TP2: équation de transport

Moussaab Mouhalhal

1 Introduction

Dans ce TP, on étudie le transport d'un polluant dans un fluide qui s'écoule à vitesse constante V selon l'axe x. On note $C(x,t)$ la concentration du polluant. La diffusion est négligée, donc seul le transport est pris en compte.
L'équation qui décrit ce phénomène est l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} + V\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x \in [-L, 3L],\ t \in]0,5].$$

Au début ($t = 0$), une tâche de polluant est placée au centre du domaine. La concentration initiale est donnée par :

$$C(x,0) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{\beta x}{L}\right)^2}\right) & \text{si } |x| < \dfrac{L}{\beta}, \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{L}{\beta}. \end{cases}$$

Les paramètres sont : $L = 1$, $V = 0.3$ et $\beta = 5$. On impose aussi la condition $C(-L,t) = 0$.
Dans la suite, on compare la solution exacte avec les résultats obtenus par trois schémas numériques : Courant, Lax-Wendroff et Leap-Frog.

2 Solution analytique

Puisque l'équation différentielle de la concentration s'écrit de la forme d'une équation de transport la solution exacte aura comme expression : $C(x,t) = C(x - Vt,\, 0)$

$$C(x,t) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-\left(\frac{\beta(x-Vt)}{L}\right)^2}\right) & \text{si } |x-Vt| < \frac{L}{\beta}, \\ 0 & \text{si } |x-Vt| \geq \frac{L}{\beta}. \end{cases}$$

3 Solution numérique

Schéma de Courant :
L'équation de ce schéma est donnée par :

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} = -V \cdot \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x}$$

On peut réécrire cette équation sous la forme matricielle : $AC^{n+1} = BC^n$

$$C^n = \begin{pmatrix} C_0^n \\ C_1^n \\ . \\ . \\ . \\ C_{N-1}^n \end{pmatrix}$$

On trouve C^{n+1} à partir de C^n en utilisant l'algorithme de Thomas, tel que $C^{n+1} = \mathrm{thomas}(A, BC^n)$
On pose $r = \frac{V\,\Delta t}{\Delta x}$
Les matrices A et B s'écrivent donc comme suit :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & . & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1-r & & & & \\ r & 1-r & & & \\ & r & . & & \\ & & . & . & \\ & & & . & . \end{bmatrix}$$

Pour appliquer les conditions aux limites, une première ligne nulle est imposée à la matrice B.
Ce schéma est consistant d'ordre 1 en espace et en temps, et il est stable si $0 \leq r \leq 1$.

Schéma de Lax-Wendroff :

L'équation de ce schéma est donnée par :

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} = -\frac{V}{2\Delta x}\left(C_{i+1}^n - C_{i-1}^n\right) + \frac{V^2 \Delta t}{2\Delta x^2}\left(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n\right)$$

La forme matricielle et la méthode de résolution sont les mêmes que pour le schéma de Courant, et les matrices A et B ont comme expression :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & . & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1-r^2 & \frac{1}{2}\left(r^2-r\right) & & & \\ \frac{1}{2}\left(r^2+r\right) & . & . & & \\ & . & . & . & \\ & & . & . & \frac{1}{2}\left(r^2-r\right) \\ & & & \frac{1}{2}\left(r^2+r\right) & 1-r^2 \end{bmatrix}$$

Ce schéma est consistant d'ordre 2 en espace et en temps, et il est stable si $r^2 \leq 1$, donc si $0 \leq r \leq 1$ (car $r \geq 0$).

Schéma de Leap-Frog :

L'équation de ce schéma est donnée par :

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{V}{2\Delta x}\left(C_{i+1}^n - C_{i-1}^n\right)$$

La forme matricielle de cette équation est : $C^{n+1} = B_1 C^{n-1} + B_2 C^n$.
On trouve C^{n+1} à partir de C^n et C^{n-1} en utilisant l'algorithme de Thomas :

$$C^{n+1} = \mathrm{thomas}(A, B_1 C^{n-1} + B_2 C^n)$$

Il faut deux conditions initiales C^0 et C^1 pour calculer la solution du schéma Leap-Frog. On calcule C^1 à l'aide du schéma de Courant.

