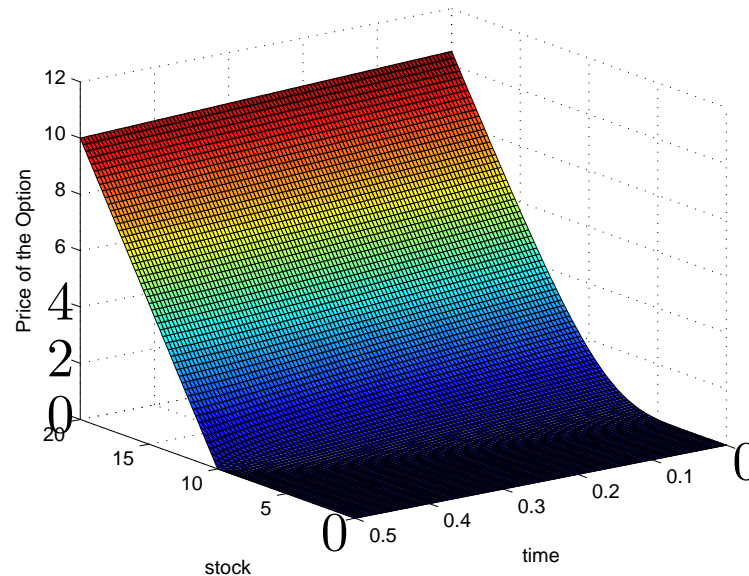


Équations Différentielles aux Dérivées Partielles. Méthodes Numériques et Analytiques.

Irina Kortchemski, EISTI



Cours sur EDP

● Modélisation mathématique et les Équations Différentielles.

- Dynamique des structures
- Mécanique des fluides
- Théories de la gravitation
- Electromagnétisme (équations de Maxwell)
- Finance et Economie
- Simulation aéronautique
- Synthèse d'images
- Prévision météorologique.
- Relativité générale
- Mécanique quantique
- Biologie
- Medicine

Cours sur EDP

- Méthode aux Différences Finies pour les Équations Différentielles Ordinaires
- Méthode aux Différences Finies pour les Équations Différentielles aux Dérivées Partielles
 - Méthode de Runge-Kutta.
 - Méthodes d'Euler.
 - Méthode de Crank-Nicolson.
- Méthode Analytique pour les EDP
 - Equations paraboliques.
 - Equations hyperboliques.
 - Equations elliptiques.
 - Equations non linéaire.

Classification des EDP

- **Equations Paraboliques.**
 - Equation de la chaleur.
- **Equations Elliptiques**
 - Equation de Poisson.
- **Equations Hyperboliques.**
 - Equation d'onde
- **Equations non linéaires**
 - Equation de Burgers.
 - Equation de Korteweg de Vries. Solitons
 - Equation de Sine-Gordon. Solitons

Application des Différences Finies

- Application de la méthode aux Différences Finies (DF) à la finance
 - Méthodes de Monte-Carlo étaient plus populaires.
 - Méthodes de EDP sont plus rapides et donnent plus d'information sur la marché.
 - Recherches sur les EDP non linéaires pour prévoir Inflations, Crash market, Big trader, Risque de contrepartie, coût de transaction ...
- Application de la méthode aux Différences Finies à l'industrie et à la science
 - DF sont unique (presque) méthode qui permet de résoudre une équation complexe, dont la solution Analytique n'existe pas.

Les objectifs du Cours EDP

- Quelles EDP sont de bons modèles pour le système?
- Est-ce que le EDP a des solutions?
- Quel type de "données" (Conditions initiales et aux limites) devons-nous spécifier pour résoudre le EDP ?
- Les solutions correspondant aux données sont-elles uniques?
- Quelles sont les propriétés qualitatives basique de la solution?
- La solution contient-elle des singularités? Si oui, quelle est leur nature?
- Que se passe-t-il si nous modifions légèrement les données initiales? La solution varie-t-elle légèrement également ? (La stabilité)

Les objectifs du Cours EDP

- Quels types d'estimations quantitatives peuvent être dérivées pour les solutions?
- Comment pouvons-nous définir la taille (c'est-à-dire "la norme") d'une solution?

Modélisation et les DF

- On modélise des problèmes par
- Equations Différentielles Ordinaires
- Equations Différentielles aux Dérivées Partielles
- Equations Différentielles Stochastiques
- Théorème de Feynman - Kac relie les méthodes déterministes (Différences Finies) de la résolution des EDP et les méthodes de Monté - Carlo.

Equations Fondamentales

- Equation de la chaleur (Parabolique)

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f(x, t)$$

- Equation d'onde (Hyperbolique)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - V_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

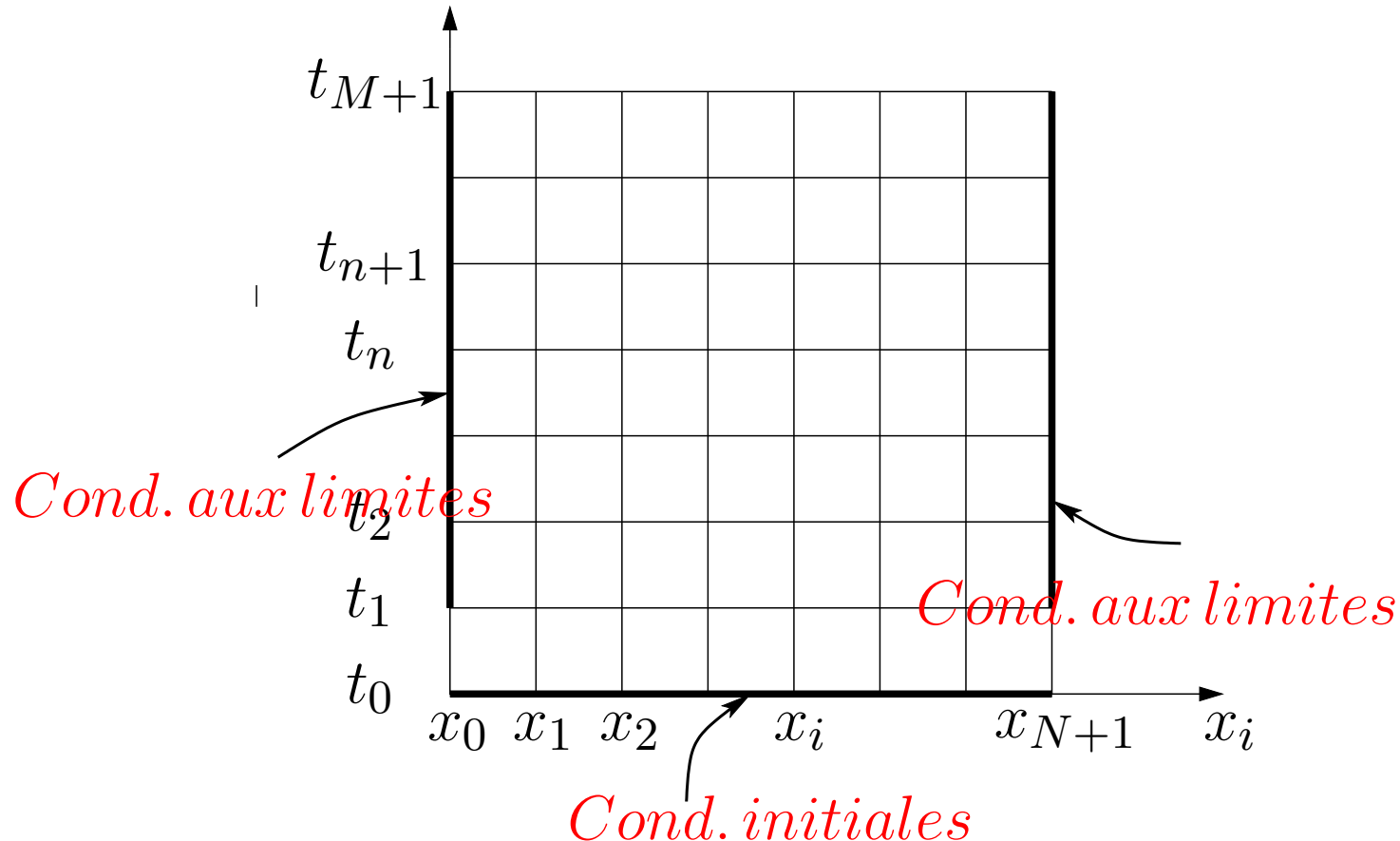
- Equation de Poisson (Elliptique)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y)$$

Idée 1 de Différences Finies

● Discrétisation des l'espace-temps

- variable spatiale x : $x_0 = 0, \dots, x_i = i\Delta x, \dots, x_{N+1} = L$.
- variable temporelle t : $t_0 = 0, \dots, t^n = n\Delta t, \dots, t_{M+1} = T$.



