MAP 433 : Introduction aux méthodes statistiques

27 août 2015

Organisation : équipe enseignante

Cours

Eric MOULINES, Ecole Polytechnique
eric.moulines@polytechnique.edu

PC

- Olivier Cappé, DR CNRS, Télécom-ParisTech
- Gersende Fort, DR CNRS, Télécom-ParisTech,
- Lucas Gérin, École Polytechnique,
- Christophe Giraud, Université Paris-Sud et École Polytechnique,
- Marc Lavielle, DR INRIA, INRIA Saclay,
- Matthieu Lerasle, CR CNRS, Université de Nice,
- Mathieu Rosenbaum, Université Pierre-et-Marie Curie,
- Francois Roueff, Professeur, Télécom ParisTech.

Organisation : matériel

- Transparents du cours téléchargeables à l'adresse

  https ://moodle.polytechnique.fr/course/view.php ?id=1717

- Polycopié document autonome contenant l'intégralité du cours et plus, téléchargeable à la même adresse.
- Les documents et exercices de PC. [les exercices obligatoires et pour aller plus loin]
- Des liens pour des expériences numériques.

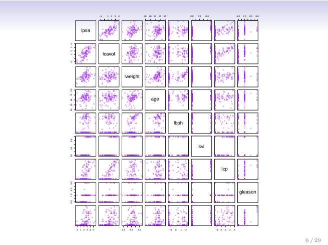
Présentation (succincte) du cours

- Introduction aux statistiques et rappels de probabilités (1 cours).
- Introduction théorie de la décision (1 cours).
- Régression linéaire et non-linéaire (1 cours).
- Méthodes d'estimation classique (2 cours).
- Information statistique, théorie asymptotique pour l'estimation (1 cours).
- Décision statistique et tests (2 cours).

Plan

- Problématique statistique : de quoi s'agit-il ?
- Echantillonnage.
- Estimation d'une distribution inconnue à partir d'un n-échantillon, méthodes empiriques.

Biostatistique



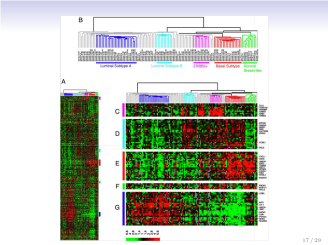
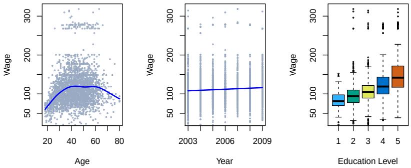


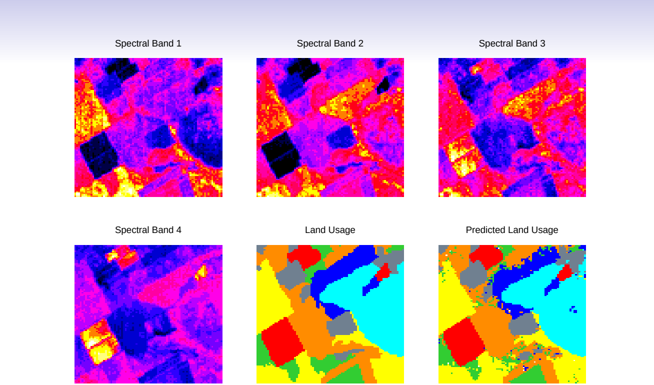
FIGURE – Identifier les facteurs de risque pour le développement d'un cancer ; classifier des tissus en fonctions de données d'expression de gènes

Économétrie



Income survey data for males from the central Atlantic region of the USA in 2009.

Télé-détection



Usage $\in$ {*red soil, cotton, vegetation stubble, mixture, gray soil, damp gray soil*}

Et plein d'autres choses

- Opinion
- Marketing
- Sport
- Assurance
- Analyse du risque

Problématique statistique

- Point de départ : des observations (des nombres réels)

$$\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}.$$

- Modélisation statistique :
  - les observations sont des réalisations

$$X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega) \text{ de v.a.r. } X_1, \ldots, X_n.$$

  - La loi $\mathbb{P}^{(X_1,\ldots,X_n)}$ de $(X_1, \ldots, X_n)$ est inconnue, mais appartient à une famille donnée

$$\boxed{\{\mathbb{P}_\theta^n, \theta \in \Theta\}.}$$

- Problématique : à partir de « l'observation » $X_1, \ldots, X_n$, peut-on retrouver $\mathbb{P}_\theta^n$? et donc θ ?

