<u>רגרסיה ומודלים סטטיסטיים- תרגול 4</u>

התפלגויות רב מימדיות:

יהיו $Z_1, \ldots, Z_n$ משתנים מקריים המפולגים במשותף (ללא שום הנחות נוספות) בהתפלגות $f_{Z_1,\ldots,Z_n}(z_1, \ldots, z_n)$. נגדיר $Z \in R^n = (Z_1, \ldots Z_n)$ ונגדיר $E(Z) = (E[Z_1], \ldots, E[Z_n])$.

באותו האופן, אם A היא **מטריצה מקרית**, כלומר A_{ij} הוא מ"מ: $E[A] = \begin{pmatrix} E[A_{11}] & \ldots & E[A_{1m}] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ E[A_{n1}] & \ldots & E[A_{nm}] \end{pmatrix}$

תכונות של תוחלות של מטריצות (ובפרט וקטורים) מקריים:

עבור Z, W מטריצות מקריות ו-A, B מטריצות קבועות, לא מקריות (דטרמיניסטיות):

1. $\mathbb{E}[\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{W}] = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}] + \mathbb{E}[\boldsymbol{W}]$
2. $\mathbb{E}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{B}] = \boldsymbol{A}\mathbb{E}[\boldsymbol{Z}]\boldsymbol{B}$
3. $\mathbb{E}[\boldsymbol{A}U + C] = A\mathbb{E}[U] + \boldsymbol{C}$ (from 1+2)

עבור זוג וקטורים מקריים Z, W נגדיר את מטריצת השונות המשותפת בין Z, W:

$$Cov(Z, W) \coloneqq E([Z - E(Z)][W - E(W)]^T)$$

ובאופן דומה את מטריצת השונויות של הוקטור Z:

$$Var(Z) := Cov(Z, Z) \coloneqq E([Z - E(Z)][Z - E(Z)]^T)$$

טענה: $Var(Z)_{ij} = cov(Z_i, Z_j) = cov(Z_j, Z_i) = Var(Z)_{ji}$

"הוכחה":

$$Var(Z)_{ij} = E([Z - E(Z)][Z - E(Z)]^T)_{ij}$$
$$= E\big([Z - E(Z)]_i [Z - E(Z)]_j\big) = E([Z_i - E(Z_i)][Z_j - E(Z_j)]) = cov(Z_i, Z_j)$$

בתרגיל תוכיחו את התכונות הבאות:

Properties of covariance matrix. $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{R}$ random vectors; $\boldsymbol{a}$ fixed vector. Then the following properties hold:

1. $\text{cov}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{W}) = \text{cov}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{Z})^\top$
2. $\text{cov}(\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{R}, \boldsymbol{W}) = \text{cov}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{W}) + \text{cov}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{W})$
3. $\text{cov}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{W}) = A\,\text{cov}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{W})\boldsymbol{B}^\top$
4. $\text{cov}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{A}\,\text{cov}(\boldsymbol{Z})\boldsymbol{A}^\top$ (from 3)
5. $V(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{a}^\top \text{cov}(\boldsymbol{Z})\boldsymbol{a}$ (from 4)
6. $\text{cov}(\boldsymbol{Z})$ is a nonnegative definite matrix (from 5)

<u>שאלה:</u>

יהיו המשתנים המקריים הבאים: $Z_1, \ldots, Z_5 \sim N(0,1)\ iid.$

א. מצאו את וקטור התוחלות ומטריצת השונויות של הוקטור המקרי $Z = (Z_1, \ldots, Z_5)^T$.

ב. נגדיר את ההעתקה: $A: R^5 \to R^3$:

$A(v) = (2v_1 - 3v_2 + 4v_3 + 7, 8v_2 - v_4 + 2v_5 + 3, 6v_3 - 1)^T$. האם ההעתקה ליניארית?

על בסיס הסעיף הקודם חשבו את וקטור התוחלות ומטריצת השונויות של $A(Z)$.

ג. האם תשובתכם הייתה משתנה אילו היה ידוע כי $Z_1, \dots Z_5$ היו נדגמים כך ש- $Z_i \sim unif\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$?

