

CÁLCULO NUMÉRICO DEL ESPECTRO DE POTENCIAS DEL FONDO CÓSMICO DE MICROONDAS

D. NIÑO[†] and J. MOTTA^{†*}

ABSTRACT. En este artículo se presenta una implementación numérica en `Python` para el cálculo del espectro de potencias del CMB bajo la evolución del modelo Λ CDM con los parámetros del telescopio Atacama Cosmology Telescope esto inspirado en el curso AST5220 (Master) / AST9420 (PhD) [10] del Institute for Theoretical Astrophysics de University of Oslo. El código implementa la evolución de la historia térmica del universo y la dinámica de recombinación; la resolución de las ecuaciones de perturbaciones lineales necesarias para calcular el espectro de potencias se hace mediante el uso de la librería `CLASS`. Finalmente se realizó una comparación con las mediciones de TT del CMB donde se obtuvieron concordancias en valores entre 1 y 3000 obteniendo cierta validación del modelo Λ CDM además de una herramienta para su estudio tanto desde la parte teórica como computacional.

Keywords. CMB, perturbaciones, historia térmica del universo, oscilaciones, materia.

1. MARCO TEÓRICO

1.1. Modelo Cosmológico Estándar Λ CDM. El modelo Λ CDM es usado para describir un universo homogéneo e isotrópico que se expande, siendo su dinámica descrita de acuerdo a las ecuaciones de la relatividad general de Einstein. Este modelo considera materia bariónica (Ω_b) (no en el sentido de bariones de física de partículas como toda partícula compuesta por tres quarks, sino como toda partícula que forma estructura, así en esta definición se incluyen electrones y núcleos atómicos [4]), materia oscura fría (Ω_c), radiación (fotones y neutrinos), y energía oscura representada por la constante cosmológica Λ (opuesto a otros modelos que hablan de una materia oscura no constante sino dinámica [7], se discutirá esto brevemente en la sección de análisis del Background).

La métrica que nos describe este universo es la de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (1.1)$$

donde $a(t)$ es el parámetro de expansión y K determina la curvatura espacial.

La evolución temporal del universo se rige por las ecuaciones de Friedmann, que en términos del parámetro de Hubble $H(t) = \dot{a}/a$ y los parámetros de densidad

adimensionales $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$ toman la forma:

$$H^2(a) = H_0^2 [\Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_K a^{-2} + \Omega_\Lambda] \quad (1.2)$$

donde $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_c$, $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$ es la densidad crítica, y $\Omega_K = 1 - \Omega_m - \Omega_r - \Omega_\Lambda$ donde $\Omega_K = 0$ para Λ CDM.

La ecuación (1.2) determina tres épocas cosmológicas distintivas: época de dominio de radiación ($a \ll 10^{-4}$), época de dominio de materia (transición en $z \sim 3400$), y la época actual dominada por energía oscura ($a \gtrsim 0.6$), caracterizada por la aceleración cósmica.

1.2. Perturbaciones Cosmológicas Lineales. Las anisotropías observadas en el CMB son el resultado de la evolución de pequeñas perturbaciones ($|\delta| \ll 1$) sobre el fondo FLRW homogéneo. Estas perturbaciones se estudian en el gauge newtoniano, donde la métrica perturbada se escribe como:

$$ds^2 = a^2(\eta) [-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j] \quad (1.3)$$

con $\eta = act$ el tiempo conforme y Φ, Ψ los potenciales gravitacionales escalares.

1.2.1. Ecuación Fundamental. La ecuación fundamental de la cual vamos a derivar la evolución tanto de las perturbaciones y con ello generar estructura en el universo, como la historia de recombinación es la ecuación de Boltzmann, esta se escribe (con respecto al tiempo físico) como:

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial x^\mu} \frac{P^\mu}{P^0} + \frac{\partial f_i}{\partial P^\mu} \frac{\partial P^\mu}{\partial t} = C[f_i] \quad (1.4)$$

Donde $C[f_i]$ representa el termino de colisión para un proceso $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$, téngase en cuenta solo tenemos presente estos procesos de interacción para dos partículas ya que probabilidad de la colisión de mas es despreciable[2], a su vez los únicos procesos relevantes son aquellos de scattering; es decir trabajamos con equilibrio cinético, colisiones elásticas, finalmente tomamos el ensamble estadístico como un gas diluido (ensamble en la aproximación clásica continua) ya que $f(E) \ll 1$; de esta manera obtenemos :

$$a^{-3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = n_1^{(0)} n_2^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left\{ \frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right\}. \quad (1.5)$$

donde:

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle &\equiv \frac{1}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \\ &\times e^{-(E_1+E_2)/T} (2\pi)^4 \delta_D^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \\ &\times \delta_D^{(1)}(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |\mathcal{M}|^2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

De esta expresión es que se derivan así las ecuaciones de Saha y Peebels que se verán mas adelante.

