פתרון מועד ב׳

8 בספטמבר 2024

שאלה 1

חשב את האינטגרל הבא:

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$$

פתרון:
ראשית נמצא את האינטגרל הלא מסויים. נגדיר

$$u = \sqrt{e^x-1}$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(e^x-1)^{-\frac{1}{2}}e^x$$

בנוסף, נשים לב כי

$$u^2 = e^x - 1 \Rightarrow u^2+1 = e^x$$

ולכן נקבל כי

$$\int \sqrt{e^x-1}dx = \int u\frac{2\sqrt{e^x-1}}{e^x}du = \int u\frac{2u}{u^2+1}du = 2\int \frac{u^2}{u^2+1}du =$$
$$2\int \frac{u^2+1-1}{u^2+1}du = 2\int 1-\frac{1}{u^2+1}du = 2(\int 1du - \int \frac{1}{u^2+1}du) =$$
$$2u - 2\tan^{-1}u + c$$

עכשיו נציב כדי לחזור לx

$$\int \sqrt{e^x-1}dx = 2\sqrt{e^x-1} - 2\tan^{-1}\sqrt{e^x-1} + c$$

ולכן

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx = [2\sqrt{e^x-1} - 2\tan^{-1}\sqrt{e^x-1}]_0^{\ln 2} =$$
$$[2\sqrt{2-1} - 2\tan^{-1}\sqrt{2-1}] - [2\sqrt{1-1} - 2\tan^{-1}\sqrt{1-1}] =$$
$$2 - 2\tan^{-1}1 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

שאלה 2

קבעו אם האינטרגל מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3-x^2-x+1}}dx$$

פתרון: נשים לב שנקודות הבעייתיות באינטגרל הן 1 וגם ∞. אולם אם נסמן

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x^3-x^2-x+1}} = \frac{\ln x}{(x-1)\sqrt{x+1}} > 0$$

אשר נכון לכל $x > 1$ אז נשים לב שמתקיים:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

כלומר הנקודה 1 אינה בעייתית שכן הפונקציה חסומה בסביבתה. ולכן הנקודה הבעייתית היחידה של האינטגרל היא אינסוף. נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי כדי להוכיח התכנסות בהחלט. נגדיר $g(x) = \frac{1}{x^{5/4}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{1/4}}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3-x^2-x+1}} = 0\cdot 1 = 0$$

כאשר $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{1/4}} = 0$ נובע מכלל לופיטל. ולכן ממבחן ההשוואה הגבולי האינטגרל המקורי מתכנס אם האינטגרל של $g(x)$ מתכנס בתחום הנתון. מאחר והאינטגרל של $g(x)$ מתכנס בהחלט, אזי גם האינטגרל המקורי.

שאלה 3

חשב בדיוק של 0.001 את $\int_0^1 e^{-x^3}dx$

פתרון:

לפי נוסחאה מהדף נוסחאות

$$e^x = \sum_n \frac{x^n}{n!}$$

לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכן

$$e^{-x^3} = \sum_n \frac{(-x^3)^n}{n!} = \sum_n (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!}$$

נציב באינטגרל המבוקש ונקבל

$$\int_0^1 e^{-x^3} dx = \int_0^1 \sum_n (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!} dx$$

האינטגרל והטור מתחלפים

$$\sum_n \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!} dx = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{3n} dx = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{3n+1}$$

נשים לב כי מדובר בטור מתחלף וכן כי

$$\left|\frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{3n+1}\right| = \frac{1}{n!} \frac{1}{3n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{3(n+1)+1} = \frac{1}{n!(n+1)} \frac{1}{3n+1+3}$$

כלומר מדובר בטור לייבניץ, ולכן די למצוא את האיבר הראשון שהוא קטן מהדיוק הנדרש ולחשב עד אליו לא כולל.

$$\frac{(-1)^0}{0!} \frac{1}{0+1} = 1$$

$$\frac{(-1)^1}{1!} \frac{1}{3+1} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{(-1)^2}{2!} \frac{1}{6+1} = \frac{1}{14}$$

$$\frac{(-1)^3}{3!} \frac{1}{9+1} = \frac{-1}{60}$$

$$\frac{(-1)^4}{4!} \frac{1}{12+1} = \frac{1}{312}$$

$$\frac{(-1)^5}{5!} \frac{1}{15+1} = \frac{-1}{1920}$$

כלומר האיבר האחרון שגדול מ0.001 הוא האיבר החמישי ולכן נסכום עד אליו

$$\int_0^1 e^{-x^3} dx \sim 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{14} - \frac{1}{60} + \frac{1}{312} = 0.808$$

שאלה 4

מצא את המקסימום (הגלובלי) של הפונקציה:

$$f(x,y) = 2x + 3y$$

בתחום

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4x + y^2 + 2y \leq 8\right\}$$

פתרון: ראשית נשים לב שהתחום הנתון ניתן לכתיבה כ:

$$\begin{aligned}
&x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4 \\
&y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1 \\
&\Rightarrow \quad x^2 + 4x + y^2 + 2y \leq 8 \\
&\quad (x+2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 \leq 8 \\
&(x+2)^2 + (y+1)^2 \leq 13
\end{aligned}$$

שזהו עיגול (שפת המעגל והפנים שלו) שרדיוסו $\sqrt{13}$ ומרכזו בנקודה $(-2,-1)$. נפתור את השאלה על ידי הצגת שפת המעגל כפונקציה של x בלבד

$$\begin{aligned}
(x+2)^2 + (y+1)^2 &= 13 \\
(y+1)^2 &= 13 - (x+2)^2 \\
y + 1 &= \pm\sqrt{13 - (x+2)^2} \\
y &= \pm\sqrt{13 - (x+2)^2} - 1
\end{aligned}$$

