**École supérieure en Sciences et Technologies de l'Informatique et du Numérique**

**Niveau:** 2ème année Classe Préparatoire
**Module:** Algèbre 3
**Chargée du cours:** Dr. ALKAMA.L
**Année universitaire:** 2023/2024

**Chapitre III: Réduction des endomorphismes**

# 1 Introduction

Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $f$ un endomorphisme de $E$. Si on se place dans une base de $E$, on peut représenter $f$ par sa matrice associée $A$. Le but de ce chapitre est de trouver une base de $E$ telle que la matrice représentant $f$ dans cette base soit la plus "simple" possible (réduite au maximum). On prend la même base pour $E$ ensemble de départ que pour $E$ ensemble d'arrivée.

Le but de ce chapitre est d'introduire les termes et les concepts de base liés à la théorie de: valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres et polynôme caractéristique des endomorphismes et des matrices.

# 2 Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme en dimension finie

Comme déjà considéré dans le chapitre précédent, considérant, $\mathbb{K}$ un corps commutatif (pouvant être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et $E$ un $\mathbb{K}$.e.v.

**Définition 2.1: Valeurs et vecteurs propres d'un endomorphisme**

Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé valeur propre de $f$ si

$$\exists v \in E,\ v \neq 0_E, \quad \text{tel que} \quad f(v) = \lambda.v$$

On appelle alors $v$ un vecteur propre associée à la valeur propre $\lambda$.

**Définition 2.2: Spectre d'un endomorphisme**

L'ensemble des valeurs propres de $f$ s'appelle le spectre de $f$. On le note par $S_P(f)$ ou bien par $S_{P_{\mathbb{K}}}(f)$.

**Exemple 2.2.1:** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. Soit l'application $\begin{array}{l} f : E \longrightarrow E \\ (x, y) \longmapsto f(x, y) = (-y, x) \end{array}$.

Cherchons si $\exists \lambda$ tel que $f(v) = \lambda v$.
Soit $v = (x, y)$

$$f(x, y) = (-y, x) = \lambda(x, y) \iff \begin{cases} \lambda x = -y & ...(1) \\ \lambda y = x & ...(2) \end{cases}$$

De (1), on a $x = \dfrac{-y}{\lambda}$. Alors $\lambda y = \dfrac{-y}{\lambda} \implies \lambda^2 y = -y$ (impossible).

D'où $f$ n'admet pas de valeurs propres.

**Exemple 2.2.2:** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. Soit l'application $\begin{array}{l} f : E \longrightarrow E \\ (x, y) \longmapsto f(x, y) = (2x, 2y) \end{array}$.

Cherchons si $\exists \lambda$ tel que $f(v) = \lambda v$.
Soit $v = (x, y)$

$$f(x, y) = (2x, 2y) = 2\ (x, y) \Longrightarrow \lambda = 2.$$

## 2.1 Valeurs et vecteurs propres d'une matrice

**Définition 2.1.1: Valeurs et vecteurs propres d'une matrice**

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

$\lambda$ est une valeur propre de $A$ si et seulement si $\exists\, v \in E, v \neq 0_E$ tel que $Av = \lambda v$.

On dit que $v$ est un vecteur propre de $A$ associée à la valeur propre $\lambda$.

**Définition 2.1.2: Spectre d'une matrice**

L'ensemble $S_P(A) = \{\lambda \in \mathbb{K}/\lambda \text{ valeur propre}\}$ représente l'ensemble de toutes les valeurs propres de $A$ appelé spectre de la matrice $A$.

**Exemple 2.1.2:**

**Propriétés 2.1: valeurs propres**

1. Les matrices singulières ont des valeurs propres nulles,
2. Si $A$ est une matrice carrée inversible, alors $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de $A$,
3. Pour un multiple scalaire d'une matrice : Si $A$ est une matrice carrée et $\lambda$ est une valeur propre de $A$. Alors, $a\lambda$ est une valeur propre de $aA$,
4. Pour les puissances matricielles : Si $A$ est une matrice carrée et $\lambda$ est une valeur propre de $A$ et $k \geq 0$ est un entier, alors $\lambda^k$ est une valeur propre de $A^k$,
5. Matrice inverse : Si $A$ est une matrice carrée, $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors $\lambda^{-1}$ est une valeur propre de $A^{-1}$,
6. Matrice transposée : Si $A$ est une matrice carrée et si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors $\lambda$ est une valeur propre de ${}^tA$.

## 2.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension fini

**Définition 2.2.1: Polynôme caractéristique d'un endomorphisme**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$ e.v et $n = \dim E$. On appelle polynôme caractéristique de $f$ et on le note par $P_f(\lambda)$ l'expression $\det(f - \lambda I_E)$, avec $I_E$ la matrice identité d'ordre $n$.

**Remarque 2.2.1:** le développement du $\det(f - \lambda I_E)$ donne un polynôme en $\lambda$ de degré $n = \dim E$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

**Exemple 2.2.1:**

**Proposition 2.2.1**

Soit $f$ un endomorphisme de $E$.

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \iff \det(f - \lambda I_E) = 0.$$

**Preuve:**

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } f &\Longleftrightarrow \exists\, v \in E, v \neq 0_E \text{ tel que } f(v) = \lambda v \\
&\Longleftrightarrow \exists\, v \in E, v \neq 0_E \text{ tel que } f(v) - \lambda v = 0_E \\
&\Longleftrightarrow \exists\, v \in E \neq 0_E \text{ tel que } (f - \lambda I_E)v = 0_E \\
&\Longleftrightarrow v \neq 0_E, \in Ker(f - \lambda I_E) \neq \{0\} \\
&\Longleftrightarrow (f - \lambda I_E) \ \text{ n'est pas injective donc elle n'est pas bijective} \\
&\Longleftrightarrow rg(f - \lambda I_E) < n \ \ (n = \dim E) \\
&\Longleftrightarrow \det(f - \lambda I_E) = 0.
\end{aligned}$$

**Corollaire 2.2.1**

Les valeurs propres de $f$ sont les racine du polynôme $P_f(\lambda) = \det(f - \lambda I_E)$. De plus, tout endomorphisme de $E$ possède au plus $n = \dim E$ valeurs propres.

**Définition 2.2.2: Polynôme caractéristique d'une matrice carrée**

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de $A$ et on le note par $P_A(\lambda)$ l'expression

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

**Corollaire 2.2.2**

Les valeurs propres de $A \in M_n(\mathbb{K})$ sont les racine de $P_A$ ce qui veut dire $\Big(\det(A - \lambda I_n) = 0\Big)$. De plus, $A$ possède au plus $n$ vecteurs propres.

**Exemple 2.2.2:**

**Définition 2.2.3: Matrices semblables**

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Les matrices $A$ et $B$ sont dites semblables s'il existe une matrice $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

**Proposition 2.2.2: Polynôme caractéristique des matrices semblables**

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.
Si $A$ et $B$ sont semblables alors elles ont le même polynôme caractéristique $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$.

