

# RDD とは？

北海道大学 経済学部 渡部元博

2022/12/30

## 目次

1	はじめに	2
2	回帰不連続デザインの基礎	2
2.1	データと状況設定 . . . . .	2
2.2	平均処置効果と共分散分析 . . . . .	4
2.3	閾値における局所的な平均処置効果 . . . . .	6
2.4	回帰不連続デザインによる解析 . . . . .	6
2.5	回帰不連続デザインの理論と現状 . . . . .	8
3	回帰不連続デザインの応用	8
3.1	数値による解析 . . . . .	9
3.2	rdrobust パッケージによる解析① . . . . .	10
3.3	カーネル関数とバンド幅の選択 . . . . .	11
3.4	RDD の視覚化 . . . . .	13
4	回帰不連続デザインの仮定と実践的 RDD	15
4.1	連続性の仮定と継続変数の操作 . . . . .	15
4.2	rdrobust パッケージによる解析② . . . . .	20
4.2.1	解析 : 共変量なし ver. . . . .	22
4.2.2	解析 : 共変量あり ver. . . . .	23

5	Fuzzy RDD 入門	24
5.1	ファジーな回帰不連続デザイン	25
5.2	実践	25
6	Appendix.	27
6.1	交互作用項のある回帰モデルの処置効果	27
6.2	カーネル密度推定	28
6.3	共変量追加の理論	30
7	参考文献	30

## 1 はじめに

高橋将宣 [2022] 『wonderful R 統計的因果推論の理論と実装 潜在的結果変数と欠測データ』の第 15 章～第 18 章をもとに作成しました。

## 2 回帰不連続デザインの基礎

傾向スコアによる解析は最もよく使用される準実験の一つだが、処置群と対照群の間に重なりがあることを前提としている。例えば、試験の点数が 60 点未満の全ての学生は補習授業を受けなければならない、60 点以上の学生は補習授業を受けることができない状況を考えてみましょう。この時、処置の割り付けは確定的なので、処置群と対照群の間に重なりがない。したがって、このような研究課題は、傾向スコアを用いて適切に解析できない。

そこで、登場するのが**回帰不連続デザイン (RDD: Regression Discontinuity Design)**である。回帰不連続デザインも準実験の一つであり、さまざまな準実験の中で最も実験研究に近いデザインといわれる。なぜなら、局所的な範囲で無作為割付けが成立しているとみなすことができるからである。この意味を含めて、本章で詳しく解説する。

### 2.1 データと状況設定

回帰不連続デザインは、やや特殊なモデリングであるため、最初に擬似データを使って解説する。

```
rm(list = ls())
data15 <- read.csv("data15.csv")
attach(data15)
summary(data15)
```

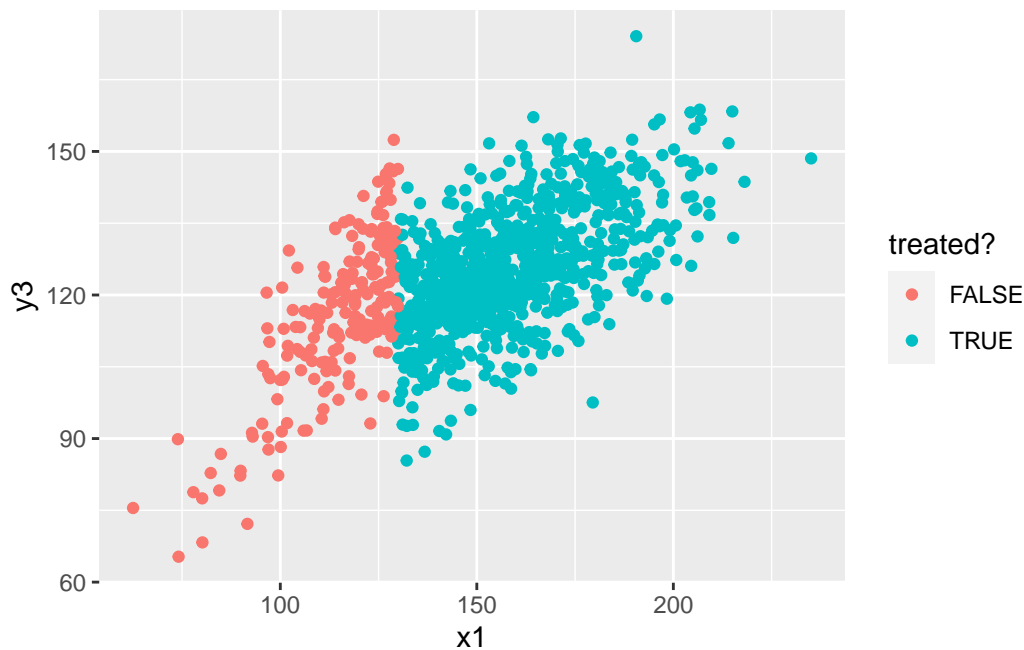
y0t	y1t	y3	t1
Min. : 65.31	Min. : 53.89	Min. : 65.31	Min. : 0.000
1st Qu.: 132.72	1st Qu.: 112.83	1st Qu.: 115.39	1st Qu.: 1.000
Median : 150.91	Median : 122.92	Median : 124.41	Median : 1.000
Mean : 151.17	Mean : 122.19	Mean : 123.92	Mean : 0.798
3rd Qu.: 169.47	3rd Qu.: 131.75	3rd Qu.: 132.81	3rd Qu.: 1.000
Max. : 229.33	Max. : 174.08	Max. : 174.08	Max. : 1.000

x1
Min. : 62.55
1st Qu.: 133.61
Median : 150.56
Mean : 150.44
3rd Qu.: 167.29
Max. : 235.05

変数  $y_{0t}$  と  $y_{1t}$  は、潜在的結果変数の組  $\{Y_i(0), Y_i(1)\}$  である。この二つの変数は、実際の場面ではデータに含まれていることはありえないが、ここでは例示のために潜在的結果変数がわかっている状態でデータ解析を行う。 $y_3$  は実際に観測される結果変数、 $t_1$  は処置の割付け変数、 $x_1$  は共変量である。具体的な状況設定として、処置の割付け変数  $t_1$  は血圧を下げる薬が投与されるかどうかを表す二値変数とし、共変量  $x_1$  は処置前の血圧とし、結果変数  $y_3$  は処置後の血圧としよう。例えば、 $c=130$  とする、つまり血圧が 130 を超えると処置を受け、それ以下の場合は処置を受けないものとする。この  $c$  の値を**閾値 (cutoff)** と呼美、処置の割付けは閾値を超えるかどうかを条件とし、共変量  $X_i$  に従って、確定的に行われる。

Warning: package 'ggplot2' was built under R version 4.1.1



上図は実際に観測されるデータの散布図である。我々がやろうとしていることは、上図のようなデータしかない時に、処置効果を推定することある。しかし、閾値 130 を境に処置群と対照群に重なりがなく、傾向スコアを用いることができない。回帰不連続デザインに使用するデータについて、横軸  $x$  の値は全て観測されるが、縦軸  $y$  については限られた情報しか利用できない状況のことを打ち切り (censoring) という。回帰不連続デザインと打ち切りデータの関連性も指摘されている。

## 2.2 平均処置効果と共分散分析

先ほどの擬似データを用いて平均処置効果 (ATE: Average Treatment Effect) を測定する。

```
mean(y1t)
```

```
[1] 122.1914
```

```
mean(y0t)
```

```
[1] 151.1658
```

```
mean(y1t)-mean(y0t)
```

```
[1] -28.97441
```

```
mean(y3[t1==1])
```

```
[1] 126.0031
```

```
mean(y3[t1==0])
```

```
[1] 115.6725
```

```
mean(y3[t1==1])-mean(y3[t1==0])
```

```
[1] 10.33062
```

この例では、処置を受けると平均して、血圧が 29 下がるという設定になっている。また、観測データにおいて処置を受けた人の処置効果をナイーブ<sup>\*1</sup>に推定すると、10.331 となってプラスになってしまう。このようなナイーブな推定量は交絡の影響を受けているため、正しい因果関係を推定できない。このデータの場合、処置は共

---

<sup>\*1</sup> ナイーブとは、観測されたデータのみから結論を出してしまうことである。

変数  $X_i$  の値によって確定的に割り付けられている。よって、 $X_i$  が交絡変数である。つまり、処置前の血圧の値は処置群の方が対照群よりも高いわけであるから、処置後の血圧の値も処置群の方が対照群よりも高く見えているわけである。これが交絡である。そこで、最初に思いつく交絡の調整方法は

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 T_i + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$$

