MAP 433 : Introduction aux méthodes statistiques. Cours 2

7 février 2014

Aujourd'hui

1. Estimation ponctuelle et précision d'estimation

2. Echantillonnage et méthodes empiriques (2/2)
   - Estimation uniforme
   - Estimation de fonctionnelles

3. Modélisation statistique
   - Expérience statistique
   - Expériences dominées
   - Modèle de densité

Cours précédent (rappel)

- A partir de l'observation d'un n-échantillon de loi (de fonction de répartition) inconnue,

$$X_1, \ldots, X_n \sim_{\text{i.i.d.}} F,$$

estimer F.

- Fonction de répartition empirique :

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq x\}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $\widehat{F}_n(x_0) \xrightarrow{\mathbb{P}} F(x_0)$ par la loi des grands nombres.
- Précision d'estimation ?

Convergence en probabilité

- Mode de convergence « naturel » en statistique
- Rappel : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left[|X_n - X| \geq \varepsilon\right] \to 0, \quad \to \infty.$$

- Interprétation : pour tout niveau de risque $\alpha > 0$ (petit) et tout niveau de précision $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N = N(\alpha, \varepsilon)$ tel que

$$n > N \ \text{ implique } \ |X_n - X| \leq \varepsilon \ \text{ avec proba. } \geq 1 - \alpha.$$

- En pratique, on souhaite simultanément N, α et ε petits. Quantités antagonistes (à suivre...).

Vers la précision d'estimation

- On a $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\widehat{F}_n(x_0) \xrightarrow{\mathbb{P}} F(x_0)$. Avec quelle précision ?
  Problèmes de même types :
  - n information et α risque donnés $\rightarrow$ quelle précision ε ?
  - risque α et précision ε donnés $\rightarrow$ quel nombre minimal de données n nécessaires ?
  - quel risque prend-on si l'on suppose une précision ε avec n données ?
- Plusieurs approches :
  - non-asymptotique naïve
  - non-asymptotique
  - approche asymptotique (via des théorèmes limites)

Approche naïve : contrôle de la variance

Soit $\alpha > 0$ donné (petit). On veut trouver ε, le plus petit possible, de sorte que

$$\mathbb{P}\left[|\widehat{F}_n(x_0) - F(x_0)| \geq \varepsilon\right] \leq \alpha.$$

On a (Tchebychev)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[|\widehat{F}_n(x_0) - F(x_0)| \geq \varepsilon\right] &\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{Var}\left[\widehat{F}_n(x_0)\right] \\
&= \frac{F(x_0)\big(1 - F(x_0)\big)}{n\varepsilon^2} \\
&\leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \\
&\leq \alpha
\end{aligned}$$

Conduit à

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}}$$

Intervalle de confiance

Conclusion : pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}\left[|\widehat{F}_n(x_0) - F(x_0)| \geq \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right] \leq \alpha.$$

Terminologie

L'intervalle

$$\boxed{\mathcal{I}_{n,\alpha} = \left[\widehat{F}_n(x_0) \pm \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right]}$$

est un intervalle de confiance pour $F(x_0)$ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Précision catastrophique !

- Si $\alpha = 5\%$ et $n = 100$, précision $\varepsilon = 0.22$, soit une barre d'erreur de taille 0.44, alors que $0 \leq F(x_0) \leq 1$.
- Autres exemples : $\varepsilon_{\alpha=1/1000, n=100} = 1.58$, $\varepsilon_{\alpha=1/100, n=100} = 0.5$. aucune précision d'estimation !

- D'où vient le défaut de cette précision ?
  - Mauvais choix de l'estimateur ? ($\rightarrow$ on verra que non).
  - Mauvaise estimation de l'erreur ?

Inégalité de Hoeffding

Proposition

$Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p. Alors

$$\mathbb{P}\left[\left|\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - p\right| \geq t\right] \leq 2\exp(-2nt^2).$$

Application : on fait $Y_i = 1_{\{x_I \leq x_0\}}$ et $p = F(x_0)$. On en déduit

$$\mathbb{P}\left[\left|\widehat{F}_n(x_0) - F(x_0)\right| \geq \varepsilon\right] \leq 2\exp(-2n\varepsilon^2).$$

On résout en ε :

$$2\exp(-2n\varepsilon^2) = \alpha,$$

soit

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{2n}\log\frac{2}{\alpha}}}.$$

Comparaison Tchebychev vs. Hoeffding

Nouvel intervalle de confiance

$$\boxed{\mathcal{I}_{n,\alpha}^{\texttt{hoeffding}} = \left[\widehat{F}_n(x_0) \pm \sqrt{\frac{1}{2n}\log\frac{2}{\alpha}}\right]},$$

à comparer avec

$$\mathcal{I}_{n,\alpha}^{\texttt{tchebychev}} = \left[\widehat{F}_n(x_0) \pm \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right].$$

- Même ordre de grandeur en n.
- Gain significatif dans la limite $\alpha \to 0$. La « prise de risque » devient marginale par rapport au nombre d'observations.
- Optimalité d'une telle approche ?

