

MAP 433 : Introduction aux méthodes statistiques. Cours 8

Marc Hoffmann

4 avril 2014

MAP 433 :
Introduction
aux méthodes
statistiques.
Cours 8

Marc
Hoffmann

Notion de test
et d'erreur de
test

Construction
d'un test :
hypotheses
générales

Tests
asymptotiques

Tests
d'adéquation

Aujourd'hui (et la semaine prochaine...)

- 1 Notion de test et d'erreur de test
 - Hypothèse simple contre alternative simple
 - Lemme de Neyman-Pearson
- 2 Construction d'un test : hypothèses générales
 - Retour sur un exemple
 - Principe de construction
- 3 Tests asymptotiques
- 4 Tests d'adéquation
 - Tests de Kolmogorov-Smirnov
 - Tests du χ^2

MAP 433 :
Introduction
aux méthodes
statistiques.
Cours 8

Marc
Hoffmann

Notion de test
et d'erreur de
test

Construction
d'un test :
hypothèses
générales

Tests
asymptotiques

Tests
d'adéquation

Exemple introductif

- On observe 10 lancers d'une pièce de monnaie et on obtient le résultat suivant :

$$(P, P, F, F, P, F, P, P, F, P).$$

La pièce est-elle équilibrée ?

- Répondre à cette question revient à **construire une procédure de décision** :

$$\varphi = \varphi(P, P, F, F, P, F, P, P, F, P)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{on accepte l'hypothèse « la pièce est équilibrée »} \\ 1 & \text{on rejette l'hypothèse « la pièce est équilibrée »} \end{cases}$$

- On associe l'expérience statistique (par exemple)

$$\mathcal{E}^{10} = (\{0, 1\}^{10}, \text{parties de}(\{0, 1\}^{10}), \{\mathbb{P}_{\vartheta}^{10}, \vartheta \in [0, 1]\}),$$

avec $(P = 0, F = 1)$

$$\mathbb{P}_{\vartheta}^{10} = (\vartheta \delta_0(dx) + (1 - \vartheta) \delta_1(dx))^{\otimes 10}.$$

- Hypothèse nulle : « la pièce est équilibrée »

$$H_0 : \vartheta = \frac{1}{2}$$

- Hypothèse alternative : « la pièce est truquée »

$$H_1 : \vartheta \neq \frac{1}{2}$$

Résolution (cont.)

- On note Z l'observation.
- On **construit** une **règle de décision simple** :

$$\varphi = 1_{\{Z \in \mathcal{R}\}} = \begin{cases} 0 & \text{on accepte l'hypothèse} \\ 1 & \text{on rejette l'hypothèse.} \end{cases}$$

- $\mathcal{R} \subset \mathfrak{Z}$ (espace des observables) : **zone de rejet** ou **région critique**.
- Exemple¹

$$\mathcal{R} = \{|\hat{\vartheta}(Z) - \tfrac{1}{2}| > t_0\}, \quad \hat{\vartheta}(Z) = \hat{\vartheta}_n^{\text{mv}} \left(\stackrel{\text{exemple}}{=} 0, 6 \right)$$

où t_0 est un seuil à choisir... **Comment ?**

1. léger abus de notation...

Erreur de décision

- Lorsque l'on prend la décision φ , on peut se tromper de deux manières :

Rejeter H_0 ($\varphi = 1$) alors que $\vartheta = \frac{1}{2}$

ou encore

Accepter H_0 ($\varphi = 0$) alors que $\vartheta \neq \frac{1}{2}$.

- Erreur de première espèce (=rejeter à tort)

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}^{10} [\varphi = 1]$$

- Erreur de seconde espèce (=accepter à tort)

$$(\mathbb{P}_{\vartheta}^{10} [\varphi = 0], \vartheta \neq \frac{1}{2}).$$

Conclusion provisoire

- Un « bon test » φ doit garantir **simultanément** des erreurs de première et seconde espèce **petites**.
- **Un test optimal existe-t-il ?**
- Si **non**, comment aborder la notion d'optimalité et comment construire un test optimal ?

