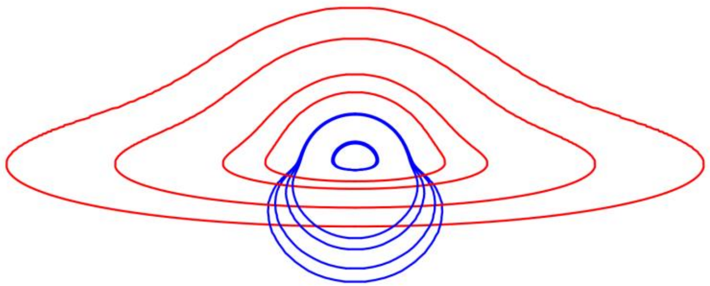
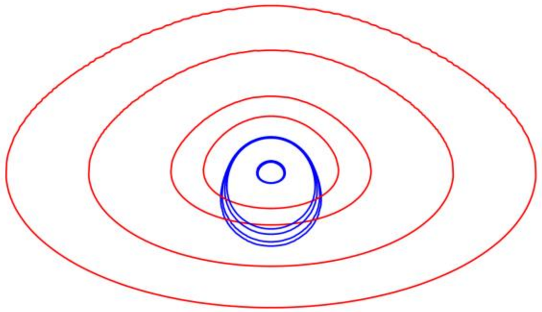


高密度コアモデルにおける降着円盤の像

理論物理学研究室　20041054　大豆生田幹

arXiv: 2502.11755



導入

大輪講の発表では、ブラックホールを表す時空であるシュバルツシルト時空において、発光する円盤（降着円盤）のイメージングを行なった。

卒業研究では、中心領域に高密度の物質場が分布するモデル（高密度コアモデル）を与えるブハダール時空において降着円盤のイメージングを行った。

本研究の意義

シュバルツシルト時空は中心が曲率特異点、シュバルツシルト半径がホライズンになっていた。

これに対しブハダール時空は、中心付近でブラックホールのような強い重力場の性質を示しつつも、曲率特異点やホライズンを持たない。

この時空で像を考えることは、現在観測されている超大質量天体における時空構造の可能性を追求する、という意味で重要である。

ホライズン（事象の地平面）：光すらも抜け出すことができない内部領域との境界面

ブハダール時空

光速度 $c = 1$
重力定数 $G = 1$

ブハダール時空の線素は以下のように与えられる

$$ds^2 = -\frac{(1-f)^2}{(1+f)^2}dt^2 + (1+f)^4 dr^2 + r^2(1+f)^4 d\theta^2 + r^2(1+f)^4 \sin^2\theta d\phi^2$$

$$f(r) = \frac{a}{2\sqrt{1+a^2r^2/M^2}}$$

M ：全質量

a ：質量集中の度合い（コンパクトネス）

$r < M/a$ の領域に全質量の 70% が密集している。

a は $0 < a \leq 1.5$ の範囲で物理的に妥当な性質を示す。

光の運動における作用と保存則

ブハダール時空は球対称なので、光の軌道はひとつの平面に拘束される。

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ に着目することにすると光子の運動における作用はパラメータ λ

を用いて下のように書ける

$$S = \int \mathcal{L} d\lambda = \int \frac{1}{2}\left(-\frac{(1-f)^2}{(1+f)^2}\dot{t}^2 + (1+f)^4\dot{r}^2 + r^2(1+f)^4\dot{\phi}^2\right) d\lambda$$

オイラーラグランジュ方程式より

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}}\right) = 0 \quad \therefore E = \frac{(1-f)^2}{(1+f)^2}\dot{t}$$ エネルギー保存則

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0 \quad \therefore L = r^2(1+f)^4\dot{\phi}$$ 角運動量保存則

