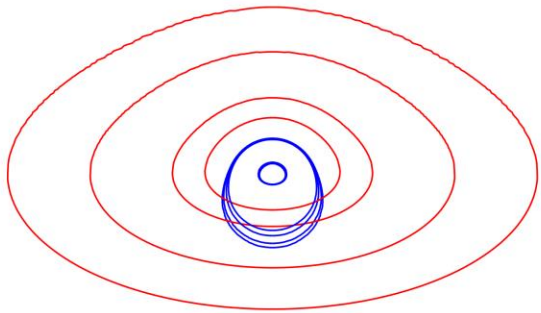


高密度コアモデルにおける降着円盤の像

理論研究室 20041054 大豆生田幹

[arXiv: 2502.11755](https://arxiv.org/abs/2502.11755)



導入

大輪講の発表では、ブラックホールを表す時空であるシュバルツシルト時空において、発光する円盤（降着円盤）のイメージングを行なった。

卒業研究では、中心領域に高密度の物質場が分布するモデル（高密度コアモデル）を与えるブハダール時空において降着円盤のイメージングを行った。

本研究の意義

シュバルツシルト時空は中心が曲率特異点、シュバルツシルト半径がホライズンになっていた。

これに対しブハダール時空は、中心付近でブラックホールのような強い重力場の性質を示しつつも、曲率特異点やホライズンを持たない。

この時空で像を考えることは、現在観測されている超大質量天体における時空構造の可能性を追求する、という意味で重要である。

ホライズン（事象の地平面）：光すらも抜け出すことができない内部領域との境界面

ブハダール時空

ブハダール時空の線素は以下のように与えられる

光速度 $c = 1$

重力定数 $G = 1$

$$ds^2 = -\frac{(1-f)^2}{(1+f)^2}dt^2 + (1+f)^4 dr^2 + r^2(1+f)^4 d\theta^2 + r^2(1+f)^4 \sin^2 \theta d\phi^2$$

$$f(r) = \frac{a}{2\sqrt{1 + a^2 r^2 / M^2}}$$

M : 時空全体にわたるコアの質量 (全質量)

a : 質量集中の度合い (コンパクトネス)

$r < M/a$ の領域に全質量の 70% が密集している。

a は $0 < a \leq 1.5$ の範囲で物理的に妥当な性質を示す。

光の運動における作用と保存則

ブハダール時空は球対称なので、光の軌道はひとつの平面に拘束される。
 $\theta = \frac{\pi}{2}$ に着目することにとすると光子の運動における作用はパラメータ λ

を用いて下のように書ける

$$S = \int \mathcal{L} d\lambda = \int \frac{1}{2} \left(-\frac{(1-f)^2}{(1+f)^2} \dot{t}^2 + (1+f)^4 \dot{r}^2 + r^2 (1+f)^4 \dot{\phi}^2 \right) d\lambda$$

オイラーラグランジュ方程式より

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = 0 \quad \therefore E = \frac{(1-f)^2}{(1+f)^2} \dot{t} \quad \text{エネルギー保存則}$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \quad \therefore L = r^2 (1+f)^4 \dot{\phi} \quad \text{角運動量保存則}$$

