chap_10m 频率响应补充

复频域&系统函数&波特图

复频域

时域
（t域）

拉普拉斯变换 ⟷ 拉普拉斯反变换

复频域
（s域）

$$f(t) \qquad\qquad F(s)$$

拉普拉斯变换
（Laplace transform）

$$F(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

复频率 $s=\sigma+j\omega$

拉普拉斯反变换
（Inverse Laplace transform ）

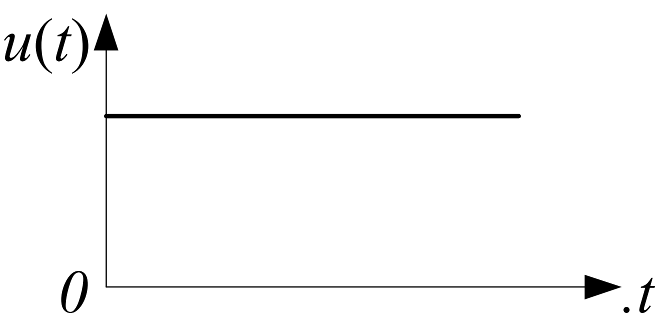
$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega}F(s)e^{st}ds$$

$$\boxed{F(s)\big|_{\sigma=0}=F(j\omega)\quad \text{对应频域}}$$

常用激励函数的复频域形式

单位阶跃函数$u(t)$

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$



$$\boxed{F(s)=\int_{0^-}^{\infty}u(t)e^{-st}dt=\frac{1}{s}}$$

Matlab代码:

```
>> syms t;
>> ft=heaviside(t)

ft =

heaviside(t)

>> Fs=laplace(ft)

Fs =

1/s
```

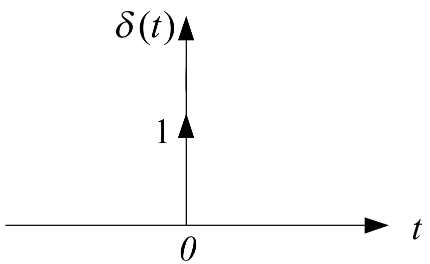
laplace: 拉普拉斯变换

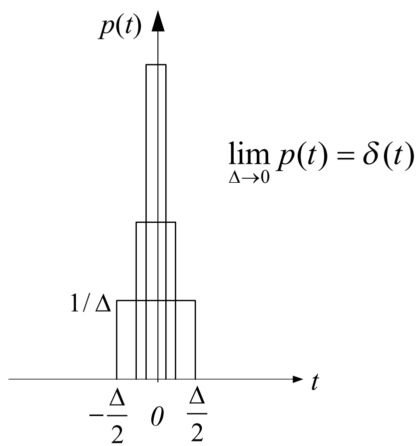
常用激励函数的复频域形式

冲击函数 $\delta(t)$

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$





$$\boxed{F(s)=\int_{0^-}^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt=1}$$

Matlab代码:

```
>> syms t;
>> ft=dirac(t)

ft =

dirac(t)

>> Fs=laplace(ft)

Fs =

1
```