Idée 2 de Différences Finies

- Discrétisation des dérivées
- Dérivée temporelle

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_i) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + T_1(u)$$

$$T_1(u) = -\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\Delta t) - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\Delta t)^2$$

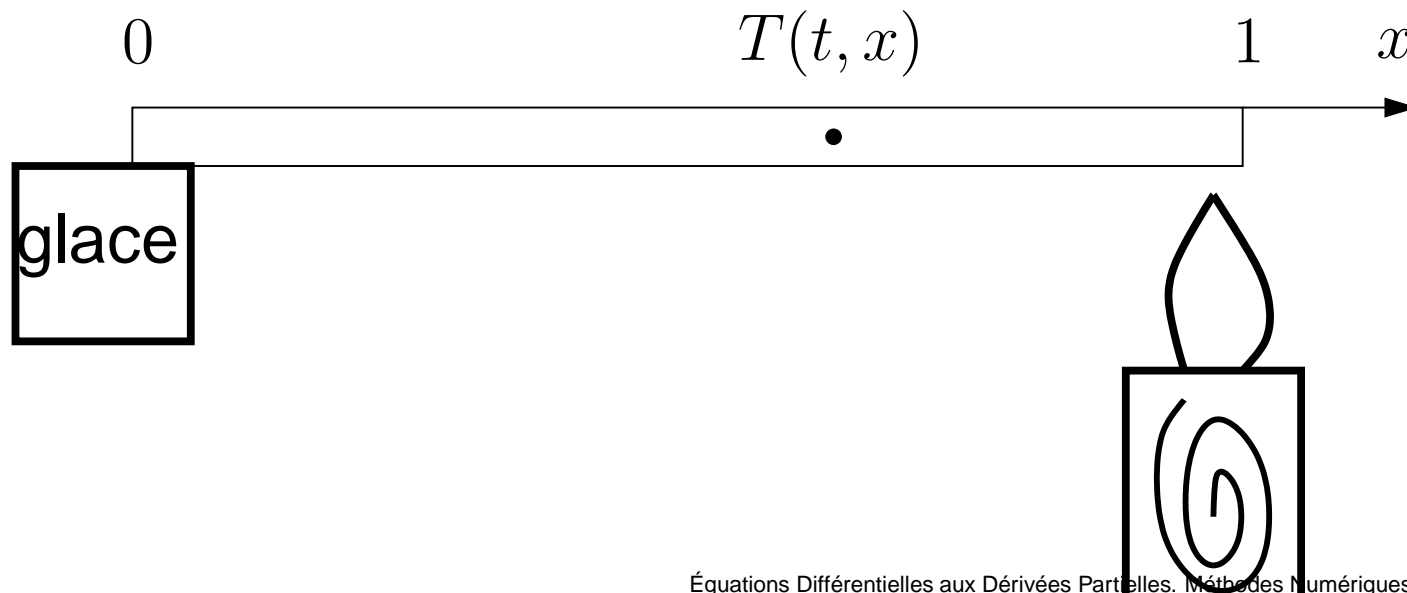
- Dérivée spatiale

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_i) = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Initial- Boundary Value Probleme

- $T(t, x)$ est la temperature d'une tige en point x à l'instant t .

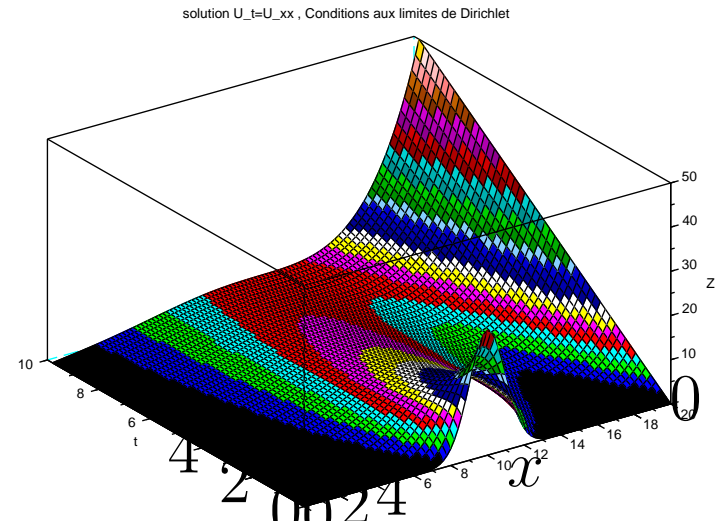
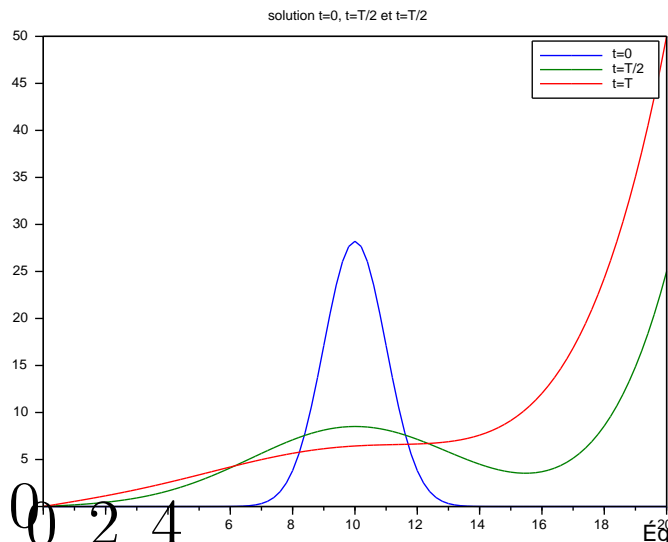
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad x \in [0, 1] \\ T(t = 0, x) = \frac{50}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{-(x-10)^2}{2}} \quad (\text{initial conditions}) \\ T(t, x = 0) = 0 \quad (\text{boundary condition}) \\ T(t, x = 1) = 5t \quad (\text{boundary condition}) \end{array} \right.$$



Solution numérique

● $T(t, x)$ est la température d'une tige en point x à l'instant t .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad x \in [0, 1] \\ T(t = 0, x) = \frac{50}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{-(x-10)^2}{2}} \quad (\text{conditions initiales}) \\ T(t, x = 0) = 0 \quad (\text{condition aux limites}) \\ T(t, x = 1) = 5t \quad (\text{condition aux limites}) \end{array} \right.$$



Solution Analytique

- $u(t, x)$ is the temperature of a rod in point x at time t

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in [0, 1] \\ u(t = 0, x) = x(1 - x) \text{ (initial conditions)} \\ u(t, x = 0) = 0 \text{ (boundary condition)} \\ u(t, x = 1) = 0 \text{ (boundary condition)} \end{array} \right.$$

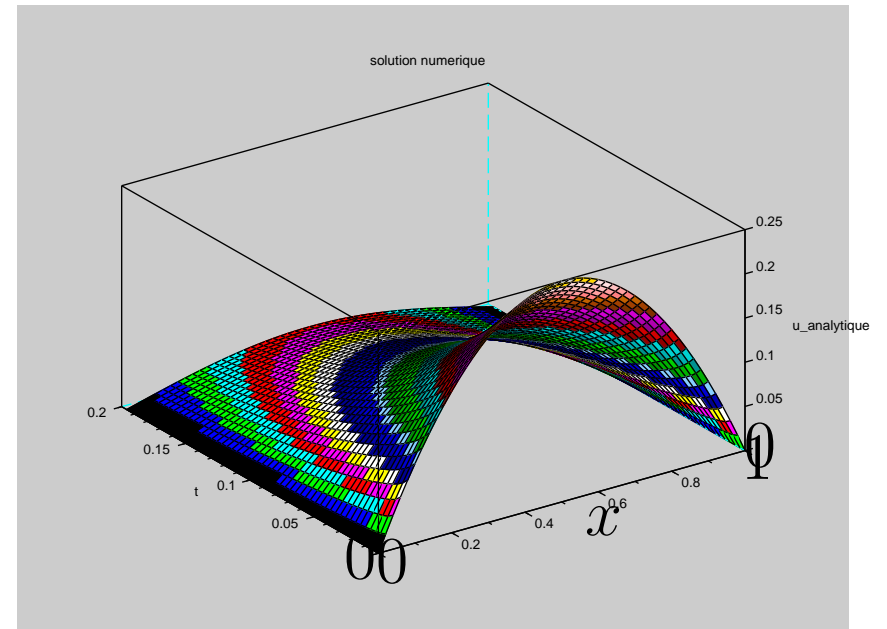
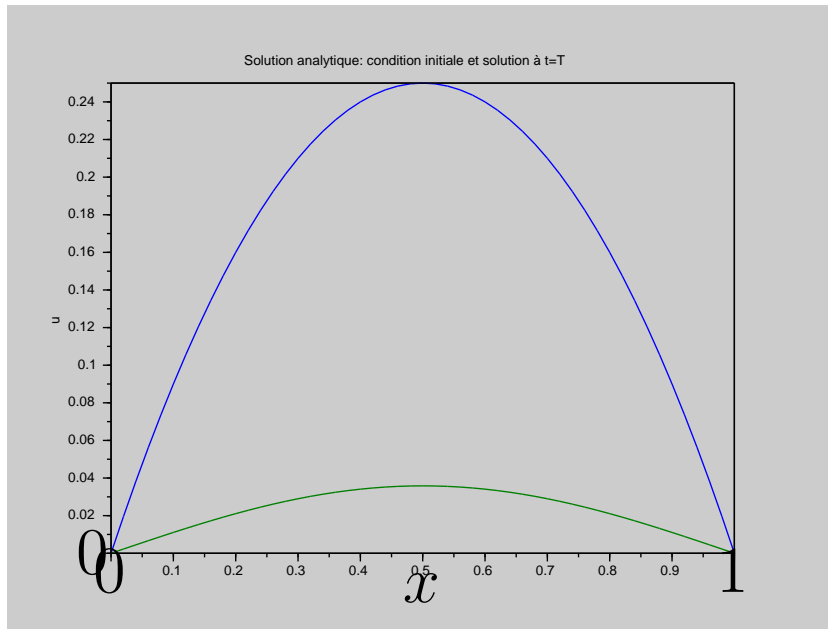
- Analytical solution

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1 - (-1)^n)}{(\pi n)^3} \sin(\pi n x) e^{-\pi^2 n^2 t}$$

- Solution Numérique in 2 and 3 dimensions:

Solution Numérique

- Solution Numérique in 2 and 3 dimensions:



Equations Diff. Stochastiques



- On simule par DF les Marches aléatoires, le Mouvement Brownien et diffusion, les "Cluster Growth models", les Amas DLA, la Percolation, la Courbe SLE.
- La courbe SLE est objet de recherche du mathématicien français Wendelin Werner (et de ses collaborateurs) qui a été récompensé en 2006 par la Médaille Fields.



