

הסתברות לסטטיסטיקאים 52534 תשפ"ה

תרגיל 3

ענו על השאלות הבאות.

הסבירו והצדיקו את תשובתכם. אם נדרשת הוכחה, יש להציג את כל השלבים בהוכחה.

1. קומולנטים ומומנטים - התפלגות פואסון

- i. מצאו את הפונקציה יוצרת המומנטים של התפלגות פואסון עם פרמטר $\lambda > 0$.
- ii. הנגזרות של הלוגריתם של פונקציה יוצרת המומנטים בנקודה 0 נקראות **קומולנטים** (cumulants)
- $$\kappa_n = \left. \frac{d^n}{dt^n} \log M_X(t) \right|_{t=0}$$
- iii. הראו כי כל הקומולנטים של התפלגות פואסון שווים ל- λ .
- iv. יש התאמה מלאה בין סדרת הקומולנטים κ_n לסדרת המומנטים m_n . הוכיחו כי
- $$\begin{aligned}\kappa_1 &= m_1 \\ \kappa_2 &= m_2 - m_1^2 \\ \kappa_3 &= m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3\end{aligned}$$
- v. השתמשו בנוסחאות למעלה על מנת לחשב את שלושת המומנטים הראשונים של התפלגות פואסון.

2. זהו את פונקציות ההתפלגות המצטברת של פונקציות יוצרות המומנטים הבאות:

- i. כאשר $c \in \mathbb{R}$ כלשהו קבוע $M_X(t) = e^{ct}$, $t \in \mathbb{R}$
- ii. $M_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$
- iii. רמז: פתחו לטור גיאומטרי $p = \frac{1}{2}e^t$ $M_X(t) = \frac{e^t}{2-e^t}$, $t < \log 2$

3. השתמשו באי שוויון ג'נסן כדי להוכיח כי עבור משתנה מקרי חיובי X מתקיים:

$$\mathbb{E} \frac{1}{X} \geq \frac{1}{\mathbb{E}X}.$$

4. השתמשו באי שוויון ינסן על מנת להוכיח כי הממוצע האריתמטי של מספרים x_1, \dots, x_n גדול או שווה לממוצע הגיאומטרי שלהם,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \geq \left(\prod_{j=1}^n x_j \right)^{1/n}$$

רמז: חשבו על משתנה מקרי X מהתפלגות אחידה על האטומים $\{x_1, \dots, x_n\}$, וישמו את אי שוויון ינסן על $\log X$.

5. חסם/אי שוויון צ'רנוף *Chernoff inequality*

יהי X משתנה מקרי אי שלילי עם פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(t)$ המוגדר לכל $t \in \mathbb{R}$. אזי

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq e^{-\Lambda(x)}, \quad \forall x > 0$$

כאשר

$$\Lambda(x) = \max_{t \geq 0} (tx - \log M_X(t))$$

i. השתמשו באי שוויון מרקוב להוכיח חסם זה.

ii. סעיף רשות

יישמו את החסם עבור הריכוז של פונקציית ההתפלגות של הממוצע האמפירי של n משתנים מקריים בלתי תלויים ושוי התפלגות מהתפלגות ברנולי.

6. השתמשו בלמה 1.19 על מנת לענות על הסעיפים הבאים:

i. הסבירו את אלגוריתם הדגימה מהתפלגות $U[0, a]$ עבור $a > 0$ כלשהו, אם נתון מדגם מהתפלגות $V \sim U[0, 1]$. יישמו את האלגוריתם בתוכנה שנוחה לכם, דיגמו מספר גדול של מדגמים וציירו את ההסטוגרמה מול פונקציית הצפיפות של התפלגות המטרה.

ii. חזרו על סעיף קודם כאשר $\text{Exp}(1)$ היא צפיפות המקור ו- $U[0, 1]$ היא צפיפות המטרה.

iii. חזרו על סעיף קודם כאשר $\text{Gamma}(2, 4)$ היא צפיפות המקור ו- $\text{Beta}[1, 5]$ היא צפיפות המטרה.

7. השתמשו בתוכנה שנוחה לכם על מנת לדגום מהמשתנה המקרי שהתפלגותו המצטברת נתנה לכם בתרגיל 1 שאלה 1. הסבירו את הדרך בה דגמתם. דגמו מספר גדול של מדגמים וציירו את פונקציית ההתפלגות המצטברת האמפירית.