רגרסיה ומודלים סטטיסטיים- תרגיל 1

שאלה 1:

א. תהי $A \in R^{n\times n}$ מטריצה סימטרית ויהיו $(\lambda_1, u_1), (\lambda_2, u_2)$ זוגות של וקטורים עצמיים וע"ע של A כך שמתקיים שהערכים העצמיים $\lambda_1 \neq \lambda_2$. הראו כי $u_1^t u_2 = 0$.

ב. נסמן $V = I + \theta A, \theta \in R$. הוכיחו ש-$u_1$ הוא ו"ע של V ומצאו את הע"ע המתאים לו.

ג. נניח כעת כי A הפיכה ונכתוב $A = U\Lambda U^T$ כאשר המטריצות מוגדרות באותו האופן בו הגדרנו בכיתה. בטאו את A^{-1} במונחי $\lambda_1, \dots, \lambda_n;\ u_1, \dots, u_n$.

שאלה 2:

א. תהי $X \in R^{n\times p}$, כך ש- $n > p$ ונסמן $A = X^T X$. הוכיחו כי הבאים שקולים:

(1) A הפיכה.
(2) עמודות X בת"ל.
(3) A חיובית מוגדרת.
(4) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ע"ע של A, אז $\lambda_i > 0, \forall n \geq i \geq 1$.

ב. הסיקו מהסעיף הקודם כי המטריצה $A + \theta I$ הפיכה $\forall \theta > 0$.

שאלה 3:

א. הניחו את הבסיס S ל-R^3 ואת המטריצה $A \in R^{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad S = \{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

תזכורת: A היא מטריצה המייצגת את ההעתקה A ביחס לבסיס הסטנדרטי.
מצאו את המטריצה $[A]_S$ המייצגת את ההעתקה A ביחס לבסיס S (בתחום ובטווח).
רמז: לכל העתקה לינארית G ובסיסים C, B מתקיים:

$$[G]_C = [I]_C^B [G]_B [I]_B^C$$

ב. - נניח $T: V \to W$ וכן $F: W \to U$ העתקות לינאריות, ונניח B, C, D בסיסים ל-V, W, U בהתאמה. הראו כי:

$$[F \circ T(v)]_D = [F(T(v))]_D = [F]_D^C [T]_C^B [v]_B$$

כלומר, שניתן לייצג הרכבת העתקות לינאריות על ידי כפל במטריצות המייצגות את ההעתקות.

- הניחו כעת כי $V = W$ וכן $B = C$. הראו ש T הפיכה אם"ם $[T]_B$ הפיכה; וכן שמתקיים במקרה כזה $[T]_B^{-1} = [T^{-1}]_B$.

שאלה 4:

תהי $X \in R^{n\times p}$ מטריצה מדרגה מלאה, $Y \in R^n$ וקטור כלשהו ו-$\beta \in R^p$ וקטור מקדמים. בתרגול הוכחנו את הנגזרות הבאות:

נגזרת של מכפלה סקלרית של וקטורים:

$$\frac{\partial}{\partial x}(b^T x) = \frac{\partial}{\partial x}(x^T b) = b$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^T x) = 2x$$

וכן:

עבור מטריצה סימטרית A נקבל

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^T A x\right) = 2Ax$$

א. השתמשו בתכונות אלו על מנת להראות:

$$\beta^* = argmin_{\beta \in R^p} \left||Y - X\beta|\right|^2 = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

וכן:

$$X\beta^* = P_X Y$$

ב. מצאו ביטוי מפורש עבור $\beta^* = (\beta_0^*, \beta_1^*)$ למקרה בו $X \in R^{n\times 2}$ מהצורה:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \\ 1 & x_6 \\ 1 & x_7 \end{bmatrix}$$

הסבירו מדוע למעשה כבר פתרתם את הבעיה הזו בקורסים קודמים.