נציב בחזרה בפונקציה ונחשב את המקסימום על ידי גזירה לפי x והשוואה ל-0

$$f(x) = 2x \pm 3\left[\sqrt{13 - (x+2)^2}\right] - 1$$

$$f'(x) = 2 + 3 \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\left(13 - (x+2)^2\right)^{-1/2} \cdot \cancel{2}(x+2)$$

$$= 2 + \frac{-3(x+2)}{\left[13 - (x+2)^2\right]^{1/2}}$$

$$\begin{aligned}
f' &= 0 \\
2\sqrt{13 - (x+2)^2} &= 3(x+2) \\
4\left(13 - (x+2)^2\right) &= 9(x+2)^2 \\
4 \cdot 13 - 4(x+2)^2 &= 9(x+2)^2 \\
(x+2)^2 &= 4 \\
x + 2 &= \pm 2
\end{aligned}$$

כלומר $x=0$ or $x=-4$ ולכן הנקודות החשודות לקיצון הן:

$$(0,2),(-4,2)$$

אם נציב את הערך השלילי של y נקבל את אותן הנקודות. ובסך הכל:

$$f(0,2)=2\cdot 0+3\cdot 2=6\Rightarrow \ \text{max}$$
$$f(-4,2)=2\cdot -4+3\cdot 2=-2$$

כלומר המקסימום הגלובלי הוא 6 והוא מתקבל בנקודה $(0,2)$.

שאלה 5

פתרו את המשוואות הבאות $z\in\mathbb{C}$:

$$z^4=-16\bar{z}$$

פתרון:
ראשית, ברור כי $z=0$ פותר את המשוואה
נניח כי $z\neq 0$ ונכפיל את המשוואה בz

$$z^4*z=-16\bar{z}*z$$
$$z^5=-16|z|^2$$

על ידי מעבר לתצוגה פולרית ושימוש בנוסחאת דה מואבר נקבל

$$(r\cos\theta+ir\sin\theta)^5=-16(r\cos\theta-ir\sin\theta)(r\cos\theta+ir\sin\theta)$$
$$r^5(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)=-16r^2$$
$$r^3(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)=-16$$

ראשית נטפל בחלק המדומה ונקבל

$$\sin 5\theta=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi k}{5}$$

כעת נטפל בחלק הממשי

$$r^3\cos 5\frac{\pi k}{5}=-16$$
$$r^3\cos\pi k=-16$$

מאחר וr^3 הוא אי שלילי, חייבים לדרוש כי $\cos \pi k = -1$ וזה מתקיים עבור כל k אי זוגי

$$r = 0, z = 0 + i0$$
$$k = 1, z = \sqrt[3]{16}\cos\frac{\pi}{5} + \sqrt[3]{16}i\sin\frac{\pi}{5} = 2.039 + 1.481i$$
$$k = 3, z = \sqrt[3]{16}\cos\frac{3\pi}{5} + \sqrt[3]{16}i\sin\frac{3\pi}{5} = -0.779 + 2.397i$$
$$k = 5, z = \sqrt[3]{16}\cos\frac{5\pi}{5} + \sqrt[3]{16}i\sin\frac{5\pi}{5} = -2.520$$
$$k = 7, z = \sqrt[3]{16}\cos\frac{7\pi}{5} + \sqrt[3]{16}i\sin\frac{7\pi}{5} = -0.779 - 2.397i$$
$$k = 9, z = \sqrt[3]{16}\cos\frac{9\pi}{5} + \sqrt[3]{16}i\sin\frac{9\pi}{5} = 2.039 - 1.481i$$

שאלה 6

חשבו את האינטגרל

$$\iint \ln\left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

ביחס לתחום

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \le |y|, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$$

פתרון:

בשביל לפתור את השאלה נעבור לקואורדינטות פולריות, אבל אפילו לפני כן ניתן לראות שהתחום הוא השטח בין 2 המעגלים שרדיוסם 1,2 בחלק שנמצא בין הזויות $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}$ (ציור בסוף הפתרון). אז על ידי מעבר לקואורדינטות פולריות נקבל ש

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \quad x^2 + y^2 = r^2$$

ולכן

$$\ln\left(x^2 + y^2\right) = \ln\left(r^2\right) = 2\ln(r) \quad , 1 \leqslant r \leqslant 2$$

ובסך הכל נקבל שיש לפתור את

$$\iint_D \ln\left(x^2 + y^2\right) dxdy = 2\int_{\pi/4}^{7\pi/4}\int_1^2 r\ln(r) dr d\theta$$

על ידי אינטגרציה בחלקים נקבל ש-

$$= 2\int_{\pi/4}^{7\pi/4} \frac{r^2}{2}\ln(r) - \left.\frac{r^2}{4}d\theta\right|_1^2$$
$$= 2\int_{\pi/4}^{7\pi/4} 2\ln(2) - \frac{3}{4}d\theta \qquad = \int_{\pi/4}^{7\pi/4} 4\ln(2) - \frac{3}{2}d\theta$$

האינטגרל על התחום של θ נותן $\frac{3\pi}{2}$
כך שלבסוף מקבלים ש-

$$\iint \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy = \frac{3\pi}{2}\left[-\frac{3}{2}+\ln(16)\right].$$