L'approche asymptotique

- Vers une notion d'optimalité : on se place dans la limite $n \to \infty$ (l'information « explose »). On évalue

$$\mathbb{P}\left[\left|\widehat{F}_n(x_0) - F(x_0)\right| \geq \varepsilon\right], n \to \infty$$

pour une normalisation $\varepsilon = \varepsilon_n$ appropriée.

- Outil : Théorème central-limite.

Rappel : théorème central-limite

- TCL :« vitesse » dans la loi des grands nombres.
- Si $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d., $\mu = \mathbb{E}\left[Y_i\right]$, $0 < \sigma^2 = \mathrm{Var}[Y_i] < +\infty$, alors
$$\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \mu\Big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$
- Le mode de convergence est la convergence en loi. Ne peut pas avoir lieu en probabilité.
- $X_n \xrightarrow{d} X$ signifie que
$$\mathbb{P}\left[X_n \leq x\right] \to \mathbb{P}\left[X \leq x\right]$$
en tout point x où la fonction de répartition de X est continue (les lois de X_n se « rapprochent » de la loi de X).

Interprétation et application

- Interprétation du TCL :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\xi^{(n)}, \quad \xi^{(n)} \overset{d}{\approx} \mathcal{N}(0,1).$$

- Application : $Y_i = 1_{\{X_i \leq x_0\}}$, $\mu = F(x_0)$, $\sigma(F) = F(x_0)^{1/2}\big(1 - F(x_0)\big)^{1/2}$.
  On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\left|\widehat{F}_n(x_0) - F(x_0)\right| \geq \varepsilon_n\right] &= \mathbb{P}\left[\left|\xi^{(n)}\right| \geq \frac{\sqrt{n}\,\varepsilon_n}{\sigma(F)}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\left|\xi^{(n)}\right| \geq \frac{\varepsilon_0}{\sigma(F)}\right]\end{aligned}$$

pour la calibration $\varepsilon_n = \varepsilon_0/\sqrt{n}$ (ε_0 reste à choisir).

TCL et intervalle de confiance (suite)

Il vient

$$\mathbb{P}\left[\left|\xi^{(n)}\right| \geq \frac{\varepsilon_0}{\sigma(F)}\right] \to \int_{|x|\geq \varepsilon_0/\sigma(F)} e^{-x^2/2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$
$$= 2\Big(1 - \Phi\big(\varepsilon_0/\sigma(F)\big)\Big)$$
$$\leq \alpha,$$

avec $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$, ce qui donne

$$\boxed{\varepsilon_0 = \sigma(F)\Phi^{-1}\big(1-\alpha/2\big).}$$

TCL et intervalle de confiance : (suite)

- On a montré

$$\mathbb{P}\left[\left|\widehat{F}_n(x_0) - F(x_0)\right| \geq \frac{\sigma(F)}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\alpha/2)\right] \to \alpha.$$

- Attention ! ceci ne fournit pas un intervalle de confiance : $\sigma(F) = F(x_0)^{1/2}\big(1 - F(x_0)\big)^{1/2}$ est inconnu !
- Solution : remplacer $\sigma(F)$ par $\widehat{F}_n(x_0)^{1/2}\big(1 - \widehat{F}_n(x_0)\big)^{1/2}$ observable.

TCL et intervalle de confiance : conclusion

Proposition

Pour tout $\alpha \in (0,1)$,

$$\mathcal{I}_{n,\alpha}^{\mathtt{asymp}} = \left[\widehat{F}_n(x_0) \pm \frac{\widehat{F}_n(x_0)^{1/2}\big(1-\widehat{F}_n(x_0)\big)^{1/2}}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1-\alpha/2) \right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique pour $F(x_0)$ *au niveau de confiance* $1-\alpha$ *:*

$$\mathbb{P}\left[F(x_0) \in \mathcal{I}_{n,\alpha}^{\mathtt{asymp}}\right] \to 1-\alpha.$$

Le passage $\sigma(F) \longrightarrow \widehat{F}_n(x_0)^{1/2}\big(1-\widehat{F}_n(x_0)\big)^{1/2}$ est licite via le lemme de Slutsky.