יהיו $Z, W \in R^p$ וקטורים מקריים. הראו שהבאים שקולים :

(1) $\forall v \in R^p, Var(v^T Z) \geq Var(v^T W)$

(2) $B \coloneqq Var(Z) - Var(W)$ היא מטריצה חיובית למחצה.

(3) קיימת המטריצה $B^{\frac{1}{2}}$.

המודל הלינארי:

נתונים: $(\boldsymbol{X}_i, Y_i), \quad i = 1, \dots, n$

מודל ליניארי:

$$Y_i = \sum_{j=0}^{p} \beta_j X_{ij} + \epsilon_i, \qquad \mathrm{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_{i'}) = \begin{cases} \sigma^2, & i = i' \\ 0, & i \neq i' \end{cases}$$

כאשר $\boldsymbol{X_i} = (1, X_{i1}, \dots, X_{ip})^\top$ הם ממימד $p+1$,

וכאשר $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ ו-σ^2 הם קבועים לא ידועים

אפשר לקבל ייצוג קומפקטי בעזרת כתיב מטריצות. נסמן:

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}Y_1\\ \vdots\\ Y_n\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & X_{11} & \cdots & X_{1p}\\ 1 & X_{21} & \cdots & X_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & X_{n1} & \cdots & X_{np}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\epsilon}=\begin{bmatrix}\epsilon_1\\ \vdots\\ \epsilon_n\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_p\end{bmatrix}$$

אז את המודל הליניארי אפשר לכתוב:

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{\epsilon},\qquad \mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}]=\boldsymbol{0},\ \ \mathrm{cov}[\boldsymbol{\epsilon}]=\sigma^2\boldsymbol{I}$$

כמו כן: $\hat{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}},\qquad \boldsymbol{e}=\boldsymbol{Y}-\hat{\boldsymbol{Y}}$

(הערה: אם לא נציין אחרת, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ זה אומד הריבועים הפחותים)

<u>שאלה</u>

לפניכם מספר טענות. התאימו לכל טענה האם מדובר בהנחה או בתוצאה מתמטית:

1. $\hat{\beta}=argmin_{\beta}||Y-X\beta||^2$
2. $X\beta=E(Y|X)$
3. $0=E(e_i)$
4. $0=E(\bar{e})$
5. $X^Te=0$
6. $Cov(Y)=\sigma^2I$

<u>שאלה:</u>

לפניכם מתוארים מספר מקרים. עבור כל אחד מהם פרטו את ההתפלגויות של $X, Y, Y|X, \epsilon$ וכתבו אילו הנחות של המודל הליניארי כל אחד מהם מקיים:

1. $X_i\in R^p$ **קבועים מראש**, $Y_i=X_i^T\beta+\epsilon_i$ כאשר $\epsilon_i\sim N(0,1)$ ב״ת.
2. $X_i\in R^p$ מ״מ נורמליים סטנרדטיים וב״ת, $Y_i=X_i^T\beta+\epsilon_i$ כאשר $\epsilon_i\sim N(0,1)$ ב״ת.
3. $X_i\in R^1$ מ״מ נורמליים סטנרדטיים וב״ת, $Y_i=X_i^2\beta+\epsilon_i$ כאשר $\epsilon_i\sim U(-1,1)$ ב״ת.
4. $X_{it}\in R^p$ **קבועים מראש**- כאשר X_{itj} היא הדגימה של האדם ה- i בתקופה ה-t, $Y_{it}=X_{it}\beta+\epsilon_{it}$ כאשר $\epsilon_{it}\sim N(0,1)$ והנדגמים ב״ת.

פתרון :

שאלה

1. יהי $0 \neq v \in R^n$. הראו כי $\frac{vv^T}{||v||^2}$ היא מטריצת הטלה אורתוגונלית. מה דרגת המטריצה?
2. יהיו $Y_1, \ldots, Y_n \sim (\mu, \sigma^2)$ מ״מ ב״ת ש״ה, כאשר שני הפרמטרים לא ידועים. הראו כי $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ הוא אומד ח״ה ל-σ^2.
3. הניחו כעת כי $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu, \sigma^2)$. הוכיחו את התוצאה, שראינו בעבר $(n-1)S_n^2 \sim \sigma^2\chi_{n-1}^2$.

