গণিত করব জয়

তামিম শাহ্‌রিয়ার সুবিন
তাহমিদ রাফি

দ্বিমিক প্রকাশনী

শিক্ষা আমাদের মৌলিক অধিকার

#OpenEducation

গণিত করব জয়

তামিম শাহ্‌রিয়ার সুবিন

তাহমিদ রাফি

দ্বিমিক প্রকাশনী

সূচিপত্র

ভূমিকা

বাংলাদেশের শিক্ষার্থীদের একটা বিরাট অংশ তাদের শিক্ষাজীবনের শুরুর দিকেই শিক্ষক কিংবা অভিভাবকের কাছ থেকে জানতে পারে যে অঙ্কে তার মাথা ভালো নয়। প্রাথমিক বিদ্যালয়ে পড়ার সময় তারা প্রথম এই কথাটি শোনে, তারপর মাধ্যমিক বিদ্যালয়ে পড়ার সময় এই একই কথা আরো অনেকবার শোনে। তাদের কেউ কেউ নিজেরা অঙ্কে (গণিতে) ভালো হওয়ার চেষ্টা করে, পরিশ্রম করে পরীক্ষার হলে যায়, এবং তারপর পরীক্ষায় ভালো ফলাফল করতে পারে না।

একসময় শিক্ষার্থীরা আসলেই বিশ্বাস করতে শুরু করে যে, "আমি গণিতে দুর্বল"।

এই গণিতে দুর্বলতার বিষয়টি আমাদের শিক্ষার্থীদের আত্মবিশ্বাসে অত্যন্ত নেতিবাচক ভূমিকা রাখে। যখনই যুক্তি-বুদ্ধি প্রয়োগের বিষয় আসে, যখনই গাণিতিক বিশ্লেষণের বিষয় আসে, তখনই তারা ধরে নেয় যে, সেই জিনিসটি তাদের দিয়ে হবে না। তাই তো আমরা হরহামেশাই এমন প্রশ্ন পাই, "ভাই, আমার প্রোগ্রামিং শেখার অনেক ইচ্ছা। কিন্তু আমি তো গণিতে দুর্বল। আমি কি প্রোগ্রামিং শিখতে পারব?"

কেবল প্রোগ্রামিং নয়, বিজ্ঞান ও প্রকৌশলে জাতি হিসেবে আমাদের পিছিয়ে পড়ার অন্যতম কারণ হচ্ছে গণিতে দুর্বলতা কিংবা দক্ষতার অভাব।

গণিতে দক্ষতা অর্জন করতে তিনটি জিনিস প্রয়োজন। সেগুলো হচ্ছে পড়া, উপলব্ধি করা ও অনুশীলন করা। গণিত বইতে কেবল অনুশীলনীর প্রশ্নগুলোর উত্তর বা সমাধান করলেই হবে না, বরং বই ভালোভাবে পড়তে হবে। আর পড়ার সময় গল্পের বই কিংবা খবরের কাগজ পড়ার মতো পড়লে হবে না, পড়ার সঙ্গে সঙ্গে কী পড়ছি, সেটি উপলব্ধি করার চেষ্টা

করতে হবে। তো আমাদের স্কুলের গণিত বইগুলোতে অনুশীলনী আছে, অনুশীলনীর আগে আলোচনাও আছে (যদিও অনেক শিক্ষার্থীই সেই আলোচনা পড়ে না)। যেই জিনিসটি দরকার, সেটি হচ্ছে সবকিছুকে একই সুতোয় গাঁথা। গণিতের কোন জিনিসটি কেন শিখছি, সেটি কী কাজে লাগছে—এই বিষয়টি উপলব্ধি করা অত্যন্ত জরুরি।

এই বইয়ের মাধ্যমে আমরা চেষ্টা করেছি যেন শিক্ষার্থীরা গণিতের মৌলিক ধারণাগুলো উপলব্ধি করতে পারে। সংখ্যা কীভাবে এল, মানুষ কীভাবে গুণতে শিখলো, সেই আলোচনা থেকে শুরু করে আমরা বীজগণিতের ধারণা, ঐকিক নিয়ম, উৎপাদক ও মৌলিক সংখ্যা, পরিসংখ্যান, সম্ভাব্যতা, সেট, ফাংশন, লগারিদম ইত্যাদি বিষয় নিয়ে কোথাও সংক্ষিপ্ত, আর কোথাও বিস্তারিত আলোচনা করেছি। আমরা কিন্তু বইতে গণিত শেখানোর চেষ্টা করি নি। তাই এই বই পড়ার সঙ্গে সঙ্গে কিংবা পড়ার পরে শিক্ষার্থীদের উচিত হবে স্কুলের গণিত বইগুলো পড়া এবং অনুশীলন করা। তাহলে এই বই পড়ে কী লাভ হবে? এই বইটি পড়ার পরে স্কুলের গণিত বইগুলো আর রহস্যময় কিংবা দুর্বোধ্য মনে হবে না। বরং তখন শিক্ষার্থীরা জানবে তারা কোন জিনিসটি কেন শিখছে এবং শেখার জন্য জোর প্রচেষ্টা চালাবে। আর বইতে গণিতের কঠিন বাংলা শব্দগুলোকে সহজ ভাষায় পাঠকের সঙ্গে পরিচয় করিয়ে দিয়েছি—তাই সেই বাংলা শব্দগুলো গণিত শেখার পথে বাধা হয়ে দাঁড়াতে পারবে না।

আমাদের দুজনের কেউই গণিতবিদ কিংবা গণিত বিশেষজ্ঞ নই—আমাদের লেখাপড়ার বিষয় কম্পিউটার বিজ্ঞান। যেহেতু বাংলাদেশে প্রোগ্রামিংকে জনপ্রিয় করার পেছনে আমরা কাজ করছি, তাই বইতে কয়েক জায়গায় সি কিংবা পাইথন ভাষায় কিছু প্রোগ্রামও লিখে দিয়েছি, যেন শিক্ষার্থীরা প্রোগ্রামিংয়েও কিছুটা উৎসাহ পায়। তবে বইটি পড়ার জন্য প্রোগ্রামিং জানার কোনো প্রয়োজন নেই।

যারা ইতিমধ্যে প্রোগ্রামিং কিছুটা শিখেছে, তারা সেই প্রোগ্রামগুলো দেখতে পারে, বাকিরা না দেখলেও চলবে।

বইটি পড়ে শিক্ষার্থীরা যদি গণিতে আনন্দ খুঁজে পায়, যদি তাদের গণিতভীতি দূর হয়, যদি তারা আত্মবিশ্বাসী হয়ে গণিত শেখার চেষ্টা করে, তাতেই আমাদের আনন্দ ও তুষ্টি। শিক্ষার্থীদের প্রতি নিরন্তর ভালোবাসা রইল।

তামিম শাহরিয়ার সুবিন,
গ্র্যাব ইঞ্জিনিয়ারিং হেডকোয়ার্টার,
সিঙ্গাপুর।

তাহমিদ রাফি,
দ্বিমিক কম্পিউটিং ও দ্বিমিক প্রকাশনী,
ঢাকা।

শাণিত করণ জয়া

লেখক পরিচিতি

তামিম শাহরিয়ার সুবিন

তামিম শাহরিয়ার (ডাকনাম সুবিন)-এর জন্ম ১৯৮২ সালের ৭ নভেম্বর ময়মনসিংহে। গ্রামের বাড়ি কুমিল্লা জেলার চান্দিনা উপজেলার হারং গ্রামে। তাঁর বাবা মো. মোজাম্মেল হক ছিলেন সরকারি কর্মকর্তা এবং মা ফেরদৌসি বেগম গৃহিণী। স্ত্রী সিরাজুম মুনিরা ও পুত্র আরাভ শাহরিয়ারকে নিয়ে বর্তমানে সিঙ্গাপুরে বসবাস করছেন। তিনি বাংলা ভাষায় রচিত কয়েকটি জনপ্রিয় প্রোগ্রামিং বইয়ের লেখক।

লেখাপড়া করেছেন হোমনা সরকারি প্রাথমিক বিদ্যালয়, এ কে উচ্চ বিদ্যালয়, নটর ডেম কলেজ এবং শাহজালাল বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিশ্ববিদ্যালয়ে। ২০০৬ সালে শাহজালাল বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিশ্ববিদ্যালয়ে কম্পিউটার সায়েন্স ও ইঞ্জিনিয়ারিং বিভাগ থেকে পাস করেছেন। বিশ্ববিদ্যালয়ে থাকাকালীন বিভিন্ন প্রোগ্রামিং প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণ করেছেন। পরবর্তী সময়ে (২০০৭ ও ২০০৮ সালে) তিনি এসিএম আইসিপিসি ঢাকা রিজিওনাল-এর বিচারক ছিলেন।

একটি বেসরকারি বিশ্ববিদ্যালয়ে শিক্ষকতা দিয়ে কর্মজীবন শুরু করলেও পরে একটি দেশি সফটওয়্যার নির্মাতা প্রতিষ্ঠানে কাজ করেন। তারপর যুক্তরাষ্ট্রভিত্তিক আরেকটি সফটওয়্যার তৈরির প্রতিষ্ঠানে কাজ করার পর নিজেই প্রতিষ্ঠা করেন মুক্ত সফটওয়্যার লিমিটেড নামক সফটওয়্যার তৈরির একটি প্রতিষ্ঠান। অনলাইন কোর্সের মাধ্যমে প্রোগ্রামিং ও সফটওয়্যার তৈরির নানা বিষয় শিক্ষাদানের জন্য তৈরি করেছেন দ্বিমিক কম্পিউটিং। এ ছাড়া তিনি বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াডে একজন একাডেমিক কাউন্সিলর। বর্তমানে লিড সফটওয়্যার ইঞ্জিনিয়ার হিসেবে কাজ করছেন সিঙ্গাপুরের গ্রাব (Grab) নামক প্রতিষ্ঠানে।

তাহমিদ রাফি

তাহমিদ রাফির জন্ম ১৯৮৮ সালের ১৮ অক্টোবর ঢাকা জেলায়। তিনি সেন্ট যোসেফ উচ্চ বিদ্যালয় থেকে ২০০৪ সালে মাধ্যমিক ও নটর ডেম কলেজ থেকে ২০০৬ সালে উচ্চমাধ্যমিক সম্পন্ন করেন। ২০০৩, ২০০৪ ও ২০০৫ সালে অনুষ্ঠিত আঞ্চলিক গণিত অলিম্পিয়াড প্রতিযোগিতায় চ্যাম্পিয়ন হন তিনি। ২০০৫ সালে মেক্সিকোতে অনুষ্ঠিত ৪৬তম আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াডে অংশগ্রহণকারী প্রথম বাংলাদেশ দলের সদস্য ছিলেন। তিনি বাংলাদেশ প্রকৌশল বিশ্ববিদ্যালয় (বুয়েট) থেকে কম্পিউটার বিজ্ঞান ও ইঞ্জিনিয়ারিং বিভাগ থেকে স্নাতক ডিগ্রি অর্জন করেন ২০১২ সালে।

স্নাতক সম্পন্ন করে তিনি কিছুদিন সফটওয়্যার প্রকৌশলী হিসেবে কাজ করেন। পরবর্তী সময়ে তথ্য ও যোগাযোগ প্রযুক্তি শিক্ষা প্রসারের জন্য তামিম শাহ্‌রিয়ার সুবিনের সঙ্গে তিনি সহপ্রতিষ্ঠাতা হিসেবে প্রতিষ্ঠা করেন দ্বিমিক কম্পিউটিং। এর কিছুদিন পরে তিনি তৈরি করেন দ্বিমিক প্রকাশনী। প্রকাশনীর মাধ্যমে তিনি কম্পিউটার প্রোগ্রামিং ও সফটওয়্যার ডেভেলপমেন্ট-সংক্রান্ত বিভিন্ন বই তৈরি করেছেন। সমসাময়িক সময়ে তিনি বাংলাদেশ কম্পিউটার কাউন্সিল, বেসিস বিআইটিএম, বিডিওএসএন, কোড ইট গার্লসহ বিভিন্ন প্রতিষ্ঠান কর্তৃক আয়োজিত প্রোগ্রামিং ট্রেনিং প্রোগ্রামে ইন্সট্রাক্টর হিসেবে দায়িত্ব পালন করেন।

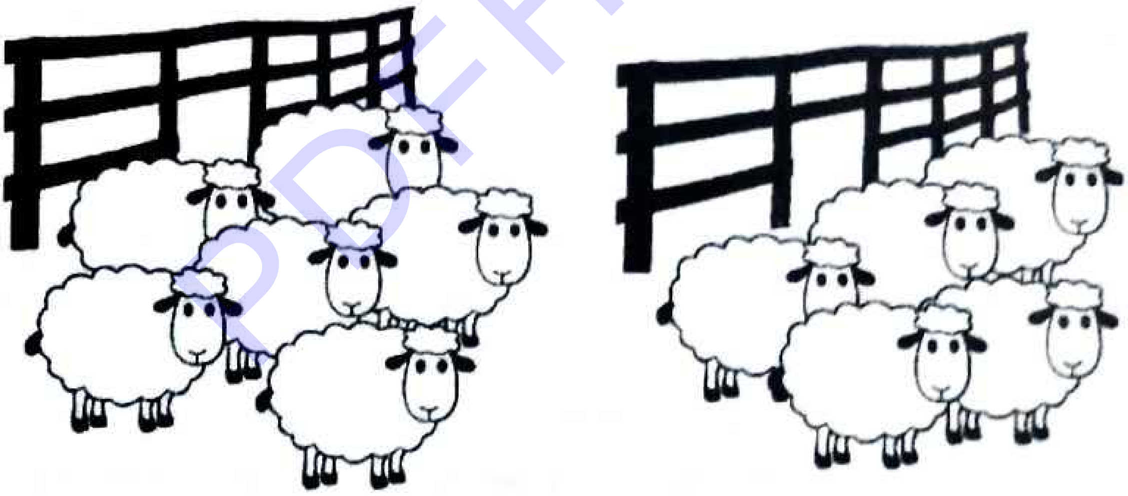
অধ্যায় ১ : সংখ্যা ও গণনা

গণিত শব্দটা এসেছে গণনা থেকে। গণনা করার শাস্ত্রই হচ্ছে গণিত। তো আমরা গণনার জন্য কোন টুল ব্যবহার করি? সেই টুল হচ্ছে সংখ্যা। আর সংখ্যা প্রকাশ করি কীভাবে? বিভিন্ন অঙ্ক ও সেগুলোর স্থানের সাহায্যে। টুল শব্দটি শুনলেই আমাদের কাছে হাতুড়ি, করাত—এরকম জিনিসের কথা চোখের সামনে ভেসে ওঠে। তো গণিতের মধ্যে এই হাতুড়ি-করাত এল কীভাবে? টুল (tool) হচ্ছে একটি ইংরেজি শব্দ, যার অর্থ সরঞ্জাম। একটি নির্দিষ্ট টুল কিংবা সরঞ্জাম দিয়ে আমরা একটি নির্দিষ্ট কাজ করি, যেমন করাত দিয়ে কাঠ কাটি। তো গণিতেও কিন্তু বিভিন্ন টুল রয়েছে, যেগুলো দিয়ে নির্দিষ্ট কাজ করা হয়। যেমন, গণনা একটি নির্দিষ্ট কাজ আর সেই কাজের জন্য একটি অপরিহার্য টুল হচ্ছে সংখ্যা।

অঙ্ক কী? অঙ্ককে ইংরেজিতে বলে ডিজিট (digit)। আমাদের প্রচলিত সংখ্যা পদ্ধতিতে 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9—এই দশটি অঙ্ক আছে। অ, আ, ই, ঈ ইত্যাদি যেমন বর্ণ, আর বর্ণগুলো ব্যবহার করে শব্দ তৈরি হয়। তেমনি 0 থেকে 9 পর্যন্ত অঙ্কগুলো ব্যবহার করে বিভিন্ন সংখ্যা তৈরি করা যায়। আচ্ছা, সংখ্যা তৈরি করতে হলে কী সব সময় অঙ্ক ব্যবহার করতে হয়? আসলে অঙ্ক ছাড়াও সংখ্যা তৈরি করা যায়!

সংখ্যার ধারণা কীভাবে এল? মানে, মানুষ কখন সংখ্যা ও তার প্রয়োজনীয়তা বুঝতে পারল? ধারণা করা হয়, হাজার হাজার বছর আগে, যখন মানুষ পশুপালন শুরু করল, তখন থেকেই সংখ্যার প্রয়োজনীয়তা দেখা দিল। পশুপালনের আগে মানুষ ছিল শিকারি, প্রয়োজনমতো পশুপাখি শিকার করে তারা ক্ষুধা মেটাত। কিন্তু পরবর্তী সময়ে মানুষ কৃষিকাজ ও পশুপালন শুরু করে। তখন তারা গরু-ছাগল-ভেড়া-মেষ ইত্যাদি প্রাণীকে পোষ মানায়। এগুলো রাখতে হতো একটি নির্দিষ্ট জায়গায়, সকালে ছেড়ে দিত, সন্ধ্যায় আবার ফিরিয়ে আনতে হতো। কিন্তু প্রায়ই সেই পোষা প্রাণীগুলো হারিয়ে

যেত। আর সেই যুগে মানুষের কিন্তু সংখ্যার কোনো ধারণা ছিল না বা সীমিত ধারণা ছিল। মনে করা হয়, মানুষ তখন কোনো জিনিস একটি থাকলে বুঝত যে একটি আছে, দুটি জিনিস থাকলে বুঝত দুটি আছে, আর যখনই দুইয়ের বেশি জিনিস দেখত, তখন ঠিক ঠাহর করতে পারত না, দুইয়ের বেশি হলেই মনে করত অনেকগুলো আছে। কী অদ্ভুত শোনাচ্ছে এখন! সে যা-ই হোক, মানুষ বুঝতে পারল যে, পালিত পশুগুলো ঠিকমতো খামারে ফিরছে না। তখন তাদের মধ্যে কেউ একজন, একটি পদ্ধতি বের করল। সকালে যতগুলো পশু খামার থেকে বের হয়, ততগুলো ছোট পাথর আলাদা জায়গায় সরিয়ে রাখে। আবার সন্ধ্যায় ততগুলো পাথর আবার আগের জায়গায় সরিয়ে রাখে। যদি পাথর বেশি থেকে যায়, তাহলেই বুঝে নেয় যে হিসাবে গড়বড়, সবগুলো ভেড়া (বা ছাগল বা গরু বা মোষ) খামারে ফেরেনি। সবাই যে হিসাবটা পাথর দিয়ে করত তা নয়, কেউ কেউ হয়তো মাটিতে দাগ কাটত, আবার সেই দাগগুলো মুছে ফেলত। যতগুলো দাগ রয়ে যেত, ততগুলো পশু খামারে ফেরেনি।



||||||

সকালবেলা প্রতিটি ভেড়ার জন্য মাটিতে একটি করে দাগ কাটা হলো

সন্ধ্যাবেলায় প্রতিটি ভেড়ার দাগ মুছে মুছে দেখা গেল একটি ভেড়া কম রয়েছে

ছবি 1.1

তাহলে আমরা জানতে পারলাম, কখন থেকে গণনার প্রয়োজনীয়তা দেখা দিল এবং মানুষ কীভাবে গণনা শুরু করল। এভাবে গণনা করতে করতে মানুষ দুটি জিনিস পরিমাণে সমান কি না, তাও বুঝতে শিখল। যেমন, সন্ধ্যায় দাগ মোছার পরে কোনো দাগ যদি বাকি রয়ে যায়, তার মানে হচ্ছে, সকালে যতগুলো পশু খামার থেকে বের হয়েছিল আর সন্ধ্যায় যতগুলো পশু ফিরে এল, সংখ্যা দুটি সমান নয়। এসব কিন্তু মানুষ এক দিনে আবিষ্কার করেনি। যদিও বিষয়গুলো তোমার কাছে খুব সহজ মনে হচ্ছে; মানুষের এগুলো বুঝতে বছরের পর বছর, যুগের পর যুগ সময় লেগে গিয়েছিল।

পৃথিবীর বিভিন্ন জায়গায় মানুষ বিভিন্ন সময়ে নিজেরাই সংখ্যার আবিষ্কার করেছে। আর গণনার কাজে হাতে দশটি আঙুল থাকায় আস্তে আস্তে দশভিত্তিক সংখ্যার ব্যবহার শুরু হয়। তবে সবচেয়ে যুগান্তকারী আবিষ্কার হচ্ছে শূন্যের আবিষ্কার। প্রাচীন ভারতবর্ষে শূন্যের আবিষ্কার হয়, আর পরবর্তী সময়ে আরবরা এটি শিখে নেয় আর তারপর আরবদের কাছ থেকে ইউরোপের মানুষ শূন্যের ধারণা জেনে নেয়। শূন্য আবিষ্কার করে কী লাভ হলো?

এই শূন্যের কারণেই কিন্তু আমরা দশটি অঙ্ক দিয়ে যেকোনো সংখ্যা তৈরি করতে পারি। সংখ্যার মান নির্ভর করে অঙ্কগুলো কোথায় বসাচ্ছি, তার ওপর। ধরা যাক, একটি সংখ্যা 132 (একশ বত্রিশ)। এই সংখ্যায় তিনটি অঙ্ক ব্যবহার করা হয়েছে : 1, 3 ও 2। আবার অঙ্কগুলোর স্থান পরিবর্তন করে যদি লিখি 321 (তিনশ একুশ), সেটি আরেক সংখ্যা বোঝায়, যা কিনা 132-এর চেয়ে অনেক বড় সংখ্যা। এখানেই কিন্তু এককের ঘর, দশকের ঘর, শতকের ঘর—এসব ব্যাপারগুলো চলে আসে। এককের ঘরে যখন কোনো অঙ্ক বসিয়ে কোনো কিছু গণনা করব, তখনই সেটি একটি সংখ্যা হয়ে যাবে। যেমন, 3টি কলম, 8টি গাড়ি, 6টি উইকেট, 0 রান। এখানে একটি অঙ্ক দিয়ে একটি সংখ্যা তৈরি করা হয়েছে। যখনই আমরা দুই অঙ্কের কোনো সংখ্যা তৈরি করব, তখন সবচেয়ে ডানদিকের ঘরকে বলব এককের ঘর, ডানদিক থেকে দ্বিতীয় ঘরটিকে বলব দশকের ঘর। যেমন 47। এখানে এককের ঘরে আছে 7, আর দশকের ঘরে আছে 4। দশকের ঘরে 4 দেওয়ার

অর্থ হচ্ছে 4টি 10 আর এককের ঘরে 7 দেওয়ার অর্থ হচ্ছে 7টি 1। সুতরাং সংখ্যাটির মান হচ্ছে $4 \times 10 + 7 \times 1 = 40 + 7 = 47$। দশকের ঘরে যেই অঙ্কটি আছে, সেটি ওই সংখ্যায় তার মানের সঙ্গে দশ গুণ করলে যেই সংখ্যা পাওয়া যায়, তত মান রক্ষা করে। আর এককের ঘরের অঙ্কের মানের সঙ্গে 1 গুণ করলে সেই অঙ্কের প্রকৃত মান পাওয়া যায়। বাংলা ভাষায় কথাটি একটু জটিল মনে হলেও গণিতের ভাষায় কিন্তু খুব সহজ কথা বলেছি। এককের ঘরে যদি 0, 1, 2, 3 ইত্যাদি অঙ্ক ব্যবহার করা হয়, তাহলে সেটিই হচ্ছে ওই সংখ্যার এককের ঘরের মান, আর এগুলোকে এক দিয়ে গুণ করলে মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। আর দশকের ঘরের অঙ্কটির সংখ্যা মান বের করতে হলে তাকে দশ দিয়ে গুণ করতে হবে।

তাহলে 47 সংখ্যাটিতে,

7-এর সংখ্যামান হচ্ছে,	7
4-এর সংখ্যামান হচ্ছে,	40
তাহলে মোট যোগফল,	47

এভাবে 252 সংখ্যাটিতে,

এককের ঘরের 2-এর সংখ্যামান,	2
দশকের ঘরের 5-এর সংখ্যামান,	50 (5-কে 10 দিয়ে গুণ করে)
শতকের ঘরের 2-এর সংখ্যামান,	200 (2-কে 100 দিয়ে গুণ করে)
যোগ করলে পাওয়া যায়,	252 (200 + 50 + 2)

শতক দশক একক

2 5 2

2টি এক = 2 × 1 = 2

5টি দশ = 5 × 10 = 50

2টি শত = 2 × 1 = 200

= 252

দশক একক

4 7

7টি এক = 7 × 1 = 7

4টি দশ = 4 × 10 = 40

= 47

ছবি 1.2

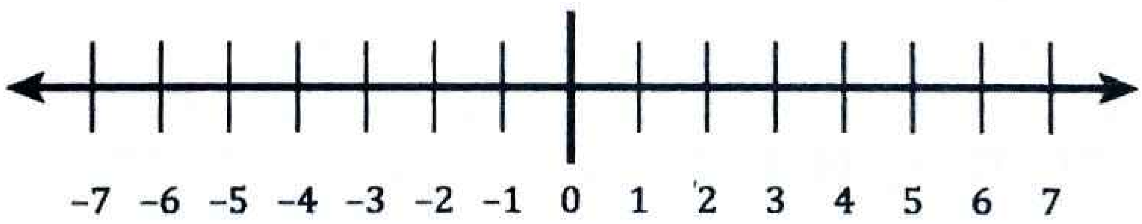
আশা করি, তোমরা বুঝতে পেরেছ, আর বুঝতে না পারলে কিছুক্ষণ পরে আবার পড়লে তখন বুঝতে পারবে।

পৃথিবীর সবচেয়ে ছোট সংখ্যা আর বড় সংখ্যা

পৃথিবীর সবচেয়ে বড় সংখ্যা বের করার কোনো উপায় নেই। এই কথাটি কি তুমি প্রমাণ করতে পারবে? চেষ্টা করে দেখো। আমি একটি প্রমাণ দিচ্ছি। ধরা যাক, তুমি আমাকে বললে যে, পৃথিবীর সবচেয়ে বড় সংখ্যাটি হচ্ছে n। এখন, সেই সংখ্যার সঙ্গে যদি আমি এক যোগ করি, সেটি হবে $n+1$, যা অবশ্যই n-এর চেয়ে বড়। তার মানে n পৃথিবীর সবচেয়ে বড় সংখ্যা হতে পারে না। তুমি n-এর জায়গায় যেই সংখ্যাই বসাও না কেন, তার সঙ্গে 1 যোগ করে n-এর চেয়ে বড় সংখ্যা পাওয়া সম্ভব। তেমনি সবচেয়ে ছোট সংখ্যাও নেই। তুমি যত ছোট সংখ্যাই বের করো না কেন, সেটি থেকে 1 বিয়োগ করে, তার চেয়ে ছোট সংখ্যা পাওয়া সম্ভব। এখন আমার প্রশ্ন হচ্ছে, যদি n সবচেয়ে বড় সংখ্যা হতো, তাহলে সবচেয়ে ছোট সংখ্যাটি কী হতো? উত্তর হচ্ছে, $-n$। এই ঋণাত্মক সংখ্যার ধারণা কীভাবে এল? উত্তর খোঁজার জন্য, চলো আমরা একটু সংখ্যারেখা বুঝে নিই।

সংখ্যারেখা

সংখ্যারেখা হচ্ছে সেই রেখা, যার ওপর পৃথিবীর সমস্ত সংখ্যা আছে। এই রেখার একেবারে মাঝখানে যেই সংখ্যাটি আছে, সেটি হচ্ছে 0।



ছবি 1.3

ছবি 1.3টি ভালো করে দেখো। একেবারে মাঝখানে হচ্ছে 0, তারপরে তার ডানদিকে নির্দিষ্ট দূরত্বে $1, 2, 3, 4, 5$ ইত্যাদি আছে। আর 0-এর বামদিকেও একইভাবে নির্দিষ্ট দূরত্বে $-1, -2, -3, -4, -5$ ইত্যাদি আছে। ছবির

একেবারে ডানদিকে আর একেবারে বামদিকে তিরচিহ্ন দিয়ে বোঝানো হয়েছে যে সংখ্যাগুলো দুই দিকেই চলতে থাকবে। এখন প্রশ্ন হচ্ছে ডানদিকে কত পর্যন্ত চলবে? উত্তর হচ্ছে পৃথিবীর সবচেয়ে বড় সংখ্যা পর্যন্ত। আসলে সবচেয়ে বড় সংখ্যা বলে তো কিছু নেই। তাহলে আমরা বলতে পারি, অসীম পর্যন্ত। ইংরেজি ভাষায় অসীমকে বলা হয় ইনফিনিটি (infinity)। অসীম কিন্তু কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা নয়। এটি হচ্ছে অনেক অনেক অনেক বড় একটি সংখ্যা বা পৃথিবীর সবচেয়ে বড় সংখ্যা। কিন্তু সেই সংখ্যার কোনো নির্দিষ্ট মান নেই, কারণ সবচেয়ে বড় সংখ্যা বলে কিছু নেই। তাই এটি কেবল একটি ধারণা মাত্র। তেমনি সংখ্যারেখার সবচেয়ে বামদিকে আছে ঋণাত্মক অসীম (negetive infinity)।

সংখ্যারেখাতে পরপর দুটি সংখ্যার মধ্যে সমান দূরত্ব থাকবে। আর সংখ্যারেখায় যেকোনো সংখ্যার মান, তার আগের সংখ্যার মানের চাইতে এক (1) বেশি। অর্থাৎ, সংখ্যারেখায় কোনো সংখ্যা যদি x হয়, তাহলে তার পরবর্তী সংখ্যাটি হবে $x+1$, আর পূর্ববর্তী সংখ্যাটি হবে $x-1$। সংখ্যারেখার ছবিটির ওপর তোমরা যেসব সংখ্যা দেখতে পাচ্ছ, সবগুলোই হচ্ছে পূর্ণসংখ্যা। ইংরেজিতে বলে ইন্টিজার নাম্বার (integer number)।

সংখ্যারেখায় 0 এবং তার ডানদিকের সকল সংখ্যা হচ্ছে ধনাত্মক সংখ্যা (positive number) ও 0-এর বামদিকের সকল সংখ্যা হচ্ছে ঋণাত্মক সংখ্যা (negative number)। খেয়াল করো, 0 কিন্তু ধনাত্মক। একটি ব্যাপার তোমরা নিশ্চয়ই বুঝতে পারছ যে, সংখ্যারেখায় কোনো একটি পূর্ণসংখ্যা, 0-এর ডানদিকে যত ঘর পরে আছে, সেই সংখ্যাটির ঋণাত্মক মানের একটি সংখ্যা, 0-এর তত ঘর বামদিকে পাওয়া যাবে। অর্থাৎ, 0-এর দশ ঘর ডানদিকে 10 থাকলে, 0-এর দশ ঘর বামদিকে -10 থাকবে।

বাস্তব জীবনে কি ঋণাত্মক সংখ্যার ব্যবহার আছে? ধরা যাক, আমার কাছে 100 টাকা আছে, আর আমি সেই টাকা খরচ করে ফেললাম। তাহলে এখন আমার কাছে 0 টাকা আছে। তারপরে আমি আমার বন্ধুর কাছ থেকে 100 টাকা ধার নিলাম, এবং সে টাকাটাও খরচ করে ফেললাম। তাহলে এখন আমার কাছে -100 টাকা আছে।

জোড় ও বেজোড় সংখ্যা

0 হচ্ছে একটি জোড় সংখ্যা, ইংরেজিতে বলে ইভেন নাম্বার (even number)। 0 থেকে 2 ঘর করে ডানদিকে ও বামদিকে যেতে থাকলে যত সংখ্যা পাওয়া যাবে, সবই হচ্ছে জোড় সংখ্যা (2, 4, 6, 8, −2, −4, −6, −8 ইত্যাদি)। আর বাকি সংখ্যাগুলো হচ্ছে বেজোড় সংখ্যা (1, 3, 5, −1, −3, −5 ইত্যাদি)। বেজোড় সংখ্যার ইংরেজি হচ্ছে অড নাম্বার (odd number)।

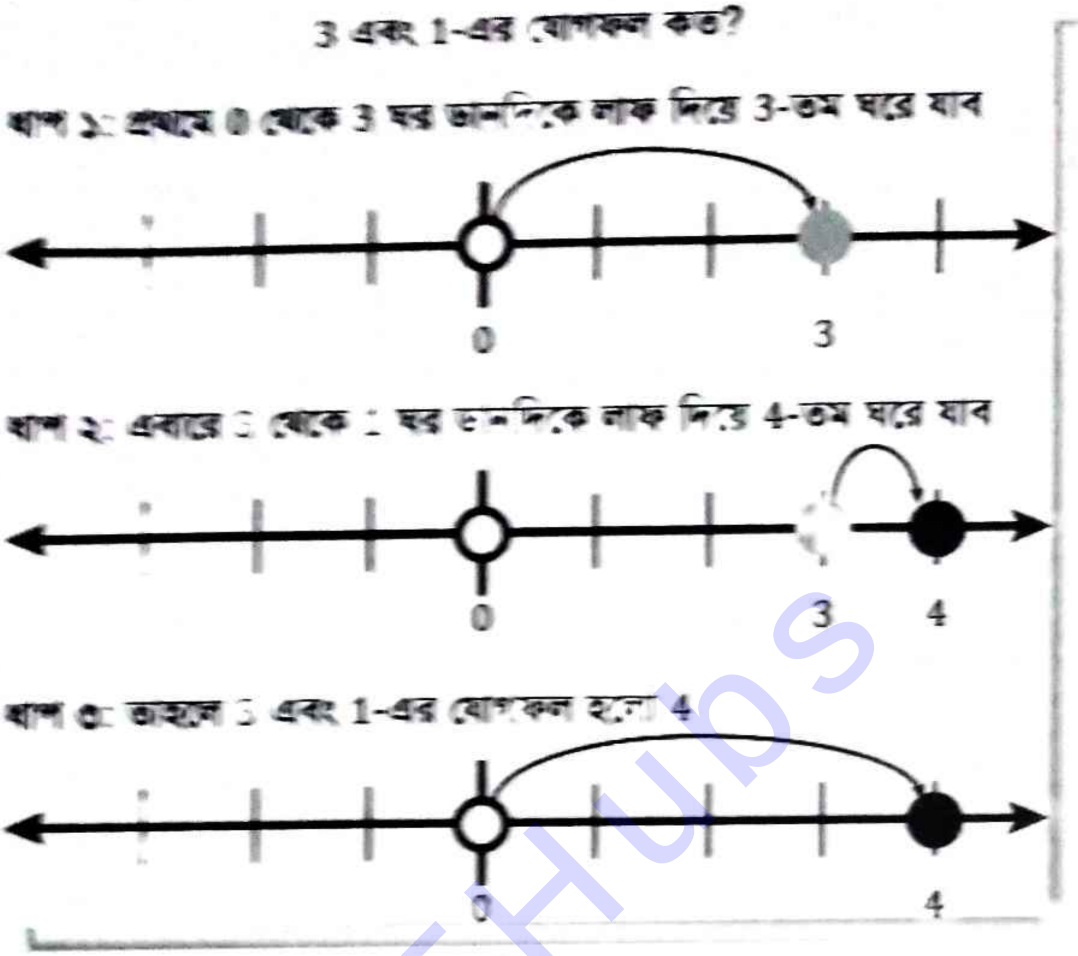
গাণিতিক অপারেশন

যোগ

সংখ্যারেখার সাহায্যে কিন্তু আমরা যোগের কাজ করতে পারি। যেমন, আমাকে বলা হলো, 3-এর সঙ্গে 1 যোগ করতে। তখন আমি করব কী, প্রথমে 0 থেকে শুরু করে 3 ঘর ডানদিকে যাব, তারপরে আরো 1 ঘর ডানদিকে যাব। এখন আমি কত নম্বর ঘরে? উত্তর হচ্ছে 4 নম্বর ঘরে। তাই যোগফল হবে 4 (ছবি 1.4)। আবার যদি বলা হয়, 4-এর সঙ্গে −2 যোগ করতে, তাহলে প্রথমে আমি 0 থেকে 4 ঘর ডানদিকে যাব। তারপর আমাকে আরো 2 ঘর যেতে হবে, তবে সেটি হচ্ছে বামদিকে, কারণ আমাকে বলা হয়েছে −2 যোগ করতে। এখন 4 থেকে 2 ঘর বামদিকে গেলে আমি আসব 2-এর ঘরে। তাহলে 4 ও −2-এর যোগফল হচ্ছে 2। আবার −1 ও −1-এর যোগফল কী হবে? প্রথমে 0 থেকে 1 ঘর বামদিকে যাব। তারপর আরো 1 ঘর বামদিকে। তাহলে আমরা −2 ঘরে চলে আসব। তাই −1 ও −1-এর যোগফল হচ্ছে −2।

এই যে যোগ করা, এটি একটি গাণিতিক অপারেশন (operation)। এরকম বিয়োগ, গুণ, ভাগ এসবও হচ্ছে গাণিতিক অপারেশন।

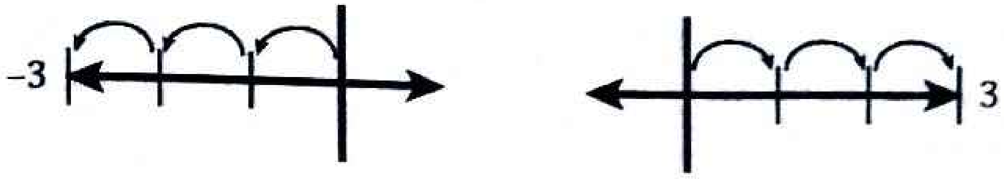
3 এবং 1-এর যোগফল কত?



ছবি 1.4

বিপরীত সংখ্যা

কোন সংখ্যার সঙ্গে যে সংখ্যাটি যোগ করলে যোগফল শূন্য হয়, তাকে সেই সংখ্যাটির বিপরীত সংখ্যা বলে। বিপরীত সংখ্যার ইংরেজি হচ্ছে অপোজিট নম্বর (opposite number)। আরো সঠিকভাবে কাঠখোট্টা গাণিতিক ভাষায় বললে বলা উচিত, যোগাত্মক বিপরীত (additive inverse) সংখ্যা। যেমন 5-এর সঙ্গে কোন সংখ্যাটি যোগ করলে যোগফল শূন্য (0) হবে? উত্তর হচ্ছে −5। তাহলে 5-এর বিপরীত সংখ্যা হচ্ছে −5। তেমনি −5-এর বিপরীত সংখ্যা হচ্ছে 5। তার মানে একটি সংখ্যা সংখ্যারেখায় 0 থেকে যেদিকে ও যতদূরে আছে, তার উলটো দিকে 0 থেকে ততদূরে সংখ্যারেখার ওপর তার বিপরীত সংখ্যাটি পাওয়া যাবে। গণিতের ভাষায় যে দুটো সংখ্যাকে যোগ করলে যোগফল শূন্য হয়, তারা একে অপরের যোগাত্মক বিপরীত (additive inverse) সংখ্যা।



শূন্য থেকে তিনবার বামদিকে লাফ দিলে আমরা পৌঁছবো –3-এর ঘরে

শূন্য থেকে তিনবার ডানদিকে লাফ দিলে আমরা পৌঁছবো 3-এর ঘরে

তাই 3 এবং –3 হচ্ছে পরস্পর যোগাত্মক বিপরীত সংখ্যা

ছবি 1.5

বিয়োগ

এখন সংখ্যারেখা ব্যবহার করে বিয়োগের কাজ আমরা কীভাবে করব? ধরা যাক, আমাকে বলা হলো 9 থেকে 4 বিয়োগ করতে। আমি প্রথমে করব কী, 4-এর বিপরীত সংখ্যাটি বের করব, যেটি হচ্ছে –4। তারপর সেই সংখ্যাকে 9-এর সঙ্গে যোগ করে দেব (ছবি 1.6)। আর যোগ কীভাবে করতে হয়, সেটি আমরা আগেই জেনেছি। আবার ধরা যাক, –9 থেকে –3 বিয়োগ করতে হবে। –3 এর বিপরীত সংখ্যা হচ্ছে 3। তাহলে –9-এর সঙ্গে 3 যোগ করে দেব। যোগফল হবে –6। কারণ প্রথমে আমরা সংখ্যারেখায় 0-এর বামদিকে 9 ঘর যাব, তখন আমরা থাকব –9-তম ঘরে। তারপরে আবার 3 ঘর ডানদিকে আসব। তখন আমরা আসব –6-তম ঘরে। আর এই –6 হচ্ছে আমাদের প্রত্যাশিত বিয়োগফল।

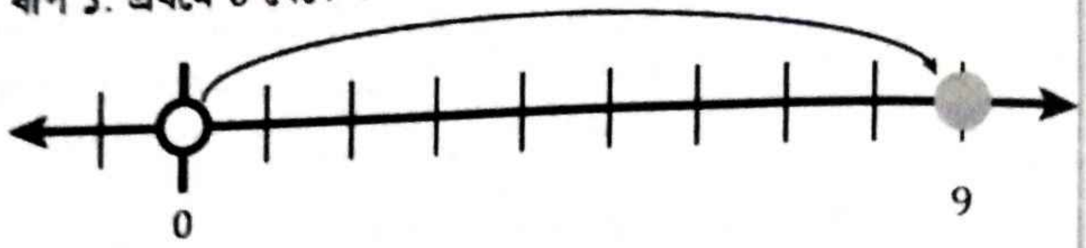
আমরা আগের উদাহরণে যে কাজটি করেছি, সেটিকে অনেক সময় সংক্ষেপে অনেকে বলে "মাইনাসে মাইনাসে প্লাস"। এটি কেন হয় সেটি আমরা সংখ্যারেখা ব্যবহার করে বুঝে ফেললাম।

গুণ

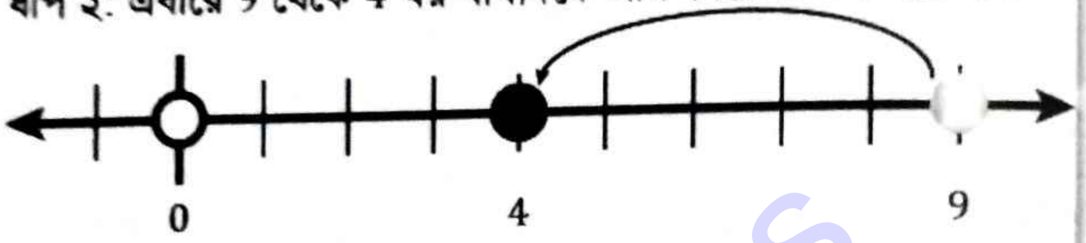
আচ্ছা, 4-কে যদি 3 দিয়ে গুণ করতে বলা হয়, তাহলে আমরা আসলে কী করি? অনেকেই নামতা ব্যবহার করে বলে দিই যে, উত্তর হচ্ছে 12। কিন্তু এখানে কী কাজ করা হয়? 0-এর সঙ্গে 4-কে 3 বার যোগ করা হয়,

9 এবং 4-এর বিয়োগফল কত?