**Preuve:**

$A$ est $B$ sont semblables $\Longleftrightarrow$ $\exists P \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$.

On note par $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ et par $P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n)$ les polynômes caractéristiques de $A$ et $B$, respectivement.

Alors,

$$\begin{aligned}
B &= P^{-1}AP \\
P_B(\lambda) &= P_{P^{-1}AP}(\lambda) \\
\det(B-\lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP-\lambda I_n) \\
&= \det\left(P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P\right) \\
&= \det\left(P^{-1}(A-\lambda I_n)P\right) \\
&= \det P^{-1}\det(A-\lambda I_n)\det P \qquad \text{car} \qquad \det A.B=\det A.\det B \\
&= \det(A-\lambda I_n) \qquad \text{car} \qquad \det P^{-1}=\frac{1}{\det P} \\
&= P_A(\lambda).
\end{aligned}$$

**Exemple 2.2.3:**

**Remarque 2.2.3:** Deux matrices $A$ et $B$ sont semblables si elles représentent les matrices associées à un endomorphisme $f$ dans les bases $B$ et $B'$, respectivement. Et puisque elles sont semblables alors $\det(A-\lambda I_n)=\det(B-\lambda I_n)$ donc l'expression $\det(A-\lambda I_n)$ ne dépend que de $f$ et non pas du choix de la base de $E$ ($B$ ou $B'$) et de la matrice ($A$ ou $B$) qui lui est associée dans cette base.

**Définition 2.2.4**

Soit $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}\in M_n(\mathbb{K})$.

On appelle trace de la matrice $A$ la somme de ses coefficients diagonaux notée par $tr(A)$.

Ainsi, $tr(A)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$.

**Exemple 2.2.4:**

**Proposition 2.2.3**

Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$. La forme générale d'un polynôme caractéristique d'une matrice carrée est donnée par

$$P_A(\lambda)=(-1)^n\ \lambda^n+(-1)^{n-1}\ tr(A)\ \lambda^{n-1}+\frac{1}{2}\ (-1)^{n-2}\Big(\big(tr(A)\big)^2-\ tr(A^2)\Big)\ \lambda^{n-2}+...+\det A\ \lambda^0.$$

Le cas le plus utilisé est le cas particulier pour $n=2$ où on aura:

$$P_A(\lambda)=\lambda^2-tr(A)\ \lambda+\det A.$$

**Preuve:**
Soit

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A) &= a+d \\
\det(A) &= ad-bc
\end{aligned}$$

Alors, le polynôme caractéristique de $A$ est:

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (a-\lambda)(d-\lambda)-bc \\
&= ad-a\lambda-d\lambda+\lambda^2-bc \\
&= \lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)
\end{aligned}$$

Et comme $\operatorname{tr}(A) = a + d$ et $\det(A) = ad - bc$, alors:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

**Exemple 2.2.5:**

# 3 Diagonalisation des endomorphismes en dimension finie

**Définition 3.1: Endomorphisme diagonalisable**

Un endomorphisme $f$ de $E$ est dit diagonalisable s'il existe une base $B = (v_1, v_2, ...., v_n)$ de $E$ tel que la matrice associée à $f$ relativement à la base $B$ notée par $Mat(f, B)$ soit une matrice diagonale notée $D$ avec

$$Mat(f, B) = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**Définition 3.2: Matrice diagonalisable**

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale $D$ où il existe une matrice inversible $P$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**Proposition 3.1**

Un endomorphisme $f$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $E$ qui soit constituée des vecteurs propres de $f$.

**Preuve:**
Démontrons les 2 implications:

- $\Longrightarrow$: d'après la **définition 3.1** on a $f$ diagonalisable, donc $\exists\ B = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ une base de $E$ tel que

$$D = Mat(f, B) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(v_1) & f(v_2) & & f(v_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array}, \quad \text{où} \quad \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

  Ainsi: $f(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, f(v_n) = \lambda_n v_n$.
  D'où $v_1, \ldots, v_n$ sont des vecteurs propres de $f$ (d'après **définition 2.1**).

- $\Longleftarrow$: soit $B = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ une base de $E$ formée des vecteurs propres $v_i$, $i = \overline{1, n}$.
  Par définition, $v_i$ est un vecteur propre de $f$ si et seulement si $f(v_i) = \lambda_i v_i \Longrightarrow$ la matrice associée à $f$ relativement à $B$ s'écrit

$$Mat(f, B) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(v_1) & f(v_2) & & f(v_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array}, \quad \text{où} \quad \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

D'où $f$ est diagonalisable.

**Remarque 3.2:**

1. La matrice de passage $P$ avec $D = P^{-1}AP$ est constituée des vecteurs propres de $f$ et $D$ la matrice dont les éléments de la diagonale représentent les valeurs propre de $A$.

2. Il existe des matrices qui sont diagonalisables comme il existe d'autres qui ne sont pas diagonalisables.

**Exemple 3.2:**

## 3.1 Espace propre

**Définition 3.1.1: Espace propre associée à la valeur propre de $f$**

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ et $\lambda$ une valeur propre de $f$. On définit l'espace propre associée à la valeur $\lambda$ le sous espace vectoriel de $E$ noté $E(\lambda)$ tel que

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= \Big\{v \in E / f(v) = \lambda v\Big\} \\ &= \Big\{v \in E / (f - \lambda I_E)v = 0_E\Big\} \\ &= ker(f - \lambda I_E). \end{aligned}$$

**Définition 3.1.2: Espace propre associée à la valeur propre de $A$**

La définition précédente reste vraie si on prend $A \in M_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= \Big\{v \in E / Av = \lambda v\Big\} \\ &= \Big\{v \in E / (A - \lambda I_n)v = 0_E\Big\} \\ &= ker(A - \lambda I_n). \end{aligned}$$

**Remarque 3.1.1:**

1. L'espace propre associée à une valeur propre $\lambda$ d'un endomorphisme $f$ de $E$ est l'ensemble de tous les vecteurs propres de $f$ associée à $\lambda$ auquel on adjoint le vecteur nul $0_E$.

2. On a $\dim E(\lambda) \geq 1$ car $\exists v \neq 0_E$ vecteur propre de $f$.

**Exemple 3.1.2:**

**Théorème 3.1.1: Somme directe des sous-espaces propres**

Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, avec $p \geq 2$ des valeurs propres de $f$ deux à deux distinctes alors la somme $E(\lambda_1) + E(\lambda_2) + ... + E(\lambda_p)$ des sous-espaces propres correspondants est directe.

**Preuve:** On démontre par récurrence.
On pose l'hypothèse de récurrence suivante $\mathcal{P}(k) : E(\lambda_1) + E(\lambda_2) + ... + E(\lambda_k)$ est directe.

