תרגילים שבועיים - מומלץ לפתור ולהגיש   הפסקה ב-18:15 עד 18:30
בוחן אמצע - אינו מגן

פרק א' - מרחב הסתברות

הגדרה: מרחב הסתברות הוא השלשה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Ω - מרחב המדגם

$\mathcal{F}$ - אוסף של תת קבוצות של Ω

$\mathbb{P}$ - פונקציה מאוסף תת הקבוצות $\mathcal{F}$ לקטע $[0,1]$

Ω: קבוצה שנקראת מרחב המדגם והנקודות בה הן כל התוצאות האפשריות של ניסוי כלשהו. כאשר מבצעים את הניסוי רק תוצאה אחת מתקבלת.

תת הקבוצות של Ω נקראות מאורעות (events). מאורע A מתקיים אם ורק אם התוצאה שהתקבלה ω שייכת ל-A. $\omega \in A$ המאורע A קרה.

$A \cup B$ מתקיים אם A מתקיים **או** B מתקיים או שניהם

$A \cap B$ מתקיים אם A מתקיים **וגם** B מתקיים

A^c מתקיים אם A **לא** מתקיים

דוגמא:
מטילים קוביה
מרחב המדגם $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

2^6 גודל $\mathcal{F}$ כאשר לוקחים את כל תתי הקבוצות של Ω

f : אוסף של תת קבוצות/מאורעות של Ω

הגדרה ברורה: לוקחת את אוסף כל תת הקבוצות של Ω. מספר תת הקבוצות

הוא 2^{Ω} (כלומר Ω = הגודל של Ω במקרה הנ"ל)

$\omega \in \Omega$ $\{\omega\}$ - מאורע פשוט

P : פונקציית הסתברות המוגדרת על f ומקבלת ערכים בקטע $[0,1]$. כלומר P

היא מ-f לקטע $[0,1]$ $\quad P: f \longrightarrow [0,1]$

מאורע – אוסף של תוצאות ניסוי: לדוגמה גודל של פרח, כדור לבן וכו'.

(1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ נרמול

(2) $\mathbb{P}$ מקבלת ערכים גדולים יותר עבור קבוצות גדולות יותר. כלומר:

אם $A \subseteq B$ אז $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$

דרישה 2 מתקיימת אם מניחים כי $\mathbb{P}$ היא <u>אדיטיבית</u>. כלומר לכל A,B כך ש- $A \cap B = \emptyset$

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = A \cup B$$

האקסיומות של קולמוגורוב:

1) $\mathbb{P}(A) \geq 0$ ההסתברות תמיד אי שלילית

2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ הסתברות המאורע הוודאי היא 1

3) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \leftarrow \forall_{i \neq j}\ A_i \cap A_j = \emptyset$

$$\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset f$$

המשך הדוגמא:

נגדיר את $\mathbb{P}$

יהיו $P_1, P_2, \ldots, P_6$ אם אי-שליליים כך ש- $\sum_{i=1}^{6} P_i = 1$

ונסמן $\mathbb{P}(\{i\}) := P_i$

לכל מאורע $A \in \mathcal{F}$ $P(A) = \sum_{i \in A} P(\{i\})$ מתוך הנחת האדטיביות (אקסיומה 3)

לדוגמא: $\mathbb{P}(\{1,2,5\}) = \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{5\})$

כשהקוביה תקינה וההסתברות היא $\frac{1}{6}$ ההתפלגות אחידה U

העשרה:

תורת הקבוצות הקלאסית (גאורג קנטור)

גודל של אינסוף נקרא <u>עוצמה</u>

קבוצה אינסופית בת מניה: טבעיים, שלמים, רציונליים $\aleph_0$

קבוצה אינסופית רצף: $[0,1]$ $\aleph$ (c)

$$\aleph > \aleph_0$$

$$2^{\aleph_0} = \aleph$$

דוגמא: נניח כי אנו דוגמים נקודה מהאינטרוול $[0,1]$ באורח אקראי.

$\Omega = [0,1]$ ונניח כי $\{w\} \in \mathcal{F}$ $\forall w \in \Omega$

נזכור כי פונק ההסתברות היא אדטיבית ומכיוון ש- $\Omega = \dot{\bigcup}_{w \in [0,1]} \{w\}$ הרי

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\Big(\dot{\bigcup}_{w \in [0,1]} \{w\}\Big) \stackrel{?}{=} \sum_{w \in [0,1]} \mathbb{P}(\{w\})$$

אנחנו לא יודעים

סתם...
יש תשובה בתורת ההסתברות

משתנים מקריים: סקלריים/ חד מימדיים

1. משתנים מקריים סקלריים/ חד מימדיים

1.1 בחלק זה נעסוק בכמ"מ ממשי המוגדר על מרחב הסתברות נתון $(\Omega, f, \mathbb{P})$. כ"א פונקציה מ-Ω לישר הממשי: $\mathbb{R}$: $X: \Omega \to \mathbb{R}$ (תחום, טווח) $X = X(\omega)$

הטווח בפועל של X יכול להיות תת קבוצה של $\mathbb{R}$ → תומך

התפלגות ההסתברות של מ"מ כלשהו נקבעת ע"י פונקציית ההתפלגות המצטברת

הגדרה 1.1:

עבור משתנה מקרי X הפונקציה

$$F_X(x) = \mathbb{P}(\{\omega\} \in \Omega : X(\omega) \le x)$$

נקראת פונק' ההתפלגות המצטברת של X (c.d.f)

לרוב לא נכתוב $X(\omega)$ אלא רק X

תכונות $F_X(x)$:

(1) מונוטונית לא יורדת

$y \ge x \Leftarrow F_X(y) \ge F_X(x)$

(2) נורמליזציה

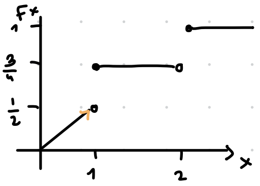
$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \quad \text{-ו} \quad \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

(3) רציפות מימין

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x) \quad \text{לכל } x \in \mathbb{R}$$

מסתבר שאם F מקיימת את שלושת התכונות אז אפשר לבנות מרחב הסתברות עליו יוגדר משתנה מקרי עם התפלגות מצטברת F.

F מונוטונית לא יורדת לכן F יכולה לעלות או בצורה רציפה או בקפיצות



(א) אם F_X קופצת בנק' X אז

פונקציית הסתברות של המשתנים $P(X=x) = F_X(x) - F_X(x^-) > 0$

נק' אוליה
הגעה משמאל

$$F_X(x^-) := \lim_{\varepsilon \to 0} F(x-\varepsilon)$$

מניחים ש- F מונוטונית לא יורדת וחסומה קיימים לכל היותר מספר בן מנייה של נק' אי רציפות -
נק' קפיצה נסמן נקודות אלו ב- $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$

רוב הפונקציות ההתפלגות המצטברות המעניינות אותנו ניתנות לפיצול לשני חלקים - בדיד ורציף.
כלומר:

$$\boxed{(1.1) \quad F_X(x) = \underbrace{\sum_{x_i \le x} P_X(x_i)}_{\text{חלק בדיד}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)\,du}_{\text{חלק רציף}} \qquad x \in \mathbb{R}}$$

משתנה כלליים
גם רציף וגם בדיד

משתנה לגמרי רציף: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)\,du$

משתנה לגמרי בדיד: $F_X(x) = \sum_{x_i \le x} P_X(x_i)$