Les matrices A, B1 et B2 ont comme expression :

$$A=\begin{bmatrix}1&&&&\\&.&&&\\&&.&&\\&&&.&\\&&&&1\end{bmatrix}$$

$$B1=\begin{bmatrix}1&&&&\\&.&&&\\&&.&&\\&&&.&\\&&&&1\end{bmatrix}$$

$$B2=\begin{bmatrix}0&r&&&\\r&0&r&&\\&r&.&.&\\&&.&.&.\\&&&.&.\end{bmatrix}$$

Pour appliquer les conditions aux limites, une première ligne nulle est imposée aux matrices B_1 et B_2. Ce schéma est consistant d'ordre 2 en espace et en temps, et il est stable si $r^2 \leq 1$, donc si $0 \leq r \leq 1$.

4 Étude numérique

On a tracé la solution numérique et la solution analytique pour $t = 1$, 3 et 5, avec $r = 0{,}5$ et $N = 500$, pour chacun des trois schémas.

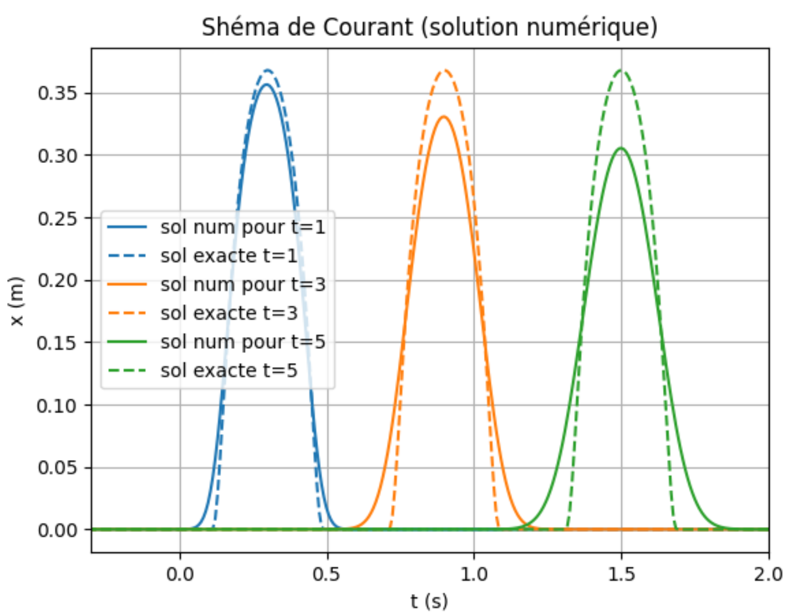

Figure 1: Schéma de Courant

On remarque que ce schéma introduit une diffusion numérique importante qui augmente avec le temps, mais sans dispersion (pas d'oscillations).

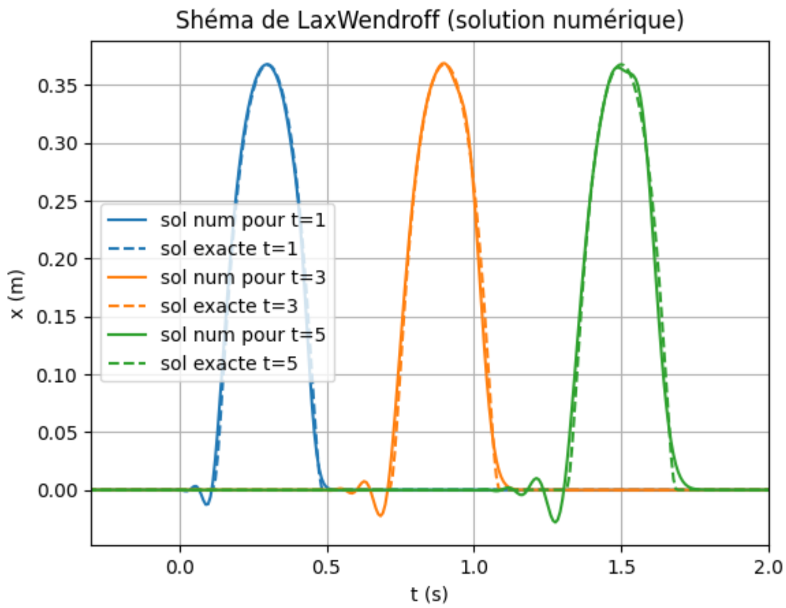

Figure 2: Schéma de Lax-Wendroff

On voit que la diffusion numérique introduite par le schéma de Lax-Wendroff est plus faible que celle du schéma de Courant, ce qui le rend plus précis. On observe également de petites oscillations en amont de la concentration C, qui augmentent avec le temps.

