הסתברות לסטטיסטיקאים שיעור 2 – הגדרת תוחלת ודוגמת התפלגות קושי

פרק ב – משתנים מקריים

סעיף 1.2: תוחלת

עבור משתנה מקרי המוגדר על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ התוחלת מוגדרת להיות אינטגרל מעל מרחב המדגם Ω:

$$\mathbb{E}(X)=\int_{\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega)d(\omega).$$

מכיוון וקבוצת מרחב המדגם Ω יכולה להיות מאד אבסטרקטית אי אפשר להשתמש במקרה הכללי באינטגרל רייזמן הרגיל. H. Lebesque הציע פתרון קונסטרוקטיבי לבעיה, אך אנו לא נעסוק בפתרון זה (מעבר למטרות הקורס). במקום זה אנו נשתמש בהגדרה הכללית שלנו למשתנים מקריים (1.1) עבור הגדרה כללית של תוחלת של משתנה מקרי.

<u>**הגדרה**</u>: **התוחלת של משתנה מקרי** X נתונה על ידי:

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{x\in\mathfrak{X}} x\cdot P_X(x)+\int_{\mathbb{R}} x\cdot f_X(x)dx:=\int_{\mathbb{R}} x\cdot dF_X(x) \qquad (1.2)$$

כאשר $\mathfrak{X}=\{x_1,x_2,\dots\}$ היא קבוצת האטומים (נקודות הקפיצה) של פונקציה ההתפלגות המצטברת של המשתנה המקרי X. האינטגרל האחרון הוא הגדרת סימון.

נהוג להסתכל על תוחלת כעל **מספר מוכלל** אשר יכול לקבל גם ערכים אינסופיים.

<u>תוחלת של משתנה מקרי אי שלילי</u>: נניח כי $X(\omega)\geq 0$ לכל $\omega\in\Omega$. במקרה זה הסכום והאינטגרל ב-(1.2) יכולים להתכנס בהחלט או להיות שווים לאינסוף. במקרה זה התוחלת מוגדרת היטב ויכולה להיות סופית או אינסופית.

מה קורה במקרה הכללי? כל משתנה אפשר לפרק לחלק חיובי וחלק שלילי באופן הבא:

$$X=X^+-X^-, \qquad X^+=X\cdot I(X\geq 0), \qquad X^-=-X\cdot I(X<0).$$

X^+ נקרא החלק החיובי של X, ו-X^- החלק השלילי של X. שני החלקים, החיובי והשלילי, הם אי שליליים, כלומר לכל $\omega\in\Omega$ $X^+,X^-\geq 0$.

עתה נסתכל על שלושה מקרים:

<u>מקרה ראשון</u>: אם $\mathbb{E}(X^+)\leq\infty$ וגם $\mathbb{E}(X^-)\leq\infty$ אז $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(X^+)-\mathbb{E}(X^-)$ מוגדרת היטב וסופית. במילים אחרות, במצב זה $\mathbb{E}(X)$ מוגדרת היטב ו- $\mathbb{E}(|X|)=\mathbb{E}(X^+)+\mathbb{E}(X^-)<\infty$

<u>מקרה שני</u>: אם $\mathbb{E}(X^+)$ או $\mathbb{E}(X^-)$ אינסופיות אך לא שתיהן יחד, אז $\mathbb{E}(X)$ מוגדרת היטב ואינסופית עם הסימן המתאים.

<u>מקרה שלישי</u>: אם $\mathbb{E}(X^+)$ וגם $\mathbb{E}(X^-)$ אינסופיות אז $\mathbb{E}(X)$ לא מוגדרת.

כאשר התוחלת מוגדרת יש לה מספר תכונות טבעיות ושימושיות. למשל, תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי שווה לפונקציה של תוחלת המשתנה המקרי. כלומר, עבור פונקציה כלשהי $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} g(x) \cdot P_X(x) + \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_X(x)dx := \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot dF_X(x)$$

<u>דוגמא 1.3:</u> התפלגות קושי (*Cauchy*)

יהי X משתנה מקרי שצפיפותו צפיפות קושי (סטנדרטית):

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

<u>טענה:</u> התוחלת של X אינה מוגדרת.

