

Calculs dans \mathbb{R}

I – Valeur absolue

1- Exemples : $|+5| = 5$; $|-2| = 2$; $|-7| = -(-7) = 7$

D'une manière générale $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2- Propriétés

a) Soient $a = -5$ et $b = +2$; calculer $|a \times b|$ et $|a| \times |b|$ puis comparer.

$$|a \times b| = |(-5) \times (+2)| = |(-10)| = 10 ; |a| \times |b| = |(-5)| \times |(+2)| = |(-10)| = 10.$$

$$\text{D'où : } |a \times b| = |a| \times |b|.$$

b) Comparer $|a+b|$ et $|a| + |b|$

$$|a+b| = |(-5)+(+2)| = |(-3)| = 3 ; |a| + |b| = |(-5)| + |(+2)| = 5 + 2 = 7.$$

$$\text{D'où : } |a+b| \leq |a| + |b|.$$

c) Comparer $\left| \frac{a}{b} \right|$ et $\frac{|a|}{|b|}$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{(-5)}{(+2)} \right| = \left| -\frac{5}{2} \right| = \frac{5}{2} ; \frac{|a|}{|b|} = \frac{|(-5)|}{|(+2)|} = \frac{5}{2}. \text{ D'où : } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

d) Identification des valeurs absolues

$$|a| = |b| \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ \text{ou} \\ a = -b \end{cases}.$$

e) Comparaison de $|a - b|$ et $|b - a|$

$$|a - b| = |(-5) - (+2)| = |-7| = 7 ; |b - a| = |(+2) - (-5)| = |7| = 7.$$

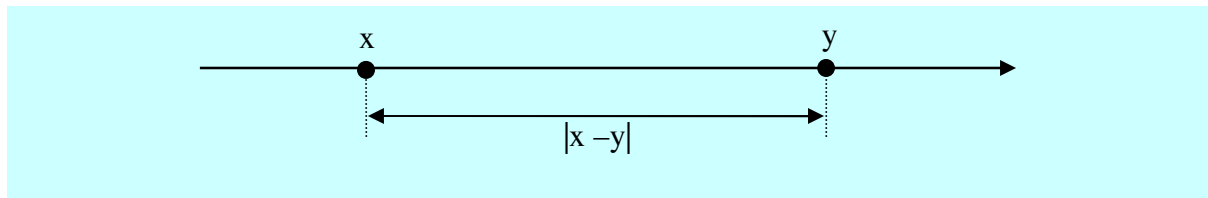
$$\text{D'où : } |a - b| = |b - a|.$$

II – Distance sur \mathbb{R} :

1- Définition :

x et y étant deux réels quelconques. On appelle **distance** de x à y que l'on note : $d(x ; y)$ le réel positif ou nul $|x - y|$.

$$d(x ; y) = |x - y|$$



2- Exemples :

Calculer les distances de : 4,7 à 2,3 ; -9 à 3 ; -2 à 6.

$$d(4,7 ; 2,3) = |4,7 - 2,3| = |2,4| = 2,4.$$

$$d(-9 ; 3) = |(-9) - (+3)| = |-12| = 12.$$

$$d(-2 ; 6) = |(-2) - (+6)| = |-8| = 8.$$

3- Application distance

$$\begin{array}{ccc} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x ; y) & \longmapsto & |x - y| \end{array}$$

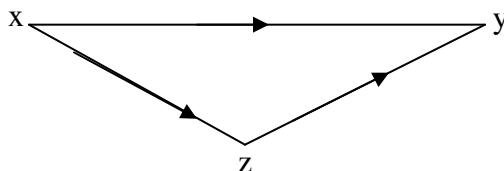
4- Propriétés de la distance

$$P_1) d(x ; y) \geq 0 ;$$

$$P_2) d(x ; y) = 0 \Leftrightarrow x = y ;$$


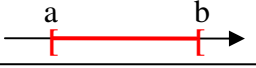
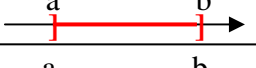
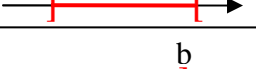
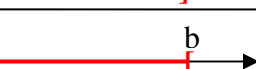
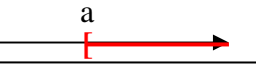