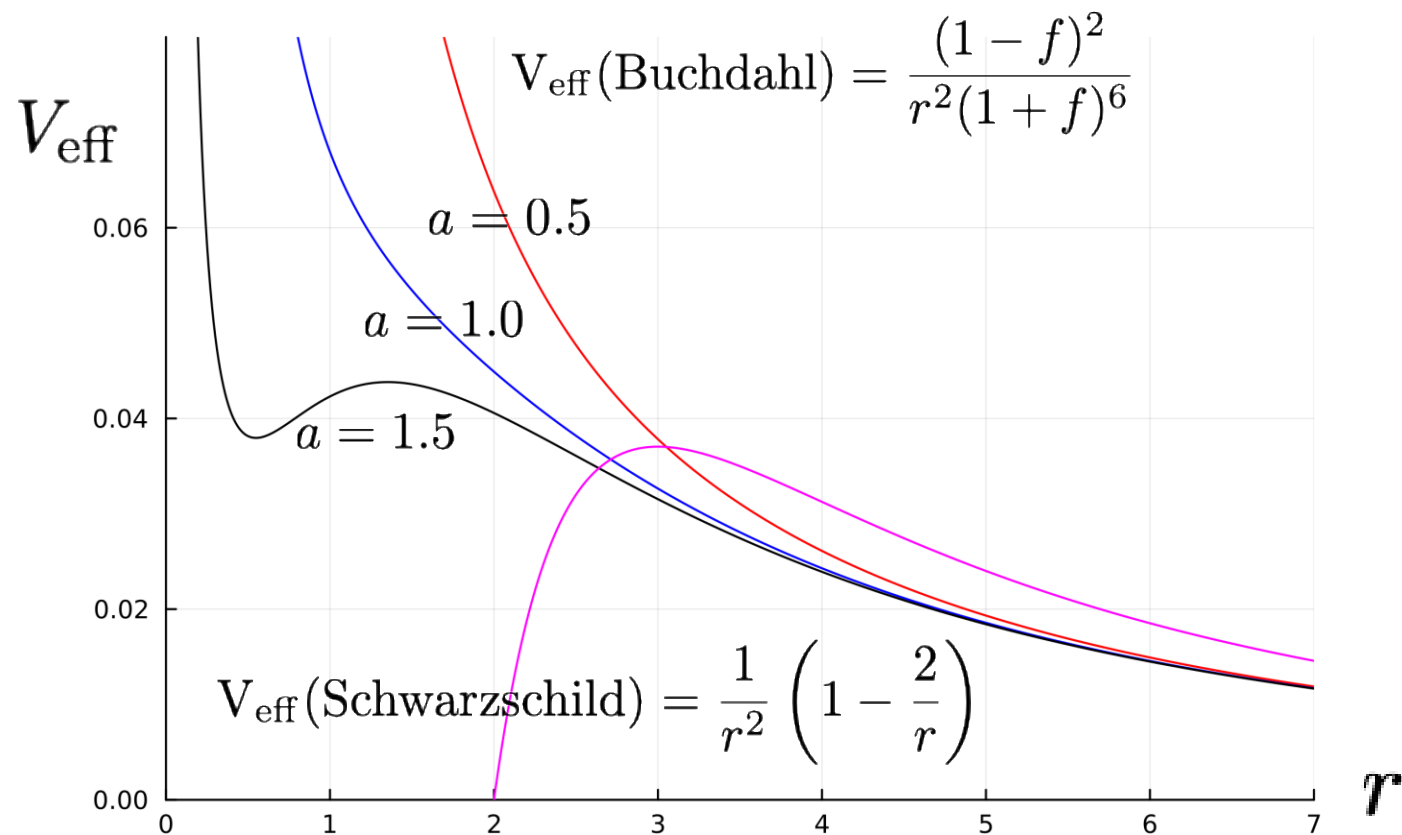
ブハダール時空における光の軌道方程式

null条件 $g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0$ と、衝突係数 $b = \frac{L}{E}$ とおけば

軌道方程式
$$\frac{1}{b^2} = \frac{(1-f)^2}{r^4(1+f)^6} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + V_{\text{eff}}$$

