אלגברה לינארית

סמסטר ב' תשפ"ד

שאלה VI.6.1

נסדר את הוקטורים כשורות במטריצה ונדרג (מעל $\mathbb{Z}_7$)

$$\begin{pmatrix}1&2&5&2\\1&2&3&1\\3&2&3&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&5&2\\0&0&5&6\\0&3&2&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&5&2\\0&3&2&5\\0&0&5&6\end{pmatrix}$$

למטריצה דרגה 3 ולכן השורות בת"ל.

שאלה VI.6.2

נראה כי כל תת־קבוצה סופית מקבוצת הוקטורים הנתונה הינה בת"ל. לשם כך מספיק להוכיח כי $\{v_1,...,v_n\}$ בת"ל (למה ?) עבור כל n, כלומר להראות שלממ"ל

$$\sum_{i=1}^{n}c_iv_i=0$$

פתרון טריביאלי בלבד. זה נכון כי

$$\sum_{i=1}^{n}c_iv_i=(c_1,c_2,...,c_n,0,...).$$

שאלה VI.6.3

נמצא את הערכים של a עבורם לממ"ל

$$c_1\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0&2\\3&0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1&a\\2&0\end{pmatrix}=0$$

פתרון טריביאלי בלבד. המערכת הזו שקולה לממ"ל

$$\begin{aligned} -c_1 + c_3 &= 0 \\ 2c_2 + ac_3 &= 0 \\ c_1 + 3c_2 + 2c_3 &= 0 \end{aligned}$$

הפתרון הטריביאלי הוא היחיד אם ורק אם דטרמיננטה של מטריצת המקדמים

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 3a - 6$$

אינה מתאפסת. לכן הוקטורים בת"ל אם ורק אם $a \neq 2$.

שאלה VI.6.4

א. נדרג מטריצת המקדמים

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המשתנים החופשיים הם y, s והצבה לאחור נותנת

$$\begin{aligned} t &= 0 \\ z &= -2s \\ x &= -2y + 5s \end{aligned}$$

לכן מימד של מרחב הפתרונות שווה ל־2 והוקטורים

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מהווים בסיס.

ב. באותו אופן

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 6 & -2 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המשתנים החופשיים הם y, s, t וההצבה נותנת

$$z = -\frac{1}{2}s + \frac{3}{2}t$$
$$x = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}s - \frac{5}{3}t$$

לכן למרחב הפתרונות מימד 3 והוקטורים

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מהווים בסיס.

שאלה VI.6.5

נסלק וקטורים (מטריצות) תלויים ע"י בדיקה סדרתית (בהמשך נגלה דרכי פתרון יותר יעילות). נבדוק תלות של שתי המטריצות הראשונות ע"י פתרון של המשווה:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

המשוואה הזו שקולה לממ"ל הומוגנית עם מטריצת המקדמים

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & -5 \\ -5 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

העמודות של המטריצה אינן מקבילות ולכן בת"ל ולכן לממ"ל פתרון טריביאלי בלבד. כעת נבדוק האם המטריצה השלישית שווה לצירוף לינארי של שתיים הראשונות. לשם כך נבדוק האם למשוואה

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

יש פתרון. המשוואה הזו שקולה לממ"ל עם מטריצה מורחבת

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -7 & -5 & 1 \\ -5 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לממ"ל הזה יש פתרון (יחיד) ולכן המטריצה השלישית נמצאת בפרוש של שתי המטריצות הראשונות. נותר לבדוק את המטריצה הרביעית. נפתור את המשוואה:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

המשוואה הזו שקולה לממ"ל עם מטריצה מורחבת

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -7 & -5 & -4 \\ -5 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן לממ"ל יש פתרון (יחיד) והמטריצה הרביעית גם נמצא בפרוש של שתי המטריצות הראשונות. ובכן שתי המטריצות הראשונות בת"ל ופורשות את תת־המרחב הנתון. לכן מהוות בסיס והמימד של תת מרחב שווה ל־2.

שאלה VI.6.6

א. מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ טופליץ אם ורק אם

$$A_{ij} = A_{i+1,j+1}, \quad \forall i,j \in \{1,...,n-1\}.$$

נניח $A, B \in W$ מטריצות טופליץ אז עבור כל $i,j \in \{1,...,n-1\}$

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = A_{i+1,j+1} + B_{i+1,j+1} = (A+B)_{i+1,j+1}$$

כלומר $A+B \in W$. יהיה $c \in \mathbb{R}$ אז

$$(cA)_{ij} = cA_{ij} = cA_{i+1,j+1} = (cA)_{i+1,j+1}$$

ולכן $cA \in W$. הראנו כי W סגורה ביחס לחיבור וכפל בסקלר ולכן תת מרחב של $\mathbb{R}^{n\times n}$.

