

勉強したことのまとめ

大豆生田 幹

Contents

1	07/08/2024	2
1.1	光の測地線方程式	2
1.2	積分	3
2	28/08/2024	6
2.1	$P \gg M$	6
2.2	$P \approx 3M(1 + \epsilon)$	7
3	23/09/2024	9
3.1	3 次式の解	9
4	07/01/2025	11
4.1	Buchdahl 時空における光の軌道	11
4.2	パラメータ a の条件	12
4.2.1	$f(r)$ による制約	12
4.2.2	standard energy condition による制約	12
4.2.3	a の条件	14
5	08/01/2025	15
5.1	Buchdahl 時空の曲率	15
5.1.1	クリストッフェル記号の計算	15

Chapter 1

07/08/2024

1.1 光の測地線方程式

粒子の場を表す方程式である、クラインゴルドン方程式

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \phi(\mathbf{x}, t) = 0$$

質量のない光では

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi(\mathbf{x}, t) \\ &= \square \phi(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

これを一般の時空に拡張すると

$$g^{ij} \nabla_i \nabla_j \phi = 0$$

ここで、

$$\phi = C e^{\frac{is}{\epsilon}}$$

と書くと

$$\begin{aligned} \nabla_j \phi &= \nabla \left(C e^{\frac{is}{\epsilon}} \right) \\ &= (\nabla_j C) e^{\frac{is}{\epsilon}} + \frac{iC}{\epsilon} e^{\frac{is}{\epsilon}} (\nabla_j S) \\ \nabla_i \nabla_j \phi &= \nabla_i \left((\nabla_j C) e^{\frac{is}{\epsilon}} + \frac{iC}{\epsilon} e^{\frac{is}{\epsilon}} (\nabla_j S) \right) \\ &= (\nabla_i \nabla_j C) e^{\frac{is}{\epsilon}} + (\nabla_i S) (\nabla_j C) \frac{2i}{\epsilon} e^{\frac{is}{\epsilon}} + (\nabla_i \nabla_j S) \frac{iC}{\epsilon} e^{\frac{is}{\epsilon}} - (\nabla_i S) (\nabla_j S) \frac{1}{\epsilon^2} e^{\frac{2is}{\epsilon}} \\ g^{ij} \nabla_i \nabla_j \phi &= g^{ij} (\nabla_i \nabla_j C) e^{\frac{is}{\epsilon}} + g^{ij} (\nabla_i S) (\nabla_j C) \frac{2i}{\epsilon} e^{\frac{is}{\epsilon}} + g^{ij} (\nabla_i \nabla_j S) \frac{iC}{\epsilon} e^{\frac{is}{\epsilon}} - g^{ij} (\nabla_i S) (\nabla_j S) \frac{1}{\epsilon^2} e^{\frac{2is}{\epsilon}} \\ &= (\square C) e^{\frac{is}{\epsilon}} + (\nabla_i S) (\nabla^i C) \frac{2i}{\epsilon} e^{\frac{is}{\epsilon}} + (\square S) \frac{iC}{\epsilon} e^{\frac{is}{\epsilon}} - (\nabla_i S) (\nabla^i S) \frac{1}{\epsilon^2} e^{\frac{2is}{\epsilon}} \\ &\begin{cases} O(\epsilon^{-2}) : (\nabla_i S) (\nabla^i S) = 0 \\ O(\epsilon^{-1}) : 2 (\nabla_i S) (\nabla^i C) + C (\square S) = 0 \\ O(0) : \square C = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで、

$$(\nabla_i S) (\nabla^i S) = 0$$

は光の測地線方程式を表している。

$$\nabla_i S = k_i$$

とおけば

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla_i S) (\nabla^i S) \\
&= k_i k^i \\
&= \nabla_j (k_i k^i) \\
&= \nabla_j (k_i g^{ij} k_l) \\
&= g^{il} (\nabla_j k_l) k_i + g^{il} (\nabla_j k_i) k_l \\
&= 2 (\nabla_j k_i) k^i \\
&= 2 g^{lj} (\nabla_j \nabla_i S) k^i \\
&= 2 (\nabla_i g^{lj} k_j) k^i \\
&= 2 (\nabla_i k^l) k^i \\
&= 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{dx^l}{d\lambda} \right) + \Gamma^l_{im} \left(\frac{dx^m}{d\lambda} \right) \right) \frac{dx^i}{d\lambda}
\end{aligned}$$

