実験数学1-8

担当：宮武 勇登

PCを立ち上げてログインしてください

CLEから資料をダウンロードしてください

Octaveも起動してください

一旦，plot([1,1])を実行しましょう

レポートについて

■全員のレポートをみてコメントすべき点があれば（次回以降に）コメントします

■メールには本文を！

■メールの「名前」欄には本名を！

■レポート本体にも名前を！

レポートの解説：問１

漸化式：$x_{n+2} = \frac{7}{3}x_{n+1} - \frac{2}{3}x_n,\ x_1 = \frac{2}{3}, x_0 = 2$

一般項：$x_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

プログラムを実行してみると，nが小さいうちは概ね厳密な一般項と一致

しかし，nが大きくなると徐々に値が大きくなる

【理由】

コンピュータの中では，厳密には$x_1 \neq \frac{2}{3}$

この場合，一般項は$x_n = a\left(\frac{1}{3}\right)^n + b2^n\ (a \approx 2, b \approx 0)$

nが大きくなると$b2^n$の項が支配的になる

レポートの解説：問3

$A = QR$：QR分解

(1) Gram-Schmidtを使う

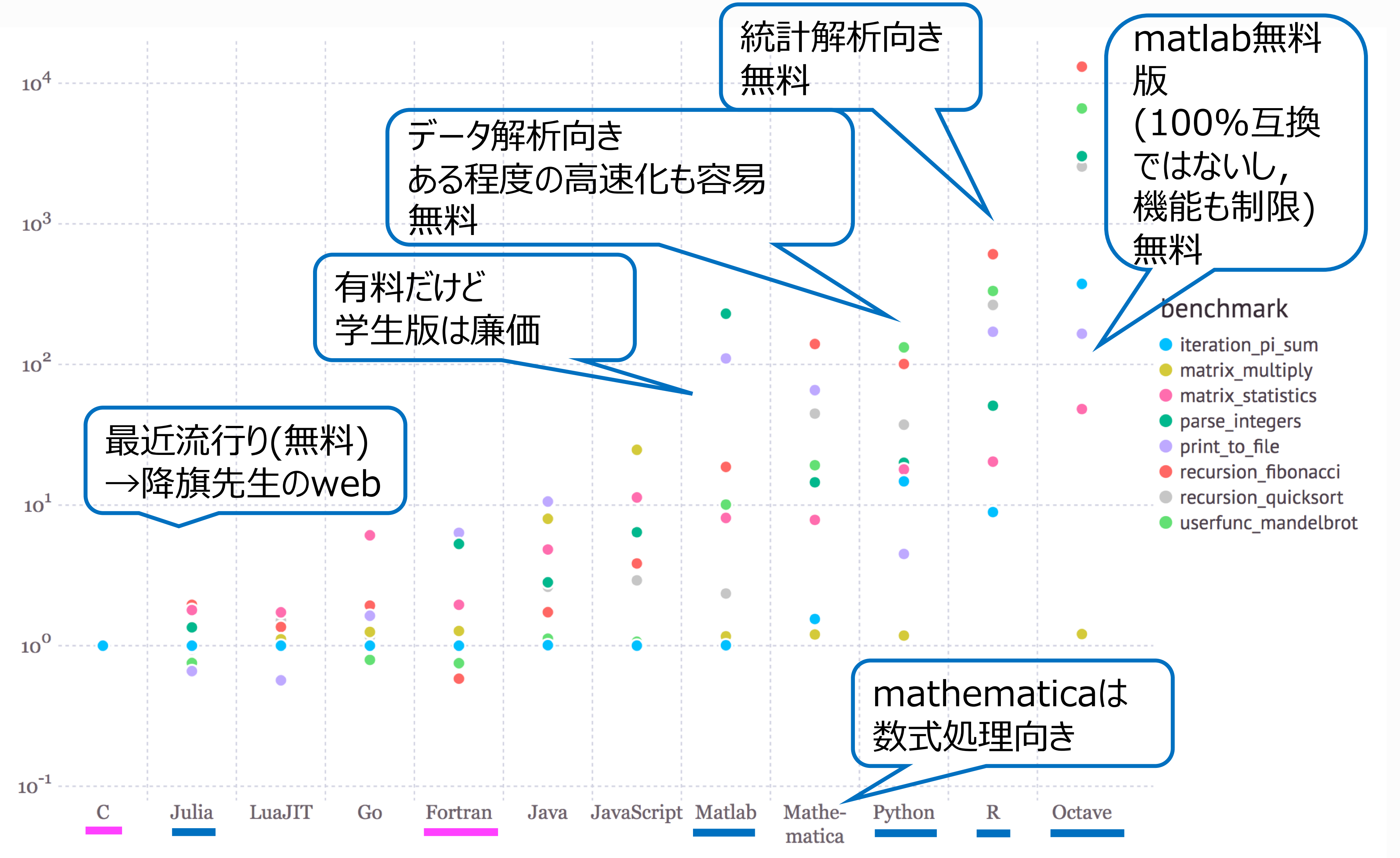
(2) $A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$ とすると$Q_1^{-1} Q_2 = R_1 R_2^{-1}$

左辺：直交行列，右辺は対角が正の上三角行列

これをみたすのは単位行列のみ.

