תזכורת:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(\{w \in \Omega : X(w) \le x\}) \qquad x \in \mathbb{R}$$

יש פה אטום (קפיצה - נק' בדידה)

$$P(X=x) = F_X(x) - F_X(x^-) > 0$$

קיימת רציפות

$$P(X=x) = F_X(x) - F_X(x^-) = 0$$

תכונות F_X

(i) מונוטונית

(ii) נירמליזציה $-\infty \to 0$ $\quad +\infty \to 1$

(iii) רציפות מימין

- אנו נניח שאם F_X רציפה ב-x אז היא גזירה שם.
- מכיוון ש- F_X מונוטונית לא יורדת וחסומה אז קיימים לכל היותר מס' בן מנה של אטומים (נק' קפיצה) $\mathcal{X} = [x_1, x_2 \dots]$

רבות מפונקציות ההתפלגות המצטברת המעניינות אותנו בקורס ניתנות לפיצול ל-2 חלקים:

$$F_X(x) = \sum_{x_j \in \mathcal{X}} P_X(x_j) + \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du \tag{1.1}$$

כאשר:

1) $P_X(x) : F_X(x) - F_X(x^-) \ge 0$
$x \in \mathcal{X}$

2) $f(x) \ge 0$ היא פונקציית הצפיפות p.d.f

3) $\sum_j P_X(x_j) + \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\, dx = 1$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$$ כלומר $f_X(x)$ היא הנגזרת של $F_X(x)$ בכל הנקודות בהן היא גזירה

(בשאר הנק', לכל היותר מספר בן מניה, אפשר להשלים בערך כלשהו)

משתנה מקרי בדיד (לגמרי, purely)

משתנה מקרי יקרא בדיד אם פונקציית ההתפלגות המצטברת שלו היא קבועה למקוטעין, כלומר עולה רק בנקודות קפיצות.

החלק הרציף: $f_X(x)=0$

החלק הבדיד: $\sum_{x\in X} P_X(x)=1$

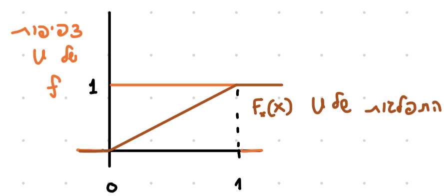
משתנה מקרי רציף (לגמרי)

משתנה מקרי שאין לו אטומים. !- $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) = 1$

דוגמה 1.2 התפלגות אחידה בקטע $[0,1]$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & 0\le x\le 1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x & 0<x<1 \\ 1 & 1\le x \end{cases}$$

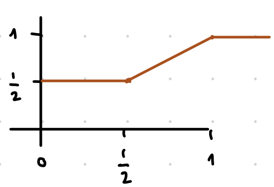


פונק' רציפה מונוטונית לא יורדת (עולה ממש)

$X \sim U(0,1)$ $\quad Z := X\cdot I_{\{X\ge \frac{1}{2}\}}$

Z הוא מ"מ המקבל את הערכים $\{0\}\cup[\frac{1}{2},1]$

$$\mathbb{P}(Z=0) = P(X<\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}$$



עבור $x \ge \frac{1}{2}$

$$F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \le x) = \mathbb{P}(Z \le x, x < \tfrac{1}{2}) + \mathbb{P}(Z \le x, x \ge \tfrac{1}{2})$$

$$= P(x < \tfrac{1}{2}) + \int_{\frac{1}{2}}^{x} 1\, du = \tfrac{1}{2} + x - \tfrac{1}{2} = x$$

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} < x \le 0 \\ x & 1 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

$$P(Z = x) = P_Z(x) = \tfrac{1}{2} \qquad x = \{0\}$$ (אוטום אחד)

$$f_Z(x) = \mathbb{I}_{(x \in [\frac{1}{2}, 1])}$$

1.2 תוחלת

עבור משתנה מקרי המוגדר על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ התוחלת מוגדרת להיות האינטגרל מעל מרחב המדגם ב-Ω

$$\mathbb{E}X = \int_{\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega)\,(d\omega)$$

Ω יכולה להיות מאוד אבסטרקטית ולכן לא ניתן להשתמש באינטגרל רימן. Lebesgue הציע פתרון קונסטרוקטיבי. מעבר לקורס שלנו.

אנחנו נשתמש בנוסחה 1.1 על מנת לתת הגדרה כללית לתוחלת של משתנה מקרי:

סימון:

$$(1.2) \qquad \mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} x P_X(x) + \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx := \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x\, dF_X(x)}$$

הגדרה שלנו

(אינטגרל פבל)

כאשר $\mathcal{X} = \{x_1, x_2 \dots\}$ קבוצת האטומים של המ"מ X והאינטגרל האחרון הוא סימון

נהוג להסתכל על תוחלת כעל מספר מורחב אשר יכול לקבל גם ערכים אינסופיים.

