Méthode des différences finies pour les EDP de la Mécanique

TP2: équation de transport

1 Problème physique

On souhaite modéliser le transport d'une espèce chimique polluante dans un fluide. Soit $C(x,t)$ la concentration de ce polluant. Un fluide s'écoule à vitesse uniforme V selon la direction x. Initialement (à $t = 0$), une tâche de polluant est versée en $x = 0$ et on souhaite calculer l'évolution de $C(x,t)$. En supposant la diffusion du polluant négligeable, ce problème est modélisé par une équation de transport:

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} + V\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = 0 \qquad \text{pour} \qquad x \in [-L, 3L] \qquad \text{et} \qquad t \in]0,5]. \tag{1}$$

On prendra comme condition initiale :

$$C(x,t=0) \equiv C^0(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-(\beta x/L)^2}\right) & |x| < L/\beta \\ 0 & |x| \geq L/\beta; \end{cases} \tag{2}$$

Données numériques:
On prendra $L = 1$, $V = 0.3$, $\beta = 5$.

La vitesse V et les domaines d'études en x et t sont choisis de manière à ce que la tâche de polluant ne sorte pas du domaine. Dans ces conditions, la condition aux limites peut être imposée ainsi: $C(x = -L, t) = 0$.

2 Solution analytique

Donner la solution analytique du problème.

3 Solution numérique

Afin d'étudier ce problème, plusieurs schémas vont être utilisés. On commencera tout d'abord par étudier le schéma de Courant :

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} = -V\frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x}. \tag{3}$$

Puis le schéma de Lax-Wendroff :

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} = -\frac{V}{2\Delta x}\left(C_{i+1}^n - C_{i-1}^n\right) + \left(\frac{V^2\Delta t}{2\Delta x^2}\right)\left(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n\right). \tag{4}$$

Et finalement le schéma de Leap Frog (saute-mouton) :

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{V}{2\Delta x}\left(C_{i+1}^n - C_{i-1}^n\right) \tag{5}$$

où C_i^0 est donné par la condition initiale et C_i^1 par une première itération par le schéma de Courant.

Dans votre CR, commentez les résultats des études de stabilité et de consistance pour ces 3 schémas, et préciser si ces schémas sont convergents.

Expliquez **dans votre CR** pour quel(s) schéma(s) la diffusion numérique est importante; de même pour la dispersion numérique.

On introduit :

$$CFL = \frac{V\Delta t}{\Delta x} \tag{6}$$

Mettre les schémas (3) et (4), en prenant en compte les conditions aux limites, sous forme matricielle :

$$AC^{n+1} = BC^n, \tag{7}$$

avec A et B de taille $(N \times N)$ et $C^n = \begin{pmatrix} C_0^n \\ C_1^n \\ \vdots \\ C_{N-1}^n \end{pmatrix}$.

Attention: Cette forme n'est valable que pour les deux premiers schémas et sera à adapter intelligemment pour le schéma de Leap-Frog.

Sous Python, programmez les schémas (3), (4) et (5). Pour cela, vous pourrez repartir du canevas fourni.

4 Étude numérique

1) Pour chaque schéma, comparer graphiquement la solution numérique avec la solution analytique pour $t = 1$, 3 et 5, $CFL = 0.5$ et $N = 500$. Conclusions?

2) Observer l'évolution de la diffusion et de la dispersion des schémas en fonction de la valeur de CFL.

5 Conclusion

Dans votre CR, donner des conclusions sur ce TP.

Bien mettre votre code et votre compte rendu au format pdf dans votre dossier de travail TP2 sur jupyterm1 et cliquer sur le bouton "submit" avant la date limite indiquée en séance.