<u>חדו"א ב - פתרון מועד א תשפ"ג</u>

<u>שאלה 1</u>

$$\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$$

נקודות בעייתיות הן ∞ , $x=0$, ולכן נפצל:

$$\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx + \int_1^\infty \frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$$

נאמר שהאינטגרל מתכנס אם שני הענפים מתכנסים למספר סופי, ואחרת מתבדר.

נשים לב שבתחום $x>0$ הפונקציה $f(x)=\frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}$ חיובית.

נגדיר $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ונבדוק את התכנסות הענף $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$:

ממבחן ההשוואה הגבולי:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0^+}\frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\times\sqrt{x} = \lim_{x\to0^+}\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \overset{\text{רציפות } arctan}{=} \tan^{-1}\left(\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

ולכן $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$ ו-$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתכנסים ומתבדרים יחד. נשים לב כי $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ מתכנס ולכן ענף שמאל מתכנס.

נגדיר $g(x)=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ ונבדוק את התכנסות הענף $\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$:

ממבחן ההשוואה הגבולי:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\times x^{\frac{3}{2}} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{x}\times\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \overset{\mathrm{t}=\frac{1}{\mathrm{x}}}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\tan^{-1}(t)}{t} \overset{\text{לופיטל}}{=} 1$$

$$(*)\ \lim_{x\to0^+}\frac{\tan^{-1}(t)}{t} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+t^2}}{1}=1$$

כלומר האינטגרלים $\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$ ו- $\int_1^\infty\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ מתכנסים / מתבדרים יחד. בנוסף $\int_1^\infty\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ מתכנס שכן חזקת המכנה גדולה מאחד. אם כך ראינו ששני הענפים מתכנסים, ולכן האינטגרל כולו <u>מתכנס</u>.

שאלה 2

מצא את תחום ההתכנסות של הטור ובדקו עבור איזה x-ים הוא מתכנס/ מתכנס בהחלט.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(4x-8)^n$$

נשתמש במבחן המנה למציאת רדיוס ההתכנסות

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}(4x-8)^{n+1}}{n+1} \frac{n}{2^n(4x-8)^n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2n(4x-8)}{n+1} \right| \\ &= |4x-8| \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} \\ &= 2|4x-8| \end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned} &\text{if } 2|4x-8| < 1 \quad \to \text{converges} \\ &\text{if } 2|4x-8| > 1 \quad \to \text{diverges} \end{aligned}$$

שזה שקול ל

$$\begin{aligned} |x-2| &< \frac{1}{8} \ \text{ converges} \\ |x-2| &> \frac{1}{8} \ \text{ diverges} \end{aligned}$$

ולכן רדיוס ההתכנסות הוא שמינית, כלומר

$$R = 1/8$$

כעת נבדוק מה קורה בקצות הקטע, היינו בנקודות

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8} < x - 2 < \frac{1}{8} \\ \frac{15}{8} < x < \frac{17}{8} \end{aligned}$$

עבור $x=\frac{15}{8}$ נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(\frac{15}{2}-8\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\frac{(-1)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

זהו הטור ההרמוני המתחלף, שכאמור מתכנס. הוכחנו בשיעור ובתרגול.

עבור $x=\frac{17}{8}$ נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(\frac{17}{2}-8\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

זהו הטור ההרמוני, שכאמור מתבדר. הוכחנו בשיעור ובתרגול.

לסיכום, רדיוס ההתכנסות הוא $1/8$ והטור מתכנס בהחלט בתחום

$$\frac{15}{8}<x<\frac{17}{8}$$

ומתכנס בתנאי בנקודה

$$x=\frac{15}{8}$$

ובסה"כ תחום ההתכנסות הינו

$$\frac{15}{8}\leq x<\frac{17}{8}$$

<u>שאלה 3</u>

על מנת לחשב את $\int_0^1 e^{-x^3}dx$ נפתח תחילה טור מקלורן לפונקציה באינטגרנד:

נתבסס על טור טיילור של e^x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

כיוון שזה טור המתכנס לכל איקס (מתבסס על טור שמתכנס לכל איקס), גבולות האינטגרציה 0 ו- 1 בהכרח בתחום ההתכנסות בהחלט של הטור, ולכן אינטגרל על הטור הוא טור האינטגרלים איבר-איבר (ניתן להחליף סדר בין סכימה לאינטגרציה):

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{3n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{3n}\, dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! * (3n+1)} [x^{3n+1}]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! * (3n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! * (3n+1)}$$

נשים לב שקיבלנו טור לייבניץ – מחליף סימן ומונוטוני יורד החל מהאיבר הראשון (המונה קבוע, המכנה גדל).

נשתמש בתכונה של טור לייבניץ, ונחפש אינדקס $n \in \mathbb{N}$ עבורו מתקיים $|a_n| < 0.001$ ונסכום עד ערך זה – לא כולל.

