行列演習

北海道大学　経済学院　渡部元博

2023/04/14

目次

1　スカラーとベクトル

単変数 (定数) を表すものを**スカラー**といい、多変数を格納するものを**ベクトル**といいます。

例) 高校で学習したベクトルは縦、横、高さなどの多変数を格納している。※ベクトルを図形的な概念であると勘違いしないように！

演習 1: これらの変数がスカラーかベクトルか答えましょう

1. 7
2. 今日の渡部の体重

3. 目的地へ車が進む速度
4. 企業の財務指標

2　行列同士の足し算・引き算

行列の足し算はとても簡単で、行番号と列番号が対応しているものを足すだけ。そのため、行数と列数が一致しているもの同士でしか行列の足し算・引き算は定義することができない。行は横向き、列は縦向き (板書で覚えよう)

定義 1(行列の和)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

定義 2(行列の差)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

ちなみに、行列のスカラー倍は行列の全ての要素にスカラーをかけるだけです (定義省略)

演習 2: これらの行列に関する演算しましょう

1. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 50 & 20 \\ 99 & 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 & 11 \\ 1 & 40 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 50 & 20 \\ 99 & 30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 50 & 11 \\ 1 & 40 \end{bmatrix}$

3　行列同士の掛け算

行列の足し算・引き算は今までの知識でできるとても簡単なものだった。「掛け算も余裕だろ」と考えている方に残念なお知らせがあります。ちょっとめんどくさい計算が多いです。

行列の掛け算注意ポイント

1. 計算する行列について、片方の行数 m と一方の列数 n が一致している場合のみに行列の積を定義できる。列→行の順で掛けて足すと覚えよう。
2. 掛け算を行った後の行列は $m \times n$ 行列
3. 行列の掛け算は非可換性を持つ。つまり、一般に A,B の行列を考えるとき、$AB \neq BA$ である。

行列の積に関する証明

行列の積は合成写像について考えると、証明することができます。いま、線形写像 $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, B:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ の合成写像 $B\circ A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ を考える。具体例の簡単のために、$n=m=l=2$ とする。したがって、A,B は 2×2 行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

によって表現されます。このとき、$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$ となるので、

$$B\circ A(x) = B\left(\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \\ b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{22}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \end{bmatrix}$$

を得ます。この右辺を x について整理すると、

$$\begin{bmatrix} (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})x_2 \\ (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})x_2 \end{bmatrix}$$

となり、合成写像が上の式の ( ) 内で定義されることがわかります。この合成写像こそが行列同士の積となります。

演習 3: 以下の行列演算を実施しましょう

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^2$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

4　行列の転置

行列の重要な記号として転置記号があげられます。行列 A に対して、A' や $A^\top$ と表記されます。**転置**の意味するところは「行と列を入れ替える操作」です。

演習 4: 以下の行列演算を実施しましょう。

1. 演習 2 の 1. の解について転置行列を示しましょう
2. 演習 3 の 3. の解について転置行列を示しましょう

5　行列のランク

行列のランクはこの後述べる逆行列、ひいては逆行列の算出に用いる行列式の算出に深く関わっており、正しい理解をしておく必要があります。ランクを定義する際に必要な概念について定義していきます。

線形独立・線形従属　$x_1, \dots, x_n \in L$ が**線形独立**であるとは、$a_1 = \cdots = a_n = 0$ であるとき、またその時にのみ $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ が成り立つことをいう。

一方、**線形従属**とは、すべてが非零の係数を用いて、$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ とできる状態のことをいう。

簡単にまとめると、線形従属であるとは任意の行列が他の行列によって完全に説明される状況を示しており、後述するようにスパンが違う形で表されてしまいます。統計分析では例えば回帰分析の多重共線性 (他の説明変数が任意の説明変数をかなりの割合で説明してしまう状況) が線形従属に対応する概念であり、避ける必要がある。なぜ、避ける必要があるのかをここから説明していきます。なお、この後出てくるスパンについてそういうものなんだと軽く飛ばしてください。

線形従属の時のスパン　適当な実数 $a_1, \dots, a_{n-1}$ によって、$x_n = a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1}$ が成り立つ時、

$$\mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} = \mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$$

が成り立つ。

また、**次元**はベクトル空間が保有する行列の数つまり、Span における n である。

行列の像 (image)　行列の像は、その行列を縦に割ってできる列ベクトルのスパンと一致する。つまり、

$$\mathrm{Im}\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}\right)$$

ようやく、行列のランクについて定義するために必要な概念の整理が終わったので、行列のランクについて述べていきます。

行列のランク　行列 A の像の次元 $dim(Im(A))$ を A の**階数**または**ランク**といい、$\mathrm{rank}A$ と表記する。

演習 5: 次の行列のランクを求めましょう。

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

6　det(行列式) の計算

解説は板書

2×2 行列

memo:

3×3 行列

memo:

このようにして、求めた値は行列 A の行列式もしくは $\mathrm{det}A$、$|A|$ とかく。前章で述べた「線形独立性を有する」ことと「行列式が非零」であることは同値であることを覚えときましょう。

演習 6:$\mathrm{det}A$ を求めましょう

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7　逆行列と割り算

足し算も引き算も掛け算もした。割り算もしましょう。ただ、全く難しいことはなく、割り算は「逆数をかける」ことです。整数であれば、逆数を考えるのは簡単なのですが、行列の逆数って一体なんでしょうか。

行列の逆数は逆行列といいます。「よーし、これから逆行列の計算するぞぉ」と意気込んでいる方もいるかもしれませんが、正直これ以上の内容を手計算するのは時間の無駄ですので、次回の授業でプログラミングを使って計算できるようにしましょう。そのため、ここからは逆行列のエッセンスのみを紹介しようと思います。

2×2 行列の逆行列　$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ の逆行列は、$\mathrm{det}A \neq 0$ の時、またその時にのみ存在し、

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{det}A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

によって与えられる。また、$AA^{-1} = I_2$ である。

任意の行列に対して、その逆行列を掛けて、単位行列 (対角成分が 1 の行列) が得られることは、整数とその逆数をかけると 1 が出てくる状況と一致していて想像しやすいでしょう。

さて、逆行列の定義に少し不穏な文章があります。逆行列は行列式が非零の時のみに存在します。すなわち、行列が線形独立性を有する時にのみ逆行列は定義できるわけです。先ほど紹介した回帰分析の理論展開において、逆行列の利用は重要です。そのため、説明変数同士で多重共線性を有し、線形従属が存在する時には逆行列は計算できず、回帰分析も実施できないというわけです。

8 仮説思考演習 2

プログラミング言語を使って、すなわちコンピュータにデータを読み込ませて、統計的な分析 (回帰分析) を行いたい。ここで注意したいのはコンピュータは設計者によって設定された型のみしか受け付けないようになっている。

この場合においてわれわれはどのようなデータ型を用意すればよいでしょうか。エクセルの使用を仮定して考えてください。

Hint: データの型と言ってもいろいろな定義がある。今回の回答で欲しいのは「行・列にそれぞれにどのようなデータを置くか」「変数間にどのような関係を期待するか」等である。定まった答えはないと思うので、忌憚ない回答に期待します。