הסתברות לסטטיסטיקאים 52534 תשפ"ה

תרגיל 2

1. נתון המשתנה המקרי X עם פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה (מתרגיל 1 שאלה 1):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & -1 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

חשבו את התוחלת והשונות של X.

2. חשבו את התוחלת והשונות של שלושת המשתנים המקריים: Y, Z ו-V שחישבתם בתרגיל 1 שאלה 2.

3. **התפלגות ביתא**
התפלגות $B(\alpha,\beta)$ עם הפרמטרים $\alpha,\beta \epsilon \mathbb{R}_+$ באינטרוול $[0,1]$ היא התפלגות רציפה לגמרי בעלת הצפיפות:

$$(*) \qquad f(x:\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \quad , \qquad x \,\epsilon\, (0,1)$$

כאשר $B(\alpha,\beta)$ היא פונקציית ביתא

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

הערה: פונקציית גמא מוגדרת על ידי : $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$

i. הראו כי עבור $\alpha = \beta = 1$ התפלגות ביתא זהה להתפלגות אחידה בקטע [0,1],

ii. מצאו נוסחאות לשני המומנטים ולשונות של התפלגות ביתא

iii. הראו כי אם $X \sim B(\alpha,\beta)$ אז $Y = 1 - X \sim B(\beta,\alpha)$

4. הוכיחו כי אם לכל אחד מהמשתנים המקריים X ו- Y יש מומנט שני סופי, אזי גם לסכום $X+Y$ יש מומנט שני סופי.
רמז: הוכיחו והשתמשו באי שוויון $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$

5. **התפלגות נורמלית**

i. מצאו את הפונקציה יוצרת מומנטים של התפלגות נורמלית $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ עבור $\mu \in \mathbb{R}$ ו-$\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$.

ii. הראו כי ההתפלגות הנורמלית יציבה תחת טרנספורמציות לינאריות, כלומר אם X מתפלג נורמלית אז גם $Y = aX + b$ מתפלג נורמלית.