

数値解析における二重指数関数型変換の最適性

森 正 武^{*)}

二重指数関数型変換は、最初は数値積分において有効性を発揮する変換として1974年に高橋・森 [15] によって提案されたものである。しかしその後、この変換は Sinc 関数を基底関数として使う関数近似や Galerkin 法などでも有効であることが杉原 [11] によって明らかにされた。この論説では、数値積分と Sinc 関数を使う関数近似における二重指数関数型変換を中心として、誤差解析とこの変換のもつ最適性について述べてみたい。前半では二重指数関数型変換の導出を主として直感的な形で述べ、後半ではその理論的な背景をより数学的な形で述べる。なお、二重指数関数型変換では、対象とする関数が解析関数であることを前提としている。実際、解析関数でない関数に対してはこの変換は有効でない。しかし、実用面で現れる数値積分や関数近似はほとんどの場合対象が解析関数であるから、解析関数であるという条件は実用面での制約にはならないと考えてよいだろう。また、二重指数関数型変換の研究は、少数の例外 [9] を除いて、基本的に1変数の場合に限られている。多変数の場合の二重指数関数型変換の研究は今後の課題である。

§1. 台形公式の特徴

二重指数関数型変換の有効性には、無限区間の積分

$$(1.1) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du$$

における $g(u)$ の $|u| \rightarrow \infty$ での二重指数関数的減衰と、この積分に刻み幅一定の台形公式

$$(1.2) \quad I_h = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kh)$$

を使うと高精度の結果を与えるという二つの事実が、相補って働いている。この場合の台形公式は、高精度の結果を与えるだけでなく、ある意味で最適公式になっている。そこでまず、この台形公式の最適性について説明する。なお、この論説では関数の独立変数を u としているが、これは u が複素変数 $w = u + iv$ の実部であることを明示するためである。

われわれは被積分関数を解析関数と仮定しているので、数値積分の誤差解析に複素関数論を利用することができる。(1.1)の被積分関数 $g(w)$ が実軸上 $-\infty < w < \infty$ で解析的であるとすると、積分 I は

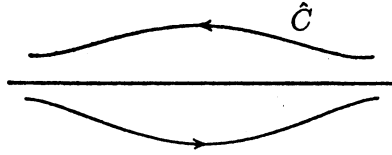
$$(1.3) \quad I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Psi}(w) g(w) dw$$

と書くことができる。ただし、 $\hat{\Psi}(w)$ は

$$(1.4) \quad \hat{\Psi}(w) = \begin{cases} -\pi i; & \text{Im } w > 0 \\ +\pi i; & \text{Im } w < 0 \end{cases}$$

なる関数であり、積分路 \hat{C} は図1に示すような実軸の上側を左に、下側を右に走る二つの曲線で、

^{*)} 1996年9月17日 東京都立大学における日本数学会50周年記念特別講演者


 図 1 積分路 \hat{C}

その間に $g(w)$ の特異点が存在しないようにとる. \hat{C} を限りなく実軸に近づければ (1.3) が (1.1) に一致することは明らかであろう. 一方, 台形公式による積分値は, 留数定理と \cot 関数の部分分数分解を使って

$$(1.5) \quad \begin{aligned} I_h &= h \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kh) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} h \left(\frac{1}{w} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{w-kh} + \frac{1}{w+kh} \right) \right) g(w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Psi}_h(w) g(w) dw \end{aligned}$$

$$(1.6) \quad \hat{\Psi}_h(w) = \pi \cot \frac{\pi}{h} w = \pi i \frac{\exp\left(\frac{\pi i}{h} w\right) + \exp\left(-\frac{\pi i}{h} w\right)}{\exp\left(\frac{\pi i}{h} w\right) - \exp\left(-\frac{\pi i}{h} w\right)}$$

と書けるから, 台形公式 (1.2) の誤差は結局次のような複素積分で表現することができる.

$$(1.7) \quad I - I_h = \Delta I_h = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Phi}_h(w) g(w) dw$$

ここで, $\hat{\Phi}_h(w)$ は

$$(1.8) \quad \hat{\Phi}_h(w) = \hat{\Psi}(w) - \hat{\Psi}_h(w) = \begin{cases} \frac{-2\pi i}{1 - \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} w\right)}; & \text{Im } w > 0 \\ \frac{+2\pi i}{1 - \exp\left(+\frac{2\pi i}{h} w\right)}; & \text{Im } w < 0 \end{cases}$$

で定義される関数である. この関数 $\hat{\Phi}_h(w)$ は, 台形公式の誤差を特徴付ける, 被積分関数には依存しない関数で, 誤差の特性関数と呼ぶ. 誤差の特性関数は, 公式が異なれば当然異なる形をもつ.

関数 (1.8) は, 実軸から少し離れると

$$(1.9) \quad |\hat{\Phi}_h(w)| \approx 2\pi \exp\left(-\frac{2\pi}{h} |\text{Im } w|\right)$$

のように振る舞う. すなわち, 台形公式の刻み幅 h が小さければ, $|\hat{\Phi}_h(w)|$ は w が実軸から離れるとき減衰率 $2\pi/h$ をもって指数関数的に減衰する.

被積分関数 $g(u)$ が $\zeta_j, j=1, 2, \dots, m$ に 1 位の極をもつ有理関数である場合を考えよう. ζ_j における留数を R_j とする. このとき, (1.5) によって $g(u)$ を数値積分したときに生ずる誤差は, (1.7) の積分路 \hat{C} を実軸から遠ざけて留数定理を適用すれば,

$$(1.10) \quad \Delta I_h = - \sum_{j=1}^m R_j \hat{\Phi}_h(\zeta_j)$$

となることがわかる. 例として, 積分

$$(1.11) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)((x-1)^2+4)} dx \left(= \frac{3\pi}{20} \right)$$

を台形公式で数値積分することを考えよう。この場合の理論上の誤差は(1.10)より

$$(1.12) \quad \Delta I_h \simeq -\frac{2\pi}{5} \exp\left(-\frac{2\pi}{h}\right) - \frac{\pi}{10} \left\{ 2 \sin\left(\frac{2\pi}{h}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{h}\right) \right\} \exp\left(-\frac{4\pi}{h}\right)$$

となる。右辺第1項は極 $\pm i$ からの寄与で、第2項は極 $1 \pm 2i$ からの寄与である。点 $1 \pm 2i$ は点 $\pm i$ に比べて実軸から2倍離れているので、 h が1.0程度の値のときでも、第2項は第1項に比べて無視できる。したがって、誤差への主たる寄与は実軸から最も近い極 $\pm i$ からのものであって、しかもその点における誤差の特性関数の値が小さいほど誤差は小さくなる。一方、台形公式では、刻み幅 h を小さくすれば誤差の特性関数の減衰率は大きくなり、したがって結果として誤差は小さくなる。言い換えれば、いろいろな公式を考えると、誤差の特性関数の実軸から離れるときの減衰率が大きい公式ほど誤差が小さい結果を与える可能性が高い。