- L'équation stochastique de Boltzmann est objet de recherche du mathématicien français Cedric Villani qui a été récompensé en 2010 par la Médaille Fields.

Equation de Kolmogorov

- Équation avancée, que vérifie **la probabilité de transition conditionnelle**

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \mu(t, x) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma(t, x)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \\ P(t, x; T, y) = \delta(y - x), \quad t \rightarrow T \end{cases}$$

- Equation donne la densité de probabilité d'avoir été au point (t, x) à conditions que maintenant on est au point (T, y) .

- Équation retrograde

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial(\mu(t, x)P)}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\sigma(t, x)^2 P)}{\partial x^2} = 0 \\ P(t, x; T, y) = \delta(y - x), \quad t \rightarrow T \end{cases}$$

Equation de Black et Scholes

Equation de Black et Scholes

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(t = T, S) = \max(S - K, 0) \end{cases}$$

- $V(S, t)$ est le prix d'un contrat avec une banque pour pouvoir acheter au prix K une action à la date T .
 - S est le prix d'une action
 - r est le taux d'intérêt
 - σ est une volatilité
 - K est le prix d'exercice
 - T est le temps d'exercice
- Vous achetez au prix K une action qui vaut S à la date $t = T$
- Si $S > K$ vous gagnez $S - K$
- Si $S < K$ vous n'exercez pas le contrat.

Black et Scholes multidimensionnelle

Options à deux actifs: Basket option

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} = 0 \\ V(S_1, S_2, t = T,) = \max(S_1 + S_2 - K, 0) \end{cases}$$

Options à deux actifs: Exchange option

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} = 0 \\ V(S_1, S_2, t = T,) = \max(S_2 - S_1, 0) \end{cases}$$

Options à deux actifs: Quotient option

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} = 0 \\ V(S_1, S_2, t = T,) = \max(S_2/S_1 - K, 0) \end{cases}$$

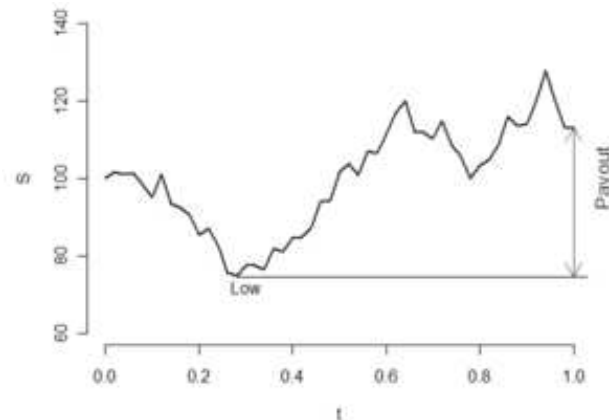
Lookback Option. Call

● Prix de l'option $V(S, M, t)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 & 0 \leq M \leq S \\ V(t = T, S, M) = \max(S(T) - M, 0) & 0 \leq M \leq S \\ \frac{\partial V}{\partial M}(T, S, M)|_{M=S} = 0 & \end{array} \right.$$

● Valeur minimale de l'action de risk de l'intervalle de temps $[0, T]$

$$M_T = \min(S_\tau, 0 \leq \tau \leq T)$$



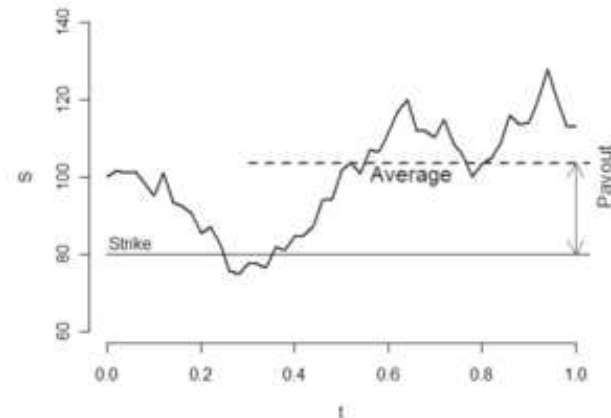
Options asiatiques strike fixe. Call

● Prix de l'option $V(S, A, t)$ vérifie l'équation:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{S-A}{t} \frac{\partial V}{\partial A} = 0 \\ V(t = T, S, A) = \max(A(T) - K, 0) \end{cases}$$

Prix d'une options asiatiques
 $V(t, S, A)$ porte sur un actif S et
sur la valeur moyenne

$$A(t) = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau d\tau$$



Options Américaines

● Equation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \min\left(\frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, V - \Lambda(S)\right) = 0 \\ V(t = T, S) = \Lambda(S) = \max(S - K, 0) \end{cases}$$

● Algorithmes utilisant les Différences Finies

- Euler explicite
- Euler implicite
- Algorithme PSOR (Projected Successive Over Relaxation)
- Algorithme de Brennan et Schwartz
- Algorithme de Newton
- Algorithme de Howard
- Algorithme de Splitting

Optimisation d'un portefeuille

Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellmann

Un portefeuille est constitué d'un actif risqué et d'un actif non risqué.

- α_t correspond à la part investie dans un actif risqué
- $1 - \alpha_t$ correspond à la part investie dans des actifs sans risque
- S_t est la valeur de l'actif qui vérifie une équation différentielle stochastique

On cherche α_t de sorte qu'on optimise l'espérance de l'utilité $\mathbb{E}[h(S_T)]$ (h est une fonction utilité). On doit estimer la valeur du portefeuille

$$\left\{ \begin{array}{l} U(t, x) = \text{Sup}_{\alpha_t} \mathbb{E}[h(S_T) | S_t = x] \end{array} \right.$$

La valeur $U(t, x)$ est la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellmann

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + \text{Sup}_{\alpha_t} [(\alpha_t \mu + (1 - \alpha_t)r)x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \alpha_t^2 \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}] = 0 \\ U(t = T, x) = h(x), \quad x > 0 \end{array} \right.$$

On résout l'équation à l'aide des Différences finies et on effectue l'optimisation pour chaque itération avec l'Algorithme de Howard.

Equation de Dupire

- Dans un modèle de volatilité locale les prix de Call $V(t, S(t); T, K)$ vérifie l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial T} + rK \frac{\partial V}{\partial K} - \frac{1}{2}\sigma^2(K, T)K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K^2} = 0 \\ V(t=0, K) = \max(K - S, 0) \end{cases}$$

- L'équation calcule les prix d'option pour tous strikes K et maturités T à une date donnée.
- On utilise équation de Dupire pour recalculer la fonction de volatilité $\sigma^2(K, T)$ à partir des prix d'option du marché:

$$\sigma^2(K, T) = \sqrt{2 \frac{\frac{\partial V}{\partial T} + rK \frac{\partial V}{\partial K}}{K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K^2}}}$$

Calibration en finance

- Equation de Dupire donne le prix de l'option $V(K, T)$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial T} + rK \frac{\partial V}{\partial K} - \frac{1}{2} \sigma^2(K, T) K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial^2 K} = 0 \\ V(t = 0, K) = \max(K - S, 0) \end{cases}$$

- On résout l'équation de Dupire par DF.
- Comment la volatilité σ dépend de K, T ? On paramétrise la volatilité σ par des paramètres β_i (par splines cubiques): $\sigma(K, T) \rightarrow \sigma(K, T, \beta_i)$.
- On résout le problème d'optimisation: le problème de moindres carrés:

$$\min_{\{\beta_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^n |V(K_i, T_i, \beta_i) - (V_i)_{(marche)}|^2 \right\}$$

Equation de Heston

- Modèle de Heston est une généralisation de l'équation de Black et Scholes pour une volatilité stochastique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma_t dW_t \\ d\sigma_t = a_t dt + b_t dW'_t \\ d\langle W, W' \rangle = \rho dt \\ \frac{dB_t}{B_t} = r dt \end{array} \right.$$

- Méthode 1: On applique les DF pour discrétiser les équations et les simuler par Monte-Carlo.
- Méthode 2: On résout l'EDP de Heston en trois dimensions: $V(t, S, \sigma)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} b_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + S \sigma b_t \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \lambda(t, \sigma, S) \frac{\partial V}{\partial \sigma} = 0 \\ V(t = T, S, \sigma) = \Lambda(S) = \max(S - K, 0) \end{array} \right.$$

- Problème: comment imposer les conditions aux limites?