הוכחה:

נראה כי $\mathbb{E}(X^+)$ ו- $\mathbb{E}(X^-)$ הן אין סופיות. תחילה נראה כי

$$\mathbb{E}(X^+) = \int_0^\infty x\frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1}dx = \infty$$

די שנראה כי $I = \int_0^\infty x\frac{1}{x^2+1}dx = \infty$. יהי $u = x^2+1$. כאשר נגזור נקבל $du = 2x\,dx$ או $\frac{1}{2}du = x\,dx$.

נציב ב- I ונקבל

$$I=\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}x\,dx=\int_1^\infty \frac{1}{u}\,\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{u}\,du$$

נזכור שכאשר $x = 0$ אז $u = 1$. עתה נותר להוכיח כי $\int_1^\infty \frac{1}{u}\,du = \infty$. אולם תוצאה זו נובעת מכך ש:

$$\int_1^\infty \frac{1}{u}du = \ lan(u)_1^\infty = \ \infty\text{-}0 = \infty$$

נשים לב כי מכיון ש- $f_X(x) = f_X(\text{-}x)$, $\mathbb{E}(X^-)$ שווה ל- $\mathbb{E}(X^+)$. קיבלנו אפוא כי שתי התוחלות אינסופיות ולכן התוחלת של המשתנה המקרי X אינה מוגדרת. כנדרש.

לעומת זאת: <u>טענה:</u> התוחלת של $|X|$ מוגדרת היטב.

הוכחה:

נשים לב כי $|X|^- = -|X| \cdot I(|X| < 0)$ אולם ערך מוחלט אינו מקבל ערכים שליליים ולכן $|X|^-$ שווה זהותית ל-0 ותוחלתו סופית ושווה ל- 0. לכן אנו <u>אין</u> אנו נמצאים במקרה השלישי והתוחלת מוגדרת היטב. כנדרש.

עתה נסתכל על המשתנה $Y = \mathrm{sign}(X)\sqrt{|X|}$.

Y הוא משתנה מקרי המקבל ערכים אי שליליים כאשר X אי שלילי, וערכים שליליים כאשר X שלילי.

<u>טענה:</u> התוחלת של Y מוגדרת היטב וסופית.

הוכחה:

תחילה נסתכל על

$$\mathbb{E}(Y^{+}) = \int_{0}^{\infty} \sqrt{X}\frac{1}{\pi}\frac{1}{x^{2}+1}\,dx$$

על מנת להוכיח כי האינטגרל מתכנס עלינו להראות כי האינטגרל מתכנס כאשר $x \to 0$ וגם כאשר $x \to \infty$.

במקרה הראשון, כאשר $x \to 0$, עבור ערכים קטנים מאד של x קיים $\frac{1}{x^2+1} \approx 1$, ולכן $\int_0^1 \sqrt{x}\frac{1}{x^2+1}dx$ מתנהג כמו $\int_0^1 \sqrt{x}\ dx$. מכיוון ו- $\int_0^1 \sqrt{x}\ dx$ מתכנס נקבל גם כי $\int_0^1 \sqrt{x}\frac{1}{x^2+1}dx$.

במקרה השני, כאשר $x \to \infty$, עבור ערכים גדולים מאד של x קיים $\frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \approx x^{-\frac{3}{2}}$, ולכן $\int_1^\infty \sqrt{x}\frac{1}{x^2+1}dx$ מתנהג כמו $\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}dx$. מכיוון ש- $\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}dx$ מתכנס נקבל כי גם $\int_1^\infty \sqrt{x}\frac{1}{x^2+1}dx$.

בדרך דומה מקבלים כי $\mathbb{E}(Y^{-})$ מתכנס. אנו נמצאים אם כן במקרה הראשון בו גם התוחלת של החלק החיובי סופית וגם התוחלת של החלק השלישי סופית, ולכן התוחלת של Y מוגדרת היטב וסופית.

מכיוון שהתוחלת היא אנטי-סימטרית , כלומר $Y(-x) = -Y(x)$ ו- $f_X(x) = f_X(-x)$ נקבל כי $\mathbb{E}(Y) = 0$, ובפרט היא סופית. כנדרש.