- Pour $k = 2$, montrons que $E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \Longleftrightarrow E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) = \{0_E\}$.
  Soit $v \in E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2)$ alors

$$f(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v \implies (\lambda_1 - \lambda_2)v = 0_E \implies v = 0_E \text{ car } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

- On suppose que $\mathcal{P}(k-1)$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
  Soit $v_i \in E(\lambda_i)$. Montrons que si on a $v_1 + v_2 + \cdots + v_k = 0_E$ alors $v_1 = v_2 = \cdots = v_k = 0_E$

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + \cdots + v_k = &\ 0_E \text{.........} \ \mathbf{(1)} \\ \Longrightarrow f(v_1 + v_2 + \cdots + v_k) = &\ 0_E \\ \Longrightarrow f(v_1) + f(v_2) + \cdots + f(v_k) = &\ 0_E \\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_k = &\ 0_E \text{.........} \ \mathbf{(2)} \end{aligned}$$

  En multipliant l'équation **(1)** par $\lambda_k$ et puis soustraire le résultat de l'équation **(2)**, on aura

$$\begin{aligned} (\lambda_k - \lambda_1)v_1 + (\lambda_k - \lambda_2)v_2 + \cdots + (\lambda_k - \lambda_{k-1})v_{k-1} = &\ 0_E \\ v_1 = v_2 = \cdots = v_k = &\ 0_E. \end{aligned}$$

  De **(1)**, on obtient que $v_k = 0_E$.

D'où $E(\lambda_1) + E(\lambda_2) + ... + E(\lambda_k)$ est directe.

**Définition 3.1.3: Multiplicité algébrique**

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ et $\lambda$ une valeur propre de $f$. On appelle multiplicité algébrique notée $m_a(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de la racine $\lambda$ du polynôme caractéristique $P_f$ de $f$.

**Cas particuliers:**

- $\lambda$ racine simple $\Longrightarrow$ $m_a(\lambda) = 1$;
- $\lambda$ racine double $\Longrightarrow$ $m_a(\lambda) = 2$;
- $\lambda$ racine triple $\Longrightarrow$ $m_a(\lambda) = 3$;
- $\lambda$ racine multiple $\Longrightarrow$ $m_a(\lambda) \geq 2$.

**Exemple 3.1.3:**

**Définition 3.1.4: Multiplicité géométrique**

On appelle multiplicité géométrique notée $m_g(\lambda)$ la dimension de l'espace propre $E(\lambda)$ associé à la valeur propre $\lambda$. On écrit alors $m_g(\lambda) = \dim E(\lambda)$.

**Exemple 3.1.4**:

**Proposition 3.1.1**

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in S_P(A)$. On a l'inégalité suivante

$$1 \leq m_g(\lambda) = \dim E(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

**Preuve**:
Montrons les deux inégalités

- $m_g(\lambda) = \dim E(\lambda) \geq 1$
  Par définition $\lambda$ valeur propre de $A \Longleftrightarrow \exists v \in E / v \neq 0_E$ tel que $A.v = \lambda.v$
  comme $\exists v \in E(\lambda)$ alors $\dim(E(\lambda)) \geq 1$. (En d'autre terme il existe au moins un vecteur dans le sous espace propre de la valeur $\lambda$).

- $m_g(\lambda) = \dim E(\lambda) \leq m_a(\lambda)$
  Soit $B = (v_1, v_2, ..., v_r)$ une base de $E(\lambda)$, donc $m_g(\lambda) = r$.
  Soit $B^{'} = (v_1, v_2, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n)$ une base de $E$ qu'on a eu en complétant la base de $B$. La matrice associée à $f$ relativement à la base $B'$ est:

$$M = Mat(f, B^{'}) = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & D \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \\ \hline & & 0 & & C \end{array}\right) \qquad C \in M_{n-r}(\mathbb{R}) \text{ et } D \in M_{r,n-r}(\mathbb{R})$$

  Alors, le polynôme caractéristique est

$$P_M(t) = \det(M - tI_n) = \left|\begin{array}{cccc|c} \lambda - t & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda - t & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & D \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - t & \\ \hline & & 0 & & C - tI_{n-r} \end{array}\right| = (\lambda - t)^r \det(c - tI_{n-r})$$

  On a $A$ et $M$ sont semblables, alors $P_A(t) = P_M(t)$.
  La multiplicité de $\lambda$ est au moins égale à $r$ ($m_a(\lambda) \geq r$) d'où $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

**Exemple 3.1.4a:**

**Proposition 3.1.2: Endomorphisme diagonalisable**

Si $f$ possède $n$ valeurs propres distinctes alors $f$ est diagonalisable.

**Preuve:**
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ les $n$ valeurs propres de $f$ tel que $\lambda_i \neq \lambda_j,\ \forall i \neq j$. Alors $\dim E(\lambda_i) = 1, \quad \forall i = \overline{1, n}$.
$\dim \Big( E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_n) \Big) = \dim E = n$.
Soit $v_i \in E(\lambda_i)$ un vecteur propre.
On aura alors la base $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ constituée des vecteurs propres de $E$, donc $f$ est diagonalisable.

**Définition 3.1.5: Polynôme scindé**

Un polynôme $P$ est dit scindé sur $\mathbb{K}$ s'il est décomposable en produit de polynômes de $\mathbb{K}$. Il s'écrit sous la forme

$$P(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{k_1} (x - \lambda_2)^{k_2} ... (x - \lambda_p)^{k_p}$$

avec $k_1 + k_2 + ... + k_p = n =$ degré de $P$ et $\lambda_i \in \mathbb{K}$ les racines du polynôme $P$.

**Exemple 3.1.5:**

**Théorème 3.1.2: Théorème fondamental**

Soit $f$ un endomorphisme de $E$. On dit que $f$ est diagonalisable si et seulement si les 2 conditions suivantes sont vérifiées:

1. Le polynôme caractéristique de $f$ (respectivement, de $A$) est scindé dans $\mathbb{K}$.

2. Pour toute valeur propre $\lambda$ de $f$ (respectivement, de $A$), on a $m_a(\lambda) = \dim E(\lambda) = m_g(\lambda)$.

**Exemple 3.1.5a:** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique est donné par: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (-1-\lambda)(2-\lambda)^2$.

L'ensemble des valeurs propres de $A$ sont: $P_A(\lambda) = 0 \iff S_P(A) = \{-1, 2\}$.

