

問 1 :

$$(b) : x_{n+2} = \frac{7}{3}x_{n+1} - \frac{2}{3}x_n \quad x_0 = 2, \quad x_1 = \frac{2}{3}$$

$$3x^2 - 7x + 2 = 0 \quad \text{解は } x = 1/3, \quad 2$$

$$x_{n+2} - \frac{1}{3}x_{n+1} = \frac{6}{3}x_{n+1} - \frac{2}{3}x_n = 2(x_{n+1} - \frac{1}{3}x_n) \quad \text{より}$$

$$X_{n+1} - (1/3)X_n = 0 \quad \text{なので、} X_{n+1} = (1/3)X_n$$

よって、 X_n は初項 2、公比 $(1/3)$ の等比数列なので

$$X_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(c): (b) から 第 1 項は $2/3$, 第 2 項は $2/9$, 第 3 項は $2/27$,

第 4 項は $2/81$, 第 5 項は $2/243$ となる。以下は(a)を実行したもの。

```
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください: 1
a_1 = 0.666667
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください: 2
X_2 = 0.222222
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください: 3
X_3 = 0.074074
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください: 4
X_4 = 0.024691
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください: 5
X_5 = 0.008230
```

しかし

```
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください: 32
X_32 = 0.000000
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください: 33
X_33 = 0.000000
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください: 34
X_34 = 0.000001
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください: 100
X_100 = 58386145124537.234375
```

と 34 を超えると値は増加していくことがわかった。

そこから数列は単調増加に変わってしまっていた。

小数点の計算の誤差で $X_n < X_{n+1}$ となってしまうと考えられる。

問 2:

エラトステネス の篩

2 から N までの素数を探索するとする

1、

2 から N までの整数をリスト(以下 A と呼ぶ)に降順で入れる

2、

A の先頭の数 A とは別のリスト(以下 B と呼ぶ)に移動させる

その数の倍数の数を A から取り除く

3、

2 の作業を A の先頭の数 A が N の平方根の達するまで行う

4、

A に残った整数を B に全て移動させる

最終的に B には 2 から N までの素数が全て含まれる

計算量は p を素数として

2 については N/2 回, 3 については N/3 回, 5 については N/5 回… なので

$$\sum_{p < \sqrt{N}} \frac{N}{p} = \frac{N}{2} + \frac{N}{3} + \frac{N}{5} + \frac{N}{7} + \dots$$

と表せる

問3:

由3.

(a)

A の列ベクトル a_1, a_2, \dots, a_n とする。
グラムシュミットの直交化法を用いて

$$a'_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k, b_i) b_i$$

$$b_i = \begin{cases} \frac{a'_i}{|a'_i|} & a'_i \neq 0 \text{ のとき} \\ 0 & a'_i = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とすると

b_1, \dots, b_n のうち 0 であるものを

$B = (b_1, \dots, b_n)$ を $n \times n$ 直交行列に $b_i \neq 0$ となるように入れ換えて

その行列を $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) &= (a'_1, a'_2 + (a'_2, b_1)b_1, \dots, a'_n + (a'_n, b_1)b_1 + \dots + (a'_n, b_{n-1})b_{n-1}) \\ &= (b_1, b_2, \dots, b_n) \begin{pmatrix} |a'_1| & (a'_2, b_1) & (a'_3, b_1) & \dots & (a'_n, b_1) \\ 0 & |a'_2| & (a'_3, b_2) & \dots & (a'_n, b_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & |a'_n| & 0 \end{pmatrix} \\ &= (q_1, \dots, q_n) R \end{aligned}$$

よって Q 直交行列 R 上三角行列と

$$A = Q \cdot R \text{ と書ける}$$

②
 B 中の $b_i = 0$ にかかると R の i 行は 0 となる。
 R の i 行 j 列 $b_i = 0$ ならば R の i 行は 0 となる。
 したがって 0 となる。

(b)