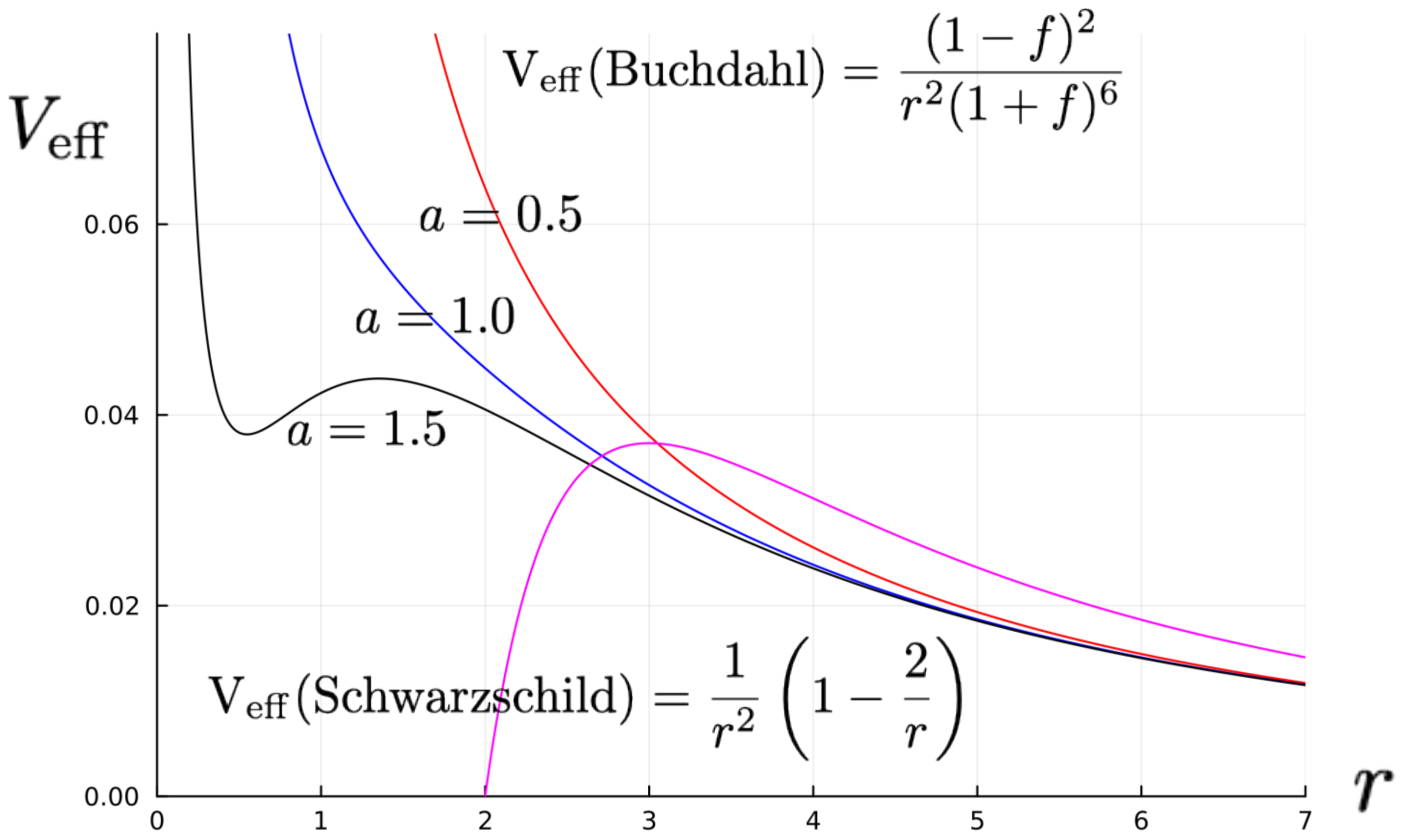
ブハダール時空における光の軌道方程式

null条件　$g_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}=0$と、衝突係数　$b=\frac{L}{E}$ とおけば

軌道方程式　$$\frac{1}{b^2}=\frac{(1-f)^2}{r^4(1+f)^6}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2+V_{\text{eff}}$$