具体的に、 $h=1.0$ として台形公式で(1.11)の積分を計算すると、結果は $I_{1.0}=0.473512$ となる。ただし、(1.12)の和は $k=20$ で打ち切った。その計算誤差は $3\pi/20 - I_{1.0} = 0.471239 - 0.473512 = -2.3 \times 10^{-3}$ である。一方、理論上の誤差(1.12)の右辺第1項の値は -2.3×10^{-3} であり、観測された実際の計算誤差と等しい。それに対して(1.12)の右辺第2項の値は -1.1×10^{-6} であり、第1項に比べて無視することができる。

そこで、台形公式に限らず一般の数値積分公式について同様のことを考えてみよう。積分(1.1)に対する一つの積分公式を

$$(1.13) \quad I_A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k g(a_k)$$

とする。すなわち、この公式の分点は a_k 、そこでの重みは A_k であり、分点は台形公式と同様に無限個とるものとする。このとき、この公式の誤差が(1.7)に対応して

$$(1.14) \quad \Delta I_A = I - I_A = \frac{1}{2\pi i} \int_C \hat{\Phi}_A(w) g(w) dw$$

のように表されるものとしよう。実際、台形公式、Simpson公式など通常使用される公式の誤差は、この形に表すことができる。 $\hat{\Phi}_A(w)$ はこの公式の誤差の特性関数である。このとき、実軸から l だけ離れた実軸に平行な直線上のこの誤差の特性関数の平均減衰率を次式によって定義する。

$$(1.15) \quad r(l) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R+il}^{R+il} \left\{ -\frac{\partial}{\partial v} \log |\hat{\Phi}_A(w)| \right\} dw, \quad v = \text{Im } w$$

$-\partial/\partial v \log |\hat{\Phi}_A(w)|$ は、 w が実軸から離れるとき誤差の特性関数 $|\hat{\Phi}_A(w)|$ が指数関数的に減衰するとしたときの減衰の指数で、たとえば台形公式の場合(1.9)より $-\partial/\partial v \log |\hat{\Phi}_A(w)| \simeq 2\pi/h$ である。 $r(l)$ は、実軸からの距離 l のところでこの値を実軸方向に平均したものである。さらに、誤差の特性関数の極限減衰率を

$$(1.16) \quad r = \lim_{|l| \rightarrow \infty} r(l)$$

で定義する。

このとき、分点 $\{a_k\}$ の単位長さあたりの分布密度が一定値 ν_P であるような(1.13)の形をもつすべての数値積分公式 I_A のうちで、等間隔刻み幅 $h=1/\nu_P$ をもつ台形公式 I_h が、極限減衰率 r が可能な最大値

$$(1.17) \quad r_{\max} = 2\pi\nu_P = \frac{2\pi}{h}$$

を達成するという意味で最適公式であることが示される[13].

証明の概略は次の通りである. \hat{C} を図1に示すような積分路とすると, 留数定理より I_A は

$$(1.18) \quad I_A = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Psi}_A(w) g(w) dw,$$

$$(1.19) \quad \hat{\Psi}_A(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \left(\frac{1}{w-a_k} + \frac{1}{a_k} \right)$$

と書くことができる. ただし, 分点 a_k および重み A_k は

$$(1.20) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|A_k|}{|a_k|^2} < \infty$$

をみたしていること, すなわち(1.19)が収束することを仮定する. 通常使われる積分公式はこの条件をみたしている. また, 誤差の特性関数は, (1.4)を考慮すると,

$$(1.21) \quad \hat{\Phi}_A(w) = \begin{cases} -\pi i - \hat{\Psi}_A(w), & \text{Im } w > 0 \\ +\pi i - \hat{\Psi}_A(w), & \text{Im } w < 0 \end{cases}$$

となる. ここで, (1.21)の右辺1行目の関数を下半平面へも拡張して

$$(1.22) \quad \hat{\Phi}_A^+(w) = -\pi i - \hat{\Psi}_A(w)$$

と書く. そして, 上半平面における誤差の特性関数の減衰に着目して

$$(1.23) \quad J_R(l) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d}{dw} \log\{\hat{\Phi}_A^+(w)\} dw = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\frac{d}{dw} \hat{\Phi}_A^+(w)}{\hat{\Phi}_A^+(w)} dw$$

なる積分を考える. Γ は図2に示すような積分路である. このとき, N_P , N_Z をそれぞれ Γ の内部に存在する $\hat{\Phi}_A^+(w)$ の極の個数, 零点の個数であるとする, 偏角の原理から

$$(1.24) \quad J_R(l) = N_P - N_Z$$

が成り立つ. 台形公式の $\hat{\Psi}_h(w)$ は, (1.6)より, $\text{Im } w < 0$ において実軸から離れるとき指数関数的に $+\pi i$ に収束するので, $\hat{\Psi}_A(w)$ もやはり $\text{Im } w < 0$ において実軸から離れるとき指数関数的に $+\pi i$ に収束することを仮定する. そこで, 図2の積分路で R および l' を大きくすると, Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 に沿う積分はいずれも0になり, Γ_1 に沿う積分だけが残る. ここで(1.23)の微分 d/dw を実軸方向 $\partial/\partial u (w=u+iv)$ にとり, $\text{Im } w > 0$ では $\hat{\Phi}_A^+(w) = \hat{\Phi}_A(w)$ であることおよび $J_R(l)$ が実数であることに注意しながら Cauchy-Riemann の関係式を使うと, 結局

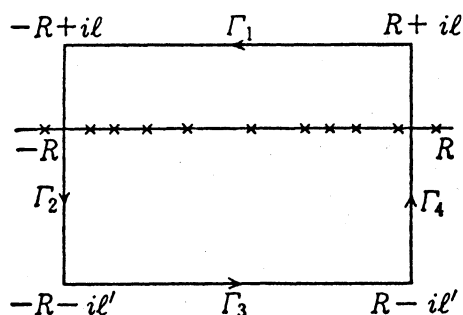


図2 積分路 Γ

$$(1.25) \quad 2\pi(\nu_P - \nu_Z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R+il}^{R+il} \left\{ -\frac{\partial}{\partial v} \log |\hat{\Phi}_A(w)| \right\} dw = r(l),$$

を得る [13, 3]. ただし,

$$(1.26) \quad \nu_P = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} N_P, \quad \nu_Z = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} N_Z$$

は, それぞれ $\hat{\Phi}_A(w)$ の実軸と平行な方向の単位長さ当たりの極の個数および零点の個数であり, とくに ν_P は単位長さ当たりの標本点数である. (1.25) より

$$(1.27) \quad r(l) = 2\pi(\nu_P - \nu_Z) \leq 2\pi\nu_P = \text{一定}$$

が成り立つ. (1.21) の右辺 2 行目の関数についても同様の結論が成り立つ. したがって, いずれにしても $|l| \rightarrow \infty$ のとき $\nu_Z = 0$ をみたす公式があれば, それが最適な積分公式であるといえることができる.

一方, (1.8) の台形公式の誤差の特性関数 $\hat{\Phi}_h(w)$ の右辺 1 行目, 2 行目の関数をそれぞれ下半平面, 上半平面に拡張しても, それらは w 平面の有限の場所に零点をもたない. すなわち $\nu_Z = 0$ である. 以上より, 台形公式 (1.2) が最適公式であることが結論される.