$$P_3) d(x ; y) = d(y ; x) ;$$

$$P_4) d(x ; y) \leq d(x ; z) + d(z ; y) ;$$



III – Intervalles de \mathbb{R}

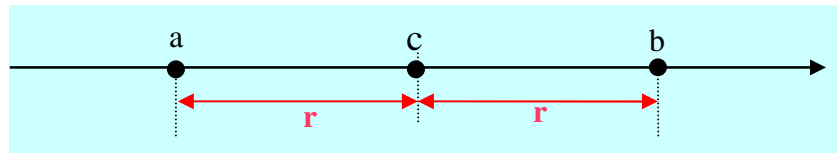
Soient a et b deux réels tel que $a \leq b$.

Notations	Représentations sur la droite réelle	Ensemble des réels x tels que	Appellation
$[a ; b]$		$a \leq x \leq b$	Intervalle fermé borné
$[a ; b[$		$a \leq x < b$	Intervalle borné semi fermé à gauche semi-ouvert à droite
$]a ; b]$		$a < x \leq b$	Intervalle borné semi ouvert en a Semi-fermé en b
$]a ; b[$		$a < x < b$	Intervalle ouvert borné
$] -\infty ; b]$		$x \leq b$	Intervalle non borné fermé à droite
$] -\infty ; b[$		$x < b$	Intervalle non borné ouvert à droite
$[a ; +\infty[$		$a \leq x$	Intervalle non borné fermé à gauche
$]a ; +\infty]$		$a < x$	Intervalle non borné ouvert à gauche

1- Centre et Rayon d'un intervalle fermé ou ouvert

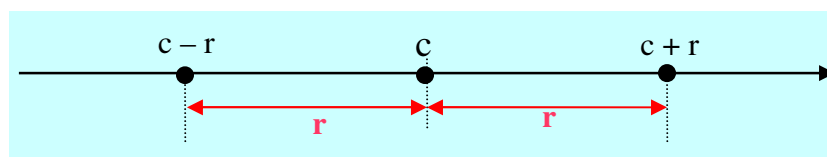
Soient $A = [a ; b]$ un intervalle fermé et $B =]a ; b[$ un intervalle ouvert.

a) Définitions :



- On appelle **centre C** de l'intervalle fermé $[a ; b]$ ou de l'intervalle ouvert $]a ; b[$ le réel, $C = \frac{a+b}{2}$.
- On appelle **rayon r** de l'intervalle fermé $[a ; b]$ ou de l'intervalle ouvert $]a ; b[$ le réel positif, $r = \frac{b-a}{2}$.
- On appelle **amplitude A** de l'intervalle fermé $[a ; b]$ ou de l'intervalle ouvert $]a ; b[$ le réel positif, $A = |b - a|$.

b) Notations



- $\bar{I}(C ; r)$ est appelé **intervalle fermé** de centre **C** et de rayon **r**.
- $I_0(C ; r)$ est appelé **intervalle ouvert** de centre **C** et de rayon **r**.

c) Applications

✓ Déterminer le centre et le rayon des intervalles $]-1 ; 3[$; $[7 ; \frac{15}{2}]$

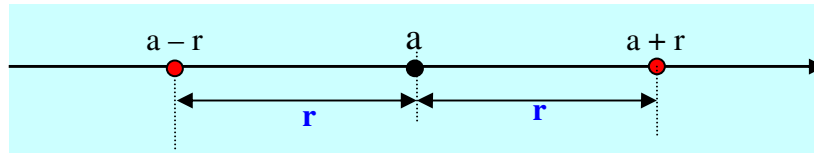
✓ Déterminer l'origine et l'extrémité de : $\overline{I}\left(2 ; \frac{1}{4}\right)$; $I_0\left(\frac{5}{4} ; \frac{1}{4}\right)$

2- Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Soient x un nombre réel et r un réel strictement positif.

a) **Résolution graphique d'équations : $|x - a| = r$**

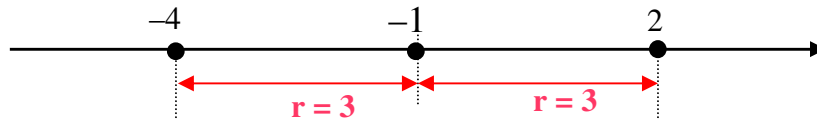
$$. \quad |x - a| = r \quad \Leftrightarrow \quad d(x ; a) = r .$$



Le problème revient à trouver les réels x situés à la distance r de a .

