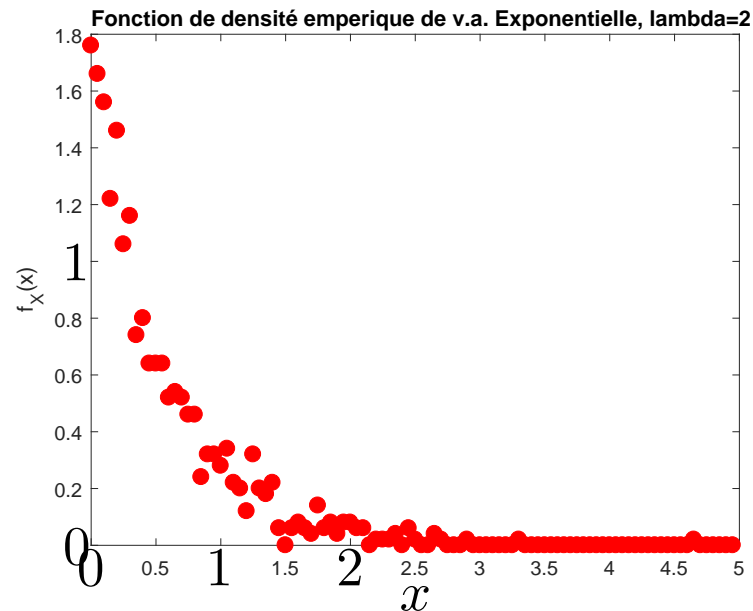


# Markov Chain Monte Carlo

*TP 2: Simulation de variables aléatoires continues. V.a. Exponentielle.*



# Théorie

- **Propriétés de fonction de répartition.**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de fonction de répartition

$$F_X(x) = P(X \leq x),$$

dont l'inverse généralisé (appelé quantile) est défini par

$$F^{-1}(u) = \{\inf x : F_X(x) \geq u\}.$$

- Alors

*$F^{-1}(U)$  suit la loi de  $X$ .*

Inversement, si  $F_X$  est continue,

- alors

*$F_X(X)$  suit la loi  $U([0, 1])$ .*

# Simulation de v.a. Exponentielle

- Nous souhaitons générer  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ .  
Dans ce cas,

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

alors que  $F_X^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$ . Donc on établie l'algorithme suivant:

- Algorithme 5 de simulation d'une seule variable aléatoire exponentielle
  - `function[X]=V_A_Exponentielle( $\lambda$ )`
    - Générer  $U$
    - Set  $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$
  - `endfunction`
- On applique l'Algorithme 5  $N_{mc}$  fois pour générer  $N_{mc}$  réalisations de v.a.  $X$

# Travail à faire pour v.a. Exponentielle

- Soient  $\lambda = 2$ ,  $N_{mc} = 10000$ 
  - Simuler la v.a. Exponentielle
  - Calculer l'espérance et la variance empiriques, les comparer avec les valeurs théoriques  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ ,  $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
  - Tracer sa fonction de repartition:  $[a, b] = [0, 5]$ ,  $\Delta = 0.05$ ,  $N_x = 100$
  - Tracer sa fonction de densité:  $[a, b] = [0, 5]$ ,  $\Delta = 0.5$ ,  $N_x = 100$
- Soient  $\lambda = 100$ ,  $N_{mc} = 10000$ 
  - Simuler la v.a. Exponentielle
  - Tracer sa fonction de repartition:  $[a, b] = [0, 0.07]$ ,  $\Delta = 0.0007$ ,  $N_x = 100$
  - Tracer sa fonction de densité:  $[a, b] = [0, 0.7]$ ,  $\Delta = 0.0007$ ,  $N_x = 100$

# Simulation de v.a. Gamma( $\alpha, \beta$ )

● Algorithme 6 de simulation d'une seule variable aléatoire  $Gamma(\alpha, \beta)$