Sauts des actifs

- Equation intégrro-différentielle avec les sauts

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \\ \lambda \int_{\mathbb{R}} (V(t, S \cdot (1 + y)) - V(t, S)) \nu(dy) = 0 \\ V(t = T, S) = \Psi(S) \end{array} \right.$$

- λ est la probabilité des sauts par unité de temps.

- $\nu(dy)$ est la mesure de Poisson

- Modèle de Merton $\nu(dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$
- Modèle de Kou et Wang

$$\nu(dy) = \rho \eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbf{1}_{y>0} dy + q \eta_2 e^{-\eta_2 y} \mathbf{1}_{y<0} dy$$

Modèles de taux d'intérêt

- Equation pour le "Bond" $B(r, t)$ avec "Coupon" $K(t)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} - rB + (u(r, t) - \lambda(r, t)\sigma(r, t))\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + K(t) = 0 \\ B(t = T, r) = Z \end{cases}$$

- Taux r vérifie l'éq. stoc. $dr_t = \sigma(r, t)dW_t + u(r, t)dt$

$$\sigma(r, t) = \sqrt{\alpha(t)r - \beta(t)},$$

$$u(r, t) = -\gamma(t)r + \eta(t) + \lambda(r, t)\sqrt{\alpha(t)r - \beta(t)}$$

- Modèles:

- Vasicek
- Cox, Ingersoll, Ross
- Hull, White

Couverture d'un portefeuille

- On calcule des Grecques en remplaçant les dérivées par **les différences finies**.

- $\Delta = \frac{\partial V(S,t;T,K)}{\partial S}$
- $\Gamma = \frac{\partial^2 V(S,t;T,K)}{\partial S^2}$
- $\Theta = \frac{\partial V(S,t;T,K)}{\partial T}$
- $Vega = \frac{\partial V(S,t;T,K)}{\partial \sigma}$

- On peut simuler HEDGING à l'aide des différences finies.

Pour couvrir une Call Européenne de maturité T et prix d'exercice K il faut

- Acheter $\Delta_t = \frac{\partial V(S,t;T,K)}{\partial S}$ actions
- Placer $B_t = V(S,t;T,K) - \Delta_t S_t$ à la banque.

Equations d'Einstein

- Equation de la relativité générale

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\rho\rho} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

- $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci
- R est le scalaire de Ricci
- $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique qui décrit la géométrie de l'espace - temps
- Λ est la constante cosmologique
- G est la constante gravitationnelle
- $T_{\mu\nu}$ est le tenseur d'énergie-impulsion
- $\Lambda < 0$ pour expliquer la présence de l'énergie sombre?

Loi de Hubble

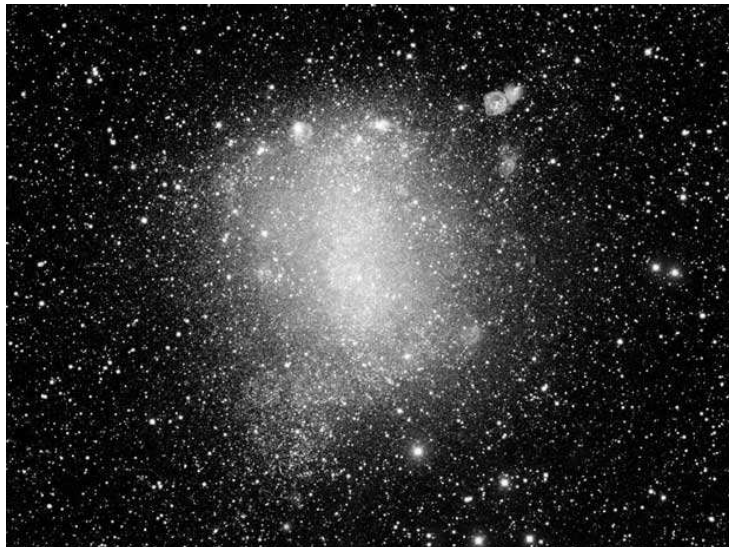
- Equations d'Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\rho\rho} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

- Comment trouver la constante de Hubble H dans la loi qui relie la vitesse de fuite des galaxies avec la distance?

$$v(R) = A + HR$$

- Matière et le rayonnement se forment un fluide parfait avec la densité ρ et une pression p .



Loi de Hubble

- Fluide cosmologique vérifie les équations de Friedmann-Lamaitre

$$H^2 = \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4\pi G\rho}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

- Méthode 1- théorique: Résolution des équations par DF avec 4 paramètres.
- Méthode 2- expérimentale: Résolution du problème d'optimisation linéaire (moindres carrés linéaire) pour trouver la constante de Hubble

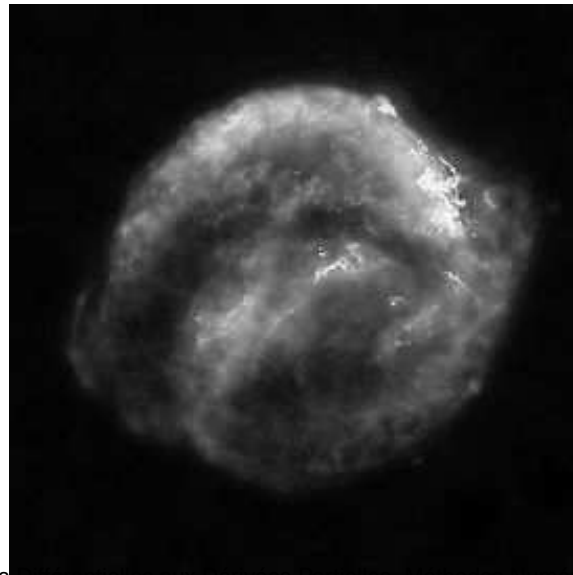
$$v(R) = A + HR$$

Explosion de Supernova du Type Ia.

Pour trouver la constante de Hubble:

- On construit une courbe de l'intensité de Supernova en fonction du temps.
- De cette courbe on calcule la vitesse $v(R)$ et la distance R .