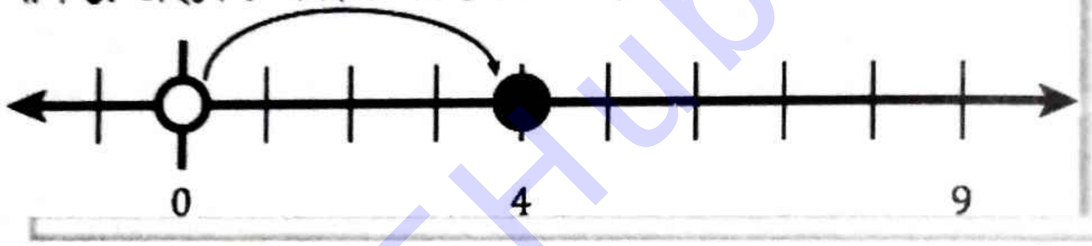
ধাপ ১: প্রথমে 0 থেকে 9 ঘর ডানদিকে লাফ দিয়ে 9-তম ঘরে যাব



ধাপ ২: এবারে 9 থেকে 4 ঘর বামদিকে লাফ দিয়ে 5-তম ঘরে যাব



ধাপ ৩: তাহলে 9 এবং 4-এর যোগফল হলো 5

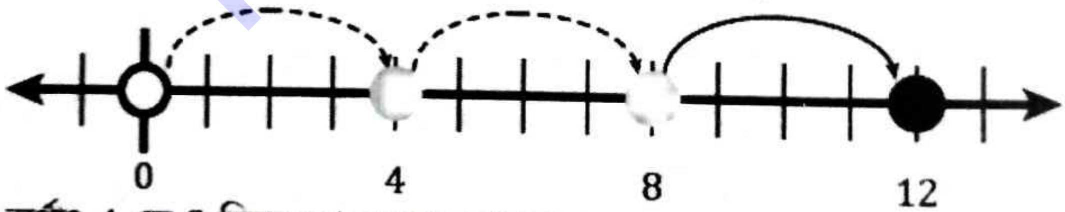


ছবি 1.6

4কে 3 দিয়ে গুণ করলে কত হয়?

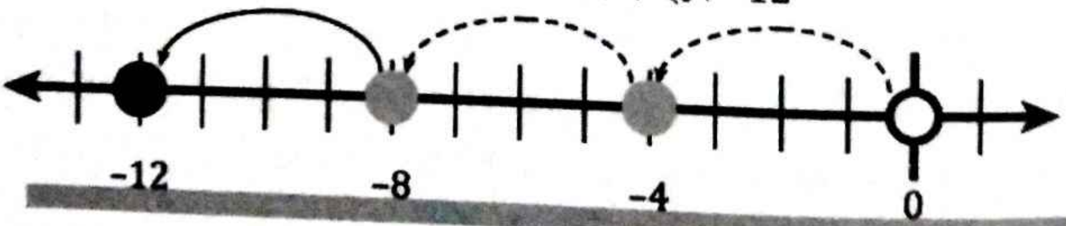
ধাপ ১ : প্রথমে 0 থেকে শুরু করে প্রতিবারে 4 ঘর করে ডানদিকে লাফ দেব

ধাপ ২ : এভাবে 3 বার লাফ দিয়ে 12-তম ঘরে পৌঁছব



অর্থাৎ 4-কে 3 দিয়ে গুণ করলে গুণফল হবে 12

একইভাবে –4-কে 3 দিয়ে গুণ করলে গুণফল হবে –12



ছবি 1.7

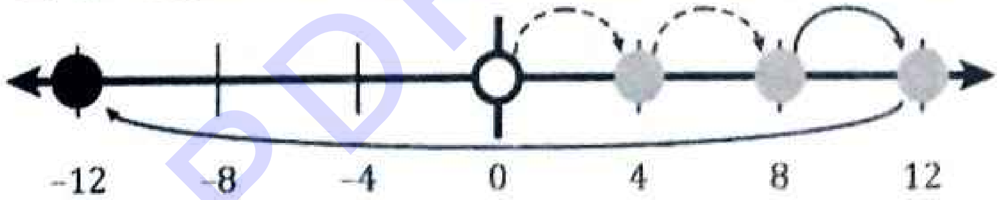
$$0 + 4 + 4 + 4 = 12$$

সংখ্যারেখার দিকে যদি আমরা তাকাই, তাহলে আমরা আসলে 0 থেকে শুরু করে 3 বার 4 ঘর করে লাফ দেব। কোন দিকে লাফ দেব? ধনাত্মক দিকে। তাহলে আমরা 12 ঘরে পৌঁছে যাব। আবার যদি বলা হয়, -4 কে 3 দিয়ে গুণ করতে, তাহলে কী করব? এবারও 0 থেকে 3 বার লাফ দেব এবং প্রতি লাফে 4 ঘর পার হয়ে যাব। তবে এবারে আমরা ঋণাত্মক দিকে লাফ দেব। তাহলে -12 ঘরে পৌঁছে যাব। তাই -4×3 হচ্ছে -12 (ছবি 1.7)।

আবার যদি বলা হয়, 4-কে -3 দিয়ে গুণ করতে? তাহলে আমরা তিনবার লাফ দিয়ে 12-তে পৌঁছে যাব। আর তারপরে 3-এর আগে যেহেতু বিয়োগ চিহ্ন ($-$) রয়েছে, তাই এক লাফে 12-এর বিপরীত সংখ্যাতে চলে যাব, অর্থাৎ, -12-তে চলে যাব।

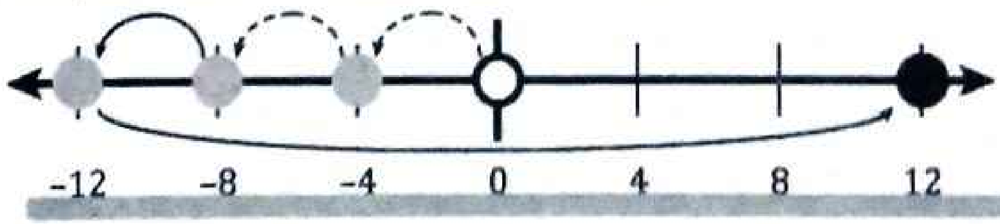
4কে -3 দিয়ে গুণ করলে কত হয়?

ধাপ ১ : প্রথমে 0 থেকে শুরু করে প্রতিবারে 4 ঘর করে ডানদিকে লাফ দেব
ধাপ ২ : এভাবে 3 বার লাফ দিয়ে 12-তম ঘরে পৌঁছব
ধাপ ৩ : এবারে একলাফ দিয়ে 12-এর বিপরীত ঘর অর্থাৎ, -12-এ চলে যাব



সুতরাং 4-কে -3 দিয়ে গুণ করলে গুণফল হবে -12

একইভাবে -4-কে -3 দিয়ে গুণ করলে গুণফল হবে 12



ছবি 1.8

আর -4-কে -3 দিয়ে গুণ করতে হলে কী করব? প্রথমে ঋণাত্মক দিকে তিনবার লাফ দিয়ে -12 ঘরে পৌঁছে যাব। তারপরে এক লাফে -12-এর

বিপরীত সংখ্যার ঘরে চলে যাব, অর্থাৎ 12-তে পৌঁছে যাব, কারণ আমাদেরকে –3 দিয়ে গুণ করতে বলা হয়েছে (ছবি 1.8)।

আসলে গুণ করা হচ্ছে বারবার যোগ করার শর্টকাট। এখানে আমরা এক ঘর করে যাওয়ার বদলে যত দিয়ে গুণ করতে বলা হয়েছে, তত ঘর করে লাফ দিই আরকি।

এখন আমরা পাইথন প্রোগ্রামিং ভাষায় একটি প্রোগ্রাম লিখব, যার কাজ হবে যোগ করে গুণের কাজ করা।

```
n = 100
m = 99
result = 0

for i in range(m):
    result = result + n

print(result, n * m)
```

ওপরের প্রোগ্রামে আমরা যোগ করে গুণের কাজ করলাম (একটি লুপ চালিয়ে)। তারপরে ফলাফল প্রিন্ট করলাম। আবার (n * m)-এর মানও প্রিন্ট করলাম। তাহলে আউটপুট আসবে এরকম :

```
9900 9900
```

তোমাদের যাদের কম্পিউটার আছে, তোমরা প্রোগ্রামটি নিজে নিজে লিখে ফেলো এবং n ও m-এর বিভিন্ন মান ব্যবহার করে পরীক্ষা-নিরীক্ষা করো।

ভাগ

এবারে আসা যাক ভাগের কাজে। আচ্ছা, 4-কে 2 দিয়ে ভাগে করলে ফলাফল কত? উত্তর হচ্ছে 2। 9-কে 3 দিয়ে ভাগ করলে কত পাওয়া যাবে? উত্তর হচ্ছে 3। এগুলো কীভাবে বলতে পারলাম? কারণ 2টা 2 যোগ করলে

4 হয়। 3টা 3 যোগ করলে 9 হয়। সংখ্যারেখার সাহায্যে ব্যাপারটা খুব সহজে ব্যাখ্যা করা যায়। ধরা যাক, আমাকে বলা হলো, 6-কে 3 দিয়ে ভাগ করতে হবে। তাহলে সংখ্যারেখায় আমি প্রথমে 6-এর ঘরে চলে যাব। এখন আমার কাজ হচ্ছে 3 বার লাফ দিয়ে 0-এর ঘরে চলে আসা। কিন্তু লাফগুলো সমান হতে হবে। এখন আমি যদি 2 ঘর করে লাফাই, তাহলে তিন লাফে আমি 0-তে চলে আসব। তাহলে আমার ভাগফল হচ্ছে 2। কিন্তু আমি কীভাবে বুঝলাম যে আমাকে 2 ঘর করে লাফাতে হবে? সেটি বের করার জন্য কিন্তু আমাকে প্রথমে 3 ঘর করে লাফ দিতে হবে। আমি যদি 6 থেকে 3 ঘর করে লাফ দিয়ে 0-তে পৌঁছতে চাই, তাহলে আমাকে 2 বার লাফ দেওয়া লাগবে।

আবার যদি জিজ্ঞাসা করি, 6-কে কত দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল 2 হবে? ভাগফল যেহেতু 2, তার মানে হচ্ছে প্রতিবার আমি 2 ঘর করে লাফ দিতে পারব। তাহলে প্রথম লাফে আমি 4-এ চলে আসব (কারণ যেদিকে 0 আছে, আমি সেদিকে লাফ দেওয়ার চেষ্টা করছি)। দ্বিতীয় লাফে আমি 2-এ চলে আসব। আর তৃতীয় লাফে চলে আসব 0-এর ঘরে। তাহলে আমার মোট 3 বার লাফ দেওয়ার প্রয়োজন পড়ল। তাই 6-কে 3 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল 2 হবে।

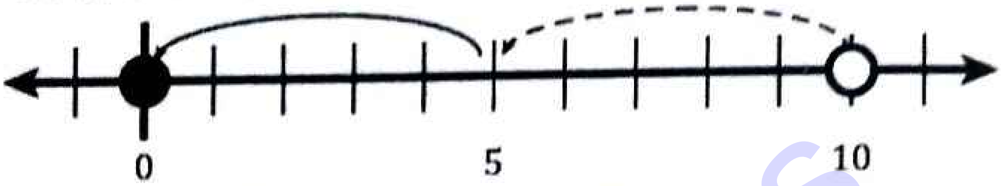
ভাগের আরো একটি উদাহরণ দিই। 10-কে 2 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল কত হবে? উত্তর আমি এখনো জানি না। ধরা যাক, আমি এক ঘর করে লাফ দিলাম। আমি কেবল 2টি লাফ দিতে পারব, কারণ 2 ভাগে ভাগ করতে বলা হয়েছে। একঘর করে লাফ দিলে দুই লাফে আমি 8-এর ঘরে যেতে পারব। তাহলে হচ্ছে না। আমি যদি দুই ঘর করে লাফ দিই, তাহলে যেতে পারব 6-এর ঘরে, তিন ঘর করে লাফ দিলে দুই লাফে যেতে পারব 4-এর ঘরে, চার ঘর করে লাফ দিলে যেতে পারব 2-এর ঘরে, আর পাঁচ ঘর করে লাফ দিলে দুই লাফে 0-এর ঘরে যাওয়া যাবে। তাহলে আমার কাঙ্ক্ষিত ভাগফল হচ্ছে 5। অর্থাৎ আমার প্রতিবারে 5 ঘর করে লাফ দিতে হবে। আমরা আরো কম কষ্ট করেই কিন্তু কাজটি করতে পারি। আমরা প্রতিবার 2 ঘর করে লাফ দিয়ে 10 থেকে 0-এর দিকে যেতে থাকব। তাহলে আমাকে মোট 5 বার

লাফাতে হবে। আর আমরা জানি যে, 10-কে 2 দিয়ে ভাগ করলে যদি ভাগফল হয় 5, তাহলে 10-কে 5 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল হবে 2 (ছবি 1.9)।

10কে 2 দিয়ে ভাগ করলে কত হয়?

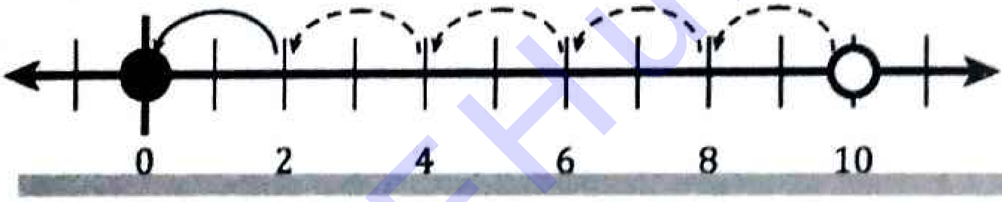
ধাপ ১ : প্রথমে 10 থেকে শুরু করে প্রতিবারে যদি 2 ঘর করে ডানদিকে লাফ দিই, তাহলে 0 ঘরে পৌঁছতে আমাদের 5 বার লাফ দিতে হবে

ধাপ ২ : 5 ঘর করে লাফ দিলে মাত্র 2 লাফেই 0-তে যাওয়া যাবে



সুতরাং 10-কে 2 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল হবে 5

একইভাবে 10-কে 5 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল হবে 2



ছবি 1.9

```
#include<stdio.h>

int main()
{
    int a = 10;
    int divisor = 2;
    int result = 0;

    while(a != 0)
    {
        a = a - divisor;
        result = result + 1;
    }
```

```
    printf("the result is %d\n", result);

    return 0;
}
```

যদি নিঃশেষে বিভাজ্য না হয়, তাহলে এই কোডটিকেই একটু অন্যরকম করে লিখে নিতে হবে।

```
#include<stdio.h>

int main()
{
    int a = 212;
    int divisor = 9;
    int result = 0;
    int new_a = a;

    while(new_a >= divisor)
    {
        new_a = new_a - divisor;
        result = result + 1;
    }

    printf("If %d is divided by %d,\n", a,
divisor);
    printf("the result is: %d\n", result);

    if(new_a != 0)
    {
        printf("and the remainder is: %d\n",
new_a);
    }

    return 0;
}
```

ভাগের ক্ষেত্রে আরেকটি নিয়ম জানতে হবে। সেটি হচ্ছে কোনো কিছুকে শূন্য দিয়ে ভাগ করা যায় না। কেন যায় না? কারণ ভাগের সংজ্ঞাতে বলা আছে যে, শূন্য দিয়ে ভাগ করা যাবে না। শূন্য দিয়ে ভাগ করে কী হবে, সেটি কেউ জানে না। তাই এটি অসংজ্ঞায়িত (undefined)। আমার যদি সংখ্যারেখায় লাফিয়ে লাফিয়ে ভাগ করতে চাই, তাহলে কেউ যদি আমাকে 10-কে 1 দিয়ে ভাগ করতে বলে, তাহলে আমি বের করার চেষ্টা করব যে 10 থেকে 1 বার লাফ দিয়ে 0-তে পৌঁছানোর জন্য প্রতিবার (মানে একবার) কত ঘর লাফ দিতে হবে? 10 ঘর। কারণ আমি যেহেতু 1 দিয়ে ভাগ করার চেষ্টা করছি, তাই কেবল একবার লাফ দেওয়ার সুযোগ রয়েছে। তাই ভাগফল হচ্ছে 10। এখন আমাকে যদি 10-কে 0 দিয়ে ভাগ করতে বলা হয়, তাহলে কী করব? 0 বার লাফ দিতে পারব। 0 বার লাফ দিয়ে তো আমি কোথাও যেতে পারব না, কিন্তু আমাকে 0-এর ঘরে যেতে হবে। তার মানে, এটি অসম্ভব একটি কাজ। কিন্তু আমাকে যদি 0 দিয়ে গুণ করতে হয়, যেমন 5-কে 0 দিয়ে গুণ করতে হয়, তাহলে কী হবে? আমি 0-এর ঘর থেকে লাফানো শুরু করব। প্রতি লাফে 5 ঘর যাব। কতবার লাফ দিতে হবে? 0 বার, অর্থাৎ কোনো লাফ দেওয়া চলবে না। আর লাফ না দিলে আমি কোথায় থাকব? 0-এর ঘরে। তাহলে গুণফল 0।

এখন দেখা যাক, আমি যদি সি প্রোগ্রামিং ভাষায় একটি প্রোগ্রাম লিখে 0 দিয়ে গুণ ও ভাগের চেষ্টা করি, তাহলে ফলাফল কী দাঁড়ায়।

```
#include<stdio.h>

int main()
{
    int a = 10;
    int b = 0;

    // Multiplying by 0
    printf("%d x %d = %d", a, b, a * b);

    // Dividing by 0
```

```
    printf("%d / %d = %d", a, b, a / b);

    return 0;
}
```

এতক্ষণ আমরা সংখ্যারেখায় কেবল পূর্ণসংখ্যা দেখেছি। যদি ভগ্নাংশ হয়, তাহলে সেগুলো কোথায় থাকবে? সেগুলো থাকবে পরপর দুটি পূর্ণসংখ্যার ভেতরে যেই জায়গা আছে, সেখানে। যেমন 1 ও 2-এর মাঝখানে থাকবে 1.5। 1-এর চেয়ে বড় ও 2-এর চেয়ে ছোট সকল সংখ্যা থাকবে 1 ও 2-এর মাঝখানের ফাঁকা জায়গাটায়। তেমনি 2-এর চেয়ে বড় কিন্তু 3-এর চেয়ে ছোট সংখ্যাগুলো থাকবে এদের মাঝখানের জায়গায়। এগুলোকে বাস্তব সংখ্যা (ইংরেজিতে রিয়েল নাম্বার—real number)ও বলে।

পরপর দুটি পূর্ণসংখ্যার মধ্যে কতটি বাস্তব সংখ্যা আছে? উত্তর হচ্ছে অগুনতি, অসংখ্য। অসংখ্য-কে অনেকে অসীমসংখ্যকও বলে। বিষয়টি কি মজার ও অদ্ভুত নয় যে সংখ্যারেখায় আমরা যে পরপর দুটি সংখ্যার মধ্যে ছোট্ট জায়গা দেখি, সেখানে অসংখ্য বাস্তব সংখ্যা আছে। এর প্রমাণ কী? প্রমাণ খুবই সহজ। ধরা যাক 2 ও 3-এর মধ্যে n-সংখ্যক বাস্তব সংখ্যা রয়েছে। সেগুলোর মধ্যে পরপর দুটি বাস্তব সংখ্যা হচ্ছে x ও y। তাহলে, $\frac{x+y}{2}$ হচ্ছে আরেকটি বাস্তব সংখ্যা, যেটি x-এর চেয়ে বড় ও y-এর চেয়ে ছোট! তাহলে n-সংখ্যকের চেয়ে বেশি বাস্তব সংখ্যা পাওয়া যাচ্ছে। তার মানে কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যক বাস্তব সংখ্যা থাকা সম্ভব নয়!

ভগ্নাংশের যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ

এখন আমরা দেখব, ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে কীভাবে যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করতে হয়। ভগ্নাংশকে ইংরেজিতে বলে ফ্র্যাকশন (Fraction)। ভগ্নাংশকে আমরা $\frac{x}{y}$ আকারে প্রকাশ করতে পারি। x-কে বলে লব (ইংরেজিতে নিউমেরেটর—numerator), y-কে বলা হয় হর (ইংরেজিতে ডিনোমিনেটরল—denominator)। যেমন, $\frac{10}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{1000}$ ইত্যাদি হচ্ছে

ভগ্নাংশ। x ও y-এর জায়গায় আমরা যেকোনো সংখ্যা বসাতে পারব, কেবল একটি ব্যতিক্রম বাদে। সেটি হচ্ছে y-এর মান কখনো 0 হতে পারবে না। কারণ y-এর মান 0 মানে, শূন্য দিয়ে ভাগ করা, যেটি আসলে করা যায় না।

ভগ্নাংশের যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ করার আগে দেখে নিই, দুটি ভগ্নাংশের মধ্যে যদি তুলনা করতে চাই, যে দুটি সমান নাকি বড়-ছোট, সেটি কীভাবে করতে পারি। দুটি ভগ্নাংশের মধ্যে তুলনা করতে গেলে আমাদের জন্য কাজটি সহজ হয়ে যায় যদি সংখ্যা দুটির হর সমান হয়, অথবা সংখ্যা দুটির লব সমান হয়। যেমন, আমাকে যদি জিজ্ঞাসা করা হয়, $\frac{3}{5}$ ও $\frac{4}{5}$-এর মধ্যে কোনটি বড়, আমি সহজে বলে দিতে পারব যে $\frac{4}{5}$ বড়। কারণ যেহেতু সংখ্যা দুটির হর সমান, তাই লবের মধ্যে যেটি বড়, সেই সংখ্যাটিই বড়। আর পাঁচ ভাগের মধ্যে তিন ভাগ, নাকি চার ভাগ বড় হবে? অবশ্যই চার ভাগ। আমরা বিষয়টি আরেকভাবে চিন্তা করতে পারি,

$\frac{3}{5}$-কে লেখা যায়, $3 \times \frac{1}{5}$ আর
$\frac{4}{5}$-কে লেখা যায়, $4 \times \frac{1}{5}$

এখন $\frac{1}{5}$ বা অন্য যেকোনো ধনাত্মক সংখ্যা, সেটিকে তিন গুণ করলে বেশি বড় হবে নাকি চার গুণ? অবশ্যই চার গুণ। আর ধনাত্মক সংখ্যা বললাম এই কারণে যে, ঋণাত্মক সংখ্যার ক্ষেত্রে ব্যাপারটি উলটো হবে।

আবার, $\frac{5}{4}$ ও $\frac{5}{3}$ সংখ্যা দুটির মধ্যে কোনটি বড়? উত্তর হচ্ছে $\frac{5}{3}$

দুটি ভগ্নাংশের লব সমান হলে, যেটির হর ছোট, সেই সংখ্যাটি বড়। কেন? কারণ যত বড় সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা হবে, ভাগফল তত ছোট হবে। এই কারণেই কিন্তু $\frac{1}{10}$-এর চেয়ে $\frac{1}{100}$ অনেক ছোট। আবার এভাবেও চিন্তা করা যেতে পারে যে, কোনো জিনিসকে চার ভাগ করলে যতটুকু পাওয়া যাবে, সেই জিনিসটিকে তিন ভাগ করলে, প্রতি ভাগে একটু বেশি পাওয়া যাবে (চার ভাগ করার তুলনায়)।

তাহলে আমরা দেখলাম, $\frac{c}{a}$ ও $\frac{b}{a}$-এর মধ্যে কোনটি বড়, সেটি নির্ভর করে c ও b-এর মধ্যে কোন সংখ্যাটি বড়, তার ওপর।

যদি,

c, b-এর চেয়ে বড় হয়, তাহলে $\frac{c}{a}$ বড়

b, c-এর চেয়ে বড় হলে $\frac{b}{a}$ বড়, আর

b ও c সমান হলে ভগ্নাংশ দুটি সমান

আবার, $\frac{a}{b}$ ও $\frac{a}{c}$-এর মধ্যে কোনটি বড়?

যদি,

c, b-এর চেয়ে বড় হয়, তাহলে $\frac{a}{b}$ বড়

b, c-এর চেয়ে বড় হলে $\frac{a}{c}$ বড়, আর

b ও c সমান হলে ভগ্নাংশ দুটি সমান

বিষয়টি এভাবেও চিন্তা করা যেতে পারে যে, দুজন মানুষের মধ্যে কে বেশি লম্বা, সেটি মাপতে হলে হয় তাদের দুজনকে সমান উচ্চতায় এক জায়গায় দাঁড়াতে হবে, তখন মাথার দিকে তাকালেই বোঝা যাবে অথবা দুজনের মাথা সমান উচ্চতায় এনে তাদের পায়ের দিকে তাকালে বোঝা যাবে।

এখন, একটি ভগ্নাংশের লব ও হরকে কিন্তু আমরা সমান সংখ্যা দিয়ে গুণ করতে পারি। তাতে ভগ্নাংশের বা সংখ্যাটির মানের কোনো পরিবর্তন হবে না। $\frac{1}{2}$-কে আমরা লিখতে পারি $\frac{5}{10}, \frac{10}{20}, \frac{30}{60}, \frac{35}{70}, \frac{500}{1000}$ ইত্যাদি। কীভাবে লিখতে পারলাম?

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times5}{2\times5} = \frac{5}{10}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times10}{2\times10} = \frac{10}{20}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times30}{2\times30} = \frac{30}{60}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times35}{2\times35}=\frac{35}{70}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times500}{2\times500}=\frac{500}{1000}$$

তাহলে আমরা বলতে পারি, কোনো ভগ্নাংশ যদি হয় $\frac{a}{b}$, তাহলে,

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c}$$

অর্থাৎ, ভগ্নাংশের হর ও লবকে সমান সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে সংখ্যাটির মানের কোনো পরিবর্তন হয় না, মানে মান বাড়েও না, আবার কমেও না।

একইভাবে, ভগ্নাংশের হর ও লবকে, সমান সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে (কেবল শূন্য ছাড়া), সেই ভগ্নাংশের মানের কোনো পরিবর্তন হবে না। যেটিকে আমরা ভুল করে কাটাকাটি করা বলি, যদিও আসলে কাটাকাটি বলে কিছু নেই। কিছু উদাহরণ দেখি—

$$\frac{50}{100}=\frac{50\div5}{100\div5}=\frac{10}{20}$$

$$\frac{50}{100}=\frac{50\div50}{100\div50}$$

দুটি ভগ্নাংশের যোগ করতে হলে, ভগ্নাংশের হর দুটি সমান হতে হবে। আর সমান না থাকলে সমান করার ব্যবস্থা করে নিতে হবে। তাহলে আমাদের জন্য যোগের কাজটি খুব সহজ হয়ে যায়। যেমন : $\frac{3}{10}$ ও $\frac{5}{10}$ যোগ করলে কত হবে? দশ ভাগের তিন ভাগ আর দশ ভাগের পাঁচ ভাগ যোগ করে, যোগফল হবে দশ ভাগের আট ভাগ বা $\frac{8}{10}$ কিন্তু $\frac{3}{10}$ ও $\frac{5}{11}$-এর যোগফল এভাবে বের করা যাবে না। প্রথমে হরগুলো সমান করে নিতে হবে। কী উপায়ে এটি করা যায়? আমরা যদি প্রথম ভগ্নাংশের লব ও হরকে 11 দিয়ে গুণ করে দিই, তাহলে সেটি হবে,

$$\frac{3}{10}=\frac{3\times11}{10\times11}=\frac{33}{110}$$

দ্বিতীয় ভগ্নাংশটির লব ও হরকে যদি 10 দিয়ে গুণ করি, তাহলে সেটি হবে,

$$\frac{5}{11}=\frac{5\times10}{11\times10}=\frac{50}{110}$$

এখন আমরা সহজেই যোগফল বের করতে পারি,

$$\frac{33}{110}+\frac{50}{110}=\frac{33+50}{110}=\frac{83}{110}$$

এখন কথা হচ্ছে, আমি কীভাবে বুঝলাম যে, প্রথম ভগ্নাংশটির ক্ষেত্রে লব ও হরকে 11 দিয়ে গুণ করতে হবে, আর দ্বিতীয় ভগ্নাংশের লব ও হরকে 10 দিয়ে গুণ করতে হবে? যেহেতু আমার লক্ষ্য হচ্ছে দুটি সংখ্যার জন্যই সমান হর বের করা, তাই আমি বুঝে ফেলেছি যে সমান সংখ্যাটি হতে পারে 10×11 বা 110। এখন প্রথম ভগ্নাংশের হরকে 110 বানাতে হলে লব ও হরকে 11 দিয়ে গুণ করতে হবে, আর দ্বিতীয়টির ক্ষেত্রে 10 দিয়ে গুণ করতে হবে।

এবারে আরেকটি উদাহরণ। $\frac{1}{2}$ ও $\frac{3}{8}$-এর যোগফল বের করতে হবে। এখন হর দুটি যেহেতু সমান নয়, আমাদের কাজ হচ্ছে হর দুটিকে সমান করে ফেলা। সেই সংখ্যাটি কত হতে পারে? $2 \times 8 = 16$ হতে পারে। তাহলে প্রথম ভগ্নাংশের লব ও হরকে 8 দিয়ে আর দ্বিতীয় ভগ্নাংশের লব ও হরকে 2 দিয়ে গুণ করলে আমরা পাব,

$$\frac{1\times8}{2\times8}=\frac{8}{16} \quad \text{এবং} \quad \frac{3\times2}{8\times2}=\frac{6}{16}$$

তাহলে যোগফল হবে,

$$\frac{8}{16}+\frac{6}{16}=\frac{8+6}{16}=\frac{14}{16}$$

এতক্ষণ আমরা যেই পদ্ধতিতে যোগ করলাম, আমাদের যদি বলা হয় $\frac{a}{b}$ ও $\frac{c}{d}$ যোগ করতে, তাহলে কীভাবে করব? হর দুটি সমান করার জন্য প্রথম ভগ্নাংশের লব ও হরকে d দিয়ে গুণ করে দেব আর দ্বিতীয় ভগ্নাংশের লব ও হরকে b দিয়ে গুণ করে দেব। তাহলে আমরা পাব,

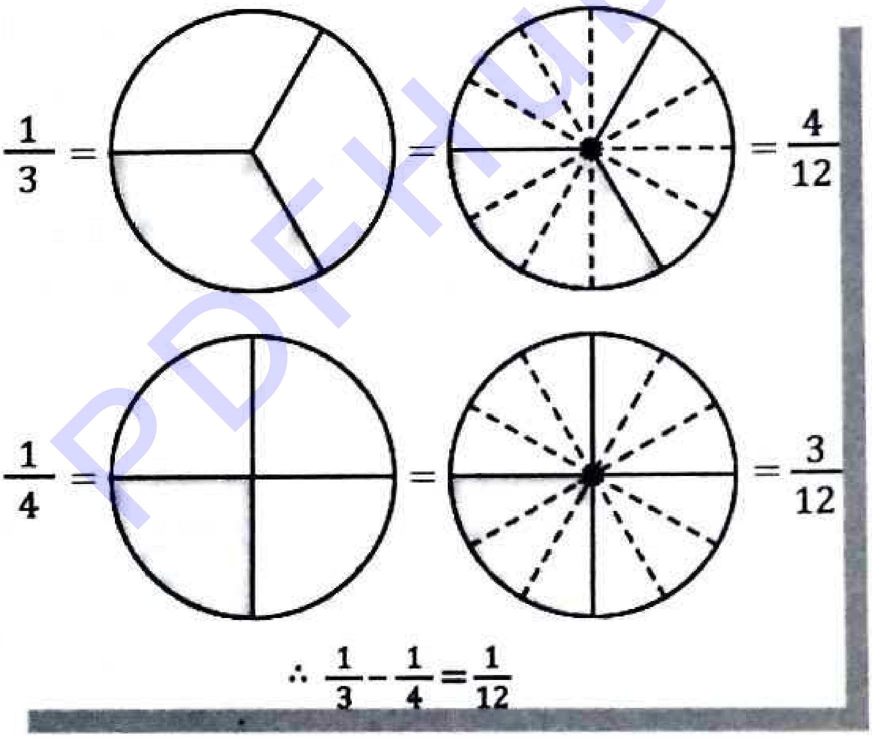
$$\frac{a\times d}{b\times d} \quad \text{ও} \quad \frac{c\times b}{d\times b}$$

এখন যোগ করা খুব সহজ,

যোগফল হবে, $\frac{a \times d + c \times b}{bd}$

এটিকে আমরা চাইলে এভাবেও লিখতে পারি, $\frac{ad+cb}{bd}$

কারণ কোনো সংখ্যাকে যখন আমরা ইংরেজি বর্ণমালার কোনো অক্ষর দিয়ে প্রকাশ করব, তখন পাশাপাশি দুটি অক্ষর থাকার মানে হচ্ছে সেই দুটি অক্ষর যেই দুটি সংখ্যার প্রতিনিধিত্ব করে, তাদের মধ্যে গুণ। যেমন, ধরা যাক, a-এর মান 5, b-এর মান 10। তাহলে ab মানে হচ্ছে 5×10 বা, 50। কেউ যদি আবার তাদের মান পাশাপাশি বসিয়ে 510 (পাঁচ শত দশ) বানিয়ে ফেলে, তাহলে সেটি ভুল হবে।



ছবি 1.10

ভগ্নাংশের বিয়োগের কাজও যোগের মতো। প্রথমে হর দুটিকে সমান করতে হবে। তারপরে প্রথমটি থেকে দ্বিতীয়টি বিয়োগ করতে হবে। নিচের উদাহরণটি দেখি,

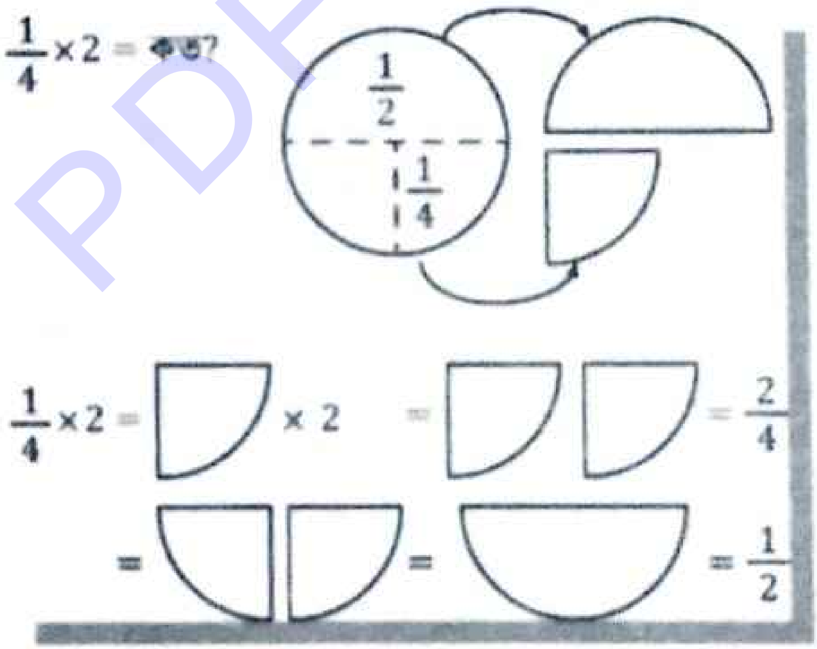
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1\times4}{3\times4}-\frac{1\times3}{4\times3}$$
$$=\frac{4}{12}-\frac{3}{12}$$
$$=\frac{1}{12}$$

(ছবি 1.10)

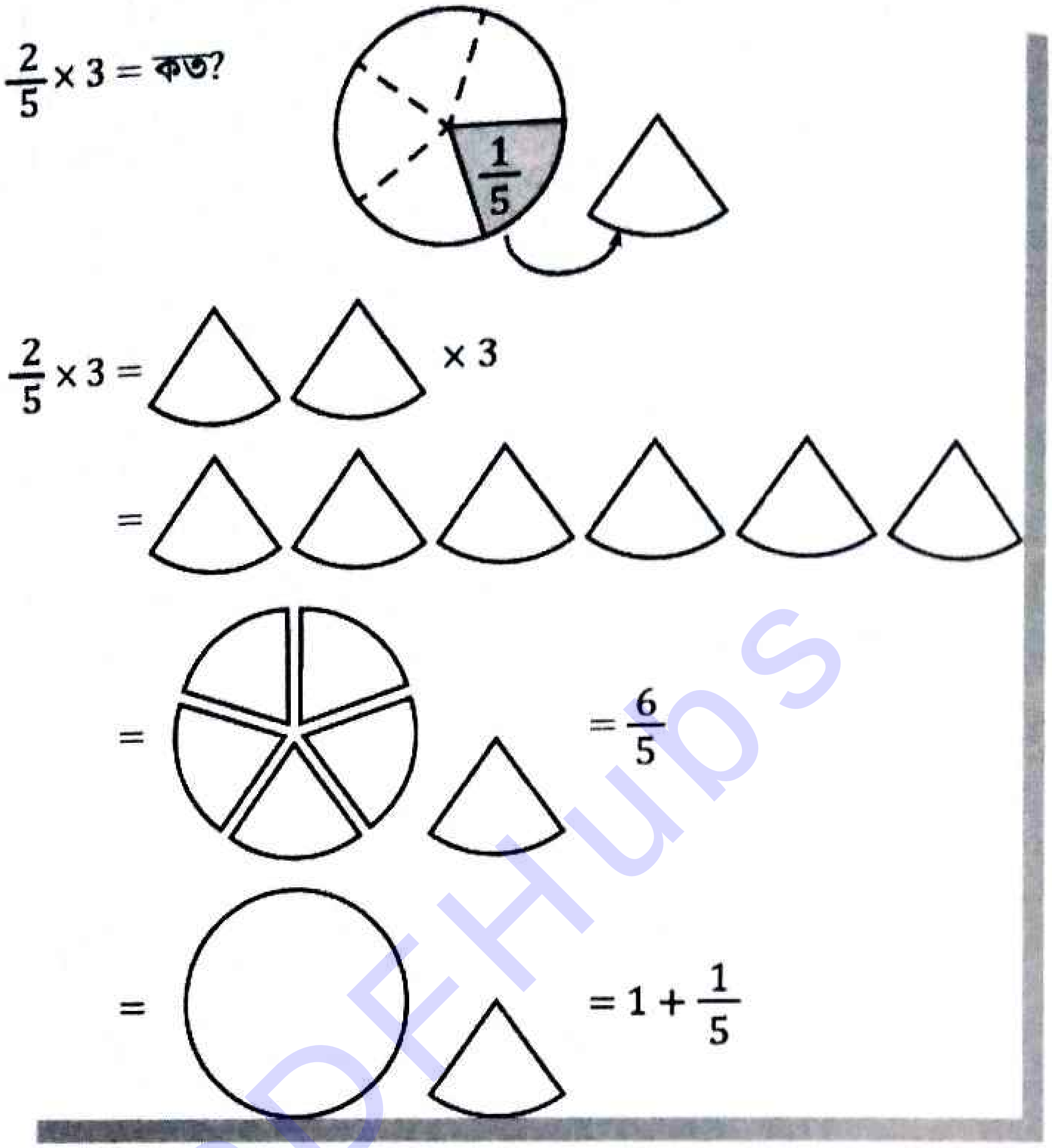
যদি কোনো ভগ্নাংশ, যেমন, $\frac{1}{4}$-কে 2 দিয়ে গুণ করতে বলা হয়, তখন আমরা কীভাবে সেই গুণ করব? আমরা যদি লব ও হর দুটিকেই 2 দিয়ে গুণ করে দিই, তাহলে কিন্তু হবে না। কারণ লব ও হরকে সমান সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে সংখ্যাটির মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। $\frac{1}{4}$ আর $\frac{2}{8}$ কিন্তু সমান। তাহলে আমাদের যেটি করতে হবে,

$$\frac{1}{4}\times 2=\frac{1\times2}{4}=\frac{2}{4}$$

চার ভাগের এক ভাগের দ্বিগুণ হচ্ছে চার ভাগের দুই ভাগ (ছবি 1.11)।



ছবি 1.11



ছবি 1.12

তাহলে কোনো সংখ্যা দিয়ে কোনো ভগ্নাংশকে গুণ করতে বলা হলে আমরা যেটি করব, ভগ্নাংশের শুধু লবের সঙ্গে সেই সংখ্যা গুণ করে দেব। আরেকটি উদাহরণ দিই। $\frac{2}{5}$-কে 3 দিয়ে গুণ করলে গুণফল হবে,

$$\frac{2}{5} \times 3 = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5} \qquad \text{(ছবি 1.12)}$$

এখন ভগ্নাংশকে কোনো সংখ্যা দিয়ে ভাগ করতে বলা হলে কী করব? গুণের বেলাতে যেমন লবকে গুণ করেছিলাম, যার ফলে ভগ্নাংশটির মান বেড়ে গিয়েছিল, ভাগের বেলায় হরকে গুণ করব, যার ফলে ভগ্নাংশটির মান আরো ছোট হয়ে যাবে। যেমন $\frac{1}{2}$-কে 2 দিয়ে ভাগ করতে বলা হলে ভাগফল হবে,

