Содержание

Глава 1

Введение

Теория игр - это раздел математики, изучающий оптимальные стратегии в жизненных ситуациях. Теория игр широко применима в экономике [3],социальных науках [2] и медицине [18].

Постановки выделяются поиском форм гармонического существования общества, экономическим урегулированием нежелательного поведения.

Цель работы - найти оптимальную форму аукциона в сфере образования.

Задача работы - исключить нежелательное поведения поставщиков в аукционах. К такому поведению относится:

- Сговор между участниками аукциона;
- Инсайдерская торговля;
- Влияние долговой нагрузки.

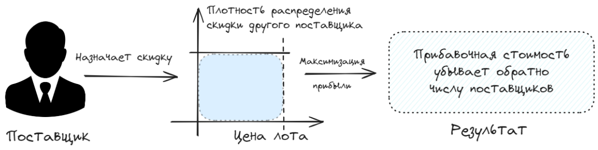

Рис. 1.1: Аукцион

Дополнительно были исследованы модели разделов для анализа бюджетного распределения.

Для выполнения поставленных целей автор разделил описание на тематические главы. В первой главе представлен обзор предметного языка, описаны экономические постановки, которые имеют развитое представление в теории игр. В главе 2 описаны основные теоремы и математический аппарат теории игр, который используется для поиска оптимальных моделей реальных задач. В главе 3 приведено полное описание хода работ.

В данной главе приведено описание математического аппарата, используемого для описания ситуаций, мотивации игроков [23].

1.1 Основные определения

В разделе представлены термины, которые будут активно использоваться в теоретическом описании моделей.

1.1.1 Игроки в различных постановках

Для изучения отношений и конфликтов интересов между двумя сторонами, одна из которых (принципал) нанимает другую (агента) для выполнения определенной задачи или достижения определенной цели, вводятся определения ролей. Принципал и агент - это две ключевые роли в теории игр.

Определение **Принципал** - лицо, которое делегирует выполнение задачи или принятие решений агенту. Принципал имеет определенные цели или интересы, которые он хочет достичь, и он нанимает агента для выполнения работы, связанной с этими целями. Принципал может контролировать или влиять на действия агента через различные механизмы стимулирования или контроля.

Определение **Агент** - сторона, которая нанимается принципалом для выполнения определенной работы или достижения цели. Агент действует от имени принципала, но может иметь свои собственные интересы или цели, которые могут не совпадать полностью с интересами принципала. В контексте теории принципал-агент, ключевыми аспектами являются мотивация агента и меры контроля принципала для обеспечения выполнения задачи в соответствии с его интересами.

Определение **Рациональным** называют игрока, способного принимать решения, направленные на максимизацию его выигрыша или ожидаемой полезности, учитывая его предпочтения и информацию о среде.

Рациональность игрока является ключевым предположением в анализе теории игр и обычно используется в моделировании поведения игроков для прогнозирования и анализа исходов игр.

1.1.2 Полезность

В теории игр утилитарность обычно описывается как числовая оценка, представляющая собой меру выигрыша или удовлетворенности, которую игрок получает от определенного исхода игры. Утилитарность используется для оценки предпочтений игроков и выражения их целей и интересов в контексте игры.

Формально, утилитарность игрока i обычно обозначается как u_i и является функцией от исхода игры, которая отображает каждый исход в числовое значение, представляющее собой удовлетворенность или ценность для игрока i. Таким образом, если s - исход игры, то $u_i(s)$ представляет утилитарное значение для игрока i от данного исхода.

Утилитарность игрока может зависеть от различных факторов, таких как его предпочтения, цели, ресурсы и контекст игры. Цель каждого игрока заключается в выборе стратегии, которая максимизирует его утилитарное значение, т.е. приносит ему наибольшую выгоду или удовлетворение в рамках заданной игры.

1.1.3 Стратегия игр

Определение **Марковской цепью** называют случайный процесс представляющий последовательность, где вероятность следующего события зависит только текущего состояния системы.

Таким образом, для системы с множеством состояний S свойство марковости запишется следующим образом для $\forall S$:

$$P(x_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, \ldots, x_0 = i_T),$$

где $i_0, \ldots, i_j \in S$

Определение **Стратегия** - это полный набор решений, которые игрок применяет при всевозможных ситуациях. Стратегия определяет набор действий игрока в любой момент времени и для каждого возможного сценария происходящего, способного привести к каждой ситуации.

Определение **Чистой** называют стратегию, которая предполагает, что игрок принимает решение a с вероятностью равной 1 $p(a) = 1$.

Иными словами, игрок использует только одно действие или одну последовательность действий в каждой возможной ситуации в игре.

Определение **Доминантной** называют стратегию для игрока, которая гарантирует наибольший выигрыш вне зависимости от действий других игроков.

1.1.4 Равновесие

Определение **Равновесие по Нэшу** - концепция в теории игр, предложенная Джоном Нэшем, в которой каждый игрок в состязании выбирает стратегию, которая является оптимальной для него, учитывая стратегии, выбранные остальными игроками. [17]

Введем обозначение s_{-i}, которое используется для обозначения стратегий всех игроков, кроме игрока i.

Пусть S_i - множество стратегий для игрока i. Тогда профиль стратегий $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ является равновесным по Нэшу, если для каждого игрока i выполняется:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \forall s_i \in S_i$$

В равновесии по Нэшу каждый игрок выбирает свою стратегию, оптимизируя свой выигрыш, учитывая стратегии всех остальных игроков, и ни один игрок не имеет желания изменить свою стратегию, учитывая стратегии других игроков.

1.2 Социальный выбор

В экономике "social choice"(общественный выбор) - это область, изучающая методы агрегирования индивидуальных предпочтений или мнений членов общества для принятия коллективных решений или определения социальных политик. [2] В центре внимания стоит вопрос о том, как из индивидуальных предпочтений или мнений сделать общественное решение или выбор, учитывая разнообразие интересов и предпочтений в обществе.

Механизмы представляют в тематике выборов [7], организации эффективной совместной работы коллектива [9].

1.2.1 Математическая постановка

В теории игр общественный выбор обычно определяется как процесс агрегирования предпочтений или мнений всех игроков с целью принятия коллективного решения. Этот процесс может быть использован для определения того, какая стратегия или исход будет выбрана в игре, учитывая предпочтения и интересы всех участников.

Для определения общественного выбора в теории игр часто используется понятие равновесия. Общественный выбор в этом контексте может быть понят, как такой исход игры, который учитывает стратегии всех игроков и удовлетворяет определенным критериям эффективности или справедливости.

Один из способов определения общественного выбора в теории игр - это использование концепции равновесия по Нэшу. Общественный выбор в этом случае может быть определен, как профиль стратегий, при котором ни один игрок не имеет стимула отклониться от своей стратегии, учитывая стратегии других игроков. Таким образом, общественный выбор в равновесии по Нэшу представляет собой некоторый устойчивый исход игры, который удовлетворяет критериям стабильности и эффективности.

Другие подходы к определению общественного выбора включают использование различных критериев, таких как социальная полезность, равенство или справедливость, в зависимости от контекста игры и поставленных целей.

Пусть дана игра с N игроками, где каждый игрок i выбирает свою стратегию из множества стратегий S_i. Пусть также $u_i(s_1, s_2, ..., s_N)$ - функция полезности игрока i относительно данного профиля стратегий $(s_1, s_2, ..., s_N)$.

Общественный выбор (общественное решение) - это такой профиль стратегий $(s_1^*, s_2^*, ..., s_N^*)$, где каждая стратегия s_i^* выбирается с учетом стратегий всех остальных игроков, таким образом, что:

$$s_i^* \in \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*),$$

для всех $i = 1, 2, ..., N$, где s_{-i}^* - это профиль стратегий всех игроков, кроме i.

Это означает, что каждый игрок выбирает свою стратегию, максимизируя свою полезность относительно стратегий остальных игроков. Общественное решение является таким профилем стратегий, при котором ни один игрок не имеет стимула отклониться от своей стратегии, учитывая выбор остальных игроков.

1.3 Формы организации совместного труда

Одной из наиболее влиятельных и авторитетных работ является научный труд американских экономистов Пола Дугласа и Чарльза Кобба "A theory of production"[6].

Эта работа представляет собой одну из первых попыток формализовать связь между входами и выходами в производственном процессе и стала отправной точкой для развития теории производства и анализа затрат. В книге авторы представили известную сегодня *функцию Кобба-Дугласа*, которая описывает, как производственный выход зависит от входных факторов.

Определение **Функция Кобба-Дугласа** описывает связь между факторами производства и производственным результатом. Она используется для анализа того, как входные факторы влияют на объем производства.

$$Q = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta},$$

где:

- Q - объем производства (выход, производственный результат);
- L - количество труда (входной фактор);
- K - количество капитала (входной фактор);
- A - технический коэффициент (иногда интерпретируемый как общая производительность);
- α и β - коэффициенты эластичности выхода по труду и капиталу соответственно.