$\|a_n\| < 0.001$	$\|a_n\| = \frac{1}{n! * (3n+1)}$	$n \in \mathbb{N}$
לא	0.003205128	4
כן	0.0005208333	5

כלומר נקרב את האינטגרל כטור מאפס ועד 4, כך שנקבל:

$$\int_0^1 e^{-x^3} dx \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n x^{3n}}{n!} = 0.807967$$

שאלה 4

מצאו את המקסימום הגלובלי של הפונקציה:

$$f(x,y) = xy + x^2 + y^2$$

בתחום:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 50\right\}$$

(התחום המבוקש הוא מעגל ברדיוס $\sqrt{50}$).

ראשית, נמצא את הנקודות החשודות כקיצון בתוך התחום ולאחר מכן על השפה.

את הנקודות בתוך התחום נמצא על ידי חישוב הגרדיאנט של הפונקציה והשוואתו לאפס:

$$\nabla f(x,y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] =$$

$$= [y + 2x, x + 2y] = \underline{0}$$

כלומר,

$$y + 2x = 0 \rightarrow y = -2x$$
$$x + 2y = 0$$

נציב את $y = -2x$ במשוואה השניה ונקבל ש:

$$x + 2 \cdot -2x = 0$$
$$-3x = 0$$
$$x = 0$$

ולכן,

$$y = -2x = -2 \cdot 0 = 0$$
$$\rightarrow y = 0$$

כלומר, $(0,0)$ חשודה כקיצון.

כעת, נחפש את הנקודות החשודות כקיצון על שפת התחום: $x^2 + y^2 = 50$

למעשה, נביע את y כפונקציה של x ונציב בפונקציה שלנו. נקבל פונקציה של משתנה אחד, x.

$$y = \pm\sqrt{50 - x^2}$$

ואז הנקודות החשודות כקיצון הן נקודות קצות הקטע, (כלומר נקודות החיתוך עם ציר ה-x), שהן:

$(\sqrt{50},0), (-\sqrt{50},0)$. כמו כן, נקודות חשודות נוספות הן נקודות שמתקבלות על ידי השוואת הנגזרת ל-0. נתחיל מחיפוש הנקודות הפנימיות ואז נבדוק את קצות התחום.

נציב בפונקציה את הערך החיובי של y ונקבל:

$$f\left(x, \sqrt{50 - x^2}\right) = x \cdot \sqrt{50 - x^2} + x^2 + \left(50 - x^2\right)$$

$$= x\sqrt{50 - x^2} + 50$$

נגזור לפי x:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sqrt{50-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{50-x^2}} =$$
$$= \sqrt{50-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{50-x^2}}$$

נשווה לאפס:

$$\sqrt{50-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{50-x^2}} = 0$$
$$50 - x^2 - x^2 = 0$$
$$50 - 2x^2 = 0$$
$$x^2 = 25$$

כלומר $x = \pm 5$. נציב בחזרה במשוואת המעגל ונקבל שהנקודות החשודות הן $(5,5), (-5,5)$.
כעת, נציב את הערך השלילי של y ונחזור על אותן הפעולות, ונקבל את אותה הנקודה $(-5,5)$ פלוס הנקודה $(-5,-5)$. ניתן לבדוק זאת מתמטית אבל קל לראות זאת מתוך הסימטריה של הבעיה.

כעת, נבדוק את ערך הפונקציה בנקודות שהתקבלו:

$$f(0,0) = 0.0 + 0^2 + 0^2 = 0$$
$$f(5,5) = 5.5 + 5^2 + 5^2 = 75$$
$$f(-5,5) = -5.5 + 5^2 + 5^2 = 25$$
$$f(-5,-5) = -5.-5 + 5^2 + 5^2 = 75$$
$$f(\sqrt{50},0) = 50$$
$$f(-\sqrt{50},0) = 50$$

ולכן, הנקודות $(5,5), (-5,-5)$ הן נקודות מקסימום גלובלי.

שאלה 5

סעיף א: פתרו את המשוואה $z^4 = -16$

נזכור שההצגה הפולארית של מספר מרוכב נתונה על ידי:

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

כאשר

$$r \in \mathbb{R}, \theta \in [0,2\pi]$$

ולכן,

$$-16 = 16[\underbrace{\cos(\pi + 2\pi k)}_{-1} + i\underbrace{\sin(\pi + 2\pi k)}_{0}]$$

כמו כן, לפי משפט דה-מואבר מתקיים ש:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

כלומר

$$z^4 = r^4(\cos(4\theta) + i\sin(4\theta))$$

ולכן צריך להתקיים ש:

$$\begin{aligned} & r^4 = 16 \\ & \to r = 2 \\ & 4\theta = \pi + 2\pi k \\ & \to \theta = \frac{\pi + 2\pi k}{4} \end{aligned}$$

כלומר

$$z_k = 2\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)\right]$$

עבור $k = 0,1,2,3$.