有効ポテンシャル
$$V_{\text{eff}} = \frac{(1-f)^2}{r^2(1+f)^6}$$

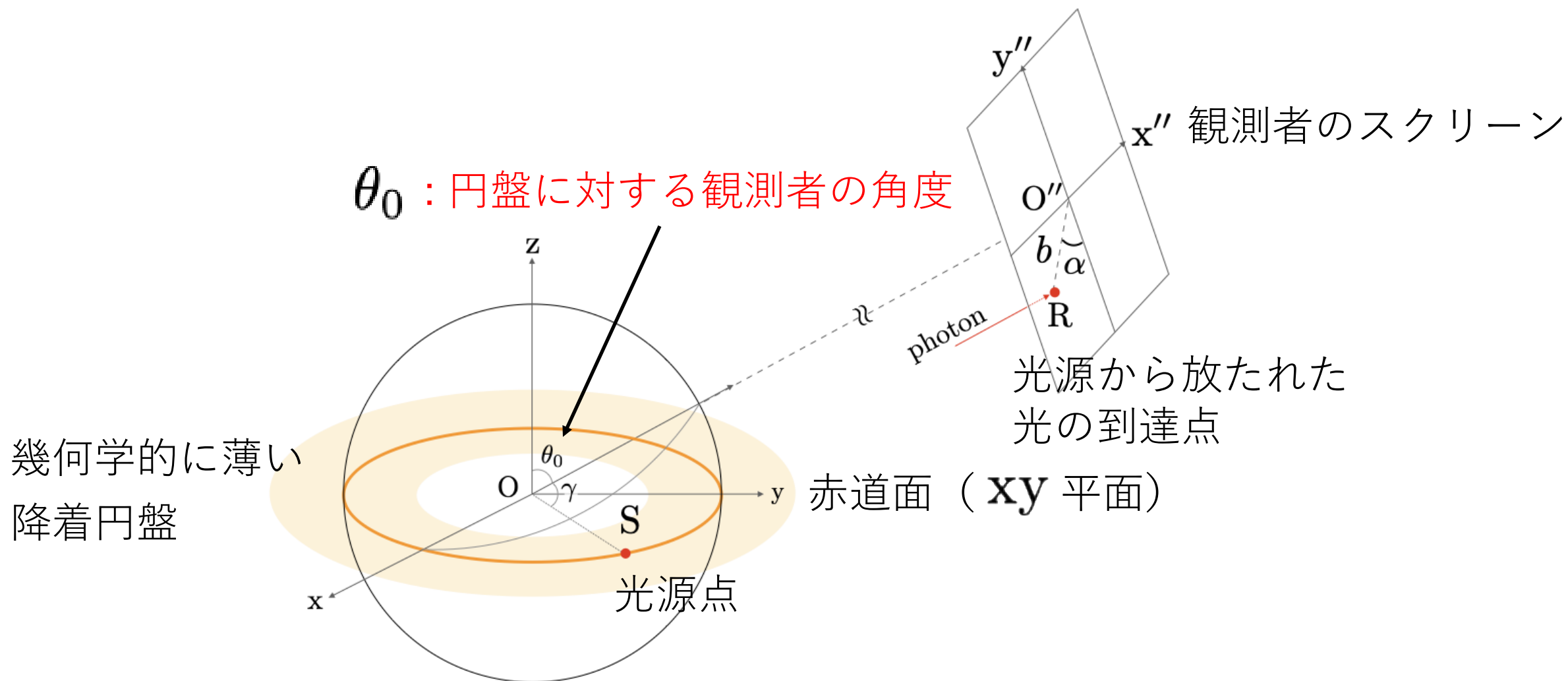
有効ポテンシャル



以降 $M = 1$

$a = 1.5$ の時、ブハダール時空の有効ポテンシャルも極大点を持つ。
これは光が不安定円軌道を持つことを意味している。

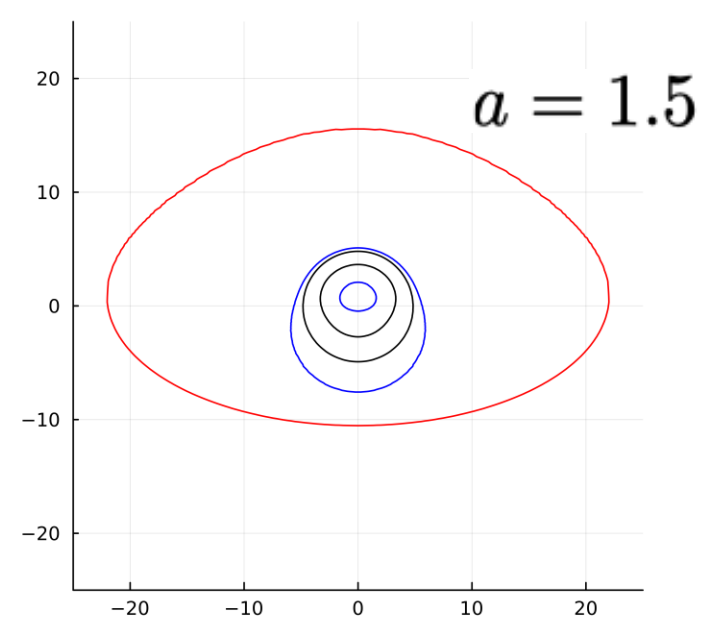