Lemme de Slutsky

- Le vecteur $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y)$ si
$$\mathbb{E}\left[\varphi(X_n, Y_n)\right] \to \mathbb{E}\left[\varphi(X, Y)\right],$$
pour φ continue bornée.
- Attention ! Si $X_n \xrightarrow{d} X$ et $Y_n \xrightarrow{d} Y$, on n'a pas en général $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y)$.
- Mais (**lemme de Slutsky**) si $X_n \xrightarrow{d} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ (constante), alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, c)$.
- Par suite, sous les hypothèses du lemme, pour toute fonction continue g, on a $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} g(X, c)$.

Observation finale

Comparaison des longueurs des 3 intervalles de confiance :

- Tchebychev (non-asymptotique) $\frac{2}{\sqrt{n}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$
- Hoeffding (non-asymptotique) $\frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{2}{\alpha}}$
- TCL (asymptotique) $\frac{2}{\sqrt{n}}\widehat{F}_n(x_0)^{1/2}\big(1-\widehat{F}_n(x_0)\big)^{1/2}\Phi^{-1}(1-\alpha/2)$.
- La longueur la plus petite est (sans surprise !) celle fournie par le TCL. Mais Hoeffding comparable au TCL en n et α (dans la limite $\alpha \to 0$).

Estimation uniforme

- On ≪ sait ≫ estimer $F(x_0)$, pour un x_0 donné. Qu'en est-il de l'estimation globale de F :

$$\big(F(x), x \in \mathbb{R}\big)?$$

- 3 résultats pour passer de l'estimation en un point à l'estimation globale :
  - Glivenko-Cantelli (convergence uniforme)
  - Kolmogorov-Smirnov (vitesse de convergence, asymptotique)
  - Inégalité de DKW (vitesse de convergence, non-asymptotique)

Glivenko-Cantelli, Kolmogorov-Smirnov

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi F, $\widehat{F}_n$ leur fonction de répartition empirique.

Proposition

- *(Glivenko-Cantelli)*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \widehat{F}_n(x) - F(x) \right| \stackrel{\text{p.s.}}{\to} 0, \quad \textit{quand } n \to \infty.$$

- *(Kolmogorov-Smirnov) Si F est continue,*

$$\sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \widehat{F}_n(x) - F(x) \right| \stackrel{d}{\to} \mathbb{B}, \quad \textit{quand } n \to \infty.$$

$\mathbb{B}$ *v.a. dont la loi est connue et ne dépend pas de* F.

Inégalité de DKW

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi F continue, $\widehat{F}_n$ leur fonction de répartition empirique.

Proposition (Inégalité de Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz)

Pour tout $\varepsilon > 0$.

$$\mathbb{P}\Big[\sup_{x\in\mathbb{R}} \big|\widehat{F}_n(x) - F(x)\big| \geq \varepsilon\Big] \leq 2\exp\big(-2n\varepsilon^2\big).$$

- Résultat difficile (théorie des processus empiriques).
- Permet de construire des régions de confiance avec des résultats similaires au cadre ponctuel :

$$\mathbb{P}\left[\forall x \in \mathbb{R}, F(x) \in \Big[\widehat{F}_n(x) \pm \sqrt{\tfrac{1}{2n}\log\tfrac{2}{\alpha}}\Big]\right] \geq 1-\alpha.$$

Estimation de fonctionnelles

- Objectif : estimation d'une caractéristique scalaire de la loi inconnue $F \equiv$ estimation d'une fonctionnelle $T(F)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Exemples
  - Déjà vu : valeur en un point $T(F) = F(x_0)$
  - Fonctionnelle régulière :

$$T(F) = h\left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x)\right),$$

  où $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont régulières
- Principe (**méthode de substitution**) : si $F \rightsquigarrow T(F)$ est « régulière », un estimateur « naturel » est $T(\widehat{F}_n)$ (estimateur par *plug-in*).

