在任意阻力介质中构建等时线

莱昂哈德·欧拉（巴塞尔）

1726 年

众所周知，几何学家们认为，普通的摆线在没有阻力的介质中具有等时性或同周期性，即在重力作用下，向无穷远处的中心匀速引向。在阻力与速度成简单比例的介质中，等时线仍为摆线，这一点由伟大的牛顿在其《自然哲学的原理》第二卷定理 6 中证明。然而，我颇为惊讶地发现，迄今为止尚无人关注在其他阻力假设下的等时线，如前所述这些假设并非虚构。尽管这是一项值得关注的重要研究，因为它能够深入探讨在阻力介质中物体运动以带来科学的增长：我将与公众分享迄今为止我所发现的，以及我成功揭示的在任意阻力介质中的等时曲线，其中力的中心无穷远且均匀吸引，以此为学术界提供一个深入研究这一问题的契机。

为了传授构建此类等时线的最通用方法：设介质按速度函数的比例产生阻力，基于这一最广泛的假设，我如此构建等时线。

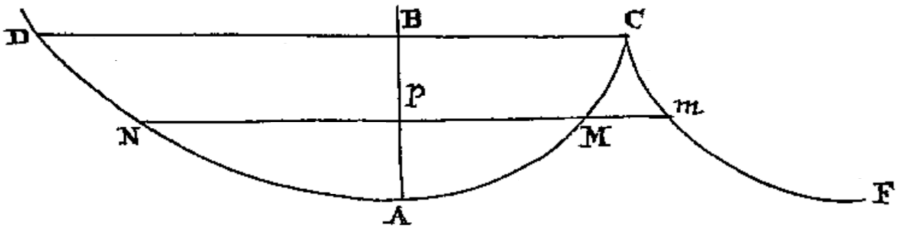

图 1: 在任意阻力介质中构建等时线

设 AB 为垂直线，即水平平面上的法线；在此线上作为轴，描绘曲线 AND，使得给定横坐标 AP 为 x，与此法线相切的法线 PN 为 z 以及与其对应的某个函数 Z，使得 Z 与 z 之间的比例与速度函数或产生阻力的速度之间的比例相同，即令 $dx = zdz + Zdz$。

画出该曲线后，沿相同轴线 AB 构建另一曲线 AMC，使得 NP 延长至 M 时，曲线部分 AM 等于应用法线 PN。此曲线 CMA 即为等时线，即沿其下降的物体，除了重力外，无论从哪一点 M 开始下降，都将在相等的时间内到达点 A。

由此构造可推知，这些曲线在点 C 处具有尖点，并回到它们来时的方向，这种情况会在应用元素 PM 消失时发生，而实际上该元素等于 $dz^2 - dx^2$，因为 $AM = PN = z$，但由于 $dx = zdz + Zdz$，故有 $dz^2 - dx^2 = dz - (z+Z)^2dz$，$1-(z+Z)^2$ 应等于零，因此 $z+Z=1$，所以尖点处函数 $z+Z$ 等于单位。

故此曲线将与摆线具有相同的形状，因为它将具有无穷多个尖点，所有构成尖点的部分都彼此相似且相等。设 PM 延长至 m，由连续性规律，有 $PN = AMC - Cm$，但 $PN = AM$，故 $Cm = CM$，所以部分 AMC、FmC 构成尖点 C，它们将是相等且相似的。因此，根据构造，与点 A 对应的点 F 将连接相似、相等且类似放置在 AMC 的部分。同样，延续曲线 CMA，AB 将为直径，因此它将完全具有普通摆线的形状。

将这个最通用的构造应用于特殊假设；设阻力为零，则有 $Z=0$，因此 $dx = zdz$，即 $ax = zz$，从而曲线 AND 将为阿波罗尼奥斯抛物线。因此，等时线 AMC 将为普通摆线，如惠更斯已经证明的那样。

设阻力与速度成正比，即有 $Z = z$，从而 $dx = 2dz$，即 $x = zz$，因此曲线 AND 将再次为抛物线，从而等时线再次为摆线，正如牛顿在上文所引证明的那样。

设阻力与速度平方成正比，这种假设在空气、水以及几乎所有流体中都适用，有 $Z = azz$，因此 $dx = zdz + azzdz$，则 $x = \frac{1}{2}zz + \frac{1}{3}az^3$。根据此曲线，如前文所示，可以构造等时线。量 a，应当取决于阻力大小。

按照这种方式，对于任何假定的阻力假设，可以使用这种通用方法轻松导出等时线；在此过程中，重力作用均匀。对于其他重力假设，在任何阻力介质中，我也掌握了构造等时线的方法；然而，关于这些方法以及在此暂时略过的内容，我将逐步向这一领域的研究者们展示，此外，关于这个问题的讨论还有很多值得关注的方面。

寻求最速降线，即在均匀重力假设下的最短时间降落路径。

附言：我不禁要告知那位英国匿名人士，他与著名的约翰·伯努利在轨迹问题上已有相当一段时间的争论。我已经找到了一种方法，除了二阶之外，从任意阶数的线性方程中求得至少一个满足互逆轨迹问题的曲线。一年之后，我将揭示这个方法，以使那位英国人有足够的时间公开指出他自己向著名的伯努利提出的最简单的互逆轨迹，除了他已经找到的三阶曲线之外。