のような重回帰モデルであろう。

Call:

```
lm(formula = y3 ~ t1 + x1)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-37.384	-6.996	0.296	7.410	34.246

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	64.62053	2.32272	27.821	< 2e-16 ***
t1	-9.38949	1.20196	-7.812	1.42e-14 ***
x1	0.44397	0.01908	23.264	< 2e-16 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 10.82 on 997 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.4084, Adjusted R-squared: 0.4072

F-statistic: 344.1 on 2 and 997 DF, p-value: < 2.2e-16

分析結果によると、t1 の偏回帰係数の値は-9.389 と計算される。この値は、実際の平均処置効果-28.974 と大幅に異なっている。なぜなら、真のモデル関数形が異なっているからである<sup>\*2</sup>。このような場合、適切な変数変換によって関数形を設定したり、交互作用項を用いたりすることで平均処置効果を推定できる。しかし、ここで大きな問題がある。対照群について観測できるのは閾値を超えない範囲であり、血圧 130 以上の対照群がどのような関数形を取るのかデータから確認する手掛かりがない。また、処置群が血圧 130 以下である範囲についても同様である。

このように、横軸の変数  $X$  の観測範囲の外にある値に基づいて回帰モデルから予測することを**外挿 (extrapolation)** という。また、横軸の変数  $X$  の定義域全体を使って分析する方法を**大域的な方法 (global approach)** といい、重回帰モデルによる共分散分析は大域的な方法である。

---

<sup>\*2</sup> 擬似データにおいて、処置群の血圧の値は対照群の血圧の平方根の 10 倍の値から乱数発生するように設定されているため。

## 2.3 閾値における局所的な平均処置効果

擬似データのように処置群と対照群に重なりがない場合、外挿を最小限に抑えたモデリングを行う必要がある。そのためには、平均処置効果を推定対象とすることは諦めなければならない。なぜなら、平均処置効果を推定するためには、 $X$  の定義域全体に対して外挿しなければならないからである。したがって、共分散分析のような大域的な方法は好ましくない。

そこで、大域的な方法の代わりに、**閾値における局所的な平均処置効果 (LATE: Local Average Treatment effect at the cutoff)** を推定対象とする。理論的には、閾値における局所的な平均処置効果とは、式 (1) の通り、共変量  $X_i$  が閾値  $c$  の値をとるときの  $Y_i(1)$  と  $Y_i(0)$  の差の期待値である。このような方法を**局所的方法 (local approach)** という

$$E[Y_i(1) - Y_i(0) | X_i = c] = E[Y_i(1) | X_i = c] - E[Y_i(0) | X_i = c] \quad (1)$$

局所的な平均処置効果を推定対象とするメリットを考えてみよう。回帰不連続デザインは、共分散分析を統計的因果推論の手法として妥当なものになるよう拡張したものと考えられる。なぜなら、閾値のすぐ上と下の値は、無作為な副標本と考えられるからである。直感的には、閾値付近の  $X_i$  の違いは、無作為なノイズによって発生していると理解できる。例えば、ある数学の試験において、試験の点数が 60 点未満の全ての学生は補習授業を受けなければならぬ、60 点以上の学生は受けることができないとする。そこで、学生 A の点数は 59 点で、学生 B の点数は 60 点だったとしよう。このとき、学生 A は補習授業を受けるが、学生 B は補習授業を受けない。しかしながら、二人の数学力は、誤差範囲でほぼ同じはずである。というのも、どんなに丹念に作られた数学の試験といえども、真の数学力を誤差なく測定することはできないからである。つまり、数学の試験の点数は、「数学力 + 無作為なノイズ」と考えることができる。したがって、共変量  $X_i$  は、式 (2) の通りベースラインとなる変数  $W_i$  と無作為なノイズ  $V_i$  との線形結合によって表現できると考えられる。ここで、 $\delta$  は何らかの定数であり、式 (2) における  $\delta = 0$  の研究デザインが実験研究である。

$$X_i = \delta W_i + V_i \quad (2)$$

よって、閾値付近のデータだけに着目すれば、その局所的なデータにおいて処置が無作為に割付けられているのも同然と考えられる。すなわち、局所的に、事実上の実験研究とみなすことができる。回帰不連続デザインでは、 $X_i$  が唯一の交絡変数であり、これは回帰不連続デザインの特筆すべき性質である。局所的な平均処置効果は、閾値付近の個体のみに適用可能な処置効果であるから、かなり限定的である。しかし、ある政策であったり、ある薬であったり、何かしらの処置の効果として局所的な平均処置効果は、実質的な意味で興味深い推定対象である。閾値より僅かに上だったり下の値をとって個体に対しても処置を施すか決定する際には、母集団全体における平均処置効果よりも局所的な平均処置効果の方が疑問解決に役立つだろう。

## 2.4 回帰不連続デザインによる解析

かつては、回帰不連続デザインのモデリングには、高次関数が推奨されることもあった。しかし、近年では、高次関数ではなく局所的な低次関数 (局所線形回帰や局所二次回帰) がふさわしいとされている。ここで、 $h$  をある定数としよう。局所線形回帰モデルでは、閾値の周辺 ( $c \pm h$ ) において、閾値の左側と右側にそれぞれ別々の

線形回帰モデルを当てはめる。すなわち、閾値の周辺データだけを使って、交互作用項を含む共分散分析を行うということである。なお、 $h$  をバンド幅 (**bandwidth**) という。では、実際に解析してみよう。一行目でバンド幅を指定し、二行目では局所範囲における潜在的結果変数の平均値の差を計算している。今回は潜在変数が明らかな擬似データを用いているため、真の LATE を正しく推定できているはずである。三行目では、処置の割付け変数  $t1$  と横軸の変数  $x1$  の交互作用項を計算している。4 行目では、バンド幅に収まっているデータのみを用いて、局所的な範囲で、交互作用項を含む線形回帰モデルを実行している。

```
h1 <- 128 <x1 & x1<= 132
mean(y1t[h1])-mean(y0t[h1])
```

```
[1] -13.09745
```

```
tx1 <- t1 * x1
modelR <- lm(y3[h1] ~ t1[h1]+x1[h1]+tx1[h1])
summary(modelR)
```

Call:

```
lm(formula = y3[h1] ~ t1[h1] + x1[h1] + tx1[h1])
```

Residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-24.2023	-9.7093	0.1056	7.1535	25.1149

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-11.521	521.932	-0.022	0.982
t1[h1]	-289.931	744.626	-0.389	0.699
x1[h1]	1.077	4.047	0.266	0.791
tx1[h1]	2.115	5.729	0.369	0.714

Residual standard error: 11.97 on 47 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.1876, Adjusted R-squared: 0.1357

F-statistic: 3.618 on 3 and 47 DF, p-value: 0.01975

LATE の真値は-15.892 である中、今回の分析では-13.097 とかなり正確に計算できている。一方、回帰不連続デザインの結果は、一見すると、劇的に間違った結果のように見えるが、交互作用項を含む回帰モデルにおける処置効果は、 $\beta_1 + \beta_3 E[X_i]$  である (Appendix 参照、Appendix と係数の番号一致していないが係数がかかっている変数に着目してほしい)。つまり、求めるべき平均処置効果は、 $X_i=130$  の時、 $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_3 E[X_i] = -289.931 + 2.115 * 130 = -14.981$  である。よって、通常の共分散分析とは異なって、局所的

な平均処置効果をかなり正確に推定できている様子がわかる。

## 2.5 回帰不連続デザインの理論と現状

処置の割付け  $T_i$  が継続変数  $X_i$  によって確定的に決められている場合、**シャープな回帰不連続デザイン (sharp RDD)** という。処置の割付けが確率的に決まる場合、**ファジーな回帰不連続デザイン (fuzzy RDD)** という。今回の資料の範囲では前者のみを扱う。sharp RDD においては、継続変数  $X_i$  によって処置の割付けが決定づけられているため、 $X_i$  のみが交絡変数である。これが意味していることは、共変量の重なりがないということであり、本章の冒頭で指摘した通り、傾向スコアを用いて交絡の調整を行うことができない。

厳密に RDD の理論を整理する。式 (1) を見ると LATE は閾値ちょうどの位置における結果変数の差の期待値である。しかしながら、継続変数  $X_i$  は連続変数であるから、現実には閾値ちょうどの位置に観測値を見つけることはできない。そこで、式 (3) のような LATE の推定を行う。ここで、 $\lim_{x \rightarrow c^+}$  は  $x$  を右から  $c$  に近づけた右極限を表し、 $\lim_{x \rightarrow c^-}$  は  $x$  を左から  $c$  に近づけた左極限を表す。

$$\tau_{LATE} = \lim_{x \rightarrow c^+} E[Y_i(1)|X_i = c] - \lim_{x \rightarrow c^-} E[Y_i(0)|X_i = c] \quad (3)$$

## 3 回帰不連続デザインの応用

前章では擬似データを用いた解析を行ったが、本章では実際のデータを利用し、回帰不連続デザインのメカニズムについて深掘りしていく。使用するデータは米国の下院選挙における現職の優位性について検証した Lee(2008) が用いたものの一部で、全データは R パッケージ RATest から直接入手できる。

```
rm(list = ls())
data16 <- read.csv("data16.csv")
attach(data16)
```

The following object is masked from data15:

x1