Estimation de fonctionnelles régulières

- Cas où $T(F) = h\big(\int_{\mathbb{R}} g(x)dF(x)\big)$
- Formule de calcul :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} g(x)d\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i).}$$

Traduction : une variable aléatoire de loi $\widehat{F}_n$ prend les valeurs X_i avec probabilité $1/n$.

- Estimateur par substitution ou *plug-in* de $T(F)$:

$$\boxed{T(\widehat{F}_n) = h\Big(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\Big)}$$

Exemples

- Moyenne : $T(F) = m(F) = \int_{\mathbb{R}} x dF(x)$.

$$T(\widehat{F}_n) = m(\widehat{F}_n) = \int_{\mathbb{R}} x d\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}_n.$$

- Variance :

$$\begin{aligned} T(F) = \sigma^2(F) &= \int_{\mathbb{R}} \big(x - m(F)\big)^2 dF(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 dF(x) - \Big(\int_{\mathbb{R}} x dF(x)\Big)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\widehat{F}_n) = \sigma^2(\widehat{F}_n) &= \int_{\mathbb{R}} \big(x - m(\widehat{F}_n)\big)^2 d\widehat{F}_n(x) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\bar{X}_n)^2. \end{aligned}$$

Exemples

- Asymétrie (*skewness*) :

$$T(F) = \alpha(F) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \big(x - m(F)\big)^3 dF(x)}{\sigma^2(F)^{3/2}} = \cdots.$$

- Aplatissement (*kurtosis*) :

$$T(F) = \kappa(F) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \big(x - m(F)\big)^4 dF(x)}{\sigma^2(F)^2} = \cdots.$$

Exemples de fonctionnelles : quantiles

- Quantiles :

F est continue et strictement croissante $\Longrightarrow$ le **quantile d'ordre** p, $0 < p < 1$, de la loi F est défini comme solution de

$$F(q_p) = p \qquad (\ q_p = F^{-1}(p)\ ).$$

Cas général (F n'est pas strictement $\uparrow$ ou n'est pas continue) :

$$q_p(F) = \tfrac{1}{2}\big(\inf\{x,\ F(x) > p\} + \sup\{x,\ F(x) < p\}\big).$$

La **médiane** :

$$\mathrm{med}(F) = q_{1/2}(F).$$

Les **quartiles** $= \{\mathrm{med}(F), q_{1/4}(F), q_{3/4}(F)\}$.

Quantiles empiriques

Quantile ("théorique") d'ordre p :

$$T(F) = q_p(F) = \tfrac{1}{2}\Big(\inf\{x,\ F(x) > p\} + \sup\{x,\ F(x) < p\}\Big).$$

- Avantage : les quantiles sont bien définis **pour toute loi** F.

Quantile empirique d'ordre p :

$$T(\widehat{F}_n) = \widehat{q}_{n,p} = \tfrac{1}{2}\Big(\inf\{x,\ \widehat{F}_n(x) > p\} + \sup\{x,\ \widehat{F}_n(x) < p\}\Big).$$

Quantiles empiriques

Expression explicite du quantile empirique d'ordre p :

$$\widehat{q}_{n,p} = \begin{cases} X_{(k)} & \text{si} \quad p \in \big((k-1)/n, k/n\big) \\ \frac{1}{2}\big(X_{(k)} + X_{(k+1)}\big) & \text{si} \quad p = k/n \end{cases}$$

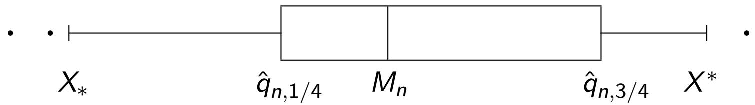
pour $k = 1, \ldots, n$, où les $X_{(i)}$ sont **les statistiques d'ordre** associées à l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$:

$$X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(i)} \leq \cdots \leq X_{(n)}.$$

En particulier, la médiane empirique :

$$\boxed{M_n = \mathrm{med}(\widehat{F}_n) = \begin{cases} X_{((n+1)/2)} & \text{pour} \quad n \text{ impair} \\ \frac{1}{2}\big(X_{(n/2)} + X_{(n/2+1)}\big) & \text{pour} \quad n \text{ pair} \end{cases}}$$