刻み幅が h の台形公式の場合, (1.9) より極限減衰率は

$$(1.28) \quad r = \frac{2\pi}{h}$$

となり, 上の定理の最適値 $r_{\max} = 2\pi\nu_P = 2\pi/h$ を達成していることがわかる. 一方, たとえば同じ刻み幅 h の Simpson 公式の場合には誤差の特性関数の極限減衰率は π/h で [13], 台形公式の $1/2$ にすぎない. 実際, 例として積分

$$(1.29) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \exp(-\cosh u) du = 0.42102443824 \dots$$

を刻み幅 $h=0.5$ の台形公式で計算すると, その結果の絶対誤差は $|\Delta I| = 8.8 \times 10^{-10}$ 程度に小さい. ただし, 実際の計算では (1.2) の和は $u = \pm 4.0$ までとって打ち切った. 一方, 同じ刻み幅の Simpson 公式でこれを計算すると, 絶対誤差が 2.1×10^{-5} 程度の結果しか得ることができない.

われわれが対象とする被積分関数は解析関数であるから, 積分 (1.1), 数値積分 (1.2) あるいはその誤差 (1.7) は, 解析関数の集合上で定義される一つの連続な線形汎関数である. その意味で, これらは佐藤の超関数と考えることができる [4]. そして, 例えば (1.8) の $\hat{\Phi}_h(w)$ は, 台形公式の誤差という佐藤の超関数の定義関数の $-2\pi i$ 倍に他ならない. したがって, 以上見たように, 解析関数の数値積分誤差を考察するときには, 誤差の特性関数という佐藤の超関数の具体的な定義関数を直接取り扱って解析を行うことができるのである.

§ 2. 変数変換と台形公式

解析関数の無限区間にわたる数値積分には刻み幅一定の台形公式が最適であることがわかった. そこで, 一般の区間 (a, b) における解析関数 $f(x)$ の積分

$$(2.1) \quad I = \int_a^b f(x) dx$$

が与えられたとき, これを数値積分するために前節で見た結果を利用することを考えよう. そのためには, $-\infty < u < \infty$ で解析的で

$$(2.2) \quad \phi(-\infty) = a, \quad \phi(+\infty) = b$$

をみたす単調増加関数

$$(2.3) \quad x = \phi(u)$$

を使って変数変換を行えばよい。このとき、積分 I は

$$(2.4) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi(u)) \phi'(u) du$$

となる。この積分の被積分関数 $g(u) = f(\phi(u)) \phi'(u)$ は、 $-\infty < u < \infty$ で解析的である。したがって、前節に述べた台形公式の最適性により、積分(2.4)を数値計算するには次のような刻み幅一定の台形公式を適用するのがよい。

$$(2.5) \quad I_h = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\phi(kh)) \phi'(kh)$$

この台形公式による誤差は、台形公式の誤差の特性関数(1.8)を使って

$$(2.6) \quad \Delta I_h = I - I_h = \frac{1}{2\pi i} \int_C \hat{\Phi}_h(w) f(\phi(w)) \phi'(w) dw$$

の形に表現できることはすでに見た通りである。これは、もとの積分を離散的な和で近似したために生ずる誤差であるから、離散化誤差と呼ぶことにする。

一方、実際には無限和 I_h は次のように有限和に打ち切って計算しなければならない。

$$(2.7) \quad I_h^{(N)} = h \sum_{k=-n}^n f(\phi(kh)) \phi'(kh)$$

ここでは、簡単のために和の k の正の側と負の側は同じ項数 n で打ち切っている。したがって、関数値の総計算回数(関数評価回数) N は

$$(2.8) \quad N = 2n + 1$$

となる。無限和を有限和で打ち切ることによって誤差が生じるが、これを項の打ち切り誤差と呼ぶことにする。すなわち、項の打ち切り誤差を ε_t と書くと、次のように表すことができる。

$$(2.9) \quad \varepsilon_t = I_h - I_h^{(N)} = h \sum_{k=-\infty}^{-n} f(\phi(kh)) \phi'(kh) + h \sum_{k=n}^{\infty} f(\phi(kh)) \phi'(kh)$$

なお、台形公式では通常は端点に $1/2$ を乗ずるが、ここでの議論では端点における関数値はつねに小さくて無視できるので、(2.7)も台形公式と呼ぶ。

無限和を有限で打ち切ることと関連する関数値の総計算回数 N のような量は、一見したところでは数学的にあまり重要な意味をもつようには思えないかもしれない。しかし、公式の最適性を問題にするときには、その効率は当然この N の関数として議論すべきであり、実際次節以下の議論でも明らかになるように、この N の値が最適性の数学的表現と深く関わっているのである。

さて、解析関数の無限区間にわたる積分の計算に最適の公式である台形公式を適用するのはごく自然である。一方、与えられた積分(2.1)に対して行う変数変換 $x = \phi(u)$ には任意性がある。そこで、台形公式の刻み幅 h と、無限和を打ち切る項数 $n = (N-1)/2$ とを固定して、いくつかの異なる変換についてその影響の考察を行ってみる。

いま、被積分関数 $f(\phi(u)) \phi'(u)$ の $|u| \rightarrow \infty$ における減衰が速くなるような変換を適用すると、 $n = (N-1)/2$ で打ち切ったときの項の打ち切り誤差 ε_t は当然小さくなる。しかし、減衰が速いと被積分関数 $f(\phi(u)) \phi'(u)$ の形状の変化に対して刻み幅 h が相対的に大きくなることになり、離散化誤差 ΔI_h の方は大きくなってしまふ。

逆に、被積分関数 $f(\phi(u))\phi'(u)$ の減衰が遅くなるような変換を適用すると、 $f(\phi(u))\phi'(u)$ の形状の変化に対して刻み幅 h が相対的に小さくなり、離散化誤差 ΔI_h は小さくなる。一方、減衰が速い場合と同じ $n=(N-1)/2$ で無限和を打ち切るとすると、相対的に減衰がまだ十分でない場所 で無限和を打ち切ることになり、項の打ち切り誤差 ε_t が大きくなってしまう。

この考察からわかるように、被積分関数 $f(\phi(u))\phi'(u)$ の減衰の仕方は速すぎても遅すぎても誤差は大きくなり、どこかに最適な減衰があるはずである。なお、当然のことながら、無限和は項の打ち切り誤差 ε_t が離散化誤差 ΔI_h とほぼ等しいところで打ち切るべきである。

ここで、被積分関数 $f(\phi(u))\phi'(u)$ の減衰を支配するのは、すぐ後でわかるように、(2.4) における $\phi'(u)$ の部分である。そこで、典型的な場合として積分

$$(2.10) \quad I = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

を考え、 $|\Delta I_h| \approx |\varepsilon_t|$ という条件の下で、誤差が関数値の総計算回数 N の関数として最も速く 0 に収束するような変換 $x = \phi(u)$ を探してみよう [14, 15]。そのために、減衰の遅い変換から速い変換に向かって、いくつかの具体的な変換を選び、そのときの誤差がどのように変化するかを調べてみる。