拉普拉斯变换特性

$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

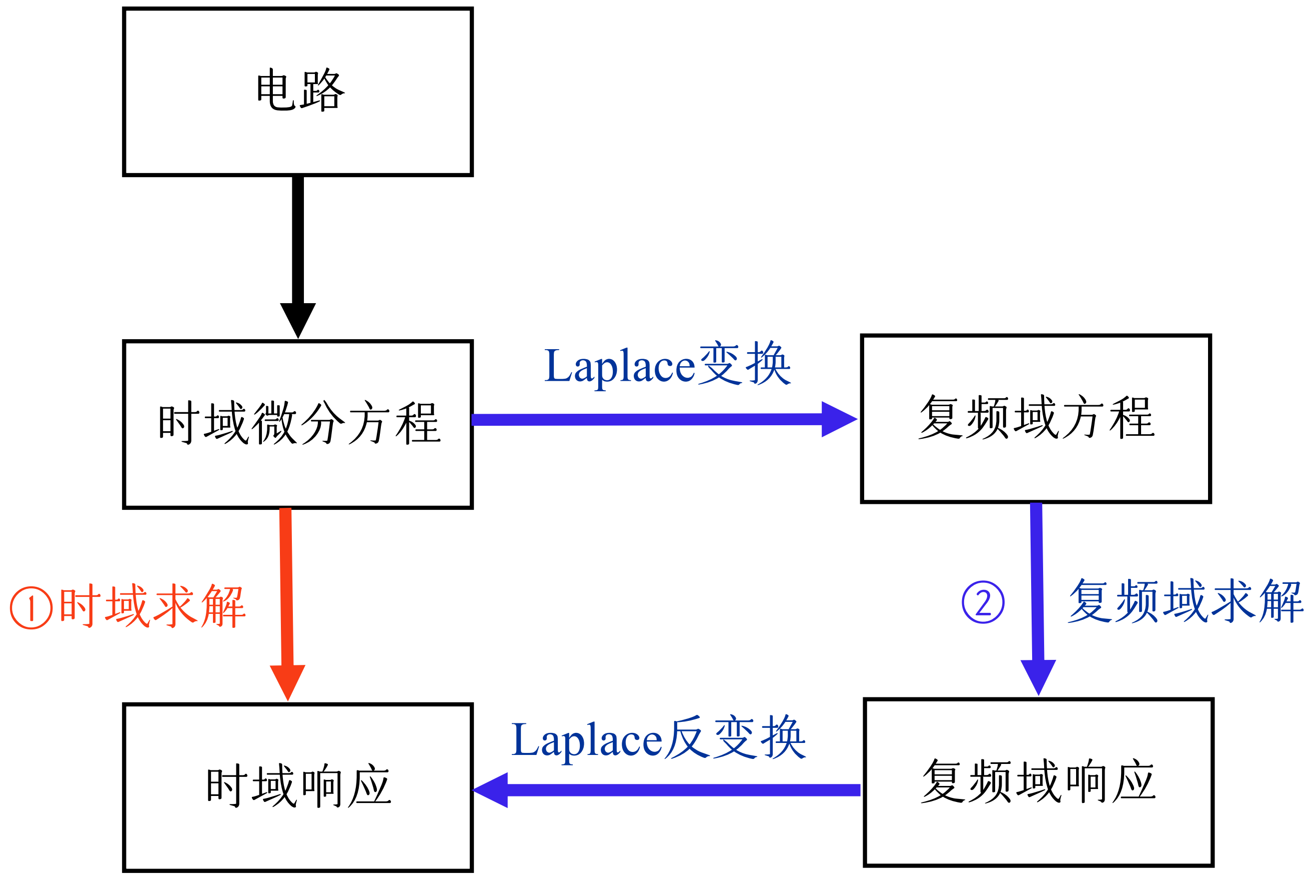
$$\frac{d}{dt} f(