問 1：

(b)：$x_{n+2} = \frac{7}{3}x_{n+1} - \frac{2}{3}x_n \quad x_0 = 2,\ x_1 = \frac{2}{3}$

3x^2-7x+2=0 を解くと 解は x=1/3, 2

$x_{n+2} - \frac{1}{3}x_{n+1} -= \frac{6}{3}x_{n+1} - \frac{2}{3}x_n = 2(x_{n+1} - \frac{1}{3}x_n)$ より

X1 — (1/3)X0 = 0 なので、Xn+1=(1/3)Xn

つまり $X_n = 2(\frac{1}{3})^n$

(c): (b)から 第 1 項は 2/3, 第 2 項は 2/9, 第 3 項は 2/27,

第 4 項は 2/81, 第 5 項は 2/243 となる。以下は(a)を実行したもの。

```
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  1
a_1 = 0.666667
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  2
X_2 = 0.222222
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  3
X_3 = 0.074074
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  4
X_4 = 0.024691
[kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  5
X_5 = 0.008230
```

しかし

```
kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  32
X_32 = 0.000000
kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  33
X_33 = 0.000000
kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  34
X_34 = 0.000001
kanoumoacBookea:ExpMath1_report_1 kanoumotoharu$ ./a.out
0を含めて自然数を入力してください：  100
X_100 = 58386145124537.234375
```

任意の自然数で Xn<Xn-1 であるから、プログラム上で Xn<0 となる n が存在して、n<k の k に対して{Xn}は単調増加になって Xk<Xk+1 となっていると考察しました。

問２：

２からＮまでの素数を探索するとする

１、

２からＮまでの整数をリスト（以下Ａと呼ぶ）に降順で入れる

２、

Ａの先頭の数をＡとは別のリスト（以下Ｂと呼ぶ）に移動させる

その数の倍数の数をＡから取り除く

３、

２の作業をＡの先頭の数がＮの平方根の達するまで行う

４、

Ａに残った整数をＢに全て移動させる

計算量はｐを素数として

$$\sum_{p<\sqrt{N}} \frac{N}{p} = \frac{N}{2} + \frac{N}{3} + \frac{N}{5} + \frac{N}{7} \cdots$$

と表せる。

問3：

問3.

(a)

Aの列ベクトル $a_1, a_2, \dots, a_n$ とする.

グラムシュミットの直交化法を応用し

$$a_k' = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k \cdot b_i) b_i$$

$$b_i = \begin{cases} \dfrac{a_i'}{|a_i'|} & a_i' \neq 0 \text{ のとき} \\ 0 & a_i' = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とする

$b_1, \dots, b_n$ のうち $0$ であるものを

$B = (b_1, \dots, b_n)$ が直交行列になるように入れ換える

その行列を $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

$$(a_1, \dots, a_n) = (a_1', a_2' + (a_2 \cdot b_1) b_1, \dots, a_n' + (a_n \cdot b_1) b_1 + \dots + (a_n \cdot b_{n-1}) b_{n-1})$$

$$= (b_1, b_2, \dots, b_n) \begin{pmatrix} |a_1'| & (a_2 \cdot b_1) & (a_3 \cdot b_1) & \cdots & (a_n \cdot b_1) \\ 0 & |a_2'| & (a_3 \cdot b_2) & \cdots & (a_n \cdot b_2) \\ \vdots & & |a_3'| & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & |a_n'| \end{pmatrix}$$

$$= (q_1, \dots, q_n) R$$

$R$ とおく

（※ Bの中の $b_i = 0$ にかかる $R$ の部分は $R$ の $i$ 行だが $b_i = 0$ のとき $R$ の $i$ 行は すべて $0$ になるから）

より $Q$ 直交行列 $R$ 上三角行列とし

$A = Q \cdot R$ と書ける

(b)

