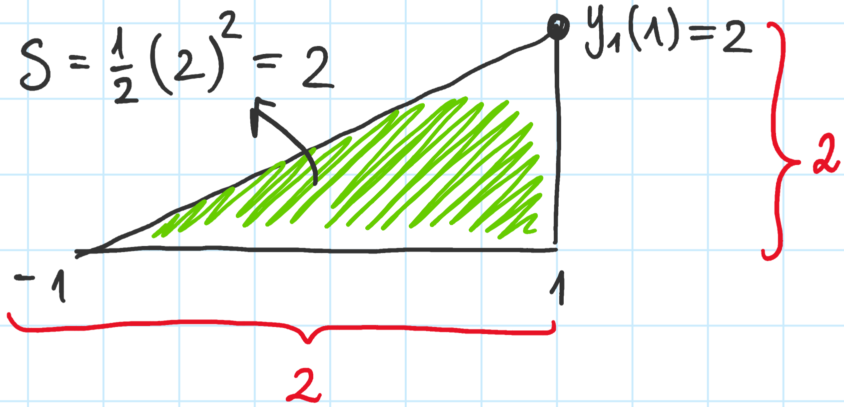
$x_2 = 3$

ניתן לחשב את S_1 דרך אינטגרציה:

$$S_1 = \int_{-1}^{x_1=1} (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{2}+1\right) - \left(\frac{1}{2}-1\right) = 2$$

בנוסף מדובר על שטח משולש:

$$S = \frac{1}{2}(2)^2 = 2$$



S_2 הוא השטח בין ציר x ל- y_3 בתחום $[1,3]$

$$S_3 = \int_1^3 (x^2-3x+4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_1^3$$

$$= \left(9 - \frac{27}{2} + 12\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right)$$

$$= \left(\frac{42-27}{2}\right) - \left(\frac{2-9+24}{6}\right)$$

$$= \frac{15}{2} - \frac{17}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

S_3 הוא השטח הכלוא בין ציר x ו- y_2 בתחום $[3,4]$

$$S_3 = \int_3^4 4(x-4)^2\,dx = 4\int_3^4 (x-4)^2\,dx = \frac{4}{3}\left[(x-4)^3\right]_3^4$$

$$= \frac{4}{3}\left[0-(-1)\right] = \frac{4}{3}$$

ולכן סך השטח שיש לחשב:

$$S_1 + S_2 + S_3 = 2 + 4\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} = \underline{\underline{8}}$$

<u>שאלה 2</u>

<u>א. בחינת התכנסות</u>

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}-1}$

נשים לב ש- $x=1$ נקודה בעייתית. נכפול ונחלק בצמוד של המכנה ונקבל על:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x^2-x+1-1} = \frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x(x-1)}$$

נבחר g חיובית עם אסימפטוטה ב- $x=1$

$g(x) = \frac{1}{x-1}$ וממבחן ההשוואה הגבולי

$$L = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}\right) = 2$$

קיבלנו $0 < L < \infty$ ולכן $\int_1^2 f(x)dx$ ו- $\int_1^2 g(x)dx$

מתכנסים ומתבדרים יחד.

$$\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \Big[\ln|x-1|\Big]_1^2 = \ln(1) - \lim_{t\to 0^+} \ln(t) = \infty$$

ולכן האינטגרלים מתבדרים.

הצבה:

(2) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx \Rightarrow \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{array}$

dt

$$= \int \cos(t)\,dt = \sin(t) = \sin(\ln(x))$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left(\Big[\sin(\ln x)\Big]_t^1\right)$$

$$= \underbrace{\sin(\overbrace{\ln(1)}^{=0})}_{=0} - \lim_{t\to 0^+}\big(\sin(\ln(t))\big)$$

$$= 0 - \sin\left(\lim_{t\to 0^+} \ln(t)\right)$$

למדנו בהרצאה א' כי לא קיים גבול ל- $\sin x$

עבור $x \to \pm\infty$, וכיוון שהאינטגרל המסוים

מניב גבול שלא קיים - האינטגרל מתבדר.

ב. חישוב פונקציה קדומה

$$\int \underbrace{x}_{v'} \overbrace{\tan^{-1}(x)}^{u}\,dx \Rightarrow$$

אינטגרציה בחלקים:

$$v' = x \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$u = \tan^{-1}(x) \rightarrow u' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int x\tan^{-1}(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}(x) - \underbrace{\int \frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+1}\,dx}_{\text{בעיה צדדית}}$$

$$(*) \quad \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \tan^{-1}(x)\right)$$

ולכן סה״כ:

$$\int x\tan^{-1}(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x) + C$$