```
summary(data16)
```

	y1	x1
Min.	:0.0000	Min. : -1.00000
1st Qu.	:0.3857	1st Qu.: -0.19557
Median	:0.5401	Median : 0.08314
Mean	:0.5511	Mean : 0.12747
3rd Qu.	:0.7021	3rd Qu.: 0.41292
Max.	:1.0000	Max. : 1.00000



上記の通り、データには  $y_1$  と  $x_1$  の二つの変数が含まれている。変数  $y_1$  は時点  $t$  における民主党候補の得票率で、これが結果変数である。 $x_1$  は時点  $t-1$  における民主党候補者と共和党候補者の差であり、これが継続変数である。このデータにおける閾値  $c$  の意味はやや複雑である。直感的には、候補者の得票率が 50% に達すると当選できるため、閾値は 50% のように思われる。しかし、選挙区によっては小規模な第三党の候補者の存在のため、必ずしも 50% に達しなくても当選できるということになる。そこで、二大政党の得票率の差をとったものを継続変数  $X_i$  とし、この数が 0 になる箇所を閾値  $c=0$  としている。この設定に従って、閾値と割付け変数の定義を行う。

```
c1 <- 0
t1 <- NULL
t1[x1<=c1] <- 0
t1[x1>c1] <- 1
```

### 3.1 数値による解析

閾値における平均処置効果を推定する際には、閾値周辺のデータのみを用いて、交互作用項を含む共分散分析を行えば良いことは前節で述べた通りである。標準誤差については、不均一分散にロバストな標準誤差を使うことが推奨されているため、以下のように実装する。

```
library(lmtest)
```

Warning: package 'lmtest' was built under R version 4.1.1

Loading required package: zoo

Attaching package: 'zoo'

The following objects are masked from 'package:base':

```
as.Date, as.Date.numeric
```

```
library(sandwich)
```

```
h1 <- 0.25
bin1 <- (x1 > (c1- h1) & x1 < (c1 +h1))
tx1 <- t1 * x1
modelRDD <- lm(y1[bin1] ~ t1[bin1] + x1[bin1] + tx1[bin1])
coeftest(modelRDD, vocov. = vcovCL)
```

t test of coefficients:

```
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 0.4508738  0.0060644 74.3480  <2e-16 ***
t1[bin1]     0.0823459  0.0084422  9.7541  <2e-16 ***
x1[bin1]     0.3665293  0.0431808  8.4882  <2e-16 ***
tx1[bin1]    0.0806073  0.0606524  1.3290    0.184
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
coefci(modelRDD, level=0.95, vcov. = vcovCL)
```

```
              2.5 %      97.5 %
(Intercept) 0.43993684 0.46181077
t1[bin1]     0.06590076 0.09879099
x1[bin1]     0.28547013 0.44758850
tx1[bin1]    -0.04303136 0.20424597
```

交互作用項を含む回帰モデルの処置効果は、 $\beta_1 + \beta_3 X_i$  だった。ここで、閾値  $c=0$  であるから、閾値における継続変数  $X_i$  の値は 0 である。すなわち、閾値における局所的な平均処置効果は、 $\beta_1$  である。出力結果では、t1[bin1] の回帰係数 0.082 である。

## 3.2 rdrobust パッケージによる解析①

前節のように回帰不連続デザインの基本的な解析は、専門的なパッケージに依存しなくても実装することができる。しかし、実際には、バンド幅の選択、カーネルの選択、標準誤差の計算、バイアスの修正など多くの事柄に気を払わなければならない。これらについては後述し、本節では rdrobust パッケージによる解析について述べていく。構文は rdrobust(結果変数、継続変数、c=閾値、h=バンド幅、kernel=カーネル関数) である。ここまです手作業で行ってきた解析は、カーネルに矩形関数を指定している。実際に先ほどの結果と一致するか確認する。Coef. の項を確認すると先ほどの結果と一致していることがわかる。

```
library(rdrobust)
```

Warning: package 'rdrobust' was built under R version 4.1.1

```
modelRDD4 <- rdrobust(y1,x1,c=0,h=0.25,kernel="uniform")
summary(modelRDD4)
```

Sharp RD estimates using local polynomial regression.

Number of Obs.	6558	
BW type	Manual	
Kernel	Uniform	
VCE method	NN	
Number of Obs.	2740	3818
Eff. Number of Obs.	1376	1387
Order est. (p)	1	1
Order bias (q)	2	2
BW est. (h)	0.250	0.250
BW bias (b)	0.250	0.250
rho (h/b)	1.000	1.000
Unique Obs.	2740	3818

Method	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[ 95% C.I. ]
Conventional	0.082	0.008	10.165	0.000	[0.066 , 0.098]
Robust	-	-	5.903	0.000	[0.046 , 0.092]

### 3.3 カーネル関数とバンド幅の選択

どのカーネル関数  $K(\cdot)$  を選択するかはあまり大きな問題ではないものの、回帰不連続デザインにおけるカーネル関数  $K(\cdot)$  の役割を簡単に確認する。閾値  $c$ 、バンド幅を決める定数を  $h$  とする。つまり、 $c \pm h$  がバンド幅である。このバンド幅に入るデータ  $x_i$  を式 (4) の  $w_i$  に従って重みづけをする。

$$w_i = K\left(\frac{x_i - c}{h}\right)$$

どのカーネル関数を用いた場合でも、閾値  $c$  の位置で重みが最大になっている。三角形関数では、閾値から遠くなるにつれて、左右対称で線形的に重みが小さくなる。エパネチニコフ関数では、バンド幅内の観測地に対して曲線を描くように重み付けが小さくなる。矩形関数では、バンド幅内の全ての値に等しい重みをつけており、これは単純にバンド幅内の観測値のみを使用して、重みなしの線形回帰モデルを構築しているのと同じである。手作業で回帰不連続デザインを解析したモデルが矩形関数を用いていたとみなされる他のは、このような理由からである。

今回の解析では、バンド幅をあらかじめ  $\pm 0.25$  と決めうちして解析したが、すでに述べたようにバンド幅の選択は大きな問題である。バンド幅が狭ければ、局所的な無作為割付けの成立している可能性が高まるため推定値の偏りは小さくなるが、使用できる観測数が減るため精度が低くなる。一方、バンド幅が広ければ、推定値の精

度は上がるが、偏りが大きくなる。また、あまりにもバンド幅が大きすぎると、もはや閾値の周辺の値を比較しているとは言えず、回帰不連続デザインの意義がなくなってしまう。以下 `r` による推定について実践する。

```
IKband <- rdbwselect_2014(y1, x1, c=0, bwselect = "IK")
IKband$bws
```

```
      h      b
[1,] 0.2265899 0.2507395
```

```
modelRDD5 <- rdrobust(y1, x1, c=0, h=0.227)
summary(modelRDD5)
```

Sharp RD estimates using local polynomial regression.

Number of Obs.	6558	
BW type	Manual	
Kernel	Triangular	
VCE method	NN	
Number of Obs.	2740	3818
Eff. Number of Obs.	1265	1274
Order est. (p)	1	1
Order bias (q)	2	2
BW est. (h)	0.227	0.227
BW bias (b)	0.227	0.227
rho (h/b)	1.000	1.000
Unique Obs.	2740	3818

Method	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[ 95% C.I. ]
Conventional	0.076	0.009	8.528	0.000	[0.058 , 0.093]
Robust	-	-	4.980	0.000	[0.037 , 0.086]

IK バンド幅によると、最適なバンド幅は 0.227 であり、その時の推定値は 0.076、標準誤差は 0.009 である。これまでの解析で使ったバンド幅 0.25 よりやや狭いが、解析結果はほぼ一致している。ただ、MSE の意味で最適なバンド幅を用いた場合、信頼区間の大きさが不適切になることを指摘し、カバー率の誤差の意味で最適なバンド幅を用いることで、偏りを是正し、適切な信頼区間を構築できると提案する研究もある (Calonico et al[2018, pp.767-768])。こちらについても R で実装する。

```
modelRDD6 <- rdrobust(y1, x1, c=0, bwselect = "cerrd")
summary(modelRDD6)
```

Sharp RD estimates using local polynomial regression.

```
Number of Obs.          6558
BW type                 cerrd
Kernel                  Triangular
VCE method              NN

