

CHAPITRE 1

Intégration des fonctions holomorphes, théorèmes de Cauchy

1.1. Intégration le long d'un chemin dans \mathbb{R}^2 et applications

Principaux résultats :

- L'intégrale d'une fonction le long d'un chemin ne dépend pas du paramétrage de ce chemin.
- $\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \sup_{\gamma} |f| \times \text{long}(\gamma)$
- l'indice d'un lacet par rapport à un point est un nombre entier : $\text{Ind}_{z_0}(\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} \in \mathbb{Z}$

1.1.1. Arcs paramétrés, chemins et lacets. Rappelons ici quelques définitions utiles et courantes : soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $a < b$ deux réels.

DEFINITION 1.1.1.

- Soit I un intervalle fermé de longueur non nulle de \mathbb{R} et γ une application de I dans \mathcal{U} . L'image $\gamma(I)$ (notée aussi parfois γ^*) est appelée *chemin*¹ et γ est un *paramétrage* du chemin. On confondra souvent un chemin $\gamma(I)$, ou γ^* et son paramétrage γ .
- Un chemin est dit continu [continu et \mathcal{C}^1 par morceaux, \mathcal{C}^1], s'il admet un paramétrage continu [continu et \mathcal{C}^1 par morceaux², \mathcal{C}^1].
- Un *lacet* est un chemin continu fermé, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ c'est à dire dont l'extrémité et l'origine $\gamma(a) = \gamma(b)$ sont confondus. Un lacet $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ est dit *simple* s'il n'admet pas de point double autre que $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Deux chemins $\gamma_1, \gamma_2 : [a_1, b_1], [a_2, b_2] \rightarrow \mathcal{U}$ sont dits \mathcal{C}^1 -équivalents s'il existe un difféomorphisme $\phi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$, c'est à dire une bijection de classe \mathcal{C}^1 ainsi que sa réciproque telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$. Si de plus on peut trouver ϕ croissant, on dit que les chemins sont \mathcal{C}^1 -équivalents de même orientation.

PROPOSITION 1.1.2.

- La \mathcal{C}^1 -équivalence et la \mathcal{C}^1 -équivalence de même orientation sont deux relations d'équivalence. On notera $[\gamma]$ et $[\gamma]_{or}$ les classes d'équivalences relatives à ces relations.
- tout chemin est équivalent à un chemin dont la source est $[0, 1]$. Il suffit de prendre ϕ bijection affine de $[a, b]$ sur $[0, 1]$.

¹On dit aussi parfois un *arc paramétré*. Pour Rudin [?], une *courbe* est une application de I dans \mathcal{U} , et un chemin est une courbe continue et \mathcal{C}^1 par morceaux. Il parle de *courbes fermées* et de *chemins fermés* plutôt que de lacets.

²On dit que γ est continu et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux si et seulement si γ est continu sur $[a, b]$ et il existe une subdivision finie $a_0 = a, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n = b$ de $[a, b]$ telle que γ soit de classe \mathcal{C}^1 sur tous les intervalles fermés $[a_{i-1}, a_i]$, $1 \leq i \leq n$. Le plus souvent, on dira seulement " \mathcal{C}^1 par morceaux" au lieu de "continu et \mathcal{C}^1 par morceaux"

- deux chemins $\gamma_1, \gamma_2 : [a_1, b_1], [a_2, b_2] \rightarrow \mathcal{U}$ peuvent être concaténés en $\gamma_1 \cup \gamma_2$ (parfois aussi noté $\gamma_1 + \gamma_2$) : $[a_1, b_1 + b_2 - a_2] \rightarrow \mathcal{U}$ définit par

$$\begin{aligned} t &\mapsto \gamma_1(t) \text{ si } t \in [a_1, b_1] \\ t &\mapsto \gamma_2(t + a_2 - b_1) \text{ si } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{aligned}$$

Si γ_1 et γ_2 sont continus, [continu et \mathcal{C}^1 par morceaux], et si $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, alors $\gamma_1 \cup \gamma_2$ sont continus [continu et \mathcal{C}^1 par morceaux]. Par contre $\gamma_1 \cup \gamma_2$ peut ne pas être de classe \mathcal{C}^1 alors que γ_1 et γ_2 le sont.

EXAMPLE 1.1.3.

- Si a et $b \in \mathbb{C}$, alors $t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t) = (1-t)a + tb$ est un chemin de classe \mathcal{C}^1 appelé *segment orienté* $[a, b]$. Il est de longueur $|b - a|$.
- Pour a et b dans \mathbb{C} , le segment $[a, b]$ admet aussi pour paramétrage (α et β réels) : $t \in [\alpha, \beta] \mapsto \gamma_1(t) = \frac{(\beta-t)a + (t-\alpha)b}{\beta-\alpha}$.
- Si $T \subset \mathbb{C}$ est un triangle dont les sommets z_1, z_2, z_3 sont numérotés positivement, on définit $\partial T = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1]$.
- Pour $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, le cercle $a + C_r$ est l'image du chemin $t \in [0, 2\pi] \mapsto \gamma(t) = a + re^{it}$.

THEOREM 1.1.4. (Jordan) tout lacet, simple, γ , partage le plan en deux domaines dont il est la frontière. En d'autres termes, le complémentaire de γ est la réunion de deux ouverts connexes disjoints : le domaine intérieur, qui est borné, et le domaine extérieur, qui est non borné.

DÉMONSTRATION. C'est un théorème difficile à démontrer, que nous admettons provisoirement. \square

1.1.2. Intégrale d'une fonction sur un chemin. Dans ce qui suit, f est une application définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs dans \mathbb{C} et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ est un chemin continu de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, sur la subdivision $a_0 = a, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n = b$.

DEFINITION 1.1.5. on suppose f continue sur \mathcal{U} . L'expression

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_{\gamma} f(z) dz \\ (1.1.1) \quad &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \end{aligned}$$

est appelée l'intégrale de f sur le chemin γ .

REMARK 1.1.6. cette définition n'introduit aucune forme nouvelle d'intégration. Elle n'est qu'une notation faisant appel à l'intégrale usuelle (Riemann ou Lebesgue).

THEOREM 1.1.7. La valeur de $\int_{\gamma} f$ ne dépend que de $[\gamma]_{or}$: si $\tilde{\gamma}$ est un autre paramétrage de même orientation, (donc $\tilde{\gamma} \in [\gamma]_{or}$) de classe \mathcal{C}^1 par morceaux du chemin $\gamma([a, b])$, alors on a l'égalité

$$\int_{\gamma} f = \int_{\tilde{\gamma}} f$$

en d'autres termes, la valeur de l'intégrale ne dépend pas du paramétrage (de même orientation) du chemin.

DÉMONSTRATION. $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ ou $\phi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \mapsto [a, b]$ est un difféomorphisme. Le changement de variable $t = \phi(s)$ dans (1.1.1) donne

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tilde{a}_i}^{\tilde{a}_{i+1}} f(\gamma(\phi(s))) \gamma'(\phi(s)) \phi'(s) ds \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tilde{a}_i}^{\tilde{a}_{i+1}} f(\tilde{\gamma}(s)) \tilde{\gamma}'(s) ds \\ &= \int_{\tilde{\gamma}} f \end{aligned}$$

où $\tilde{a}_i = \phi^{-1}(a_i)$

□

EXAMPLE 1.1.8.