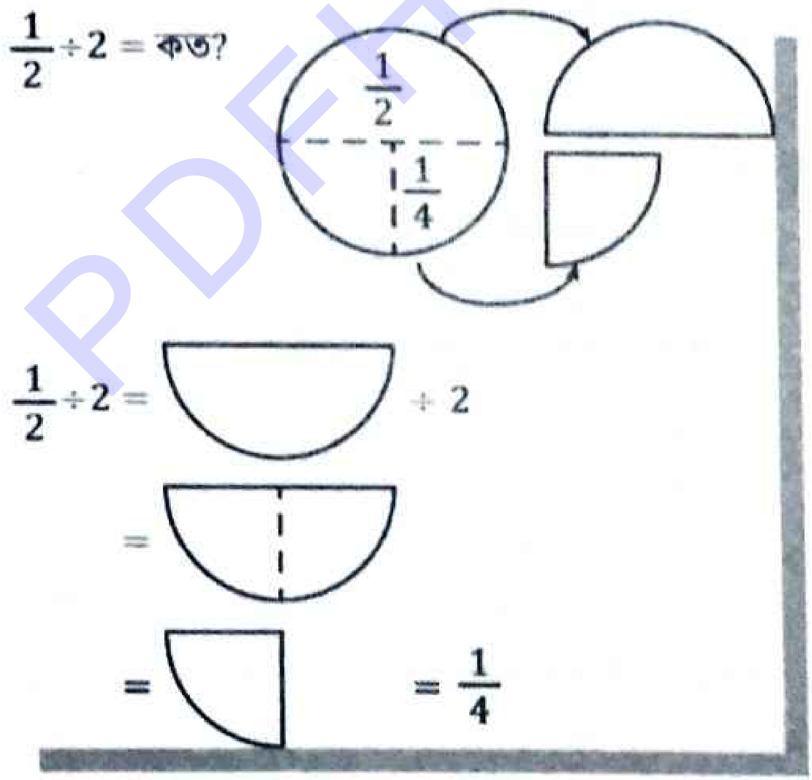
$$\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{2\times2} = \frac{1}{4}$$

দুই ভাগের এক ভাগের অর্ধেক হচ্ছে চার ভাগের এক ভাগ (ছবি 1.13)।

এই কাজটি আরেকভাবে করা যায়। যেই সংখ্যাটি দিয়ে ভাগ করতে হবে, প্রথমে লব ও হরকে সেই সংখ্যাটি দিয়ে গুণ করে দিতে পারি। তাহলে ভগ্নাংশের মানের কোনো পরিবর্তন হবে না। তারপর লবকে সেই সংখ্যাটি দিয়ে ভাগ করে দিলেই ভাগফল পাওয়া যাবে। ওপরের ভাগটিই এই নিয়মে করি,

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times2}{2\times2} = \frac{2}{4}$$

এবারে লব অর্থাৎ 2-কে 2 দিয়ে ভাগ করে দেব। তাহলে ভাগফল হবে $\frac{1}{4}$। যার যেভাবে বুঝতে সুবিধা হয় আরকি, কাজ কিন্তু ঘুরেফিরে একই, যতক্ষণ পর্যন্ত না আমরা গণিতের কোনো নিয়ম ভাঙছি।



ছবি 1.13

উলটো সংখ্যা

কোনো সংখ্যার সঙ্গে যে সংখ্যা গুণ করলে গুণফল 1 হয়, তাকে বলে সেই সংখ্যার উলটো সংখ্যা। ইংরেজিতে একে বলে রেসিপ্রোকাল (reciprocal) সংখ্যা। এর আরেকটি গাণিতিক নাম হচ্ছে গুণাত্মক বিপরীত (multiplicative inverse) সংখ্যা। যেমন, 3-এর সঙ্গে কত গুণ করলে গুণফল 1 হবে? উত্তর হচ্ছে $\frac{1}{3}$। কীভাবে এটি বের করলাম? 3টি কলম যদি 3 জনের মধ্যে ভাগ করে দেওয়া হয় তাহলেই কেবল প্রত্যেকের ভাগে 1টি করে কলম পড়বে। অথবা, বিষয়টি এভাবেও চিন্তা করা যায়। একটি জিনিসের পাঁচটি এক-পঞ্চমাংশ যোগ করলে পূর্ণাঙ্গ একটি জিনিস পাওয়া যাবে। সুতরাং, 5 এবং $\frac{1}{5}$ পরস্পরের উলটো সংখ্যা।

ভগ্নাংশকে ভগ্নাংশ দিয়ে গুণ করতে বলা হলে কী করব? যেই ভগ্নাংশটি দিয়ে গুণ করতে হবে, তার লবকে ব্যবহার করব গুণ করার কাজে আর হরকে ব্যবহার করব ভাগ করার কাজে। $\frac{2}{3}$ দিয়ে গুণ করার অর্থ কিন্তু 2 দিয়ে গুণ করা এবং সেই সঙ্গে 3 দিয়ে ভাগ করে ফেলা। যেমন, $\frac{1}{2}$-কে $\frac{2}{3}$ দিয়ে গুণ করতে বললে কী করব? $\frac{1}{2}$-কে 2 দিয়ে গুণ করব, আবার 3 দিয়ে ভাগ করব। আমরা দেখেছি যে, গুণ করার সময় লবের সঙ্গে গুণ করতে হয়, আর ভাগ করার সময় হরের সঙ্গে গুণ করতে হয়। তাহলে 2 দিয়ে লবকে গুণ করব আর 3 দিয়ে হরকে গুণ করব। তাহলে ফলাফল হবে,

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1\times2}{2\times3} = \frac{2}{6}$$

এখন কারো মনে প্রশ্ন জাগতে পারে, দেখাই যাচ্ছে ভগ্নাংশের গুণের সময় লবগুলো নিজেদের মধ্য গুণ হয় আর হরগুলো নিজেদের মধ্যে গুণ হয়। এই সহজ নিয়ম বলে দিলেই হয়, এর কথা বলার দরকার কী? এত কথা লেখার উদ্দেশ্য হচ্ছে, কেন লবগুলো গুণ করব আর হরগুলো গুণ করব, সেটি দেখানো। তাহলে আরেকটি উদাহরণ দেখি।

$\frac{1}{4}$ ও $\frac{3}{8}$-এর গুণফল কত হবে?

$$\frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{1 \times 3}{4 \times 8} = \frac{3}{32}$$

এখন আমাকে যদি বলা হয়, কোনো সংখ্যাকে $\frac{2}{3}$ দিয়ে ভাগ করো, তাহলে সেটি কীভাবে করব? $\frac{2}{3}$ দিয়ে ভাগ মানেই বা কী? এর মানে হচ্ছে সংখ্যাটিকে 2 ভাগ করে তারপর 3 গুণ করে ফেলা। কারণ 3 দিয়ে ভাগ করা মানে তিন ভাগ করা, আর $\frac{1}{3}$ দিয়ে ভাগ করা মানে তিন গুণ করে ফেলা। যেমন দুই দিয়ে ভাগ মানে অর্ধেক করে ফেলা আর অর্ধেক ($\frac{1}{2}$) দিয়ে ভাগ মানে দ্বিগুণ করে ফেলা। তাহলে $\frac{2}{3}$ দিয়ে ভাগ মানে হচ্ছে $\frac{3}{2}$ দিয়ে গুণ। অর্থাৎ, কোনো সংখ্যাকে কোনো ভগ্নাংশ দিয়ে ভাগ করতে হলে সংখ্যাটিকে তার উলটো সংখ্যা দিয়ে গুণ করে ফেললেই কাজ হয়ে যাবে।

$\frac{a}{b}$ যদি কোনো ভগ্নাংশ হয়, যেখানে a ও b উভয়ই ধনাত্মক সংখ্যা, তাহলে a যদি b-এর চেয়ে বড় হয়, তাহলে $\frac{a}{b}$ হবে 1-এর চেয়ে বড়। আর যদি a, b-এর চেয়ে ছোট হয়, তাহলে সংখ্যাটি 1-এর চেয়ে ছোট। এখন একটি প্রশ্ন। কোনো সংখ্যাকে যদি 1 দিয়ে গুণ করা হয়, তাহলে গুণফল কেমন হবে? গুণফল অপরিবর্তিত থাকবে, মানে সেই সংখ্যাটিই থাকবে। যদি 1-এর চেয়ে বড় ভগ্নাংশ (বা পূর্ণ সংখ্যা) দিয়ে গুণ করা হয়, তাহলে গুণফল হবে সেই সংখ্যার চেয়ে বড়। আর 1-এর চেয়ে ছোট ভগ্নাংশ দিয়ে গুণ করলে গুণফল হবে সংখ্যাটির চেয়ে ছোট।

অধ্যায় ২ : বীজগণিতের প্রাথমিক ধারণা

বাংলাদেশের বিশ্ববিদ্যালয়গুলোতে পর্যাপ্ত হল নেই। তাই অনেক জায়গাতেই শিক্ষার্থীরা কয়েকজন মিলে বাসা ভাড়া নিয়ে সেখানে থাকে। এ রকম বাসাকে প্রচলিত ভাষায় মেস বলে। প্রতি মাসে একজন সেই মেসের ম্যানেজার হয়, যার কাজ হচ্ছে বাজারখরচের হিসাব রাখা এবং কে কতদিন মেসে খেল, সেই হিসাব করে দেনা-পাওনা মেটানো। তো এরকম কোনো এক মেসে, 7 জন বাসিন্দা ছিল। সেপ্টেম্বর মাসে বিশ্ববিদ্যালয় তিন সপ্তাহ ছুটি থাকার কারণে, মেসের 7 জনের মধ্যে 4 জন সেই মাসে মাত্র 10 দিন মেসে ছিল, 2 জন ছিল 15 দিন, আর একজন পুরো মাসই ছিল। মাসের মোট খাবার খরচ হয় 6600 টাকা। তাহলে কে কত টাকা দেবে?

এরকম সমস্যা পাটিগণিত ব্যবহার করে সমাধান করা সম্ভব, কিন্তু সে ক্ষেত্রে অনেক বেশি সময় ব্যয় হয়, তা ছাড়া পরিশ্রমও হয় অনেক। এখানে বেশ কিছু তথ্য আমাদের অজানা। কার কত টাকা দিতে হবে, সেটি কিন্তু আমরা জানি না। একজনের এক দিনের খাবার খরচ যদি জানতাম, তাহলে হয়তো সেটি বের করা যেত, কিন্তু একজনের এক দিনের খাবার খরচটিও আমাদের অজানা। এসব অজানা বিষয় নিয়ে কাজ করার জন্যই এসেছে বীজগণিত। এই অধ্যায়টি পড়ার পরে তোমরা ওপরের সমস্যাটি সহজেই সমাধান করে ফেলতে পারবে।

বীজগণিতকে ইংরেজিতে বলে অ্যালজেবরা (Algebra)। আজ থেকে এক হাজার বছরেরও বেশি সময় আগে আল খোয়ারিজমি নামক এক আরব গণিতবিদ "আল জাবর ওয়াল মুকাবালা" নামে একটি বই লেখেন, যেখানে বীজগণিতের বিভিন্ন বিষয় আলোচনা করা হয়। তারপরে সেটি ল্যাটিন ভাষায় অনুবাদ করা হয় আর সেই সময়েই এর নাম হয় অ্যালজেবরা (আল জাবর থেকে)। পরবর্তী সময়ে ইউরোপীয় গণিতবিদরা বীজগণিত নিয়ে

আরো কাজ করেন। তবে বীজগণিতের প্রচলন কিন্তু বিভিন্ন সভ্যতায় আগে থেকেই কিছুকিছু ছিল।

পাটিগণিতে সঙ্গে বীজগণিতের মূল পার্থক্য হচ্ছে, পাটিগণিতে কেবল সংখ্যা নিয়ে কাজ করা হয়, আর বীজগণিতে সংখ্যার পাশাপাশি কিছু অজানা সংখ্যাও থাকে, যেগুলোকে বিভিন্ন চিহ্ন (সাধারণত ইংরেজি বর্ণমালার বিভিন্ন অক্ষর) দিয়ে প্রকাশ করা হয়। বীজগণিত আমাদেরকে অল্প কথায় অনেক বেশি কিছু প্রকাশ করার সুযোগ করে দেয়। যেমন ধরা যাক, রাশেদ ও তুলি দুজন মিলে একটা কিছু কেনার সিদ্ধান্ত নিল, যার মূল্য হচ্ছে 100 টাকা। দুজনের প্রত্যেকেই টাকা দিল এবং সেই টাকার সমষ্টি হচ্ছে 100 টাকা। কে কত টাকা দিল? আমরা তো সেটি জানি না, কারণ এর অনেকগুলো উত্তর হতে পারে। যেমন—

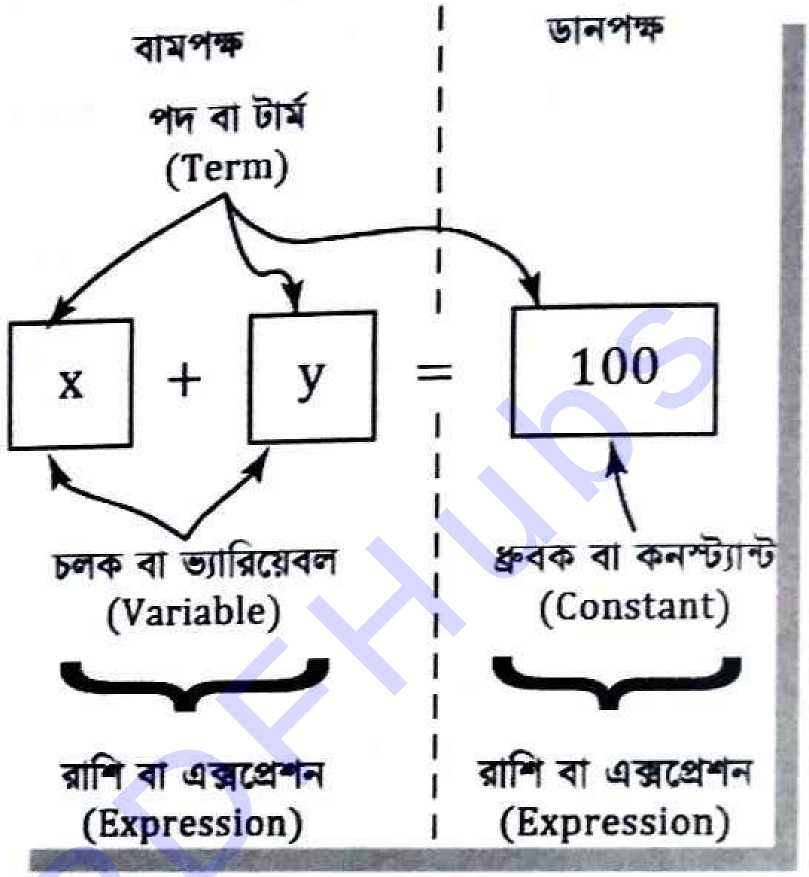
রাশেদ 50 টাকা, তুলি 50 টাকা
রাশেদ 40 টাকা, তুলি 60 টাকা
রাশেদ 65 টাকা, তুলি 35 টাকা
রাশেদ 90 টাকা, তুলি 10 টাকা
রাশেদ 15 টাকা, তুলি 85 টাকা

কিন্তু বীজগণিতের ভাষায় আমরা লিখতে পারি, রাশেদ কত টাকা দিয়েছে সেটি আমাদের এখনো জানা নেই, তাই ধরি, সে x টাকা দিয়েছে। তুলি কত টাকা দিয়েছে, সেটিও আমাদের জানা নেই, তাই ধরি সে y টাকা দিয়েছে। এই যে আমরা দুটি অজানা মান প্রকাশ করার জন্য x ও y ব্যবহার করছি, এগুলোকে বলা হয় চলক। ইংরেজিতে বলে ভ্যারিয়েবল (variable)। এখন দুজনের টাকার যোগফল হচ্ছে $x + y$। এই যে মোট টাকাকে $x + y$ দিয়ে প্রকাশ করলাম, একে বলা হয় রাশি। ইংরেজি ভাষায় বলে এক্সপ্রেশন (expression)। এখন, $x + y$ রাশিটির মান হচ্ছে, 100। আমরা লিখব,

$$x + y = 100$$

এই যে, $x + y = 100$ লিখে কিন্তু আমরা ওপরের তথ্যটি প্রকাশ করে ফেললাম। $x + y = 100$ বাক্যটিকে বলা হয় একটি সমীকরণ, যার

ইংরেজি হচ্ছে ইকুয়েশন (equation)। সমীকরণটিতে, আমরা যে 100 লিখলাম, সেটিও কিন্তু একটি রাশি, তবে এটি কোনো ভ্যারিয়েবলের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়নি, সরাসরি মানটি লেখা হয়েছে। একে বলা হয় ধ্রুবক বা কনস্ট্যান্ট (constant)।



ছবি 2.1

একটি সমীকরণে আমরা সমান চিহ্ন (=) ব্যবহার করি। তার বামদিকের যে রাশি থাকে, তাকে বলা হয় বামপক্ষ, আর ডানদিকে যে রাশি থাকে, তাকে বলা হয় ডানপক্ষ। এই বামপক্ষ আর ডানপক্ষ সব সময় সমান। আমরা ওজন করার জন্য যে দাঁড়িপাল্লা ব্যবহার করি, ঠিক তার মতো। দাঁড়িপাল্লাতে দুই দিকের জিনিসগুলো যখন সমান থাকে, তখন আমরা বামদিকে যদি পাঁচ কেজি ভরের জিনিস রাখি, তখন ডানদিকেও পাঁচ কেজি ভরের জিনিস রাখব। তাহলে দাঁড়িপাল্লার দুই দিকের পাল্লা সমান থাকবে। আবার একদিক থেকে যদি দুই কেজি ভরের জিনিস সরিয়ে নিই, তাহলে অন্যদিক থেকেও দুই কেজি ভরের জিনিস সরিয়ে নিতে হবে। তেমনি সমীকরণের বেলাতেও আমরা নিচের কাজগুলো করতে পারি–

বামপক্ষে ও ডানপক্ষে সমান সংখ্যা যোগ করতে পারি। যেমন,

$$x + y = 100$$

বা, $x + y + 5 = 100 + 5$ [সমীকরণের দুই পক্ষেই 5 যোগ করলাম]

বামপক্ষে ও ডানপক্ষে সমান সংখ্যা বিয়োগ করতে পারি। যেমন,

$$x + y = 100$$

বা, $x + y - 5 = 100 - 5$ [সমীকরণের দুই পক্ষ থেকে 5 বিয়োগ করে]

বামপক্ষ ও ডানপক্ষকে সমান সংখ্যা দিয়ে গুণ করতে পারি। যেমন,

$$x + y = 100$$

বা, $3 \times (x + y) = 3 \times 100$ [সমীকরণের দুই পক্ষকে 3 দিয়ে গুণ করে]

বামপক্ষে ও ডানপক্ষকে সমান সংখ্যা দিয়ে ভাগ করতে পারি। তবে সেটি শূন্য ছাড়া যেকোনো সংখ্যা হবে, শূন্য দিয়ে ভাগ করা যায় না। যেমন,

$$x + y = 100$$

বা, $(x + y) \div 2 = 100 \div 2$ [সমীকরণের দুই পক্ষকে 2 দিয়ে ভাগ করে]

আমরা কিন্তু রাশেদ আর তুলি, কে কত টাকা দিল, সেটি বের করতে পারিনি। এখন কেউ একজন আমাদের জানাল যে, তুলি রাশেদের চেয়ে 10 টাকা বেশি দিয়েছে। তাহলে আমরা x ও y-এর মধ্যে একটি সম্পর্ক পেয়ে গেলাম। y হচ্ছে x-এর চেয়ে 10 বেশি। এই তথ্যটি ব্যবহার করে আমরা একটি সমীকরণ তৈরি করতে পারি : $y = x + 10$। এখন আমরা আগের সমীকরণে y-এর জায়গায় $x + 10$ লিখতে পারি।

$$x + x + 10 = 100$$

বা, $2x + 10 = 100$

এখানে এখন কেবল একটি অজানা সংখ্যা আছে, তাই আমরা এখান থেকে x-এর মান পাওয়ার একটি আশা দেখতে পাচ্ছি। আমরা যদি সমীকরণটিকে এভাবে লিখতে পারি : $x =$ একটি সংখ্যা, তাহলেই x-এর মান পেয়ে যাব। এখন আমাদের সমীকরণের বামপক্ষে আছে, $2x + 10$। এখান থেকে আমরা শুধু x আনতে পারি দুইভাবে।

প্রথমে $2x + 10$ থেকে 10 বিয়োগ করি। তাহলে থাকবে $2x$। তারপর একে 2 দিয়ে ভাগ করে দিই, তাহলে কেবল x থাকবে। এখন ডানপক্ষেও একই কাজ করতে হবে। $100 - 10$ হচ্ছে 90। আর $90 \div 2$ হচ্ছে 45। তাহলে $x = 45$।

$$
\begin{aligned}
& 2x + 10 &&= 100 \\
\text{বা, } & 2x + 10 - 10 &&= 100 - 10 \quad \left[\begin{array}{c}\text{দুইপক্ষ থেকে } 10 \\ \text{বিয়োগ করলাম}\end{array}\right] \\
\text{বা, } & 2x &&= 90 \\
\text{বা, } & 2x \div 2 &&= 90 \div 2 \quad \left[\begin{array}{c}\text{দুইপক্ষকে } 2 \text{ দিয়ে} \\ \text{ভাগ করলাম}\end{array}\right] \\
\text{বা, } & x &&= 45
\end{aligned}
$$

আবার আমরা চাইলে প্রথমে $2x + 10$ রাশির প্রতিটি পদকে 2 দিয়ে ভাগ করতে পারি। তাহলে পাব, $x + 5$। তারপরে 5 বিয়োগ করলে পাব x। ডানপক্ষেও একই কাজ করতে হবে, $100 \div 2 = 50$ এবং $50 - 5 = 45$।

$$
\begin{aligned}
& 2x + 10 &&= 100 \\
\text{বা, } & \frac{2x}{2} + \frac{10}{2} &&= \frac{100}{2} \quad \left[\begin{array}{c}\text{দুইপক্ষের সবগুলো পদকে} \\ 2 \text{ দিয়ে ভাগ করেছি}\end{array}\right] \\
\text{বা, } & x + 5 &&= 50 \\
\text{বা, } & x + 5 - 5 &&= 50 - 5 \quad [\text{দুইপক্ষ থেকে } 5 \text{ বিয়োগ করেছি}] \\
\text{বা, } & x &&= 45
\end{aligned}
$$

এখন আমরা দেখলাম কীভাবে x-এর মান বের করা যায়। আমরা দুইভাবে সেটি করেছি, যেকোনো একভাবে করলেই চলবে। আমরা যেহেতু জেনে গিয়েছি যে, রাশেদ 45 টাকা দিয়েছে, তাই তুলি কত টাকা দিয়েছে, সেটি

বের করা এখন খুব সহজ। আমাদের কাছে যে দুটি সমীকরণ আছে ($x + y = 100$ ও $y = x + 10$), তার যেকোনো একটিতে x-এর মান 45 বসালে আমরা y-এর মান পেয়ে যাব। আমরা যদি প্রথম সমীকরণে সেটি করি,

তাহলে, $x + y = 100$
বা, $45 + y = 100$ [x – এর স্থলে এর মান 45 বসিয়ে]
বা, $45 + y - 45 = 100 - 45$ [দুই পক্ষ থেকে 45 বিয়োগ করে]
বা, $y = 55$

আর দ্বিতীয় সমীকরণ ব্যবহার করলে,

$y = x + 10$
বা, $y = 45 + 10$ [x – এর স্থলে এর মান 45 বসিয়ে]
বা, $y = 55$

আমরা বীজগণিত ব্যবহার করে সহজে একটি সমস্যার সমাধান করে ফেললাম!

আমরা সমাধান করার সময় $x + x$ কে $2x$ লিখেছি। $x + x$ মানে হচ্ছে x-এর সঙ্গে x-এর যোগ, তাহলে সেটি হবে x-এর দ্বিগুণ, বা $2x$। এখানে 2 কিন্তু x-কে গুণ করছে। তাই x এর মান যদি 45 হয়, তাহলে $2x$ হবে, $2 \times 45 = 90$। আর $x + 2$ হবে, $45 + 2$ বা 47।

$x + x + x$ কত? x-এর তিন গুণ, অর্থাৎ $3x$। আমরা যখন লিখি, $4x$, তখন 4-কে বলে x-এর সহগ, যাকে ইংরেজিতে বলে কোএফিশিয়েন্ট (coefficient)। চলক বা ভ্যারিয়েবলের সঙ্গে সহগগুলো গুণ হিসেবে থাকে। যদি আমরা শুধু x লিখি, তখন বলি x-এর সহগ 1, কেননা, $x = 1 \times x$। একইভাবে, $-x$-এর সহগ -1, কেননা, $-x = (-1) \times x$।

$3x + 2x$ কত? x-এর তিন গুণ ($x + x + x$), তার সঙ্গে যোগ হবে x-এর দ্বিগুণ ($x + x$)। যোগফল হবে, $x + x + x + x + x$ বা $5x$।

কিন্তু $x + y$-কে কি xy লেখা যায়? যাবে না, কারণ xy মানে হচ্ছে x ও y-এর গুণফল। আর $x + y$ মানে হচ্ছে তাদের মধ্যে যোগ। দুটি নিশ্চয়ই সমান নয়।

$3x + 2y + 5x - 4y + 7x + 10y$—এই রাশিকে আমরা আরো ছোট করে লিখতে চাই, তাহলে কীভাবে করব? তার আগে বলে নিই যে, বীজগণিতের বেলাতে, $x + y$-কে আমরা $y + x$ লিখতে পারি, তাতে রাশির মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। একে বলে কমিউটেটিভ প্রোপার্টি (Commutative property)। কমিউটেটিভ মানে হচ্ছে অদল-বদল করে দেওয়া। গুণের ক্ষেত্রেও এই প্রোপার্টি কাজ করে, অর্থাৎ,

$$xy = x \times y = y \times x = yx$$

আমরা ওপরের রাশিতে কয়েকটি পদের স্থান এমনভাবে পরিবর্তন করি, যেন x-গুলো একসঙ্গে থাকে আর y-গুলো একসঙ্গে থাকে।

$$\begin{aligned} & 3x + 2y + 5x - 4y + 7x + 10y \\ = & 3x + 5x + 7x + 2y - 4y + 10y \\ = & (3 + 5 + 7)x + (2 - 4 + 10)y \\ = & 15x + 8y \end{aligned}$$

এখন, $x + x$-কে আমরা লিখেছি $2x$। কিন্তু $x \times x$-কে আমরা কী লিখব? আমরা লিখব x^2। এখানে 2 হচ্ছে x-এর সূচক বা ঘাত। একইভাবে, $x \times x \times x$ হচ্ছে তিনটি x-এর গুণফল। আমরা তাকে লিখব, x^3।

আমরা যদি $a + b$ রাশিকে দুই দিয়ে গুণ করি তাহলে পাব,

$$2 \times (a + b) = 2(a + b)$$

আবার আমরা যদি, a ও b-কে আলাদাভাবে দুই দিয়ে গুণ করে পরে যোগ করি তাহলে, পাব,

$$2 \times a + 2 \times b = 2a + 2b$$

এই দুটি রাশির মান তো আসলে একই হবে। তাই লেখা যায়,

$$2(a+b) = 2a + 2b$$

একে বলে ডিস্ট্রিবিউটিভ প্রোপার্টি। ডিস্ট্রিবিউটিভ মানে হচ্ছে বণ্টন বা ভাগ-বাটোয়ারা করে দেওয়া।

একইভাবে, $x(y+z) = x \times (y+z)$
$= x \times y + x \times z$
$= xy + xz$

আবার, $7(9a + 4b + 3) = 7 \times 9a + 7 \times 4b + 7 \times 3$
$= 63a + 28b, 21$

তাহলে, $(x+y) \times (x+y)$ রাশিটিকে আমরা কীভাবে লিখতে পারি? সূচক পদ্ধতি ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারি, $(x+y)^2$। আবার ডিস্ট্রিবিউটিভ প্রোপার্টি ব্যবহার করে এই রাশিটি এভাবে ভেঙে ভেঙে লিখতে পারি,

$(x+y)^2 = (x+y) \times (x+y)$

$= x(x+y) + y(x+y)$ [ডিস্ট্রিবিউটিভ প্রোপার্টি ব্যবহার করে দুটি আলাদা রাশি পেলাম]

$= x \times x + x \times y + y \times x + y \times y$

[আবারও দুটি রাশিতে ডিস্ট্রিবিউটিভ প্রোপ্রার্টি ব্যবহার করে আরো রাশি পেলাম]

$= x^2 + xy + xy + y^2$
$= x^2 + 2xy + y^2$

ধ্রুবক বা কনস্ট্যান্ট (constant) রাশির মানও অনেক সময় ইংরেজি বর্ণ দিয়ে প্রকাশ করা হতে পারে। সাধারনত, যে সব ক্ষেত্রে ধ্রুবকের মান উল্লেখ করা জরুরী নয়, সেক্ষেত্রেই এ কাজ করা হয়। তবে সে ক্ষেত্রে কোন রাশিটি ধ্রুবক তা উল্লেখ করে দিতে হয়। যেমন, প্রথম উদাহরণে, আমরা বলেছি রাশেদ ও তুলি যথাক্রমে x এবং y পরিমাণ টাকা দেওয়াতে মোট 100 টাকা তৈরি হয়েছে। তাই আমরা লিখেছিলাম, $x + y = 100$। এখন সমস্যার

বক্তব্য সামান্য পালটে দিই। ধরা যাক, রাশেদ ও তুলি যথাক্রমে x এবং y পরিমাণ টাকা দেওয়াতে মোট p পরিমাণ টাকা জমা হয়েছে। তাহলে আমরা লিখব,

$x + y = p$; যেখানে p একটি ধ্রুবক আর x, y হলো চলক।

আরো একটি উদাহরণ দিই। যেমন ধরো, বলা হলো, একটি ট্রেনের গতিবেগ শুরুতে ছিল প্রতি সেকেন্ডে 10 মিটার এবং প্রতি মিনিটে এর গতিবেগ $2\,{}^{\text{মিটার}}/_{\text{সেকেন্ড}}$ করে বাড়ছে। তাহলে, ট্রেনের বর্তমান গতি আমরা বীজগণিতের রাশি আকারে প্রকাশ করব কীভাবে? এখন কত মিনিটে ট্রেনের গতিবেগ হিসাব করতে হবে তা আমাদের জানা নেই। তাই আমরা ধরলাম, এতক্ষণে x মিনিট সময় পার হয়েছে, এবং ট্রেনের বর্তমান বেগ, y।

তাহলে, y-এর মান কত হবে? শুরুতে ট্রেনের বেগ ছিল $10\,{}^{\text{মিটার}}/_{\text{সেকেন্ড}}$। প্রতি মিনিটে এর বেগ $2\,{}^{\text{মিটার}}/_{\text{সেকেন্ড}}$ হারে বাড়ছে, তাই, x মিনিটে গতি বেড়েছে $x \times 2$ বা $2x\,{}^{\text{মিটার}}/_{\text{সেকেন্ড}}$। সুতরাং,

$$y = 10 + 2x$$

এই সমীকরণে x, y হচ্ছে চলক; 10, 2 হচ্ছে ধ্রুবক। এর মধ্যে 2 আবার x-এর সহগ।

এখন ট্রেনের শুরুর বেগ এবং বেগ বাড়ার হার না জানা থাকলে আমি লিখতাম,

ধরি, a = ট্রেনের শুরুর গতিবেগ এবং এটি ধ্রুবক,
b = ট্রেনের বেগ পরিবর্তনের হার এবং এটি ধ্রুবক,
x = অতিক্রান্ত সময়ের পরিমাণ
y = x পরিমাণ সময় পার হওয়ার পরে ট্রেনের গতিবেগ

তাহলে,

$$y = a + bx$$

আশা করি, বীজগণিতের মূল ধারণা তোমরা বুঝতে পেরেছ। এবারে বীজগণিতে আরো দক্ষ হওয়ার জন্য স্কুলের বইগুলো (দশম শ্রেণি পর্যন্ত) পড়ে ফেলতে পারো।

আচ্ছা, এখন তোমাকে যদি কেউ বলে, $ax + by + c = 0$ সমীকরণটি একটি সরলরেখা, আর $x^2 + y^2 = c$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত, তুমি নিশ্চয়ই অবিশ্বাস করবে। কারণ, বীজগণিতের ভেতর জ্যামিতি এল কোথা থেকে? কিন্তু আসলে বিষয়টি সত্য। কীভাবে সেটি সত্য হলো, তা আবিষ্কার করার জন্য তোমাকে স্কুল-কলেজের গণিত বই ঘাঁটাঘাঁটি করতে হবে, কিংবা ইন্টারনেটের সাহায্য নিতে হবে।

অধ্যায় ৩ : ঐকিক নিয়ম

দুটি বড় সংখ্যা গুণ করা একটু কষ্টকর ব্যাপার। কিন্তু 1-কে যেকোনো বড় সংখ্যা দিয়ে গুণ করা অনেক সহজ ব্যাপার। গুণফল সেই সংখ্যাটিই হবে। যেমন : $1 \times 893271 = 893271$, $1 \times 15 = 15$, $1 \times 100 = 100$, $1 \times 1 = 1$ ইত্যাদি। তাহলে 1-কে কোনো সংখ্যা দিয়ে গুণ করার কাজটি মজার ও সহজ। এখন 1টি ডিমের দাম যত টাকা, 50টি ডিমের দাম তার 50 গুণ। গাড়ি 1 মিনিটে যতদূর যায়, 20 মিনিটে (যদি পুরোটা সময় একই গতিতে যেতে পারে) যাবে তার 20 গুণ দূরত্ব।

এখন কেউ যদি আমাকে 7টি ডিমের দাম বলে দেয়, তারপর 50টি ডিমের দাম বের করতে বলে, কাজটি আমার জন্য একটু কঠিন হয়ে যাবে। কিংবা গাড়ি 9 মিনিটে কতটুকু দূরত্ব অতিক্রম করেছে, সেই তথ্য দিয়ে 20 মিনিটে কতদূর যাবে সেটি বের করতে বলে, এটিও আমার জন্য একটু কঠিন কাজ। 1টি ডিমের দাম 6 টাকা হলে 50টি ডিমের দাম হবে 6×50 বা 300 টাকা। গাড়ি 1 মিনিটে 800 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করলে 20 মিনিটে 16000 মিটার বা 16 কিলোমিটার দূরত্ব অতিক্রম করবে। তাই আমাদের কাছে যদি এককের তথ্য না থাকে (যেমন, 1টি ডিমের দাম বা 1 মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব), তাহলে প্রথম কাজ হবে এককের জন্য তথ্য বের করা। যেমন, কেউ যদি বলে 7টি ডিমের দাম 42 টাকা। তাহলে আমাকে বের করতে হবে, একটি ডিমের দাম কত? দাম হবে 42 টাকার সাত ভাগের এক ভাগ, অর্থাৎ $42 \times \frac{1}{7} = \frac{42}{7} = 6$ টাকা। তারপরে আমাকে এখন যতগুলো ডিমের দাম বের করতে বলা হোক না কেন, কাজটি আমার জন্য খুবই সহজ, কারণ আমি একটি ডিমের দাম জানি। তেমনি আমাকে 9 মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব বলে দিলে আমি 1 মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব বের করব (9 দিয়ে ভাগ করে, কারণ এক মিনিটে যাবে নয় ভাগের এক ভাগ)। তারপরে আমাকে যত মিনিটের অতিক্রান্ত দূরত্ব বের করতে বলা হোক না কেন, সেটি বের করতে কোনো সমস্যা হবে না, কারণ আমি এক মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব জানি। তো

এই যে আমরা এককের তথ্য বের করে তারপরে গুণ করে যেকোনো তথ্য বের করে ফেলতে পারছি, এই নিয়মটিকে বলে ঐকিক নিয়ম। কয়েকটি উদাহরণ দেখি।

উদাহরণ ১)

3টি পুডিং বানাতে যদি 12টি ডিমের প্রয়োজন হয়, তবে 10টি পুডিং বানাতে কয়টি ডিম লাগবে?

বলে দেওয়া হলো যে, 3টি পুডিং বানাতে 12টি ডিমের দরকার হয়। তাহলে শুরুতেই বের করে নিই 1টি পুডিং বানাতে কয়টি ডিম লাগে। সংখ্যাটি হবে 12-এর 3 ভাগের এক ভাগ।

অর্থাৎ, একটি পুডিং বানাতে আমার লাগবে, $12 \div 3 = 4$টি ডিম।
সুতরাং, 10টি পুডিং বানাতে প্রয়োজন হবে, $4 \times 10 = 40$টি ডিম।

উদাহরণ ২)

ঐকিক নিয়মের অঙ্কে কখনো কখনো ভগ্নাংশও আসতে পারে। যেমন, যদি বলা হয়, 5 কেজি স্টিল দিয়ে 14টি হাতুড়ি বানানো যায়। তাহলে 35টি হাতুড়ি বানাতে কতখানি স্টিল প্রয়োজন হবে? এবারে কিন্তু প্রশ্নটি একটু ঘুরিয়ে দেওয়া হয়েছে। 35টি হাতুড়ি বানাতে কতটুকু স্টিল লাগবে জানতে আমাকে প্রথমে বের করতে হবে, 1টি হাতুড়ি তৈরিতে কতটুকু স্টিল লাগে।

যেহেতু, 14টি হাতুড়ি তৈরি করতে লাগে, 5 কেজি স্টিল,
তাই, 1টি হাতুড়ি তৈরি করতে লাগবে, $5 \div 14 = \frac{5}{14}$ কেজি স্টিল
$\therefore$ 35টি হাতুড়ি তৈরি করতে লাগবে, $\frac{5}{14}$ কেজি-এর 35 গুণ স্টিল
$= 35 \times \left(\frac{5}{14}\right)$ কেজি স্টিল
$= 175 \div 14$ কেজি স্টিল
$= 12.5$ কেজি স্টিল

অর্থাৎ, 35টি হাতুড়ি তৈরি করতে 12.5 কেজি স্টিল প্রয়োজন পড়বে।

এখন আমরা ডিমের উদাহরণে আবার ফেরত যাই। ঐকিক নিয়মে এককও কিন্তু একই রকম হতে হবে। যেমন আমাকে বলা হলো, 2 হালি ডিমের দাম 48 টাকা। তাহলে 3 ডজন ডিমের দাম কত? এখন আমি যদি এভাবে হিসাব করি, 2 হালি ডিমের দাম 48 টাকা, তাহলে 1 হালি ডিমের দাম $(48 \div 2)$ বা 24 টাকা, তাহলে 3 ডজন ডিমের দাম $24 \times 3 = 72$ টাকা; তাহলে কিন্তু আমি ভুল করছি। কারণ হালি আর ডজন একই একক নয়, আলাদা একক। এক হালি মানে চার, আর এক ডজন মানে বারো। তাই আমাদেরকে একই রকম একক ব্যবহার করতে হবে। কীভাবে করতে পারি?

