

# 降着円盤の像

大豆生田 幹

# Contents

<b>1</b>	<b>null 条件</b>	<b>2</b>
1.1	クラインゴルドン方程式 . . . . .	2
1.2	null 条件の導出 . . . . .	3
<b>2</b>	<b>シュバルツシルト解</b>	<b>4</b>
2.1	光の軌道が満たす微分方程式の導出 . . . . .	4
2.2	有効ポテンシャルの解析 . . . . .	5
2.3	有効ポテンシャルの解析 . . . . .	6
<b>3</b>	<b>ブハダー解</b>	<b>7</b>
3.1	光の軌道が満たす微分方程式の導出 . . . . .	7
3.2	パラメータの制約 . . . . .	9
3.3	光の軌道の解析 . . . . .	9
<b>4</b>	<b>コピペ用テキスト</b>	<b>10</b>

# Chapter 1

## null条件

超大質量天体は降着円盤と呼ばれる、ガスなどの物質で構成された円盤を持つことが多い。降着円盤は中心天体を高速で公転しており、摩擦の影響で電磁波を放っている。今回は、重力中心から一定距離に幾何学的に薄い降着円盤を設定し、それがどのように観測されるのかを計算する。

この計算をするためには、時空上で光の軌道が満たす方程式と、光の軌道が満たす条件を考慮する必要がある。ここではその条件を導出する。

### 1.1 クラインゴールドン方程式

クラインゴールドン場を  $\phi(x, t)$  とすると、クラインゴールドン方程式は以下のように書ける。

$$(\square + m^2) \phi(x, t) = 0$$

( $c = 1, \hbar = 1$  の単位系を用いた。) この式を計量  $g_{ij}$  で表される一般の時空に拡張し、 $m = 0$  の波を考えると、式は以下のように変形できる。

$$0 = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \phi(x) \quad (1.1)$$

振動数が非常に大きい波を考えると、波は以下のように書ける。

$$\phi(x) = C(x) \exp\left(\frac{S(x)}{\epsilon} i\right) \quad \epsilon \ll 1 \quad (1.2)$$

以上をまとめると、以下の式を導くことができる。

$$0 = g^{jk}(x) \nabla_j \nabla_k \left[ C(x) \exp\left(\frac{S(x)}{\epsilon} i\right) \right]$$

## 1.2 null 条件の導出

上記で求めた式を少しづつ計算していく

$$\begin{aligned}
\nabla_k \left[ C(x) \exp \left( \frac{S(x)}{\epsilon} i \right) \right] &= \left[ (\nabla_k C(x)) + \left( \frac{C(x)}{\epsilon} i \right) (\nabla_k S(x)) \right] \exp \left( \frac{S(x)}{\epsilon} i \right) \\
\nabla_j \nabla_k \left[ C(x) \exp \left( \frac{S(x)}{\epsilon} i \right) \right] &= [\nabla_j \nabla_k C(x) + \frac{2}{\epsilon} i (\nabla_j C(x)) (\nabla_k S(x)) \\
&\quad + \frac{C(x)}{\epsilon} i (\nabla_j \nabla_k S(x)) - \frac{C(x)}{\epsilon^2} i (\nabla_j S(x)) (\nabla_k S(x))] \exp \left( \frac{S(x)}{\epsilon} i \right) \\
g^{jk}(x) \nabla_j \nabla_k \left[ C(x) \exp \left( \frac{S(x)}{\epsilon} i \right) \right] &= g^{jk}(x) \nabla_j \nabla_k C(x) \exp \left( \frac{S(x)}{\epsilon} i \right) \\
&\quad + [2(\nabla_j C(x)) (\nabla_k S(x)) + C(x) (\nabla_j \nabla_k S(x))] \frac{g^{jk}(x)}{\epsilon} i \exp \left( \frac{S(x)}{\epsilon} i \right) \\
&\quad - C(x) (\nabla_j S(x)) (\nabla_k S(x)) \frac{g^{jk}(x)}{\epsilon^2} i \exp \left( \frac{S(x)}{\epsilon} i \right)
\end{aligned}$$