- (1) Calculer $\int_{a+C_r} \frac{dz}{z}$ pour $r \neq |a| : z(t) = a + re^{it}$ pour t dans un intervalle quelconque $[u, u+2\pi]$ de longueur 2π est un paramétrage de $a+C_r$. Donc, en posant $a = |a|e^{i\alpha}$:

$$\begin{aligned} \int_{a+C_r} \frac{dz}{z} &= \int_u^{u+2\pi} \frac{z'(t)}{z(t)} dt \\ &= \int_u^{u+2\pi} \frac{ire^{it}}{|a|e^{i\alpha} + re^{it}} dt \\ &= \int_u^{u+2\pi} \frac{ir|a|e^{i(t-\alpha)} + ir^2}{|a|^2 + r^2 + 2|a|r \cos(t-\alpha)} dt \end{aligned}$$

on fait le changement de variable $s = t - \alpha$, on sépare partie réelle et imaginaire. On obtient ainsi l'intégrale sous la forme $\int_{u-\alpha}^{u-\alpha+2\pi} iP(s) + Q(s) ds$ où $P(s) = \frac{|a|r \cos s + r^2}{|a|^2 + r^2 + 2|a|r \cos s}$ est une fonction paire et $Q(s) = -\frac{|a|r \sin s}{|a|^2 + r^2 + 2|a|r \cos s}$ une fonction impaire. On prend $u = \alpha - \pi$, l'intervalle d'intégration est $[-\pi, \pi]$ donc l'intégrale de Q est nulle et il reste :

$$\begin{aligned} I &= 2i \int_0^{\pi} P(s) ds \\ &= 2i \int_0^{\pi} \frac{|a|r \cos s + r^2}{|a|^2 + r^2 + 2|a|r \cos s} ds \end{aligned}$$

le changement de variable $s = 2 \arctan x$ donne $\cos s = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, et $ds = \frac{2dx}{1+x^2}$ et en posant $b = \frac{r-|a|}{r+|a|}$:

$$\begin{aligned} I &= 4i \int_0^{+\infty} \frac{|a|r \frac{1-x^2}{1+x^2} + r^2}{|a|^2 + r^2 + 2|a|r \frac{1-x^2}{1+x^2}} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= 4 \frac{ir}{r+|a|} \int_0^{+\infty} \frac{1+bx^2}{(1+x^2)(1+b^2x^2)} dx \end{aligned}$$

on décompose la fraction en éléments simples :

$$\frac{1+bx^2}{(1+x^2)(1+b^2x^2)} = \frac{1}{1+b} \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{b}{1+b^2x^2} \right)$$

et on obtient

$$\begin{aligned} I &= 2i \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{b}{1+b^2x^2} \right) dx \\ &= 2i \left(\arctan x \Big|_0^{+\infty} + \text{sign}(b) \times \arctan y \Big|_0^{+\infty} \right) \end{aligned}$$

soit finalement

$$I = \begin{cases} 0 & \text{si } r < |a| \\ i\pi & \text{si } r = |a| \\ 2i\pi & \text{si } r > |a| \end{cases}$$

Le premier résultat ($r > |a|$) et le dernier ($r < |a|$) sont des cas particuliers de deux théorèmes que nous verrons plus loin (théorème de Cauchy et théorème des résidus), et qui prévoient la valeur de l'intégrale suivant que l'un des pôles de la fonction f est à l'intérieur ou à l'extérieur du lacet γ .

- (2) Pour tout triangle $T \subset \mathbb{C}$, on a $\int_{\partial T} dz = 0$ et $\int_{\partial T} z dz = 0$. Soient a, b, c les sommets de T . La frontière ∂T se décompose en trois segments $[a, b]$, $[b, c]$ et $[c, a]$ paramétrés par $z_{[x,y]}(t) = (1-t)x + ty$, $t \in [0, 1]$. L'intégrale se décompose en trois : $\int_{\partial T} dz = \int_{[a,b]} dz + \int_{[b,c]} dz + \int_{[c,a]} dz$ où

$$\begin{aligned} \int_{[x,y]} dz &= \int_0^1 (-x + y) dt \\ &= y - x \end{aligned}$$

on en déduit :

$$\int_{\partial T} dz = 0$$

pour la deuxième intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{[x,y]} z dz &= \int_0^1 ((1-t)x + ty)(-x + y) dt \\ &= (-x + y) \left(x \int_0^1 (1-t) dt + y \int_0^1 t dt \right) \\ &= \frac{y^2 - x^2}{2} \end{aligned}$$

on en déduit également :

$$\int_{\partial T} z dz = 0$$

DEFINITION 1.1.9. soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ un chemin \mathcal{C}^1 par morceaux. La *longueur* de γ est définie par

$$\text{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

ne dépend pas du paramétrage et elle est finie.

DÉMONSTRATION. γ étant \mathcal{C}^1 par morceaux, γ' est bornée sur $[a, b]$ et on a $\int_a^b |\gamma'(t)| dt \leq |b - a| \sup |\gamma'|$. La longueur est donc finie. Si $\hat{\gamma}$ est un autre paramétrage de γ , de même orientation, $\hat{\gamma} = \gamma \circ \phi$ où $\phi : [\hat{a}, \hat{b}] \rightarrow [a, b]$ est un difféomorphisme croissant. Donc $\phi' > 0$ sur $[\hat{a}, \hat{b}]$ et $\text{long}(\hat{\gamma}) = \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} |\hat{\gamma}'(s)| ds = \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} |\gamma'(\phi(s)) \phi'(s)| ds = \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} |\gamma'(\phi(s))| \phi'(s) ds = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \text{long}(\gamma)$. Si ϕ est décroissante alors $\hat{\gamma}$ est d'orientation opposée à celle de γ et $\phi' < 0$. Dans ce cas, $\text{long}(\hat{\gamma}) = -\int_{\hat{a}}^{\hat{b}} |\hat{\gamma}'(s)| ds = \int_{\hat{b}}^{\hat{a}} |\hat{\gamma}'(s)| ds$ et comme ϕ est décroissante, $\hat{a} > \hat{b}$ la valeur trouvée est bien positive. \square

PROPOSITION 1.1.10. *soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue. Soit γ un chemin de \mathcal{U} continu et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Alors*

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \sup_{\gamma} |f| \times \text{long}(\gamma)$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate de la définition et des propriétés élémentaires de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \sup_{\gamma} |f| \times \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &= \sup_{\gamma} |f| \times \text{long}(\gamma) \end{aligned}$$

□

EXAMPLE 1.1.11.

- (1) Pour a et $b \in \mathbb{C}$, le segment $[a, b]$ est de longueur

$$\begin{aligned} \text{long}([a, b]) &= \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} ((1-t)a + tb) \right| dt \\ &= |b - a| \end{aligned}$$

- (2) Périmètre du cercle C_r , $r > 0$: le lacet C_r admet comme paramétrage $z(t) = re^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$ donc

$$\begin{aligned} \text{long}(C_r) &= \int_{-\pi}^{\pi} |z'(t)| dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |ire^{it}| dt \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

Une propriété très utile dont il est fait constamment usage, et qui n'est nulle part démontrée.