প্রথম পদ্ধতি হচ্ছে 3 ডজনে কয় হালি হয়, সেটি বের করা। তারপরে এক হালির দামির সঙ্গে তত গুণ করে দেওয়া। 1 ডজন মানে 3 হালি, তাহলে 3 ডজন মানে 3×3 বা 9 হালি।

> এখন 1 হালি ডিমের দাম 24 টাকা হলে,
> 9 হালি ডিমের দাম হবে $24 \times 9 = 216$ টাকা।

দ্বিতীয় পদ্ধতি হচ্ছে, 1 হালি মানে 4টি, সুতরাং 2 হালি মানে 8টি (4×2)। 1 ডজন মানে 12টি, তাই 3 ডজন মানে 36টি (12×3)।

> এখন, 8টি ডিমের দাম, 48 টাকা
> তাহলে, 1টি ডিমের দাম, $(48 \div 8)$ বা 6 টাকা
> সুতরাং, 36টি ডিমের দাম হবে $6 \times 36 = 216$ টাকা।

আরো একটি উদাহরণ। একটি গাড়ি 1 ঘণ্টায় যায় 60 কিলোমিটার। তাহলে গাড়িটি 20 মিনিটে কতদূর যাবে? আমি কিন্তু এখানে 60-কে 20 দিয়ে গুণ করতে পারব না, কারণ 60 কিলোমিটার হচ্ছে 1 ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব, 1 মিনিটে নয়। আমরা যদি 1 মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব বের করতে পারি, তাহলে সেটিকে 20 দিয়ে গুণ করলেই 20 মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব বের করতে পারব। এখন 1 ঘণ্টা মানে 60 মিনিট। 60 মিনিটে যায় 60 কিলোমিটার। তাহলে 1 মিনিটে যায়, $60 \div 60 = 1$ কিলোমিটার।

তাহলে, গাড়িটি 20 মিনিটে অতিক্রম করবে, $1 \times 20 = 20$ কিলোমিটার দূরত্ব।

অনেক সময় ঐকিক নিয়মের অঙ্কে একটু ঘুরিয়ে প্রশ্ন করা হয়। সে ক্ষেত্রে প্রশ্নটি ভালো করে খেয়াল করতে হবে। আমাদের ভাগ বা গুণের অপারেশন চালাতে হবে, যা বের করতে বলা হয়েছে, তার ওপরে। যেমন, যদি জিজ্ঞাসা করা হয়, 15 সেকেন্ডে আলো যদি 45 লক্ষ কিলোমিটার দূরত্ব অতিক্রম করে, তাহলে, 27 সেকেন্ডে আলো কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? এখানে আমাকে বের করতে বলা হচ্ছে দূরত্ব, সুতরাং অপারেশন করতে হবে দূরত্বের ওপরে। প্রথমে 1 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব বের করব, তারপরে 27 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব বের করব। কিন্তু, যদি বলা হতো, 12 লক্ষ কিলোমিটার যেতে কত সময় লাগবে? এখন আমাকে বের করতে বলা হচ্ছে সময়। তাই প্রথমে 1 কিলোমিটার যেতে কত সময় লাগে সেটি বের করব, পরে 12 লক্ষ কিলোমিটার যেতে কত সময় লাগবে সেটি বের করব।

ঐকিক নিয়মের অঙ্কে গুণ কিংবা ভাগ অপারেশন চালানোর সময় আরো একটি বিষয় রাখতে হবে। চিন্তা করতে হবে, কমসংখ্যক লাগবে নাকি বেশিসংখ্যক লাগবে। যদি কমসংখ্যক লাগে তবে ভাগ করতে হবে আর বেশিসংখ্যক লাগলে করতে হবে গুণ। যেমন, প্রশ্ন যদি হয়, 15 কেজি চালে আমার 1 মাস বা 30 দিন যায়, তাহলে, 25 কেজি চালে কতদিন যাবে। আমি প্রথমে বের করব 1 কেজি চালে কতদিন যায়? 15 কেজি চালে যদি 30 দিন যায়, 1 কেজি চালে নিশ্চয়ই কম দিন যাবে, অর্থাৎ ভাগ করতে হবে,

1 কেজি চালে যাবে $(30 \div 15)$ দিন বা 2 দিন

তাহলে 25 কেজি চালে নিশ্চয়ই অনেক বেশি দিন যাবে।

সুতরাং, 25 কেজি চালে যাবে, (2×25) দিন $= 50$ দিন

আবার প্রশ্নটি যদি এমন হতো যে, 15 কেজি চালে 3 জন মানুষের 1 মাস যায়। তাহলে, 15 কেজি চালে 2 জন মানুষের কতদিন যাবে? প্রথমে বের করব, 15 কেজি চালে 1 জন মানুষের কত দিন যায়। এখন, 3 জন মানুষ মিলে খাওয়াদাওয়া করলে 15 কেজি চাল যদি 30 দিনে শেষ হয়ে যায়। মাত্র 1 জন মানুষ খাওয়াদাওয়া করলে তো সে চাল শেষ করতে আরো বেশিদিন লাগবে। সুতরাং, আমরা এখানে গুণ করব।

15 কেজি চালে 1 জন মানুষের যাবে (30 × 3) দিন বা 90 দিন

কিন্তু, 1 জনের বদলে 2 জন মিলে খাওয়াদাওয়া করলে তো চাল আবার দ্রুত শেষ হয়ে যাবে, অর্থাৎ এখানে এসে ভাগ করতে হবে।

15 কেজি চালে 2 জন মানুষের যাবে (90 ÷ 2) দিন বা 45 দিন।

অধ্যায় ৪ : উৎপাদক ও মৌলিক সংখ্যা

এই অধ্যায়ে আমরা জানব উৎপাদক ও মৌলিক সংখ্যা সম্পর্কে। উৎপাদক মানে, যা কোনো কিছু উৎপাদন করে বা তৈরি করে। বীজগণিতের ক্ষেত্রে, দুটি সংখ্যা গুণ করলে আমরা গুণফল হিসেবে একটি সংখ্যা পাই। যে দুটি সংখ্যাকে গুণ করে নতুন সংখ্যাটি পাওয়া গেল, সেই দুটি সংখ্যাকে আমরা বলি নতুন সংখ্যাটির উৎপাদক। যেমন $2 \times 6 = 12$। তাহলে 2 হচ্ছে 12-এর একটি উৎপাদক। তেমনি 6ও 12-এর একটি উৎপাদক। আর উৎপাদক বলতে আমরা কেবল ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যাকেই বোঝাব। উৎপাদককে ইংরেজিতে বলে ডিভিজর (divisor), অনেক সময় ফ্যাক্টর (factor)ও বলা হয়।

এখন প্রশ্ন হচ্ছে, 12-এর উৎপাদকগুলো কী কী? 12-এর উৎপাদক হচ্ছে 1, 2, 3, 4, 6, 12। কারণ–

$$1 \times 12 = 12$$
$$2 \times 6 = 12$$
$$3 \times 4 = 12$$

তাহলে 10-এর উৎপাদকগুলো কী কী? আমরা জানি,

$$1 \times 10 = 10$$
$$2 \times 5 = 10$$

তাহলে উৎপাদকগুলো হচ্ছে 1, 2, 5 ও 10।

এখন কেউ প্রশ্ন করতে পারে যে, −2 ও −5 গুণ করলেও তো 10 হয়। তাহলে ওরাও তো 10-এর উৎপাদক। কিন্তু আমরা একটি ধনাত্মক সংখ্যার উৎপাদক বের করার সময় কেবল ধনাত্মক সংখ্যাগুলোই বিবেচনা করব। কিন্তু ঋণাত্মক সংখ্যার উৎপাদক বের করার সময় ধনাত্মক ও ঋণাত্মক–

উভয় ধরনের সংখ্যাই বিবেচনা করব। তাহলে -10-এর উৎপাদকগুলো হচ্ছে $-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10$। কীভাবে পেলাম?

$$
\begin{aligned}
-10 \times 1 &= -10 \\
-5 \times 2 &= -10 \\
-2 \times 5 &= -10 \\
-1 \times 10 &= -10
\end{aligned}
$$

এখন আমাকে যদি একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n দিয়ে বলা হয়, সেই সংখ্যাটির সবগুলো উৎপাদক বের করতে হবে, তাহলে সেই কাজটি কীভাবে করব? আমরা 1 থেকে শুরু করে n পর্যন্ত প্রতিটি পূর্ণসংখ্যা দিয়ে সেই সংখ্যাটি ভাগ করার চেষ্টা করব। যদি কোনো সংখ্যা দিয়ে n নিঃশেষে বিভাজ্য হয়, অর্থাৎ, n-কে ওই সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ শূন্য হয়, তাহলে সেই সংখ্যাটি n-এর একটি উৎপাদক। আমরা খাতা-কলমে সহজেই কাজটি করতে পারি। তবে বড় সংখ্যার জন্য কিন্তু কাজটি করতে একটু সময় লাগবে। কিন্তু আমরা যেহেতু একটু-আধটু প্রোগ্রামিং করতে পারি, তাই সহজেই একটি প্রোগ্রাম লিখে ফেলতে পারি।

```
while True:
    n = input("Please enter a positive integer.
Enter 0 to quit: ")
    n = int(n)
    if n == 0:
        break
    if n < 0:
        print("You must enter a positive
integer. Please try again.")
        continue

    print("Factors of", n, ":", end=' ')
    for i in range(1, n+1):
        if n % i == 0:
            print(i, end=' ')
```

```
    print("\n")
```

প্রোগ্রামটি আমরা রান করে বিভিন্ন ইনপুট দিয়ে দেখি–

```
$ python divisor.py
Please enter a positive integer. Enter 0 to
quit: 10
Factors of 10 : 1 2 5 10

Please enter a positive integer. Enter 0 to
quit: 8
Factors of 8 : 1 2 4 8

Please enter a positive integer. Enter 0 to
quit: 100
Factors of 100 : 1 2 4 5 10 20 25 50 100

Please enter a positive integer. Enter 0 to
quit: 1000
Factors of 1000 : 1 2 4 5 8 10 20 25 40 50 100
125 200 250 500 1000

Please enter a positive integer. Enter 0 to
quit: 0
```


আমাদের প্রোগ্রামটি কী সহজে ও দ্রুতগতিতে সব উৎপাদকগুলো বের করে দিচ্ছে! এখন আমরা উৎপাদক নিয়ে আরো একটু চিন্তাভাবনা করব। আমি তোমাদের কিছু প্রশ্ন করব, একটু চিন্তা করে নিজে নিজে উত্তর দিতে হবে।

- 6 থেকে 9 পর্যন্ত কোনো সংখ্যা দিয়ে কি 10 নিঃশেষে বিভাজ্য হবে?
- 5 থেকে 7 পর্যন্ত কোনো সংখ্যা দিয়ে কি 8 নিঃশেষে বিভাজ্য হবে?
- 11 থেকে 19 পর্যন্ত কোনো সংখ্যা দিয়ে কি 20 নিঃশেষে বিভাজ্য হবে?

- 51 থেকে 99 পর্যন্ত কোনো সংখ্যা দিয়ে কি 100 নিঃশেষে বিভাজ্য হবে?

প্রশ্নগুলো নিয়ে একটু চিন্তাভাবনা করে তারপর উত্তর দিতে হবে। চিন্তাভাবনা করে উত্তর বের করার পরে আমার পরবর্তী প্রশ্নটির উত্তর খুঁজতে হবে–

- $\frac{n}{2}+1$ থেকে $n-1$ পর্যন্ত কোনো সংখ্যা দিয়ে কি n নিঃশেষে বিভাজ্য হবে?

ওপরের প্রতিটি প্রশ্নের উত্তর হচ্ছে, না। যেমন 51 থেকে 99 পর্যন্ত যেকোনো সংখ্যাকে আমরা যদি 2 দিয়ে গুণ করি, সেটি 51×2 বা 102 কিংবা তার বেশি হবে। আবার যদি 1 দিয়ে গুণ করি, তাহলে গুণফল হবে 51 থেকে 99-এর মধ্যে (যেই সংখ্যাকে 1 দিয়ে গুণ করব, সেই সংখ্যাটিই গুণফল হবে)। তাহলে আমরা বুঝতে পারলাম, কোনো সংখ্যার উৎপাদক বের করার সময় সেই সংখ্যার অর্ধেকের চেয়ে বড় সংখ্যাগুলো দিয়ে ভাগ করে কোনো লাভ নেই, বরং সময় নষ্ট। কিন্তু সেই সংখ্যাটি নিজে তো তার অর্ধেকের চেয়ে বড়, সেটি আমরা আলাদাভাবে গণনা করে নেব। তাহলে আমরা আমাদের প্রোগ্রামটি একটু পরিবর্তন করি। প্রোগ্রামের শুরুতেই আমরা 1 এবং সেই সংখ্যাকে উৎপাদক হিসেবে ধরে নেব।

```
while True:
    n = input("Please enter a positive integer.
Enter 0 to quit: ")
    n = int(n)
    if n == 0:
        break
    if n < 0:
        print("You must enter a positive
integer. Please try again.")
        continue

    factors = [1, n]
```

```
for i in range(2, (n//2)+1):
    if n % i == 0:
        factors.append(i)

factors = sorted(factors)
print("Factors of", n, ":", factors)
print("\n")
```

প্রোগ্রামটিতে factors নামক একটি লিস্টে প্রথমে 1 ও n-কে রেখেছি। কারণ তারা উভয়েই n-এর উৎপাদক। তারপরে 2 থেকে n//2+1 পর্যন্ত একটি লুপ চালিয়েছি এবং কোনো সংখ্যা যদি n-এর উৎপাদক হয়, তাহলে সেটিকে লিস্টে যোগ করে দিচ্ছি। লুপ থেকে বের হয়ে sorted() ফাংশন ব্যবহার করে উৎপাদকগুলো ছোট থেকে বড় ক্রমে সাজিয়ে নিচ্ছি।

তাহলে আগের প্রোগ্রামের সঙ্গে এর পার্থক্য হচ্ছে লুপটি এখন আগের বারের চেয়ে অর্ধেকসংখ্যক বার চলবে। তার মানে আমাদের প্রোগ্রাম আগের চেয়ে অনেক দ্রুতগতিতে কাজ করবে। যদিও আজকাল কম্পিউটারের প্রসেসর এতই দ্রুতগতিতে কাজ করে যে, খালি চোখে দেখে বোঝা কঠিন।

এখন প্রশ্ন হচ্ছে, আরো দ্রুত কিংবা আরো কম হিসাব-নিকাশ করে কি উৎপাদক বের করা সম্ভব? উত্তর হচ্ছে, হ্যাঁ, সম্ভব। কীভাবে? দেখি, নিজেরাই সেটি বের করার চেষ্টা করি।

100-এর উৎপাদকগুলো আবার লক্ষ করি –

$$1 \times 100 = 100$$
$$2 \times 50 = 100$$
$$4 \times 25 = 100$$
$$5 \times 20 = 100$$
$$10 \times 10 = 100$$

আমরা একটু মনোযোগ দিয়ে ওপরের তালিকার দিকে তাকালে দেখব যে, 100-এর যেসব উৎপাদক 10 বা তার চেয়ে ছোট, সেগুলো জানলে

বাকিগুলো এমনিতেই বের হয়ে যাবে। যেমন, আমরা যদি জানি, 4 একটি উৎপাদক, তাহলে $\frac{100}{4}$ বা 25ও 100-এর একটি উৎপাদক। কারণ কোনো সংখ্যা তো আর নিজে নিজে কারো উৎপাদক হতে পারে না, বরং অন্য কোনো সংখ্যার সঙ্গে গুণ হয়ে গুণফল হিসেবে সেই সংখ্যাটি তৈরি করে। তাহলে আমরা 100-এর জন্য 1 থেকে 10 পর্যন্ত প্রতিটি সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলেই সবগুলো উৎপাদক পেয়ে যাব।

আরেকটি উদাহরণ দেখি। 40 সংখ্যাটির উৎপাদক কোনগুলো?

$$
\begin{aligned}
1 \times 40 &= 40 \\
2 \times 20 &= 40 \\
4 \times 10 &= 40 \\
5 \times 8 &= 40
\end{aligned}
$$

এখানে দেখতে পাচ্ছি, আমরা যদি 1 থেকে 5 পর্যন্ত সংখ্যাগুলো দিয়ে 40-কে ভাগ করার চেষ্টা করি, তাহলেই সবগুলো উৎপাদক পেয়ে যাব।

পরপর দুটি উদাহরণ দেখে আমরা বুঝতে পারছি যে, n-এর উৎপাদকগুলো বের করতে হলে আসলে 1 থেকে $\frac{n}{2}$ পর্যন্ত সব সংখ্যা দিয়ে ভাগ করার দরকার নেই, বরং আরো ছোট সংখ্যা পর্যন্ত ভাগ করলেই হবে। তাহলে সেই ছোট সংখ্যাটি কী? সেটি হচ্ছে n-এর বর্গমূল। a^2 বা $a \times a$ যদি n হয়, তাহলে n-এর বর্গমূল হচ্ছে a। তোমরা নিজেরা এখন কিছু সংখ্যা (যেমন 30, 50, 80 ইত্যাদি) দিয়ে পরীক্ষা করে দেখতে পারো।

তাহলে আমরা পরীক্ষা-নিরীক্ষা করে বলছি যে, যদি $a \times b = n$ হয়, এবং $a \leq b$ হয়, তাহলে a অবশ্যই n-এর বর্গমূলের সমান বা ছোট। যদি a আর b সমান হয়, তখন তারা আসলে n-এর বর্গমূলের সমান (যেমন, $10 \times 10 = 100$)। বিষয়টি আমরা সহজে প্রমাণও করতে পারি।

ধরা যাক, $a \times b = n$, যেখানে $a \leq b$

এখন আমরা ধরলাম যে a হচ্ছে n-এর বর্গমূলের চেয়ে বড়, অর্থাৎ,

$$a = \sqrt{n} + c \text{ (এখানে } c \text{ যেকোনো ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা)}$$

আর যেহেতু b হচ্ছে a-এর সমান বা বড়, তাহলে b-এর সর্বনিম্ন মান হচ্ছে a-এর সমান, অর্থাৎ $\sqrt{n} + c$

এখন, a ও b গুণ করি,

$$\begin{aligned}(\sqrt{n} + c) \times (\sqrt{n} + c) &= \sqrt{n} \times \sqrt{n} + c \times \sqrt{n} + c \times \sqrt{n} \\ &\quad + c \times c \\ &= n + 2 \times c \times \sqrt{n} + c^2\end{aligned}$$

এটি অবশ্যই n-এর চেয়ে বড় (কারণ c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা)।

তাই আমরা যে শুরুতে ধরেছিলাম, যে $a = \sqrt{n} + c$, সেটি সত্য হতে পারে না, অর্থাৎ a কখনো n-এর বর্গমূলের চেয়ে বড় হতে পারে না। প্রমাণ হয়ে গেল।

> • এভাবে প্রমাণ করার পদ্ধতিকে বলা হয় বৈপরীত্যে প্রমাণ বা proof by contradiction।

আমরা এখন আমাদের পাইথন প্রোগ্রামকে একটু পরিবর্তন করে নিতে পারি।

```
import math

while True:
    n = input("Please enter a positive integer.
Enter 0 to quit: ")
    n = int(n)
    if n == 0:
        break
    if n < 0:
        print("You must enter a positive
integer. Please try again.")
```

```
    continue

factors = [1, n]

sqrt_n = math.sqrt(n)
sqrt_n = int(sqrt_n)

for i in range(2, sqrt_n+1):
    if n % i == 0:
        factors.append(i)
        factors.append(n // i)

factors = sorted(factors)
print("Factors of", n, ":", factors)
print("\n")
```

আগের প্রোগ্রামটির সঙ্গে এর পার্থক্য হচ্ছে, আমরা এখন n-এর বর্গমূল পর্যন্ত পরীক্ষা করছি, আর n যদি i দিয়ে নিঃশেষে বিভাজ্য হয়, তাহলে i ও n//i দুটি সংখ্যাকেই উৎপাদক হিসেবে নিয়ে নিচ্ছি। কেউ যদি প্রোগ্রামটি রান করে 100 ইনপুট দেয়, তাহলে দেখবে সব উৎপাদক চলে এসেছে, কিন্তু 10 দুইবার এসেছে। তোমরা চাইলে এই সমস্যাটি ঠিক করার চেষ্টা করতে পারো যেন কোনো উৎপাদক দুইবার না আসে।

মৌলিক সংখ্যা

গণিতের একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হচ্ছে মৌলিক সংখ্যা। ইংরেজিতে একে বলা হয় প্রাইম নাম্বার (prime number)। 1-এর চেয়ে বড় পূর্ণসংখ্যাগুলোর মধ্যে যেসব সংখ্যাকে 1 এবং ওই সংখ্যা ছাড়া আর কোনো উৎপাদক নেই, তাকেই বলা হয় মৌলিক সংখ্যা। তাহলে আমরা দেখতে পাচ্ছি, 2-এর চেয়ে ছোট কোনো সংখ্যা মৌলিক সংখ্যা হতে পারবে না। আর 2 এবং তার চেয়ে

বড় পূর্ণসংখ্যাগুলোর মধ্যে কারো যদি 1 ও সেই সংখ্যা ছাড়া অন্য কোনো উৎপাদক থাকে, সেটিও মৌলিক সংখ্যা নয়। এখন, সবচেয়ে ছোট মৌলিক সংখ্যাটি হচ্ছে 2, কারণ 1 ও 2 (সংখ্যাটি নিজে) ছাড়া এর আর কোনো উৎপাদক নেই।

- অনেকের মনে প্রশ্ন জাগে, 1 কেন মৌলিক সংখ্যা নয়? 1-এর তো 1 ছাড়া আর কোনো উৎপাদক নেই। কিন্তু মৌলিক সংখ্যার সংজ্ঞাতে বলা আছে যে, সংখ্যাটি হবে 1-এর চেয়ে বড়। তাই 1 মৌলিক সংখ্যা হতে পারবে না। বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখার মতো গণিতেও কিন্তু সংজ্ঞা আছে, সেটি আমরা প্রায়শই ভুলে যাই।

1 থেকে 10 পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর মধ্যে 2, 3, 5, 7 হচ্ছে মৌলিক সংখ্যা। কারণ 1 ও নিজেকে ছাড়া সেগুলোর আর কোনো উৎপাদক নেই। 4 মৌলিক সংখ্যা নয়, কারণ 2 হচ্ছে 4-এর উৎপাদক। 6 মৌলিক সংখ্যা নয়, কারণ 2 ও 3 সংখ্যা দুটি 6-এর উৎপাদক। এদিকে 7-এর জন্য কিন্তু 1 ও 7 ছাড়া আর কোনো উৎপাদক নেই।

এখন কোনো সংখ্যা মৌলিক কি না, সেটি আমরা কীভাবে বুঝব? আমার সেই সংখ্যার উৎপাদকগুলো বের করব। যদি দেখি যে, 1 ও সেই সংখ্যাটি ছাড়া তার অন্য কোনো উৎপাদক আছে, তখনই বুঝব যে, সেটি মৌলিক সংখ্যা নয়।

এখন কিছু মজার বিষয় তুলে ধরি—

- 2 ছাড়া আর কোনো জোড় সংখ্যা মৌলিক সংখ্যা নয়। কারণ হচ্ছে সব জোড় সংখ্যাই তো 2 দিয়ে নিঃশেষে বিভাজ্য, বা 2 হচ্ছে যেকোনো জোড় সংখ্যার একটি উৎপাদক। তাই কেউ যদি জিজ্ঞাসা করে, 837562618394 মৌলিক সংখ্যা কি না, আমরা চট করে বলে দিতে পারব যে, এটি মৌলিক সংখ্যা নয়, কারণ এটি জোড় সংখ্যা।

- কোনো সংখ্যা জোড় না বেজোড় সেটি বোঝার জন্য কিন্তু তাকে 2 দিয়ে ভাগ করা দরকার নেই। কোনো সংখ্যার শেষে যদি 2, 4, 6, 8, 0-এর যেকোনো একটি অঙ্ক থাকে, তাহলে সেটি হবে জোড় সংখ্যা। আর নইলে সেটি বেজোড় (মানে সংখ্যার শেষ অঙ্কটি যদি 1, 3, 5, 7, 9-এর যেকোনো একটি হয়)।
- কোনো সংখ্যার অঙ্কগুলোর যোগফল যদি 3 দিয়ে বিভাজ্য হয়, তাহলে সেই সংখ্যাটিও 3 দ্বারা বিভাজ্য, সুতরাং সেটি মৌলিক সংখ্য হয়। যেমন 357 সংখ্যাটির অঙ্কগুলোর যোগফল হচ্ছে $3 + 5 + 7 = 15$, যা 3 দিয়ে বিভাজ্য। তাই 357 সংখ্যাটিও 3 দিয়ে বিভাজ্য।
- কোনো সংখ্যার শেষ অঙ্ক যদি 0 বা 5 হয়, তাহলে সেটি 5 দিয়ে বিভাজ্য। যেমন, 5, 10, 15, 20 ইত্যাদি।

ফান্ডামেন্টাল থিওরেম অব অ্যারিথমেটিক (Fundamental Theorem of Arithmetic)-এর বাংলা অনুবাদ করলে দাঁড়ায় পাটিগণিতের প্রাথমিক উপপাদ্য। এই উপপাদ্যের মূল বক্তব্য হচ্ছে, 1-এর চেয়ে বড় যেকোনো পূর্ণসংখ্যা হয় নিজে একটি মৌলিক সংখ্যা, অথবা তাকে কতগুলো মৌলিক সংখ্যার গুণফল হিসেবে প্রকাশ করা যায় এবং কেবল একভাবেই প্রকাশ করা যায়। কয়েকটি উদাহরণ দিলেই বিষয়টি পরিষ্কার হবে।

100-কে আমরা মৌলিক সংখ্যার গুণফল দিয়ে প্রকাশ করতে পারি,

$$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$$

তাহলে পাটিগণিতের প্রাথমিক উপপাদ্য অনুসারে, 100-কে মৌলিক সংখ্যার গুণফল হিসেবে প্রকাশ করা যাবে এবং এর মৌলিক উৎপাদকগুলোর মধ্যে সব সময়ই কেবল দুটি 2 ও দুটি 5 থাকবে। আর কোনোভাবে কিন্তু 100-কে মৌলিক সংখ্যার গুণফল হিসেবে প্রকাশ করা যায় না।

আবার 102-কে মৌলিক সংখ্যার গুণফল হিসেবে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$$102 = 2 \times 3 \times 17$$

অন্য কোনো মৌলিক সংখ্যা গুণ করে কিন্তু 102 তৈরি করা যাবে না। আবার 101-কে মৌলিক সংখ্যার গুণফল হিসেবে প্রকাশ করা যায় না, কারণ 101 নিজেই একটি মৌলিক সংখ্যা, যা উপপাদ্যটির প্রথম অংশেই বলা আছে (1-এর চেয়ে বড় যেকোনো পূর্ণসংখ্যা হয় নিজে একটি মৌলিক সংখ্যা, ...)। তোমরা এভাবে বিভিন্ন সংখ্যা নিয়ে পরীক্ষা করে দেখতে পারো।

এই ফান্ডামেন্টাল থিওরেম অব অ্যারিথমেটিক-এর কারণেই কিন্তু 1 মৌলিক সংখ্যা হতে পারে না। 1 মৌলিক সংখ্যা হলে এই উপপাদ্যটি গড়বড় হয়ে যাবে। যেমন, আমরা লিখতে পারি, $10 = 2 \times 5$। তাই 10-কে একভাবেই মৌলিক সংখ্যার গুণফল হিসেবে প্রকাশ করা যায়, যেখানে একটি 2 ও একটি 5 থাকবে। কিন্তু 1ও যদি মৌলিক সংখ্যা হতো, তাহলে আমরা লিখতে পারতাম, $10 = 1 \times 1 \times 2 \times 5$, আবার, $10 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 5$, এভাবে যতগুলো খুশি 1 ব্যবহার করতে পারতাম। আর তখন এই উপপাদ্যটি মিথ্যা হয়ে যেত।

এখন আমরা আবার ফেরত যাই, কোনো সংখ্যা মৌলিক কি না, সেটি বের করার পদ্ধতিতে। আমরা কিছু গবেষণা করে বের করেছি যে, কোনো সংখ্যা মৌলিক কি না, তা বোঝার জন্য 2 থেকে ওই সংখ্যার বর্গমূল পর্যন্ত প্রতিটি সংখ্যা দিয়ে তাকে ভাগ করার চেষ্টা করতে হবে এবং যদি ভাগ করা যায় (মানে ভাগশেষ 0 হয়, অর্থাৎ নিঃশেষে বিভাজ্য), তখন আমরা বুঝতে পারি যে সেটি মৌলিক সংখ্যা নয়। আমাদের আসলে 2 থেকে ওই সংখ্যার বর্গমূল পর্যন্ত প্রতিটি সংখ্যা দিয়ে ভাগ করার দরকার নেই, বরং 2 থেকে ওই সংখ্যার বর্গমূল পর্যন্ত প্রতিটি মৌলিক সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলেই যথেষ্ট। কারণ হচ্ছে, পাটিগণিতের প্রাথমিক উপপাদ্য। বিষয়টি বুঝতে না পারলে ঠান্ডা মাথায় পাটিগণিতের প্রাথমিক উপপাদ্য আবার পড়তে হবে।

পৃথিবীর সব মৌলিক সংখ্যা বের করার কোনো সূত্র নেই। যুগে যুগে বহু গণিতবিদ মৌলিক সংখ্যার সূত্র বের করার ব্যর্থ চেষ্টা করেছেন। আবার মোট মৌলিক সংখ্যা কতগুলো আছে, সেটিও বের করা সহজ কাজ নয়। কারণ মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা অসীম। আমরা কিন্তু চাইলে ব্যাপারটি প্রমাণ করতে পারি যে, মৌলিক সংখ্যার শেষ নেই, বা মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা অসীম।

প্রথমেই ধরে নিই, মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা অসীম নয়। ধরি, পৃথিবীতে মোট n সংখ্যক মৌলিক সংখ্যা আছে। প্রথম মৌলিক সংখ্যা P_1, দ্বিতীয় মৌলিক সংখ্যা P_2। তাহলে সবচেয়ে বড় মৌলিক সংখ্যাকে ধরি P_n। এখন P_n ও তার আগের সবগুলো মৌলিক সংখ্যাকে আমরা গুণ করি, $Q = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \ldots \times P_n$। এখন $Q + 1$ হবে একটি মৌলিক সংখ্যা, কারণ এটি 1 ও নিজেকে ছাড়া অন্য কোনো সংখ্যা দিয়ে নিঃশেষে বিভাজ্য নয়। বিভাজ্য যে নয় সেটি কীভাবে বুঝলাম? কারণ বিভাজ্য হলে তো যেকোনো একটি মৌলিক সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে যেত, যেখানে কোনো ভাগশেষ থাকবে না। কিন্তু আমরা P_1, P_2, ..., P_n এগুলোর মধ্যে যেকোনো মৌলিক সংখ্যা দিয়ে $Q + 1$-কে ভাগ করলেই ভাগশেষ থাকবে 1। যেহেতু সবগুলোর গুণফল হচ্ছে Q, তাই Q-কে ওরা প্রত্যেকেই নিঃশেষে ভাগ করতে পারে, কিন্তু আমরা এজন্য Q-এর সঙ্গে 1 যোগ করে দিয়েছি। তাহলে আমরা দেখতে পাচ্ছি $Q + 1$ একটি মৌলিক সংখ্যা, যা P_n (যাকে আমরা সবচেয়ে বড় মৌলিক সংখ্যা ধরেছিলাম)-এর চেয়ে বড়। তাই P_n সবচেয়ে বড় মৌলিক সংখ্যা, এই বাক্যটি মিথ্যা। সুতরাং মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা অসীম নয়, এই বাক্যটিও মিথ্যা (অসীম না হলে তো সবচেয়ে বড় একটি মৌলিক সংখ্যা P_n পাওয়া যেত)। তাই মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা অসীম। আমরা তাহলে বৈপরীত্যে প্রমাণ পদ্ধতি ব্যবহার করে প্রমাণ করে ফেললাম যে মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা অসীম।

আমরা মৌলিক সংখ্যা নিয়ে অনেক আলোচনা করলাম। তোমাদের মধ্যে যারা প্রোগ্রামিংয়ে উৎসাহী, তারা চাইলে এখন একটি প্রোগ্রাম লিখে ফেলতে পারো, যেটি হিসাব-নিকাশ করে বলে দিবে যে, কোনো সংখ্যা মৌলিক সংখ্যা কি না।

অধ্যায় ৫ : গসাগু ও লসাগু

গসাগু

গসাগু-এর পূর্ণরূপ হচ্ছে গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (ইংরেজিতে বলে Greatest Common Divisor)। গসাগু শব্দটি একটু খটমটে, তাই আমরা শব্দগুলোর আসল অর্থ জেনে নিই। গরিষ্ঠ শব্দের অর্থ সবচেয়ে বড়। সাধারণ বলতে এখানে কমন বোঝাচ্ছে। আমরা এমনিতে যে কমন শব্দটি ব্যবহার করি, সেটি কিন্তু ইংরেজি শব্দ আর এর বাংলা অর্থ হচ্ছে সাধারণ। আর গুণনীয়ক শব্দের অর্থ উৎপাদক। তাই দুটি সংখ্যার গসাগু হচ্ছে সেই সংখ্যা, যা ওই দুটি সংখ্যার যেসব সাধারণ বা কমন উৎপাদক আছে, তাদের মধ্যে সবচেয়ে বড়। যেমন, 16 ও 24 সংখ্যা দুটির গসাগু বের করতে হবে। এখন 16 এর উৎপাদকগুলো হচ্ছে, 1, 2, 4, 8, 16। আর 24-এর উৎপাদকগুলো হচ্ছে 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24। এদের মধ্যে কমন বা সাধারণ হচ্ছে 1, 2, 4 ও 8। আর এগুলোর মধ্যে সবচেয়ে বড় বা গরিষ্ঠ হচ্ছে 8। তাই 16 ও 24-এর গসাগু হচ্ছে 8।

গসাগু বের করার জন্য একটি সহজ উপায় হচ্ছে সংখ্যাগুলোকে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে ফেলা। তারপরে সেখান থেকে কমন বা সাধারণ সংখ্যাগুলো নিয়ে গুণ করে দেওয়া। এভাবে আমরা 16 ও 24-এর মধ্যকার গসাগু নির্ণয় করব।

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

তাহলে মৌলিক উৎপাদকগুলোর মধ্যে কমন হচ্ছে 2, 2, 2। এদেরকে গুণ করে পাই, $2 \times 2 \times 2 = 8$। তাহলে আমরা পেয়ে গেলাম যে, 16 ও 24-এর গসাগু হচ্ছে 8।

এখন প্রশ্ন হচ্ছে, 0 ও n-এর গসাগু কত হবে? উত্তর হবে, n। কারণ আমরা জানি, n নিজেই হচ্ছে তার উৎপাদকগুলোর মধ্যে সবচেয়ে বড়। আর 0-কে n দিয়ে নিঃশেষে ভাগ করা যায়। মানে 0-কে আসলে যেকোনো সংখ্যা দিয়েই ভাগ করা যায়, আর সে ক্ষেত্রে ভাগফল হয় 0 (ভাগশেষও 0)। আমরা এভাবেও বলতে পারি যে, যেকোনো সংখ্যাই 0-এর একটি উৎপাদক, কারণ সেই সংখ্যা ও 0-কে গুণ করলে আমরা 0 পাই ($n \times 0 = 0$)। তাই 0 নিজেও নিজের উৎপাদক। আর 0 যেহেতু নিজেই নিজের উৎপাদক, তাই 0 ও 0-এর গসাগু হচ্ছে 0।

আবার, 1 ও n-এর গসাগু হবে 1। যেহেতু, 1-কে 1 ছাড়া অন্য কোনো সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা যায় না এবং যেকোনো n-কেই 1 দিয়ে ভাগ করা যায়, তাই, এ ক্ষেত্রে 1-ই একমাত্র সংখ্যা যা, দুটি সংখ্যাকেই ভাগ করে। সুতরাং, গসাগু হবে 1। একইভাবে, n ও n-এর গসাগু হচ্ছে, n নিজেই।

এখন আমরা গসাগু বের করার জন্য আরেকটি পদ্ধতি শিখব, যার নাম ইউক্লিডের পদ্ধতি বা ইউক্লিডের অ্যালগরিদম। আজ থেকে প্রায় দুই হাজার বছরেরও বেশি সময় আগে ইউক্লিড নামের এক গ্রিক গণিতবিদ এই পদ্ধতিটি লিপিবদ্ধ করেন। এই পদ্ধতির মূলনীতি হচ্ছে, দুটি সংখ্যা, a ও b-এর মধ্যে যদি $a > b$ হয়, তাহলে,

$$a \text{ ও } b\text{-এর গসাগু} = (a - b) \text{ ও } b\text{-এর গসাগু}$$

তাহলে আমরা দুটি সংখ্যার গসাগু বের করতে হলে বারবার এই পদ্ধতি অবলম্বন করতে পারি। এখন a ও b-এর মধ্যে যেকোনো একটি যদি 0 হয়, তখন আমরা বলতে পারি, অপর সংখ্যাটি হচ্ছে গসাগু। আর যদি একসময় a ও b সমান হয়ে যায়, তখন a (বা b)-কে আমরা গসাগু বলতে পারি। উদাহরণ দেখা যাক।

1) 15 ও 30-এর গসাগু বের করতে হবে। যেহেতু 30 বড়, তাই তাকে আমরা আগে লিখব,

30 ও 15-এর গসাগু = 30 – 15 ও 15-এর গসাগু
= 15 ও 15-এর গসাগু
= 15

2) 10 ও 4-এর গসাগু বের করতে হবে।

10 ও 4-এর গসাগু
= 10 – 4 ও 4-এর গসাগু
= 6 ও 4-এর গসাগু
= 6 – 4 ও 4-এর গসাগু
= 2 ও 4-এর গসাগু
= 4 – 2 ও 2-এর গসাগু
= 2 ও 2-এর গসাগু
= 2

3) 50 ও 29-এর গসাগু = 50 – 29 ও 29-এর গসাগু
= 21 ও 29-এর গসাগু
= 29 – 21 ও 21-এর গসাগু
= 8 ও 21-এর গসাগু
= 21 – 8 ও 8-এর গসাগু
= 13 ও 8-এর গসাগু
= 13 – 8 ও 8-এর গসাগু
= 5 ও 8-এর গসাগু
= 8 – 5 ও 5-এর গসাগু
= 3 ও 5-এর গসাগু
= 5 – 3 ও 3-এর গসাগু
= 2 ও 3-এর গসাগু
= 3 – 2 ও 2-এর গসাগু
= 1 ও 2-এর গসাগু
= 1

আমরা দেখতে পাচ্ছি, বারবার আমাদের একই রকম কাজ করতে হচ্ছে। তাই গসাগু বের করার জন্য একটি প্রোগ্রাম লিখে ফেলি।

```
a = input("Enter the first number: ")
a = int(a)
b = input("Enter the second number: ")
b = int(b)

if b > a:
    #b যদি a-এর চেয়ে বড় হয়, তাহলে ভ্যালুগুলোকে অদলবদল করে দিচ্ছি
    a, b = b, a

while a != b:
    if b == 0: #b-এর মান 0 হলে, গসাগু হবে a, তাই আমরা লুপ
থেকে বের হয়ে যাব
        break
    if a > b:
        a = a - b
    else:
        b = b - a

print("GCD is", a)
```

প্রোগ্রামটি বিভিন্ন ইনপুট দিয়ে পরীক্ষা করতে পারো।


```
$ python gcd.py
Enter the first number: 5
Enter the second number: 0
GCD is 5
$
$ python gcd.py
Enter the first number: 1
Enter the second number: 100
GCD is 1
$
$ python gcd.py
Enter the first number: 29
Enter the second number: 31
```

```
GCD is 1
$

$ python gcd.py
Enter the first number: 77
Enter the second number: 7
GCD is 7
```

গসাগু যে সব সময় দুটি সংখ্যার হতে হবে, এমন নয়। অনেক সময় আমাদেরকে চারটি সংখ্যার গসাগুও বের করতে হতে পারে। তখন আমরা প্রথম দুটি সংখ্যার গসাগু বের করব। সেই গসাগু এবং তৃতীয় সংখ্যার গসাগু বের করব। তারপরে সেই ফলাফল (গসাগু) এবং চতুর্থ সংখ্যার গসাগু বের করব। এভাবে আমরা যতগুলো খুশি ততগুলো সংখ্যার মধ্যে গসাগু বের করতে পারব।

লসাগু

লসাগু-এর পূর্ণরূপ হচ্ছে লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক। লঘিষ্ঠ শব্দের অর্থ সবচেয়ে ছোট। আর গুণিতক মানে হচ্ছে গুণ করে পাওয়া যায় এমন সংখ্যা। যেমন, 3-এর গুণিতক হচ্ছে 3 (3×1), 6 (3×2), 9 (3×3), 12 (3×4), 15 (3×5), ইত্যাদি। দুটি সংখ্যার লসাগু হচ্ছে, যেসব সংখ্যা ওই দুটি সংখ্যার গুণিতক, তাদের মধ্যে সবচেয়ে ছোট সংখ্যা। যেমন, 3 ও 4-এর গুণিতক হচ্ছে 12, 24, 48 ইত্যাদি। এদের মধ্যে সবচেয়ে ছোট হচ্ছে 12। তাই 3 ও 4-এর লসাগু হচ্ছে 12।

দুটি সংখ্যার মধ্যে লসাগু বের করতে হলে, প্রথমে আমরা তাদেরকে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারি। যেমন 4 ও 6-এর লসাগু বের করতে হলে, প্রথমে তাদেরকে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি–

$$4 = 2 \times 2$$
$$6 = 2 \times 3$$

এখন, 4-এর মৌলিক উৎপাদকে 2 আছে দুইবার, আর 6-এ 2 আছে একবার। লসাগু বের করার জন্য আমাদের সবচেয়ে বেশি যেখানে আছে, সেখান থেকে নিতে হবে। তাহলে লসাগুতে 2 থাকবে দুইবার। আবার 6-এর মৌলিক উৎপাদকগুলোতে 3 আছে একবার, 4-এর মৌলিক উৎপাদকে 3 নেই (শূন্যবার আছে)। তাই লসাগুতে 3 থাকবে একবার। তাই,

লসাগু $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

তাহলে আমরা দেখতে পাচ্ছি, গসাগু-এর বেলাতে, যেসব সংখ্যা দুই জায়গাতেই আছে, কেবল তাদেরকে নেওয়া হতো, আর এখানে যেখানে সবচেয়ে বেশি আছে, সেখান থেকে নেওয়া হচ্ছে। এর কারণ কী?

