1.4.2 תוחלת וקמירות (*Expectation and convexity*)

<u>הגדרה 1.12</u>:

פונקציה $g: I \to \mathbb{R}$ היא <u>קמורה</u> על האינטרוול $I \subseteq \mathbb{R}$ אם לכל $x, y \in I$,

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \quad , \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

אם אי השוויון הפוך אז הפונקציה נקראת <u>קעורה</u>. ברור כי אם $g(\cdot)$ קמורה אז $-g(\cdot)$ קעורה, ולהיפך. ולכן כל תכונה של פונקציה קמורה מורחבת לפונקציה קעורה עם ההתאמות הנדרשות.

קמירות היא תכונה שימושית מאד.

<u>למה 1.13</u>:

פונקציה $g(\cdot)$ היא קמורה אם ורק אם קיימת פונקציה $\nu(x)$, כך ש

$$g(y) - g(x) \geq \nu(x)(y-x) \ , \ \forall\, x, y \in I$$

<u>הוכחה</u>:

נניח כי האי שוויון מתקיים, אז לכל $\forall\, x, y, z \in I$

$$g(y) - g(x) \geq \nu(x)(y-x)$$

$$g(z) - g(x) \geq \nu(x)(z-x)$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב-λ ואת השנייה ב- $(1-\lambda)$ ונחבר את שתי המשוואות, נקבל כי

$$\lambda g(y) + (1-\lambda)g(z) - g(x) \geq \nu(x)(\lambda y + (1-\lambda)z - x)$$

והקמירות מתקבלת אם ניקח $x \coloneqq \lambda y + (1-\lambda)z$. במצב זה אגף ימין של האי שוויון ואגף שמאל נראים כך

$$\lambda g(y) + (1-\lambda)g(z) - g(\lambda y + (1-\lambda)z) \geq 0$$

נעביר אגף ונקבל את אי השוויון.

מצד שני, אם $g(\cdot)$ קמורה, אז לכל $\forall \lambda \in (0,1)$, מהגדרת הקמירות נקבל

$$\frac{g(x+\lambda(y-x)) - g(x)}{\lambda} = \frac{g((1-\lambda)x + \lambda y) - g(x)}{\lambda} \leq \frac{(1-\lambda)g(x) + \lambda g(y) - g(x)}{\lambda} = g(y) - g(x).$$

עתה אם $g(\cdot)$ גזירה, ניתן ל-λ לשאוף ל-0 ונקבל

$$g(y) - g(x) \geq g'(x)(x-y)$$

כלומר קיבלנו את אהשוויון הנדרש עם $\nu(x) := g'(x)$.*

* כזכור, נגזרת של פונקציה בנקודה x מוגדרת $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

גיאומטרית אי השוויון אומר כי הגרף של פונקציה קמורה שוכב מעל המשיק לגרף בכל נקודה.

פונקציות קמורות לא בהכרח גזירות, אבל אפשר להראות יש להן נגזרת מימין ונגזרת משמאל . לכן הטענה נותרת תקפה אם ניקח למשל, נגזרת מימין כאשר ניתן ל-λ לרדת ל-0 מימין - $\lambda \searrow 0$.

<u>דוגמא 1.14</u>: נניח $g(\cdot)$ גזירה פעמיים, אזי

$$g(y)-g(x)=\int_x^y g'(u)du=\int_x^y g'(x)du+\int_x^y \big(g'(u)-g'(x)\big)du=$$
$$g'(x)(y-x)+\int_x^y \big(g'(u)-g'(x)\big)du=$$
$$g'(x)(y-x)+\int_x^y\int_x^u g''(\mathrm{v})\,d\mathrm{v}du$$

לפי למה 1.13, $g(\cdot)$ קמורה אם ורק אם הביטוי הימני הוא חיובי לכל x ו-y , מה שאומר כי $g''(\mathrm{v})\geq 0$ לכל $\mathrm{v}\in I$.

זה נותן דרך נוחה להוכיח קמירות. למשל $p\geq 2$ $g(x)=x^p$, $g(x)=e^x$ ועוד.