有効ポテンシャル　$$V_{\text{eff}}=\frac{(1-f)^2}{r^2(1+f)^6}$$

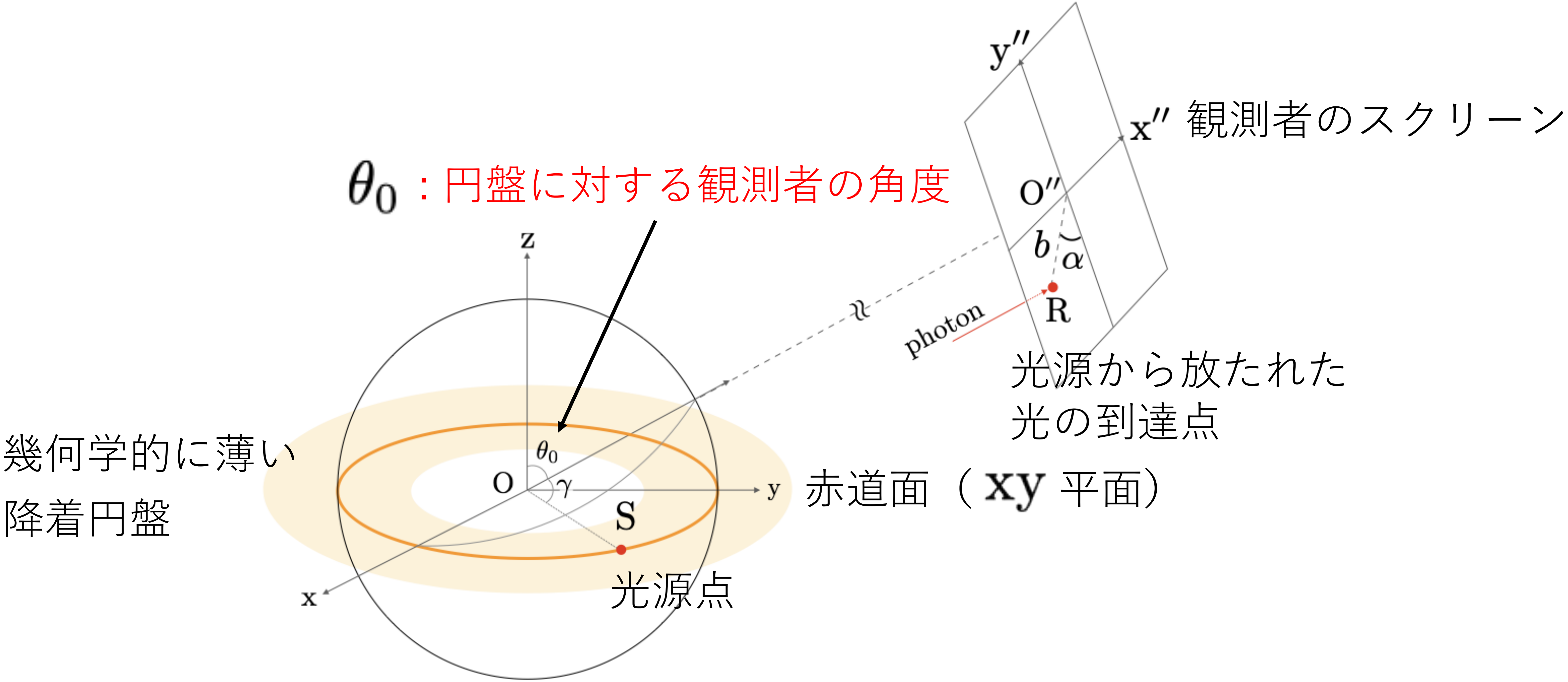
有効ポテンシャル



以降 $M = 1$
の単位系をとる

$a = 1.5$ の時、ブハダール時空の有効ポテンシャルも極大点を持つ。
これは光が不安定円軌道を持つことを意味している。

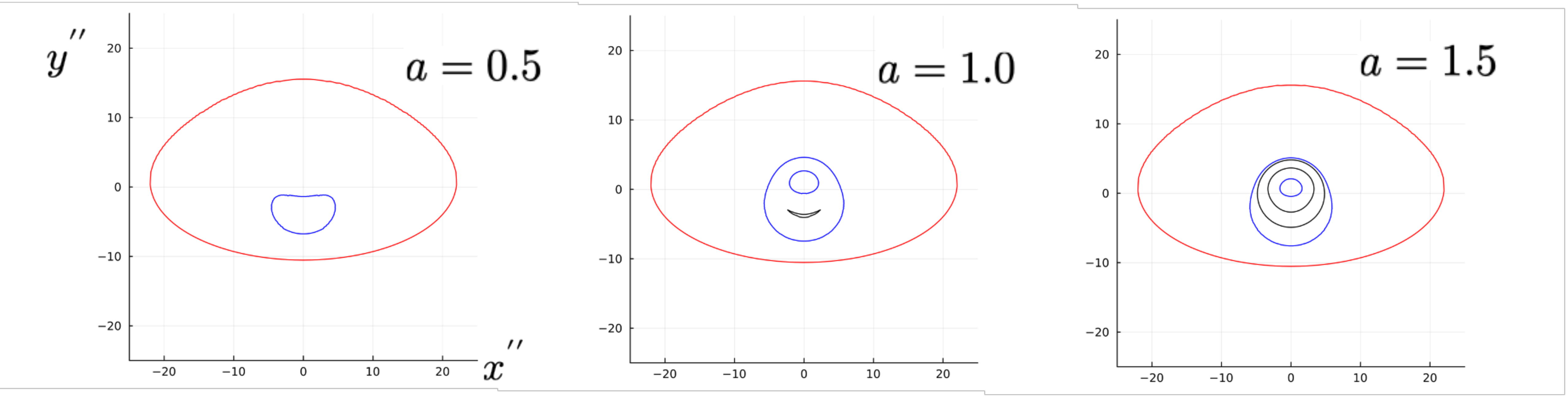
観測者と降着円盤の座標設定



降着円盤における $r = 20M$ のリングがスクリーンに写し出される像を考える。