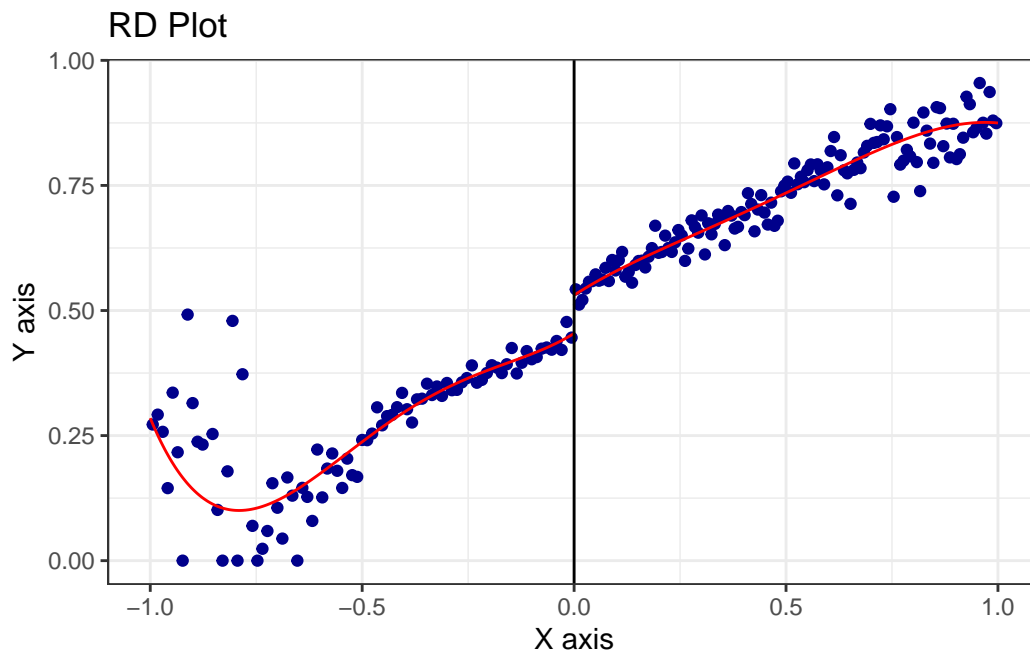
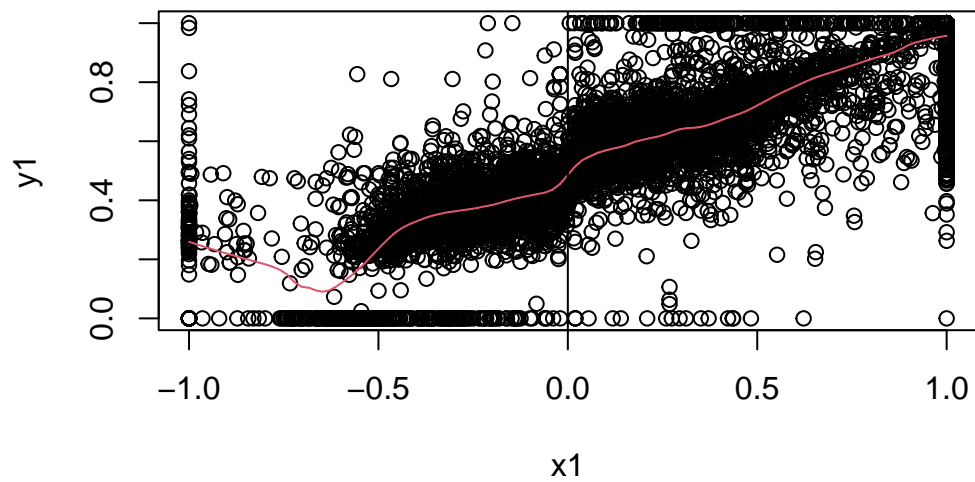
Number of Obs.          2740      3818
Eff. Number of Obs.     504       557
Order est. (p)          1         1
Order bias (q)          2         2
BW est. (h)             0.087     0.087
BW bias (b)             0.239     0.239
rho (h/b)              0.362     0.362
Unique Obs.            2606     3209
```

Method	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[ 95% C.I. ]
Conventional	0.059	0.013	4.524	0.000	[0.033 , 0.085]
Robust	-	-	4.154	0.000	[0.030 , 0.084]

この場合の推定値は 0.059 で、これまでの推定値より小さい。一方、標準誤差は 0.0013 であり、先ほどよりも大きい。バンド幅は 0.08 とかなり狭く設定されている。では、結局どのバンド幅を用いれば良いのだろうか？ Imbens and Lemieux[2008, pp633] は、一つのバンド幅だけを採用して解析するのではなく、複数のバンド幅を使用するべきと指摘している。

### 3.4 RDD の視覚化

回帰不連続デザインのデータを図示するためには通常の散布図ではなく、RD プロットと呼ばれる特殊なグラフを用いることが多い。実際に RD プロットの作図を行う。



Call: `rdplot`

Number of Obs.	6558	
Kernel	Uniform	
Number of Obs.	2740	3818
Eff. Number of Obs.	2740	3818
Order poly. fit (p)	4	4
BW poly. fit (h)	1.000	1.000
Number of bins scale	1	1
Bins Selected	85	128

Average Bin Length	0.012	0.008
Median Bin Length	0.012	0.008
IMSE-optimal bins	20	17
Mimicking Variance bins	85	128
Relative to IMSE-optimal:		
Implied scale	4.250	7.529
WIMSE variance weight	0.013	0.002
WIMSE bias weight	0.987	0.998

この作図のメリットはデータをスムーズ化して表現することで、閾値周辺に不連続な部分があるかどうかははっきりとわかる点である。

## 4 回帰不連続デザインの仮定と実践的 RDD

### 4.1 連続性の仮定と継続変数の操作

RDD を行う際は連続性の仮定が満たされているかどうか敏感になる必要がある。そして、この仮定が破られる状況に継続変数の操作が行われている場面が考えられる。では、継続変数の操作が行われている状況とは一体どのようなものであろうか。例を追って確認していく。

平均 70 点、標準偏差 10 点の試験において、90 点以上であれば学費が免除され、90 点未満ならば学費は免除されないとし、この情報はオープンになっているものとする。一部の受験生が試験問題を事前に入手している場合、意図的に 90 点以上を取ることができるだろう。あるいは、一部の受験生の試験結果に対して、採点者が不正に加点していれば、意図的に 90 点以上を取ることができるだろう。これを**継続変数の操作**という。継続変数の操作がおこなれている場合、回帰不連続デザインによる因果推論は、妥当なものとは認められない。しかし、継続変数の操作の仮定は緩和できることが知られている。この仮定は閾値がどこにあるかが単に知られているだけでなく、継続変数の値が正確に操作されて初めて問題が生じることに注意する。すなわち、意図的に操作を行って閾値を超えなかった場合には、不適切な継続変数は識別されない。

以上の議論から、継続変数の分布を確認することで、この仮定の妥当性を検証できることが示唆されている。具体的には、ヒストグラムで可視化できる。具体的なイメージを掴むために擬似データを用いた解説を行う。

The following object is masked from data16:

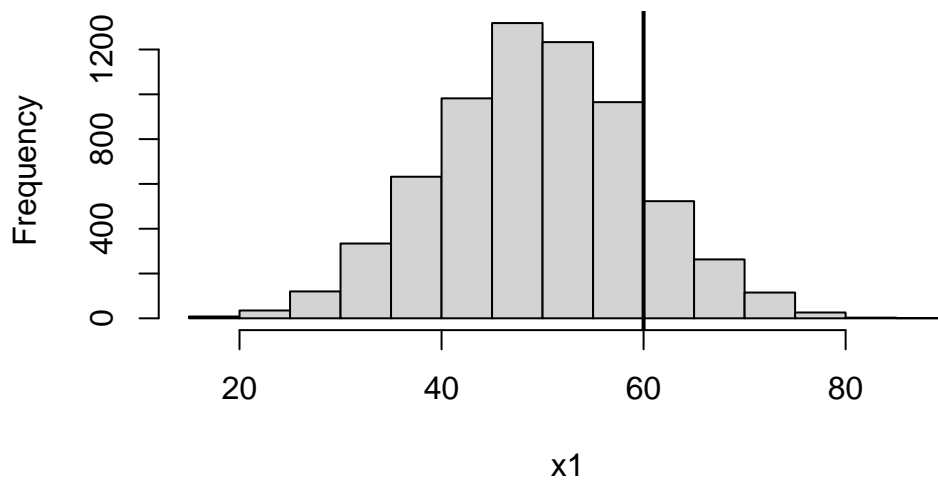
```
x1
```

The following object is masked from data15:

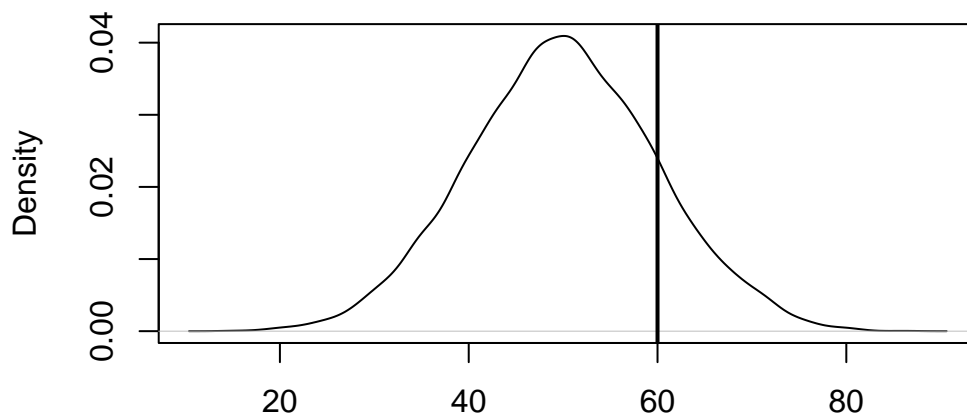
```
x1
```

	x1	x2
Min.	:15.00	Min. :15.00
1st Qu.	:43.00	1st Qu.:43.00
Median	:50.00	Median :50.00
Mean	:49.96	Mean :50.84
3rd Qu.	:57.00	3rd Qu.:60.00
Max.	:86.00	Max. :86.00

**Histogram of x1**



**density.default(x = x1)**

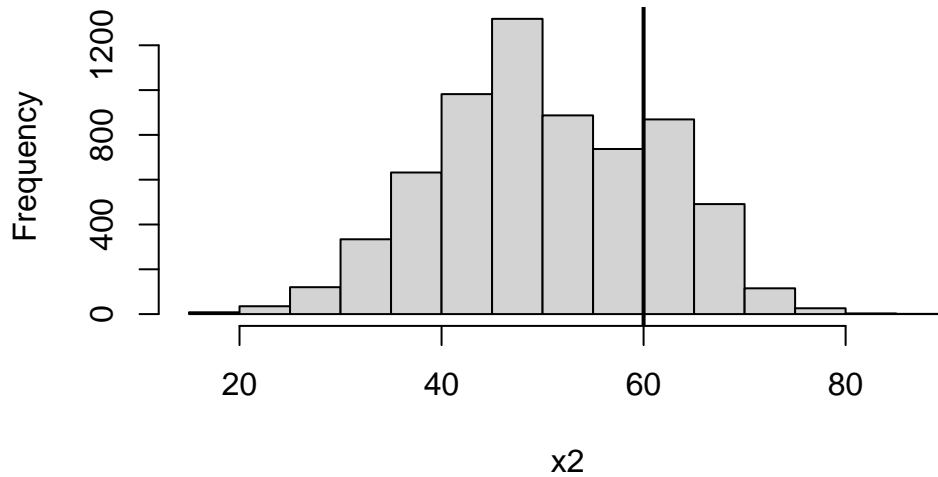


**N = 6558 Bandwidth = 1.543**

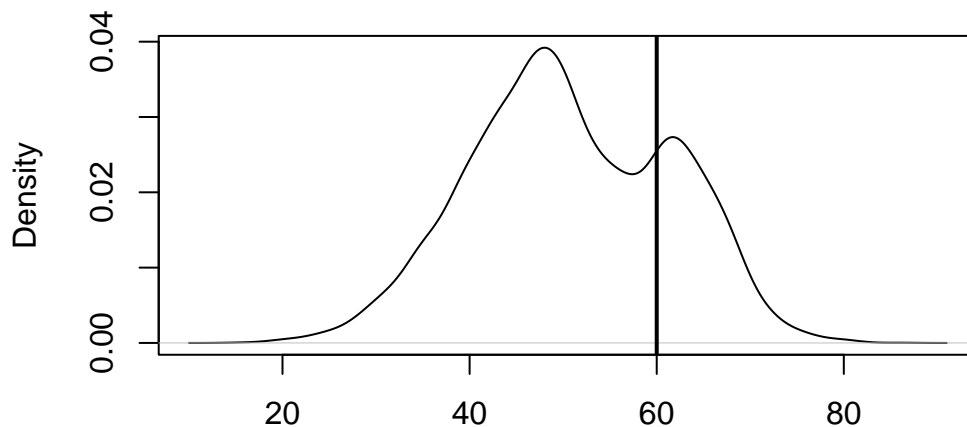
閾値 60 周辺に特異な状況は発見されていない。すなわち、継続変数の操作はなされていないことがわかる。一方で、次に継続変数の操作が行われているようなデータの図示を行う。閾値の後に大きな塊が発見されている。このような構造が見られた際には RDD の適用を見送る必要がある。



### Histogram of x2



### density.default(x = x2)



N = 6558 Bandwidth = 1.664

これまではグラフ、すなわち目視のみで判断を下していたのだが、継続変数の操作について統計的な検定は行えるのだろうか。データ全体が処置群と対照群に分割されている状況を考える。数式的には処置群は  $x_i \geq c$  部分のデータで、対照群は  $x_i < c$  と記述することができる。この二つのデータを用いて、確率密度関数  $f(x)$  が  $c$  において連続かどうか検定する。帰無仮説  $H_0$  と対立仮説  $H_1$  は、以下の通りである。

$$H_0 : \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

$$H_1 : \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

帰無仮説は、 $x$  を左から  $c$  に近づけて行った時の左極限における  $f(x)$  が、 $x$  を右から  $c$  に近づけて行った時の右極限における  $f(x)$  と一致することを意味している。つまり、左辺は  $c$  において左側連続であることを意味している。一方、対立仮説では、この2つが一致していないことを意味している。要するに、有意水準  $\alpha$  において帰無仮説を棄却できる場合、連続でないという結論になるから、回帰不連続デザインを使用するためには、帰無仮説は棄却されないほうが好ましい。

検定統計量  $T_p(h)$  は、以下のように定義される。

$$T_p(h) = \frac{\frac{n_+}{n} \hat{f}_+(c) - \frac{n_-}{n} \hat{f}_-(c)}{\sqrt{\frac{n_+}{n^2 h_+} \hat{V}_+(c) + \frac{n_-}{n^2 h_-} \hat{V}_-(c)}}$$

ここで、 $p$  は多項式の字数、 $h$  はバンド幅、 $n$  は標本サイズ、 $\hat{V}(x)$  は分散の推定値を表す。 $\hat{f}(x)$  は局所多項式回帰係数として推定された確率密度関数である。添字の  $+$  と  $-$  は閾値より大きいかどうかを示している。では、どうプログラミングすれば検定を行えるのだろうか。

