רגרסיה ומודלים סטטיסטיים- תרגול 1

אלגברה לינארית

מרחב לינארי (וקטורי):

מרחב לינארי V מעל שדה $\mathbb{F}$ הוא קבוצה עליה מוגדרות 2 פעולות: $+$ חיבור, ו-$\cdot$ כפל בסקלר, המקיימת את התכונות הבאות:

- סגירות לחיבור $v_1 + v_2 \in V$
- סגירות לכפל $\alpha \cdot v \in V$
- אסוציאטיביות (חוק הקיבוץ): $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
- דיסטריבוטיביות (חוק הפילוג): $\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2$
- קיים אדיש $v_0 \in V$ כך ש $v + v_0 = v$
- $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$
- קיים נגדי ל v $\bar{v} \in V$ כך ש$v + \bar{v} = v_0$
- $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
- קומוטטיביות: $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
- $1 \cdot v = v$

הערה: האיברים ב-V נקראים וקטורים. v_0 הוא ה-0 של השדה. נסמנו מעתה כ-0.

בקורס זה נעסוק בשדה הממשיים בלבד. דוגמא למרחבים לינאריים מעל הממשיים: מרחב הפתרונות למערכת משוואות הומוגנית, מרחב המטריות הממשיות.

תת מרחב לינארי:

יהי V מרחב לינארי מעל F ויהי $W \subseteq V$ תת- קבוצה של V. נאמר ש-W הוא **תת מרחב לינארי** של V אם גם הוא מרחב לינארי. ניתן להראות שזה שקול לכך ש-W מקיים את הבאים:

1. $0 \in W$
2. $w_1 + w_2 \in W; \forall w_1, w_2 \in W$
3. $k \cdot w \in W; \forall k \in F, \forall w \in W$

הגדרות נוספות

1. תלות ואי תלות לינארית- תהי $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה של n וקטורים כך ש- $V \supseteq S$. נאמר כי S קבוצה **תלויה לינארית (ת"ל)** אס"ם קיימת קומבינציה לינארית לא טריוויאלית מתאפסת של S. כלומר הגרירה הבאה **אינה** מתקיימת: $\sum_{i=1} k_i \cdot v_i = 0 \rightarrow \ k_i = 0\ \forall i$. אחרת, נאמר ש-$S$ קבוצה בת"ל. תזכורת- כל קבוצה של יותר מ-n וקטורים ב-R^n תלויה לינארית.
2. נגדיר $Span(S) := \{w | w = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i\, , k_i \in \mathbb{F}\, , v_i \in S, \forall i\}$. תרגיל: ודאו שזהו תת מרחב. לכל תת קבוצה W כך ש-$W \subseteq Span(S)$, נאמר כי S קבוצה הפורשת את W.
3. נגיד ש- S הוא בסיס ל-W אם S קבוצה בת"ל **וגם** קבוצה הפורשת את W. הגדרות שקולות הן: קבוצה מינימלית הפורשת את W, וקבוצה בת"ל מקסימלית, במובן של מספר הוקטורים המוכלים בה.
תזכורת- בסיס לתת מרחב אינו יחיד.
4. מימד- מימד של מרחב (תת מרחב) הוא מספר הווקטורים בבסיס. תרגיל: הראו שהמימד לא תלוי בבסיס הספציפי.

5. אורתוגונליות- יהיו $u,v \in V$. נאמר שהם אורתוגונליים זה לזה, ונסמן $v \perp u$ אם $u^T v = v^T u = 0$.[1]
6. יהיו $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס לתת מרחב W. אז S יקרא בסיס אורתוגונלי אם $v_i \perp v_j$ לכל $i \neq j$. לדוגמא עבור R^3:

$$\{(2,0,0), (0,1,0), (0,0,3)\}$$

7. S המוגדר לעיל יקרא בסיס אורתונורמלי ל-W אם בנוסף מתקיים ש-$||v_i|| = 1$ לכל i. דוגמא:

$$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

הוא בסיס אורתונורמלי ל-R^n. בפרט, הוא נקרא "הבסיס הסטנדרטי".