A が正則のとき

$|a_1| = 1$ と $b_1 = 0$ とする。このとき $\frac{1}{|a_1|} < 1$ とする。B は正規直交行列と仮定する。

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \begin{pmatrix} |a_1| & & (a_n, b_1) \\ & \ddots & (a_n, b_{n-1}) \\ & & |a_n| \end{pmatrix} \quad (Q \in B \text{ と仮定})$$

$$= B \cdot R \text{ と仮定}$$

またこのとき Q は直交行列、R は角行列と仮定

$$A = Q' R' \text{ と仮定}$$

$$B R = Q' R'$$

$$\left((a_1, b_1), (a_2, b_1)b_1 + |a_2|b_2, \dots, (a_n, b_1)b_1 + \dots + (a_n, b_{n-1})b_{n-1} + (a_n, b_n) \right)$$

$$= (r_{11}q_1, r_{12}q_1 + r_{22}q_2, \dots, r_{1n}q_1 + \dots + r_{nn}q_n)$$

$$\begin{cases} |a_1|b_1 = r_{11}q_1 - 0 \\ (a_2, b_1)b_1 + |a_2|b_2 = r_{12}q_1 + r_{22}q_2 \\ \vdots \\ (a_n, b_1)b_1 + \dots + |a_n|b_n = r_{1n}q_1 + \dots + r_{nn}q_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} B \cdot Q' & \text{ は正規直交行列と仮定} \\ \textcircled{1} \text{より } b_1 &= q_1' \quad |a_1| = r_{11}' \\ \textcircled{2} \text{より } (a_2, b_1) &= r_{12}', \quad |a_2| = r_{22}', \quad b_2 = q_2' \end{aligned}$$

このように考えれば

$$B = Q'$$

$$R = R' \text{ と仮定}$$

→ (c) の解答は、このとき

$$(c) \quad A_k = R_{k-1} Q_{k-1} = Q_k R_k \text{ と仮定}$$

$$A_{k-1} = R_{k-2} Q_{k-2} = Q_{k-1} R_{k-1} \text{ より}$$

$$R_{k-1} = Q_{k-1}^T A_{k-1} \text{ と仮定}$$

$$\begin{aligned} A_k &= R_{k-1} Q_{k-1} \\ &= Q_{k-1}^T A_{k-1} Q_{k-1} \end{aligned}$$

$$A_{k-1} = Q_{k-2}^T A_{k-2} Q_{k-2}, \quad A_{k-2} = Q_{k-3}^T A_{k-3} Q_{k-3} \dots$$

$$A_k = Q_{k-1}^T Q_{k-2}^T \dots Q_1^T Q_0^T A_0 Q_0 Q_1 \dots Q_{k-2} Q_{k-1}$$

Q_i は正規直交行列と仮定

$$Q_i^{-1} = Q_i^T \text{ と仮定}$$

$$Q = Q_0 Q_1 \dots Q_{k-1} \text{ と仮定}$$

$$Q^T = Q_{k-1}^T (Q_0 \dots Q_{k-2})^T$$

$$= Q_{k-1}^T Q_{k-2}^T (Q_0 \dots Q_{k-3})^T = \dots$$

$$= Q_{k-1}^T Q_{k-2}^T \dots Q_2^T Q_1^T Q_0^T$$

$$= Q_{k-1}^T Q_{k-2}^T \dots Q_0^T \text{ より } Q \text{ は直交行列}$$

このとき

$$A_k = Q^T A Q \text{ と仮定}$$

続き

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \\ = (q_1, \dots, q_n)$$

$$A_k = Q^T A Q$$

∴
=

$$|\lambda E_n - A_k| = |\lambda E_n - Q^T A Q|$$

$$= |Q^T \lambda E_n Q - Q^T A Q|$$

$$= |Q^T| |\lambda E_n Q - A Q|$$

$$= |Q^T| |\lambda E_n - A| |Q|$$

$$= |Q^T| |Q| |\lambda E_n - A|$$

$$= |\lambda E_n - A|$$

$$Q^T Q = I$$

$$\lambda E_n Q = \lambda Q$$

$$Q^T \lambda Q = \lambda Q^T Q$$

$$= \lambda E_n$$

$$Q^T \lambda E_n Q = \lambda E_n$$

$$|Q^T| |Q| = 1$$

∴ $|\lambda E_n - A| = 0$ の根を

$|\lambda E_n - A_k| = 0$ の根は一致する。

(d)

report1-3.c のプログラムを実行すると、k を大きくしていくと、ある行列 A では、 A_k の値がある数値にしていくのがわかった。また、それは上三角行列で確かに固有値は A と一致していた。

また、上三角行列になった A_k の対角成分は(1,1)成分の絶対値が一番大きく(3,3)成分の絶対値が一番小さい値になるように降順で並んでいた。

しかし、中には上三角行列にならないものもあった。

例えば $[[10,0,0], [0,5,0], [0,0,-5]]$ など