MAP 433 :
Introduction
aux méthodes
statistiques.
Cours 8

Marc
Hoffmann

Notion de test
et d'erreur de
test

Hypothèse
simple contre
alternative
simple
Lemme de
Neyman-Pearson

Construction
d'un test :
hypothèses
générales

Tests
asymptotiques

Tests
d'adéquation

Définition formelle

- Situation : $\mathcal{E} = (\mathcal{Z}, \mathfrak{Z}, \{\mathbb{P}_\vartheta, \vartheta \in \Theta\})$ engendrée par l'observation Z .
- **Hypothèse nulle et alternative** : $\Theta_0 \subset \Theta$ et $\Theta_1 \subset \Theta$ t.q.

$$\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset.$$

Définition (Test simple)

Un test (simple) de l'hypothèse nulle $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ contre l'alternative $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$ est une statistique $\varphi = \varphi(Z) \in \{0, 1\}$.
(Fonction d') **erreur de première espèce** :

$$\vartheta \in \Theta_0 \rightsquigarrow \mathbb{P}_\vartheta [\varphi = 1]$$

(Fonction d') **erreur de seconde espèce**

$$\vartheta \in \Theta_1 \rightsquigarrow \mathbb{P}_\vartheta [\varphi = 0] = 1 - \text{puissance}_\varphi(\vartheta).$$

Hypothèse simple contre alternative simple

- Cas où $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$ avec $\vartheta_0 \neq \vartheta_1$.
- Existe-t-il un test φ^* **optimal**, au sens où : $\forall \varphi$ test simple, on a **simultanément**

$$\mathbb{P}_{\vartheta_0} [\varphi^* = 1] \leq \mathbb{P}_{\vartheta_0} [\varphi = 1]$$

et

$$\mathbb{P}_{\vartheta_1} [\varphi^* = 0] \leq \mathbb{P}_{\vartheta_1} [\varphi = 0] \quad ?$$

- Si \mathbb{P}_{ϑ_0} et \mathbb{P}_{ϑ_1} ne sont pas **étrangères** (cf. Cours 6) un tel test φ^* **ne peut pas exister**.

MAP 433 :
Introduction
aux méthodes
statistiques.
Cours 8

Marc
Hoffmann

Notion de test
et d'erreur de
test

Hypothèse
simple contre
alternative
simple

Lemme de
Neyman-Pearson

Construction
d'un test :
hypothèses
générales

Tests
asymptotiques

Tests
d'adéquation

Absence d'optimalité stricte

- **Equivalence** tests simples \iff estimateurs $\hat{\vartheta}$ de ϑ **via la représentation** :

$$\hat{\vartheta} = \vartheta_0 1_{\mathcal{R}^c} + \vartheta_1 1_{\mathcal{R}} \iff \varphi = 1_{\mathcal{R}}.$$

- **Fonction de risque**

$$\mathcal{P}(\varphi, \vartheta) = \mathbb{E}_{\vartheta} [1_{\hat{\vartheta} \neq \vartheta}], \quad \vartheta = \vartheta_0, \vartheta_1.$$

- La fonction de perte $\ell(\hat{\vartheta}, \vartheta) = 1_{\hat{\vartheta} \neq \vartheta}$ joue le même rôle que la perte quadratique $(\hat{\vartheta} - \vartheta)^2$ dans le Cours 6.
- Test optimal $\varphi^* \iff$ estimateur optimal ϑ^* pour \mathcal{P} .
- **Comme pour le cas du risque quadratique**, dès que \mathbb{P}_{ϑ_0} et \mathbb{P}_{ϑ_1} ne sont pas étrangères, un estimateur optimal **n'existe pas** (cf. Cours 6).

MAP 433 :
Introduction
aux méthodes
statistiques.
Cours 8

Marc
Hoffmann

Notion de test
et d'erreur de
test

Hypothèse
simple contre
alternative
simple
Lemme de
Neyman-Pearson

Construction
d'un test :
hypothèses
générales

Tests
asymptotiques

Tests
d'adéquation

Riposte : principe de Neyman

- On « **disymétrise** » les hypothèses H_0 et H_1 : H_0 est « plus importante » que H_1 dans le sens suivant : on **impose** une **erreur de première espèce prescrite**.

Définition

Pour $\alpha \in [0, 1]$, un test $\varphi = \varphi_\alpha$ de l'hypothèse nulle $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ contre une alternative H_1 est de niveau α si

$$\sup_{\vartheta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\vartheta [\varphi_\alpha = 1] \leq \alpha.$$

- Un test de niveau α ne dit **rien** sur l'erreur de seconde espèce (comportement sur l'alternative).

Principe de Neyman (cont.)

