אלגברה לינארית ב' (52416)
בוחן אמצע סמסטר

פרופ' פבל צ'יגנסקי, מר נאור באומן

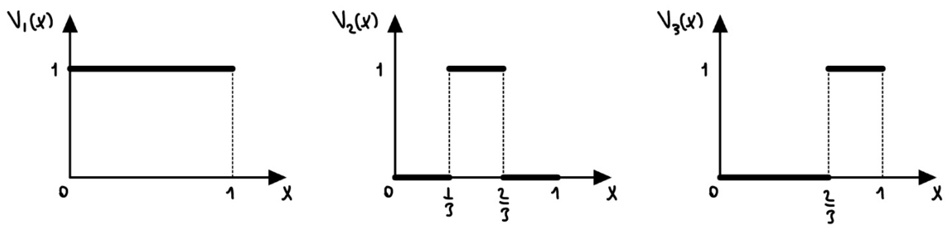
13/06/2024

- משך הבוחן 90 דקות
- כל חומר כתוב/מודפס מותר לשימוש.
- כל אמצעי התקשורת אסורים לרבות טלפונים ניידים, שעונים חכמים וכדומה
- יש לענות בצורה ברורה, מדויקת ומפורטת על השאלות. תשובה ללא דרך ברורה לא תזכה בניקוד. אם הדרך נמצאת בדפי הטיוטה עליכם לציין באופן מפורש היכן ולומר לנו לבדוק אותה.
- אם השתמשתם בטענות / הוכחות שנלמדו בקורס עליכם לציין זאת באופן מפורש

שאלה 1

נתונות פונקציות מקטע $[0,1]$ ל-$\mathbb{R}$

$$v_1(x)=1,\ \ v_2(x)=\begin{cases}1, & x\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3})\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}\ ,\ \ v_2(x)=\begin{cases}1, & x\in[\frac{2}{3},1]\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$



נגדיר $V=\mathrm{sp}\{v_1,v_2,v_3\}$.

1. (20 נק') הוכיחו כי $\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס ב-V.

קבוצה פורשת היא בסיס אם היא בת"ל. כדי לבדוק אי תלות נראה כי למשוואה

$$c_1v_1(x)+c_2v_2(x)+c_3v_3(x)=0,\qquad \forall x\in[0,1]$$

פתרון טריביאלי בלבד. בנקודה $x=\frac{1}{6}$ נקבל

$$c_1+0c_2+0c_3=0\qquad\Longrightarrow\qquad c_1=0.$$

בנקודה $x=\frac{1}{2}$ נקבל

$$c_2+0c_3=0\qquad\Longrightarrow\qquad c_2=0$$

ובנקודה $x=\frac{5}{6}$ נקבל $c_3=0$. קיבלנו פתרון טריביאלי בלבד ולכן הקבוצה בת"ל.

2. (20 נק') הראו כי הפונקציה

$$v(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\frac{1}{3})\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

שייכת ל־V ומצאו את הקואורדינטות שלה בבסיס הנ"ל.

הפתרון הקצר הוא לשים לב כי

$$v_1(x) = v(x) + v_2(x) + v_3(x), \quad \forall x \in [0,1].$$

לכן $v = v_1 - v_2 - v_3 \in V$ וקטור הקואורדינטות של v בבסיס הנ"ל $(1,-1,-1)$.
אפשר להגיע לאותן המסקנות בדרך ישירה, כלומר ע"י פתרון של המשוואה:

$$c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + c_3 v_3(x) = v(x), \quad \forall x \in [0,1].$$

עבור כל $x \in [0, \frac{1}{3})$ נקבל

$$c_1 + c_2 0 + c_3 0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 1.$$

עבור כל $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ נקבל

$$c_1 + c_2 1 + c_3 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = -1.$$

ובאופן דומה עבור כל $x \in [\frac{2}{3}, 1)$ נקבל

$$c_1 + c_2 0 + c_3 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_3 = -1.$$

3. (20 נק') הוכיחו כי הפונקציה $u(x) = x$ לא שייכת ל־V.

נראה כי למשוואה

$$c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + c_3 v_3(x) = u(x), \quad \forall x \in [0,1]$$

אין פתרון. נציב $x \in \{\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\}$ ונקבל ממ"ל

$$c_1 = \frac{1}{12}$$
$$c_1 = \frac{1}{6}$$

ללא פתרון. לכן $u \notin V$.

שאלה 2

נגדיר תת קבוצה
$$U=\left\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}:\operatorname{tr}(A)=0\right\}.$$

1. (14 נק') הוכיחו כי U תת מרחב של $\mathbb{R}^{n\times n}$.

עבור כל $A,B\in U$
$$\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)=0$$
ולכן $A+B\in U$. באופן דומה עבור כל $A\in U$ וכל $c\in\mathbb{R}$
$$\operatorname{tr}(cA)=c\operatorname{tr}(A)=c0=0$$
ולכן $cA\in U$. הקבוצה U סגורה תחת חיבור וכפל בסקלר ולכן תת מרחב.

2. (13 נק') מצאו $\dim(U)$.

תהי $E^{ij}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה בה האיבר (i,j) שווה ל-1 ושאר האיברים שווים ל-0.
נגדיר מטריצות
$$F^{ii}:=E^{ii}-E^{11},\quad i=2,...,n.$$
נוכיח כי הקבוצה
$$S=\{E^{ij}:i\neq j\}\cup\{F^{ii}:i=2,...,n\}$$
בסיס ב- U. עבור כל $A\in U$ מתקיים $A_{11}=-\sum_{j=2}^{n}A_{jj}$ ולכן
$$A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}A_{ij}E^{ij}+\sum_{j=2}^{n}A_{jj}F^{jj}$$
ולכן S פורשת את U. הקבוצה בת"ל כי למשוואה
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}c_{ij}E^{ij}+\sum_{j=2}^{n}c_{jj}F^{jj}=0$$
פתרון טריביאלי בלבד $c_{ij}=0$. לפיכך
$$\dim(U)=|S|=n^2-1.$$

3. (13 נק') נגדיר תת מרחב של מטריצות סימטריות

$$W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = A^{\top} \right\}.$$

הוכיחו כי $U + W = \mathbb{R}^{n\times n}$. האם הסכום ישר ?

עבור וקטור $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ נסמן ב $\operatorname{diag}(v_1, ..., v_n)$ מטריצה אלכסונית עם v_i באיבר האלכסוני ה־i. עבור כל $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים

$$B = \underbrace{B - \operatorname{diag}\big(\operatorname{tr}(B), 0, ..., 0\big)}_{=:A} + \underbrace{\operatorname{diag}\big(\operatorname{tr}(B), 0, ..., 0\big)}_{=:D}.$$

כאן מטריצה A שייכת ל־U כי

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(B) = 0$$

ומטריצה D אלכסונית ולכן סימטרית. קיבלנו $U + W \supseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ ובזה הוכחנו את הטענה. הסכום לא ישר כי הפירוק הנ"ל אינו יחיד. למשל

$$B = B - \operatorname{diag}\big(0, ..., 0, \operatorname{tr}(B)\big) + \operatorname{diag}\big(0, ..., 0, \operatorname{tr}(B)\big).$$

לאותם המסקנות היה ניתן להגיע משיקולי מימדים:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) =$$
$$(n^2 - 1) + \frac{n^2 + n}{2} - \left(\frac{n^2 - n}{2} + n - 1\right) = n^2 = \dim(\mathbb{R}^{n\times n}).$$