(3) $A_{k+1} = Q_k^{-1} A_k Q_k$より A_{k+1} と A_k の固有値は一致.

Octaveは便利だけど



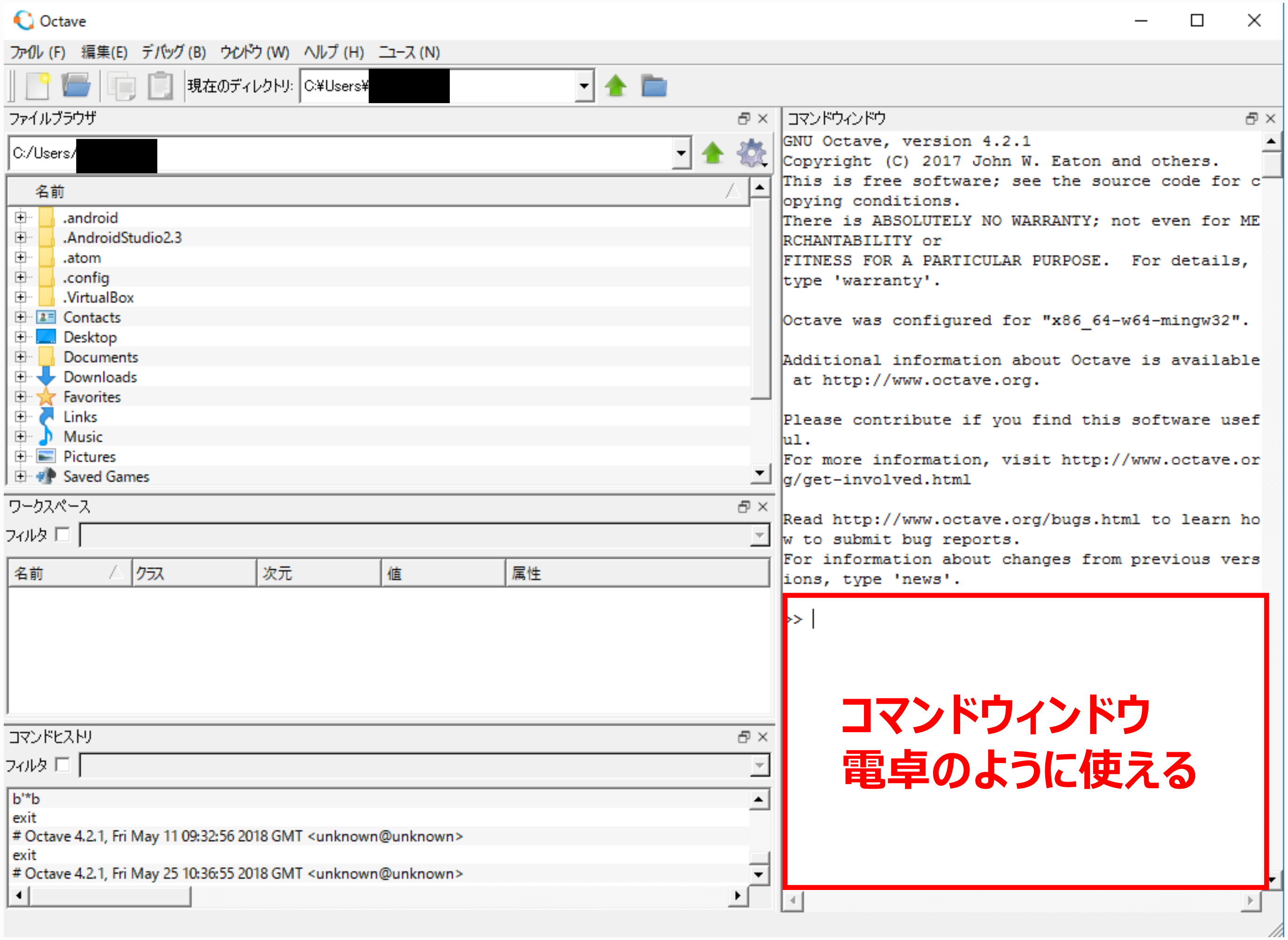
スーパーコンピュータで超大規模計算するときは**C**か**Fortran**

https://julialang.org/

今日の内容

- **先週の復習：数値積分の基礎（の基礎）**
- Fourier級数展開

Octaveを起動すると…



例えば