光の測地線方程式

$$0 = \left(\frac{d^2 x^l}{d\lambda^2} \right) + \Gamma^l_{im} \left(\frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^m}{d\lambda} \right)$$

1.2 積分

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\mu}{d\phi} \right)^2 &= 2MG(\mu) \\
\frac{d\mu}{d\phi} &= -\sqrt{2MG(\mu)} \\
\begin{cases} \mu_1 = -\frac{Q+2M-P}{4MP} \\ \mu_2 = -\frac{1}{P} \\ \mu_3 = -\frac{Q-2M+P}{4MP} \end{cases} & \quad (1.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\phi_\infty} d\phi &= \int_{\mu_2}^0 \frac{d\mu}{-\sqrt{2MG(\mu)}} \\
\phi_\infty &= \frac{1}{\sqrt{2M}} \int_0^{\mu_2} d\mu ((\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3))^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\chi &= \sqrt{\mu - \mu_1} \\
d\chi &= \frac{1}{2} (\mu - \mu_1)^{-\frac{1}{2}} d\mu
\end{aligned}$$

とおくと

$$\phi_\infty = \frac{1}{\sqrt{2M}} \int_{\sqrt{-\mu_1}}^{\sqrt{\mu_2 - \mu_1}} \frac{2\chi d\chi}{\sqrt{\chi^2(\chi^2 + \mu_1 - \mu_2)(\chi^2 + \mu - \mu_3)}}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\chi &= \sqrt{\mu_2 - \mu_1} \eta \\ d\chi &= \sqrt{\mu_2 - \mu_1} d\eta\end{aligned}$$

とおくと

$$\phi_\infty = \frac{2}{\sqrt{2M}} \int_{\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}}}^1 \frac{\sqrt{\mu_2 - \mu_1} d\eta}{\sqrt{-(\mu_2 - \mu_1)(1 - \eta^2)((\mu_2 - \mu_1)\eta^2 - \mu_1 + \mu_3)}}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\eta &= \sin x \\ d\eta &= dx \cos x\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\phi_\infty &= \frac{2}{\sqrt{2M}} \int_{\sin^{-1} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\cos^2 x \sqrt{-(\mu_2 - \mu_1) \sin^2 x ((\mu_2 - \mu_1)\eta^2 - \mu_1 + \mu_3)}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2M}} \int_{\sin^{-1} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\mu_3 - \mu_1} \sqrt{-\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_3 - \mu_1} \sin^2 x + 1}} \\ &\quad \begin{cases} \mu_3 - \mu_1 = \frac{Q}{2MP} \\ \mu_2 - \mu_1 = \frac{Q + 6M - P}{4MP} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_3 - \mu_1} = \frac{Q + 6M - P}{2Q} \\ \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{Q + 2M - P}{Q + 6M - P} \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\phi_\infty = \frac{2}{\sqrt{2M}} \int_{\sin^{-1} \sqrt{\frac{Q+2M-P}{Q+6M-P}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{Q}{2MP}} \sqrt{1 - \frac{Q+6M-P}{2Q} \sin^2 x}}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\kappa &= \sqrt{\frac{Q + 6M - P}{2Q}} \\ \zeta &= \sin^{-1} \sqrt{\frac{Q + 2M - P}{Q + 6M - P}}\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}K(\kappa) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 x}} \\ F(\zeta, \kappa) &= \int_0^\zeta \frac{dx}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 x}}\end{aligned}$$

とおくと

ϕ_∞ についての式

$$\begin{aligned}\phi_\infty &= 2\sqrt{\frac{P}{Q}} \int_\zeta^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 x}} \\ &= 2\sqrt{\frac{P}{Q}} (K(\kappa) - F(\zeta, \kappa))\end{aligned}$$

Chapter 2

28/08/2024

2.1 $P \gg M$

$$\begin{cases} Q \approx P \left(1 + 2 \left(\frac{M}{P} \right) - 8 \left(\frac{M}{P} \right)^2 \right) \\ \kappa^2 \approx 4 \left(\frac{M}{P} \right) \\ \zeta \approx \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{M}{P} \right) \end{cases}$$

