אלגברה לינארית

סמסטר ב׳ תשפ״ה

שאלה VI.7.1

א. אם $U = \text{span}\{u_1, ..., u_k\}$ ו $W = \text{span}\{w_1, ..., w_m\}$, מתקיים

$$U + W = \text{span}\{u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_m\}.$$

כדי למצא מימד של $U + W$ נבנה בסיס לתת מרחב הזה. לשם כך נסדר את הוקטורים הפורשים כשורות במטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim ... \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

דרגת המטריצה שווה ל־3 ולכן $\dim(U + W) = 3$.

ב. נמצא את המימדים של U ו־W ונחשב את המימד של $U \cap W$ בעזרת הנוסחה

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

לשם כך נמצא בסיס ב־U: נסדר את הוקטורים הפורשים את U כשורות במטריצה ונמצא את דרגתה. נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim ... \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

השורות השונות מאפס מהוות בסיס ב־U ולפיכך $\dim(U) = 2$. באופן דומה, נמצא בסיס ב־W ע"י דירוג של המטריצה המתאימה:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim ... \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $\dim(W) = 3$. נציב לנוסחה הנ"ל ונקבל

$$\dim(U \cap W) = 2 + 3 - 3 = 2.$$

ג. לפי הדירוג בסעיף (א) הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

מהווה בסיס בתת מרחב $U + W$.

ד. נסביר את שיטה למציאת בסיס בחיתוך של שני תתי מרחבים. $v \in U \cap W$ אם ורק אם קיימים קבועים $c_1, ..., c_k$ ו $d_1, ..., d_m$ כך ש

$$v = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i = \sum_{j=1}^{m} d_j w_j,$$

כאשר $\{u_1, ..., u_k\}$ בסיס ב־U ו $\{w_1, ..., w_m\}$ בסיס ב־W. נמצא בסיס לקבוצת הפתרונות של ממ"ל הומוגנית

$$\sum_{i=1}^{k} c_i u_i - \sum_{j=1}^{m} d_j w_j = 0. \qquad (1)$$

נסמן את וקטורי הבסיס שהתקבלו ב $\{x_1, ..., x_\ell\} \subset \mathbb{R}^{k+m}$ וב־x_{ij} את הרכיב ה־j של הוקטור x_i. לפי הבניה הזו הוקטורים

$$v_i = \sum_{j=1}^{k} x_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{m} x_{i,k+j} w_j, \quad i = 1, ..., \ell$$

פורשים את $U \cap W$. לכן בסיס של $\mathrm{span}\{v_1, ..., v_\ell\}$ הוא גם בסיס ב $U \cap W$ ואותו אפשר למצוא בכלים הרגילים (למשל לסדר v_i כשורות במטריצה ולמצא את דרגתה).

הצעד האחרון מיותר אם $\{u_1, ..., u_k\}$ ו $\{w_1, ..., w_m\}$ בסיסים ב־U ו־W (ולא רק קבוצות פורשות). נוכיח כי במקרה הזה $\{v_1, ..., v_\ell\}$ אכן בת"ל. לשם כך נניח $\alpha_1, ..., \alpha_\ell$ קבועים עבורם

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i = 0$$

ונראה $\alpha_1 = ... = \alpha_\ell = 0$. נציב ונקבל

$$0 = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \sum_{j=1}^{k} x_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i x_{ij} \right) u_j$$

אם $\{u_1, ..., u_k\}$ בת"ל אז

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i x_{ij} = 0, \quad j = 1, ..., k \tag{2}$$

באופן דומה

$$0 = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i x_{i,k+j} \right) w_j$$

ולכן

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i x_{i,k+j} = 0, \quad j = 1, ..., m. \tag{3}$$

לפי (2) ו (3)

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i x_i = 0$$

ולכן $\alpha_1 = ... = \alpha_\ell = 0$. הוכנו כי הקבוצה $\{v_1, ..., v_\ell\}$ בסיס ב $U \cap W$.

נפעיל את האלגוריתם על הנתונים של השאלה. נדרג מטריצת המקדמים המתאימה לממ"ל (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim ... \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לפיכך בסיס בקבוצת הפתרונות הוא

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן הוקטורים

$$v_1 = \sum_{i=1}^{3} x_{1i} u_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \sum_{i=1}^{3} x_{2i} u_i = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \sum_{i=1}^{3} x_{3i} u_i = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

פורשים את $U \cap W$. שני הוקטורים השונים מ־0 אינם מקביליים ולכן בת"ל. קיבלנו כי הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

הינה בסיס ב $U \cap W$.

הערה: בנתוני השאלה אפשר להגיע לתשובה באופן מידי. ראינו כי $\dim(U) = 2$ וגם $\dim(U \cap W) = 2$. אך $U \cap W$ תת מרחב של U ולכן $U = U \cap W$, כלומר בסיס ב U הוא גם בסיס ב $U \cap W$. האלגוריתם הנ"ל מאפשר לפתור שאלות מהסוג הזה באופן כללי.