On a

1. Le polynôme est scindé
2. Vérifions si $m_a(\lambda) = \dim E(\lambda)$, $\lambda \in S_P(A)$. On a les multiplicités algébriques $m_a(-1) = 1$ et $m_a(2) = 2$.
   - On sait que $\lambda = -1$ est une racine simple alors $m_a(-1) = \dim E(-1) = 1$.
   - Recherche de $\dim E(2)$:
     Méthode 1:
     $$\begin{aligned} E(2) &= ker(A - 2I_3) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 0 & -6 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \left( x, y, \frac{3}{2} y \right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x\,(1,0,0) + y \left( 0, 1, \frac{3}{2} \right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle (1,0,0), \left( 0, 1, \frac{3}{2} \right) \right\rangle \quad \Longrightarrow \quad \dim E(2) = 2. \end{aligned}$$
     Méthode 2: on a $rg(A - 2I_3) = 1$ alors $\dim ker(A - 2I_3) = 3 - 1 = 2$.

Puisque les 2 conditions sont vérifiées alors la matrice $A$ est diagonalisable.

**Corollaire 3.1.1**

Soit $f$ un endomorphisme de $E$. Si le polynôme caractéristique de $f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et ne possède que des racines simples alors $f$ est diagonalisable.

**Exemple 3.1.5b:**

**Théorème 3.1.3**

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes. Alors

$$f \text{ est diagonalisable ssi } E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus ... \oplus E(\lambda_p)$$

**Preuve:**
Démontrons les deux implications

- $\Longrightarrow$: $\Big(f \text{ diagonalisable} \quad \Longrightarrow \quad E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus ... \oplus E(\lambda_p)\Big)$

$$f \text{ diagonalisable } \implies P_f \text{ scindé et } m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i),\ i = \overline{1,p}$$

alors $\dim\Big(E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus ... \oplus E(\lambda_p)\Big) = \sum_{i=1}^{p} m_a(\lambda_i) = n = \dim E$

D'où $\quad E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus ... \oplus E(\lambda_p) = E.$

- $\Longleftarrow$: $\Big( E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus ... \oplus E(\lambda_p) \implies f \text{ diagonalisable} \Big)$

E=E$(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus ... \oplus E(\lambda_p)$ veut dire qu'il existe une base constituée des vecteurs propres de $E$.

D'où $f$ est diagonalisable.

**Exemple 3.1.5c:**

**Corollaire 3.1.2**

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les $n$ valeurs propres de $A$. Alors :

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

**Exemple:**
**Remarques**

1. La diagonalisation d'une matrice carrée réelle $A$ d'ordre $n$ n'est possible que si elle possède $n$ vecteurs propres linéairement indépendants.

2. La matrice $P$ n'est pas unique, car les colonnes de $P$, formées par les vecteurs propres de $A$, peuvent être disposées dans n'importe quel ordre et, de plus, les vecteurs propres de $A$ peuvent être mis à l'échelle arbitrairement.

3. L'ordre dans lequel les vecteurs propres de $A$ sont utilisés pour construire les colonnes de $P$ sera l'ordre dans lequel les valeurs propres correspondantes de $A$ sont disposées le long de la diagonale principale de $D$.

## 3.2 Application de la diagonalisation au calcul des puissances de quelques types de matrices

Soit $A$ une matrice diagonalisable, c'est a dire il existe une matrice diagonale $D$ et une matrice $P$ inversible tel que $D = P^{-1}AP$.

Avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $P = (v_1, v_2, ..., v_n)$ la matrice carrée d'ordre $n$ où ses colonnes représentent les $n$ vecteurs propres linéairement indépendants de la matrice $A$.

On peut démontrer par récurrence que

$$A^n = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{n \text{ fois}} = PD^nP^{-1} \iff A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

où chaque produit $P^{-1}P$ vaut $I_n$ qui est la matrice identité d'ordre $n$.

Le calcul de puissance s'applique pour calculer les suites linéaires récurrentes telle que

$$\begin{aligned} U_n = A\, U_{n-1} \iff & U_n = A.(A\, U_{n-2}) = A^2 U_{n-2} \\ \iff & A^2(A\, U_{n-3}) = A^3 U_{n-3} \\ & \vdots \\ \iff & U_n = A^n\, U_0 \end{aligned}$$

**Exemple 3.2:**

## 4 Polynôme annulateur, polynôme minimal et théorème de Cayley-Hamilton

**Définition 4.1**

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ et $E$ un $\mathbb{K}.e.v$ de dimension finie ($\dim E = n < +\infty$).
Soit $P \in \mathbb{K}[X] : \exists n \in \mathbb{N}$ tel que degré de $P$ est égale à $n$, alors

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + .. + a_n X^n, \qquad a_0, ..., a_n \in \mathbb{K}.$$

On note $P(f)$ le polynôme de l'endomorphisme $f$ de $E$

$$P(f) = a_0 Id_E + a_1 f + a_2 f^2 + ... + a_n f^n \quad \text{avec} \quad f^n = \underbrace{(f \circ f \circ f \circ .... \circ f)}_{n \text{ fois}}.$$

De même, l'application polynôme à une matrice $A \in M_P(\mathbb{K})$ le polynôme $P(A)$ avec

$$P(A) = a_0 I_A + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_n A^n \quad \text{avec} \quad A^n = \underbrace{(A.A....A)}_{n \text{ fois}}.$$

**Définition 4.2: Polynôme annulateur**

On dit qu'un polynôme $P(X)$ est un polynôme annulateur de la matrice $A$ $\Big($respectivement de l'endomorphisme $f\Big)$ si $P(A) = 0$ $\Big($respectivement $P(f) = 0\Big)$.

**Exemple 4.2:**

**Proposition 4.1**

Soit $P(X)$ un polynôme annulateur de $f$ (respectivement, de $A$) alors les valeurs propres de $f$ (respectivement, de $A$) sont les racines du polynôme $P$.

**Preuve:**
Montrons d'abord que $\lambda^k$ est une valeur propre de $f^k, k \in \mathbb{N}^*$.

$\lambda$ valeur propre de $f \iff \exists v \in E, v \neq 0_E$ tel que $f(v) = \lambda v$.

$$\begin{aligned} f^k(v) = (f^{k-1} \circ f)(v) = f^{k-1}(f(v)) = f^{k-1}(\lambda v) &= \lambda f^{k-1}(v) \\ &= \lambda (f^{k-2} \circ f)(v) \\ &= \lambda^2 f^{k-2}(v) \\ &\ \vdots \\ &= \lambda^k\, v, \ k \in \mathbb{N}^*. \ \text{(Par récurrence)} \end{aligned}$$

On a $P(f)$ est un polynôme annulateur de $f$ alors

$$\begin{aligned}
& P(f)(v) = 0 \\
& \iff a_0 Id_E(v) + a_1 f(v) + a_2 f^2(v) + ... + a_n f^n(v) = 0 \\
& \iff a_0 v + a_1 \lambda v + a_2 \lambda^2 v + ... + a_n \lambda^n v = 0 \\
& \iff (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + ... + a_n\lambda^n) v = 0 \\
& \iff P(\lambda) v = 0 \\
& \iff P(\lambda) = 0 \quad (\text{car } v \neq 0) \\
& \iff \lambda \text{ est une racine du polynôme } P.
\end{aligned}$$

**Théorème 4.0.1: Cayley-Hamilton**

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ $\Big($*respectivement*, $A \in M_n(\mathbb{K})\Big)$ de dimension finie.

