# הסתברות לסטטיסטיקאים שיעור 2 – פונקציה יוצרת מומנטים ולמה 1.5

**פרק ב – משתנים מקריים**

**סעיף 1.3: פונקציה יוצרת מומנטים**

פונקציה יוצרת מומנטים היא כלי בסיסי ושימושי בהסתברות.

**<u>הגדרה:</u>**

יהי X משתנה מקרי כך ש- $\mathbb{E}\left(e^{\delta|X|}\right) < \infty$ עבור $\delta > 0$ כלשהי. הפונקציה יוצרת המומנטים של X היא

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tx}) \qquad |t| < \delta$$

כאשר הפונקציה יוצרת המומנטים של משתנה מקרי X מוגדרת, כל המומנטים שלו יכולים להיות מחושבים על ידי הפונקציה, כפי ששמה מרמז.

התנאי בתחילת ההגדרה נועד לוודא שהתוחלת בהגדרת הפונקציה יוצרת מומנטים תהיה מוגדרת היטב וסופית.

<u>למה 1.5</u>

נניח כי $M_X(t)$ מוגדרת בסביבה פתוחה סביב הראשית. אזי כל המומנטים של X הם סופיים ומתקיים:

$$\mathbb{E}_X\left(X^P\right) = \frac{d^p}{dt^p} M_X(t)\Big|_{t=0} \qquad \forall P \in \mathbb{N}$$

כלומר, לכל מספר טבעי $P = 1,2,\ldots.$, המומנט ה-P של משתנה מקרי X בעל פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t)$ מתקבל על ידי גזירה של הפונקציה P פעמים והצבת הערך $t = 0$ בנגזרת המתקבלת.

הוכחה:

תהי $\delta > 0$ כך ש- $M_X(t)$ מוגדרת באינטרוול $(-\delta, \delta)$. יהי P מספר טבעי כלשהו.

לכל $t > 0$ מתקיים ש:

$$e^{t|x|} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(t|x|)^j \geq \frac{1}{P!}(t|x|)^P = \frac{1}{P!} t^P |x|^P$$

השוויון הראשון הוא פיתוח טיילור, והאי שוויון נובע מכך שאנו בוחרים איבר אחד $j = P$ מתוך כלל האיברים החיובים. לאחר העברת אגפים מקבל כי

$$|x|^P \leq P!\, t^{-P} e^{t|x|}$$

עתה, ניקח תוחלת משני צידי האי שוויון ונוציא קבועים מחוץ לתוחלת,

$$\mathbb{E}_X\left(|x|^P\right) \leq \mathbb{E}_X\left( P!\ t^{-P} e^{t|x|}\right) = P!\ t^{-P}\mathbb{E}_X\left(e^{t|x|}\right)$$

מכיוון ש- $M_X(t)$ מוגדרת באינטרוול $(-\delta,\delta)$, קיים $t>0$ עבורו $\mathbb{E}_X\left(e^{t|x|}\right) < \infty$ , וקיבלנו לכן כי $\mathbb{E}_X\left(|x|^P\right) < \infty$.

זה נכון לכל $P$, כלומר כל המומנטים של $X$ קיימים וסופיים.

עתה, נגזור $P$ פעמים את הפונקציה יוצרת המומנטים לפי $t$ , ועל ידי שינוי הסדר בין התחלת לנגזרת נקבל כי

$$\frac{d^p}{dt^p} M_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{d^p}{dt^p}\mathbb{E}(e^{tx})\Big|_{t=0} = \mathbb{E}\left(\frac{d^p}{dt^p}e^{tx}\Big|_{t=0}\right) = \mathbb{E}\left(X^P e^{tx}\big|_{t=0}\right) = \mathbb{E}\left(X^P\right)$$

כנדרש.

הערה: בשוויון השני מימין החלפנו את הסדר בין התוחלת לגזירה. אנו יכולים לעשות זאת מכיוון שהתוחלת והמומנטים קיימים וסופיים.