まず最初に、 $\phi'(u)$ が一重指数関数的に減衰する変換

$$(2.11) \quad x = \phi(u) = \tanh u^\rho, \quad \phi'(u) = \frac{\rho u^{\rho-1}}{\cosh^2 u^\rho}$$

を取り上げる。 ρ を正の奇数に固定すると一つの公式が定まる。 ρ が 1, 3, 5, ... のように増大するに従って $\phi'(u)$ の減衰は速くなる。(2.10) にこの変換を行うと

$$(2.12) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tanh u^\rho) \frac{\rho u^{\rho-1}}{\cosh^2 u^\rho} du$$

となる。この積分を台形公式で計算したときの誤差は、(2.6) より

$$(2.13) \quad \Delta I_h = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{C}} \hat{\Phi}_h(w) f(\tanh w^\rho) \frac{\rho w^{\rho-1}}{\cosh^2 w^\rho} dw$$

で表される。(1.9) に見たように、 w が実軸から遠ざかると $|\hat{\Phi}_h(w)|$ は指数関数的に小さくなる。しかし、被積分関数がたとえ定数関数であっても、(2.13) の積分路 \hat{C} を実軸から遠ざけていくとわかるように、右辺の分母にある $\cosh w^\rho$ の零点に起因する特異点が誤差に必ず寄与する。図 3 に $\rho=3$ の場合の $z = \tanh w^3$ による直線 $x=0, \pm 1, y=0, \pm 1$ ($z=x+iy$) の w 平面における像を示

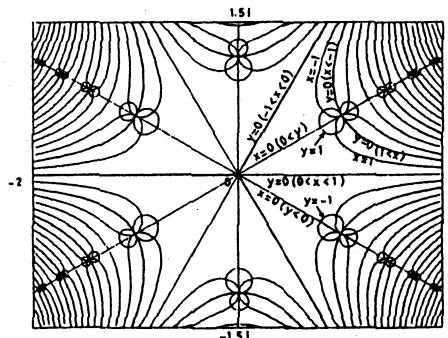


図 3 $z = \tanh w^3$ による $x=0, \pm 1, y=0, \pm 1$ ($z=x+iy$) の像

した. $\cosh w^3=0$ をみたす点は z 平面の無限遠点の $z=\tanh w^3$ による像であり, それらのうちで w 平面の実軸に最も近い点は, 図 3 にある直線 $x=0$ の像と直線 $y=0 (x<-1, 1<x)$ の像との交点など, 原点に対称に位置する 4 点である. もしも $f(z)$ 自身が z 平面の有限な場所に特異点をもつならば, その点は上述の 4 点よりも w 平面上の実軸に近いところに写像されるであろう. これら写像された特異点のうちで実軸から最も近い点までの距離を d とおこう. この写像された特異点の近くに (2.13) の被積分関数の鞍点が存在するので, 積分路をこの鞍点を通るように変形して鞍点法を適用すれば, 誤差 $|\Delta I_h|$ は近似的に次のように書けることがわかる [13].

$$(2.14) \quad |\Delta I_h| \simeq \exp\left(-\frac{2\pi}{h} d\right)$$

一方, (2.12) を台形公式で計算するときの和の上下限を $\pm n = \pm (N-1)/2 \simeq \pm N/2$ (N は標本点数) で打ち切ったときの項の打ち切り誤差 ϵ_t は, $|u|$ が大きいときの (2.12) の被積分関数における $\phi'(|u|) \simeq 1/(\cosh |u|^\rho)^2 \simeq \exp(-2|u|^\rho)$ の挙動から,

$$(2.15) \quad \epsilon_t \simeq \exp(-2(Nh/2)^\rho)$$

となる. 台形公式の和は, これと (2.14) がほぼ等しくなるところで打ち切るべきである. N は十分大きいとして, これらの指数を等置すれば

$$(2.16) \quad h \simeq (2^\rho \pi d)^{\frac{1}{\rho+1}} N^{-\frac{\rho}{\rho+1}}$$

を得る. これを (2.14) に代入すれば, 計算回数 N の関数として次の形の誤差の表示が得られる.

$$(2.17) \quad |\Delta I_N| \simeq \exp(- (2^{\frac{1}{\rho}} \pi d)^{\frac{\rho}{\rho+1}} N^{\frac{\rho}{\rho+1}})$$

とくに $\rho=1$ のときには次のようになる.

$$(2.18) \quad |\Delta I_N| \simeq \exp(-\sqrt{2\pi d N})$$

次に, $\phi'(u)$ が (2.11) の場合よりも速く, 二重指数関数的に減衰する変換

$$(2.19) \quad x = \phi(u) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right), \quad \phi'(u) = \frac{\frac{\pi}{2} \cosh u}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right)}$$

を考える. 積分 (2.10) にこの変換を行い, 台形公式を適用すると, 一つの数値積分公式が得られる. この公式の誤差は, (2.6) より

$$(2.20) \quad \Delta I_h = \frac{1}{2\pi i} \int_C \hat{\Phi}_h(w) f\left(\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh w\right)\right) \frac{\frac{\pi}{2} \cosh w}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh w\right)} dw$$

となる. (2.13) の場合と同様に, いまの場合も (2.20) の右辺の分母の零点に起因する特異点が誤差に寄与する. 図 4 に, (2.19) の変換, すなわち

$$(2.21) \quad z = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh w\right)$$

による $x=0, \pm 1, y=0, \pm 1 (z=x+iy)$ の w 平面における像を示した. w 平面で $\cosh\left(\frac{\pi}{2} \sinh w\right)=0$ をみたす点は z 平面の無限遠点の像であるが, これら (2.20) の被積分関数の特異点のうち実軸に最も近いものは, 図 4 に見るように, 実軸から $\pi/2$ だけ離れて実軸に平行に無限個並ぶ. もしも $f(z)$ 自身が z 平面の有限の場所に特異点をもつならば, その点は w 平面の実軸から $\pi/2$ より近い

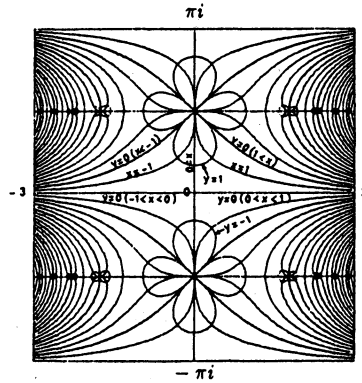


図 4 $z = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh w\right)$ による $x=0, \pm 1, y=0, \pm 1$ ($z=x+iy$) の像

ところへ写像されるであろう。図 4 の点およびこれら写像された点のうちで実軸から最も近い点までの距離を d とおくと、(2.13) の場合と同様に、二重指数関数型変換に基づくいまの場合の公式の離散化誤差は

$$(2.22) \quad |\Delta I_h| \simeq \exp\left(-\frac{2\pi}{h} d\right)$$

となることがわかる。

一方、台形公式の和を $u=n=\pm(N-1)/2 \simeq \pm N/2$ で打ち切ったときの項の打ち切り誤差は

$$(2.23) \quad \varepsilon_t \simeq \exp\left(-\frac{\pi}{2} \exp\left(\frac{Nh}{2}\right)\right)$$