Le polynôme caractéristique de $f$ noté $P_f$ $\Big($respectivement, de $A$ noté $P_A\Big)$ est un polynôme annulateur de $f$ (respectivement, de $A$) ssi $P_f(f) = 0$ $\Big($respectivement, $P_A(A) = 0\Big)$.

L'égalité $P_f(f) = 0$ $\Big($respectivement, $P_A(A) = 0\Big)$ signifie que le polynôme caractéristique appliqué à $f$ (respectivement, à $A$) donne l'application (respectivement, la matrice) nulle.

**Preuve:** Soit le polynôme caractéristique de $A$

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \Big(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n\Big)$$

Si A est diagonalisable alors $A = PDP^{-1}$ avec $D$ la matrice diagonale contenant les $n$ valeurs propres de $A$ sur sa diagonale et $P$ la matrice composée des $n$ vecteurs propres de $A$.

Soit

$$P_A(A) = (-1)^n \Big(A^n + a_1 A^{n-1} + ... + a_{n-1}A + a_n I_n\Big) \textbf{........(I)}$$

Et comme on a déjà montrée par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ alors l'équation **(I)** devient

$$\begin{aligned}
P_A(A) = & \ (-1)^n \Big(PD^nP^{-1} + a_1 PD^{n-1}P^{-1} + ... + a_{n-1}PDP^{-1} + a_n PI_nP^{-1}\Big) \\
= & \ (-1)^n \left[ P\Big(\underbrace{D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n I_n}_{M}\Big) P^{-1} \right]
\end{aligned}$$

Et comme

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1^n + ... + a_{n-1}\lambda_1 + a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n + ... + a_{n-1}\lambda_2 + a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^n + ... + a_{n-1}\lambda_n + a_n \end{pmatrix}$$

On sait bien que $\lambda_i^n + a_1\lambda_i^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda_i + a_n$ qui est simplement $P(\lambda_i)$ est nul car $\lambda_i$ est une racine du polynôme caractéristique $P_A$.

Alors la matrice $M$ est une matrice nulle $\Longrightarrow$ $P_A(A) = (-1)^n[P \times 0_{M_n(\mathbb{R})} \times P^{-1}] = 0$.

D'où le polynôme caractéristique appliqué à $A$ donne la matrice nulle.

**Exemple 4.0.1:**

## 4.1 Application du polynôme annulateur et Théorème de Cayley-Hamilton

### 4.1.1 Calcul de la puissance d'une matrice

Soit $A \in M_n(K)$ et $P_A$ le polynôme caractéristique de $A$.

En utilisant la division euclidienne de $\lambda^n$ par $P_A$, on aura

$$\lambda^k = P_A(\lambda)Q_n(\lambda) + R_n(\lambda), \text{ avec } R_n(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + ... + a_{n-1}\lambda^{n-1}$$

où degré $R_n <$ degré $P_\lambda$.
Alors pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, on a $\lambda^n = R_n(\lambda)$ car $\lambda$ est une racine de $P_A$ où $R_n$ est le reste de la division euclidienne de $\lambda^n$ par $P$.

1. **Cas des valeurs propres distinctes:**
   On résout le système d'équations linéaires vérifiant
   $$\lambda^n = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + ... + a_n\lambda^n \textbf{......(I)}$$
   en remplaçant $\lambda$ par les $n$ valeurs propres distinctes de la matrice $A$.
2. **Cas des valeurs propres multiples:**
   pour les valeur propres distinctes, on utilise la formule **(I)** et pour les valeurs propres multiples, on dérive l'équation **(I)** et on remplace $\lambda$ qui est double dans la formule obtenue. Et si $\lambda$est triple, on dérive une deuxième fois la formule **(I)** et on remplace par la valeur propre et ainsi de suite. On aura alors, un système d'équation linéaire de $n$ équations à $n$ inconnues ayant une seule solution $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$

On sait que
$$A^n = P_A(A)Q_n(A) + R_n(A) = R_n(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \textbf{........(II)}$$
car d'après le théorème de Cayley- Hamilton $P_A$ un polynôme annulateur de $A$ vérifiant la relation $(P_A(A) = 0)$.
Après avoir trouvé les valeur des coefficients $a_0, a_1, a_2, ...,$ et $a_n$, on a qu'à les remplacer dans la formule **(II)** pour avoir la matrice $A^n$.

**Exemple 4.1.1a: (cas des racines distinctes)**

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_E(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda+1)(3-\lambda)$$
$$\begin{aligned} \lambda^n =& P_E(\lambda).Q(\lambda) + R(\lambda), \text{ degré } R(\lambda) = 2 < 3 \\ =& P_E(\lambda).Q(\lambda) + a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 \textbf{......(I)} \end{aligned}$$
En remplaçant les valeurs propres dans l'équation **(I)**, on obtient le système suivant
$$\begin{cases} (-1)^n = a_0 - a_1 + a_2 \textbf{.......(1)} \\ 2^n = a_0 + 2a_1 + 4a_2 \textbf{.......(2)} \\ 3^3 = a_0 + 3a_1 + 9a_2 \textbf{.......(3)} \end{cases}$$

**(2)-(1)** $\Longleftrightarrow 2^n - (-1)^n = 3a_1 + 3a_2 \textbf{.......(4)}$
**(3)-(2)** $\Longleftrightarrow 3^n - 2^n = a_1 + 5a_2 \textbf{.......(5)}$
**(4)-3(5)** $\Longleftrightarrow 2^n - (-1)^n - 3^{n+1} + 3(2^n) = -12a_2 \Longrightarrow a_2 = \dfrac{(-1)^n}{12} - \dfrac{(2)^n}{3} + \dfrac{(3)^n}{4}$
En remplacant dans (5), on trouve $a_1 = \dfrac{-5}{12}(-1)^n + \dfrac{(2)^{n+1}}{3} - \dfrac{(3)^n}{4}$
En remplacant dans **(1)**, on trouve $a_0 = (-1)^n + a_1 - a_2 = a_2 = \dfrac{(-1)^n}{2} + (2)^n - \dfrac{(3)^n}{2}$