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0)$$

- 零状态条件下

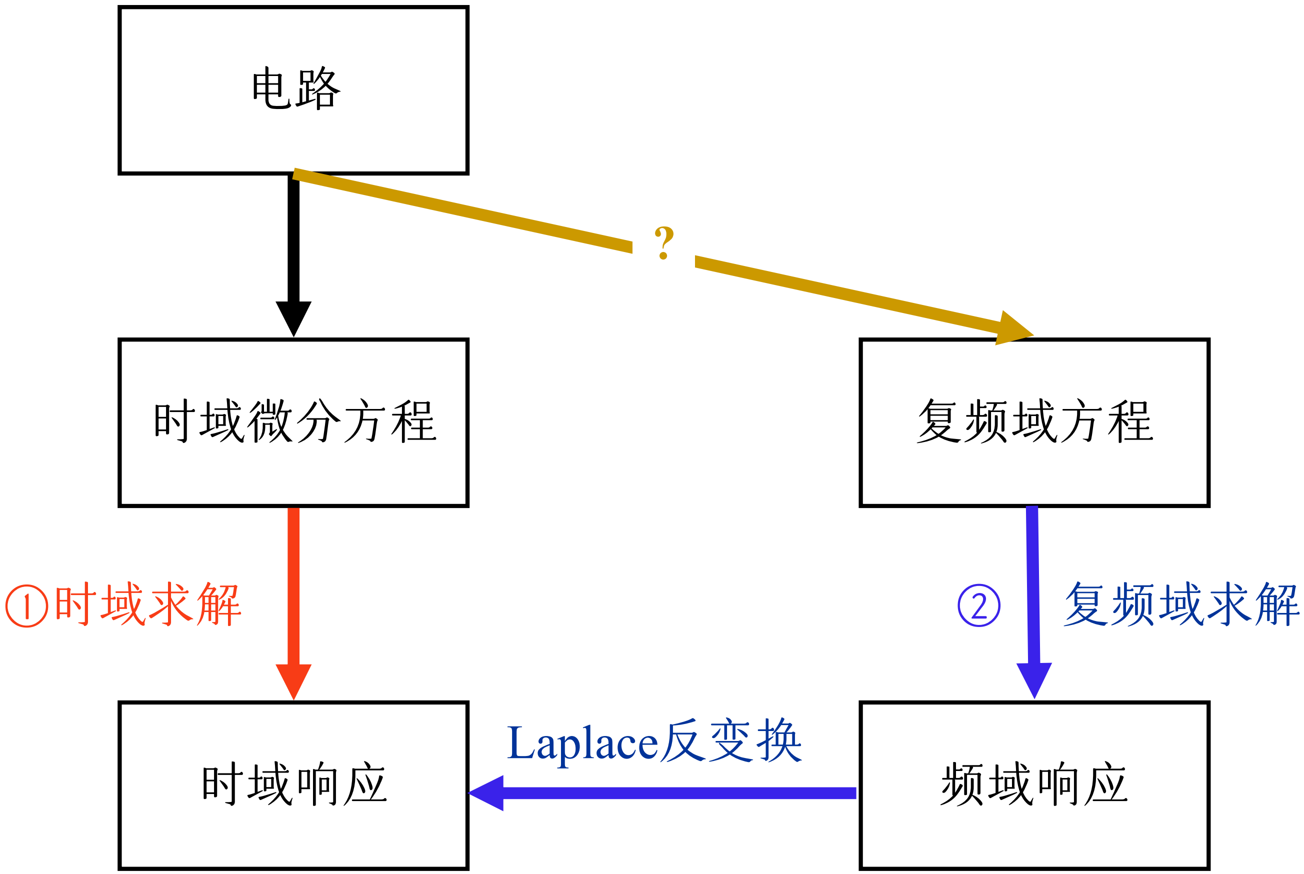
$$\frac{d}{dt} f(t) \leftrightarrow sF(s)$$