ここで書いた項はすべてゼロになるので

$$\begin{cases}
O(0) : g^{jk}(x) \nabla_j \nabla_k C(x) = 0 \\
O(\epsilon^{-1}) : 2g^{jk}(x) (\nabla_j C(x)) (\nabla_k S(x)) + g^{jk}(x) C(x) (\nabla_j \nabla_k S(x)) = 0 \\
O(\epsilon^{-2}) : g^{jk}(x) (\nabla_j S(x)) (\nabla_k S(x)) = 0
\end{cases}$$

光の波数ベクトル  $\mathbf{k}$  に対して以下の関係式が成り立つと仮定する。

$$\nabla^i S = k^i$$

すると、 $O(\epsilon^{-2})$  式は以下のように書き換えられる。

$$0 = k^i k_i$$

これが光の軌道が満たす条件であり、以降は null 条件と呼ぶ。

## Chapter 2

# シュバルツシルト解

一般相対論による強い重力の効果は、シュバルツシルト時空と呼ばれる静的で真空球対称のブラックホール解を典型的な例として理解できる。まずはこの時空における降着円盤の像を計算しよう。まず、シュバルツシルト時空の線素は以下のように書くことができる。

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

天体を作る重力場は漸近的に平坦であると考えられるが、この解は  $r \rightarrow \infty$  でその条件を満たしている。

### 2.1 光の軌道が満たす微分方程式の導出

力を加えない限り曲がった時空上の物質は距離が停留点をとるような軌道を描くことが知られており、このような軌道を測地線と呼ぶ。ここではシュバルツシルト時空における光の軌道を表す微分方程式を導出する。距離を  $S$ 、光の軌道を表すパラメータであり、波数ベクトルに対して

$$k^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$$

を満たすようなパラメータをアフィンパラメータと呼び、 $\lambda$  と書くと、距離は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} S &= \int \mathcal{L} d\lambda \\ &= \int \frac{1}{2} \left( -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2) \right) d\lambda \end{aligned}$$

シュバルツシルト時空は球対称であり、光は特定の赤道面に囚われた軌道をとることになるので  $\theta = \frac{\pi}{2}$  の面に注目することにすれば、以下のように書き換えることができる。

$$S = \int \frac{1}{2} \left( -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) d\lambda$$

この距離が停留点を取るの、オイラーラグランジュ方程式より

$$0 = -\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{d\mathcal{L}}{dt} \right) = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}$$

$$\text{エネルギー保存則} \quad \therefore E = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}$$

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\phi}} \right) = r^2 \dot{\phi}$$

$$\text{角運動量保存則} \quad \therefore L = r^2 \dot{\phi}$$

また、null 条件  $0 = k^i k_i$  より

シュバルツシルト時空における光の方程式

$$0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2$$

$$\therefore \left(\frac{E}{L}\right)^2 = \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

後の計算のために、衝突係数  $b = \frac{L}{E}$ 、有効ポテンシャル  $V_{\text{eff}}$ 、 $u = \frac{1}{r}$  を導入して式を書き換えておく。

$$G(u) = \left( \frac{du}{d\phi} \right)^2$$

$$\left( \frac{1}{b} \right)^2 = u^2 G(u) + V_{\text{eff}}(u)$$

## 2.2 有効ポテンシャルの解析

有効ポテンシャルは以下のような形になっている。

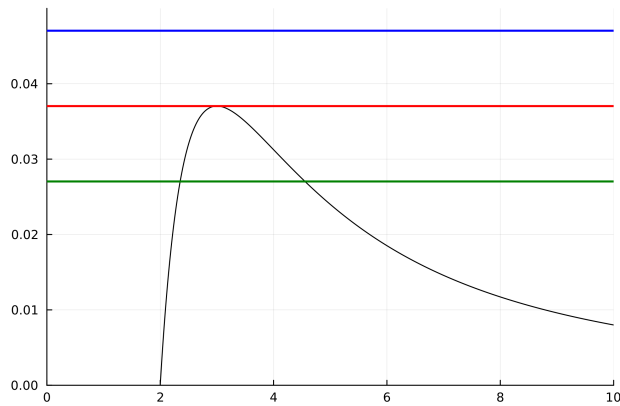


Figure 2.1: 有効ポテンシャル（縦軸  $V_{\text{eff}}$  - 横軸  $r/M$ ）

これを解析し、ある有効ポテンシャルをもつ光がどのような軌道をとるか考える。

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)$$
$$V'_{\text{eff}} = \frac{2M}{r^4} \left( 3 - \frac{r}{M} \right)$$