D'où
$$\lambda^n = \left(\frac{(-1)^n}{2} + (2)^n - \frac{(3)^n}{2}\right) + \left(\frac{-5}{12}(-1)^n + \frac{(2)^{n+1}}{3} - \frac{(3)^n}{4}\right)\lambda + \left(\frac{(-1)^n}{12} - \frac{(2)^n}{3} + \frac{(3)^n}{4}\right)\lambda^2$$
En remplaçant $\lambda$ par $A$, on trouve
$$\begin{aligned} E^n =& a_0\ I_3 + a_1\ E + a_2\ E^2 \\ =& \left(\frac{(-1)^n}{2} + (2)^n - \frac{(3)^n}{2}\right)I_3 + \left(\frac{-5}{12}(-1)^n + \frac{(2)^{n+1}}{3} - \frac{(3)^n}{4}\right)E + \left(\frac{(-1)^n}{12} - \frac{(2)^n}{3} + \frac{(3)^n}{4}\right)E^2 \end{aligned}$$

$$E^2 = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 & -8 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$a_0\ I_3 = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{2} + (2)^n - \frac{(3)^n}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{2} + (2)^n - \frac{(3)^n}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-1)^n}{2} + (2)^n - \frac{(3)^n}{2} \end{pmatrix}$$

$$a_1\ E = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6}(-1)^n + \frac{2^{n+2}}{3} - \frac{1}{2}3^n & \frac{25}{12}(-1)^n - \frac{10}{3}2^n + \frac{5}{4}3^n & \frac{-5}{3}(-1)^n + \frac{2^{n+3}}{3} - 3^n \\ 0 & \frac{-5}{12}(-1)^n + \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{3^n}{4} & \frac{-5}{3}(-1)^n + \frac{2^{n+3}}{3} - 3^n \\ 0 & -\frac{5}{12}(-1)^n + \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{3^n}{4} & -\frac{5}{12}(-1)^n + \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{3^n}{4} \end{pmatrix}$$

$$a_2\ E^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-1)^n - \frac{4}{3}2^n + 3^n & -\frac{11}{12}(-1)^n + \frac{11}{3}2^n - \frac{11}{4}3^n & -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{8}{3}2^n - 2\ 3^n \\ 0 & \frac{5}{12}(-1)^n - \frac{5}{3}2^n + \frac{5}{4}3^n & \frac{2}{3}(-1)^n - \frac{8}{3}2^n + 2\ 3^n \\ 0 & \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{2}3^n & \frac{5}{12}(-1)^n - \frac{5}{3}2^n + \frac{5}{4}3^n \end{pmatrix}$$

D'où

$$E^n = \begin{pmatrix} 2^n & \frac{7}{6}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n - \frac{3}{2}3^n & -\frac{7}{3}(-1)^n + \frac{16}{3}2^n - 3^{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}3^n & (-1)^{n+1} + 3^n \\ 0 & -\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{4}3^n & \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}3^n \end{pmatrix}$$

**Exemple 4.1.1b: (cas des racines multiples)**

### 4.1.2 Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $P_A$ le polynôme caractéristique de $A$ avec $A \in M_n(\mathbb{K})$.

On a $P_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + ... + a_n\lambda^n$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton $P_A(A) = 0$, alors

$$\begin{aligned} P_A(A) = \ & a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_n A^n \\ \Longleftrightarrow \ & a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_n A^n = -a_0 I_n \\ \Longleftrightarrow \ & A\Big(a_1 I_n + a_2 A + ... + a_n A^{n-1}\Big) = a_0 A A^{-1} \\ \Longleftrightarrow \ & -a_0 A^{-1} = a_1 I_n + a_2 A + ... + a_n A^{n-1} \\ \Longleftrightarrow \ & A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\Big(a_1 I_n + a_2 A + ... + a_n A^{n-1}\Big). \end{aligned}$$

**Exemple 4.1.2:**

# 5 Trigonalisation des endomorphismes en dimension finie

Dans cette section, on s'intéresse aux matrices triangulaires supérieures.

**Définition 5.1: Trigonalisation d'un endomorphisme (resp, d'une matrice)**

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ $\Big($respectivement, $A \in M_n(\mathbb{K})\Big)$ de dimension finie. On dit que $f$ (resp, $A$) est triangularisable si il existe une base $B$ de $E$ $\Big($resp, il existe $P \in M_n(\mathbb{K})\Big)$ tel que la matrice $T$ associée à $f$ relativement à la base $B$ définie par $T = Mat(f, B)$ $\Big($resp, $T = P^{-1}\ A\ P\Big)$ soit triangulaire supérieure.

## 5.1 Caractérisation d'un endomorphisme trigonalisable

**Théorème 5.1.1**

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ (respectivement, $A \in M_n(\mathbb{K})$). On dit que $f$ (resp, $A$) est trigonalisable ssi le polynôme caractéristique $P_f$ (resp, $P_A$) est scindé sur $\mathbb{K}$.

$$\begin{array}{lcl} f \text{ trigonalisable} & \Longleftrightarrow & P_f \text{ scindé sur } \mathbb{K}. \\ A \text{ trigonalisable} & \Longleftrightarrow & P_A \text{ scindé sur } \mathbb{K}. \end{array}$$

**Preuve:**

- $\Longrightarrow$): (Supposons que $A$ trigonalisable et montrons que $P_A$ scindé sur $\mathbb{K}$)
  $A$ trigonalisable, alors $\exists\ T \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure ($A \sim T$), avec $t_{ij} \in \mathbb{K}$ et $i, j \in \overline{1, n}$. Alors

  $$P_A(\lambda) = P_T(\lambda) = (t_{11} - \lambda) \times \cdots \times (t_{nn} - \lambda) = \prod_{i=1}^{n} (t_{ii} - \lambda).$$

  Donc, $P_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

- $\Longleftarrow$): (Supposons que $P_A$ scindé sur $\mathbb{K}$ et montrons que $A$ trigonalisable)
  Pour ce faire, on procède par récurrence sur n, $n \geq 2$.
  Soit $n = 2$ : soit $A \in M_2(\mathbb{K})$ tel que $P_A$ scindé sur $\mathbb{K}$. Donc $A$ possède 2 valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Soit $f$ l'endomorphisme associé à $f$ relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^2$.
  Soit $v_1$ un vecteur propre de $f$ associé a $\lambda_1$. On complète $v_1$ par un vecteur $w \in \mathbb{K}^2$ pour avoir une base de $\mathbb{K}^2$.
  On a : $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ et $\exists a, b \in \mathbb{K}$ $f(w) = av_1 + bw$
  $\Longrightarrow Mat(f, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \Longrightarrow$ $A$ est trigonalisable.
  Supposons que la propriété est vraie pour $n - 1$, montrons qu'elle est vraie pour $n$.
  Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $P_A$ scindé sur $\mathbb{K}$. Donc $A$ possède $n$ valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.
  Soit $v_1$ un vecteur propre de $A$ associé à $\lambda_1$. On complète $v_1$ par $w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{K}^n$ pour avoir une base $B'$ de $\mathbb{K}^n$
  Notons par $(w_2, ..., w_n)$ cette complétion. Notons aussi par $f$ l'endomorphisme associé à $A$ relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Dans la nouvelle base $(V_1, w_2, ..., w_n)$ de $\mathbb{K}^n$, l'endomorphisme $f$ est représenté

par une matrice du type :