- $H=72 \text{ km/s/Mps}$

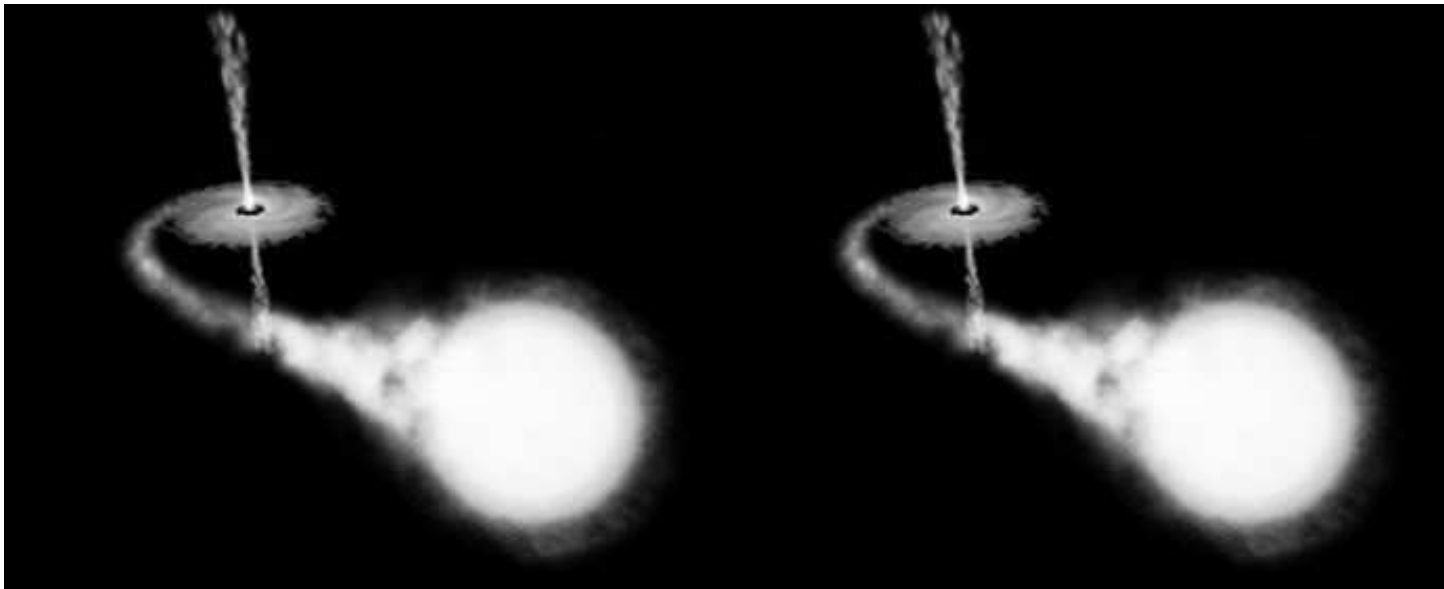


Binary Black Hole Grande Challenge

- Equations d'Einstein

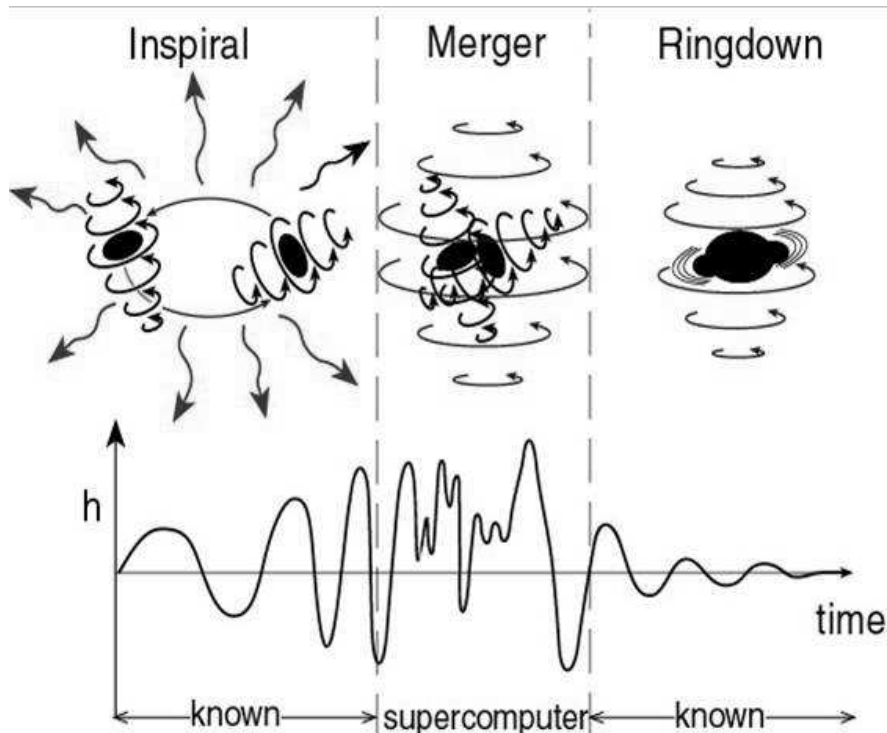
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\rho\rho} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

- Binary Black Hole Grande Challenge



Binary Black Hole Grande Challenge

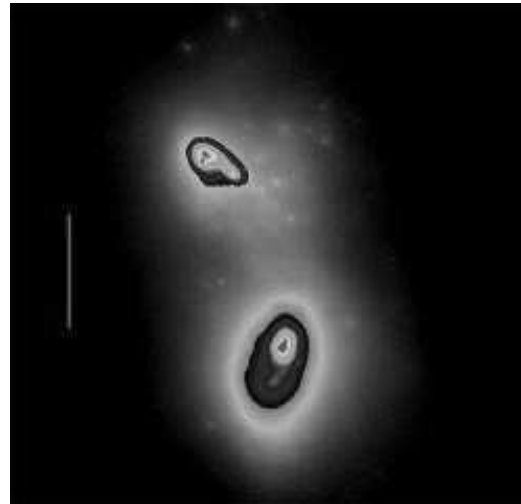
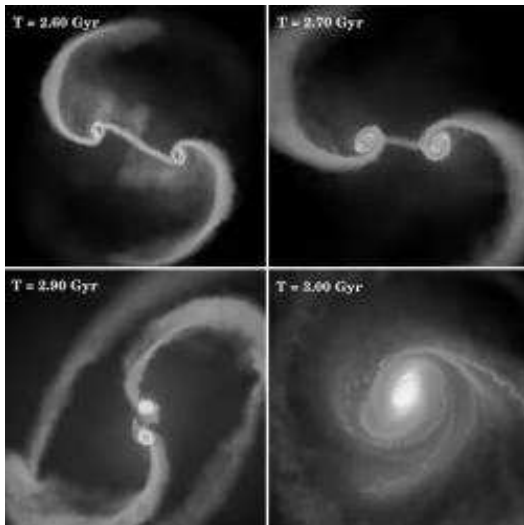
● Pourquoi simuler?



- Pour comprendre la nature des ondes gravitationnelles émises pendant la période de fusion. Très important pour la detection.
- Tester la relativité générale d'Einstein dans le regime de champs forts et nonlinéaires.

Binary Black Hole Grande Challenge

Simulations:



Difficultés:

- Discrétiser les équations à l'aide des Différences Finies: faire des couches de l'espace - temps à 4 dimensions, obtenir l'ensemble des hyperuricemia à 3dim.
- Traiter les singularités spatiales
- Problème de deux échelles: la longueur d'onde gravitationnelle \gg le rayon de l'orbite.

Binary Black Hole Grande Challenge

- Equations d'Einstein se réduisent au problème de Cauchy avec 10 équations

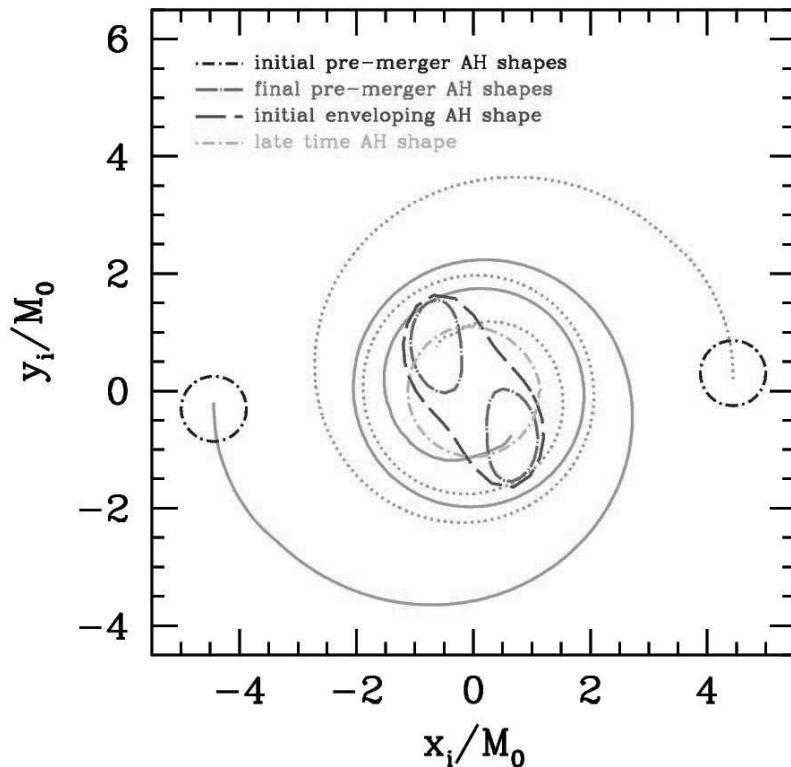
BSSN evolution equations for $\{\phi, \tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{ij}, \tilde{\Gamma}^i\}$:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \phi - \mathcal{L}_\beta \phi &= -\frac{1}{6} \alpha K & \gamma_{ij} &= e^{4\phi} \tilde{\gamma}_{ij} \quad (\tilde{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi} \gamma_{ij}) \\
 & & \gamma^{ij} &= e^{-4\phi} \tilde{\gamma}^{ij} \\
 \partial_t K - \mathcal{L}_\beta K &= -\gamma^{ij} D_i D_j \alpha & K_{ij} &= \tilde{A}_{ij} e^{4\phi} + \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \\
 & & & + \frac{1}{2} \alpha (\rho + S) \\
 & & \tilde{A}^{ij} &= e^{4\phi} A^{ij} \quad (\tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi} A_{ij}) \\
 \partial_t \tilde{\gamma}_{ij} - \mathcal{L}_\beta \tilde{\gamma}_{ij} &= -2\alpha \tilde{A}_{ij} & \tilde{\Gamma}^i &\equiv \tilde{\gamma}^{jk} \tilde{\Gamma}_{jk}^i = -\partial_j \tilde{\gamma}^{ij} \\
 \partial_t \tilde{A}_{ij} - \mathcal{L}_\beta \tilde{A}_{ij} &= e^{-4\phi} [-D_i D_j \alpha + \alpha (R_{ij} - S_{ij})]^{TF} \\
 & & & + \alpha (K \tilde{A}_{ij} - 2 \tilde{A}_{il} \tilde{A}_j^l) \\
 \partial_t \tilde{\Gamma}^i &= \tilde{\gamma}^{jk} \partial_j \partial_k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_k \beta^k + \beta^j \partial_j \tilde{\Gamma}^i \\
 & & & - \tilde{\Gamma}^j \partial_j \beta^i + \frac{2}{3} \tilde{\Gamma}^i \partial_j \beta^j - 2 \tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha \\
 & & & + 2\alpha (\tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{A}^{jk} + 6 \tilde{A}^{ij} \partial_j \phi - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K)
 \end{aligned}$$

Binary Black Hole Grande Challenge

Résultats:

- Découverte des relations entre la fusion et des paramètres initiales.
- Simulation de la fusion de deux trous noirs de masse équivalentes, de l'émission des ondes gravitationnelles.
- **Découverte des ONDES GRAVITATIONNELLES!**



Mouvement des astres célestes

- Problème de deux corps: le mouvement d'une masse M

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_x}{dt} = \frac{G M X(t)}{(\sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2})^3} \\ \frac{dV_y}{dt} = \frac{G M Y(t)}{(\sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2})^3} \\ V_x(t) = \frac{dX}{dt} \\ V_y(t) = \frac{dY}{dt} \end{array} \right.$$

- On résout par DF les équations en utilisant les algorithmes de Euler-Cromer et Runge-Kutta.
- A l'aide des simulations on pourra observer:
 - Phénomènes de résonances parmi des astéroïdes - fentes de Kirkwood
 - Mouvement d'Hyperion, la plus petite des lunes de Saturne.