কারণ হচ্ছে, একটি সংখ্যাকে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে দেখা গেল, সেখানে p সংখ্যাটি আছে তিনবার। তাহলে তার যেকোনো গুণিতকে p সংখ্যাটি কমপক্ষে তিনবার থাকতেই হবে (আরো বেশি থাকলে অসুবিধা নেই)। তাই আমরা দুটি সংখ্যাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার পরে প্রতিটি মৌলিক সংখ্যা যেখানে সবচেয়ে বেশি আছে, সেখান থেকে নেই। যেমন 4-এর মৌলিক উৎপাদকে 2 আছে দুইবার। তাই লসাগুতে 2 দুইবারের কম থাকতে পারবে না। কম থাকলে সেটি আর 4-এর গুণিতক হবে না।

আমরা আরেকটি উদাহরণ দেখি। 90 ও 105-এর লসাগু বের করতে হবে। তাদেরকে প্রথমে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি,

$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$$
$$105 = 3 \times 5 \times 7$$

তাহলে তাদের লসাগুতে 2 থাকবে একবার, 3 থাকবে দুইবার, 5 থাকবে একবার ও 7 থাকবে একবার।

লসাগু হবে, $2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 630$

লসাগু বের করার আরেকটি সহজ সূত্র হচ্ছে,

দুটি সংখ্যার গুণফল = সংখ্যা দুটির লসাগু × সংখ্যা দুটির গসাগু

তাই আমরা যদি সংখ্যা দুটির গসাগু এবং গুণফল জানি, তাহলে সহজেই লসাগু বের করে ফেলতে পারি। যেমন 4 ও 6-এর গসাগু হচ্ছে 2। আর সংখ্যা দুটির গুণফল হচ্ছে 24। তাহলে লসাগু হবে, $\frac{24}{2} = 12$। তোমরা এখন চাইলে লসাগু বের করার জন্যও একটি প্রোগ্রাম লিখে ফেলতে পারো।

অধ্যায় ৬ : শতকরা

100% খাঁটি কথা। এর অর্থ পুরোটাই খাঁটি, কোনো ভেজাল নেই। নির্ভেজাল বা নিখাদও বলা যায়। সম্পূর্ণ বলতে কেন 100% লেখা হয়? কেন অন্য কোনো সংখ্যা নয়? আসলে এটি আন্তর্জাতিকভাবে প্রচলিত। বাংলাদেশে কিন্তু আমরা অনেক সময় ষোলো আনা দিয়ে সম্পূর্ণ অংশ বোঝাই। ষোলো আনা খাঁটি, মানে পুরোপুরি খাঁটি। চার আনা ভেজাল, মানে ষোলো ভাগের চার ভাগ, অর্থাৎ $\frac{4}{16}$ অংশ, বা $\frac{1}{4}$ অংশ (লব ও হরকে 4 দিয়ে ভাগ করে)। এখন যেহেতু আন্তর্জাতিকভাবে পার্সেন্টেজ (percentage) বা শতকরা ব্যবহার করা হয়, তাই আমরা আমাদের হিসাবেও তাই ব্যবহার করব।

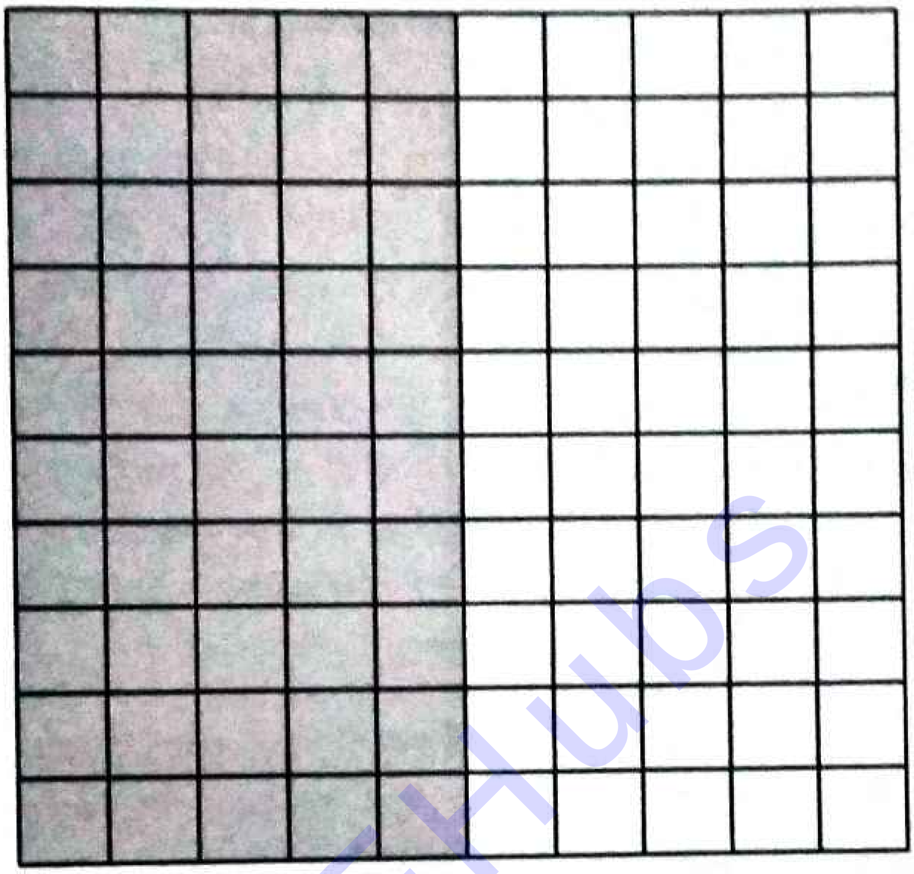
আমরা যখন বলি, কোনো জিনিসের অর্ধেক, সেটিকে ভগ্নাংশ হিসেবে $\frac{1}{2}$ আকারে প্রকাশ করতে পারি, কিংবা 0.5ও লিখতে পারি। আর যখন আমরা শতকরা হিসাব করব, তখন অর্ধেক মানে কত % হবে? যদি কোথাও একশটি সমান ঘর থাকে এবং অর্ধেক ঘর পূর্ণ হয়ে যায়, তাহলে কত % হলো? 50%। বিশ্বাস না হলে ছবি 6.1-এর ঘরগুলো গুণে দেখা যেতে পারে।

ভগ্নাংশ থেকে পার্সেন্টেজে নিতে হলে আমাদেরকে 100 দিয়ে গুণ করতে হবে। যেমন, $\frac{1}{2}$ কে যদি পার্সেন্টেজ আকারে প্রকাশ করতে চাই, তাহলে সেটি হবে, $\frac{1}{2} \times 100\%$ বা 50%।

এরকম আমরা যখন বলব,

চার ভাগের এক ভাগ ($^1/_4$), তখন সেটি হবে 25%,
তিন ভাগের এক ভাগ ($^1/_3$), সেটি হবে 33.333333...%
(চলতে থাকবে, মানে পৌনঃপুনিক)
পাঁচ ভাগের এক ভাগ ($^1/_5$) হবে 20%।

প্রতিবারই ভগ্নাংশকে 100 দিয়ে গুণ করে পার্সেন্টেজ ব্যবহার করা হচ্ছে।



ছবি 6.1

এখন একটি গুরুত্বপূর্ণ কথা বলে রাখি। 1 অপেক্ষাকৃত ছোট একটি সংখ্যা হলেও 1% কিন্তু মোটেও ছোট নয়। বিশেষ করে কোনো সংখ্যার শেষে % থাকলে তাকে মোটেও অবহেলা করা যাবে না। যেমন আমরা যদি বলি, এ বছর যতজন শিক্ষার্থী এইচএসসি পাস করেছে, তাদের মধ্যে 1% খুব ভালো প্রোগ্রামার হবে, তাহলে সেটি কম নাকি বেশি? আসলে সেটি নির্ভর করে মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যার ওপর। মোট শিক্ষার্থী যদি 10 লক্ষ হয়, তাহলে তার 1% শিক্ষার্থীর মধ্যে কতজন থাকবে?

100 জনে 1 জন
1000 জনে 10 জন
10000 জনে 100 জন
100000 জনে 1000 জন
1000000 জনে 10000 জন।

তাহলে আমরা দেখতে পাচ্ছি, 10 লক্ষ শিক্ষার্থীর মধ্যে 1% মানে 10 হাজার শিক্ষার্থী।

কয়েক বছর আগে একটি মোবাইল ফোন অপারেটর কোম্পানি বিজ্ঞাপন দিয়েছিল যে, রিচার্জ করলেই 300% বোনাস। কীভাবে? 20 টাকা রিচার্জে 100% অর্থাৎ 20 টাকা বোনাস, আরো 20 টাকা রিচার্জে আরো 100% বা 20 টাকা বোনাস, আরো 20 টাকা রিচার্জে 100%, মানে আরো 20 টাকা বোনাস—এভাবে তিনবারে মোট 300%। কিন্তু এখানে একটি বিরাট ফাঁকি রয়েছে। আমি যদি আসলে তিনবার রিচার্জ করি, তাহলে আমি মোট $20 + 20 + 20$, অর্থাৎ 60 টাকা রিচার্জ করছি। আর আমি বোনাসও পাব $20 + 20 + 20 = 60$ টাকা। মানে আমি 60 টাকা রিচার্জ করে 60 টাকা বোনাস পাচ্ছি। তাহলে কত % হলো? উত্তর হবে 100%। তার মানে বিজ্ঞাপনটি ছিল একটি গাণিতিক প্রতারণা।

ধরা যাক, বিশ্ববিদ্যালয়ে পড়ুয়া এক শিক্ষার্থী তার বন্ধুদের কাছে ঘোষণা করল যে, সে চাকরি পেলে প্রথম মাসের বেতন পাওয়ার পরে বেতনের 25% টাকা দিয়ে তার বন্ধুদের খাওয়াবে। এখন যদি সে 30 হাজার টাকা বেতনের চাকরি পায়, তাহলে তাকে বন্ধুদের খাওয়ানোর জন্য কত টাকা খরচ করতে হবে?

$$
\begin{aligned}
30000 \times 25\% &= 30000 \times \frac{25}{100} \\
&= 30000 \times \frac{1}{4} \\
&= 7500 \text{ টাকা।}
\end{aligned}
$$

ঐকিক নিয়মের সঙ্গে মিল আছে কিন্তু।

100 টাকায় 25 টাকা

1 টাকায় $\frac{25}{100}$ টাকা

30000 টাকায় $30000 \times \frac{25}{100}$ টাকা, অর্থাৎ 7500 টাকা।

সিঙ্গাপুরে বাড়ি ভাড়া করতে হলে একজন এজেন্টের সাহায্য নিতে হয়। আর বাড়ি ভাড়া নেওয়ার সময় 6 মাস থেকে 18 মাস পর্যন্ত চুক্তি করা যায়। আর এজেন্টকে এককালীন বাড়িভাড়ার একটি শতকরা অংশ ফি দিতে হয়। ধরা যাক, 12 মাসের চুক্তি হলে এক মাসের ভাড়ার 100% এজেন্টকে দিতে হবে। 6 মাসের চুক্তি হলে এক মাসের ভাড়ার 50% আর 18 মাসের চুক্তি হলে এক মাসের ভাড়ার 150% এজেন্টকে দিতে হবে। এখন আমি যদি একটি নির্দিষ্ট ভাড়ার জন্য এজেন্ট ফি (কমিশন) কত হবে, সেটি হিসাব করতে চাই, তাহলে আমাকে আগে হিসাব করে বের করতে হবে যে এজেন্ট আসলে কত পার্সেন্ট টাকা পাবে, আর এই পার্সেন্ট নির্ভর করে কত মাসের চুক্তি তার ওপর।

12 মাসের জন্য কমিশন 100%

1 মাসের জন্য কমিশন $\frac{100}{12}\%$

6 মাসের জন্য কমিশন হবে,

এক মাসের কমিশনের ছয় গুণ, অর্থাৎ, $\frac{100}{12} \times 6\% = 50\%$

18 মাসের জন্য কমিশন হবে,

এক মাসের কমিশনের 18 গুণ, অর্থাৎ $\frac{100}{12} \times 18\% = 150\%$

আবার বাসাভাড়া যদি প্রতি মাসে 2000 ডলার হয়, তাহলে,

2000 ডলারের 100% কমিশন হবে $= 2000 \times \frac{100}{100}$

$= 2000$ ডলার

2000 ডলারের 50% কমিশন হবে $= 2000 \times \frac{50}{100}$

$= 1000$ ডলার

2000 ডলারের 150% কমিশন হবে $= 2000 \times \frac{150}{100}$

$= 3000$ ডলার।

তাহলে আমাদেরকে বাসাভাড়া এবং মেয়াদকাল (মানে কত মাসের জন্য ভাড়া নেওয়া হয়েছে) বলে দিলে আমরা সহজেই একটি প্রোগ্রাম লিখে ফেলতে পারব, যেটি দিয়ে এজেন্টের কমিশন হিসাব করা যাবে।

```
#include <stdio.h>

int main()
{
    int months, rent_per_month;
    float agent_fee, agent_percentage;

    printf("What is your monthly rent? ");
    scanf("%d", &rent_per_month);

    printf("For how many months you are
renting? ");
    scanf("%d", &months);

    agent_percentage = (100.00 / 12) * months;
    agent_fee = rent_per_month *
agent_percentage / 100;

    printf("Agent fee is %.2f\n", agent_fee);

    return 0;
}
```

এখন আসি আরেকটি মজার উদাহরণে। কেউ আমাকে স্বল্প সুদে কিছু টাকা ঋণ দিল। ধরা যাক, মাসিক 20% সুদে আমি ঋণ নিলাম 10 হাজার টাকা। তাহলে আমি যদি এক মাসের মধ্যে ঋণ শোধ করে ফেলি, আমাকে 10 হাজার টাকার সঙ্গে আরো অতিরিক্ত 10000-এর 20% অর্থাৎ 2000 টাকা দেওয়া লাগবে। এখন আমি ঋণ শোধ করলাম তিন মাস পরে (মানে তিন মাস শেষ হয়ে চতুর্থ মাস শেষ হওয়ার আগে)। তাহলে আমাকে সুদে-

আসলে (মানে আসল টাকা আর সুদের অতিরিক্ত টাকা) কত টাকা পরিশোধ করতে হবে?

প্রথম মাসের মধ্যে পরিশোধ না করায়,
মোট দেনা হবে, 10000 + 2000
= 12000 টাকা

দ্বিতীয় মাসে দেনা হবে, 12000 + 12000 এর 20%
= 12000 + 2400
= 14400 টাকা

তৃতীয় মাসে দেনা হবে, 14400 + 14400 এর 20%
= 14400 + 2880
= 17280 টাকা

চতুর্থ মাসে দেনা হবে, 17280 + 17280 এর 20%
= 17280 + 3456
= 20736 টাকা

অর্থাৎ, আমাকে মোট 20736 টাকা ফেরত দিতে হবে। এই হিসাবের কাজটি আমরা সহজ করে ফেলতে পারি একটি কম্পিউটার প্রোগ্রামের সাহায্যে। নিচের প্রোগ্রামে মোট ঋণের পরিমাণ, মাসিক সুদের হার ও কত মাস পরে টাকা পরিশোধ করা হবে, এই তিনটি তথ্য ইনপুট দিলে মোট কত টাকা পরিশোধ করতে হবে, সেটি বলে দেবে।

```
#include <stdio.h>

int main()
{
    int i, loan_amount, interest_rate, months;
    float total_amount;

    printf("Please enter the loan amount: ");
```

```
    scanf("%d", &loan_amount);
    printf("Please enter the interest rate: ");
    scanf("%d", &interest_rate);
    printf("After how many months you want to
settle the loan? ");
    scanf("%d", &months);

    // this is the amount before 1st month
    total_amount = loan_amount + loan_amount *
interest_rate / 100.0;

    for (i = 1; i <= months; i++) {
        total_amount = total_amount +
total_amount * interest_rate / 100.0;
        printf("After month %d, the total
amount is %.2f\n", i, total_amount);
    }

    return 0;
}
```

প্রোগ্রামটি চালিয়ে বিভিন্ন ইনপুট দিয়ে পরীক্ষা করে দেখা যেতে পারে। ওপরের উদাহরণের মানগুলো ব্যবহার করলে এরকম আউটপুট আসবে :

```
Please enter the loan amount: 10000
Please enter the interest rate: 20
After how many months you want to settle the
loan? 3
After month 1, the total amount is 14400.00
After month 2, the total amount is 17280.00
After month 3, the total amount is 20736.00
```

পার্সেন্টাইল

ধরা যাক, স্কুলের বার্ষিক পরীক্ষায় সালমান প্রথম স্থান অর্জন করল। তাহলে কি আমরা বলতে পারি যে সালমান তার নিজ ক্লাসের মধ্যে সেরা 1%?

না, পরীক্ষার ফলাফলে প্রথম স্থান অর্জন করা, আর শীর্ষ 1%-এর মধ্যে থাকা কিন্তু ভিন্ন ব্যাপার। যদি সালমানের ক্লাসে মোট শিক্ষার্থী থাকে 20 জন, তাহলে সে কিন্তু প্রথম হয়েও সেরা 1%-এর মধ্যে থাকবে না। কারণ যখন শতকরার হিসাব চলে আসবে, তখন আমাদের চিন্তা করতে হবে, 100-এর মধ্যে কত? তাহলে সালমান সেরা কত %-এর মধ্যে আছে, সেটি কীভাবে বের করব?

20 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে প্রথম স্থান। তাহলে মোট 100 জন শিক্ষার্থী যদি থাকত, তাহলে সে সেরা কত %-এ থাকত? উত্তর হবে 5%। কীভাবে? প্রতি 20 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে প্রথম স্থান, তাহলে এরকম পাঁচবার 20 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে প্রথম স্থান অধিকার করার অর্থ হবে 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে সেরা পাঁচটি স্থানের মধ্যে থাকা, অর্থাৎ সেরা 5%-এ থাকা। তাহলে আমরা বলতে পারি, সালমান তার ক্লাসের সেরা 5% শিক্ষার্থীর মধ্যে আছে, যদিও সে 20 জনের মধ্যে প্রথম স্থান অর্জন করেছে। আবার, জসিম তার ক্লাসের সেরা 5% শিক্ষার্থীর মধ্যে আছে, এর মানে এই নয় যে, 5% স্থান তার দখলে। ক্লাসের সেরা 5%-এ যতজন শিক্ষার্থী আছে, জসিম হচ্ছে তাদের একজন।

এখন, ক্লাসের সেরা 5%-এর মধ্যে থাকা মানে বাকি 95%-এর চেয়ে ভালো অবস্থানে থাকা। এ কথাটি প্রকাশ করার জন্য পার্সেন্টাইল (Percentile) নামে একটি শব্দ আছে। এখানে, জসিমের পার্সেন্টাইল অবস্থান 95তম। কথাটির অর্থ হচ্ছে, জসিম ক্লাসের 95% শিক্ষার্থীর চেয়ে ভালো ফলাফল করেছে বা 95% শিক্ষার্থীই জসিমের চেয়ে কম নম্বর পেয়েছে।

অধ্যায় ৭ : গড়, মধ্যক ও প্রচুরক

গড়

গড় শব্দটির সঙ্গে তোমরা যারা স্কুলে বিষয়টি পড়ে ফেলেছ, তারা যেমন পরিচিত, তেমনি যারা ক্রিকেট খেলা দেখো, তারাও পরিচিত। এই বইটি যখন লেখা হচ্ছে, তখন তামিম ইকবালের টেস্ট ক্রিকেটে ব্যাটিং গড় হচ্ছ 40.34 আর সাকিব আল হাসানের 40.93। এই গড় কীভাবে হিসাব করা হলো আর এর মানেই বা কী?

আমাকে যদি দুটি সংখ্যা দিয়ে এদের গড় বের করতে বলা হয়, তখন আমি সংখ্যা দুটি যোগ করে দুই দিয়ে ভাগ করব। যেমন,

5 ও 6, এই দুটি সংখ্যার গড় হচ্ছে, $\frac{5+6}{2}$ বা, $\frac{11}{2}$ বা, 5.5।

তিনটি সংখ্যা 6, 7, 8-এর গড় হচ্ছে, $\frac{6+7+8}{3}$ বা, $\frac{21}{3}$ বা, 7।

তাহলে আমাকে যদি n সংখ্যক সংখ্যা দেওয়া হয়, তাহলে তাদের গড় বের করতে হলে সবগুলো সংখ্যা যোগ করে n দিয়ে ভাগ করব। তাহলেই হয়ে গেল।

এখন আমরা পাইথন ব্যবহার করে একটি প্রোগ্রাম লিখব, যার কাজ হচ্ছে অনেকগুলো সংখ্যার গড় বের করা।

```
def average(li):
    s = sum(li)
    n = len(li)
    return s / n

li = [1, 2, 3]
```

```
print("Average:", average(li))
li = [10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80]
print("Average:", average(li))
li = [-1, 0, 1]
print("Average:", average(li))
```

প্রোগ্রামটি রান করলে আমরা আউটপুট পাব এরকম :

```
Average: 2.0
Average: 45.0
Average: 0.0
```

ক্রিকেট খেলায় ব্যাটিং গড় কীভাবে বের করে? মোট রানকে ইনিংস দিয়ে ভাগ করতে হয়। তবে একটি মজার বিষয় হচ্ছে, কোনো ইনিংসে অপরাজিত থাকলে, অর্থাৎ, আউট না হলে, সেই ইনিংসকে ভাগ করার সময় গণনা করা হয় না। ধরা যাক, কোনো ব্যাটসম্যান প্রথম খেলায় করলো 50 রান, দ্বিতীয় খেলায় 100 রান (অপরাজিত), তৃতীয় খেলায় আবারো 50 রান করে আউট হলো। তাহলে,

$$\text{তার ব্যাটিং গড় হবে, } \frac{50+100+50}{2} \text{ বা, } \frac{200}{2} \text{ বা, } 100$$

এখানে 3 এর বদলে 2 দিয়ে ভাগ করার কারণ হচ্ছে, দ্বিতীয় খেলায় সে অপরাজিত ছিল। একটা মজার প্রশ্ন করি, কোনো খেলোয়াড় যদি একটিই ম্যাচ খেলে থাকে, আর সেই ম্যাচে যদি সে 59 রান (অপরাজিত) করে থাকে, তাহলে তার কত হবে বলো দেখি?

এখন গড় আমাদের কী কাজে লাগে? ধরা যাক, আন্তর্জাতিক ক্রিকেট খেলায় নতুন একটি দেশের আগমন ঘটল এবং বাংলাদেশের সঙ্গে ওই দলের খেলা। টসে হেরে ওই দল প্রথমে ব্যাটিং পেল। এখন ওদের যেই দুজন ব্যাটসম্যান ইনিংস ওপেন করতে এসেছে, ঘরোয়া লিগে একজনের ব্যাটিং গড় হচ্ছে 26 আরেকজনের হচ্ছে 41। এই তথ্য থেকে তুমি দুজন ব্যাটসম্যানের মধ্যে তুলনা করতে পারো যে, কে তুলনামূলক ভালো

ব্যাটসম্যান। তবে আজকের ম্যাচে কে কত রান করবে, এটি কিন্তু ব্যাটিং গড়ের ওপর নির্ভর করে না। কারো ব্যাটিং গড় 26 মানে এই নয় যে, সে প্রতি ইনিংসে 26 রান করে। তবে বলা যায়, গড়ে প্রতি 26 রানে সে একবার আউট হয়। তাহলে গড় হচ্ছে কোনো কিছুর মান সম্পর্কে ধারণা করার জন্য একটি টুল মাত্র। ইংরেজিতে একে average বলে, তবে গণিতের ক্ষেত্রে mean শব্দটিই বেশি ব্যবহার করা হয়।

ছোট একটি উদাহরণ দেখি। ধরা যাক, কেউ জিগ্যেস করল, একটি লুডু খেলার ছক্কা গড়ালে গড়ে কত পড়বে? লুডু খেলার ছক্কায় থাকে ছয়টি সংখ্যা 1, 2, 3, 4, 5, 6। তাহলে আমরা যদি এদের গড় করি, পাব,

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$

এখন তুমি যদি মাথা চুলকে ভাবতে থাকো, ছক্কা গড়ালে 3.5 পড়বে তাহলে কিন্তু ভুল হবে। ছক্কা গড়ালে 1 থেকে 6-এর মধ্যে যেকোনো সংখ্যাই পড়তে পারে। কিন্তু কেউ যদি 100 বার কিংবা 1000 বার লুডুর ছক্কা গড়ায়, অনুমানে বলা যায়, তার প্রতিবারের কত পড়ল, তার গড় 3.5 বা এর কাছাকাছি কোনো একটা সংখ্যাই হবে।

এখন আরেকটি উদাহরণ দিই। কোনো দেশের মানুষ কেমন ধনী বা গরিব, তা বোঝার জন্য অনেক সময় মাথাপিছু আয় ব্যবহার করা হয়। মাথাপিছু আয় মানে হচ্ছে গড় আয়। সেটি ব্যবহার করে সেই দেশের মানুষের অর্থনৈতিক অবস্থা সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়। কিন্তু সেখানে যদি মানুষের আয়ের মধ্যে বৈষম্য অনেক বেশি হয়, তাহলে কিন্তু গড় ব্যবহার করে প্রকৃত ধারণা পাওয়া যাবে না। একটি উদাহরণ দিয়ে বোঝাই।

ধরা যাক, কোনো দেশে 10 জন মানুষ আছে। তাদের মধ্যে,

2 জন প্রতি মাসে 10 হাজার টাকা করে আয় করে
5 জন প্রতিমাসে 20 হাজার টাকা করে আয় করে আর
একজন আয় করে প্রতিমাসে 30 হাজার টাকা
বাকি দুইজন প্রতি মাসে 5 লক্ষ টাকা করে আয় করে

তাহলে প্রতিমাসে তাদের গড় আয় কত?

$$\text{গড় আয়} = \frac{\begin{array}{c}10{,}000+10{,}000+20{,}000+20{,}000\\+20{,}000+20{,}000+20{,}000+30{,}000\\+5{,}00{,}000+5{,}00{,}000\end{array}}{10} \text{ টাকা}$$
$$= 1{,}15{,}000 \text{ টাকা}$$

তার মানে গড় আয় 1 লক্ষ 15 হাজার টাকা! তাহলে শুধু গড় আয় জানলে যে কেউ সেই দেশের মানুষকে ধনী ভাববে। তাই গড় ব্যবহার করে সব সময় প্রকৃত চিত্র পাওয়া যায় না। তবে এতে হতাশ হওয়ার কিছু নেই, কারণ আমাদের হাতে রয়েছে মধ্যক ও প্রচুরক।

মধ্যক

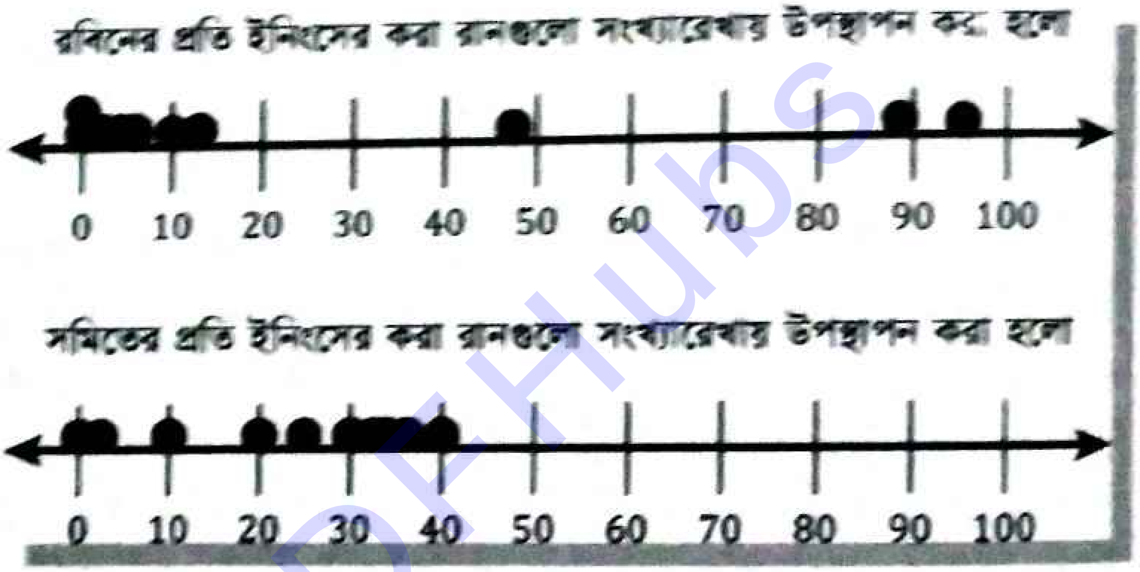
এখন ধরা যাক, তুমি কোনো ক্রিকেট দলের ম্যানেজার। তোমার দল তৈরির সময় দুজন ব্যাটসম্যান—রবিন ও সমিতের মধ্যে একজনকে বেছে নিতে হবে। দুজনের মধ্যে যার ব্যাটিং গড় বেশি, তুমি তাকে দলে নিতে পারো। কিন্তু তুমি যদি আরেকটু সচেতন হও, তখন হয়তো তুমি জানতে চাইতে পারো যে, কে কতগুলো ম্যাচ খেলেছে। ধরা যাক, রবিন 50টি ম্যাচ খেলেছে এবং তার ব্যাটিং গড় 30। আর সমিত খেলেছে 5টি ম্যাচ এবং তার ব্যাটিং গড় 38। তুমি কিন্তু বেশিরভাগ ক্ষেত্রেই রবিনকে দলে নেবে, যেহেতু সে সমিতের তুলনায় অনেক বেশি অভিজ্ঞ। কিন্তু দুজন যদি সমানসংখ্যক ম্যাচ খেলে, তখন কি কেবল গড় হিসাব করবে? তুমি চাইলে তখন আরেক ধরনের টুল ব্যবহার করতে পারো, যার নাম মধ্যক (ইংরেজিতে বলে median)।

ধরা যাক, রবিন ও সমিত—দুজনেই 10টি করে ম্যাচ খেলেছে। 10টি ম্যাচে—

রবিনের রান হচ্ছে, 95, 88, 47, 0, 10, 1, 5, 12, 0, 3 আর
সমিতের রান হচ্ছে, 10, 40, 20, 37, 0, 1, 25, 35, 30, 33

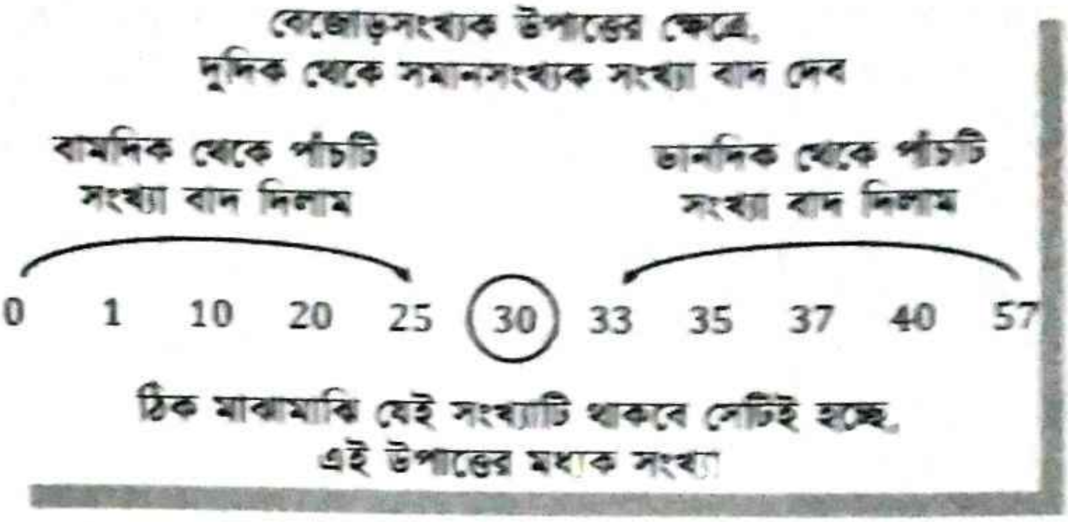
রবিনের গড় রান সমিতের গড় রানের চেয়ে বেশি। তবে এখানে আমরা দেখতে পাচ্ছি, রবিন মাঝেমধ্যে অনেক বেশি রান করে, তবে বেশিরভাগ সময়ই সে খুব একটা ভালো খেলে না। আর সমিত দু-একটি বাদে বাকি খেলাগুলোয় মোটামুটি রান করতে পারে। তাই শুধু গড়ের ওপর ভরসা করা আমাদের ঠিক হবে না। আমরা মধ্যক বের করব। প্রথমে আমরা তাদের প্রতি ম্যাচের রান ছোট থেকে বড় ক্রমানুসারে সাজাব। তাহলে,

রবিনের রান হবে, 0, 0, 1, 3, 5, 10, 12, 47, 88, 95 আর
সমিতের রান হবে, 0, 1, 10, 20, 25, 30, 33, 35, 37, 40



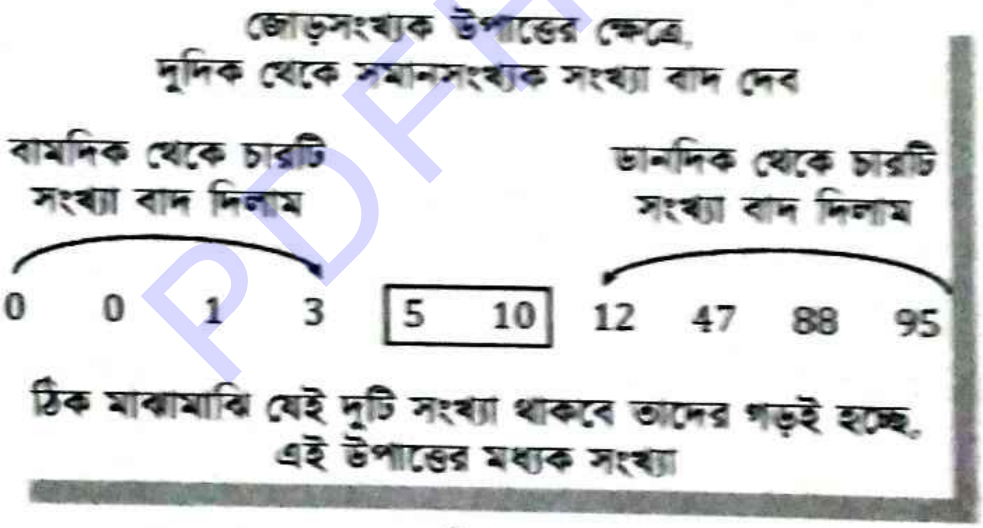
ছবি 7.1

মধ্যক বের করতে গেলে আমাদেরকে তালিকার মাঝামাঝি সংখ্যাটি নিতে হবে। মোট সংখ্যা যদি বেজোড় হয়, তাহলে মাঝামাঝি সংখ্যা হবে একটি। যেমন 11টি সংখ্যার ক্ষেত্রে 6 নম্বর সংখ্যাটি হচ্ছে মাঝামাঝি সংখ্যা। কারণ ওই সংখ্যার চেয়ে ছোট 5টি সংখ্যা আছে। আবার ওই সংখ্যার চেয়ে বড় সংখ্যাও আছে 5টি। কিন্তু তালিকা সদস্য জোড়সংখ্যক হলো একটি মাঝামাঝি সংখ্যা বের করা যায় না। যেমন 10টি সংখ্যার ক্ষেত্রে আমরা যদি 5 নম্বর সংখ্যাটিকে মাঝামাঝি সংখ্যা ধরি, তাহলে তার ছোট 4টি আর তার বড় 5টি সংখ্যা থাকবে। আবার 6 নম্বর সংখ্যাকে মাঝামাঝি সংখ্যা ধরলে, তার ছোট 5টি আর বড় 4টি সংখ্যা থাকবে।



ছবি 7.2

যেহেতু আমাদের 10টি সংখ্যা, তাই আমরা 5 ও 6 নম্বর সংখ্যা দুটি নিয়ে তাদের গড় বের করব, মানে সংখ্যা দুটি যোগ করে দুই দিয়ে ভাগ করব। তাহলে রবিনের রানের মিডিয়ান হবে 7.5 আর সমিতের রানের মিডিয়ান হবে 27.5।



ছবি 7.3

এটি দেখে আমরা কি বুঝতে পারি? রবিন যতগুলো ম্যাচ খেলেছে, তার অর্ধেক ম্যাচেই সে 7.5 এর কম রান করেছে, আর বাকি অর্ধেক ম্যাচে সে 7.5 এর চেয়ে বেশি রান করেছে। আবার সমিত অর্ধেকসংখ্যক ম্যাচে 27.5 এর চেয়ে কম রান করেছে, বাকি অর্ধেক ম্যাচে সে 27.5 এর চেয়ে বেশি রান করেছে। এখানে আমরা মিডিয়ান ব্যবহার করে সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে

কাকে দলে নেব। কাজটি তোমরা খাতা-কলমে করে ফেলো, তবে আমি পাইথন ব্যবহার করে একটি প্রোগ্রাম লিখে দেখাব।

```
def median(li):
    li.sort()
    count = len(li)

    if count == 0:
        return None
    if count % 2 == 1:
        mid = count // 2
        return li[mid]
    else:
        mid2 = count // 2
        mid1 = mid2 - 1
        return (li[mid1]+li[mid2])/2

run_robin = [95, 88, 47, 0, 10, 1, 5, 12, 0, 3]
run_shomit = [10, 40, 20, 37, 0, 1, 25, 35, 30,
33]

median_robin = median(run_robin)
median_shomit = median(run_shomit)

print("Median run for Robin", median_robin)
print("Median run for Shomit", median_shomit)
```

আমরা এখন আমাদের মাথাপিছু আয়ের হিসাবে ফেরত যাই। তোমরা যদি সেই উদাহরণ থেকে মধ্যক বের করো, তাহলে সেটি হবে 20,000। তোমরা হাতে-কলমে কিংবা একটি প্রোগ্রাম লিখে সেটি বের করতে পারো। এখানে কিন্তু মধ্যক ব্যবহার করেই বাস্তব চিত্রের কাছাকাছি চিত্র পাওয়া যাচ্ছে। মধ্যক দিয়ে তথ্যের মধ্যে অনেক চমৎকার কিছু ব্যাপার জানা যায়। যেমন, বাংলাদেশের জনসংখ্যার মিডিয়ান বয়স হচ্ছে 26.3 বছর। অর্থাৎ, বাংলাদেশের জনসংখ্যার অর্ধেকেরই বয়স 26.3 বছরের কম, আর বাকি

অর্ধেক জনসংখ্যার বয়স 26.3 বছরের চেয়ে বেশি। অন্যদিকে জাপানের জনসংখ্যা মিডিয়ান বয়স 47.3 বছর। মিডিয়ানকে অনেক সময় 50th পার্সেনটাইল-ও বলে।

প্রচুরক

কোনো একটি ওয়ানডে ম্যাচের আগে তোমরা বন্ধুরা মিলে আলোচনা করছ, আজকের খেলায় মোস্তাফিজ কয়টি উইকেট পাবে। একেকজন একেক সংখ্যা বলছে। কিন্তু তুমি যদি গড় ও মধ্যক ঠিকভাবে বুঝে থাকো, তাহলে তুমি মোস্তাফিজের সব খেলার তথ্য ইন্টারনেট থেকে জোগাড় করে গড় ও মধ্যক বের করে আজকে সে কয়টি উইকেট পাবে, তা অনুমান করে ফেলতে পারবে। যদিও সেই অনুমান সঠিক নাও হতে পারে। তবে আমি তোমাদের এখন আরেকটি টুলের সঙ্গে পরিচয় করিয়ে দেব, যার নাম হচ্ছে প্রচুরক (ইংরেজিতে mode)।

একটি ওয়ানডে ম্যাচে একজন বোলারের পক্ষে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন কয়টি উইকেট পাওয়া সম্ভব? উত্তর হবে, যথাক্রমে 10টি ও 0টি। 0-এর চেয়ে কম কিংবা 10-এর চেয়ে বেশি উইকেট পাওয়া সম্ভব নয়। এখন ধরা যাক, মোস্তাফিজ এখন পর্যন্ত 20টি ওয়ানডে ম্যাচে বোলিং করেছে। সেই খেলাগুলোতে সে প্রতি খেলায় যতগুলো উইকেট পেয়েছে, তা হচ্ছে : 6, 5, 6, 4, 3, 1, 3, 2, 1, 0, 5, 3, 3, 2, 2, 1, 3, 4, 3, 3। এখন আমি একটি তালিকা তৈরি করব যে মোস্তাফিজ 0 উইকেট পেয়েছে কতবার, 1 উইকেট পেয়েছে কতবার... এরকম।

উইকেট	ম্যাচের সংখ্যা
0	1
1	3

2	3
3	7
4	2
5	2
6	2
7	0
8	0
9	0
10	0

তাহলে আমরা দেখতে পাচ্ছি, মোস্তাফিজ সবচেয়ে বেশি পেয়েছে 3 উইকেট। 20টি খেলার মধ্যে 7টি খেলাতেই সে 3 উইকেট করে পেয়েছে। তাহলে তুমি ধরে নিতে পারো যে, আজকের খেলাতে মোস্তাফিজের 3 উইকেট পাওয়ার সম্ভাবনাই সবচেয়ে বেশি। এখানে প্রচুরক হচ্ছে 3। কারণ উইকেটের লিস্টে 3 সবচেয়ে বেশিবার আছে। আমরা এখন ওপরের হিসাবটা একটি পাইথন প্রোগ্রাম লিখে করব।

```
wkts_list = [6, 5, 6, 4, 3, 1, 3, 2, 1, 0, 5,
3, 3, 2, 2, 1, 3, 4, 3, 3]

for item in range(11):
    print("Wicket:", item, "Count:",
wkts_list.count(item))
```

প্রোগ্রামটি রান করলে আউটপুট আসবে এরকম :

```
Wicket: 0 Count: 1
Wicket: 1 Count: 3
Wicket: 2 Count: 3
Wicket: 3 Count: 7
Wicket: 4 Count: 2
Wicket: 5 Count: 2
Wicket: 6 Count: 2
Wicket: 7 Count: 0
Wicket: 8 Count: 0
Wicket: 9 Count: 0
Wicket: 10 Count: 0
```

আবার প্রোগ্রামটি চাইলে এভাবেও লেখা যেত :

```
wkts_list = [6, 5, 6, 4, 3, 1, 3, 2, 1, 0, 5,
3, 3, 2, 2, 1, 3, 4, 3, 3]

wkts_freq = {}
for item in wkts_list:
    if item in wkts_freq:
        wkts_freq[item] += 1
    else:
        wkts_freq[item] = 1

for item in wkts_freq:
    print("Wicket:", item, "Count:",
wkts_freq[item])
```

সে ক্ষেত্রে আউটপুট আসবে এরকম :

```
Wicket: 0 Count: 1
Wicket: 1 Count: 3
Wicket: 2 Count: 3
Wicket: 3 Count: 7
Wicket: 4 Count: 2
```

```
Wicket: 5 Count: 2
Wicket: 6 Count: 2
```

যে ঘটনাটি সবচেয়ে বেশিসংখ্যক বার ঘটে, সেটিই হচ্ছে প্রচুরক। বিভিন্ন রকম মতামত জরিপ করতে প্রচুরক ব্যবহার করা হয়। যেমন ধরো, তুমি একটি নতুন মোবাইল ফোন কিনতে চাও। কিন্তু কোন ব্র্যান্ডের ফোন ভালো সেটি বুঝতে পারছ না। তখন তুমি তোমার বন্ধুদের জিজ্ঞাসা করতে পারো এবং সবচেয়ে বেশিসংখ্যক বন্ধু যেই ব্র্যান্ডের মোবাইল ফোন ব্যবহার করে বা ভালো বলে, সেই ব্র্যান্ডের ফোন কিনতে পারো।

গড়, মধ্যক ও প্রচুরক হচ্ছে পরিসংখ্যানের একেবারে মৌলিক কিছু ধারণা। এগুলো ছাড়াও আরো অনেক ধরনের টুল আছে, যেগুলো ব্যবহার করে বিভিন্ন তথ্য-উপাত্ত বিশ্লেষণ করা যায়। এগুলো তোমরা ভবিষ্যতে পরিসংখ্যান পড়লে জানতে পারবে।