```
library(rddensity)
```

Warning: package 'rddensity' was built under R version 4.1.1

```
summary(rddensity(x1, c = 60))
```

Manipulation testing using local polynomial density estimation.

Number of obs =	6558	
Model =	unrestricted	
Kernel =	triangular	
BW method =	estimated	
VCE method =	jackknife	
c = 60	Left of c	Right of c
Number of obs	5445	1113
Eff. Number of obs	5131	1113
Order est. (p)	2	2
Order bias (q)	3	3
BW est. (h)	26	26
Method	T	P >  T
Robust	0.7754	0.4381

Warning in summary.CJMrddensity(rddensity(x1, c = 60)): There are repeated observations. Point estimates and standard errors have been adjusted. Use option massPoints=FALSE to suppress this feature.

P-values of binomial tests (H0: p=0.5).

Window Length / 2	<c	>=c	P> T
0.000	0	182	0.0000

```
summary(rddensity(x2, c = 60))
```

Manipulation testing using local polynomial density estimation.

Number of obs =	6558	
Model =	unrestricted	
Kernel =	triangular	
BW method =	estimated	
VCE method =	jackknife	
c = 60	Left of c	Right of c
Number of obs	4871	1687
Eff. Number of obs	4557	1687
Order est. (p)	2	2
Order bias (q)	3	3
BW est. (h)	26	26
Method	T	P >  T
Robust	13.0866	0

Warning in summary.CJMrddensity(rddensity(x2, c = 60)): There are repeated observations. Point estimates and standard errors have been adjusted. Use option massPoints=FALSE to suppress this feature.

P-values of binomial tests ( $H_0: p=0.5$ ).

Window Length / 2	<c	>=c	P> T
0.000	0	182	0.0000

通常データである x1 は棄却されなかった一方で、操作が行われたデータである x2 は帰無仮説が棄却されたことが検定によって確かめられた。

## 4.2 rdrobust パッケージによる解析②

sharp RDD のまとめとして Ludwig and Miller[2007] による「ヘッドスタート (Head Start)<sup>\*3</sup>は子供たちの生存可能性を改善するのか」という論文内のデータを使用した分析を行う。以下データである。

```
rm(list = ls())
data17b <- read.csv("data17b.csv")
df3 <- na.omit(data17b)
attach(df3)
```

The following object is masked from data17a:

x1

The following objects are masked from data16:

x1, y1

The following object is masked from data15:

x1

