École supérieure en Sciences et Technologies de l'Informatique et du Numérique

2ème année CP
Année universitaire: 2023-2024
Durée: 02h
Le 21/01/2024

Examen d'Algèbre 3

L'usage de la calculatrice et du mobile est strictement interdit

Exercice 1 (7 pts)

Soit le système linéaire suivant:

$$(S)\ \begin{cases} x + 4y + 2z = c \\ -x + 2by - 2z = -c \\ ax + a^2z = 0 \end{cases}, \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

1. Utiliser la méthode d'échelonnement par lignes pour trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres réels a, b et c pour que le système (S) soit compatible.
2. Résoudre dans le cas où (S) est compatible.
3. Soit $a = b = 1$ et $c = 2$.
   (a) Déduire la solution du système (S).
   (b) Calculer l'inverse de la matrice du système en utilisant la méthode d'élimination de Gauss-Jordan.

Exercice 2 (10 pts)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée à f relativement à la base canonique est

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 2a & 0 \\ a & -b & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f.
2. Pour quelles valeurs de a et b, l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. On suppose que $a = 1$ et $b = 3$. Et on note la matrice $M_{1,3}$ par M.
   (a) La matrice M est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$? Justifier.
   (b) Trouver une matrice triangulaire supérieure T semblable à M (ne pas utiliser des vecteurs de la base canonique pour compléter la base).
   (c) Donner une formule permettant de calculer T^n pour tout entier $n > 0$.
   (d) En déduire une expression de M^n, puis calculer M^n pour tout entier $n > 0$.

Exercice 3 (3 pts)

Soit f est un endomorphisme de E avec $\dim E = n$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de f.
Dites si les assertions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant avec une démonstration.

1. La valeur propre associée à un vecteur propre est unique.
2. f est diagonalisable si $E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_n)$.

Bon courage

Corrigé type de l'examen d'Algèbre 3

L'usage de la calculatrice et du mobile est strictement interdit

Exercice 1 (7 pts)
Soit le système linéaire suivant:

$$(S)\ \begin{cases} x+4y+2z=c \\ -x+2by-2z=-c \\ ax+a^2z=0 \end{cases}, \qquad \forall a,b,c\in\mathbb{R}.$$

$$(S)\iff AX=B\iff \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2b & -2 \\ a & 0 & a^2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(0.25)}$$

1. Utiliser la méthode d'échelonnement par lignes pour trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres réels a, b et c pour que le système (S) soit compatible.

$$[A|B]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & c \\ -1 & 2b & -2 & -c \\ a & 0 & a^2 & 0 \end{array}\right) \underset{\ell_3\longleftarrow\ell_3-a\ell_1}{\overset{\ell_2\longleftarrow\ell_2+\ell_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & c \\ 0 & 2b+4 & 0 & 0 \\ 0 & -4a & a^2-2a & -ac \end{array}\right)\ldots\ldots\ldots(S') \quad \textbf{(0.5)}$$

(a) Si $2b+4\neq 0 \implies b\neq -2$

$$(S')\overset{\ell_3\longleftarrow\ell_3+\frac{4a}{2b+4}\ell_2}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & c \\ 0 & 2b+4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-2a & -ac \end{array}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots(S'') \quad \textbf{(0.5)}$$

i. Si $a^2-2a=a(a-2)\neq 0 \implies a\in\mathbb{R}-\{0,2\}$ alors (S) est compatible, il est de Cramer admet une solution unique. **(0.5)**

ii. Si $a^2-2a=a(a-2)=0$ et $-ac=0$ alors (S) est compatible, il admet une infinité de solutions. **(0.5)**

iii. Si $a^2-2a=a(a-2)=0$ et $-ac\neq 0$ alors (S) est impossible, il n'admet pas de solutions. **(0.5)**

(b) Si $2b+4=0$ et $-4a\neq 0 \implies b=-2$ et $a\neq 0$

$$(S')\overset{\ell_2\longleftrightarrow\ell_3}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & c \\ 0 & -4a & a^2-2a & -ac \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(S''') \quad \textbf{(0.5)}$$

(S) est compatible et admet une infinité de solutions. **(0.25)**

(c) Si $2b+4=0$ et $-4a=0 \implies b=-2$ et $a=0$

$$(S')\overset{\ell_2\longleftrightarrow\ell_3}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(S''') \quad \textbf{(0.5)}$$

(S) est compatible $\forall c\in\mathbb{R}$, il admet une infinité de solutions. **(0.25)**