- Choix de la « disymétrisation » = choix de modélisation.
- Principe de Neyman : $\alpha \in (0, 1)$, parmi les test de niveau α , chercher celui (ou ceux) ayant **une erreur de seconde espèce minimale**.

Définition

*Un test de niveau α est dit **Uniformément Plus Puissant (UPP)** si son erreur de seconde espèce est minimale parmi celles des tests de niveau α .*

- Pour le cas d'une **hypothèse simple** contre une **alternative simple**, un test UPP existe.

MAP 433 :
Introduction
aux méthodes
statistiques.
Cours 8

Marc
Hoffmann

Notion de test
et d'erreur de
test

Hypothèse
simple contre
alternative
simple

Lemme de
Neyman-Pearson

Construction
d'un test :
hypothèses
générales

Tests
asymptotiques

Tests
d'adéquation

Principe de construction

- $f(\vartheta, z) = \frac{d\mathbb{P}_\vartheta}{d\mu}(z)$, $z \in \mathcal{Z}$, $\vartheta = \vartheta_0, \vartheta_1$, μ mesure dominante. L'**EMV** –si bien défini– s'écrit

$$\hat{\vartheta}_n^{\text{mv}} = \vartheta_0 1_{\{f(\vartheta_1, Z) < f(\vartheta_0, Z)\}} + \vartheta_1 1_{\{f(\vartheta_0, Z) < f(\vartheta_1, Z)\}}.$$

- On choisit une **région critique** de la forme

$$\mathcal{R}(c) = \{f(\vartheta_1, Z) > cf(\vartheta_0, Z)\}, \quad c > 0$$

et on **calibre** $c = c_\alpha$ de sorte que

$$\mathbb{P}_{\vartheta_0} [Z \in \mathcal{R}(c_\alpha)] = \alpha.$$

- Le test ainsi construit (si cette équation admet une solution) **est de niveau α** . On **montre** qu'il est UPP.

Lemme de Neyman-Pearson

Proposition

Soit $\alpha \in [0, 1]$. S'il existe c_α solution de

$$\mathbb{P}_{\vartheta_0} [f(\vartheta_1, Z) > c_\alpha f(\vartheta_0, Z)] = \alpha$$

alors le test de région critique $\mathcal{R}_\alpha = \{f(\vartheta_1, Z) > c_\alpha f(\vartheta_0, Z)\}$ est de niveau α et UPP pour tester $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ contre $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$.

- Si $U = f(\vartheta_1, Z)/f(\vartheta_0, Z)$ bien définie et $\mathcal{L}(U) \ll dx$ (sous \mathbb{P}_{ϑ_0}), alors $\mathbb{P}_{\vartheta_0} [U > c_\alpha] = \alpha$ admet une solution.

Exemple de mise en oeuvre

- On observe

$$Z = (X_1, \dots, X_n) \sim_{\text{i.i.d.}} \mathcal{N}(\vartheta, 1).$$

- Construction du test de N-P. de $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$ contre $H_1 : \vartheta = \vartheta_1$, avec $\vartheta_0 < \vartheta_1$.
- Mesure dominante $\mu^n =$ mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n et

$$f(\vartheta, Z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i^2 + n\vartheta \bar{X}_n - \frac{n\vartheta^2}{2}\right).$$

- Rapport de vraisemblance

$$\frac{f(\vartheta_1, Z)}{f(\vartheta_0, Z)} = \exp\left(n(\vartheta_1 - \vartheta_0)\bar{X}_n - \frac{n}{2}(\vartheta_1^2 - \vartheta_0^2)\right).$$

Exemple (cont.)

- **Zone de rejet** du test de N-P. :

$$\begin{aligned} & \{f(\vartheta_1, Z) > cf(\vartheta_0, Z)\} \\ &= \left\{ n(\vartheta_1 - \vartheta_0) \bar{X}_n - \frac{n}{2}(\vartheta_1^2 - \vartheta_0^2) > \log c \right\} \\ &= \left\{ \bar{X}_n > \frac{\vartheta_0 + \vartheta_1}{2} + \frac{\log c}{n(\vartheta_1 - \vartheta_0)} \right\}. \end{aligned}$$

- **Choix de c** . On résout

$$\mathbb{P}_{\vartheta_0} \left[\bar{X}_n > \frac{1}{2}(\vartheta_0 + \vartheta_1) + \frac{\log c}{n(\vartheta_1 - \vartheta_0)} \right] = \alpha.$$

- **Approche standard** : on raisonne sous \mathbb{P}_{ϑ_0} . On a

$$\bar{X}_n = \vartheta_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} \xi^{n, \vartheta_0},$$

où ξ^{n, ϑ_0} est une gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$ sous \mathbb{P}_{ϑ_0}
mais pas sous une autre probabilité \mathbb{P}_{ϑ} si $\vartheta \neq \vartheta_0$!