- On définit la v.a. Gamma  $X$  par la somme de  $n = \alpha$  v.a.indépendantes Exponentielles  $Y_i$ :

$$X = \sum_{i=1}^n Y_i$$

- `function[X]=V_A_Gamma( $n, \beta$ )`
  - `Simuler  $Y = -\frac{1}{\beta} \ln(1 - U)$`
  - `$i = 1$`
  - `While  $i < n$             % on somme n v. a. exponentielles`
  - `$Y = Y - \frac{1}{\beta} \ln(1 - U)$`
  - `$i = i + 1$`
  - `end`
  - `Set  $X = Y$`
- `endfunction`

# Travail à faire pour v.a. Gamma

- Soient  $\alpha = 9, \beta = 2, N_{mc} = 10000$ 
  - Simuler la v.a. Gamma(  $\alpha = 9, \beta = 2$  )
  - Calculer l'espérance et la variance empiriques, les comparer avec les valeurs théoriques  $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$
  - Tracer sa fonction de repartition:  $[a, b] = [0, 15], \Delta = 1.5, N_x = 100$
  - Tracer sa fonction de densité:  $[a, b] = [0, 15], \Delta = 1.5, N_x = 100$
- Simuler la v.a. Gamma(  $\alpha = 2, \beta = 1/2$  )
- Calculer l'espérance et la variance empiriques, les comparer avec les valeurs théoriques
- Tracer sa fonction de repartition:  $[a, b] = [0, 15], \Delta = 1.5, N_x = 100$
- Tracer sa fonction de densité:  $[a, b] = [0, 15], \Delta = 1.5, N_x = 100$

# Simulation de loi de Pareto $(a, b)$

- $(a, b) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$

La fonction de densité est

$$f_X(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}} \mathbb{I}_{x \geq b}$$

- Calculer la fonction de repartition
- Inverser la fonction de repartition et simuler la variable de Pareto:
- Algorithme de simulation la v.a. de Pareto
  - `function[X]=V_A_Pareto(a,b)`
  - $X = \frac{b}{U^{\frac{1}{a}}}$
  - `endfunction`

# Travail à faire pour v.a. Pareto

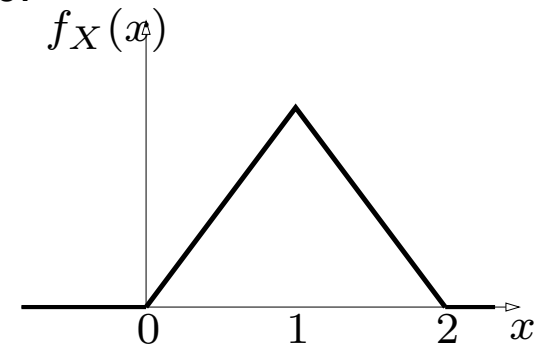
- Soient  $\alpha = 9, \beta = 2, N_{mc} = 10000$ 
  - Simuler la v.a. Pareto(  $a = 9, b = 2$  )
  - Calculer l'espérance et la variance empiriques, les comparer avec les valeurs théoriques  $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$
  - Tracer sa fonction de repartition:  $[a_0, b_0] = [2, 12], \Delta = 0.1, N_x = 100$
  - Tracer sa fonction de densité:  $[a_0, b_0] = [2, 12], \Delta = 0.1, N_x = 100$
- Simuler la v.a. Pareto(  $a = 2, b = 1$  )
- Calculer l'espérance et la variance empiriques, les comparer avec les valeurs théoriques
- Tracer sa fonction de repartition:  $[a_0, b_0] = [1, 11], \Delta = 0.1, N_x = 100$
- Tracer sa fonction de densité:  $[a_0, b_0] = [1, 11], \Delta = 0.1, N_x = 100$



# Simulation de v. a. "Triangulaire"

- V. a. continue "Triangulaire" est définie par sa fonction de densité:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



- Montrer que la fonction de repartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} x^2/2, & 0 < x \leq 1 \\ -(2-x)^2/2 + 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

- Justifier la simulation de cette v.a.

$$X = \begin{cases} \sqrt{2U}, & 0 \leq U < 1/2 \\ 2 - \sqrt{2(U-1)}, & 1/2 < U \leq 1 \end{cases}$$