Le boxplot

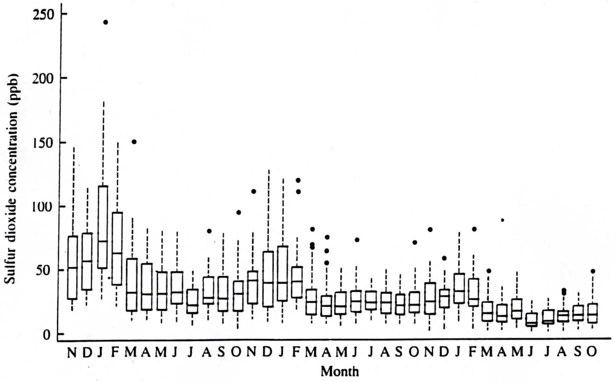


$$X_* = \min\{X_i : |X_i - \hat{q}_{n,1/4}| \leq 1,5\mathcal{I}_n\},$$
$$X^* = \max\{X_i : |X_i - \hat{q}_{n,3/4}| \leq 1,5\mathcal{I}_n\}.$$

Intervalle interquartile :

$$\mathcal{I}_n = \hat{q}_{n,3/4} - \hat{q}_{n,1/4}.$$

Exemple d'application du boxplot



Boxplots of daily maximum concentrations of sulfur dioxide.

Performance de l'estimateur par substitution

- Convergence si $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, h continue et $\mathbb{E}\,|g(X)| < \infty$, alors $T(\widehat{F}_n) \xrightarrow{\text{p.s.}} T(F)$ (loi forte des grands nombres).
- Vitesse de convergence, Etape 1. TCL :

$$\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) - \int_{\mathbb{R}} g(x)dF(x)\Big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0, \mathrm{Var}\big[g(X)\big]\big),$$

où X est une v.a. de loi F et

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\big[g(X)\big] &= \mathbb{E}\left[g(X)^2\right] - \big(\mathbb{E}[g(X)]\big)^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x)^2 dF(x) - \Big(\int_{\mathbb{R}} g(x)dF(x)\Big)^2. \end{aligned}$$

Vitesse de convergence (suite)

- Etape 2. On a $\sqrt{n}(Z_n - c_1) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, c_2)$. Comment transférer ce résultat à $\sqrt{n}(h(Z_n) - h(c_1)) \xrightarrow{d}$?
- Méthode « delta » : si h continûment différentiable

$$\sqrt{n}\big(h(Z_n) - h(c_1)\big) = \sqrt{n}(Z_n - c_1)h'(\eta_n), \quad \eta_n \in \big[Z_n, c_1\big].$$

On a $\sqrt{n}(Z_n - c_1) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, c_2)$ et $h'(\eta_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h'(c_1)$.
Lemme de Slutsky :

$$\sqrt{n}(Z_n - c_1)h'(\eta_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, c_2)h'(c_1).$$

Finalement

$$\boxed{\sqrt{n}\big(h(Z_n) - h(c_1)\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0, c_2[h'(c_1)]^2\big)}$$

Conclusion

Proposition

Si $\mathbb{E}[g(X)^2] < +\infty$ *et* h *continûment différentiable, alors*

$$\sqrt{n}\big(T(\widehat{F}_n) - T(F)\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0, v(F)\big),$$

où $v(F) = h'\big(\mathbb{E}\left[g(X)\right]\big)^2 \mathrm{Var}\big[g(X)\big]$.

Pour construire un intervalle de confiance, il faut encore remplacer $v(F)$ par $v(\widehat{F}_n)$. On montre que $v(\widehat{F}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} v(F)$ et, via le lemme de Slutsky,

$$\sqrt{n}\frac{T(\widehat{F}_n) - T(F)}{v(\widehat{F}_n)^{1/2}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

On en déduit un intervalle de confiance asymptotique comme précédemment.

Le cas de la dimension $d > 1$

- Il s'agit de fonctionnelles de la forme

$$T(F) = h\left(\int_{\mathbb{R}} g_1(x)dF(x), \ldots, \int_{\mathbb{R}} g_k(x)dF(x)\right)$$

  où $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ continûment différentiable.

- Exemple : le coefficient d'asymétrie

$$T(F) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \big(x - m(F)\big)^3 dF(x)}{\sigma^{3/2}(F)},$$

  $m(F) =$ moyenne de F, $\sigma^2(F) =$ variance de F.

- Outil : Version multidimensionnelle du TCL et de la « méthode delta ».