以上を考慮して ϕ_∞ を計算する

$$\begin{aligned} \phi_\infty &= 2 \sqrt{\frac{P}{Q}} \int_{\zeta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 x}} \\ &\approx 2 \sqrt{\frac{P}{Q}} \int_{\zeta}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \kappa^2 \sin^2 x \right) dx \\ &= 2 \sqrt{\frac{P}{Q}} \int_{\zeta}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \kappa^2 - \frac{1}{4} \kappa^2 \cos 2x \right) dx \\ &\approx 2 \left(1 - \frac{M}{P} \right) \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{M}{2P}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \frac{M}{P} - \frac{M}{P} \cos 2x \right) dx \\ &= 2 \left(1 - \frac{M}{P} \right) \left[x + \frac{M}{P} x - \frac{M}{2P} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4} - \frac{M}{2P}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{2M}{P} \end{aligned}$$

$$2.2 \quad P \approx 3M(1 + \epsilon)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q \approx 3M + 5M\epsilon \\ \kappa \approx 1 - \frac{2}{3}\epsilon \\ \zeta \approx \sin^{-1} \sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{9 \cos \left(\sin^{-1} \sqrt{\frac{1}{3}} \right)} \epsilon \\ \sqrt{\frac{P}{Q}} \approx 1 - \frac{1}{3}\epsilon \\ \sqrt{1 - \kappa^2} \approx \sqrt{\frac{4}{3}}\epsilon \\ b \approx b_c \left(1 + \frac{3}{2}\epsilon^2 \right) \end{array} \right.$$

$\kappa \approx 1$ での公式

$$K(\kappa) = \ln \frac{4}{\kappa'} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\ln \frac{4}{\kappa'} - \frac{2}{1 \cdot 2} \right) \kappa'^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \left(\ln \frac{4}{\kappa'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4} \right) \kappa'^4 + \dots$$

$$F(\zeta, \kappa) = \frac{2}{\pi} \mathbf{K}' \ln \tan \left(\frac{\zeta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\tan \zeta}{\cos \zeta} \left(a'_0 - \frac{2}{3} a'_1 \tan^2 \zeta + \dots \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_0 = \frac{2}{\pi} \mathbf{K}' - 1 \\ a'_n = a'_{n-1} - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 \kappa'^{2n} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{K}' = \frac{\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \kappa'^2 + \dots \right)$$

$$\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$$

以上を考慮して b を計算する

$$K(\kappa) \approx \ln \frac{4}{\kappa'}$$

$$F(\zeta, \kappa) \approx \ln \tan \left(\frac{\zeta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\begin{aligned}
\phi_\infty &= 2\sqrt{\frac{P}{Q}}(K(\kappa) - F(\zeta, \kappa)) \\
&\approx 2\left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right)\left(\ln \frac{4}{\kappa'} - \ln \tan\left(\frac{\zeta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right)\ln\left(\frac{\frac{12}{\epsilon}}{\tan^2\left(\frac{\sin^{-1}\sqrt{\frac{1}{3}}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}\right) \\
&\approx \ln\left(\frac{12}{\tan^2\left(\frac{\sin^{-1}\sqrt{\frac{1}{3}}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\epsilon}\right) = \ln \frac{\alpha}{\epsilon}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\phi_\infty = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\mu$$

より、

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\epsilon} &= \exp\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\mu}{2}\right) \\
\epsilon &= \frac{\alpha}{\exp\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\mu}{2}\right)}
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
b &\approx b_c\left(1 + \frac{3}{2}\epsilon^2\right) \\
&= b_c\left(1 + \frac{3}{2}\left(\frac{\alpha}{\exp\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\mu}{2}\right)}\right)^2\right) \\
&= b_c\left(1 + \frac{3}{2}\alpha^2 e^{-\mu} e^{-\pi}\right) \\
&\approx 5.19615M + 3.48228M e^{-\mu}
\end{aligned}$$

Chapter 3

23/09/2024

3.1 3次式の解

$$b^2 = \frac{P^3}{P - 2M}$$

この P を b について解きたい

$$\begin{cases} P = yM \\ b = xM \end{cases}$$

と置き、 y を x について解く問題を考える。

$$0 = P^3 - Pb^2 + 2Mb^2$$

$$0 = y^3M^3 - yx^2M^3 + 2x^2M^3$$

$$0 = y^3 - yx^2 + 2x^2$$

$$y = u + v$$

とおくと

$$0 = (u + v)^3 - (u + v)x^2 + 2x^2$$

$$0 = (u^3 + v^3 + 2x^2) + (3uv - x^2)(u + v)$$

$$u + v \neq 0$$

と仮定すると

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + 2x^2 = 0 \\ 3uv - x^2 = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