Функция Кобба-Дугласа имеет следующие ключевые особенности:

- Линейная в обоих аргументах: объем производства зависит от величины каждого входа в первой степени;
- Постоянные отдачи от масштаба: суммарная эластичность по входам $(\alpha + \beta)$ равна единице, что означает, что при увеличении затрат на труд и капитал в одинаковой пропорции объем производства увеличивается в той же пропорции.

1.3.1 Кооперативные игры

Определение **Кооперативная игра** - модель в теории игр, в которой участники объединяют свои ресурсы и стремятся к совместной реализации общей цели. Каждый игрок может входить в различные коалиции с другими игроками, и выигрыш каждой коалиции зависит от участия и вклада ее членов.

Пусть дана кооперативная игра (N, v), где:

- $N = \{1, 2, ..., n\}$ - множество игроков (участников игры);
- v - функция выигрыша (характеристическая функция), которая присваивает каждой коалиции $S \subseteq N$ значение $v(S)$, представляющее общую выгоду или выигрыш, получаемый этой коалицией.

Таким образом, для любой коалиции игроков $S \subseteq N$, значение $v(S)$ представляет собой объективную меру выгоды, которую эта коалиция может достичь совместными усилиями.

Математически функция выигрыша $v(S)$ должна удовлетворять следующим условиям:

- $v(\emptyset) = 0$ - выигрыш пустой (несуществующей) коалиции равен нулю;
- $v(N)$ - выигрыш всего множества игроков равен общему выигрышу, получаемому от всей кооперативной игры.

Определение **Вектор Шепли** - это метод распределения выигрыша в кооперативных играх, который учитывает вклад каждого игрока в формирование коалиций.

Для расчета вектора Шепли $(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)$ для игры с n игроками, где ϕ_i - это вклад игрока i в выигрыш коалиции, используется следующая формула:

$$\phi_i = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|! \cdot (n - |S| - 1)!}{n!} \cdot (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

где:

- N - множество игроков в игре;
- $v(S)$ - значение выигрыша для коалиции S;
- $|S|$ - количество игроков в коалиции S;
- n - общее количество игроков в игре.

Эта формула описывает вклад каждого игрока i в выигрыш, учитывая все возможные коалиции, в которых он участвует. Вклад игрока i определяется разницей в выигрыше между коалициями, в которых игрок присутствует и отсутствует, взвешиваемой на фактор, учитывающий количество способов образования таких коалиций.

1.3.2 Управление

Управление строится на построении договоренности между сторонами, которые устанавливаются через количественные и качественные показатели. Опишем методологию.

Определение **KPI (Key Performance Indicator)** - это ключевой показатель эффективности, который используется в бизнесе для измерения достижения организационных целей и оценки производительности на основе конкретных метрик. KPI представляют собой количественные или качественные показатели, которые помогают компаниям оценить, насколько успешно они достигают своих целей и выполняют стратегические задачи.

Примеры KPI включают выручку от продаж, чистую прибыль, уровень удовлетворенности клиентов, долю рынка, процент выполнения проектов в срок и т. д. Эти показатели помогают компаниям определить, где они находятся относительно своих целей и принимать соответствующие меры для улучшения производительности и достижения успеха.

Определение **SLA** (Service Level Agreement) - это формальный документ, заключаемый между поставщиком услуг и клиентом, который устанавливает обязательства и ожидания сторон относительно качества предоставляемых услуг.

Основные компоненты SLA обычно включают в себя четкое определение предоставляемой услуги, включая область применения, функциональные возможности и ограничения. Определение обязательств и ответственности поставщика и клиента, включая процедуры уведомления, реагирования на инциденты и решения споров. SLA задает уровни сервиса (SL) - это ключевые критерии и метрики, которые определяют качество предоставляемой услуги в рамках.

Применительно к сфере поставок можно выделить SLA следующий набор целевых показателей:

- Время выполнения заказа;
- Качество товара;
- Своевременность доставки;
- Уведомления об изменениях.

Сервис различает по уровню критичности. В порядке возрастания:

- Наилучшие пожелания;
- Стандартный уровень;
- Критически важный уровень.

Время	Качество	Доставка	Уведомления
95% за 24 часа	менее 1% брака	100% в срок	немедленно
80% за 48 часов	менее 5% брака	95% в срок	за 24 часа
без гарантий	без гарантий	без гарантий	без гарантий

Таблица 1.1: Примеры правил контрактов

Определение **Матрица обязательств** (SL) - перекрестная таблица, задающая обязательства согласно уровню обслуживания.

Пример матрицы обязательств Таблица 1.1

Определение **IPO**(Initial public offering) - процесс первой публичной продажи акций компании на фондовом рынке неограниченному кругу лиц.

В ходе IPO все инвесторы приобретают акции по единой для всех цене. После IPO инвесторы начинают торговать этими акциями друг с другом, и цена на них может как расти, так и падать — всё зависит от баланса спроса и предложения, который, как правило, определяется положением дел в компании и рыночной конъюнктурой.

Предметно раскрыто в статье [13].

1.3.3 Команды

Определение **Команда** - набор индивидуумов, объединенных общей целью или задачей, и взаимодействующих между собой для ее достижения или выполнения. Каждый участник команды вносит свой вклад в общие усилия и зависит от усилий других членов команды для достижения общей цели.

На практике представляет интерес вопрос стимулирования участия её членов в групповых проектах и приложения командных усилий [9]. Индивидуальные и коллективные инициативы влиять на мотивацию членов команды и, в конечном счете, на результаты работы группы. Оценка влияния инцентивов на производительность и результаты работы команды позволяет выдвигать соответствующие выводы и рекомендации.

1.3.4 Франшиза

Определение **Франшиза** - форма бизнеса, при которой владелец бренда или права на товары или услуги (франчайзер) предоставляет индивидуальным предпринимателям или компаниям право на использование своего бренда, бизнес-модели и поддержку в обмен на определенные платежи, обычно в форме единовременного взноса и ежемесячных платежей за использование бренда и поддержку. [5]

Основные характеристики франшизы включают в себя:

- Предоставление права на использование бренда, товарных знаков, товаров и услуг, а также бизнес-модели франчайзера;

- Предоставление поддержки и обучения франчайзи в запуске и ведении бизнеса;
- Систематизированная поддержка со стороны франчайзера, такая как маркетинговая поддержка, обновление бизнес-модели и поставка товаров и услуг;
- Франчайзер требует от франчайзи соблюдения определенуых стандартов и процедур, чтобы обеспечить единый стандарт качества бренда во всех точках продажи.

Франчайзер получает возможность расширения своего бизнеса без необходимости вложения собственных средств и управления новыми точками продажи, в то время как франчайзи получает доступ к узнаваемому бренду, установленной бизнес-модели и поддержке со стороны опытного партнера.

1.4 Экономическое регулирование

В разделе рассмотрено определение блага, его формы в экономических и социальных постановках.

Основные показатели экономического благополучия:

- Инфляция π: Измеряет изменение уровня цен за определённый период времени;
- Мультипликатор депозитов m: Отношение между депозитами и резервами банков;
- Ставка резервного обязательства RR: Процент средств, которые банки должны удерживать в резерве;
- Денежная база MB: Общая сумма денег в обращении плюс резервы банков;
- Денежное предложение M: Общая сумма денег, находящаяся в обращении в экономике;
- Процентная ставка r: Цена за заем капитала или доход от инвестиций;
- ВВП Y: Общая стоимость всех произведённых товаров и услуг за определённый период времени;
- Безработица u: Процент людей, которые активно ищут работу, но не могут её найти.

1.4.1 Монетарная политика

Определение **Денежно-кредитная политика** - это набор действий, направленных на коррекцию макроэкономических показателей. Целью такой политики является поддержание финансовой активности и устойчивого развития экономики.

Основные задачи монетарной политики:

- обеспечение экономического развития;
- регулирование количества денежной массы в экономике;
- сохранение стабильных цен, контроль инфляции;
- поддержка курса национальной валюты;
- повышение уровня занятости населения.

Вопросы оптимального регулирования активно изучаются в [22]. Регулирование выполняется с помощью инструментов финансовой инженерии [20]. Среди них можно выделить управление ставкой рефинансирования, уровнем резервирования.

Выделяют различные стратегии монетарной политики, различающиеся для стран с различным уровнем развития.

Определение **Инфляционное таргетирование** [4] - монетарная стратегия, направленная на удержание целевого уровня инфляции.

Исходя из экономической ситуации центральный банк использует инструменты. Такая стратегия выделяется прозрачностью намерений банка, политика регулирования однозначно интерпретируема намерением удержать ключевой показатель.

Существуют различные способы создания денежной массы.

Определение **Монетизация долга** - процесс, при котором центральный банк приобретает государственные облигации на открытом рынке и финансирует.

