

Lista 1 • Cadeias de Markov a tempo discreto

SME0121 - Processos Estocásticos

Prof. Pablo Martín Rodríguez

1. Uma cadeia de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ tem matriz de transição dada por

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$$

e distribuição inicial $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 2) = 0.3$ e $P(X_0 = 1) = 0.4$. Calcular $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0)$.

2. Uma cadeia de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ tem matriz de transição dada por

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

e distribuição inicial $P(X_0 = 0) = 0.1$, $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = 0.45$. Calcular $P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1)$.

3. Uma cadeia de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ tem matriz de transição dada por

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Calcular as probabilidades $P(X_2 = 1, X_3 = 1 | X_0 = 0)$ e $P(X_1 = 1, X_2 = 1 | X_0 = 0)$.

4. Uma cadeia de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ tem matriz de transição dada por

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Calcular as probabilidades $P(X_1 = 1, X_2 = 1 | X_0 = 0)$ e $P(X_2 = 1, X_3 = 1 | X_0 = 0)$.

5. Uma cadeia de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ tem matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular as probabilidades $P(X_2 = 2, X_3 = 1 | X_0 = 0)$ e $P(X_3 = 2 | X_0 = 0)$.

6. Apresente a representação gráfica das cadeias de Markov dos exercícios anteriores.
7. Suponha que cada item produzido por uma fábrica é classificado como defeituoso ou perfeito. Se um item é defeituoso ou não, depende da qualidade do item previamente produzido. Suponha que um item defeituoso é seguido por outro item defeituoso com probabilidade $2/3$, enquanto que um item perfeito é seguido de outro item perfeito com probabilidade $3/4$. Suponha que no instante zero, um item perfeito é produzido. Determine a probabilidade de que o terceiro item produzido é defeituoso.
8. Suponha que a possibilidade de chuva amanhã dependa somente do fato de estar chovendo ou não no dia de hoje. Suponha também que, se hoje está chovendo, então amanhã choverá com probabilidade 0.2 ; se hoje não estiver chovendo, então amanhã choverá com probabilidade 0.7 . Se a probabilidade de chover hoje é 0.5 , calcule a probabilidade de que chova daqui a três dias.

9. Os físicos Paul e Tatyana Ehrenfest consideram um modelo conceitual para o movimento de moléculas no qual M moléculas estavam distribuídas entre 2 urnas. Em cada instante de tempo uma das moléculas era escolhida aleatoriamente, removida de sua urna e colocada na outra. Se X_n representa o número de moléculas na primeira urna imediatamente após a n -ésima mudança então $(X_n)_{n \geq 0}$ é uma cadeia de Markov. Escreva as probabilidades de transição desta cadeia. Justifique.
10. Considere o passeio aleatório em \mathbb{Z} e o passeio aleatório no círculo com 5 vértices. Qual destas cadeias é irredutível? Note que a resposta pode depender do valor do parâmetro p .
11. *Problema de transmissão de rumor.* Um grupo de 6 pessoas está subdividido em ignorantes (pessoas que não sabem do rumor) e informantes (pessoas que sabem do rumor). Suponha que a cada instante discreto de tempo um par destas pessoas é selecionado ao acaso para interagir entre si. Se uma das pessoas do par é um informante e a outra é um ignorante, o informante conta o rumor com probabilidade p e neste caso o ignorante vira informante. Em qualquer outra situação nada acontece. Seja X_n o número de informantes no grupo após a n -ésima interação. Determine a matriz de transição da cadeia de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$.
12. Considere as seguintes cadeias de Markov:
- (a) O passeio aleatório em \mathbb{Z} ;
 - (b) o passeio aleatório no círculo (5 estados);
 - (c) as cadeias consideradas nos exercícios 1 a 5.

Encontre uma função $f(x, u)$ tal que para todo $n \geq 1$ podemos escrever $X_n = f(X_{n-1}, U_n)$ onde $\{U_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência i.i.d. com $U_i \sim U(0, 1)$.

13. Encontre os valores de p para os quais todos os estados do passeio aleatório em \mathbb{Z} pertencem à mesma classe. Justifique.
14. Considere a cadeia de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Encontre todas as classes e determine quais são transientes e quais são recorrentes.

15. Considere a cadeia de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Encontre todas as classes e determine quais são transientes e quais são recorrentes.

