תרגילים:

1. יהיו $U=\text{span}\left((1,-1,1,-1),(1,1,1,1),(1,3,1,3)\right)$
$W=\text{span}\left((3,1,3,1),(1,2,1,2),(1,2,0,2)\right)$
א. מצא $\dim(U+W)$ ב. $\dim(U\cap W)$
ג. מצא בסיס ב- $U+W$ ד. מצא בסיס ב- $U\cap W$

2. תהיה S קבוצה במרחב וקטורי V.
א. הוכיחו: אם S תת-מרחב ב- V, אזי $S+S=S$.
ב. האם הטענה ההפוכה נכונה: אם $S+S=S$, אזי S תת-מרחב.

3. הוכיחו: R^n הוא סכום ישר של מרחב האפס של $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$ ומרחב אפס של $x_1=x_2=\ldots=x_n$ (כש- $x_i\in F$).

4. יהיו $U=\{(a,b,c)\ ,\ a+b+c=0\ ,\ a,b,c\in R\}$
$V=\{(a,b,c)\ ,\ a=c\ ,\ a,b,c\in R\}\ ,\ W=\{(0,0,c)\ ,\ c\in R\}$
תת-מרחבים ב- R^3. הוכיחו:
א. $R^3=U+V$ ב. $R^3=U+W$ ג. $R^3=V+W$.
באילו מן המקרים הסכום הוא ישר.

5. נתונים וקטורים $u_1=(1,0,1),u_2=(3,2,1),u_3=(1,2,3),u_4=(2,2,3)$
נגדיר $U=\text{span}\{u_1,u_2\}\ ,\ W=\text{span}\{u_3,u_4\}$.
הוכיחו: $U+W=R^3$ והסכום אינו ישיר.

6. הוכיחו או הפריכו: יהיו U ו- W תת-מרחבים במרחב וקטורי V ו- $V=U\cup W$, אזי $V=U\oplus W$.

7. הוכיחו: סכום של תת-המרחב של המטריצות ההרמיטיות ב- $C^{n\times n}$ ותת- המרחב של המטריצות האנטי-הרמיטיות ב- $C^{n\times n}$ הוא סכום ישר.

8. תהיה A קבוצת כל הפונקציות מ- R ל- R הזוגיות ורציפות ו- B קבוצת כל הפונקציות מ-R ל-R האי-זוגיות (ראה הגדרה [5], פרק II.3) ורציפות. הוכיחו:
א. A ו- B הן תת-מרחבים במרחב V של פונקציות רציפות מ- R ל- R.
ב. הסכום של A ו- B הוא סכום ישר.

9. יהיה $F_5[x]$ תת-מרחב של פולינומים ממעלה קטנה מ-5 של מרחב הפולינומים $F[x]$. מצאו משלים ל- $F_5[x]$ ב- $F[x]$.

10. הוכיחו שמרחב שהפונקציות הממשיות הרציפות על $[0,1]$ הוא סכום ישר של תת-מרחב של פונקציות קבועות ותת-מרחב של פונקציות המתאפסות בנקודה נתונה c, $0\le c\le 1$.