אלגברה לינארית

סמסטר ב' תשפ"ה

שאלה VI.5.1

א. נכון. אם A, B מטריצות אנטיסימטריות, כלומר $A^\top = -A$, $B^\top = -B$ אז

$$(A+B)^\top = A^\top + B^\top = -(A+B)$$

לכן $A+B$ אנטיסימטרית. עבור כל $a \in \mathbb{R}$

$$(aA)^\top = aA^\top = -(aA)$$

גם אנטיסימטרית. תת הקבוצה הנתונה סגורה תחת חיבור וכפל בסקלר ולכן תת מרחב.

ב. לא נכון. יהיו A, B מטריצות הרמיטיות, $c \in \mathbb{C}$ אז

$$(cA)^\dagger = c^* A^\dagger = c^* A$$

לכן $(cA)^\dagger = cA$ רק אם $c \in \mathbb{R}$. הקבוצה אינה סגורה ביחס לכפל בסקלר ולכן אינה תת מרחב.

ג. נכון. יהיו A, B מטריצות הרמיטיות אז $A+B$ הרמיטית:

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger = A + B.$$

החישוב בסעיף הקודם מראה כי הקבוצה סגורה תחת כפל בסקלר מעל ממשיים.

ד. לא נכון כי מטריצה הרמיטית לא בהכרח ממשית.

ה. לא נכון, כי, למשל, מטריצת האפס אינה הפיכה (לא נמצאת בקבוצה).

ו. נכון. נניח f,g חסומות, כלומר קיימים קבועים M,N כך ש

$$|f(x)| \le M, \quad |g(x)| \le N \quad \forall x \in [a,b].$$

אז

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le M+N, \quad \forall x \in [a,b]$$

כלומר $f+g$ חסומה. עבור כל $c \in \mathbb{R}$

$$|cf(x)| \le |c||f(x)| \le cM$$

כלומר f חסומה. לפיכך הקבוצה סגורה תחת חיבור וכפל בסקלר ולכן תת מרחב.

ז. לא נכון. הקבוצה אינה סגורה תחת חיבור. למשל $p(x)=1+x$, $q(x)=1-x$ הם פולינומים ממעלה 1 (אי זוגית) אך

$$(p+q)(x) = p(x)+q(x) = 2$$

פולינום ממעלה 0 (זוגית).

שאלה VI.5.2

א. נבדוק האם הקבוצה

$$W = \{(a,b,c) : a = 3b, \ b,c \in \mathbb{R}\}$$

סגורה תחת חיבור וכפל בסקלר. יהיו $v,u \in W$ אז

$$\begin{aligned} w := u+v =& (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3) = \\ & (3u_2+3v_2, u_2+v_2, u_3+v_3) = (3w_2, w_2, w_3) \in W \end{aligned}$$

לכן W סגורה ביחס לחיבור. יהי $k \in \mathbb{R}$ אז

$$w := kv = (kv_1, kv_2, kv_3) = (3kv_2, kv_2, kv_3) = (3w_2, w_2, w_3) \in W.$$

לכן W תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

ב. הקבוצה

$$W = \{(a,b,c) : a \le b \le c, \ a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

אינה תת מרחב כי היא לא סגורה ביחס כפל בסקלר: עבור $w=(1,2,3) \in W$, $k=-1$

$$kw = (-1,-2,-3) \notin W.$$

ג. הקבוצה

$$W=\{(a,b,c):ac=0,\ \ a,b,c\in\mathbb{R}\}$$

אינה תת מרחב כי היא לא סגורה תחת חיבור. למשל, עבור $u=(1,1,0)\in W$ ו $v=(0,1,1)\in W$

$$u+v=(1,2,1)\notin W.$$

ד. נבדוק האם הקבוצה

$$W=\{(a,b,c):a=b=c\in\mathbb{R}\}$$

סגורה תחת חיבור וכפל בסקלר. יהיו $u,v\in W$ אז

$$u+v=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)=(u_1+v_1,u_1+v_1,u_1+v_1)\in W$$

ולכן W סגורה תחת חיבור. יהיה $k\in\mathbb{R}$ אז

$$kv=(kv_1,kv_2,kv_3)=(kv_1,kv_1,kv_1)\in W$$

ולכן W סגורה תחת מכפלה בסקלר ומכאן הינה תת מרחב.

