פתרון מקוצר בוחן 2 חדו"א ב (52113)

שאלה 1

קבעו אם הטור $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)\ln(\ln(n))}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר

נשתמש במבחן האינטגרל. נגדיר את הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)\ln(\ln x)}$. נשים לב כי לכל $x\geq 3$ הפונקציה חיובית מאחר שהמכנה הוא מכפלה של ערכים חיוביים:

($x\geq 3, \ln x\geq \ln 3>1, \ln(\ln x)\geq \ln(\ln 3)>0$). כמו כן, המכנה הוא מכפלה של פונקציות מונוטוניות עולות והמונה קבוע, לכן ניתן לקבוע כי הפונקציה מונוטונית יורדת.

$$\int_3^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)\ln(\ln x)}dx\begin{bmatrix}\ln(\ln x)=t\\ \frac{dx}{x(\ln x)}=dt\end{bmatrix}\text{הצבה}=\int_{\ln\ln 3}^{\infty}\frac{1}{t}dt=\lim_{z\to\infty}\ln|t|\Big|_{\ln\ln 3}^{z}=\infty$$

האינטגרל מתבדר וממבחן האינטגרל נובע שגם הטור מתבדר.

שאלה 2

חשבו את $\frac{1}{e}$ בשגיאה שלא תעלה על 10^{-2}.

ידוע כי לכל $x\in R$ $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. אם כן, $\frac{1}{e}=e^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$. נשתמש בקירוב ע"י שארית לגראנז'. עבור $f(x)=e^x$, $f_{(x)}^{(n)}=e^x$ ו $f_{(c)}^{(n+1)}=e^c$. הפיתוח e^x הוא סביב $x=0$ ואנחנו מקרבים את $f(-1)$, לכן $-1<c<0$ ו $e^{-1}<e^c<e^0=1$.

נרצה שהשארית תהיה קטנה מ10^{-2} ולכן נדרוש:

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\left|\frac{e^c(-1-0)^{n+1}}{(n+1)!}\right|<\frac{1}{100}$$

נשים לב ש$\left|\frac{e^c(-1-0)^{n+1}}{(n+1)!}\right|\leq\frac{1}{(n+1)!}$ ולכן נוכל לחפש n עבורו $\left|\frac{e^c(-1-0)^{n+1}}{(n+1)!}\right|\leq\frac{1}{(n+1)!}<\frac{1}{100}$

עבור $n=4$ מתקבל $\frac{1}{100}<\frac{1}{120}=\frac{1}{(n+1)!}$, כלומר, אי השוויון המבוקש מתקבל.

כעת נחשב את הקירוב המבוקש $\frac{1}{e}\cong\sum_{n=0}^{4}\frac{(-1)^n}{n!}=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{3}{8}$

שאלה 3

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) x^n$

ידוע כי $-1 \le \cos a \le 1$ לכל a , לכן $\limsup_{n\to\infty} \cos(\frac{n\pi}{6}) \le 1$

נגדיר $n = 12k$. כאשר $k \to \infty$ גם $n \to \infty$. נרצה לחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} \cos(\frac{n\pi}{6})$:

$$\lim_{n\to\infty} \cos(\frac{n\pi}{6}) = \lim_{k\to\infty} \cos(\frac{12k\pi}{6}) = \cos(2k\pi) = = \cos(0) = 1$$

אם כן $\limsup_{n\to\infty} \cos(\frac{n\pi}{6}) \le 1$ $\lim_{n\to\infty} \cos(\frac{n\pi}{6}) = 1 \le$ ולכן $\limsup_{n\to\infty} \cos(\frac{n\pi}{6}) = 1$.

כעת נוכל להשתמש במבחן השורש בקלות :

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{\mathrm{n}}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\cos(\frac{n\pi}{6})\right|} = 1 \Rightarrow \mathrm{R} = \frac{1}{1} = 1$$

מרכז הטור הוא ב $x = 0$, הטור יתכנס בהחלט בתחום $-1 < x < 1$. נבדוק התכנסות בקצוות.

עבור $x = 1$ מתקבל הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$. נראה שהתנאי ההכרחי להתכנסות טורים אינו מתקיים, כלומר $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ונסיק כי הטור לא מתכנס.

ראינו כבר כי עבור $n = 12k$ נקבל

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cos(\frac{n\pi}{6}) = \lim_{k\to\infty} \cos(\frac{12k\pi}{6}) = \cos(0) = 1 \neq 0$$

התנאי ההכרחי להתכנסות טורים לא מתקיים ולכן אין התכנסות כאשר $x = 1$.

עבור $x = -1$ מתקבל הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) (-1)^n$. נעבוד בצורה דומה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) (-1)^n = \lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{12k\pi}{6}\right) (-1)^{12k} = \cos(0) = 1 \neq 0$$

ולכן הטור לא יתכנס גם כאשר $x = -1$.

בסה״כ נסיק כי תחום ההתכנסות של הטור הוא $-1 < x < 1$.