16. Considere uma cadeia de Markov com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$ e para a qual o 0 é uma armadilha (isto é, $p(0, 0) = 1$). Suponha que $\{1, 2, \dots\}$ é uma classe e que $p(i, 0) > 0$ para algum $i \geq 1$. O que pode dizer sobre a recorrência de cada classe?
17. De um exemplo de uma classe infinita e fechada, que seja transiente.
18. Considere a cadeia de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/10 & 1/5 & 1/10 \\ 0 & 7/10 & 1/5 & 1/10 \\ 0 & 0 & 9/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontre o tempo médio para o processo alcançar o estado 3 dado que $X_0 = 0$.

19. Considere a cadeia de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 3/5 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determine a probabilidade da cadeia terminar no estado 0 dado que $X_0 = 1$.
 (b) Suponha que $P(X_0 = i) = 1/3$, $i=0,1,2$. Determine o tempo médio de absorção do processo.
20. Considere o problema de transmissão de rumor do Exercício 11. Suponha agora que o grupo é de 4 pessoas e que no tempo 0 somente um deles é um informante. Calcule o tempo médio até que todos sabem do rumor.
21. Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 3 bolas verdes. As bolas são escolhidas ao acaso, uma por uma, da urna. Se a bola escolhida for vermelha então ela é retirada da urna. As bolas verdes escolhidas são devolvidas à urna. O processo de seleção continua até que todas as bolas vermelhas são removidas da urna. Qual é o tempo médio de duração do jogo?
22. Considere o problema da ruína do jogador. Suponha que a probabilidade da moeda dar cara é $0 < p < 1$ e que inicialmente os jogadores A e B começam com os valores a e b , respectivamente. Se $c = a + b$, X_n representa a fortuna do jogador A no tempo n e $T = \inf\{n > 0 : X_n = 0 \text{ ou } X_n = c\}$, determine $E[T|X_0 = i]$ para $i = 0, 1, \dots, c$.
23. Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Encontre a distribuição ou distribuições estacionárias da cadeia.

24. Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/5 & 1/10 \\ 3/10 & 2/5 & 3/10 \\ 1/5 & 3/10 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Encontre a distribuição ou distribuições estacionárias da cadeia.

25. Considere uma cadeia de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ com valores nos inteiros positivos e probabilidades de transição dadas por

$$p(i, i+1) = p \quad \text{e} \quad p(i, 0) = 1 - p$$

para $i \geq 0$, onde $0 < p < 1$.

- (a) Prove que esta cadeia é irredutível.
 (b) Prove que esta cadeia é recorrente positiva.
26. Prove que o passeio aleatório em \mathbb{Z} não tem distribuição estacionária.
27. Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Encontre a distribuição ou distribuições estacionárias desta cadeia.

28. Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Encontre a distribuição ou distribuições estacionárias da cadeia.

29. Encontre a distribuição estacionária das cadeias de Markov consideradas nos exercícios 1 a 5.
 30. Suponha que $p(0, 0) > 0$ para uma cadeia irredutível. Qual é o período desta cadeia?
 31. Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Mostre que para todo i e j a probabilidade $p_n(i, j)$ converge quando $n \rightarrow \infty$.

32. Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ e matriz de transição de probabilidades

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- (a) Encontre a distribuição ou distribuições estacionárias desta cadeia.
 (b) Encontre todos os limites de $p_n(i, j)$ que existem.

33. Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ o passeio aleatório no círculo, com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Encontre o valor aproximado da probabilidade $P(X_{100.000} = 3 | X_0 = 1)$.
 34. Suponha que a possibilidade de chuva amanhã dependa somente do fato de estar chovendo ou não no dia de hoje. Suponha também que, se hoje está chovendo, então amanhã choverá com probabilidade 0.2; mas se hoje não estiver chovendo, então amanhã choverá com probabilidade 0.7. Se a probabilidade de chover hoje é 0.5, calcule a probabilidade aproximada de que chova daqui a três anos.
 35. Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Encontre a distribuição ou distribuições estacionárias desta cadeia.

36. Mostre que se $p_0 + p_1 < 1$ então todos os estados $k \geq 1$ do processo de ramificação $(Z_n)_{n \geq 1}$ são transientes. Que acontece quando $p_0 + p_1 = 1$?
 37. Seja $(Z_n)_{n \geq 0}$ um processo de ramificação, como definido em aula. Encontre a probabilidade de extinção q em função de r se $p_k = (1 - r)r^k$.
 38. Considere um processo de ramificação para o qual $m > 1$ e $q = 1/2$. Suponha que o processo começa com 5 partículas. Qual é a probabilidade de que o processo sobreviva para sempre?
 39. Suponha que uma partícula dá nascimento a duas partículas com probabilidade $3/4$ ou a nenhuma com probabilidade $1/4$. Calcule a probabilidade de extinção do processo de ramificação resultante.