Таким образом, правительство приобретает возможности для покрытия бюджетных дефицитов без явной потребности в изменении налоговой политики или поиске займа.

1.4.2 Макроэкономические модели

Определение **Формула Фишера**

$$i = r + \pi$$

Эта формула устанавливает связь между номинальной процентной ставкой (i), реальной процентной ставкой (r) и ожидаемым уровнем инфляции (π). Она позволяет анализировать, как изменения в инфляции влияют на номинальные процентные ставки.

Определение **Модель Филипса**

$$\pi = \pi^e - \alpha(u - u^*),$$

где:

- π представляет уровень инфляции;

- π^e - ожидаемый уровень инфляции;
- u^* - естественный уровень безработицы;
- u - уровень безработицы;
- α - параметр, описывающий связь между инфляцией и безработицей.

Определение **Модель IS-LM**

$$Y = C(Y - T) + I(r) + G$$

$$M = L(Y, i),$$

где:

- Y - ВВП;
- C - потребление;
- T - налоги;
- I - инвестиции;
- G - государственные расходы;
- r - процентная ставка;
- M - денежная масса;
- L - спрос на деньги.

Модель иллюстрирует взаимосвязь между уровнем дохода, процентными ставками и денежным предложением в экономике.

1.4.3 Деженые потоки

Определение **Денежный поток** - денежные поступления и выплаты, которые происходят в течение определенного периода времени в результате бизнес-операций компании или инвестиционной деятельности. Он представляет собой выручку, которая остается после вычета всех расходов из общего объема поступлений.

Денежный поток может быть положительным, если поступления превышают расходы, или отрицательным, если расходы превышают поступления.

Для бизнеса денежный поток является ключевым показателем его финансового состояния и управления ликвидностью. Для инвесторов он служит основой для оценки доходности инвестиций и оценки риска.

Примеры классификации денежного потока Таблица 1.2:

Денежный поток можно разделить на три основные категории:

Тип потока	Пример
Операционный	продажи товаров, заработная плата, закупки
Инвестиционный	операции с активами, вложения
Финансовый	кредиты, облигации и дивиденды

Таблица 1.2: Примеры денежных потоков

- Операционный денежный поток связанны с основной деятельностью компании;
- Инвестиционный денежный поток связанны с инвестиционными операциями;
- Финансовый денежный поток связанны с финансовыми операциями.

Определение **Денежная масса** - совокупный объем наличных денег и денежных средств, находящихся в обращении в экономике страны в определенный момент времени. Она включает в себя различные формы денег, такие как монеты, банкноты, депозиты наличности в банках и другие ликвидные активы, которые могут быть легко использованы для совершения платежей или обмена на товары и услуги.

Денежная масса измерена различными способами:

- Наличные деньги M_0: банкноты и монеты в обращении, находящиеся вне банковской системы;
- Широкая денежная масса M_2: включает M_0 и депозиты наличности в коммерческих банках, чековые счета и другие формы ликвидных активов.

Контроль и регулирование денежной массы является важным инструментом макроэкономической политики, поскольку она влияет на уровень инфляции, процентные ставки, уровень экономической активности и другие аспекты экономики.

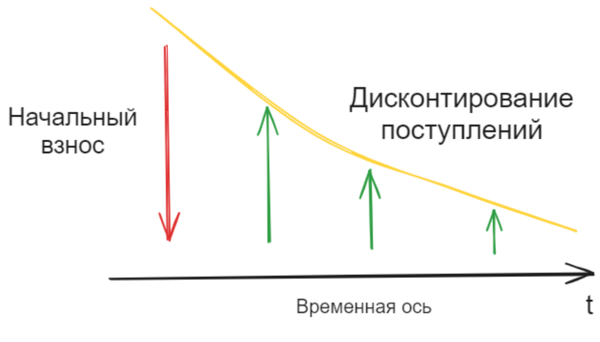

Рис. 1.2: Комбинаторные аукционы подразумевают различие в полезности агента в обладание нескольких товаров

Определение **Чистая произведения стоимость** - сумма дисконтированных значений потока платежей.

$$NPV = \sum_{t=0}^{N} \frac{CF_T}{(1+i)^t},$$

где CF_t - (cash flow) поток денег на момент времени t 1.2.

Принято также выделять начальную инвестицию IC (invested capital):

$$NPV = -IC + \sum_{t=1}^{N}$$

Ставка рефинансирования задает ставку кредитования в банках.

Глава 2

Аппарат теории игр

Приведены ключевые теоремы для описания аукционов.

В главе описывается математический аппарат, использующийся в теории игр.

2.1 Ассиметрия информации

Неполная информация о рыночной ситуации влияет на стратегии игроков. Введем основные определения направления.

Определение **Сигнал** s_i представляет собой информацию, которую игрок получает о состоянии игры или о стратегии другого игрока перед принятием своего решения.

Сигналы могут оказывать влияние на стратегии игроков, изменяя их ожидания или оценки о ситуации в игре. Использование такой информации может быть ключевым для принятия оптимального решения в игре с неопределенностью или неполной информацией.

Определение **Байесова игра**[12] [11][10] - это игра в теории игр, где игроки имеют неполную информацию о стратегиях и/или типах других игроков, но обладают апостериорными вероятностями о возможных значениях этой информации на основе предшествующей информации или наблюдений. Этот тип игр моделирует ситуации, в которых игроки принимают решения в условиях неопределенности и используют свои апостериорные вероятности для принятия решений. В байесовской игре задается следующее:

- Множество игроков: $N = \{1, 2, ..., n\}$;
- Пространство типов игрока i: T_i;
- Пространство типов игрока i: T_i.
- Функция полезности игрока i: $u_i : S_1 \times T_1 \times ... \times S_n \times T_n \to \mathbb{R}$;
- Функции апостериорных вероятностей игроков: $\pi_i : H_i \times S_{-i} \to [0, 1]$, где H_i - множество историй, наблюдаемых игроком i;

- Пространство историй: $H = \prod_{i=1}^{n}(S_i \times T_i)$.

Байесовская игра заключается в том, чтобы для каждого игрока i выбрать стратегию $s_i \in S_i$ в зависимости от его типа $t_i \in T_i$, учитывая его апостериорные вероятности π_i. Ожидаемая полезность игрока i задается как:

$$U_i(s_i, t_i) = \int_{H_i} u_i(s_i, t_i, s_{-i}, t_{-i}) \cdot \pi_i(h_i \mid s_{-i}, t_{-i})\, dh_i,$$

где s_{-i} и t_{-i} обозначают стратегии и типы остальных игроков, а h_i обозначает историю, наблюдаемую игроком i.

Определение **Равновесие по Байесу** - это набор стратегий, где ни один игрок не имеет стимула изменить свою стратегию, учитывая свои апостериорные вероятности и действия других игроков.

2.1.1 Риски неполной информации

Моральный риск в сделках возникает вследствие невозможности участников в полной мере быть уверенными в отсутствии недобросовестных намерений у второй стороны.

Классическим примером в литературе является заключение страхового контракта. Застрахованный клиент имеет меньшие риски в несчастных случаях, в следствие может проводить более рискованные действия, ведущие к потерям.

Проблема также часто встречается в постановках кредитования и денежного вознаграждения агентов.

В постановках кредитования и страхования репутация проверяется в автоматическом порядке с помощью интерпретируемых классификаторов, основанных на алгоритме машинного обучения.

Пусть x -вектор переменных клиента, D - обучающая выборка, θ - параметры обучения классификатора. Тогда при обучении классификатор как правило максимизируется правдоподобие

$$\max_{\theta} p(D|\theta)$$

Определение **Неблагоприятный отбор** [1] - рыночная ситуация, при которой из-за разной осведомлённости участников сделки в выигрыше оказываются самые недобросовестные. В результате рынок заполняют некачественные продукты.

2.1.2 Постановка

Теорема(Об огибающей) Пусть $f(x, \alpha)$ функции $\mathbb{R}^{n+l}$. Зададим оптимизационную постановку с помощью набора из m непрерывно дифференцируемых функций $g_j(x, \alpha)$:

$$\max_x f(x,\alpha), g_j(x,\alpha) \geq 0, j = 1,2,\ldots,m, x \geq 0$$

Оптимизационный ланrранжиан для постановки запишется как:

$$\mathcal{L}^*(\alpha) = f(x^*(\alpha),\alpha) + \lambda^*(\alpha) \cdot g(x^*(\alpha),\alpha)$$

Целевая функция задана как $V(\alpha) = f(x^*(\alpha),\alpha)$, где x^* - оптимум при заданных параметрах.

$$\frac{\partial V(\alpha)}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \mathcal{L}^*(\alpha)}{\partial \alpha_k}, k = 1,2,\ldots,l$$

На практике теорема о огибающей используется для анализа оптимизационных постановок, в которых возможное малое изменение параметра α влияет на значение целевой функции $f(x)$.