Problématique statistique (suite)

- θ est le paramètre et Θ l'ensemble des paramètres.
- Estimation : à partir de $X_1, \ldots, X_n$, construire $\varphi_n(X_1, \ldots, X_n)$ qui « approche au mieux » θ.
- Test : à partir de $X_1, \ldots, X_n$, établir une décision $\varphi_n(X_1, \ldots, X_n) \in \{\text{ensemble de décisions}\}$ concernant θ pouvant être vraie ou fausse.

Exemple le plus simple

- On lance une pièce de monnaie n fois et on observe ($P = 0$, $F = 1$)

$$0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0.$$

- Modèle statistique : on observe n variables aléatoires X_i indépendantes, de Bernoulli de paramètre inconnu $\theta \in \Theta = [0, 1]$.
  - Estimation. Estimateur $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$. Quelle précision ?
  - Test. Décision à prendre : « la pièce est-elle équilibrée » ?. Par exemple : on compare $\bar{X}_{18}$ à 0.5. Si $|\bar{X}_{18} - 0.5|$ « petit », on accepte l'hypothèse « la pièce est équilibrée ». Sinon, on rejette. Quel seuil choisir, et avec quelles conséquences (ex. probabilité de se tromper).

Echantillonnage

- L'expérience statistique la plus élémentaire : on observe la réalisation de $X_1, \ldots, X_n$, v.a.r. où X_i sont indépendantes, identiquement distribuées, de même loi $\mathbb{P}^X$.
- Que dire de la loi $\mathbb{P}^X$ commune des X_i ?
- Structure stochastique très simple (variable aléatoires indépendantes, de êême loi) mais espace de paramètres immense.

Rappel : loi d'une variable aléatoire réelle

Definition

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

Loi de X : mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, notée $\mathbb{P}^X$, définie par

$$\mathbb{P}^X\left[A\right] = \mathbb{P}\left[X^{-1}(A)\right], \quad A \in \mathcal{B}.$$

Formule d'intégration

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] = \int_\Omega \varphi\big(X(\omega)\big)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_\mathbb{R} \varphi(x)\,\mathbb{P}^X(dx)}$$

φ fonction test.

Loi d'une variable aléatoire (suite)

Exemple 1 : X suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/3$.

- La loi de X est décrite par

$$\mathbb{P}\left[X = 1\right] = \tfrac{1}{3} = 1 - \mathbb{P}\left[X = 0\right].$$

- Ecriture de $\mathbb{P}^X(dx)$:

$$\boxed{\mathbb{P}^X(dx) = \tfrac{1}{3}\delta_1(dx) + \tfrac{2}{3}\delta_0(dx).}$$

- Formule de calcul

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathbb{P}^X(dx) \\ &= \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\delta_1(dx) + \frac{2}{3}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\delta_0(dx) \\ &= \frac{1}{3}\,\varphi(1) + \frac{2}{3}\,\varphi(0).\end{aligned}$$

Loi d'une variable aléatoire (suite)

Exemple 2 : $X \sim$ loi de Poisson de paramètre 2.

- La loi de X est décrite par

$$\mathbb{P}\left[X = k\right] = e^{-2}\frac{2^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

- Ecriture de $\mathbb{P}^X(dx)$:

$$\boxed{\mathbb{P}^X(dx) = e^{-2}\sum_{k\in\mathbb{N}} \tfrac{2^k}{k!}\delta_k(dx).}$$

- Formule de calcul

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathbb{P}^X(dx) = e^{-2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\varphi(k)\tfrac{2^k}{k!}.$$

Loi d'une variable aléatoire (suite)

Exemple 3 : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ (loi normale standard).

- La loi de X est décrite par

$$\mathbb{P}\left[X \in [a,b]\right] = \int_{[a,b]} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

- Ecriture de $\mathbb{P}^X(dx)$:

$$\boxed{\mathbb{P}^X(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx}$$

dx : mesure de Lebesgue.

- Formule de calcul

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mathbb{P}^X(dx) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Loi d'une variable aléatoire (suite)

Exemple 4 : $X = Z \wedge 1$, où la loi de Z a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Loi de X

- Sur l'événement $\{Z < 1\}$, on observe $X = Z$.
- Sur l'événement $\{Z \geq 1\}$, on observe $X = 1$.