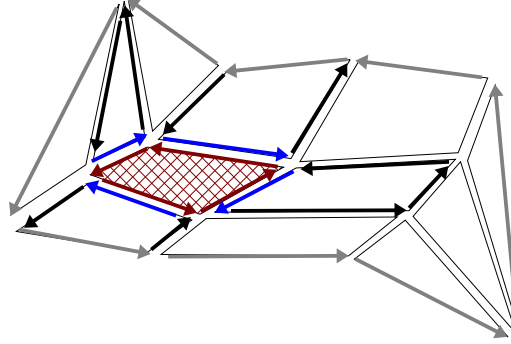
PROPOSITION 1.1.12. *soit \mathcal{U} un ouvert, $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ et $K \subset \mathcal{U}$ une partie de \mathcal{U} dont la frontière ∂K est continue et \mathcal{C}^1 par morceaux. Soit $\mathfrak{M} = \{K_i, 1 \leq i \leq n\}$ un maillage de K , (c'est à dire une partition de K en sous ensembles K_i dont les frontières ∂K_i sont continues et \mathcal{C}^1 par morceaux). Alors*

$$\int_{\partial K} f = \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\partial K_i} f$$

REMARK 1.1.13. Remarques

- je ne sais pas démontrer correctement cette proposition.
- Elle indique qu'en parcourant toutes les frontières des éléments ∂K_i , chaque arête intérieure est parcourue deux fois dans deux sens opposés. En effet, deux sommets voisins, p et s définissent une arête $[p, s]$ qui est commune à deux éléments et deux seulement disons K_i et K_j . Lorsque l'on somme les intégrales sur tous les éléments du maillage, les deux intégrales sur le segment $[p, s]$ s'annulent. (voir figure 1.1.1)

FIG. 1.1.1. propriété des maillages



1.1.3. Indice d'un lacet par rapport à un point.

DEFINITION 1.1.14. soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet continu et \mathcal{C}^1 par morceaux, tel que $z_0 \notin \gamma([a, b])$. On pose alors

$$\text{Ind}_{z_0}(\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

qui est l'*indice du lacet* γ par rapport au point z_0 .

PROPOSITION 1.1.15. avec les notations précédentes, l'indice vérifie :

- (1) $\text{Ind}_{z_0}(\gamma) \in \mathbb{Z}$.
- (2) Pour tout $\delta > 0$, le lacet $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + \delta e^{int}$ a pour indice $\text{Ind}_{z_0}(\gamma) = n$.
- (3) La fonction $z_0 \mapsto \text{Ind}_{z_0}(\gamma)$ est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ et nulle sur l'unique composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$.
- (4) Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets de même origine, alors

$$\text{Ind}_{z_0}(\gamma_1 + \gamma_2) = \text{Ind}_{z_0}(\gamma_1) + \text{Ind}_{z_0}(\gamma_2).$$

DÉMONSTRATION.

- (1) On suppose que $a = 0$ et $b = 1$. Pour $t \in [0, 1]$, posons

$$\phi(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^t \frac{\gamma'(s) ds}{\gamma(s) - z_0}$$

de sorte que $\text{Ind}_{z_0}(\gamma) = \phi(1)$ et

$$G(t) = \exp(2i\pi\phi(t))$$

On a alors, sauf peut-être sur un ensemble fini, $S \subset [0, 1]$, de valeurs de t

$$G'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} G(t)$$

donc, excepté sur S ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma(t) - z_0}{G(t)} \right) &= \frac{\gamma'(t) G(t) - (\gamma(t) - z_0) G'(t)}{G^2(t)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\frac{\gamma - z_0}{G}$ est une fonction continue, dont la dérivée s'annule sur $[0, 1] \setminus S$, où S est fini, c'est donc une fonction constante

$$\frac{\gamma(0) - z_0}{G(0)} = \frac{\gamma(1) - z_0}{G(1)}$$

Le chemin est fermé, donc $\gamma(0) = \gamma(1)$, donc $G(0) = G(1) = 1$, et on obtient enfin $\exp(2i\pi\phi(1)) = 1$ et par conséquent $\text{Ind}_{z_0}(\gamma) = \phi(1) \in \mathbb{Z}$

(2) Un calcul direct fournit le résultat :

$$\text{Ind}_{z_0}(\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta \text{ine}^{int}}{\delta e^{int}} dt = n$$

(3) La fonction $z_0 \mapsto \text{Ind}_{z_0}(\gamma)$ est continue de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$, à valeurs dans \mathbb{Z} . Elle est donc constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$.

De plus $\left| \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} \right| \leq \text{long}(\gamma) \times \sup_{z \in \gamma} \frac{1}{|z - z_0|}$ donc

$$\lim_{|z_0| \rightarrow \infty} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 0$$

si bien que l'indice sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ est nul.

(4) On peut composer les lacets car $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$

□

CLAIM 1.1.16. Si γ est un lacet simple, on pose

$$\begin{aligned} \text{Int}(\gamma) &= \{z \in \mathbb{C}, |\text{Ind}_z(\gamma)| \geq 1\} \\ \text{Ext}(\gamma) &= \{z \in \mathbb{C}, \text{Ind}_z(\gamma) = 0\} \end{aligned}$$

et on admet que

$$\mathbb{C} = \text{Int}(\gamma) \cup \text{Ext}(\gamma) \cup \gamma^*$$

est la partition définie par le théorème de Jordan (1.1.4)

1.1.4. formes différentielles, formule de Green. La notion de forme différentielle est en principe étudiée en deuxième année. Ces quelques définitions et théorèmes sont à connaître.

DEFINITION 1.1.17. on appelle *forme différentielle* (de degré 1) sur un ouvert \mathcal{U} toute application α de \mathcal{U} dans l'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^2$ des formes linéaires sur \mathbb{R}^2 .

EXAMPLE 1.1.18. la base duale $\{dx, dy\}$ qui est définie par $dx : (x, y) \mapsto x$ et $dy : (x, y) \mapsto y$. Par abus de notation, on note de la même manière la forme linéaire dx [resp. dy] et la forme différentielle constante $(s, t) \in \mathcal{U} \mapsto dx$ [resp. $(s, t) \in \mathcal{U} \mapsto dy$].

DEFINITION 1.1.19.

– on suppose que f est différentiable sur \mathcal{U} . Pour $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$, l'application $df(x_0, y_0)$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^2 de matrice $(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))^t$ donc l'application

$$\begin{aligned} df &: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto df(x, y) = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy \end{aligned}$$

est une forme différentielle appelée la différentielle de f . Moyennant l'abus de notation signalé ci-dessus, on peut également écrire

$$df = f'_x dx + f'_y dy$$

- soit $\alpha(x, y) = u(x, y) dx + v(x, y) dy$ une forme différentielle définie sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 . Posons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. L'intégrale de la forme différentielle α le long du chemin γ est définie par

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \alpha &= \int_{\gamma} u(x, y) dx + v(x, y) dy \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (u(\gamma(t)) x'(t) + v(\gamma(t)) y'(t)) dt \end{aligned}$$

Dans laquelle il suffit de remplacer $u(x, y)$ par $u(x(t), y(t))$, $v(x, y)$ par $v(x(t), y(t))$, et dx par $x'(t) dt$ et dy par $y'(t) dt$.

- une forme différentielle est dite *exacte* sur \mathcal{U} si et seulement s'il existe une fonction différentiable dont elle est la différentielle.

THEOREM 1.1.20. *pour qu'une forme différentielle $\alpha = Pdx + Qdy$ soit exacte sur l'ouvert \mathcal{U} , il suffit que \mathcal{U} soit simplement connexe et que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ sur \mathcal{U} .*

THEOREM 1.1.21. *soit γ un chemin de \mathbb{C} , et $\gamma^* = \gamma[0, 1]$; si f est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de γ^* alors*

$$\int_{\gamma^*} df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

THEOREM 1.1.22. *soit $\alpha = df$ une forme différentielle exacte sur \mathcal{U} , et $A = \gamma(0)$ et $B = \gamma(1)$ les extrémités du chemin γ . Alors l'intégrale de α sur γ vérifie*

$$\int_{\gamma} \alpha = f(B) - f(A)$$

Autrement dit, l'intégrale d'une forme différentielle exacte sur un chemin ne dépend que des extrémités de ce chemin. En particulier, si γ est fermé ($A = B$), alors $\int_{\gamma} \alpha = 0$.

EXAMPLE 1.1.23. calculer la valeur de l'intégrale $I = \int_{\gamma} y dx + x dy$ où γ est le cercle trigonométrique parcouru dans le sens direct. Le cercle admet le paramétrage $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in [0, 2\pi[$. Donc $I = \int_0^{2\pi} (\sin t (-\sin t) + \cos t \cos t) dt$ et $I = 0$ ce qui ne doit pas surprendre puisque la forme $y dx + x dy$ est exacte comme différentielle de $\varphi(x, y) = xy$.

