דוגמה 4: מצאו מימד ובסיס של מרחב הפתרונות של המערכת הבאה מעל השדה Z_5:

$$\begin{cases} x+2y+2z+s+3t=0 \\ x+2y+3z+s+\ \ t=0 \\ 3x+y+3z+s+2t=0 \end{cases}$$

פתרון: נמצא פתרון כללי של המערכת תוך העברת המטריצה שלה למטריצה מדורגת

$$\begin{pmatrix} 1&2&2&1&3 \\ 1&2&3&1&1 \\ 3&1&3&1&2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(a_3)+2(a_1)\to(a_3)]{(a_2)+4(a_1)\to(a_2)} \begin{pmatrix} 1&2&2&1&3 \\ 0&0&1&0&3 \\ 0&0&2&3&3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(a_3)+3(a_2)\to(a_3)} \begin{pmatrix} 1&2&2&1&3 \\ 0&0&1&0&3 \\ 0&0&0&3&2 \end{pmatrix}$$

מהמשוואה האחרונה $3s+2t=0$ מקבלים $s=t$. מהמשוואה השנייה $z=2t$, t פרמטר. לאחר הצבה במשוואה הראשונה נקבל $x+2y+3t=0$ (ראה $5t=0$). נקבל פתרון $(2t+3y,y,2t,t,t)$, כאשר y ו- t פרמטרים מ- Z_5. לכן מימד מרחב הפתרונות הוא 2 והבסיס $\mathbf{v}_1=(3,1,0,0,0),\ \mathbf{v}_2=(2,0,2,1,1)$.

תרגילים:

1. הוכיחו: $\mathbf{v}_1=(1,2,5,2),\ \mathbf{v}_2=(1,2,3,1),\ \mathbf{v}_3=(3,2,3,4)$ מעל Z_7 הם ב.ת.ל.

2. יהיה $V=\{a_1,a_2,\dots\}$ מרחב כל הסדרות האינסופיות מעל R שבו

$$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\{(a_1+a'_1,a_2+a'_2,\dots\}\quad,\quad \alpha\mathbf{v}=\{\alpha a_1,\alpha a_2,\dots\}$$

הוכיחו: וקטורים

$$\mathbf{v}_1=(1,0,\dots)\ ,\ \mathbf{v}_2=(0,1,0,\dots),\dots,\mathbf{v}_n=(0,\dots,0,1,0,\dots),\dots$$

הם בלתי תלויים ליניארית.

3. יהיו $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}0&2\\3&0\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}1&a\\2&0\end{pmatrix}$ וקטורים במרחב וקטורי $R^{2\times 2}$. עבור אילו ערכים של a הוקטורים $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ יהיו בלתי תלויים ליניארית.

4. מצאו מימד ובסיס של מרחב הפתרונות של המערכת

א. $$\begin{cases} x+2y+2z-s-3t=0 \\ x+2y+3z+s+\ \ t=0 \\ 3x+6y+8z+s-5t=0 \end{cases}$$

ב. $$\begin{cases} 6x-2y+2z+5s+7t-0 \\ 9x-3y+4z+8s+9t=0 \\ 6x-2y+6z+7s+\ \ t=0 \\ 3x-\ \ y+4z+4s-\ \ t=0 \end{cases}$$

5. יהי $W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\right\}$, מעל R.
מיצאו מימד ובסיס של W.

6. מטריצה ריבועית שבה שווים האיברים לאורך כל אלכסון המקביל לאלכסון הראשי נקראת **מטריצת טפליץ Töplitz**. למשל המטריצה $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & a & b \\ e & d & a \end{pmatrix}$ היא מטריצת טפליץ מסדר 3. תהיה W קבוצת מטריצות טפליץ מסדר n.
   א. הוכיחו ש-W הוא תת-מרחב במרחב כל המטריצות הריבועיות מסדר n.
   ב. מצאו בסיס ב- W כאשר $n = 3$.
   ג. הוכיחו שבמקרה כללי $\dim W = 2n - 1$.

7. מטריצה שבה שווים האיברים לאורך כל אלכסון המקביל לאלכסון המישני נקראת **מטריצת הנקל (Hankel)**. למשל $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{pmatrix}$ היא מטריצת הנקל מסדר 3. הוכיחו שקבוצת מטריצות הנקל מסדר n היא תת-מרחב במרחב המטריצות הריבועיות מסדר n.

8. יהי (v_1, v_2, v_3) בסיס של מרחב V מעל שדה F. האם גם הקבוצה $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 - v_3)$ היא בסיס של V?

9. יהי $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ בסיס של V האם גם הקבוצה
$\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \ldots, \sum_{i=1}^{n} v_i\}$ היא בסיס של V?

10. הוכיחו: $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x\}$ בלתי תלויה ליניארית.

11. הוכיחו: $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, \ldots, e^{nx}\}$ בלתי תלויה ליניארית.

7. סכום וסכום ישר של תת-מרחבים

ראינו שאיחוד של תת-מרחבים אינו תת-מרחב.

הגדרה 1: תהיינה $S_1, S_2, \ldots, S_n$ תת-קבוצות של מרחב וקטורי V. הסכום $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ מוגדר כאוסף כל הוקטורים $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ כאשר $a_i \in S_i$, $i = 1,2,\ldots,n$.