חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (52113) – פתרון מועד ב'

שאלה 1

האם האינטגרל הבא מתכנס בהחלט, בתנאי או מתבדר:

$$\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}(x)}{\sqrt{x^2+x}}\,dx$$

תחילה נשים לב כי אם ישנה התכנסות היא התכנסות בהחלט, שכן בתחום הנתון המכנה והמונה חיוביים ממש. הנקודה הבעייתית בתחום זה היא אינסוף ולכן נשאיר את התחום כולו כפי שהוא.

נקטין את השבר על ידי הגדלת המכנה ונקבל חסם תחתון מהצורה:

$$\frac{\tan^{-1}(x)}{\sqrt{x^2+x^2}} = \frac{\tan^{-1}(x)}{|x|\sqrt{2}} \overset{*}{=} \frac{\tan^{-1}(x)}{x\sqrt{2}} \le \frac{\tan^{-1}(x)}{\sqrt{x^2+x}}$$

(*) $\sqrt{x^2}=|x|$ אך בתחום הנתון כל הערכים הם חיוביים ולכן $\sqrt{x^2}=|x|=x$

ממבחן ההשוואה הראשון:

$$\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}(x)}{\sqrt{2}\,x}\,dx \le \int_1^\infty \frac{\tan^{-1}(x)}{\sqrt{x^2+x}}\,dx$$

כעת נסתכל על החסם התחתון ונוכיח שהוא מתבדר:

נבחר פונקציה $g(x)=\frac{1}{x}$ חיובית ויורדת בקרן $[1,\infty)$ בעלת נקודה בעייתית באינסוף בלבד.

ממבחן ההשוואה הגבולי:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\tan^{-1}(x)}{\sqrt{2}\,x}\cdot x = \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

כלומר האינטגרלים מתכנסים ומתבדרים יחד. בנוסף:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to\infty}\ln(x)-\ln(1)=\infty$$

ולכן האינטגרלים מתבדרים. ומכאן שממבחן ההשוואה הראשון החסם התחתון מתבדר, ולכן האינטגרל המקורי מתבדר גם.

שאלה 2

עבור אלו x-ים הטור מתכנס בתנאי/בהחלט ומתבדר?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(x+1)^n$$

ראשית נחשב את רדיוס ההתכנסות של הטור באמצעות מבחן המנה

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)!(x+1)^{n+1}[n!]^2}{[(n+1)!]^2(2n+1)!(x+1)^n}\right|$$
$$=|x+1|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4n^2+10n+6}{n^2+2n+1}\right|=4\cdot|x+1|$$

ולכן,

$$\text{if}\quad 4|x+1|<1\to\quad\text{converges}$$
$$\text{if}\quad 4|x+1|>1\to\quad\text{diverges}$$

שזה שקול ל

$$|x+1|<\frac{1}{4}\to\quad\text{converges}$$

$$|x+1|>\frac{1}{4}\to\quad\text{diverges}$$

ולכן רדיוס ההתכנסות של הטור הינו

$$R=\frac{1}{4}$$

כלומר, הטור מתכנס **בהחלט** כאשר

$$-\frac{1}{4}<x+1<\frac{1}{4}$$
$$-\frac{5}{4}<x<-\frac{3}{4}$$

כעת נבחן התכנסות בתנאי בקצוות:

עבור $x=-\frac{3}{4}$ נקבל ש:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(\frac{1}{4})^n$$

האם הטור מתכנס? נביט באיבר הכללי לשם כך (לא נצרך פה מבחן כלשהו) ונפשט את הביטוי בעזרת נוסחת סטירלינג: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$:י

$$\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n =$$
$$= (2n+1)\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n \approx$$
$$\approx \frac{(2n+1)}{(4)^n}\cdot\sqrt{4\pi n}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\cdot\frac{e^{2n}}{n^{2n}}\cdot\frac{1}{2\pi n} =$$
$$= \frac{2n+1}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$$

לא מתקיים תנאי הכרחי להתכנסות ולכן הטור מתבדר בנקודה $x = -\frac{3}{4}$.י

עבור $x = -\frac{5}{4}$ נקבל ש:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(-\frac{1}{4})^n$$

האם הטור מתכנס? נשים לב שקיבלנו טור כמו קודם, פשוט מחליף סימן, ולכן הטור מתבדר ב $x = -\frac{5}{4}$.י

ובסה״כ קיבלנו שתחום ההתכנסות של הטור הינו

$$-\frac{5}{4} < x < -\frac{3}{4}$$

שאלה 3

נחשב בדיוק של 0.001 את האינטגרל $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^3}dx$

פתרון:

נייצר מהאינטגרנד טור חזקות, שכן לפי סכום טור גאומטרי:

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{1-(-x^3)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}$$

הטור מכנס בהחלט בתחום שבו $|x^3|<1$ כלומר בתחום שבו $-1<\mathrm{x}<1$.