Relevante también discutir, antes de entrar al sistema de ecuaciones para la evolución del cosmos, de donde surgen las ecuaciones de perturbación, es decir

cual el la función de distribución de la cual estamos haciendo uso. Para el caso de los fotones conocemos su función de distribución es la de Bose-Einstein mas un termino de perturbación que denotamos como Θ

$$f(x, p, \hat{p}, t) = \left[\exp \left(\frac{pc}{k_b T(t) [1 + \Theta(x, \hat{p}, t)]} \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (1.7)$$

De esta expresión para perturbaciones lineales tomamos su expansión en Taylor a primer orden obteniendo así:

$$f(x, p, \hat{p}, t) \approx f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial \ln p} \Theta(\hat{p}) \quad \text{Donde: } f_0 = \frac{1}{e^{\frac{pc}{k_b T}} - 1} \quad (1.8)$$

Esta expresión junto con su respectivo termino de colisión, que se particulariza a una colisión tipo Compton, son las que originan la ecuaciones de evolución que se verán más adelante.

Para el caso de materia oscura fría, tomamos la ecuación de Boltzmann sin colisión para partículas masivas, en donde haciendo las identificaciones:

$$n_c = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_c, \quad (1.9)$$

$$u_c^i \equiv \frac{1}{n_c} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_c \frac{p \hat{p}^i}{E(p)}, \quad (1.10)$$

$$n_c(x, t) = \bar{n}_c(t) [1 + \delta_c(x, t)] \quad (1.11)$$

Se llega a las ecuaciones de evolución para materia oscura fría descritas por (1.14).

La materia bariónica obedece la misma ecuación de continuidad que la CDM; sin embargo su ecuación de Euler incluye un termino de fuerza de arrastre, ello debido a que ella si es interactuante y por ello se encuentra acoplada con el termino de colisión de Thompson (1.16).

1.2.2. Sistema de Ecuaciones de Evolución. El tratamiento se realiza en el espacio de Fourier, donde cada modo comóvil \mathbf{k} evoluciona independientemente. Las ecuaciones de Einstein linealizadas proporcionan las relaciones entre los potenciales métricos y las perturbaciones de densidad:

$$k^2 \Phi + 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \dot{\Phi}) = -\frac{1}{2}a^2 \sum_i \rho_i \delta_i \quad (1.12)$$

$$\Psi = -\Phi - \frac{12H_0^2 \Omega_\gamma}{k^2 a^2} \Theta_2 \quad (1.13)$$

donde $\mathcal{H} = \dot{a}(\eta)/a(\eta) = \dot{a}(t)$ es el parámetro de Hubble conforme, δ_i son las perturbaciones de densidad de cada componente, y Θ_2 representa el estrés anisotrópico fotónico.

La evolución de las perturbaciones de materia oscura fría está gobernada por:

$$\dot{\delta}_c = -k v_c - 3\dot{\Phi} \quad (1.14)$$

$$\dot{v}_c = -\mathcal{H} v_c + k \Psi \quad (1.15)$$

Para los bariones, acoplados electromagnéticamente a los fotones antes del desacoplamiento:

$$\dot{\delta}_b = -kv_b - 3\dot{\Phi} \quad (1.16)$$

$$\dot{v}_b = -\mathcal{H}v_b + k\Psi - \dot{\tau}R(3\Theta_1 + v_b) \quad (1.17)$$

donde $R = 3\rho_b/(4\rho_\gamma)$ es la razón barión-fotón y $\dot{\tau}$ es la tasa de dispersión Thomson.

1.2.3. Jerarquía Multipolar Fotónica. La distribución angular de las perturbaciones fotónicas se expande en armónicos esféricos, generando la jerarquía multipolar $\Theta_\ell(k, \tau)$. Las ecuaciones de evolución son:

$$\dot{\Theta}_0 = -k\Theta_1 - \dot{\Phi} \quad (1.18)$$

$$\dot{\Theta}_1 = \frac{k}{3}(\Theta_0 - 2\Theta_2 + \Psi) + \dot{\tau}(\Theta_1 + \frac{v_b}{3}) \quad (1.19)$$

$$\dot{\Theta}_\ell = \frac{k}{2\ell+1}[\ell\Theta_{\ell-1} - (\ell+1)\Theta_{\ell+1}] + \dot{\tau}\Theta_\ell \quad (\ell \geq 2) \quad (1.20)$$

El sistema se cierra con una condición de truncamiento en $\ell = \ell_{\max}$:

$$\dot{\Theta}_{\ell_{\max}} = k\Theta_{\ell_{\max}-1} - \frac{\ell_{\max}+1}{\tau}\Theta_{\ell_{\max}} + \dot{\tau}\Theta_{\ell_{\max}} \quad (1.21)$$

1.2.4. Condiciones Iniciales Adiabáticas. En épocas tempranas, cuando el universo está dominado por radiación, se establecen condiciones iniciales adiabáticas que correlacionan las perturbaciones entre diferentes componentes:

$$\Phi = \Phi_{\text{prim}}, \quad \Psi = -\Phi \quad (1.22)$$

$$\delta_c = \delta_b = -\frac{3}{2}\Phi, \quad \Theta_0 = -\frac{1}{2}\Phi \quad (1.23)$$

$$\Theta_1 = \frac{ck}{6\mathcal{H}}\Phi, \quad v_b = v_c = -\frac{ck}{2\mathcal{H}}\Phi \quad (1.24)$$

1.3. Historia de Recombinación. La recombinación marca la transición del universo de un estado ionizado a neutro, permitiendo el desacoplamiento de los fotones. Este proceso determina la época del último scattering y es fundamental para el cálculo del espectro del CMB.