```
>> 1+1
ans =  2
```

```
>> A = [1, 2; 2, 1]
A =

   1   2
   2   1
```

← **行列：直感的にかける！型の定義は不要！**

```
>> b = [1;1]
b =

   1
   1
```

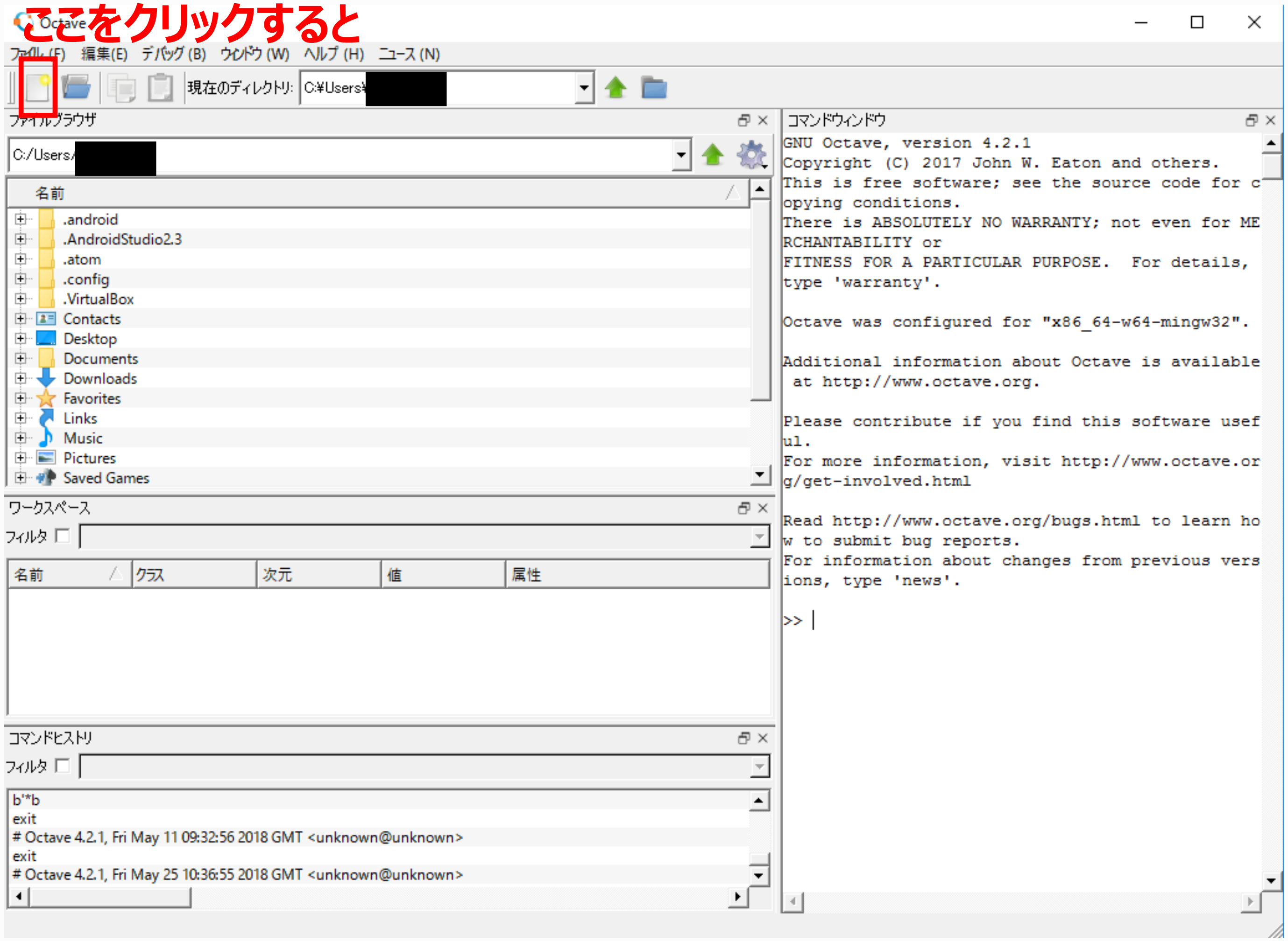
← **ベクトル：直感的にかける**

```
>> x = A¥b
x =

   0.33333
   0.33333
```

