Cálculo diferencial e integral I
Resolución de Problemas de Funciones

Vite Riveros Carlos Emilio

9 septiembre del 2022

1. Encuentre el dominio de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

   Para que $\sqrt{1-x^2}$ esté definida, se tiene que:

   $$1 - x^2 \geq 0$$

   $$1 \geq x^2$$

   $$\sqrt{1} \geq \sqrt{x^2}$$

   $$|x| \leq 1$$

   $$-1 \leq x \leq 1$$

   Entonces $dom f(x) = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\}$.

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

   $\sqrt[3]{1+x}$ es una expresión de la forma $\sqrt[3]{a}$ por lo tanto su dominio es $dom f(x) = \{x \in \mathbb{R}\}$.

   (c) $f(x) = \sqrt{|1-x^2|}$

   Para que $\sqrt{|1-x^2|}$ esté definida, $|1-x^2| \geq 0$. Pero por definición del valor absoluto $|a| = a \geq 0$, entonces $dom f(x) = \{x \in \mathbb{R}\}$.

   (d) $f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x-2}$

   Para que $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x-2}$ esté definida se tiene que $1-x \neq 0$ y $x-2 \neq 0$, entonces:

   $$1 - x = 0,\ x = 1$$

   $$x - 2 = 0,\ x = 2$$

   Entonces cuando $x = 2$ o $x = 1$, no está definida la función, por lo que $dom f(x) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2, x \neq 1\}$.

(e) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x^2 - 1}}$

Para que $\sqrt{1 - \sqrt{x^2 - 1}}$ esté definida, se tiene que $1 - \sqrt{x^2 - 1} \geq 0$ y a su vez que $x^2 - 1 \geq 0$. Por lo que:

$$x^2 - 1 \geq 0,\ x^2 \geq 1$$

$$\sqrt{x^2} \geq \sqrt{1},\ |x| \geq 1$$

$$x \geq 1,\ x \leq -1$$

Y ahora $1 - \sqrt{x^2 - 1} \geq 0$:

$$1 - \sqrt{x^2 - 1} \geq 0$$

$$1 \geq \sqrt{x^2 - 1}$$

$$1^2 \geq (\sqrt{x^2 - 1})^2$$

$$1 \geq |x^2 - 1|$$

En el caso $x^2 - 1 \leq 1$:

$$x^2 - 1 \leq 1,\ x^2 \leq 2$$

$$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{2},\ |x| \leq \sqrt{2}$$

$$x \leq \sqrt{2},\ x \geq -\sqrt{2}$$

En el caso $x^2 - 1 \geq -1$:

$$x^2 - 1 \geq -1,\ x^2 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2} \geq \sqrt{0},\ |x| \geq 0$$

$$x \geq 0,\ x \leq 0$$

Como en el segundo caso x podía ser cualquier número en $\mathbb{R}$.
Tenemos que $x \leq \sqrt{2}$ o $x \geq -\sqrt{2}$

Tenemos entonces que $x \geq 1$, $x \leq -1$, $x \leq \sqrt{2}$, $x \geq -\sqrt{2}$. Esto simplificado queda como $\sqrt{2} \geq x \geq 1$ o $-1 \leq x \leq \sqrt{2}$.

Por lo que $dom f(x) = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{2} \geq x \geq 1, -1 \leq x \leq \sqrt{2}\}$.

O también $dom f(x) = \{x \in \mathbb{R} | [\sqrt{2}, 1] \bigcup [-1, -\sqrt{2}]\}$

(f) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

Para que $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$ esté definida, $x + 1 \neq 0$ o $x \neq -1$. Por lo que $dom f(x) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -1\}$

2. Si $f(x) = \frac{1}{1 + x}$, calcule las siguientes expresiones:

(a) $f(f(x))$

$f(f(x)) = \frac{1}{1+f(x)} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{\frac{1+x}{1+x}+\frac{1}{1+x}} = \frac{1+x}{2+x}$
$dom f(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -1, x \neq -2\}$

(b) $f(\frac{1}{x})$

$f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1}$
$dom f(\frac{1}{x}) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -1, x \neq 0\}$

(c) $\frac{1}{f(x)}$

$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1}{1+x}} = 1 + x$
$dom \frac{1}{f(x)} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -1\}$

(d) $f(cx)$

$f(cx) = \frac{1}{1+cx}$
$dom f(cx) = \{x \in \mathbb{R} | cx \neq -1\}$

(e) $f(x+y)$

$f(x+y) = \frac{1}{1+(x+y)} = \frac{1}{1+x+y}$
$dom f(x+y) = \{x \in \mathbb{R} | x+y \neq -1\}$

(f) $f(x) + f(y)$

$f(x) + f(y) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} = \frac{(1+y)+(1+x)}{(1+x)(1+y)} = \frac{x+y+2}{(1+y)+(x+xy)}$
$= \frac{x+y+2}{xy+x+y+1}$ $dom f(x) + f(y) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -1, y \neq -1, xy + x + y \neq -1\}$

3. Sean f, g y h tres funciones. Demuestre o de un contraejemplo para determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$

Falsa. Contraejemplo:
$f(x) = x^2$, $g(x) = 3$, $h(x) = 2$
$f(g(x) + h(x)) = (3 + 2)^2 = 25$
$f(g(x)) + f(h(x)) = 3^2 + 2^2 = 13$
$f \circ (g + h) \neq f \circ g + f \circ h$

(b) $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$

Verdadera.
$(g+h) \circ f = (g+h) \circ f(x) = g \circ f(x) + h \circ f(x) = g(f(x)) + h(f(x))$
Por definición $(a + b) \circ c(x) = a \circ c(x) + b \circ c(x)$

$g \circ f + h \circ f = g \circ f(x) + h \circ f(x) = g(f(x)) + h(f(x))$
Por definición $a \circ c(x) + b \circ c(x) = a(c(x)) + b(c(x))$

Por lo tanto $(g+h)\circ f = g\circ f + h\circ f$

(c) $\frac{1}{f\circ g} = \frac{1}{f}\circ g$

Verdadera.
$\frac{1}{f}\circ g = (\frac{1}{f}\circ g)(x) = \frac{1}{f(g)}\circ(x)$
$= \frac{1}{f(g(x))} = \frac{1}{f\circ g}$

(d) $\frac{1}{f\circ g} = f\circ(\frac{1}{g})$

Falsa. Contraejemplo:
$f(x) = 2x$, $g(x) = 5$
$\frac{1}{f(g(x))} = \frac{1}{2(5)} = \frac{1}{10}$
$f(\frac{1}{g(x)}) = 2(\frac{1}{5}) = \frac{2}{5}$
Por lo tanto $\frac{1}{f\circ g} \neq f\circ(\frac{1}{g})$

7. Pruebe que, si f es una función tal que **para toda función** g se satisface que $(f\circ g)(x) = (g\circ f)(x)$ para toda $x\in\mathbb{R}$, entonces $f(x) = x$ para toda $x\in\mathbb{R}$.

Proof. Supongamos que $c\in\mathbb{R}$. Entonces sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por regla de correspondencia, dada por $g(x) = c$, donde c es la función constante.

$$f(c) = f(g(c)) = (f\circ g)(c) = (g\circ f)(c) = g(f(c)) = c$$

Debido a que c fue arbitraria, $f(x) = x$ para todo $x\in\mathbb{R}$

□