実験数学１（宮武）レポート課題１回目

（2019 年 5 月 10 日出題）

- 質問は miyatake@cas.cmc.osaka-u.ac.jp まで．
- 提出日：6 月 5 日（水）17 時．提出先：宮武のメールアドレス
- 提出方法：PDF ファイルと c 言語のプログラムを添付し，件名は 「ExpMath1:report1」 とすること（鍵括弧は不要）．
- 受け取り後，確認のメールを出します（休日・祝日を除き，数日以内に返信がなければ，再送してください）．
- 発展問題は必須ではないが，チャレンジすれば成績「$+\epsilon$」．
- プログラムには適切な（分量と内容の）コメントを書くこと．

問 1. 次の漸化式で表される数列 $\{x_n\}$ を考える：

$$x_{n+2} = \frac{7}{3}x_{n+1} - \frac{2}{3}x_n, \quad x_1 = 2/3,\ x_0 = 2. \tag{1}$$

(a) n を入力とし，x_n を出力するプログラムを作成せよ．但し，x_n の一般項は用いず，(1) に沿って for 文を使ったプログラムを作成すること（名前は report1-1.c とすること）．

(b) x_n の一般項を求めよ．

(c) (a) のプログラムを実行し（例えば x_{20}, x_{40} などを出力し），(b) の結果との整合性を議論せよ（整合しない場合，その原因も考察すること）．

問 2. 素数に関するアルゴリズムについて考えよう．

(a) 指定された整数以下の全ての素数を発見する単純なアルゴリズムの一つに「エラトステネスの篩」がある．これについて調べ，簡潔にまとめよ．

(b) エラトステネスの篩を利用して，1000 以下の全ての素数を出力するプログラムを作成せよ（名前は report1-2.c とすること）．

問 3. n 次実正方行列 A の固有値について考える．

(a) ある直交行列 Q と上三角行列 R が存在して，

$$A = QR, \quad r_{ii} \geq 0\ (i = 1, \dots, n) \tag{2}$$

と分解できることを示せ．ただし，上三角行列 R とは

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & r_{nn} \end{bmatrix}$$

の形の行列である（つまり，対角より左下の要素が全て 0）．ヒント：Gram–Schmidt 正規直交化法を用いて，Q と R の具体的な構成法を示す．

(b) A が正則ならば，分解 (2) は一意的であることを示せ．

(c) 行列 Q, R を使って行列積 RQ を考え，さらに，直交行列と上三角行列行列に分解する，という操作を繰り返すことを考えよう．すなわち，

$$\begin{aligned} A_0 &= A, \\ A_0 &= Q_0R_0, \\ A_1 &= R_0Q_0 = Q_1R_1, \\ A_2 &= R_1Q_1 = Q_2R_2, \\ &\ \vdots \\ A_{k+1} &= R_kQ_k = Q_{k+1}R_{k+1}, \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

という規則に従って行列の列 $\{A_k\}$ を生成する．このとき，0 以上の任意の整数 k に対して，A_k の固有値と A の固有値が一致することを示せ．

(d) (発展問題) (c) のプログラムを作成し，A_k の対角成分の値の変化と A の固有値の関係について考察せよ（名前は report1-3.c とすること）．なお，行列サイズは 3×3 や 4×4 程度でよいし，行列 A は例えば対角行列 B に適当な正則行列 P を $A = P^{-1}BP$ と作用して作成すればよい（$\because$ B の対角成分が A の固有値になる）．