Cálculo diferencial e integral I
Resolución de 'Problemas de: números reales'

Vite Riveros Carlos Emilio

20 Agosto 2022

3. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $-(a - b) = b - a$.

Proof. **Demostración:**

$$(b - a) + (a - b) = (b - a) + (a - b)$$

Ley asociativa de la adición (P1):
$$(b - a) + (a - b) = b + (-a + a) + (-b)$$

Ley del inverso aditivo (P3):
$$(b - a) + (a - b) = b + 0 + (-b)$$

Ley del neutro aditivo (P2):
$$(b - a) + (a - b) = b + (-b)$$

P3:
$$(b - a) + (a - b) = 0$$

P2:
$$(b - a) + (a - b) + (-(a - b)) = 0 + (-(a - b))$$

P3:
$$(b - a) + (0) = -(a - b)$$

P2:
$$(b - a) = -(a - b)$$

$\square$

5. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a^2 = b^2$, entonces $a = b$ o $a = -b$.

Proof. **Demostración:**

$$a^2 = b^2$$

$$a^2 + (ab) = b^2 + (ab)$$

Por definición:
$$(a * a) + (ab) = (b * b) + (ab)$$

Por ley distributiva del producto (P9):
$$a(a + b) = b(b + a)$$

Por ley de conmutación aditiva (P4):
$$a(a + b) = b(a + b)$$

Por ley del inverso del producto (P7):
$$a(a + b) * (a + b)^-1 = b(a + b) * (a + b)^-1$$

$$a * 1 = b * 1$$

Por ley del neutro del producto (P6):
$$a = b$$

□

7. Determine si las siguientes afírmaciones son falsas o verdaderas. Pruebe su respuesta.

(a) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a < a + b$.

Proof. *Falso*
Demostración:

$$a = 5 \ b = 0$$

Sustitución de términos:
$$5 < 5 + 0$$

(P2):
$$5 < 5$$

□

(b) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a < a + b$ o $b < a + b$.

Proof. *Verdadero*
Demostración:

□

(c) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, son tales que $a + c < b + d$, entonces $a < b$ y $c < d$.

Proof. *Falso*

Demostración:

$$a = 2\ b = 1\ c = 5\ d = 7$$

Sustitución de términos:

$$a + c < b + d$$
$$2 + 5 < 1 + 7$$
$$7 < 8$$

$$a < b\ 2 < 1$$

y

$$c < d\ 5 < 7$$

□

(d) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, son tales que $ac < bd$, entonces $a < b$ y $c < d$.

Proof. *Falso*

Demostración:

$$a = 8\ b = 1\ c = 0\ d = 3$$

Sustitución de términos:

$$ac < bd$$
$$8 * 0 < 1 * 3$$
$$0 < 3$$

$$a < b\ 8 < 1$$

y

$$c < d\ 0 < 3$$

□

(e) Si $a, b \in \mathbb{R}$, son tales que $ab = a$, entonces $b = 1$.

Proof. *Falso*

Demostración:

$$a = 0\ b = 9$$

Sustitución de términos:

$$ab = a$$

$$(0)(9) = 0$$

Proof. Proposición: Si $a \in \mathbb{R}$, $a * 0 = 0$:
Demostración:

$$a * 0 = b$$
$$b = a * 0$$
(P1):
$$b = a * (a - a)$$

(P9):
$$b = (a * a) - (a * a)$$
(P1):
$$b = 0$$

□

$$a * 0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$b \neq 1$$

□

(f) Si $a, b \in \mathbb{R}$, son tales que $a^2 \leq b^2$, entonces $a \leq b$.

Proof. Falso
Demostración:

$$a = 2\ b = -3$$

Sustitución de términos:
$$a^2 \leq b^2$$

$$4 < 9$$

$$a < b$$

$$2 < -3$$

□

9. Pruebe que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $2ab \leq a^2 + b^2$.

Proof. **Demostración:**

$$(a - 2)^2 \geq 0$$

Por definición de la potenciación:
$(a-2)^2 = (a-2)(a-2)$

(P9):
$(a-2)(a-2) = a(a-b) - b(a-b)$

$$a * a - b * b - b * a + (-b) * (-b)$$

$$a * a = a^2 \; b * b = b^2 \; -ab + (-ab) = 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

(P1):
$(a^2 + b^2) - 2ab \geq 0$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$\square$