פתרון מועד א'

18 באוגוסט 2024

שאלה 1

מצאו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = e^{2x}\sin x$ ובין ציר הx בקטע $[0, 2\pi]$

פתרון:

בקטע $[0, \pi]$ גרף הפונקציה נמצא מעל ציר ה-x ובקטע $[\pi, 2\pi]$ הגרף נמצא מתחת לציר.
השטח המבוקש ניתן לחישוב בעזרת הנוסחה

$$S = \int_0^{2\pi} |e^{2x}\sin x| dx = \int_0^{\pi} e^{2x}\sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{2x}\sin x dx$$

נשתמש באינטגרציה בחלקים

$$\int e^{2x}\sin x dx = \begin{bmatrix} u = e^{2x} & v' = \sin x \\ u' = 2e^{2x} & v = -\cos x \end{bmatrix} = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x dx = \begin{bmatrix} u = e^{2x} & v' = \cos x \\ u' = 2e^{2x} & v = \sin x \end{bmatrix}$$
$$= -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x dx$$

ולכן

$$\int e^{2x}\sin x dx = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x) + C$$

אי לכך,

$$S = \int_0^{2\pi} |e^{2x}\sin x| dx = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x)|_0^{\pi} + \left(-\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x\right)|_{\pi}^{2\pi} =$$
$$\frac{e^{2\pi} - (-e^0)}{5} + \frac{e^{4\pi} - (-e^{2\pi})}{5} = \frac{1}{5}(e^{2\pi} + 1)^2$$

שאלה 2

קבעו האם האינטגרל מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר

$$\int_0^\infty \frac{\cos\sqrt{2x}}{1-\sqrt{x}}dx$$

פתרון:

נסמן $f(x)=\frac{\cos\sqrt{2x}}{1-\sqrt{x}},\ g(x)=\frac{1}{1-x}$, שתי הפונקציות רציפות וחיוביות בקטע $[0.5,1)$,

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\cos\sqrt{2x}\cdot(1-\sqrt{x})\cdot(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}=2\cos\sqrt{2}>0$$

והרי $\int_{0.5}^1 g(x)dx$ מתבדר (קל לראות שמדובר באינטגרל דומה ל $\frac{1}{x}$)
ולכן לפי מבחן ההשוואה גם $\int_{0.5}^1 f(x)dx$ מתבדר ומכאן גם האינטגרל הנתון $\int_0^\infty f(x)dx$ מתבדר.

שאלה 3

מצאו מינימום ומקסימום מוחלט של הפונקציה

$$f(x,y)=9x^2+6y^2+6x$$

בתחום

$$x^2+y^2\le 4$$

פתרון:

ראשית נמצא את כל הנקודות החדשודות. א) בתוך התחום עצמו - ע"י הגרדיאנט. ב) על השפה.

$$\underline{\nabla}f(x,y)=\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right]=[18x+6,12y]$$
$$\underline{\nabla}f(x,y)=\underline{0}$$
$$\to\quad x=-1/3$$
$$y=0$$

אם כן נקודה חשודה ראשונה שגם נמצאת בתוך התחום הנתון הינה: $(-1/3,0)$
כעת נמצא את הנקודות שעל השפה. ניתן להציג את y כפונקציה של x ואז לחפש נקודות חשודות על השפה באמצעות גזירה של פונקציה חד מימדית.

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$y^2 = 4 - x^2$$

$$f(x) = 9x^2 + 6\left(4 - x^2\right) + 6x$$
$$= 3x^2 + 6x + 24$$
$$\to \frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 6 = 0$$
$$x = -1$$
$$y^2 = 4 - 1 = 3$$
$$y = \pm\sqrt{3}$$
$$(\sqrt{3}, -1), (-\sqrt{3}, -1)$$

נקודות נוספות הן נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים

$$(2, 0), (-2, 0)$$

. כעת נציב את כל הנקודות החשודות בפונקציה המקורית ונקבל ערכים שונים. המקסימום המוחלט הינו 48 והוא מתקבל בנקודה $(2, 0)$ והמינימום המוחלט הוא -1 ומתקבל בנקודה $(-1/3, 0)$.