Tout ce qui vient d'être dit se généralise sans difficulté à une fonction $f = (f_1, \dots, f_p)$ à valeurs dans \mathbb{R}^p , $p > 1$, il suffit d'appliquer les théorèmes, remarques et définitions à chaque composante de f .

Lorsque $p = 2$, on peut identifier \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} et les écritures, tout en devenant plus délicates, se simplifient considérablement. C'est d'ailleurs l'objet de l'analyse complexe et de cette unité MM1.

1.2. Théorèmes et formules de Cauchy dans des ouverts convexes

Le principe de la théorie de Cauchy présentée ici : \mathcal{U} convexe, $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ et γ lacet simple de \mathcal{U} :

Théorème de Goursat (1.2.4) : pour tout triangle $T \subset \mathcal{U}$, $\int_{\partial T} f = 0 \Rightarrow$

f , holomorphe, admet donc une primitive F et (1.2.1) $\int_{\gamma} F' = F(b) - F(a) \Rightarrow$

Théorème de Cauchy : $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} F' = 0 \Rightarrow$

Formules de Cauchy, \Rightarrow

f est analytique

1.2.1. Préliminaires.

THEOREM 1.2.1. (cf [?], p199) soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} et $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$, telle que f' soit continue sur \mathcal{U} ³. Alors

$$\int_{\gamma} f' = 0$$

pour tout lacet γ , continu et \mathcal{C}^1 par morceaux de \mathcal{U} .

DÉMONSTRATION. Soit $[a, b]$ la source du chemin γ , compte tenu de l'identité $(f \circ \gamma)' = f' \circ \gamma \times \gamma'$, on peut écrire :

$$\int_{\gamma} f' = \int_a^b f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$$

□

THEOREM 1.2.2. (cf [?], p199) pour tout entier $n \neq -1$ on a

$$\int_{\gamma} z^n dz = 0$$

pour tout lacet γ , continu et \mathcal{C}^1 par morceaux de \mathcal{U} .

DÉMONSTRATION. Puisque z^n est la dérivée de $\frac{z^{n+1}}{n+1}$.

□

REMARK 1.2.3. pour $n = -1$ le résultat n'est pas vrai (voir par exemple le théorème de l'indice 1.1.15).

THEOREM 1.2.4. (Goursat) Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} , et $T \subset \mathcal{U}$, un triangle plein, fermé. Pour $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ (ou $f \in (\mathcal{H}(\mathcal{U}) \setminus \{z_0\}) \cap \mathcal{C}(\mathcal{U})$ on a

$$\int_{\partial T} f = 0$$

DÉMONSTRATION. (1) Supposons pour commencer que $z_0 \notin T$. On divise le triangle $T = T_0$ en 4 triangles semblables τ_i , $1 \leq i \leq 4$ en joignant les milieux des cotés de T . On définit T_1 comme celui de ces quatre triangles qui donne la plus grande valeur pour $\left| \int_{\partial \tau_i} f \right|$. On définit de manière analogue T_2 à partir de T_1 puis T_k pour $k \in \mathbb{N}$. On a donc

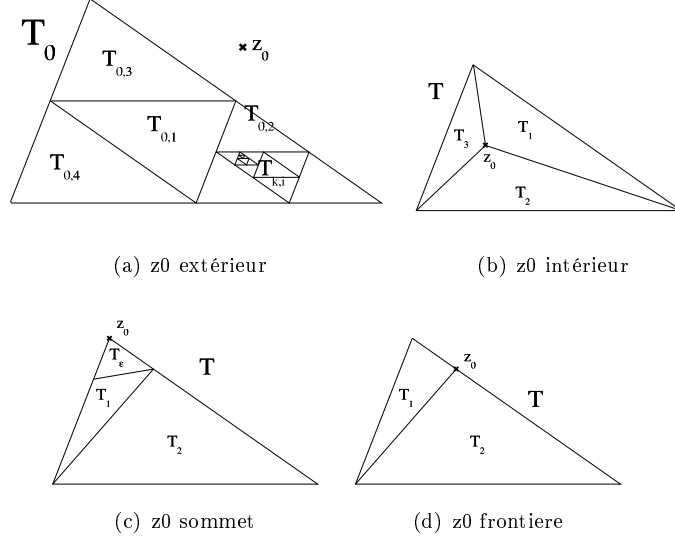
$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T} f \right| &\leq 4 \left| \int_{\partial T_1} f \right| \dots \\ &\leq 4^k \left| \int_{\partial T_k} f \right| \end{aligned}$$

La suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de compacts emboîtés dont le diamètre tend vers 0. Donc

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} T_k = \{z_1\}$$

³Nous verrons plus loin que si $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ alors f' est nécessairement continue et même analytique! Ce qui est un des résultats les plus surprenant de l'analyse.

FIG. 1.2.1. construction de triangles pour la démonstration du théorème de Goursat :



or, on sait que (voir (2)) $\int_{\partial T_k} (z - z_1) f'(z_1) dz$ est nul ainsi que $\int_{\partial T_k} f(z_1) dz$.
Donc

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\partial T} f \right| &\leq 4^k \left| \int_{\partial T_k} f(z) dz \right| \\
 &= 4^k \left| \int_{\partial T_k} [f(z) - f(z_1) - (z - z_1) f'(z_1)] dz \right| \\
 &= 4^k \left| \int_{\partial T_k} (z - z_1) \left[\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - f'(z_1) \right] dz \right| \\
 &\leq 4^k \times \max_{a,b \in T_k} |a - b| \times \text{long}(\partial T_k) \times \sup_{|z - z_1| \leq \text{diam}(T_k)} \left| \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - f'(z_1) \right|
 \end{aligned}$$

où $\text{diam}(T_k)$ est le diamètre de T_k , $\text{long}(\partial T_k)$ est la longueur du périmètre de T_k , et $\max_{a,b \in T_k} |a - b| \leq \text{diam}(T_k)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\partial T} f \right| &\leq 4^k \times 2^{-k} \text{diam}(T) \times 2^{-k} \text{long}(\partial T) \\
 &\quad \times \sup_{|z - z_1| \leq 2^{-k} \text{diam}(T)} \left| \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - f'(z_1) \right|
 \end{aligned}$$

et en faisant tendre k vers l'infini, on obtient le résultat, puisque f est \mathbb{C} -différentiable en z_1

- (2) Si z_0 est intérieur à T on commence par diviser T en 3 triangles délimités par les droites joignant z_0 aux sommets de T (fig 1.2.1). Pour chaque triangle, z_0 est sur un sommet on fait le raisonnement du paragraphe suivant.
- (3) Si z_0 est un des sommets de T , on le découpe (voir 1.2.1) en trois triangles T_1, T_2 , et T_ϵ , z_0 étant dans T_ϵ , ϵ arbitrairement petit. On remarque que l'intégrale de f sur ∂T est la somme des intégrales de f sur les frontières des triangles. Sur les deux triangles T_1 et T_2 ne contenant pas z_0 , l'intégrale

est nulle. Comme ϵ est arbitrairement petit et f majorée, la majoration

$$\left| \int_{\partial T_\epsilon} f \right| \leq \text{long}(\partial T_\epsilon) \times \sup_{\partial T_\epsilon} |f|$$

montre que l'intégrale tend vers 0 avec ϵ .

- (4) Enfin, si z_0 est un point arbitraire de la frontière ∂T , on découpe le triangle T en de manière à ce que z_0 soit un sommet des deux triangles et on applique (3).