অধ্যায় ৮ : সম্ভাব্যতা

পরিসংখ্যানের আরেকটি মৌলিক বিষয় হচ্ছে সম্ভাব্যতা। একে ইংরেজিতে বলে প্রবাবিলিটি (probability)। আমরা এই অধ্যায়ে সম্ভাব্যতার প্রাথমিক ধারণা দিয়ে আলোচনা করব।

আমরা অনেক সময়ই জানতে চাই, এই ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা কেমন? যেমন, আজকে বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা কেমন, একটি ক্রিকেট ম্যাচে বাংলাদেশের জয়লাভের সম্ভাবনা কেমন, একটি ফুটবল ম্যাচে অমুক খেলোয়াড়ের গোল করার সম্ভাবনা কেমন? এই সম্ভাবনাগুলো পরিমাপের জন্যই সম্ভাব্যতা ব্যবহার করা হয়। সম্ভাব্যতার হিসাব খুব সহজও হতে পারে, আবার খুব জটিলও হতে পারে।

ছবি 8.1

তোমরা জানো, ক্রিকেট খেলার শুরুতেই একটি পয়সা বা কয়েন ব্যবহার করে টস করা হয়। টসে যে জিতবে, সে নির্ধারণ করবে যে তার দল শুরুতে ব্যাটিং করবে নাকি বোলিং করবে। পয়সার কিন্তু দুটি পৃষ্ঠ থাকে এবং টস করলে পসয়াটি যখন মাটিতে পড়বে, তখন যেকোনো একটি পৃষ্ঠ ওপরের দিকে থাকবে, অন্যপৃষ্ঠটি থাকবে নিচের দিকে। পয়সার একটি পৃষ্ঠকে বলে

হেড (head), অন্য পৃষ্ঠকে বলে টেইল (tail)। এ ক্ষেত্রে আমরা দুটি পৃষ্ঠ এর মধ্যে থেকে যেকোনো একটি পৃষ্ঠ দেখতে পাব। তাই টসে জয়লাভ করার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ বা 0.5। শতকরার হিসাবে বললে 50%, তবে সম্ভাব্যতার ক্ষেত্রে বাস্তব সংখ্যা ব্যবহারের প্রচলনই বেশি।

একটি বাক্সে একটি লাল বল ও একটি সবুজ বল আছে, এবং দুটি বলের আকৃতি একই রকম। এখন আমি যদি চোখ বন্ধ করে একটি বল বাছাই করি, সেটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা কেমন? উত্তর হবে $\frac{1}{2}$। আর বাক্সে যদি একই রকম আরেকটি বল থাকত যার রং নীল, তখন আমার বাছাইকৃত বলটি লাল বল হওয়ার সম্ভাবনা কত? উত্তর হচ্ছে,

$$\frac{\text{বাক্সে মোট লাল বলের সংখ্যা}}{\text{বাক্সে মোট বলের সংখ্যা}} \text{ বা, } \frac{1}{3}$$

আবার সেই বাক্সে যদি দুটি লাল বল, একটি সবুজ বল ও একটি নীল বল থাকত, তাহলে আমার লাল বল বাছাই করার সম্ভাবনা কেমন হতো? সেটি হতো, $\frac{2}{4}$ বা, $\frac{1}{2}$ বা, 0.5। কারণ মোট বল চারটি আর লাল বল দুটি। এখন সেই বাক্স থেকে একটি কালো বল বাছাই করার সম্ভাবনা কত? সেই সম্ভাবনা হচ্ছে, $\frac{0}{4}$ বা, 0। কারণ বাক্সে কোনো কালো বল নেই।

ছবি 8.2

আবার একটি বাক্সে পাঁচটি সাদা বল আছে, আমি যদি সেখান থেকে চোখ বন্ধ করে একটি বেছে নিই, তাহলে সেটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত? উত্তর হবে, $\frac{5}{5}$ বা, 1।

লুডু খেলার সময়, আমরা যখন একটি চাল দিই, সেটি 2 হওয়ার সম্ভাবনা কত? লুডু খেলার ছক্কা (dice)-এ মোট ছয়টি পৃষ্ঠ আছে, এবং কেবল একটি পৃষ্ঠে 2 আছে, তাই সেই সম্ভাবনা হবে, $\frac{1}{6}$।

একদিন সকালে ঘুম থেকে উঠে তুমি ভুলে গেলে যে আজকে কী বার। তুমি চেষ্টা করেও মনে করতে পারছ না, তাই স্কুলে যেতে হবে কি হবে না, সেটিও বুঝতে পারছ না। তোমার স্কুল হচ্ছে শুক্র আর শনিবার বন্ধ। বাকি দিনগুলোতে স্কুল খোলা। এখন, ওইদিন তোমার স্কুলে যাওয়ার সম্ভাবনা কেমন? মোট দিন আছে 7টি। আর স্কুল খোলার দিন 5টি। তাহলে সেদিন স্কুল খোলা হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{5}{7}$। আচ্ছা, ওই দিনটি সোমবার হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? সপ্তাহের সাত দিনের মধ্যে এক দিন হচ্ছে সোমবার। তোমার যেহেতু আর কিছুই মনে নেই, তাই সেটি সোমবার হওয়ার সম্ভাবনা হচ্ছে $\frac{1}{7}$। আবার তোমার যদি এটি মনে থাকত যে, আজকে স্কুল খোলা (কিন্তু কী বার সেটি ভুলে গেছ), তাহলে সেই দিনটি সোমবার হওয়ার সম্ভাব্যতা হচ্ছে, $\frac{1}{5}$। কারণ পাঁচ দিন তোমার স্কুল খোলা। আবার তুমি যদি এটি নিশ্চিত থাকো যে, আজকে ছুটির দিন (কিন্তু কী বার সেটি মনে করতে পারছ না), তাহলে ওই দিনটি সোমবার হওয়ার সম্ভাব্যতা হচ্ছে, $\frac{0}{2}$ বা, 0।

আবার লুডু খেলার উদাহরণে ফেরত যাই। পরপর দুটি চালে 2 ওঠার সম্ভাব্যতা কেমন? একটি চালে 2 ওঠার সম্ভাবনা হচ্ছে, $\frac{1}{6}$। তাহলে পরপর দুটি চালে দুই ওঠার সম্ভাবনা হবে, $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ বা, $\frac{1}{36}$।

এই অধ্যায়ে আমি কেবল তোমাদেরকে সম্ভাব্যতার ধারণা দেওয়ার চেষ্টা করলাম। তোমরা আগ্রহী হলে, একাদশ-দ্বাদশ শ্রেণির বই থেকে আরো শিখতে পারো। এখন তোমাকে সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ বিষয়টি বলি। একটি কয়েন টস করলে তুমি জানো হেড আসবে অথবা টেইল। তুমি চাও যে, হেড আসুক। এখন তুমি যদি মনে করো যে, যেহেতু হেড আসার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{2}$ তাহলে দুইবার কয়েন টস করলে, একবার তো হেড আসবেই। এই ধারণাটি সঠিক নয়। সম্ভাব্যতা তোমাকে কেবল ধারণা দেয় যে, একটি ঘটনা ঘটার

সম্ভাব্যতা কেমন। সেটি কিন্তু তোমাকে ঘটনা ঘটার কোনো নিশ্চয়তা দেয় না (যদি না সম্ভাব্যতা 1 হয়)। তাই প্রতিবারই কয়েন টস করার সময় হেড আসার সম্ভাবনা হচ্ছে 0.5 এবং এমনও হতে পারে যে, একশবার কয়েন টস করা হলো, একবারও হেড এল না। এই বিষয়টি তোমাকে উপলব্ধি করতে হবে।

অধ্যায় ৯ : সেট

সেট শব্দটির সঙ্গে আমরা কমবেশি সবাই পরিচিত। যেমন আমরা বলি, ষষ্ঠ শ্রেণির এক সেট বই। এটি দিয়ে আমরা বোঝাই যে, ষষ্ঠ শ্রেণির পাঠ্যতালিকার অন্তর্ভুক্ত সব বই। তাই আমরা কাউকে যদি বলি অমুক ক্লাসের এক সেট বই দিতে, তাহলে সে আমাদের ওই ক্লাসের যে সমস্ত পাঠ্যবই আছে, তাদের প্রতিটি এক কপি করে দেবে। এখন পাঠ্যবই যদি ১০টি হয়, তাহলে ১০টি বইয়ের নাম আলাদা না বলে, এক সেট বই বললেই কিন্তু হয়ে যাচ্ছে। তো গণিতেও কিন্তু সেট বিষয়টি আছে, যা হচ্ছে বিভিন্ন বস্তুর সমাহার। একে প্রকাশ করার নির্দিষ্ট কিছু পদ্ধতিও আছে। প্রথম পদ্ধতিতে সেটের সব সদস্যকে একে একে লিখে ফেলা হয়। সেটের অন্তর্গত যেকোনো কিছুই হচ্ছে সেই সেটের সদস্য। যেমন ষষ্ঠ শ্রেণির পাঠ্যবইয়ের সেটের সদস্য হচ্ছে সেই শ্রেণির বাংলা বই, ইংরেজি বই, গণিত বই, ইত্যাদি। সেটকে আমরা চাইলে ছোট-বড় যেকোনো নাম দিতে পারি।

গাণিতিক ভাষায় সেটকে প্রকাশ করতে হলে দ্বিতীয় বন্ধনী বা কার্লি ব্রেসের ভেতরে প্রতিটি উপাদান কমা চিহ্ন দিয়ে আলাদা করে লিখতে হয়—

> ষষ্ঠ শ্রেণির বইয়ের সেট = {বাংলা বই, ইংরেজি বই, বিজ্ঞান বই, গণিত বই, সমাজ বই, ধর্ম শিক্ষা বই, কম্পিউটার শিক্ষা বই}

এভাবে সেট প্রকাশ করার পদ্ধতিকে বলে টেব্যুলার (tabular) পদ্ধতি। এখানে প্রতিটি বই হচ্ছে ষষ্ঠ শ্রেণির বইয়ের সেটের সদস্য। কোনো একটি বস্তু একটি সেটের সদস্য এ কথাটি বোঝানোর জন্য গাণিতিক ভাষায় "∈" চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। এই চিহ্নটি হচ্ছে গ্রিক বর্ণমালার ইপসাইলন বর্ণের ('ε') পরিবর্তিত রূপ। যেমন, ওপরের সেটের ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি,

> বাংলা বই ∈ ষষ্ঠ শ্রেণির বইয়ের সেট; অর্থাৎ, বাংলা বই, ষষ্ঠ শ্রেণির বইয়ের সেটের একটি উপাদান বা সদস্য।

আবার, কোনো উপাদান কোনো সেটের সদস্য নয়, এমন বোঝাতে "$\notin$" চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

> হিসাববিজ্ঞান বই $\notin$ ষষ্ঠ শ্রেণির বইয়ের সেট; অর্থাৎ, হিসাববিজ্ঞান বই, ষষ্ঠ শ্রেণির বইয়ের সেটের উপাদান নয়।

একটি সেটে যতগুলো উপাদান আছে, তার মোট সংখ্যাকে বলে সেটের কারডিনালিটি। একে প্রকাশ করা হয় এভাবে : $|S|$ বা, n(সেটের নাম)। যেমন, ওপরের ষষ্ঠ শ্রেণির বইয়ের সেটের মোট উপাদান আছে 7টি। আবার, 1 থেকে 20 পর্যন্ত মৌলিক সংখ্যার সেটে উপাদান আছে 8টি। সুতরাং গাণিতিক ভাষায় লেখা যায়,

$$|\text{ষষ্ঠ শ্রেণির বইয়ের সেট}| = n(\text{ষষ্ঠ শ্রেণির বইয়ের সেট}) = 7$$
$$|\text{মৌলিক}| = n(\text{মৌলিক}) = 7$$

সেটকে আরেকভাবে লেখা যায়—

$$\text{ষষ্ঠ শ্রেণির বইয়ের সেট} = \{\text{বই, যেন বইটি ষষ্ঠ শ্রেণির পাঠ্যবই}\}$$

অর্থাৎ, এই সেটের উপাদান হবে বই, তবে সব বই নয়, যেসব বই শুধু ষষ্ঠ শ্রেণির পাঠ্যবই, সেসব বই।

এই পদ্ধতিকে বলা হয় সেট বিল্ডার পদ্ধতি। এ পদ্ধতি আমাদের অনেক কাজ কমিয়ে দেয়। ধরা যাক, কেউ আমাকে বলল, 1 থেকে 20 পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর মধ্যে মৌলিক সংখ্যার সেট তৈরি করতে। আমি সেটের নাম দিলাম মৌলিক (যেকোনো নাম দিলেই চলবে)। তাহলে প্রথম পদ্ধতি অনুসরণ করলে, সেটটি হবে এরকম—

$$\text{মৌলিক} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

আর দ্বিতীয় পদ্ধতিতে আমরা লিখতে পারি এভাবে—

মৌলিক = {একটি সংখ্যা, যেন সংখ্যাটি 1-এর সমান কিংবা বড় এবং সংখ্যাটি 20-এর সমান কিংবা ছোট এবং সংখ্যাটি একটি মৌলিক সংখ্যা}

আরেকটু সংক্ষেপেও চাইলে লেখা যায়, এভাবে–

মৌলিক = {x: $1 \leq x \leq 20$ এবং x মৌলিক সংখ্যা}

এখানে কোলন চিহ্নকে (":") পড়তে হবে "যেন", ইংরেজিতে পড়তে গেলে বলা যেতে পারে "such that"। তোমাদের মনে হতে পারে, এভাবে লিখে কী লাভ হলো? কেউ যদি তোমাকে বলে, একটি সেট লেখো যেটি হচ্ছে 1 থেকে 100000 পর্যন্ত মৌলিক সংখ্যা, তাহলে তোমার অনেক অনেক সময় লেগে যাবে। অবশ্য তুমি যদি একটি ছোট্ট সি কিংবা পাইথন প্রোগ্রাম লিখে সেটি বের করে ফেলতে পারো, তাহলে আলাদা কথা। তবে তুমি সেই সেটকে S নাম দিয়ে এভাবে লিখে ফেলতে পারো :

S = {x: $1 \leq x \leq 100000$, এবং x মৌলিক সংখ্যা}

কোনো সেটের মোট উপাদানের সংখ্যা যদি গুনে বের করা যায়, তাহলে সেই সেটকে বলে সসীম (finite) সেট। আবার যেই সেটের উপাদান সংখ্যা গুনে বের করা যায় না, তাকে বলে অসীম (infinite) সেট।

সার্ক = {দেশের নাম, যেন দেশটি সার্ক সদস্যভুক্ত একটি দেশ}
S = {x: x জোড় সংখ্যা এবং $1 \leq x \leq 100$}

ওপরের সেট দুটির মধ্যে সার্ক সেটে মোট সদস্য আছে, ৪টি, অর্থাৎ, |সার্ক| = 8। তাই, বলা যায়, সার্ক সেটটি একটি সসীম সেট। আবার S সেটে আছে 1 থেকে 100 এর মধ্যে সব জোড় সংখ্যা। সুতরাং, $|S| = 50$। তাই, S সেটও একটি সসীম সেট।

ধরা যাক, 1, 2, 3, ... এভাবে করে সবগুলো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা নিয়ে একটি সেট তৈরি করলাম। এই সেটের নাম দিলাম A। আবার, 1, 3, 5, ... এভাবে

করে সবগুলো ধনাত্মক বেজোড় পূর্ণসংখ্যা নিয়ে আরেকটি সেট তৈরি করলাম, যার নাম দিলাম B।

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$
$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$$

এখন, আমরা জানি যে, ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা অসীম পর্যন্ত হতে পারে। তাহলে, A সেটের মোট কয়টি উপাদান থাকবে? A সেটের উপাদান সংখ্যা হবে অসীম। অর্থাৎ, $|A| = \infty$। একইভাবে B সেটের কারডিনালিটিও হবে অসীম,$|B| = \infty$। এখানে A এবং B এই সেট দুটি অসীম সেট।

- কোনো সেটের মধ্যে কোনো উপাদান একাধিকবার থাকলেও তাকে একবারই গণনা করা হয়। অর্থাৎ, আমি যদি লিখি, $A = \{1, 3, 4, 4, 5, 3, 4, 5\}$ তা মূলত $\{1, 3, 4, 5\}$ সেটকেই বোঝাবে।

- দুটি সেটে যদি একই উপাদান থাকে তবে তাদেরকে পরস্পর সমান বলা যায়,
  ধরি, $A = \{1, 3, 7\}$ এবং $B = \{1, 3, 7\}$
  $\therefore A = B$

তোমার প্রিয় খেলা কোনগুলো? এই প্রশ্নের উত্তর যদি হয়, ক্রিকেট, ফুটবল, দাবা—তাহলে বলা যায়, তোমার প্রিয় খেলার সেট হচ্ছে ক্রিকেট, ফুটবল ও দাবা। এখন সমিতের প্রিয় খেলা যদি হয়, ক্রিকেট, ফুটবল, টেবিল টেনিস, ব্যাডমিন্টন, দাবা তাহলে সমিতের প্রিয় খেলার সেটকে আমরা S নাম দিয়ে লিখতে পারি,

$$S = \{\text{ক্রিকেট, ফুটবল, টেবিল টেনিস, ব্যাডমিন্টন, দাবা}\}$$

আবার অভীকের প্রিয় খেলাগুলো হচ্ছে ক্রিকেট, ফুটবল, বাস্কেটবল, সাঁতার আর ভলিবল। অভীকের প্রিয় খেলার সেটকে A নাম দিলে আমরা লিখতে পারি,

A = {ক্রিকেট, ফুটবল, বাস্কেটবল, সাঁতার, ভলিবল}

এখন যদি আমাকে বলা হয়, একটি সেট তৈরি করতে হবে, যেই সেটের সদস্য হবে অভীকের প্রিয় খেলা এবং সমিতের প্রিয় খেলা। তাহলে কি আমি তাদের দুজনের প্রিয় খেলাগুলো সব একটি সেটি নিয়ে আসব? আমি যদি সেরকম করি, তাহলে সেই সেটটি হবে,

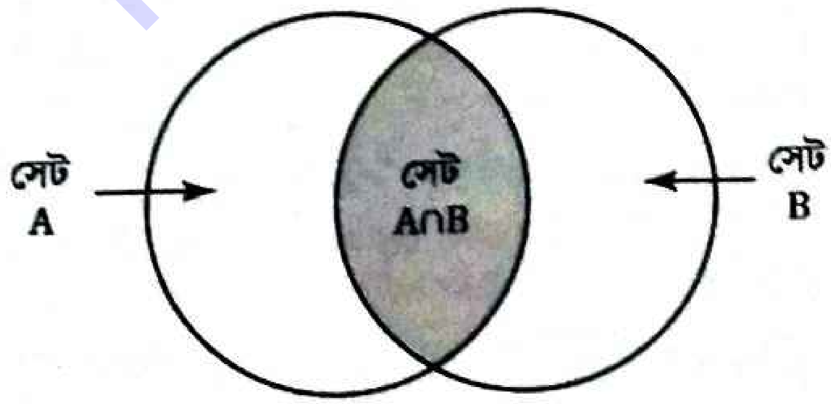
{ক্রিকেট, ফুটবল, টেবিল টেনিস, ব্যাডমিন্টন, দাবা বাস্কেটবল, সাঁতার, ভলিবল}

এই সেটের একটি সদস্য হচ্ছে ভলিবল। তো ভলিবল কি সমিত এবং অভীকের প্রিয় খেলা? না, এটি তো কেবল অভীকের প্রিয় খেলা। তাহলে সমিত এবং অভিকের প্রিয় খেলার সেটে ভলিবল রাখা ঠিক হয়নি। সেটে এমন সব খেলা রাখতে হবে, যেগুলো সমিত এবং অভীক, দুজনেরই প্রিয় খেলা। তাহলে সেটের নাম যদি দিই C, সেটটি হবে এমন,

C = {ক্রিকেট, ফুটবল}

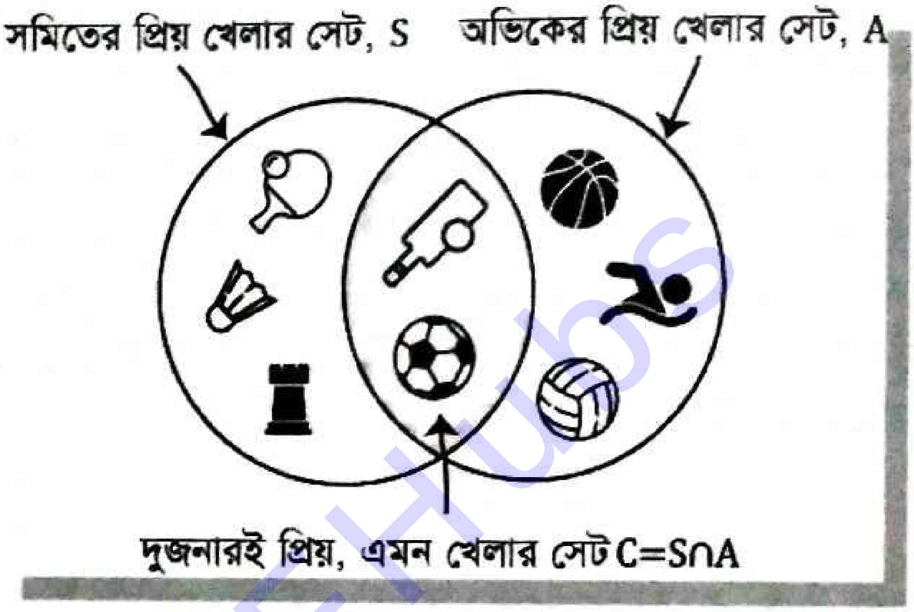
একে ছেদ সেট বা ইন্টারসেকশন (intersection) সেট বলে। C-কে আমরা এভাবেও লিখতে পারতাম–

C = {x, যেন x, A সেটের সদস্য এবং x, B সেটের সদস্য}, বা,
C = {x: $x \in A$ এবং $x \in B$}



ছবি 9.1

ছবি 9.1-এর মতো বৃত্ত এঁকেও সহজে বোঝা যায়। এরকম বৃত্ত দিয়ে সেট প্রকাশ করার পদ্ধতিকে বলে ভেন চিত্র (Venn diagram)। ওপরের ভেনচিত্রে প্রথম বৃত্তটি হচ্ছে *A* সেট ও দ্বিতীয় বৃত্তটি হচ্ছে *B* সেট। আর তাদের মধ্যের ছাই রঙের যেটুকু অংশ *A* ও *B* উভয় সেটেই আছে, সেই অংশটি হচ্ছে *A* ও *B*-এর ছেদ সেট। তাহলে সমিত ও অভিকের প্রিয় খেলার সেটের ভেনচিত্র আমরা কীভাবে আঁকব? (ছবি 9.2)



ছবি 9.2

এখন, *A* যদি হয় সকল ধনাত্মক জোড়সংখ্যার সেট আর B যদি হয় সকল ধনাত্মক বেজোড় সংখ্যার সেট, তাহলে তাদের ছেদ সেট কী হবে? যেহেতু এমন কোনো সংখ্যা নেই, যা একই সঙ্গে জোড়, আবার বেজোড়, তাই এই দুই সেটের মধ্যে কোনো সাধারণ (কমন) উপাদান নেই। তাই তাদের ছেদ সেটে কিছু থাকবে না, এটি হবে একটি ফাঁকা সেট। ফাঁকা সেট লিখতে হয় এভাবে, {}। অর্থাৎ, দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে কোনো উপাদান থাকবে না। কখনো কখনো দ্বিতীয় বন্ধনীর বদলে নরওয়েজীয় বর্ণমালার 'Ø' বর্ণ ব্যবহার করে ফাঁকা সেট লেখা হয়। যদি বলা হয়, $A = \emptyset$, এর অর্থ হচ্ছে A একটি ফাঁকা সেট এবং $|A| = 0$. যদি দুটি সেটের ছেদ সেট ফাঁকা সেট হয়, তাহলে ওই সেট দুটোকে বলা হয়, পরস্পর নিশ্ছেদ সেট (disjoint set)।

এখন আমরা জানব, সংযোগ সেট সম্পর্কে। ইংরেজিতে একে বলে ইউনিয়ন (union) সেট। আমরা যদি জানতে চাই, যেসব খেলাগুলো সমিত অথবা অভীকের পছন্দ, সেসব খেলার সেট, তাহলে যেই সেটটি আমরা পাব, তার নামই সংযোগ সেট। এখানে অনেকেরই একটি ব্যাপার বুঝতে অসুবিধা হতে পারে। আমি যখন লিখেছি সমিত অথবা অভীকের পছন্দ, তার মানে কিন্তু এই নয় যে হয় সমিতের পছন্দ, না হয় অভীকের পছন্দ। এখানে এই "অথবা"-এর অর্থ হচ্ছে, এই দুজনের মধ্যে কমপক্ষে যেকোনো একজনের পছন্দ। তাহলে এই সংযোগ সেটের খেলাগুলোর প্রতিটি খেলা হয় সমিতের পছন্দ, না হয় অভীকের পছন্দ, আবার তাদের দুজনেরই পছন্দ। তাহলে সংযোগ সেটের নাম যদি দিই D,

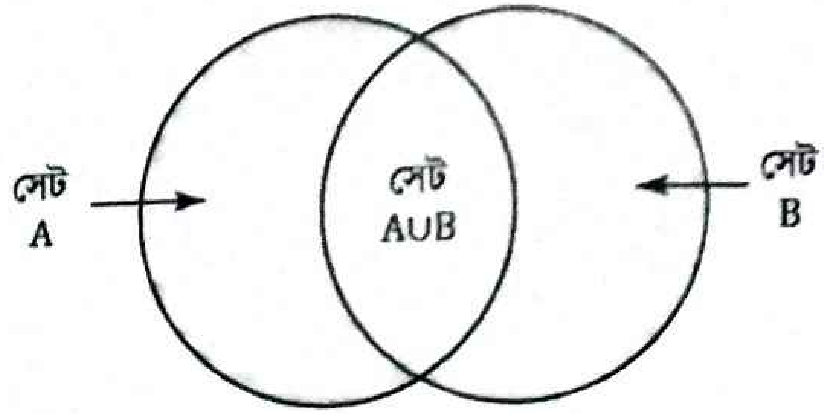
D = {ক্রিকেট, ফুটবল, বাস্কেটবল, সাঁতার, ভলিবল, টেবিল টেনিস, ব্যাডমিন্টন, দাবা} (ছবি 9.3)

এই সেটের প্রতিটি খেলা হয় সমিতের পছন্দ, না হয় অভীকের পছন্দ, অথবা তাদের দুজনেরই পছন্দ।

ছবি 9.3

সকল জোড় সংখ্যার সেটের নাম যদি হয় *even* আর সকল বেজোড় সংখ্যার সেটের নাম *odd*, তাহলে তাদের সংযোগ সেটে কী থাকবে? তাদের সংযোগ সেটে থাকবে সকল পূর্ণসংখ্যা।

ছবি 9.4-এর ভেনচিত্রের ছাই রঙের পুরো অংশটিই হচ্ছে A ও B-এর সংযোগ সেট।



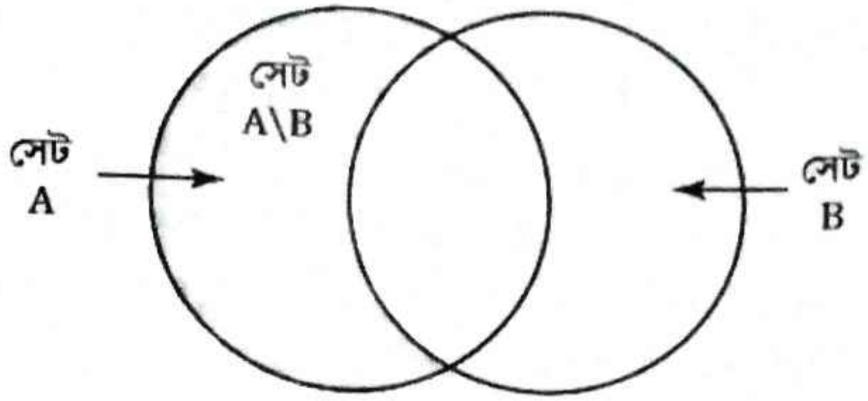
ছবি 9.4

আচ্ছা, আমি যদি এখন জানতে চাই, কোন খেলাগুলো কেবল সমিত পছন্দ করে, কিন্তু অভীকের পছন্দ তালিকায় সেগুলো নেই? তাহলে আমাদের ব্যবহার করতে হবে পূরক সেট, যার আরেক নাম আপেক্ষিক কমপ্লিমেন্ট (relative complement)। সমিতের প্রিয় খেলার সেট (S) থেকে অভীকের প্রিয় খেলার সেট (A) বাদ দিতে হবে এবং একে বলা হয়, A-এর সাপেক্ষে S-এর পূরক সেট। সেটের সদস্যগুলো হবে,

{টেবিল টেনিস, ব্যাডমিন্টন, দাবা} (ছবি 9.5)

ছবি 9.5

আপেক্ষিক কমপ্লিমেন্টকে সেটের অন্তর (difference of set)-ও বলা হয়। একে প্রকাশ করা হয় এভাবে, $A \setminus B$ বা $A - B$ (ছবি 9.6)।



ছবি 9.6

সার্বিক সেট (universal set) : সার্বিক সেট মানে, যেই সেটে সবকিছু আছে। আমরা যদি খেলার সেটের কথা চিন্তা করি, তাহলে পৃথিবীর সকল খেলা এই সেটে আছে। আবার আমরা যদি সংখ্যার সেটের কথা চিন্তা করি, তাহলে সকল সংখ্যা এই সেটে আছে। এই ধারণাটি আমাদের মাঝেমধ্যে ব্যবহার করতে হয়। সার্বিক সেটের সঙ্গে কোনো সেটের অন্তর বের করলে যে সেট পাওয়া যায়, তাকে ওই সেটের কমপ্লিমেন্ট সেট বলা হয়। একে প্রকাশ করা হয় এভাবে, A^c বা, A' দিয়ে।

- সেটের মধ্যে উপাদানের ক্রম গুরুত্বপূর্ণ নয়। অর্থাৎ, কোনো উপাদান যদি আগে-পরে করে লেখা হয় তবুও সেটি একই সেট বোঝায়।

  যদি, $A = \{3, 9, 17\}$ ও $B = \{17, 9, 3\}$ হয়,
  তাহলে, $A = B$

  অর্থাৎ, উভয়েই একই সেট বোঝাচ্ছে।

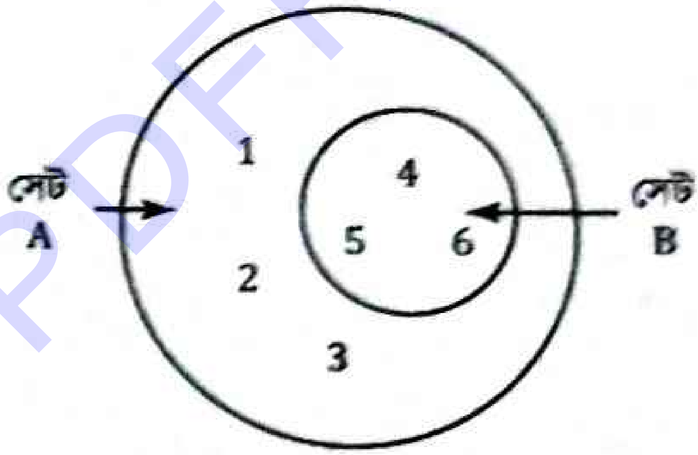
এখন আমরা জানব যে, উপসেট বা সাবসেট (subset) কী? কোনো সেটের অন্তর্গত যে সকল উপাদান বা সদস্য আছে, তাদের মধ্যে যেকোনো কয়েকটি সদস্য কিংবা সকল সদস্য নিয়ে গঠিত সেটগুলো হচ্ছে মূল সেটের উপসেট।

যেমন, একটি সেটে যদি এমন হয়, $S = \{10, 20, 30\}$, তাহলে এর সম্ভাব্য উপসেটগুলো হচ্ছে–

$$\{10\}, \{20\}, \{30\}, \{10, 20\}, \{10, 30\}, \{20, 30\},$$
$$\{10, 20, 30\}, \{\}$$

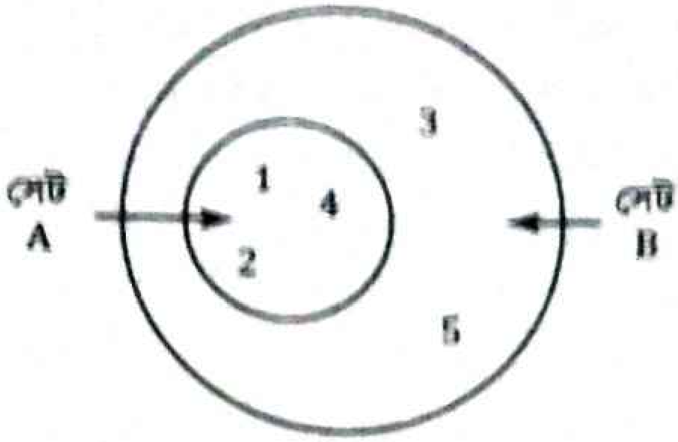
তো একেবারে শেষে আমি কী লিখলাম? একটি ফাঁকা সেট। অর্থাৎ, ফাঁকা সেটও এই সেটের একটি উপসেট। কেননা, S সেট থেকে 0টি উপাদান নিয়ে যদি একটি উপসেট তৈরি করি, তাহলেই ফাঁকা সেট পাব। সেই হিসেবে, ফাঁকা সেট সকল সেটেরই একটি উপসেট।

আরেকটি বিষয় খেয়াল করতে হবে যে, কোনো সেট নিজেও নিজের উপসেট। অর্থাৎ, $\{1, 2, 3\}$ সেটের একটি উপসেট হচ্ছে $\{1, 2, 3\}$। তাই প্রকৃত উপসেট বলে আরেকটি বিষয় আছে, যেখানে কোনো সেটের উপসেট বের করার সময়, সেই সেটকে ধরা হয় না। মানে আগের উদাহরণে $\{1, 2, 3\}$-কে প্রকৃত উপসেট হিসেবে বিবেচনা করা হবে না।



ছবি 9.7

ছবি 9.7-এ, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ আর $B = \{4, 5, 6\}$। এখানে B হচ্ছে A সেটের উপসেট। আবার ছবি 9.8-এ $A = \{1, 2, 4\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$। এখানে A হচ্ছে B-এর উপসেট।



ছবি 9.8

সেটের সদস্যগুলো ভালোভাবে খেয়াল করলেই বিষয়টি বুঝতে পারার কথা যে, কোন সেট, কোন সেটের উপসেট। সেটের ধারণা অনেক সহজ হলেও গণিতের উচ্চতর শাখায় এর বিভিন্ন রকম ব্যবহার রয়েছে। প্রোগ্রামিংয়েও সেটের ব্যবহার রয়েছে।

এখন সবার কাছে প্রশ্ন। ধরা যাক, A হচ্ছে সকল সংখ্যার সেট। আর B হচ্ছে সমস্ত বেজোড় সংখ্যার সেট। তাহলে কে কার উপসেট?

এক জোড়া উপাদান নিয়ে প্রথম অবস্থানে কোনটি থাকবে এবং দ্বিতীয় অবস্থানে কোনটি থাকবে, তা নির্দিষ্ট করে জোড়া আকারে প্রকাশ করা হলে, তাকে ক্রমজোড় (ordered pair) বলে। উপাদান দুটিকে কমা চিহ্ন দিয়ে পৃথক করে প্রথম বন্ধনী বা প্যারেন্থেসিস চিহ্নের ভেতরে রেখে ক্রমজোড় প্রকাশ করা হয়। যেমন, (3, 7), (সাদা, লাল), (গাড়ি, 4) ইত্যাদি। নিজেদের মধ্যে সম্পর্কযুক্ত উপাদান প্রকাশের ক্ষেত্রে ক্রমজোড় ব্যবহার করা যায়। যেমন ধরো, একটি গাড়িতে থাকে 4টি চাকা, একটি রিকশাতে থাকে 3টি চাকা এবং একটি সাইকেলে থাকে 2টি চাকা। এই তথ্যটি আমরা তিনটি ক্রমজোড়ের সেট আকারে প্রকাশ করতে পারি এভাবে—

S = {(গাড়ি, 4), (রিকশা, 3), (সাইকেল, 2)}

এখানে, S হলো একটি সেট যার প্রতিটি উপাদান একটি করে ক্রমজোড়। আবার, প্রতিটি ক্রমজোড়ের প্রথম অবস্থানে রয়েছে একটি যানবাহনের নাম এবং দ্বিতীয় অবস্থানে রয়েছে ওই যানবাহনের চাকার সংখ্যা।

ধরা যাক, তুমি তোমার ছোট ভাই বা বোনের জন্য একটি রং করার বই কিনেছ, যেখানে ছবি ৭৭-এর মতো একটি হাঁসের ছবি দেওয়া আছে। হাঁসটির শরীরে তিনটি অংশ আছে, ঠোঁট, দেহ ও পা। তুমি ছোট ভাই বা বোনকে হলুদ, নীল ও কমলা—এই তিনটি রঙের তিনটি রং-পেন্সিল দিয়ে তার হাঁসের শরীরের তিনটি অংশ রং করতে বলে বাইরে গেলে। ঘরে ফিরে দেখলে সে হাঁসটির ঠোঁট হলুদ রং করেছে, পায়ে কমলা রং করেছে এবং দেহে নীল রং করেছে।

ছবি ৭৭

এই ব্যাপারটি আমরা ক্রমজোড়ের সাহায্যে প্রকাশ করতে পারি এভাবে,

S = {(ঠোঁট, হলুদ), (দেহ, নীল), (পা, কমলা)}

আবার সে চাইলে এই সমন্বয়েও রং করে থাকতে পারে,

T = {(ঠোঁট, কমলা), (দেহ, হলুদ), (পা, নীল)}

আচ্ছা, এবারে চিন্তা করে দেখো তো, এই হাঁসের ছবিটিতে আরো কত রকমভাবে রং করা যেতে পারে? হাঁসের ঠোঁটে আমরা চাইলে তিনটি রঙের যেকোনোটিই দিতে পারি। আবার এর দেহ বা পায়েও তিনটি রঙের যেকোনোটি দেওয়া যায়। তাহলে সব রকম রঙের সমন্বয় লিখলে সেটি হবে এমন—

S = {(ঠোঁট, হলুদ), (ঠোঁট, নীল), (ঠোঁট, কমলা), (দেহ, হলুদ), (দেহ, নীল), (দেহ, কমলা), (পা, হলুদ), (পা, নীল), (পা, কমলা)}

যেহেতু ছবিতে তিনটি এলাকা এবং তিনটি রং আছে, তাই আমরা পেলাম মোট $(3 \times 3 =)$ 9টি ক্রমজোড়। যদি অনেক বেশি এলাকা ও অনেক বেশি রঙের পেনসিল থাকত, তাহলে সবগুলো সমন্বয় লিখে প্রকাশ করা কষ্টসাধ্য হয়ে যেত। আসো দেখি, সেট থিওরি ব্যবহার করে কাজটি সহজে করা যায় কীভাবে। প্রথমে ধরে নিই A হচ্ছে সবগুলো এলাকার সেট আর B হচ্ছে সবগুলো রঙের সেট। অর্থাৎ,

A = {ঠোঁট, দেহ, পা} এবং B = {হলুদ, নীল, কমলা}

এখন আমরা নতুন একটি সেট তৈরি করব যার প্রতিটি উপাদান হবে একটি ক্রমজোড়। ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদানের নাম দিলাম x এবং এই উপাদানটি আসবে সেট A হতে। ক্রমজোড়ের দ্বিতীয় উপাদানের নাম দিলাম y এবং এই উপাদানটি আসবে সেট B থেকে। তাহলে, সেট বিল্ডার পদ্ধতি ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারি—

$S = \{(x, y): x \in A, y \in B\}$; অর্থাৎ, S হচ্ছে সকল (x, y) ক্রমজোড়ের সেট যেখানে, $x \in A$, বা, x, A সেটের উপাদান এবং $y \in B$, বা, y, B সেটের উপাদান।

আমরা সেট A এবং B এর উপাদানগুলোর সমন্বয় নিয়ে যে নতুন সেট S তৈরি করলাম, একে সেট থিওরির ভাষায় বলে কার্তেসীয় গুণজ (cartesian product) সেট। দুটি সেটের উপাদানগুলোর সমন্বয়ে সম্ভাব্য যত রকম ভিন্ন ভিন্ন ক্রমজোড় তৈরি করা যায়, যেখানে প্রতিটি ক্রমজোড়ের প্রথম অবস্থানে থাকে প্রথম সেটের একটি উপাদান এবং দ্বিতীয় অবস্থানে থাকে দ্বিতীয় সেটের একটি উপাদান, এমন সব ক্রমজোড়ের সেটকে কার্তেসীয় গুণজ সেট বলে। একে প্রকাশ করা হয় প্রথম সেট ও দ্বিতীয় সেটের গুণফল আকারে।

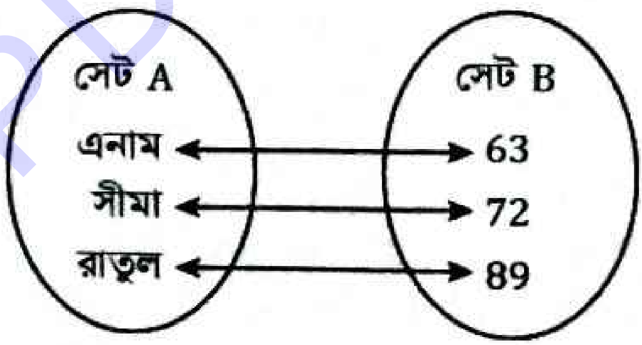
$$S = A \times B = \{(x, y): x \in A, y \in B\}$$
$$|S| = |A| \times |B|$$
$$\text{বা}, n(S) = n(A) \times n(B)$$

তাহলে, এবার বলো দেখি, যদি একটি সেটে 7টি উপাদান থাকে ও আরেকটি সেটে 12টি উপাদান থাকে, তাহলে তাদের কার্তেসীয় গুণজ সেটে কয়টি ক্রমজোড় থাকবে?