מאחר והתבקשתם להציג את הפתרון בצורה של $x + iy$ נציב את ה- k המתאימים ונקבל ש:

$$z_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{74}{\pi}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

<u>סעיף ב:</u> פתרו את המשוואה $z^2 + 2z + (1 - i) = 0$

דרך א: שימוש בנוסחת השורשים

תזכורת לנוסחת השורשים:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

במקרה שלנו: $a = 1, b = 2, c = 1 - i$ ולכן:

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(1-i)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4i}}{2} = -1 \pm \sqrt{i}$$

נחשב את $\sqrt{i}$ לפי נוסחת דה מואבר, נציב חזרה בתוצאות הללו וסיימנו.

ההצגה הפולרית של i הינה:

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

כי

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0 + 1} = 1$$

$$\theta = \arccos(0) = \arcsin(1) = \pi/2$$

ולכן,

$$\sqrt{i} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{1/2}$$

ומדה מואבר נקבל ש-

$$\sqrt{i} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right) \quad k = 0,1$$

$$\sqrt{i} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) \quad k = 0,1$$

ולכן השורשים הם

$$\sqrt{i} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ובסך הכל, הפתרונות של המשוואה הריבועית המקורים הם:

$$z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$z_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) - i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

דרך ב: השוואת מקדמים

נסמן $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ ונציב במשוואה המקורית

$$(x + iy)^2 + 2(x + iy) + 1 - i = 0$$
$$x^2 + 2ixy - y^2 + 2x + 2iy + 1 - i = 0$$
$$x^2 - y^2 + 2x + 1 + i(2xy + 2y - 1) = 0$$

מהשוואת החלק המדומה והממשי בין האגפים, נקבל ש:

$$(1)\ \ x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$$
$$(2)\ \ 2xy + 2y - 1 = 0$$

מהמשוואה השניה נקבל ש:

$$y = \frac{1}{2x + 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x + 1)}$$

נציב את y במשוואה הראשונה ונקבל

$$x^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1}\right)^2 + 2x + 1 = 0$$
$$x^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x + 1)^2} + 2x + 1 = 0$$
$$4x^2(x + 1)^2 - 1 + 8x(x + 1)^2 + 4(x + 1)^2 = 0$$
$$(x + 1)^2\left[4x^2 + 8x + 4\right] - 1 = 0$$
$$4(x + 1)^2\left(x^2 + 2x + 1\right) - 1 = 0$$
$$4(x + 1)^2(x + 1)^2 - 1 = 0$$
$$4(x + 1)^4 = 1$$
$$(x + 1)^4 = \frac{1}{4}$$

כלומר,

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1$$

ולכן,

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + 1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ובסך הכל:

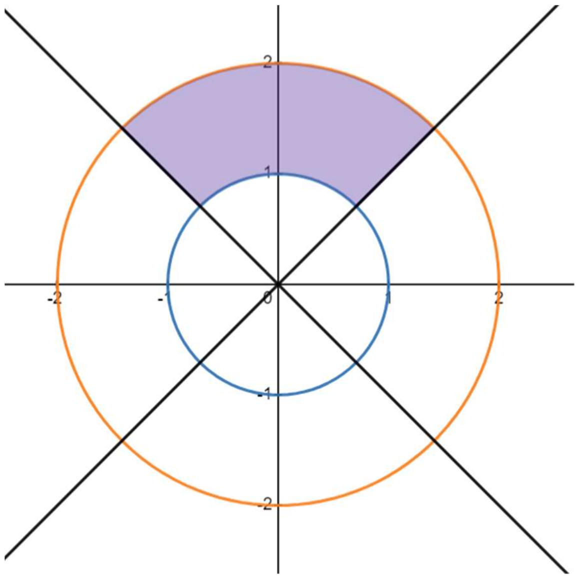
$$z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) - i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

שאלה 6

$$\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1} \qquad D=\{(x,y)|\ 1\le x^2+y^2\le 4\ \ ,\ \ \ x\le y,-x\le y\}$$

נשים לב כי מדובר על אינטגרל על תחום בין 2 מעגלים שמרכזם בראשית ורדיוסם 1 ו-2, עבור הנקודות המקיימות $|x|\le y$:



נעבור כמובן לקורדינטות פולאריות:

$$x=rcos(\theta), \qquad y=rsin(\theta), \qquad dxdy=rdrd\theta$$

והתחום D הוא למעשה:

$$1\le r\le 2$$

$$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$$

$$\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}=\iint_D \frac{rdrd\theta}{r^2+1}=\int_1^2 \frac{r}{r^2+1}dr\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta=\frac{\pi}{2}\int_1^2\frac{r}{r^2+1}dr\overset{\times\frac{2}{2}}{=}\frac{\pi}{4}\int_1^2\frac{2r}{r^2+1}dr$$

כעת נשים לב כי: $(r^2+1)'=2rdr$ ומכאן:

$$\frac{\pi}{4}\int_1^2\frac{2r}{r^2+1}dr=\frac{\pi}{4}\ [\ln|r^2+1|]_1^2=\frac{\pi}{4}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$