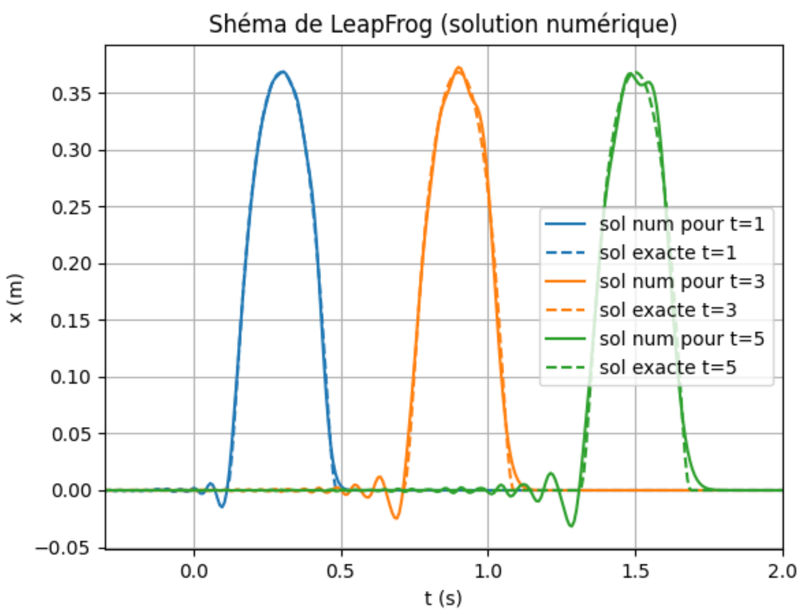

Figure 3: Schéma de Leap-Frog

Le schéma de Leap-Frog présente une diffusion numérique quasi nulle, ce qui permet de bien conserver la forme de la concentration. En revanche, il est plus dispersif près des discontinuités.

Ensuite, on a tracé les schémas pour différentes valeurs de r (pour $t = 5$ s).

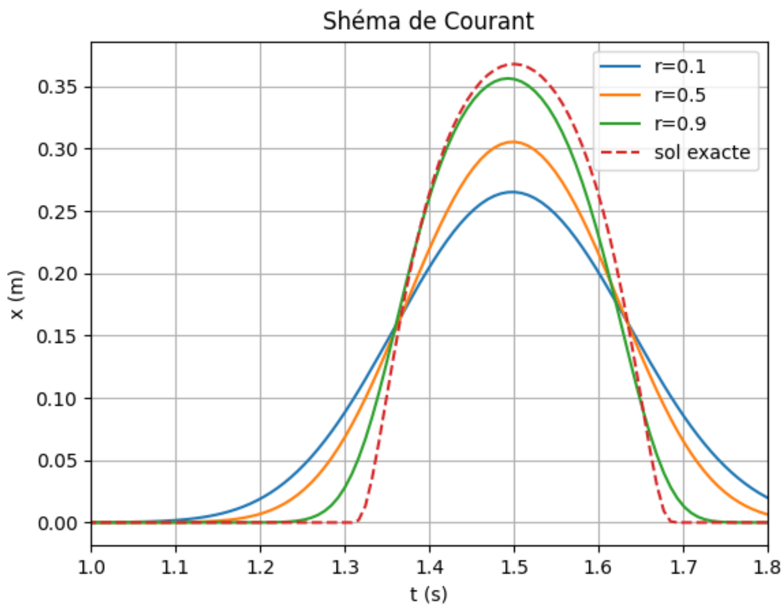

Figure 4: Schéma de Courant

On remarque que la diffusion numérique diminue quand on augmente r pour le schéma de Courant, tandis que la dispersion reste nulle.