Ecriture de $\mathbb{P}^X(dx)$:

$$\mathbb{P}^X(dx) = f(x) 1_{\{x<1\}} dx + \mathbb{P}\left[Z \geq 1\right] \delta_1(dx),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\mathbb{P}^X(dx) = f(x)1_{\{x<1\}}dx + \Big(\int_{[1,+\infty)} f(u)du\Big)\delta_1(dx)}$$

Formule de calcul

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathbb{P}^X(dx) \\ &= \int_{(-\infty,1)} \varphi(x)f(x)dx + \Big(\int_{[1,+\infty)} f(u)du\Big)\varphi(1).\end{aligned}$$

Identification de la loi : fonction de répartition

- La loi d'une variable aléatoire X est un « objet compliqué » :
  - elle peut être discrète (somme de masses de Dirac)
  - elle peut être (absolument) continue (densité par rapport à la mesure de Lebesgue)
  - elle peut-être une combinaison des deux, ou encore autre chose....
- On peut caractériser la loi de X par un objet plus simple à manipuler : une fonction croissante bornée : la fonction de répartition.
- Plus facile à étudier dans un contexte de statistique.
- (Il y a aura bien sûr des limites à cette approche...)

Fonction de répartition

Definition

X variable aléatoire réelle. Fonction de répartition de X :

$$F(x) := \mathbb{P}\left[X \leq x\right],\ x \in \mathbb{R}.$$

- F est croissante, cont. à droite, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$
- F caractérise la loi $\mathbb{P}^X$:

$$\boxed{\mathbb{P}^X\left[\,(a,b]\,\right] = \mathbb{P}\left[a < X \leq b\right] = F(b) - F(a)}$$

- Désormais, la loi (distribution) de X désignera indifféremment F ou $\mathbb{P}^X$.

Problématique statistique

- On « observe »

$$X_1, \ldots, X_n \sim_{i.i.d.} F,$$

  F fonction de répartition quelconque, inconnue.
- Terminologie : $(X_1, \ldots, X_n)$ est un n-échantillon de la loi F.
- Comment retrouver F à partir des observations $X_1, \ldots, X_n$?
- Démarche : on construit une fonction (aléatoire) $x \rightsquigarrow \widehat{F}_n(x) = F_n(x; X_1, \ldots, X_n)$ ne dépendant pas de F (inconnu) telle que

$$\widehat{F}_n(x) - F(x)$$

  petit lorsque n grand... Comment ? Petit dans quel sens ?

Fonction de répartition empirique

Definition

Fonction de répartition empirique associée au n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$:

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq x\}}, \; x \in \mathbb{R}\,.$$

- Terminologie : $\widehat{F}_n$ est un estimateur : fonction des observations qui ne dépend pas de la quantité inconnue.
- Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\widehat{F}_n(x_0) \xrightarrow{\mathbb{P}} F(x_0), \quad n \to \infty}$$

Convergence en probabilité

- Mode de convergence « naturel » en statistique
- Rappel : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big[|X_n - X| \geq \varepsilon\big] \to 0, \quad \to \infty.$$

- Interprétation : pour tout niveau de risque $\alpha > 0$ (petit) et tout niveau de précision $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N = N(\alpha, \varepsilon)$ tel que

$$n > N \ \text{ implique } \ |X_n - X| \leq \varepsilon \ \text{ avec proba. } \geq 1 - \alpha.$$

- En pratique, on souhaite simultanément N, α et ε petits. Quantités antagonistes (à suivre...).

Loi faible des grands nombres

Théorème

Soit $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ une suite de v.a. i.i.d. intégrables (vérifiant $\mathbb{E}[|Y_1|] < \infty$). Alors,

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[Y_1]\,.$$

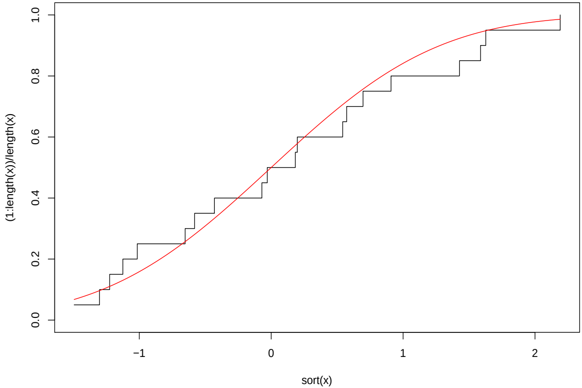


FIGURE – $\widehat{F}_n$ (noir), F (rouge), $n = 20$. $F \sim \mathcal{N}(0,1)$.