8. מטריצה $A \in R^{n\times n}$ תקרא מטריצה אורתוגונלית אם עמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל-R^n, או באופן שקול: $AA^T = A^T A = I$.
9. הטלה של וקטור על תת-מרחב- יהי $v \in V$ ו-$W \subseteq V$ תת מרחב כך ש-$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ בסיס אורתוגונלי ל-W. נגדיר את ההטלה של v על W:

$$P_W(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^T v}{||b_i||^2} b_i$$

תזכורת (לא נעבור על האלגוריתם בתרגול): יהי $W = Span(S)$ תת מרחב. S לא בהכרח בת"ל. ניתן לקבל בסיס אורתונורמלי B_n ל-W ע"י הפעלת תהליך Gram–Schmidt על איברי S:

1. אתחול:
   1.1. נגדיר $b_1 = s_1$
   1.2. נגדיר $B_1 = b_1$
2. עבור $2 \le i \le n$:
   2.1. $b_i = s_i - P_{B_{i-1}}(s_i)$
   2.2. $B_i = B_{i-1} \cup \{b_i\}$
3. עבור $1 \le i \le n$:
   3.1. $b_i = \frac{b_i}{||bi||}$

סכום של תתי מרחבים:

יהיו $W, U \subseteq V$ תתי מרחבים. נסמן: $U + W = \{v \in V | v = u + w, u \in U, w \in W\}$ זהו תת המרחב הקטן ביותר המכיל גם את U וגם את W ומימדו:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

תרגיל: הראו שזהו תת מרחב ליניארי.

כאשר $U \cap W = \{0\}$ נאמר כי זהו **סכום ישר** ונסמן את תת המרחב: $U \oplus V$.

[1] כל עוד לא נאמר אחרת, הכוונה היא למכפלה הפנימית הסטנדרטית: $u^T v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = 0$, אך ההגדרה נכונה לכל מ"פ.

משפט הסכום הישר: יהי V מרחב לינארי ויהיו $W, U \subseteq V$ תתי מרחבים שלו. אז $V = W \oplus U$ אם"ם לכל וקטור $v \in V$ קיימת הצגה יחידה: $v = u + w | u \in U, w \in W$.

הוכחה: בתרגול הבא

המרחב המשלים האורתוגונלי: יהי $U \subseteq V$ תת מרחב. נגדיר את תת המרחב המשלים האורתוגונלי של U באופן הבא:

$$U^{\perp} = \{v \in V | u^t v = 0, \forall u \in U\}$$

טענה: $U \oplus U^{\perp} = V$

הוכחה:

העתקות (פונקציות) לינאריות, מרחב הגרעין ומרחב התמונה

ההעתקה (פונקציה, טרנספורמציה) $T: V \to W$ היא לינארית אם לכל $v_1, v_2 \in V$ ו-$k_1, k_2 \in F$ מתקיים:

$$T(k_1 v_1 + k_2 v_2) = k_1 T(v_1) + k_2 T(v_2)$$

ובאופן כללי:

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i T(v_i)$$

שימו לב שמכך נובע שאם T לינארית, $T(0) = T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) = 0$.

נגדיר את הגרעין והתמונה של העתקה לינארית T:

$$Ker(T) = \{v \in V | T(v) = 0\}$$

$$IM(T) = \{w \in W | \exists v \in V: T(v) = w\}$$

טענה: אלו תתי מרחבים.

משפט המימד להעתקות לינאריות:

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(IM(T))$$

הוכחה: כאן.

