# Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente

Autore Leonhardo Eulero, Basileensi.

1726

Notum est inter Geometras cycloidem ordinariam esse in medio non resistente isochronam seu tautochronam, vi gravitatis uniformiter versus centrum infinitae distantiae tendente. In medioque pro simplici celeritatum ratione resistente, isochronam esse eandem cycloidem, ostendit summus Newtonus in principiis suis Philosophiae Naturalis Lib. II Prop 6. Oppido utem miror, neminem adhuc quicquam de isochronis in aliis mediis resistente hypothesibus, non imaginariis, quemadmodum sunt hae ductae dictae, meditatum fuisse; cum tamen haec egregia materia bene mereatur, quae in scientiae de motu corporum in medio resistente augmentum profundius examinetur: Ego, quae hactenus reperi, quasque feliciter detexi curvas tautochronas in medio quomodocunque resistente, centro virium infinite distante et uniformiter attrahente, his cum publico communicabo ut orbi literario ansam praebeant; hanc materiam penitius perscrutandi.

Ut igitur modum generalissimum hujusmodi lineas isochronas construendi tradam: resisiat medium in ratione cujusvis functionis celeritatis, et pro hac amplissima hypothese, sic construo isochronam.

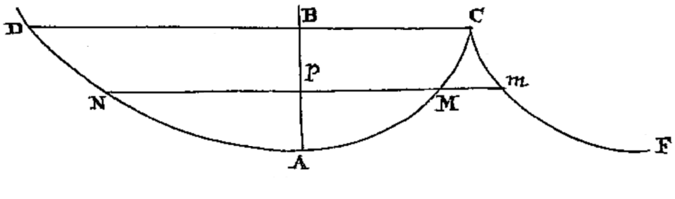


图 1: Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente

Sit $AB$ linea verticalis, seu normalis in planum horizontalis; super hac, tanquam axe, describatur curva $AND$ talis, ut, data absissa $AP$ $x$ huic applicata normali $PN$ $z$ et ipsius functione quadam, $Z$, quae eandem ad $z$ habeat rationem quam habet illa functio celeritatis, seu dum qua fit resistantia, ad ipsam celeritatem, ut inquam sit $dx = zdz + Zdz$: Hac curva facta, construatur alia $AMC$, super eodem axe $AB$, ut, producta $NP$ in $M$, sit portio curvae $AM$ aequalis applicatae $PN$. Erit haec curva $CMA$ isochrona, corpus scilicet super ea, solo gravitati nisi, descendens, in quocunque ejus puncto $M$ descensum adorsum fuerit, semper aequali tempore ad punctum $A$ perveniet.

Ex hac constructione consequitur, curvas hasce habere alicubi in $C$ cuspidem, & reverti in plagam, ex qua venerant, id quod accidere debet, ubi elementum applicatae $PM$ evanescit, elementum vero hoc aequatur $dz^2 - dx^2$, ob $AM = PN = z$, sed quia $dx = zdz + Zdz$, erit $dz^2 - dx^2 = dz - (z+Z)^2 dz, 1 - (z+Z)^2$ quod debet aequari ziphrae, erit ergo $z + Z = 1$, ibi ergo est cuspis, ubi functio $z + Z$ aequatur unitati.

Haec ergo curva eandem cum Cycloide habebit formam, habebit enim infinitos cuspidem & portiones cuspidis constituéntes omnes inter se similes & aequales, nam producta $PM$ in $m$ erit lege continuitatis $PN = AMC - Cm$ fed $PN = AM$ ergo $Cm = CM$ partes ergo $AMC$, $FmC$ cuspidem $C$ constituéntes quales erunt & similes. Proinde ex constructione puncto $F$, puncto $A$ respondenti, adnectetur portio similis, aequalis et similiter posita in $AMC$. Sic quoque, curva CMA continuata, erit $AB$ diameter, eandem ergo plane cum cycloide ordinaria habebit formam.

Ut applicemus hanc generalissimam constructionem ad hypotheses speciales; ponatur resistentia nulla, erit $Z = 0$, ergo $dx = zdz$, i.e. $ax = zz$, unde curva $AND$ erit parabola Apolloniana. Erit ergo isochrona $AMC$ cyclois ordinaria, uti Hugenius jam demonstravit.

Ponamus resistentiam celeritati proportionalem, erit $Z = z$, unde $dx = 2dz$, i.e. $x = zz$, curva ergo $AND$ erit denuo parabola et consequenter isochrona rursus cyclois, quemadmodum Newtonus loco citato demonstravit.

Sit Resistentia ut quadratum celeritatis, quae hypothese locum habet in aere, aqua, omnibusque fere fluidis, erit $Z = azz$, unde $dx = zdz + azzdz$, ergo $x = \frac{1}{2}zz + \frac{1}{3}az^3$, ex qua curva, ut supra docui, construi poterit isochrona. Quantitas, $a$, eomajor est rationalis assumi debet, quanti tati resistentiae.

Et hac ratione pro quavis hypothese resistentiarum excogitabili isochrona, methodo hac generali, facile deduci poterit; gravitate uniformiter agente. Pro aliis autem gravitatis hypothesibus, in medio quovis utunque resistente, etiam possideo methodum construendi isochronas; quam autem, ut et eorum, quae hic pro tempus differo proponens interim cultoribus scientiae hujus de ab hac materia haud multum abfudit.

*Invenire lineam celerissimi descensus, seu brachystochropothesi gravitatis uniformi.*

P.S. Non possum, quin indico Anonymo illi Anglo, cui jam per aliquantum temporis cum Celeb. Johanne Bernoulli circa trajectorias res est, me adinvenisse methodum ex quolibet linearum ordine, excepto secundo, ad minimam unam determinandi curvam problemati illi de trajectoriis reciprocis satisfacientem, quam, uno elapso anno, revelaturus ero, quo Anglo illi non desit tempus trajectoriam reciprocam, quam inveniendam ipse proposuit Cel. Bernoulli, simplicissimam post illam tertii ordinis quam invenire potuerit, publice indicandi.