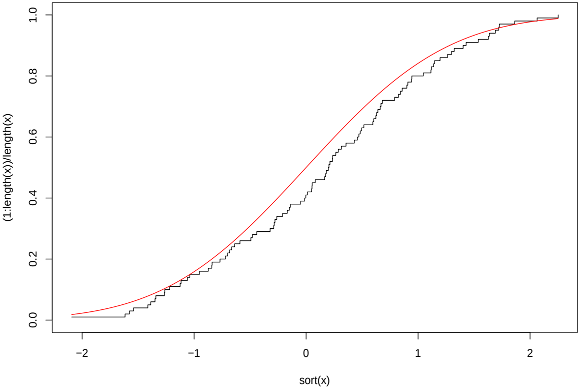


FIGURE – $\widehat{F}_n$ (noir), F (rouge), $n = 100$. $F \sim \mathcal{N}(0,1)$.

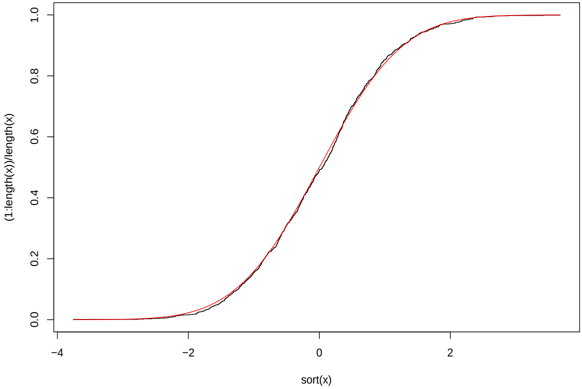


FIGURE – $\widehat{F}_n$ (noir), F (rouge), $n = 1000$. $F \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Vers la précision d'estimation

- On a $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\widehat{F}_n(x_0) \xrightarrow{\mathbb{P}} F(x_0)$. Avec quelle précision ? Problèmes de même types :
  - n information et α risque donnés $\rightarrow$ quelle précision ε ?
  - risque α et précision ε donnés $\rightarrow$ quel nombre minimal de données n nécessaires ?
  - quel risque prend-on si l'on suppose une précision ε avec n données ?
- Plusieurs approches :
  - non-asymptotique naïve
  - non-asymptotique
  - approche asymptotique (via des théorèmes limites)

Inégalité de Markov

- Si Y est une v.a. positive et $t \geq 0$, $Y\mathbb{1}_{\{Y \geq t\}} \geq t\mathbb{1}_{\{Y \geq t\}}$
- Inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(Y \geq t) \leq t^{-1}\,\mathbb{E}[Y]\,.$$

- Si ϕ est une fonction positive monotone croissante, $\phi(t) > 0$ pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(Y \geq t) = \mathbb{P}(\phi(Y) \geq \phi(t)) \leq \mathbb{E}[\phi(Y)]/\phi(t)\,.$$

- Bien entendu, cette inégalité est intéressante ssi $\mathbb{E}[\phi(Y)] < \infty$.

Approche naïve : contrôle de la variance

Soit $\alpha > 0$ donné (petit). On veut trouver ε, le plus petit possible, de sorte que

$$\mathbb{P}\left(|\widehat{F}_n(x_0) - F(x_0)| \geq \varepsilon\right) \leq \alpha.$$

On a (Tchebychev)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[|\widehat{F}_n(x_0) - F(x_0)| \geq \varepsilon\right] &\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{Var}\left[\widehat{F}_n(x_0)\right] \\
&= \frac{F(x_0)\big(1 - F(x_0)\big)}{n\varepsilon^2} \\
&\leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \leq \alpha
\end{aligned}$$

Conduit à

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}}$$

Intervalle de confiance

Conclusion : pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\left|\widehat{F}_n(x_0) - F(x_0)\right| \geq \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right] \leq \alpha.$$

Terminologie

L'intervalle

$$\boxed{\mathcal{I}_{n,\alpha} = \left[\widehat{F}_n(x_0) \pm \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right]}$$

est un intervalle de confiance pour $F(x_0)$ au niveau de confiance $1-\alpha$.

Précision catastrophique !

- Si $\alpha = 5\%$ et $n = 100$, précision $\varepsilon = 0.22$.
- Autres exemples : $\varepsilon_{\alpha=1/1000,n=100} = 1.58$, $\varepsilon_{\alpha=1/100,n=100} = 0.5$. aucune précision d'estimation !

- D'où vient le défaut de cette précision ?
  - Mauvais choix de l'estimateur ? ($\rightarrow$ on verra que non).
  - Mauvaise estimation de l'erreur ?