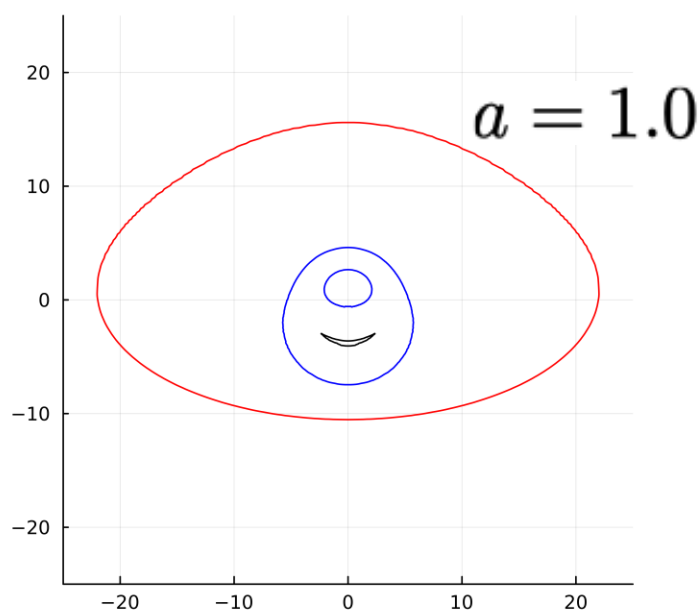
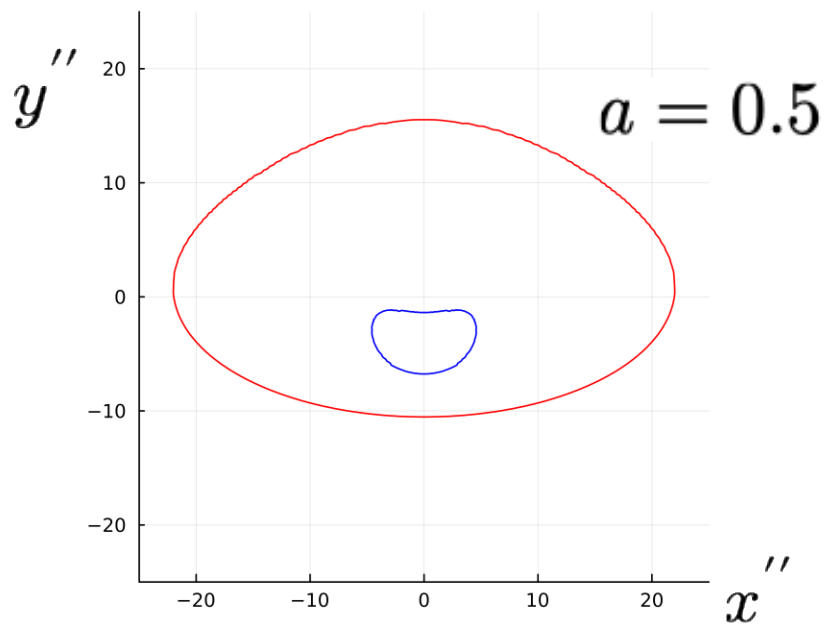
観測者と降着円盤の座標設定



降着円盤における $r = 20M$ のリングがスクリーンに写し出される像を考える。

結果・考察

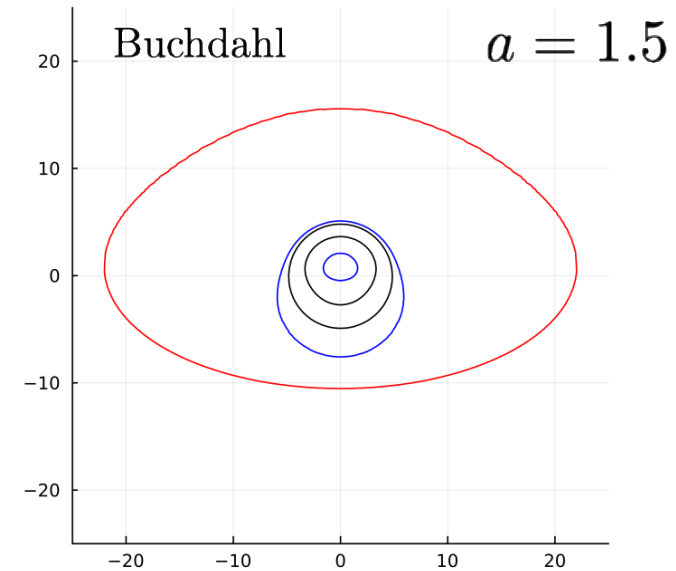
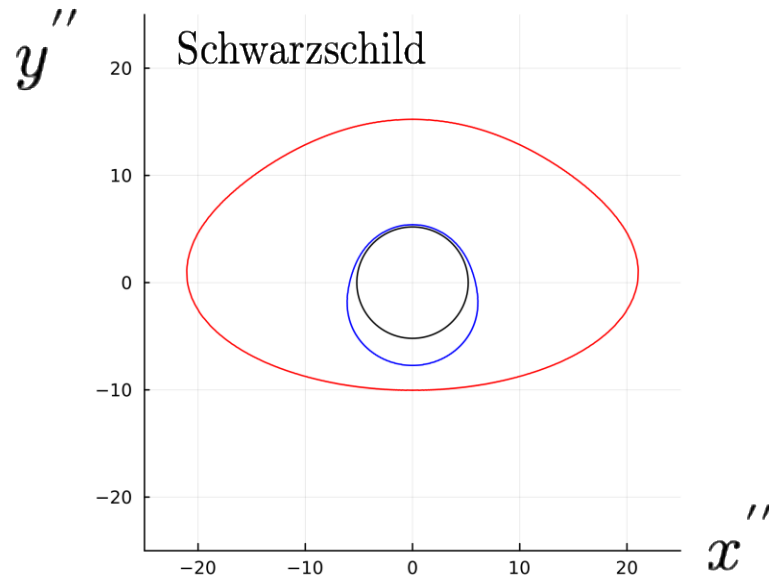
作成した像