Exemple (fin)

■ Résolution de

$$\mathbb{P}_{\vartheta_0} \left[\vartheta_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} \xi^{n, \vartheta_0} > \frac{1}{2}(\vartheta_0 + \vartheta_1) + \frac{\log c}{n(\vartheta_1 - \vartheta_0)} \right] = \alpha.$$

- Equivalent à $\mathbb{P}_{\vartheta_0} \left[\xi^{n, \vartheta_0} > \frac{\sqrt{n}}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_0) + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\log c}{\vartheta_1 - \vartheta_0} \right] = \alpha$,
soit

$$\frac{\sqrt{n}}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_0) + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\log c}{\vartheta_1 - \vartheta_0} = \Phi^{-1}(1 - \alpha),$$

où $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} \frac{du}{\sqrt{2\pi}}.$

■ Conclusion

$$c_\alpha = \exp \left(n \frac{(\vartheta_1 - \vartheta_0)^2}{2} + \sqrt{n}(\vartheta_1 - \vartheta_0) \Phi^{-1}(1 - \alpha) \right)$$

- Si l'on accepte le principe de Neyman, on sait résoudre le problème à deux points.
- Que faire si l'hypothèse nulle H_0 ou l'alternative H_1 sont composites ?
 - On peut proposer des extensions si l'on dispose de structures particulières sur la vraisemblance du modèle (Poly. Ch. 7.3, hors programme).
 - On sait dire beaucoup de choses dans le cas gaussien.
- Critique méthodologique de l'approche de Neyman \rightsquigarrow notion de p -valeur.

- Situation : on part d'une expérience statistique $(\mathfrak{Z}, \mathcal{Z}, \{\mathbb{P}_\vartheta, \vartheta \in \Theta\})$ engendrée par l'observation Z .
- On souhaite tester :

$$H_0 : \vartheta \in \Theta_0 \subset \Theta \quad \text{contre} \quad H_1 : \vartheta \in \Theta_1$$

avec $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.

- Si $\Theta_0 = \{\vartheta_0\}$ et $\Theta_1 = \{\vartheta_1\}$, on a Neyman-Pearson. **Et sinon ?**

Principe de construction

- « Trouver » une **statistique libre sous l'hypothèse** : toute quantité $\phi(Z)$ **observable** dont on connaît la loi sous l'hypothèse, c'est-à-dire la loi de $\phi(Z)$ sous \mathbb{P}_ϑ avec $\vartheta \in \Theta_0$.
- On « regarde » si le comportement de $\phi(Z)$ est **typique** d'un comportement sous l'hypothèse.
- Si oui, on **accepte** H_0 , si non on **rejette** H_0 .
- On quantifie « oui/non » par le niveau α du test.

MAP 433 :
Introduction
aux méthodes
statistiques.
Cours 8

Marc
Hoffmann

Notion de test
et d'erreur de
test

Construction
d'un test :
hypothèses
générales

Retour sur un
exemple
Principe de
construction

Tests
asymptotiques

Tests
d'adéquation

Exemple : test sur la variance

- On observe $Z = (Y_1, \dots, Y_n)$,

$$Y_1, \dots, Y_n \sim_{\text{i.i.d.}} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

avec $\vartheta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

- **Premier cas** : on teste

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{contre} \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2.$$

- Sous l'hypothèse (c'est-à-dire sous \mathbb{P}_ϑ avec $\vartheta = (\mu, \sigma_0)$ et $\mu \in \mathbb{R}$ quelconque), on a

$$(n-1) \frac{s_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

avec $s_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2$.

Test sur la variance (cont.)

- Donc, **sous l'hypothèse**, le comportement « typique » de

$$\phi(Z) = (n-1) \frac{s_n^2}{\sigma_0^2}$$

est celui d'une variable aléatoire de loi du χ^2 à $n-1$ degrés de liberté.