מטריצת מעבר מבסיס לבסיס ומטריצה מייצגת העתקה:

טענת עזר: תהי $u \in R^m, A \in R^{n \times m}$. אז $v = Au$ הוא קומבינציה לינארית של עמודות A, כלומר $v \in colspace(A)$. הוכחה:

$$v_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{m} [A^j]_i u_j$$

ובאותו האופן:

$$v = \sum_{j=1}^{m} A^j u_j$$

הגדרות:

1. יהי $v \in V$ ו-$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ בסיס **סדור** ל-V, ולכן $v = \sum_{i=1}^{n} k_i b_i = Bk$ וכן זוהי הקומבינציה הלינארית היחידה המקיימת את שוויון זה (פתרון יחיד למערכת המשוואות). נגדיר את וקטור הקואורדינאטות של v ביחס לבסיס B: $[v]_B = (k_1, \dots, k_n)^T$.

הערה: שימו לב שאם B הוא הבסיס הסטנדרטי אז $[v]_B = v$. ניתן להסתכל על כך באופן הבא: תחת הבסיס הסטנדרטי "מערכת הצירים" היא זו המוכרת לנו- הקרטזית, ולכן הקואורדינאטות מוגדרות בדיוק באופן שבו אנו מכירים. תחת בסיס אחר, ניתן לחשוב על כך כשינוי של מערכת צירים לכזו בעלת נקודות ייחוס שונות מראשית הצירים, ולכן נצטרך לייצג את הוקטור v תחת מערכת הצירים החדשה.

דוגמה:

$V = \mathbb{R}^2$ ו $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

אז על מערכת הצירים: $v = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

מכאן, $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ כי מתקיים ש- $v = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

לחילופין, הפעולה זהה ל- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ שהיא למעשה פתרון המטריצה: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$

הפתרון היחיד היינו $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

2. מטריצת מעבר מבסיס לבסיס: יהיו B, C בסיסים סדורים ל-V, $v \in V$, $[v]_B$. מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס C היא המטריצה (היחידה) המקיימת: $[I]_C^B [v]_B = [v]_C$.[2] במילים- המטריצה שהכפלה משמאל בה של וקטור הקואורדינאטות של v לפי הבסיס B, תתן את וקטור הקואורדינאטות של v לפי הבסיס C.

<u>טענה 1</u>: עמודות המטריצה הן וקטורי הקואורדינטות של וקטורי הבסיס B לפי הבסיס C. הוכחה:

<u>טענה 2</u>: $[I]_C^B = \left([I]_B^C\right)^{-1}$. ההוכחה נובעת ישירות מהטענה הקודמת. שימו לב שמכך נוכל להסיק שאם B מטריצה ריבועית מדרגה מלאה- כלומר עמודותיה מהוות בסיס, אז B^{-1} היא מטריצת מעבר מהבסיס הסטנדרטי לבסיס שהוא העמודות של B.

<u>טענה 3</u>: **לכל** העתקה לינארית $T: V \to W$, ובסיסים C, B: $V = span(B)$, $W = span(C)$, קיימת מטריצה יחידה $[T]_C^B$ המקיימת שלכל וקטור $v \in V$: $[T]_C^B [v]_B = [T(v)]_C$. זוהי המטריצה המייצגת את ההעתקה T לפי בסיס B בתחום ו-C בטווח.
שימו לב שמטריצת מעבר היא מקרה פרטי בו T היא העתקת הזהות.

<u>טענה 4</u>: אם $[I]_C^B$ מטריצת מעבר מבסיס B לבסיס C, ו-$T: V \to V$ היא העתקה לינארית, אז:

$$[T]_C = [I]_C^B [T]_B [I]_B^C$$

הוכחה:

דוגמה:

Consider the linear transformation F on $\mathbf{R}^2$ defined by $F(x,y) = (5x - y,\ 2x + y)$ and the following bases of $\mathbf{R}^2$:

$$E = \{e_1, e_2\} = \{(1,0),\ (0,1)\} \qquad \text{and} \qquad S = \{u_1, u_2\} = \{(1,4),\ (2,7)\}$$

(c) Find the matrix B that represents F in the basis S.

Method 2. By Theorem 6.7, $B = P^{-1}AP$. Thus,

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

הערה: כאן $P = [I]_E^S$, כלומר מטריצת המעבר מהבסיס בייצוג S לבסיס הסטנדרטי.