□

1.2.2. Théorème de Cauchy dans un ouvert convexe.

THEOREM 1.2.5. (*Cauchy*) Soit \mathcal{U} un ouvert convexe, $p \in \mathcal{U}$ et $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ (ou bien $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U} \setminus \{p\}) \cap \mathcal{C}(\mathcal{U})$).

- (1) Alors f admet une primitive $F \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$, c'est à dire telle que $F' = f$
 (2) pour tout lacet γ continu et \mathcal{C}^1 par morceaux dans \mathcal{U} , on a

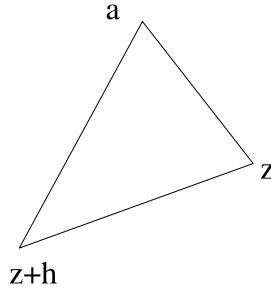
$$\int_{\gamma} f = 0$$

- (3) Si γ_0 et γ_1 sont deux chemins continus et \mathcal{C}^1 par morceaux de \mathcal{U} ayant mêmes extrémités, alors

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

DÉMONSTRATION.

- (1) Soit a dans \mathcal{U} . Comme \mathcal{U} est convexe, il contient le segment $[a, z]$ pour



tout point z de \mathcal{U} , et on peut définir

$$F(z) = \int_{[a, z]} f$$

Soit h tel que $z+h \in \mathcal{U}$. Le triangle $T = \{a, z, z+h\} = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} [a, z+th]$ est inclus dans \mathcal{U} . Le théorème de Goursat (1.2.4) peut s'appliquer au triangle T et on obtient $\int_{\partial T} f = \int_{[a, z+h]} f + \int_{[z+h, z]} f + \int_{[z, a]} f = 0$ donc

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \int_{[a, z+h]} f - \int_{[a, z]} f \\ &= \int_{[z, z+h]} f \end{aligned}$$

On peut écrire $\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{(\int_{[z, z+h]} f) - hf(z)}{h}$ mais

$$\begin{aligned} hf(z) &= f(z) \times \int_{[z, z+h]} dt \\ &= \int_{[z, z+h]} f(z) dt \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{[z, z+h]} (f(t) - f(z)) dt \right| \\ &\leq \sup_{t \in [z, z+h]} |f(t) - f(z)| \end{aligned}$$

et pour $h \rightarrow 0$, on obtient le premier résultat, car f est continue en z .

(2) Le théorème (1.2.1) permet de conclure pour le deuxième point.

(3) On applique le point 2 au lacet $\gamma = \gamma_0 \cup (-\gamma_1)$.

□

REMARK 1.2.6. Le point 3. indique que si \mathcal{U} est convexe, $a, b \in \mathcal{U}$ et si $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$, alors on peut parler (sans autre précision) de l'intégrale de f de a à b puisqu'elle ne dépend pas du chemin suivi pour aller de a à b .

Si pour tout lacet γ continu et \mathcal{C}^1 par morceaux dans \mathcal{U} , on a $\int_{\gamma} f = 0$, alors f admet une primitive, par exemple : $F(z) = \int_{[a, z]} f(\xi) d\xi$.

EXAMPLE 1.2.7. considérer le triangle $T_R = \{0, R, (1+i)R\}$ et la fonction $z \mapsto f(z) = \exp(-z^2)$ pour en déduire la valeur de l'intégrale de Fresnel $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$. (On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$)

Par le théorème de Cauchy (1.2.5) $\int_{\partial T_R} f = 0$ mais aussi $\int_{\partial T_R} f = \int_{[0, R]} f + \int_{[R, (1+i)R]} f + \int_{[(1+i)R, 0]} f$. Calculons séparément ces trois intégrales :

$$\begin{aligned} I_1(R) : &= \int_{[0, R]} f = \int_0^R e^{-t^2} dt \\ I_2(R) &:= \int_{[R, (1+i)R]} f \\ &= \int_0^1 \exp\left(-(1-it)^2 R^2\right) iR dt \\ &= iR \int_0^1 \exp\left((t^2 - 1) R^2\right) \exp(2itR^2) dt \\ |I_2(R)| &\leq R \exp(-R^2) \int_0^1 \exp(t^2 R^2) dt \\ &\leq R \exp(-R^2) \int_0^1 \exp(tR^2) dt \quad (\text{car } t < t^2 \text{ sur } [0, 1]) \\ &= R \exp(-R^2) \frac{[\exp(tR^2)]_0^1}{R^2} \\ &= \frac{1 - \exp(-R^2)}{R} \end{aligned}$$

D'où on déduit que $\lim_{R \rightarrow \infty} I_2(R) = 0$ et enfin

$$\begin{aligned}
 I_3(R) : &= \int_{[(1+i)R, 0]} f \\
 &= - \int_0^R \exp\left(-(1+i)^2 s^2\right) (1+i) ds \\
 &= - \int_0^R \exp(-2is^2) (1+i) ds \\
 &= - \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \times \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \exp(-it^2) dt
 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en faisant tendre R vers ∞ , $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \times \int_0^\infty \exp(-it^2) dt$ soit, finalement

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt = \int_0^\infty \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

1.2.3. Formule de Cauchy (ou formules de la moyenne) dans un ensemble convexe. C'est dans le théorème suivant que l'hypothèse $g \in \mathcal{H}(\mathcal{U} \setminus \{p\}) \cap \mathcal{C}(\mathcal{U})$, plutôt que $g \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ est utilisée.

THEOREM 1.2.8. (Formule de Cauchy) Soit γ un lacet continu et \mathcal{C}^1 par morceaux, dans un ouvert convexe \mathcal{U} et soit $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$. Si $z \in \mathcal{U} \setminus \gamma^*$ alors

$$(1.2.1) \quad f(z) \times \text{Ind}_z(\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

DÉMONSTRATION. Soit $z \in \mathcal{U} \setminus \gamma^*$. Définissons la fonction

$$(1.2.2) \quad g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & \text{si } \xi \neq z \\ f'(z) & \text{si } \xi = z \end{cases}$$

alors g est holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus \{z\}$ et continue en z , par définition de la dérivée. Elle vérifie donc les hypothèses du théorème de Cauchy (1.2.5). Donc

$$(1.2.3) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma g = 0$$

et on substitue (1.2.2) dans (1.2.3) pour obtenir (1.2.1). \square

REMARK 1.2.9. plus loin, on verra une généralisation de ce théorème à un ouvert \mathcal{U} non nécessairement convexe, pourvu que le chemin γ soit homotope à un point dans \mathcal{U} . La démonstration sera quasiment identique.

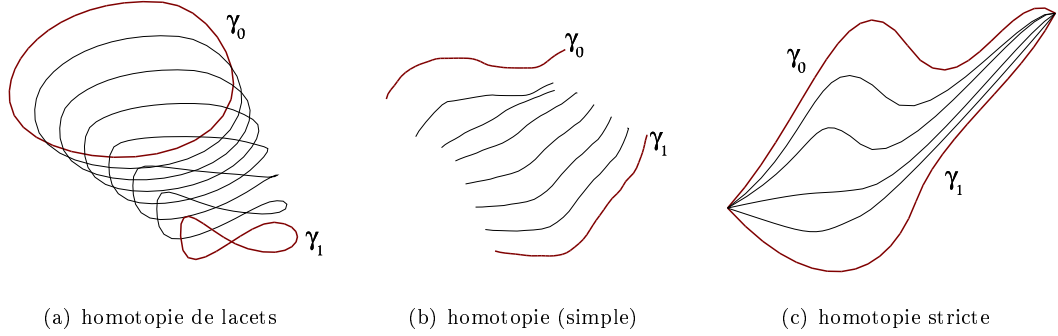
1.3. Théorème et formules de Cauchy pour les chemins homotopes

1.3.1. homotopie. l'homotopie traduit l'idée de déformation continue d'une courbe à une autre (voir figure 1.3.1).

