הקבוצה $S_e=\{(1,0,0,0)\ ,\ (1,-1,0,0)\ ,\ (1,-2,1,0)\ ,\ (1,-3,3,1)\}$ בלתי תלויה ליניארית, לכן גם S בלתי תלויה ליניארית.

דוגמה 6: נתונים $\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1$ וקטורים בלתי תלויים ליניארית. הוכיחו שגם הוקטורים $\mathbf{w}_1=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\ ,\ \mathbf{w}_2=\mathbf{v}_1-3\mathbf{v}_2\ ,\ \mathbf{w}_3=\mathbf{v}_1+5\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3$ בלתי תלויים ליניארית.

הוכחה: היות ו- $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ בלתי תלויים ליניארית, ניתן להתייחס אליהם כבסיס v של תת-מרחב $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$. נמצא קואורדינטות של הוקטורים $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3$ בבסיס זה.

$$(\mathbf{w}_1)_v=(1,1,0)\ ,\ (\mathbf{w}_2)_v=(1,-3,0)\ ,\ (\mathbf{w}_3)_v=(1,5,-1) \quad \blacksquare$$

נשאיר לקורא לבדוק שהוקטורים $(1,1,0)\ ,\ (1,-3,0)\ ,\ (1,5,-1)$ בלתי תלויים ליניארית, לכן גם $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3$ בלתי תלויים ליניארית.

תרגילים:

1. יהיה $e=\{1,1+x,x+x^2,x^2+x^3\}$ בסיס במרחב הפולינומים $R_4[x]$. מצא בבסיס זה קואורדינטות של הוקטורים:

   א. $2-3x+x^2+2x^3$ ב. $a+bx+cx^2+dx^3$.

2. יהיה W מרחב וקטורי של מטריצות סימטריות מסדר 2 מעל R.

   א. הוכיחו: $e=\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&-2\\-2&1\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס של W.

   ב. חשבו קואורדינטות של $A=\begin{pmatrix}1&-5\\-5&5\end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix}1&-5\\-1&2\end{pmatrix}$ בבסיס זה.

3. הוכיחו שבקבוצה
   $$e=\{1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3,\ldots,1+x+\ldots+x^{n-1}\}$$
   היא בסיס במרחב $R_n[x]$ והקבוצה

   $f=\{1+x,x+x^2,x^2+x^3,\ldots,x^{n-2}+x^{n-1}\}$ אינה בסיס ב- $R_n[x]$.

4. יהיו W ו- U תת-מרחבים של מטריצות אנטי-סימטריות וסימטריות בהתאמה במרחב של המטריצות הריבועיות מסדר n מעל R. מצאו:

   א. $\dim W$. ב. $\dim U$.