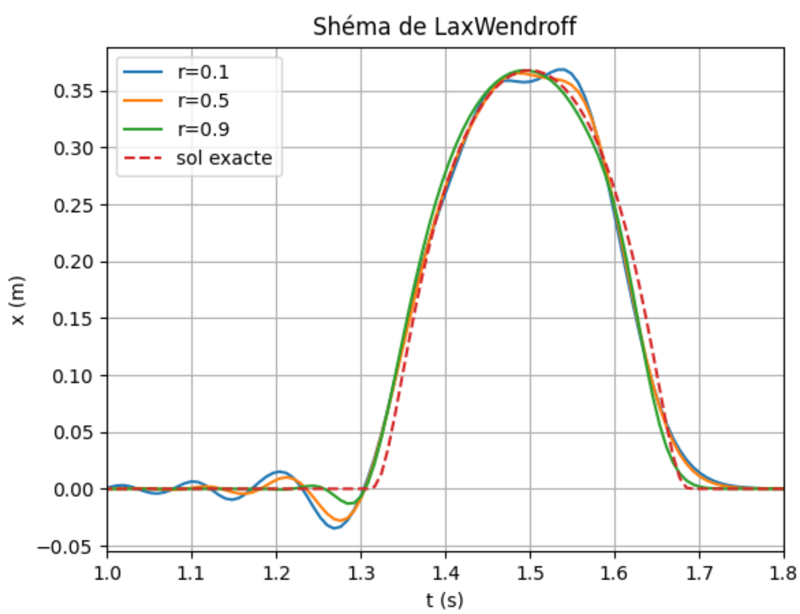

Figure 5: Schéma de Lax-Wendroff

Pour le schéma de Lax-Wendroff, la diffusion reste toujours faible et diminue très peu quand r augmente, tandis que la dispersion numérique diminue de manière plus marquée.

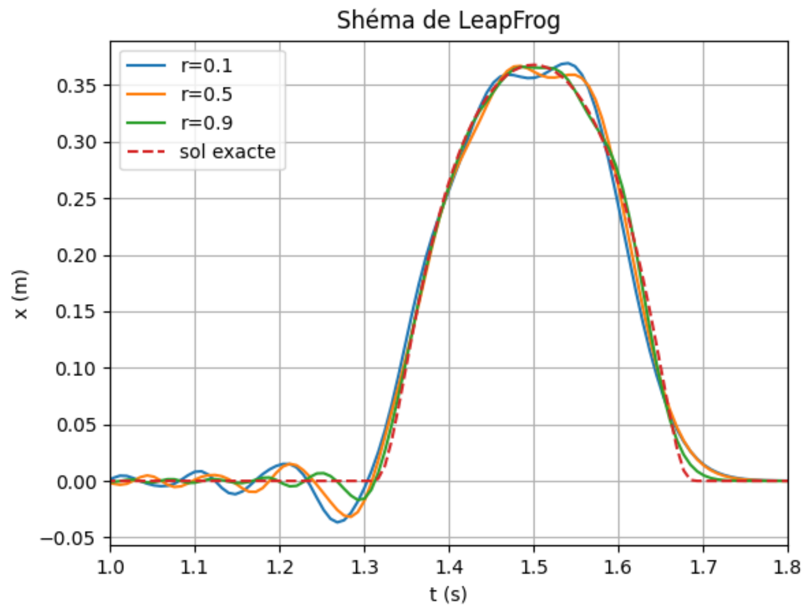

Figure 6: Schéma de Leap-Frog

Le schéma de Leap-Frog reste très précis, avec une dispersion plus importante. Comme pour le schéma de Lax-Wendroff, la diffusion diminue légèrement quand on augmente r et la dispersion numérique diminue.

5 Conclusion

Dans ce TP, nous avons comparé trois schémas numériques pour résoudre une équation de transport sans diffusion : Courant, Lax-Wendroff et Leap-Frog.
Le schéma de Courant est simple et stable, mais il introduit une diffusion numérique importante. Le schéma de Lax-Wendroff est plus précis, avec moins de diffusion, mais il génère de petites oscillations. Enfin, le schéma de Leap-Frog garde bien la forme de la solution avec très peu de diffusion, mais il est plus sensible à la dispersion, surtout près des discontinuités.
Chaque méthode a donc ses avantages et ses inconvénients, et le choix dépend des besoins en précision et en stabilité.