时域：微分 微分方程	→	复频域：乘s 代数方程

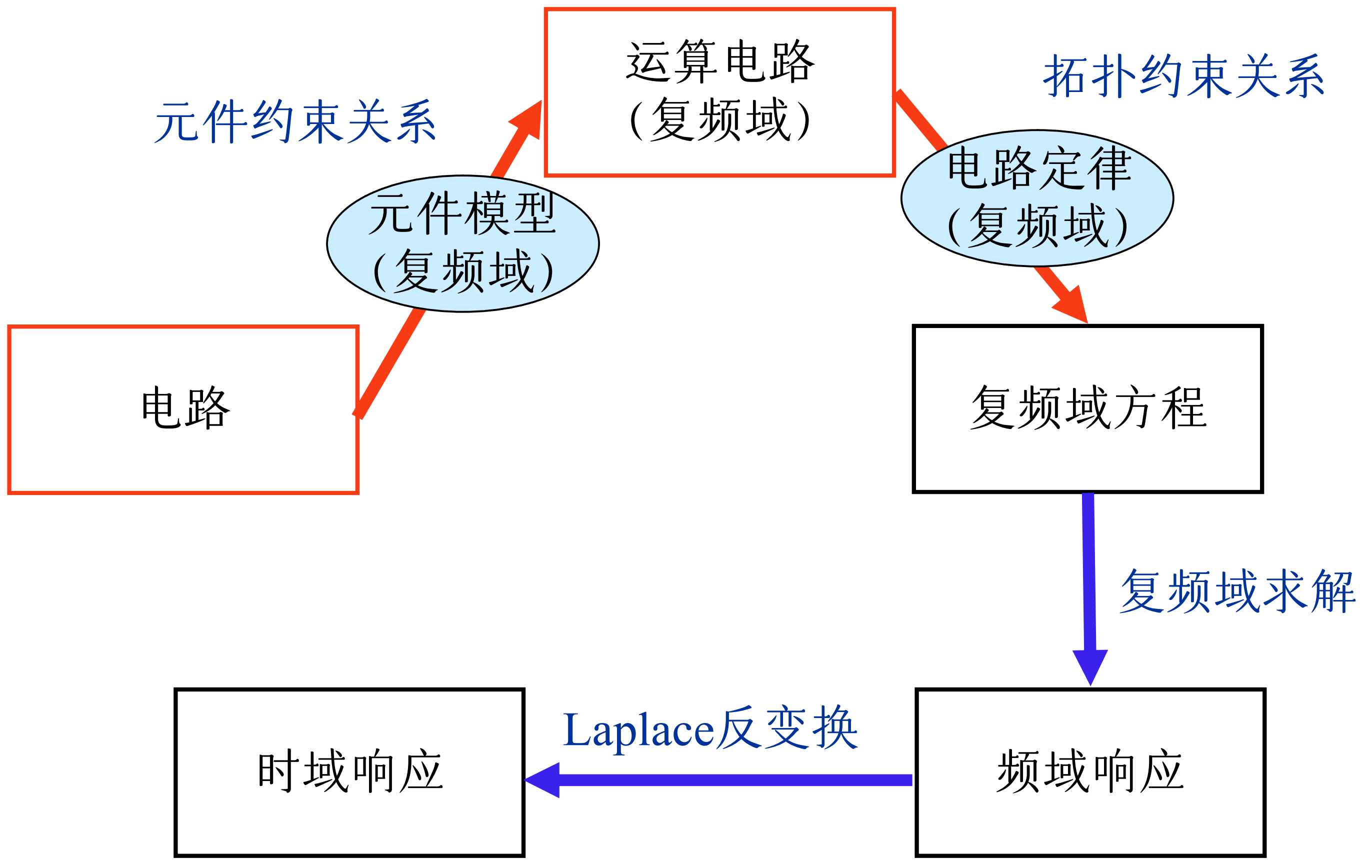
动态电路微分方程复频域求解



动态电路复频域方程?



动态电路复频域方程列写



复频域中的KCL、KVL

时域中的基尔霍夫定理:

$$\text{KCL:}\quad \Sigma i\left(t\right)=0$$

$$\text{KVL:}\quad \Sigma v\left(t\right)=0$$

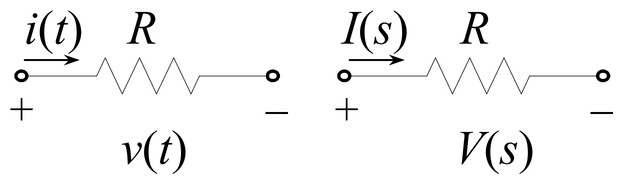
经拉普拉斯变换，得到复频域中的基尔霍夫定理:

$$\text{KCL:}\quad \Sigma I\left(s\right)=0$$

$$\text{KVL:}\quad \Sigma V\left(s\right)=0$$

形式一致

电阻的复频域模型



时域　　　　复频域

时域

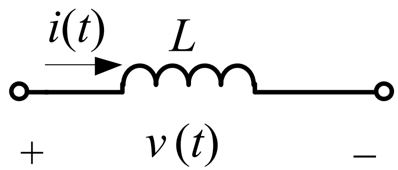
$$i(t)=\frac{v(t)}{R}$$

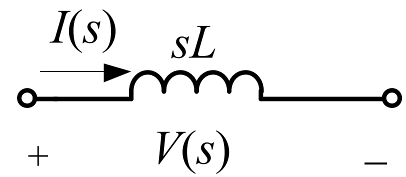
经拉普拉斯变换，得到复频域中电压电流的关系：

$$I(s)=\frac{V(s)}{R}$$

形式一致

零状态下电感的复频域模型





时域　　　　复频域　　　　**(零状态)**

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad V(s) = sLI(s)$$

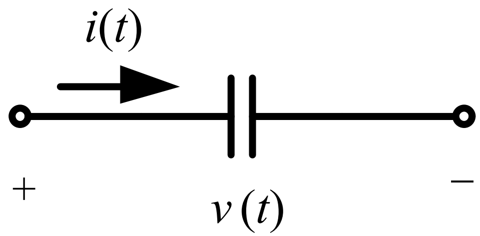
零状态

电压与电流呈线性关系（电阻的特性），比例系数为*sL*

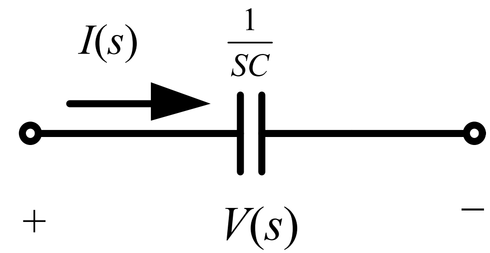
故复频域中电感可用值为*sL*的电阻等效

$$sL\Big|_{s=j\omega} = j\omega L$$

零状态下电容的复频域模型



时域



(零状态)