この式からわかることをまとめると、以下のようになる。

- (1) 有効ポテンシャルが青線の大きさを持つ光の軌道 ( $1/27 < V_{\text{eff}}$ )  
この光は重力中心へ落下、もしくは無限遠まで飛んでゆく軌道をとる。
- (2) 有効ポテンシャルが赤線の大きさを持つ光の軌道 ( $1/27 = V_{\text{eff}}$ )  
この光は不安定ではあるが、円軌道をとる。
- (3) 有効ポテンシャルが緑線の大きさを持つ光の軌道 ( $1/27 > V_{\text{eff}}$ )  
この光はあるところまで重力中心まで近づき、散乱されて無限遠に飛んでゆく軌道をとる。

## 2.3 有効ポテンシャルの解析

## Chapter 3

# ブハダール解

続いて、曲率特異点を持たず、ホライズンも存在しないような自然な時空であるブハダール時空に着目し、降着円盤の見え方を考える。ブハダール時空の線素は以下のように書くことができる。

$$ds^2 = -\frac{(1-f(r))^2}{(1+f(r))^2}dt^2 + (1+f(r))^4dr^2 + r^2(1+f(r))^4d\theta^2 + r^2(1+f(r))^4\sin^2\theta d\phi^2$$
$$f(r) = \frac{a}{2\sqrt{1+kr^2}}$$

この解も  $r \rightarrow \infty$  で平坦な時空に漸近する。

### 3.1 光の軌道が満たす微分方程式の導出

ブハダール時空は球対称であり、光は特定の赤道面に囚われた軌道をとることになるので  $\theta = \frac{\pi}{2}$  の面に注目することにすれば、距離は以下のように書ける。

$$S = \int \mathcal{L} d\tau$$
$$= \int \left( -\frac{(1-f(r))^2}{(1+f(r))^2} \dot{t}^2 + (1+f(r))^4 \dot{r}^2 + r^2(1+f(r))^4 \dot{\phi}^2 \right) d\tau$$

この距離が停留点を取るのも、オイラーラグランジュ方程式より

$$0 = -\frac{1}{2} \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{t}} \right) = \frac{(1-f(r))^2}{(1+f(r))^2} \dot{t}$$
$$\therefore E = \frac{(1-f(r))^2}{(1+f(r))^2} \dot{t}$$
$$0 = \frac{1}{2} \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\phi}} \right) = r^2(1+f(r))^4 \dot{\phi}$$
$$\therefore L = r^2(1+f(r))^4 \dot{\phi}$$

また、null 条件  $0 = k^i k_i$  より

$$0 = -\frac{(1-f(r))^2}{(1+f(r))^2} \dot{t}^2 + (1+f(r))^4 \dot{r}^2 + r^2(1+f(r))^4 \dot{\phi}^2$$
$$\therefore \left( \frac{E}{L} \right)^2 = \frac{(1-f(r))^2}{r^4(1+f(r))^6} \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{(1-f(r))^2}{r^2(1+f(r))^6}$$



これが、ブハダール時空における光の軌道が満たすべき式である。

後の計算のために、衝突係数  $b = \frac{L}{E}$ 、有効ポテンシャル  $V_{\text{eff}}$ 、 $u = \frac{1}{r}$  を導入して式を書き換えておく。

$$G(u) = \left( \frac{du}{d\phi} \right)^2$$

$$\left( \frac{1}{b} \right)^2 = \frac{u^4(1-f(u))^2}{(1+f(u))^6} G(u) + V_{\text{eff}}(u)$$

