超大質量天体を周る星の光学的出現

大豆生田 幹

Contents

Chapter 1

一般相対論

1.1　概念

いろいろ追記する。

1.2　ベクトル

時空は局所的に平坦とみなすことができた。つまり、時空は局所的にユークリッド空間と同相な空間と考えることができるので、その範囲では滑らかな座標が存在する。そこで、座標を以下のようにとることにする。

$$(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

時空上で実数値をもつ滑らかな関数 $f(x^i)$ と、実数 t をパラメータとする曲線 $C(t)$ を考える。ここで、曲線 $C(t)$ 上における関数 $f(x^i)$ の t 微分は

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}$$

とかける。この右辺の成分それぞれに着目する。座標変換 $(x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow (\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ を考えると

(1)

$$v^i = \frac{dx^i}{dt}$$

では、

$$\bar{v}^i = \frac{d\bar{x}^i}{dt} = \sum_{j=0}^{3} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} v^j$$

このような関係を満たすものを反変ベクトルと言い、上記のようにベクトルの添え字を上に書く。

(2)

$$w_i = \frac{df}{dx^i}$$

では、

$$\bar{w}_j = \frac{df}{d\bar{x}^i} = \sum_{j=0}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} w_i$$

このような関係を満たすものを共変ベクトルと言い、上記のようにベクトルの添え字を下に書く。

以上のことをアインシュタインの縮約規則 (上付きの添え字と下付きの添え字は全て足し合わせることとする表現方法) を用いてまとめると、ベクトルは 2 種類に分類できて、それぞれの座標変換は以下のように書ける。

反変ベクトルの変換則

$$\bar{v}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} v^j$$

共変ベクトルの変換則

$$\bar{w}_i = \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}^i} w_j$$

以降の数式は全て、アインシュタインの縮約規則を用いて表現している。

1.3 テンソル

ベクトルを定義したことで、そのベクトルが作る空間を考えることができる。反変ベクトルの全体が作る空間を接ベクトル空間、共変ベクトルの全体が作る空間を双対接ベクトル空間と呼ぶ。それぞれの空間における基底を

$$\boldsymbol{v}^j, \boldsymbol{w}_j$$

とおくと、そのテンソル積

$$\boldsymbol{v}^i \otimes \boldsymbol{v}^j, \boldsymbol{v}^i \otimes \boldsymbol{v}^j \otimes \boldsymbol{w}_k$$

等で張られる線型空間を考えることができる。

いろいろ追記する。(etc. テンソルの座標変換 反対称化)

1.4 計量

平面上のデカルト座標を (x^1, x^2) とおくと、そこでの線素 (微小距離) は

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$$

と書くことができる。これを n 次元のデカルト座標 $(x^1, x^2 \cdots x^{n-1}, x^n)$ に拡張すると、線素は

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$$
$$\left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \right)$$

と書くことができる。さらに一般の曲がった次元に拡張すると、線素は

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

と書くことができる。この g_{ij} を「計量」と呼び、これがまさに時空を定義する量である。座標変換 $(x^0, x^1, x^2, x^3) \to (\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ を考えると、線素は座標変換に対して不変なので

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ij} dx^i dx^j \\ &= \bar{g}_{kl} d\bar{x}^k d\bar{x}^l \\ &= \bar{g}_{kl} \left(\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} dx^i \right) \left(\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} dx^j \right) \end{aligned}$$

よって、以下のことがわかる。

計量 g_{ij} の変換則

$$\bar{g}_{kl}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} = g_{ij}$$

変換則より、計量 g_{ij} は 2 階の共変テンソルとわかる。g_{ij} の逆行列 $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$ を考えると

$$\left(\bar{g}_{kl}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j}\right) g^{ij} = g_{ij}g^{ij}$$
$$\left(\bar{g}_{kl}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j}\right) g^{ij} = I$$

