問 1：

(b)：$x_{n+2} = \frac{7}{3}x_{n+1} - \frac{2}{3}x_n \quad x_0 = 2,\ x_1 = \frac{2}{3}$

3x^2-7x+2=0　解は x=1/3,　2

$x_{n+2} - \frac{1}{3}x_{n+1} - = \frac{6}{3}x_{n+1} - \frac{2}{3}x_n = 2(x_{n+1} - \frac{1}{3}x_n)$　より

X1 — (1/3)X0 = 0　なので、Xn+1=(1/3)Xn

つまり　$X_n = 2(\frac{1}{3})^n$

(c): (b)から 第 1 項は 2/3, 第 2 項は 2/9, 第 3 項は 2/27,

第 4 項は 2/81, 第 5 項は 2/243 となる。以下は(a)を実行したもの。

```
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  1
a_1 = 0.666667
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  2
X_2 = 0.222222
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  3
X_3 = 0.074074
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  4
X_4 = 0.024691
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  5
X_5 = 0.008230
```

しかし

```
kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  32
X_32 = 0.000000
kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  33
X_33 = 0.000000
kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  34
X_34 = 0.000001
kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  100
X_100 = 58386145124537.234375
```

任意の自然数で Xn<Xn-1 であるから、プログラム上で Xn<0 となる n が存在して、n<k の k に対して{Xn}は単調増加になって Xk＜Xk+1 となっていると考察しました。

問 2:

エラトステネス の篩

2 から N まで゛ の素数を探索するとする

1、
2 から N までの整数をリスト(以下 A と呼ぶ)に降順で入れる

2、
A の先頭の数を A とは別のリスト(以下 B と呼ぶ)に移動させる

その数の倍数の数を A から取り除く
3、
2 の作業を A の先頭の数が N の平方根の達するまで行う
4、
A に残った整数を B に全て移動させる

計算量は p を素数として

2 については N/2 回，3 については N/3 回，5 については N/5 回… なので

$$\sum_{p<\sqrt{N}} \frac{N}{p} = \frac{N}{2} + \frac{N}{3} + \frac{N}{5} + \frac{7}{N} + \cdots$$

と表せる

問３：

問3.

(a)

Aの列ベクトル $a_1, a_2, \ldots, a_n$とする.
グラムシュミットの直交化法を応用に

$$a_k' = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k \cdot b_i) b_i$$

$$b_i = \begin{cases} \dfrac{a_i'}{|a_i'|} & a_i' \neq 0 \text{のとき} \\ 0 & a_i' = 0 \text{のとき} \end{cases}$$

とする

$b_1, \ldots, b_n$のうち 0であるものを

$B = (b_1, \ldots, b_n)$が直交行列になるように入れ換える

その行列を $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$

$$(a_1, \ldots, a_n) = (a_1', a_2' + (a_2 \cdot b_1) b_1, \ldots\ldots, a_n' + (a_n \cdot b_1) b_1 + \cdots + (a_n \cdot b_{n-1}) b_{n-1})$$

$$= (b_1, b_2, \ldots, b_n) \begin{pmatrix} |a_1'| & (a_2 \cdot b_1) & (a_3 \cdot b_1) & \cdots & (a_n \cdot b_1) \\ 0 & |a_2'| & (a_3 \cdot b_2) & & (a_n \cdot b_2) \\ \vdots & & |a_3'| & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & |a_n'| \end{pmatrix}$$

$$= (q_1, \ldots, q_n) R$$

Rとおく

より Q直交行列 R上三角行列として

$A = Q \cdot R$ と書ける

（∵ Bの中の $b_i = 0$ にかかる Rの部分は Rの i行だが $b_i = 0$のとき Rのi行はすべて0になるから）

(b)

Aが正則のとき

(a)において $b_i = 0$ となることが無くなるので Bは正規直交行列となるから

QをBとみてよいから (QをBとかく.)