結果・考察

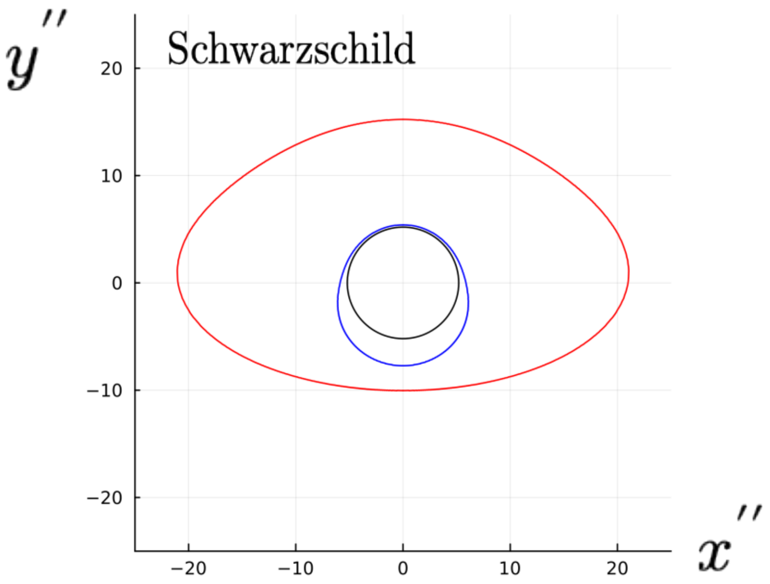
作成した像

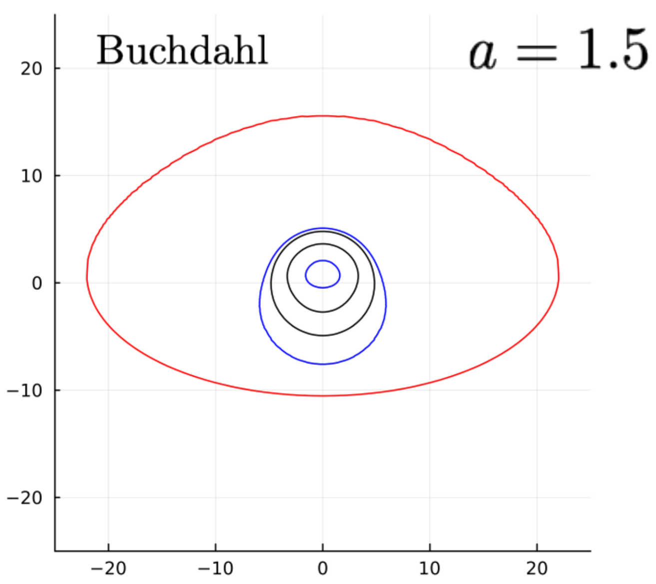


$\theta_0 = 60^o$

a	0次像（赤）	1次像（青）	2次像（黒）
0.5	1重	1重	——
1.0	1重	2重	1重
1.5	1重	2重	2重

シュバルツシルト時空との比較



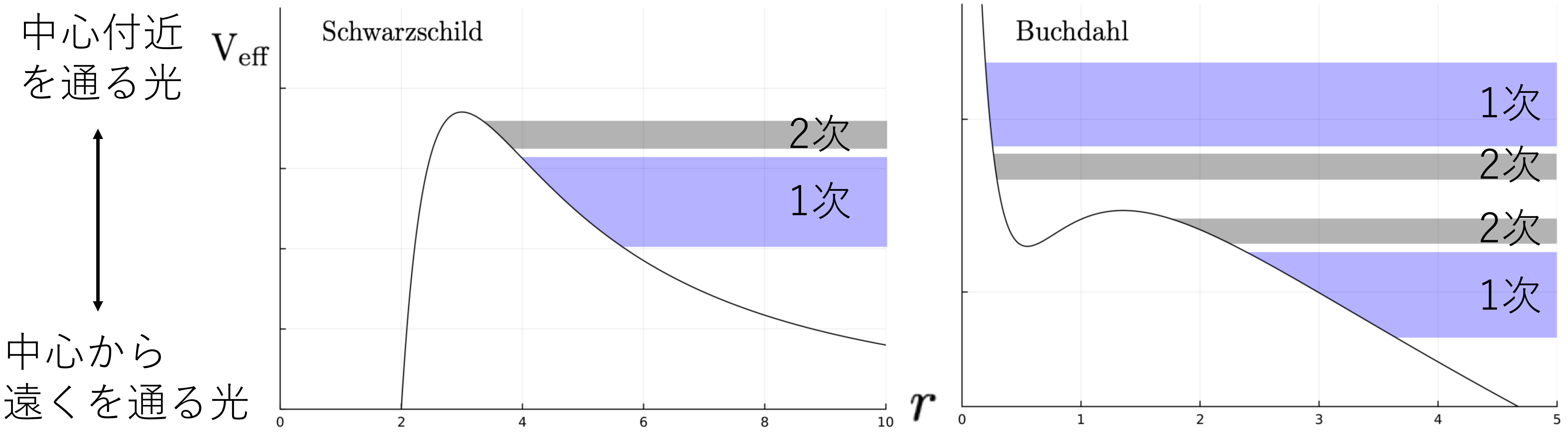


シュバルツシルト時空では、すべての像が1重に見えている。

ブハダール時空では、高次像が2重に見えている。