---

[2] הערה: בחלק מהמקורות היא נקראת דווקא " מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס C". נתייחס אליה כפי שמוגדר כאן.

הערה: אם לא נאמר אחרת, מטריצה נתונה A מייצגת לפי בסיס סטנדרטי (בתחום ובטווח).

בייצוג זה מתקיים:

$$Ker(T) = Ker(A) = \{v \in V | Av = 0\}$$
$$IM(T) = IM(A) = colspace(A) = \{w \in W | Av = w\}$$

ונסיק כי דרך למציאת בסיס למרחב הגרעין של העתקה תהיה מציאת בסיס למרחב הפתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית $Av = 0$.

ואילו כדי למצוא בסיס למרחב התמונה של ההעתקה, נדרג את A^T לתצורה קנונית (לדוגמא), ונבחר את השורות שאינן מתאפסות.

דוגמה (שכנראה לא נראה בתרגול):

נגדיר $T: R^3 \to R^2$: $T(x, y, z) = (x - 2y - z, -2x + 4y + 2z)^T$.

א. מצא את המטריצה המייצגת את ההעתקה ביחס לבסיס הסטנדרטי.
ב. מצא בסיס לגרעין ולתמונה של T.

תהי $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y - z \\ -2x + 4y + 2z \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ נמצא בסיס לגרעין ולתמונה של $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

נדרג את A ונקבל $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. נמצא את אוסף הפתרונות של המערכת (מפני שהגרעין מקיים $ax = 0$) הוא:

$\left\{ t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2t_1 + t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \right\}$ ולכן $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ הוא בסיס לגרעין.

כמו כן, העמודה היחידה עם איבר מוביל היא הראשונה, ולכן $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ הוא בסיס לתמונה.

מהשקילות הנ"ל וממשפט המימד להעתקות לינאריות נוכל להסיק כי לכל מטריצה $A \in R^{n \times m}$, כך ש-
$rank(A) = r \leq \min(n, m)$ מתקיים: $\dim(IM(A)) = r, \dim(Ker(A)) = n - r$.

1 וקטורים וערכים עצמיים, פולינום אופייני והפירוק הספקטרלי

1.1 הגדרות

1. תהי המטריצה **הריבועית** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ויהיו $\lambda \in \mathbb{R}$ סקלאר ו- $x \in \mathbb{R}^n$ וקטור. אם מתקיים השוויון $Ax = \lambda x$ אזי x הוא **וקטור עצמי** של A ו- λ הוא **ערך עצמי** של A.

2. $\det(A - \lambda I)$ מוגדר להיות **הפולינום האופייני** של A, עבור I מטריצת היחידה מאותו מימד של A. באמצעות הפולינום האופייני מחשבים את הע"ע של המטריצה, מאחר ועבור פתרונות לא טריויאלים (וע שאינם 0) הפתרון הוא יחיד, משמע A היא מטריצה סינגולרית, כלומר $\det(A - \lambda I) = 0$.

3. תהי המטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה סימטרית. אזי ניתן להציג את A כך: $A = U \Lambda U^T$ וההצגה הזו נקראת **הפירוק הספקטרלי של** A, כאשר:

- $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ היא מטריצה אלכסונית, שעל האלכסון שלה נמצאים הע"ע של A.
- $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ היא מטריצה המורכבת מהוקטורים העצמיים של A. העמודה ה j היא הוקטור העצמי המתאים לערך העצמי λ_j.
- כמו כן מתקיים ש $UU^T = U^T U = I$ כלומר U היא מטריצה אורתונורמלית.

משפט הפירוק הספקטרלי:

תהי $A \in R^{n\times n}$ מטריצה סימטרית אשר הפירוק הספקטרלי שלה הוא $U\Lambda U^T$, אז $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U^i {U^i}^T$.