שאלה 4

א.

הראו כי $\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ לכל $x \in (-1, 1)$ והסיקו מכך שלכל $0 < r < 1$ מתקיים:

$$\int_0^r \ln \frac{1}{1-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n(n+1)}$$

פתרון:
נשים לב כי

$$\ln \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x)$$

לפי נוסחאה מדף נוסחאות

$$\ln(1+t) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

נציב $x=-t$, קל לראות שעבור $x\in(-1,1)$ גם $t\in(-1,1)$ ולכן

$$\ln(1-x)=\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-x)^{n+1}}{n+1}=\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n+1}=-\sum_{0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ומכן

$$\ln\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

מכאן ניתן להוכיח את האינטגרל יהי $0<r<1$

$$\int_0^r\ln\frac{1}{1-x}dx=\int_0^r\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^r\frac{x^n}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n+1}}{n(n+1)}$$

ב.

הוכיחו, בהסתמך על תוצאות סעיף א', כי

$$\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

פתרון: הביטוי שפיתחנו בסעיף א' נכון לכל $0<r<1$ ולכן נותר רק להשאיף את r ל1

$$\lim_{r\to1-}\int_0^r\ln\frac{1}{1-x}dx=\lim_{r\to1-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n+1}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{r\to1-}\frac{r^{n+1}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

כעת נותר רק לחשב את סכום הטור. נשים לב כי

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

כלומר מדובר בטור טלסקופי

$$S_k=\sum_{1}^{k}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{k+1}$$

ומכאן

$$\lim_{k\to\infty}S_k=1$$

כמבוקש

שאלה 5

פתרו את המשוואב הבאה $z \in \mathbb{Z}$:

$$z^5 = -1$$

פתרון:
נעבור לצורה הפולרית

$$r^5(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = -1$$

לפי נוסחאת דה מואבר נקבל

$$r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = -1$$

כלומר קיבלנו שתי נוסאחות

$$\sin 5\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi k}{5}$$
$$r = \sqrt[5]{1} = 1$$
$$\cos 5\theta = -1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi + 2\pi k}{5}$$

ולכן
$z = \cos\frac{\pi+2k\pi}{5} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{5}, k = 0, 1, \ldots, 4$
כלומר

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5} \sim 0.809 + 0.588i$$
$$z_1 = \cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5} \sim -0.309 + 0.951i$$
$$z_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$
$$z_4 = \cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5} \sim -0.309 - 0.951i$$
$$z_5 = \cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5} \sim 0.809 - 0.588i$$

שאלה 6

א.

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2} dxdy$$

פתרון: נשים לב שעבור סדר האינטגרציה הנתון לאינטגרל אין פתרון אנליטי ולכן נחליף את סדר האינטגרציה.

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 \int_0^{x^2} \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2} dydx = \\
&\int_0^2 y\frac{\sin^2(\pi x)}{x^2}\bigg|_0^{x^2} dx = \int_0^2 \sin^2(\pi x)dx = \\
&= \int_0^2 \frac{1-\cos(2\pi x)}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}\bigg|_0^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

ב.

חשבו את האינגטגרל הכפול הבא:

$$\iint_D x^2\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$
$$D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

פתרון: לשם נוחות ופישוט הבעיה נעבור לקואורדינטות פולריות.

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\
&0 \leqslant r \leqslant 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos\theta)^2\cdot r\cdot r dr d\theta = \\
=&\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\cos^2\theta dr d\theta \\
=&\int_0^{2\pi}\frac{r^5}{5}\cos^2\theta d\theta\Big|_0^1 = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta \\
=&\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{5}\cdot\frac{2\pi}{2} = \frac{1}{5}\pi.
\end{aligned}
$$