$\theta_0 = 60^\circ$

a	0次像 (赤)	1次像 (青)	2次像 (黒)
0.5	1重	1重	—
1.0	1重	2重	1重
1.5	1重	2重	2重

シュバルツシルト時空との比較

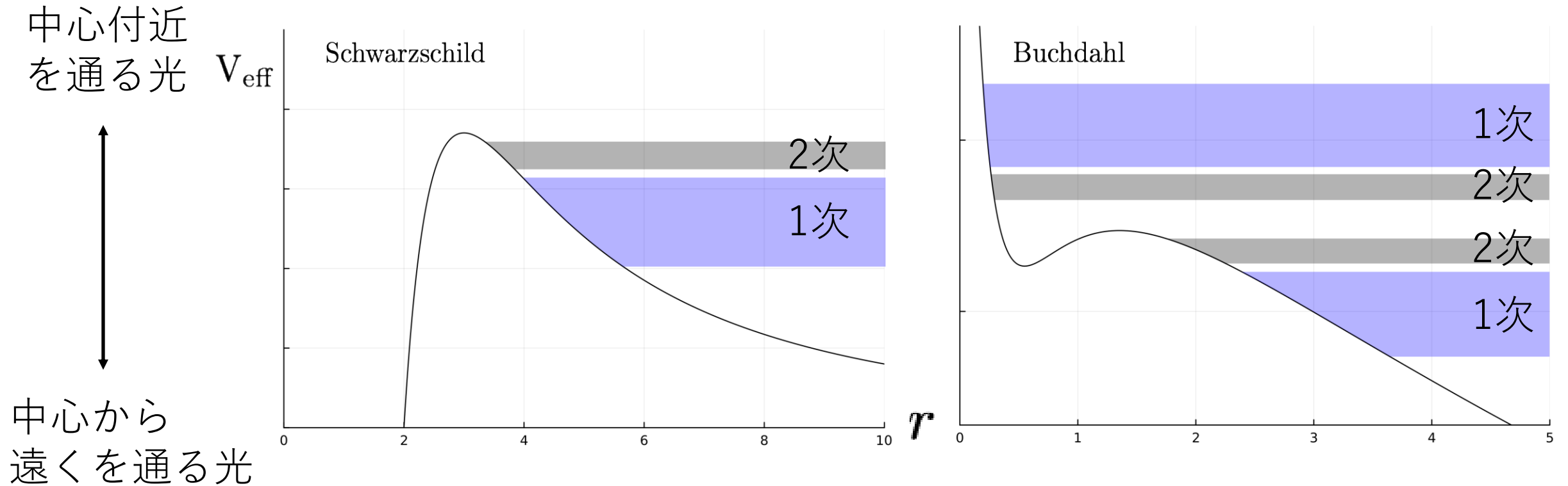


シュバルツシルト時空では、**すべての色が1重**に見えている。

ブハダール時空では、**1次像（青線） 2次像（黒線） が2重**に見えている。

それぞれの像は次数に限りがないが、2次までしか見せていない。

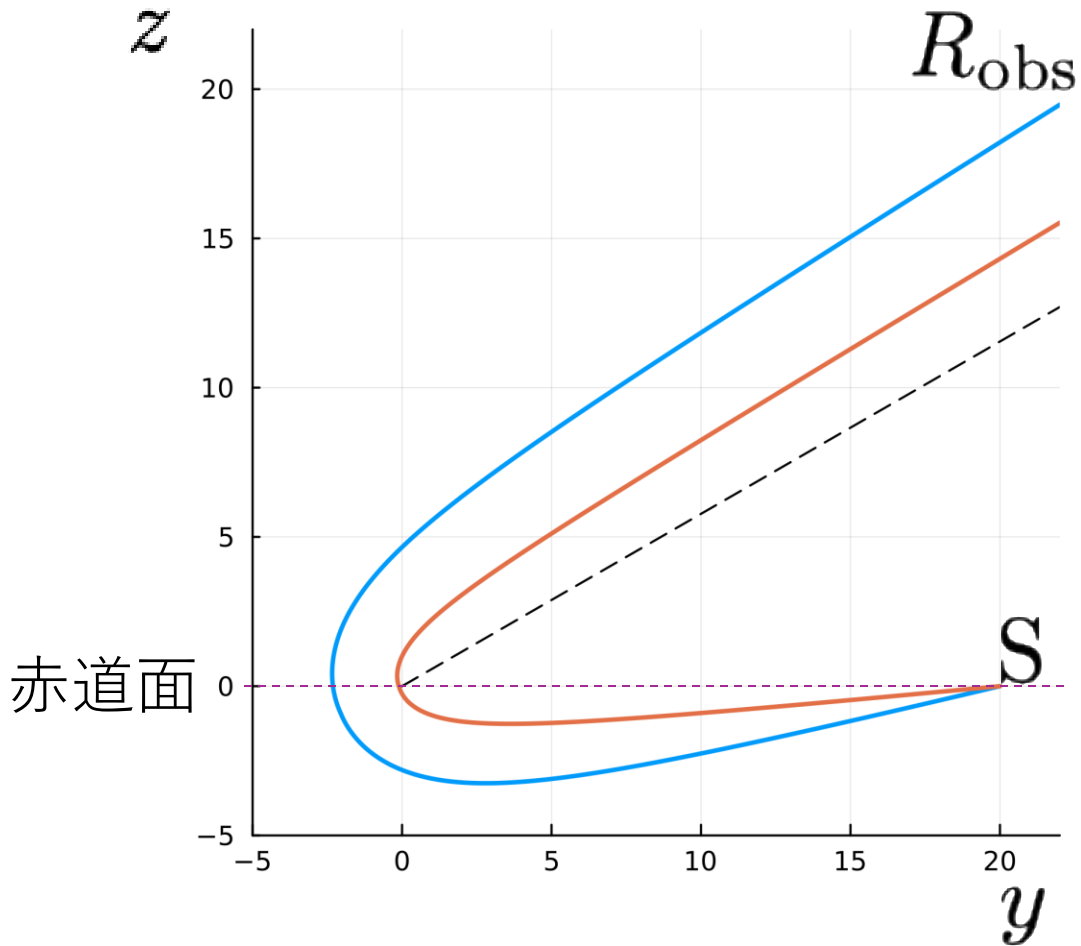
2重像が現れる原因



1次、2次の像が作成される光を描くと上のようになった。

シュバルツシルト時空では中心付近を通る光は中心に落ち込み、
ブハダール時空では中心付近を通る光も散乱されて観測者に届く。

2重に見える光はどのような軌跡になっているか

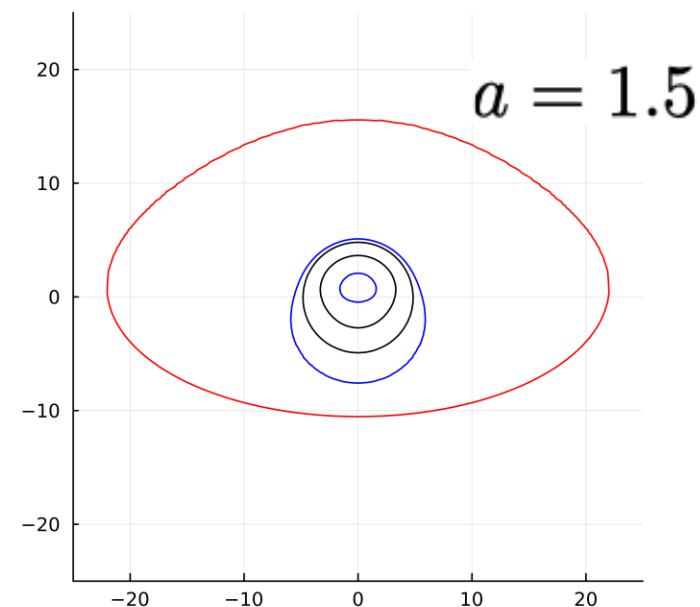
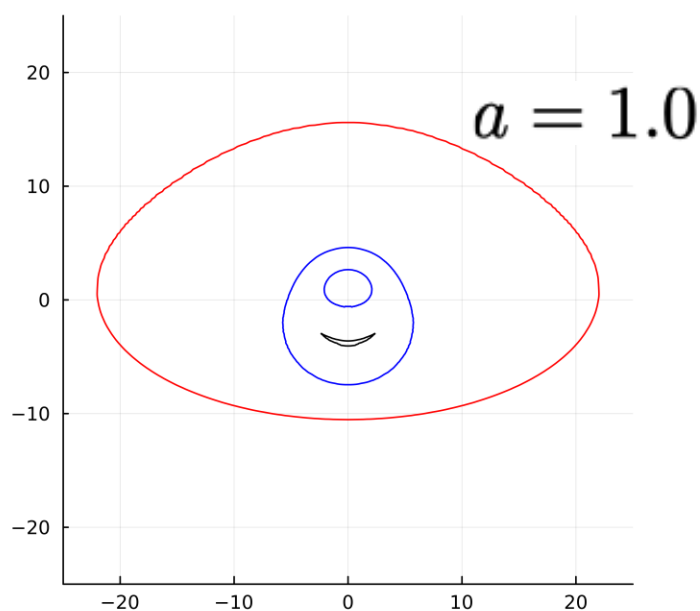
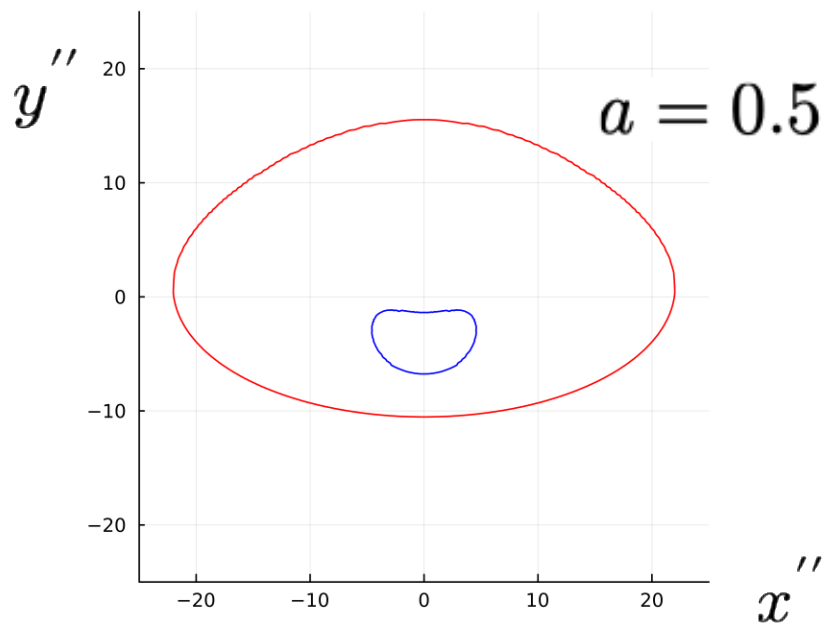