DEFINITION 1.3.1. soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert et γ_0 et $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ deux chemins continus définis sur un même intervalle.

- (1) On dit que γ_0 et γ_1 sont *homotopes dans \mathcal{U}* s'il existe $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$, continue des deux variables, dite *homotopie de chemins*, telle que $H(., 0) = \gamma_0$ et $H(., 1) = \gamma_1$.
- (2) Si γ_0 et γ_1 ont même extrémité, on dit qu'ils sont *homotopes strictement dans \mathcal{U}* lorsqu'il existe $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$, continue des deux variables,

FIG. 1.3.1. exemples d'homotopies



dite *homotopie stricte de chemins*, telle que $H(., 0) = \gamma_0$ et $H(., 1) = \gamma_1$ et

$$H(a, .) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a) \text{ et } H(b, .) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$$

- (3) Si γ_0 et γ_1 sont des lacets, on dit qu'ils sont *homotopes au sens des lacets dans \mathcal{U}* lorsqu'il existe $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$, continue des deux variables, dite *homotopie de lacets*, telle que $H(., 0) = \gamma_0$ et $H(., 1) = \gamma_1$ et $H(., u)$ est un lacet pour tout $u \in [0, 1]$.

REMARK 1.3.2. la condition “dans \mathcal{U} ” est essentielle pour définir l'homotopie. Deux chemins peuvent être homotopes dans \mathcal{U} et ne pas l'être dans $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \setminus \{z_0\}$

PROPOSITION 1.3.3. *l'homotopie de chemins, l'homotopie stricte de chemins, et l'homotopie de lacets sont des relations d'équivalence.*

DÉMONSTRATION. Pour l'homotopie de chemins :

La relation est trivialement réflexive : $H(., t) = \gamma$.

Si γ_0 et γ_1 sont homotopes dans \mathcal{U} alors il existe $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ continue des deux variables, telle que $H(., 0) = \gamma_0$ et $H(., 1) = \gamma_1$. Donc $\tilde{H}(s, t) = H(s, 1 - t)$ vérifie $\tilde{H}(., 0) = \gamma_1$ et $\tilde{H}(., 1) = \gamma_0$ donc γ_1 et γ_0 sont homotopes, la relation est symétrique.

Elle est transitive : si γ_0 et γ_1 (γ_1 et γ_2) sont homotopes, d'homotopie H_0 et H_1 , alors γ_0 et γ_2 sont homotopes, d'homotopie $H(., t) = \begin{cases} H_0(., 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_1(., 2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$.

On vérifie que H est bien continue en $t = \frac{1}{2}$: $H(., \frac{1}{2}) = H_0(., 1) = H_1(., 0) = \gamma_1$.

Les deux autres formes homotopies se traitent de manière analogue. \square

REMARK 1.3.4. l'homotopie a été définie en se limitant à des chemins de même source. Cela suffit pour la définir sur les classes d'équivalence avec conservation de l'orientation :

- On dira que deux classes $[\gamma_0]_{or}$ et $[\gamma_1]_{or}$ sont homotopes strictement si et seulement si $[\gamma_0]_{or}$ et $[\gamma_1]_{or}$ contiennent deux chemins $g_0, g_1 : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ homotopes strictement. Soit $H : (t, u) \in [a, b] \times [0, 1] \mapsto H(t, u) \in \mathcal{U}$ l'homotopie stricte des chemins g_0 et g_1 . Pour toute autre paire $\hat{g}_0, \hat{g}_1 : [\hat{a}, \hat{b}] \rightarrow \mathcal{U}$ de chemins de $[\gamma_0]_{or} \times [\gamma_1]_{or}$, de même source $[\hat{a}, \hat{b}]$, on peut écrire $\hat{g}_0 = g_0 \circ \phi_0$ et $\hat{g}_1 = g_1 \circ \phi_1$ où ϕ_0 et $\phi_1 : [\hat{a}, \hat{b}] \rightarrow [a, b]$ sont des changements de variables.

- Alors la fonction $\hat{H}(\hat{t}, u) = H((1-u)\phi_0(\hat{t}) + u\phi_1(\hat{t}), u)$ définit bien une homotopie stricte de $[\hat{a}, \hat{b}] \times [0, 1]$ sur \mathcal{U} car $\hat{H}(\hat{t}, 0) = H(\phi_0(\hat{t}), 0) = g_0(\phi_0(\hat{t})) = \hat{g}_0(\hat{t})$ et $\hat{H}(\hat{t}, 1) = H(\phi_1(\hat{t}), 1) = g_1(\phi_1(\hat{t})) = \hat{g}_1(\hat{t})$.
- si γ_0 et $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ sont des chemins définis sur un même intervalle, et équivalents de même orientation, alors ils sont homotopes strictement : si ϕ est le changement de variable, $\gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi$, on pose $H(t, u) = \gamma_0((1-u)t + u\phi(t))$. Ceci permet de définir l'homotopie pour les classes d'équivalence (avec conservation de l'orientation).

EXAMPLE 1.3.5.

- (1) Dans \mathbb{C} deux chemins continus sont toujours homotopes. Soit $\mathcal{U} = \mathbb{C}$, γ_0 et γ_1 deux chemins continus quelconques dont la source est $[a, b]$. Alors $H : (t, s) \in [a, b] \times [0, 1] \mapsto H(t, s) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$ définit une homotopie de γ_0 sur γ_1 dans \mathbb{C} .
- (2) Prenons $\mathcal{U} = \mathbb{C}$, et $\gamma_0 = C_1$ alors $H : (t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, 1] \mapsto H(t, s) = (1-s)e^{it}$ est une homotopie de lacets dans \mathbb{C} de γ_0 sur 0. Par contre ça n'est pas une homotopie de γ_0 sur 0 dans $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. On peut montrer que γ_0 n'est pas homotope à 0 dans $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

PROPOSITION 1.3.6. Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets homotopes, de $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ alors

$$\text{Ind}_{z_0}(\gamma_1) = \text{Ind}_{z_0}(\gamma_2).$$

1.3.2. Théorème de Cauchy pour des chemins homotopes.

THEOREM 1.3.7. soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ (ou bien $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U} \setminus \{p\}) \cap \mathcal{C}(\mathcal{U})$).

- (1) Si γ_0 et γ_1 sont des lacets continus et \mathcal{C}^1 par morceaux de \mathcal{U} homotopes dans \mathcal{U} au sens des lacets, alors

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

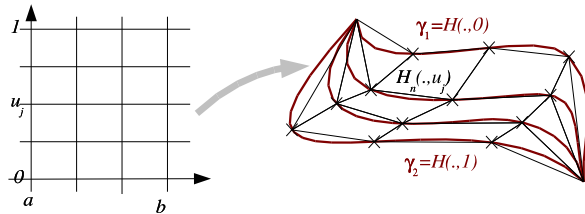
En particulier, si γ_1 est réduit à un point,

$$\int_{\gamma_0} f = 0$$

- (2) Si γ_0 et γ_1 sont deux chemins continus et \mathcal{C}^1 par morceaux de \mathcal{U} ayant mêmes extrémités, strictement homotopes dans \mathcal{U} , alors

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

DÉMONSTRATION. On commence par démontrer 2.