この整合性 $I = I$ を考えると

計量 g^{ij} の変換則

$$\bar{g}^{kl}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} = g^{ij}$$

変換則より、計量 g^{ij} は 2 階の反変テンソルとわかる。
添え字の上げ下げについて記載する

1.5 内積

任意の 2 つのベクトル $\vec{A}, \vec{B}$ それぞれの成分 A^i, B^i とおいて、一般の曲がった次元での内積は

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = g_{ij}A^iB^j$$

と定義する。

1.6 並行移動

曲がった時空上でベクトルの並行移動を考える。ある点 x のベクトル $A^i(x)$ を微小変位 δx だけ離れた $x+\delta x$ に並行移動したベクトル $A^i_{//}(x+\delta x)$ を以下のように書くことにする。

$$A^i_{//}(x+\delta x) = A^i(x) - \Gamma^i{}_{jk}(x)A^j(x)\delta x^k$$

ここで導入した $\Gamma^i{}_{jk}(x)$ を接続とよび、この量を適切に定義することでベクトルの並行移動を定義する。

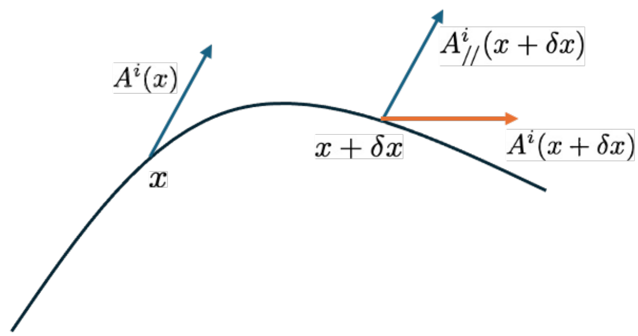

Figure 1.1: 並行移動

並行移動が満たすべき条件は 2 つ考えられる。

条件 (1)：並行移動によって任意の 2 つのベクトルの内積が保たれる

$$g_{ij}(x)A^i(x)B^j(x) = g_{ij}(x+\delta x)A^i_{//}(x+\delta x)B^j_{//}(x+\delta x)$$

条件 (2)：並行移動によって任意の 2 つのベクトルにねじれが生じない

$$\Gamma^i{}_{[jk]}(x) = 0$$

条件 (1) から

$$\begin{aligned} g_{ij}A^iB^j &= g_{ij}A^iB^j + \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{lj}\Gamma^l{}_{ik} - g_{il}\Gamma^l{}_{jk}\right)A^iB^j\delta x^k + \mathrm{O}\left((\delta x)^2\right) \\ 0 &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{lj}\Gamma^l{}_{ik} - g_{il}\Gamma^l{}_{jk} \end{aligned}$$

添え字を入れ替えて作った 3 つの式を連立して

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{lj}\Gamma^l{}_{ik} - g_{il}\Gamma^l{}_{jk} \\ 0 &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - g_{lk}\Gamma^l{}_{ij} - g_{il}\Gamma^l{}_{kj} \\ 0 &= -\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + g_{lj}\Gamma^l{}_{ki} + g_{kl}\Gamma^l{}_{ji} \end{aligned}$$

条件 (2) を用いると接続は以下のように導かれる。このような接続を「クリストッフェル記号」と呼ぶ。

クリストッフェル記号

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right)$$

これでベクトルの並行移動が定義された。

1.7 共変微分

1.8 曲率

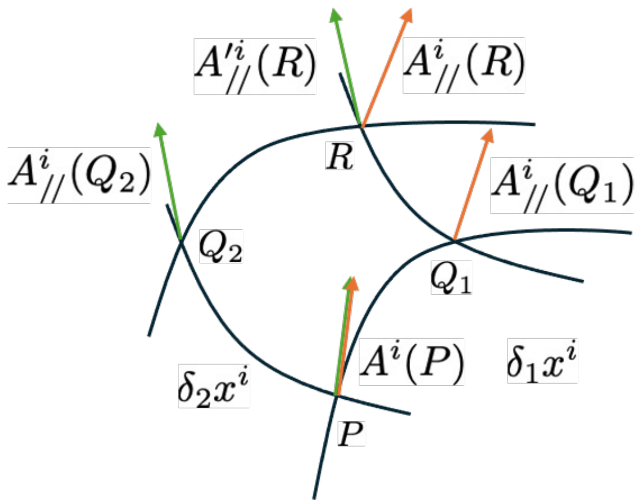

Figure 1.2: 曲率

あるベクトルを別の点まで異なる 2 つの経路で並行移動し、並行移動された 2 つのベクトルの差を測ることで「曲率」が定義できる。今回は

(1) $P \to Q_1 \to R$ の経路で移動させたベクトル $A^i_{//}(R)$

(2) $P \to Q_2 \to R$ の経路で移動させたベクトル $A'^i_{//}(R)$

上記 2 つのベクトルの差 δA^i を計算する。まずはそれぞれのベクトルを求めると

(1)