לכל $X(\omega)\ge 0$ $\omega\in\Omega$ אז הסכום וגם האינטגרל יכולים להיות סופיים, להתכנס בהחלט,

או להיות ∞. במקרה כזה התוחלת מוגדרת היטב ותהיה סופית או אינסופית.

כל משתנה מקרי אפשר לפרק לשני חלקים $X=X^+-X^-$ כאשר $X^+=X\cdot I_{\{X\ge 0\}}$

- החלק החיובי -

-ו $X^-=-X\cdot I_{\{X\le 0\}}$ $\Leftarrow$ $X^+,X^-\ge 0$

- החלק השלילי -

כלומר לכל $\omega\in\Omega$ $X^+(\omega),X^-(\omega)\ge 0$

• אם $\mathbb{E}(X^+)<\infty$ וגם $\mathbb{E}(X^-)<\infty$ אז $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(X^+)-\mathbb{E}(X^-)$ מוגדרת היטב וסופית

• אם $\mathbb{E}(X^+)$ או $\mathbb{E}(X^-)$ אינסופיים אך לא שניהם $\mathbb{E}(X)$ אינסופית עם הסימן המתאים.

• אם $\mathbb{E}(X^+)$ ו-$\mathbb{E}(X^-)$ אינסופיים אז התוחלת של X לא מוגדרת

$$\mathbb{E}(X)=\begin{cases}\mathbb{E}(X^+)-\mathbb{E}(X^-) & \text{if } \mathbb{E}(X^+)<\infty \ \& \ \mathbb{E}(X^-)<\infty\\ \infty & \text{if } \mathbb{E}(X^+)=\infty \ \& \ \mathbb{E}(X^-)<\infty\\ -\infty & \text{if } \mathbb{E}(X^+)<\infty \ \& \ \mathbb{E}(X^-)=\infty\\ \text{undefined} & \text{if } \mathbb{E}(X^+)=\infty \ \& \ \mathbb{E}(X^-)=\infty\end{cases}$$

דוגמא 1.3

יהי X משתנה מקרי שצפיפותו - צפיפות קושי

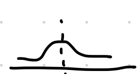
$$f_X(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+1} \qquad x\in\mathbb{R}$$

$$\mathbb{E}(X^+)=\int_0^\infty \frac{x}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{x+\frac{1}{x}}\,dx=\infty$$

$\mathbb{E}(X^-)=\infty$ תוחלת התפלגות של קושי לא מוגדרת

$E|X|=0$

מכיוון שהתפלגות קושי היא סימטרית סביב הראשית.



$f(x)=f(-x)$

$$F_Z(x)=P(Z\le x)=P(Z\le x,x>0)+P(Z\le x,x<0)$$

$$Y = \mathrm{sign}(x)\cdot\sqrt{|x|}$$

פונקציה יוצרת מומנטים

הגדרה 1.4

יהי X משתנה מקרי כך ש: $\mathbb{E}\, e^{\delta|X|} < \infty$ עבור $\delta>0$ כלשהו.

פונקציה יוצרת המומנטים moment generating function של X היא:

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) \qquad |t|<\delta$$

כאשר הפונקציה יוצרת מומנטים מוגדרת - גם כל המומנטים מוגדרים וסופיים. וניתן לחשב אותן דרך הפונקציה.

למה 1.5

נניח $M_X(t)$ מוגדרת בסביבה פתוחה סביב הראשית. אזי כל המומנטים של X הם סופיים ו-:

$$\mathbb{E}X^p = \frac{d^p}{dt^p} M_X(t)\Big|_{t=0} \qquad \forall p\in\mathbb{N}$$

נגזור פעם 1 $\quad p=1 \quad \frac{d}{dt}M_X(t)$

נגזור פעמיים, פעם ראשונה וגם עוד $\quad p=2 \quad \frac{2d}{dt^2}M_X(t)$

הוכחה:

תהי $\delta>0$ כך ש: $M_X(t)$ מוגדרת באינטרוול $(-\delta,\delta)$ מכיוון
שלכל $t>0$

$$e^{t|x|} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(t|x|)^j \ge \frac{1}{p!}t^p|x|^p$$

טור טיילור   כי גם האיבר ה-p

ולכן $|x|^p \le \frac{e^{t|x|}\,p!}{t^p} \leftarrow \mathbb{E}|x|^p \le \mathbb{E}\,e^{t|x|}\frac{p!}{t^p} < \infty$

$$\frac{d^p}{dt^p} M_x(t) = \frac{d^p}{dt^p} \mathbb{E}\, e^{tx} = \mathbb{E}\, \frac{d^p}{dt^p} M_x(t) = \mathbb{E}\, x^p$$