פונקציה יוצרת מומנטים:

יהי X מ"מ $\mathbb{E}(e^{\delta\cdot|X|})<\infty$ עבור $\delta>0$ כלשהו. הפונקציה יוצרת מומנטים של X היא

$$M_X(t)=\mathbb{E}(e^{tX}) \qquad |t|<\delta$$

מומנט P של X $\quad \mathbb{E}_X X^P \quad P\in\mathbb{N}$ (מס טבעי)

למה 1.5

נניח ש- $M_X(t)$ מוגדרת בסביבה פתוחה סביב הראשית, אזי כל המומנטים של X סופיים, ומתקיים:

$$\mathbb{E}_X(X^P)=\frac{d^P}{dt^P}M_X(t)\Big|_{t=0} \qquad \forall P\in\mathbb{N}$$

$$\boxed{M_X(t)=\mathbb{E}(e^{tX})}$$

הוכחה:

תהי $\delta>0$ כך ש- $M_X(t)$ מוגדרת באינטרוול $(-t,t)$ ויהי P מס טבעי כלשהו.

לכל $t>0$ נסתכל על:

טור טיילור:

$$e^{t|x|}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(t|x|)^j \geq \underbrace{\frac{1}{P!}(t|x|)^P}_{\text{האיבר ה-}P} = \frac{1}{P!}t^P|x|^P$$

השוויון הראשון הוא פיתוח טור טיילור, והאי שוויון הוא פשוט לקחת איבר 1 מתוך הסכום.

נבודד את $|x|^P$:

$$|x|^P\leq P!\,t^{-P}e^{t|x|}$$

$$\mathbb{E}_X(|X|^P)\leq\mathbb{E}_X(P!\,t^{-P}e^{t|X|})=P!\,t^{-P}\,\mathbb{E}_X(e^{t|X|})$$

מכיוון שנתון ש- $\mathbb{E}_X(e^{t|X|})<\infty$ נקבל כי גם $\mathbb{E}_X(|X|^P)<\infty$

מסקנת ביניים: אם הפונקציה יוצרת המומנטים קיימת מוגדרת וסופית, אזי כל המומנטים מוגדרים וסופיים

עתה נגזור P פעמים לפי t

ואז $M_X(t)$ בנקודה $t=0$

$$\frac{d^P}{dt^P}M_X(t)\Big|_{t=0}=\frac{d^P}{dt^P}\mathbb{E}(e^{t\cdot X})\Big|_{t=0}\underset{*}{=}\mathbb{E}\left(\frac{d^P}{dt^P}e^{tX}\Big|_{t=0}\right)=\mathbb{E}\left(X^Pe^{tX}\Big|_{t=0}\right)=\mathbb{E}[X^P]$$

* נחליף בין תוחלת לנגזרת בהנחה שניתן...

דוגמא 1.6

התפלגות בינומית

$X\sim Bin(n,p)$ חסום ולכן $\mathbb{E}(e^{t|X|})<\infty$ לכל $t\in\mathbb{R}$

$$M_X(t)=\mathbb{E}(e^{tX})=\sum_{j=0}^{n}e^{tj}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(e^tp)^j(1-p)^{n-j}=\underbrace{\left((e^tp)+(1-p)\right)^n}_{\text{נוסחאת הבינום}}$$

$$\mathbb{E}_X(X)=\frac{d}{dt}M_X(t)=n(e^tp+1-p)^{n-1}\cdot pe^t\Big|_{t=0}$$

$$=n(p+1-p)^{n-1}\cdot p=np$$

$$\mathbb{E}_X(X)=\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)=n\cdot(n-1)(e^tp+1-p)^{n-2}pe^t\cdot pe^t+n(e^tp+1-p)^{n-1}\cdot pe^t$$

$$=n(n-1)(p+1-p)^{n-2}\cdot p^2+n(p+1-p)^{n-1}\cdot p$$

$$=(np)^2+np(1-p)$$

$$Var(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=np(1-p)$$

משפט 1.7 (ללא הוכחה)

יהיו X,Y מ"מ עם פונקציות יוצרת מומנטים $M_X(t)$ ו-$M_Y(t)$ בהתאמה.