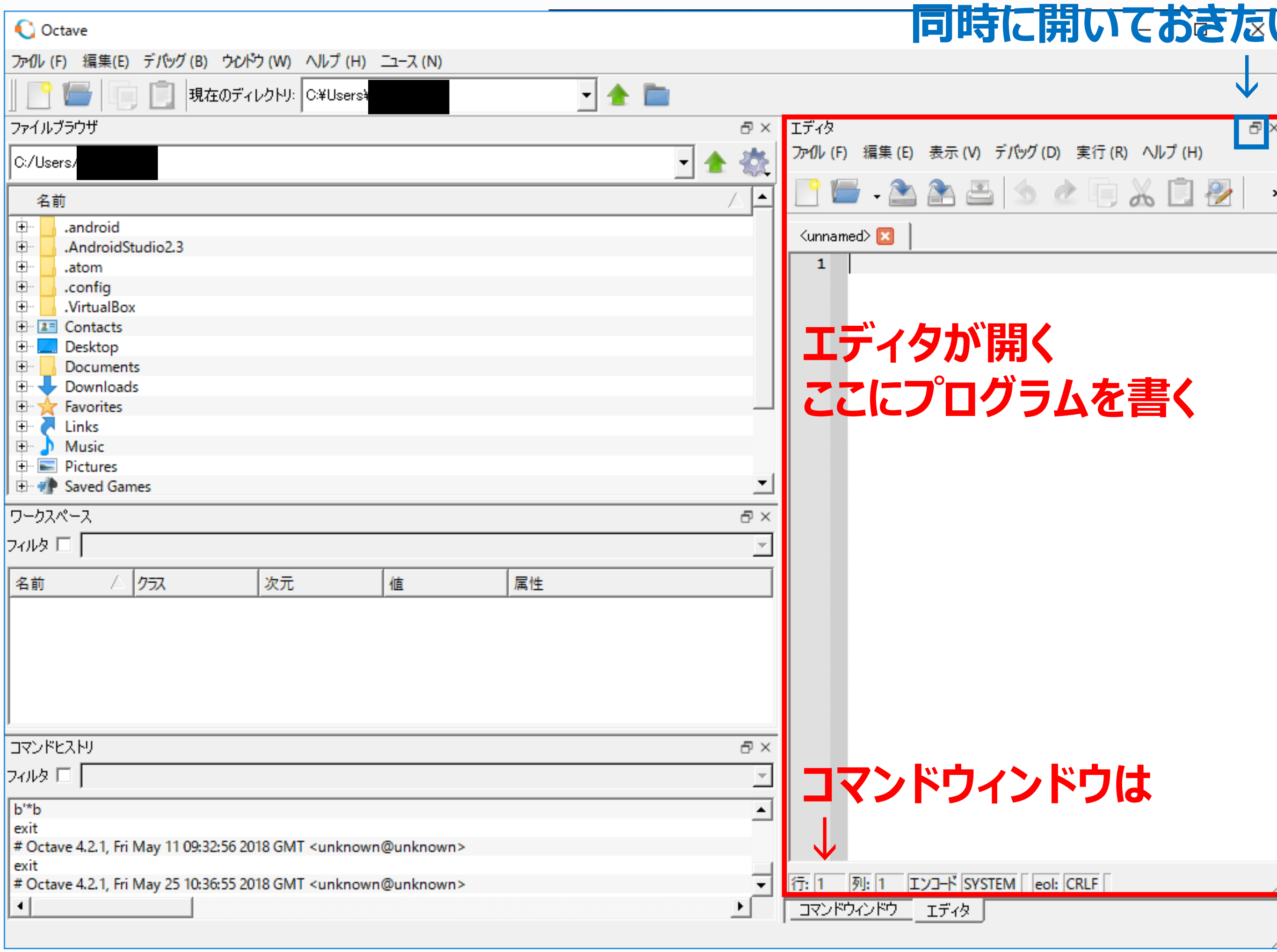
← **連立方程式：「¥」を使うだけ！簡単！**

もちろんプログラミングもできる

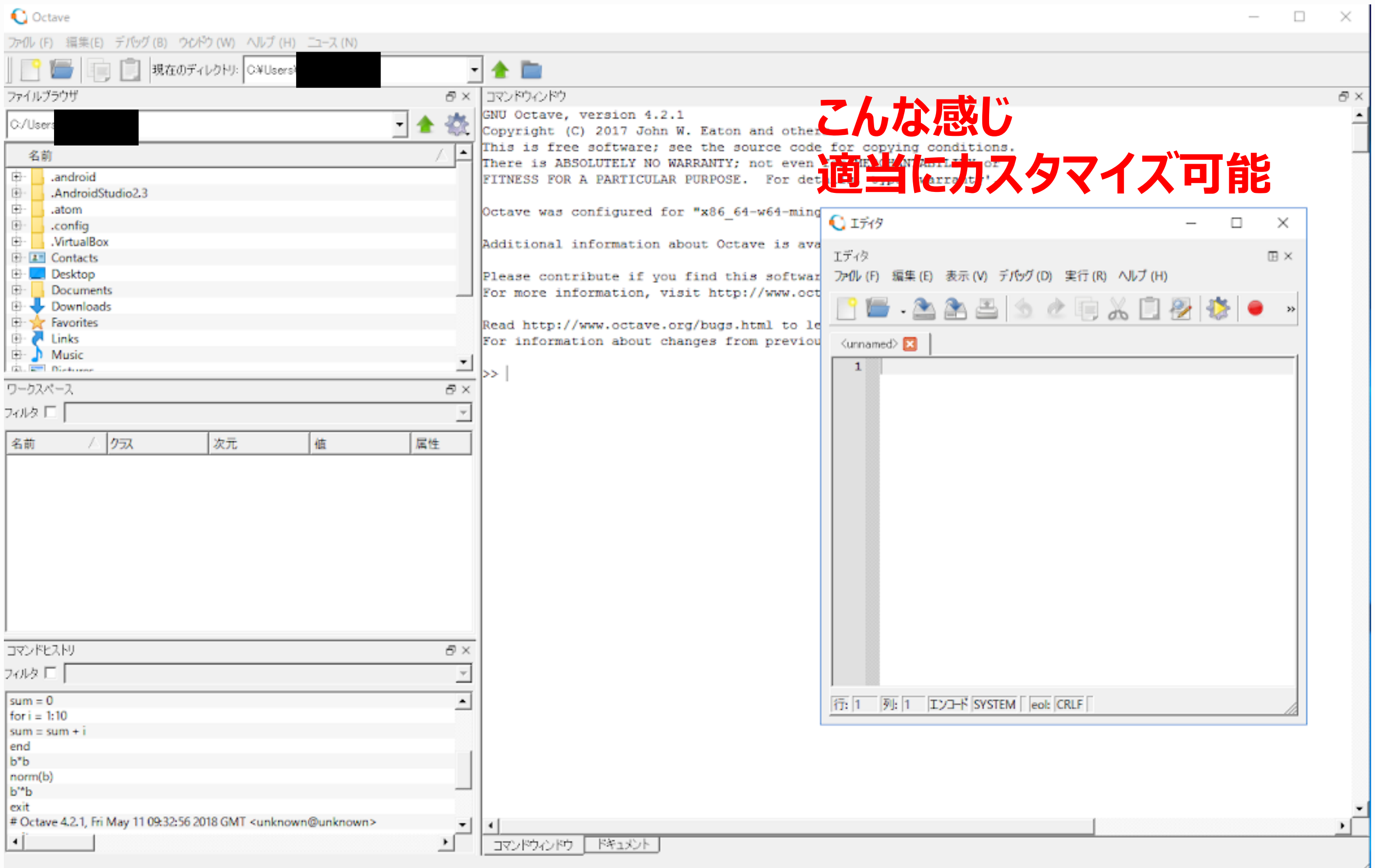


もちろんプログラミングもできる

エディタとコマンドウィンドウを
同時に開いておきたい場合は

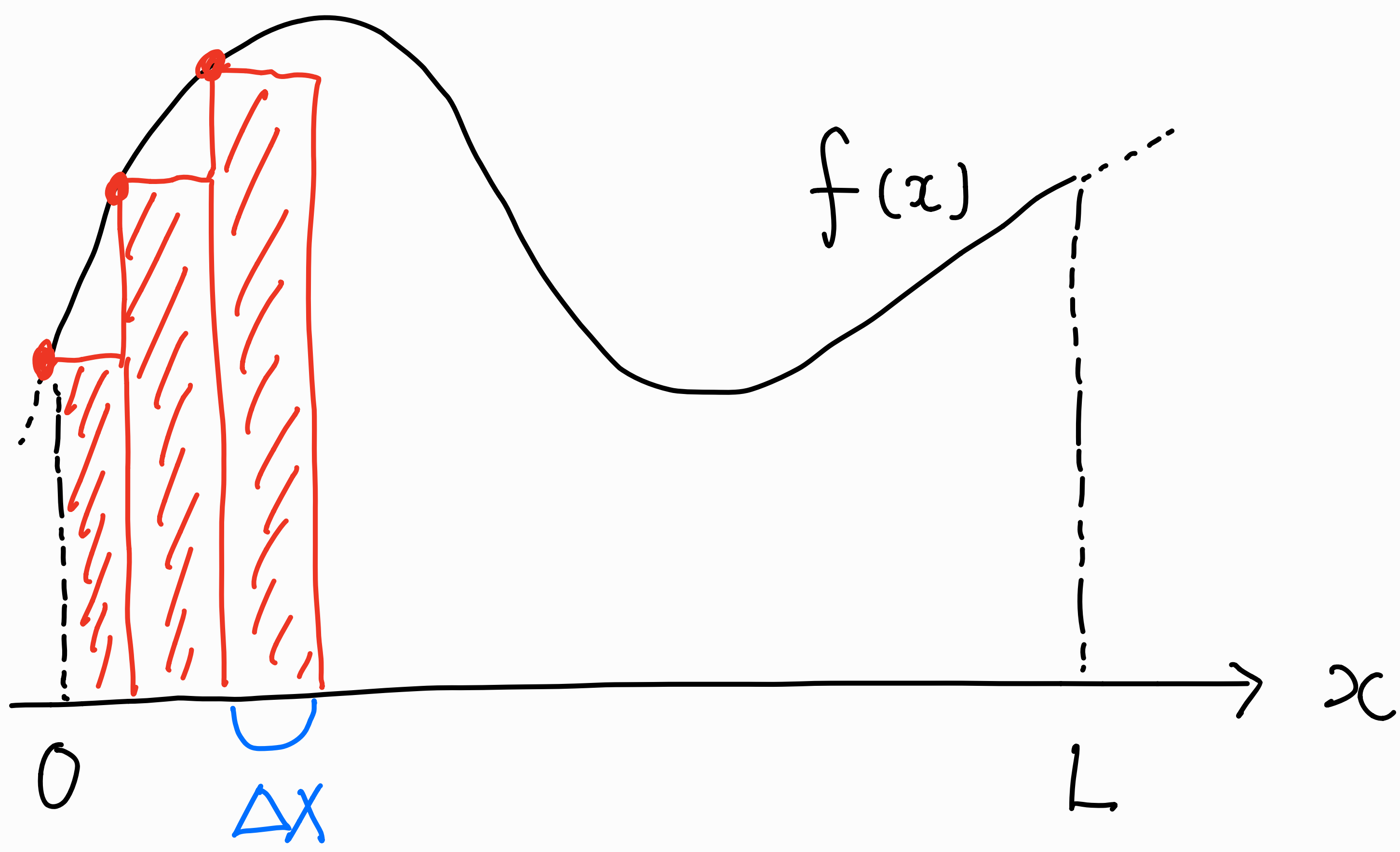