となる。ここでも N は十分大きいとして、(2.22) と (2.23) の指数を等置すると、

$$(2.24) \quad h = \frac{2}{N} \log \frac{4d}{h}$$

を得る。これは h に関する非線形方程式であるが、第 0 近似として $h=2/N$ をとって (2.24) の右辺に代入すると、第 1 近似として

$$(2.25) \quad h = \frac{2}{N} \log(2dN)$$

が導かれる。これを (2.22) に代入すれば、関数計算回数 N の関数として次の形の誤差の表示が得られる。

$$(2.26) \quad |\Delta I_N| \simeq \exp\left(-\frac{\pi d N}{\log(2dN)}\right)$$

この誤差は、 N が大きくなるとき、(2.17) と比較してずっと速く 0 に近づく。

そこでさらに、二重指数関数 (2.19) の場合よりも $\phi'(u)$ が速く減衰する変換として

$$(2.27) \quad x = \phi(u) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u^3\right)$$

を考える。このとき、台形公式の誤差は

$$(2.28) \quad \Delta I_h = \frac{1}{2\pi i} \int_C \hat{\Phi}_h(w) f\left(\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh w\right)\right) \frac{\frac{3\pi}{2} w^2 \cosh w^3}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh w^3\right)} dw$$

となる。ところで、一般に写像 $\zeta=w^3$ による ζ 平面の実軸に平行な直線 $\text{Im } \zeta = \pi/2$ の一つの像

は、図3を w 平面の図とみなしたとき、その $y=0 (x < -1, 1 < x)$ に対応する曲線である。したがって、写像 $z = \tanh((\pi/2) \sinh \zeta)$, $\zeta = w^3$ を考えると、まず $z = \tanh((\pi/2) \sinh \zeta)$ によって、(2.28)の被積分関数の特異点に対応する z 平面の無限遠点は ζ 平面における実軸から $\pi/2$ だけ離れて並ぶ図4の無限個の点に写像され、次に $\zeta = w^3$ によってそれが w 平面における図3の $y=0 (x < -1, 1 < x)$ に対応する曲線上に写像されて無限個並ぶことになる。しかし、これらの特異点は原点から遠いところでは実軸に限りなく近づいてしまう。したがって、誤差の積分(2.6)の積分路を実軸から一定距離だけ離して保つことができなくなり、結局誤差を(2.22)より小さくすることはできないのである。

以上から、(2.11), (2.19), (2.27)のうちでは二重指数関数型変換(2.19)が最適の結果を与えることがわかった。

例として

$$(2.29) \quad I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-2)(1-x)^{1/4}(1+x)^{3/4}} (= -1.9490\cdots)$$

を、いくつかの変換を使って数値積分した結果を図5に示す。使った変換は次の4種類である。

- $x = \phi(u) = \tanh u, \quad \phi'(u) = \frac{1}{\cosh^2 u}$
- $x = \phi(u) = \operatorname{erf} u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-t^2) dt, \quad \phi'(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2)$
- $x = \phi(u) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right), \quad \phi'(u) = \frac{\frac{\pi}{2} \cosh u}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh u\right)}$
- $x = \phi(u) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh u^3\right), \quad \phi'(u) = \frac{\frac{3\pi}{2} u^2 \cosh u^3}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh u^3\right)}$

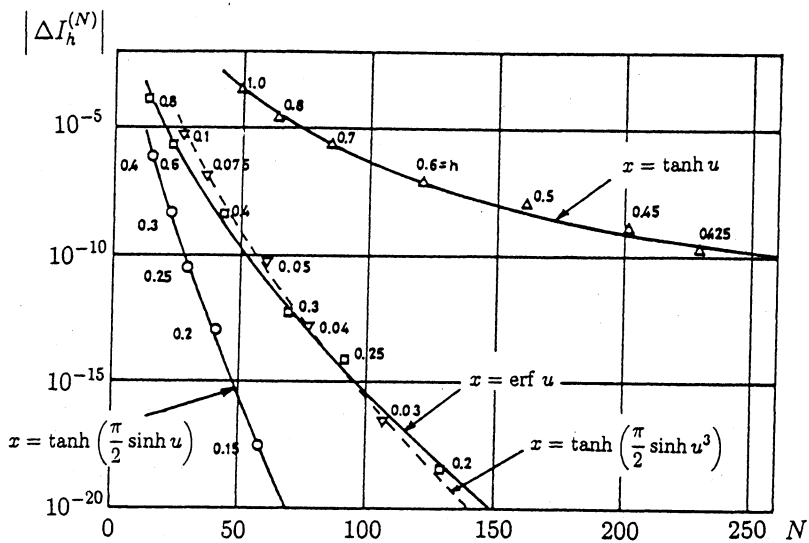


図5 積分 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-2)(1-x)^{1/4}(1+x)^{3/4}}$ に対するいろいろな変換の効率

b の変換は, $|u| \rightarrow \infty$ のときに $\exp(-u^2)$ の形で減衰する例である. 図 5 の横軸は関数の計算回数 N , 縦軸は計算値の絶対誤差 $|\Delta I_h^{(N)}|$ を対数スケールで表示したものである. 図の各曲線に沿って記してある数値は, 実際に計算した刻み幅 h の値である. 無限和は, $|f(\phi(u))\phi'(u)|$ の値が刻み幅 h における誤差の大きさに見合うまで減衰した所で打ち切っている. この図からもわかるように, $|\phi'(u)|$ の減衰が速くなるにしたがって効率は良くなり, 二重指数関数型変換のとき最も効率が高くなる. そして, それを過ぎると逆に効率は低下する.

以上述べてきた以外にも高橋・森は多くの解析と数値実験を行い, その結果二重指数関数型変換が実質的に最適な変換を与えていると結論を下した.

§ 3. 最適性の関数解析的取扱

高橋・森が二重指数関数型公式の最適性を発表したとほとんど同時期に, Utah 大学の Frank Stenger がやはり無限区間における数値積分公式の最適性をより数学的に議論した結果を発表した [6]. ところが, Stenger の結論は, 最適公式は台形公式であるという点は同じであるが, その誤差が計算回数 N の関数として $\exp(-c\sqrt{N})$ であるという点で高橋・森の結果と異なっていた. この結果は, 高橋・森の解析において一重指数関数型変換で得られた誤差の挙動と同じである. 高橋・森による $\exp(-cN/\log N)$ なる結果を見た Stenger は直ちに, $\exp(-cN/\log N)$ のような誤差の挙動はあり得ず, したがって高橋・森の結果は誤りである, とコメントを寄せた. 確かに, 高橋・森の議論の進め方はかなり思考実験的であり, 数学者には納得しにくい面があったことは否めない.

森は, 杉原正顕(現名古屋大)や室田一雄(現京都大)と Stenger のコメントについて議論を行った. その議論をきっかけにして, 杉原は, 高橋・森と Stenger のこの食い違いに対して詳細に分析を行い, Stenger の結果は正しいが高橋・森に対するコメントは誤りであること, すなわち両者の食い違いが, 対象とする関数の減衰の型を一重指数関数型に限定するかどうかによっていることを見出した [8, 10]. そして杉原は, 一重指数関数型減衰の枠を超えた一連の関数空間を導入して解析を行い, 二重指数関数型減衰と台形公式の組合わせの最適性を厳密な定理の形で述べることに成功した. 本節では, 杉原の解析の結果の概略について述べる [10].