Les solutions sont $x = a - r$ et $x = a + r$. D'où l'ensemble des solutions de l'équation est : $S = \{a - r ; a + r\}$.

Exemple : résoudre graphiquement $|x + 1| = 3$.



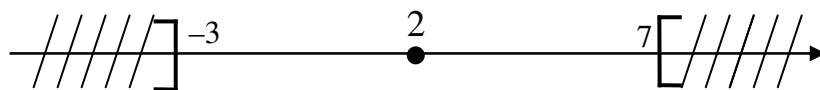
$a - r = -1 - 3 = -4$ et $a + r = -1 + 3 = 2$. D'où $S = \{-4 ; 2\}$.

b) **Résolution graphique d'inéquations : $|x - a| < r$**

▪ Exemple 1 : Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $|x - 2| < 5$.

$|x - 2| < 5 \Leftrightarrow d(x ; 2) < 5$. Je calcule $(a - r)$ et $(a + r)$.

$a - r = 2 - 5 = -3$ et $a + r = 2 + 5 = 7$.

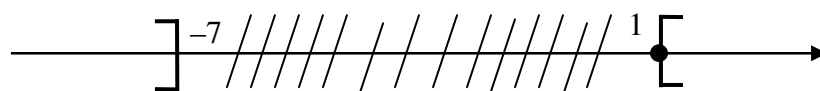


$$S =]-3 ; 7[$$

▪ Exemple 2 : Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $|x + 3| \geq 4$.

$|x + 3| \geq 4 \Leftrightarrow d(x ; -3) \geq 4$. Je calcule $(a - r)$ et $(a + r)$.

$a - r = -3 - 4 = -7$; $a + r = -3 + 4 = 1$.



$$S =]-\infty ; -7[\cup]1 ; +\infty[$$

c) **Résolution graphique de : $|ax + b| = r$ et $|ax + b| \leq r$; ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$)**

$$|ax + b| = r \Leftrightarrow |a(x + \frac{b}{a})| = r \Leftrightarrow |a| \times |(x + \frac{b}{a})| = r$$

$$\Leftrightarrow |(x + \frac{b}{a})| = \frac{r}{|a|} \Leftrightarrow d\left(x; -\frac{b}{a}\right) = \frac{r}{|a|}.$$

$$\text{D'où : } |ax + b| = r \Leftrightarrow d\left(x; -\frac{b}{a}\right) = \frac{r}{|a|}.$$

$$\text{De même : } |ax + b| \leq r \Leftrightarrow d\left(x; -\frac{b}{a}\right) \leq \frac{r}{|a|}.$$

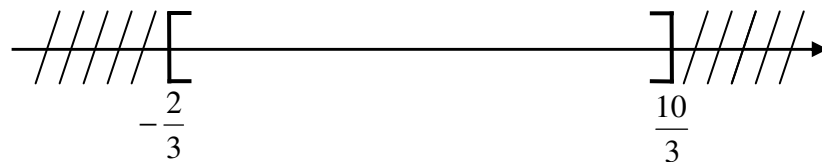
Exemples : résoudre dans \mathbb{R} ; $|2x+6| = 5$; $|-3x+4| \leq 6$; $|-x+3| \geq 4$.

$$\bullet |2x+6| = 5 \Leftrightarrow |2(x+3)| = 5 \Leftrightarrow |2| \times |(x+3)| = 5 \Leftrightarrow |x+3| = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$d(x; -3) = \frac{5}{2} \Rightarrow a - r = -3 - \frac{5}{2} = -\frac{11}{2} ; a + r = -3 + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{D'où l'ensemble des solutions est : } S = \left\{ -\frac{11}{2} ; -\frac{1}{2} \right\}$$