もちろんプログラミングもできる



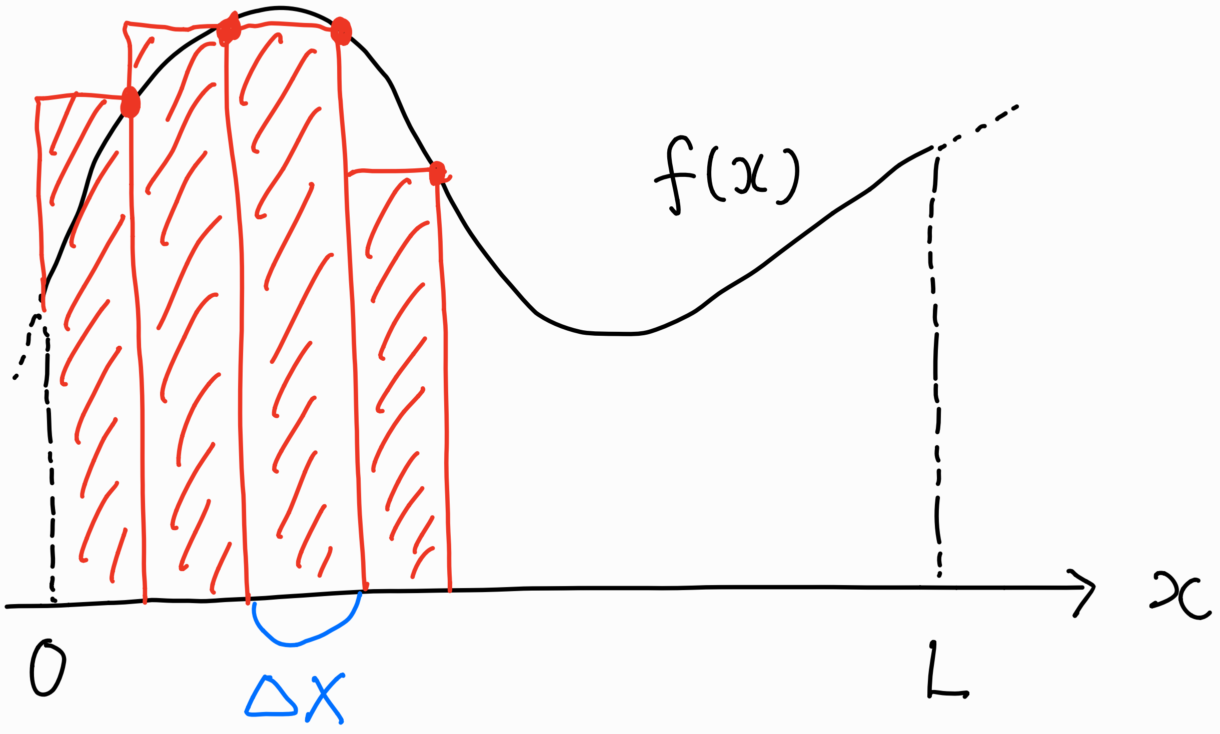
数値積分 Algorithm1

$\int_0^L f(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{N} \Delta x\, f((j-1)\Delta x) \quad (N\Delta x = L)$



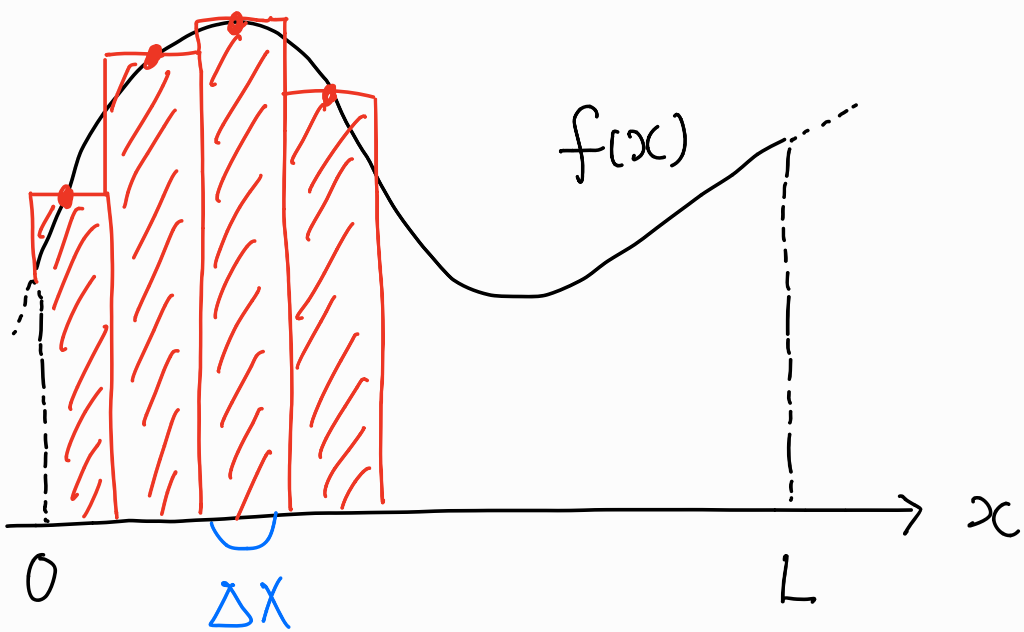
数値積分 Algorithm2

$$\int_0^L f(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{N} \Delta x\, f(j\Delta x) \quad (N\Delta x = L)$$



数値積分 Algorithm3

$$\int_0^L f(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{N} \Delta x\, f((j - \tfrac{1}{2})\Delta x) \quad (N\Delta x = L)$$



Q. どれが一番性質が良い？

$$\int_0^1 cos(x)dx = sin(1)$$ を例に.

```
%% 前のプログラムの情報を消す
clear all
close all

exact = sin(1); % 真値，誤差の計算に用いる
```

