

Étude d'un Treillis 2D

Mouhalhal Moussaab

3 mars 2025

1 Introduction

Dans ce rapport, je présente mes scripts Python permettant d'étudier un treillis 2D, accompagnés d'un exemple d'application. J'ai séparé le travail en deux scripts :

- **Code_Treillis.py** : contient la classe `Treillis` avec les fonctions principales (lecture des données, calcul de la matrice de rigidité, application des conditions aux limites et calcul des déplacements). Un treillis simple y est utilisé pour valider le fonctionnement du code.
- **Code_Treillis_Analyse.py** : utilise la même classe pour analyser un treillis complet soumis à plusieurs charges (poids propre, toiture et neige) et en déduire les déplacements de la structure.

Ce travail permet d'observer et de vérifier le comportement mécanique d'une structure à barres lorsqu'elle est soumise à différentes charges.

2 Modélisation et méthodes

2.1 Représentation du treillis

La structure est décrite par :

- les coordonnées des nœuds,
- la connectivité des barres,
- les propriétés mécaniques (section S , module d'Young E , masse volumique ρ),
- les conditions aux limites,
- les forces nodales.

2.2 Matrices de rotation et de rigidité

Pour chaque barre, on définit une matrice de rotation qui relie le repère local de la barre au repère global :

$$T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

où α est l'angle entre le repère local de la barre et le repère global.

La matrice de rigidité locale de la barre est :

$$K_e = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où E est le module de Young et S la section de la barre. La matrice globale de rigidité du treillis est obtenue en assemblant les matrices locales sur tous les degrés de liberté des noeuds.

2.3 Conditions aux limites

Chaque noeud peut avoir différentes contraintes :

- `c1[i]=0` : le noeud est libre.
- `c1[i]=1` : déplacement en x bloqué ($ux=0$), déplacement en y libre.
- `c1[i]=2` : déplacement en y bloqué ($uy=0$), déplacement en x libre.
- `c1[i]=3` : encastrement complet, déplacement en x et y bloqué.

Après avoir appliqué ces conditions aux limites sur la matrice globale de rigidité et le vecteur des forces nodales, on résout le système linéaire :

$$AU = B,$$

où U contient les déplacements des noeuds et B le vecteur des forces appliquées.

3 Treillis simple

Le premier modèle sert de test pour valider le code. La Figure 1 montre le treillis et sa déformée.

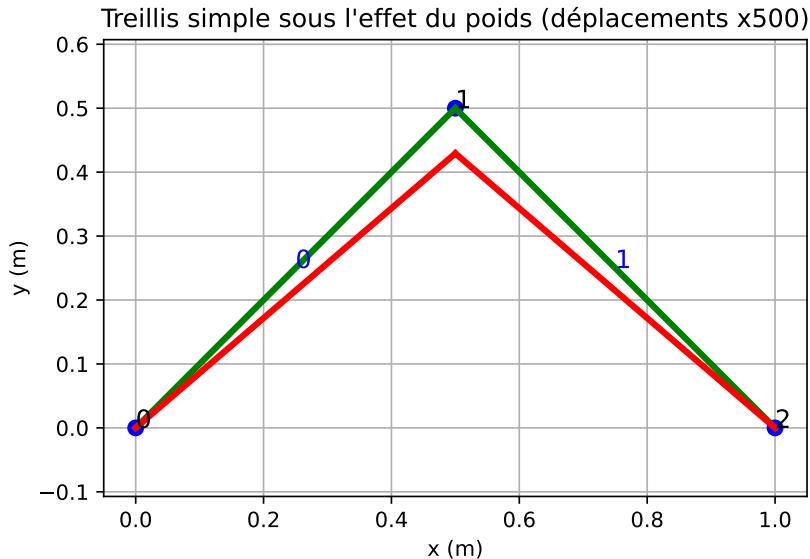


Figure 1: Treillis simple et sa déformée obtenue avec `Code_Treillis.py`.

On remarque que les nœuds 0 et 2 restent immobiles puisqu'ils sont encastrés, tandis que le nœud central se déplace uniquement selon l'axe y , grâce à la symétrie de la structure.

La comparaison du déplacement calculé par le script avec la solution théorique de la RDM montre une excellente concordance : déplacement calculé = -0.00014142135623730954 m, solution théorique = -0.0001414213562373095 m.