Теорема Пусть $f(x,\cdot)$ абсолютна непрерывна при всех $x \in X$. Предположим, что есть интегрируема функция $b(t) : [0,1] \to \mathbb{R}$, ограничивающая по модулю $f(t)$ в каждый момент времени $|f_t(x,t)| \leq b(t)$ для любых $x \in X$. Тогда V абсолютна непрерывна. Если,

$$V(t) = V(0) + \int_0^t f_t(x^*(s),s)ds$$

Теорема позволяет изучать смещения оптимума при изменении инструментального параметра.

Игрок определяется типом t, являющегося элементом множества T. Значение определяется в контексте как тип участника аукциона, денежной политики или рыночной структуры.

В работе Майерсона 1981 г. [16] тип означает степень информированности агента о ставках прочих игроков.

2.1.3 Парадокс Гроссман-Стиглитза

Определение **Гипотеза эффективности рынка** - концепция в финансовой экономике, которая предполагает, что цены финансовых инструментов полностью отражают всю доступную информацию о них.

Подробный предметный обзор представлен в работе [20]. Частным следствие гипотезы является заключение, что на финансовых рынках невозможно получить выгоду от торговли на основе публично доступной информации, так как цены уже отражают всю доступную информацию:

$$P_t = P'_t + \varepsilon_t, \tag{2.1}$$

где:

- P_t - текущая цена актива;

- P'_t - фундаментальная стоимость актива;

- ε_t - случайная ошибка или шум.

Определение **Парадокс Гроссмана и Стиглица** [8]

В реальных постановках крупные компании затрачивают значительные ресурсы на получение информации о состоянии предметной области.

$$P_t = \mathrm{E}[V_t | I_{t-1}], \tag{2.2}$$

здесь V_t представляет истинную стоимость.

2.2 Аукционы

2.2.1 Виды аукционов

Аукционы различаются по форме организации, открытости ставок игроков, правилам назначения цены и порядком задания ставки. Опишем исторически сложившееся аукционы:

- **Японский**. Продавец начинает с высокой цены и постепенно снижает ее, а покупатели могут выйти из аукциона, когда цена становится слишком низкой для них. Покупатель, который первым подтверждает цену, покупает товар по этой цене.

- **Английский**. Продавец начинает с низкой цены, а затем плавно повышает ее. Покупатели делают ставки, предлагая более высокие цены за товар. Аукцион заканчивается, когда нет новых ставок. Покупатель, сделавший последнюю ставку, покупает товар по этой цене.

- **Голладнский**. Похож на японский, но процесс изменения цены происходит гораздо медленее, чем в голландском аукционе.

Аукционы используются в различных сферах, и каждый из них имеет свои преимущества и недостатки.

По степени открытости:

Определение В **открытом** аукционе все участники могут видеть ставки других участников.

Пусть b_i обозначает ставку, сделанную участником i, S - множество всех участников. Тогда открытый аукцион можно представить как функцию, которая сопоставляет множеству ставок $\{b_i\}_{i \in S}$ победителя аукциона.

Определение В **закрытом** аукционе ставки участников остаются скрытыми от других участников.

Пусть b_i обозначает ставку, сделанную участником i, S - множество всех участников. Тогда закрытый аукцион можно представить как функцию, которая сопоставляет каждому участнику i его собственную ставку b_i и победителя аукциона.

2.2.2 Аукцион Викри

Определение **аукцион Викри** - одношаговый закрытый аукцион второй цены.

Аукцион Викри обладает свойствами:

- Правдивость и рациональность;
- Максимизирует социальное благо U;
- Определен для любых;
- Реализуем в полиномиальное время.

В аукционе типа Викри доминантная стратегия для игрока состоит в том, чтобы делать ставку, равную ожидаемой цене товара (его оценке), вне зависимости от ценности товара для него самого.

2.2.3 Теоретическое описание

Теорема 1 *Характеристика Байес-Нэшевого равновесия*

Стратегическое поведение s для выборки из n агентов обладает следующими свойствами:

- монотонность $\xi_i(v_i|s)$ монотонно возрастающая;
- неизменность платежа $p_i(v_i|s) = v_i\xi_i(v_i|s) \int_0^{v_i} \xi_i(z|s)dz + p_i(0|s)$.

Теорема 2 *Эквивалетность выручки*

Предположим, что каждый из n риск-нейтральных агентов имеет личное предпочтение относительно предмета аукциона из функции распределения F. Тогда для любых двух механизмов аукционов:

- в равновесном состоянии лот распределен одинаково;
- любой агент с оценкой товара 0 имеет полезность 0.

Таким образом, ожидаемая выручка и ставка участника с оценкой V будет иметь одинаковую выплату

Доказательство

k-ый момент распределения равен матожиданию k-ого наибольшего элемента из выборки мощностью n.

Для n независимых из распределения k-ый момент равен

$$\frac{n+1-k}{n+1}v_{max}$$

Следовательно для аукциона второй цены:

$$\frac{n-1}{n+1}v_{max}$$

Каждая симметричная игра имеет симметричное равновесие. Для симметричного равновесия верно, что наибольшая ставка равна наибольшей оценки полезности лота.

2.2.4 Обобщение постановки

Современные исследования аукционов представляют собой важную тему для рассмотрения. Приведем краткое описание постановок разбирающих их.

Кобминаторные аукционы

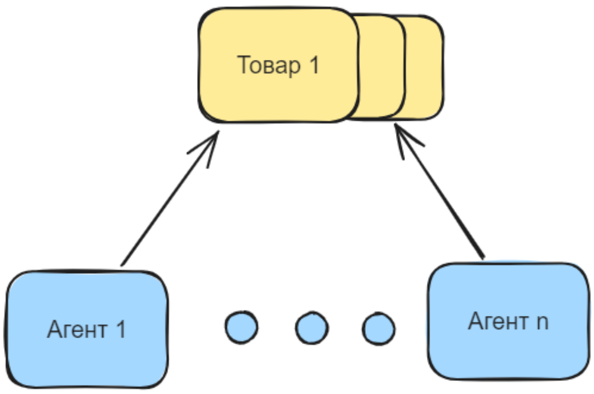

Рис. 2.1: Комбинаторные аукционы подразумевают различие в полезности агента в обладании нескольких товаров

Комбинаторные аукционы 2.1 обобщают постановку классического аукциона.

Обратные аукционы

В обратном аукционе поставщики соревнуются за право на выполнение лота.

2.3 Дизайн механизмов

Математический аппарат изучения аукционов приобрел самостоятельную форму, использующуюся в экономических и социальных постановках. [15]. Механизмы применимы и в медицине. Справедливый путь определения пересадки органов [18] нобелевским лауреатом Элвином Ротом описаны в статьях.

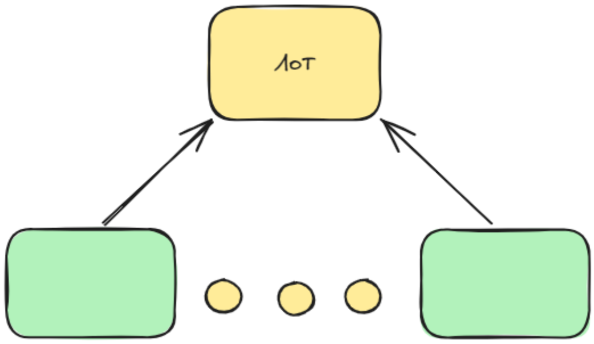

Рис. 2.2: Обратные аукционы позволяют эффективно распределять подряды на выполнение задач

В образовании механизмы используются для определения справедливых конкурсов и порядков передачи.

2.3.1 Постановка

Определение 1 **Байесова игра** это набор (N) таких что:

- **N** конечное множество агентов n;
- O множество исходов;
- $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \dots \Theta_n$ множество ;
- $u = (u_1, \dots, u_N)$, где $u_i : O \times \Theta \to \mathrm{R}$ функция полезности для игрока i.

Определение 2 **Механизм** для байесовой игры это пара (A, M), где:

- $A = A_1 \times \dots A_n$ набор действий доступный агенту i;
- $M : A \to \Pi(O)$ соединяет действия с распределением возможностей.

Таким образом, архитектору необходимо определить набор возможных действий для агентов, их связь с исходами и полезностью для агентов. Архитектору не доступно изменений самой среды и действий.

Задача заключается в подборе механизма, задающего для рациональных агентов надлежащее для задачи поведение - максимизацию общественного блага.

Определение 3 В заданной байесовой игре, механизм является **воплощением доминантной стратегии** социального выбора функции C, если для любого вектора полезности u, у игры есть равновесие в доминантной стратегии, и для любого равновесия a^* выполняется $M(a^*) = C(u)$.

Потенциальной проблемой на практике является отсутствие единственного равновесия. Как правило, разрешение заключается в дополнении условий симметричным ограничением.[15]

Воплощения различаются по природе:

- прямое. Все агенты одновременно посылают единственное сообщение в координационный центр.