ב. נגדיר מטריצות

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$M_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

במטריצה M_j כל האיברים שווים לאפס פרט לאיברים באלכסון ה־j ששוים ל־1 (סימן של j קובע האם האלכסון הינו מעל האלכון הראשי או מתחתיו). נבדוק האם המטריצות מהוות בסיס ל־W עבור $n=3$. הקבוצה של המטריצות האלה פורשת כי כל מטריצת טופליץ כללית הינה צירוף לינארי של M_j:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & a & b \\ e & d & a \end{pmatrix} = cM_1 + bM_2 + aM_3 + dM_4 + eM_5.$$

נבדוק האם הקבוצה בת"ל ע"י פתרון של המשוואה

$$\sum_{j=1}^{5} c_j M_j = 0.$$

כאן

$$c_1 = \left(\sum_{j=1}^{5} c_j M_j\right)_{13} = 0$$
$$c_2 = \left(\sum_{j=1}^{5} c_j M_j\right)_{12} = 0$$
$$c_3 = \left(\sum_{j=1}^{5} c_j M_j\right)_{11} = 0$$
$$c_4 = \left(\sum_{j=1}^{5} c_j M_j\right)_{21} = 0$$
$$c_5 = \left(\sum_{j=1}^{5} c_j M_j\right)_{31} = 0$$

כלומר למשוואה הנ"ל פתרון טריביאלי בלבד ולכן $\{M_1, ..., M_5\}$ בת"ל ולפיכך בסיס.

ג. בניית בסיס בסעיף הקודם ישימה לכל n. נגדיר מטריצות M_j עבור $j = -(n-1), ..., n-1$ כמו בסעיף קודם. נניח $A \in W$ מטריצת טופליץ, אז על פי הבניה

$$A = \sum_{j=1}^{n-1} A_{j+1,1} M_{-j} + A_{1,1} M_0 + \sum_{j=1}^{n-1} A_{1,j+1} M_j,$$

ולכן
$$W \subseteq \operatorname{span}(\{M_j : -(n-1) \leq j \leq n-1\}).$$
בגלל שכל $M_j \in W$ מתקיים גם
$$W \supseteq \operatorname{span}(\{M_j : -(n-1) \leq j \leq n-1\}).$$
לכן הקבוצה $\{M_{-(n-1)}, ..., M_{n-1}\}$ פורשת את W. נבדוק את האי תלות שלה ולשם כך נפתור את המשווה
$$\sum_{j=-(n-1)}^{n-1} c_j M_j = 0.$$
לממ"ל פתרון טריביאלי $c_j = 0$ בלבד כי
$$c_k = \begin{cases} \left(\sum_{j=-(n-1)}^{n-1} c_j M_j\right)_{1,k+1}, & k = 1, ..., n-1, \\ \left(\sum_{j=-(n-1)}^{n-1} c_j M_j\right)_{1,1}, & k = 0, \\ \left(\sum_{j=-(n-1)}^{n-1} c_j M_j\right)_{k+1,1}, & k = -(n-1), ..., -1. \end{cases}$$
לכן הקבוצה שבנינו הינה בסיס. יש בה $2n-1$ וקטורים וזהו המימד של W.

שאלה VI.6.7

מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הינה הנקל אם ורק אם
$$A_{ij} = A_{i-1,j+1}, \quad \forall i \in \{2, ..., n\}, j \in \{1, ..., n-1\}.$$
מכאן ההוכחה דומה לסעיף הקודם. עבור מטריצות הנקל A, B גם המטריצה $A+B$ היא הנקל
$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = A_{i-1,j+1} + B_{i-1,j+1} = (A+B)_{i-1,j+1}$$
ולכן W סגורה תחת חיבור. עבור $c \in \mathbb{R}$
$$(cA)_{ij} = cA_{ij} = cA_{i-1,j+1} = (cA)_{i-1,j+1}$$
ולכן מטריצה cA הנקל, W סגורה תחת כפל בסקלר ולכן תת מרחב של $\mathbb{R}^{n\times n}$.