4 Treillis complet et analyse des charges

Le second modèle représente un treillis complet constitué de barres trouées et soumis à plusieurs charges appliquées suivant l'axe vertical y : le poids propre des barres, le poids de la toiture et le poids de la neige. On considère qu'il existe un second treillis similaire, écarté de e_c , et que la toiture est placée sur les barres supérieures de ces deux treillis. Par conséquent, le poids de la toiture et de la neige pour chaque barre est divisé par 4 afin de le répartir équitablement entre les quatre nœuds de la surface créée par la barre et sa symétrique sur l'autre treillis.

Le poids propre des barres (réparti aux deux nœuds de la barre) est calculé par :

$$P_{\text{barre}} = -\rho S L_{\text{barre}} g$$

Le poids de la toiture et de la neige est donné par :

$$P_{\text{toiture}} = -k L_{\text{barre}} e_c g \quad P_{\text{neige}} = -\rho_{\text{neige}} h L_{\text{barre}} e_c g,$$

où k est la charge de la toiture en kg/m^2 et h est la hauteur de neige. Ici, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ représente l'accélération due à la gravité.

4.1 Résultats

La Figure 2 présente la déformée du treillis soumis aux différentes charges.

Treillis sous l'effet des charges appliquées (déplacements x500)

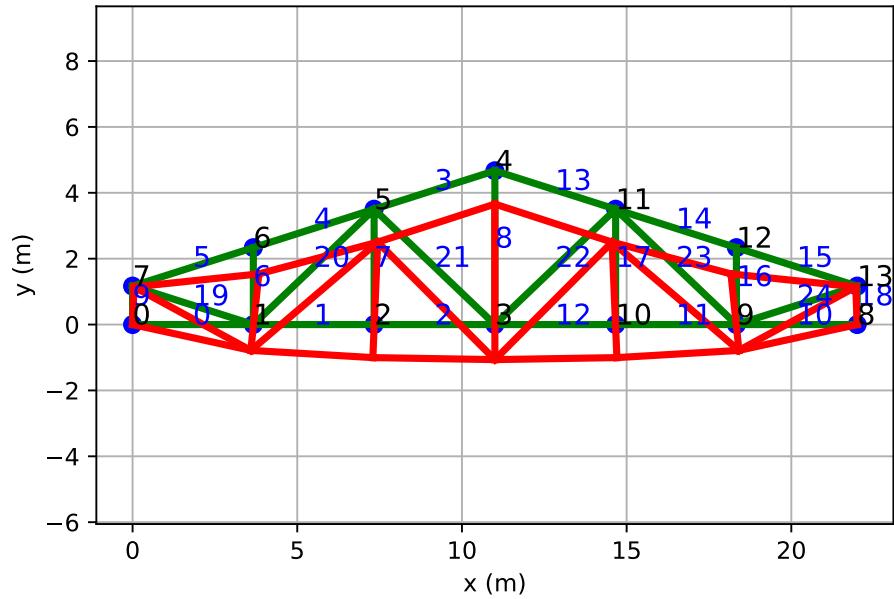


Figure 2: Treillis soumis aux différentes charges (Code_Treillis_Analyse.py).

On remarque que les noeuds 0 et 8 ne bougent pas puisqu'ils sont encastrés, et que les noeuds 4 et 3 situés sur la barre du milieu se déplacent uniquement suivant l'axe y grâce à la symétrie. Le maximum de déplacement correspond au noeud du milieu en bas (noeud 3) et il est d'environ 2 mm, ce qui est cohérent pour un treillis de longueur totale 22 m en acier standard.

Le script `Code_Treillis_Analyse.py` permet également de déterminer si chaque barre est en traction ou en compression en comparant sa longueur initiale et sa longueur déformée. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Barre	Type de sollicitation
0	Compression
1	Traction
2	Traction
3	Compression
4	Compression
5	Compression
6	Compression
7	Traction
8	Traction
9	Compression
10	Compression
11	Traction
12	Traction
13	Compression
14	Compression
15	Compression
16	Compression
17	Traction
18	Compression
19	Traction
20	Compression
21	Compression
22	Compression
23	Compression
24	Traction

Table 1: Type de sollicitation pour chaque barre du treillis.

5 Conclusion

Dans ce rapport, nous avons présenté des scripts Python permettant d'étudier le comportement de treillis 2D sous différentes charges. Le treillis simple a permis de valider le code et de vérifier la concordance avec la théorie de la RDM.

L'analyse du treillis complet a montré comment les barres réagissent au poids propre, au poids de la toiture et à la neige, et a permis de déterminer quelles barres sont en traction ou en compression.

Les résultats trouvés confirment le comportement attendu des structures à barres dans des conditions réalistes.