以上より、片方の符号を採用すると

$$\begin{cases} u^3 = -x^2 + x^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3\sqrt{3}}\right)^2} \\ v^3 = -x^2 - x^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3\sqrt{3}}\right)^2} \end{cases} \quad (3.2)$$

ここで (u, v) の3乗根の主値をそれぞれ (α, β) とおくと

$$\alpha = \left(-x^2 + x^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3\sqrt{3}} \right)^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\beta = \left(-x^2 - x^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3\sqrt{3}} \right)^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\omega = \exp \left(\frac{2}{3} \pi i \right)$$

(1) $D < 0$ では $(x > 3\sqrt{3})$

$$(u, v) = \begin{cases} (\alpha, \beta) \\ (\omega\alpha, \omega^2\beta) \\ (\omega^2\alpha, \omega\beta) \end{cases}$$

(2) $D = 0$ では $(x = 3\sqrt{3})$

$$(u, v) = \begin{cases} (\omega\alpha, \omega\beta) \\ (\alpha, \omega^2\beta) \\ (\omega^2\alpha, \beta) \end{cases}$$

(3) $D > 0$ では $(x < 3\sqrt{3})$

$$(u, v) = \begin{cases} (\omega\alpha, \omega\beta) \\ (\alpha, \omega^2\beta) \\ (\omega^2\alpha, \beta) \end{cases}$$

Chapter 4

07/01/2025

4.1 Buchdahl 時空における光の軌道

Buchdahl 時空の計量は以下のように与えられる。

$$g_{ij} = \text{diag} \left(-\frac{(1-f(r))^2}{(1+f(r))^2}, (1+f(r))^4, r^2(1+f(r))^4, r^2(1+f(r))^4 \sin^2 \theta \right)$$
$$f(r) = \frac{a}{2\sqrt{1+kr^2}}$$

測地線を考えるには、赤道面 $\theta = \frac{\pi}{2}$ に注目すれば

$$S = \int \mathcal{L} d\tau$$
$$= \int \left(-\frac{(1-f(r))^2}{(1+f(r))^2} \dot{t}^2 + (1+f(r))^4 \dot{r}^2 + r^2(1+f(r))^4 \dot{\phi}^2 \right) d\tau$$

この変分を計算すれば良い。 \mathcal{L} は t, ϕ をあらわには含まないので、オイラーラグランジュ方程式より

$$0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{t}} \right) = \frac{(1-f(r))^2}{(1+f(r))^2} \dot{t}$$
$$\therefore E = \frac{(1-f(r))^2}{(1+f(r))^2} \dot{t}$$
$$0 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\phi}} \right) = r^2(1+f(r))^4 \dot{\phi}$$
$$\therefore L = r^2(1+f(r))^4 \dot{\phi}$$

また、null の条件 $0 = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$ より

$$0 = -\frac{(1-f(r))^2}{(1+f(r))^2} \dot{t}^2 + (1+f(r))^4 \dot{r}^2 + r^2(1+f(r))^4 \dot{\phi}^2$$
$$\therefore \left(\frac{E}{L} \right)^2 = \frac{(1-f(r))^2}{r^4(1+f(r))^6} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{(1-f(r))^2}{r^2(1+f(r))^6}$$

ここで $u = \frac{1}{r}$ 、 $b = \frac{L}{E}$ とおくと

$$1 = r^4 \left(\frac{du}{dr} \right)^2$$

より

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{b}\right)^2 &= \frac{(1-f(1/u))^2}{(1+f(1/u))^6} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \frac{u^2(1-f(1/u))^2}{(1+f(1/u))^6} \\ \therefore \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 &= G(u) := \left(\frac{1}{b}\right)^2 \frac{(1+f(1/u))^6}{(1-f(1/u))^2} - u^2\end{aligned}$$

4.2 パラメータ a の条件

まず、 $a = 0$ 、 $k = 0$ は距離に依存しない時空となるので今回は考えないとする。

4.2.1 $f(r)$ による制約

$|f(r)| = 1$ ではクリストッフェルスカラーが発散する。これは時空に特異点が存在することを意味しており、そのような状況を考えるないことにすると、

(1) $a > 0$ and $k > 0$ では $f = 1$ を避けるために

$$0 < a < 2$$

(2) $a > 0$ and $k < 0$ ここが良くわからない

(3) $a < 0$ and $k > 0$ では $f = -1$ を避けるために

$$-2 < a < 0$$

(4) $a < 0$ and $k < 0$ ここが良くわからない

4.2.2 standard energy condition による制約

$$\begin{aligned}\rho(r) &= \frac{24\pi k f(r)^5}{\pi a^4 (1+f(r))^5} \\ p(r) &= \frac{8k f(r)^6}{\pi a^4 (1-f(r)^2)(1+f(r))^4}\end{aligned}$$