- непрямое. Агенты посылают ряд сообщений.

2.3.2 Механизм Викри — Кларка — Гровса

Механизм Викри-Кларка-Гровса основан на *интервенции*. Для выяснения стоимости представляется мнимая (counterfactual) ситуация, в которой победитель не участвовал в аукционе.

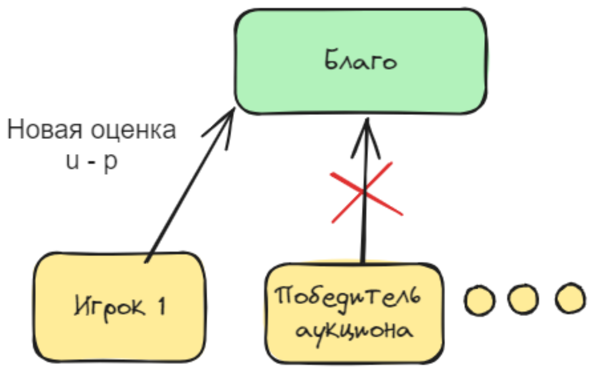

Рис. 2.3: Механизм Викри-Кларка-Гровса задает доверительный механизм распределения ресурсов.

Идея VCG-аукциона состоит в том, что каждый участник аукциона платит цену исходя из того, как его участие воздействует на всех остальных участников.

Глава 3

Моделирование

Рассматриваются постановки закупок в образовании в условиях неполной информации.

В главе приведено описание результатов работ по моделированию торгов.

3.1 Постановка неполной информации

Торги с неполной информацией [14].

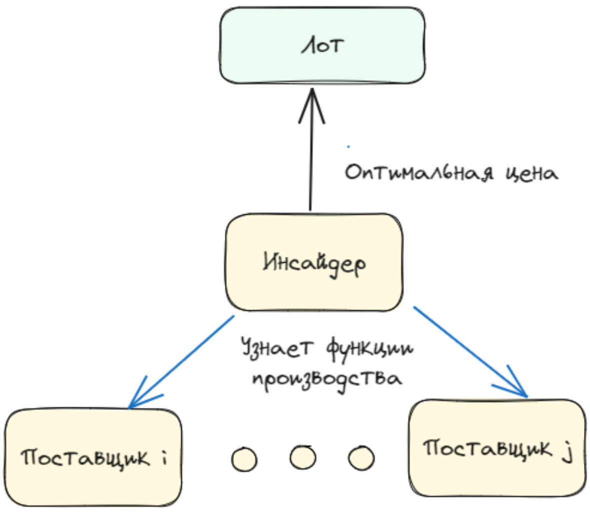

Рис. 3.1: Нежелательное поведение: инсайдер

3.1.1 Правовой обзор

Объем рынка государственных учреждений, реализующих общеобразовательные программы, составляет миллиарды рублей. Реформы бюджетирования образовательных организаций позволяют совершенствовать профессиональную компетенцию молодых кадров, создавать новые педагогические практики, повышать удовлетворенность работой педагогов и руководителей образовательного процесса. Закупки в сфере образования могут осуществляться через конкурс согласно федеральным законам

№239 и №44 и региональным нормативным ограничениям. Закупка осуществляется либо напрямую, либо через специальные механизмы государственных закупок. Чаще всего, в закупку вступают несколько ключевых поставщиков, которые конкурируют за поставку, предлагая наименьшую цену. Основным источником финансирования образовательных учреждений в настоящее время являются бюджетные ассигнования, рассчитанные на основе стоимости обучения обучающегося [3][4]. Согласно ФГОС в стоимость обучения включается:

- форма обучения;
- тип образовательной организации;
- сетевая формы реализации образовательных программ, образовательных технологий;
- специальные условия получения образования обучающимися с ОВЗ;
- обеспечение дополнительного профессионального образования педагогическим работникам;
- обеспечение безопасных условий обучения и воспитания; охрана здоровья обучающихся;
- другие особенности.

Распределение бюджета согласно [5] выполняется на трех уровнях:

- федеральный;
- региональный;
- муниципальный.

Объем субвенции, передаваемой местному бюджету из бюджета субъекта РФ на реализацию государственного стандарта задаётся формулой:

$$\Phi_{\text{гс}} = \mathrm{N}_{\text{с}} \times \text{У}_{\text{с}} + \mathrm{N}_{\text{г}} \times \text{У}_{\text{г}},$$

где:

- Nc - региональный расчетный подушевой норматив для сельской местности;
- Nг- региональный расчетный подушевой норматив для городской местности;
- Ус - количество сельских учащихся в данном муниципальном образовании;
- Уг - количество городских учащихся в данном муниципальном образовании.

Объем средств, выделяемых образовательному учреждению рассчитывается по следующей формуле:

$$\Phi = \mathrm{N} \times \Pi \times \text{У},$$

где:

- N - региональный расчетный подушевой норматив;
- У - число обучающихся в образовательном учреждении;
- П - поправочный коэффициент, установленный для данного образовательного учреждения.

Образовательное учреждение, самостоятельно определяет распределение на материально-техническое обеспечение и заработную плату работников образовательного учреждения, в том числе надбавки и доплаты к должностным окладам. Таким образом, школа конкурирует за бюджет определенного уровня в зависимости от уровня подчинения школы. Объем финансирования конкретных образовательных учреждений может быть пересмотрен путем корректировки поправочного коэффициента. Выделяют также дополнительные источники финансирования:

- платные дополнительные образовательные услуги;
- предпринимательская деятельность;
- налоговые льготы;
- средства спонсоров;
- добровольные пожертвования родителей.

Среди них можно выделить родительскую плату за услуги учреждений в сфере обучения и оздоровления детей, благотворительность и выручку школьных столовых. Заметим, что независимо от количества привлеченных средств бюджетное финансирование образовательного учреждения не снижается.

3.1.2 Постановка

Будем считать, что поставщики конкурируют за бюджет на сумму K_0 и предоставляют школе скидки ΔM для победы в закупке [19]. При этом поставщики несут издержки как постоянные FC, так и относительные p, пропорционально зависящие от бюджета K_0. Тогда прибыль поставщика будет равна:

$$K_0 - FC - pK_0 - \Delta M = (1-p) \cdot K_0 - FC - \Delta M \tag{3.1}$$

Функция полезности поставщика будет являться функцией прибыли, так как основной задачей поставщика будет являться максимизация его прибыли.

$$U = \pi \tag{3.2}$$

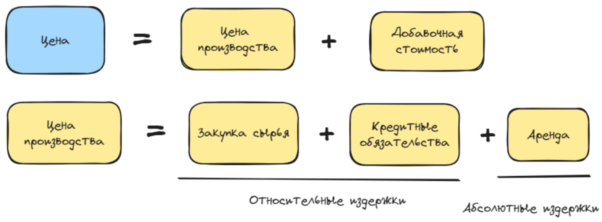

Рис. 3.2: Формирование цены

Определим также базовую функцию P и выручку TR поставщика:

$$\begin{cases} P = 1 - p \cdot K_0 - FC \\ TR = K_0 - \Delta M \end{cases} \tag{3.3}$$

Значение базовой функции зависит от способности поставщика к снижению относительных и постоянных издержек, определяет его конкурентность. В условиях равной скидки поставщик с большим значением базовой функции получит большую прибыль. Выручка также как и прибыль может быть оптимизируемой функцией для поставщиков - функцией полезности. Малые игроки, заключая сделки, ориентируются на максимизацию прибыли. Крупные, если сделка приносит неотрицательную прибыль, на максимизацию выручки. Соответственно, для крупных поставщиков функцией полезности будет являться функция выручки. Малые игроки:

$$U = \pi \to \max \geq 0 \tag{3.4}$$

Крупные игроки:

$$U = \mathrm{TR} \to \max, \pi \geq 0 \tag{3.5}$$

В экспертной постановке критерием крупного игрока в Российской Федерации можем считать ежегодную выручку более 400 млн рублей. В работе [21] разобран случай закрытого аукциона, в котором значение базовой функции поставщика неизвестна прочим игрокам. В условиях аукциона закупку выигрывает поставщик с наибольшей скидкой на лот. При моделировании процесса конкуренции предполагаем, что поставщик предполагает скидки прочих игроков равновероятными. При принятии собственного решения он подбирает скидку, исходя из максимизации математического ожидания полезности. В условиях n поставщиков, где $n = k + m$, где k - число поставщиков, максимизирующих прибыль, а m - число поставщиков, максимизирующих выручку, получаем:

$$\begin{cases} \Delta M_i = P_i \cdot \frac{n-1}{n} \\ \Delta M_i = K_0 \cdot\ \frac{n-1}{n} \text{ при } P_i - K_0 \cdot \frac{n-1}{n} \geq 0, \text{ иначе} \Delta M_i P_i \end{cases} \tag{3.6}$$

Заметим, что скидки игроков с ростом числа участников аукциона стремятся к их базовой функции. То есть лоты в условиях закрытого аукциона при достаточном числе участников будут продаваться по себестоимости товара.