まず最初に, 無限遠点の近傍での関数の減衰の仕方に応じて関数空間を分類する. そのために, 実軸を挟む幅 $2d$ の帯状領域を \mathcal{D}_d と書く.

$$(3.1) \quad \mathcal{D}_d = \{w \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} w| < d\}$$

次に, \mathcal{D}_d で 0 にならない関数 $\omega(w)$ を一つ固定して, 関数空間 $H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)$ を次のように定義する.

$$(3.2) \quad H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega) = \{g: \mathcal{D}_d \rightarrow \mathbb{C} \mid g(w) \text{ は } \mathcal{D}_d \text{ で正則かつ } \|g\| < +\infty\}$$

ただし, g のノルムは

$$(3.3) \quad \|g\| = \sup_{w \in \mathcal{D}_d} |g(w)/\omega(w)|$$

とする. このノルムの定義から

$$(3.4) \quad |g(w)| \leq \|g\| |\omega(w)| \quad (w \in \mathcal{D}_d)$$

が成り立つが, これから $g \in H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)$ は $w \rightarrow \infty$ のとき $\omega(w)$ と同じように減衰することがわか

る. たとえば, $\omega(w)$ が一重指数関数的に減衰すれば $H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)$ に属す関数も一重指数関数的に減衰し, また, $\omega(w)$ が二重指数関数的に減衰すれば $H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)$ に属す関数も二重指数関数的に減衰する.

以上の準備の下に, $\omega(w)$ を決めるとき定まる各々の関数空間 $H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)$ において, 積分

$$(3.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du, \quad g \in H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)$$

を考える. すると, この空間において, 積分 (3.5) に対して台形公式

$$(3.6) \quad h \sum_{j=-n}^n g(jh) \quad (N=2n+1)$$

が最適公式であることを示すことができる. ただし, 刻み幅 h は, 後で示すように, 与えられた n に対して適切に定めるものとする. そこでまず, 台形公式の誤差ノルムを

$$(3.7) \quad \mathcal{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) = \sup_{\|g\| \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du - h \sum_{j=-n}^n g(jh) \right|, \quad N=2n+1$$

によって定義する. 次に, 台形公式と比較すべき一般の N 点数値積分公式を

$$(3.8) \quad \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{m_j-1} c_{jk} g^{(k)}(a_j), \quad a_j \in \mathcal{D}_d, \quad c_{jk} \in \mathbb{C}, \quad N = m_1 + m_2 + \cdots + m_l$$

とおく. この公式は, l 個の各点 a_j において m_j-1 階までの微分も含めて総計 N 回関数値を計算するという意味で, N 点公式と呼んでいる. そして, この公式の族に対して, 次のような最小誤差ノルムを定義する.

$$(3.9) \quad \begin{aligned} & \mathcal{E}_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) \\ &= \inf_{1 \leq l \leq N} \inf_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_l \\ m_1 + m_2 + \dots + m_l = N}} \inf_{a_j} \inf_{c_{jk}} \left\{ \sup_{\|g\| \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du - \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{m_j-1} c_{jk} g^{(k)}(a_j) \right| \right\} \end{aligned}$$

最後に, \mathcal{D}_d に属する次の二つの条件をみたすすべての関数の族を $B(\mathcal{D}_d)$ と書くことにする.

$$(3.10) \quad \int_{-d}^d |g(u+iv)| dv \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \pm\infty$$

$$(3.11) \quad \lim_{v \rightarrow d-0} \int_{-\infty}^{\infty} \{|g(u+iv)| + |g(u-iv)|\} du < \infty$$

まず最初に一重指数関数型減衰をする関数族を考える. この関数族に対して, 台形公式の次の形の最適性が成り立つ.

定理 3.1 関数 $\omega(w)$ は次の 3 条件をみたすとする.

1. $\omega(w) \in B(\mathcal{D}_d)$.
2. $\omega(w)$ は \mathcal{D}_d において 0 にはならず, 実軸上では実数値をとる.
3. $\omega(w)$ は実軸上で次式をみたす.

$$(3.12) \quad \alpha_1 \exp(-(\beta|u|)^\rho) \leq |\omega(u)| \leq \alpha_2 \exp(-(\beta|u|)^\rho), \quad -\infty < u < \infty$$

ただし, $\alpha_1, \alpha_2, \beta > 0$ で, $\rho \geq 1$ である.

このとき,

$$(3.13) \quad \mathcal{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) \leq C_{d,\omega} \exp(-(\pi d \beta N)^{\frac{\rho}{\rho+1}})$$

が成り立つ. $C_{d,\omega}$ は d と ω に依存する定数で, 刻み幅 h は

$$(3.14) \quad h = (2\pi d)^{\frac{1}{\rho+1}} (\beta n)^{-\frac{\rho}{\rho+1}}$$

のように選ぶ. さらに,

$$(3.15) \quad \mathcal{E}_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) \geq C'_{d,\omega} N^{\frac{1}{\rho+1}} \exp\left(-\left(\left(\frac{2}{\rho+1}\right)^{\frac{1}{\rho}} 2\pi d\beta N\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}}\right)$$

が成り立つ。ただし、 $C'_{d,\omega}$ は d と ω に依存する $C_{d,\omega}$ とは別の定数である。

この定理によると、一重指数関数型減衰をする関数の族に対して台形公式の誤差は(3.13)のように振る舞い、一方、どのような N 点公式を用いても誤差が(3.15)の右辺より大きくなるような関数が $H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)$ の中に必ず存在する。(3.13)と(3.15)を比較すればわかるように、

$$(3.16) \quad \mathcal{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) \approx \mathcal{E}_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega))$$

が成り立っている。つまり、台形公式による結果の誤差が最小誤差ノルムをほぼ達成している。その意味で、 ρ を固定した一重指数関数型減衰をする関数の空間 $H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)$ においては、台形公式が最適公式であるといえる。さらに、 ρ が大きくなるにつれて、すなわち実軸上での減衰が速くなるにつれて、関数計算回数 N の関数として、誤差は速く 0 に収束することがわかる。

(3.13)の証明は、台形公式の誤差の特性関数(1.8)を使って誤差を上から評価することによって行う。また(3.15)は、各分点 a_j を零点にもつ Blaschke product を利用して具体的に下限を実現する関数を構成して証明する。詳細は[10]を参照されたい。

次に、減衰がより速い、二重指数関数型減衰をする関数族を考える。この関数族に対しても、台形公式の次の形の最適性が成り立つ。

定理 3.2 関数 $\omega(w)$ は次の 3 条件をみたすとする。

1. $\omega(w) \in B(\mathcal{D}_d)$.
2. $\omega(w)$ は \mathcal{D}_d において 0 にはならず、実軸上では実数値をとる。
3. $\omega(w)$ は実軸上で次式をみたす。

$$(3.17) \quad a_1 \exp(-\beta_1 \exp(\gamma|u|)) \leq |\omega(u)| \leq a_2 \exp(-\beta_2 \exp(\gamma|u|)), \quad -\infty < u < \infty$$