1.3.1. Equilibrio Termodinámico: Ecuación de Saha. En equilibrio térmico, la fracción de ionización $X_e = n_e/n_H$ está determinada por:

$$\frac{X_e^2}{1-X_e} = \frac{1}{n_H} \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\epsilon_0}{k_B T} \right) \quad (1.25)$$

donde $\epsilon_0 = 13.6$ eV es la energía de ionización del hidrógeno y n_H la densidad de hidrógeno.

1.3.2. *Fuera del Equilibrio: Ecuación de Peebles.* Cuando la aproximación de equilibrio químico deja de ser válida, la evolución de X_e se rige por la ecuación de Peebles:

$$\frac{dX_e}{d \ln a} = \frac{C_r}{H(a)} [\beta(T_\gamma)(1 - X_e) - n_H \alpha^{(2)} X_e^2] \quad (1.26)$$

donde C_r es el factor de corrección por escape de fotones Lyman- α , $\alpha^{(2)}$ el coeficiente de recombinación efectiva al nivel $n = 2$, y β la tasa de fotoionización.

1.3.3. *Contribución del Helio.* La presencia de helio primordial con fracción de masa $Y_p \approx 0.24$ modifica la historia de recombinación. El helio se recombina antes que el hidrógeno, y su contribución se incluye mediante:

$$n_H = \frac{\rho_b(1 - Y_p)}{m_p}, \quad n_e = n_H X_e + n_{\text{He}} X_{\text{He}} \quad (1.27)$$

donde X_{He} describe la ionización del helio, gobernada por ecuaciones análogas a (1.26).

1.4. **Régimen de Acoplamiento Fuerte.** Antes de la recombinación, la alta tasa de colisiones fotón-electrón ($|\dot{\tau}| \gg \mathcal{H}, ck$) permite aplicar la aproximación de acoplamiento fuerte (tight coupling). En este régimen, fotones y bariones se comportan como un fluido único.

Las aproximaciones fundamentales son:

$$\Theta_1 \approx -\frac{v_b}{3} \quad (1.28)$$

$$\Theta_\ell \approx 0 \quad (\ell \geq 2) \quad (1.29)$$

Sin embargo, para mantener precisión numérica, se conserva el multipolo Θ_2 con la aproximación:

$$\Theta_2 \approx -\frac{8ck}{15\mathcal{H}|\dot{\tau}|} \Theta_1 \quad (1.30)$$

La ecuación de evolución para la velocidad bariónica se modifica para incluir efectos de primer orden en $1/|\dot{\tau}|$:

$$\dot{v}_b = \frac{1}{1 + R} \left[-\mathcal{H}v_b + k\Psi + R(q - k\Psi + \frac{k}{3}(\Theta_0 - 2\Theta_2)) \right] \quad (1.31)$$

donde q es un término correctivo que depende de las derivadas de $\dot{\tau}$.

1.5. **Transición al Régimen de Evolución Libre.** La transición del régimen de acoplamiento fuerte al de evolución libre ocurre cuando:

$$\frac{\mathcal{H}}{|\dot{\tau}|} < \epsilon \quad (1.32)$$

Para un epsilon pequeño; durante esta transición, los multipolos superiores Θ_ℓ ($\ell \geq 2$) cobran importancia, y el sistema completo de ecuaciones (1.18) debe ser integrado sin aproximaciones.

Esta fase es crítica para el cálculo preciso del espectro del CMB, ya que determina la forma detallada de la función de visibilidad y los efectos de amortiguamiento de Silk.

1.6. Profundidad Óptica y Función de Visibilidad. La profundidad óptica $\tau(\eta)$ cuantifica la probabilidad de que un fotón haya experimentado dispersión Thomson después de una época η :

$$\tau(\eta) = \int_{\eta}^{\eta_0} a(\eta') n_e(\eta') \sigma_T c d\eta' \quad (1.33)$$

donde $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$ es la sección eficaz de Thomson.

La función de visibilidad se define como:

$$g(\eta) = -\frac{d\tau}{d\eta} e^{-\tau} = \dot{\tau} e^{-\tau} \quad (1.34)$$

y representa la probabilidad de que un fotón observado hoy se haya desacoplado por última vez en la época η . Esta función es altamente localizada alrededor de la recombinación y determina la superficie de último scattering.