(1) The weak energy condition (WEC)

$$\begin{aligned}0 &\leq \rho(r) \\ 0 &\leq \rho(r) + p(r)\end{aligned}$$

(2) The strong energy condition (SEC)

$$\begin{aligned}0 &\leq \rho(r) + p(r) \\ 0 &\leq \rho(r) + 3p(r)\end{aligned}$$

(3) The null energy condition (NEC)

$$0 \leq \rho(r) + p(r)$$

(4) The dominant energy condition (DEC)

$$0 \leq \rho(r) - |p(r)|$$

条件を分けして解析すると

(1) $0 \leq \rho(r)$ and $0 \leq \rho(r) + p(r) \lesssim 1$

$$\begin{aligned}
0 &\leq 1 + \frac{p(r)}{\rho(r)} \\
&= 1 + \frac{8kf(r)^6}{\pi a^4(1-f(r)^2)(1+f(r))^4} \times \frac{\pi a^4(1-f(r)^2)(1+f(r))^4}{8kf(r)^6} \\
&= 1 + \frac{f(r)}{3(1-f(r))}
\end{aligned}$$

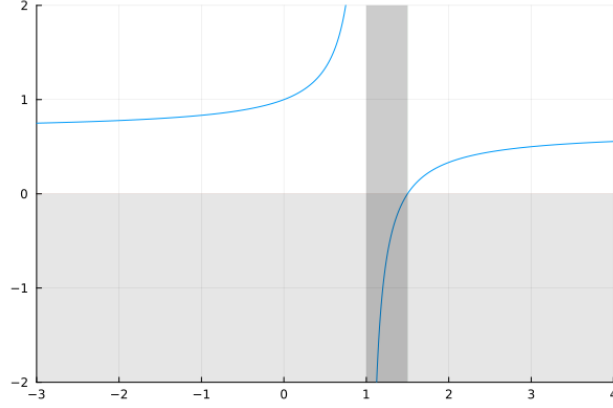


Figure 4.1:

(2) $0 \leq \rho(r)$ and $0 \leq \rho(r) + 3p(r) \lesssim 1$

$$\begin{aligned}
0 &\leq 1 + \frac{3p(r)}{\rho(r)} \\
&= 1 + \frac{f(r)}{1-f(r)}
\end{aligned}$$

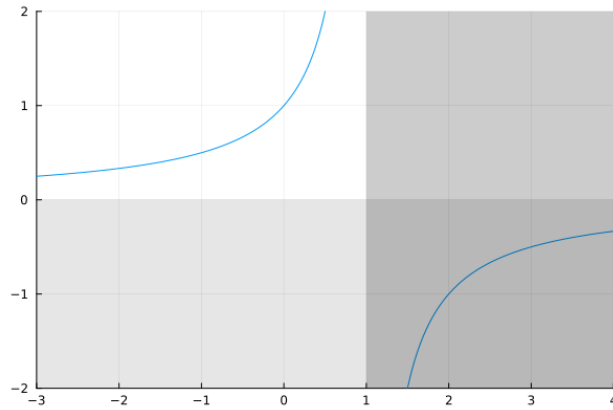


Figure 4.2:

(3) $0 \leq \rho(r)$ and $0 \leq \rho(r) - |p(r)|$ より

$$-1 \leq \frac{p(r)}{\rho(r)} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{f(r)}{3(1-f(r))} \leq 1$$

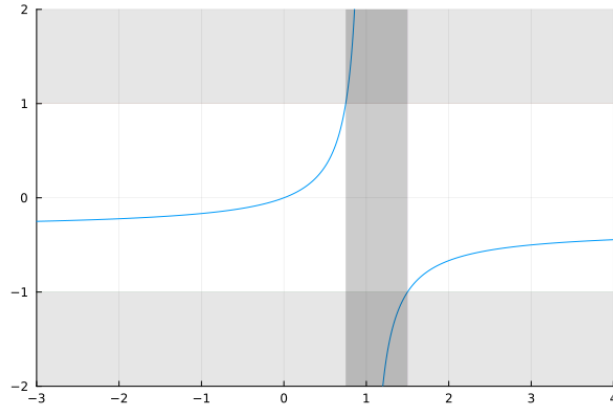


Figure 4.3:

以上をまとめると

$$f(r) \leq \frac{3}{4}$$

4.2.3 a の条件

上記 2 つの制約をまとめると

(1) $a > 0$ and $k > 0$ and $f(r) \leq \frac{3}{4}$ では

$$0 < a \leq \frac{3}{2}$$

(2) $a > 0$ and $k < 0$ ここが良くわからない

(3) $a < 0$ and $k > 0$ ここが良くわからない

(4) $a < 0$ and $k < 0$ ここが良くわからない

Chapter 5

08/01/2025

5.1 Buchdahl 時空の曲率

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -\frac{(1-f(r))^2}{(1+f(r))^2} & & & \\ & (1+f(r))^4 & & \\ & & r^2(1+f(r))^4 & \\ & & & r^2(1+f(r))^4 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$f(r) = \frac{a}{2\sqrt{1+kr^2}}$$

$$\frac{df}{dr} = -\frac{ar}{2(1+kr^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{af(r)}{1+kr^2}$$

$$R^a{}_{bcd} = \frac{\partial \Gamma^a{}_{bd}}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma^a{}_{bc}}{\partial x^d} + \Gamma^a{}_{ec} \Gamma^e{}_{bd} - \Gamma^a{}_{ed} \Gamma^e{}_{bc}$$

$$\frac{g_{tt}}{\partial r} = -\frac{af(r)}{1+kr^2} \cdot \frac{2(1-f(r))}{(1+f(r))^2} - \frac{af(r)}{1+kr^2} \cdot \frac{2(1-f(r))^2}{(1+f(r))^3}$$

$$\frac{g_{rr}}{\partial r} = -\frac{af(r)}{1+kr^2} \cdot 4(1+f(r))^3$$

$$\frac{g_{\theta\theta}}{\partial r} = 2r(1+f(r))^4 - \frac{af(r)}{1+kr^2} \cdot 4r^2(1+f(r))^3$$

$$\frac{g_{\phi\phi}}{\partial r} = 2r(1+f(r))^4 \sin^2 \theta - \frac{af(r)}{1+kr^2} \cdot 4r^2(1+f(r))^3 \sin^2 \theta$$

$$\frac{g_{\phi\phi}}{\partial \theta} = 2r^2(1+f(r))^4 \sin \theta$$

5.1.1 クリストッフエル記号の計算

$$\Gamma^a{}_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad} \left(\frac{\partial g_{db}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{dc}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d} \right)$$

クリストッフエル記号がゼロにならない添字の組み合わせ求める。

(1) $t = a = d$ では

$$\Gamma^t{}_{tr} = \Gamma^t{}_{rt}$$

(2) $r = a = d$ では

$$\Gamma^r{}_{rr}, \Gamma^r{}_{tt}, \Gamma^r{}_{\theta\theta}, \Gamma^r{}_{\phi\phi}$$

(3) $\theta = a = d$ では

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta r}^{\theta} &= \Gamma_{r\theta}^{\theta} \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &\end{aligned}$$

(4) $\phi = a = d$ では

$$\begin{aligned}\Gamma_{\phi r}^{\phi} &= \Gamma_{r\phi}^{\phi} \\ \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} &= \Gamma_{\theta\phi}^{\phi}\end{aligned}$$

以上の成分をそれぞれ計算すると

$$\begin{aligned}\Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{2}(g_{tt})^{-1} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2}(g_{rr})^{-1} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \\ \Gamma_{tt}^r &= -\frac{1}{2}(g_{rr})^{-1} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{1}{2}(g_{rr})^{-1} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{1}{2}(g_{rr})^{-1} \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} \\ \Gamma_{\theta r}^{\theta} &= \frac{1}{2}(g_{\theta\theta})^{-1} \frac{\partial g_{rr}}{\partial \theta} \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\frac{1}{2}(g_{\theta\theta})^{-1} \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} \\ \Gamma_{\phi r}^{\phi} &= \frac{1}{2}(g_{\phi\phi})^{-1} \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} \\ \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} &= \frac{1}{2}(g_{\phi\phi})^{-1} \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta}\end{aligned}$$

////////////////////////////////////
 //////////////////////////////////////

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\bar{w}_j = () \int$$

メモ用

$1=0$

$$\begin{cases} 1=0 \\ 1=0 \end{cases} \tag{5.1}$$

(1)