2. **Résoudre dans le cas où (S) est compatible.**

- Cas $b \neq -2$ et $a \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$ (cas de Cramer)

$$(S) \iff \begin{cases} x + 4y + 2z = c.....(1) \\ (2b+4)y = 0.........(2) \\ a(a-2)z = -ac.....(3) \end{cases}$$

De (3) on trouve $z = \dfrac{-ac}{a(a-2)} = \dfrac{-c}{(a-2)}$
De (2) on trouve $y = 0$
En remplaçant y et z dans (1), on trouve $x = c - 4y - 2z = \dfrac{ac}{a-2}$

D'où

$$S = \left\{ \left(\frac{ac}{a-2}, 0, \frac{-c}{(a-2)} \right), \forall b \neq -2, a \in \mathbb{R} - \{0, 2\} \text{ et } c \in \mathbb{R} \right\} \quad \mathbf{(0.5)}$$

- Cas $b \neq -2$ et $a(a-2) = 0$ et $-ac = 0$

$$(S'') \iff \begin{cases} x + 4y + 2z = c.....(1) \\ (2b+4)y = 0..........(2) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

De (2) on trouve $y = 0$
En remplaçant dans (1), on trouve $x = c - 4y - 2z = c - 2z$

D'où

$$S = \Big\{ (c - 2z, 0, z), \forall b \neq -2, a(a-2) = 0, z, c \in \mathbb{R} \Big\} \quad \mathbf{(0.5)}$$

- Cas $b = -2$ et $a \neq 0$

$$(S''') \iff \begin{cases} x + 4y + 2z = c............(1) \\ -4ay + a(a-2)z = -ac.....(2) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

De (2) on trouve $y = \dfrac{-1}{4a}\Big(-ac - a(a-2)z\Big) = \dfrac{1}{4}c + \dfrac{1}{4}(a-2)z$

En remplaçant dans (1), on trouve $x = c - 4y - 2z = -az$

D'où

$$S = \left\{ \left(-az, \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}(a-2)z, z \right), \forall z, c \in \mathbb{R}, b = -2 \text{ et } a \neq 0 \right\} \quad \mathbf{(0.5)}$$

- Cas $b = -2$ et $a = 0$

$$(S'''') \iff \begin{cases} x + 4y + 2z = c.....(1) \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

De (1) on trouve $x = c - 4y - 2z$

D'où
$$S=\Big\{(c-4y-2z,y,z),\forall y,z,c\in\mathbb{R}, b=-2 \;\text{ et }\; a=0\Big\}\quad \textcolor{red}{(\mathbf{0.5})}$$

3. **Soit** $a=b=1$ **et** $c=2$**.**

   (a) **Déduire la solution du système** (S)**.**

   Pour $a=b=1$ le système est de cramer, sa solution unique est donnée par
$$S=\Big\{(-2,0,2)\Big\}\quad \textcolor{red}{(\mathbf{0.25})}$$

   (b) **Calculer l'inverse de la matrice du système en utilisant la méthode d'élimination de Gauss-Jordan.**

$$[A|I_3]=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\ell_3\longleftarrow\ell_3-\ell_1]{\ell_2\longleftarrow\ell_2+\ell_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\ell_3\longleftarrow\ell_3+\frac{2}{3}\ell_2]{\ell_1\longleftarrow\ell_1-\frac{2}{3}\ell_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0\\ 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ell_1\longleftarrow\ell_1+2\ell_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 2\\ 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\ell_3\longleftarrow-\ell_3]{\ell_2\longleftarrow\frac{1}{6}\ell_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 2\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1\end{array}\right)$$

D'où
$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} & 2\\ \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{6} & 0\\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} & -1\end{pmatrix}\quad \textcolor{red}{(\mathbf{0.5})}$$

Exercice 2 (10 pts)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée à f relativement à la base canonique est

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 2a & 0 \\ a & -b & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

1. **Calculer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f.**

$$P_{M_{a,b}}(\lambda) = \det(M_{a,b} - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2a-\lambda & 0 \\ a & -b & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(2a-\lambda)(1-\lambda) \quad (\mathbf{0.5})$$

2. **Pour quelles valeurs de a et b, l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?**

$$P_{M_{a,b}}(\lambda) = 0 \Longrightarrow S_P(M_{a,b}) = \{1, a, 2a\} \quad (\mathbf{0.25})$$

- Cas 1: $a \neq 2a \neq 1 \implies a \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

  La matrice $M_{a,b}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ pour $a \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ car $P_{M_{a,b}}$ est scindé dans $\mathbb{R}$ et $M_{a,b}$ possède des valeurs propres distinctes. $(\mathbf{0.5})$

- Cas 2: $a = 0$

$$P_{M_{0,b}}(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda), \quad \text{avec} \quad m_a(0) = 2, m_a(1) = 1$$