<u>שאלה</u>

2.נתון $Z \in \mathbb{R}^m$ וקטור מקרי. הראו כי מתקיים ש

$$\mathbb{E}\left(||Z||^2\right) = tr(\mathbb{E}[ZZ^T])$$

הסיקו מכך כי אם $\mathbb{E}[Z] = 0$ אזי מתקיים כי

$$\mathbb{E}\left(||Z||^2\right) = tr(cov[Z])$$

פרטו והצדיקו כל שלב בהוכחה.

2 הוכיחו כי עבור U, V וקטורים מקריים שידוע שהתוחלת של לפחות אחד מהם היא וקטור ה-0, מתקיים :

$$E(U^TV) = tr\left(cov(VU^T)\right)$$

הוכחה :

שאלה- מועד א' תשפ"ד

הניחו שהנחות המודל הלינארי מתקיימות.

ד. (15 נק') נסמן $M := \text{Im}(\boldsymbol{X})$. נסמן ב-$\tilde{\boldsymbol{X}}$ את המטריצה המתקבלת מ-$\boldsymbol{X}$ ע"י מחיקת חלק מהעמודות, ונסמן $L := \text{Im}(\tilde{\boldsymbol{X}})$. הראו שמתקיים $P_L\boldsymbol{Y} = P_L\hat{\boldsymbol{Y}}$ (כאשר $\hat{\boldsymbol{Y}}$ זה וקטור הערכים החזויים במודל עם מטריצת ה-$\boldsymbol{X}$ המקורית). האם נדרשות הנחות המודל הליניארי או המודל הליניארי הנורמלי כדי שהטענה תתקיים?

ב. מצאו את $E\left(||e||^2\right)$

ב. **(10 נק')** חשבו את הגדלים הבאים, <u>וציינו את המימד</u> שלהם: $\text{cov}(\boldsymbol{e})$, $\text{cov}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{e})$, $\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\epsilon})$.

ג. מצאו את $cov(Y_i, \hat{Y}_i)$.

שאלה- בוחן אמצע תשפ"ב

נתון מודל ליניארי, $Y = X\beta + \varepsilon$ כאשר $\varepsilon \sim (0, \sigma^2 I_n)$.

עבור $u, v \in \mathbb{R}^n$ כלשהם נגדיר את נורמת מהלנוביס (Mahalanobis) באופן הבא:

$$||u - v||_\Sigma = \sqrt{(u - v)^T \Sigma^{-1} (u - v)}$$

כאשר $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה סימטרית חיובית.

כמו כן נגדיר את $\hat{\beta}^\Sigma$ באופן הבא:

$$\hat{\beta}^\Sigma = \underset{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}}{argmin} \, ||Y - X\beta||_\Sigma^2$$

א. הראו שמתקיים

$$\hat{\beta}^\Sigma = (X^T \Sigma^{-1} X)^{-1} X^T \Sigma^{-1} Y$$

והסבירו את האומד שמתקבל במקרה $\Sigma = I_n$.

הדרכה: אפשר (לא חייב ש) להעזר בעובדה הבאה: $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ מטריצה סימטרית חיובית, אזי קיימת מטריצה $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ סימטרית חיובית כך ש: $B^T B = A$. ניתן להפעיל מסקנה זו על Σ כך שיהיה ניתן לייצג את Σ^{-1} באופן הבא: $\Sigma^{-1} = C^T C$ עבור מטריצה C ריבועית כלשהי. מצאו מי היא C, הסבירו מדוע היא מוגדרת היטב, ואז הגדירו משתנים חדשים

$\tilde{X} = \boldsymbol{C}X$, $\tilde{Y} = \boldsymbol{C}Y$ ופתרו את הבעיה (שימו לב שעבור ה **C** הנכון הפתרון מיידי, חישבו מדוע).

ב. הראו כי $\hat{\beta}^\Sigma$ הינו אומד חסר הטיה לβ, וכן מצאו את $cov(\hat{\beta}^\Sigma)$.