型の定義は不要だが，その分，遅い

o1.m


```
%% 空間分割数（刻み幅）の設定

k = 10; % 10パターン考える（値を大きくすると計算時間が増える）
div = zeros(k,1); %分割数を配列で保持，配列は0ベクトルで準備
dx = zeros(k,1); % 刻み幅

for i = 1:k
  div(i,1) = 2^(i-1); % 分割数は，1,2,4,...,2^(k-1)
  dx(i,1) = 1/div(i); % 刻み幅 = 1 / 分割数
end
```

o1.m


```
%% 結果を保存する配列を準備（アルゴリズムは３通り）
%% algorithm 1
Ilvec = zeros(k,1); %数値積分結果を保存する配列
Ilerrorvec = zeros(k,1); %誤差を保存する配列

%% algorithm 2
Irvec = zeros(k,1);
Irerrorvec = zeros(k,1);

%% algorithm 3
Icvec = zeros(k,1);
Icerrorvec = zeros(k,1);
```

o1.m


```
%% algorithm 1
function [val, err] = algo1(h,num,exact)
%引数は，刻み幅，分割数，真値．戻り値は，値と誤差．
  val = 0;
  for j = 1:num
    val += h*cos(h*(j-1)); % 数値積分
  end
  err = abs(exact-val); % 誤差の計算
end
```

Algo2と3もうめる.

o1.m

```
%% 数値積分
for i = 1:k

  [Ilvec(i,1),Ilerrorvec(i,1)] = algo1(dx(i,1),div(i,1),exact);
  [Irvec(i,1),Irerrorvec(i,1)] = algo2(dx(i,1),div(i,1),exact);
  [Icvec(i,1),Icerrorvec(i,1)] = algo3(dx(i,1),div(i,1),exact);

end
```

できた人は

- 積分区間や被積分関数を変更していろいろ試してみよう
- 実際のところ，今日紹介した数値積分は精度が悪く
  応用ではあまり使われない.
  →書籍やwebで別の方法を調べて試してみよう

今日の内容

- 先週の復習：数値積分の基礎（の基礎），数値積分
- **Fourier級数展開**

フーリエ級数展開

やりたいこと

$f(x),\ x \in (-\pi, \pi)$ を 三角関数を使った無限級数で近似

つまり

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

Q. 係数$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$をどう定めればよいか？

フーリエ級数展開（続き）

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

右辺の部分和を$S_n(x)$とする：

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$$

次の性質が成り立つように定める：

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 dx = 0$$

フーリエ級数展開（続き）

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

直ちにわかること：

奇関数 $\Rightarrow a_k = 0$ （sin 関数だけで展開できる）

偶関数 $\Rightarrow b_k = 0$ （cos 関数だけで展開できる）

理由（証明ほど厳密ではない）

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

≈を=だとして両辺に$\sin(ix)$をかけて区間$(-\pi, \pi)$で積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(ik) dx$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ik)\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ix) \cos(kx)\, dx$$

$$+ \sum_{k=1, k \neq i}^{\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ix) \sin(kx)\, dx + b_i \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(ix) dx$$

$$= \pi b_i$$

青い積分 = 0

o2.m

$f(x) = x, x \in (-\pi, \pi)$を例に

$f(x)$ と$S_n(x)$ をプロットするプログラム

```
%% 元の関数
function y = original_func (x)
   y = x;
end
% 奇関数なのでsin関数の重ね合わせだけで表現できる
```

o2.m（続き）

```
%% パラメータなど

x = [-pi:pi/1000:pi];

%[a:b:c]で[a,a+b,a+2b,a+3b,...,c]というベクトルを表現

n = 100; % sin(nx)まで級数を求める

b = zeros(n,1); % 係数保持ようの配列
```

o2.m（続き）


```
%% フーリエ級数：係数の計算
for k = 1 : n
  b(k,1) = 1/pi * quad(@(x) x * sin(k*x),-pi,pi);
end
% quad(f(x),a,b) は f(x) を区間[a,b]で数値積分
% 「@(x) xの関数」で関数を定義したことになっている（無名関数）
% もちろん，厳密に計算できる場合は，そうした方がよい
```

o2.m（続き）


```
%% フーリエ級数：実際の級数

function y = fourier_func(x,n,b)

  y = 0;

  for i = 1 : n

    y += b(i,1) * sin(i*x);

  end

end
```

課題

- nを色々と変えてみて収束の雰囲気を実感する
- プログラムを少し修正し
$$err(n) := \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 dx$$
を横軸nとしてプロットし，収束を確かめる
- $\sup_{x \in (-\pi, \pi)} |f(x) - S_n(x)|$ は収束するか？
(要するに一様収束しているか？)
- 他の関数（例えば$f(x) = x^2$）でも試してみる
(不連続関数でもよい)

小レポート

- 提出先：miyatake@cas.cmc.osaka-u.ac.jp
  件名：ExpMath1:no2　（数字は半角・スペース無）
- 内容（分量はA4で1ページ程度）
  - 授業のまとめ
  - 困っていること
  - 自習で書いたプログラム，講義の要望 など
  - 前頁の課題（できた人）
- 書式は自由
- 締切：**来週**の**金曜** (**6/14**) **24時**

来週 6/14 は休講です