Inégalité de Markov

- Moments d'ordres plus élevés : Pour tout $q > 0$, on a en posant $\phi(t) = t^q$

$$\mathbb{P}\left(|\widehat{F}_n(x_0) - F(x_0)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^q}\,\mathbb{E}\left(|F_n(x_0) - F(x_0)|^q\right)$$

- ... à part pour $q = 2$ (ou plus généralement q entier pair), $\mathbb{E}\left(|F_n(x_0) - F(x_0)|^q\right)$ ne se calcule par très aisément...
- Plus intéressant de considérer une inégalité exponentielle.

Inégalité exponentielle

- On pose $\phi(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Dans ce cas, l'inégalité de Markov implique
$$\mathbb{P}(Z > t) \leq \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda Z}]$$
où $\lambda \mapsto \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda Z}]$ est la fonction génératrice des moments ou *transformée de Laplace*.
- En notant $\psi_Z(\lambda) = \log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda Z}]$ le logarithme la transfomée de Laplace et en introduisant
$$\psi_Z^*(t) = \sup_{\lambda \geq 0}\{\lambda t - \psi_Z(\lambda)\}$$
nous obtenons la borne de Cramér-Chernoff
$$\mathbb{P}(Z > t) \leq \exp(-\psi_Z^*(t))\,.$$

Inégalité de Chernoff pour une somme de variables indépendantes

- Posons $Z = X_1 + \cdots + X_n$ où $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables i.i.d.
- On note $\psi_X(\lambda) = \log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda X}]$ et la transformée de Cramér correspondante par $\psi_X^*(t)$.
- Indépendance :

$$\begin{aligned}\psi_Z(\lambda) &= \log \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda \sum_{i=1}^n X_i}\right] \\ &= \log \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda X_i}\right] = n\psi_X(\lambda)\end{aligned}$$

Inégalité de Chernoff pour les sommes de variables indépendantes

- Transformée de Cramérde la somme

$$\psi_Z^*(t) = \sup_{\lambda > 0} \left(\lambda t - \psi_Z(\lambda) \right)$$
$$= \sup_{\lambda > 0} \left(\lambda t - n\psi_X(\lambda) \right) = n\psi_X^*(t/n)$$

Lemme de Hoeffding

Lemme

Soit Y une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[Y] = 0$ et $Y \in [a, b]$ avec une probabilité 1. On pose $\psi_Y(\lambda) = \log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda Y}]$. Alors

$$\psi''_Y(\lambda) \leq (b - a)^2/4$$

et

$$\psi_Y(\lambda) \leq \lambda^2(b - a)^2/8\,.$$

Inégalité de Hoeffding

Proposition

$Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p. Alors

$$\mathbb{P}\left(\left|n^{-1}\sum_{i=1}^n Y_i - p\right| \geq t\right) \leq 2\exp(-2nt^2).$$

Application : on pose $Y_i = 1_{\{x_I \leq x_0\}}$ et $p = F(x_0)$. On en déduit

$$\mathbb{P}\left[\left|\widehat{F}_n(x_0) - F(x_0)\right| \geq \varepsilon\right] \leq 2\exp(-2n\varepsilon^2).$$

On résout en ε : $2\exp(-2n\varepsilon^2) = \alpha$, soit

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{2n}\log\frac{2}{\alpha}}}.$$

Comparaison Tchebychev vs. Hoeffding

Nouvel intervalle de confiance

$$\boxed{\mathcal{I}_{n,\alpha}^{\texttt{hoeffding}} = \left[\widehat{F}_n(x_0) \pm \sqrt{\frac{1}{2n}\log\frac{2}{\alpha}}\right]},$$

à comparer avec

$$\mathcal{I}_{n,\alpha}^{\texttt{tchebychev}} = \left[\widehat{F}_n(x_0) \pm \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right].$$

- Même ordre de grandeur en n.
- Gain significatif dans la limite $\alpha \to 0$. La « prise de risque » devient marginale par rapport au nombre d'observations.
- Optimalité d'une telle approche ?

L'approche asymptotique

- Vers une notion d'optimalité : on se place dans la limite $n \to \infty$ (l'information « explose »). On évalue

$$\mathbb{P}\left[\left|\widehat{F}_n(x_0) - F(x_0)\right| \geq \varepsilon\right], n \to \infty$$

pour une normalisation $\varepsilon = \varepsilon_n$ appropriée.

- Outil : Théorème central-limite.