3.1.3 Случай полной информированности игроков

Рассмотрим случай n поставщиков, в котором все игроки максимизируют прибыль и осведомлены о значениях базовой функции друг друга при фиксированном бюджете K_0. Для удобства пронумеруем игроков по возрастанию значению базовой функции P_i. Таким образом $P_1 \leq P_2 \leq \cdots \leq P_n$.

Заметим, что в заданных условиях игрок n может быть уверен, что при выставлении скидки $M_n > P_{n-1}$ он гарантированно выиграет аукцион. Тем не менее в целях максимизации математического ожидания прибыли он может быть заинтересован в выставлении меньшей скидки.

Игрок n обладает информацией о базовой функции прочих игроков, но не знает об их стратегиях выставления скидки. В условиях независимого принятия решения игроками вероятность победы в закупке $p(\Delta M_n > \Delta M_i)(i = 1, \ldots (n{-}1))$ при $M_n \leq P_i$ равна $\Delta M_n / P_i$, то игрок i с равной вероятностью выставляет скидку в меру своей базовой функции Pi, и 1 при $\Delta M_n P_i$, конкурирующий поставщик не станет заключать сделку с отрицательной прибылью.

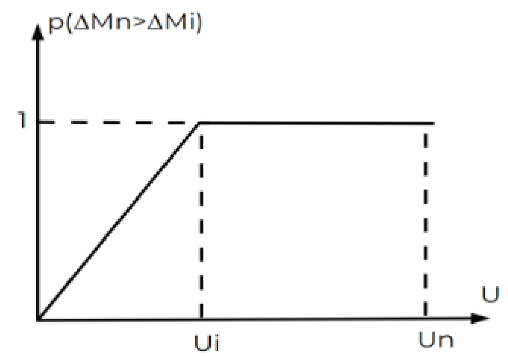

Рис. 3.3: Вероятность предоставить для поставщика n большую скидку чем конкурент i

Следовательно, математическое ожидание прибыли игрока n в введенных обозначениях запишется как:

$$\mathrm{E}n(\Delta M_n) = (Pn - \Delta M_n) p(\Delta M_n > \Delta M_1, \ldots, n-1) = \tag{3.7}$$

$$= (Pn - \Delta M_n)p(\Delta M_n > \Delta M_1)...p(\Delta M_n > \Delta M_n - 1) \tag{3.8}$$

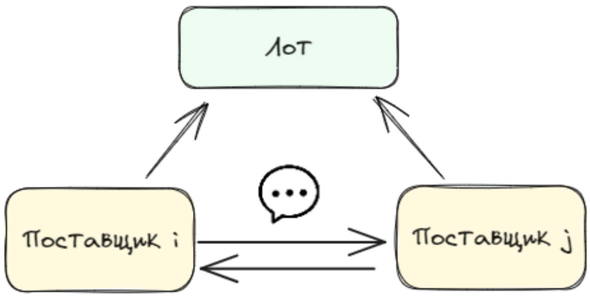

Рис. 3.4: Нежелательное поведение. Сговор

Полученная функция непрерывна, но не является гладкой от ΔM_n. Имеются точки разрыва производных при значениях аргумента равных P_i.

Предложим алгоритм поиска оптимальной скидки ΔM_n для игрока n. Разделим поиск на два логических этапа:

1. Определяем аргументы, соответствующие условному максимуму, на каждом из интервалов гладкости.

На интервале $\Delta M_n \in (P_{i-1}, P_i), (i = 1, \dots (n-1), P_0 = 0)$ математическое ожидание прибыли запишется как:

$$E_n = (P_n - \Delta M_n)\frac{\Delta M_n}{P_i} \dots \frac{\Delta M_n}{P_{n-1}}. \tag{3.9}$$

Оптимальное значение скидки соответствует условному локальному экстремуму на множестве $\Delta M_n \in (P_{i-1}, P_i)$.

Выполняем дифференцирование по ΔM_n правой части уравнения (3.9) и определяем максимум на интервале:

$$\begin{aligned} &\Delta M_n^{(i)} = \arg\max_{M_n} E_n \pi_n = \frac{P_n(n-i)}{n-i+1}, \text{ при} P_i > \frac{P_n(n-i)}{n-i+1} > P_{i-1}, \\ &\Delta M_n^{(i)} = P_{i-1}, \text{ при } \frac{P_n(n-i)}{n-i+1} < P_{i-1}, \\ &\Delta M_n^{(i)} = P_i, \text{ при } P_i > \frac{P_n(n-i)}{n-i+1} \end{aligned} \tag{3.10}$$

2. Находим оптимальное значение путем нахождения максимума конечного числа локальных максимумов. Оптимальное значение скидки $\Delta M_n^{(opt)}$ задается как:

$$\Delta M_n^{(opt)} = \arg \max_{\Delta M_n^{(1)}, \dots, \Delta M_n^{(n)}} \mathrm{E}\pi_n. \tag{3.11}$$

Заметим, что оптимальный вид скидки $\Delta M_n^{(opt)}$ в случае полной информированности будет определяться не только значением базовой функции поставщика P_n, но и соотношением между $P_1, \dots, P_n$.

Опишем применение алгоритма для игрока i. Вероятность победы в закупке игрока i задается как:

$$\begin{cases} p(\Delta M_i > \Delta M_j) = \frac{\Delta M_i}{Pj}, \quad i < j \\ p(\Delta M_i > \Delta M_j) = \frac{\Delta Mi}{Pj}, \quad M_i < P_j \;\; p(\Delta M_i > \Delta M_j) = 1 \;\Delta M_i \geq Pj, \quad i > j \end{cases} \tag{3.12}$$

Аналогично математическое ожидание прибыли игрока i запишется как:

$$E\pi_i(\Delta M_i) = (Pi - \Delta M_i)p(\Delta M_i > \Delta M_1, \ldots, M_{i-1}, M_{i+1}, .., M_n) = \tag{3.13}$$

$$= (P_i - \Delta M_i)p(\Delta M_i > \Delta M_1) \ldots p(\Delta M_i > \Delta M_n) \cdot \tag{3.14}$$

$E\pi_i(\Delta M_i)$ имеет точки разрыва производных в $P_1, \ldots, P_{i-1}$. Шаги оптимизационного алгоритма для игрока i аналогичны поставщику n. На первом этапе выделяются максимумы на интервалах гладкости $M_i \in (0, P_1), (P_1, P_2), \ldots, (P_{i-1}, P_i)$. На втором выполняется поиск оптимального решения по конечному набору локальных максимумов, полученных на шаге 1:

$$\Delta M_i^{(opt)} = \arg \max_{\Delta M^{(1)} i, \ldots, \Delta M_i^{(i-1)}} \mathrm{E}\pi_i \cdot \tag{3.15}$$

Подробно разберём случай двух игроков для интерпретации результатов. Игрок с большим значением базовой функции получит номер 2 и задаст скидку:

$$M_1 = P_1/2, P_1/2 < P_2, \text{иначе } \Delta M_1 = P_2 \tag{3.16}$$

То есть в условиях максимизации прибыли и достаточно конкурентных игроков имеем случай аналогичный закрытому аукциону. Если поставщик обладает значительным преимуществом, то выставляет скидку равную значению базовой функции более слабого конкурента.

Обратим внимание, что в текущей постановке задачи поставщики предполагали стратегию прочих игроков неизвестной. При максимизации выигрыша в наихудшей из возможных ситуаций получаем тривиальный вывод, что поставщик n предоставит скидку P_{n-1}, таким образом упуская выгоду от более рискованного предложения.

3.2 Модель раздела

3.2.1 Модель торгов между двумя игроками

Среди бюджетных ассигнований, помимо основных также есть и стимулирующие выплаты для руководителей образовательных учреждений. Их разделение выполняется органом местного самоуправления образовательных организаций на основе форм независимой оценки качества образования. Решение о размере премирования выносится в соответствии с разработанным нормативным актом органа местного самоуправления.

В рамках раздела мы приведем описание подход из теории игр для моделирование раздела ограниченной суммы между двумя школами. Раздел будет проходить в ходе последовательных торгов, определяющих пропорцию раздела бюджет, который выделит надзирающий орган. Таким образом мы определим места пристального внимания при составлении нормативных актов, определим качества игроков, позволяющие им приобрести большую долю при споре.

Для исследования раздела между двумя игроками используется модель последовательных торгов Ариэля Рубенштейна. Согласно модели участники последовательно предлагают долю раздела, заявленного бюджета. Если оппонент не согласен с предложением, он его отклоняет и выдвигает свой способ раздела. Игроки, заинтересованы в скорейшем разрешении спора, и потому обладают коэффициентом дисконта $\in (0,1)$, определяющий насколько ценно для игрока время, затраченное на переговоры. Таким образом, функция полезности игрока спустя ход U_{T+1} составляет δU_T при равных условиях раздела.