ה. הקבוצה

$$W=\{(a,b,c):a=b^2,\ \ a,b,c\in\mathbb{R}\}$$

אינה תת מרחב כי היא לא סגורה תחת כפל בסקלר: עבור $v=(1,1,1)\in W$ ו $k=-1$

$$kv=(-1,-1,-1)\notin W.$$

שאלה VI.5.3

א. $\mathbb{R}^2$ אינו תת־קבוצה של $\mathbb{R}^3$ ולכן לא תת מרחב.

ב. $F_2[x]$ הינו תת מרחב של $F_3[x]$. כל פולינום ממעלה 2 שייך ל־$F_3[x]$ כלומר $F_2[x]\subseteq F_3[x]$. חיבור וכפל בסקלר לא מעלים את הדרגה של פולינום ולכן $F_2[x]$ סגורה תחת הפעולות האלה. מכאן $F_2[x]$ היא תת מרחב של $F_3[x]$.

שאלה VI.5.4

נבדוק סגירות של
$$W = \{x \in F^n : Ax = 0\}$$
תחת חיבור: יהיו $u, v \in W$ אז
$$A(u+v) = Au + Av = 0$$
ולכן $u + v \in W$. הקבוצה סגורה גם תחת כפל בסקלר: יהיה $c \in F$ אז
$$A(cv) = cAv = c0 = 0$$
ולכן $cv \in W$. לכן W הינה תת מרחב של F^n.

שאלה VI.5.5

נגדיר
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
וקטור v שייך לתת מרחב הנפרש ע"י עמודות של A אם לממ"ל $Ax = b$ יש פתרון.
נדרג את המטריצה המורחבת
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ -1 & 1 & 3 & b \\ 2 & 0 & -4 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 3 & 3 & a+b \\ 0 & -4 & -4 & c-2a \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3}(a+b) \\ 0 & -1 & -1 & \frac{1}{4}(c-2a) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3}(a+b) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(c-2a) + \frac{1}{3}(a+b) \end{pmatrix}$$
לממ"ל יש פתרון אם ורק אם $\operatorname{rank}(A|v) = \operatorname{rank}(A)$ כלומר אם
$$\frac{1}{4}(c-2a) + \frac{1}{3}(a+b) = 0.$$
לכן הוקטור נמצא בתת מרחב אם ורק אם
$$-2a + 4b + 3c = 0.$$

שאלה VI.5.6

נוכיח כי הפולינום הנתון הינו צירוף לינארי של הפולינומים הפורשים את תת המרחב.
לשם כך נבדוק האם קיימים קבועים $a, b, c \in \mathbb{R}$ כך ש

$$x^2 + 5x - 1 = a(x^2+1) + b(x^2-1) + c(2x+3).$$

נפשט את צד ימין:

$$a(x^2+1) + b(x^2-1) + c(2x+3) = (a+b)x^2 + 2cx + 3c - b + a$$

נשווה מקדמים בין הצדדים ונקבל ממ"ל

$$\begin{aligned} &a + b = 1 \\ &2c = 5 \\ &3c - b + a = -1 \end{aligned}$$

למערכת יש פתרון (יחיד)

$$a = -\frac{15}{4},\ \ b = \frac{19}{4},\ \ c = \frac{5}{2}.$$

לכן הטענה מתקיימת.

שאלה VI.5.7

וקטור שייך לתת מרחב אם לממ"ל

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

יש פתרון מעל $\mathbb{Z}_3$. נדרג את המטריצה המורחבת (מעל $\mathbb{Z}_3$) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

לממ"ל יש פתרון אם ורק אם

$$a - 1 \pmod 3 = 0$$

כלומר אם $a = 1$.

שאלה VI.5.8

נניח $W_1, W_2, \ldots$ הם תתי מרחבים של V ונוכיח כי $W := \bigcap_i W_i$ הינו תת מרחב. נקח $v, u \in W$ אז $v, u \in W_i$ עבור כל i. משום שכל W_i הינו תת מרחב

$$u + v \in W_i, \quad \forall i$$

כלומר $u + v \in W$. הוכחנו סגירות תחת חיבור. יהיה $c \in \mathbb{R}$ אז

$$cv \in W_i, \quad \forall i$$

כי כל W_i הינו תת מרחב. מכאן $cv \in W$ ולכן W סגור תחת כפל בסקלר. הוכחנו ש W תת מרחב.