Méthode « delta » multidimensionnelle

- TCL multidimensionnel : $(\mathbf{X}_n)_{n\geq 1}$ vecteurs aléatoires dans $\mathbb{R}^k$, i.i.d., de moyenne $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}[\mathbf{X}_1]$ et de matrice de variance-covariance $\Sigma = \mathbb{E}\left[(\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu})^T\right]$ bien définie. Alors $\bar{\mathbf{X}}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i$ vérifie :

$$\sqrt{n}(\overline{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

- Méthode « delta » multidimensionnelle : Si, de plus, $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ continûment différentiable, alors

$$\sqrt{n}\big(h(\overline{\mathbf{X}}_n) - h(\boldsymbol{\mu})\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \nabla h(\boldsymbol{\mu})\Sigma\nabla h(\boldsymbol{\mu})^T\right).$$

Application : coefficient d'asymétrie

- Coefficient d'asymétrie : on a

$$T(F) = h\Big(\int_{\mathbb{R}} x dF(x), \int_{\mathbb{R}} x^2 dF(x), \int_{\mathbb{R}} x^3 dF(x)\Big)$$

  avec

$$h(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\gamma - 3\alpha\beta + 2\alpha^3}{(\beta-\alpha^2)^{3/2}}.$$

$$T(\widehat{F}_n) = h\Big(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2, \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^3\Big).$$

- On applique le TCL multidimensionnel avec $\mathbf{X}_i = (X_i, X_i^2, X_i^3)^T$ et $\boldsymbol{\mu} = \big(\int_{\mathbb{R}} x dF(x), \int_{\mathbb{R}} x^2 dF(x), \int_{\mathbb{R}} x^3 dF(x)\big)^T$, puis la méthode « delta » avec h.

Limites de l'approche empirique

L'estimation de $T(F)$ par $T(\widehat{F}_n)$ n'est pas toujours possible :

- La fonctionnelle $F \rightsquigarrow T(F)$ n'est pas « régulière »,
- La paramétrisation $F \rightsquigarrow T(F)$ ne donne pas lieu à une forme analytique simple. $\rightarrow$ autres approches.

Exemple. Hypothèse : F admet une densité f par rapport à le mesure de Lebesgue, continue ($=$ pp à une fonction continue f).

$$T(F) = f(x_0),\ \ x_0 \in \mathbb{R}\ \ \text{(donné)}.$$

On ne peut pas prendre comme estimateur $\widehat{F}_n'(x_0)$ car $\widehat{F}_n$ n'est pas différentiable (constante par morceaux...)

Limites de l'approche empirique

L'estimation de $T(F)$ par $T(\widehat{F}_n)$ n'est pas toujours souhaitable :

- Souvent on dispose d'information a priori supplémentaire : F appartient à une sous-classe particulière de distributions, et il y a des choix plus judicieux que l'estimateur par plug-in.

Conclusion

- L'approche empirique, basée sur $\widehat{F}_n$ permet d'estimer une distribution inconnue F ou une fonctionnelle $T(F) \in \mathbb{R}$ à partir d'un n-échantillon, mais
  - reste très générale, pas toujours adaptée.
  - restreinte à la situation d'un n-échantillon.
- Formalisation de la notion d'expérience statistique
  - incorporation d'information de modélisation supplémentaire.
  - construction de méthodes d'estimation – de décision – systématiques.
  - comparaison et optimalité des méthodes.

Expérience statistique

Consiste à identifier :

- Des observations

$$\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \ldots, \mathtt{x}_n$$

  considérées comme des réalisations de variables aléatoires $Z = (X_1, \ldots, X_n)$ de loi $\mathbb{P}^Z$.
- Une famille de lois

$$\{\mathbb{P}_\vartheta,\ \vartheta \in \Theta\}.$$

- Une problématique : retrouver le paramètre ϑ tel que $\mathbb{P}^Z = \mathbb{P}_\vartheta$ (estimation) ou bien prendre une décision sur une propriété relative à ϑ (test).

Expérience statistique

- Approche générale empirique :
  - $\vartheta = F$, Θ est l'ensemble de toutes les lois (s'il s'agit de l'estimation de F) ;
  - $\vartheta = F$, Θ est l'ensemble de toutes les lois vérifiant une hypothèse très générale, par exemple, la bornitude d'un moment (s'il s'agit de l'estimation de $T(F)$).
- Approche paramétrique : on suppose que F appartient à une famille de lois connue indexée par un paramètre ϑ de dimension finie : $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$.
  - Exemple : $\Theta = \mathbb{R}$,

$$X_i = \vartheta + \xi_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

ξ_i v.a. i.i.d. de densité connue f sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{E}(X_i) = \vartheta$.
Question : en utilisant cette information supplémentaire, peut-on construire un estimateur plus performant que l'estimateur $\bar{X}_n$ basé sur l'approche empirique ?