ただし、 $a_1, a_2, \beta_1, \beta_2, \gamma > 0$ である。

このとき、

$$(3.18) \quad \mathcal{E}_{N,h}^T(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) \leq C_{d,\omega} \exp\left(-\frac{\pi d \gamma N}{\log(\pi d \gamma N / \beta_2)}\right)$$

が成り立つ。 $C_{d,\omega}$ は d と ω に依存する定数で、刻み幅 h は

$$(3.19) \quad h = \frac{\log(2\pi d \gamma n / \beta_2)}{\gamma n}$$

のように選ぶ。さらに、

$$(3.20) \quad \mathcal{E}_N^{\min}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) \geq C'_{d,\omega} \log N \exp\left(-\frac{2\pi d \gamma N}{\log(\pi d \gamma N / \beta_1)}\right)$$

が成り立つ。ただし、 $C'_{d,\omega}$ は d と ω に依存する $C_{d,\omega}$ とは別の定数である。

証明は関数空間が変わっただけで、定理 3.1 と同様である。この定理は、二重指数関数型減衰をする関数空間においても(3.16)が成り立つこと、したがってやはり台形公式が最適公式であることを示している。ただし、定理 3.1 と定理 3.2 の違いは、関数計算回数 N の関数としての誤差の挙動であって、両者を比較すれば明らかなように、二重指数関数型減衰をする関数空間の方が N の増加とともに誤差は格段に速く 0 に収束する。いずれにせよ、 N の関数としての誤差の挙動は、杉原も高橋・森と同じ結果を得ていることに注意されたい。

実軸上の減衰が速くなるにしたがって誤差の 0 への収束が速くなることを見たので、次には二重

指数関数型減衰よりもさらに減衰が速い関数空間を考えるのが自然である．ところが，杉原は次の定理を証明することによって，その可能性がないことを示した．

定理 3.3 次の3条件をみたす関数 $\omega(w)$ は存在しない．

1. $\omega(w) \in B(\mathcal{D}_d)$.
2. $\omega(w)$ は \mathcal{D}_d において 0 にならず，しかも実軸上で実数値をとる．
3. $\omega(w)$ の実軸上での減衰は次式のように書ける．

$$(3.21) \quad \omega(u) = O(\exp(-\beta \exp(\gamma|u|))), \quad |u| \rightarrow \infty$$

ただし， $\beta > 0$ ， $\gamma > \pi/(2d)$ である．

この定理は単に複素関数の一つの性質を述べているのであって，数値積分には無関係のものである．証明は，角領域におけるいわゆる Phragmén-Lindelöf の定理 [16] から出発して行うことができる．定理 3.3 は， $B(\mathcal{D}_d)$ に属ししかも $\operatorname{Re} w \rightarrow \pm\infty$ において指数 $\pi/(2d)$ をもつ二重指数関数型減衰よりも速い減衰をするような関数は存在し得ないことを示している．一方，高橋・森の解析では，被積分関数に対して領域 $|\operatorname{Im} w| < d$ における正則性は仮定しなかったもので，二重指数型減衰よりも速く減衰する 0 でない関数を考えることができた．しかしそこで取り上げた関数では， $\operatorname{Re} w \rightarrow \infty$ において特異点の実軸に限りなく近づいてしまったのである．

以上杉原の結果をまとめれば，関数が $B(\mathcal{D}_d)$ に含まれることを仮定する限り，減衰を速くすると公式の効率は向上するが，二重指数関数型減衰が効率が最高になる限界であること，すなわち一般の積分 (2.1) に対して二重指数関数型変換が最適であることが結論される．

Stenger は一重指数関数型減衰をする関数の空間に限って議論を進めて台形公式の最適性を示したのであったが，杉原は一重指数関数型減衰をする関数の空間，二重指数関数型減衰をする関数の空間，…というように，考察する関数空間そのものを変えながら議論を行い，いずれの関数空間でも台形公式が最適公式であること，二重指数関数型減衰のとき誤差の減少が最も速いこと，そして二重指数関数より速く減衰する関数は存在し得ないことを示すことによって，とくに二重指数関数型減衰をする関数の空間における台形公式が最適であることを示したのである．その意味で，二重指数関数型変換と台形公式の組合わせの超最適性 (meta-optimality) を示したといえる．

§ 4. Sinc 近似における二重指数関数型変換の最適性

二重指数関数型減衰は数値積分に特有のものではなく，実は無限区間における Sinc 関数近似においても見られることを，杉原が示した [11]．Sinc 関数は次の形で定義される関数で，その有効性はすでに古くから知られている [12, 7]．

$$(4.1) \quad g(u) \approx \sum_{j=-n}^n g(jh) S(j, h)(u)$$

$$(4.2) \quad S(j, h)(u) = \frac{\sin \frac{\pi}{h}(u - jh)}{\frac{\pi}{h}(u - jh)}$$

刻み幅 h を定めたとき $S(j, h)(u)$, $j=1, 2, \dots$ が一つの関数系を成し，各 $S(j, h)(u)$ が一つの基底関数となる．図 6 に $h=1.0$ の場合の $S(j, h)(u)$, $j=-1, 0, 1$ を示す．

ここで，(3.2) で定義した関数空間 $H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)$ における Sinc 関数近似 (4.1) の誤差を

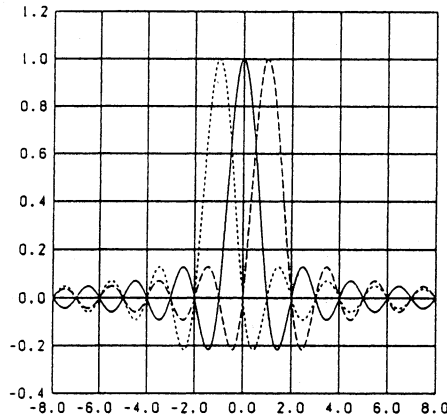


図 6 Sinc 関数 $S(j, h)(u)$, $j = -1, 0, 1$ ($h = 1.0$)

$$(4.3) \quad E_{N,h}^{\text{Sinc}}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) = \sup_{\|g\| \leq 1} \left\{ \sup_{u \in R} \left| g(u) - \sum_{j=-n}^n g(jh) S(j, h)(u) \right| \right\}$$

で定義する.