- Soit $q_{1-\alpha, n-1}^{\chi^2} > 0$ tel que si $U \sim \chi^2(n-1)$, alors

$$\mathbb{P}[U > q_{1-\alpha, n-1}^{\chi^2}] = \alpha.$$

- **Sous l'hypothèse** $\phi(Z) \stackrel{d}{=} U$ et donc la probabilité pour que $\phi(Z)$ dépasse $q_{1-\alpha, n-1}^{\chi^2}$ est inférieure (égale) à α (comportement atypique si α petit).

Test sur la variance (cont.)

- Règle de décision : On accepte l'hypothèse si

$$\phi(Z) \leq q_{1-\alpha, n-1}^{\chi^2}.$$

On la rejette sinon.

- Par construction, on a un test de niveau α .
- On ne sait rien dire sur l'erreur de seconde espèce, mis à part qu'elle est minimale parmi les tests de zone de rejet de la forme de $\{\phi(Z) > c\}$, $c > 0...$

Test sur la variance (fin)

- Deuxième cas : On teste

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \quad \text{contre} \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2.$$

- Pas de statistique libre évidente... Mais, pour $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\sigma \left[(n-1) \frac{s_n^2}{\sigma^2} > q_{1-\alpha, n-1}^{\chi^2} \right] &= \mathbb{P}_\sigma \left[(n-1) \frac{s_n^2}{\sigma^2} > \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} q_{1-\alpha, n-1}^{\chi^2} \right] \\ &\leq \mathbb{P}_\sigma \left[(n-1) \frac{s_n^2}{\sigma^2} > q_{1-\alpha, n-1}^{\chi^2} \right] \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

- La même statistique de test convient pour contrôler l'erreur de première espèce que pour l'hypothèse nulle simple. On choisit **ici** la **même** règle de décision.

Conclusion provisoire

- Pour contruire un test de l'hypothèse $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ contre $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$, on cherche **une statistique libre** sous l'hypothèse et on rejette pour un seuil qui dépend de la loi de la statistique sous H_0 , de sorte de fournir une zone de rejet **maximale**.
- Le plus souvent, la statistique est obtenue via un estimateur. Sauf exception (comme la cas gaussien) une telle statistique est difficile à trouver en général.
- **Simplification** cadre asymptotique (où la gaussianité réapparaît le plus souvent...).

MAP 433 :
Introduction
aux méthodes
statistiques.
Cours 8

Marc
Hoffmann

Notion de test
et d'erreur de
test

Construction
d'un test :
hypothèses
générales

Retour sur un
exemple
Principe de
construction

Tests
asymptotiques

Tests
d'adéquation

Le test de Wald : hypothèse nulle simple

- Situation la suite d'expériences $(\mathcal{Z}^n, \mathcal{Z}^n, \{\mathbb{P}_{\vartheta}^n, \vartheta \in \Theta\})$ est engendrée par l'observation $Z^n, \vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$
- **Objectif** : Tester

$$H_0 : \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{contre} \quad \vartheta \neq \vartheta_0.$$

- **Hypothèse** : on dispose d'un estimateur $\hat{\vartheta}_n$ **asymptotiquement normal**

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, v(\vartheta))$$

en loi sous $\mathbb{P}_{\vartheta}^n, \forall \vartheta \in \Theta$, où $\vartheta \rightsquigarrow v(\vartheta) > 0$ est continue.

- Sous l'hypothèse (ici sous $\mathbb{P}_{\vartheta_0}^n$) on a **la convergence**

$$\sqrt{n} \frac{\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0}{\sqrt{v(\hat{\vartheta}_n)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

en loi sous $\mathbb{P}_{\vartheta_0}^n$.

Test de Wald (cont.)

- Remarque $\sqrt{v(\hat{\vartheta}_n)} \leftrightarrow \sqrt{v(\vartheta_0)}$ ou d'autres choix encore...
- On a aussi

$$T_n = n \frac{(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0)^2}{v(\hat{\vartheta}_n)} \xrightarrow{d} \chi^2(1)$$

sous $\mathbb{P}_{\vartheta_0}^n$.