ブハダール時空において、ある点 S から放たれた光が描く軌道は左図のようになった。

この図は1次の像を作る光の軌跡を示しており、**軌道が2つある**ことが確認できる。

シュバルツシルト時空では、**中心付近を通る赤の軌道が実現しない**。

コンパクトネスによる像の変化



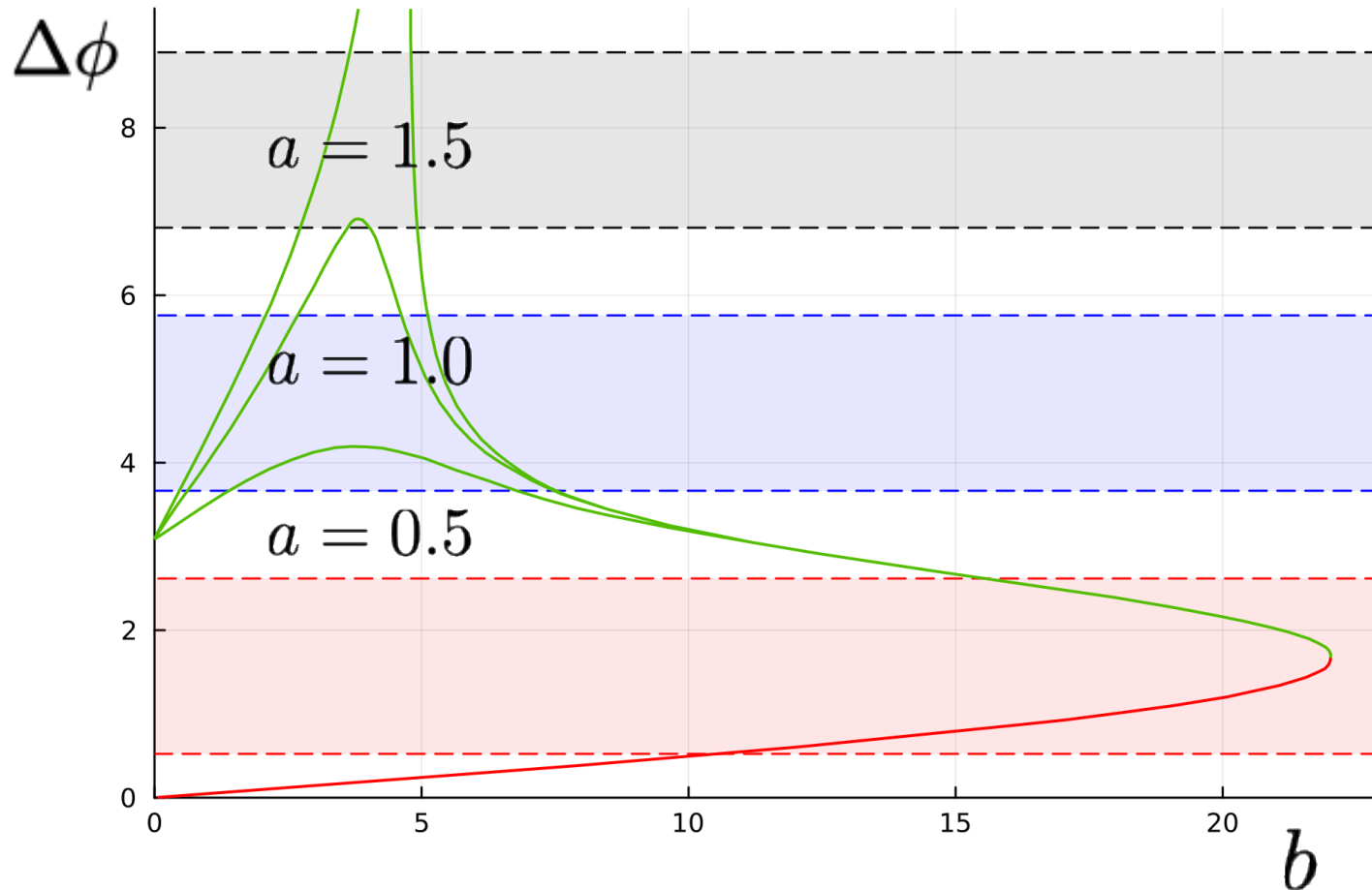
a	0次像 (赤)	1次像 (青)	2次像 (黒)
0.5	1重	1重	—
1.0	1重	2重	1重
1.5	1重	2重	2重