Equations d'onde

Equation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$$

La nature des ondes ou des paquets d'onde ou des fluctuations qui se propagent peut être très différentes.

Equations de Maxwell

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Onde électromagnétique dans un conducteur diélectrique

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 n^2(E) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

- Guidage
- Antennes

Equation de Schrodinger

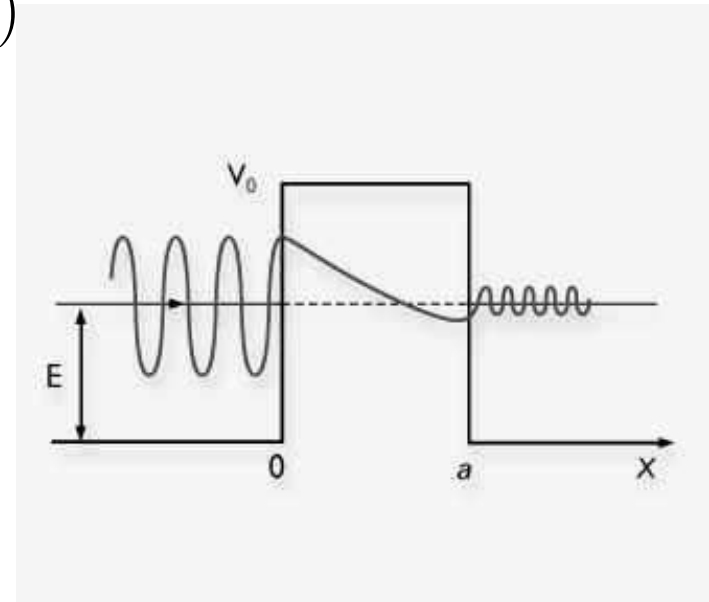
- Equation de Schrodinger décrit la fonction d'onde, $|\Psi(x, t)|^2 dx$ est la probabilité de presence d'une particule sur l'intervalle $[x, x + dx]$

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - V(x) \Psi = 0$$

- Simulation du **chat de Schrodinger**:

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|Vivant\rangle + |Mort\rangle)$$

- Simulation de la diffusion d'une particule quantique sur un potentiel



Equation de Schrodinger

- Applications dans les technologie des supraconducteurs, lasers, des désintégrations (fission, radioactivité alpha), des transistors, certaines diodes, différents types de microscopes, l'effet Josephson.
- MRG: Magnétorésistance géante, **Minituarisation des disques dures...**
- **Equation de Klein-Gordon**

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - m^2 \Psi = 0$$

L'équation de Klein-Gordon est une version relativiste de l'équation de Schrodinger décrivant des particules massives.

Equation de Korteweg de Vries

- Equation de Korteweg de Vries décrit des ondes solitaires

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0$$

- Découverte des solitons par J. S. Russell
- Théorie des vagues par Korteweg et de Vries

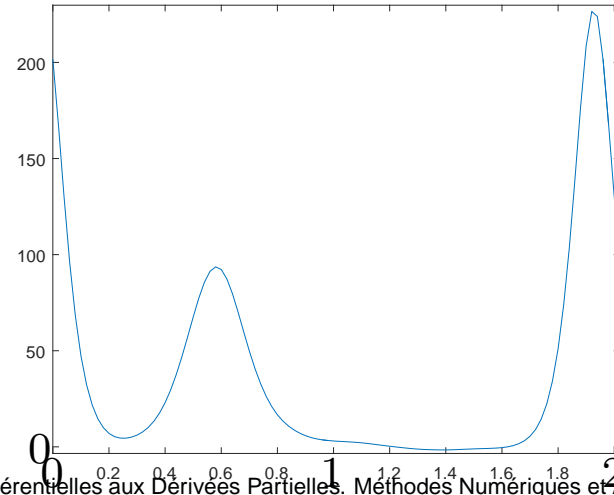
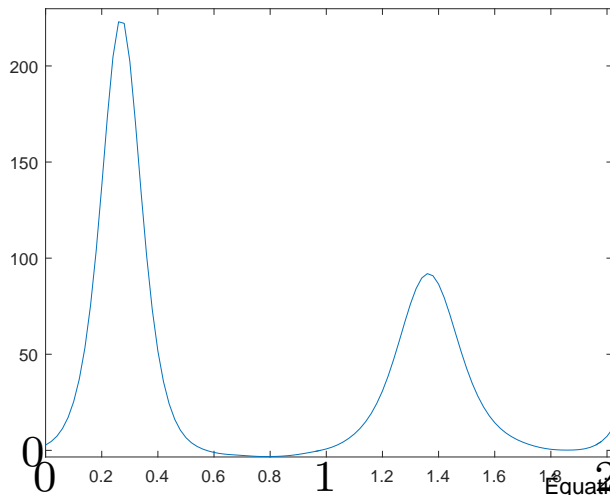
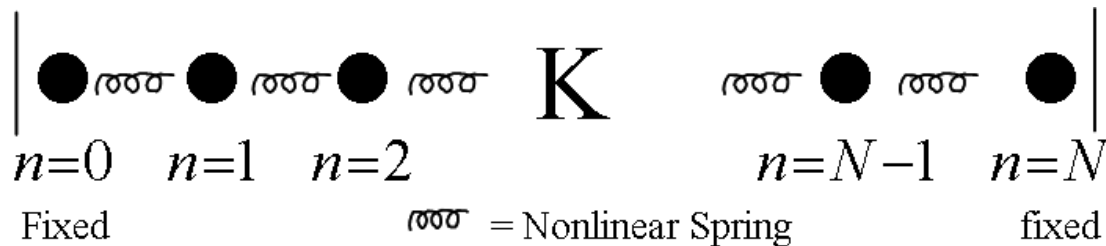


- Tsunamis

Equation de Korteweg de Vries

Equation de Korteweg de Vries $\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0$

Redécouverte des solitons au cours des simulations réalisées en 1953 par Enrico Fermi, John Pasta, et Stan Ulam. Ils ont utilisé le plus puissant l'ordinateur MANIAC-1 (Mathematical Analyzer Numerical Integrator And Computer)



Solitons

- Solutions analytiques de KdV sont possible:
 - Un soliton: $U(x, t) = \frac{b}{2ch^2(\sqrt{b}/2(x-bt))}$
- Découverte en Mathématiques fondamentales: la méthode de la diffusion inverse de résolution analytique des EDP nonlinéaires.
- Equation de Sine-Gordon

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \sin U$$

L'équation de Sine-Gordon décrit les solitons dans un cristal.

- Applications: Fibres optiques, Reactions termonucléaires, Superconducteurs (Effet tunnel de Josephson)

Equation de Keller-Segel

- Equations de Keller-Segel

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(n(t, x) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + n - \Phi \end{cases}$$

Ces équations recouvrent une colonies bactériennes qui adopte des mouvements collectifs surprenants à partir de communications individuelles élémentaires.

- $n(t, x)$ est la densité des bactéries
- $\Phi(t, x)$ est la densité de la "nourriture"
- Application: Biologie, Medicine

Equations de Navier-Stokes

- Equations de Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(v^2) - [\vec{v} \times \text{rot} \vec{v}]\right) = \rho \vec{g} - \text{grad} p + \mu \Delta \vec{v} + \frac{1}{3} \mu \text{grad}(\text{div} \vec{v})$$

- Équations d'Euler

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}\right) \end{array} \right.$$

Equations de Navier-Stokes

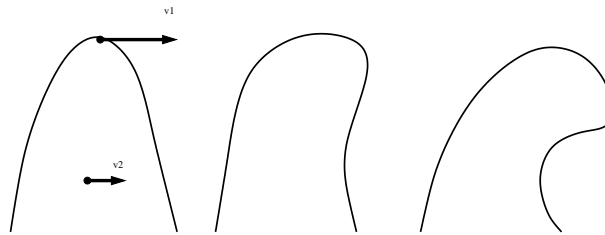
- Écoulement bidimensionnel d'un fluide réel visqueux incompressible

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial t} = -v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} = -v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

Écoulement 1 - dim d'un fluide

● Equation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$



● Modélisation des ondes de choc

- Le sommet d'une vague se propage avec la vitesse plus grande que celle du sol. Ce phénomène, la dispersion, explique pourquoi les vagues tombent et se déferlent.