```
summary(df3)
```

y1	x1	z1	z2
Min. : 0.000	Min. :15.21	Min. : 376	Min. : 0.00
1st Qu.: 0.000	1st Qu.:24.14	1st Qu.: 9237	1st Qu.: 82.40
Median : 0.000	Median :33.64	Median : 17235	Median : 87.30
Mean : 2.257	Mean :36.75	Mean : 39254	Mean : 84.09
3rd Qu.: 2.830	3rd Qu.:47.24	3rd Qu.: 33701	3rd Qu.: 91.60
Max. :136.054	Max. :81.57	Max. :2664438	Max. :100.00

z3	z4	z5	z6
Min. :0.1963	Min. : 6.50	Min. : 22.0	Min. : 165
1st Qu.:0.5162	1st Qu.:24.70	1st Qu.: 685.5	1st Qu.: 4010
Median :0.5524	Median :33.50	Median : 1267.0	Median : 7874
Mean :0.5514	Mean :33.18	Mean : 2571.3	Mean : 18311
3rd Qu.:0.5892	3rd Qu.:41.00	3rd Qu.: 2372.5	3rd Qu.: 15521

---

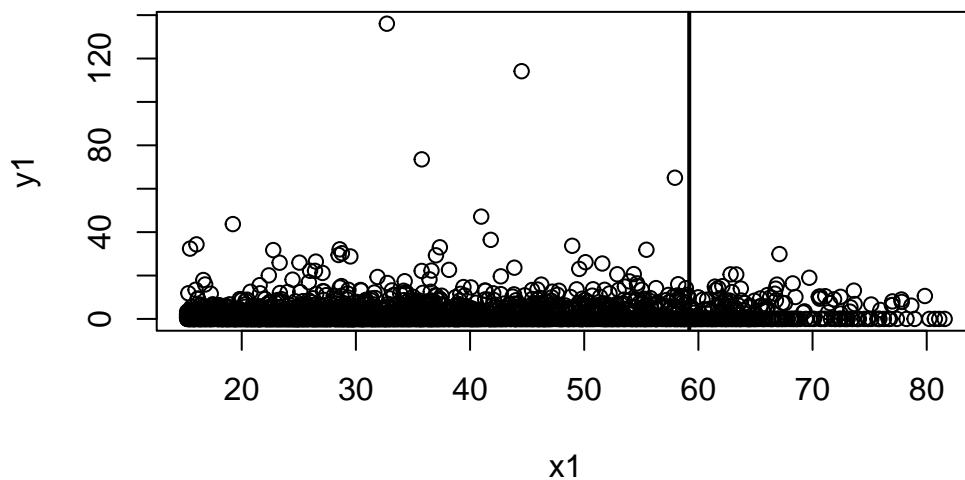
<sup>\*3</sup> 1965 年以来、貧困との戦いの一環として始められた低所得者層の児童を対象とする米国政府の政策

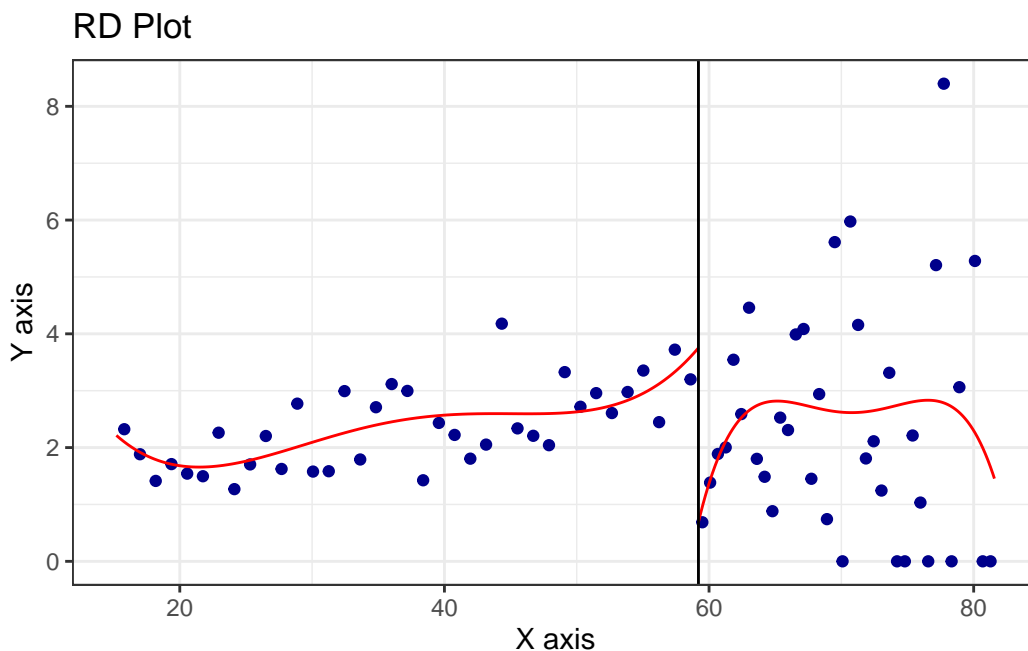
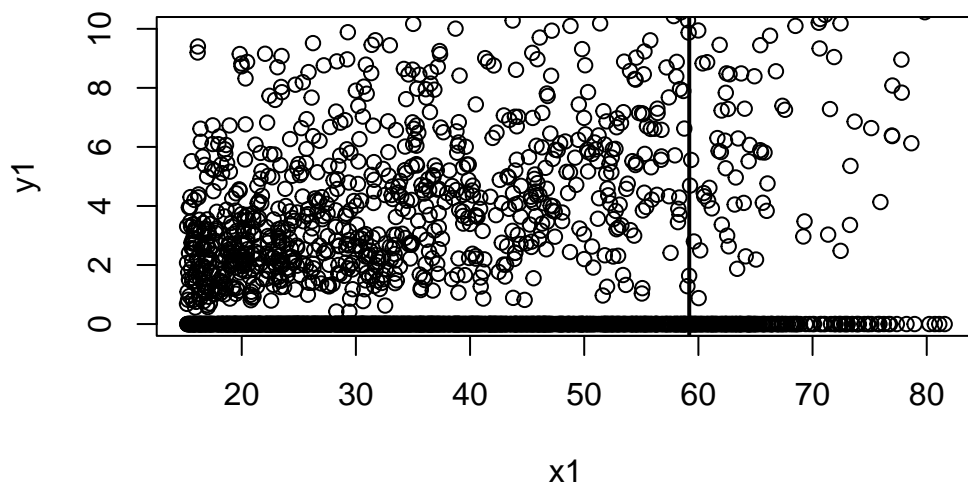
	z7	z8	z9
Max.	:0.7516	:70.50	:153908.0
Min.	: 214	: 0.00	: 0.00
1st Qu.	: 5080	: 0.00	: 0.10
Median	: 9249	: 28.30	: 1.50
Mean	: 21731	: 29.09	:10.61
3rd Qu.	: 17714	: 47.80	:14.90
Max.	:1611158	:100.00	:83.40

```
c1 <- 59.1984
```

結果変数 y1 は 5 歳から 9 歳までの児童の致死率 (人口 10 万人あたり) である。継続変数 x1 は貧困率である。処置は、応募書類作成のための技術的な援助であり、これは貧困率が下位 300 番目の郡まで与えられた。貧困率が 300 番目の郡は 59.1984 である。共変量 z1 から z9 は、郡の全人口数、14 歳から 17 歳の割合、3 歳から 5 歳の割合、25 歳以上の割合、14 歳から 17 歳の人数、3 歳から 5 歳の人数、25 歳以上の人数、都市部人口の割合、黒人人口の割合である。

次に RD プロットによる視覚化を行う。初めの図のように全てのデータをプロットすると外れ値があることがわかるので、次の図では上側 5% 以上のデータを除いて作図した。依然としてデータの傾向が掴みづらいので、RD プロットを活用したのが最後の図である。





可視化によってある連続性の仮定を破っていないことが窺えるので、実際に処置効果の推定を行う段階に入っていく。

#### 4.2.1 解析: 共変量なし ver.

まずは共変量を投入しないモデリングを行う。バンド幅については IK バンド幅、CER 最適化バンド幅、MSE 最適化バンド幅の三種類を用いてモデリングしている。カーネル関数は、デフォルトで設定されている三角関数を使う。

```
IKband <- rdbwselect_2014(y1, x1, c=c1, bwselect = "IK")
model1 <- rdrobust(y1, x1, c=c1, h=IKband$bws[1, 1], all=TRUE)
model2 <- rdrobust(y1, x1, c=c1, bwselect = "cerrd", all=TRUE)
```

```
model3 <- rdrobust(y1, x1, c=c1, bwselect = "mserd",all=TRUE)
summary(model1)
```

Sharp RD estimates using local polynomial regression.

```
Number of Obs.          2779
BW type                 Manual
Kernel                  Triangular
VCE method              NN

Number of Obs.          2485          294
Eff. Number of Obs.     534           267
Order est. (p)           1             1
Order bias (q)           2             2
BW est. (h)              14.822        14.822
BW bias (b)              14.822        14.822
rho (h/b)                1.000         1.000
Unique Obs.              2485          294
```

```
=====
      Method      Coef. Std. Err.      z    P>|z|      [ 95% C.I. ]
=====
Conventional    -1.844      0.875    -2.106    0.035    [-3.559 , -0.128]
Bias-Corrected  -2.403      0.875    -2.746    0.006    [-4.119 , -0.688]
Robust          -2.403      1.211    -1.985    0.047    [-4.777 , -0.030]
=====
```

order est. (p) を見ると、1 となっているので今回の解析には局所線形回帰モデルを使ったことが窺える。モデル 1 の分析結果を見ると Coef. の部分が-1.844,-2.403,-2.403 となって全ての方法による推定値が 95% 信頼区間に 0 を含んでいないことから負に有意な結果であることがわかった。モデル 2、モデル 3 の結果も同様の結果が得られた。

#### 4.2.2 解析:共変量あり ver.

解析結果のみを共有する。共変量についての理論は Appendix. を参照していただきたい。

```
zs <- cbind(z1, z2, z3, z4, z5, z6, z7, z8, z9)
model4 <- rdrobust(y1, x1, c=c1, bwselect="cerrd", all=TRUE, covs=zs)
model5 <- rdrobust(y1, x1, c=c1, bwselect="mserd", all=TRUE, covs=zs)
```

```
summary(model4)
```

Covariate-adjusted Sharp RD estimates using local polynomial regression.