a が小さくなるにつれ、見える像は減ってゆく

見える像が減ってゆく原因

$$\theta_0 = 60^\circ$$

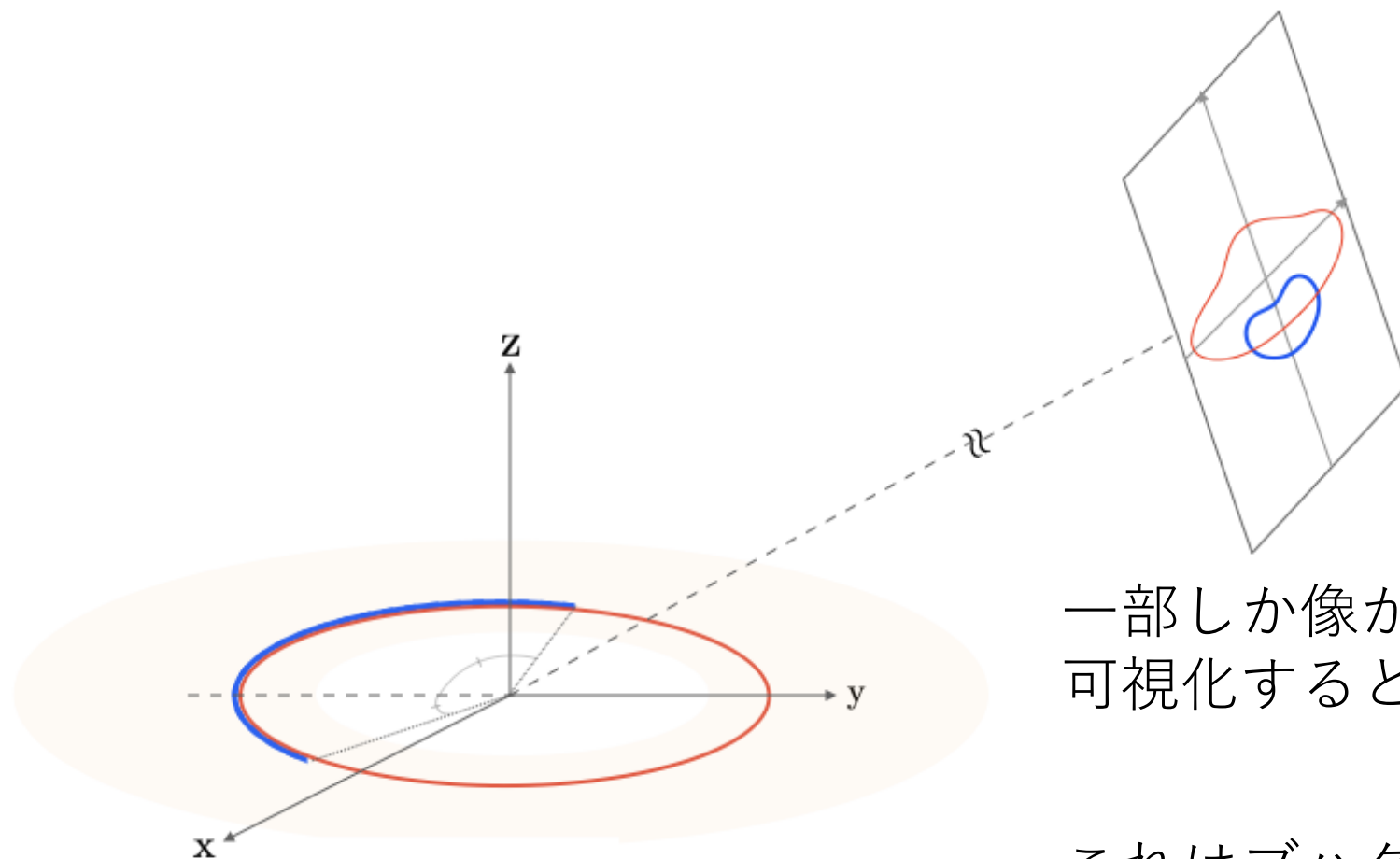
$\Delta\phi$ 光がスクリーンに届くまでに回る角度



赤・青・黒のバンドは、それぞれ0次・1次・2次のリング全体像が見える $\Delta\phi$ 範囲を示している。

$a = 1.0$ では黒のバンドの
 $a = 0.5$ では青のバンドの一部でしか値をとらないので、リングの一部しか像は現れない。

リングが一部分しか観測されない状況の可視化



一部しか像が現れないような状況を可視化すると左図のようになる。

これはブハダール時空に現れる特徴的な状況である。

まとめ

測地線方程式とnull条件を用いて、光の軌道が満たすべき微分方程式を導出し、ブハダール時空における降着円盤の像を作成した。

作成した像とシュバルツシルト時空の像を比較することで、時空構造の違いが高次の2重像として現れることを見た。

コンパクトネスを表すパラメータ a による像の変化を調べ、ブハダール時空における特徴的な状況を解析し、リングの高次像が観測できないようになる、ということがわかった。