- Soit $q_{1-\alpha,1}^{\chi^2} > 0$ tel que si $U \sim \chi^2(1)$, on a $\mathbb{P}[U > q_{1-\alpha,1}^{\chi^2}] = \alpha$. On choisit la zone de rejet

$$\mathcal{R}_{n,\alpha} = \{T_n \geq q_{1-\alpha,1}^{\chi^2}\}.$$

- Le test de zone de rejet $\mathcal{R}_{n,\alpha}$ s'appelle **Test de Wald de l'hypothèse simple $\vartheta = \vartheta_0$ contre l'alternative $\vartheta \neq \vartheta_0$ basé sur $\hat{\vartheta}_n$.**

Propriétés du test de Wald

Proposition

Le test Wald de l'hypothèse simple $\vartheta = \vartheta_0$ contre l'alternative $\vartheta \neq \vartheta_0$ basé sur $\hat{\vartheta}_n$ est

- *asymptotiquement de niveau α :*

$$\mathbb{P}_{\vartheta_0}^n [T_n \in \mathcal{R}_{n,\alpha}] \rightarrow \alpha.$$

- *convergent ou (consistant). Pour tout point $\vartheta \neq \vartheta_0$*

$$\mathbb{P}_{\vartheta}^n [T_n \notin \mathcal{R}_{n,\alpha}] \rightarrow 0.$$

- Test asymptotiquement de niveau α **par construction**.
- Contrôle de l'erreur de seconde espèce : Soit $\vartheta \neq \vartheta_0$. On a

$$\begin{aligned} T_n &= \left(\sqrt{n} \frac{\hat{\vartheta}_n - \vartheta}{\sqrt{v(\hat{\vartheta}_n)}} + \sqrt{n} \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\sqrt{v(\hat{\vartheta}_n)}} \right)^2 \\ &=: T_{n,1} + T_{n,2}. \end{aligned}$$

On a $T_{n,1} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$ sous \mathbb{P}_{ϑ}^n et

$$T_{n,2} \xrightarrow{\mathbb{P}_{\vartheta}^n} \pm\infty \text{ car } \vartheta \neq \vartheta_0$$

Donc $T_n \xrightarrow{\mathbb{P}_{\vartheta}^n} +\infty$, d'où le résultat.

- **Remarque** : si $\vartheta \neq \vartheta_0$ mais $|\vartheta - \vartheta_0| \lesssim 1/\sqrt{n}$, le raisonnement ne s'applique pas. Résultat **non uniforme en le paramètre**.

Test de Wald : hypothèse nulle composite

- **Même contexte** : $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ et on dispose d'un estimateur $\hat{\vartheta}_n$ asymptotiquement normal :

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V(\vartheta))$$

où $V(\vartheta)$ est **définie positive** et continue en ϑ .

- **But** Tester $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ contre $H_1 : \vartheta \notin \Theta_0$, où

$$\Theta_0 = \{\vartheta \in \Theta, \quad g(\vartheta) = 0\}$$

et

$$g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$(m \leq d)$ est régulière.

Test de Wald cont.

- **Hypothèse** : la différentielle (de matrice $J_g(\vartheta)$) de g est de rang maximal m en tout point de (l'intérieur) de Θ_0 .

Proposition

En tout point ϑ de l'intérieur de Θ_0 (i.e. **sous l'hypothèse**), on a, en loi sous \mathbb{P}_{ϑ}^n :

- $$\sqrt{n}g(\hat{\vartheta}_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, J_g(\vartheta)V(\vartheta)J_g(\vartheta)^T),$$

- $$T_n = ng(\hat{\vartheta}_n)^T \Sigma_g(\hat{\vartheta}_n)^{-1} g(\hat{\vartheta}_n) \xrightarrow{d} \chi^2(m)$$

où $\Sigma_g(\vartheta) = J_g(\vartheta)V(\vartheta)J_g(\vartheta)^T$.

- Preuve : méthode « delta » multidimensionnelle.

Test de Wald (fin)

Proposition

Sous les hypothèses précédentes, le test de zone de rejet

$$\mathcal{R}_\alpha = \{ T_n \geq q_{1-\alpha, m}^{\chi^2} \}$$

avec $\mathbb{P} [U > q_{1-\alpha, m}^{\chi^2}] = \alpha$ si $U \sim \chi^2(m)$ est

- **Asymptotiquement de niveau α** en tout point ϑ de (l'intérieur) de Θ_0 :

$$\mathbb{P}_\vartheta^n [T_n \in \mathcal{R}_{n, \alpha}] \rightarrow \alpha.$$

- **Convergent** : pour tout $\vartheta \notin \Theta_0$ on a

$$\mathbb{P}_\vartheta^n [T_n \notin \mathcal{R}_{n, \alpha}] \rightarrow 0.$$

Tests d'adéquation

- Situation On observe (pour simplifier) un n -échantillon de loi F inconnu

$$X_1, \dots, X_n \sim_{\text{i.i.d.}} F$$

- **Objectif** Tester

$$H_0 : F = F_0 \text{ contre } F \neq F_0$$

où F_0 distribution donnée. Par exemple : F_0 **gaussienne centrée réduite**.