それぞれの像は次数に限りがないが、2次までしか見せていない。

2重像が現れる原因

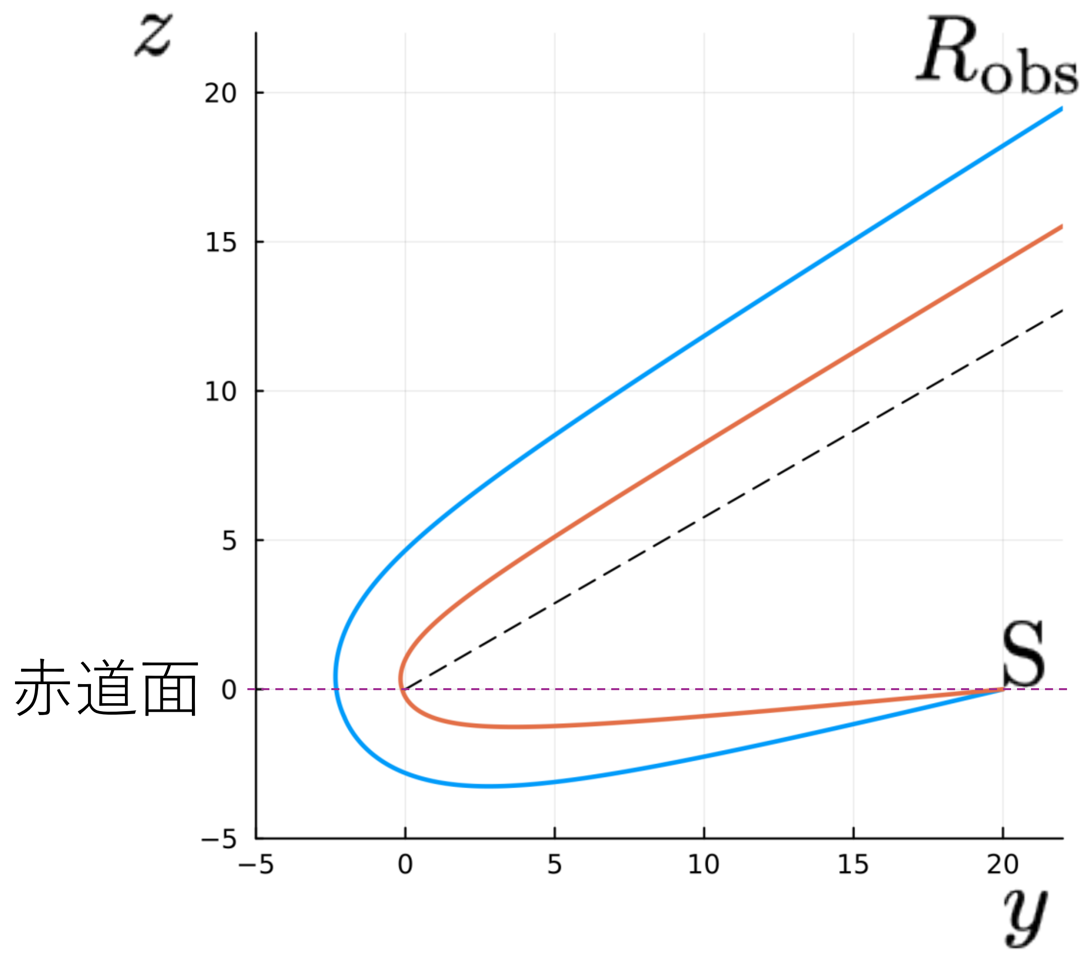


1次、2次の像をつくる光を描くと上のようになった。

シュバルツシルト時空では中心付近を通る光はホライズンに落ち込み、

ブハダール時空では中心付近を通る光も散乱されて観測者に届く。

2重に見える光はどのような軌跡になっているか

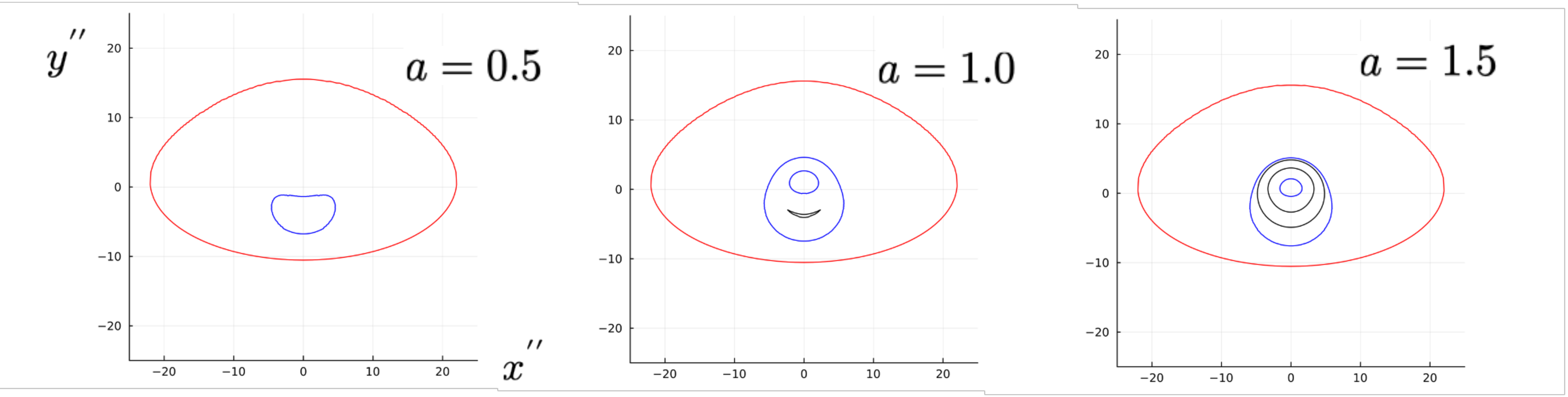


ブハダール時空において、ある点Sから放たれた光が描く軌道は左図のようになった。