  $P_{M_{0,b}}$ est scindé dans $\mathbb{R}$, $M_{0,b}$ sera diagonalisable ssi $m_g(0) = m_a(0) = 2$ $(\mathbf{0.25})$

$$E(0) = ker(M_{0,b} - 0I_3) = ker(M_{0,b}) = ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 1 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{0.25})$$

  $\mathrm{rg}(M_{0,b}) = 2$ car $\exists M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tel que $\det M = -1 \neq 0$

  Alors $m_g(0) = \dim \mathbb{R}^3 - \mathrm{rg}(M_{0,b}) = 3 - 2 = 1 \neq m_a(0)$ $(\mathbf{0.25})$

  D'où $M_{a,b}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si $a = 0$.

- Cas 3: $a = \frac{1}{2}$

$$P_{M_{\frac{1}{2},b}}(\lambda) = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)(1-\lambda)^2, \quad \text{avec} \quad m_a(1) = 2, m_a\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

  $P_{M_{\frac{1}{2},b}}$ est scindé dans $\mathbb{R}$, $M_{\frac{1}{2},b}$ sera diagonalisable ssi $m_g(1) = m_a(1) = 2$ $(\mathbf{0.25})$

$$E(1) = ker(M_{\frac{1}{2},b} - I_3) = ker \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -b & 0 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{0.25})$$

  – Pour $b = 0$, $\mathrm{rg}(M_{\frac{1}{2},b} - I_3) = 1$

Alors $m_g(1) = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rg}(M_{\frac{1}{2},b} - I_3) = 3 - 1 = 2 = m_a(1)$

D'où $M_{\frac{1}{2},b}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 0$. **(0.25)**

– Pour $b \neq 0$, $\text{rg}(M_{\frac{1}{2},b} - I_3) = 2$

Alors $m_g(1) = \dim \mathbb{R}^3 - rg(M_{\frac{1}{2},b} - I_3) = 3 - 2 = 1 \neq m_a(1)$

D'où $M_{\frac{1}{2},b}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si $a = 0$ et $b \neq 0$. **(0.25)**

- Cas 4: $a = 1$

$$P_{M_{1,b}}(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2, \quad \text{avec} \quad m_a(1) = 2, m_a(2) = 1$$

$P_{M_{1,b}}$ est scindé dans $\mathbb{R}$, $M_{1,b}$ est diagonalisable ssi $m_g(1) = m_a(1) = 2$ **(0.25)**

$$E(1) = ker(M_{1,b} - I_3) = ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -b & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.25)}$$

– Pour $b = 1$, $\text{rg}(M_{1,b} - I_3) = 1$

Alors $m_g(1) = \dim \mathbb{R}^3 - rg(M_{1,b} - I_3) = 3 - 1 = 2 = m_a(1)$

D'où $M_{1,b}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si $a = b = 1$ **(0.25)**.

– Pour $b \neq 1$, $\text{rg}(M_{1,b} - I_3) = 2$

Alors $m_g(1) = \dim \mathbb{R}^3 - rg(M_{1,b} - I_3) = 3 - 2 = 1 \neq m_a(1)$

D'où $M_{1,b}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si $a = 1$ et $b \neq 1$ **(0.25)**.

Conclusion:

$M_{a,b}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si $\left(a \in \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}\right)$ ou $\left(a = \dfrac{1}{2} \text{ et } b = 0\right)$ ou $(a = b = 1)$.

3. **On suppose que $a = 1$ et $b = 3$. Et on note la matrice $M_{1,3}$ par M.**

$$M = M_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) **La matrice M est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$? Justifier.**

$$\text{On a} \quad P_M(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Comme P_M est scindé dans $\mathbb{R}$ alors M est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. **(0.25)**.

(b) **Trouver une matrice triangulaire supérieure T semblable à M (ne pas utiliser des vecteurs de la base canonique pour compléter la base).**

- Espace propre associé à $\lambda = 2$

$$E(2) = ker(M - 2I_3) = ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\iff \begin{cases} -x = 0 ....(1) \\ -x = 0 \\ x - 3y - z = 0 ....(2) \end{cases}$$

De (1) on obtient $x = 0$
En remplaçant dans (2) on obtient $z = -3y$
D'où

$$E(2) = \Big\{(0, y, -3y), \forall y \in \mathbb{R}\Big\}$$
$$E(2) =< (0, 1, -3) > \quad (\mathbf{0.5})$$