- Il est **très facile de construire un test asymptotiquement de niveau α** . Il suffit de trouver une statistique $\phi(X_1, \dots, X_n)$ de loi connue sous l'hypothèse.

MAP 433 :
Introduction
aux méthodes
statistiques.
Cours 8

Marc
Hoffmann

Notion de test
et d'erreur de
test

Construction
d'un test :
hypothèses
générales

Tests
asymptotiques

Tests
d'adéquation

Tests de
Kolmogorov-
Smirnov
Tests du χ^2

Test d'adéquation : situation

■ Exemples : sous l'hypothèse

$$\phi_1(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n}\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\phi_2(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n}{S_n} \sim \text{Student}(n-1)$$

$$\phi_3(X_1, \dots, X_n) = (n-1)s_n^2 \sim \chi^2(n-1).$$

- Le problème est que ces tests **ont une faible puissance** : ils ne sont pas consistants.
- Pas exemple, si $F \neq$ gaussienne mais $\int_{\mathbb{R}} x dF(x) = 0$, $\int_{\mathbb{R}} x^2 dF(x) = 1$, alors

$$\mathbb{P}_F [\phi_1(X_1, \dots, X_n) \leq x] \rightarrow \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} \frac{du}{\sqrt{2\pi}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(résultats analogues pour ϕ_2 et ϕ_3).

- La statistique de test ϕ_i **ne caractérise pas** la loi F_0 .

Test de Kolmogorov-Smirnov

- Rappel Si la fonction de répartition F est continue,

$$\sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \xrightarrow{d} \mathbb{B}$$

où la loi de \mathbb{B} ne dépend pas de F .

Proposition (Test de Kolmogorov-Smirnov)

Soit $q_{1-\alpha}^{\mathbb{B}}$ tel que $\mathbb{P} [\mathbb{B} > q_{1-\alpha}^{\mathbb{B}}] = \alpha$. Le test défini par la zone de rejet

$$\mathcal{R}_{n,\alpha} = \left\{ \sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F_0(x)| \geq q_{1-\alpha}^{\mathbb{B}} \right\}$$

est *asymptotiquement de niveau α* : $\mathbb{P}_{F_0} [\hat{F}_n \in \mathcal{R}_{n,\alpha}] \rightarrow \alpha$ et *consistant* :

$$\forall F \neq F_0 : \mathbb{P}_F [\hat{F}_n \notin \mathcal{R}_{n,\alpha}] \rightarrow 0.$$

Test du Chi-deux

- X variables **qualitative** : $X \in \{1, \dots, d\}$.

$$\mathbb{P}[X = \ell] = p_\ell, \ell = 1, \dots, d.$$

- La loi de X est caractérisée par $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d)^T$.

- Notation

$$\mathcal{M}_d = \left\{ \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d)^T, \ 0 \leq p_\ell, \sum_{\ell=1}^d p_\ell = 1 \right\}.$$

- **Objectif** $\mathbf{q} \in \mathcal{M}_d$ donnée. A partir d'un n -échantillon

$$X_1, \dots, X_n \sim_{\text{i.i.d.}} \mathbf{p},$$

tester $H_0 : \mathbf{p} = \mathbf{q}$ **contre** $H_1 : \mathbf{p} \neq \mathbf{q}$.

Construction « naturelle » d'un test

■ Comparaison des fréquences empiriques

$$\hat{p}_{n,\ell} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{X_i=\ell} \quad \text{proche de } q_\ell, \quad \ell = 1, \dots, d ?$$

■ Loi des grands nombres :

$$(\hat{p}_{n,1}, \dots, \hat{p}_{n,d}) \xrightarrow{\mathbb{P}_{\mathbf{p}}} (p_1, \dots, p_d) = \mathbf{p}.$$

■ Théorème central-limite ?

$$\mathbf{U}_n(\mathbf{p}) = \sqrt{n} \left(\frac{\hat{p}_{n,1} - p_1}{\sqrt{p_1}}, \dots, \frac{\hat{p}_{n,d} - p_d}{\sqrt{p_d}} \right) \xrightarrow{d} ?$$

■ Composante par composante oui. Convergence globale plus délicate.