Computational Fluid Dynamics

- AERODYNAMIQUE EXTERNE
- APPLICATION AU BÂTIMENT
- ENERGIES
- HYDRAULIQUE
- TRANSFERTS THERMIQUES
- MÉDECINE
- MÉTÉOROLOGIE



Computational Fluid Dynamics

- permet de simuler l'écoulement autour ou à l'intérieur d'un corps ; d'évaluer les forces subies par un corps soumis au vent ou se déplaçant dans l'air ou dans l'eau
- de déterminer les puissances de chauffage ou de climatisation nécessaires dans un bâtiment ainsi que les meilleurs emplacements pour les ventilations
- de déterminer les concentrations chimiques en différents endroits d'un réacteur, la corrosion, la séparation de deux phases (sable et eau par exemple)...
- permet à partir de la géométrie intérieure du circuit hydraulique de connaître avec précision: la répartition du débit dans les différents composants du



Bouchon automobile

- On décrit la circulation automobile par le nombre d'automobiles $n(x, t)$ par unité de longueur.
- Si la vitesse des automobiles est une constante v_0 alors $n(x, t)$ est la solution de l'équation d'advection:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v_0 \frac{\partial n}{\partial x} = 0.$$

Donc si la circulation à $t = 0$ est fluide le bouchon ne se forme pas.

- On affine le modèle en supposant que la vitesse est une fonction de la concentration n :

$$v = v_0 \left(1 - \frac{n}{n_{max}}\right) \text{ pour } 0 \leq n \leq n_{max}, \quad v = 0 \text{ pour } n \geq n_{max}$$

Equations stationnaires

- **Equation de Poisson**, $\rho(x, y)$ est la densité locale de charge

$$\begin{cases} \Delta V = -\rho(x, y) & x \in \Omega \\ V(x, y) = h(x, y) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

- **Système de Lamé**

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - (\mu + \lambda)\nabla(\operatorname{div} u) = f \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

- **Equation des plaques (modélisation du tremblement de terre)**

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f \\ u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Equations stationnaires

- Equation de Helmholtz

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u = 0 \\ u(t=0, x) = g(x) \\ u = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right.$$

L'équation de Helmholtz est une équation elliptique qui apparait lorsque l'on cherche des ondes d'Alembert, appelées " modes propres ". Pour que le problème mathématique soit bien posé, il faut spécifier une condition aux limites sur le bord du domaine.

- Apparition des solutions discrètes

Système de Lotka-Volterra

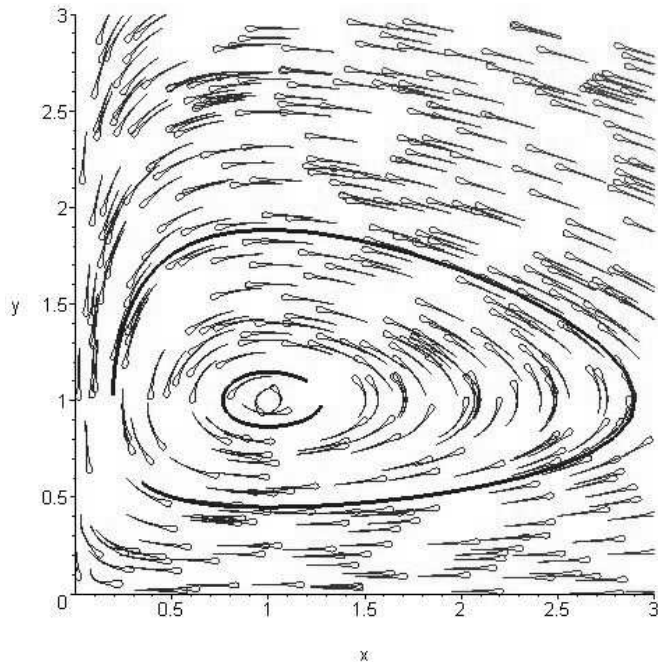
Systèmes des équations ordinaires.



Système de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) - b x(t) y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -\beta y(t) + c x(t) y(t) \end{cases}$$

$x(t)$ est la population des proies , $y(t)$ est la population des prédateurs.

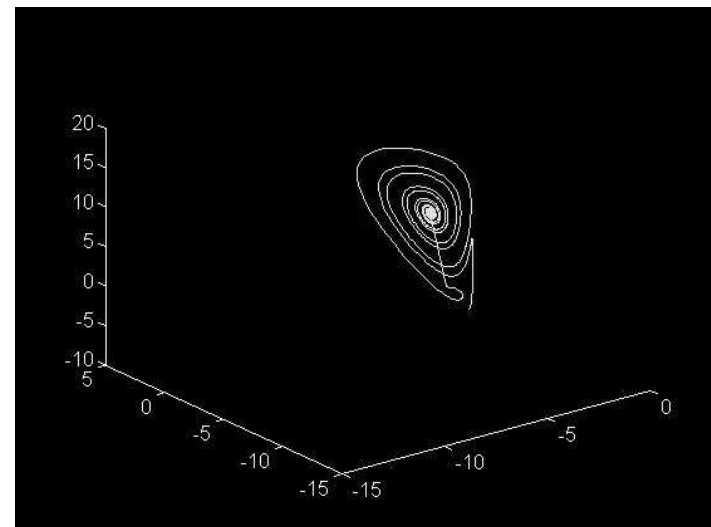


Attracteur de Lorentz

- Attracteur est une courbe vers laquelle un système dynamique évolue de façon irréversible.
- Attracteur est un constituant de base de la théorie du **CHAOS**,

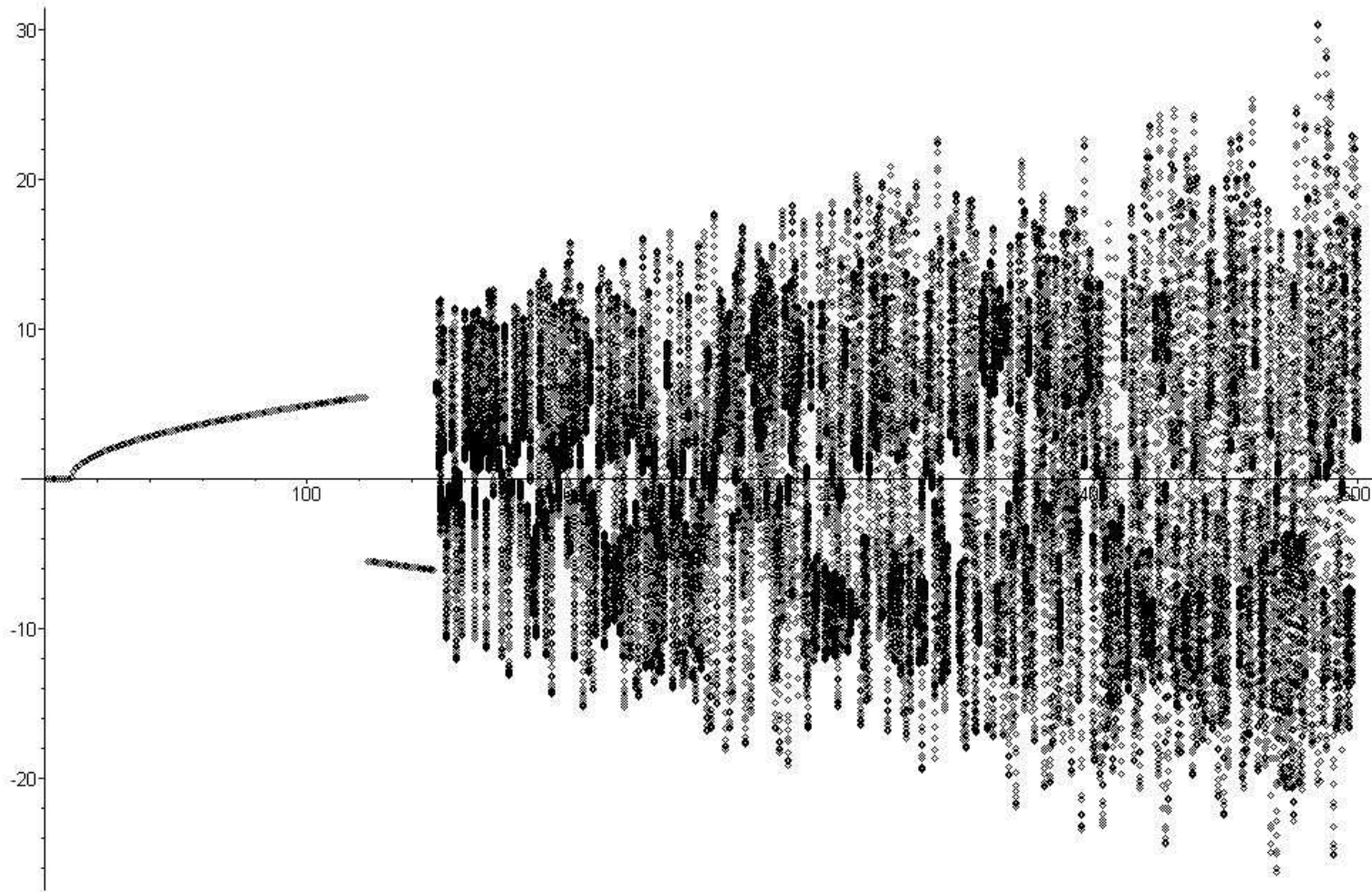
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = \sigma(y(t) - x(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = rx(t) - x(t)z(t) - y(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = x(t)y(t) - bz(t) \end{array} \right.$$

- Attracteurs expliquent aussi des cas de passage d'un état chaotique à un état ordonné.
- Connaissance des attracteurs permet de savoir ce qui va émerger du chaos.
- Applications: Plasmas, dans les calculs de confinement des tokamaks.