复频域

$$i\left(t\right)=C\frac{dv\left(t\right)}{dt}\quad\Rightarrow\quad I\left(s\right)=sCV\left(s\right)=\frac{V\left(s\right)}{1/sC}$$

零状态

电压与电流呈线性关系（电阻的特性），比例系数为1/(sC)
故复频域中电感可用值为1/(sC)的电阻等效

$$\left.\frac{1}{sC}\right|_{s=j\omega}=\frac{1}{j\omega C}$$

动态电路频域特性求解

- 频域也属于变换域

复频域 → **频域**

$s = \sigma + j\omega$ → $\sigma = 0$，$s = j\omega$

- 系统函数

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

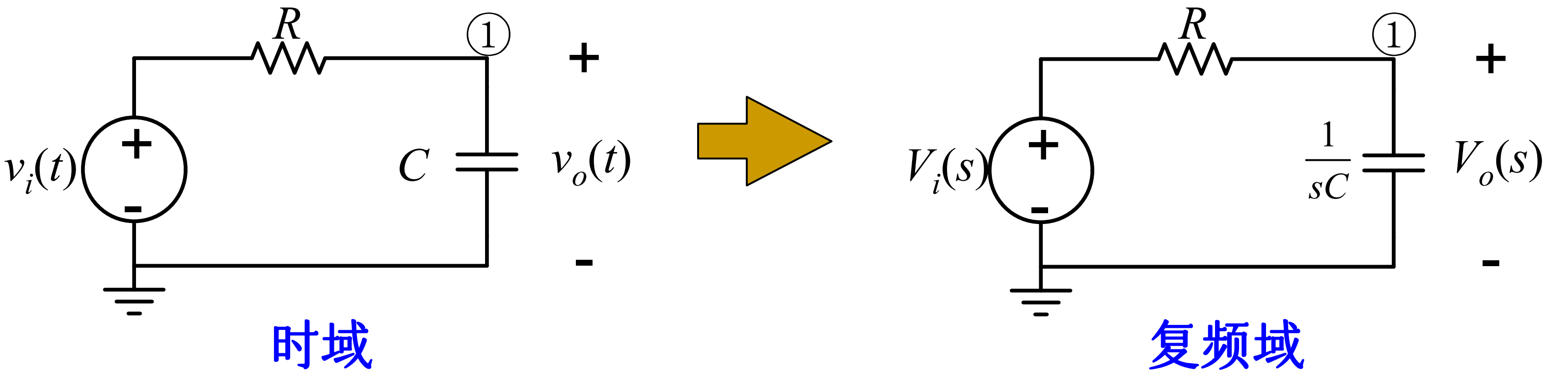
  - 也称为传递函数（或转移函数）

- 频域特性

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$$

一阶RC电路系统函数

- 零状态初始条件



$$\frac{V_o(s)-V_i(s)}{R}+sCV_o(s)=0$$

$$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{1}{sCR+1}$$

一阶RC电路频域特性

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1+j\omega CR}$$

- 特征角频率 $\omega_n = \dfrac{1}{RC}$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_n}}$$

$$H(j\omega) = \left|H(j\omega)\right| e^{j\varphi(j\omega)}$$

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega^2/\omega_n^2)}}$$

$$\varphi(j\omega) = -\arctan\left(\omega/\omega_n\right)$$

幅频特性

相频特性

一阶RC电路频域特性

- 当频率很低

$$\omega \ll \omega_n,\quad \frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$$

$$\left|H(j\omega)\right| \approx 1,\quad \varphi(j\omega) \approx 0$$

- 信号可以“通”过电路

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega^2/\omega_n^2)}}$$

$$\varphi(j\omega) = -\arctan\left(\omega/\omega_n\right)$$

一阶RC电路频域特性

- 当频率很高

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega^2/\omega_n^2)}}$$

$$\varphi(j\omega) = -\arctan\left(\omega/\omega_n\right)$$

$$\omega \gg \omega_n, \quad \frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$$

$$|H(j\omega)| \approx \frac{\omega_n}{\omega} \to 0, \quad \varphi(j\omega) \to -\frac{\pi}{2}$$