אז X,Y שווי התפלגות, כלומר $F_X(x)=F_Y(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$, סימון, $X\overset{d}{=}Y$ אם ורק אם

קיימת סביבה סביב ה-0, $\delta>0$ כך ש: $M_X(t)=M_Y(t)$ לכל $t\in(-\delta,\delta)$

דוגמא 1.8

נסתכל על $X\sim U(0,1)$ ונגדיר עליו $Y=-\log(X)$. נחשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של Y.

$$M_Y(t)=\mathbb{E}_Y(e^{tY})=\mathbb{E}_X(e^{-t\log(X)})=\mathbb{E}_X(X^{-t})=\int_0^1X^{-t}\,dx=\frac{X^{1-t}}{1-t}\Big|_0^1=\frac{1}{1-t}$$

$M_Y(t)=\frac{1}{1-t}$ עבור $t<1$ כמובן

נשים ♡ כי $M_Y(t) = \frac{1}{1-t}$ היא פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי $Z \sim Exp(1)$

$$M_Z(t) = \mathbb{E}_Z(e^{tZ}) = \int_0^\infty e^{tz}\cdot e^{-z}\,dz = \int_0^\infty e^{-z(1-t)} = \frac{1}{1-t}\underbrace{\int_0^\infty (1-t)e^{-z(1-t)}\,dz}_{=1} = \frac{1}{1-t}$$

מסקנה: מתוך מצגת 1.7 התפלגות $Y=-\log(X)$ עבור $X\sim U(0,1)$ היא מעריכית עם $\lambda=1$ $Y\sim Exp(1)$

פונקציה אופיינית:

$i=\sqrt{-1}$ היחידה המדומה

נוסחת אוילר $e^{itx} = \cos(x) + \sin(x)$

הגדרה 1.9

הפונק' האופיינית של מ"מ X היא: $\Phi_X(t) := \mathbb{E}(e^{itX})$ $t\in\mathbb{R}$

והפונק' האופיינית מוגדרת תמיד כי $e^{|itx|} = 1 < \infty$ לכל $t\in\mathbb{R}$

למעשה היא חופפת לפונק' יוצרת המומנטים כאשר זו האחרונה מוגדרת ומורחבת לערך המדומה.

פונקציה יוצרת הסתברויות

קרובת משפחה של פונק' יוצרת מומנטים. נוחה לשימוש עבור משתנים בדידים לגמרי. למשל משתנים שמקבלים ערכים טבעיים כמו בינומי, פואסון, בינומי שלילי וכדומה.

הגדרה 1.10

פונק' יוצרת הסתברויות מוגדרת $\pi_X(t)=\mathbb{E}(t^X)$ עבור כל ערכי t בהם התוחלת מוגדרת וסופית.

הקשר בין $M_X(t)$ ו- $\Pi_X(t)$:

$$\Pi_X(t) = M_X(\log(t))$$

$$M_X(s) = \Pi_X(e^s)$$

על פי הניחות אפשר להשתמש בפונקציית יוצרת הסתברויות עבור משתנים בדידים על מנת לחשב מומנטים.

$X \sim Geo(p)$

$$\Pi_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)\, s^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} p \cdot s^n = p \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n \cdot s^n = p \sum_{n=0}^{\infty} (s(1-p))^n$$

$$\underset{\text{טור גיאומטרי}}{=} p \frac{1}{s(1-p)}$$

1.4 אי שוויונות

1.4.1 אי שוויונות ריכוזיים

אי שוויוני ריכוז מספקים חסמים על ההסתברות שמשתנה מקרי יסטה מערכו הצפוי (או ערך אחר) במידה מסויימת.

במילים אחרות - אי שוויונות ריכוז מאפשרים לנו לכמת עד כמה משתנה מקרי הוא "מרוכז" סביב ערך מסויים. אי שוויונות אלו הם כלים חשובים מאוד בתורת ההסתברות, סטטיסטיקה ומדע הנתונים. (בפרט באלגוריתמים הסתברותיים ולמידת מכונה) ומאפשרים להוכיח תוצאות על התנהגות משתנים מקריים ופונקציות של משתנים מקריים, ולנתח את ההסתברות לאירועים חריגים.

דוגמאות לאי שוויונים -

אי שוויון מרקוב

אי שוויון צ'בישב

חסם צ'רנוף

אי שוויון הופדינג

אי שוויון אזומה הופדינג

משפט 1.11 אי שוויון מרקוב

עבור מ"מ $X \ge 0$:

$$P(X \ge x) \le \frac{\mathbb{E}[X]}{x} \quad \forall x > 0$$

הוכחה:

יהי $X \ge 0$ משתנה מקרי, לכל $x > 0$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(I_{\{X \ge x\}} \cdot X\right) + \mathbb{E}\left(I_{\{X < x\}} \cdot X\right) \ge \mathbb{E}\left[I_{\{X \ge x\}} \cdot X\right] \ge \mathbb{E}\left[I_{\{X \ge x\}}\, x\right] = x\,\mathbb{E}\left[I_{\{X \ge x\}}\right]$$

$$= x\,\mathbb{P}(X \ge x)$$

$$\mathbb{E}(X) \ge x\,\mathbb{P}(X \ge x)$$

$$P(X \ge x) \le \frac{\mathbb{E}(X)}{x}$$

תזכורת של אינדיקטור:

$$I_{\{X \in A\}} = \begin{cases} 1 & X \in A \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\left(I_{\{X \in A\}}\right) = 1 \cdot P(X \in A) + 0 \cdot P(X \notin A)$$