Expérience statistique

- En écrivant

$$X_i = \vartheta + \xi_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

ξ_i v.a. i.i.d. de densité connue f, nous précisons la forme de la loi $\mathbb{P}_\vartheta$ de $(X_1, \ldots, X_n)$:

$$\mathbb{P}_\vartheta\left[A\right] = \int_A \left(\prod_{i=1}^n f(x_i - \vartheta)\right) dx_1 \ldots dx_n,$$

pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Expérience statistique

Définition

Une expérience (un modèle) statistique $\mathcal{E}$ est le triplet

$$\mathcal{E} = \left(\mathfrak{Z}, \mathcal{Z}, \left\{\mathbb{P}_\vartheta, \vartheta \in \Theta\right\}\right),$$

avec

- $(\mathfrak{Z}, \mathcal{Z})$ *espace mesurable (souvent $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$),*
- $\{\mathbb{P}_\vartheta, \vartheta \in \Theta\}$ *famille de probabilités définies simultanément sur le même espace $(\mathfrak{Z}, \mathcal{Z})$,*
- ϑ *est le paramètre inconnu, et Θ est l'ensemble des paramètres connu.*

Experience engendrée par $(X_1, \ldots, X_n)$

- Traitement sur un exemple : on observe

$$Z = (X_1, \ldots, X_n), \qquad X_i = \vartheta + \xi_i,$$

ξ_i v.a. i.i.d. de densité connue f.

- La famille de lois $\{\mathbb{P}_\vartheta^n, \vartheta \in \Theta = \mathbb{R}\}$ est définie sur $\mathfrak{Z} = \mathbb{R}^n$ par

$$\mathbb{P}_\vartheta^n\left[A\right] = \int_A \left(\prod_{i=1}^n f(x_i - \vartheta)\right) dx_1 \ldots dx_n,$$

pour $A \in \mathcal{Z} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (et $\mathbb{P}^Z$ est l'une des $\mathbb{P}_\vartheta^n$).

- Expérience engendrée par l'observation Z :

$$\mathcal{E}^n = \left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \left\{\mathbb{P}_\vartheta^n, \, \vartheta \in \Theta\right\}\right).$$

Expérience (modèle) paramétrique, non-paramétrique

- Si Θ peut être « pris » comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$: expérience (=modèle) paramétrique.
- Sinon (par exemple si le paramètre ϑ est un élément d'un espace fonctionnel) : expérience (=modèle) non-paramétrique.

Expériences dominées

- On fait une hypothèse minimale de « complexité » sur le modèle statistique. But : ramener l'étude de la famille

$$\{\mathbb{P}_\vartheta,\ \vartheta \in \Theta\}$$

à l'étude d'une famille de fonctions

$$\left\{z \in \mathfrak{Z} \rightsquigarrow f(\vartheta, z) \in \mathbb{R}_+,\ \vartheta \in \Theta\right\}.$$

- Via la notion de domination. Si μ, ν sont deux mesures σ-finies sur $\mathfrak{Z}$, alors μ domine ν (notation $\nu \ll \mu$) si

$$\mu\big[A\big] = 0 \Rightarrow \nu\big[A\big] = 0.$$

Théorème de Radon-Nikodym

Théorème

Si $\nu \ll \mu$, il existe une fonction positive

$$z \rightsquigarrow p(z) \stackrel{notation}{=} \frac{d\nu}{d\mu}(z),$$

définie $\mu-$p.p., $\mu-$ intégrable, telle que

$$\nu\big[A\big] = \int_A p(z)\mu(dz) = \int_A \tfrac{d\nu}{d\mu}(z)\mu(dz), \ \ A \in \mathcal{Z}.$$

Expérience dominée

Définition

Une expérience statistique $\mathcal{E} = \big(\mathfrak{Z}, \mathcal{Z}, \{\,\mathbb{P}_\vartheta, \vartheta \in \Theta\}\big)$ *est* *dominée par la mesure* σ*-finie* μ *définie sur* $\mathfrak{Z}$ *si*

$$\forall \vartheta \in \Theta : \mathbb{P}_\vartheta \ll \mu.$$

On appelle densités de la famille $\{\mathbb{P}_\vartheta, \vartheta \in \Theta\}$ la famille de fonctions (définies $\mu-$ p.p.)