- 信号无法“通”过电路

一阶RC电路频域特性

- 当 $\omega = \omega_n$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7, \quad \varphi(j\omega) = -\frac{\pi}{4}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega^2 / \omega_n^2)}}$$

$$\varphi(j\omega) = -\arctan\left(\omega / \omega_n\right)$$

- 信号幅度只有输入的70%

- 电路具有**低通**的特点

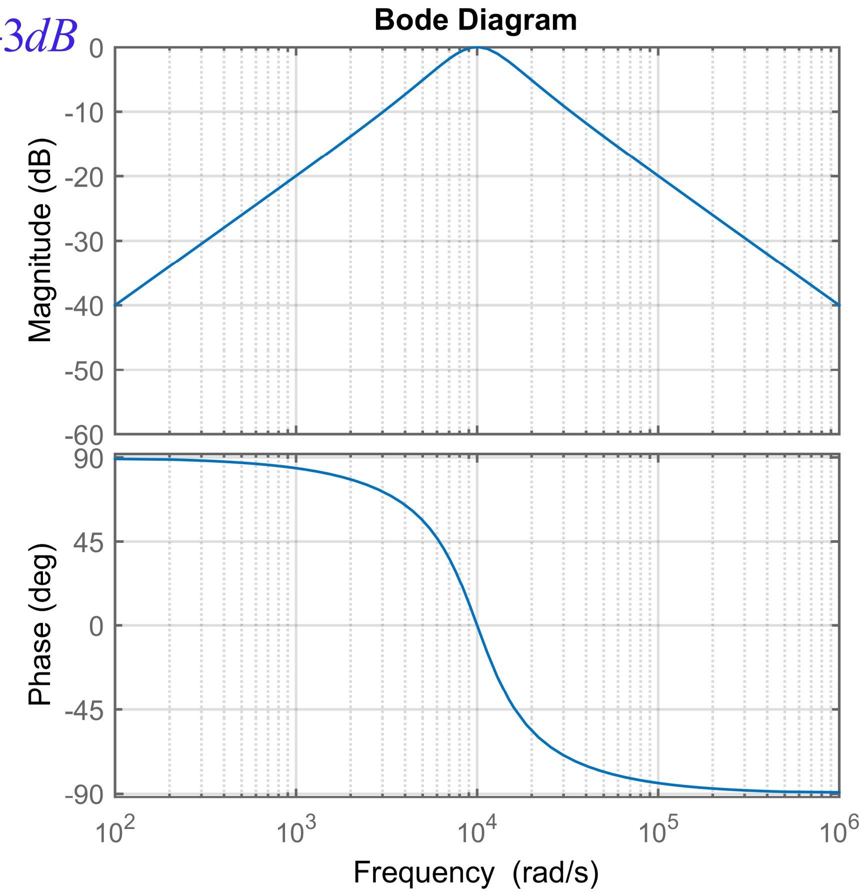
波特图（Bode Plot）

$$\left|H(j\omega)\right|(dB) = 20\log 10\left|H(j\omega)\right|$$

$$H(j\omega) = \left|H(j\omega)\right| e^{j\varphi(j\omega)}$$

$$20\log 10(0.7) = -3dB$$

$\left|H(j\omega)\right|(dB)$



幅频特性

$\varphi(j\omega)$

相频特性

一阶RC电路波特图

$$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{1}{sCR+1}$$

$$H(s)=\frac{Q(s)}{P(s)}=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_1 s+a_0}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}$$

- tf函数语法

$$\mathrm{tf}\left(\left[a_m\ a_{m-1}\ \cdots\ a_0\right],\left[b_n\ b_{n-1}\ \cdots\ b_0\right]\right)$$