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

ou $c_{ij}$ $(1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq n)$ désignent des éléments de $\mathbb{K}$, $L$ désigne une matrice de $M_{1,(n-1)}(\mathbb{K})$ (qui est une matrice ligne) et $M$ désigne une matrice de $M_{n-1}(\mathbb{K})$ (qui est une matrice carrée). Comme les deux matrices $A$ et $C$ sont semblables (car elles représentent le même endomorphisme $f$), on a:

$$P_A(\lambda) = P_C(\lambda) = \det(C - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & L \\ 0 & M - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda) P_M(\lambda).$$

Ceci montre que $P_M$ divise $P_A$. Mais puisque $P_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$ (par hypothèse), on en déduit que $P_M$ est lui aussi scindé sur $\mathbb{K}$. Mais puisque $M$ est une matrice carrée d'ordre $(n-1)$, il s'en suit (d'après notre hypothèse de récurrence) que $M$ est trigonalisable (sur $\mathbb{K}$). Il existe donc une matrice $Q \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ tel que la matrice $Q^{-1}MQ$ soit triangulaire supérieure. Posons par suite

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

Il est claire que $P \in M_n(\mathbb{K})$ et que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

De plus, on a :

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ (0) & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & LQ \\ (0) & Q^{-1}MQ \end{pmatrix}.$$

qui est bien triangulaire supérieure (puisque $Q^{-1}MQ$ est triangulaire supérieure). On a finalement $A \sim C$ et $C \sim P^{-1}BP$, d'où $A \sim P^{-1}CP$. Ainsi $A$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure, ce qui montre que $A$ est trigonalisable. Ce qui achève cette récurrence et cette démonstration.

## 5.2 Méthodes de trigonalisation

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice trigonalisable. Pour trigonaliser la matrice $A$, il faut toit d'abord avoir la matrice de passage $P$ en complétant les espaces propres ayant des vecteurs manquants. Pour ceci, il existe deux méthodes différentes:

- **Méthode 1:** consiste à compléter l'espace propre qui a un vecteur manquant (ou plusieurs vecteurs manquants) par un vecteur de la base canonique $e_1, e_2....$ (ou plusieurs vecteurs de la base canonique). Le vecteur de la base canonique est choisi de sorte que la matrice $P$ obtenue sera inversible pour pouvoir trouver la matrice $T = P^{-1}AP$ triangulaire de $A$.

- **Méthode 2:** consiste à compléter l'espace propre de la valeur propre $\lambda_i$ en utilisant la matrice $(A - \lambda_i I_n)$ utilisé pour trouvé $E(\lambda_i)$. Par exemple, on suppose que la valeur propre $\lambda_1$ est une valeur propre de multiplicité $m_a(\lambda_1) = 4$ et $m_g(\lambda_1) = 1$. On note par $v_1$ le vecteur propre de l'espace propre de $\lambda_1$. Il faut compléter l'espace par 3 autres vecteurs $v_2, v_3$ et $v_4$ qu'on trouvera en résolvants les systèmes d'équations linéaires suivants: $(A - \lambda_1 I_n)v_2 = v_1$, puis $(A - \lambda_1 I_n)v_3 = v_2$ et finalement $(A - \lambda_1 I_n)v_4 = v_3$.

**Exemple 5.2a: (cas d'un vecteur manquant pour compléter la base)**
**Exemple 5.2b: (cas de deux vecteurs manquants pour compléter la base)**

## 5.3 Applications de la trigonalisation au calcul des puissances d'un certain type de matrices

Lorsqu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ n'est pas diagonalisable mais seulement trigonalisable et possède une unique valeur propre ou des valeurs propres multiples, il est possible d'exprimer $A^k, k \in \mathbb{N}$ en fonction de $k$ par le procédé de trigonalisation. La méthode utilisée se sert (en plus de la trigonalisation) de la formule du binôme de Newton, où l'une des deux matrices du binôme en question est nilpotente (voir ci-dessous).

**Définition 5.3.1: Endomorphisme nilpotent**

Un endomorphisme $f$ de $E$ est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k$ vérifiant cette propriété s'appelle l'indice de nilpotence de $f$.

**Définition 5.3.2: Matrice nilpotente**

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0_{M_n(\mathbb{K})}$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k$ vérifiant cette propriété s'appelle l'indice de nilpotence de $A$.

**Exemple 5.2:**

**5.2.1 Formule du binôme de Newton**

Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées de même ordre qui commutent (c'est-à-dire qui vérifient $AB = BA$) et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, on a :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \; B^k \; A^{n-k}.$$

**5.2.2 Méthode de calcul de $A^n (n \in \mathbb{N})$ lorsque $A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable et possède une unique valeur propre**

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique $P_A$ que l'on suppose scindé sur $\mathbb{K}$ et possède une unique valeur propre $\lambda$ de multiplicité algébrique $n$. Il est alors possible d'exprimer $A^n (n \in \mathbb{N})$ en fonction de $n$ en suivant les étapes suivantes:

1. **Étape 1: Trigonalisation de $A$**
   On trigonalise $A$ (la matrice $A$ est, en effet, trigonalisable puisque $P_A$ est supposé scindé sur $\mathbb{K}$). Ceci équivaut à exprimer $A$ sous la forme :

   $$A = P \; T \; P^{-1},$$

   avec $P \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible et $T \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure. Une simple récurrence montre que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$A^n = P \; T^n \; P^{-1} \ldots\ldots\ldots \textbf{(I)}$$

2. **Étape 2: Calcul de $T^n$**
   Comme $T$ est semblable à $A$ $(T \sim A)$ alors $T$ (tout comme $A$) possède une unique valeur propre $\lambda$, qui est de multiplicité algébrique $n$. Et puisque $T$ est triangulaire supérieure, alors $T$ s'écrit sous la forme :

   $$T = \begin{pmatrix} \lambda & t_{12} & \cdots & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \lambda & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & t_{(n-1),n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

   avec $t_{ij} \in \mathbb{K}$ (pour tous $1 \leq i \leq n-1, i < j \leq n$). Par suite, on décompose $T$ comme suit :

   $$T = D + N, \text{ avec } D = \lambda I_n, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & \cdots & \cdots & t_{1n} \\ 0 & 0 & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & t_{(n-1),n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I_n \text{ une matrice identité d'ordre } n.$$

   D'une part, on peut montrer que $N^n = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. Ceci montre que la matrice $N$ est nilpotente d'indice $\leq n$. Notons par $e$ l'indice de nilpotence de $N$ (c'est-à-dire le plus petit entier positif vérifiant $N^e = 0_{M_n(\mathbb{R})}$).