この結果はブラックホールとの区別ができるため、高解像度の観測に対して新たな洞察を与えることができる。

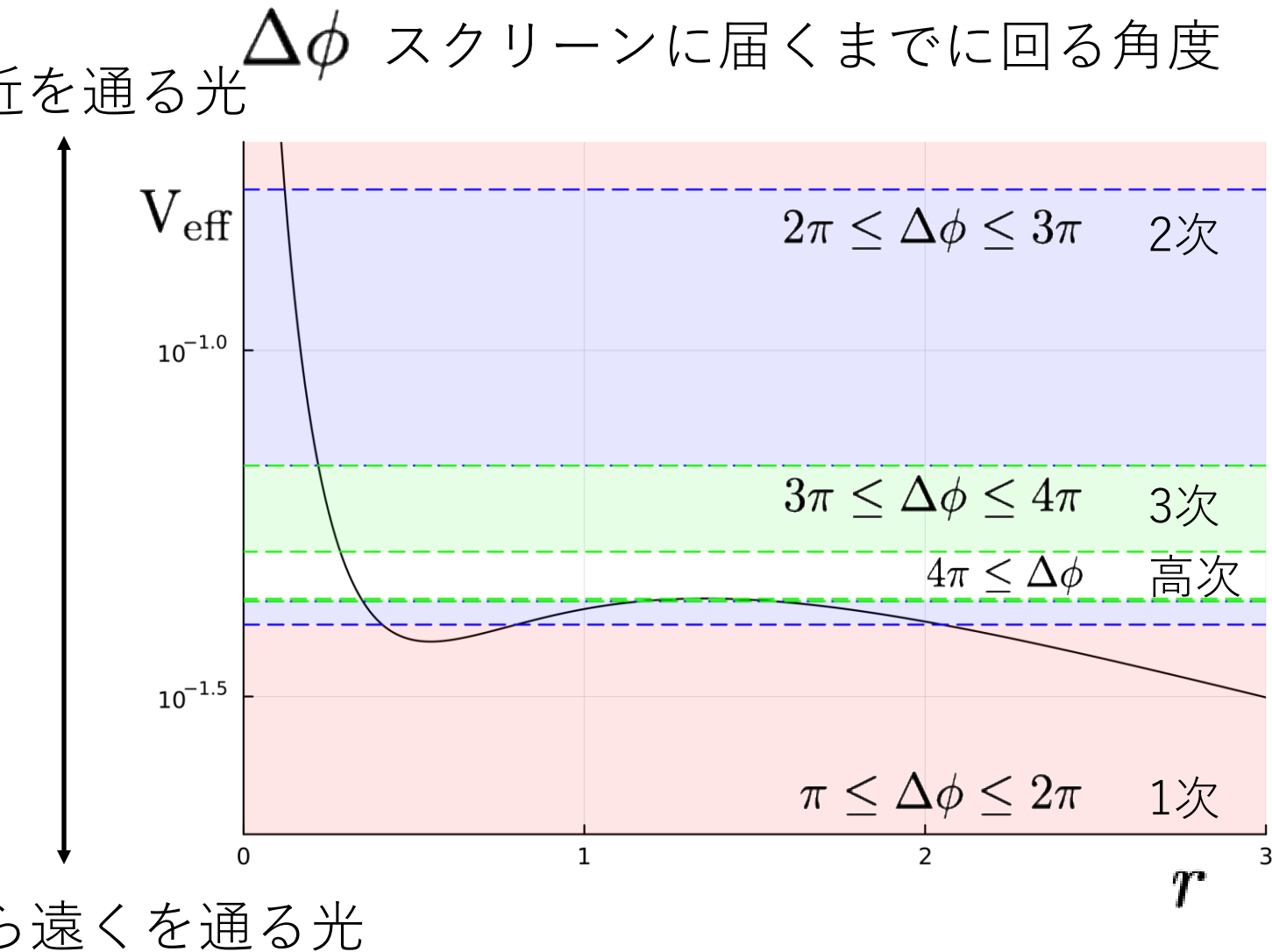
作成された像

a	0次像 (赤)	1次像 (青)	2次像 (黒)
0.5	1重	1重	
1.0	1重	2重	1重
1.5	1重	2重	2重

作成された像

a	0次像 (赤)	1次像 (青)	2次像 (黒)
0.5	1重	1重	
1.0	1重	2重	1重
1.5	1重	2重	2重

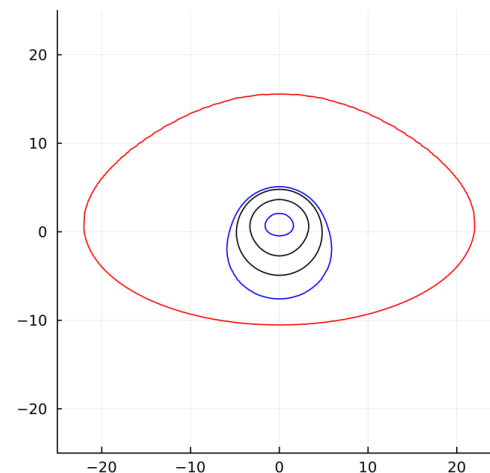
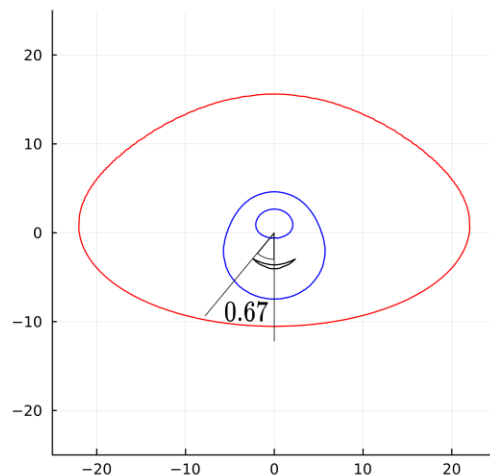
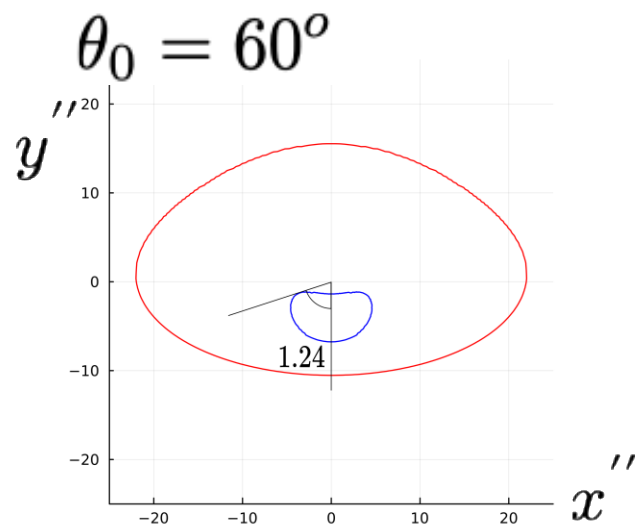
2重像が現れる原因



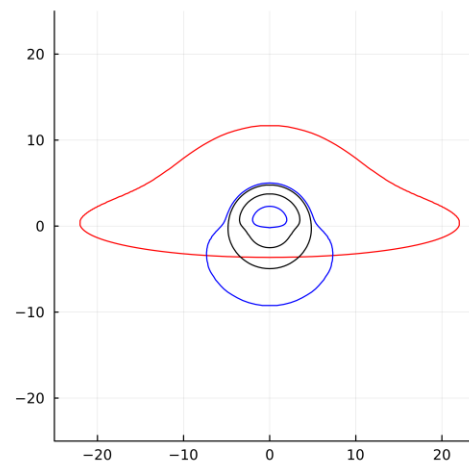
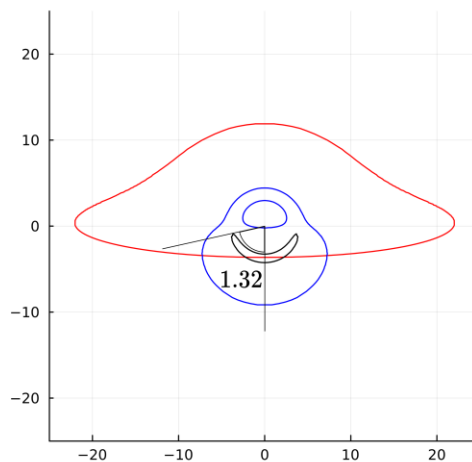
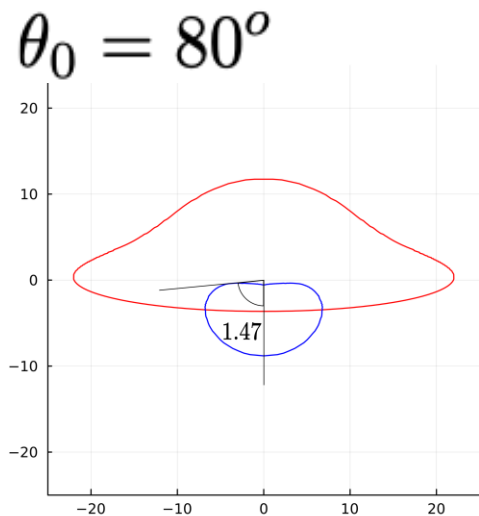
シュバルツシルト時空では極大部分と最大部分が一致するので、中心付近を通る光は中心に落ち込む。

ブハダール時空では、中心付近を通る光も散乱されて観測者に届く。

作成された像



光の軌道が
赤道面を横切る
回数で色分け



赤：0回
青：1回
黒：2回

$a = 0.5$

$a = 1.0$

$a = 1.5$