- Espace propre associé à $\lambda = 1$

$$E(1) = ker(M - I_3) = ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -x + y = 0.......(1) \\ x - 3y = 0.......(2) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Longleftrightarrow -2y = 0 \Longrightarrow y = 0$ et $z \in \mathbb{R}$
D'où

$$E(1) = \Big\{(0, 0, z), \forall z \in \mathbb{R}\Big\}$$
$$E(1) =< (0, 0, 1) > \quad (\mathbf{0.5})$$

On pose $v_1 = (0, 1, -3)$ et $v_2 = (0, 0, 1)$. Cherchons $v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(M - I_3)v_3 = v_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -x + y = 0.......(1) \\ x - 3y = 1.......(2) \end{cases} \Longrightarrow x = y = -\frac{1}{2}$$

Soit $z = 0$, alors on trouve $v_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ $(\mathbf{0.25})$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det P = -\frac{1}{2} \neq 0 \quad (\mathbf{0.25})$$

Il existe une matrice inversible P telle que $T = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice triangulaire supérieure de M $(\mathbf{0.25})$.
On a

$$f(v_3) = av_1 + bv_2 + v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ a - \frac{1}{2} \\ -3a + b \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{0.25})$$

et

$$f(v_3) = M\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{(0.25)}$$

Par identification, on trouve

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ a - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ -3a + b = 1 \end{cases} \Longrightarrow a = 0 \text{ et } b = 1$$

D'où $\quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{(0.25)}$

(c) **Donner une formule permettant de calculer T^n pour tout entier $n > 0$.**

$$T = D + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{(0.25)}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N est nilpotente et 2 est sont indice de nilpotence. $\mathbf{(0.25)}$
Avant d'appliquer la formule du binôme de Newton, on doit vérifier que $ND = DN$.

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{(0.25)}$$

$$DN = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{(0.25)}$$

On peut à présent appliquer la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned} T^n = (D+N)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k D^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{1} C_n^k N^k D^{n-k} \\ &= C_n^0 N^0 D^{n-0} + C_n^1 N D^{n-1} \\ &= D^n + n.N.D^{n-1} \qquad \mathbf{(0.25)} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{0.5})$$

(d) **En déduire une expression de M^n, puis calculer M^n pour tout entier $n > 0$.**

On a $M = P\ T\ P^{-1}$, par récurrence on trouve $M^n = P\ T^n\ P^{-1}$ $\quad (\mathbf{0.25})$

$$\begin{aligned} M^n &= P\ T^n\ P^{-1} \left(\text{calcul de } P^{-1} \quad (\mathbf{0.75})\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2^n & 0 & -\frac{1}{2} \\ -3.2^n & 1 & n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{0.25}) \end{aligned}$$

D'où

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-2^n & 2^n & 0 \\ 3(2^n-1)-2n & 3(1-2^n) & 1 \end{pmatrix}, \quad n > 0. \quad (\mathbf{0.25})$$

Exercice 3 (3 pts)

Soit f est un endomorphisme de E avec $\dim E = n$.

Dites si les assertions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant avec une démonstration.

1. **La valeur propre associée à un vecteur propre est unique (vraie)** $\quad (\mathbf{0.5})$

   En effet, supposons que λ_1, λ_2 sont deux valeurs propres associées à un vecteur propre $v \neq 0_E$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
   On a
   $$\lambda_1 \text{ est une valeur propre associe à } v \Longrightarrow f(v) = \lambda_1 v \quad (\mathbf{1})$$
   $$\lambda_2 \text{ est une valeur propre associe à } v \Longrightarrow f(v) = \lambda_2 v$$
   Donc $\lambda_2 v - \lambda_1 v = (\lambda_2 - \lambda_1)v = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ (Contradiction).

2. **f est diagonalisable si $E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_n)$ (fausse)** $\quad (\mathbf{0.5})$

   f est diagonalisable **ssi** $E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_n)$

   Démontrons les deux implications

   - $\Longrightarrow$: $\left(f \text{ diagonalisable} \quad \Longrightarrow \quad E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus E(\lambda_p)\right)$

f diagonalisable $\Longrightarrow$ P_f scindé et $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i),\ i = \overline{1,p}$

alors $\dim \Big(E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus ... \oplus E(\lambda_p) \Big) = \sum_{i=1}^{p} m_a(\lambda_i) = n = \dim E$

D'où $E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus ... \oplus E(\lambda_p) = E$. **(1)**

- $\Longleftarrow$: $\Big(E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus ... \oplus E(\lambda_p) \Longrightarrow f$ diagonalisable $\Big)$

  $E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus ... \oplus E(\lambda_p)$ veut dire qu'il existe une base constituée des vecteurs propres de E.

  D'où f est diagonalisable.