ধরা যাক, তিনজন শিক্ষার্থী আছে যাদের নাম যথাক্রমে, এনাম, সীমা ও রাতুল এবং কোনো একটি পরীক্ষায় এদের প্রাপ্ত নম্বর যথাক্রমে 63, 89 ও 72। এবারে শিক্ষার্থীদের নিয়ে একটি সেট তৈরি করি এবং তাদের প্রাপ্ত নম্বর নিয়ে একটি সেট তৈরি করি।

$$Students = \{\text{এনাম}, \text{সীমা}, \text{রাতুল}\}$$
$$Numbers = \{63, 72, 89\}$$

তাহলে, আমরা বলতে পারি ওপরের সেট দুটোর মধ্যে একটি সেটের একটি উপাদানের সঙ্গে অপর সেটের একটি উপাদানের সম্পর্ক আছে। এই সম্পর্কটি আমরা নিচের ছবির মাধ্যমে দেখাতে পারি।



ছবি 9.10

গাণিতিক ভাষায় বলা যায়, ওপরের সেট দুটির মধ্যে এক এক মিল (one one correspondence) আছে। যদি একটি সেটের একটি এবং কেবল একটি উপাদানের সঙ্গে অপর সেটের একটি এবং কেবল একটি উপাদানের মধ্য মিল বা করেসপনডেন্স (correspondence) স্থাপন করা যায়, তখন সেট দুটির মধ্যে এক এক মিল আছে বলা যায়। একে লেখা হয় এভাবে,

$A \leftrightarrow B$. আবার কোনো দুটি সেটের মধ্যে যদি এক এক মিল স্থাপন করা যায়, তাহলে বলা হয় সেট দুটি একে অপরের সমতুল সেট (equivalent set)। সমতুল সেট লেখা হয় হবে, $A \sim B$. ওপরের এই উদাহরণটিতে *Students* সেট ও *Numbers* সেটের মধ্যে এক এক মিল রয়েছে,

অর্থাৎ, $Students \leftrightarrow Numbers$

তাই, এই সেট দুটি পরস্পর সমতুল সেট,

অর্থাৎ, Students~Numbers

- প্রতিটি সেটকে তার নিজের সমতুল ধরা হয়। অর্থাৎ, $A \sim A$
- ফাঁকা সেট ও নিজের সমতুল, অর্থাৎ, $\emptyset \sim \emptyset$
- আবার, যদি $A \sim B$ এবং $B \sim C$ হয়, তাহলে, $A \sim C$

সেটের বিভিন্ন চিহ্ন :

চিহ্ন	চিহ্নের নাম	অর্থ	উদাহরণ
{ }	সেট (set)	অনেকগুলো উপাদানের সংগ্রহ	$A = \{3,7,9,14\}$, $B = \{9,14,28\}$
:	যেন (such that)	যেন	$A = \{x : x \in \mathbb{R}, x < 0\}$
$A \cap B$	ছেদ সেট বা ইনটারসেকশন সেট (intersection set)	এমন সব উপাদান যেগুলো A এবং B উভয় সেটেই আছে	$A = \{3,7,9,14\}$ $B = \{9,14,28\}$ $\therefore A \cap B = \{9,14\}$

$A \cup B$	সংযোগ সেট বা ইউনিয়ন সেট (union set)	A এবং B সেটের সকল উপাদানের সেট	$A = \{3,7,9,14\}$ $B = \{9,14,28\}$ $\therefore A \cup B$ $= \{3,7,9,14,28\}$
$A \subseteq B$	উপসেট বা সাবসেট (subset)	A সেট B সেটের একটি উপসেট। A সেটের সকল উপাদান B সেটে আছে	$\{9,14,28\}$ $\subseteq \{9,14,28\}$
$A \subset B$	প্রকৃত উপসেট (proper subset)	A সেট B সেটের উপসেট, তবে A সেট B সেটের সমান নয়	$\{9,14\}$ $\subset \{9,14,28\}$
$A \not\subset B$	সাবসেট নয় (not subset)	A সেট B সেটের উপসেট নয়	$\{9,66\}$ $\not\subset \{9,14,28\}$
$A = B$	সেটের সমতা (equality)	A এবং B উভয় সেটে একই সদস্য আছে	$A = \{3,9,14\}$, $B = \{3,9,14\}$, $\therefore A = B$
$A \backslash B$ বা $A - B$	সেটের অন্তর (Difference of set) বা, আপেক্ষিক কমপ্লিমেন্ট (relative complement)	সেই সব উপাদানের সেট যেগুলো A সেটে আছে কিন্তু B সেটে নেই	$A = \{3,9,14\}$, $B = \{1,2,3\}$, $\therefore A \backslash B = A - B$ $= \{9,14\}$
U	সার্বিক সেট (universal	সম্ভাব্য সব উপাদান নিয়ে	

	set)	তৈরি সেট	
A^c	পূরক সেট বা কমপ্লিমেন্ট সেট (complement set)	সার্বিক সেটের সব উপাদান A সেটের সদস্য নয় তাদের সেট	$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $A = \{2, 4\}$ $\therefore A^c = U \setminus A$ $= U - A$ $= \{1, 3, 5, \}$
$a \in A$	সদস্য (element of)	কোনো উপাদান কোন সেটের সদস্য বোঝাতে এ চিহ্ন ব্যবহৃত হয়	$A = \{3,9,14\}$ $\therefore 3 \in A$
$x \notin A$	সদস্য নয় (not element of)	কোনো উপাদান কোনো সেটের সদস্য নয় বোঝাতে এ চিহ্ন ব্যবহৃত হয়	$A = \{3,9,14\}$ $\therefore 1 \notin A$
(a, b)	ক্রমজোড় (ordered pair)	দুটি উপাদানের সংগ্রহ যেখানে প্রতিটি উপাদানের অবস্থান নির্দিষ্ট	
$A \times B$	কার্তেসীয় গুণজ (cartesian product)	A সেটের উপাদান প্রথম অবস্থানে এবং B সেটের উপাদান দ্বিতীয় অবস্থানে বসিয়ে সম্ভাব্য সবগুলো ক্রমজোড়ের সেট	$A = \{1,2\}$ $B = \{p\}$ $\therefore A \times B$ $= \{(1, p), (2, p)\}$

$\|A\|$	কার্ডিনালিটি (cardinality)	A সেটের মোট উপাদান সংখ্যা	$A = \{3,9,14\}$, $\|A\| = 3$
$\emptyset$	ফাঁকা সেট (empty set)	যে সেটে কোনো উপাদান নেই	$A = \emptyset$
$\mathbb{N}^0$ বা $\mathbb{N}_0$	অঋণাত্মক স্বাভাবিক সংখ্যা (non-negative natural numbers)	$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,4,\dots\}$	$0 \in \mathbb{N}_0$
$\mathbb{N}_1$ বা $\mathbb{N}^+$ বা $\mathbb{N}_{>0}$	ধনাত্মক স্বাভাবিক সংখ্যা (porisive natural numbers)	$\mathbb{N}_1 = \{1,2,3,4,5,\dots\}$	$6 \in \mathbb{N}_1$
$\mathbb{Z}$	পূর্ণ সংখ্যার সেট (integer numbers set)	$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1,0,1,2,3,\dots\}$	$-6 \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	মূলদ সংখ্যার সেট (rational numbers set)	$\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{2}{6} \in \mathbb{Q}$
$\mathbb{R}$	বাস্তব সংখ্যার সেট (real numbers set)	$\mathbb{R} = \{x : -\infty < x < \infty\}$	$6.343443444 \in \mathbb{R}$

পাইথন প্রোগ্রামিং ভাষায়, সেট নামে আলাদা একটি ডেটা স্ট্রাকচার আছে, আর সেটের বিভিন্ন অপারেশন করার জন্য নির্দিষ্ট অপারেটরও আছে। এখন আমরা সেগুলো সম্পর্কে জানব এবং তাদের ব্যবহার দেখব।

সেট তৈরি করার জন্য আমরা দ্বিতীয় বন্ধনীর ভেতরে সেটের উপাদানগুলো লিখব। যেমন, সমিতের প্রিয় খেলাগুলোর সেট তৈরি করি :

```
S = {"cricket", "football", "table tennis",
"badminton", "chess"}
```

আমরা এখন পরীক্ষা করে দেখতে পারি যে, S আসলেই সেট কি না।

```
>>> type(S)
<class 'set'>
```

আমরা দেখতে পাচ্ছি, S-এর টাইপ হচ্ছে set। এখন কোনো উপাদান একটি সেটের সদস্য কি না, সেটি পরীক্ষা করা যায় এভাবে :

```
>>> "cricket" in S
True
>>> "hockey" in S
False
```

এখন অভীকের প্রিয় খেলাগুলোর সেট তৈরি করব :

```
>>> A = {"cricket", "football", "basketball",
"swimming", "volleyball"}
```

আমরা যদি সেসব খেলার সেট চাই, যেগুলো সমিত অথবা অভীকের প্রিয় খেলা, পাইথনে আমরা এভাবে পাব :

```
>>> S | A
```

```
{'swimming', 'volleyball', 'football',
'cricket',
'badminton', 'chess', 'basketball', 'table
tennis'}
```

কোন খেলাগুলো সমিত এবং অভিক, দুজনেরই প্রিয়? উত্তর পাব এভাবে :

```
>>> S & A
{'football', 'cricket'}
```

আর যদি জানতে চাই, শুধু সমিতের প্রিয় কিংবা শুধু অভীকের প্রিয়। তাহলে কীভাবে পাব? প্রথমে তাদের সংযোগ সেট ও ছেদ সেট বের করব। তারপরে ছেদ সেটের সাপেক্ষে সংযোগ সেটের পূরক সেট বের করব।

```
>>> S1 = S | A
>>> S2 = S & A
>>> S1 - S2
{'swimming', 'volleyball', 'badminton',
'chess', 'basketball', 'table tennis'}
```

আবার আমরা চাইলে A-এর সাপেক্ষে S-এর পূরক সেট আর S-এর সাপেক্ষে A-এর পূরক সেট বের করব। তারপরে সেট দুটোর সংযোগ সেট তৈরি করব। তাহলেও আমরা ওপরের প্রশ্নের উত্তর পাব।

```
>>> S1 = S - A
>>> S2 = A - S
>>> S1 | S2
{'swimming', 'volleyball', 'chess',
'basketball', 'badminton', 'table tennis'}
```

একই কাজ আমরা এখন আরেকভাবে দেখি।

```
>>> S ^ A
```

```
{'swimming', 'volleyball', 'badminton',
'chess', 'basketball', 'table tennis'}
```

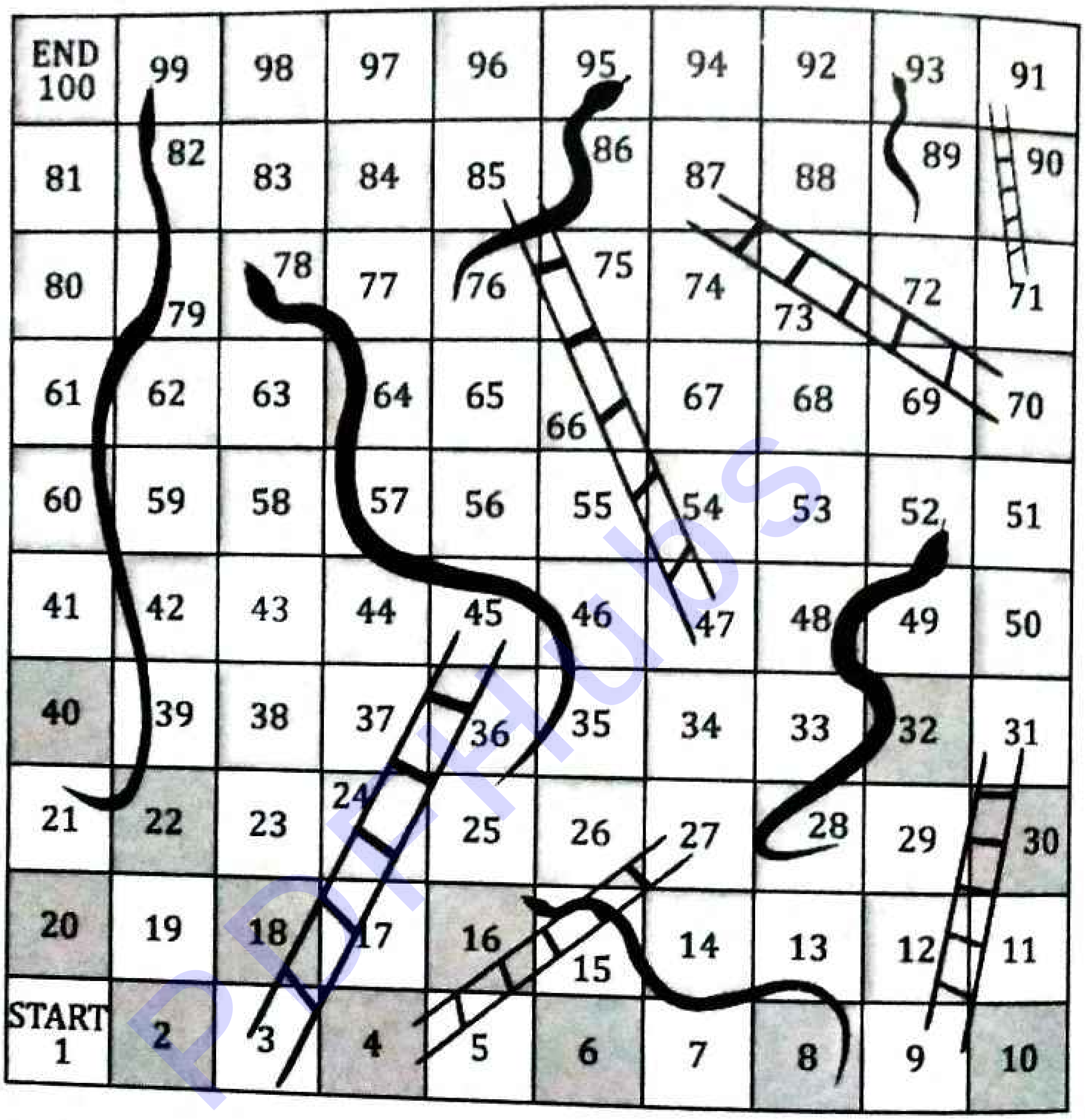
এটি সবচেয়ে সহজ। ^ অপারেটর দিয়ে আমরা দুটো সেটের মধ্যে প্রতিসম পার্থক্য বা সিমেট্রিক ডিফারেন্স (symmetric difference) বের করতে পারি। A ^ B-এর অর্থ হচ্ছে শুধু A সেটে আছে অথবা শুধু B সেটে আছে, কিন্তু দুটো সেটে নেই। cricket, foolball-এগুলো S ও A দুটো সেটেই আছে, তাই S ^ A-তে সেগুলো অনুপস্থিত।

এখন তোমাদের মনে একটি প্রশ্ন জাগতে পারে। আচ্ছা, পাইথনে কি ফাঁকা সেট তৈরি করা যায়? উত্তর হচ্ছে, হ্যাঁ, যায়। এভাবে–

```
>>> s = set()
>>> s
set()
```

সি প্রোগ্রামিং ভাষায় সেটের জন্য আলাদা কিছু তৈরি করে দেওয়া নেই। তবে সি ভাষায় দক্ষতা থাকলে সেটের প্রতিটি অপারেশনই তুমি প্রোগ্রাম লিখে করতে পারবে। এজন্য অ্যারে ব্যবহার করতে হবে আর সেই সঙ্গে একটু বুদ্ধি খরচ করতে হবে।

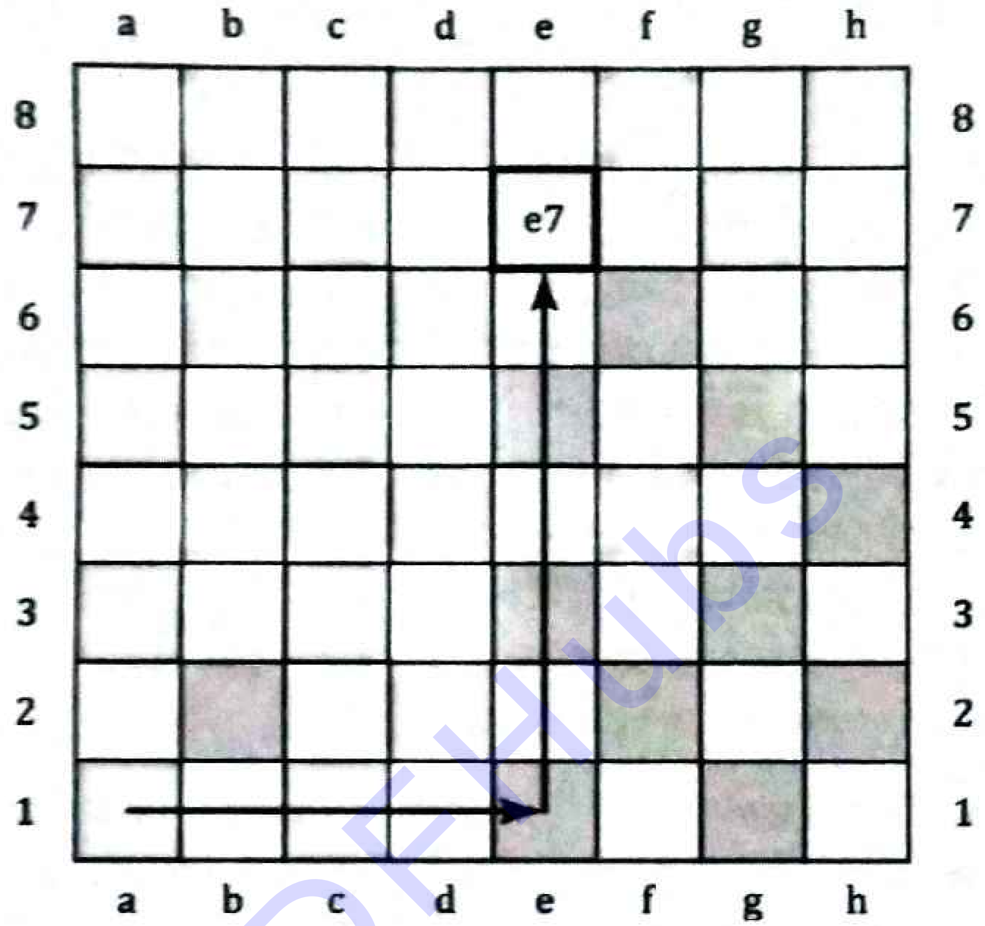
অধ্যায় ১০ : লেখচিত্র



ছবি 10.1

আমরা সবাই-ই কমবেশি লুডো খেলা খেলেছি। লুডো খেলার অপর পিঠে থাকে সাপ-লুডো। এখানে কী হয়? এখানে 100টি ঘর আঁকা থাকে (ছবি 10.1)। প্রতিটি ঘরের একটি করে নম্বর থাকে। আমাকে যদি বলা হয়, 17 নম্বর ঘরে যেতে হবে, আমি চট করে 17 লেখা ঘরটি খুঁজে নিয়ে সেখানে যেতে পারব। এই যে বিভিন্ন ঘরে বিভিন্ন নম্বর দেওয়া, একে আমরা বলতে

পারি একটি স্থানাঙ্ক-ব্যবস্থা। স্থানাঙ্ক কেন? কারণ, আমরা স্থানকে অঙ্কের মাধ্যমে প্রকাশ করছি।



ছবি 10.2

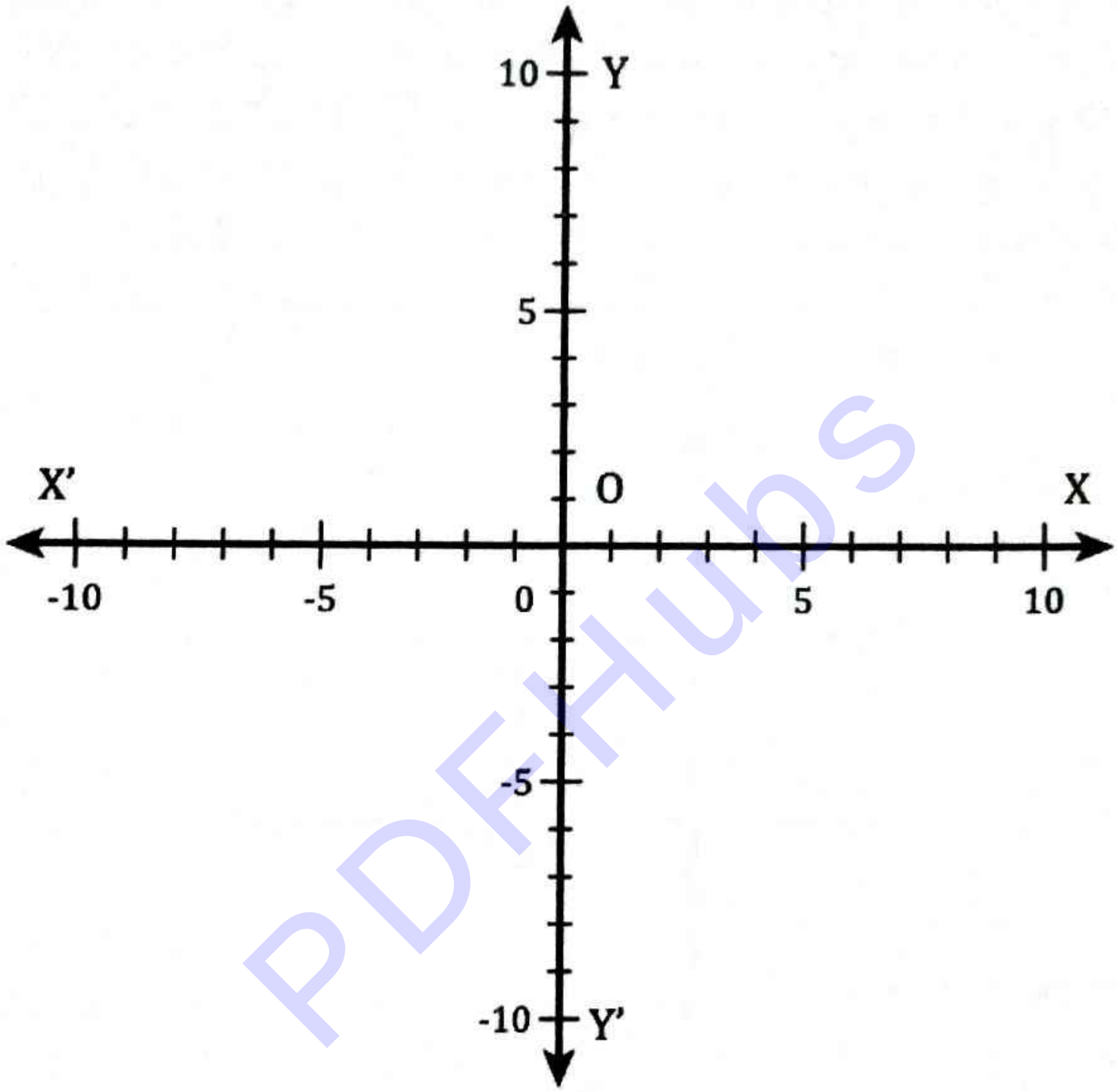
আবার দাবা খেলার কথা চিন্তা করো। দাবা খেলার বোর্ডে 64টি ঘর থাকে। এর প্রতিটি ঘরেরও একটি করে নম্বর আছে। দাবা খেলায় আনুভূমিক অর্থাৎ, ডান-বাম দিক বরাবর ঘরগুলোকে $a, b, c, d,...$ এভাবে নম্বর দেওয়া হয়। একেবারে বামদিকে থাকে a, তার ডানটিকে b, এভাবে করে h পর্যন্ত। আবার উল্লম্ব অর্থাৎ, ওপর-নিচ বরাবর ঘরগুলোকে 1, 2, 3, 4,... এভাবে নম্বর দেওয়া হয়। সবচেয়ে নিচে থাকে 1, তার ওপরে 2, এভাবে করে 8 পর্যন্ত। অর্থাৎ, একেবারে নিচের বামদিকের ঘরটি হচ্ছে, $a1$। একেবারে ডানদিকের নিচের ঘর হচ্ছে, $h1$। আবার একেবারে ডানদিকের ওপরের ঘর হচ্ছে, $h8$। তাহলে, যদি আমাদের বলা হয়, $e7$ ঘরে একটি সৈন্যগুটি রাখতে, আমরা নিচের বামদিকের ঘর থেকে গুনতে শুরু করে, ডানদিক

বরাবর 5 নম্বর ঘরটি খুঁজে বের করব এবং এরপর গুনে গুনে ওপর বরাবর, 7 নম্বর ঘর খুঁজে বের করব। তাহলে আমরা $e7$ ঘরটি খুঁজে পাব এবং সেখানে সৈন্যগুটিটি বসাব (ছবি 10.2)। তাহলে, এটিও একটি স্থানাঙ্ক-ব্যবস্থা।

স্থানাঙ্ক-ব্যবস্থার মাধ্যমে কোনো এলাকায় একটি নির্দিষ্ট স্থানকে চিহ্নিত করা যায়। যেমন ধরো, তুমি তোমার বন্ধুর বাসায় যেতে চাইছ। তোমার বন্ধু বাসার ঠিকানা 5 নম্বর রোডের 17 নম্বর বাসা। ফলে, তোমাকে এখন বন্ধুর বাসা খুঁজে বের করার জন্য গলিতে গলিতে ঘুরতে হবে না। তুমি যদি, গুনে গুনে ঠিক 5 নম্বর রোডে যাও, এবং সেখানে 17 নম্বর বাসাটি খুঁজে বের করো, তুমি নিশ্চিতভাবে বলতে পারবে এটিই তোমার বন্ধুর বাসা। পৃথিবীর প্রতিটি স্থান নির্দিষ্ট করার জন্যও এরকম স্থানাঙ্ক-ব্যবস্থা রয়েছে, যাকে বলে জিপিএস (GPS)। তোমাদের অনেকের স্মার্টফোনে এখন জিপিএস যন্ত্রাংশ রয়েছে, যেটি দিয়ে তোমার মোবাইল ফোনের অ্যাপগুলো মানচিত্রে তোমার অবস্থান পুঙ্খানুপুঙ্খভাবে দেখাতে পারে।

আমরাও এখন এরকম একটি স্থানাঙ্ক-ব্যবস্থা দেখব। সেজন্য আবারও সংখ্যারেখায় ফিরে যাই। আমরা সংখ্যা ও গণনা অধ্যায়ে সংখ্যারেখার ধারণা পেয়েছি। সংখ্যারেখা হলো এমন একটি রেখা যার একেকটি বিন্দু দিয়ে একেকটি সংখ্যাকে প্রকাশ করা হয়। আমরা ধরে নিই, সংখ্যারেখা যে বিন্দুটি 0 সংখ্যাটি নির্দেশ করে, তার নাম O বিন্দু। আরো ধরে নিই, O বিন্দুর ডানদিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত যে বিন্দু ধনাত্মক অসীম সংখ্যা নির্দেশ করে তার নাম X বিন্দু এবং এর বামদিকের অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত যে বিন্দু ঋণাত্মক অসীম সংখ্যা নির্দেশ করে তা X''(পড়তে হবে, এক্স-প্রাইম বা এক্স-ড্যাস) বিন্দু। তাহলে রেখাটির নাম হবে XOX' রেখা। এবারে আমরা আরেকটি সংখ্যারেখা নেব এবং একে লম্বালম্বিভাবে বসাব এমনভাবে, যেন এই রেখার যে বিন্দুটি 0 সংখ্যাটি নির্দেশ করে সেই বিন্দুটি XOX' রেখার O বিন্দু ওপরে পড়ে এবং রেখা দুটি পরস্পরের সঙ্গে লম্ব হয় অর্থাৎ, তাদের মধ্যবর্তী কোন $90°$ হয়। এই নতুন রেখাটির ওপরের দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত যে বিন্দুটি ধনাত্মক অসীম সংখ্যা নির্দেশ করে তার নাম দিলাম Y

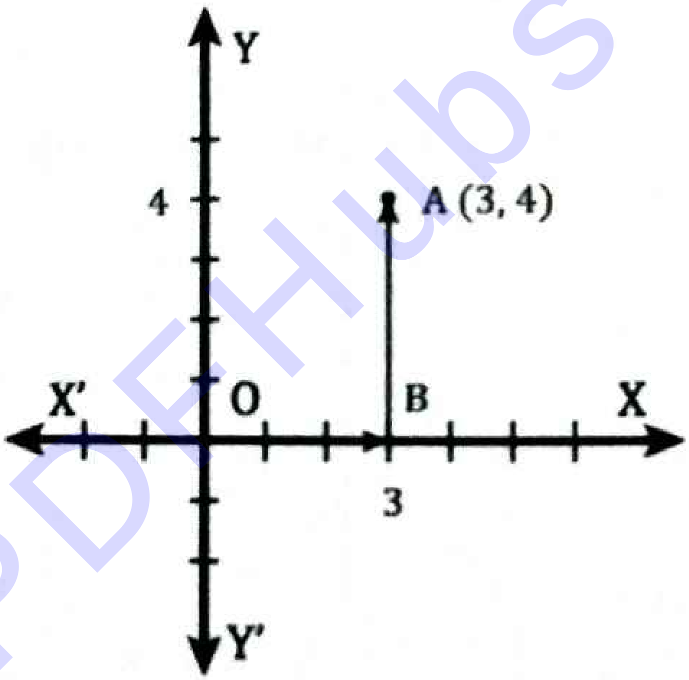
বিন্দু এবং নিচের দিকে যে বিন্দুটি ঋণাত্মক অসীম সংখ্যা নির্দেশ করে তার নাম দিলাম Y' বিন্দু। তাহলে রেখাটির নাম হবে YOY' রেখা (ছবি 10.3)।



ছবি 10.3

তাহলে আমরা দুটি সংখ্যারেখা পেলাম, যারা পরস্পরের ওপর লম্ব। একটির নাম XOX' এবং অপরটির নাম YOY' । রেখা দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। আমরা এখন আর রেখা দুটিকে সংখ্যারেখা না বলে, বলব অক্ষরেখা। অর্থাৎ, XOX' হবে X-অক্ষ এবং YOY' হবে Y-অক্ষ। সংখ্যারেখা দিয়ে যেমন একটি রেখার ওপরের প্রতিটি বিন্দুকে একটি সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করা যায়, তেমনি এই দুটি অক্ষরেখার সাহায্যে একটি এলাকার প্রতিটি বিন্দুকে দুটি সংখ্যার ক্রমজোড় আকারে প্রকাশ করা যায়। কেমন

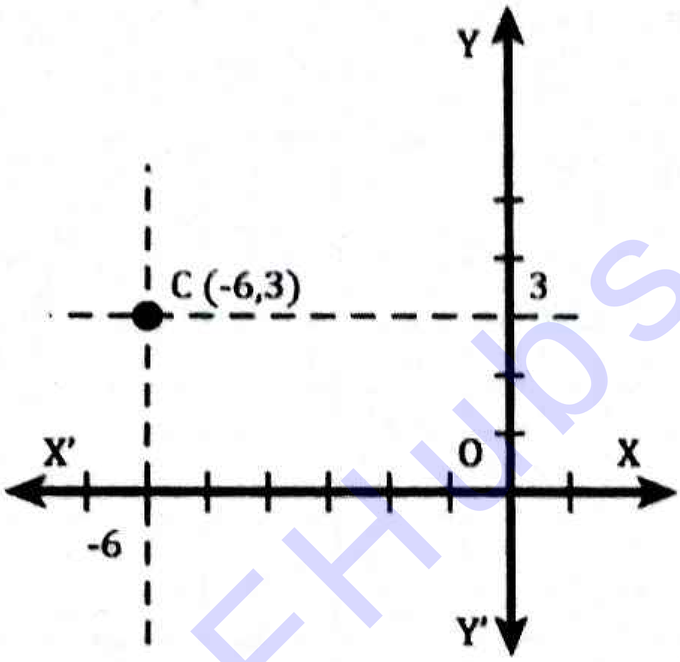
করে? মনে করো, X-অক্ষে O বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে OX রেখাংশ বরাবর, অর্থাৎ, ডানদিকে ঠিক 3 ঘর এগিয়ে B বিন্দুতে এলাম। তাহলে, B বিন্দুটি X-অক্ষে $+3$ সংখ্যাটি বোঝাবে। এবারে, $90°$ বামে ঘুরে, B বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে, OY রেখাংশের দিক, অর্থাৎ, ওপরের দিক বরাবর 4 ঘর এগিয়ে A বিন্দুতে এসে পৌঁছলাম। এখন এই A বিন্দুটি X-অক্ষ বা Y-অক্ষের ওপরের কোনো বিন্দু নয়। কিন্তু, কেউ যদি আমার নির্দেশনামতো O বিন্দু থেকে 3 ঘর ডানে ও 4 ঘর ওপরে যায়, তাহলে সেও এই A বিন্দুটিতে এসে পৌঁছবে। আমরা এই বিন্দুটির অবস্থান তাহলে (3, 4) ক্রমজোড় দিয়ে নির্দেশিত করতে পারি (ছবি 10.4)।



ছবি 10.4

বিষয়টি আরেকভাবেও চিন্তা করতে পারো। মনে করো, X-অক্ষে -6 বিন্দু দিয়ে Y-অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখা আঁকলাম। আবার Y-অক্ষে $+3$ বিন্দু দিয়ে X-অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখা আঁকলাম। এই নতুন রেখা দুটি পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করল। তাহলে আমরা, C বিন্দুটিকে $(-6, 3)$ ক্রমজোড় দ্বারা নির্দেশিত করতে পারি (ছবি 10.5)। এভাবে X-অক্ষে যেকোনো সংখ্যা নির্দেশিত বিন্দু ও Y-অক্ষে যেকোনো সংখ্যা নির্দেশিত বিন্দু নিয়ে আমরা এই এলাকার যেকোনো বিন্দুকে দুটি সংখ্যার ক্রমজোড়

আকারে প্রকাশ করতে পারি। এই ক্রমজোড়কে বলা হয় হয়, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (coordinate)। ক্রমজোড়ের প্রথম সংখ্যাটিকে বলা হয় X-স্থানাঙ্ক (X-coordinate) বা ভুজ (abscissa; উচ্চারণ অ্যাবসিসা) এবং দ্বিতীয় সংখ্যাটিকে বলা হয় Y-স্থানাঙ্ক (Y-coordinate) বা কোটি (ordinate; উচ্চারণ অরডিনেট)।



ছবি 10.5

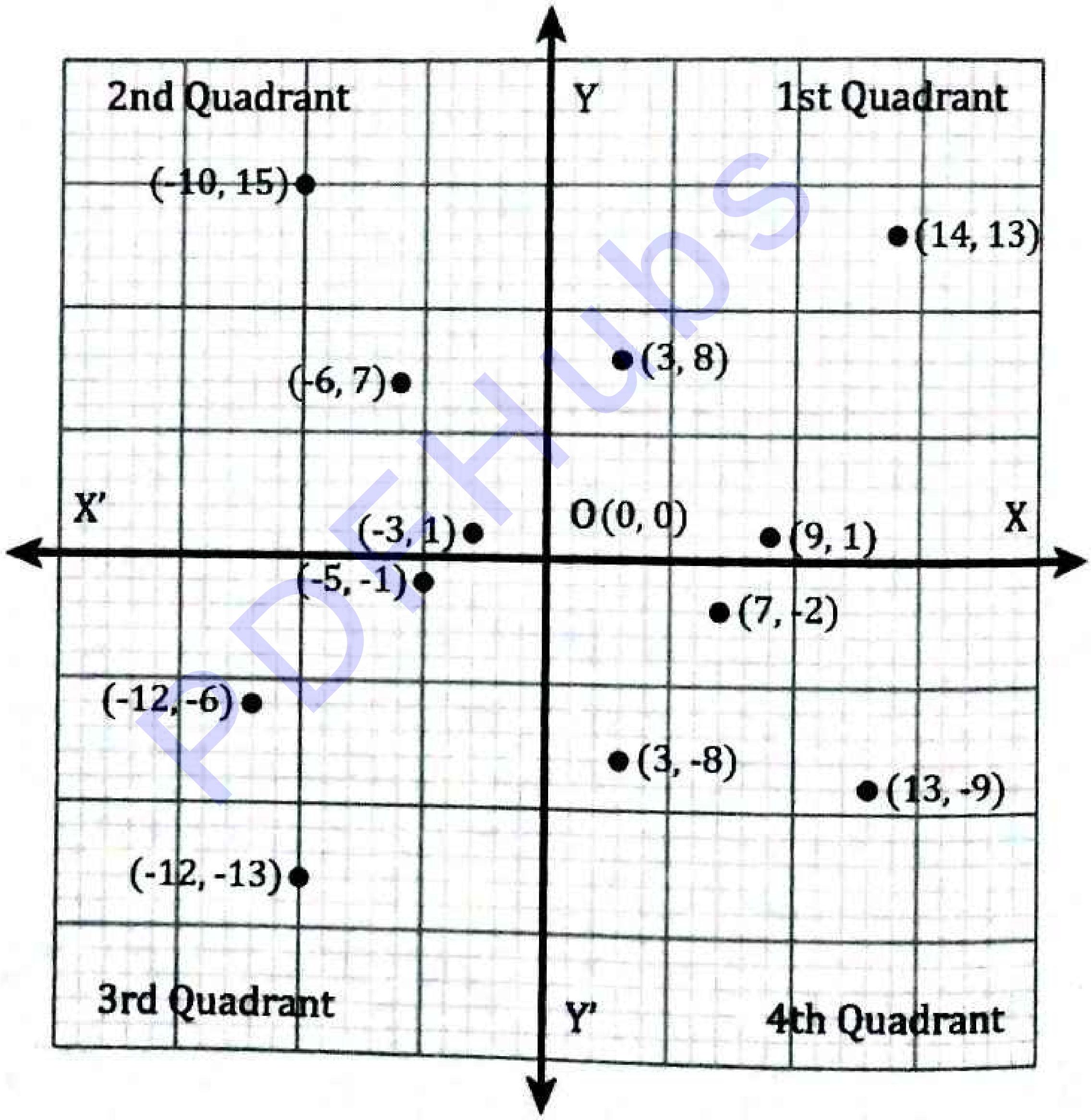
আমরা এভাবে যে ব্যবস্থাটি তৈরি করলাম, এটি হচ্ছে কার্তেশীয় স্থানাঙ্ক-ব্যবস্থা (Cartesian coordinate system)। কোনো তলে দুটি অক্ষরেখা আঁকলে রেখা দুটি তলকে চার ভাগে ভাগ করে। এদেরকে চতুর্ভাগ বা কোয়াড্র্যান্ট (quadrant) বলে।

১। XOY দ্বারা চিহ্নিত এলাকা হলো প্রথম কোয়াড্র্যান্ট। এখানে থাকবে সেসব সংখ্যা যাদের ভুজ ও কোটি দুটিই ধনাত্মক, যেমন— $(3,8)$, $(9,1)$, $(17,200)$ ইত্যাদি।

২। YOX' দ্বারা চিহ্নিত এলাকা হলো দ্বিতীয় কোয়াড্র্যান্ট। এখানে থাকবে সেসব সংখ্যা যাদের ভুজ ঋণাত্মক ও কোটি ধনাত্মক, যেমন— $(-3,1)$, $(-6,7)$, $(-60,12)$ ইত্যাদি।

৩। $X'OY'$ দ্বারা চিহ্নিত এলাকা হলো তৃতীয় কোয়াড্র্যান্ট। এখানে থাকবে সেসব সংখ্যা যাদের ভুজ ও কোটি দুটিই ঋণাত্মক, যেমন– $(-5, -1), (-91, -45), (-12, -6)$ ইত্যাদি।

৪। $Y'OX$ দ্বারা চিহ্নিত এলাকা হলো চতুর্থ কোয়াড্র্যান্ট। এখানে থাকবে সেসব সংখ্যা যাদের ভুজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক, যেমন– $(7, -2), (3, -8), (18, -4)$ ইত্যাদি। (ছবি 10.6)



ছবি 10.6

লেখচিত্র ব্যবহার করেও বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যা সমাধান করা যায়।

অধ্যায় ১১ : ফাংশন

তোমাকে যদি বলে দেওয়া হয়, এক কেজি চালের দাম 50 টাকা, তাহলে 5 কেজি চালের দাম, কত? তুমি চট করে বলে ফেলবে, 5 কেজি চালের দাম $5 \times 50 = 250$ টাকা। আবার, 12 কেজি চালের দাম জানতে চাওয়া হলে, বলবে, $12 \times 50 = 600$ টাকা। এখানে, আমরা বলতে পারি, চালের দামের সঙ্গে চালের পরিমাণের একটি সম্পর্ক রয়েছে। সম্পর্কটি কী? চালের দাম তার পরিমাণ ও প্রতি কেজি চালের দামের গুণফলের সমান।

$$\text{চালের দাম} = \text{চালের পরিমাণ} \times \text{প্রতি কেজি চালের দাম}$$

আমরা চাইলে, এই সম্পর্ক একটি ছকের মাধ্যমে উপস্থাপন করতে পারি,

চালের পরিমাণ	চালের দাম
1 kg	50 টাকা
2 kg	100 টাকা
3 kg	150 টাকা
4 kg	200 টাকা
12 kg	600 টাকা
40 kg	2000 টাকা

আবার, মনে করো, একটি গ্লাসে 200 মিলি পানি রাখা যায়। তাহলে, একই রকম তিনটি গ্লাসে কতটুকু পানি রাখা যাবে? 3×200 মিলি $= 600$ মিলি পানি। আবার, 7টি গ্লাসে রাখা যাবে মোট, 7×200 মিলি $= 1400$ মিলি

পানি। তাহলে আমরা বলতে পারি, মোট পানির পরিমাণের সঙ্গে গ্লাসের সংখ্যার একটি সম্পর্ক রয়েছে।