次に, この Sinc 関数近似と効率の比較を行うために, 無限区間 $(-\infty, \infty)$ における一般の関数系 $\{\phi_{jk}(u)\}$ による $g(u)$ の展開を考える.

$$(4.4) \quad g(u) \approx \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{m_j-1} g^{(k)}(a_j) \phi_{jk}(u)$$

ただし, $\{\phi_{jk}(u)\}$ は領域 \mathcal{D}_d において正則な関数系で, 各標本点 $a_j \in \mathcal{D}_d$ においては, (3.8) と同様, $g(u)$ の関数値のみならず $m_j - 1$ 階までの微分の値を使う形になっている. したがって, 関数値の総計算回数 N は, 微分も含めて $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_l$ である. そして, (4.4) の形をもつ近似公式の族に対して, 次のような最小誤差ノルムを定義する.

$$(4.5) \quad E_N^{\text{min}}(H^\infty(\mathcal{D}_d, \omega)) \\ = \inf_{1 \leq l \leq N} \inf_{m_1, m_2, \dots, m_l} \inf_{a_j \in \mathcal{D}_d} \inf_{\phi_{jk}} \left\{ \sup_{\|g\| \leq 1} \left\{ \sup_{u \in R} \left| g(u) - \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^{m_j-1} g^{(k)}(a_j) \phi_{jk}(u) \right| \right\} \right\}$$

以上の準備の下で杉原は, $\omega(w)$ が一重指数関数型減衰をする関数空間では係数の違いを除いて (3.13) と (3.15) が, また $\omega(w)$ が二重指数関数型減衰をする関数空間では係数の違いを除いて (3.18) と (3.20) が, $\mathcal{E}_{N,h}^{\text{I}}$ を $E_{N,h}^{\text{Sinc}}$ で, $\mathcal{E}_N^{\text{min}}$ を E_N^{min} で置き換えた形で, そのまま成立することを示した [11]. 一方, 定理 3.3 により二重指数関数型減衰よりも速く減衰する 0 でない関数は存在し得ないから, 結局 (4.4) の形をもつあらゆる展開のうちで Sinc 関数による展開 (4.1) が最適であることが結論される.

実際の関数近似に臨んでは, 近似すべき関数が区間 (a, b) で与えられているとき, この区間を $(-\infty, \infty)$ に写像ししかも変換後の減衰が二重指数関数型になるような変数変換を実行して, それに Sinc 関数近似を適用すればよい.

関数近似の場合にもまた, Stenger は, 杉原よりも以前に, 一重指数関数型減衰をする関数の空間において Sinc 関数近似が最適であることを示していた [6]. しかし, そこでも Stenger は一重指数関数型減衰の枠から出ることなく, (3.13) および (3.15) の結果を得るに留まった. それに対し

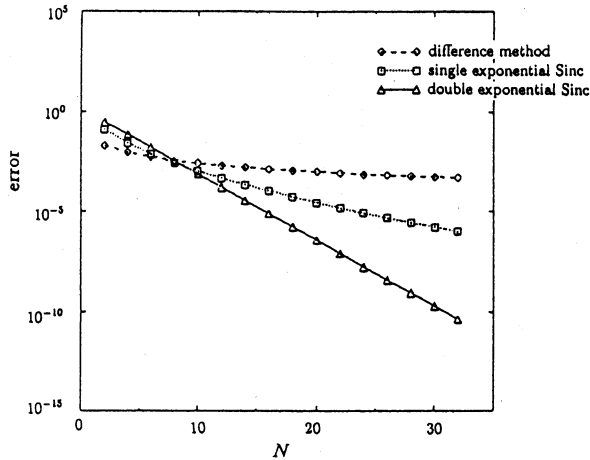


図 7 Sinc-Galerkin 法の結果

て杉原は、一重指数関数型減衰の枠から出て解析を行い、(3.18)および(3.20)に見るようなより効率の高い二重指数関数型変換による最適の Sinc 近似法を見出したのである。

さらに、堀内・杉原は、常微分方程式の境界値問題[1]に対して二重指数関数型変換と Sinc 近似を組合わせた Sinc-Galerkin 法を、また腰原・杉原は Sturm-Liouville 固有値問題[2]に対して Sinc-collocation 法を提案している。誤差の挙動は一重指数関数型減衰、二重指数関数型減衰いずれの場合にも単純な Sinc 関数のそれぞれの場合と同じになるので、二重指数関数型変換を利用することを奨励している。ただし、二重指数関数型変換が最適であることはまだ証明されていない。

最後に、例として微分方程式

$$(4.6) \quad \begin{cases} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{3}{4(1+x)^2} f = -3(1+x)^{\frac{1}{2}} \\ f(-1) = f(1) = 0 \end{cases}$$

を取り上げる。この方程式に対して、

$$(4.7) \quad \text{一重指数関数型変換} : x = \tanh \frac{u}{2}$$

$$(4.8) \quad \text{二重指数関数型変換} : x = \tanh \left(\frac{\pi}{2} \sinh u \right)$$

を行ってこれを $(-\infty, \infty)$ における問題に変換し、それぞれに Sinc-Galerkin 法を適用した結果を、図 7 に示す[1]。通常使われる h^2 のオーダーをもつ差分法を適用した結果を併せて示した。二重指数関数型変換の収束が他の方法よりも格段に速いことが見てとれる。

このように、二重指数型変換は数値解析のいろいろなところで有効性を示し、しかもその収束は関数計算回数 N の関数としていずれの場合も $O(\exp(-cN/\log N))$ である。この収束の速さは通常使用されている他の方法と比較してきわめて速く、したがって今後さらに応用が広がることが期待される。

文 献

- [1] 堀内賢一, 杉原正顯, 二重指数関数型変数変換を用いた2点境界値問題の数値解法—二重指数型変数変換を用いた Sinc-Galerkin 法—, 日本応用数理学会平成8年度年会講演予稿集(1996)142-143.
- [2] 腰原敬弘, 杉原正顯, 二重指数関数型変数変換を用いた Sturm-Liouville 固有値問題の数値解法, 日本応用数理学会平成8年度年会講演予稿集(1996)136-137.
- [3] 森正武, 数値解析と複素関数論(筑摩書房, 1975).
- [4] 佐藤幹夫, 超関数の理論, 数学 **10**(1958)1-27.
- [5] F. Stenger, Integration formulas based on the trapezoidal formula, J. Inst. Math. Appl. **12**(1973)103-114.
- [6] F. Stenger, Optimal convergence of minimum norm approximation in H_p , Numer. Math. **29**(1978)345-362.
- [7] F. Stenger, Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions(Springer-Verlag, New York, 1993).
- [8] 杉原正顯, DE 公式の最適性について, 京都大学数理解析研究所講究録 No.585(1986)150-175.
- [9] 杉原正顯, Method of good matrices for multi-dimensional numerical integrations—An extension of the method of good lattice points, J. Comput. Appl. Math. **17**(1987)197-213.
- [10] M. Sugihara, Optimality of the double exponential formula—functional analysis approach—, Numer. Math. **75**(1997)379-395.
- [11] 杉原正顯, 二重指数関数型変換を用いた Sinc 関数近似, 京都大学数理解析研究所講究録 No.990(1997), 125-134.
- [12] 高橋秀俊, 複素関数論と数値解析, 京都大学数理解析研究所講究録 No.253「数値解析とコンピュータ」(1975)24-37.
- [13] H. Takahasi and M. Mori, Error estimation in the numerical integration of analytic functions, Rep. Comput. Centre Univ. Tokyo **3**(1970), 41-108.
- [14] H. Takahasi and M. Mori, Quadrature formulas obtained by variable transformation, Numer. Math. **21**(1973), 206-219.
- [15] H. Takahasi and M. Mori, Double exponential formulas for numerical integration, Publ. RIMS Kyoto Univ. **9**(1974), 721-741.
- [16] 辻正次, 複素関数論(1968)槇書店.
(1997年5月27日提出)
(もり まさたけ・京都大学数理解析研究所)