הוכחה:

דוגמא:

1. תהי S מטריצה סימטרית 3x3.
   a. מצאו פירוק הספקטרלי עבור $S = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix}$.
   כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית U ומטריצה אלכסונית D כך ש S=UDU'.
   b. בסעיפים הבאים, נסמן ב $u_1, \dots, u_3$ את הוקטורים העצמיים של S, וב $\lambda_1, \dots, \lambda_3$ את הערכים העצמיים המתאימים. עבור $c > 0$, בטאו את $(S + cI)^{-1}$ בעזרת $u_1, \dots, u_3$ ו $\lambda_1, \dots, \lambda_3$. ניתן להניח את קיום הפירוק הספקטרלי. אם משתמשים בטענות נוספות, נסחו והוכיחו אותן. *[הדרכה: ראשית בטאו את $S + cI$]*

פתרון:

מטריצה חיובית, איידמפוטנטית והטלה

1. חזקה של מטריצה סימטרית - באמצעות הפירוק הספקטראלי ניתן לראות כי עבור מטריצה סימטרית מתקיים $A^k = U\Lambda^k U^T$ לכל k ממשי (הוכחה בשיעור).
2. שורש של מטריצה סימטרית - אם בנוסף העע של המטריצה הסימטרית הם אי-שליליים אז באותו האופן ניתן להראות כי $\sqrt{A} = A^{1/2} = U\Lambda^{1/2}U^T$.
3. מטריצה אידמפוטנטית היא מטריצה ריבועית המקיימת $A = A^2$.
4. מטריצה חיובית לחלוטין או למחצה -

- מטריצה סימטרית, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ תיקרא חיובית לחלוטין אם לכל וקטור $y \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $yAy^T > 0$ $\Leftarrow$ (דרוש הוכחה) מטריצה סימטרית היא חיובית לחלוטין אםם העע שלה חיוביים.
- מטריצה סימטרית, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ תיקרא חיובית למחצה אם לכל וקטור $y \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $yAy^T \geq 0$ $\Leftarrow$ (דרוש הוכחה) מטריצה סימטרית היא חיובית למחצה אםם העע שלה אי-שליליים.

Trace של מטריצה

הגדרה:

$$\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_k A_{k,k}$$

מתקיים:

$$\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(A^T)$$
$$\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$$
$$\mathrm{Tr}\,(ABC) = \mathrm{Tr}\,(CBA) = \mathrm{Tr}\,(BCA)$$

משפט שימושי:

תהי $A \in R^{n\times n}$, אז הבאים שקולים:

1. A שקולה שורות למטריצת היחידה.
2. A הפיכה.
3. למערכת המשוואות $Av = 0$ יש פתרון יחיד.
4. הוקטור היחיד ב-$Ker(A)$ הוא וקטור ה-0.
5. **לכל** וקטור $b \in R^n$, למערכת $Av = b$ יש פתרון יחיד.
6. עמודות A בת"ל.
7. $colspace(A) = Rowspace(A) = R^n$
8. $\dim\big(Ker(A)\big) = 0$
9. $rank(A) = \dim\big(IM(A)\big) = n$
10. $\det(A) \neq 0$
11. כל הערכים העצמיים של A שונים מ-0.

נגזרות של וקטורים ומטריצות

א. גרדיאנט של פונקציה מרובת משתנים $f\left(x_1, \ldots, x_m\right)$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

ב. נגזרת של וקטור $y = \left(y_1, \ldots y_m\right)^T$ לפי סקלר x:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x} \end{pmatrix}$$

ג. נגזרת של וקטור $y=(y_1,\dots y_m)^T$ לפי וקטור $x=(x_1,\dots x_n)^T$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

ד. נגזרת של מכפלה סקלרית של וקטורים:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(b^T x\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^T b\right)=b$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^T x\right)=2x$$

ה. נגזרת של כפל מטריצה בוקטור לפי הוקטור:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Ax\right)=A$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^T A x\right)=\left(A^T+A\right)x$$

כאשר את המשוואה האחרונה מקבלים על ידי

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(x^T A x\right)=\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}x_i+\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j$$

לפיכך, עבור מטריצה סימטרית A נקבל

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^T A x\right)=2Ax$$