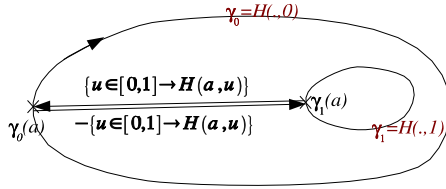


Pour cela, on dispose de $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ continue telle que $H(., 0) = \gamma_0$ et $H(., 1) = \gamma_1$ et $H(a, .) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ et $H(b, .) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. On construit une suite H_n d'approximations de H , en posant $t_j = a + j\frac{b-a}{n}$, $0 \leq j \leq n$ et $u_j = \frac{j}{n}$, $0 \leq j \leq n$. La fonction H_n est choisie bilinéaire en (t, u)

et coïncidant avec H aux points (t_i, u_j) pour $0 \leq i, j \leq n^4$. La suite H_n converge uniformément vers H sur $[a, b] \times [0, 1]$ car c'est une suite convergente sur un compact, donc uniformément convergente. Puis on démontre que H_n est une homotopie stricte de chemins entre $H_n(., 0)$ et $H_n(., 1)$. Les fonctions $H_n(., u)$ et $H_n(t, .)$ sont toutes continues et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux (contrairement à $H(., u)$ et $H(t, .)$) on pourra leur appliquer le théorème de Cauchy.

On écrit $\int_{H_n(., 0)} f - \int_{H_n(., 1)} f = \sum_{0 \leq i, j < n} \int_{H_n(\partial R_{ij}^{(n)})} f$ où $H_n(\partial R_{ij}^{(n)})$ désigne le chemin image par H_n des 4 cotés du rectangle $R_{ij}^{(n)}$. On montre ensuite que l'on peut appliquer le théorème de Cauchy sur les convexes à chacune des intégrales $\int_{H_n(\partial R_{ij}^{(n)})} f$, car pour n assez grand, chaque $H_n(\partial R_{ij}^{(n)})$ est inclus dans une boule toute entière contenue dans \mathcal{U} . D'où l'égalité $\int_{H_n(., 0)} f = \int_{H_n(., 1)} f$, et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$.

Pour montrer 1, on observe que si γ_0 et γ_1 sont deux lacets homotopes au sens des lacets, si H est l'homotopie, alors les deux chemins γ_1 et $(-\{u \in [0, 1] \mapsto H(a, u)\}) + \gamma_0 + \{u \in [0, 1] \mapsto H(a, u)\}$ sont strictement homotopes en tant que chemins de même extrémité.



On leur applique le résultat précédent. \square

Autre démonstration: (plus analytique). Si on suppose que l'homotopie H de γ_0 sur γ_1 est de classe \mathcal{C}^2 , on pose $\gamma_\lambda = H(., \lambda)$.

Dérivons la fonction $g(\lambda) = \int_{\gamma_\lambda} f = \int_a^b f(H(t, \lambda)) \frac{\partial H}{\partial t}(t, \lambda) dt$:

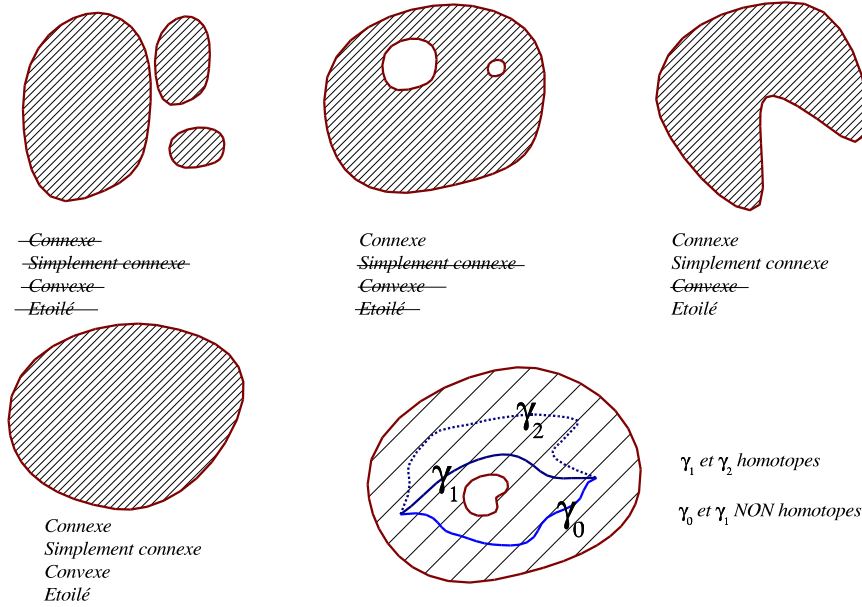
$$\begin{aligned} g'(\lambda) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(f(H(t, \lambda)) \frac{\partial H}{\partial t}(t, \lambda) \right) dt \\ &= \int_a^b \left(f'(H(t, \lambda)) \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, \lambda) \frac{\partial H}{\partial t}(t, \lambda) + f(H(t, \lambda)) \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial \lambda}(t, \lambda) \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left(f(H(t, \lambda)) \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, \lambda) \right) dt \\ &= f(H(b, \lambda)) \frac{\partial H}{\partial \lambda}(b, \lambda) - f(H(a, \lambda)) \frac{\partial H}{\partial \lambda}(a, \lambda) \end{aligned}$$

On a utilisé la symétrie de la dérivation en t et λ .

- (1) Si γ_0 et γ_1 sont strictement homotopes, on a $\forall \lambda, H(a, \lambda) = \gamma_0(a)$ et $\forall \lambda, H(b, \lambda) = \gamma_0(b)$ donc $\frac{\partial H}{\partial \lambda}(b, \lambda) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(a, \lambda) = 0$.
- (2) Si γ_0 et γ_1 sont homotopes au sens des lacets, on a $\frac{\partial H}{\partial \lambda}(a, \lambda) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(b, \lambda)$ car H est de classe \mathcal{C}^2 donc les dérivées premières se raccordent en $H(a, \lambda) = H(b, \lambda)$.

⁴Pour être explicite, sur chaque rectangle $(t, u) \in R_{i+1j+1}^{(n)} = [t_i, t_{i+1}] \times [u_j, u_{j+1}]$, la fonction H_n est définie par : $H_n(t, u) = \frac{u_{j+1}-u}{u_{j+1}-u_j} \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} H(t_i, u_j) + \frac{u_{j+1}-u}{u_{j+1}-u_j} \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} H(t_{i+1}, u_j) + \frac{u-u_j}{u_{j+1}-u_j} \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} H(t_i, u_{j+1}) + \frac{u-u_j}{u_{j+1}-u_j} \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} H(t_{i+1}, u_{j+1})$

FIG. 1.3.2. connexité, simple connexité, homotopie



Dans les deux cas, on a donc $g'(\lambda) = 0$. Donc $g(0) = g(1)$.

Si H n'est pas de classe \mathcal{C}^2 alors on peut approcher H par une suite d'homotopies $H_n \in \mathcal{C}^2([a, b] \times [0, 1], \mathcal{U})$ et on applique le résultat précédent à chaque H_n avec $g_n(\lambda) = \int_{H_n(\cdot, \lambda)} f$ pour obtenir $g_n(0) = g_n(1)$ et en passant à la limite sur n , $g(0) = \lim_n g_n(0) = \lim_n g_n(1) = g(1)$.

REMARK 1.3.8. dans le théorème de Cauchy pour les ensembles convexes, (1.2.5), on demande à l'ouvert \mathcal{U} d'être convexe. Ici la seule hypothèse sur \mathcal{U} est qu'il soit ouvert. Les autres hypothèses restrictives sont reportées sur les lacets ou chemins γ_0 et γ_1 . En cela, le théorème de Cauchy pour les chemins homotopes présenté ici est de portée plus étendue.

PROPOSITION 1.3.9. soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et γ_0 et γ_1 deux lacets continu et \mathcal{C}^1 par morceaux, homotopes dans $\mathcal{U} = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, alors

$$\text{Ind}_{z_0}(\gamma_0) = \text{Ind}_{z_0}(\gamma_1)$$

DÉMONSTRATION. On applique le théorème (1.3.7) à l'ouvert $\mathcal{U} = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ la fonction $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \times \frac{1}{z-z_0}$ et les lacets γ_0 et γ_1 \square

1.3.3. Ouverts simplement connexes.

DEFINITION 1.3.10. soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit qu'il est *simplement connexe* s'il est connexe (c'est à dire connexe par arcs) et que deux chemins continus γ_0 et γ_1 de mêmes extrémités sont toujours strictement homotopes. De manière équivalente, \mathcal{U} est simplement connexe si et seulement si il est connexe et tout lacet est homotope au sens des lacets à un point.

