אלגברה לינארית

סמסטר ב' תשפ"ה

שאלה 1

תהי $f : A \mapsto B$ פונקציה מקבוצה A וקבוצה B. פונקציה $g : B \mapsto A$ נקראת ההופכית של f אם

$$g(f(x)) = x, \quad \forall x \in A$$

וגם

$$f(g(y)) = y, \quad \forall y \in B.$$

אם קיימת, ההופכית של f מסומנת $g = f^{-1}$. הוכיחו כי ההופכית קיימת ויחידה אם ורק אם f חח"ע ועל.

נניח ההופכית f^{-1} קיימת ונראה כי f חח"ע ועל. נקח $x_1, x_2 \in A$ כך ש

$$f(x_1) = f(x_2).$$

נפעיל את ההופכית על שני האגפים ונקבל

$$x_1 = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2.$$

קיבלנו כי f חח"ע. נוכיח כי f על. נקח $y \in B$ ונוכיח שקיים $x \in A$ כך ש $f(x) = y$. לשם כך המועמד הטבעי $x = f^{-1}(y)$:

$$f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$$

לכן f על.

בכיוון הפוך, נניח f חח"ע ועל ונבנה את הופכית. נקח $y \in B$. משום ש f על, התמונה ההפוכה של y תחת f אינה ריקה, $\{x \in A : f(x) = y\} \neq \emptyset$. משום ש f חח"ע התמונה ההפוכה כוללת נקודה אחת בדיוק. נסמן אותה $g(y)$ כאשר התלות ב־y מודגשת באופן מפורש. לפי הבניה הזו g הינה העתקה מ־B ל־A (לכל נקודה נתחום

מחזירה נקודה אחד בדיוק בקבוצת המטרה). נבדוק כעת כי g היא ההופכית של f.
נקח $x \in A$. התמונה ההפוכה של $f(x) \in B$ תחת f הינה $\{x\}$ כי f חח"ע. לכן לפי ההגדרה של g

$$g(f(x)) = x, \quad \forall x \in A.$$

נקח $y \in B$. התמונה ההפוכה של y תחת f היא $\{g(y)\}$ על פי ההגדרה של g ולכן

$$f(g(y)) = y, \quad \forall y \in B.$$

הוכחנו כי g היא ההופכית של f.

נותר להוכיח יחידות. נניח g וגם h הופכיות של f. אז עבור $y \in B$

$$h(y) = h(\underbrace{f(g(y))}_{=y}) = g(y),$$

כאשר השיוויון האחרון מתקיים כי $h(f(u)) = u$ עבור כל $u \in A$.

שאלה 2

יהיה $\phi : U \mapsto V$ איזומורפיזם בין מרחבים וקטוריים U, V. הוכיחו כי ההעתקה ההופכית $\phi^{-1} : V \mapsto U$ (הקיימת לפי שאלה 1) גם איזומורפיזם.

נזכיר כי ההופכית ϕ^{-1} מקיימת

$$\phi^{-1}(\phi(u)) = u, \quad \forall u \in U \quad \text{and} \quad \phi(\phi^{-1}(v)) = v \quad \forall v \in V.$$

נוכיח כי ϕ^{-1} חח"ע. נקח $v_1, v_2 \in V$. אם $\phi^{-1}(v_1) = \phi^{-1}(v_2)$ נפעיל ϕ על שני האגפים ונקבל $v_1 = v_2$. נוכיח כי ϕ^{-1} על. נקח $u \in U$ ונראה כי קיים $v \in V$ כך ש $\phi^{-1}(v) = u$. לשם כך המועמד הטבעי הוא $v = \phi(u)$:

$$\phi^{-1}(v) = \phi^{-1}(\phi(u)) = u.$$

נותר להראות כי ϕ^{-1} העתקה לינארית. נקח $v_1, v_2 \in V$ אז

$$\phi(\phi^{-1}(v_1) + \phi^{-1}(v_2)) = \phi(\phi^{-1}(v_1)) + \phi(\phi^{-1}(v_2)) = v_1 + v_2,$$

כאשר השתמשנו בלינאריות של ϕ. נפעיל ϕ^{-1} על שני האגפים ונקבל

$$\phi^{-1}(v_1) + \phi^{-1}(v_2) = \phi^{-1}(v_1 + v_2).$$

כעת נקח $v \in V$ ו $c \in F$ אז

$$\phi(c\phi^{-1}(v)) = c\phi(\phi^{-1}(v)) = cv.$$

נפעיל את ϕ^{-1} על שני האגפים ונקבל

$$c\phi^{-1}(v) = \phi^{-1}(cv).$$

הוכחנו כי ϕ^{-1} לינארית.