$$z \rightsquigarrow \frac{d\,\mathbb{P}_\vartheta}{d\mu}(z),\ z \in \mathfrak{Z},\ \vartheta \in \Theta.$$

Densité, régression

Deux classes d'expériences statistiques dominées fondamentales :

- Le modèle de densité (Cours 3)
- Le modèle de régression (Cours 4)

Modèle de densité (paramétrique)

- On observe un n-échantillon de v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$.
- La loi des X_i appartient à $\{\mathbb{P}_\vartheta,\ \vartheta \in \Theta\}$, famille de probabilités sur $\mathbb{R}$, dominée par une mesure (σ-finie) $\mu(dx)$ sur $\mathbb{R}$.
- La loi de $(X_1, \ldots, X_n)$ s'écrit

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}^n_\vartheta(dx_1 \cdots dx_n) &= \mathbb{P}_\vartheta(dx_1) \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_\vartheta(dx_n) \\
&\ll \mu(dx_1) \otimes \cdots \otimes \mu(dx_n) \\
&\overset{\text{notation}}{=} \mu^n(dx_1 \cdots dx_n)
\end{aligned}
$$

Modèle de densité (paramétrique)

- Densité du modèle : on part de

$$f(\vartheta, x) = \frac{d\,\mathbb{P}_\vartheta}{d\mu}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

et

$$\frac{d\,\mathbb{P}_\vartheta^n}{d\mu^n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(\vartheta, x_i), \quad x_1, \ldots, X_n \in \mathbb{R}\,.$$

- L'expérience statistique engendrée par $(X_1, \ldots, X_n)$ s'écrit :

$$\mathcal{E}^n = \Big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \big\{\mathbb{P}_\vartheta^n, \vartheta \in \Theta\big\}\Big), \quad \Theta \subset \mathbb{R}^d.$$

Exemple 1 : modèle de densité gaussienne univariée

- $X_i \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, avec

$$\vartheta = (m, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}.$$

$$\mathbb{P}_\vartheta(dx) = f(\vartheta, x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\Big) dx$$
$$\ll \mu(dx) = dx.$$

- Puis

$$\frac{d\,\mathbb{P}_\vartheta^n}{d\mu^n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(\vartheta, x_i)$$
$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2\Big),$$

avec $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 : modèle de Bernoulli

- $X_i \sim \text{Bernoulli}(\vartheta)$, avec $\vartheta \in \Theta = [0,1]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\vartheta(dx) &= (1-\vartheta)\,\delta_0(dx) + \vartheta\,\delta_1(dx)\\ &\ll \mu(dx) = \delta_0(dx)+\delta_1(dx) \ \ \text{(mesure de comptage)}.\end{aligned}$$

- Puis

$$\boxed{\frac{d\,\mathbb{P}_\vartheta}{d\mu}(x) = (1-\vartheta)\,1_{\{x=0\}} + \vartheta\,1_{\{x=1\}} = \vartheta^x(1-\vartheta)^{1-x}}$$

avec $x \in \{0,1\}$ (et 0 sinon), et

$$\frac{d\,\mathbb{P}_\vartheta^n}{d\mu^n}(x_1\cdots x_n) = \prod_{i=1}^n \vartheta^{x_i}(1-\vartheta)^{1-x_i},$$

avec $x_i \in \{0,1\}$ (et 0 sinon).

Exemple 3 : temps de panne « arrêtés »

- On observe $X_1, \ldots, X_n$, où $X_i = Y_i \wedge T$, avec Y_i lois exponentielles de paramètre ϑ et T temps fixe (censure).
- Cas 1 : $T = \infty$ (pas de censure). Alors $\vartheta \in \Theta = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ et

$$\mathbb{P}_\vartheta(dx) = \vartheta \exp(-\vartheta x) 1_{\{x \geq 0\}} dx \ll \mu(dx) = dx$$

et

$$\frac{d\,\mathbb{P}_\vartheta{}^n}{d\mu^n}(x_1, \ldots, x_n) = \vartheta^n \exp\Big(- \vartheta \sum_{i=1}^n x_i \Big),$$

avec $x_i \in \mathbb{R}_+$ (et 0 sinon).
- Cas 2 : Comment s'écrit le modèle dans la cas où $T < \infty$ (présence de censure) ? Comment choisir μ ?