Изначально рассмотрим ситуацию торгов между двумя игроками. Функция полезности с учетом дисконтирования на временном шаге T в отсутствии раздела для игроков задается как:

$$\begin{aligned} &U_1^{(T)} = \delta_1^{T-1} r_T; \\ &U_2^{(T)} = \delta_2^{T-1}(1 - r_T), \end{aligned} \tag{3.17}$$

где r_T- доля раздела первого игрока, предложенная на шаге T.

Оптимальная стратегия для игрока - предлагать оппоненту минимальный раздел, на который он согласится:

$$\begin{aligned} &1 - r_T \geq \delta_2(1 - r_T + 1); \\ &\delta_1 r_T \geq r_{T+1}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Перепишем неравенства и получим:

$$\begin{aligned} &1 - \delta_2(1 - r_{T+1}) \leq r_T \leq \frac{r_{T+1}}{\delta_1}; \\ &1 - \frac{1 - r_T}{\delta_2} \leq r_{T+1} \leq r_T \delta_1. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Получаем неравенства на r_T, r_{T+1} :

$$\begin{aligned} &r_T \leq \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2};\ 1 - r_T \geq \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}; \\ &r_{T+1} \geq \frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2};\ 1 - r_{T+1} \leq \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

В заданных условиях игрок 1 предлагает раздел $r_1 = \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$ и соглашается не менее, чем на $r_2 \geq \frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}$.

Заметим, что сторона, выдвигающая предложение, имеет преимущество в величину дисконта. Также можем сделать логичный вывод, что с ростом собственного коэффициента дисконта величина раздела увеличивается. При росте дисконта противника - уменьшается. Таким образом, результат спора определяется инициативностью и терпеливостью участников.

Также полученная модель может быть использована для описания взаимодействие в сфере образования. Так управляющие лица, которыми могут быть представлены муниципальные органы, так и министерства, используют преимущество первого хода, задавая правила распределения бюджета, определяющие размер ассигнования. Также с целью снижения коэффициента дисконта подрядчика - его возможности для обсуждения размеров бюджетирования - задаются сжатые сроки на подачи заявлений, формирование отчетов, необходимых для получения финансирования. Таким образом, управляющий орган получает возможность распределять ограниченные ресурсы согласно делегированной ему стратегии бюджетирования.

3.2.2 Модель торгов между n игроками

Для случая торгов между n участниками используется модель Бэрона и Фереджона [3]. Право выдвигать предложение определяются случайно с равной вероятностью для каждого игрока $\frac{1}{N}$. Решение о разделе принимается, если K игроков его поддерживают, иначе право на голосование вновь случайно распределяется между игроками.

Полное решение в предположениях марковости и симметричности решения описано в [2]. Автор предлагает ввести две контрольные величины для игрока:

- R — ожидаемый выигрыш игрока, предлагающего раздел;
- r — ожидаемый выигрыш игрока, не предлагающего раздел.

Тогда с вероятностью $\frac{1}{N}$ игрок будет предлагать дележ и получит выигрыш R, иначе с вероятностью $\frac{N-1}{N}$ его выигрыш составит r. Так что для того, чтобы игрок согласился на предлагаемый дележ в данный момент времени, необходимо, чтобы ему предложили как минимум $\delta(\frac{1}{N}R + r\frac{N-1}{N})$.

Тогда сформированное предложение будет иметь вид:

- $1 - (K-1)\delta(R\frac{1}{N} + r\frac{N-1}{N})$ - предлагающему;
- $\delta(R\frac{1}{N} + r\frac{N-1}{N}) - K - 1$ игрокам, которые должны одобрить раздел;
- 0 - каждому из оставшихся $N - K$ игроков.

При этом все $N-1$ игроков должны иметь одинаковую вероятность быть включенными в число $K-1$ игроков, которые одобрят дележ: $\frac{K-1}{N-1}$. Приравнивая ожидаемый выигрыш к предложениям получаем систему:

$$\begin{cases} R = 1-(K-1)\delta(R\frac{1}{N} + r\frac{N-1}{N}) \\ r = \delta\frac{K-1}{N-1}(R\frac{1}{N} + r\frac{N-1}{N}) \end{cases} \tag{3.21}$$

Решая систему, получаем R и r:

$$\begin{cases} R = \frac{N-\delta(K-1)}{N}; \\ r = \frac{\delta(K-1)}{N(N-1)} \end{cases} \tag{3.22}$$

Тогда выигрыши игроков составят:

- $\frac{N-\delta(K-1)}{N}$ - предлагающему;
- $\frac{\delta}{N} - K - 1$ игрокам, которые получили право одобрить раздел;
- 0 - каждому из оставшихся $N-K$ игроков.

Приведем выводы, которые следуют из заявленной модели. Преимуществом при разделении ресурсов обладает сторона, выдвигающая решение. Для привлечения сторонников она выдвигает предложения, выгода которых обладает стохастической природой. Таким образом, возможна агитация каждого участника без явного формирования выгодополучателей - сговора.

Заметим, что выгода предлагающей стороны убывает с числом К и коэффициентом дисконтирования δ. При этом равный раздел между сторонами возможен лишь при $K = N$ и $\delta = 1$.

Модель Бэрона и Фереджона удобна для описания органов самоуправления. Опишем её применение для объединения школ муниципалитета, имеющих в среднем равные успехи в образование. Определение руководителя самоуправления согласно постановке задачи имеет стохастическую природу - результаты образовательных учреждений в среднем равны. Таким образом, каждый представитель школы имеет равные шансы на распределение премиального бюджета. Одним из целевых инструментов распределения в сфере образования является олимпиады. Премии выделяются школам с наибольшим числом победителей. В условиях равной успеваемости воспитанников школ статус победителя также равновероятен для всех участников. Для организации события руководитель использует делегированный бюджет, приобретая оборудование, дополнительно стимулируя сотрудников своего учебного заведения на составление заданий и присутствие на мероприятии, рекламируя олимпиаду. Таким образом, создаются все необходимые компоненты модели Бэрона и Фереджона:

- равные возможности на предложение раздела;
- стохастическая природа распределения бюджета между игроками для легитимизации своего предложения;
- преимущество руководителя раздела.

3.3 Влияние долговой нагрузки на результаты торгов

Описана постановка, в которой поставщик для выполнения заказа берет кредит в банки на закупку сырья.

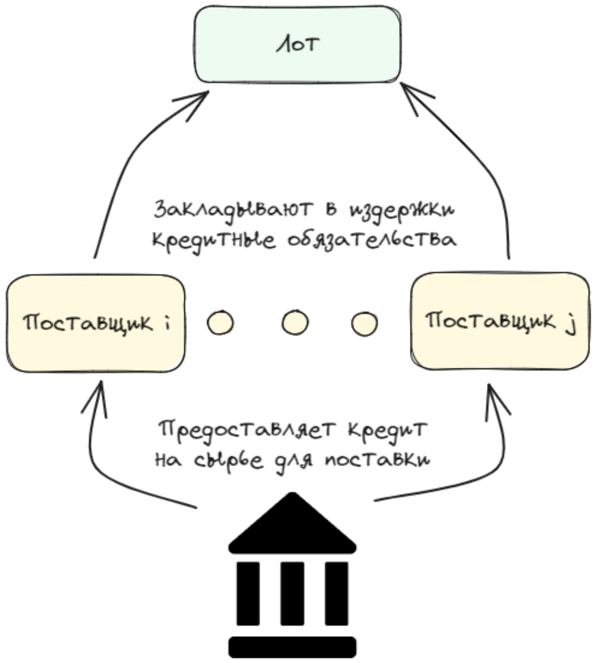

Рис. 3.5: Постановка. Поставщик берет кредит в банки для соревнования за лот

3.3.1 Постановка

Кредит берется на покрытие издержек производства и фонд оплаты труда. Считаем, что поставщики закупают сырье по равной рыночной цене FC. Ставки юридического кредита также примем равными i и приблизительно соответствующей ставке рефинансирования i_{ref}. Считаем, что поставщик до сбыта товара платит по кредитным обязательствам только минимальный дифференцированный платеж, соответствующий $i \cdot FC_i$.

В случае неудачи поставщик повторно участвует в аукционе реализуя произведенную продукцию.

Лот аукциона согласно ФЗ №44 и №223 неделим и обязан быть реализован одним поставщиком. Будем считать, что закупка выполняется без экспертной оценки, победитель аукциона определяется лучшей ценой. Также введем параметр ликвидности рынка η, задающий число шагов аукциона на поиск нового лота.