この図は1次の像を作る光の軌跡を示しており、軌道が2つあることが確認できる。

シュバルツシルト時空では、中心付近を通る赤の軌道が実現しない。

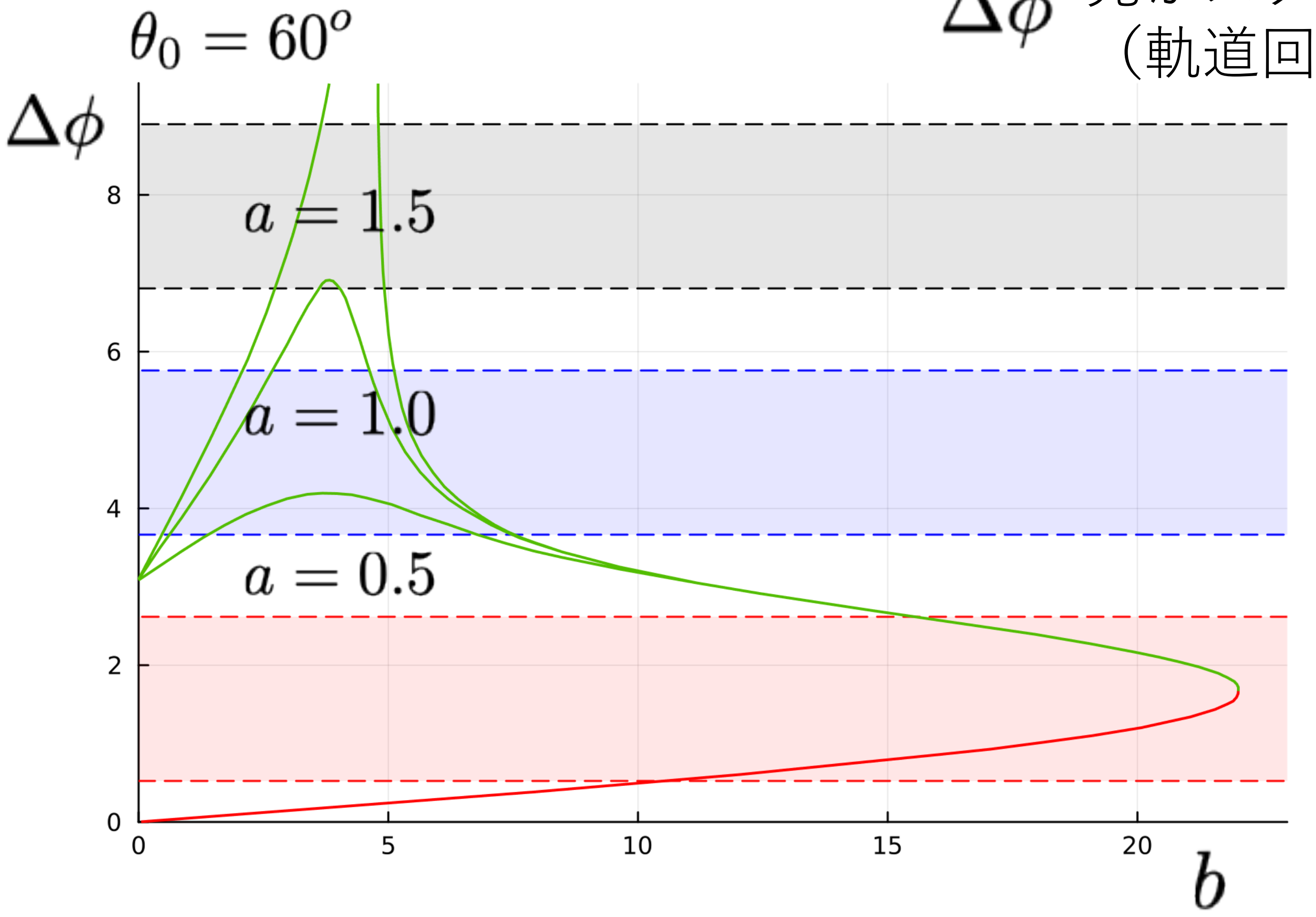
コンパクトネスによる像の違い



a	0次像（赤）	1次像（青）	2次像（黒）
0.5	1重	1重	——
1.0	1重	2重	1重
1.5	1重	2重	2重

a が小さくなるにつれ、見える像は減ってゆく

見える像が減ってゆく原因



$\Delta\phi$ 光がスクリーンに届くまでに回る角度（軌道回転角）

赤・青・黒のバンドは、それぞれ0次・1次・2次のリング全体像が見える $\Delta\phi$ 範囲を示している。