שאלה VI.6.8

הקבוצה $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_1-v_3\}$ אינה בסיס כי היא תלויה:

$$(v_2+v_3)+(v_1-v_3)-(v_1+v_2)=0.$$

שאלה VI.6.9

נסמן $u_i := \sum_{j=1}^{i} v_j$ ונבדוק האם הקבוצה $\{u_1,...,u_n\}$ הינה בסיס של V, כלומר פורשת ובת"ל. מתקיים

$$\begin{aligned}
&v_1 = u_1\\
&v_2 = u_2 - u_1\\
&v_3 = u_3 - u_2\\
&\vdots\\
&v_n = u_n - u_{n-1}
\end{aligned}$$

ולכן $\{u_1,...,u_n\}$ פורשת את V כי $\{v_1,...,v_n\}$ פורשת את V (כל צירוף לינארי של v_i־ים הוא גם צירוף לינארי של u_i־ים). נבדוק אי תלות ע"י פתרון של המשוואה:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i = 0.$$

לפי ההגדרה של u_i המשוואה הזו שקולה ל

$$(c_1+...+c_n)v_1+(c_2+...+c_n)v_2+...+c_n v_3=0.$$

הקבוצה $\{v_1,...,v_n\}$ בת"ל ולכן מתקיים

$$\begin{aligned}
&c_n+...+c_2+c_1=0\\
&c_n+...+c_2=0\\
&\vdots\\
&c_n=0
\end{aligned}$$

נציב לאחור ונקבל

$$c_n=c_{n-1}=...=c_1=0$$

לכן למשוואה הנ"ל פתרון טריביאלי בלד ולפיכך הקבוצה $\{u_1, ..., u_n\}$ הינה בסיס.

שאלה VI.5.10

נוכיח כי הצירוף הלינארי היחיד של הפונקציות הנתונות ששווה לאפס הוא הצירוף הטריביאלי. במילים אחרות, נראה כי למשוואה

$$c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x + c_4 \sin 2x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

יש רק פתרון טריביאלי $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. יהיה $(c_1, ..., c_4)$ פתרון של (1), אז הוא גם פתרון של המשוואה

$$c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x + c_4 \sin 2x = 0, \quad \forall x \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}. \tag{2}$$

המשוואה הזו שקולה לממ"ל הומוגנית ריבועית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0$$

כאשר כל משוואה בה מתקבלת ע"י ההצבה של אחד הערכים בקבוצה $\left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$. דטרמיננטה של המטריצת המקדמים שווה ל -2 (בדקו!) ולכן למערכת הומוגנית רק פתרון טריביאלי. בהתאם למשוואה (2) יש רק פתרון טריביאלי ולכן גם למשוואה (1). מכאן נובע כי הפונקציות בת"ל.

שאלה VI.5.11

פתרון ראשון: נבדוק האם למשוואה

$$\sum_{j=0}^{n} c_j e^{jx} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

יש רק פתרון טריביאלי $c_0 = ... = c_n = 0$. נגדיר משתנה חדש $y = e^x$ אז נקבל משוואה שקולה

$$\sum_{j=0}^{n} c_j y^j = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+.$$

הביטוי בצד ימין הוא פולינום מדרגה n ולפי המשוואה יש לו אינסוף שורשים. לפי המשפט היסודי של אלגברה, הפולינום היחיד כזה הוא פולינום האפס, כלומר $c_j = 0$.

פתרון שני: נניח $c := (c_0, c_1, ..., c_n)$ פתרון למשוואה (3). נגזור את המשוואה k פעמים ונקבל

$$\sum_{j=1}^{n} c_j j^k e^{jx} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

בפרט השיוויון מתקיים עבור $x = 0$, כלומר $\sum_{j=1}^{n} c_j j^k = 0$. עבור $k \in \{0, ..., n\}$ נקבל ממ"ל הומוגנית $Ac = 0$ עם מטריצת מקדמים

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 0 & 1 & 2^2 & 3^2 & ... & n^2 \\ \vdots & & & & ... & \vdots \\ 0 & 1 & 2^n & 3^n & ... & n^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$$

כאשר כל שורה מתקבלת עבור k מתאים (שורה ראשונה היא המשוואה (3), שניה עבור מתקבלת עבור $k = 1$, וכו') נותר להראות כי דטרמיננטה של המטריצה הזו לא מתאפסת. פירוק לפלס נותן:

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & ... & n^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 2^n & 3^n & ... & n^n \end{vmatrix} = n! \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & ... & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

קיבלנו דטרמיננטה של מטריצה ונדרמונד משוחלפת בה כל הנקודות שונות. ראינו בתרגילים קודמים כי מטריצה הזו הפיכה ולכן $|A| \neq 0$.