הגדרה 3: תהיה S תת-קבוצה לא ריקה של מרחב וקטורי V. הקבוצה $L(S)$ של כל הצירופים הליניאריים של הוקטורים מ- S נקראת **הפרוש** של S, או במילים אחרות, וקטורים מ- S פורשים את $L(S)$. מסמנים $L(S) = \text{span}\{S\}$. נגדיר $L(\emptyset) = \{0\}$.

משפט 3: תהיה $S \subset V$ תת-קבוצה לא ריקה, אזי:

א. $L(S)$ הוא תת-מרחב ב- V המכיל את S.

ב. אם W הוא תת-מרחב של V המכיל את S, אזי $L(S) \subset W$.

את ההוכחה נשאיר לקורא כתרגיל.

דוגמה 4: נתונות שלוש מטריצות ב- $R^{2\times 2}$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

עבור אילו ערכים של a,b,c,d מתקיים $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{span}(A,B,C)$.

פתרון: נמצא את הערכים של a,b,c,d שעבורם המטריצה D היא צירוף ליניארי של המטריצות A,B,C, כלומר קיימים מספרים x_1, x_2, x_3 כך ש-

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

או $x_2 - x_3 = d$, $x_1 + x_2 = c$, $x_1 + 2x_3 = b$, $x_1 = a$.

לכן למערכת הנ"ל יש פתרון אם ורק אם $a + b - 2c + 2d = 0$, כלומר

$$\text{span}(A,B,C) = \left[\begin{pmatrix} 2c - b - 2d & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] ;\ b,c,d \in R$$

תרגילים:

1. ציינו לגבי כל אחת מהטענות הבאות, האם היא נכונה או לא.

א. כל המטריצות האנטי-סימטריות מסדר n מהוות תת-מרחב של מרחב המטריצות הריבועיות מאותו סדר.

ב. קבוצת כל המטריצות ההרמיטיות מסדר n היא תת-מרחב של $C^{n\times n}$ כמרחב וקטורי מעל C.

ג. קבוצת המטריצות ההרמיטיות מסדר n היא תת-מרחב של $C^{n\times n}$ כמרחב וקטורי מעל R.

ד. קבוצת המטריצות ההרמיטיות מסדר n היא תת-מרחב של $R^{n\times n}$.

ה. קבוצת המטריצות ההפיכות ב- $F^{n\times n}$ היא תת-מרחב של $F^{n\times n}$.

ו. קבוצת כל הפונקציות החסומות היא תת-מרחב של מרחב כל הפונקציות המוגדרות ב- $[a,b]$.

ז. קבוצת הפולינומים ממעלה אי-זוגית היא תת-מרחב של מרחב הפולינומים $F[x]$.

2. בידקו האם W היא תת-מרחב של R^3 בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $W=\{(a,b,c)\ ;\ a=3b\}$ ב. $W=\{(a,b,c),\ a\le b\le c\}$

ג. $W=\{(a,b,c),\ a\cdot c=0\}$ ד. $W=\{(a,b,c),\ a=b=c\}$

ה. $W=\{(a,b,c),\ a=b^2\}$

3. א. האם R^2 הוא תת-מרחב ב- R^3 ?

ב. האם $F_2[x]$ הוא תת-מרחב של $F_3[x]$.

4. תהיה $A\in F^{m\times n}$. הוכיחו שקבוצת הפתרונות של $Ax=\mathbf{0}$, היא תת-מרחב ב- F^n.

5. קבעו תנאים על הרכיבים של הוקטור $(a,b,c)\in R^3$, כך ש-

$$(a,b,c)\ \in\ \text{span}\{(1,-1,2),(2,1,0),(0,3,-4)\}$$

6. הוכיחו: $x^2+5x-1\in \text{span}\{x^2+1,x^2-1,2x+3\}$.

7. עבור אלו ערכים של a: $(0,1,a)\in \text{span}\{(1,1,0),(1,0,2)\}\subset Z_3^3$.

8. הוכיחו שחיתוך של מספר כלשהו של תת-מרחבים של מרחב וקטורי V הוא תת-מרחב של V.

6. בסיס ומימד של מרחב וקטורי

הגדרה 1: יהיה V מרחב וקטורי מעל שדה F. וקטורים $v_1,v_2,\dots,v_n$ הם **תלויים ליניארית** אם קיימים סקלרים α_i , $i=1,2,\dots,n$ לא כולם אפס, כך ש- $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=0$, אחרת, הם **בלתי תלויים ליניאריות** (ב.ת.ל.).

הגדרה 2: תת-קבוצה S של מרחב וקטורי V היא **בלתי תלויה ליניארית** אם אין בה אף קבוצה סופית של וקטורים תלויים ליניארית, אחרת S **תלויה ליניארית**.

דוגמה 1:

א. נתונים $v_1=(1,9,8)$, $v_2=(9,11,10)$, $v_3=(6,0,5)$ מעל שדה Z_{13}. הוכיחו שהם תלויים ליניארית.