1.7. Función Fuente y Espectro Angular de Potencias. El espectro de anisotropías del CMB se calcula mediante la expansión multipolar que se observa formalismo "Line of sight integration" [9], que conecta las perturbaciones locales con las observaciones actuales:

$$\Theta_{\ell}(k) = \int_0^{\eta_0} S_T(k, \eta) j_{\ell}[k(\eta_0 - \eta)] d\eta \quad (1.35)$$

donde j_{ℓ} es la función esférica de Bessel de orden ℓ .

La función fuente $S_T(k, \eta)$ incluye las contribuciones físicas principales:

$$S_T(k, \eta) = g(\eta) \left[\Theta_0 + \Psi + \frac{1}{4} \Pi \right] + e^{-\tau} (\dot{\Psi} - \dot{\Phi}) \quad (1.36)$$

$$- \frac{1}{ck} \frac{d}{d\eta} [g(\eta) v_b] + \frac{3}{4(ck)^2} \frac{d^2}{d\eta^2} [g(\eta) \Pi] \quad (1.37)$$

donde $\Pi = \Theta_2 + \Theta_{0P} + \Theta_{2P}$ incluye contribuciones de polarización.

Los términos físicos corresponden a:

- **Efecto Sachs-Wolfe ordinario:** $g(\eta)(\Theta_0 + \Psi)$
- **Efecto Sachs-Wolfe integrado:** $e^{-\tau}(\dot{\Psi} - \dot{\Phi})$
- **Efecto Doppler:** $-\frac{1}{ck} \frac{d}{d\eta} [g(\eta) v_b]$
- **Contribución de polarización:** términos con Π

El espectro angular de potencias se obtiene integrando sobre todos los modos:

$$C_{\ell} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dk k^2 |\Theta_{\ell}(k)|^2 \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \quad (1.38)$$

donde $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = A_s(k/k_*)^{n_s-1}$ es el espectro primordial de perturbaciones escalares.

1.8. Características del Espectro Multipolar. El espectro multipolar $D_{\ell} = \ell(\ell+1)C_{\ell}/(2\pi)$ exhibe características físicas distintivas:

- **Meseta Sachs-Wolfe** ($\ell \lesssim 30$): refleja las perturbaciones gravitacionales primordiales

- **Picos acústicos** ($30 \lesssim \ell \lesssim 1000$): consecuencia de las oscilaciones del plasma fotón-barión
- **Supresión de Silk** ($\ell \gtrsim 1000$): amortiguamiento por difusión fotónica

La posición del primer pico acústico, $\ell_1 \approx 220$, determina el ángulo subtendido por el horizonte de sonido en la recombinación:

$$\ell_1 \approx \frac{\pi}{\theta_s} = \frac{\pi D_A(z_*)}{r_s(z_*)} \quad (1.39)$$

donde $D_A(z_*)$ es la distancia angular a la recombinación y $r_s(z_*)$ el horizonte de sonido en esa época.

Esta relación proporciona una medida precisa de la curvatura espacial del universo y constituye una de las pruebas más directas de la geometría cosmológica [5].

2. METODOS UTILIZADOS

Para describir la evolución del cosmos realizamos uso de **Python**, dividiendo el proyecto por etapas: Background, Recombinación, perturbaciones y finalmente el cálculo del espectro de potencias angular.

2.1. Background. En esta primera etapa definimos una clase Background, en donde definimos como constantes los parámetros de evolución cosmológicos de los cuales hicimos uso a lo largo del código para nuestro modelo cosmológico fiducial los parámetros fueron obtenidos de los resultados observacionales del Observatorio de atacama con datos de ellos combinados con Planck y Desi [3], seguido a esto definimos un array que hará las de parámetro de evolución x el cual se define como $x = \ln(a)$, representando así el numero de veces que el universo se expande una potencia de e; numéricamente este es el parámetro mas idóneo debido a su poco rango de magnitudes de variación entre todos los que disponemos η tiempo comovil y t tiempo físico o cosmológico, posterior a ello realizamos algunas pruebas, gráficas y integraciones numéricas para verificar el proceso de interpolación o spline del array fue realizado correctamente, así bien calculamos la edad del universo como 13.79 Gyr calculada de dar solución a la ecuación diferencial (siendo la integración numérica realizada con el paquete `solve_ivp`) :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{H(x)}$$

La edad de inicio de aceleración la calculamos a su vez en 7.53 Gyr a partir de la ecuación espacial de Friedman:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{H^2}{2} (\Omega_M a^{-3} + 2\Omega_R a^{-4} - 2\Omega_\Lambda) . \quad (2.1)$$

Esta se halló numéricamente haciendo la aceleración 0, definiendo como función la expresión resultante y hallando cuando la función evaluada en un array de prueba de x cambia de signo.