שאלה VI.7.2

א. מתקיים $S = S + \{0\} \subseteq S + S$. נותר להוכיח הכלה בכיוון השני. אם $v \in S + S$ אז $v = u + w$ כאשר $u \in S$ וגם $w \in S$. משום ש S תת מרחב, $u + w \in S$ ולכן $S + S \subseteq S$. קיבלנו $S = S + S$.

ב. לא. למשל $S := \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R} = V$ אינה תת מרחב, אך $S + S = S$.

שאלה VI.7.3

נגדיר תתי מרחבים

$$W=\{x\in\mathbb{R}^n : x_1+...+x_n=0\},\quad U=\{x\in\mathbb{R}^n : x_1=...=x_n\}$$

הוקטור

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

הינו בסיס במרחב U (כי כל וקטור ב־U הינו כפולה של u_1). הקבוצה של $n-1$ וקטורים

$$\{w_1,...,w_{n-1}\}=\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ב־W (לממ"ל $\sum_{i=1}^n x_i=0$ יש $n-1$ משתנים חופשיים, כלומר $\dim(W)=n-1$ והקבוצה הנ"ל בת"ל). הקבוצה $\{u_1,w_1,...,w_{n-1}\}$ בת"ל (בדקו ע"י דירוג של מטריצה מתאימה) ולכן בסיס ב־$\mathbb{R}^n$ (כי המימד של $\mathbb{R}^n$ שווה ל־n). מכאן נובע כי $U+W=\mathbb{R}^n$ וגם

$$\dim(U\cap W)=\dim(U+W)-\dim(W)-\dim(U)=n-(n-1)-1=0.$$

לכן $U\cap W=\{0\}$ ו $U\oplus W=\mathbb{R}^n$.

שאלה VI.7.4

א. הקבוצה

$$\{u_1,u_2\}=\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ב־U (מרחב הפתרונות של הממ"ל $a+b+c=0$). הקבוצה

$$\{v_1,v_2\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ב־V (מרחב הפתרונות של הממ"ל $a-c=0$). מתקיים

$$U+V=\operatorname{span}\big(\{u_1,u_2,v_1,v_2\}\big).$$

משום ש $U+V\subseteq\mathbb{R}^3$, כדי להוכיח $U+V=\mathbb{R}^3$ מספיק להראות כי $\dim(U+V)=3$. לשם כך נסדר את הוקטורים כשורות במטריצה ונמצא את דרגתה:

$$\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\sim\ldots\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

דרגת המטריצה שווה ל־3 ולכן $\dim(U+W)=3$ ומכאן

$$U+W=\mathbb{R}^3.$$

הסכום הזה אינו ישר כי

$$\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U+V)=1.$$

ב. הקבוצה

$$\{w_1\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ב־W ו $U+W=\operatorname{span}(\{u_1,u_2,w_1\})$. כמו בסעיף הקודם נבדוק האם $\dim(U+W)=3$:

$$\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\ldots\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

דרגת המטריצה שווה ל־3 ולכן הוקטורים בת"ל ו $U+V=\mathbb{R}^3$. הסכום הינו ישר כי

$$\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U+V)=0.$$

ג. מתקיים $V+W=\mathrm{span}(\{v_1,v_2,w_1\})$ הקבוצה

$$\{v_1,v_2,w_1\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בת"ל ולכן $\dim(U+V)=3$ ו $U+V=\mathbb{R}^3$. הסכום ישר כי

$$\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U+V)=0.$$

שאלה VI.7.5

נסדר את הוקטורים כשורות במטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\3&2&1\\1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix}\sim\cdots\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

לכן $\dim(U+V)=\dim(\mathrm{span}(u_1,u_2,u_3,u_4\})=3$ ולפיכך $U+V=\mathbb{R}^3$. לפי משפט המימדים

$$\dim(U\cap V)=2+2-3=1>0$$

ולכן הסכום לא ישר.

שאלה VI.7.6

הטענה אינה נכונה. כדוגמה נגדית אפשר לקחת , למשל, $U=W=V$. במקרה הזה, $V=U\cup W$ וגם $V=U+W$ אך הסכום לא ישר כי $U\cap W\neq\{0\}$.

באופן כללי יותר, מתקיימת טענה הבאה: אם V מרחב וקטורי ו $V=U\cup W$ עבור תת מרחבים $U,W\subseteq V$ אז $U\subseteq W$ או $W\subseteq U$.

נוכיח בשלילה: נניח קיימים וקטורים $u\notin W$,$u\in U$ ו $w\notin U$,$w\in W$ ונגיע לסתירה. מתקיים $u\in U\subseteq U\cup W=V$ וגם $w\in W\subseteq U\cup W=V$. בגלל ש V מרחב וקטורי, $u+w\in V=U\cup W$. אם $u+w\in U$ ו־U תת מרחב, $w\in U$ וזאת סתירה. באופן דומה, אם $u+w\in W$ אז $u\in W$ וגם זאת סתירה.