```
Number of Obs.      2779
BW type             cerrd
Kernel              Triangular
VCE method          NN
```

```
Number of Obs.      2485      294
Eff. Number of Obs.  156       134
Order est. (p)       1         1
Order bias (q)       2         2
BW est. (h)          4.696     4.696
BW bias (b)          11.639    11.639
rho (h/b)            0.403     0.403
Unique Obs.         2485     294
```

Method	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[ 95% C.I. ]
Conventional	-3.526	1.168	-3.019	0.003	[-5.815 , -1.237]
Bias-Corrected	-3.690	1.168	-3.159	0.002	[-5.979 , -1.401]
Robust	-3.690	1.247	-2.959	0.003	[-6.134 , -1.246]

共変量を追加することで、推定される係数の値を変えことなく標準誤差を小さくすることに成功した。この結果からも適切な共変量の追加が RDD の精度向上に寄与していることがわかった。

## 5 Fuzzy RDD 入門

ここまでは、割付けが確定的に行われる sharp RDD について述べてきたが、割付けが確率的に行われる **ファジーな回帰不連続デザイン (Fuzzy RDD)** について紹介する。

例えば、60 点未満の学生を補習授業に割り付けても、指示に従わずに補習授業を受けないかもしれない。また、60 点以上の学生を補習授業を受けないように割り付けても、自主的に受講するかもしれない。この場合、処置の割付けが確率的に決まっている場合にはファジーな回帰不連続デザインという。ファジーな回帰不連続デザインは、操作変数法的一种と理解することができる。処置の割付けに従わないことは、非遵守の問題だからである。すなわち、閾値周辺における非遵守に対する操作変数法の問題として扱うことができる。



## 5.1 ファジーな回帰不連続デザイン

処置の割付けに対する非遵守が起こっている場合、対処法としての操作変数法と同様に、個体  $i$  が実際に処置を受けておらず、 $D_i$  を定義しよう。つまり、 $D_i = 0$  ならば、処置を受けておらず、 $D_i = 1$  ならば、実際に処置を受けることができると定義する。非遵守であるため、 $T_i$  と  $D_i$  は必ずしも一致しないことに注意する。したがって、処置を受ける確率は、閾値において跳ね上がるものの、0 から 1 に跳ね上がるものではない。

また、非遵守の対処法としての操作変数法の時と同様に、 $D_i(T_i)$  を個体  $i$  が実際に受ける処置とする。 $D_i(T_i = 1) = 0$  とは、処置の割付けが  $T_i$  が 1 のとき、実際に受ける処置  $D_i$  が 0 という意味であった。したがって、実際に観測される処置  $D_i = T_i D_i(1) + (1 - T_i) D_i(0)$  である。潜在的結果変数の組は、これまで同様に  $\{Y_i(1), Y_i(0)\}$  であるが、 $Y_i(1)$  は  $Y_i(T_i = 1)$  ではなく、 $Y_i(D_i = 1)$  であり、 $Y_i(0)$  は  $Y_i(T_i = 0)$  は  $Y_i(T_i = 0)$  ではなく、 $Y_i(D_i = 0)$  である。さらに、操作変数法の時と同様に、除外制約 (exclusion restriction) により、 $T_i$  は  $D_i$  を通じてのみ  $Y_i$  に影響を及ぼす。sharp RDD と fuzzy RDD の違いは、無作為化実験における完全な遵守と不完全な遵守の違いになぞらえて理解できる。

## 5.2 実践

ここからは、小学校におけるクラスの人数と生徒の成績に関するデータを用いて fuzzy RDD を実践する。直感的には、クラスの人数が多ければ多くなるほど、教師の目が行き届きにくくなるため、生徒の成績が下がりそうに思われる。このことを検証するために、Maimonides ルール (クラスの上限を 40 人とする考え方) を活用した。データのソース元である、Angrist and Lavy(1999) は、1991 年当時のイスラエルの小学生 5 年生のデータを用いて、クラスの人数と算数の点数の関係について検証を行った。次の式は、クラスサイズの理論値を計算できる関数 ( $f_{sc}$ ) である。ここで、 $e_s$  は学校  $s$  における生徒の登録者数 (enroll) であり、 $\text{int}[n]$  は正の数  $n$  以下となる最大の整数である。

$$f_{sc} = \frac{e_s}{\text{int}[\frac{e_s-1}{40}] + 1}$$

ここからは、数値的に解析を行おう。

```
rm(list = ls())
data18 <- read.csv("data18.csv")
attach(data18)
summary(data18)
```

	school	math	class	enroll
Min.	:11005	Min. :27.69	Min. : 8.00	Min. : 8.0
1st Qu.	:31037	1st Qu.:61.11	1st Qu.:26.00	1st Qu.: 50.0
Median	:41213	Median :67.80	Median :31.00	Median : 72.0
Mean	:39637	Mean :67.29	Mean :29.93	Mean : 77.9
3rd Qu.	:51204	3rd Qu.:74.09	3rd Qu.:35.00	3rd Qu.:100.0

```

Max.      :61365   Max.      :93.93   Max.      :44.00   Max.      :226.0
              NA's      :6
      pctdis      fsc
Min.      : 0.00   Min.      : 8.00
1st Qu.: 4.00   1st Qu.:27.00
Median :10.00   Median :31.67
Mean      :14.10   Mean      :30.96
3rd Qu.:19.25   3rd Qu.:35.67
Max.      :76.00   Max.      :40.00

```

fuzzy RDD とは簡単に言ってしまうと、閾値周辺のデータに対して、二段階最小二乗法による操作変数法の推定を行う解析法である。したがって、操作変数法による非遵守への対処の時と同様に、操作変数の外生性、関連性、除外制約の3つの仮定に加えて、単調性の仮定も必要である。先行研究では、閾値の周辺を  $\pm 5$  と定義している。以下のプログラムで、閾値の定義と閾値周辺のデータの収集を行っている。

```

h1 <- 36 <= enroll & enroll <=45
h2 <- 76 <= enroll & enroll <=85
h3 <- 116 <= enroll & enroll <=125
mathR <- math[h1|h2|h3]
classR <- class[h1|h2|h3]
fscR <- fsc[h1|h2|h3]
enrollR <- enroll[h1|h2|h3]
pctdisR <- pctdis[h1|h2|h3]
schoolR <- school[h1|h2|h3]

```

次に、二段階最小二乗法を実行する。これが fuzzy RDD である。次のプログラムの first と second はそれぞれ推定の段階を示している。

```

first <- lm(classR ~ fscR + pctdisR + enrollR)
x1hat <- predict(first)
second <- lm(mathR ~ x1hat + pctdisR + enrollR)
summary(second)

```

Call:

```
lm(formula = mathR ~ x1hat + pctdisR + enrollR)
```

Residuals:

```

      Min       1Q   Median       3Q      Max

```

-27.0082 -5.9623 -0.2463 6.2375 22.8556

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	80.54307	4.20328	19.162	< 2e-16 ***
x1hat	-0.44345	0.17586	-2.522	0.01201 *
pctdisR	-0.43474	0.03692	-11.775	< 2e-16 ***
enrollR	0.07940	0.02668	2.976	0.00308 **

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 8.531 on 467 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.3053, Adjusted R-squared: 0.3008

F-statistic: 68.41 on 3 and 467 DF, p-value: < 2.2e-16

点推定値は-0.443であるが、このままでは標準誤差は不正確である。そのため、R パッケージ AER を用いて二段階最小二乗法を実行する。y を結果変数、ex を外生変数、en を内生変数、in を操作変数とする場合、適切な構文は `ivreg(y ~ ex + en | ex + in)` である。実は fscR は学校を単位としてクラスターになっている。このような場合、クラスターに頑健な標準誤差を計算する必要があった。(できませんでした)

## 6 Appendix.

### 6.1 交互作用項のある回帰モデルの処置効果

回帰関数の平行性が満たされていない場合、回帰モデルは以下のように記述できる。

$$\begin{aligned}Y_i &= \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 T_i + \beta_3 X_i T_i + \varepsilon_i \\Y_i(T_i = 0) &= \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \\Y_i(T_i = 1) &= (\beta_0 + \beta_2) + (\beta_1 + \beta_3) X_i + \varepsilon_i\end{aligned}$$

個体因果効果 (ICE) は、潜在結果変数  $Y_i(1)$  と  $Y_i(0)$  の差であるから、以下のように計算する。

$$\begin{aligned}\tau_i &= Y_i(1) - Y_i(0) \\ \tau_i &= [(\beta_0 + \beta_2) + (\beta_1 + \beta_3) X_i + \varepsilon_i] - [\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i] \\ \tau_i &= \beta_2 + \beta_3 X_i\end{aligned}$$

また、実際に推定すべき平均処置効果 (ATE) は、上の式の期待値<sup>\*4</sup>であるから。

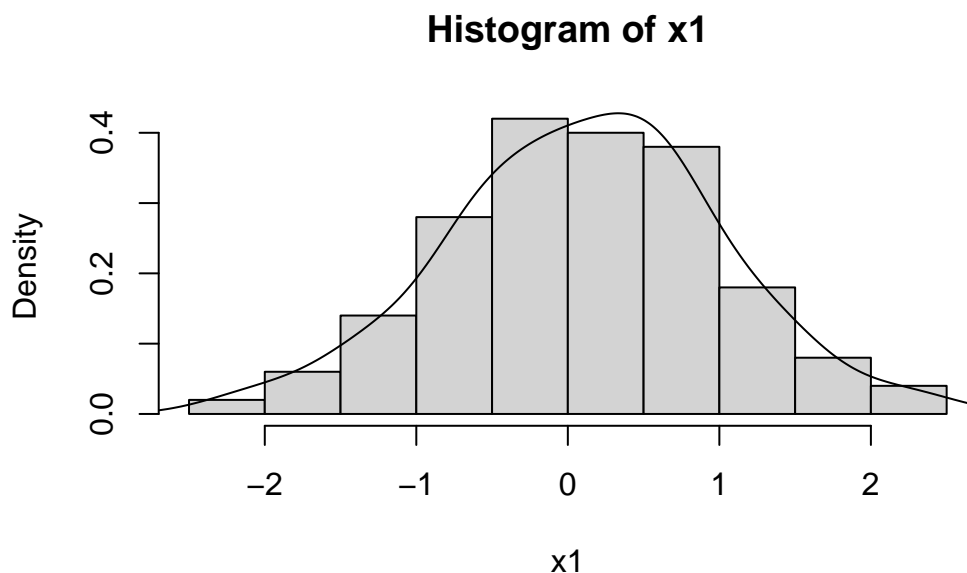
$$\begin{aligned}\tau_{ATE} &= E[Y_i(1) - Y_i(0)] \\ \tau_i &= E[\beta_2 + \beta_3 X_i] \\ \tau_i &= \beta_2 + \beta_3 E[X_i]\end{aligned}$$

---

\*4 念の為、定数の期待値は定数そのものと同じ値であることを付言しておく。

## 6.2 カーネル密度推定

ノンパラメトリックなカーネル密度推定値 (kernel density estimate) とは、ヒストグラムをスムーズ化したものと考えることができる。これは観察されたデータから確率密度関数を推定する方法である。



上図は、標準正規分布に従う乱数  $x_1$  をヒストグラムとして図示したものに対して、カーネル密度推定値を計算して、曲線で近似したものである。ヒストグラムのバーの幅は一定で固定であるが、密度推定値を計算するには、ヒストグラムのバーのようなウィンドウを左から右に少しずつ動かしていき、ある  $x$  の値に対して、式 (4) によって密度推定値を計算する。ここで、 $x_i$  は  $n$  個のデータの値であり、 $K(\cdot)$  は最頻値が 0 で面積が 1 の対象な密度関数、 $h$  はバンド幅である。

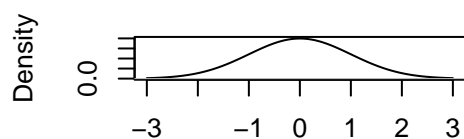
$$\hat{p}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x - x_i}{h} \right) \quad (4)$$

特に、 $K(\cdot)$  はカーネル関数と呼ばれ、ガウス関数、矩形関数、三角形関数、エパネチニコフ関数などが使われる。それぞれの関数は表の通りである。

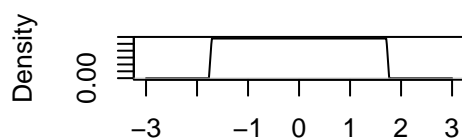
Col1	Col2
ガウス	$N(0, 1)$
矩形	$U(-a, a)$
三角形	$1 -  t $
エパネチニコフ	$[3(1 - t^2)]/4$

これらの関数がどういう形をしているか可視化してみよう。

`density.default(x = 0, bw = 1, kernel = "gaussian")` `density.default(x = 0, bw = 1, kernel = "rectangular")`

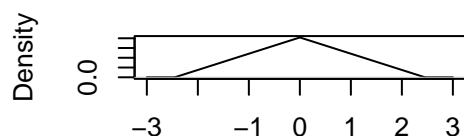


N = 1 Bandwidth = 1

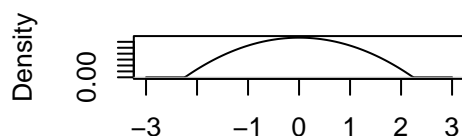


N = 1 Bandwidth = 1

`density.default(x = 0, bw = 1, kernel = "triangular")` `density.default(x = 0, bw = 1, kernel = "epanechnikov")`



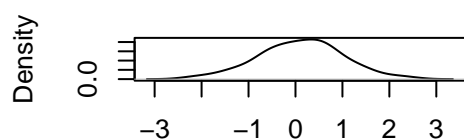
N = 1 Bandwidth = 1



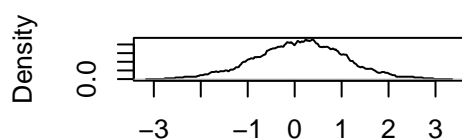
N = 1 Bandwidth = 1

次に、異なるカーネル関数による推定結果の差があるかどうかを確認してみよう。

`density.default(x = x1, kernel = "gaussian")` `density.default(x = x1, kernel = "rectangular")`

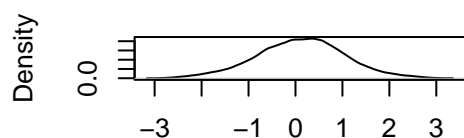


N = 100 Bandwidth = 0.3171

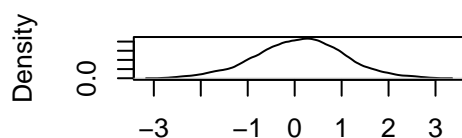


N = 100 Bandwidth = 0.3171

`density.default(x = x1, kernel = "triangular")` `density.default(x = x1, kernel = "epanechnikov")`

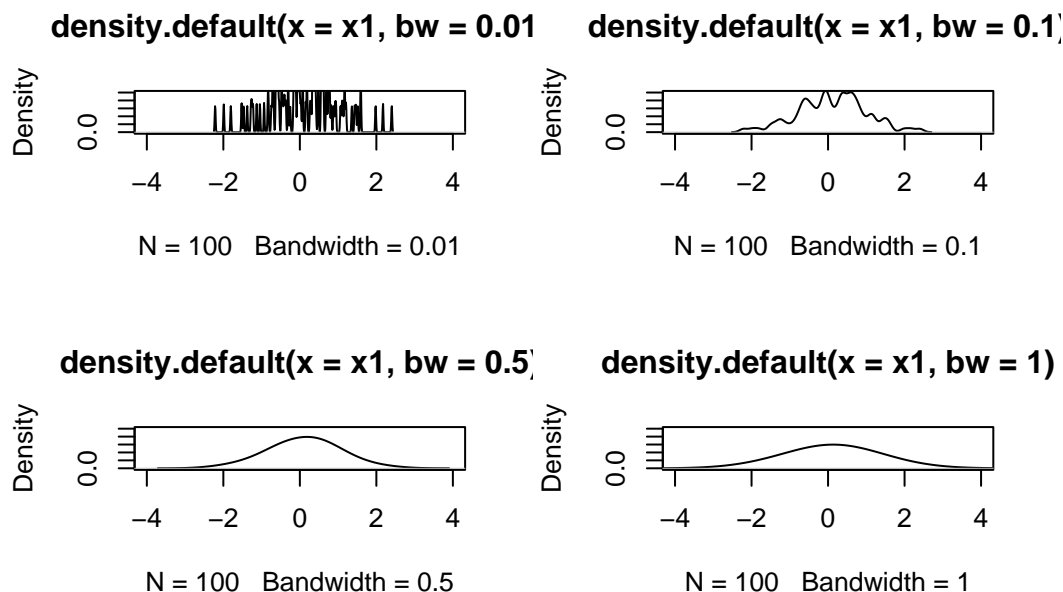


N = 100 Bandwidth = 0.3171



N = 100 Bandwidth = 0.3171

図からもわかるようにカーネル関数が違うからといってカーネル密度推定の結果に大きな差異が生まれるわけではない。では、結果に大きな影響を及ぼす指標はなんだろうか。いくつかのバンド幅を使って密度推定を行う結果を下に記す。カーネル関数はデフォルトでガウスカーネルが設定されている。



バンド幅が異なると推定結果に大きな差が生じることは上図から明らかである。このことから適切なバンド幅を選択することに注力する必要があることが窺える。

### 6.3 共変量追加の理論

回帰不連続デザインによって局所的な無作為割付けが成功しているならば、巨奥所的には実験研究であるから、共変量をモデルに取り込む必要性は内容に思われる。しかし、実験研究においても共分散分析を用いて共変量を活用することで、推定の精度を向上させることができる。これと同じ理屈が回帰不連続デザインにも当てはまる。便利なことに、交絡変数とは異なり、この場合の共変量については関数形を機にする必要性はなく、単純にモデルに追加すれば良いことが知られている。なぜなら、共変量を追加してもしなくても、パラメータの推定値の一致性に影響はないからである。逆に言うとパラメータの推定値に影響を与えるような共変量をモデルに取り組んではならないことを意味している。この点は、PSM と異なる点である。つまり、処置群と対照群の分布にインバランスのある共変量をモデルに入れてはいけないし、もし共変量を取り入れてパラメータの推定値に大きな変化があったとしたら、回帰不連続デザインのモデリング自体がうまく機能していない可能性を考慮しなければならない。なお、共変量は解析モデルだけで利用すれば良いのだろうか、バンド幅の推定に際にも利用すべきだろうかと言う論点があるが、明確な答えが提示されている。共変量は、バンド幅の推定の際にも利用した上で、解析モデルにも含めることで、精度が最もよくなる。

## 7 参考文献

- 高橋将宣 [2022] 『wonderful R 統計的因果推論の理論と実装 潜在的結果変数と欠測データ』 pp.209-254