Se realizaron a su vez pruebas de tipo gráfico como la integración de los parámetros de evolución en el array de x para dar como resultado la figura observada en la sección de análisis (1).

A su vez para validar nuestro modelo fiduciario tomamos datos de distancia de luminosidad de supernovas de la colaboración SHOES [8] convertimos esos datos de distancia de luminosidad en nuestro parámetro x y realizamos un MCMC, es decir estamos generando una distribución aleatoria de datos, en donde evaluamos el modelo Λ CDM $H^2(a) = H_0^2 [\Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_\Lambda]$

2.2. Recombinación. Para la parte de recombinación iniciamos trayendo de la clase Background nuestro parámetro x y resolviendo la ecuación de Saha (1.24) teniendo en cuenta la fracción de helio existente $Y_p = 0.245937$, para ello realizamos un proceso iterativo similar al método de punto fijo para hallar sus raíces partiendo de un valor inicial de fracción de ionización de 1. Posteriormente realizamos la transición a la ecuación de Pebeels para cuando la fracción de ionización fuese menor a 0.99, así bien resolvemos (1.26) para dar cuenta del comportamiento fuera del equilibrio en la región donde la solución de Saha deja de ser válida, esta ecuación se resolvió usando el método de integración `solve_ivp`.

Una vez obtenida $X_e(x)$ procedemos a calcular la densidad de electrones $n_e(x)$ que a su vez nos permite calcular la profundidad óptica a través:

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{c \sigma_T n_e(x)}{H(x)}, \quad (2.2)$$

Esta derivada se suavizó mediante un filtro de Savitzky-Golay para evitar oscilaciones numéricas no físicas, y luego se integró hacia atrás desde $x = 0$ para obtener $\tau(x)$.

2.3. Perturbaciones. Los resultados de esta parte fueron obtenidos haciendo uso del software CLASS a través de su Librería de python `classy` [6], en esta sección presentaremos la visión desde nuestro intento de desarrollo así como las gráficas obtenidas con `classy`; ello puesto nuestro intento replica el funcionamiento a nivel interno de la librería `classy` permitiéndonos así la comprensión mas a fondo de lo que `classy` esta realizando.

Haciendo uso de la librería `classy` a través de la función integrada `.cosmo` obtuvimos los valores para las perturbaciones en la métrica, las velocidades y la densidad de materia tanto bariónica como de materia oscura fría.

En nuestro intento de implementación, buscamos resolver numéricamente las ecuaciones para las perturbaciones tal como se observaron en la parte teórica ecuaciones (1.12) - (1.22), el enfoque fue: para tiempos tempranos resolver las ecuaciones de "Tigh coupling" ecuaciones (1.28) y generar la transición al sistema completo para cuando este régimen ya no fuese el adecuado, esto se hace bajo la condición (1.32).

Al cumplirse esta condición se pasa al sistema completo donde se resuelven las ecuaciones ya mencionadas, junto con la completa jerarquía multipolar fotónica ecuaciones (1.18) - (1.21), esto haciendo uso del formalismo "line of sight integration" [9]

2.4. Espectro de potencias angular. Para obtener el observable principal de nuestro estudio, el espectro de potencias angular, utilizamos el código `classy` a través de su módulo `.cosmo_cmb`, y comparamos nuestros resultados con los datos experimentales reportados en [3].

El cálculo del espectro de potencias en nuestra implementación se basa en la integración numérica de la función fuente mediante el "algoritmo de integración a lo largo de la línea de visión" [9], lo que nos permite obtener los diferentes valores de ℓ .

3. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

3.1. Background. De la Figura (1) podemos observar la evolución de los componentes dominantes de energía en el universo, observando de ella varios detalles significativos, el primero siendo que para redshift $z \gtrsim 1810$ la densidad de radiación (fotones y neutrinos) dominan sobre los demás componentes, posterior a ello llegamos a la época de dominio de materia (CDM y bariónica), caracterizada por la formación de estructura en el universo, esta llega a su conclusión para un redshift de $z \approx 3$, finalmente llegamos al periodo de aceleración:

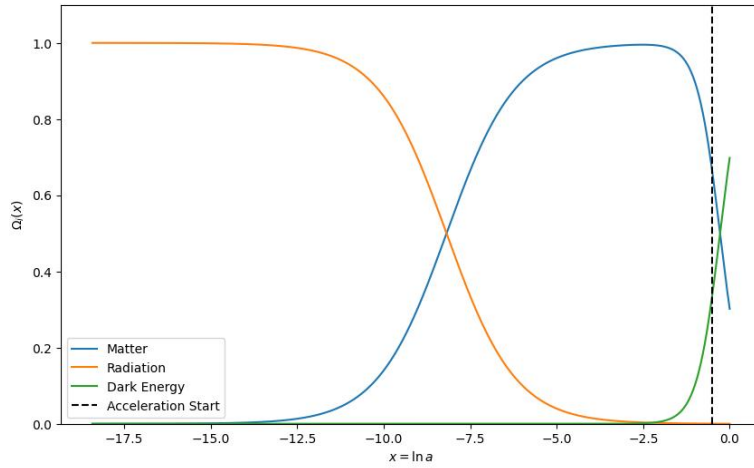


FIGURE 1. Evolución densidades de materia

De la figura dos por otra parte podemos analizar como el mejor ajuste a los datos dan como resultado una discrepancia respecto a los parámetros de Atacama [3] del 23% para el esperado de la densidad de masa, 10% Para la densidad de energía oscura y del 6% para el valor esperado de la constante de hubble h :