Торги выполняются последовательно между двумя поставщиками. Сначала школа назначает цену лота K_0, после поставщики последовательно предлагают скидку M_i. Право первого хода определяется по жребию, число этапов аукциона без ограничения общности можно считать неограниченным. Агенты конкурируют максимизируя прибыль поставки i:

$$max\pi_i = K_0 - \Delta M - FC(1 + i(\tau\cdot \eta + \xi)), \tag{3.23}$$

где ΔM - итоговая скидка, ξ - число шагов проведенных в аукционах, τ - число участий в аукционах до реализации продукции.

3.3.2 Решение

Таким образом, постановка изучает оптимизацию как в локальном, так глобальном поведением агента. Для вычисления исхода конкуренции используем подход, описанный в [21] для модели Бэрона-Фереджона. В этом случае определяющим свойством игрока является его очередь в формирование предложения. Введем обозначения R для выигрыша игрока, ходившего первым, и r - для второго.

Для определения оптимальный величины скидки первый игрок, рассчитает издержки неуспеха для второго игрока состоящие из издержек в ожидание нового аукциона P_{global} и еще один шаг торга $P_{\text{local}} = i \cdot \text{FC}$.

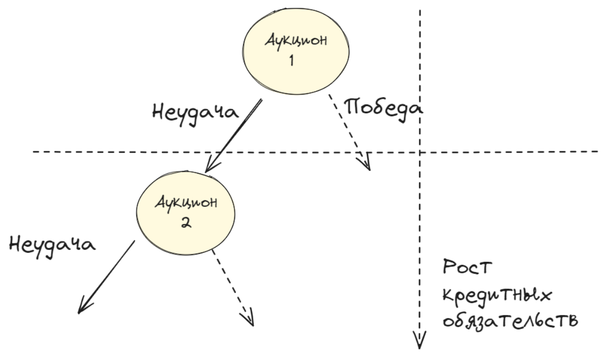

Рис. 3.6: Агент при принятии решения учитывает возможность проигрыша в ряде раундов

Для определения $P_globalobal$ запишем матожидание по исходам в явной форме:

$$r = -FC\cdot i\cdot \eta + 1/2R + 1/2 \cdot (-FC\cdot i\cdot \eta + 1/2 \cdot (\dots)) \tag{3.24}$$

Телескопическая сумма может быть переписана как:

$$r = R(1/2 + 1/4 + \dots) - FC\cdot\ i \cdot (1 + 1/2 + 1/4 + \dots) \tag{3.25}$$

Сокращая сумму в геометрическую прогрессию получим

$$P_{global} = R - r = 2 \cdot FC\ \cdot\ i\cdot\ \eta \tag{3.26}$$

Тогда предложение первого поставщика будет определяться как минимум из максимальной скидки $\Delta M_{max} = K_0 - FC$ и суммы локальных и глобальных издержек:

$$\Delta M = \max(\Delta M_{max} - (P_{global} + P_{local}), 0) = \max(K_0 - FC\cdot\ i\ (2\eta + 1), 0) \tag{3.27}$$

Ключевым для заключения сделки является право первого хода. Кредитование пропорционально увеличивает стоимость поставки на величину ликвидности η и ставки рефинансирования i.

Глава 4

Итоги работы

В главе приведено обсуждение результатов работы и их подведение. Приведены перспективные направления продолжения работы.

4.1 Результаты

Результат работы заключается в получении аналитических материалов. Для каждой постановки получена аналитическая оценка роста добавленной стоимости. В частности, показано что минимизация негативных эффектов путем трёх основных практик:

- привлечение честного игрока с значительной функцией производства, то есть большого предприятия;
- привлечение большого числа игроков, независимо от их честности;
- выбор более ликвидного товара или услуги.

4.2 Обсуждение

В работе разобраны случаи аукциона при частичной и полной информированности игроков о значениях функциях полезности прочих игроков. Показано, что для случая полной информированности в условиях достаточно конкурентного рынка скидка, предоставляемая заказчику, не отличается от закрытого аукциона. При привлечении к аукциону достаточного количества равных по поставщиков, игроки будут выдвигать предложения по себестоимости независимо от их осведомленности. Ситуация частичной информированности может различаться в зависимости от значения функции полезности поставщика. Для приобретения выгоды информированному поставщику необходимо быть конкурентным и участвовать в сделках с малым числом игроком. В противном случае дополнительная информация не даёт преимуществ. Также разобран случай распределения бюджета в ходе последовательных торгов между участниками. Приведены модели, описывающие раздел между двумя и n-игроками. Разобраны способы применения моделирования для практик организации органов самоуправления и выделения финансирования. Показано, что в заданных условиях приобретает преимущество сторона, первая выдвигающая предположение и с большим терпением подходящая к разрешению спора.

4.3 Благодарность

Выражаю искреннюю благодарность своему научному руководителю Райгородскому Андрею Михайловичу за его вдумчивое руководство и участие в моей подготовке к написанию дипломной работы. Его экспертиза и профессионализм помогли определить аналитически постановки для деловых задач, развили умение составлять лаконичные математические постановки в неожиданных ситуациях. Благодаря его руководству и поддержке, я получил ценный опыт и знания, которые будут со мной надолго.

Выражаю глубокую признательность кафедре за возможность работать над проектами, которые не только способствуют моему профессиональному росту, но и позволяют мне применять полученные знания на практике. Благодаря вашей поддержке я имел возможность участвовать в значимых инициативах, которые расширили мой кругозор и укрепили мои навыки. Особенно хочу выразить благодарность за связь с опытными и многосторонними предпринимателями. Преданность к делу и стремление к построению гармоничного общества стали вдохновением этой работы.

Список литературы

[1] George A Akerlof. «The market for “lemons”: Quality uncertainty and the market mechanism». В: *Uncertainty in economics*. Elsevier, 1978, с. 235—251.

[2] Kenneth J Arrow. *Social choice and individual values*. Т. 12. Yale university press, 2012.

[3] David P Baron, John A Ferejohn. «Bargaining in legislatures». В: *American political science review* 83.4 (1989), с. 1181—1206.

[4] Ben S Bernanke, Frederic S Mishkin. «Inflation targeting: a new framework for monetary policy?» В: *Journal of Economic perspectives* 11.2 (1997), с. 97—116.

[5] Richard E Caves, William F Murphy. «Franchising: Firms, markets, and intangible assets». В: *Franchising*. Routledge, 2014, с. 81—102.

[6] Charles W Cobb, Paul H Douglas. «A theory of production». В: (1928).

[7] Allan Gibbard. «Manipulation of voting schemes: a general result». В: *Econometrica: journal of the Econometric Society* (1973), с. 587—601.

[8] Sanford J Grossman, Joseph E Stiglitz. «On the impossibility of informationally efficient markets». В: *The American economic review* 70.3 (1980), с. 393—408.

[9] Theodore Groves. «Incentives in teams». В: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1973), с. 617—631.

[10] JOEN C HARSANYI. «BY “BAYESIAN” PLAYERS, PART III. THE BASIC PROBABILITY DISTRIBUTION OF THE GAME». В: *Management Science* 14.7 (1968).

[11] John C Harsanyi. «Games with incomplete information played by “Bayesian” players part II. Bayesian equilibrium points». В: *Management science* 14.5 (1968), с. 320—334.

[12] John C Harsanyi. «Games with incomplete information played by “Bayesian” players, I–III Part I. The basic model». В: *Management science* 14.3 (1967), с. 159—182.

[13] Hayne E Leland, David H Pyle. «Informational asymmetries, financial structure, and financial intermediation». В: *The journal of Finance* 32.2 (1977), с. 371—387.

[14] Paul Milgrom, Robert J Weber. «The value of information in a sealed-bid auction». В: *Journal of Mathematical Economics* 10.1 (1982), с. 105—114.

[15] Paul R Milgrom, Robert J Weber. «A theory of auctions and competitive bidding». В: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1982), с. 1089—1122.

[16] Roger B Myerson. «Mechanism design by an informed principal». В: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1983), с. 1767—1797.

[17] John F Nash и др. «Non-cooperative games». В: (1950).

[18] Dorry L Segev и др. «Kidney paired donation and optimizing the use of live donor organs». В: *Jama* 293.15 (2005), с. 1883—1890.

[19] Martin Shubik, Lloyd S Shapley. «Game Theory in Economics: Chapter 1, Introduction, The Use of Models». В: (1971).

[20] ВМ Архипов и др. «Предпосылки введения количественных мер эффективности для ГЭР». В: *М.: ГУ ВШЭ* 40 (2007).

[21] Щепкин А.В. Богданов А.Д. Колобов Д.В. «Моделирование процессов проведения закупки материально-технического обеспечения школ и конкуренции между поставщиками». В: *Control Sciences* 1 (2024), с. 35—42.

[22] Дж Ф Нэш. «Идеальные и асимптотически идеальные деньги». В: *Российский журнал менеджмента* 6.4 (2008), с. 003—016.

[23] Вадим Львович Шагин. «Теория игр». В: *Если* 1 (2016), с. 2.