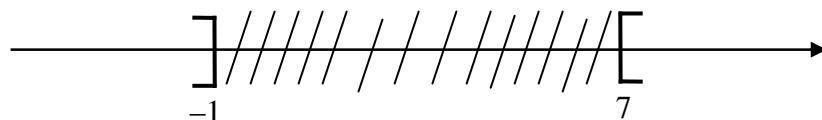
$$\bullet |3x+4| \leq 6 \Leftrightarrow |x + \frac{4}{3}| \leq 2 \Leftrightarrow d(x; -\frac{4}{3}) \leq 2 \Rightarrow a - r = -\frac{2}{3} ; a + r = \frac{10}{3}$$



$$\text{L'ensemble des solutions est } S = \left[-\frac{2}{3} ; \frac{10}{3} \right]$$

$$\bullet |-x+3| \geq 4 \Leftrightarrow |-1| |x-3| \geq 4 \Leftrightarrow |x-3| \geq 4 \Leftrightarrow d(x; 3) \geq 4 ;$$

$$a - r = 3 - 4 = -1 ; \quad a + r = 3 + 4 = 7$$



$$\text{L'ensemble des solutions est } S =]-\infty ; -1] \cup [7 ; +\infty[$$

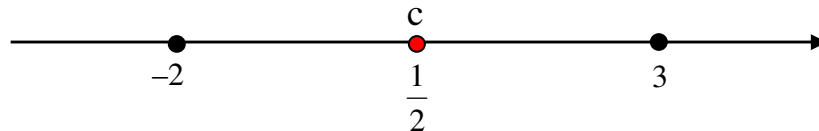
d) Équations de la forme $|x - a| = |x - b|$

Exemple

Résoudre graphiquement dans \mathbb{R} l'équation : $|x + 2| = |x - 3|$.

$|x + 2| = |x - 3| \Leftrightarrow d(x; -2) = d(x; 3)$. Le centre de l'intervalle $[-2; 3]$ est

$$C = \frac{a+b}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$$



L'ensemble des solutions est $S = \left\{ +\frac{1}{2} \right\}$

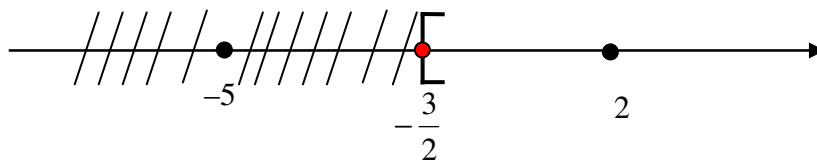
e) Inéquations de la forme $|x - a| \leq |x - b|$

Exemples :

Résoudre $x \in \mathbb{R}$; $|x - 2| \leq |x + 5|$ et $|x + 1| > |x - 7|$.

▪ $|x - 2| \leq |x + 5| \Leftrightarrow d(x; 2) \leq d(x; -5)$

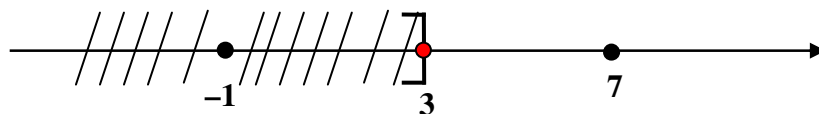
$C = \frac{a+b}{2} = \frac{2-5}{2} = -\frac{3}{2}$ est le centre de l'intervalle $[-5; 2]$



L'ensemble des solutions est $S = \left[-\frac{3}{2}; +\infty \right[$

▪ $|x + 1| > |x - 7| \Leftrightarrow d(x; -1) > d(x; 7)$

$C = \frac{a+b}{2} = \frac{-1+7}{2} = 3$ est le centre de l'intervalle $[-1; 7]$



L'ensemble des solutions est $S =] 3; +\infty [$