ESTIN	École supérieure en Sciences et Technologies de l'Informatique et du Numérique Durée: 1 heure	1ère année Cycle supérieur Année universitaire: 2022/2023 Module: Analyse numérique Dr. ALKAMA.L

Interrogation N°2

N.B: veuillez détailler vos réponses.

Partie I: On considère la fonction $g(x) = x\sqrt{x^2+1}$ définie sur $[-2, 3]$.

1. Soit $\varepsilon = 10^{-1}$. Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour approcher la racine α tel que $g(\alpha) = 0$.
2. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ par la méthode de dichotomie.
3. Estimer l'erreur de l'approximation commise.

Partie II: Soit f une fonction passant par les points $(x_i, f(x_i))$ suivants:

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	$3/2$
$f(x_i)$	0	-3	-6	$-135/8$

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de f avec deux méthodes différentes (de votre choix).
2. Approcher $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$.
3. Donner l'expression analytique de l'erreur estimée.
4. Majorer l'estimation de l'erreur de $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$ si $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq \dfrac{1}{1250\ x^2}$. Conclure.

ESTIN	École supérieure en Sciences et Technologies de l'Informatique et du Numérique Durée: 1 heure	1ère année Cycle supérieur Année universitaire: 2022/2023 Module: Analyse numérique Dr. ALKAMA.L

Correction interrogation N°2 (12 points)

Partie I: On considère la fonction $g(x) = x\sqrt{x^2+1}$ définie sur $[-2, 3]$. Et soit $\varepsilon = 10^{-1}$.

1. **Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour approcher la racine α tel que $g(\alpha) = 0$.**

$$\text{On a} \quad n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} - 1 \implies n \geq \frac{\ln\left(\frac{3-(-2)}{10^{-1}}\right)}{\ln 2} - 1 = 4.6438 \implies n = 5 \text{.........}\mathbf{(0.5)}$$

2. **Résoudre l'équation $g(x) = 0$ par la méthode de dichotomie.**

Vérifions l'existence et l'unicité de la racine:

- Continuité: g est continue sur $[-2, 3]$ car c'est le produit de deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ continues sur $[-2, 3]$.............**(0.25)**
- Existence: On a $g(-2) = -2\sqrt{5}$ et $g(3) = 3\sqrt{10}$ alors $g(-2).g(3) < 0$, d'où il existe au moins une racine $\alpha \in [-2, 3]$ tel que $g(\alpha) = 0$.............**(0.25)**
- Unicité: On a $g'(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$, $\forall x \in [-2, 3]$ alors g est strictement monotone (strictement croissante) dans $[-2, 3]$, d'où la racine $\alpha \in [-2, 3]$ est unique ....**(0.5)**.

Résolution par Dichotomie:

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad \Delta_n = \frac{|b-a|}{2^{n+1}} = \frac{5}{2^{n+1}}, \quad \varepsilon = 10^{-1}$$

n	a_n	b_n	x_n	$g(a_n)$	$g(b_n)$	$g(x_n)$	Δ_n	$\Delta_n \leq \varepsilon$
0	-2	3	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$-2\sqrt{5}$	$3\sqrt{10}$	0.55	$\frac{5}{2}$	Non
1	-2	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\boxed{-\frac{3}{4}}$	$-2\sqrt{5}$	0.55	-0.93	$\frac{5}{4}$	Non
2	$\boxed{-\frac{3}{4}}$	$\frac{1}{2}$	$\boxed{-\frac{1}{8}}$	-0.93	0.55	-0.12	$\frac{5}{8}$	Non
3	$\boxed{-\frac{1}{8}}$	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{3}{16}}$	-0.12	0.55	0.19	$\frac{5}{16}$	Non
4	$\boxed{-\frac{1}{8}}$	$\frac{3}{16}$	$\boxed{\frac{1}{32}}$	-0.12	0.19	0.03	$\frac{5}{32}$	Non
5	$\boxed{-\frac{1}{8}}$	$\frac{1}{32}$	$-\frac{3}{64}$	-0.12	0.03	-0.04	$\frac{5}{64}$	Oui

............**(03)**

Alors la valeur approchée à la racine α par la méthode de dichotomie à 10^{-1} près est $x^* = x_5 = -\frac{3}{64} \simeq 0$ avec $g(x^*) = -0.04 \simeq 0$............**(0.5)**

3. **Estimer l'erreur de l'approximation commise.**

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|b-a|}{2^{n+1}}$$
$$\Longleftrightarrow |\alpha - x_5| \leq \frac{|3-(-2)|}{2^{5+1}}$$
$$\Longleftrightarrow |\alpha - 0| \leq \frac{5}{64}\textbf{............(0.5)}$$

Partie II: Soit f une fonction passant par les points $(x_i, f(x_i))$ suivants:

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	$3/2$
$f(x_i)$	0	-3	-6	$-135/8$

1. **Déterminer le polynôme d'interpolation de f avec deux méthodes différentes (de votre choix).**
   - On a 4 points, ce qui veut dire que le polynôme d'interpolation sera d'ordre 3.**............(0.25)**
   - On a aussi $-1 \neq 0 \neq 1 \neq \frac{3}{2}$, d'où le polynôme P_3 est unique.**............(0.25)**

   En utilisant la méthode directe:

   On a $\quad P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$**.......(0.25)**.