Statistique du Chi-deux

Proposition

Si les composantes de \mathbf{p} sont toutes non-nulles

- On a la *convergence en loi* sous $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$

$$\mathbf{U}_n(\mathbf{p}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V(\mathbf{p}))$$

avec $V(\mathbf{p}) = \text{Id}_d - \sqrt{\mathbf{p}}(\sqrt{\mathbf{p}})^T$ et $\sqrt{\mathbf{p}} = (\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_d})^T$.

- *De plus*

$$\|\mathbf{U}_n(\mathbf{p})\|^2 = n \sum_{\ell=1}^d \frac{(\hat{p}_{n,\ell} - p_\ell)^2}{p_\ell} \xrightarrow{d} \chi^2(d-1).$$

MAP 433 :
Introduction
aux méthodes
statistiques.
Cours 8

Marc
Hoffmann

Notion de test
et d'erreur de
test

Construction
d'un test :
hypothèses
générales

Tests
asymptotiques

Tests
d'adéquation

Tests de
Kolmogorov-
Smirnov

Tests du χ^2

Preuve de la normalité asymptotique

- Pour $i = 1, \dots, n$ et $1 \leq \ell \leq d$, on pose

$$Y_{\ell}^i = \frac{1}{\sqrt{p_{\ell}}} (1_{\{X_i = \ell\}} - p_{\ell}).$$

- Les vecteurs $\mathbf{Y}_i = (Y_1^i, \dots, Y_d^i)$ sont **indépendants et identiquement distribués** et

$$\mathbf{U}_n(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbf{Y}_i,$$

$$\mathbb{E}[Y_{\ell}^i] = 0, \mathbb{E}[(Y_{\ell}^i)^2] = 1 - p_{\ell}, \mathbb{E}[Y_{\ell}^i Y_{\ell'}^i] = -(p_{\ell} p_{\ell'})^{1/2}.$$

- **On applique le TCL vectoriel.**

Convergence de la norme au carré

- On a donc $\mathbf{U}_n(\mathbf{p}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V(\mathbf{p}))$.
- On a aussi

$$\begin{aligned}\|\mathbf{U}_n(\mathbf{p})\|^2 &\xrightarrow{d} \|\mathcal{N}(0, V(\mathbf{p}))\|^2 \\ &\sim \chi^2(\text{Rang}(V(\mathbf{p})))\end{aligned}$$

par **Cochran** : $V(\mathbf{p}) = \text{Id}_d - \sqrt{\mathbf{p}}(\sqrt{\mathbf{p}})^T$ est la projection orthogonale sur $\text{vect}\{\sqrt{\mathbf{p}}\}^\perp$ qui est de dimension $d - 1$.

Test d'adéquation du χ^2

- « distance » du χ^2 :

$$\chi^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{\ell=1}^d \frac{(p_{\ell} - q_{\ell})^2}{q_{\ell}}.$$

- Avec ces notations $\|\mathbf{U}_n(\mathbf{p})\|^2 = n\chi^2(\hat{\mathbf{p}}_n, \mathbf{p})$.

Proposition

Pour $\mathbf{q} \in \mathcal{M}_d$ le test simple défini par la zone de rejet

$$\mathcal{R}_{n,\alpha} = \{n\chi^2(\hat{\mathbf{p}}_n, \mathbf{q}) \geq q_{1-\alpha, d-1}^{\chi^2}\}$$

*où $\mathbb{P}[U > q_{1-\alpha, d-1}^{\chi^2}] = \alpha$ si $U \sim \chi^2(d-1)$ est
asymptotiquement de niveau α et consistant pour tester*

$$H_0 : \mathbf{p} = \mathbf{q} \quad \text{contre} \quad H_1 : \mathbf{p} \neq \mathbf{q}.$$

Exemple de mise en oeuvre : expérience de Mendel

- Soit $d = 4$ et

$$\mathbf{q} = \left(\frac{9}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16} \right).$$

- Répartition observée : $n = 556$

$$\hat{\mathbf{p}}_{556} = \frac{1}{556} (315, 101, 108, 32).$$

- Calcul de la statistique du χ^2

$$556 \times \chi^2(\hat{\mathbf{p}}_{556}, \mathbf{q}) = 0,47.$$

- On a $q_{95\%,3} = 0,7815$.
- **Conclusion** : Puisque $0,47 < 0,7815$, on accepte l'hypothèse $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ au niveau $\alpha = 5\%$.