

Feuille 2 : Programmation avec SAT

NB : Dans tous les exercices qui suivent, à chaque fois que l'on vous demande d'exprimer une contrainte, celle-ci doit être sous forme normale conjonctive.

Exercice 1 : Les chevaliers de la table ronde

Le roi Arthur doit réunir les chevaliers autour de la table ronde. Certains d'entre eux entretiennent une très forte rivalité. Arthur craint que si deux rivaux sont assis côte à côte la réunion ne tourne à l'affrontement. Il souhaite trouver un plan de table qui permette une réunion pacifique.

On suppose que C est l'ensemble des chevaliers et R est l'ensemble des paires de chevaliers en rivalité. La rivalité entre chevalier est symétrique, c'est-à-dire que si un chevalier, Gauvain par exemple, est en rivalité avec un autre, disons Yvain, alors Yvain est aussi en rivalité avec Gauvain.

Nous allons aider Arthur à établir un plan pour la table ronde. Pour cela utilisons une réduction à SAT pour plus tard profiter d'un solveur SAT.

Nous supposons qu'il y a n chevaliers et que les places autour de la table sont numérotées de 1 à n .

Q 1.1 Identifier les variables à utiliser pour modéliser le problème avec SAT.

Q 1.2 Exprimer la contrainte que chaque chevalier doit occuper au moins un siège.

Q 1.3 Exprimer la contrainte qu'un chevalier ne peut occuper au plus qu'un siège.

Q 1.4 Exprimer la contrainte que chaque place est occupée par au moins un chevalier.

Q 1.5 Exprimer la contrainte que deux chevaliers ne peuvent occuper la même place.

Q 1.6 La contrainte précédente est-elle nécessaire ? Pourquoi ?

Q 1.7 Exprimer la contrainte que deux rivaux ne peuvent pas être assis côte à côte. Faites attention au fait que la place numérotée 1 et celle numérotée n sont voisines.

Exercice 2 : Hidoku

Le jeu **hidoku** est un jeu qui consiste à remplir une grille carrée de côté n avec des nombres de 1 à n^2 . Voici un exemple de grille de côté 7 :

			45			
49						37
30						12
			16			
19						40
1						7
			4			

Résoudre une grille de côté n revient à la remplir en respectant les règles suivantes :

- Il faut que chaque case soit remplie par un nombre entre 1 et n^2 .
- Chaque nombre compris entre 1 et n^2 apparaît une et une seule fois dans la grille.

- Si un nombre k (tel que $0 < k < n^2$) occupe une case, alors le nombre $k + 1$ occupe une case voisine, c'est-à-dire l'une des cases qui partage un côté ou un coin avec la case de k , ou encore une case située au-dessus, au-dessous, à gauche, à droite ou en diagonale par rapport à la case occupée par k .
En respectant ces règles la solution de la grille présentée en exemple est :

48	47	46	45	34	35	36
49	31	44	33	14	13	37
30	28	32	43	15	38	12
29	18	27	16	42	11	39
19	2	17	26	10	41	40
1	20	3	24	25	9	7
21	22	23	4	5	6	8

Afin de montrer que les contraintes sont bien respectées par cette solution, nous avons relié pour tout nombre k la case le contenant à la case contenant le nombre $k + 1$.

Dans le but d'implémenter un solveur de **hidaku**, nous allons modéliser ce problème avec SAT. Cela revient à décrire pour une grille les contraintes que doivent respecter les solutions de cette grille en utilisant une formule de la logique propositionnelle sous forme normale conjonctive. Nous allons considérer une grille de côté $n \geq 1$.

Q 2.1 Quelles variables propositionnelles allez-vous utiliser pour modéliser ce problème. Précisez bien la signification de ces variables par rapport au problème.

Q 2.2 Donner une formule sous forme normale conjonctive qui modélise la contrainte que chaque case d'une solution est occupée par **au moins un** nombre compris entre 1 et n^2 .

Q 2.3 Donner une formule sous forme normale conjonctive qui modélise la contrainte que chaque case d'une solution est occupée par **au plus un** nombre compris entre 1 et n^2 .

Q 2.4 Donner une formule sous forme normale conjonctive qui modélise la contrainte que chaque nombre compris entre 1 et n^2 doit apparaître **au moins une fois** dans la solution.

Q 2.5 Donner une formule sous forme normale conjonctive qui modélise la contrainte que chaque nombre compris entre 1 et n^2 doit apparaître **au plus une fois** dans la solution.

Q 2.6 Il est possible de se passer de l'une des contraintes des questions 4.4 et 4.5. Expliquer pourquoi.

Q 2.7 Donner une formule sous forme normale conjonctive qui modélise la contrainte concernant les cases occupées par k et $k + 1$. Vous pouvez décomposer votre formule en étudiant les cas suivants :

1. La case occupée par k est un coin de la grille.
2. La case occupée par k est sur un bord de la grille (mais pas un coin).
3. La case occupée par k n'est ni un coin, ni sur un bord de la grille.

Q 2.8 Quelle contrainte ajouter pour trouver la solution d'une grille particulière ? Donner la contrainte correspondant à la grille donnée en exemple.