実験数学１（宮武）レポート課題２回目

（2019 年 6 月 28 日出題）

- 質問は miyatake@cas.cmc.osaka-u.ac.jp まで．
- 提出締切：**7 月 28 日**（日）24 時（月曜日になる直前まで）．提出先：宮武のメールアドレス
- 提出方法 : PDF ファイルとプログラム（言語は自由）を添付し，件名は「ExpMath1:report2」とすること（鍵括弧は不要）．
- 受け取り後，確認のメールを出します（休日・祝日を除き，数日以内に返信がなければ，再送してください）．
- プログラムには適切な（分量と内容の）コメントを書くこと．
- 発展問題は必須ではないが，チャレンジすれば成績「$+\epsilon$」．

問 1. 数値積分手法の一つに二重指数関数型数値積分公式（英語では double exponential (DE) formula といい，これに対応して日本語でも DE 公式と呼ぶことが多い）がある．この手法について調べ，簡潔にまとめよ（分量は自由．参照した書籍，論文，web ページなどは明記すること）．また，実際にプログラムを作成し，誤差の振る舞いなどについて，講義で行った手法と比較し考察せよ（積分区間や被積分関数は特徴が分かるように工夫し設定せよ）．

問 2. 開区間 $(-\pi,\pi)$ で定義された実数値関数 $f(x)=\begin{cases}-1 & (-\pi<x<0)\\ 0 & (x=0)\\ 1 & (0<x<\pi)\end{cases}$ を考える．

(a) $f(x)$ をフーリエ級数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

に展開したい．a_n については $a_n=0$ $(n=0,1,2,\dots)$ となるが，その理由を簡潔に説明し，さらに b_n $(n=1,2,\dots)$ を求めよ．

(b) (a) で求めたフーリエ級数の部分和を

$$S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

と定義する．m を大きくしたときに $S_m(x)$ を描くと，不連続点の近くで Gibbs 現象と呼ばれる振動が観察される（例えば図 1）．ここでは，原点付近に注目してこの現象を考察する．

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k-1}\left(\frac{\pi}{2k}\right)$$

の値を求めよ．必要であれば，$k\to\infty$ のとき

$$\sin\left(\frac{\pi}{2k}\right)+\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2k}\right)+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2k}\right)\to\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 0.08949\cdots$$

となることを利用して概数で求めよ．

問 3. Lotka–Volterra (LV) 方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u(v-2)\\ v(1-u)\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}u(0)\\ v(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$$

について考える．

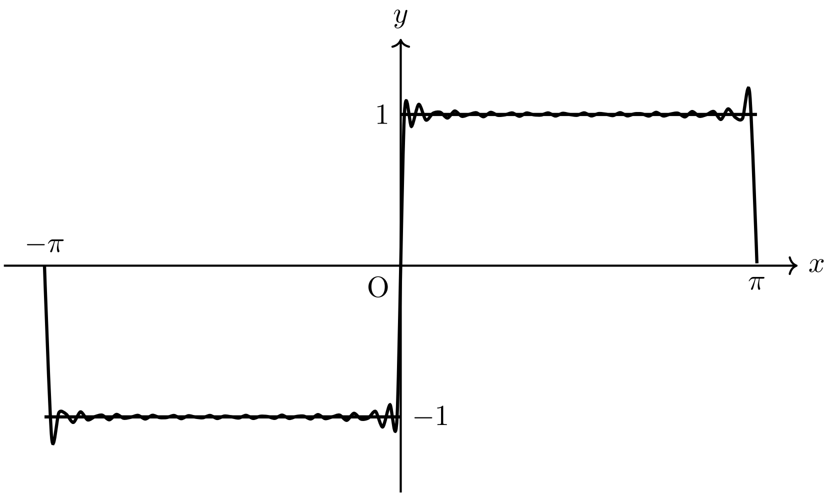

図 1: S_{59}

(a) $I(u,v) := \log u - u + 2\log v - v$ とする．LV 方程式の解に対して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(u,v) = 0$$

を示せ．

(b) LV 方程式を陽的 Euler 法，Runge–Kutta 法，symplectic Euler 法等で数値計算するプログラムを作成せよ（Δt は各手法の違いが分かるように適切に設定すること）．ただし，symplectic Euler 法は以下のアルゴリズムを意味する：

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t u_n (v_{n+1} - 2),$$
$$v_{n+1} = v_n + \Delta t v_n (1 - u_{n+1}).$$

特に，$I(u,v)$ の時間変化を図にプロットし，結果を考察せよ（c 言語などの場合は結果をファイルに出力したのち，gnuplot などで（excel などでもよい）プロットする．そのためのプログラムの提出は不要）．

(c) (**発展問題**) 陰的 Euler 法や中点則についても，プログラムを作成し，(b) と同様に議論せよ．ただし，LV 方程式に対してこれらの陰解法を適用すると，各時間ステップごとに非線形連立方程式を解く必要がある．そのためのアルゴリズムとして，Newton 法や不動点反復法などが有名である．また，Octave であれば，fsolve (`https://octave.org/doc/v4.0.1/Solvers.html`) も利用できる．