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)\begin{pmatrix} |a_1| & \cdots & (a_n\cdot b_1) \\ & \ddots & \vdots \\ & & (a_n\cdot b_{n-1}) \\ & & |a_n| \end{pmatrix}$$

$= B \cdot R$ とおける

またこのとき Q': 直交行列, R' 上三角行列として

$A = Q'R'$ とかけたとする

$BR = Q'R'$

$$(|a_1|b_1,\ (a_2\cdot b_1)b_1 + |a_2|b_2,\ \dots,\ (a_n\cdot b_1)b_1 + \dots + (a_n\cdot b_{n-1})b_{n-1} + |a_n|b_n)$$

$$= (r'_{11}q'_1,\ r'_{12}q'_1 + r'_{22}q'_2,\ \dots,\ r'_{1n}q'_1 + \dots + r'_{nn}q'_n)$$

よって

$$\begin{cases} |a_1|b_1 = r'_{11}q'_1 & \text{①} \\ (a_2\cdot b_1)b_1 + |a_2|b_2 = r'_{12}q'_1 + r'_{22}q'_2 \\ \vdots \\ (a_n\cdot b_1)b_1 + \dots + |a_n|b_n = r'_{1n}q'_1 + \dots + r'_{nn}q'_n \end{cases}$$

B, Q'は正規直交行列なので

①より $b_1 = q'_1$, $|a_1| = r'_{11}$

①②より $(a_2\cdot b_1) = r'_{12}$, $|a_2| = r'_{22}$, $b_2 = q'_2$

このように考えると

$B = Q'$

$R = R'$ となる

つまり(2)の分解は一意的

(c) $A_k = R_{k-1}Q_{k-1} = Q_kR_k$ を考える

$A_{k-1} = R_{k-2}Q_{k-2} = Q_{k-1}R_{k-1}$ より

$R_{k-1} = Q_{k-1}^{-1}A_{k-1}$ だから

$A_k = R_{k-1}Q_{k-1}$

$= Q_{k-1}^{-1}A_{k-1}Q_{k-1}$

$A_{k-1} = Q_{k-2}^{-1}A_{k-2}Q_{k-2}$, $A_{k-2} = Q_{k-3}^{-1}A_{k-3}Q_{k-3}$ …より

$A_k = Q_{k-1}^{-1}Q_{k-2}^{-1}\cdots Q_1^{-1}Q_0^{-1}A_0Q_0Q_1\cdots Q_{k-2}Q_{k-1}$

とできる.

Q_iは正規直交行列だから

$Q_i^{-1} = Q_i^{T}$ となる

$Q = Q_0Q_1\cdots Q_{k-1}$ とおくと

$Q^T = Q_{k-1}^T(Q_0\cdots Q_{k-2})^T$

$= Q_{k-1}^TQ_{k-2}^T(Q_0\cdots Q_{k-3})^T = \cdots$

$= Q_{k-1}^TQ_{k-2}^T\cdots Q_2^TQ_1^TQ_0^T$

$= Q_{k-1}^{-1}Q_{k-2}^{-1}\cdots Q_0^{-1}$ より Qは直交行列

であるから

$A_k = Q^TAQ$ とかける

続き

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} = (q_1, \ldots, q_n)$$

$$A_k = Q^T A Q$$

ここで

$$|xE_n - A_k| = |xE_n - Q^T A Q|$$

$$= |Q^T xE_n Q - Q^T A Q|$$

$Q^T Q = 1$ より

$xE_n Q = xQ$

$Q^T x Q = x Q^T Q$

$= xE_n$ よって

$Q^T xE_n Q = xE_n$ となるので

$$= |Q^T||xE_n Q - AQ|$$

$$= |Q^T||xE_n - A||Q|$$

$|Q^T||Q| = 1$ より

$$= |Q^T||Q||xE_n - A|$$

$$= |xE_n - A|$$

よって $|xE_n - A| = 0$ の根と

$|xE_n - A_k| = 0$ の根は一致する.

(d)

report1-3.c のプログラムを実行すると、k を大きくしていくと、ある行列 A では、Ak の値がある数値にしていくのがわかった。また、それは上三角行列で確かに固有値は A と一致していた。

また、上三角行列になった Ak の対角成分は(1,1)成分の絶対値が一番大きく(3,3)成分の絶対値が一番小さい値になるように降順で並んでいた。

しかし、中には上三角行列にならないものもあった。

例えば　[[10,0,0],　[0,5,0],　[0,0,−5]] など