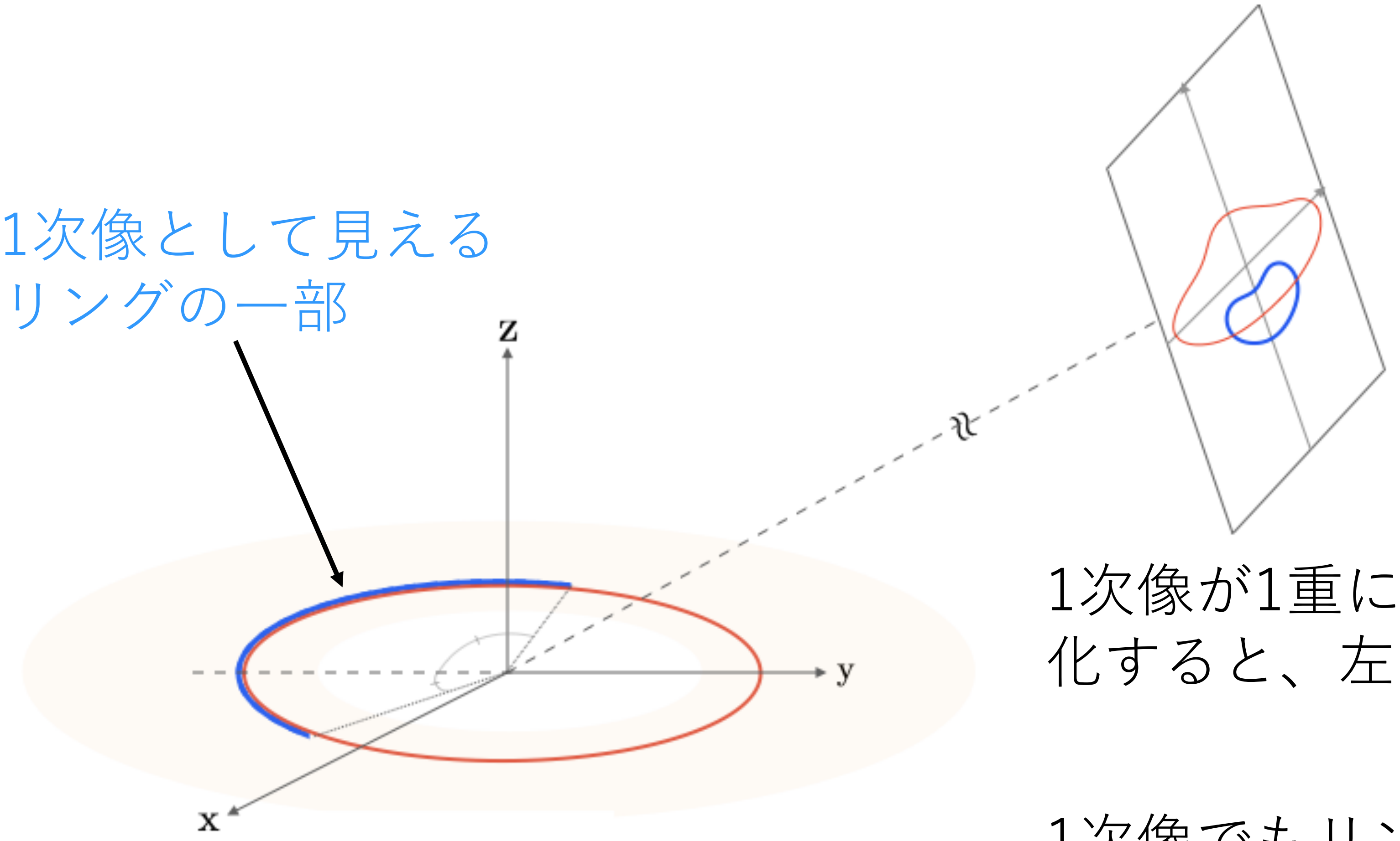
$a = 1.0$ では黒のバンドの

$a = 0.5$ では青のバンドの

一部でしか値をとらないので、リングの全体は見えず、リングの一部分しか像として現れない。

1次像が1重に観測される状況の可視化

1次像として見える
リングの一部



1次像が1重に観測される状況を可視化すると、左図のようになる。

1次像でもリングの一部が2重に投影されているが、その像がつながり、全体として一重の像を作る。

まとめ　arXiv: 2502.11755

ブハダール時空における光の軌道方程式を導出し、降着円盤の像を作成した。

シュバルツシルト時空の像と比較すると、時空構造の違いが2重の高次像として現れ、これは中心付近で散乱される光も観測者に届くことが原因だと分かった。

コンパクトネスの減少に伴い、高次像が消滅、あるいは2重から1重に変化し、1重の高次像が結ばれる際には、リングの一部からのみ光が届くことがわかった。

これは、軌道回転角の減少により、観測者に届く光が高次像を結ぶ光子から減少してゆくことが原因だと明らかにした。

この結果はブラックホールとの区別ができるため、高解像度の観測に対して新たな洞察を与えることができる。