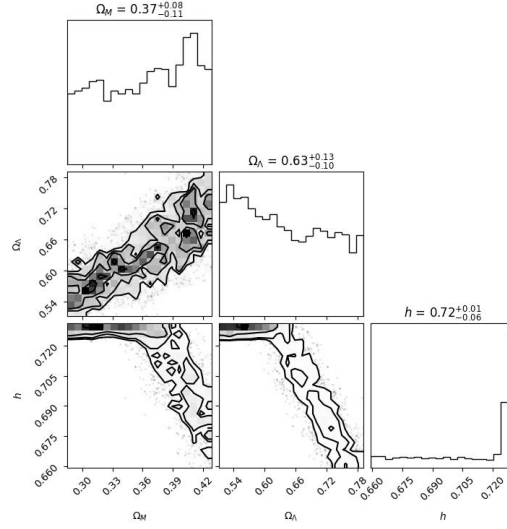


FIGURE 2. MCMC con datos de supernovas

Así mismo en el MCMC se obtiene un valor de densidad de curvatura dentro del mejor ajuste distinto de cero exactamente $\Omega_\Lambda = 0.002$, abriendo campo a la no Gaussianidad y a que tal vez el modelo de mejor ajuste seria uno en donde la energía oscura evolucione en función del tiempo [7].

3.2. Recombinación. En la figura 3 podemos analizar se observa como el universo en la época de dominio de radiación presenta una fracción de ionización constante, ello físicamente se ve representando en un plasma caliente donde constantemente fotones y electrones colisionaban y su camino óptico era muy corto, posteriormente se observa a $z \approx 6070$ como la gráfica presenta dos ligeras caídas representando la fracción de helio que se ha ionizado, para posteriormente presentar una gran caída que representa la formación de hidrógeno neutro, rigurosamente se forma hidrógeno ionizado que interactúa y posteriormente decae a su estado base.

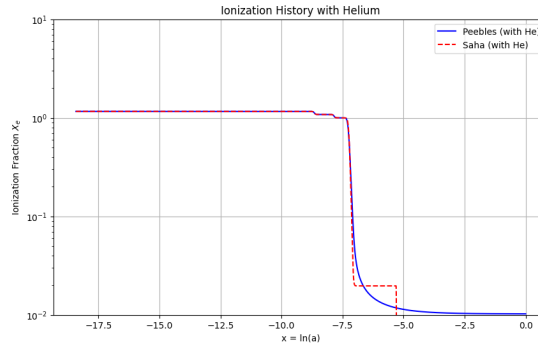


FIGURE 3. Historia de ionización

Este análisis se confirma con la gráfica para la profundidad óptica figura 4 en donde se observa como picos de la segunda derivada de esta corresponden

con el tipo de ultimo scattering para He^+ y He^{++} y el mas pronunciado a la formación de hidrógeno neutro, así mismo de los cálculos numéricos obtuvimos una abundancia en el "freeze out" (fracción e iones a día de hoy) de 1.02×10^{-2} y un valor para el inicio de la recombinación $z \approx 1194.2$, en la literatura este se encuentra en $z = 1100$ presentamos así una discrepancia del 8.5% con respecto al valor aceptado en cuanto a los ajustes de los datos observacionales.

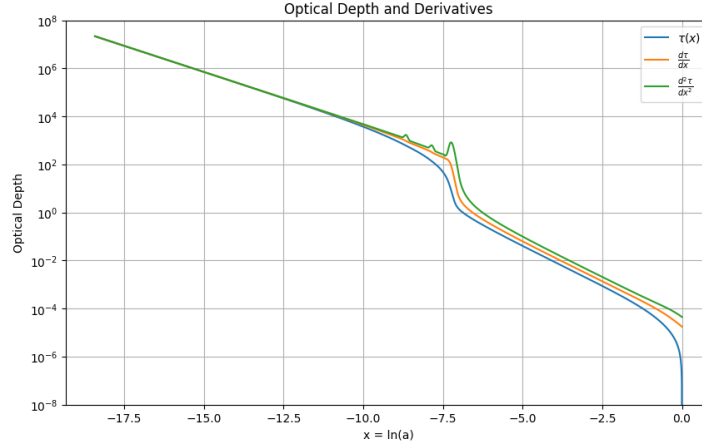


FIGURE 4. Profundidad óptica

Esto abre la discusión acerca de cual es el motivo de la diferencia apreciable entre el valor de redshift para la recombinación obtenido en el presente trabajo y el valor estandar, así bien se analiza no es la cantidad de procesos subatómicos que se tienen en cuenta en la ecuación de Saha y Peebels ni los distintos componentes atómicos incluir el helio, puesto que incluso esto un exceso ya que este aportaría solo un 5 % en la corrección del valor de redshift así mismo de la teoría conocemos las secciones transversales usadas solo son relevantes procesos de colisión elástica, realmente Compton unicamente y a su vez estos ya están incluidos estilísticamente en la ecuación de Peebels mediante el factor beta así que probablemente se deba a fluctuaciones numéricas en el proceso de integración.