$$\begin{aligned} A^i_{//}(R) &= A^i_{//}(Q_1) - \Gamma^i{}_{jk}(Q_1)A^j(Q_1)\delta_2 x^k \\ &= \left[A^i - \Gamma^i{}_{jk}A^j(\delta_1 x^k + \delta_2 x^k) - \left(\frac{\partial \Gamma^i{}_{jl}}{\partial x^k} - \Gamma^i{}_{nl}\Gamma^n{}_{jk}\right)A^j \delta_1 x^k \delta_2 x^l\right]_P \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} A'^i_{//}(R) &= A^i_{//}(Q_2) - \Gamma^i{}_{jk}(Q_2)A^j(Q_2)\delta_2 x^k \\ &= \left[A^i - \Gamma^i{}_{jk}A^j(\delta_1 x^k + \delta_2 x^k) - \left(\frac{\partial \Gamma^i{}_{jl}}{\partial x^k} - \Gamma^i{}_{nl}\Gamma^n{}_{jk}\right)A^j \delta_1 x^k \delta_2 x^l\right]_P \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \delta A^i &= A'^i_{//}(P \to Q_2 \to R) - A^i_{//}(P \to Q_1 \to R) \\ &= R^i{}_{jkl}A^j \delta_1 x^k \delta_2 x^l \end{aligned}$$

Chapter 2

測地線方程式

超大質量天体は、降着円盤と呼ばれるガスなどの物質で構成された円盤を持つことが多い。降着円盤は中心天体を高速で公転しており、摩擦の影響で電磁波を放っている。今回は、重力中心から一定距離に幾何学的に薄い降着円盤を設定し、それがどのように観測されるのかを計算する。

この計算をするためには、光が時空上でどのような軌道を描くのかを知っておかなければならない。これを記述する方程式が、質量のない粒子における測地線方程式であり、まずはこれを導出する。

2.1 クラインゴルドン方程式

$c = 0, m = 0$ において、クラインゴルドン方程式は以下のように書ける

$$0 = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \phi(x) \tag{2.1}$$

振動数が非常に大きい波を考えると、波は以下のように書ける

$$\phi(x) = C(x) \exp\left(\frac{S(x)}{\epsilon} i\right) \quad \epsilon \ll 1 \tag{2.2}$$

これをまとめると、以下のように書ける。

$$0 = g^{jk}(x) \nabla_j \nabla_k \left[C(x) \exp\left(\frac{S(x)}{\epsilon} i\right)\right]$$

2.2 導出

上記で求めた式を少しづつ計算していく

$$\begin{aligned}
\nabla_k \left[C(x) \exp\left(\frac{S(x)}{\epsilon} i\right)\right] &= \left[(\nabla_k C(x)) + \left(\frac{C(x)}{\epsilon} i\right)(\nabla_k S(x))\right] \exp\left(\frac{S(x)}{\epsilon} i\right) \\
\nabla_j \nabla_k \left[C(x) \exp\left(\frac{S(x)}{\epsilon} i\right)\right] &= [\nabla_j \nabla_k C(x) + \frac{2}{\epsilon} i (\nabla_j C(x))(\nabla_k S(x)) \\
&\quad + \frac{C(x)}{\epsilon} i (\nabla_j \nabla_k S(x)) - \frac{C(x)}{\epsilon^2} i (\nabla_j S(x))(\nabla_k S(x))] \exp\left(\frac{S(x)}{\epsilon} i\right) \\
g^{jk}(x) \nabla_j \nabla_k \left[C(x) \exp\left(\frac{S(x)}{\epsilon} i\right)\right] &= g^{jk}(x) \nabla_j \nabla_k C(x) \exp\left(\frac{S(x)}{\epsilon} i\right) \\
&\quad + [2(\nabla_j C(x))(\nabla_k S(x)) + C(x)(\nabla_j \nabla_k S(x))] \frac{g^{jk}(x)}{\epsilon} i \exp\left(\frac{S(x)}{\epsilon} i\right) \\
&\quad - C(x)(\nabla_j S(x))(\nabla_k S(x)) \frac{g^{jk}(x)}{\epsilon^2} i \exp\left(\frac{S(x)}{\epsilon} i\right)
\end{aligned}$$