Convergence en loi

La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X ($X_n \xrightarrow{d} X$) ssi l'une des conditions équivalente est vérifiée :

- Pour toute fonction f continue bornée,
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]\,.$$
- $$\mathbb{P}\left(X_n \leq x\right) \to \mathbb{P}\left(X \leq x\right)$$
  en tout point x où la fonction de répartition de X est continue
- Pour tout $u \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX_n}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX}]\,.$$

Convergence en loi

- Attention... ce sont les lois qui convergent... Si X et $-X$ ont la même loi (par exemple, $X \sim \mathcal{N}(0,1)$), on a simultanément

$$X_n \xrightarrow{d} X \quad \text{et} \quad X_n \xrightarrow{d} -X$$

- On peut avoir $X_n \xrightarrow{d} X$ et $Y_n \xrightarrow{d} Y$ sans avoir $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y)$ (on n'a d'ailleurs pas spécifié la loi jointe du couple (X, Y))
- Par contre, si $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y)$, on a pour toute fonction ϕ continue, $\phi(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} \phi(X, Y)$, et donc $X_n \xrightarrow{d} X$ et $Y_n \xrightarrow{d} Y$.

Rappel : théorème central-limite

Théorème

Si $Y_1, \ldots, Y_n$ *i.i.d.*, $\mu = \mathbb{E}\left[Y_i\right]$, $0 < \sigma^2 = Var[Y_i] < +\infty$, *alors*

$$\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - \mu\Big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Interprétation et application

- Interprétation du TCL :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\xi^{(n)}, \quad \xi^{(n)} \overset{d}{\approx} \mathcal{N}(0,1).$$

- Application : $Y_i = 1_{\{X_i \leq x_0\}}$, $\mu = F(x_0)$,
$\sigma(F) = F(x_0)^{1/2}(1 - F(x_0))^{1/2}$.
On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\left|\widehat{F}_n(x_0) - F(x_0)\right| \geq \varepsilon_n\right] &= \mathbb{P}\left[\left|\xi^{(n)}\right| \geq \frac{\sqrt{n}\,\varepsilon_n}{\sigma(F)}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\left|\xi^{(n)}\right| \geq \frac{\varepsilon_0}{\sigma(F)}\right]\end{aligned}$$

pour la calibration $\varepsilon_n = \varepsilon_0/\sqrt{n}$ (ε_0 reste à choisir).

TCL et intervalle de confiance (suite)

Il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\left|\xi^{(n)}\right| \geq \frac{\varepsilon_0}{\sigma(F)}\right] \to \int_{|x|\geq \varepsilon_0/\sigma(F)} e^{-x^2/2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ = 2\Big(1 - \Phi\big(\varepsilon_0/\sigma(F)\big)\Big) \\ \leq \alpha,\end{aligned}$$

avec $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$, ce qui donne

$$\boxed{\varepsilon_0 = \sigma(F)\Phi^{-1}\big(1-\alpha/2\big).}$$

TCL et intervalle de confiance : (suite)

- On a montré

$$\mathbb{P}\left[\left|\widehat{F}_n(x_0) - F(x_0)\right| \geq \frac{\sigma(F)}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1-\alpha/2)\right] \to \alpha.$$

- Attention ! ceci ne fournit pas un intervalle de confiance : $\sigma(F) = F(x_0)^{1/2}\big(1 - F(x_0)\big)^{1/2}$ est inconnu !
- Solution : remplacer $\sigma(F)$ par $\widehat{F}_n(x_0)^{1/2}\big(1 - \widehat{F}_n(x_0)\big)^{1/2}$ observable.

Lemme de Slutsky

Lemme

Si $X_n \xrightarrow{d} X$ *et* $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ *(constante), alors* $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y)$.

TCL et intervalle de confiance : conclusion

Proposition

Pour tout $\alpha \in (0,1)$,

$$\mathcal{I}_{n,\alpha}^{\mathtt{asymp}} = \left[\widehat{F}_n(x_0) \pm \frac{\widehat{F}_n(x_0)^{1/2}\big(1-\widehat{F}_n(x_0)\big)^{1/2}}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\alpha/2)\right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique pour $F(x_0)$ *au niveau de confiance* $1-\alpha$ *:*

$$\mathbb{P}\left[F(x_0) \in \mathcal{I}_{n,\alpha}^{\mathtt{asymp}}\right] \to 1-\alpha.$$

Le passage $\sigma(F) \longrightarrow \widehat{F}_n(x_0)^{1/2}\big(1-\widehat{F}_n(x_0)\big)^{1/2}$ est licite via le lemme de Slutsky.