שאלה VI.7.7

נגדיר תת מרחבים (מעל שדה של ממשיים)

$$H := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A = A^\dagger\}, \quad G := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A = -A^\dagger\}.$$

כל מטריצה $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ניתנת לפירוק:

$$B = \underbrace{\tfrac{1}{2}(B + B^\dagger)}_{\in H} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(B - B^\dagger)}_{\in G}$$

ולכן $H + G = \mathbb{C}^{n\times n}$. נניח $A \in H \cap G$ אז $A^\dagger = A$ ו $A^\dagger = -A$ כלומר $A = -A$. מכאן $2A = 0$ ולכן $A = 0$. קיבלנו $H \cap G = \{0\}$ ולכן $H + G = H \oplus G$.

שאלה VI.7.8

יהיה C מרחב וקטורי של פונקציות $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ רציפות ונגדיר קבוצת כל הפונקציות הזוגיות ב־C:

$$A = \big\{f \in C : f(x) = f(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}\big\}$$

והפונקציות האי־זוגיות ב־C:

$$B = \big\{f \in C : f(x) = -f(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}\big\}.$$

א. נראה כי A סגורה תחת חיבור וכפל בסקלר ולכן תת מרחב. עבור $f, g \in A$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

כלומר $f + g \in A$. עבור $c \in \mathbb{R}$

$$(cf)(x) = cf(x) = cf(-x) = (cf)(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

כלומר $cf \in A$. באופן דומה B סגורה תחת חיבור וכפל בסקלר ולכן תת מרחב: עבור $f, g \in B$

$$\begin{aligned}(f + g)(x) =& f(x) + g(x) = -f(-x) - g(-x) = \\ & -(f(-x) + g(-x)) = -(f + g)(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

ולכן $f + g \in B$. עבור $c \in \mathbb{R}$

$$(cf)(x) = cf(x) = -cf(-x) = -(cf)(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ולכן $cf \in B$.

ב. נניח $f \in A \cap B$ אז $f(x) = f(-x)$ וגם $f(x) = -f(-x)$ עבור כל $x \in \mathbb{R}$. לכן

$$f(-x) = -f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad 2f(-x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

כלומר $f(x) = 0$ עבור כל $x \in \mathbb{R}$. לכן $A \cap B = \{0\}$ ומכאן $A + B = A \oplus B$.

שאלה VI.7.9

נגדיר $T = \{x^6, x^7, ...\}$ ו $U = \mathrm{span}(T)$ (כל הפולינומים מדרגה סופית גדולה מ־5). ראינו כי הוקטורים ב־T בת"ל ולכן T בסיס ב־U. הקבוצה $S_5 = \{1, x, ..., x^5\}$ בסיס ב־$F_5[x]$. ראינו כי הקבוצה

$$S = S_5 \cup T = \{1, x, x^2, ...\}$$

בסיס ב־$F[x]$. בנוסף $S_5 \cap T = \emptyset$ ולכן לפי משפט 4 (ב)

$$F[x] = F_5[x] \oplus U$$

כלומר U הוא המשלים של $F_5[x]$ ב $F[x]$.

שאלה VI.7.9

תהי $C([0,1])$ קבוצת הפונקציות הרציפות מעל $[0,1]$ ל־$\mathbb{R}$. נגדיר תת קבוצה של פונקציות קבועות:

$$W = \left\{ f \in C([0,1]) : f(x) = f(0),\ \forall x \in [0,1] \right\}$$

ותת קבוצה של פונקציות המתאפסות בנקודה נתונה $c \in [0,1]$

$$U = \{ f \in C([0,1]) : f(c) = 0 \}.$$

נראה כי

$$C([0,1]) = U + W. \qquad (4)$$

עבור כל $g \in C([0,1])$ נרשום

$$g(x) = \underbrace{\big(g(x) - g(c)\big)}_{=:u(x)} + \underbrace{g(c)}_{=:w(x)}\ .$$

הפונקציה w קבועה ולכן $w \in W$. הפונקציה u מתאפסת ב־c

$$u(c) = g(c) - g(c) = 0$$

ולכן $u \in U$. הוכחנו את (4). נותר להראות כי

$$U \cap W = \{0\} \qquad (5)$$

נניח $h \in U \cap W$ אז $h(c) = 0$ וגם

$$h(x) = h(0), \quad \forall x \in [0,1].$$

בפרט $h(0) = h(c) = 0$ ומכאן $h(x) = 0, \forall x \in [0,1]$. זה מוכיח את (5) ואת הטענה

$$C([0,1]) = U \oplus W.$$