R1.07 TP 2

# Calcul matriciel

11 décembre 2025 – B. Colombel

Un compte-rendu de ce TP (réponses aux exercices et aux questions) est à rédiger sur le notebook *Jupyter* et votre compte rendu doit être déposé sous le nom

`prenom.nom-TP2.ipynb`

dans le dossier relatif à ce TP sur Ametice (R1.07, TP2).

L'algèbre linéaire est la partie des mathématiques qui s'occupe des matrices et des structures vectorielles. Beaucoup de problèmes se ramènent ou s'approchent par des problèmes linéaires, pour lesquels il existe souvent des solutions efficaces.

## 1 Base du calcul matriciel

Le logiciel *sagemath* possède des commandes qui permettent de traiter des matrices et es vecteurs.

Pour définir une matrice, on utilise l'instruction `matrix` en précisant éventuellement l'anneau (ou le corps) de base :

[1]:
```
A = matrix([[1,2,3], [4,5,6]])  # ou matrix(2, 3, [1,2,3,4,5,6])
A
```

[1]:
```
[1 2 3]
[4 5 6]
```

On peut extraire un coefficient :

[2]:
```
A[1, 2]
```

[2]:
```
6
```

ou le modifier :

[3]:
```
A[1, 2] = 11
A
```

Les instructions `identity_matrix(n)` et `diagonal_matrix([ , , ])` permettent d'obtenir la matrice identité d'ordre $n$ et une matrice diagonale quelconque :

[4]:
```
identity_matrix(3)
```

[4]:
```
[1 0 0]
[0 1 0]
[0 0 1]
```

[5]:
```
diagonal_matrix([2,3,4])
```

[5]:
```
[2 0 0]
[0 3 0]
[0 0 4]
```

Il existe également deux commandes permettant de définir une matrice dont tous les coefficients sont nuls et dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

[6]:
```
M = zero_matrix(2, 3)
N = ones_matrix(2, 3)
```

Évidemment, le produit de deux matrices est obtenu avec la multiplication standard `*`. De même, l'inverse d'une matrice (inversible !) est obtenu en la mettant à la puissance $-1$.
D'autres opérations communes comme la transposée (inversion des lignes et des colonnes) et le déterminant (une matrice $A$ est inversible si son déterminant est non nul) sont accessibles par les fonctions `transpose()` et `det()` :

[7]:
```
B = matrix([[1,2],[1,3]])
# on vérifie si B est inversible
det(B)
```

[7]:
```
1
```

[8]:
```
transpose(B)
```

[8]:
```
[1 1]
[2 3]
```

[9]:
```
B*A
```

[9]:
```
[ 9 12 15]
[13 17 21]
```

[10]:
```
B^(-1)
```

[10]:
```
[ 3 -2]
[-1 1]
```

**Exercice 1.** Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer tous les produits possibles à partir de $A$, $B$, $u$, $v$.
2. Calculer $(A-I)^7$ où $I$ est la matrice identité et en extraire le coefficient en position (2,3).
3. Calculer l'inverse de $A$ puis calculer sa trace (c'est-à-dire la somme des coefficients sur la diagonale).

**Exercice 2.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A+B)^2$ puis $A^2+2AB+B^2$.
   Conclure.
2. Mêmes questions avec $C = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -8 & -6 & 26 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & -11 \\ 10 & -5 & 26 & -6 \\ -12 & -23 & 0 & 38 \end{pmatrix}$.
   Quelle est votre conclusion cette fois ?

**Exercice 3**. Soit $M$ la matrice carrée d'ordre 3 ci-dessous :

$$M = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 2 \\ 6 & 8 & -4 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $M^3 - 2M^2 - 5M$ et exprimer le résultat à l'aide de $I_3$.
2. L'inverse de la matrice $M$ est une matrice $N$ telle que $M \times N = N \times M = I_3$.
   Déduire de la question précédente l'inverse de $M$ en fonction de $I_3$, $M$ et $M^2$.
3. L'inverse d'une matrice $A$ s'obtient par la commande `A^(-1)`. Vérifier que la matrice obtenue est bien l'inverse de $M$.

**Exercice 4**. Dans cet exercice, les matrices sont des éléments de $\mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}})$, c'est-à-dire que les coefficients sont des bits (0 ou 1) et que toutes les opérations sont effectuées modulo 2. La matrice $I$ désigne la matice identité. On pose :

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $m^2$ et $m^4$. En déduire $m^6$.
2. Que vaut $m^{37}$ ?
3. Calculer $m^3$ et $m^5$.
4. La matrice $m$ admet-elle une matrice inverse ? Si oui, quelle est son inverse ?
5. Que vaut $(I + m^2)^{21}$ ?