תרגילים:

1. הוכיחו שדטרמיננט של מטריצה הרמיטית הוא מספר ממשי.
2. הוכיחו שדטרמיננט של מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי-זוגי שווה לאפס.
3. המספרים 585,416,273 מתחלקים ב- 13. הוכיחו שגם הדרמיננט $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 5 & 8 & 5 \end{vmatrix}$ מתחלק ב- 13, בלי לחשב אותו.
4. נתון $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & \ell & m \end{vmatrix} = 4$.

עבור אילו ערכים של t מתקיים $\begin{vmatrix} e-tb & d-ta & f-tc \\ t^2b & t^2a & t^2c \\ \ell+te & k+td & m+tf \end{vmatrix} = -36$.

5. חשבו $|A-Ix|$, כאשר $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.
6. חשבו:

א. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1+i & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-i & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+i & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-i \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$

ד. $\begin{vmatrix} 15648 & 15548 \\ 17321 & 17221 \end{vmatrix}$ (ללא מחשבון) ה. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 11 & 8 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ ו. $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$

ז. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$ כאשר $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ ח. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

7. תהיה $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{pmatrix}$, פתרו את המשוואה $|A-Ix|=0$.

8. $B=\begin{pmatrix}9&22&-6\\-1&-4&1\\8&16&-5\end{pmatrix}$, פתרו את המשוואה $|B-Ix|=0$.

9. פתרו את המשוואה: $\begin{vmatrix}1&x&x^2&x^3\\1&-3&9&-27\\1&2&4&8\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}=0$.

8. הפיכות ודטרמיננטים

בסעיף זה נביא שיטה נוספת למציאת מטריצות הפוכות. ראשית, נוסיף איפיון לטענות של משפט IV.6.6.

משפט 1:

א. מטריצה A היא הפיכה אם ורק אם $\det A\neq 0$.

ב. אם A הפיכה, אזי $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$.

הוכחה:

א. ממשפטים 4.5 ו-5.6 וממסקנה 5.3 נובע שאם A ו-B שקולות בשורות אזי $|B|=0$ אם ורק אם $|A|=0$. אם A הפיכה, היא שקולה בשורות ל-I ולכן $\det A\neq 0$. אם A אינה הפיכה, היא שקולה בשורות למטריצה שיש בה שורת אפסים ולכן, לפי משפט 5.1, הדטרמיננט שלה שווה ל-0.

ב. נניח ש-A הפיכה. זאת אומרת, קיימת מטריצה A^{-1}, כך ש- $A^{-1}A=AA^{-1}=I$. לכן $\det(AA^{-1})=\det A\cdot\det A^{-1}=1$. מכאן נובע ש- $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$.

הגדרה 1: תהיה $A=(a_{ij})_{ij=1}^{n}$ מטריצה מסדר n לדטרמיננט של המטריצה M_{ij} המתקבלת מ- A על ידי מחיקת שורה i ועמודה j קוראים **מינור** המתאים לאיבר a_{ij}. המספר $A_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ נקרא **משלים אלגברי** לאיבר a_{ij} למטריצה.