**משפט 2:** תהי $T:V\to U$ העתקה ליניארית. אם קבוצת הוקטורים $T(v_1),\ldots,T(v_n)$ בלתי תלויה ליניארית ב-U, אזי קבוצת המקורות $v_1,v_2,\ldots,v_n$ בלתי תלויה ליניארית ב-V.

**הוכחה:** נניח ש- $\{T(v_i)\}_{i=1}^n$ בלתי תלויה ליניארית אבל $\{v_i\}$ תלויה ליניארית. כלומר, $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0_v$ ולא כל ה- $\alpha_i$ שווים לאפס. נרשום

$$0_u = T(0_v) = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i)$$

קיבלנו שהקבוצה $\{Tv_i\}_{i=1}^n$ תלויה ליניארית בניגוד לנתון וזה מוכיח את המשפט. ■

## תרגילים:

1. תהיה $T:R^3\to R^4$ כך ש- $T(x,y,z)=(x-y,y-z,x+y+z,z-x)$.

   א. בידקו ש-T העתקה ליניארית. ב. האם T היא $1\leftrightarrow 1$.

   ג. האם T הוא על.

2. יהיה V מרחב הפונקציות הרציפות הממשיות ב- $[0,1]$.

   הוכיחו שההעתקה $T:V\to V$, כך ש- $(Tf)(x)=\int_0^x f(t)dt$ היא העתקה ליניארית מ-V ל-$[0,1]$.

3. הראו שההעתקה $T:R^3\to R^2$ הנתונה על ידי $T(x,y,z)=(x^2+xy,z^2)$ אינה העתקה ליניארית.

4. תהי העתקה ליניארית $T:R^2\to R^3$ כך ש-

   $T(-1,1)=(1,0,1), T(2,3)=(1,-1,0)$.

   מצא את תמונות הוקטורים: א. $(0,0)$. ב. $(1,6)$.

5. נתונה העתקה ליניארית $T:R^3\to R^2$ כך ש- $T(0,1,0)=(2,3)$, $T(1,1,0)=(1,1), T(1,1,1)=(0,2)$. מצאו את תמונות הוקטורים:

   א. $(2,3,5)$. ב. $(0,1,-7)$.

6. מצאו את העתקה הליניארית $T:R^3\to R^3$ המקיימת

   $T(1,1,1)=(1,2,3)$ , $T(1,1,0)=(2,3,4)$ , $T(1,0,0)=(3,4,5)$.