有効ポテンシャルは以下のような形になっている。

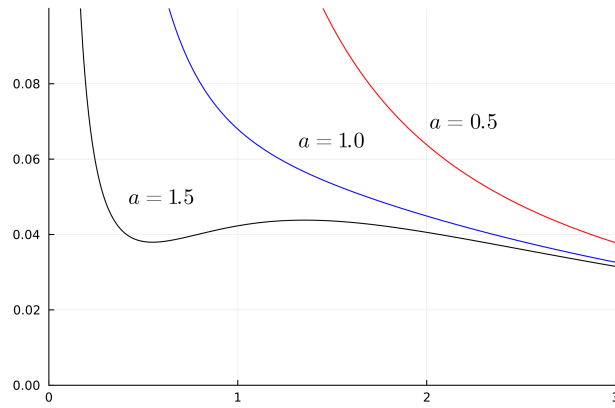


Figure 3.1: 有効ポテンシャル

### 3.2 パラメータの制約

### 3.3 光の軌道の解析

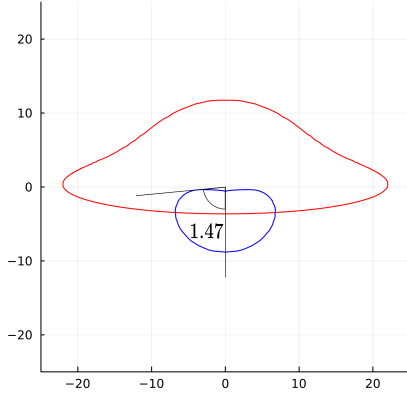


Figure 3.2:  $\theta_0 = 80^\circ$   $a = 0.5$

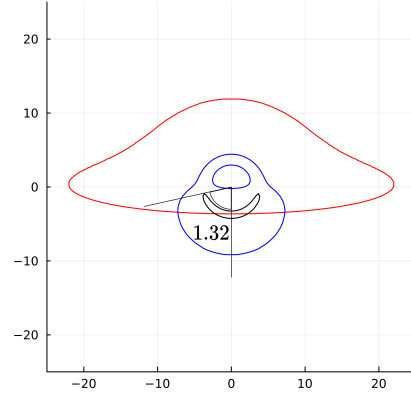


Figure 3.3:  $\theta_0 = 80^\circ$   $a = 1.0$

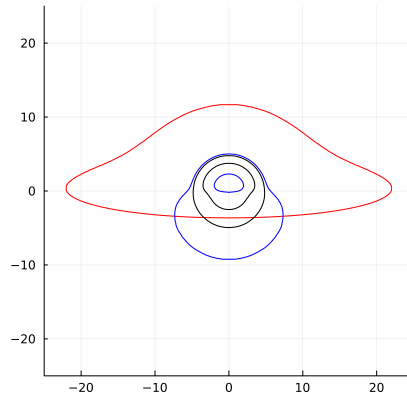


Figure 3.4:  $\theta_0 = 80^\circ$   $a = 1.5$

Chapter 4

コピペ用テキスト

//////////////////////////////////// テスト

$$\bar{w}_j = () \int$$

メモ用

1 = 0

$$\begin{cases} 1 = 0 \\ 1 = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

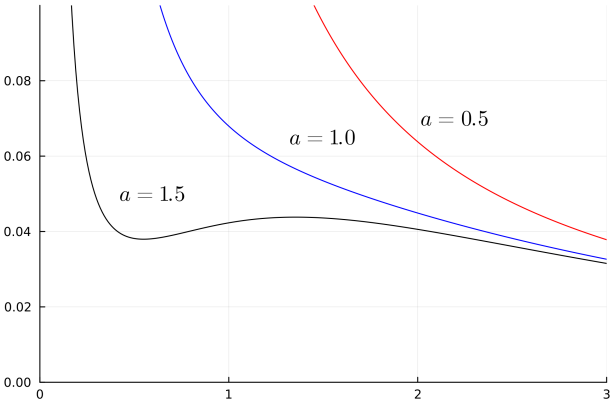


Figure 4.1: 並行移動

(1)