Intuitivement, un ouvert est simplement connexe s'il est connexe, "sans trou". Un ouvert est (-il ?) simplement connexe si et seulement si son complémentaire est connexe?

La définition suivante se trouve (avec une erreur) sur [http ://www.bibmath.net/dico/index.php3 ?action=](http://www.bibmath.net/dico/index.php3?action=)

DEFINITION 1.3.11. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$. On appelle trou de \mathcal{U} toute composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{U}$

Un ouvert \mathcal{U} est dit simplement connexe s'il est connexe, sans trou.

THEOREM 1.3.12. *soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U} \setminus \{a\}) \cap \mathcal{C}(\mathcal{U})$. Alors*

- (1) *si γ est un lacet continu et \mathcal{C}^1 par morceaux de \mathcal{U} , on a*

$$\int_{\gamma} f = 0$$

- (2) *si γ_0 et γ_1 sont deux chemins continus et \mathcal{C}^1 par morceaux de \mathcal{U} ayant les mêmes extrémités, on a*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

- (3) *f admet une primitive complexe F (i.e. telle que $F' = f$) sur \mathcal{U} .*

DÉMONSTRATION.

- (1) Pour le point 1, on applique le théorème de Cauchy pour les chemins homotopes (1.3.7). \mathcal{U} étant simplement connexe, γ est homotope à un point donc $\int_{\gamma} f = 0$.
- (2) Pour le point 2, on utilise le même théorème, puisque γ_0 et γ_1 sont strictement homotopes par définition de \mathcal{U} .
- (3) Soit $z_0 \in \mathcal{U}$, pour tout $z \in \mathcal{U}$, il existe un chemin (seulement) continu $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ qui joint z_0 à z , puisque \mathcal{U} est connexe par arcs. L'intégrale de f sur γ n'est pas définie puisque γ n'est pas \mathcal{C}^1 par morceaux. On va construire un chemin $\gamma_{z_0, z}$, continu et \mathcal{C}^1 par morceaux joignant z_0 et z . L'image $\gamma^* = \gamma([a, b])$ est dans \mathcal{U} qui est ouvert, donc on peut recouvrir γ^* par une famille de disques

$$\gamma^* \subset \bigcup_{t \in [a, b]} (\gamma(t) + D_{\epsilon(t)}) \subset \mathcal{U}$$

L'application γ est continue $[a, b]$ est compact, donc $\gamma^* = \gamma([a, b])$ est compact, on en extrait une famille finie

$$\gamma^* \subset \bigcup_{i=1}^n (\gamma(t_i) + D_{\epsilon_i}) \subset \mathcal{U}$$

On construit alors $\gamma_{z_0, z} = \bigcup_{i=1}^n [\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$ en juxtaposant les segments joignant les centres $\gamma(t_i)$ des disques. On pose alors

$$F(z) = \int_{\gamma_{z_0, z}} f$$

et la fin de la démonstration est analogue à celle du théorème de Cauchy sur les convexes (1.2.5 et 1) : soit r tel que $z + D_r \subset \mathcal{U}$ et soit $h \in D_r$ de sorte que $[z, z+h] \subset \mathcal{U}$. On peut construire un lacet $\gamma_{z_0, z+h}$ joignant $z+h$ et z_0 comme ci dessus. Le lacet $\Gamma = \gamma_{z_0, z} \cup [z, z+h] \cup \gamma_{z+h, z_0}$ est inclus dans \mathcal{U} . Il est donc homotope à un point et $\int_{\Gamma} f = 0$. On obtient donc

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{[z, z+h]} (f(t) - f(z)) dt \right| \\ &\leq \sup_{t \in [z, z+h]} |f(t) - f(z)| \end{aligned}$$

et pour $h \rightarrow 0$, on obtient le résultat.

□

EXAMPLE 1.3.13.

(1) Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \geq 0$, l'ensemble $\mathcal{U} = \mathbb{C} \setminus (z_0 + \overline{D}_r)$ n'est pas simplement connexe. En effet, supposons \mathcal{U} simplement connexe. La fonction $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ vérifie $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ et $\gamma = z_0 + C_{r+1}$ est un lacet de classe \mathcal{C}^∞ inclus dans \mathcal{U} . En vertu du théorème (1.3.12), $\int_\gamma f = 0$. Mais en vertu du théorème de l'indice (1.1.15), cette intégrale vaut $\int_\gamma f = 2i\pi$ ce qui est impossible.

(2) Calcul de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$. Soit $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. On note Γ_r^+ (resp. Γ_r^-) le chemin formé du demi cercle de centre 0, rayon r , inclus dans $\{z, \Im z \geq 0\}$ parcouru dans le sens positif (resp. négatif). Pour $r > \varepsilon$, soit $\gamma_{r,\varepsilon}$ le lacet $\Gamma_r^+ \cup [-r, -\varepsilon] \cup \Gamma_\varepsilon^- \cup [\varepsilon, r]$.

(a) Sur Γ_r^+ : montrons que $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r^+} \frac{\exp(iz)}{z} = 0$. Pour cela, on paramètre Γ_r^+ par $z(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$ puis on calcule

$$\begin{aligned} I_r = \int_{\Gamma_r^+} \frac{\exp(iz)}{z} &= i \int_0^\pi \exp(ire^{it}) dt \\ &= i \int_0^\pi \exp(ir \cos t) \times \exp(-r \sin t) dt \end{aligned}$$

d'où

$$|I_r| \leq \int_0^\pi \exp(-r \sin t) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-r \sin t) dt$$

on note que pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\frac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t$ donc

$$\begin{aligned} |I_r| &\leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{2r}{\pi}t\right) dt \\ &= \frac{\pi}{r} (1 - e^{-r}) \end{aligned}$$

d'où $\lim_{r \rightarrow \infty} |I_r| = 0$

(b) Sur Γ_ε^- : évaluons $I_\varepsilon = \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \frac{\exp(iz)}{z}$. On peut écrire $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{i^n}{n!} z^{n-1} = \frac{1}{z} + \varphi(z)$ où $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$. Donc

$$I_\varepsilon = \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \frac{1}{z} + \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \varphi$$

or, φ est continue donc bornée au voisinage de 0. Donc $\left| \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \varphi \right| \leq \text{long} \Gamma_\varepsilon \times \sup_{\Gamma_\varepsilon} |\varphi| = 2\pi\varepsilon M$ qui tend vers zéro avec ε . Donc

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon &= \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \frac{1}{z} = - \int_0^\pi \frac{i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}} dt \\ &= -i\pi \end{aligned}$$

- (c) Sur $[-r, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, r]$, évaluons, pour $0 < \varepsilon < r$, la somme des deux intégrales

$$\begin{aligned} I_{r,\varepsilon} &= \int_{[-r, -\varepsilon]} \frac{\exp(iz)}{z} + \int_{[\varepsilon, r]} \frac{\exp(iz)}{z} \\ &= \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{\varepsilon}^r \frac{e^{it}}{t} dt \\ &= 2i \int_{\varepsilon}^r \frac{\sin t}{t} dt \end{aligned}$$

- (d) Le théorème de Cauchy pour les chemins homotopes peut s'appliquer ici, ce qui s'écrit : $\int_{\gamma_{r,\varepsilon}} \frac{\exp(iz)}{z} = 0$. On fait maintenant tendre r vers $+\infty$ puis ε vers 0, et on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$