3.3. Perturbaciones. Observamos de la figura 5, como las perturbaciones en la métrica son unicamente relevantes durante el rango de sub-horizonte, (longitudes de onda de los modos de oscilación de las ondas planas mayores a la distancia de horizonte de partícula, lo que permite la termalización).

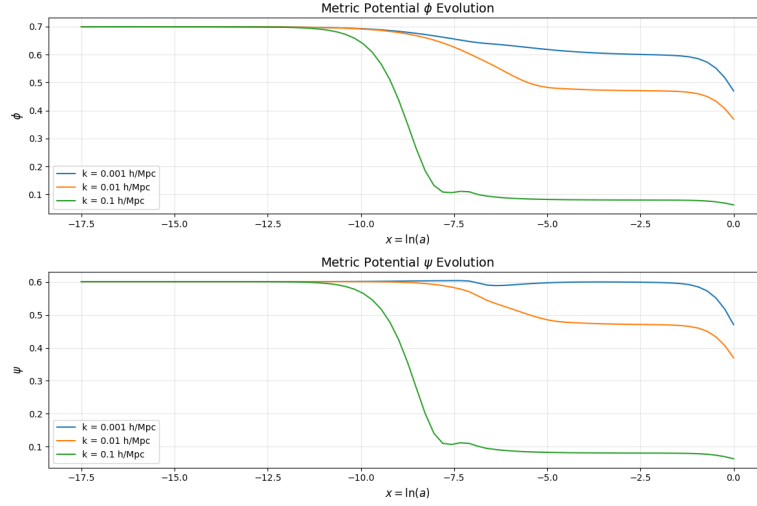


FIGURE 5. Perturbaciones de la metrica

Por otra parte, vease la figura 6 donde claramente observamos en las perturbaciones de materia bariónica hace muestra de las denominadas oscilaciones acústicas, en forma de oscilador armónico amortiguado, así mismo las perturbaciones en la velocidad, lo poco suave de la gráfica se debe a las limitaciones del entorno (collab) en el uso del paquete classy.

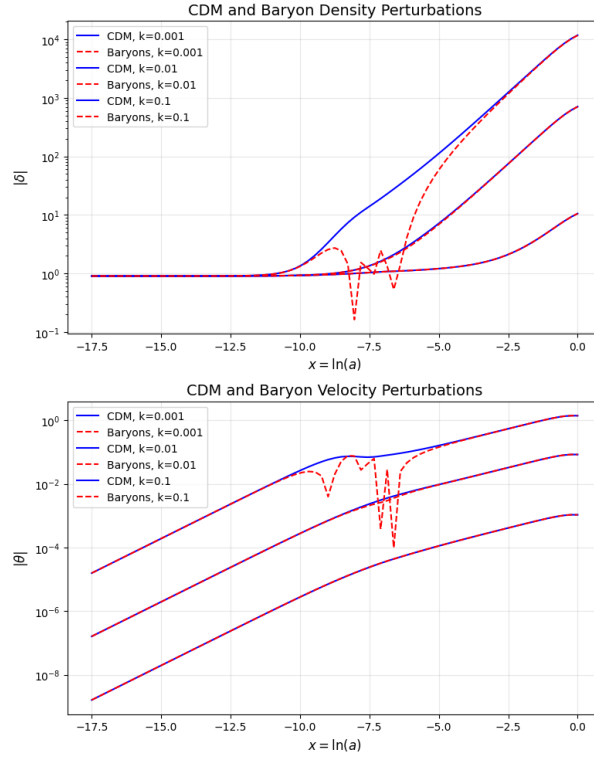


FIGURE 6. Perturbaciones CDM y materia bariónica

3.4. Espectro de potencias angular. En cuanto al espectro de potencias observamos los datos obtenidos de Atacama [1] de TT del espectro de potencias angular se ajustan muy bien para valores de ℓ hasta los 3000 sin embargo para valores mayores ya las barras de error no se encuentran dentro de la curva calculada por class

