תרגילים:

1. קבעו את הסימן של הביטוי הנמצא בדטרמיננט:

א. $a_{32}a_{14}a_{43}a_{66}a_{51}a_{25}$ ב. $a_{14}a_{31}a_{23}a_{42}a_{65}a_{56}$

ג. $a_{11}\cdot a_{22}\dots a_{nn}$ ד. $a_{n1}a_{n-1,2}a_{n-2,3}\cdots a_{1n}$

2. מצאו i ו- k, כך שהמקדם של $a_{31}a_{1i}a_{24}a_{47}a_{7k}a_{63}a_{55}$ יהיה חיובי בדטרמיננט מסדר 7.

5. תכונות של דטרמיננטים

בסעיף זה נביא תכונות של הדטרמיננט המקלות במקרים מסויימים על חישובו.

משפט 1: אם כל האיברים בשורה (עמודה) אחת של מטריצה הם אפסים, אזי הדטרמיננט שלה שווה לאפס.

הוכחה: בכל אחד מהמחוברים $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ של הדטרמיננט מופיע איבר משורת (עמודת) האפס ולכן כל הסכום שווה לאפס.

משפט 2: דטרמיננט של מטריצה משולשת עליונה (תחתונה) שווה למכפלת האיברים האלכסוניים.

הוכחה: תהי $A=(a_{ij})_{ij=1}^{n}$ מטריצה משולשת עליונה, כלומר כל האיברים מתחת לאלכסון הראשי שווים לאפס. $a_{ij}=0$, כאשר $i>j$. מכאן נובע בנוסחה (4.1) שבכל המחוברים פרט ל- $\operatorname{sgn}(1,2,\dots,n)a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ מופיע כגורם איבר a_{ij} כאשר $i>j$ ולכן הם שווים לאפס. כיוון ש- $\operatorname{sgn}(1,2,\dots,n)=1$ מקבלים $\det A=a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$. באופן דומה מוכיחים את טענת המשפט עבור מטריצה משולשת תחתונה. ■

משפט 3: תהינה A ו- B שתי מטריצות מסדר n השונות זו מזו רק באיברים הנמצאים בשורה k בלבד, כלומר $i,j=1,2,\dots,n$, $i\neq k$; $a_{ij}=b_{ij}$, אזי

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+b_{k1} & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

הוכחה: נוכיח את (1) באינדוקציה. לדטרמיננטים מסדר 1, הנוסחה (1) מיידית. נניח שהיא נכונה עבור דטרמיננטים מסדר $(n-1)$.