実験数学1（6/28）

担当：宮武 勇登

PCを立ち上げてログインしてください

CLEから資料をダウンロードしてください

とりあえず何かoctaveのプログラムを実行して

グラフを描きましょう

(コマンドウィンドウで plot([0,1]) **とかでよい)**

重要

レポート課題を出題しました

締切 7/28

今日の内容

- **前回の復習：常微分方程式の数値解法**
- 数値解法の精度
- 連立常微分方程式

■常微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dt}y = f(y),\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \quad (f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$$

■$y(t)$を知りたいが，一般に初等関数の組み合わせで解析解を表現できない

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f\big(y(s)\big)ds$$

$y(t)$が分からないと計算できない

積分をうまく近似することが，
常微分方程式の数値解法の基本

陽的Euler法

$$y(\Delta t) = y_0 + \int_0^{\Delta t} f\big(y(s)\big)ds$$
$$\approx y_0 + \Delta t f(y_0)$$

以前の講義の
Algorithm1
を用いた

- $y(\Delta t)$の近似を y_1 と書くことにすると

$$y_1 = y_0 + \Delta t f(y_0)$$

で近似を定義できる.

- 一般には

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(y_n), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

とすれば, $y_n \approx y(n\Delta t)$

微分方程式 $\frac{d}{dt}y = -y,\ y(0) = 1$

```
%% 微分方程式の右辺の定義
function f = func (x)
   f = -x;
end


%% パラメータなど
T = 1; %目標時刻
n = 10; %分割数
dt = T/n; %時間刻み
t = [0:dt:T]; %ベクトル
```

o4.m


```
%% 初期値
y0 = 1;

%% 数値解を格納するベクトル
yEE = zeros(1,n+1); %Euler法用
yEE(1,1) = y0; %初期値
yRK = zeros(1,n+1); %RK法法用
yRK(1,1) = y0; %初期値

%% 厳密解：あとで比較するため
function y = exact(t,c)
  y = c*exp(-t);
end
```

o4.m


```
%% オイラー法の一ステップ
function y = ExEuler(x,dt)
  y = x + dt*func(x)
end

%% Runge-Kutta法の一ステップ
function y = RK(x,dt)
  % ここを書く
end

%% 反復
for i = 1:n
  yEE(i+1,1) = ExEuler(yEE(i,1),dt);
  % yRK(i+1,1) = RK(yRK(i,1),dt);
end
```

その他の解法

■陰的Euler法

$$y_1 = y_0 + \Delta t f(y_1)$$

■Runge-Kutta法

$$Y_1 = y_0$$

$$Y_2 = y_0 + \frac{\Delta t}{2} f(Y_1)$$

$$Y_3 = y_0 + \frac{\Delta t}{2} f(Y_2)$$

$$Y_4 = y_0 + \Delta t f(Y_3)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{\Delta t}{6}\left(f(Y_1) + 2f(Y_2) + 2f(Y_3) + f(Y_4)\right)$$

■課題：RK法を実装する

今日の内容

- 前回の復習：常微分方程式の数値解法
- **数値解法の精度**
- 連立常微分方程式

数値解法の指標

常微分方程式の数値解法は，Eulerの時代から
現代にいたるまで沢山提案されてきているが

「良さ」を判断する指標はなにか？

- **精度**
  - Butcher級数，群論，Hopf代数 etc. と関連
- 安定性
  - Pade近似 etc. と関連
- 計算速度（効率性）
  - 計算量理論 HPC（高性能計算）etc. と関連
- 構造保存性 etc.
  - 幾何学 etc. と関連

精度の基本

常微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dt}y = f(y),\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \quad (f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$$

の$t = \Delta t$での厳密解$y(\Delta t)$ と

数値解法

$$y_{n+1} = \Phi(y_n)$$

の最初の1ステップ後の数値解y_1が

どれくらい近いか？

つまり，$\|y_1 - y(\Delta t)\|$ がどうなっているか？

→それぞれTaylor展開して議論

次数

<u>定義</u>

解が十分なめらかとなる任意の微分方程式に対して，

$$\|y_1 - y(\Delta t)\| \leq O(\Delta t^{p+1})$$

となる数値解法をp次の数値解法とよぶ

一般に次数が大きいほど高精度

- 陽的Euler法，陰的Euler法：1次精度
- Runge-Kutta法：4次精度

o4order.mを実行してみよう

今日の内容

- ■前回の復習：常微分方程式の数値解法
- ■数値解法の精度
- ■**連立常微分方程式**

- 常微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dt}y = f(y),\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \quad (f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$$

- 先週は$n = 1$の問題を考えたが，一般には$n \gg 1$
- 例：調和振動子

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{bmatrix}, \qquad y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

つまり， $f(y) = f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \omega \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{bmatrix}$

厳密解は $y_1(t) = \cos(\omega t),\ y_2(t) = -\sin(\omega t)$

プログラム(05.m)

%% define the RHS of the problem

```
function f = func (w,x)
   f = w*[x(2) ; -x(1)];
end
```

%% parameters

```
T = 100; %end time
n = 700; % # of iterations
dt = T/n; % time mesh size
t = [0:dt:T];
w = 5; % omega
```

←色々変えてみる
←色々変えてみる

%% initial value

```
y0 = [1 ; 0];
```

%% matrices (numerical solution)

```
y = zeros(2,n+1);
y(:,1) = y0; %初期値
```

プログラム

%% exact solution

```
function y = exact(s,w)
  y = [cos(w*s); -sin(w*s)];
end
yEXACT = exact(t,w);
```

%% 1step for Euler

```
function y = ExEuler(x,dt,w)
  y = x + dt*func(w,x);
end
```

%% 1step for RK

```
function y = RK(x,dt,w)
  Y1 = x;
  Y2 = x + dt/2*func(w,Y1);
  Y3 = x + dt/2*func(w,Y2);
  Y4 = x + dt*func(w,Y3);
  y = x + dt/6*(func(w,Y1)+2*func(w,Y2)+2*func(w,Y3)+func(w,Y4));
end
```

陰的Euler法, 中点則, Symplectic Euler法18

<u>陰的Euler法：成分ごとに書くと</u>

$$\begin{bmatrix}\hat{y}_1\\\hat{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}+\Delta t\ \omega\begin{bmatrix}\hat{y}_2\\-\hat{y}_1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\hat{y}_1\\\hat{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\Delta t\ \omega\\\Delta t\ \omega & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$$

```
%% 1step for Implicit Euler
A0 = [1, -dt*w; dt*w, 1];
function y = ImEuler(x,A0)
  y = A0¥x; ←線形方程式のソルバ
end
```

中点則，Symplectic Euler法

- 中点則：$\hat{y} = y + \Delta t f\left(\frac{\hat{y}+y}{2}\right)$
- Symplectic Euler法

$$\hat{y}_1 = y_1 + \Delta t\ \omega y_2 \quad \leftarrow \text{陽的Euler}$$

$$\hat{y}_2 = y_2 - \Delta t\ \omega \hat{y}_1 \quad \leftarrow \text{陰的Euler}$$

- 課題1：これらを実装する
- 課題2：RK法が4次精度であることを示す