D'autre part, les deux matrices $\lambda I_n$ et $N$ commutent puisqu'on a $(\lambda I_n)N = N(\lambda I_n) = \lambda N$. Ce fait nous autorise à utiliser la formule du binôme de Newton pour développer $(\lambda I_n + N)^n, n \in \mathbb{N}$. On obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} T^n &= (\lambda I_n + N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, N^k \, (\lambda I_n)^{n-k} \\ &= (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, N^k \, D^{n-k} \end{aligned}$$

Mais comme $N^k = 0$ des que $k \geq e$, on a simplement:

$$T^n = \sum_{k=0}^{e-1} C_n^k \, N^k \, (\lambda I_n)^{n-k} \textbf{........(II)}$$

La formule **(II)** donne l'expression de $T^n, (n \in \mathbb{N})$ en fonction de $k$.

3. **Étape 3: Calcul de $A^n$**
   Comme dernière étape, il suffit de substituer **(II)** dans **(I)** pour aboutir à l'expression recherchée de $A^n, (n \in \mathbb{N})$ en fonction de $n$.

### 5.2.2 Méthode de calcul de $A^n (n \in \mathbb{N})$ lorsque $A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable et possède plusieurs valeurs propres

Le procédé est le même, ce qui change est juste la matrice diagonale dans la formule $T = D + N$.

Au lieu que $D = \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$ on aura par exemple $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_{n-3} \end{pmatrix}$

**Exemple 5.2.2a:Exemple 5.2.2b:**

## 5.4 Application de la diagonalisation à la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires.

Pour la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires de la forme

$$X^{'}(t) = A.X(t) \textbf{...........(1)}$$

avec $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ et les vecteurs $X^{'}(t)$ et $X(t)$ sont des vecteurs colonnes de taille $n$, les étapes suivantes doivent être considérées:

- Étape 1: écrire le système sous forme matricielle;
- Étape 2: trouver les valeurs propres de la matrice du système $A$ et ses espaces propres $E(\lambda_1), E(\lambda_2), ..;$
- Étape 3: réduire la matrice $A$ en construisant dans le cas où la matrice est diagonalisable la matrice diagonale $D$ (respectivement, dans le cas où la matrice est trigonalisable la matrice triangulaire supérieure $T$) qui vérifie $D = P^{-1}AP$ (respectivement, $T = P^{-1}AP$);
- Étape 4: on pose

$$\begin{aligned} & Y(t) = P^{-1}.X(t) \\ \Longrightarrow \quad & X(t) = P.Y(t) \quad \textbf{............(2)} \\ \Longrightarrow \quad & X^{'}(t) = PY^{'}(t) \textbf{............(3)} \end{aligned}$$

- Étape 5: De **(1)**, **(2)** et **(3)**, on obtient

$$\begin{aligned} A.X(t) &= P.Y^{'}(t) \\ A.P.Y(t) &= P.Y^{'}(t) \\ P.Y^{'}(t) &= A.P.Y(t) \\ P^{-1}.P.Y^{'}(t) &= P^{-1}.A.P.Y(t) \\ Y^{'}(t) &= D.Y(t) \quad (\text{respectivement, } \; Y^{'}(t) = T.Y(t)) \end{aligned}$$

- Étape 6: le vecteur $Y(t)$ se calcule dans le cas où $A$ est diagonalisable de la manière suivante:

$$Y^{'}(t) = D.Y(t) \iff \begin{pmatrix} y_1^{'}(t) \\ y_2^{'}(t) \\ \vdots \\ y_n^{'}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} y_1^{'}(t) = \lambda_1 \ y_1(t) \\ y_2^{'}(t) = \lambda_2 \ y_2(t) \\ \quad \vdots \\ y_n^{'}(t) = \lambda_n \ y_n(t) \end{cases} \implies \begin{cases} y_1(t) = K_1 \ e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = K_2 \ e^{\lambda_2 t} \\ \quad \vdots \\ y_n(t) = K_n \ e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

$$\iff Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 \ e^{\lambda_1 t} \\ K_2 \ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ K_n \ e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Les équations différentielles sont du 1er ordre sans second membre.

- Étape 7: alors la solution générale du système $X(t)$ sera donnée par le produit de la matrice de passage $P$ et du vecteur $Y(t)$ comme suit: $X(t) = P.Y(t)$.

**Exemple 5.3.1: (cas d'une matrice diagonalisable)**
Soit à résoudre le système d'équations différentiels suivant

$$(S) \iff \begin{cases} x^{'}(t) = -3x(t) + y(t) + z(t) \\ y^{'}(t) = 4y(t) \\ z^{'}(t) = 2y(t) - z(t) \end{cases}$$

avec $x, y, z$ sont des fonctions réelles en $t$.

$$(S) \iff X^{'}(t) = A.X(t)$$

$$\iff \begin{pmatrix} x^{'}(t) \\ y^{'}(t) \\ z^{'}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Le but est de réduire la matrice $A$ de telle sorte qu'elle devienne diagonale.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda - 3)(-\lambda - 1)(\lambda - 4).$$

On a

- Les valeurs propres de $A$ sont $S_P(A) = \{-3, -1, 4\}$.
- Les espaces propres sont: $E(-3) =< (1,0,0) >$, $E(-1) =< (1,0,2) >$, $E(4) =< \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1\right) >$.

On note $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,0,2)$ et $v_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$. Et soit $B$ la base $B = (v_1, v_2, v_3)$.
La matrice associée à l'endomorphisme $f$ relativement à la base $B$ sera:

$$D = Mat(f, B) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage $P$ est:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $Y(t) = P^{-1}.X(t) \implies X(t) = P.Y(t) \implies X^{'}(t) = P.Y^{'}(t)$

D'où $\quad Y^{'}(t) = D.Y(t) \quad$ avec $\quad Y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} Y^{'}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{'}(t) \\ y_1^{'}(t) \\ z_1^{'}(t) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
Y^{'}(t) = D.Y(t) \quad & \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1^{'}(t) \\ y_1^{'}(t) \\ z_1^{'}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1^{'}(t) = -3x_1(t) \\ y_1^{'}(t) = -y_1(t) \\ z_1^{'}(t) = 4y_1(t) \end{cases} \\
& \Longrightarrow \begin{cases} x_1(t) = k_1 \ e^{-3t} \\ y_1(t) = k_2 \ e^{-t} \\ z_1(t) = k_3 \ e^{4t} \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \ e^{-3t} \\ k_2 \ e^{-t} \\ k_3 \ e^{4t} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

La solution générale du système dans $\mathbb{R}$ est alors

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \ e^{-3t} + k_2 \ e^{-t} + \frac{1}{2} k_3 \ e^{4t} \\ \frac{5}{2} k_3 \ e^{4t} \\ 2k_2 \ e^{-t} + k_3 \ e^{4t} \end{pmatrix}$$