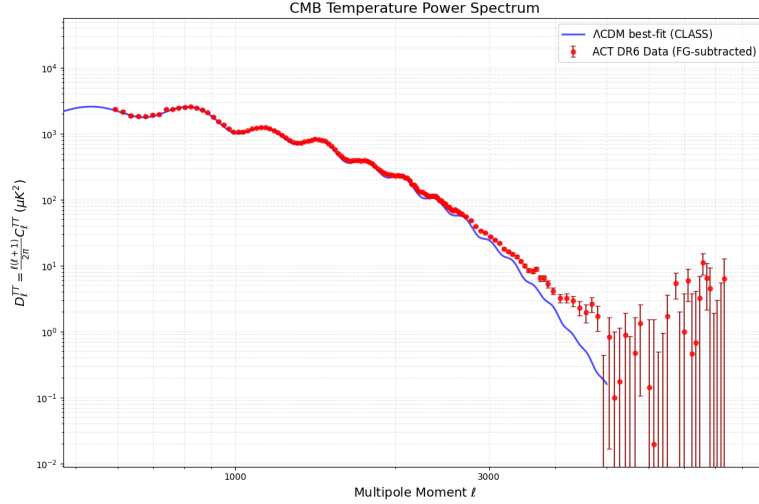



FIGURE 7. Temperatura del espectro de potencias

CONCLUSIÓN

Este trabajo se presenta una implementación numérica en **Python** para calcular el espectro de potencias del CMB particularmente bajo el modelo Λ CDM, utilizando parámetros observacionales del *Atacama Cosmology Telescope*. La solución numérica integra varias etapas entre ellas la evolución térmica del universo, la dinámica de recombinación (mediante las ecuaciones de Saha y Peebles) y las perturbaciones lineales resueltas con la librería **CLASS**. Los resultados muestran una buena concordancia con las observaciones para el espectro TT en un rango multipolar $1 \leq \ell \leq 3000$, logrando validar el modelo Λ CDM de forma global. Sin embargo, se identificó una discrepancia del 8.5% en el *redshift* de recombinación ($z_{\text{calc}} = 1194.2$ vs. $z_{\text{lit}} \approx 1100$) particularmente en la región de transición de regímenes de equilibrio y no-equilibrio, lo cual atribuimos potencialmente a fluctuaciones numéricas en la integración. La herramienta desarrollada sirve como recurso educativo y computacional para explorar la física de las distintas épocas del universo evolucionando bajo un modelo cosmológico en aspectos como la dinámica de las perturbaciones, o la etapa de recombinación, y la sensibilidad de los parámetros experimentales, todos aspectos fundamentales para el estudio y entendimiento del CMB.

Repositorio del código: 

REFERENCES

- [1] Atacama Cosmology Telescope Collaboration. *ACT DR6.02: Power Spectra and Covariance Matrices*. https://lambda.gsfc.nasa.gov/product/act/act_dr6.02/act_dr6.02_pspipe_spectra_cov_get.html. NASA LAMBDA Archive. 2024.
- [2] Daniel Baumann. *Cosmology*. Cambridge University Press, 2022. ISBN: 978-1108838078.
- [3] ACT Collaboration. “The Atacama Cosmology Telescope: DR6 Power Spectra, Likelihoods and Λ CDM Parameters”. In: *arXiv preprint* arXiv:2503.14452 (2023). URL: <https://arxiv.org/abs/2503.14452>.
- [4] Scott Dodelson and Fabian Schmidt. *Modern Cosmology*. 2nd. Academic Press, 2021.
- [5] Wayne Hu and Naoshi Sugiyama. “Anisotropies in the Cosmic Microwave Background: An Analytic Approach”. In: *Astrophys. J.* 444 (1995), pp. 489–506. DOI: [10.1086/175624](https://doi.org/10.1086/175624). eprint: [astro-ph/9407093](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9407093).
- [6] Julien Lesgourgues, Thomas Tram, et al. *CLASS: Cosmic Linear Anisotropy Solving System*. Version: 3.2.0. 2024. URL: https://github.com/lesgourg/class_public.
- [7] Visinelli Lin and Yanagida. “Testing Quintessence Axion Dark Energy with Recent Cosmological Results”. In: *arXiv preprint* (2024). eprint: [2504.17638v1](https://arxiv.org/abs/2504.17638v1). URL: <https://arxiv.org/pdf/2504.17638v1>.
- [8] Pantheon+ and SH0ES Teams. *Pantheon+SH0ES Supernova and Cepheid Data Release*. Combined supernova (Pantheon+) and Cepheid (SH0ES) data for cosmological analysis. 2024. URL: <https://github.com/PantheonPlusSH0ES/DataRelease>.
- [9] U. Seljak and M. Zaldarriaga. “A Line-of-Sight Integration Approach to Cosmic Microwave Background Anisotropies”. In: 469 (Oct. 1996), pp. 437–444. DOI: [10.1086/177793](https://doi.org/10.1086/177793). eprint: [astro-ph/9603033](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9603033).
- [10] Wintherscoming. *CMB Angular Power Spectrum*. <https://cmb.wintherscoming.no/index.php>. Last accessed: [29/09/2025]. [n.d.]