ここで書いた項はすべてゼロになるので

$$\begin{cases} O(0) : g^{jk}(x)\nabla_j\nabla_k C(x) = 0 \\ O(\epsilon^{-1}) : 2g^{jk}(x)(\nabla_j C(x))(\nabla_k S(x)) + g^{jk}(x)C(x)(\nabla_j\nabla_k S(x)) \\ O(\epsilon^{-2}) : g^{jk}(x)(\nabla_j S(x))(\nabla_k S(x)) = 0 \end{cases}$$

上の関係式の中で、$O(\epsilon^{-2})$ 部分は測地線方程式そのものになっている。$O(\epsilon^{-2})$ 式全体の共変微分をとると

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_j(\nabla^i S(x))(\nabla_i S(x)) \\ &= (\nabla_j\nabla^i S(x))(\nabla_i S(x)) + (\nabla^i S(x))(\nabla_j\nabla_i S(x)) \end{aligned}$$

波数ベクトル $\mathbf{k}$、アフィンパラメータ λ に対して以下の関係式が成り立つと仮定する。

$$\nabla^i S = k^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$$

すると、$O(\epsilon^{-2})$ 式は以下のように書き換えられる。

$$0 = (\nabla_j k^i)k_i + k^i(\nabla_j k_i)$$

一般のテンソルに対する共変微分

$$\begin{aligned} \nabla_c T^{a_1\cdots a_i}{}_{b_1\cdots b_j} &= T^{a_1\cdots a_i}{}_{b_1\cdots b_j,c} \\ &+ \sum_{d=1}^{m} \Gamma^{a_d}{}_{fc} T^{a_1\cdots a_{d-1} f a_{d+1}\cdots a_i}{}_{b_1\cdots b_j} \\ &- \sum_{e=1}^{m} \Gamma^{f}{}_{b_e c} T^{a_1\cdots a_i}{}_{b_1\cdots b_{e-1} f b_{e+1}\cdots b_j} \end{aligned}$$

共変微分が上記のように書けたことを思い出すと、式は以下のようにまとめられる。これが質量のない物質における測地線方程式である。

$$0 = \frac{d^2x^a}{d\lambda^2} + \Gamma^a{}_{bc}\frac{dx^b}{d\lambda}\frac{dx^c}{d\lambda}$$

2.3 アインシュタイン方程式

2.4 シュバルツシルトの外部解

Chapter 3

シュバルツシルト時空における天体の軌道

3.1　軌道の安定性

//

$$\bar{w}_j = () \int$$

メモ用

$$1 = 0$$

$$\begin{cases} 1 = 0 \\ 1 = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

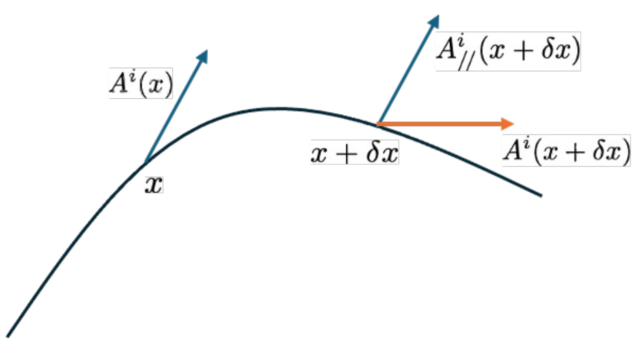

Figure 3.1: 並行移動

(1)