$A$が正則のとき　　$\mathbb{B}$は正規直交行列となるから

(a)において $b_i = 0$となることが無くなるので

$Q$を$B$とみてれから

$$(a_1, \cdots, a_n) = (b_1, \cdots, b_n)\begin{pmatrix} |a_1| & \cdots & (a_n \cdot b_1) \\ & \ddots & (a_i \cdot b_{n-1}) \\ & & |a_n| \end{pmatrix}$$ （$Q$を$B$としよく。

$$= \mathbb{B} \cdot R \quad \text{とかける}$$

またこのとき$Q'$は直交行列、$R'$上三角行列として

$A = Q'R'$とかけたとする

$\mathbb{B}R = Q'R'$

$$\left((a_1|b_1, (a_2 \cdot b_1)b_1 + |a_2|b_2, \cdots, (a_n \cdot b_1)b_1 + \cdots + (a_n \cdot b_{n-1})b_{n-1} + (a_n)b_n\right)$$

$$= (r'_{11}q'_1, r'_{12}q'_1 + r'_{22}q'_2, \cdots, r'_{1n}q'_1 + \cdots + r'_{nn}q'_n)$$

よって
$$\begin{cases} |a_1|b_1 = r'_{11}q'_1 & -① \\ (a_2 \cdot b_1)b_1 + |a_2|b_2 = r'_{12}q'_1 + r'_{22}q'_2 \\ \vdots \\ (a_n \cdot b_1)b_1 + \cdots + |a_n|b_n = r'_{12}q'_1 + \cdots + r'_{nn}q'_n \end{cases}$$

$\mathbb{B}$, $Q'$は正規直交行列なので

①より $b_1 = q'_1$　$|a_1| = r'_{11}$

①②より $(a_2 \cdot b_1) = r'_{12}$, $|a_2| = r'_{22}$, $b_2 = q'_2$

このように考えると

$\mathbb{B} = Q'$

$R = R'$となる

つまり(2)の分解は一意的

(c) $A_k = R_{k-1}Q_{k-1} = Q_k R_k$を考える

$A_{k-1} = R_{k-2}Q_{k-2} = Q_{k-1}R_{k-1}$より

$R_{k-1} = Q_{k-1}^{-1}A_{k-1}$だから

$A_k = R_{k-1}Q_{k-1}$

$= Q_{k-1}^{-1}A_{k-1}Q_{k-1}$

$A_{k-1} = Q_{k-2}^{-1}A_{k-2}Q_{k-2}$, $A_{k-2} = Q_{k-3}^{-1}A_{k-3}Q_{k-3}$ …より

$A_k = Q_{k-1}^{-1}Q_{k-2}^{-1} \cdots Q_1^{-1}Q_0^{-1}A_0Q_0Q_1 \cdots Q_{k-2}Q_{k-1}$

とできる

$Q_i$は正規直交行列だから

$Q_i^{-1} = Q_i^{\top}$となる

$Q = Q_0Q_1 \cdots Q_{k-1}$とおくと

$Q^{\top} = Q_{k-1}^{\top}(Q_0 \cdots Q_{k-2})^{\top}$

$= Q_{k-1}^{\top}Q_{k-2}^{\top}(Q_0 \cdots Q_{k-3})^{\top} =$

$= Q_{k-1}^{\top}Q_{k-2}^{\top} \cdots Q_2^{\top}Q_1^{\top}Q_0^{\top}$

$= Q_{k-1}^{-1}Q_{k-2}^{-1} \cdots Q_0^{-1}$　より$Q$は直交行列

であるから

$A_k = Q^{\top}AQ$　とかける

続き

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} = (q_1, \ldots, q_n)$$

$$A_k = Q^T A Q$$

ここで

$$|xE_n - A_k| = |xE_n - Q^T A Q|$$
$$= |Q^T xE_n Q - Q^T A Q|$$
$$= |Q^T||xE_n Q - AQ|$$
$$= |Q^T||xE_n - A||Q|$$
$$= |Q^T||Q||xE_n - A|$$
$$= |xE_n - A|$$

$Q^T Q = 1$ より

$xE_n Q = xQ$

$Q^T x Q = x Q^T Q$

$= xE_n$ よって

$Q^T xE_n Q = xE_n$ なので

$|Q^T||Q| = 1$ より

よって $|xE_n - A| = 0$ の根と

$|xE_n - A_k| = 0$ の根は一致する.