Cálculo diferencial e integral I
Resolución de Problemas de Supremo e Ínfimo

Vite Riveros Carlos Emilio

20 octubre del 2022

1. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Demostrar que $u \in \mathbb{R}$ es una cota superior de S si y sólo si las condiciones: $t \in \mathbb{R}$ y $t > u$, implican que $t \notin S$.

   Proof. Primero demostraremos que $t \notin S$. Sabemos que $t > u$ y que por hipótesis u es cota superior de S. Por definición de cota superior, sabemos que $\forall x \in S$, $x \leq u$, y como $u < t$, tenemos entonces:

   $$\forall x \in S,\, x \leq u < t$$
   $$\forall x \in S,\, x < t$$

   Por lo que concluimos que t es una cota superior y que $t \notin S$ al ser estrictamente mayor que cualesquiera elemento de S.

   Ahora demostraremos que u es cota superior de S, sabiendo que $t > u$. Por hipótesis, sabemos que $t \notin S$.

   □

2. Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que está acotado inferiormente. Demostrar que el conjunto $-S = \{-s | s \in S\}$ está acotado superiormente y que:

   $$\inf(S) = -\sup(-S)$$

3. (6.) Sean S y S_0 subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $S_0 \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$ y S acotado superior e inferiormente. Demostrar que:

   $$\inf(S) \leq \inf(S_0) \leq \sup(S_0) \leq \sup(S)$$

4. (8.) Si $S = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| : n, m \in \mathbb{N}\}$, demuestre que S está acotado superior e inferiormente y encuentre $\inf(S)$ y $\sup(S)$. Pruebe su respuesta.