נזכור שלמדנו כי בתחום ההתכנסות בהחלט אינטגרל על הטור הוא טור האינטגרלים איבר איבר, וכיוון ששני גבולות האינטגרציה הם בתוך תחום ההתכנסות בהחלט ניתן להחליף סדר בין סכימה לאינטגרציה, ומכאן:

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^3}dx=\int_0^{0.5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{0.5}x^{3n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}[x^{3n+1}]_0^{0.5}$$

נשים לב כי הגבול התחתון מניב טור של אפסים, ולכן הוא מסתכם לאפס, ורק הגבול העליון שורד.

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^3}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)2^{3n+1}}$$

קיבלנו טור מונוטוני יורד החל מהאיבר הראשון, שכן המונה קבוע והמכנה עולה ב-n, ובנוסף הטור מחליף סימן ולכן הוא טור לייבניץ החל מהאיבר הראשון.

מתכונה של טור לייבניץ: $|\sum_{n=K}^{\infty}(-1)^n a_n|<|a_K|$ לכן נמצא את האינדקס עבורו האיבר הכללי קטן בערכו המוחלט מהדיוק הדרוש.

n	a_n	קטן מהדיוק
2	0.001116071	לא
3	9.765625×10^{-5}	כן

לכן נסכום עד 3 לא כולל, ונקבל כי סה"כ הקירוב הדרוש לאינטגרל הוא:

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^3}dx\approx\sum_{n=0}^{2}\frac{(-1)^n}{(3n+1)2^{3n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{64}+\frac{1}{896}=0.4854$$

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^3}dx\approx 0.4854$$

שאלה 4

מצאו את המקסימום הגלובלי של הפונקציה:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$$

במשולש הנוצר על ידי הנקודות הבאות:

$$(0,0), (0,2), (2,0)$$

ראשית, נמצא את הנקודות החשודות כקיצון בתוך התחום ולאחר מכן על השפה.

את הנקודות בתוך התחום נמצא על ידי חישוב הגרדיאנט של הפונקציה והשוואתו לאפס:

$$\nabla f(x,y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] =$$

$$= [2x - 1, 2y - 1] = \underline{0}$$

כלומר,

$$x = 1/2, \ \ y = 1/2$$

ולכן, $(1/2,1/2)$ חשודה כקיצון.

כעת, נחפש את הנקודות החשודות כקיצון על שפת התחום, כלומר, על הישרים $x = 0, y = 0, y = 2 - x$ וכן בקודקודים עצמם: $(0,0), (0,2), (2,0)$.

עבור $y = 2 - x$, נביע את y כפונקציה של x ונציב בפונקציה שלנו. נקבל פונקציה של משתנה אחד, x.

נגזור לפי x ונשווה ל-0:

$$\begin{aligned} f(x,2-x) &= x^2 + (2-x)^2 - x - (2-x) + 1 \\ &= x^2 + 4 - 4x + x^2 - x - 2 + x + 1 \\ &= 2x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

נגזור לפי x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 4 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 2 - 1 = 1$$

ולכן, גם $(1,1)$ חשודה כקיצון.

עבור $x = 0, y = 0$:

$$x = 0 : f(0,y) = y^2 - y + 1 \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(y) = 2y - 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$y = 0 : f(x,0) = x^2 - x + 1 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x) = 2x - 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

ולכן, $(0,1/2), (1/2,0)$ חשודות כקיצון.

כעת, נבדוק את ערך הפונקציה בנקודות שהתקבלו:

(x,y)	$f(x,y)$
$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	0.5
$(1,1)$	1
$(0,0)$	1
$(0,2)$	3
$(2,0)$	3
$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	0.75
$\left(\frac{1}{2},0\right)$	0.75

ולכן, הנקודות $(2,0)$, $(0,2)$ הן נקודות מקסימום גלובלי, שערכו 3.