   Et
$$\begin{aligned}
&P_3(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = f(-1) = 0\\
&P_3(0) = a_0 = f(0) = -3\\
&P_3(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = f(1) = -6\\
&P_3\left(\frac{3}{2}\right) = a_0 + \frac{3}{2}a_1 + \frac{9}{4}a_2 + \frac{27}{8}a_3 = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{135}{8}
\end{aligned}$$

   Les coefficients a_i vont être déterminés par la résolution du système linéaire:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{4} & \frac{27}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \\ -\frac{135}{8} \end{pmatrix}$$

   La solution de système est $\;a = {}^t(-3, 2, 0, -5)$**.......(1)**
   D'où :
$$P_3(x) = -3 + 2x - 5x^3\textbf{.......(0.25)}.$$

   En utilisant la formule de Lagrange

$$P_3(x) = \sum_{j=0}^{3} f(x_j) L_i(x)$$

   On a

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(-1-0)(-1-1)(-1-\frac{3}{2})} = \frac{-1}{5}\; x(x-1)(x-\frac{3}{2})\\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(0+1)(0+1)(0-\frac{3}{2})} = \frac{2}{3}\;(x^2-1)(x-\frac{3}{2})\textbf{.......(1)}.\\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-\frac{3}{2})}{(1-0)(1+1)(1-\frac{3}{2})} = -\;x(x+1)(x-\frac{3}{2})\\
L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(\frac{3}{2}+1)(\frac{3}{2}-0)(\frac{3}{2}-1)} = \frac{8}{15}\;x(x^2-1)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
P_3(x) = &\ f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)\textbf{.......(0.25)}.\\
= &\ 0 \times L_0(x) - 3L_1(x) - 6L_2(x) - \frac{135}{8}L_3(x)\\
= &-2\Big(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\Big) + 6\Big(x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x\Big) - 9\Big(x^3 - x\Big)\\
= &\ -5x^3 + 2x - 3\textbf{.......(0.25)}.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Newton

$$\begin{array}{cccccc}
x_0 = -1 & \boxed{f(x_0) = 0} & & & & \\
 & & \boxed{f[x_0, x_1] = -3} & & & \\
x_1 = 0 & f(x_1) = -3 & & \boxed{f[x_0, x_1, x_2] = 0} & & \\
 & & f[x_1, x_2] = -3 & & \boxed{f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -5} & \\
x_2 = 1 & f(x_2) = -6 & & f[x_1, x_2, x_3] = -\dfrac{25}{2} & & \\
 & & f[x_2, x_3] = -\dfrac{87}{4} & & & \\
x_3 = \dfrac{3}{2} & f(x_3) = -\dfrac{135}{8} & & \textbf{.......(1)} & & \\
 & \text{------} & \text{------} & \text{------} & \text{------} & \\
 & & \text{Etape 1} & \text{Etape 2} & \text{Etape 3} & \\
 & \text{------} & \text{------} & \text{------} & \text{------} &
\end{array}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{-3-0}{0-(-1)} = -3, \quad f[x_1, x_2] = \frac{-6-(-3)}{1-0} = -3, \quad f[x_2, x_3] = \frac{-\frac{135}{8}-(-6)}{\frac{3}{2}-1} = -\frac{87}{8}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-3-(-3)}{1-(-1)} = 0, \quad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{-\frac{87}{4}-(-3)}{\frac{3}{2}-0} = -\frac{25}{2}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{-\frac{25}{2}-0}{\frac{3}{2}-(-1)} = -5$$

D'où

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x-0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)\\
&\qquad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\textbf{..........(0.25)}\\
&= 0 - 3(x+1) + 0(x-0)(x+1) - 5\ (x-0)\ (x+1)(x-1)\\
&= -5x^3 + 2x - 3\textbf{..........(0.25)}.
\end{aligned}$$

2. **Approcher $f\left(\frac{1}{4}\right)$.**

On a $f(x) \simeq P_3(x)$, alors

$$P_3\left(\frac{1}{4}\right) = -5\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{4}\right) - 3 = -\frac{165}{64} = -2.5781\textbf{...........(0.75)}$$

D'où

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \simeq -\frac{165}{64} = -2.5781$$

3. **Donner l'expression analytique de l'erreur estimée**.

On a

$$E_n = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon_x)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j), \quad \varepsilon_x \in [a,b]\,.$$

Alors

$$E_3 = f(x)-P_3(x) = \frac{f^{(3+1)}(\varepsilon_x)}{(3+1)!}\prod_{j=0}^{3}(x-x_j) = \frac{f^{(4)}(\varepsilon_x)}{24}\,x\,(x+1)(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right), \quad \varepsilon_x \in \left[-1,\frac{3}{2}\right] \textbf{.......(0.75)}.$$

4. **Majorer l'estimation de l'erreur de** $f\left(\frac{1}{4}\right)$ **si** $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq \frac{1}{1250\ x^2}$. **Conclure.**

$$\text{On a} \quad E_n(x) \leq \frac{\max\limits_{\varepsilon_x\in[-1,\frac{3}{2}]}|f^{(n+1)}(\varepsilon_x)|}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}|(x-x_j)|$$

$$\Longrightarrow E_4(x) \leq \frac{\max\limits_{\varepsilon_x\in[-1,\frac{3}{2}]}|f^{(4)|}(\varepsilon_x)}{24}x(x+1)(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{24}\,\frac{1}{1250\ x^2}\left|x\ (x-1)(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\right|$$

La majoration de l'erreur estimée de $f\left(\frac{1}{4}\right)$ est

$$E_4\left(\frac{1}{4}\right) \leq \frac{1}{24}\,\frac{1}{1250\ \left(\frac{1}{4}\right)^2}\left|\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}+1\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right)\right|$$

$$\leq 1.5625 * 10^{-4}\textbf{............(1)}$$

<u>**Conclusion:**</u> **.......(0.5)**

La majoration d'erreur est autour de 10^{-4}, qui signifie que le polynôme d'interpolation trouvé est précis. En d'autre terme, il s'agit d'une bonne approximation.