$$H(s)=\frac{1}{sCR+1}$$

$$\left[a_m\ a_{m-1}\ \cdots\ a_0\right]=\left[1\right]$$

$$\left[b_n\ b_{n-1}\ \cdots\ b_0\right]=\left[RC\ 1\right]$$

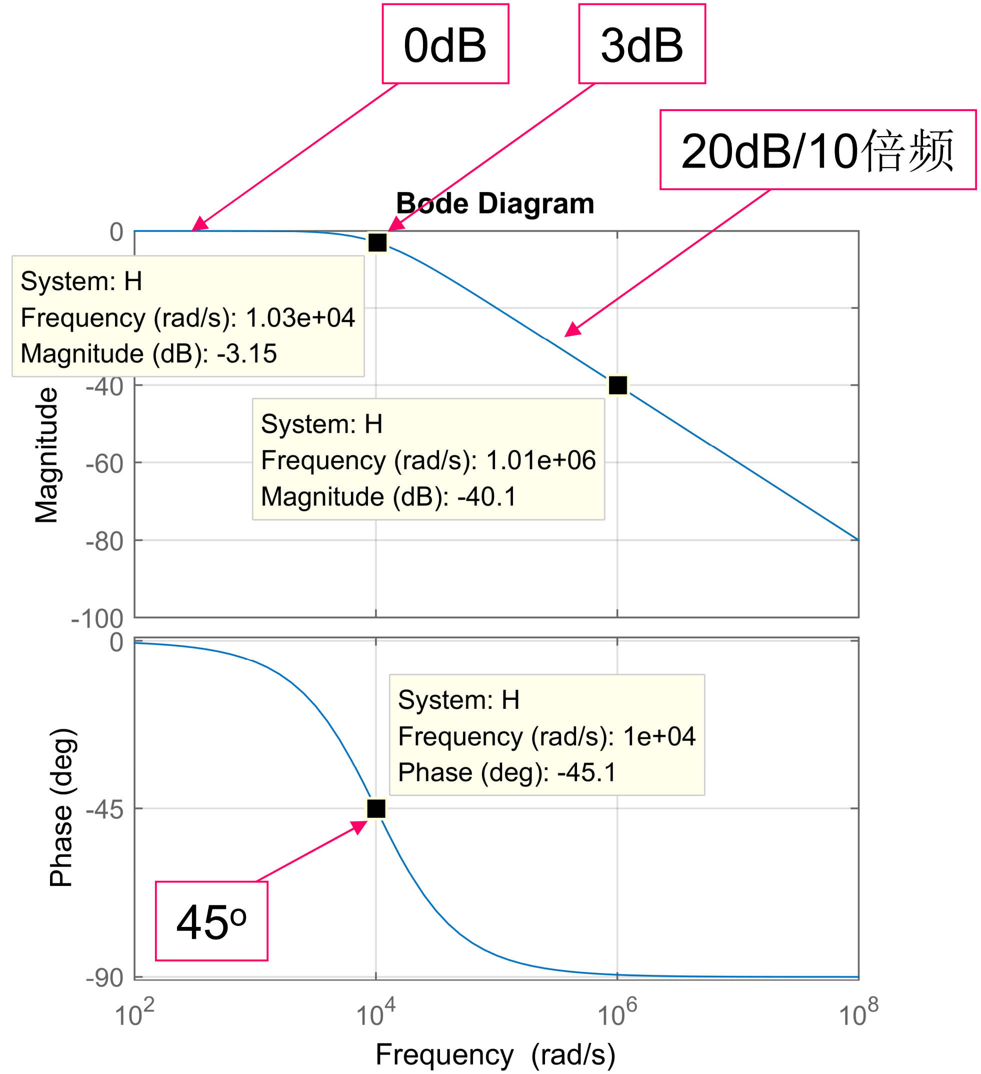
```
R=100; C=1e-6;
H=tf([1],[R*C 1])
bode(H);
```

```
>> H=tf([1],[R*C 1])

H =

      1
  ------------
  0.0001 s + 1

Continuous-time transfer function.

>>
```

一阶RC电路波特图

$$R = 100\Omega \quad C = 1\mu F$$

$$\omega_n = 1000 rad / s$$



$$\left|H(j\omega)\right|_{\omega \gg \omega_n} \approx \frac{\omega_n}{\omega}$$

$$20\log 10\left(\frac{\omega_n}{10\omega_x}\right) - 20\log 10\left(\frac{\omega_n}{\omega_x}\right) = -20$$

电路系统函数

$$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

- 系统函数是电路特性在复频域中的描述，令$s = j\omega$，可以得到电路的频域特性，即系统频率响应

$$H(j\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}=\underbrace{\left|H(j\omega)\right|}_{\text{幅频特性}}e^{\underbrace{j\varphi(\omega)}_{\text{相频特性}}}$$

- 已知系统函数，对于任意输入，可以得到输出响应

$$V_o(s)=V_i(s)H(s)$$

时域单位冲激响应

$$\boxed{V_o(s) = V_i(s)H(s)}$$

时域

复频域

$$\boxed{v_o(t)\Big|_{v_i(t)=\delta(t)}} = h(t) \quad \Longleftarrow \quad V_o(s)\Big|_{V_i(s)=1} = H(s)$$