שאלה 5

פתרו את המשוואה $z^2 = 2\bar{z}$

נזכור שכל מספר מרוכב ניתן להצגה כ - $x + iy$ ואז נפתור את המשוואה באמצעות השוואת מקדמים.

נסמן $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ ונציב במשוואה המקורית

$$(x + iy)^2 = 2(x - iy)$$

$$x^2 + 2ixy - y^2 = 2x - 2iy$$

$$x^2 - 2x - y^2 + i(2xy + 2y) = 0$$

מהשוואת החלק המדומה והממשי בין האגפים, נקבל ש:

$$(1)\ x^2 - y^2 - 2x = 0$$

$$(2)\ 2xy + 2y = 0$$

מהמשוואה השניה נקבל ש:

$$2y(x + 1) = 0 \rightarrow y = 0, x = -1$$

נציב את $y = 0$ במשוואה הראשונה ונקבל

$$x^2 - 2x - 0^2 = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

כלומר,

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2$$

קיבלנו 2 פתרונות "טריוויאלים" ממשיים.

כעת נציב את $x = -1$ במשוואה הראשונה ונקבל

$$y^2 = 3$$

$$y = \pm\sqrt{3}$$

ובסך הכל:

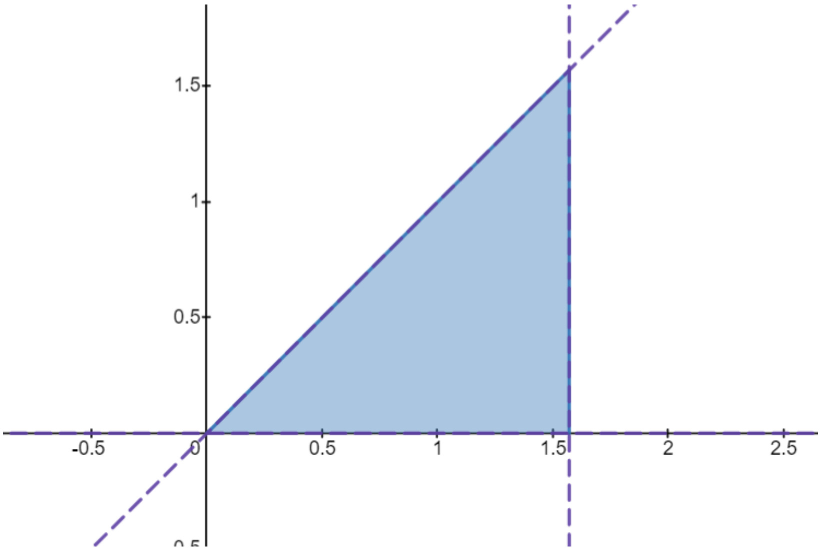
$$z_1 = -1 + i\sqrt{3}$$

$$z_2 = -1 - i\sqrt{3}$$

שאלה 6

נתון התחום $D=\left\{(x,y)\mid 0\le y\le \frac{\pi}{2},\ y\le x\le \frac{\pi}{2}\right\}$ ונרצה לחשב $\iint_D \frac{\sin(x)}{x}dxdy$

תחילה נבין איך התחום נראה:



כיוון שאין סימטריה מעגלית אין אינדיקציה למעבר לקואורדינטות פולאריות, ולכן נבצע אינטגרציה:

$$\iint\limits_D \frac{\sin(x)}{x}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_y^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)}{x}dxdy$$

זאת כיוון שהתחום כפי שהוא מנוסח מביא את x כפונקציה של y. כעת לאחר שהתחום ברור יותר, נהפוך את סדר האינטגרציה, ונביע את y כפונקציה של x על מנת לקבל אינטגרל פשוט יותר:

לכל איקס בתחום $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ נראה שערך ה-y חסום בתחום שבין הישרים: $y=0,\ y=x$, ולכן:

$$\iint\limits_D \frac{\sin(x)}{x}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x}\frac{\sin(x)}{x}dydx$$

וכעת:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x}\frac{\sin(x)}{x}dydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)}{x}[y]_0^x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)=[-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=\cos(0)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

ולכן סה"כ $\iint_D \frac{\sin(x)}{x}dxdy=1$