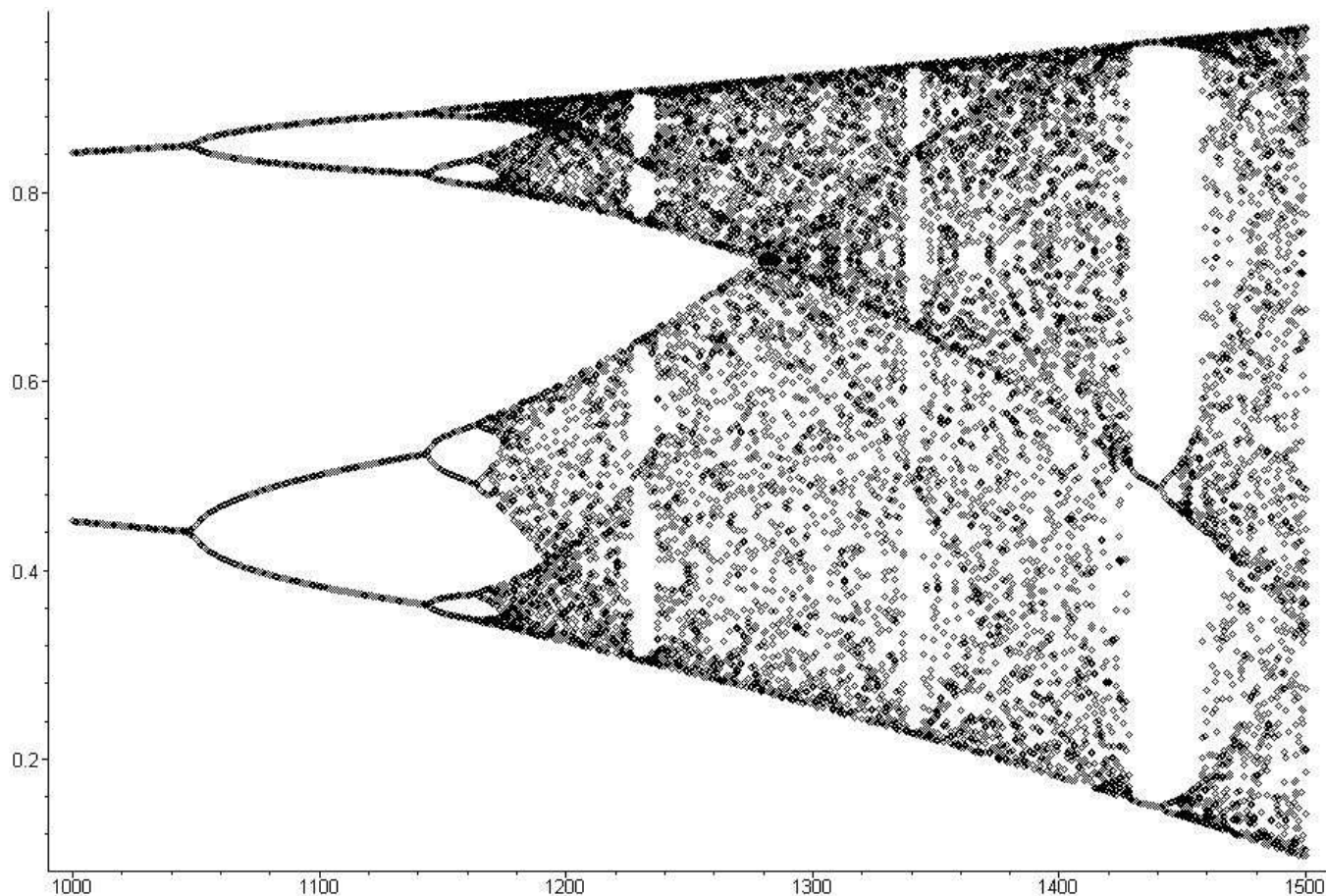
Attracteur de Lorentz

● Diagramme de bifurcation



Map logistique

- Equation $x_{n+1} = \mu \cdot x_n (1 - x_n)$ et la diagramme de bifurcation: $\mu \rightarrow x_{n+1}$, n sont grands



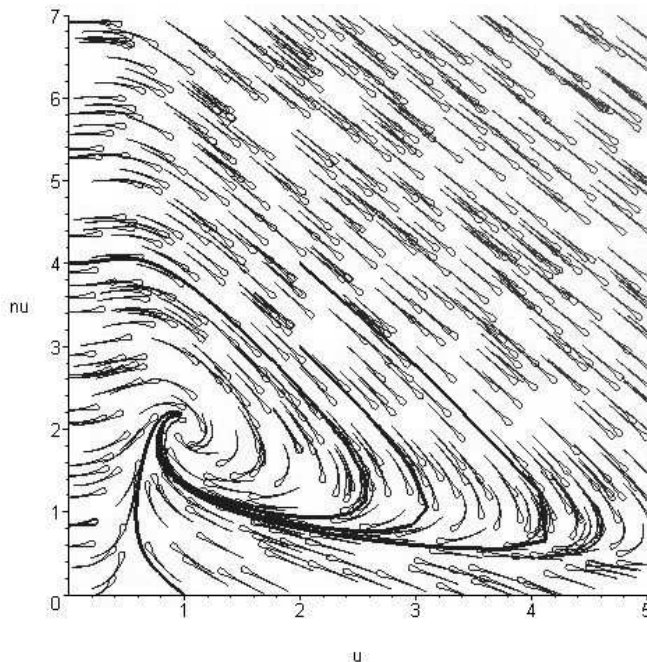
- Fractales

Brusselateur

Brusselateur

The brusselator est un modèle mathématique pour les oscillations chimiques. La dynamique des concentrations $x(t)$ et $y(t)$ est donnée par les équations:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 1 - (b+1)x(t) + ax^2(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - ax^2(t)y(t) \end{cases}$$



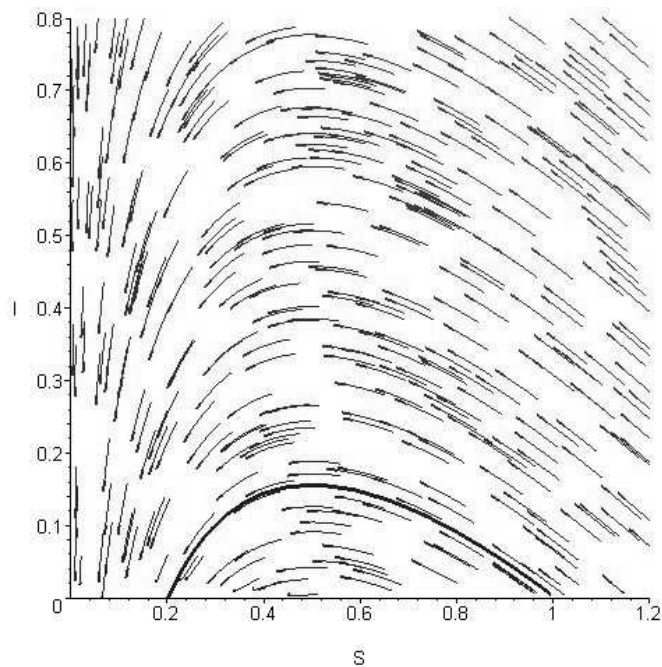
Modèle d'épidémie de McKendrick



Modèle d'épidémie de Kermack-McKendrick

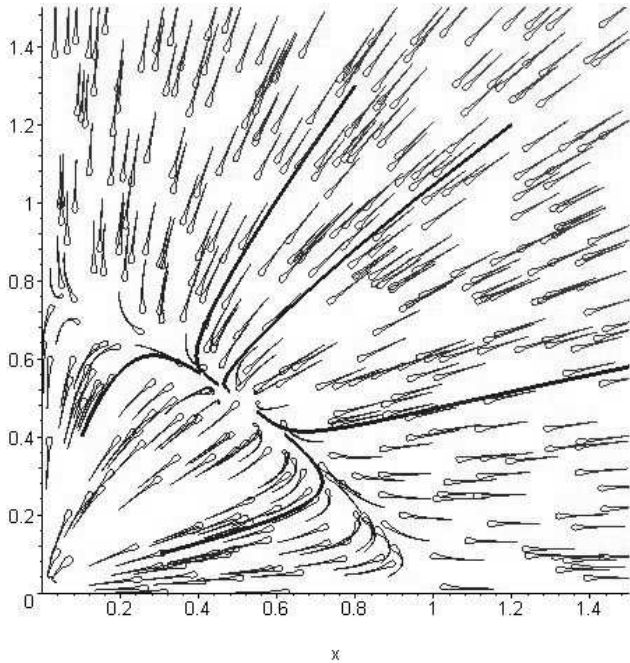
C'est un modèle SIR (Susceptible, Infected, Recovered): $S(t)$ est la proportion de la population susceptible à être infectée, $I(t)$ est la proportion infectée de la population.

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \end{cases}$$



Populations en competitions

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(a - \delta_1 x(t) - \alpha_1 y(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)(a - \delta_2 y(t) - \alpha_2 x(t)) \end{cases}$$



Oscillator Van der Pol

C'est un oscillator qui n'effectue que des petits oscillations.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \mu(1 - x^2) \frac{dx(t)}{dt} + x \end{array} \right.$$