单位冲激响应

$H(s) \leftrightarrow h(t)$ 而***h*(*t*)**是单位冲激响应

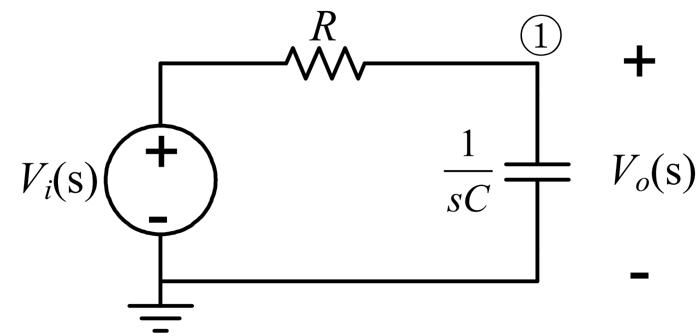
- 系统函数经拉普拉斯反变换，就是时域的单位冲激响应

时域单位冲激响应

- 一阶RC电路

$$H(s) = \frac{1}{sRC+1}$$

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$



- 零状态初始条件下的输出响应，即零状态响应

$$v_o(t) = h(t) * v_i(t) = \int_0^t h(t-\tau) v_i(\tau) d\tau = \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} v_i(\tau) d\tau$$

$$V_o(s) = H(s) V_i(s)$$

时域卷积 ⇔ 复频域乘法

系统函数性质

- 系统函数的两个多项式相除的形式

$$H(s)=\frac{Q(s)}{P(s)}=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_1 s+a_0}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}$$

- 系统函数的极点、零点表示

$$H(s)=\frac{a_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{b_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

- p_i ——极点
- z_i ——零点

系统函数性质

- 系统函数是电路本身的属性，与输入量的大小和性质无关

- 系统函数满足交换律与结合律

$$H_1(s)H_2(s) = H_2(s)H_1(s)$$

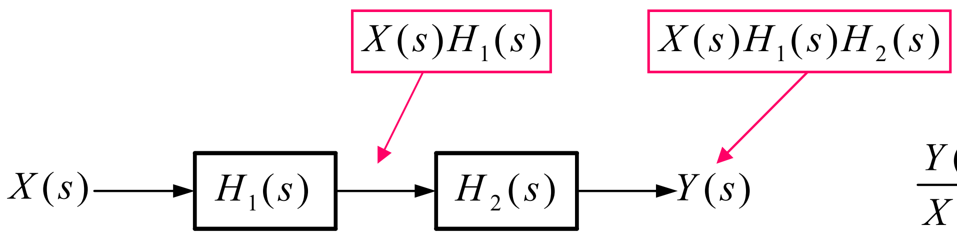
交换律

$$H_1(s) + H_2(s) = H_2(s) + H_1(s)$$

系统函数的框图表示

- 框图表示要点
  - 每一个框图表示一个子系统的系统函数，即子系统的输入-输出关系
  - 子系统之间的信号流由框图间的连接方式定义

- 级联系统

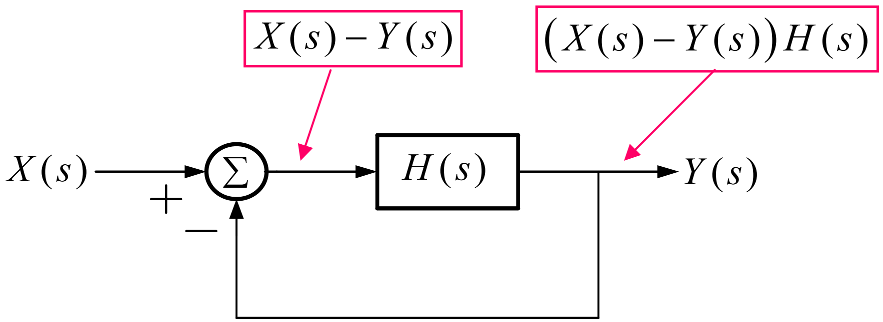


$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H_1(s)H_2(s)$$

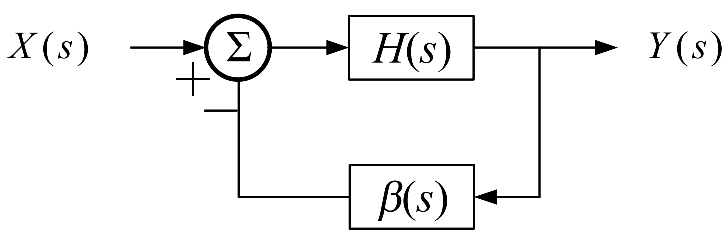
  - 对应子系统的系统函数相乘

系统函数的框图表示

- 反馈系统



$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{H(s)}{1+H(s)}$$



$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{H(s)}{1+\beta(s)H(s)}$$