মোট পানির পরিমাণ = গ্লাসের সংখ্যা × প্রতি গ্লাসের ধারণক্ষমতা

গ্লাসের সংখ্যা	মোট পানির পরিমাণ
1	200 ml
2	400 ml
5	1000 ml
7	1400 ml
15	3000 ml

ওপরে যে উদাহরণ দুটি দেখলাম, প্রতিটিতেই দুটি করে রাশি রয়েছে। একটি রাশির সঙ্গে কোনো একটি সংখ্যা গুণ করে অপর রাশিটি আমরা সহজে বের করতে পারছি। দৈনন্দিন জীবনে এরকম উদাহরণ আমরা সব সময়ই দেখি। যেমন—বলা হলো, কোনো একটি স্কুলে যেকোনো পরীক্ষায় পাস করতে হলে, 40% নম্বর পেতে হবে। অর্থাৎ, 100 নম্বরে পরীক্ষা হলে, পাস করতে হলে 40 নম্বর পেতে হবে। তাহলে, পরীক্ষা যদি 50 নম্বরে হয়, পাস নম্বর হবে $50 \times 40\% = 50 \times \frac{40}{100} = 20$ নম্বর।

পাস নম্বর = 40% × মোট নম্বর

তাহলে, এখানেও একটি সম্পর্ক দেখা যাচ্ছে। আমরা যদি মোট কত নম্বরে পরীক্ষা হচ্ছে সেটি জানি, তাহলে পাস নম্বরও বের করতে পারব। আমরা বলতে পারি, পাস নম্বর মোট নম্বরের ওপর নির্ভরশীল। যেমন, চালের দাম নির্ভরশীল চালের পরিমাণের ওপর এবং মোট পানির পরিমাণ নির্ভরশীল গ্লাসের সংখ্যার ওপর। এখানে সমীকরণের বামদিকের রাশিটির মান, সমীকরণের ডানদিকের রাশির মানের ওপর নির্ভর করছে। গণিতে এ

ধরনের সম্পর্ককেই বলা হয় ফাংশন। যে রাশির মান আমরা বের করছি, তাকে বলে অধীন রাশি বা অধীন চলক (dependent variable), আর সমীকরণের ডানদিকে যে রাশির মান ব্যবহার করে হিসাব করছি, তাকে বলে স্বাধীন রাশি বা স্বাধীন চলক (independent variable)। অধীন চলককে বলা হয় স্বাধীন চলকের একটি ফাংশন। যেমন, পাস নম্বর হচ্ছে মোট নম্বরের একটি ফাংশন।

আরো একটি উদাহরণ দেখি। ধরা যাক, আমি ছবি আঁকা শেখার স্কুলে ভর্তি হতে চাই। আমি আমার বাসার কাছে একটি স্কুলে খোঁজখবর নিয়ে জানলাম, সেখানে ভর্তি ফি 100 টাকা এবং প্রতি মাসের বেতন 250 টাকা। যদি আমি এক মাস ক্লাস করি, তাহলে আমাকে ভর্তি ফিসহ এক মাসের বেতন, অর্থাৎ, $100 + 250 = 350$ টাকা দিতে হবে। আবার আমি যদি দুই মাস ক্লাস করি, আমাকে ভর্তি ফিসহ দুই মাসের বেতন, $100 + 250 \times 2 = 600$ টাকা দিতে হবে। তাহলে, এখানে আমার মোট খরচ, মাসের সংখ্যার একটি ফাংশন। আমরা মোট খরচকে y ভ্যারিয়েবল এবং মোট মাসের সংখ্যাকে x ভ্যারিয়েবল দিয়ে প্রকাশ করলে পাব,

$$y = 100 + 250 \times x$$

অর্থাৎ, আমাকে ভর্তি হলেই 100 টাকা দিতে হবে, এবং এর পরে প্রতি মাসের জন্য 250 টাকা করে, x সংখ্যক মাসের জন্য $250x$ পরিমাণ টাকা দিতে হবে। সুতরাং, মোট খরচ, $100 + 250x$। ফাংশনকে অনেক সময় f, g ইত্যাদি নামে প্রকাশ করা হয়। যেমন ওপরের ফাংশনটিকে লেখা যায়,

$$y = f(x) = 100 + 250x$$

এখানে, $y = f(x)$ কথাটির অর্থ হলো, y, x-এর একটি ফাংশন। তাহলে, চলো, x-এর আরো কিছু মানের জন্য y-এর মান নির্ণয় করি,

x	$y = f(x) = 100 + 250x$
0	$100 + 250 \times 0 = 100$

1	$100 + 250 \times 1 = 350$
2	$100 + 250 \times 2 = 600$
3	$100 + 250 \times 3 = 850$
7	$100 + 250 \times 7 = 1850$

আমরা চাইলে, এদের ক্রমজোড়ের সেট লিখতে পারি, এভাবে—

ক্রমজোড়ের সেট $= \{(0, 100), (1, 350), (2, 600), (3, 850), (7, 1850), \ldots\}$

শেষে "..." চিহ্ন দিলাম কারণ, এই সেটে আরো সদস্য থাকতে পারে। আমরা মাত্র অল্প কয়েকটি নির্ণয় করেছি।

তবে, আমাদের এই ফাংশনের বিবরণে কিন্তু একটি ত্রুটি রয়ে গেছে। তোমরা সেটি ধরতে পারো কি না দেখো তো? ফাংশনের সমীকরণটিতে যদি আমরা $x = -3$ বসাই, তাহলে,

$$y = 100 + 250 \times (-3) = -650$$

অর্থাৎ, আমি যদি -3 মাস ক্লাস করি তাহলে, আমাকে -650 টাকা বেতন দিতে হবে। এ আবার কেমন কথা? -3 মাস ক্লাস করা যেমন সম্ভব নয়, তেমনি -650 টাকা বেতন দেওয়াও তো সম্ভব নয়। তার মানে বোঝা গেল যে, এই ফাংশনে x-এর মান যা ইচ্ছা তা-ই বসানো যাবে না। x-এর মান ধনাত্মক হতে হবে। এবারে আবার, আরেকটি প্রশ্ন চলে এলো, যদি আমি 15 দিন ক্লাস করি, তাহলে কি তাকে $\frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0.5$ মাস হিসাব করব? তা-ও তো হবে না, তাই না? যেহেতু, বেতন ধরা হয়েছে মাস হিসাবে, দিন হিসাবে নয়; তাই কোনো মাসে এক দিন ক্লাস করলেও আমাকে পুরো মাসের বেতনই দিতে হবে। তার মানে, মাসে আমি যে কয়দিনই ক্লাস করি না কেন, মাসের সংখ্যা পূর্ণ সংখ্যা হবে, ভগ্নাংশ নয়। তাহলে আমরা পেলাম, x-এর মান হতে হবে ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। x-এর সম্ভাব্য মানগুলোর সেটকে বলা

হয়, ফাংশনের ডোমেন। এখানে f ফাংশনের ডোমেন হচ্ছে, সকল ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট, যেটি হচ্ছে, $\mathbb{N}^0$ বা, $\mathbb{N}_0$।

একইভাবে, y-এর সম্ভাব্য মানের সেট কী হবে? x-এর মতো y-ও ঋণাত্মক ও ভগ্নাংশ হতে পারবে না। তাই, y-এর সম্ভাব্য মানের সেটও হবে, $\mathbb{N}^0$ বা, $\mathbb{N}_0$। একে আমরা বলি ফাংশনের কোডোমেন। তবে, এখানে আরেকটি ব্যাপার লক্ষ করো। আমরা বলেছি y-এর মান ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হবে। তাহলে, আমার মোট বেতন কি 500 টাকা হওয়া সম্ভব? 500-ও তো একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। বাস্তবে এক মাসের বেতন 350 টাকা, এবং 2 মাসের বেতন 600 টাকা। অর্থাৎ, x-এর এমন কোনো মান নেই, যার জন্য y-এর মান 500 হবে। x-এর সম্ভাব্য সকল মানের জন্য y-এর যে সমস্ত মান পাওয়া যায়, তাদের সেটকে বলে ফাংশনের রেঞ্জ (range)। রেঞ্জ সেট মূলত কোডোমেন সেটের একটি উপসেট। তাহলে, আমরা ফাংশনটিকে গাণিতিকভাবে লিখব এভাবে,

$$y = f(x) = 100 + 250x; \text{ যেখানে } x, y \text{ ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা}$$

আবার, সেট থিওরির ভাষায় ক্রমজোড়ের সেটটি আমরা প্রকাশ করতে পারি, এভাবে,

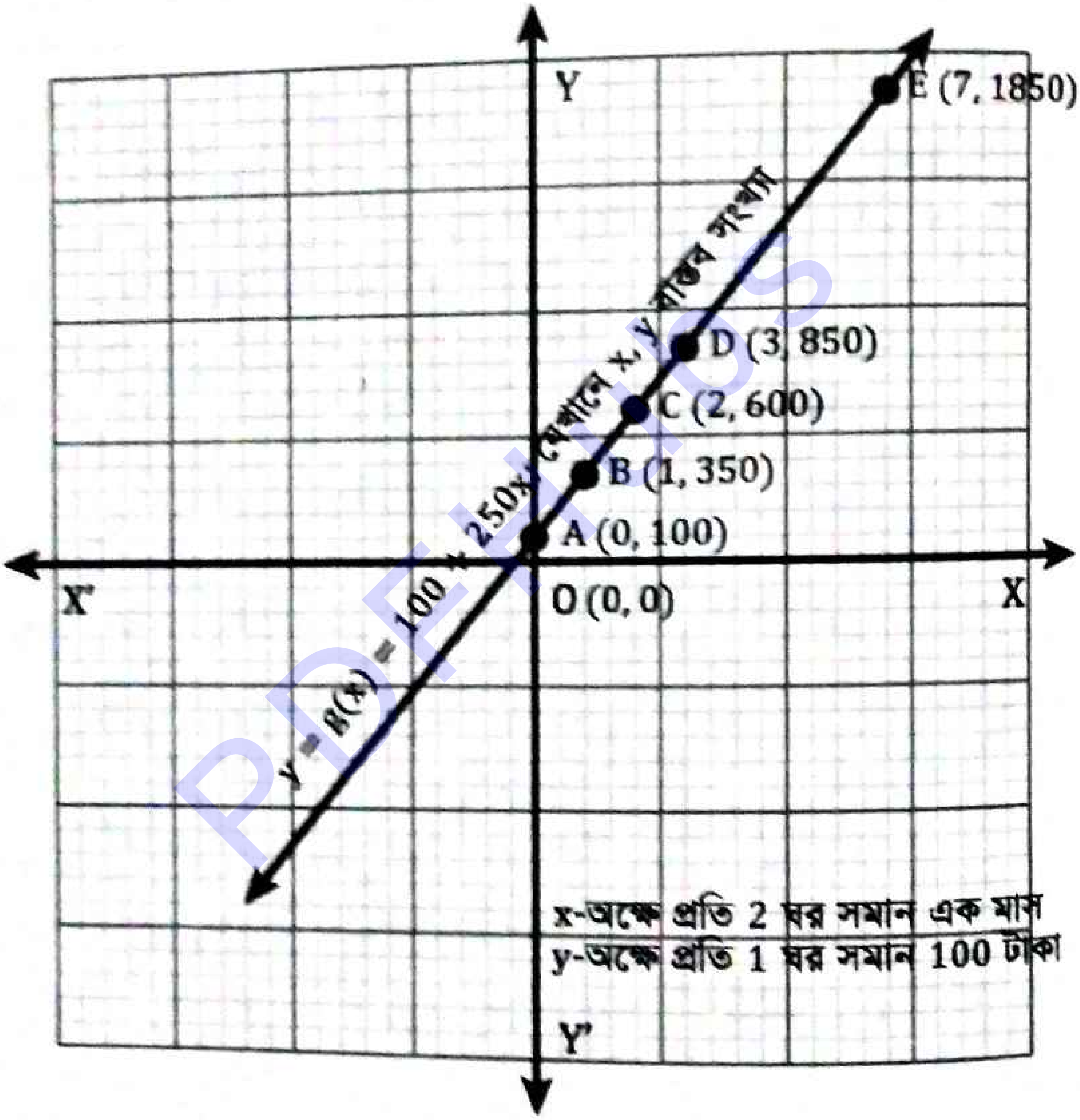
$$S = \{(x, y): y = f(x) = 100 + 250x \text{ এবং } x, y \in \mathbb{N}_0\}$$

আমরা চাইলে, ক্রমজোড়গুলোকে বিন্দু বিবেচনা করে একটি ছক কাগজে এদের বসাতে পারি। এখানে, ছক কাগজে X-অক্ষে প্রতি 2 ঘর সমান ধরেছি এক মাস আর Y-অক্ষে প্রতি এক ঘর সমান ধরেছি 100 টাকা। তাহলে আমরা ছক কাগজে এই বিন্দুগুলো বসাই,

$$A(0, 100), B(1, 350), C(2, 600), D(3, 850), E(7, 1850)$$

আমরা যদি, একটি স্কেল বা রুলার দিয়ে বিন্দুগুলোকে যোগ করি, দেখা যাবে বিন্দুগুলোর সব কয়টিই একটি সরলরেখার ওপরে অবস্থিত। এই সরলরেখাটি $f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্রের ধারক রেখা বলা যেতে পারে (ছবি 11.1)।

এবারে, ফাংশনটিকে সামান্য পরিবর্তন করি। আমরা x-এর মানের ওপর যে সীমাবদ্ধতা দিয়েছিলাম, তা সরিয়ে দিই। ধরে নিই, x-এর মান যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। তাহলে, সমীকরণে x-এর মান বসালে y-এর যে মান পাব, সেটিও হবে একটি বাস্তব সংখ্যা। আমরা এই পরিবর্তিত ফাংশনের নাম দিই, g।



ছবি 11.1

$$y = g(x) = 100 + 250x; \text{ যেখানে } x, y \text{ উভয়েই বাস্তব সংখ্যা}$$

এবারে, এই সমীকরণে x-এর মান হিসাবে যেকোনো একটি বাস্তব সংখ্যা নিই। ধরা যাক, x-এর মান x_1। তাহলে, x-এর এই মানের জন্য আমরা y-

এর একটি মান পাব। ধরা যাক, সেটি হলো, y_1। এখন, x ও y-এর এই মান নিয়ে তৈরি ক্রমজোড়, (x_1, y_1)-কে একটি বিন্দু বিবেচনা করে, যদি ছক কাগজে বসাই, তাহলে দেখা যাবে, এই বিন্দুটিও f ফাংশনের লেখচিত্রের ধারক রেখার ওপরেই অবস্থিত। এই কথাটি x-এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য সত্য। আবার উলটোভাবে বলা যায়, ওই সরলরেখার যেকোনো বিন্দুই g ফাংশনের একটি ক্রমজোড় হবে। অর্থাৎ, এই সরলরেখাটি g ফাংশনের সম্ভাব্য সকল ক্রমজোড় দিয়েই তৈরি। g ফাংশনের লেখচিত্র যেহেতু একটি সরলরেখা তাই একে লিনিয়ার ফাংশন (linear function) বলা যায়। আবার, x-এর মান বাড়ালে, y-এর মানও বেড়ে যায়, তাই, এই ফাংশনকে ক্রমবর্ধমান ফাংশন বা ইনক্রিজিং ফাংশনও (increasing function) বলা যায়। আবার, x-এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য y-এর ভিন্ন ভিন্ন মান পাওয়া যায়, তাই এই ফাংশনকে এক-এক ফাংশন বা ওয়ান-টু-ওয়ান ফাংশন (one-one function)-ও বলা যায়। এক-এক ফাংশন কথাটির অর্থ হচ্ছে, ডোমেন সেটের একটি উপাদানের সঙ্গে রেঞ্জ সেটের ঠিক একটিমাত্র উপাদানেরই সম্পর্ক রয়েছে।

ফাংশন সব সময় সরল গাণিতিক সমীকরণনির্ভর না-ও হতে পারে। যেমন ধরো, আমাদের গ্রেডিং পদ্ধতি। এখানে, 100 নম্বরের পরীক্ষায় 80 বা তার বেশি নম্বর পেলে, গ্রেড ধরা হয় $A+$ এবং গ্রেড পয়েন্ট হয়, 5। আবার 70 থেকে 79-এর মধ্যে নম্বর পেলে, লেটার গ্রেড A এবং গ্রেড পয়েন্ট 4।

প্রাপ্ত নম্বর, x	লেটার গ্রেড, g	গ্রেড পয়েন্ট, gp
$80 \leq x \leq 100$	$A+$	5
$70 \leq x \leq 79$	A	4
$60 \leq x \leq 69$	$A-$	3.5
$50 \leq x \leq 59$	B	3
$40 \leq x \leq 49$	C	2

$33 \le x \le 39$	D	1
$0 \le x \le 32$	F	0

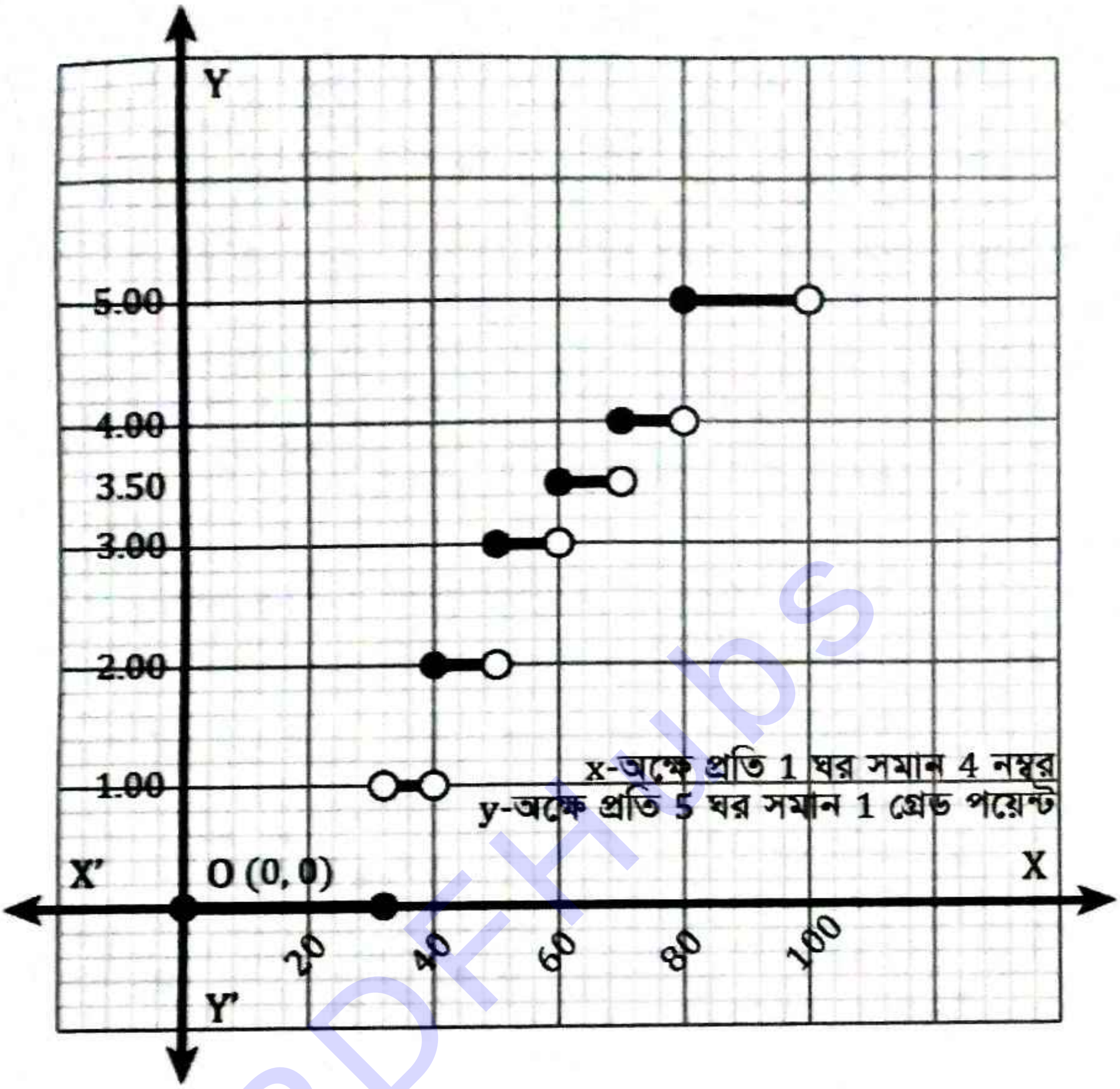
স্পষ্টভাবেই বোঝা যাচ্ছে, প্রাপ্ত নম্বরের ওপর লেটার গ্রেড ও গ্রেড পয়েন্ট নির্ভরশীল। লেটার গ্রেড ও গ্রেড পয়েন্ট দুটিই আসলে প্রাপ্ত নম্বরের একটি ফাংশন। ফাংশন দুটিকে আমরা এভাবে লিখতে পারি,

$$\text{লেটার গ্রেড}, g = \begin{cases} A+; & \text{যখন } 80 \le x \le 100 \\ A; & \text{যখন } 70 \le x \le 79 \\ A-; & \text{যখন } 60 \le x \le 69 \\ B; & \text{যখন } 50 \le x \le 59 \\ C; & \text{যখন } 40 \le x \le 49 \\ D; & \text{যখন } 33 \le x \le 39 \\ F; & \text{যখন } 0 \le x \le 32 \end{cases}$$

একইভাবে

$$\text{গ্রেড পয়েন্ট}, gp = \begin{cases} 5; & \text{যখন } 80 \le x \le 100 \\ 4; & \text{যখন } 70 \le x \le 79 \\ 3.5; & \text{যখন } 60 \le x \le 69 \\ 3; & \text{যখন } 50 \le x \le 59 \\ 2; & \text{যখন } 40 \le x \le 49 \\ 1; & \text{যখন } 33 \le x \le 39 \\ 0; & \text{যখন } 0 \le x \le 32 \end{cases}$$

কম্পিউটার প্রোগ্রামে আমরা অহরহই এ ধরনের ফাংশন ব্যবহার করে থাকি। আমরা যদি, গ্রেড পয়েন্ট ফাংশনের লেখচিত্র আঁকি, সেটি হবে ছবি 11.2-এর মতো।



ছবি 11.2

- **প্রোগ্রামিংয়ে ফাংশন**

বিভিন্ন প্রোগ্রামিং ভাষায় আমরা যখন প্রোগ্রাম লিখি, সেগুলোতেও অনেক ফাংশন তৈরি করা হয়। আবার অনেক ফাংশন আগে থেকেই তৈরি করে দেওয়া থাকে। এসব ফাংশন করে কি, কিছু ডেটা নিয়ে একটি নির্দিষ্ট কাজ করে ফলাফল তৈরি করে পাঠায়। যদিও প্রোগ্রামিংয়ের ফাংশন আর গণিতের ফাংশন আলাদা ব্যাপার, কিন্তু তাদের মূল ধারণা একই—একটি নির্দিষ্ট ইনপুটের জন্য একটি নির্দিষ্ট আউটপুট পাওয়া যাবে। গাণিতিক

> ফাংশনে যেমন স্বাধীন চলক আছে, প্রোগ্রামিংয়ের ভাষায় তাকে বলে, ফাংশনের ইনপুট। আর, ফাংশনের অধীন চলককে বলা হয়, ফাংশনের আউটপুট।

আমরা জ্যামিতিতে যত ধরনের ক্ষেত্রফল ও পরিধির সূত্র শিখি, সবই কিন্তু একেকটি ফাংশন।, যেমন—

১। বৃত্তের পরিধি $= f($ব্যাসার্ধ$) = 2 \times \pi \times$ ব্যাসার্ধ;
যেখানে, বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসার্ধ অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা

২। বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= f($ব্যাসার্ধ$) = \pi \times ($ব্যাসার্ধ$)^2$;
যেখানে, বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসার্ধ অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা

৩। বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা $= f($বাহুর দৈর্ঘ্য$) = 4 \times$ বাহুর দৈর্ঘ্য;
যেখানে, বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা ও বাহুর দৈর্ঘ্য অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা

৪। বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= f($বাহুর দৈর্ঘ্য$) = ($বাহুর দৈর্ঘ্য$)^2$;
যেখানে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ও বাহুর দৈর্ঘ্য অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

৫। ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= f($ভূমির দৈর্ঘ্য, উচ্চতা$) = \frac{1}{2} \times$ ভূমির দৈর্ঘ্য $\times$ উচ্চতা;
যেখানে, ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, ভূমির দৈর্ঘ্য ও উচ্চতা অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

লক্ষ করো, 5 নং সূত্রে কিন্তু, দুটি স্বাধীন চলক রয়েছে, কেননা, ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, তার ভূমির দৈর্ঘ্য ও উচ্চতা উভয় রাশির ওপর নির্ভরশীল।

এভাবে, বিভিন্ন গাণিতিক রাশির মধ্যে সম্পর্ক উপস্থাপন করতে ফাংশনের ধারণা ব্যবহার করা হয়।

অধ্যায় ১২ : লগারিদম

আজ থেকে প্রায় ৪০০ বছর আগে জন নেপিয়ার নামে এক গণিতবিদ লগারিদমের ধারণা আবিষ্কার করেছিলেন। আমরা জানি, একটি সংখ্যার সঙ্গে আরেকটি সংখ্যা সূচক হিসেবে ব্যবহার করলে ফলাফল হিসাবে আমরা একটি বড় সংখ্যা পাই।

যেমন, 2^{64} হচ্ছে 18446744073709551616

লগারিদম ব্যবহার করে, সূচকের উলটো কাজটি করা যায়, অর্থাৎ একটি বড় সংখ্যাকে আমরা একটি ছোট সংখ্যায় নিয়ে আসতে পারি।

যেমন, $\log_2 18446744073709551616$ হচ্ছে 64

ছোট সংখ্যায় নিয়ে আসার উদ্দেশ্য হচ্ছে, হিসাব-নিকাশ সহজ করা। কারণ, যখন লগারিদম আবিষ্কার করা হয়, তখন কম্পিউটার বা ক্যালকুলেটর কিছুই ছিল না, সব হিসাব হাতে-কলমে করতে হতো। তাই ছোট ছোট হিসাব করাই ছিল অনেক অসুবিধাজনক, লগারিদমের যুগান্তকারী আবিষ্কার সেই পথটি সুগম করে দেয়।

$b^n = x$ হলে, $\log_b x$ -এর মান হবে n

অর্থাৎ, b-এর সূচক যত হলে আমরা x সংখ্যাটি পাব, সেটিই হচ্ছে $\log_b x$। এখানে b-কে বলে বেইজ (base)। $\log_b x$ রাশিটি পড়া হয় এভাবে, লগ b বেইজ a। বেইজ হিসেবে সাধারণত 2, 10 অথবা e ব্যবহার করা হয়। e হচ্ছে অয়লার সংখ্যা, যার মান 2.71828-এর কাছাকাছি। গণিত ও প্রকৌশলের বিভিন্ন শাখায় লগারিদমের ব্যাপক ব্যবহার রয়েছে। তোমরা যারা কম্পিউটার সায়েন্স পড়বে কিংবা প্রোগ্রামিং প্রতিযোগিতায় অংশ নেওয়ার জন্য ডেটা স্ট্রাকচার ও অ্যালগরিদম শিখবে, তোমরা দেখবে সেখানে বেইজ 2 লগারিদম অনেক আলোচনায় ব্যবহার করা হচ্ছে।

লগারিদম ব্যবহার করার সবচেয়ে বড় সুবিধা হচ্ছে, দুটি সংখ্যার গুণফলের লগারিদমকে সংখ্যা দুটির লগারিদমের যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

অর্থাৎ, $\log_b(x \times y) = \log_b x + \log_b y$

এই সূত্রের কারণেই অনেক হিসাব-নিকাশ বেশ সহজ হয়ে যায়। যেমন, $\log_2 1024$-কে আমরা লিখতে পারি,

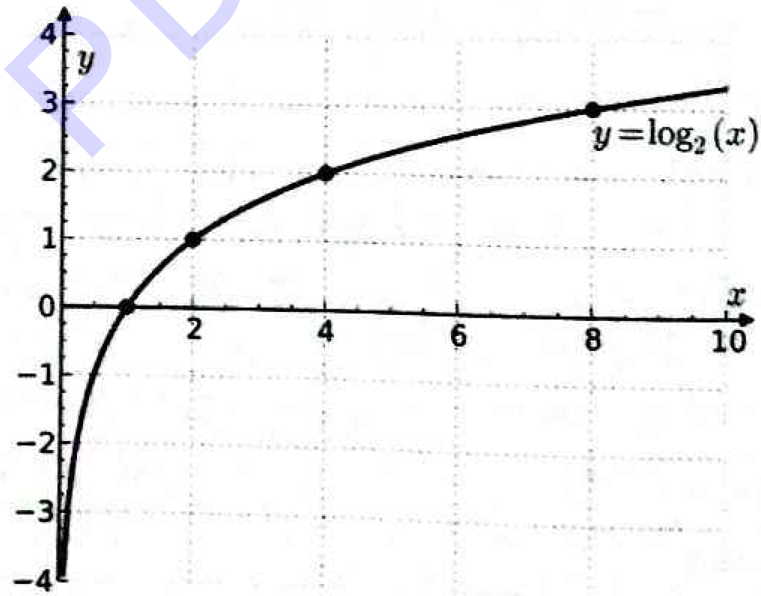
$$\log_2(32 \times 32) = \log_2 32 + \log_2 32 = 5 + 5 = 10$$

ফলাফল সঠিক, কারণ $2^{10} = 1024$। এখন কেউ যদি $\log_2 32$-এর মান না জানে, তাহলে সে কী করবে?

$$\log_2 32 = \log_2(4 \times 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

লগারিদমের আরো হিসাব-নিকাশ স্কুলের নবম-দশম শ্রেণির গণিত বইতে আছে। সেগুলো শিখে নিতে হবে। আমরা এখন একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়ে আলোচনা করে তারপর এই অধ্যায়ের ইতি টানব। সেটি হচ্ছে লগারিদম ভিত্তিক ফাংশন। ধরা যাক, একটি ফাংশন দেওয়া আছে,

$f(x) = \log_2 x$



ছবি 12.1

এখন আমরা একটি লেখচিত্র তৈরি করব। সেজন্য আমরা x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$-এর মান বের করব (যাকে আমরা বলব y) এবং সেই x, y মানগুলো একটি গ্রাফ কাগজে বসিয়ে রেখার মাধ্যমে যুক্ত করার চেষ্টা করব (ছবি 12.1)।

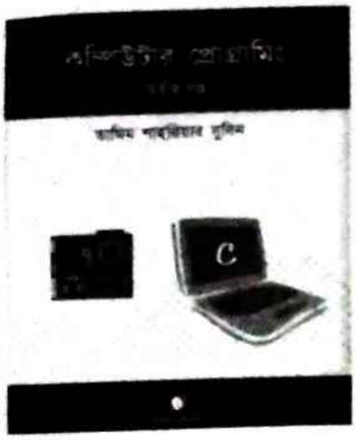
একটি বাস্তব উদাহরণ দিই। একবার একটি কম্পিউটার গেমস তৈরির সময় খেলোয়াড়ের পয়েন্ট ও সেই অনুযায়ী লেভেল ঠিক করার প্রয়োজন ছিল। এখন, ধরা যাক, 10 পয়েন্ট পেলে লেভেল এক করে বাড়বে। তাহলে সেটি একটি লিনিয়ার ফাংশন হবে, যেখানে $level = \frac{point}{10}$। কিন্তু তাহলে গেমসটি খেলে খুব মজা পাওয়া যাবে না, কারণ ওপরের লেভেলে যাওয়ার পদ্ধতিটি এমন হওয়া উচিত যে, শুরুর দিকে সেটি সহজ, কিন্তু খেলা যত বেশিদূর গড়াবে, ওপরের লেভেলে যাওয়া তত কঠিন হয়ে যাবে। তাই আমরা সেখানে একটি লগারিদমভিত্তিক ফাংশন ব্যবহার করি, $level = \log_{10} point$। এতে কী সুবিধা হয়েছে, সেটি একটু চিন্তা করলেই বুঝতে পারবে। আর বুঝতে না পারলে একটি গ্রাফ এঁকে ফেলো, তাহলেই বিষয়টি পরিষ্কার হয়ে যাবে।

অধ্যায় ১৩ : গণিত শেখার শুরু

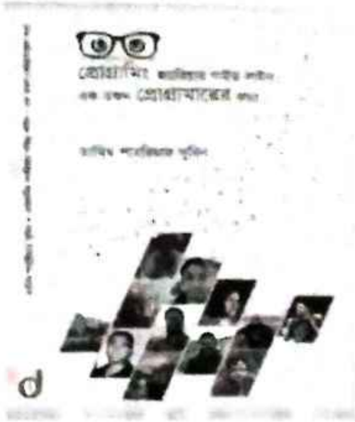
তোমরা যারা বইটি ঠান্ডা মাথায় পড়ে এতদূর এসেছ, আর সেই সঙ্গে বইতে আলোচিত বিষয়গুলো নিয়ে কিছু চিন্তাভাবনা করেছ, তোমাদের অভিনন্দন জানাই। তোমরা নিশ্চয়ই গণিতকে আগের চাইতে আরো ভালোভাবে উপলব্ধি করতে পারবে। এরপর তোমাদের কী করা উচিত? তোমরা এখন গণিত শেখা শুরু করে দিতে পারো। এজন্য আমাদের পরামর্শ হবে, ষষ্ঠ শ্রেণির গণিত বইগুলো থেকে পড়া শুরু করা এবং সবগুলো অনুশীলনী নিজে নিজে করে ফেলা। এভাবে একে একে সপ্তম, অষ্টম ও নবম-দশম শ্রেণির গণিত বইগুলো পড়ে ফেলো, আর অনুশীলনীগুলো চর্চা করো। তারপরে হাতে সময় থাকলে ইংরেজি মাধ্যমের (ও লেভেল, এ লেভেল) গণিত বইগুলো জোগাড় করে পড়ে ফেলো, কারণ সেই বইগুলোও অনেক ভালো। এরপর তুমি অন্য কাউকে গণিতের বিষয়গুলো শেখানোর চেষ্টা করো। সেজন্য তুমি তোমার এলাকায় একটি গণিত ক্লাব খুলতে পারো, যেন শিক্ষার্থীরা সেখানে গণিত নিয়ে আলোচনা ও গাণিতিক সমস্যার সমাধান করার চেষ্টা করবে—তাতে তারা গণিত অলিম্পিয়াডেও ভালো ফল করবে। আশা করি, তোমার গণিত ভিত্তি যথেষ্ট মজবুত হবে এবং তোমাকে আর পেছনে ফিরে তাকাতে হবে না। তুমি ভবিষ্যতে ক্যারিয়ার হিসাবে যে পেশাই বেছে নাও না কেন, তুমি সেই পেশাতে যথেষ্ট আত্মবিশ্বাস নিয়ে কাজ করবে বলে আমাদের বিশ্বাস। তোমরা তোমাদের নিজের কাজটুকু যদি ঠিকভাবে করো, তাতে আরো সুন্দর একটি সমাজ ও দেশ গড়ে উঠবে। তুমি তোমার পরের প্রজন্মের জন্য আরো সুন্দর একটি পৃথিবী রেখে যাবে। তোমাদের জন্য শুভকামনা রইল।

বইটি কিনে পড়লে
আমি বেশি খুশি হব।
আমি চাই না লেখকের ক্ষতি হোক।
আমি শুধু চেষ্টা করেছি বইটি তাদের
কাছে পৌছে দিতে
যাদের কেনার সামর্থ নেই।
A4 = 0.99Taka

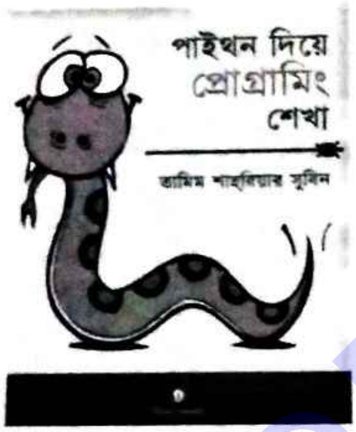
দ্বিমিক প্রকাশনী থেকে লেখকের অন্যান্য বই



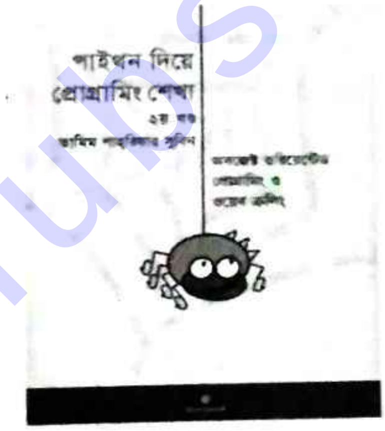
কম্পিউটার প্রোগ্রামিং দ্বিতীয় খণ্ড
তামিম শাহ্‌রিয়ার সুবিন



প্রোগ্রামিং ক্যারিয়ার গাইড লাইন
এক ডজন প্রোগ্রামারের কথা
তামিম শাহ্‌রিয়ার সুবিন



পাইথন দিয়ে প্রোগ্রামিং শেখা
তামিম শাহ্‌রিয়ার সুবিন



পাইথন দিয়ে প্রোগ্রামিং শেখা দ্বিতীয় খণ্ড
অবজেক্ট ওরিয়েন্টেড প্রোগ্রামিং ওয়েব ক্রলিং
তামিম শাহ্‌রিয়ার সুবিন

প্রোগ্রামিং এসেনশিয়ালস পাইথন ৩
তামিম শাহ্‌রিয়ার সুবিন
তাহমিদ রাফি

তামিম শাহ্‌রিয়ার (ডাকনাম: সুবিন)-এর জন্ম ১৯৮২ সালের ৭ নভেম্বর ময়মনসিংহে। গ্রামের বাড়ি কুমিল্লা জেলার চান্দিনা উপজেলার হারং গ্রামে। তাঁর বাবা মো: মোজাম্মেল হক ছিলেন সরকারি কর্মকর্তা এবং মা ফেরদৌসি বেগম গৃহিণী। স্ত্রী সিরাজুম মুনিরা ও পুত্র আরাভ শাহরিয়ারকে নিয়ে বর্তমানে সিঙ্গাপুরে বসবাস করছেন।

লেখাপড়া করেছেন হোমনা সরকারি প্রাথমিক বিদ্যালয়, এ কে উচ্চ বিদ্যালয়, নটর ডেম কলেজ এবং শাহজালাল বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিশ্ববিদ্যায়ে। ২০০৬ সালে শাহজালাল বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিশ্ববিদ্যালয়ে কম্পিউটার সায়েন্স ও ইঞ্জিনিয়ারিং বিভাগ থেকে পাস করেছেন। বিশ্ববিদ্যালয়ে থাকাকালীন বিভিন্ন প্রোগ্রামিং প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণ করেছেন। পরবর্তী সময়ে (২০০৭ ও ২০০৮ সালে) তিনি এসিএম আইসিপিসি ঢাকা রিজিওনাল-এর বিচারক ছিলেন। একটি বেসরকারি বিশ্ববিদ্যালয়ে শিক্ষকতা দিয়ে কর্মজীবন শুরু করলেও পরে সফটওয়্যার প্রকৌশলী হিসেবে কাজ শুরু করেন। বাংলাদেশে থাকাকালীন সময়ে প্রতিষ্ঠা করেছেন মুক্ত সফটওয়্যার লিমিটেড ও দ্বিমিক কম্পিউটিং। এ ছাড়া তিনি বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াডে একজন একাডেমিক কাউন্সিলর। বর্তমানে সিঙ্গাপুরে গ্র্যাব নামক একটি আন্তর্জাতিক প্রতিষ্ঠানে ইঞ্জিনিয়ারিং ম্যানেজার হিসেবে কাজ করছেন।

তাহমিদ রাফি-এর জন্ম ১৯৮৮ সালের ১৮ অক্টোবর ঢাকা জেলায়। তিনি ঢাকার সেন্ট যোসেফ উচ্চ বিদ্যালয় থেকে ২০০৪ সালে মাধ্যমিক ও নটরডেম কলেজ থেকে ২০০৬ সালে উচ্চ মাধ্যমিক সম্পন্ন করেন। ২০০৩, ২০০৪ ও ২০০৫ সালে অনুষ্ঠিত আঞ্চলিক গণিত অলিম্পিয়াড প্রতিযোগিতায় চ্যাম্পিয়ন হন তিনি। ২০০৫ সালে মেক্সিকোতে অনুষ্ঠিত ৪৬-তম আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াডে অংশগ্রহণকারী প্রথম বাংলাদেশ দলের সদস্য ছিলেন। তিনি বাংলাদেশ প্রকৌশল বিশ্ববিদ্যালয় (বুয়েট) থেকে কম্পিউটার সায়েন্স ও ইঞ্জিনিয়ারিং বিভাগ থেকে স্নাতক ডিগ্রি অর্জন করেন ২০১২ সালে।

স্নাতক সম্পন্ন করে তিনি কিছুদিন সফটওয়্যার প্রকৌশলী হিসেবে কাজ করেন। পরবর্তি সময়ে তথ্য ও যোগাযোগ প্রযুক্তি শিক্ষা প্রসারের জন্য তামিম শাহ্‌রিয়ার সুবিনের সঙ্গে তিনি সহ-প্রতিষ্ঠা করেন দ্বিমিক কম্পিউটিং। এর কিছুদিন পরে তিনি প্রতিষ্ঠা করেন দ্বিমিক প্রকাশনী। প্রকাশনীর মাধ্যমে তিনি কম্পিউটার প্রোগ্রামিং ও সফটওয়্যার ডেভেলপমেন্ট সংক্রান্ত বিভিন্ন বই তৈরী করেছেন। সমসাময়িক সময়ে তিনি বাংলাদেশ কম্পিউটার কাউন্সিল, বেসিস, বিআইটিএম, বিডিওএসএন, কোড ইট গার্ল সহ বিভিন্ন প্রতিষ্ঠান কর্তৃক আয়োজিত প্রোগ্রামিং ট্রেনিং প্রোগ্রামের ইন্সট্রাকটর হিসেবে দায়িত্ব পালন করেন।